



T.C
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOMOJEN OLMAYAN SÜREKSİZ STURM-LIOUVİLLE
PROBLEMİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Lale Çavuşoğlu UZUN

OCAK

LALE ÇAVUŞOĞLU UZUN	MATEMATİK ANABİLİM DALI	OCAK 2023
----------------------------	--------------------------------	------------------

**HOMOJEN OLMAYAN SÜREKSİZ STURM-LIOUVİLE PROBLEMİNİN
ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ**

Lale Çavuşoğlu UZUN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2023

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Lale ÇAVUŞOĞLU UZUN tarafından hazırlanan “Homojen Olmayan Süreksiz Sturm-Liouville Probleminin Çözülebilirliği” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Başkan : Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Üye : Doç. Dr. Bülent Nafi Örnek

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Tahir COŞGUN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Tez Savunma Tarihi: 26/01/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- ✓ Tez içinde sunduğum verileri, bilgiler ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- ✓ Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

imza

Lale Çavuşoğlu UZUN

26/01/2023

HOMOJEN OLMAYAN SÜREKSİZ STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Lale Çavuşoğlu UZUN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2023

ÖZET

Bu tezde, süreksizlik noktasına sahip dolayısıyla iki aralıklı ve süreksizlik noktasında ayrıca geçiş şartları bulunduran bir Sturm-Liouville problemi Sobolev uzaylarında incelenecektir. Bu probleme uygun diferansiyel operatör kurulacak daha sonra bu diferansiyel operatörün Fredholm operatörü olma özelliği incelenecek ayrıca incelenen operatörün izomorfizm olma şartları araştırılacaktır.

Sayfa Adedi : 83

Anahtar Kelimeler : Sınır değer problemleri, Green Fonksiyonu, Sturm-Liouville Problemi, Fredholm Operatörü

Danışman : Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

SOLUBILITY OF THE DISCONTINUOUS STURM-LIOUVILLE PROBLEM
(M. Sc. Thesis)

Lale Çavuşoğlu UZUN

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
January 2023

ABSTRACT

In this thesis, a two interval Sturm-Liouville problem, which has a discontinuity point and also has transition conditions at the discontinuity point, will be examined in Sobolev spaces. A differential operator suitable for this problem will be established, the feature of this differential operator as a Fredholm operator will be examined, and the conditions for isomorphism of the examined operator will be investigated.

Number of pages : 83
Keywords : Boundary Value Problems, Green Function, The Sturm-Liouville Problems, Fredholm Operator
Supervisor : Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca tezimin konusunun belirlenmesinde, tezimin çalışma sürecinden bitirme sürecine kadar her türlü desteklerinden dolayı saygıdeğer danışman hocam sayın Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR'e sonsuz saygılarımı sunarım.

Bu süreçte her türlü yardım ve desteğini gördüğüm kıymetli hocam sayın Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR'e yardımlarından dolayı saygılarımı sunarım.

Ayrıca hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen aileme ve sevgili eşime de teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	vi
ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. FONKSİYON UZAYLARI.....	2
2.1. Ölçülebilir Uzaylar	2
2.2. Ölçülebilir Fonksiyonlar.....	5
2.2.1. Karakteristik fonksiyon.....	6
2.2.3. Basit fonksiyon	7
2.3. Lebesgue Ölçüsü	8
2.4. İntegrallenebilen Fonksiyonlar.....	11
2.4.1. Lebesgue integrali	12
2.4.2. Genel lebesgue integrali.....	15
2.5. Vektör Uzayları	17
2.5.1. Lineer uzaylar	17
2.5.2. Normlu uzaylar	19
2.5.3. Banach uzaylar	27
2.5.4. İç Çarpım uzayları.....	31
2.5.5. Hilbert uzayı.....	33
2.5.6.Sobolev uzayları.....	34

Sayfa

3. BAZI OPERATÖRLER VE ÖZELLİKLERİ	40
3.1. Kompakt Operatörler.....	40
3.2. İntegral Operatörü	41
3.3. Fredholm Operatörü	41
3.4. Kendine Eş Operatör	42
3.5. Simetrik Operatör	42
3.6. Pozitif Operatör	43
3.7. İzomorfizm	43
4. SINIR DEĞER PROBLEMLERİ	44
4.1. Sınır Değer Problemleri.....	44
4.2 Özdeğer Parametrelili Sınır Değer Problemleri.....	51
4.3 Sınır Değer Problemi ile Bu Probleme ait Eşlenik Problemin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları Arasındaki İlişkiler	56
5. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN GREEN FONKSİYON	58
5.1 Ters operatör.....	58
5.2 Lineer Diferansiyel Operatörün Tersinin Varlığı.....	58
5.3 Green Fonksiyonu Yardımı ile Bir Diferansiyel Operatörün Tersinin Bulunması	60
5.4 Eşlenik Operatörün Green Fonksiyonu	61
5.5 Spektral Parametrelili Homojen Olmayan Sınır Değer Probleminin İntegral Denklem Şekline Getirilmesi	64
6. STURM-LİOUVILLE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ.....	66
6.1 Regüler Sturm-Liouville Sınır Değer Probleminin Özellikleri	67
6.2 Regüler Sturm-Liouville Sınır Değer Probleminin Özfonksiyonlarının Özellikleri	68
6.3 Regüler Sturm-Liouville Probleminin Green Fonksiyonu	70

Sayfa

7. SÜREKSİZ KATSAYILI VE GEÇİŞ ŞARTI BULUNDURAN BİR STURM-LIOUVİLLE PROBLEMİNİN FREDHOLM OPERATÖRÜ OLMA ÖZELLİĞİ.....	73
---	----

7.1. Homojen Olmayan Geçiş Şartları Bulunduran ve Homojen Denkleme Sahip Sınır Değer Problemi.....	73
--	----

KAYNAKLAR	80
-----------------	----

ÖZGEÇMİŞ	83
----------------	----



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	karmaşık sayılar
$\mathcal{P}(X)$	kuvvet kümesi
$C_0^\infty(\Omega)$	test fonksiyonları uzayı
$\mathcal{D}'(\Omega)$	genelleştirilmiş fonksiyonlar uzayı
$W_p^m(\Omega)$	sobolev uzayı
$(X, \mathcal{F})$	ölçülebilir uzay
$(X, \mathcal{F}, \mu)$	ölçü uzayı
l^∞	sınırlı kompleks dizilerin uzayı
l^2	dizi uzayı
l^p	dizi uzayı
c	yakınsak skaler dizilerin kümesi
c_0	sıfıra yakınsak dizilerin kümesi
$L(f)$	lebesgue integrali
$C_s(X, F)$	skaler değerli ve sınırlı fonksiyonların kümesi
$L_1^{loc}(\Omega)$	yerel olarak integre edilebilir fonksiyonlar uzayı

1. GİRİŞ

Bu tezde, tanım aralığının bir noktasında süreksiz katsayılara sahip olan bir sınır değer problemi göz önüne alınmış ve problemin spektral özellikleri araştırılmıştır. Problemde adı geçen literatüre ait kavramlar mümkün olduğu kadarıyla, ilk bölümlerde tanıtılmaya ve anlatılmaya çalışılmıştır. Bu kavramlar temel analiz kavramları, diferensiyel denklem kavramları, bazı analiz uzayları ve ölçü uzaylarıdır.

Sınır değer problemleri üzerine, literatürde oldukça fazla sayıda makale ve kitap çalışmaları mevcuttur. Referanslarda adı geçen yazarlar ve özellikle S. Yakubov, Ya. Yakubov ve çalışma arkadaşları, (1999) tarafından üretilen çok sayıda sınır değer problemleri ile ilgili araştırmaları, makaleleri ve kitapları görmek mümkündür. S. Yakubov ve Ya. Yakubov (1999) çalışmalarında daha çok sürekli katsayılı problemler çalışılmıştır. Son yıllarda Muhtaroglu, Kandemir (2002), Aydemir (2014) ve çalışma arkadaşları, çalışmalarında daha çok süreksiz katsayılı problemler araştırılmıştır. Bu yazarlar, sözü edilen sınır değer problemlerinin ürettiği diferensiyel operatörlerin izomorfizmi ve Fredholm operatörü olma gibi spektral özellikleri üzerine çok önemli çalışmalar ortaya koymuşlardır. Biz bu tez çalışmasında her iki tip çalışmaların matematiksel ve teknik özellikleri dikkate alınarak yeni sonuçlar elde etmeye gayret edilmiştir.

Bu tezde göz önüne alınan süreksiz katsayılı sınır değer problemine ait gerekli literatür araştırması ve çalışması yaptıktan sonra, bu problemin Sobolev uzaylarının direkt toplamında ürettiği diferensiyel operatörün bazı özelliklerinin araştırılması üzerinde durulmuştur.

2. FONKSİYON UZAYLARI

2.1. Ölçülebilir Uzaylar

2.1.1. Tanım Bir X kümesinin $\mathcal{P}(X)$ kuvvet kümesi verilmiş olsun. Bir $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ alt ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu $\mathcal{A}$ ailesine X üzerinde cebir adı verilir.

- a. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- b. $A \in \mathcal{A}$ için $A' = X - A \in \mathcal{A}$.
- c. $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ için $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

Burada (c) özelliği yerine

- d. $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ için $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$,

özelliği sağlanıyorsa $\mathcal{A}$ ailesine X uzayı üzerinde σ -cebir denir.

2.1.2. Tanım $\mathcal{T}$, X in bütün açık alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ topolojik bir uzay olmak üzere $\mathcal{T}$ tarafından üretilen bir σ -cebre, $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı üzerinde Borel σ -cebiri denir ve

$$\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, \mathcal{T}) := \sigma(\mathcal{T})$$

şeklinde gösterilir. Borel σ -cebiri nin elemanlarına Borel kümesi adı verilir.

Borel σ -cebiri, X in bütün açık alt kümelerini içeren en küçük σ -cebir dir.

2.1.3. Tanım $\mathcal{F}$ ailesi bir X kümesi üzerinde bir σ -cebir olsun. $(X, \mathcal{F})$ ikilisine ölçülebilir uzay denir ve $\mathcal{F}$ ailesinde bulunan her bir kümeye de ölçülebilir küme adı verilir.

2.1.4. Tanım X herhangi bir küme olmak üzere $\mathcal{P}(X)$, X in kuvvet kümesi olsun.

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

şeklinde verilen μ^* fonksiyonu için

- 1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- 2) $A \subseteq K \subseteq X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(K)$,
- 3) X in alt kümelerinin bütün (A_n) dizileri için

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

özellikleri sağlanıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir dış ölçü adı verilir.

2.1.5. Tanım $(X, \mathcal{F})$ bir ölçülebilir uzay olsun.

$$\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$$

şeklinde tanımlanan μ fonksiyonu için

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$,
- 2) $\mathcal{F}$ ailesinin ikişer ikişer ayrık bir (A_n) dizisi için

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

özellikleri sağlanıyorsa μ fonksiyonuna $\mathcal{F}$ üzerinde (veya X üzerinde) bir σ -toplamsal ölçü (veya pozitif ölçü) ve $A \in \mathcal{F}$ olmak üzere $\mu(A)$ sayısına da A kümesinin ölçüsü adı verilir. O halde ölçü, negatif olmayan bir reel sayıdır veya sonsuzdur $(+\infty)$.

2.1.6. Tanım $(X, \mathcal{F})$ bir ölçülebilir uzay olsun.

$$\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$$

fonksiyonu

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$,
- 2) İkişer ikişer ayrık $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) kümeleri için

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^n A_n\right) = \sum_{n=1}^n \mu(A_n)$$

özelliklerini sağlıyorsa μ fonksiyonuna $\mathcal{F}$ ailesi üzerinde sonlu toplamsal ölçü adı verilir.

2.1.7. Tanım μ fonksiyonu $\mathcal{F}$ ailesi üzerinde ölçü olmak üzere $(X, \mathcal{F}, \mu)$ üçlüsüne bir ölçü uzayı denir.

2.1.8. Tanım $(X, \mathcal{F}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

- 1) $\mu(X) < \infty$ ise μ ye sonlu ölçü denir. O halde μ sonlu ise $\mathcal{F}$ deki bütün kümeler sonlu ölçümlüdür. Daha genel olarak, $X \in \mathcal{F}$ kümesi sonlu ölçümlü ise $\mathcal{F}$ deki bütün kümeler sonlu ölçümlüdür.

- 2) Yukarıda verilen σ -toplamsal ölçü kavramı bir ölçünün, sonlu ölçüden ayırt edilmesi bakımından ölçü yerine kullanılabilen bir kavramdır.

Eğer, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ ve her $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\mu(A_k) < \infty$ ise μ ye σ -sonlu ölçü adı verilir.

- 3) $A \in \mathcal{F}$ kümesi için $\mu(A) < \infty$ olmak üzere, $B \subseteq A$ ve $0 < \mu(B) < \infty$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{F}$ kümesi varsa μ ye yarı sonlu ölçü denir.

- 4) $A \in \mathcal{F}$ kümesi için $\mu(A) < \infty$ ise A kümesine sonlu μ -ölçümlü küme denir.

5) $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ve her $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\mu(A_k) < \infty$ olacak şekilde $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ kümeleri varsa $A \in \mathcal{F}$ kümesine σ -sonlu- μ ölçümlü küme denir.

2.2. Ölçülebilir Fonksiyonlar

2.2.1. Tanım (X, A) ölçülebilir uzayı üzerinde $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ genişletilmiş reel değerli fonksiyonu her $a \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((a, \infty]) \in A$ şartını sağlıyorsa, yani her bir $a \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X : a < f(x) \leq \infty\} \in A$ bulunuyorsa f fonksiyonuna A -ölçülebilir fonksiyon adı verilir.

2.2.1. Teorem $D, \mathbb{R}$ nin herhangi bir yoğun alt kümesi olsun. Bir $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonu A ölçülebilir bir fonksiyonsa aşağıdaki koşullar birbirine eşdeğerdir:

- i. Her $a \in D$ için $f^{-1}((a, \infty]) \in A$.
- ii. Her $a \in D$ için $f^{-1}([a, \infty]) \in A$.
- iii. Her $a \in D$ için $f^{-1}([-\infty, a)) \in A$.
- iv. Her $a \in D$ için $f^{-1}([-\infty, a]) \in A$.

2.2.2. Teorem f ölçülebilirse her $a \in \mathbb{R}$ için $f + a$ ve af de ölçülebilir. m bir pozitif tamsayı ise $[f(x)]^m$ ve α bir pozitif reel sayı ise $|f(x)|^\alpha$ ölçülebilir.

2.2.3. Teorem f ve g fonksiyonları ölçülebildiği takdirde

$$\{x \in X : f(x) > g(x)\}, \{x \in X : f(x) \geq g(x)\}, \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

kümeleri ölçülebilirdir ve $f + g$, fg ve $g \neq 0$ ise f/g fonksiyonları da ölçülebilirdir.

2.2.4. Teorem $\{f_n\}$ bir ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. $\inf_n f_n, \sup_n f_n, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ fonksiyonları da ölçülebilir. Özel olarak $f_n \rightarrow f$ limiti varsa f fonksiyonu da ölçülebilir.

2.2.5. Teorem $\{f_n\}, (X, A)$ ölçülebilir uzayından $\overline{\mathbb{R}}$ ye ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. $x \in X$ için,

$$g_1(x) := \sup \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}, \quad g_2(x) := \inf \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\},$$

$$g_3(x) := \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad g_4(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

dir. g_1, g_2, g_3 ve g_4 fonksiyonları ölçülebilirdir.

2.2.6. Teorem Kompleks değerli bir f fonksiyonunun reel ve sanal kısımları ölçülebilirse bu fonksiyon da ölçülebilir.

2.2.7. Teorem X bir topolojik uzaysa $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğu takdirde ölçülebilir.

2.2.1. Karakteristik fonksiyon

2.2.1.1. Tanım Bir $A \subseteq X$ kümesinin karakteristik fonksiyonu olan $\mathcal{X}_A(x)$ aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (x \in A'). \quad (\text{Şuhubi, 2021})$$

2.2.1.1. Teorem A ve B, X in alt kümeleri olsun. Bu durumda

a) $\mathcal{X}_\emptyset = 0$ ve $\mathcal{X}_X = 1$

b) $A \subset B$ ise $\mathcal{X}_A \leq \mathcal{X}_B$

$$c) \quad \mathcal{X}_{A \cup B} = \mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B - \mathcal{X}_{A \cap B}$$

$$d) \quad \mathcal{X}_{A \cap B} = \mathcal{X}_A \cdot \mathcal{X}_B$$

$$e) \quad \mathcal{X}_{A^c} = 1 - \mathcal{X}_A$$

$$f) \quad \{A_n\}, \mathcal{X} \text{ 'in alt kümelerinin ayrık dizisi ve } A = \bigcup_n A_n \text{ ise } \mathcal{X}_A = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_{A_n}$$

$$g) \quad \mathcal{X}_{A-B} = \mathcal{X}_A - \mathcal{X}_{A \cap B}. \text{ (Tunç, 2017)}$$

Bir $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyonun ölçülebilirliğini $\mathcal{X}$ kümesinin ölçülebilir olması koşuluyla tanımlarız. Eğer $\mathcal{X}$ ölçülebilir değil ise f de ölçülemez. Fakat bu, $\mathcal{X}$ kümesi ölçülebilir ise f fonksiyonunun ölçülebilir olduğu anlamına gelmez.

2.2.1.2. Teorem $\mathcal{X}$ ölçülebilir bir küme olsun. Bu durumda $A \subset \mathcal{X}$ kümesi ve $\mathcal{X}_A$ karakteristik fonksiyonu eş zamanlı olarak ölçülebilir ya da ölçülemezdir.

Bu teorem tanım kümesi ölçülebilir olsa bile, ölçülemeyen kümenin karakteristik fonksiyonunun ölçülemez olduğunu ifade eder.

2.2.3. Basit fonksiyon

Bir fonksiyon, her biri sonlu olan sonlu sayıda değer alabiliyorsa basit fonksiyon adını alır.

2.2.3.1. Tanım $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir $s: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, yalnız sonlu sayıda değerler alıyorsa basit fonksiyon denir.

$\mathcal{R}(s) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \subset \mathbb{R}$ ise $A_i = \{x \in \mathcal{X} : s(x) = \sigma_i\} \subset \mathcal{X}, i = 1, \dots, n$ kümelerini tanımlayalım. $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \dots \neq \sigma_n$ olması açıktır. O halde basit fonksiyon

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \mathcal{X}_{A_i}(x)$$

biçiminde ifade edilebilir.

2.2.3.2. Teorem $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- 1) Her $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ olacak şekilde X den $\mathbb{R}$ ye basit fonksiyonların bir $\{f_n\}$ dizisi vardır.
- 2) Eğer f fonksiyonu negatif değilse, dizi tüm $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$ şeklinde seçilebilir.
- 3) Eğer f fonksiyonu sınırlıysa, dizi X üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsar.
- 4) (X, A) bir ölçülebilir uzay ve f fonksiyonu da bu uzay üzerinde ölçülebilirse o zaman her bir $f_n (n \in \mathbb{N})$ ölçülebilir olarak seçilebilir.

2.3. Lebesgue Ölçüsü

2.3.1. Tanım A kümesi $\mathcal{M} = \{A \subset X : \mu(A) + \mu(A^c) = 1\} \subset \mathcal{P}(X)$

kuralına göre $\mu(A) = 1 - \mu(A^c)$ bağıntısını gerçekleştiriyorsa $\mu(A)$ bu kümenin Lebesgue ölçümü adını alır ve bu özelliği sağlayan tüm A alt kümeleri Lebesgue ölçülebilir kümeler sınıfını oluşturur.

2.3.2. Tanım Bir X kümesi verilsin. Her bir $A \subset X$ kümesi için

$$m^*(A) = m^*(A \cap X) + m^*(A \cap X^c) \quad (1)$$

eşitliği sağlanıyorsa X kümesine Lebesgue anlamında ölçülebilirdir denir. (Tunç, 2017)

Ölçülebilirliğin tanımı, (sınırlı ya da sınırsız) ölçülebilir kümelerin (ölçülebilir olsun ya da olmasın) her kümeyi dış ölçüye bağlı olarak toplamsal olan iki parçaya ayırabileceğini söyler.

$A = (A \cap X) \cup (A \cap X^c)$ ve m^* alt toplamsal olduğundan

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap X) + m^*(A \cap X^c)$$

eşitsizliği her zaman sağlanır. Dolayısıyla X kümesinin ölçülebilir olduğunu göstermek için her bir A kümesi için

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap X) + m^*(A \cap X^c) \quad (2)$$

eşitsizliğini göstermek yeterli olacaktır. (Tunç, 2017)

(2) eşitsizliği, pratikte X kümesinin ölçülebilir olduğunu göstermek için kullanılır. A kümesine ise ölçülebilirliği test ettiği için test kümesi adı verilir.

H. Lebesgue, kendi çalışmasında ölçülebilir kümeleri tanımlarken yukarıdaki tanımı kullanmamıştır, onun yerine, bir sınırlı $[a, b]$ aralığı içinde yer alan X kümesini dikkate aldı ve ilk önce X kümesinin iç ölçüsünü

$$m_*(X) = b - a - m^*(X^c)$$

olarak tanımladı. Daha sonra X kümesinin ölçülebilir olması için

$$m_*(X) = m^*(X)$$

olması gerektiğini söyledi. Bir başka deyişle

$$m^*(X) = b - a - m^*(X^c) \quad (3)$$

ise X ölçülebilirdir. Eğer $A = [a, b]$ alınırsa (3) eşitliği, (1) ile aynı olan

$$m^*(A) = m^*(A \cap X) + m^*(A \cap X^c)$$

eşitsizliğine dönüşür.

2.3.1. *Örnek* $X = [0,1]$ olsun. $\mu(X) = 1$ dir. $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subset X$ bir sayılabilir alt kümedir. $\epsilon > 0$ keyfi bir sayı olmak üzere a_k noktasını $\epsilon/2^k$ uzunluğunda $|x - a_k| < \epsilon/2^{k+1}$ ile belirlenen I_k açık aralığına yerleştirelim. $A \subset \bigcup_k I_k$ olduğu açıktır. Şimdi

$$\mu\left(\bigcup_k I_k\right) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2^2} + \dots + \frac{\epsilon}{2^k} + \dots \leq \epsilon$$

yazabiliriz. Burada A kümesinin sonlu olma olasılığını da dikkate aldık. ϵ sayılarının infimumu 0 olduğuna göre A nın dış ölçümü $\mu(A) = 0$ bulunur. A kümesinin dış ölçümü sıfır olduğundan bu küme ölçülebilir ve Lebesgue ölçümü sıfırdır. $A' = [0,1] - A$ kümesinin ölçümü ise 1 dir. Bu durumda $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilir olduğundan $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ çıkar ve irrasyonel sayıların Lebesgue ölçümü $\mu([0,1] - \mathbb{Q}) = 1$ bulunur. (Şuhubi, 2021)

2.3.2. *Örnek* Bir $x \in \mathbb{R}^n$ üyesini $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ ile gösterirsek $a, b \in \mathbb{R}^n$ için aralık adını vereceğimiz bir $(a, b] \subset \mathbb{R}^n$ kümesini $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$ şeklinde tanımlayalım. Böyle ayırık kümelerin sonlu birleşimleri bir cebir oluşturur ve bir aralığın ölçümü n boyutlu dikdörtgenler prizmasının hacmi olarak

$$m((a, b]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

biçiminde tanımlanabilir. Bu cebirin bir üyesinin ölçümü bu üyeyi oluşturan ayırık aralıkların hacimlerinin toplamı olur. Bu ölçümden, bir σ -cebiri üzerinde bir dış ölçüm ve $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ kuvvet kümesinin bu dış ölçümü ölçüm kabul eden ve σ -cebiri olan bir alt sınıfı reel sayılardakine benzer şekilde gösterilebilir. Bu sınıfın üyeleri $\mathbb{R}^n$ de Lebesgue ölçülebilir kümeler ve ölçümleri de Lebesgue ölçümü adını alır.

Bir (X, A, μ) ölçüm uzayı verildiğinde bir özellik ölçümü sıfır olan bir A kümesi dışındaki her $x \in X$ için geçerli ise hemen hemen her yerde (h.h.h.y.) sağlanan bir özellik adını alır. Örneğin $[0,1]$ aralığındaki rasyonel sayıların ölçümü sıfır olduğuna göre bu aralıktaki reel sayılar kümesi h.h.h.y. irrasyonel sayılar kümesine eşittir. (Şuhubi, 2021)

2.3.1. Teorem (Lebesgue Teoremi) $\{f_i : X \rightarrow \mathbb{R}^+\}$, $i = 1, 2, \dots$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun.

$$\int_X \sum_{i=1}^{\infty} f_i d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X f_i d\mu$$

özdeşliği geçerlidir.

2.4. İntegrallenebilen Fonksiyonlar

Bu kesimdeki bilgiler (Balcı, 2012) kaynağından faydalanılarak yazılmıştır.

2.4.1. Tanım (X, A, μ) bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, A)$ olmak üzere $\int_X f^+ d\mu$

$\left(f^+ = \frac{f + |f|}{2}\right)$ ve $\int_X f^- d\mu$ $\left(f^- = -\frac{f - |f|}{2}\right)$ integralleri sonlu ise f fonksiyonuna X uzayı

üzerinde μ ye göre integrallenebilirdir denir. Dolayısıyla bu integral

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

reel sayıdır. Eğer $A \in A$ ise f nin μ ye göre A üzerindeki integrali,

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$$

biçiminde tanımlanır. $L = L(X, A, \mu)$ biçiminde ifade edilir. (Balcı, 2012)

2.4.1. Lebesgue integrali

2.4.1.1. Tanım (X, A, μ) bir ölçüm uzayı olsun. X in hiçbir boş olmayan, birbirlerinden ayrık ve birleşimleri söz konusu kümeye eşit olacak biçimde bir altkümeler takımı $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$ olacak şekilde $\pi = \{A_1, \dots, A_n\} \subset A$ sonlu alt sınıfı olsun. Böyle alt sınıflara ayrışım denir. X 'in tüm ayrışım kümesini $\mathcal{R}$ şeklinde gösterelim. $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ negatif olmayan herhangi bir fonksiyon olsun.

$$m_i = \inf \{ f(x) : x \in A_i \},$$

$$M_i = \sup \{ f(x) : x \in A_i \} \quad ; \quad 1 \leq i \leq n$$

olmak üzere

$$s_\pi = \sum_{i=1}^n m_i \mu(A_i),$$

$$S_\pi = \sum_{i=1}^n M_i \mu(A_i)$$

toplamlarını yazalım.

$$\sup \{ s_\pi : \pi \in \mathcal{R} \} = \inf \{ S_\pi : \pi \in \mathcal{R} \}$$

şartı sağlanırsa

$$\sigma_\pi = \sum_{i=1}^n f(x_i) \mu(A_i), \quad x_i \in A_i$$

toplamının belirli bir limiti vardır ve

$$\begin{aligned}
L(f) &= \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{i=1}^{n(\pi)} \inf \{ f(x) : x \in A_i \} \mu(A_i) \\
&= \inf_{\pi \in \Pi} \sum_{i=1}^{n(\pi)} \sup \{ f(x) : x \in A_i \} \mu(A_i)
\end{aligned}$$

sayısı tanımlı olur. $\{f(x) : x \in A_i\}$ kümesi boşsa $\inf \{\emptyset\} = 0$ alıyoruz. f herhangi bir reel değerli fonksiyonsa $f = f^+ - f^-$, $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$ yazarsak en azından $L(f^+)$ ve $L(f^-)$ sayılarından biri sonlu olduğu zaman $L(f) = L(f^+) - L(f^-)$ biçiminde tanımlayabiliriz. Var olduğu taktirde $L(f)$ sayısı f fonksiyonunun Lebesgue integrali adını alır ve

$$L(f) = \int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

şeklinde ifade edilir.

2.4.1.1. Lemma X_i 'ler sonlu ölçülü ayırık kümeler olmak üzere ve $\gamma = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{X_i}$ olsun. Bu durumda

$$\int_X \gamma = \sum_{i=1}^n a_i \mu(X_i).$$

2.4.1.2. Tanım X bir ölçülebilir küme, $m(X) < \infty$ ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir sınırlı fonksiyon olsun.

$$\inf_{\gamma \geq f} \int_X \gamma \text{ ve } \sup_{\mathcal{G} \leq f} \int_X \mathcal{G}$$

Burada γ ve $\mathcal{G}$, X üzerinde tanımlı basit fonksiyonlardır. Bunlara sırasıyla üst Lebesgue integrali ve alt Lebesgue integrali denir. Üst Lebesgue integrali $\mathcal{L} \int_X f(x) dx$, alt Lebesgue integrali ise $\mathcal{L} \int_X f(x) dx$ şeklindedir.

2.4.1.1. Teorem $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir basit fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L} \int_{\bar{X}} f(x) dx = \int_X f = \mathcal{L} \int_X f(x) dx .$$

2.4.1.3. Tanım Sonlu ölçülü bir X kümesi üzerinde tanımlı bir f sınırlı fonksiyonu için

$$\mathcal{L} \int_X f(x) dx = \mathcal{L} \int_{\bar{X}} f(x) dx$$

ise f 'ye X üzerinde Lebesgue integrallenebilir denir. Bu durumda f fonksiyonunun Lebesgue integrali $\mathcal{L} \int_X f(x) dx$ ile gösterilir.

2.4.1.2. Teorem Sonlu ölçülü bir ölçüye sahip olan X kümesi üzerinde tanımlı ve sınırlı f fonksiyonunun Lebesgue anlamında integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonun ölçülebilir olmasıdır.

2.4.1.3. Teorem (Lebesgue Monoton Yakınsaklık Teoremi) (X, A, μ) bir ölçüm uzayı olsun.

$\{f_n\}$, X üzerinde ölçülebilir fonksiyonların dizisi olsun ve

1. Her $x \in X$ için

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty$$

yani monoton artan ve

2. Her $x \in X$ için $n \rightarrow \infty$ iken $f_n(x) \rightarrow f(x)$ gerçeklensin. O halde f ölçülebilir ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\int_X f_n \rightarrow \int_X f$$

dir. Bazen bu teorem Beppo Levi Teoremi olarak da adlandırılır.

2.4.1.4. Teorem (Lebesgue Sınırlı Yakınsaklık Teoremi) (X, A, μ) ölçü uzayı verilsin.

X de (kompleks) ölçülebilir fonksiyonların dizisi $\{f_n\}$ olmak üzere ve bütün $x \in X$ için

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

bulunsun. Eğer

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad (n=1, 2, 3, \dots; x \in X)$$

olduğu takdirde bir $g \in L^1(X)$ integrallenebilen fonksiyonu bulunuyorsa bu halde $f \in L^1(X)$ olur ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \text{ dır.}$$

2.4.2. Genel lebesgue integrali

2.4.2.1. Teorem f , X üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere f 'nin X üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $|f|$ 'nin X üzerinde integrallenebilir olmasıdır.

2.4.2.2. Teorem f , X üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f| \leq g$ olacak şekilde bir g integrallenebilir fonksiyonu varsa f , X üzerinde integrallenebilirdir.

2.4.2.3. Teorem f ve g fonksiyonları X üzerinde integrallenebilir olsun. Bu durumda

1) cf ($c \in \mathbb{R}$) fonksiyonu X üzerinde integrallenebilir ve

$$\int_X cf = c \int_X f.$$

2) $f + g$ fonksiyonu X üzerinde integrallenebilir ve

$$\int_X f + g = \int_X f + \int_X g .$$

3) Hemen hemen her yerde $f \leq g$ ise $\int_X f \leq \int_X g$.

4) A ve B , X nin ayrık alt kümeleri ise

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f .$$

2.4.2.4. Teorem (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi) g , X üzerinde integrallenebilir fonksiyon $\{f_n\}$, X üzerinde $|f_n| \leq g$ koşulunu sağlayan ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer hemen hemen her yerde $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ ise $\int_X f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n$.

2.4.2.1. Sonuç $\{u_n\}$, X üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar dizisi olsun, öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, X üzerinde hemen hemen her yerde yakınsak olsun. g , X üzerinde integrallenebilir fonksiyon ve her bir n için X de $\left| \sum_{i=1}^n u_i \right| \leq g$ olsun. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, X üzerinde integrallenebilir ve

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X u_n .$$

2.4.2.5. Teorem $\{g_n\}$, bir g integrallenebilir fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsak olan integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi ve $\{f_n\}$, f 'ye hemen hemen her yerde yakınsak olan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n| \leq |g_n|$ ve $\int g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n$ ise $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.

2.4.2.2. Sonuç $\{f_n\}$ integrallenebilir fonksiyonlar dizisi ve f integrallenebilir olmak üzere hemen hemen her yerde $f_n \rightarrow f$ olsun. Bu durumda

$$\int_X |f_n - f| \rightarrow 0$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\int_X |f_n| \rightarrow \int_X |f|.$$

2.5. Vektör Uzayları

2.5.1. Lineer uzaylar

Bu kesimdeki bilgiler (Bayraktar, 2017) kaynağından faydalanılarak yazılmıştır.

2.5.1.1. Tanım $X \neq \emptyset$ ve $F, \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun. Aşağıda iki grupta verilmiş koşullar gerçekleşiyorsa X e F de vektör uzayı (veya lineer uzay) denir.

1. $(X, +)$ işlemine göre bir değişmeli gruptur.

G1 Her $m, n \in X$ için $m + n \in X$. (toplamaya göre kapalılık özelliği)

G2 Her $m, n, s \in X$ için $m + (n + s) = (m + n) + s$. (toplamanın birleşme özelliği)

G3 Her $m \in X$ için $m + 0 = 0 + m = m$ olacak şekilde $0 \in X$ vardır. (toplamaya göre sıfır elemanının varlığı)

G4 Her $m \in X$ için $m + (-m) = (-m) + m = 0$ olacak şekilde $-m \in X$.
(toplamaya göre ters elemanın varlığı)

G5 Her $m, n \in X$ için $m + n = n + m$. (toplamaya göre değişme özelliği)

2. $m, n \in X$ ve $\delta, \gamma \in F$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır:

$$X1 \quad \delta.m \in X. \text{ (skalerle çarpmaya göre kapalılık).}$$

$$X2 \quad \delta.(m+n) = \delta.m + \delta.n \text{ (toplamaya göre dağılma özelliği).}$$

$$X3 \quad (\delta + \gamma).m = \delta.m + \gamma.m \text{ (toplamaya göre dağılma özelliği).}$$

$$X4 \quad (\delta\gamma).m = \delta.(\gamma.m).$$

$$X5 \quad 1.m = m \text{ (1, } F \text{ nin birim elemanıdır, skalerle çarpma için birim eleman).}$$

Vektör uzayı (Lineer uzay), X kümesi ve 1. ve 2. Koşulları sağlayan

$$+ : X \times X \rightarrow X \text{ (toplama)}$$

ve

$$.: F \times X \rightarrow X \text{ (skalerle çarpma)}$$

dönüşümlerinden ibarettir.

$F = \mathbb{R}$ ise X e reel ; $F = \mathbb{C}$ ise X e kompleks vektör uzayı adı verilir.

2.5.1.2. Tanım X , bir F cisminde vektör uzayı olmak üzere X in sonlu $K = \{m_1, \dots, m_n\}$ alt kümesi için

$$\sum_{i=1}^n \delta_i m_i = 0, \quad \delta_i \in F$$

olması, her i için $\delta_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa K kümesine veya $m_1, \dots, m_n$ vektörlerine (F üzerinde) lineer bağımsız denir. Eğer K lineer bağımsız değil ise K ya veya $m_1, \dots, m_n$ vektörlerine lineer bağımlı denir. ($n \geq 1$)

2.5.2. Normlu uzaylar

2.5.2.1. Tanım X vektör uzayı ve $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile ifade edelim.

I. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

II. $\|\delta x\| = |\delta| \|x\| \quad (\delta \in F)$

III. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

koşulları gerçekleşiyorsa $\| \cdot \|$ ye X de bir norm, X vektör uzayına da normlu uzay denir ve $(X, \| \cdot \|)$ şeklinde gösterilir. $\|x\|$ sayısına ise x vektörünün normu denir.

I. koşulu, uzunluğu sıfır olan vektörün sadece sıfır vektörü olduğunu ifade eder.

Vektör uzayı olarak X reel ise normlu uzaya normlu reel uzay; kompleks ise X e normlu kompleks uzay denir.

2.5.2.1. Lemma $(X, \| \cdot \|)$ normlu uzay ve $x, y, x_1, \dots, x_n \in X$ olsun. Buna göre,

- $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|,$
- $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| .$

2.5.2.1. Örnek $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ de $\| \cdot \|$ fonksiyonunu

$$x \in \mathbb{R} \text{ için } \|x\| = |x| \text{ veya } x + yi = z \in \mathbb{C} \text{ için } \|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

şeklinde ifade edelim. Bu halde,

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\|\delta x\| = |\delta x| = |\delta| |x| = |\delta| \|x\|$$

ve

$$\|x + y\| = |x + y| \leq |x| + |y| = \|x\| + \|y\|$$

olduğundan $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ normlu uzaydır. Aynı şekilde $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ de normlu uzaydır. O halde norm, bir vektörün $\mathbb{R}$ deki mutlak değerinin veya $\mathbb{C}$ deki modülün genelleştirilmiş şeklidir. Bu normlara alışılmış norm denir.

2.5.2.2. *Örnek* $\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{C}^n$ de $\|\cdot\|_1$,

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

şeklinde ifade edilirse

$$\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

ve

$$\|\delta x\|_1 = |\delta x_1| + |\delta x_2| + \dots + |\delta x_n| = |\delta| \|x\|_1.$$

Üçgen eşitsizliği için

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

olduğu görülür. O halde $\|\cdot\|_1$ normdur. $n = 1$ için $\|\cdot\|_1$ normu alışılmış norm, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\| = |\cdot|$ dır.

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ ve $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$ normlu uzaylardır.

2.5.2.3. *Örnek* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu taktirde ,

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \quad (2.5.1)$$

olarak tanımlanır. Tanımlanan $\|\cdot\|_2$ fonksiyonunun I. , II. ve III. koşulları sağladığı kolayca görülür. Bu norma $\mathbb{R}^n$ üzerinde Öklid normu, bu normla birlikte $\mathbb{R}^n$ reel lineer uzayına n-boyutlu Öklid uzayı denir.

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ normlu uzaydır. Aynı şekilde $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ de bir normlu uzaydır.

2.5.2.4. *Örnek* A boş olmayan herhangi bir küme olsun.

$$M(A) = M(A, F) = \{ f : f : A \rightarrow F, \text{ sınırlı} \}$$

alt uzayını alalım.

$$\|\cdot\|_\infty : M(A, F) \rightarrow \mathbb{R} ,$$

$$\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)| : x \in A \}$$

şeklinde tanımlanırsa $\|\cdot\|_\infty$ bir normdur. I., II. ve III. koşulları sağladığı kolayca görülür.

$\|\cdot\|_\infty$ normuna supremum veya düzgün norm denir.

2.5.2.5. *Örnek* 2.5.2.4. Örneğindeki A yerine pozitif tam sayılar kümesi yani $\mathbb{N}$ alınırsa $M(\mathbb{N}, \mathbb{F})$ sınırlı dizilerin vektör uzayı olur. Bu uzay genellikle l^∞ şeklinde gösterilir. Bu halde

$$l^\infty = \{x = (x_n) \subset F : \sup_{n \geq 1} |x_n| < \infty\}.$$

$x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots) \in l^\infty$ ve $\delta \in F$ için

$$x + y = (x_n + y_n) \text{ ve } \delta x = (\delta x_n) \quad (2.5.2)$$

şeklinde tanımlanırsa $x + y \in l^\infty$ ve $\delta x \in l^\infty$ olduğu görülür.

Ayrıca l^∞ un F üzerinde bir vektör uzayı olduğu açıkça görülür.

$$\|x\|_\infty = \sup \{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde tanımlanırsa bu tanım supremumdan dolayı mevcuttur. $\|\cdot\|_\infty$ bir normdur. l^∞ normlu uzaydır.

2.5.2.6. *Örnek* $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $(l^p, \|\cdot\|_p)$ normlu uzaydır. Burada

$$l^p = \{x = (x_n) \subset F : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

olup bu kümede toplama ve skalerle çarpma işlemleri (2.5.2) deki tanımlanırsa $\delta x \in l^p$ olduğu açıkça görülür.

Ayrıca l^p de $\|\cdot\|_p$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanırsa $(l^p, \|\cdot\|_p)$ normlu uzaydır.

2.5.2.7. *Örnek* 2.5.2.4. örnekte A yerine $\mathbb{R}$ de J aralığını alırsak $M(J)$, J de tanımlı reel değerli sınırlı fonksiyonların vektör uzayıdır. $J=[a,b]$ kapalı aralığı ise $[a,b]$ de tanımlı skaler değerli sınırlı fonksiyonların $M[a,b]$ vektör uzayı ve $[a,b]$ da tanımlı ve sürekli fonksiyonların $C[a,b]$ vektör uzayı

$$\|f\|_{\infty} = \sup \{ |f(x)| : x \in [a,b] \}$$

supremum normuna göre normlu uzaydır.

2.5.2.8. *Örnek* $i = 1, \dots, n$ için $(S_i, \|\cdot\|_i)$ bir skaler cisim üzerinde normlu uzaylar olmak üzere

$$S = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in S_i, 1 \leq i \leq n\} = S_1 \times \dots \times S_n$$

kümesinde

$$x_m = \max \{ \|x_i\|_i : i = 1, 2, \dots, n \} \text{ ve } \|x\|_t = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_i$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_m$ ve $\|\cdot\|_t$ fonksiyonları birer normdur. Bu normların her birine çarpım normu ve S uzayına da çarpım uzayı denir.

2.5.2.2. Tanım Normlu vektör uzayı $(X, \|\cdot\|)$ olmak üzere Y , X in bir alt uzayı olsun. $\|\cdot\|$ nin Y ye kısıtlanışını $\|\cdot\|_Y$ ile gösterirsek $\|\cdot\|_Y$, Y de bir normdur. Y ye indirgenmiş norm adı verilir. $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu uzayına da $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayının alt uzayı adı verilir. (Bayraktar, 2017)

Yakınsak skaler dizilerin kümesini C ve sıfıra yakınsak dizilerin kümesini c_0 ile gösterirsek

$$c = \left\{ (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ mevcut ve sonlu} \right\},$$

$$c_0 = \left\{ (x_n) \in c : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\}$$

ve c_{00} kümesi de

$$c_{00} = \left\{ (x_n) \in l^\infty : (x_n) \text{ nin sonlu sayıda sıfırdan farklı terimi var dır} \right\}$$

ise $(c, \|\cdot\|_\infty)$ uzayı $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ uzayının ve $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ uzayı da $(c, \|\cdot\|_\infty)$ uzayının alt uzayı olduğu gibi c_{00}, l^2 ve l^∞ dizi uzaylarının alt uzayıdır.

Aynı zamanda $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ normlu uzayı, $(M[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ un normlu alt uzayıdır.

2.5.2.2. Lemma $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ nin iki n -lisi olsun.

1) Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$$

ya da (2.5.1) deki norm gösterimiyle

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

dir.

2) Minkowski eşitsizliği

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$$

ya da (2.5.1) deki norm gösterimiyle

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

şeklinde ifade edilir.

Cauchy-Schwarz ve Minkowski eşitsizlikleri genelleştirilebilir.

$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2$ yakınsak olmak üzere reel veya kompleks $(x_i) = (x_1, x_2, \dots)$ ve $(y_i) = (y_1, y_2, \dots)$ dizileri için

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right)^{1/2}$$

dir (Cauchy-Schwarz eşitsizliği).

Hatta $p > 1$ ve $q, 1/p + 1/q = 1$ koşulunu sağlayan bir reel sayı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$$

(Hölder eşitsizliği) veya

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \text{ ve } \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q$$

yakınsak olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliği geçerlidir (sonsuz toplamlar için Hölder eşitsizliği).

$\sum |x_i|^2$ ve $\sum |y_i|^2$ yakınsak olmak üzere $(x_i) = (x_1, x_2, \dots)$ ve $(y_i) = (y_1, y_2, \dots)$ reel veya kompleks dizi olsun. Bu takdirde

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2$$

yakınsak ve

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right)^{1/2}$$

dır (sonsuz toplamlar için Minkowski eşitsizliği).

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}$$

veya genel olarak

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{1/p}$$

şeklindedir. (Bayraktar, 2017)

2.5.2.1. Teorem $(X, \|\cdot\|)$ herhangi normlu uzay olmak üzere

1. $d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde verilen d fonksiyonu bir metrik ve $\|x\| = d(x, \theta)$ dır.
2. Her $x, y, z \in N$ için $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ dir.
3. Her $\delta \in F$ için $d(\delta x, \delta y) = |\delta| d(x, y)$ dir.

$(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında $d(x, y) = \|x - y\|$ olarak verilen d metriğine, normun oluşturduğu metrik veya norm metriği adı verilir.

2.5.2.2. Teorem X bir vektör uzayı ve d , X de 2.5.2.1. Teoremin 1. ve 2. şartları gereğince bir metrik olsun. Bu taktirde

$$\|x\| := d(x, \theta)$$

olarak tanımlanan $\| \cdot \|$ fonksiyonu bir normdur. Ayrıca bu normun oluşturduğu metrik bu d metriğidir. $x, y \in X$ için $d(x, y) = \|x - y\|$ dir.

2.5.2.3. Tanım $(X, \| \cdot \|)$ ve $(X', \| \cdot \|')$ normlu uzay, $f : X \rightarrow X'$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olmak üzere eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $x \in B(x_0, \delta)$ için $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|' < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı mevcutsa f fonksiyonuna x_0 noktasında sürekli denir. f fonksiyonu X kümesinin her bir noktasında sürekli ise f ye X de sürekli denir.

2.5.2.4. Tanım $(X, \| \cdot \|)$ uzayında (x_n) dizisi verilmiş olsun. $x \in X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq n_0$ için $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 varsa (x_n) dizisi x vektörüne (elemanına) yakınsıyor denir.

2.5.2.5. Tanım (x_n) , $(X, \| \cdot \|)$ de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa ki her $m, n \geq n_0$ için $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olsun. O halde (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

2.5.3. Banach uzaylar

2.5.3.1. Tanım $(X, \| \cdot \|)$ normlu uzayı, burada verilen normun ürettiği metriğe göre tam ise o uzaya Banach uzay adı verilir.

2.5.3.1. Örnek $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ve $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nin reel ve kompleks vektör uzayları olduğunu biliyoruz. $\|x\| = |x|$ şeklinde tanımlanırsa bu uzaylar normlu uzaydır. Aynı zamanda bu uzaylar tamdır. alışılmış norma göre $(\mathbb{R}, \| \cdot \|)$ ve $(\mathbb{C}, \| \cdot \|)$ Banach uzaydır. (Bayraktar, 2017)

2.5.3.1. Teorem $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ kümesi; toplama, skalerle çarpma ve

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ normu için bir reel Banach uzayıdır.

$\mathbb{R}^n$ yerine $\mathbb{C}^n$ alınması durumunda $\mathbb{C}^n$ tamlığı da açıkça görülür.

2.5.3.2. Teorem (l^2 dizi uzayı) $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ yakınsak olmak üzere reel veya kompleks

$x = (x_i) = (x_1, x_2, \dots)$ dizilerinin kümesini l^2 ile gösterelim. Yani

$$l^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in D \text{ ve } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

olsun. Bu takdirde

$x, y \in l^2$ ve $\alpha \in F$ için

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots), \\ \alpha x &= (\alpha x_i) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots) \end{aligned}$$

ve

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

olarak tanımlanırsa l^2 Banach uzayıdır.

$F = \mathbb{R}$ ise l^2 uzayına sonsuz boyutlu reel Banach uzay, $F = \mathbb{C}$ ise sonsuz boyutlu kompleks Banach uzay adı verilir.

2.5.3.3. Teorem (l_n^p Banach uzayı) $p, 1 \leq p < \infty$ şartını sağlayan bir reel sayı olsun.

$F^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in F\}$ kümesinde bileşen toplama ve skalerle çarpma işlemleri tanımlanıyor.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

ise F^n Banach uzaydır.

2.5.3.4. Teorem (l^p uzayı) p sayısı, $1 \leq p < \infty$ şartını sağlayan bir reel sayı olsun.

$$l^p = \left\{ x = (x_i) = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in F \text{ ve } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$$

kümesinde bileşen toplama ve skalerle çarpma işlemleri tanımlanıyor.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

ise $\|\cdot\|_p$ bir norm ve l^p Banach uzaydır.

2.5.3.2. Tanım (yakınsak ve düzgün yakınsak) $F = \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) ve A keyfi bir küme olmak üzere A dan F ye tanımlı f_n fonksiyonlarının (f_n) dizisi ve $x_0 \in A$ noktası verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için öyle $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa ki her $n \geq n_0$ için

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olsun, o halde $(f_n(x))$ dizisi x_0 noktasında $f(x)$ e yakınsaktır adı verilir. Eğer (f_n) dizisi $\forall x_0 \in A$ için f ye yakınsak ise, o halde bu dizi f -ye A da noktasal yakınsaktır denir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

biçiminde yazılır ve tanımdan da anlaşıldığı üzere n_0 sayısı ε ve x_0 a bağlıdır. Yani, $n_0 = n_0(\varepsilon, x_0)$ dir. $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $x \in A$ için sadece ε a bağlı ve $n \geq n_0 = n_0(\varepsilon)$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa $(f_n(x))$ dizisi $f(x)$ e düzgün yakınsaktır denir.

2.5.3.5. Teorem $M(A, F)$ vektör uzayında $\|\cdot\|_\infty$ dönüşümü

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$$

olarak tanımlanırsa $M(A, F)$ bir Banach uzaydır.

2.5.3.1. Sonuç Sınırlı fonksiyonların $(M(J), \|\cdot\|_\infty)$ uzayı ile sınırlı dizilerin $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ uzayı Banach uzaydır.

2.5.3.6. Teorem X topolojik uzay ve $C_s(X, F)$, X de tanımlı skaler değerli sürekli ve sınırlı fonksiyonlarının bir kümesi olsun. $f, g \in C_s(X, F)$ olmak üzere

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

ve

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

olarak tanımlanırsa $C_s(X, F)$ Banach uzaydır.

2.5.3.2. Sonuç Teoreme göre $[a, b]$ de tanımlanmış olan skaler değerli sürekli fonksiyonların $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ uzayı Banach uzayıdır.

2.5.3.3. Tanım X topolojik uzay bir, I indis kümesi ve X kümesinin alt kümelerinin bir ailesi $\mathcal{U} = \{A_i \subset X \mid i \in I\}$ olsun. $X = \bigcup_i A_i$ ise $\{A_i\}$ ailesine X in bir örtüsü denir. Eğer A_i ler açık ise $\{A_i\}$ ye açık örtü adı verilir. $\{A_i\}$ açık örtüsünün sonlu bir alt ailesi yine X in bir örtüsü ise bu alt aileye sonlu açık örtü adı verilir.

2.5.3.4. Tanım X in boştan farklı bir A altkümesi için (indirgenen metrik ile) A metrik alt uzayı tamamen sınırlı ise A altkümesi tamamen sınırlıdır denir.

2.5.3.5. Tanım (X, d) metrik uzayı verilsin.

1. X uzayındaki her bir dizinin yakınsak bir alt dizisi var ise X uzayına dizisel kompakt adı verilir.
2. X tamamen sınırlı ve tam ise X e kompakt adı verilir.
3. X in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X e kompakt uzay adı verilir.

2.5.4. İç Çarpım uzayları

2.5.4.1. Tanım (İç Çarpım) X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere.

$\langle, \rangle: X \times X \rightarrow F$ fonksiyonu,

i. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$

ii. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, (\alpha \in F),$

iii. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$

iv. $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım adı verilir. X , iç çarpım uzayı adı verilir.

$(X, \langle, \rangle)$ şeklinde gösterilir.

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ olması halinde iç çarpım uzayına reel iç çarpım uzayı, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ olması halinde kompleks iç çarpım uzayı adı verilir.

2.5.4.1. *Örnek* $F = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı skaler değerli sürekli fonksiyonların kümesi $C[a, b]$ olsun. $f, g \in C[a, b]$ ve $\alpha \in F$ olmak üzere

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

olarak tanımlanırsa bu işlemlere göre $C[a, b]$ vektör uzayıdır. Ayrıca,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanan $\langle, \rangle$ fonksiyonu iç çarpım fonksiyonudur. $C[a, b]$ iç çarpım uzayıdır.

2.5.4.2. Tanım (İç Çarpım Normu) X iç çarpım uzayı olmak üzere

$$\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

olarak tanımlanan $\| \cdot \|$ dönüşümü bir normdur. Buna iç çarpım normu adı verilir.

2.5.4.1. Teorem $(X, \langle, \rangle)$ ikilisi bir iç çarpım uzayı ve $\| \cdot \|$ normu bu uzaydaki iç çarpım normu ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

a. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

b. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

2.5.5. Hilbert uzayı

2.5.5.1. Tanım (Hilbert uzayı) X iç çarpım uzayı ve $\| \cdot \|$, iç çarpım normu olsun.

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

şeklinde tanımlanırsa (X, d) metrik uzaydır. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise bu uzaya Hilbert uzayı adı verilir. $F = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ ise X e reel (kompleks) Hilbert uzayı adı verilir.

2.5.5.1. *Örnek* $\mathbb{C}^n$ uzayının $\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w_1} + \dots + z_n \overline{w_n}$ iç çarpımına göre bir iç çarpım uzayıdır. Bu durumda iç çarpım normu

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle} = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{1/2}$$

olduğundan $\mathbb{C}^n$ tam ve dolayısıyla Hilbert uzayıdır.

2.5.5.2. *Örnek* (l^2 Hilbert uzayları) $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ yakınsak olmak üzere reel veya kompleks $x = (x_i) = (x_1, x_2, \dots)$ dizlerinin l^2 kümesini düşünelim. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden dolayı $x, y \in l^2$ için

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| |\overline{y_i}| < \infty$$

dır. Mutlak yakınsaklık yakınsaklığı gerektirdiğinden $\langle \cdot, \cdot \rangle : l^2 \times l^2 \rightarrow F$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

olarak tanımlanırsa l^2 bir iç çarpım uzayıdır. Şimdi

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

iç çarpım normunu düşünelim. Bu normdan elde edilen

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

norm metriğine göre l^2 nin tamdır. O halde l^2 bir Hilbert uzaydır.

2.5.5.1. Teorem $1 \leq p < \infty$ ve $p \neq 2$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ yakınsak yani $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ olacak şekilde reel veya kompleks $x = (x_1, x_2, \dots)$ dizilerinin kümesi l^p olsun. Bu taktirde

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

iç çarpımına göre l^p Hilbert uzayı değildir.

2.5.6. Sobolev uzayları

2.5.6.1. Tanım Bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesini ve $C_0^\infty(\Omega)$ lineer vektör uzayını dikkate alalım.

$C_0^\infty(\Omega)$ nın elemanları her mertebeden kısmi türevleri sürekli ve dayanağı kompakt olan fonksiyonlardır. Bir tek değer döndüren fonksiyonun dayanağı

$$\text{day}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}} \subset \Omega$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bundan ötürü her zaman kapalı kümedir. Dolayısıyla uzayın her bir fonksiyonu Ω nin bir kompakt alt kümesi dışında sıfır olmaktadır. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ de

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\|x\|_2^2 - a^2\right)^{-1}, & \|x\|_2 \leq a \\ 0 & , \|x\|_2 \geq a \end{cases}$$

örneği verilir. Bundan ötürü bu küme boş değildir. (Şuhubi, 2021)

2.5.6.2. Tanım $K \subseteq \Omega$ kompakt kümesi için $\text{day}(\phi) \subseteq K$ olan $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonlarının ürettiği kümeyi $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ ile ifade edelim. Bu küme üzerinde bir yarı-norm ailesini

$$p_{K,m}(\phi) = \sup_{|r| \leq m, x \in K} |D^r \phi(x)|, m = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde belirtelim. $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ konveks bir vektör uzayı olur. $K_1 \subseteq K_2$ ise $\mathfrak{D}_{K_1}(\Omega) \subseteq \mathfrak{D}_{K_2}(\Omega)$ açıktır. $C_0^\infty(\Omega)$ vektör uzayına test fonksiyonları uzayı adı verilir ve $\mathfrak{D}(\Omega)$ ile gösterilir. (Şuhubi, 2021)

2.5.6.3. Tanım (Genelleştirilmiş Fonksiyonlar Uzayı)

$\mathfrak{D}(\Omega)$ uzayı üzerinde seçilen yarı-norm ailesinden oluşturulan topolojiye göre sürekli lineer fonksiyonlar bir lineer vektör uzayı üretir. Bu uzaya $\mathfrak{D}(\Omega)$ nın topolojik duali adı verilir ve $\mathfrak{D}'(\Omega)$ şeklinde gösterilir. Yani $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ ise $\phi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ için $T(\phi) \in \mathbb{F}$ (cisim) olur. ϕ fonksiyonlarının yardımcıları Ω nın kompakt alt kümeleri, kendisi dahil her mertebeden türevleri sürekli olduğundan kendisi dahil her mertebeden türevleri sınırlı ve düzgün süreklidir. $\mathfrak{D}'(\Omega)$ dual uzayına genelleştirilmiş fonksiyonlar uzayı adı verilir. (Şuhubi, 2021)

$\mathfrak{D}(\Omega)$ üzerindeki topolojiye bir $\{\phi_k\} \subset \mathfrak{D}(\Omega)$ dizisi bir $\phi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ fonksiyona ancak ve ancak

i. Her k tamsayısı ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K' = \Omega - K$ için $\phi_k(x) = 0$ olacak şekilde bir $K \subset \Omega$ kompakt kümesi varsa

ii. Her $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ çoklu endisi ve $k \rightarrow \infty$ için $\sup_{x \in K} |D^r \phi_k(x) - D^r \phi(x)| \rightarrow 0$ ise yakınsar.

Bu yakınsamayı $\phi_k \rightarrow \phi$ biçiminde gösterilir.

T lineer olduğu için her $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

$$T(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha T(\phi) + \beta T(\psi)$$

sağlanır. $\mathcal{D}(\Omega)$ ve $\mathbb{F}$ vektör uzaylarındaki topolojilerde tüm açık kümeler 0 vektörlerin açık komşuluklarının ötelenmeleri olduğu için T fonksiyonelinin sürekliliği için yalnız 0 da sürekli olmasının gerek ve yeter olduğu açıktır. $\mathcal{D}(\Omega)$ da sıfırın her açık komşuluğunun T altında görüntüsünün $\mathbb{F}$ de sıfırın bir açık komşuluğu için de kalmasının ancak ve ancak Ω kümesinin her kompakt K alt kümesi için, $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ olduğu takdirde

$$|T(\phi)| \leq C_K \sup_{|r| \leq m, x \in K} |D^r \phi(x)|, m = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

olacak şekilde bir $C_K > 0$ sabitinin bulunabilmesi anlamına geldiği kolaylıkla gerçekleştirilebilir.

T nin ancak ve ancak her $\phi_k \rightarrow \phi$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} |T(\phi_k) - T(\phi)| = 0$ ise sürekli olacağı açıktır.

Bir $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ yerel olarak integre edilebilir fonksiyonunun bir genelleştirilmiş fonksiyonlar uzayı ürettiği açıkça görülür. $\mathbb{R}^n$ deki Lebesgue ölçümü μ ise

$$T_u(\phi) = \int_{\Omega} u(x) \phi(x) d\mu, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

şeklinde tanımladığımız T_u operatörünün $\mathcal{D}(\Omega)$ üzerinde bir lineer fonksiyonel olduğu açıktır. T_u nun sürekli kolayca görülür.

$L_1^{loc}(\Omega)$ uzayındaki fonksiyonlara karşılık gelen genelleştirilmiş fonksiyonlar uzayına düzenli genelleştirilmiş fonksiyonlar uzayı adı verilir.

$u \in C^1(\Omega)$ ve $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ olsun. ϕ fonksiyonu Ω nın kompakt bir alt kümesi dışında sıfır olacağından kısmi integrasyonla

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \phi(x) d\mu = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} d\mu$$

elde ederiz. Bu bağıntı bir $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ genelleştirilmiş fonksiyon uzayının r . mertebeden kısmi türevinin her $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ için

$$(D^r T)(\phi) = (-1)^{|r|} T(D^r \phi) \quad (2.3)$$

şeklindedir. $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ise $D^r \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ olacağından (2.3) tanımı ile $D^r T$ nin $\mathcal{D}(\Omega)$ üzerinde bir sürekli lineer fonksiyonel olduğu açıktır. Dolayısıyla $D^r T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ olur. (2.3) bağıntısına göre her genelleştirilmiş fonksiyonlar uzayının $\mathcal{D}'(\Omega)$ de her mertebeden genelleştirilmiş türevi vardır.

$D^r : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ operatörü de sürekli. $\mathcal{D}'(\Omega)$ uzayında $T_k \rightarrow T$ ise

$$D^r T_k(\phi) = (-1)^{|r|} T_k(D^r \phi) \rightarrow (-1)^{|r|} T(D^r \phi) = D^r T(\phi)$$

ve dolayısıyla da $D^r T_k \rightarrow D^r T$ bulunur. Genelleştirilmiş türev kavramından kalkarak bir $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi, $T_{v_r} = D^r T_u$ bağıntısı sağlanacak şekilde bir $v_r \in L_1^{loc}(\Omega)$ fonksiyonu varsa $D^r u = v_r$ şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda her $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ için

$$(-1)^{|r|} \int_{\Omega} u(x) D^r \phi(x) d\mu = \int_{\Omega} v(x) \phi(x) d\mu$$

bağıntısı sağlanmalıdır. $u, v_r \in L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ olduğunda $D^r u = v_r$ ile bir $u \in L_p(\Omega)$ fonksiyonunun r . mertebeden genelleştirilmiş türevi tanımlanmış olur.

2.5.6.1. *Örnek* $\xi \in \Omega$ ve $\delta_\xi(\phi) = \phi(\xi)$ olsun. $D^r \delta_\xi$ 'genelleştirilmiş fonksiyonlar uzayının etkisi $D^r \delta_\xi(\phi) = (-1)^{|r|} D^r \phi(x) \Big|_{x=\xi}$ şeklinde hesaplanır. $\Omega = \mathbb{R}$ alalım. $H \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ fonksiyonu ve $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ için

$$T_H'(\phi) = -T_H(\phi') = -\int_0^\infty \phi'(x) dx = \phi(0) = \delta_0(\phi)$$

elde ederiz. Dolayısıyla $\delta_0 = T_H'$ yazılabilir. (Şuhubi, 2021)

2.5.6.4. Tanım (Sobolev Uzayları) $\mathbb{R}^n$ nin bir açık kümesi Ω olsun. Bu küme üzerindeki skaler değerli fonksiyonları $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in \Omega$ şeklinde gösterelim. m bir pozitif tamsayı olmak üzere tüm $D^r u$, $0 \leq |r| \leq m$ genelleştirilmiş türevleri $L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ uzayı içinde olan fonksiyonları dikkate alalım. Ω üzerindeki hemen hemen her yerde eşit fonksiyonları eşit kabul ettiğimiz takdirde böyle fonksiyonların bir vektör uzayı oluşturacağı açıkça görülür. Bu uzaya Sobolev uzayı adı verilir. $W_p^m(\Omega)$ Sobolev uzayını

$$W_p^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : D^r u \in L_p(\Omega), 0 \leq |r| \leq m\}, 1 \leq p \leq \infty$$

biçiminde tanımlayabiliriz. (Şuhubi, 2021)

$W_p^m(\Omega)$ uzayını $L_p(\Omega)$ nin normundan faydalanarak bir normla donatabiliriz.

$$A(\mathfrak{M}) \subseteq \overline{A(\mathfrak{M})} \quad \|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |r| \leq m} \|D^r u\|_p^p \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

fonksiyonu bir normdur. Tanıma göre $0 \leq |r| \leq m$ alınırsa $\|D^r u\|_p < \infty$ olduğundan ve $\|\cdot\|_p$ norm kurallarını sağladığından $\|\cdot\|_{m,p}$ de bir normdur.

$p = \infty$ için normu

$$\|u\|_{W_\infty^m(\Omega)} = \|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq r \leq m} \|D^r u\|_\infty$$

şeklinde tanımlanır.

2.5.6.1. Teorem $W_p^m(\Omega)$ Sobolev uzayı bir Banach uzayıdır.

2.5.6.5. Tanım $m \geq 0$ ve $p > 1$ reel sayısı için Sobolev uzaylarının $W_p^m(-1,0) + W_p^m(0,1)$ direkt toplamı

$$\|y\|_{p,m} = \|y\|_{W_p^m(-1,0)} + \|y\|_{W_p^m(0,1)}$$

normuyla verilen $(-1,0)$ ve $(0,1)$ aralıkları sırasıyla $W_p^m(-1,0), W_p^m(0,1)$ uzaylarına ait $[-1,0) \cup (0,1]$ aralığında tanımlanmış $y = y(x)$ kompleks değerli fonksiyonların Banach uzayıdır.

3. BAZI OPERATÖRLER VE ÖZELLİKLERİ

3.1. Kompakt Operatörler

U ve V normlu vektör uzayları olsun. $A:U \rightarrow V$ operatörü U uzayındaki sınırlı kümeleri V uzayında göreceli kompakt kümelere dönüştürüyorsa bir kompakt operatör adını alır. Yani A bir kompakt operatörse her sınırlı $\mathfrak{M} \subset U$ kümesinin $A(\mathfrak{M}) \subset V$ görüntüsünün $\overline{A(\mathfrak{M})}$ kapanışı kompakt bir kümedir. Kompakt operatör sürekli ise tam sürekli operatör adı verilir.

$\overline{A(\mathfrak{M})}$ kompaktsa tam ve tam sınırlıdır. Dolayısıyla $A(\mathfrak{M}) \subseteq \overline{A(\mathfrak{M})}$ alt kümesi de tam sınırlı ve sınırlıdır. Buna göre kompakt operatörler doğal olarak sınırlıdır. A operatörü lineer ise sınırlı olmak aynı zamanda sürekli olmaktır o halde her bir kompakt lineer operatör sürekli, dolayısıyla tam sürekli olmak zorundadır. (Şuhubi, 2021)

3.1.1. Lemma U ve V normlu uzaylar ve $A:U \rightarrow V$ bir lineer operatörü verilmiş olsun. A operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart sınırlı her $\{u_n\} \subset U$ dizisi için $\{Au_n\} \subset V$ dizisinin bir $v \in V$ vektörüne yakınsayan bir alt dizisinin mevcut olmasıdır.

3.1.1. Teorem Sonlu boyutlu bir normlu vektör uzayının kapalı ve sınırlı olan her alt kümesi kompakt, sınırlı her alt kümesi ise göreceli kompaktır.

3.1.2. Teorem Bir normlu vektör uzayında B kapalı birim yuvarı ancak ve ancak uzay sonlu boyutluysa kompaktır.

3.1.3. Teorem Bir U normlu vektör uzayının sonlu boyutlu bir alt uzayı V ise her $u \in U$ için $d(u, V) = d(u, w)$ olacak şekilde bir $w \in V$ vektörü vardır.

3.1.4. Teorem

- a) U, V normlu vektör uzayları ve $A_1, A_2 : U \rightarrow V$ kompakt operatörlerse her $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ için $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ operatörleri de kompakt olur.
- b) U, V, W normlu vektör uzayları ve $A : U \rightarrow V$ ile $B : V \rightarrow W$ sürekli lineer operatörler olsun. Bu operatörlerden biri kompakt olduğu takdirde $BA : U \rightarrow W$ operatörü de kompakt olur.
- c) V bir Banach uzayı olsun. $A_n : U \rightarrow V, n = 1, 2, \dots$ kompakt operatörler dizisi bir $A : U \rightarrow V$ operatörüne yakınsıyorsa A bir kompakt operatördür.

3.2. İntegral Operatörü

3.2.1. Tanım $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyonların kümesi $\mathcal{C}[a, b]$ olsun. $T : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$,

$$T(f(t)) = \int_a^t f(x) dx, \quad t \in [a, b]$$

şeklindeki tanımda T bir lineer operatördür ve buna aynı zamanda integral operatörü adı verilir.

3.3. Fredholm Operatörü

P ve R Banach uzaylar olmak üzere $G(A)$ tanım kümesi, $J(A)$ değer kümesi, R', R nin eşlenik uzayı olsun. $G(A) \subset P$ olmak üzere $A : P \rightarrow R$ verilsin.

A lineer operatörünün çekirdeği (Kernel)

$$\ker A := \{v \mid v \in G(A), Av = 0\}$$

şeklindedir. $\ker A$ şeklinde gösterilir.

A lineer operatörünün $co\ ker\ nel\ i$

$$co\ ker\ A := \{v' \mid v' \in R', \langle Av, u' \rangle = 0, v \in G(A)\}$$

şeklindedir. $co\ ker$ şeklinde ifade edilir.

Eğer P den R ye bir A operatörü, aşağıdaki koşulları sağlarsa A ya Fredholm operatörüdür denir.

- a) $J(A), R$ de kapalıdır,
- b) $ker\ A, P'$ 'nin sonlu boyutlu alt uzayı ve $co\ ker\ A, R'$ 'nin sonlu boyutlu alt uzayıdır,
- c) $\dim\ ker\ A = \dim\ co\ ker\ A$.

3.4. Kendine Eş Operatör

3.4.1. Tanım Bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı ve $B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ bir lineer operatör olsun. $B = B^*$ eşitliği geçerliyse B ye kendine eş operatör adı verilir. $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B^*)$ koşulu sağlanır.

3.5. Simetrik Operatör

3.5.1. Tanım Bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayını kendisine dönüştüren $B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ lineer operatörünü dikkate alalım. Bu operatörün eş operatörü de $B^*: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dir. Riesz dönüşümü $\mathcal{K}$ ve $B': \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'$ ise $B^*: \mathcal{K}^{-1}B'\mathcal{K}$ elde edilir. Eş operatörün tanımlanması için $\overline{\mathcal{D}(B)} = \mathcal{H}$ bağıntısı sağlanır. Bu durumda $\mathcal{D}(B^*) \subseteq \mathcal{H}$ olur. Eğer B^* operatörü B operatörünün bir $B \subseteq B^*$ genişlemesi ise, yani her $u, v \in \mathcal{D}(B)$ vektörü için $(Bu, v) = (u, Bv)$ yazılabiliyorsa B bir simetrik operatördür denir.

3.6. Pozitif Operatör

3.6.1.Tanım Bir $B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ simetrik operatör olmak üzere her $u \in \mathcal{D}(B)$ için (Bu, u) sayısı reel olur. Kompleks uzayda $(Bu, u) = (u, Bu) = \overline{(Bu, u)}$ yazılabilir. Reel uzayda bu sonuç aşıkardır. B simetrik operatörse ve her u için $(Bu, u) \geq 0$ ise bu operatöre pozitif operatör adı verilir.

3.7.İzomorfizm

3.7.1.Tanım A ve B lineer uzaylar olmak üzere $D(K) = X$ ve $R(K) = Y$ olsun. $K: X \rightarrow Y$ sürekli lineer operatörü verilmiş olsun. K operatörünün, K^{-1} ters operatörü var ve sürekli ise X ve Y uzaylarına izomorfik uzaylar denir. K operatörüne izomorfizma adı verilir.

4. SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Bu bölümdeki tanım ve teoremler (Kandemir, 2015) kaynağından alınmıştır.

4.1. Tanım $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ kümesini $\mathbb{F}$ ile gösterilsin. $\mathbb{F}^m$ Euclid uzayı olmak üzere

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{F}^m)^{n+1} \rightarrow \mathbb{F}^m, \quad m \geq 1, n \geq 1 (m, n \in \mathbb{N})$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon yardımıyla elde edilen

$$f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

denklemine adi (bayağı veya basit) diferansiyel denklem denir.

4.1. Sınır Değer Problemleri

4.1.1. Tanım $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($a_n \neq 0$), $[a, b]$ aralığında tanımlı ve bu aralıkta p -yinci mertebeye kadar sürekli türevlenebilen u fonksiyonunu içeren

$$S(u) = a_p u^{(p)} + \dots + a_0 u = 0 \quad (1)$$

lineer homojen sabit katsayılı diferansiyel denklemini alalım.

$u_1, u_2, \dots, u_p$ fonksiyonları (1) ile verilen denklemin lineer bağımsız çözümleridir. Genel çözüm, keyfi sabitler $c_1, c_2, \dots, c_p$ olmak üzere

$$u = c_1 u_1 + \dots + c_p u_p$$

şeklindedir. u ve türevlerinin $(p-1)$ -inci mertebeye kadar $a \leq x \leq b$ aralığının uç noktalarındaki değerleri için

$$u(a), u'(a), \dots, u^{(p-1)}(a); u(b), u'(b), \dots, u^{(p-1)}(b)$$

şeklinde ifade edilmek üzere doğrusal birleşimlerinden meydana gelen

$$R_1(u) = \alpha_{11}u(a) + \dots + \alpha_{1n}u^{(p-1)}(a) + \beta_{11}u(b) + \dots + \beta_{1p}u^{(p-1)}(b) = 0$$

$$R_2(u) = \alpha_{21}u(a) + \dots + \alpha_{2n}u^{(p-1)}(a) + \beta_{21}u(b) + \dots + \beta_{2p}u^{(p-1)}(b) = 0$$

.....

$$R_t(u) = \alpha_{t1}u(a) + \dots + \alpha_{tn}u^{(p-1)}(a) + \beta_{t1}u(b) + \dots + \beta_{tp}u^{(p-1)}(b) = 0$$

sistemini dikkate alalım. Sistem kısaca

$$R_k(u) = 0, k = 1, \dots, t$$

biçimindedir ve (1) ile verilen denklemin sınır şartları denir.

4.1.2. Tanım (1) ile verilen homojen denklem ve bu denkleme ait

$$R_k(u) = 0, k = 1, \dots, t$$

sınır şartları ile düşünüldüğü zaman

$$\begin{cases} S(u) = 0 \\ R_k(u) = 0, k = 1, \dots, t \end{cases} \quad (2)$$

biçimindeki sisteme homojen sınır değer problemi denir.

4.1.3. Tanım $[a, b]$ da $f(x)$ sürekli bir fonksiyon ve f_k da sabit sayılardır.

$$\begin{cases} S(u) = f(x) \\ R_k(u) = f_k, k = 1, \dots, t \end{cases}$$

sistemi de homojen olmayan sınır değer problemidir.

4.1.4. Tanım Homojen sınır değer problemi için daima mevcut olan $u = 0$ çözümüne sınır değer probleminin aşıkâr (trivial) çözümü adı verilir. Sınır değer probleminin sıfırdan farklı olan çözümlerine aşıkâr olmayan çözüm denir.

4.1.5. Tanım

$$Lu = (S(u), S_1(u), \dots, S_t(u)) = v$$

biçimindeki L operatörüne, sınır şartları

$$R_k(u) = 0, k = 1, \dots, t$$

ve $L(y)$ diferansiyel ifadesi tarafından üretilen diferansiyel operatör denir. Dolayısıyla (2) problemi ile L operatörü eşdeğer olup

$$Lu = 0$$

biçiminde ifade edilebilir.

4.1.6. Tanım

$$S^*(\varphi) = (-1)^p (\overline{a_p \varphi})^{(p)} + (-1)^{p-1} (\overline{a_{p-1} \varphi})^{(p-1)} + \dots + (\overline{a_2 \varphi})'' - (\overline{a_1 \varphi})' + \overline{a_0 \varphi}$$

diferensiyel ifadesine

$$S(u) = a_p(x) \frac{d^p u}{dx^p} + a_{p-1}(x) \frac{d^{p-1} u}{dx^{p-1}} + \dots + a_2(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + a_1(x) \frac{du}{dx} + a_0(x) u \quad (3)$$

diferansiyel ifadesinin eşleniği denir.

$$S^*(\varphi) = (-1)^p (\overline{a_p \varphi})^{(p)} + (-1)^{p-1} (\overline{a_{p-1} \varphi})^{(p-1)} + \dots + (\overline{a_2 \varphi})'' - (\overline{a_1 \varphi})' + \overline{a_0 \varphi}$$

diferansiyel denklemin (3) ile verilen denklemin eşleniği denir.

4.1.7. Tanım

$$S(u)\overline{\varphi} - u\overline{S^*(\varphi)} = \frac{d}{dx} P(\eta, \zeta)$$

eşitliğine Lagrange özdeşliği (veya Lagrange formülü) denir.

Diferansiyel denkleminin katsayılarının reel olması halinde Lagrange formülü

$$S(u)\overline{\varphi} - u\overline{S^*(\varphi)} = \frac{d}{dx} P(\eta, \zeta)$$

şeklindedir.

4.1.8. Tanım

$$\int_a^b S(u)\overline{\varphi} dx = P(\eta, \zeta) + \int_a^b u\overline{S^*(\varphi)} dx$$

veya

$$\int_a^b (S(u)\overline{\varphi} - u\overline{S^*(\varphi)}) dx = P(\eta, \zeta)$$

eşitliğine Green formülü denir.

Diferansiyel denklemin katsayılarının reel olması halinde Green formülü

$$\int_a^b S(u)\varphi dx = P(\eta, \zeta) + \int_a^b uS^*(\varphi) dx$$

şeklini alır.

4.1.9. Tanım Eğer $S = S^*$ ise $L(y)$ diferansiyel ifadesine kendine eşlenik (self-adjoint) adı verilir.

4.1.1. Teorem S^* ifadesi S nin eşleniği ise S ifadesi de S^* ın eşleniğidir.

4.1.2. Teorem $(S_1 + S_2)^* = S_1^* + S_2^*$ ve $(\alpha S)^* = \overline{\alpha} S^*$ dır.

4.1.3. Teorem S_1 ve S_2 kendine eşlenik diferansiyel ifadeler α ve β reel sabitler olmak üzere $\alpha S_1 + \beta S_2$ diferansiyel operatörü de kendine eşlenik olur.

4.1.4. Teorem $[a, b]$ aralığında $a_0(x)$ sürekli, $a_1(x)$ birinci mertebeden sürekli türeve sahip ve $a_2(x) \neq 0$ ikinci mertebeden sürekli türeve sahip fonksiyonlar olmak üzere

$$S(u) = a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0$$

denkleminin kendine eşlenik olması için gerek ve yeter şart

$$a_2'(x) = a_1(x)$$

olmasıdır.

4.1.5. Teorem $[a, b]$ aralığında $a_0(x)$ sürekli, $a_1(x)$ birinci mertebeden sürekli türeve sahip ve $a_2(x) \neq 0$ ikinci mertebeden sürekli türeve sahip fonksiyonlar olmak üzere

$$S(u) = a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0$$

denkleminin kendine eşlenik olması için gerek ve yeter şart

$$[a_2(x)u']' + a_0(x)u = 0$$

şeklinde yazılabilmektedir.

4.1.6. Teorem $[a, b]$ aralığında $a_0(x)$, $a_1(x)$ ve $a_2(x)$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0, \quad a_2(x) \neq 0$$

denklemini

$$\mu(x) = \frac{1}{a_2(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}$$

fonksiyonu ile çarpılırsa kendine eşlenik olur.

4.1.10. Tanım $P(\eta, \zeta) = K_{2p}S_1 + K_{2p-1}S_2 + \dots + K_{2p-(t-1)}S_t + \dots + K_1S_{2p}$ de belirlenen ve $K_1, \dots, K_{2p-t}$ sınır formları yardımıyla oluşturulan

$$K_1 = 0, \dots, K_{2p-t} = 0$$

sınır şartlarına,

$$S(u) = 0, \quad a \leq x \leq b$$

$$R_k(u) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, t$$

de verilen

$$S_1 = 0, S_2 = 0, \dots, S_t = 0$$

sınır şartlarının eşlenik sınır şartları denir.

4.1.11. Tanım Şayet sınır şartları, eşlenik sınır şartlarına eşdeğerse kendine eşlenik (self adjoint) sınır şartları adı verilir.

4.1.12 Tanım

$$\begin{aligned} S(u) &= 0, \quad a \leq x \leq b \\ R_k(u) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, t \end{aligned} \quad (4)$$

sınır değer probleminde ifade edilen $S(u) = 0$ eşleniği $S^*(\varphi) = 0$ ve (4) problemi ile verilen $R_k(u) = 0, k = 1, 2, \dots, t$ eşleniği $K_k(\varphi) = 0, k = 1, 2, \dots, 2p - t$ sınır şartları olmak üzere

$$\begin{aligned} S^*(\varphi) &= 0 \\ K_k(\varphi) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2p - t \end{aligned}$$

sınır değer problemine (2) probleminin eşlenik sınır değer problemi denir.

4.1.13. Tanım (2) probleminin oluşturduğu diferansiyel operatör L ve

$$\begin{cases} S^*(\varphi) = 0 \\ K_k(\varphi) = 0, \quad k = 1, \dots, 2p - t \end{cases}$$

sınır değer probleminin oluşturduğu diferansiyel operatör L^* ise L^* operatörüne L operatörünün eşlenik diferansiyel operatörü adı verilir.

Bu tanıma göre L^* operatörünün eşleniği de L operatörüdür, yani $(L^*)^* = L$ olur.

4.1.14. Tanım Eğer $L^* = L$ ise L operatörüne kendine eşlenik diferansiyel operatör adı verilir.

4.1.7. Teorem

$$S(u) = a_p(x) \frac{d^p u}{dx^p} + a_{p-1}(x) \frac{d^{p-1} u}{dx^{p-1}} + \dots + a_2(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + a_1(x) \frac{du}{dx} + a_0(x)u$$

olmak üzere (2) probleminin rankı r ve bu problemin

$$\begin{cases} S^*(\varphi) = 0 \\ K_k(\varphi) = 0, k = 1, \dots, 2p - t \end{cases}$$

eşlenik probleminin rankı r^* ise r ve r^* arasında

$$r^* = p - t + r$$

bağıntısı vardır.

4.2 Özdeğer Parametrel Sınır Değer Problemleri

$$S(u) = a_p(x) \frac{d^p u}{dx^p} + \dots + a_1(x) \frac{du}{dx} + a_0(x)u$$

ve λ katsayısı $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S(u) &= \lambda u \\ U_k(u) &= 0, k = 1, \dots, t \end{aligned} \tag{5}$$

problemini dikkate alalım ve bu problemin oluşturduğu L diferansiyel operatörüne göre bu problem

$$Lu = \lambda u \text{ veya } (L - \lambda I)u = 0$$

biçiminde ifade edilebilir.

$(L - \lambda I)u = 0$ denkleminde λ sayısına L operatörünün özdeğeri adı verilir.

4.2.1. Tanım (5) probleminin oluşturduğu L operatörünün özdeğerine problemin özdeğeri adı verilir. Özdeğere karşılık gelen $u(u \neq 0)$ fonksiyonlarına problemin özfonksiyonları adı verilir.

4.2.2. Tanım Diferansiyel denkleminde özdeğer parametresi bulunan (5) ile verilen probleme özdeğer parametresi bulunduran homojen sınır değer problemi adı verilir.

Özdeğerlerin belirlenmesi için aşağıdaki durumları inceleyelim.

1) $t \neq p$ olsun.

$S(u) = \lambda u$ denkleminin bağımsız çözümleri $u_1(x, \lambda), \dots, u_p(x, \lambda)$ olsun. Bu çözümler sistemi,

$$S(u) = \lambda u$$

denkleminin çözümlerinin temel sistemi şeklinde adlandırılır. $u_1(x, \lambda), \dots, u_p(x, \lambda)$ çözümleri λ parametresine göre analitik (tam) fonksiyonlardır.

Buna göre

$$S(u) = \lambda u$$

denkleminin ait genel çözüm

$$u(x, \lambda) = c_1 u_1(x, \lambda) + \dots + c_p u_p(x, \lambda)$$

şeklindedir.

Genel çözümü $U_k(u) = 0, k = 1, \dots, t$ sınır şartlarında yazılırsa

$$U_1(u(x, \lambda)) = c_1 U_1(u_1(x, \lambda)) + \dots + c_p U_1(u_p(x, \lambda)) = 0$$

.....

$$U_t(u(x, \lambda)) = c_1 U_t(u_1(x, \lambda)) + \dots + c_p U_t(u_p(x, \lambda)) = 0$$

sistemi bulunur ve katsayılar matrisi $c_i = (i = 1, \dots, p)$ bilinmezlerine göre

$$U(\lambda) = \begin{pmatrix} U_1(u_1(x, \lambda)) & \dots & U_1(u_p(x, \lambda)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_t(u_1(x, \lambda)) & \dots & U_t(u_p(x, \lambda)) \end{pmatrix}$$

biçimindedir. $\text{rank} \Delta(\lambda) = r$ olmak üzere

- (5) problemin çözümünün sıfırdan farklı olabilmesi için gerek ve yeter şart $r < p$ dır.
- $t < p$ ise $r < p$ gerçekleşeceğinden (5) probleminin herhangi bir λ için trivial olmayan çözümü vardır. Buna ötürü $t < p$ olduğunda her bir λ değeri özdeğerdir.
- $t \geq p$ ise $r < p$ olması için gerek ve yeter şart $U(\lambda)$ matrisine ait bütün p -yinci mertebeden minörlerinin sıfır olmasıdır. Buna göre

- $U(\lambda)$ nın her p -yinci mertebeden minörleri (elemanın bulunduğu satır ve sütunların dışında kalan elemanların oluşturduğu matris) sıfır ise $r < p$ gerçekleşeceğinden bütün λ değerleri özdeğerdir.

- $U(\lambda)$ nın sıfırdan farklı en az bir p -yinci mertebeden minörü var ise p -yinci mertebeden minörleri sıfır yapan her bir λ değeri özdeğerdir.

2) $t = p$ olsun. Bu durumda

$$S(u) = \lambda u$$

$$U_k(u) = 0, k = 1, \dots, t$$

sınır değer problemi

$$\begin{cases} S(u) = \lambda u \\ R_k(u) = 0, k = 1, \dots, p \end{cases}$$

şeklinde olup

$$R(u) = \begin{pmatrix} R_1(u_1(x, \lambda)) & \dots & R_1(u_p(x, \lambda)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_t(u_1(x, \lambda)) & \dots & R_t(u_p(x, \lambda)) \end{pmatrix}$$

matrisi de

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} R_1(u_1(x, \lambda)) & \dots & R_1(u_p(x, \lambda)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_p(u_1(x, \lambda)) & \dots & R_p(u_p(x, \lambda)) \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

4.2.3. Tanım

$$\begin{cases} S(u) = \lambda u \\ R_k(u) = 0, k = 1, \dots, p \end{cases} \quad (6)$$

probleminin oluşturduğu diferansiyel operatör L olmak üzere

$$R(\lambda) = \det(M(\lambda)) = \begin{vmatrix} R_1(u_1(x, \lambda)) & \dots & R_1(u_p(x, \lambda)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_p(u_1(x, \lambda)) & \dots & R_p(u_p(x, \lambda)) \end{vmatrix}$$

determinantına L operatörünün karakteristik determinantı adı verilir. $R(\lambda)$ determinantının sıfırları L operatörünün özdeğeridir.

4.2.4. Tanım λ_0 sayısı $R(\lambda)$ nın t -yinci mertebeden sıfırı ise t sayısına λ_0 in cebirsel katı adı verilir. (6) probleminin özdeğeri λ_0 sayısı ve bu özdeğere karşılık elde edilen lineer bağımsız çözümlerin sayısına bu özdeğerin geometrik katı (özkatı) denir.

4.2.1. Teorem $R(\lambda)$ nın sıfırı λ_0 sayısı ve λ_0 sayısının özkatı k ve cebirsel katı l olmak üzere $k \leq l$.

4.2.5. Tanım $S(u)$, p -yinci mertebeden bir diferansiyel denklem olmak üzere (6) problemdeki hem diferansiyel denklem hem de sınır şartları λ parametresinin analitik fonksiyonları ise bu probleme genelleştirilmiş özdeğer problemi denir.

4.2.6. Tanım (6) problemi genelleştirilmiş özdeğer problemi olmak üzere, λ_0 bu problemin bir özdeğeri ve $\varphi(x)$, bu özdeğere göre elde edilen bir özfonksiyonu olsun. $\varphi(x)$ ve

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım.

a) Sınır şartlarına göre,

$$R_k(\varphi) = 0$$

$$R_k(\varphi_1) + \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} R_k(\varphi) = 0$$

.....

$$R_k(\varphi_t) + \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} R_k(\varphi_{t-1}) + \dots + \frac{1}{t!} \frac{\partial^t}{\partial \lambda^t} R_k(\varphi) = 0, k = 1, 2, \dots, p$$

eşitliklerini ve

b) Diferensiyel denkleme göre de

$$S(\varphi) = 0$$

$$S(\varphi_1) + \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} S(\varphi) = 0$$

.....

$$S(\varphi_t) + \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} S(\varphi_{t-1}) + \dots + \frac{1}{t!} \frac{\partial^t}{\partial \lambda^t} S(\varphi) = 0, k = 1, 2, \dots, p$$

eşitliklerini sağlayan $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ fonksiyonlarına $\varphi(x)$ özfonksiyonuna dayalı genelleştirilmiş özfonksiyonlar denir.

4.3 Sınır Değer Problemi ile Bu Probleme ait Eşlenik Problemin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları Arasındaki İlişkiler

n -yinci mertebeden denkleme sahip olan

$$\begin{cases} S(u) = \lambda u \\ R_k(u) = 0, k = 1, \dots, p \end{cases}$$

sınır değer problemini göz önüne alalım.

4.3.1. Teorem λ_0 sayısı,

$$\begin{cases} S(u) = \lambda u \\ R_k(u) = 0, k = 1, \dots, p \end{cases}$$

probleminin geometrik kat (özkatı) m olan bir özdeğeri olmak üzere $\overline{\lambda_0}$ sayısı da bu probleme ait eşlenik problemin özdeğeri olup geometrik katı t dir.

4.3.2. Teorem L ve L^* , eşlenik problemlerin ürettiği diferansiyel operatörler ve bu operatörlerin birer özdeğeri sırasıyla λ ve μ olsun. $\lambda \neq \bar{\mu}$ ise bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonaldır.

4.3.3. Teorem Kendine eşlenik operatörün her bir özdeğeri reeldir.



5. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN GREEN FONKSİYON

5.1 Ters operatör

5.1.1. Tanım Bir A operatörünün tanım bölgesi $D(A)$ ve değer bölgesi $R(A)$ olsun. Eğer bir B operatörü için $D(B) = R(A)$ ve $D(A)$ bölgesindeki her x elemanı için de $B(Ax) = x$ oluyorsa B operatörüne A operatörünün **tersi** denir ve $A^{-1} = B$ şeklinde gösterilir. Buna göre $\forall x \in D(A)$ için

$$A^{-1}(Ax) = x$$

eşitliği sağlanır.

5.1.1. Önerme Eğer A operatörünün A^{-1} tersi varsa, A^{-1} operatörünün tersi de A operatörüdür.

5.1.2. Önerme Eğer A operatörü lineer ise A^{-1} operatörü de lineerdir.

5.1.3. Önerme A lineer operatörünün tersinin olması için gerek ve yeter şart

$$Ax = 0$$

denkleminin sadece $x = 0$ aşıkâr çözümünün bulunmasıdır.

5.2 Lineer Diferansiyel Operatörün Tersinin Varlığı

$$S(u) = a_p(x)u^{(p)} + \dots + a_0(x)u = 0, x \in [a, b]$$

$$R_k(u) = 0, k = 1, \dots, p$$

sınır değer problemi tarafından üretilen L lineer diferansiyel operatörü olsun. 6.6.1.3. Önermesinden L operatörünün tersinin var olması için gerek ve yeter şart $Lu = 0$ denkleminin sadece $u = 0$ aşıkâr çözümü varsa

$$S(u) = a_p(x)u^{(p)} + \dots + a_0(x)u = 0, x \in [a, b]$$

denkleminin her $y_1, y_2, \dots, y_n$ lineer bağımsız çözüm sistemi için

$$S(u) = a_p(x)u^{(p)} + \dots + a_0(x)u = 0, x \in [a, b]$$

$$R_k(u) = 0, k = 1, \dots, p$$

sınır değer problemi yardımıyla elde edilen

$$M = \begin{pmatrix} R_1(u_1) & \dots & R_1(u_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_p(u_1) & \dots & R_p(u_p) \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı p olup $\det M \neq 0$ dır. (Kandemir, 2015)

5.2.1. Tanım Homojen olmayan bir L diferansiyel operatörü verilmiş olsun.

$$G(x, \xi) : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa bu fonksiyona L operatörünün Green fonksiyonu adı verilir.

- 1) $G(x, \xi)$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığındaki her x ve ξ değerleri için sürekli ve x e göre $(p-2)$ inci mertebeye kadar (bu mertebe dahil) sürekli türevlere sahip;

- 2) $\xi \in (a, b)$ olmak üzere $G(x, \xi)$ fonksiyonu, $[a, \xi)$ ve $(\xi, b]$ aralıklarındaki her x değeri için $(p-1)$ inci mertebeden sürekli türevlere sahip, ayrıca $x = \xi$ noktasında bu fonksiyonun $(p-1)$ inci türevi, sıçrama değeri $\frac{1}{a_n(\xi)}$ olan ve

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} G(\xi + 0, \xi) - \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} G(\xi - 0, \xi) = \frac{1}{a_p \xi}$$

- 3) x değişkeninin fonksiyonu gibi göz önüne alınan $G(x, \xi)$ fonksiyonu $[a, \xi)$ ve $(\xi, b]$ aralıklarının her birinde

$$S(G) = 0$$

$$R_k(G) = 0, k = 1, \dots, p$$

sınır değer probleminin çözümüdür. (Kandemir, 2015)

5.2.1. Teorem $Lu = 0$ denkleminin sadece $u = 0$ aşıkâr çözümü varsa L operatörünün Green fonksiyonu var ve tektir.

5.3 Green Fonksiyonu Yardımı ile Bir Diferansiyel Operatörün Tersinin Bulunması

$Lu = 0$ denkleminin sadece $y = 0$ aşıkâr çözümünün olması halinde L operatörünün L^{-1} ters operatörü ve Green fonksiyonu vardır.

Eğer $L^{-1}f = u$ ise $Lu = f$ olacağından u fonksiyonu $L(y) = f$ denklemini ve $R_k(u) = 0, k = 1, \dots, p$ sınır şartlarını sağlar.

5.3.1. Teorem $Lu = 0$ denkleminin sadece $u = 0$ aşıkâr çözümü varsa, $[a, b]$ aralığında sürekli herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için $Lu = f$ denkleminin

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

şeklinde bir çözümü vardır. Burada $G(x, \xi)$, L operatörünün Green fonksiyonudur.

5.4 Eşlenik Operatörün Green Fonksiyonu

$$S(u) = 0$$

$$R_k(u) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

sınır değer problemi tarafından üretilen diferansiyel operatör L ve bu problemin

$$S^*(\varphi) = 0$$

$$K_k(\varphi) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

eşlenik probleminin ürettiği diferansiyel operatör L^* olsun. L operatörünün rankı r ve L^* operatörünün rankı r^* olmak üzere $\mathcal{L}y = 0$ denkleminin sadece $y \equiv 0$ aşıkâr çözümü varsa $r = p$ olacağından, ayrıca $p = t$ olduğundan

$$r^* = p - t + r = r = p$$

eşitliği görülür. $r^* = p$ olması nedeniyle $L^*u = 0$ denkleminin de sadece $u \equiv 0$ aşıkâr çözümü vardır. Bu teoreme göre $t = p$ ve

$$S(u) = 0$$

$$R_k(u) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

sınır değer probleminin sadece aşıkâr çözüme sahipse

$$L^*(\varphi) = 0$$

$$K_k(\varphi) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

eşlenik sınır değer probleminin de sadece aşıkâr çözümü vardır. Bu nedenle L^* operatörünün de tersi mevcut olup L^* operatörü bir Green fonksiyonuna sahiptir. L ve L^* operatörlerinin Green fonksiyonunu sırasıyla $G(x, \xi)$ ve $H(x, \xi)$ ile gösterelim. $Ly = f$ ve $L^*\varphi = g$ olmak üzere $L^{-1}f = u$ ve $L^{*-1}g = \varphi$ olacağından

$$(y, L^*\varphi) = (Ly, \varphi)$$

denklemini

$$(L^{-1}f, g) = (f, L^{*-1}g)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca teoremden $L^{-1}f$ ve $L^{*-1}g$ ifadeleri

$$(L^{-1}f)(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

ve

$$(L^{*-1}g)(\xi) = \int_a^b H(\xi, x) g(x) dx$$

integral operatörü biçiminde yazılabilir.

$$(L^{-1}f, g) = \left(\int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi, g \right)$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \right) \overline{g(x)} dx$$

olduğundan $(L^{-1}f, g) = (f, L^{*-1}g)$ eşitliğinin birinci tarafı

$$\begin{aligned}
(L^{-1}f, g) &= \left(\int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi, g \right) \\
&= \int_a^b \left(\int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \right) \overline{g(x)} dx \quad (8)
\end{aligned}$$

şeklinde ve ikinci tarafı da

$$\begin{aligned}
(f, L^{*-1}g) &= \left(f, \int_a^b H(\xi, x) g(x) dx \right) \\
&= \int_a^b f(\xi) \overline{\left(\int_a^b H(\xi, x) g(x) dx \right)} d\xi \quad (9)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Buna göre (8) ve (9) den $(L^{-1}f, g) = (f, L^{*-1}g)$ eşitliği

$$\int_a^b \left(\int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \right) \overline{g(x)} dx = \int_a^b f(\xi) \overline{\left(\int_a^b H(\xi, x) g(x) dx \right)} d\xi$$

ve

$$\int_a^b \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) \overline{g(x)} dx d\xi = \int_a^b \int_a^b \overline{H(\xi, x)} f(\xi) \overline{g(x)} dx d\xi$$

şeklini alır. Buradan,

$$G(x, \xi) = \overline{H(x, \xi)}$$

olduğu görülür. (Kandemir, 2015)

5.4.1. Teorem Eşlenik diferensiyel operatörlerin Green fonksiyonları eşleniktir.

5.4.1. Tanım $G(x, \xi) = \overline{H(x, \xi)}$ eşitliğini sağlayan $G(x, \xi)$ ve $H(x, \xi)$ çekirdeklerine eşlenik çekirdekler denir. Diğer bir ifadeyle $H(x, \xi)$ fonksiyonuna $G(x, \xi)$ fonksiyonuna eşlenik Green fonksiyonu adı verilir ve $G^*(x, \xi)$ ile gösterilir. O halde

$$G^*(x, \xi) = \overline{G(x, \xi)} = H(x, \xi)$$

$$G^{**}(x, \xi) = \overline{\overline{G(x, \xi)}} = \overline{H(x, \xi)} = G(x, \xi)$$

olduğundan $G(x, \xi)$ ve $G^*(x, \xi)$ fonksiyonları birbirlerinin eşleniğidir.

Özel olarak L kendine eşlenik yani $L = L^*$ ise $G(x, \xi) = H(x, \xi)$ olur. Buradan $\overline{G(x, \xi)} = \overline{H(x, \xi)}$ olup $G(x, \xi) = \overline{H(x, \xi)}$ göz önüne alınırsa

$$G(x, \xi) = \overline{G(x, \xi)}$$

olduğu görülür.

5.4.2. Tanım $G(x, \xi) = \overline{G(x, \xi)}$ şartını sağlayan bir $G(x, \xi)$ çekirdeğine Hermitian (veya Hermit çekirdeği) adı verilir.

5.4.2. Teorem Kendine eşlenik bir diferensiyel operatörün Green fonksyonu bir Hermitian çekirdektir.

5.5 Spektral Parametrelili Homojen Olmayan Sınır Değer Probleminin İntegral Denklem Şekline Getirilmesi

λ bir parametre ve $f(x)$, x in sürekli bir fonksiyonu olmak üzere aşağıda verilen problemini dikkate alalım.

$$S(u) = \lambda u + f(x), a \leq x \leq b$$

$$R_k(u) = 0, k = 1, 2, 3, \dots, p \quad (10)$$

bu problemin ürettiği diferensiyel operatör L olsun. O halde (1) problemi

$$Lu = \lambda u + f(x) \quad (11)$$

şeklinde yazılabilir.

$$Lu = 0$$

denkleminin sadece aşıkâr çözüme sahip olduğunu ve L operatörünün Green fonksiyonunun $G(x, \xi)$ olduğunu kabul edelim. Buna göre (2) denkleminde

$$\begin{aligned} u(x) &= L^{-1}(\lambda u + f) = \lambda L^{-1}u + L^{-1}f \\ &= \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi + \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (12) \end{aligned}$$

integral denklemi elde edilir. Burada (10) problemi ile (12) integral denklemi eşdeğerdir. Aynı şekilde

$$S(u) = 0$$

$$R_k(u) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

problemi ile

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi$$

integral denklemi ile eşdeğerdir.

6. STURM-LIOUVILLE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Bu bölümdeki tanım ve teoremler (Kandemir, 2015) kaynağından alınmıştır.

6.1. Tanım $[a, b]$ aralığında $m(x), m'(x), t(x)$ ve $c(x)$ fonksiyonları sürekli, bütün noktalarında $m(x) > 0, c(x) > 0$ ve λ, x parametresinden bağımsız bir değişken olmak üzere

$$(m(x)y')' + (t(x) + \lambda c(x))y = 0, a \leq x \leq b \quad (13)$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0,$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0 \quad (14)$$

biçiminde ifade edilen bu probleme, regüler Sturm-Liouville sınır değer problemi (veya Sturm-Liouville sistemi) adı verilir. Sınır şartlarında en az biri sıfırdan farklı α_1, α_2 ve β_1, β_2 sayıları vardır. Sıfır veya sıfırdan farklı $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sayılarının bulunması durumunda farklı ifade edilebilir. Farklı sınır şartlarında farklı Sturm-Liouville sınır değer problemleri var olabilir.

6.2. Tanım (14) ile verilen sınır şartlarında

$$y(a) = y(b) \text{ ve } y'(a) = y'(b)$$

ise sınır şartlarına periyodik sınır şartları denir. (13)–(14) problemine periyodik Sturm-Liouville problemi denir.

6.3. Tanım $m(x), t(x)$ veya $c(x)$ fonksiyonlarından birinin bir $x = x_0$ da singüler olması halinde (13) denkleminde $x = x_0$ noktasında singüler Sturm-Liouville denklemi, (13)–(14) problemine de singüler Sturm-Liouville problemi (singüler Sturm-Liouville sistemi) denir.

- 1) Herhangi bir $x \in [a, b]$ için $m(x) = 0$ veya $c(x) = 0$.
- 2) $m(x), t(x)$ veya $c(x)$ fonksiyonlarından en az biri a ve b noktalarının en az birinde ∞ .
- 3) (a, b) aralığı sınırsız, yani $(-\infty, b), (a, \infty)$ veya $(-\infty, \infty)$.

Yukarıdaki durumlardan en az biri gerçekleşiyorsa (13)–(14) problemi bir singüler Sturm-Liouville problemidir.

6.1. Teorem m_2, m_1, m_0 ve c_0 bir $[a, b]$ aralığında sürekli, $m_2 > 0$ ve $c_0 > 0$ olmak üzere

$$m_2 y'' + m_1 y' + m_0 y + \lambda c_0 y = 0 \quad (15)$$

denklemini

$$(m(x)y')' + (t(x) + \lambda c(x))y = 0 \quad (16)$$

şeklinde yazılabilir.

6.4. Tanım (13)-(14) Sturm-Liouville sınır değer probleminin sıfırdan farklı bir y çözümüne sahip olmasını sağlayan λ sayısına problemin bir özdeğeri, bu λ özdeğerine karşılık elde edilen sıfırdan farklı y çözümüne de problemin bir özfonksiyonu denir. (13)-(14) probleminin bütün özdeğerlerinin kümesine bu problemin spektrumu denir. (13)-(14) probleminin ürettiği diferansiyel operatör L olmak üzere sözü edilen λ özdeğerlerine, L operatörünün spektrumu denir ve $\sigma(L)$ şeklinde gösterilir.

6.1 Regüler Sturm-Liouville Sınır Değer Probleminin Özellikleri

Bu kısımda

$$l(y) = (m(x)y')' + t(x)y$$

olmak üzere

$$l(y) + \lambda c(x)y = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (17)$$

$$l_1 = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad (18)$$

$$l_2 = \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$ şeklinde verilen regüler Sturm-Liouville problemini göz önüne alacağız. İkinci mertebeden olan $l(y)$, kendine eşleniktir.

6.1.1. Teorem (17)-(18) probleminin (18) sınır şartları kendine eşleniktir.

6.1.2. Teorem (17)-(18) problemi kendine eşleniktir.

6.1.3. Teorem Kendine eşlenik olan (17)-(18) regüler sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

6.1.4. Teorem (17)-(18) regüler Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri basittir.

6.2 Regüler Sturm-Liouville Sınır Değer Probleminin Özfonksiyonlarının Özellikleri

1) Özfonksiyonlarının Dikliği

6.2.1. Tanım Bir $a \leq x \leq b$ aralığında $y_m(x)$ ve $y_n(x)$ farklı iki özfonksiyon olmak üzere bu fonksiyonlara $a \leq x \leq b$ aralığındaki $c(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) c(x) dx = 0$$

ise $y_m(x)$ ve $y_n(x)$ özfonksiyonlarına diktir (ortogonal) denir. Buna göre farklı özfonksiyonları dik olan özfonksiyonların kümesine $\{y_n(x)\}, n=1,2,3,\dots$ dik küme adı verilir.

6.2.1. Teorem Regüler Sturm-Liouville probleminin birbirinden farklı λ_m ve λ_n özdeğerlerine sırasıyla karşılık gelen farklı $y_m(x)$ ve $y_n(x)$ özfonksiyonları diktir.

2) Özfonksiyonların Serisi

6.2.2. Teorem $[a,b]$ aralığında Regüler Sturm-Liouville probleminin tüm özdeğerleri $\lambda_v, v=1,2,\dots$ ve bu özdeğerlere uygun özfonksiyonları sırası ile $y_n, n=1,2,\dots$ olsun ve f fonksiyonu $a < x < b$ aralığında parçalı düzgün olsun. O halde f fonksiyonunun (y_n) özfonksiyonlar sistemine göre Fourier serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n y_n(x)$$

olsun. O halde bu özfonksiyon serisi f nin sürekli olduğu her x noktasında $f(x)$ fonksiyonuna ve f nin süreksiz olduğu her $x = x_i$ noktasında

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) \right)$$

değerine yakınsar.

3) Özfonksiyonların Sıfırı

6.2.3. Teorem Regüler Sturm-Liouville probleminin $\lambda_n, n=1,2,3,\dots$ özdeğerlerine karşılık gelen her bir y_n özfonksiyonunun $a < x < b$ aralığında $(n-1)$ - tane sıfırı (özfonksiyonu sıfır yapan nokta) vardır.

6.3 Regüler Sturm-Liouville Probleminin Green Fonksiyonu

$$l(y) = (m(x)y')' + t(x)y = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (19)$$

$$l_1(y) = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad (20)$$

$$l_2(y) = \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

bu problem için Green fonksiyonunun tanımını yeniden ifade edelim.

6.3.1. Tanım

$$G : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad G(x, \xi)$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa bu fonksiyona (19)-(20) probleminin Green fonksiyonu denir.

- i. $G(x, \xi)$ fonksiyonu $[a, b] \times [a, b]$ üzerinde sürekli
- ii. $\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x}$ türevi $[a, b] \times (a, b]$ üzerinde sürekli

$$\frac{\partial G(x+0, \xi)}{\partial x} - \frac{\partial G(x-0, \xi)}{\partial x} = \frac{1}{p(\xi)}$$

şeklinde bir sıçrama süreksizliğine sahip

- iii. $l(G(x, \xi)) = 0, \quad x \in [a, b], \quad x \neq \xi$
- iv. $U_k(G(x, \xi)) = 0, \quad x \in (a, b), \quad k = 1, 2.$

Şimdi (19)-(20) probleminin Green fonksiyonunun elde edilmesini inceleyelim.

y_1 ve y_2 , (19) denkleminde ait

$$l(y) = (m(x)y')' + t(x)y = 0 \quad (21)$$

homojen denklemin sıfırdan çözümleri olsun.

$G(x, \xi)$ Green fonksiyonu $x < \xi$ ve $x > \xi$ için (21) homojen denklemini ve ayrıca homojen sınır şartlarını sağladığından v_1, v_2, d_1 ve d_2, ξ nin bilinmeyen fonksiyonları olmak üzere

$$G(x, \xi) = \begin{cases} v_1(\xi)y_1(x) + d_1(\xi)y_2(\xi), & a \leq x < \xi \\ v_2(\xi)y_2(x) + d_2(\xi)y_1(\xi), & \xi < x \leq b \end{cases} \quad (22)$$

şeklinde bir fonksiyondur. Eğer y_1 çözümünün $x = a$ noktasındaki sınır şartının ve y_2 çözümünün de $x = b$ noktasındaki sınır şartını sağladığı kabul edilirse, yani

$$\alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y_1'(a) = 0$$

$$\beta_1 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) = 0$$

biçiminde alınırsa $d_1 = d_2 = 0$ olacağından (22) Green fonksiyonu

$$G(x, \xi) = \begin{cases} v_1(\xi)y_1(x), & a \leq x < \xi \\ v_2(\xi)y_2(x), & \xi < x \leq b \end{cases}$$

şeklini alır. Green fonksiyonunun tanımı gereğince verilen aralıkta sürekli olduğundan

$$G(\xi - 0, \xi) = G(\xi + 0, \xi) \quad (23)$$

$$c_1(\xi)y_1(\xi) = c_2(\xi)y_2(\xi)$$

eşitliğini yazabiliriz. Yine tanımdan dolayı

$$\frac{\partial G(x+0, \xi)}{\partial x} - \frac{\partial G(x-0, \xi)}{\partial x} = \frac{1}{p(\xi)} \quad (24)$$

$$c_1(\xi)y_1'(\xi) - c_2(\xi)y_2'(\xi) = -\frac{1}{p(\xi)}$$

eşitliği yazılır. (23) ve (24) den $v_1(\xi)$ ve $v_2(\xi)$ ile bilinmeyenleri ve w ile Wronskian determinantını gösterirsek

$$c_1(\xi) = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, c_2(\xi) = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}$$

biçiminde bulunur. Buna göre problemin Green fonksiyonu

$$G(x, \xi) = \frac{1}{p(\xi)W(\xi)} \begin{cases} y_1(x)y_2(\xi), & a \leq x < \xi \\ y_1(\xi)y_2(x), & \xi < x \leq b \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. O halde (19)-(20) probleminin çözümü

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

fonksiyonudur.

7. SÜREKSİZ KATSAYILI VE GEÇİŞ ŞARTI BULUNDURAN BİR STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN FREDHOLM OPERATÖRÜ OLMA ÖZELLİĞİ

Burada,

$$L(\lambda)u := t(x)u'' + (s(x) - \lambda^2)u = f(x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (7.1)$$

süreksiz katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklemi ile

$$L_k u := \alpha_k u^{(m_k)}(-1) + \beta_k u^{(m_k)}(-0) + \eta_k u^{(m_k)}(+0) + \delta_k u^{(m_k)}(1) = g_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (7.2)$$

geçiş şartları içeren sınır şartlarından oluşmuş sınır değer problemi incelenmiştir.

Burada $t(x)$, $x \in [-1, 0)$ için $t(x) = t_1$ ve $x \in (0, 1]$ için $t(x) = t_2$ şeklinde tanımlı parçalı sabit fonksiyon; λ kompleks parametre; $t_1, t_2, \alpha_k, \beta_k, \eta_k, \delta_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$) kompleks sayılar; $m_k \geq 0$ şeklinde tam sayılar; $s(x)$, $[-1, 0) \cup (0, 1]$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon; $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$ ve $|\alpha_k| + |\beta_k| + |\eta_k| + |\delta_k| \neq 0$, ($k = 1, 2, 3, 4$) şeklinde ifade edilir. Bu çalışmada yukarıda belirlenen süreksiz katsayılı sınır değer problemine ait diferansiyel operatörün Fredholm operatörü olma özelliği araştırılmıştır.

7.1. Homojen Olmayan Geçiş Şartları Bulunduran ve Homojen Denkleme Sahip Sınır Değer Problemi

Burada

$$L_1(\lambda)u := t(x)u'' + (a(x) - \lambda^2)u = 0, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (7.1.1)$$

homojen denklemi ve geçiş şartı

$$L_{k1} u := \alpha_k u^{(m_k)}(-1) + \beta_k u^{(m_k)}(-0) + \eta_k u^{(m_k)}(+0) + \delta_k u^{(m_k)}(1) = g_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (7.1.2)$$

sınır değer problemini inceleyeceğiz. Burada,

$$\varphi_k := (-1)^k \sqrt{r_k^{-1} \lambda}, \quad r_1 = r_2 = t_1, \quad r_3 = r_4 = t_2, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

$$\underline{\varphi} := \min \{ \arg t_1, \arg t_2 \}, \quad \bar{\varphi} := \max \{ \arg t_1, \arg t_2 \}$$

$$\theta := \begin{vmatrix} \alpha_1 \varphi_1^{m_1} & \beta_1 \varphi_2^{m_1} & \eta_1 \varphi_3^{m_1} & \delta_1 \varphi_4^{m_1} \\ \alpha_2 \varphi_1^{m_2} & \beta_2 \varphi_2^{m_2} & \eta_2 \varphi_3^{m_2} & \delta_2 \varphi_4^{m_2} \\ \alpha_3 \varphi_1^{m_3} & \beta_3 \varphi_2^{m_3} & \eta_3 \varphi_3^{m_3} & \delta_3 \varphi_4^{m_3} \\ \alpha_4 \varphi_1^{m_4} & \beta_4 \varphi_2^{m_4} & \eta_4 \varphi_3^{m_4} & \delta_4 \varphi_4^{m_4} \end{vmatrix}$$

ve her $\nu > 0$ sayısı için

$$D(\underline{\varphi}, \bar{\varphi}, \nu) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \pi + \bar{\varphi} + \nu < \arg \lambda < 3\pi + \underline{\varphi} - \nu \}$$

gösterimleri göz önüne alınacak.

Ayrıca $k \geq 0$ ve $q > 1$ olmak üzere $[-1, 0) \cup (0, 1]$ üzerinde tanımlı $u(x)$ kompleks değerli fonksiyonlarının Banach uzayı olarak $W_q^k(-1, 0) + W_q^k(0, 1)$ Sobolev uzaylarının direkt toplam uzayı göz önüne alınacaktır. Bu uzayın normu,

$$\|u\|_{q,k} = \|u\|_{W_q^k(-1,0)} + \|u\|_{W_q^k(0,1)}$$

şeklinde tanımlıdır.

Burada $W_q^k(a, b)$ alışılmış Sobolev uzayı, (a, b) üzerinde k -yıncı mertebeden genelleştirilmiş türevlere sahip ölçülebilen $u(x)$ fonksiyonlarının Banach uzayıdır. Bu uzayın normu

$$\|u\|_{W_q^k(a,b)} = \sum_{j=0}^k \left(\int_a^b |u^{(j)}(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde tanımlıdır. $W_q^0(a,b) = L_q(a,b)$ olduğu açıktır.

7.1.1. Teorem $\theta \neq 0$ ise bu durumda her $\nu > 0$ sayısı ve her $\lambda \in D(\underline{\varphi}, \bar{\varphi}, \nu)$ için $|\lambda| > \mu_\nu$ olacak şekilde $\mu_\nu > 0$ sayısı mevcut olup, $\omega = \max\{2, \{m_1, m_2, m_3, m_4\} + 1\}$ olmak üzere (7.1.1)-(7.1.2) probleminin $W_q^k(-1,0) + W_q^k(0,1)$ uzayına ait bir tek $u(x)$ çözümü vardır ve bu λ değerleri için

$$\sum_{k=0}^{\omega} |\lambda|^{\omega-k} \|u\|_{q,k} \leq C(\nu) \sum_{i=1}^4 |\lambda|^{\omega-m_i-\frac{1}{q}} |f_i| \quad (7.1.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (7.1.1) denkleminin çözümleri, $x \in [-1,0)$ için $u_1(x), u_2(x)$ ve $x \in (0,1]$ için $u_3(x), u_4(x)$ olmak üzere

$$x \in [-1,0) \text{ için } u_1(x, \lambda) = e^{\varphi_1 \lambda (x+1)}, u_2(x, \lambda) = e^{\varphi_2 \lambda x}, u_3(x, \lambda) = u_4(x, \lambda) = 0,$$

$$x \in (0,1] \text{ için } u_1(x, \lambda) = u_2(x, \lambda) = 0, u_3(x, \lambda) = e^{\varphi_3 \lambda x}, u_4(x, \lambda) = e^{\varphi_4 \lambda (x-1)}$$

şeklindedir. Buna göre (7.1.1) denkleminin genel çözümü

$$u(x, \lambda) = \sum_{j=1}^4 c_j u_j(x, \lambda) \quad (7.1.4)$$

biçiminde yazılabilir. (7.1.4) genel çözümü (7.1.2) sınır şartlarında yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} & c_1 (\varphi_1 \lambda)^{m_k} (\alpha_k + \beta_k e^{\varphi_1 \lambda}) + c_2 (\varphi_2 \lambda)^{m_k} (\alpha_k e^{-\varphi_2 \lambda} + \beta_k) \\ & + c_3 (\varphi_3 \lambda)^{m_k} (\eta_k + \delta_k e^{\varphi_3 \lambda}) + c_4 (\varphi_4 \lambda)^{m_k} (\eta_k e^{-\varphi_4 \lambda} + \delta_k) = g_k, \quad k=1,2,3,4 \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

denklemini bulunur.

$\lambda \in D(\underline{\varphi}, \overline{\varphi}, \nu)$ için

$$\frac{\pi + \nu}{2} < \{\arg \varphi_1 \lambda, \arg \varphi_2 \lambda\} < \frac{3\pi - \nu}{2},$$

$$\frac{\nu - \pi}{2} < \{\arg \varphi_3 \lambda, \arg \varphi_4 \lambda\} < \frac{\pi - \nu}{2}$$

olacağından λ ve $\nu > 0$ için

$$(-1)^{k+1} \operatorname{Re}(\varphi_k \lambda) \leq -|\lambda| |\varphi_k| \sin \frac{\nu}{2}, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

eşitsizliği elde edilir. O halde (7.1.5) sistemine ait katsayılar determinanı

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \lambda^{m_1+m_2+m_3+m_4} \begin{pmatrix} \alpha_1 \varphi_1^{m_1} & \beta_1 \varphi_2^{m_1} & \eta_1 \varphi_3^{m_1} & \delta_1 \varphi_4^{m_1} \\ \alpha_2 \varphi_1^{m_2} & \beta_2 \varphi_2^{m_2} & \eta_2 \varphi_3^{m_2} & \delta_2 \varphi_4^{m_2} \\ \alpha_3 \varphi_1^{m_3} & \beta_3 \varphi_2^{m_3} & \eta_3 \varphi_3^{m_3} & \delta_3 \varphi_4^{m_3} \\ \alpha_4 \varphi_1^{m_4} & \beta_4 \varphi_2^{m_4} & \eta_4 \varphi_3^{m_4} & \delta_4 \varphi_4^{m_4} \end{pmatrix} \\ &\quad + \lambda^{\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4} \begin{pmatrix} \beta_1 \varphi_1^{m_1} & \alpha_1 \varphi_2^{m_1} & \delta_1 \varphi_3^{m_1} & \eta_1 \varphi_4^{m_1} \\ \beta_2 \varphi_1^{m_2} & \alpha_2 \varphi_2^{m_2} & \delta_2 \varphi_3^{m_2} & \eta_2 \varphi_4^{m_2} \\ \beta_3 \varphi_1^{m_3} & \alpha_3 \varphi_2^{m_3} & \delta_3 \varphi_3^{m_3} & \eta_3 \varphi_4^{m_3} \\ \beta_4 \varphi_1^{m_4} & \alpha_4 \varphi_2^{m_4} & \delta_4 \varphi_3^{m_4} & \eta_4 \varphi_4^{m_4} \end{pmatrix} \\ &= \lambda^m (\theta + h(\lambda)) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Burada $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ ve $D(\underline{\varphi}, \overline{\varphi}, \nu)$ açısal bölgesinde $|\lambda| \rightarrow \infty$

için $h(\lambda) \rightarrow 0$ olur. $\theta \neq 0$ olduğundan ve $\lambda \in D(\underline{\varphi}, \overline{\varphi}, \nu)$ için $|\lambda| > \mu_\nu$ olacak şekilde $\mu_\nu > 0$

sayısı bulunabileceğinden $\Delta(\lambda) \neq 0$ olur. Buna göre $\Delta_{jk}(\lambda)$ determinantları $\Delta(\lambda)$ determinantının (j, k) -yıncı bileşenleri olmak üzere (7.1.5) sistemi için bir tek

$$c_j(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{k=1}^4 \Delta_{jk}(\lambda) g_k, \quad k=1, 2, 3, 4$$

çözümü vardır. Burada $\Delta_{jk}(\lambda) = (\theta_{jk} + h_{jk}(\lambda))^{m-m_k}$ olup, θ_{jk} kompleks sayılar ve $D(\underline{\varphi}, \bar{\varphi}, \nu)$ açısal bölgesinde $|\lambda| \rightarrow \infty$ için $h_{jk}(\lambda) \rightarrow 0$ olur. Buna göre

$$c_j(\lambda) = \sum_{k=1}^4 \lambda^{-m_k} \frac{\theta_{jk} + h_{jk}(\lambda)}{\theta + h(\lambda)} g_k, \quad j=1, 2, 3, 4$$

eşitliği görülür. Buna göre (7.1.1)-(7.1.2) probleminin çözümü

$$u(x, \lambda) = \sum_{j=1}^4 c_j u_j(x, \lambda) = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \lambda^{-m_k} \frac{\theta_{jk} + h_{jk}(\lambda)}{\theta + h(\lambda)} g_k u_j(x, \lambda)$$

biçiminde bulunur. Bu çözüm dikkate alındığında $\omega \geq 0$ tamsayısı için ve $(-1, 0) = I_1 = I_2$, $(0, 1) = I_1 = I_2$ olmak üzere

$$\|u^{(\omega)}(x, \lambda)\|_{L_q(-1,1)} \leq C \sum_{k=1}^4 \left(|\lambda|^{\omega-m_k} |f_k| \sum_{j=1}^4 \|u_j(x, \lambda)\|_{L_q(I_j)} \right) \quad (7.1.6)$$

eşitsizliği yazılır. Ayrıca (7.1.4) genel çözümünde bulunan $u_1(x, \lambda)$ fonksiyonu, $\lambda \in D(\underline{\varphi}, \bar{\varphi}, \nu)$ ve $|\lambda| \rightarrow \infty$ için

$$\begin{aligned} \|u_1(x, \lambda)\|_{L_q(-1,0)}^q &= \int_{-1}^0 e^{q \operatorname{Re}(\varphi_1 \lambda)(x+1)} dx \leq \int_{-1}^0 e^{-q|\lambda| |\varphi_1| \sin \frac{\nu}{2}(x+1)} dx \\ &= \left(-q|\lambda| |\varphi_1| \sin \frac{\nu}{2} \right)^{-1} e^{-q|\lambda| |\varphi_1| \sin \frac{\nu}{2}} \leq C(\nu) |\lambda|^{-1} \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

eşitsizliği bulunur. Benzer olarak (7.1.4) genel çözümünde bulunan diğer fonksiyonlar ve $\lambda \in D(\underline{\varphi}, \overline{\varphi}, \nu)$ ve $|\lambda| \rightarrow \infty$ için de

$$\|u_j(x, \lambda)\|_{L_q(I_j)}^q \leq C(\nu) |\lambda|^{-1}, \quad j = 2, 3, 4 \quad (7.1.8)$$

eşitsizlikleri bulunur. (7.1.7) ve (7.1.8) eşitsizlikleri (7.1.6) da yerine yazılırsa

$$\|u^{(\omega)}(x, \lambda)\|_{L_q(-1,1)} \leq C(\nu) \sum_{k=1}^4 \left(|\lambda|^{\omega - m_k - \frac{1}{q}} |f_k| \right)$$

eşitsizliği görülür. Bu eşitsizlik kullanılarak (7.1.3) bulunur (Muhtaroglu ve Yakubov, 2002).

Şimdi (7.1)-(7.2) problemine ait lineer diferansiyel $\mathcal{L}$ operatörünü göz önüne alalım.

$\omega = \max \{2, \{m_1, m_2, m_3, m_4\} + 1\}$ olmak üzere $\mathcal{L}$ operatörü $W_q^\omega(-1, 0) + W_q^\omega(0, 1)$ uzayından, $W_q^{\omega-2}(-1, 0) + W_q^{\omega-2}(0, 1) + \mathbb{C}^4$ uzayı üzerine tanımlıdır. Bu $\mathcal{L}$ operatörü için aşağıdaki teoremi verelim.

7.1.2. Teorem

1) $t_1 \neq 0, t_2 \neq 0$,

2) $s(x)$, $[-1, 0] \cup (0, 1]$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon,

olmak üzere $\mathcal{L}$ lineer operatörü sınırlı ve Fredholm operatörüdür.

İspat. $\mathcal{L}$ operatörü

$$\mathcal{L}_1 u = (t(x)u'', u(-1), u'(-1), u(-0) - u(+0), u'(-0) - u'(+0)),$$

$$\mathcal{L}_2 u = (s(x)u + \lambda u, L_{11}u - u(-1), L_{21}u - u'(-1), L_{31}u - u(-0) + u(+0), L_{41}u - u'(-0) + u'(+0))$$

şeklinde yazılabilir. 7.1.1. Teoremi gereğince $\mathcal{L}_1$ operatörü $W_q^\omega(-1,0) + W_q^\omega(0,1)$ uzayından, $W_q^{\omega-2}(-1,0) + W_q^{\omega-2}(0,1) + \mathbb{C}^4$ uzayına bir izomorfizmdir.

Ayrıca $\mathcal{L}_2$ operatörü $W_q^\omega(-1,0) + W_q^\omega(0,1)$ uzayından, $W_q^{\omega-2}(-1,0) + W_q^{\omega-2}(0,1) + \mathbb{C}^4$ uzayına bir kompakt olduğu elde edilebilir. Sonuç olarak (Muhtaroglu ve Yakubov ,2002) ve (Kato, 1966) Fredholm perturbasyon operatör teoremi gereğince $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ olup $\mathcal{L}_1$ izomorfizm ve $\mathcal{L}_2$ kompakt olduğundan $\mathcal{L}$ operatörü Fredholm operatörüdür.

KAYNAKLAR

- A. N. Kolmogorov, S. V. (1962). *Measure, Lebesgue Integrals, and Hilbert Space*.
- A. V. Likov, Y. A. (1963). The theory of heat and mass transfer, Qosenergaizdat.
- Agranovich, M. S., & N. N. Voitovich, B. Z. (1999). *Spectral properties of diffraction problems, in: The Generalized method of eigenoscillations in the theory of diffraction*. Nauka, Moscow, 1977 (in Russian: translated into English Wiley-VCH, Berlin).
- Al-Gwaiz, M. A. (2007). *Sturm-Liouville theory and its applications*. Springer.
- Aliyev., Z. S. (2010). Basis properties of a fourth order differential operator with spectral parameter in the boundary condition,. *Open Mathematics*, 378-388.
- Aydemir, K. (2014). Boundary value problems with eigenvalue depending boundary and transmission conditions. *Boundary Value Problems* (s. 1-131).
- B. P. Allahverdiev, E. B. (2013). Eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems in boundary conditions with transmission conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 401 No. 1, 388-396.
- Balcı, M. (2012). *Reel Analiz*. İstanbul: Sürat Üniversite Yayınları.
- Bayraktar, M. (2017). *Fonksiyonel Analiz*. Ankara: Korza Yayıncılık Basım San. ve Tic. A.Ş.
- Bizim, O. (2013). *Genel Topoloji*. Bursa: Dora Basım-Yayın Dağıtım Ltd. Şti., (1.Baskı).
- Fomin S. V., K. A. (1970). *Introductory Real Analysis*. New York: Dover Publications Inc.
- Fomin S. V., K. A. (1999). *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Volume 1: Metric and Normed Spaces*. New York: Dover Publications.
- Fomin S.V., K. A. (1999). *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Volume 2, Measure. The Lebesgue Integral. Hilbert Space*. New York: Dover Publications.
- G., M. V. (1985). *Sobolev Spaces*. Heidelberg: Springer Berlin.
- Holst, I. S. (2010). *Green's functions and boundary value problems, third edition*. A John Wiley & Sons, Inc. Publication.
- I. Titeux, Y. Y. (1997). Completeness of root functions for thermal conduction in a strip with piecewise continuous coefficients. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 7, 1035-1050.
- Kandemir Mustafa, M. O. (2017). Nonlocal Sturm-Liouville Problems With Integral Terms In The Boundary Conditions. *Electronic Journal Of Differential Equations*, 1-12. (Yayın No: 3519056) [SCI-Expanded].

- Kandemir Mustafa, M. O. (2020). Manypoint Boundary Value Problems For Elliptic Differential-Operator Equations With Interior Singularities. *Mediterranean Journal Of Mathematics*, 17(35), (Yayın No: 6046473) [SCI-Expanded].
- Kandemir, M. (2012). Irregular boundary value problems for elliptic differential-operator equations with discontinuous coefficients and transmission conditions. *Kuwait Journal of Science and Engineering*, 39 (1A), 71-97.
- Kandemir, M. (2015). *Diferansiyel Denklemler*. Ankara : Pegem Akademi Yayıncılık, (1.Baskı).
- Kato, T. (1966). *Perturbation theory for linear operators*,. Sipringer-Verlag, New York Inc.
- Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis With Applications*. New York: Wiley Classics Library Edition Published .
- M. Kandemir, Y. Y. (2010). Regular boundary value problems with a discontinuous coefficient, functional-multipoint conditions, and a linear spectral parameter. *Israel Journal of Mathematics*,, 255-270.
- Muhtaroglu Oktay, A. K. (2015). Eigenfunction Expansion For Sturm Liouville Problems With Transmission Conditions At One Interior Point. *Acta Mathematica Scientia*, 639-649 (Yayın No: 1696650) [SCI-Expanded].
- Muhtaroglu Oktay, A. K. (2019). Basis Properties Of The Eigenfunctions Of Twointerval Sturm–Liouville Problems,. *Analysis And Mathematical Physics*,, 1363-1382, Doi: <https://doi.org/10.1007/s13324-018-0242-8> (Yayın No: 5693571) [SCI-Expanded].
- Muhtaroglu Oktay, K. M. (2002). Sınır Şartlarında Özdeğer Parametresi Bulunduran Süreksiz Sturm Liouville Probleminin Bazı Spektral Özellikleri. *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, (Yayın No: 436163), 90-96.
- Muhtaroglu Oktay, Y. S. (2002). Problems For Ordinary Differential Equations With Transission Conditions, Applicable Analysis. (Yayın No: 436004) [SCI-Expanded], 1033-1064.
- Muhtaroglu, O. (2002). Sınır Şartlarının Birinde Özdeğer Parametresi Bulunduran Süreksiz Sturm Liouville Probleminin Özfonksiyonları. *Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, (Yayın No: 436104), 219-226.
- Mukhtarov Oktay, A. N. (1999). Sınır Şartlarında Özdeğer Parametresi Bulunduran Süreksiz Katsayılı Sınır Değer Probleminin Bazı Spektral Özellikleri. *I. Türk Dünyası Matematik Sempozyumu Fırat Üniversitesi Fen Ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, (Yayın No: 1698117), 303-312.
- N. Altınışık, O. S. (2003). Sınır Şartlarında Özdeğer Parametre Bulunduran Süreksiz Sınır Değer Probleminin Özdeğerleri. *Anadolu Üniversitesi Bilim Ve Teknoloji Dergisi, Cilt.4, Sayı.2*,, 173-180, (Yayın No: 436193).
- N. N. Voitovich, B. Z. (1997). *Generalized method of eigen-vibration in the theory of diffraction*. Moskow: Nauka.

- N. S. Imanbaev, M. A., & -. (2014). Characteristic determinant of the spectral problem for the ordinary differential operator with the boundary load, International conference on analysis and applied mathematics . *ICAAM-AIP Conference Proceedings*, 1611, 261-265.
- P. K. Jain, V. P. (2017). *Lebesgue Ölçüsü ve İntegrali*. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. LTD. ŞTİ.
- Penny, C. H. (2006). *Diferensiyel denklemler ve sınır değer problemleri*. Ankara: Palme Yayıncılık, (çeviri editörü Ömer Akın) (3.Baskı).
- Powers, D. L. (2006). *Boundary value problems and partial differential equations, fifth edition*. London: Elsevier academic press.
- S. Yakubov, Y. Y. (1999). *Differential-operator equation ordinary and partial differential equation*. Boca Raton, London State New York Washington, State D. C.: Chapman and Hall/CRC.
- Soykan, Y. (2012). *Metrik Uzaylar ve Topolojisi*. Ankara: Nobel Yayıncılık, (1.Baskı).
- Şuhubi, E. S. (2021). *Fonksiyonel Analiz*. İstanbul: İTÜ Vakfı Yayınları.
- Turmetov B. Kh., M. A. (2014). Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball. *Electronic Journal of Differential Equations*, 1-14.
- Yılmaz O., K. M. (2019). Eigenvalues and eigenfunctions of the Periodic Sturm-Liouville Problems with discontinuities. *Journal of New Results in Science*, 37-41.

ÖZGEÇMİŞ

Adı- Soyadı : Lale Çavuşoğlu UZUN

Eğitim Derecesi

Lise : Samsun 19 Mayıs Lisesi

Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi/ Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : Amasya Üniversitesi/ Matematik Anabilim Dalı

Yabancı Dili : İngilizce

Çalıştığı kurum

Samsun Büyükşehir Belediyesi – Öğretmen

Katıldığı Kongre

Kandemir M., Uzun Ç. L. (2021), *Süreksiz Katsayılı ve Geçiş Şartlı Bir Sturm-Liouville Probleminin Fredholm Operatörü Olma Özelliği*, Anadolu 6. Uluslararası Uygulamalı Bilimleri Kongresi, 1-7.