

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

HOMOTOPİ PERTÜRBASYON YÖNTEMİ İLE RASTGELE KESİRLİ
MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK LİSANS

Sefanur TOSUN

OCAK-2024
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**HOMOTOPİ PERTÜRBASYON YÖNTEMİ İLE RASTGELE KESİRLİ
MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER**

**RANDOM FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HOMOTOPY
PERTURBATION METHOD**

YÜKSEK LİSANS

Sefanur TOSUN

**OCAK-2024
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**HOMOTOPİ PERTÜRBASYON YÖNTEMİ İLE RASTGELE KESİRLİ
MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER**

**RANDOM FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HOMOTOPY
PERTURBATION METHOD**

YÜKSEK LİSANS

Sefanur TOSUN

Danışman: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

**OCAK-2024
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Homotopi Pertürbasyon Yöntemi ile Rastgele Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim.m Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

24/01/2024

Sefanur TOSUN

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda bana yön gösteren, desteğini ve yardımlarını esirgemeyen, bilgisinden, tecrübelerinden, araştırmalarından ve çalışmalarından çok şey öğrendiğim sayın Prof. Dr. Mehmet MERDAN hocama emekleri için teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tez çalışmamı hazırlarken bana yardım eden arkadaşlarıma, hayatım boyunca yanımda olan, aldığım her kararda beni destekleyen anne ve babama, kardeşlerime ve her daim yanımda olan sevgili eşime teşekkür ederim.

Sefanur TOSUN
GÜMÜŞHANE, 2024

ÖZET

Bu çalışmada adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile diferansiyel denklem sistemlerinin katsayıları veya başlangıç koşulları farklı olasılık dağılımlarından seçilerek denklemler rastgele hale getirilmiştir. Rastgele davranışları için Gamma, Beta, Normal, Düzgün, Laplace gibi sürekli zamanlı olasılık dağılımları kullanılarak incelenmiştir. Rastgele hale getirilen bu denklemler literatürde lineer olmayan denklemlerin çözümünde yaygın olarak kullanılan Homotopi Pertürbasyon Metodu'ndan faydalanılarak çözümler elde edilmiştir.

Elde edilen rastgele diferansiyel denklemlerin olasılık karakteristiklerinden en yaygın olarak kullanılan beklenen değer, varyans ve güven aralıkları hesaplanarak bulunan çözümlerin grafikleri MATLAB veya MAPLE paket programları yardımıyla çizdirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Homotopi Pertürbasyon metodu, Sürekli Zamanlı Olasılık dağılımları, Beklenen Değer, Varyans, Güven Aralıkları

SUMMARY

In this study, the coefficients or initial conditions of the systems of ordinary, partial and differential equations are chosen from different probability distributions and the equations are randomized. For their random behavior, they were studied using continuous time probability distributions such as Gamma, Beta, Normal, Uniform and Laplace. These randomized equations, which are made random, have been obtained by using the Homotopy Perturbation Method which is widely used in the solution of nonlinear equations in the literature.

The most commonly used expected value, variance and confidence intervals were calculated from the probability characteristics of the obtained random differential equations and the graphs of the solutions were drawn with the help of MATLAB or MAPLE package programs.

Keywords: Homotopy Perturbation method, Continuous Time probability distributions, Expected Value, Variance, Confidence Intervals

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Literatür Özeti	2
2. TEMEL TANIMLAR.....	4
2.1. Tanım (Gama Fonksiyonu)	4
2.2. Tanım (Beta Fonksiyonu)	4
2.3. Tanım (Caputo Kesirli Türev).....	4
2.4. Tanım (Rieamann-Liouville Kesirli Türev).....	4
3. MODİFİYE PERTÜRBASYON YÖNTEMİ.....	6
3.1. Bazı Dağılımları.....	7
3.1.1. Sürekli Düzgün Dağılım	7
3.1.2. Normal Dağılım.....	8
3.1.3. Üstel Dağılım	8
3.1.4. Laplace Dağılımı.....	9
3.1.5. Standart Laplace Dağılımı.....	10
4. YAPILAN ÇALIŞMALAR	11
4.1. Katsayıları Rastgele Olan Kesirli Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemin HPM Yöntemi İle Çözümleri.....	11
4.2. Katsayıları Rastgele Olan Kesirli Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemin HPM Yöntemi İle Çözümleri.....	18
5. DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ İÇİN HPM.....	26
5.1. Katsayıları Rastgele Olan Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklem Sistemleri ...	31
5.2. Başlangıç Koşulları Rastgele Olan Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklem Sistemleri	48

6. KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİ İÇİN HPM YÖNTEMİ.....	60
6.1. Katsayıları Ve Başlangıç Koşulları Rastgele Olan Kısmi Diferansiyel Denklemin Çözümleri İçin HPM Yöntemi.....	62
6.2. Laplace Dönüşümü HPM Yöntemi.....	73
7. İRDELEME	86
8. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	87
9. ÖNERİLER.....	88
KAYNAKÇA.....	89
ÖZGEÇMİŞ	92



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $\mu = 2, \sigma^2 = 1$ değerleri ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ için (4.7) denkleminin beklenen değerleri.....	15
Şekil 2. $\mu = 2, \sigma^2 = 1$ değerleri ve $\alpha = 0.9$ için (4.8) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	16
Şekil 3. $\mu = 2, \sigma^2 = 1$ değerleri ve $\alpha = 0.9$ için (4.8) denkleminin $K = 3$ için güven aralıkları.....	17
Şekil 4. $\mu = 2, \sigma^2 = 1$ değerleri ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ için (4.14) denkleminin beklenen değerleri.....	23
Şekil 5. $\mu = 2, \sigma^2 = 1$ değerleri ve $\alpha = 0.9$ için (4.15) denkleminin varyansları çözüm davranışı.....	24
Şekil 6. $\mu = 2, \sigma^2 = 1$ değerleri ve $\alpha = 0.9$ için (4.15) denkleminin $K = 3$ için güven aralıkları.....	25
Şekil 7. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $x(t)$ 'nin çözüm davranışları.....	30
Şekil 8. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $y(t)$ 'nin çözüm davranışları.....	30
Şekil 9. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $E(x(t))$ 'nin çözüm davranışları.....	38
Şekil 10. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $E(y(t))$ 'nin çözüm davranışları.....	40
Şekil 11. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $Var(x(t))$ 'nin çözüm davranışları.....	43
Şekil 12. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $Var(y(t))$ 'nin çözüm davranışları.....	46
Şekil 13. $\zeta = 2, \theta = 4, u = 3, v = 2$ değerleri ve $\alpha, \beta = 0.9$ için $x(t)$ 'nin $K = 3$ için güven aralıkları.....	47
Şekil 14. $\zeta = 2, \theta = 4, u = 3, v = 2$ değerleri ve $\alpha, \beta = 0.9$ için $y(t)$ 'nin $K = 3$ için güven aralıkları.....	48
Şekil 15. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $E(x(t))$ 'nin çözüm davranışları.....	53
Şekil 16. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $E(y(t))$ 'nin çözüm davranışları.....	54
Şekil 17. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $Var(x(t))$ 'nin çözüm davranışları.....	56
Şekil 18. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $Var(y(t))$ 'nin çözüm davranışları.....	57
Şekil 19. $\mu = 3, a = 4, \sigma^2 = 2, b = 2$ değerleri ve $\alpha, \beta = 0.9$ için $x(t)$ 'nin $K = 3$ için güven aralıkları.....	58
Şekil 20. $\mu = 3, a = 4, \sigma^2 = 2, b = 2$ değerleri ve $\alpha, \beta = 0.9$ için $y(t)$ 'nin $K = 3$ için güven aralıkları.....	59
Şekil 21. Helmholtz Denkleminin çözüm davranışları.....	62
Şekil 22. $u(x, y)$ denkleminin beklenen değeri.....	65

Şekil 23. $u(x, y)$ denkleminin varyansı.....	66
Şekil 24. $u(x, y)$ $K = 3$ için güven aralıkları ve alt güven sınırı.....	67
Şekil 25. $v(x, y)$ denkleminin beklenen değeri.....	71
Şekil 26. $v(x, y)$ 'nin $K = 3$ için güven aralıkları ve alt güven sınırı.....	72
Şekil 27. $v(x, y)$ denkleminin 3 standart sapmalık güven aralığı.....	73
Şekil 28. $y(t)$ 'nin yaklaşık olarak analitik çözüm davranışı.....	78
Şekil 29. $y(t)$ 'nin beklenen değerinin yaklaşık olarak analitik çözüm davranışı.....	83
Şekil 30. $y(t)$ 'nin varyansının yaklaşık olarak analitik çözüm davranışı.....	84
Şekil 31. $y(t)$ 'nin 3 standart sapmalık güven aralığının davranışı.....	85



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

HAM	: Homotopi Analiz Metodu
HPM	: Homotopi Pertürbasyon Metodu
LD-HPM	: Laplace Dönüşümü Homotopi Pertürbasyon Metodu
$E[X]$	: X rastgele değişkenin beklenen değeri
$Var[X]$	: X rastgele değişkenin varyansı
$\Gamma(x)$	: Gamma fonksiyonu
$\mathcal{L}$	: Laplace Dönüşümü
$\mathcal{L}^{-1}$	: Ters Laplace dönüşümü
$D_*^\alpha f(t)$	: Caputo kesirli türevi
$Beta(u, v)$	: Beta dağılımı
$Gamma(\zeta, \theta)$	: Gamma dağılımı
$\text{Üstel}(\lambda)$	: Üstel dağılımı
$D_*^\alpha f(x)$	: Kesirli türev operatörü
${}^C D_t^\alpha f(t)$	: Caputo kesirli türev operatörü
${}^R D_t^\alpha f(t)$	: Riemann-Liouville kesirli türev operatörü

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Çoğu bilimsel problem ve fiziksel olaylar, diferansiyel denklemler şeklinde ortaya çıkar. Bunların sınırlı bir kısmı hariç problemlerin kesin analitik çözümleri bulunmakta güçlük çekilir. Bu nedenle, kesin çözümlere makul bir şekilde yaklaşan analitik çözümler elde etmek ve yeni teknikler geliştirmek için çeşitli girişimlerde bulunulmuştur.

Homotopi Pertürbasyon yöntemi, çok çeşitli doğrusal ve doğrusal olmayan problemleri çözmek için kullanılan yöntemler arasında en etkili tekniklerden biridir. Homotopi Pertürbasyon yönteminin en dikkat çekici özelliklerinden biri, makul derecede doğru bir çözüm elde etmek için genellikle sadece birkaç pertürbasyon teriminin yeterli olmasıdır. Zor problemlerin çözümlerini kolaylaştıran homotopi metodu, nonlinear problemlerin çözümlerinde ve mühendislik uygulamalarında kullanılmaktadır.

Homotopi pertürbasyon metodu (HPM), Ji-Huan He tarafından 1998 yılında kullanılmıştır. Metodu oluştururken pertürbasyon tekniği ile homotopi kavramını birleştiren He, çözümü zor nonlinear problemleri çözümü kolay linear problemlere dönüştürmüştür. 90'lı yıllarda ortaya çıkan bu yöntemler temelde seri çözümlere dayanırlar. Bazı durumlarda çözümlerin kapalı formlarının elde edilebilmesi ve çözümlerin seri çözümler şeklinde olması, bu yöntemi farklı dallarda çalışan bilim adamlarının tercih etmesini sağlamış ve birçok araştırmacı çeşitli problemlere homotopi pertürbasyon metodunu uygulamıştır.

Pertürbasyon prosedürü, güçlü doğrusal olmayan diferansiyel denklemi bir doğrusal diferansiyel denklem sistemine dönüştüren bir gömme parametresi içerir. Önerilen prosedürün etkinliğini ve uygunluğunu göstermek için birkaç örnek göz önünde bulundurulur.

1.2 Literatür Özeti

Homotopi pertürbasyon yöntemi ile yapılan son çalışmalar (He, (1999); He, (2000); He, (2003); He, (2004)a; He, (2004)b; He, (2004)c; He, (2005)a; He, (2005)b; He, (2006)). Bu yöntem birçok yazar tarafından kullanılmıştır (He, (1999); He, (2000); He, (2003); He, (2004)a; He, (2004)b; He, (2004)c; He, (2005)a; He, (2005)b; He, (2006); El-Latif, (2005); El-Shahed, (2005); Feller, (1968); Jaradat vd., 2018); Kashkari, B.S. (2014); (Khaniyev vd., 2017)) bilim ve mühendislikte birçok türde doğrusal olmayan problemi çözmek için başarıyla uygulanmıştır.

Son yıllarda rastgele diferansiyel denklemler ile ilgili yapılan çalışmalar; Merdan ve Khaniyev tarafından 2008 yılında yapılan çalışmada Kuş Gribi hastalığının yayılımı için rastgele bir model kullanılmaktadır (Merdan ve Khaniyev, 2008). Bekiryazici vd. tarafından 2016 yılında yapılan bir çalışmada Dang Humması hastalığının yayılımı için bir rastgele diferansiyel denklem sistemi kullanılmaktadır (Bekiryazici vd., 2016). Bekiryazici vd. tarafından 2017 yılında bir çalışmada Sıtma hastalığının yayılımı rastgele ve stokastik diferansiyel denklem sistemleri ile incelenmektedir (Bekiryazici vd., 2017). Bekiryazici vd. tarafından 2018 yılında yapılan bir çalışmada Çocuk Felci hastalığının yayılımı için bir rastgele diferansiyel denklem sistemi kullanılmaktadır (Bekiryazici vd., 2018). Merdan vd. tarafından 2018 yılında yapılan bir çalışmada Ebola hastalığının rastgele yayılımına ait yaklaşık karakteristikler üzerine bir inceleme yapılmaktadır (Merdan vd., 2018).

Merdan vd. tarafından 2017 yılında yapılan bir çalışmada Hepatit C hastalığının yayılımının rastgele davranışları ile ilgili bir inceleme yapılmaktadır (Merdan vd., 2017). Bu çalışma literatürdeki rastgele modelleme çalışmalarını kaynak olarak El, ayak, ağız hastalığı ile ilgili bir inceleme içermektedir. Bekiryazici vd. tarafından 2022 yılında yapılan bir çalışmada Zika virüsünün yayılımı için rastgele bir model kullanılmaktadır (Bekiryazici vd., 2022). Merdan vd. tarafından 2023 yılında yapılan çalışmada rastgele Lane–Emden kompleks diferansiyel denklemler diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözülerek çözüm davranışları ele alınmaktadır. Merdan ve Atasoy tarafından 2023 yılında yapılan çalışmada Residual kuvvet serisi metodu ile kesirli mertebeden adi diferansiyel denklemlerin çözümleri incelenmektedir (Merdan ve Atasoy, 2023).

Bu çalışma literatürdeki rastgele modelleme çalışmalarını kaynak olarak, kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile diferansiyel denklem sistemleri rastgele etkiler altında incelenmesi için normal, düzgün, beta, gamma, Laplace ve üstel dağılımlarına sahip rastgele etki terimleri kullanılarak rastgele hale dönüştürülen denklemlerin yaklaşık analitik çözümlerinin incelendiği HPM ve LD-HPM(Sing ve

Kumar,2012;Noufe vd.,2023;Nuntadilok, 2021;Narmatha vd.,2021) yöntemi ile elde edilerek ve rastgele davranışları analiz edilecektir.



2. TEMEL TANIMLAR

2.1 Tanım: (Gama Fonksiyonu)

$\forall n > 0$ için tanımlanan

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (2.1)$$

fonksiyonu Gamma fonksiyonudur. $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ olarak bulunur. $n \in \mathbb{Z}$ ise

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \dots \Gamma(1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \text{ ve}$$

$\Gamma(n) = (n-1)!$ olarak elde edilir.

2.2 Tanım: (Beta Fonksiyonu)

$u, v \in \mathbb{C}$ olmak üzere iki değişkenli $B(u, v)$ Beta fonksiyonu

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır (Weilbeer, 2005).

2.3 Tanım: (Caputo Kesirli Türev)

$n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}, x > 0, f \in C_{-1}^n$ olmak üzere f fonksiyonunun α . mertebeden

$\alpha > 0$ Caputo kesirli türev tanımı,

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = ({}_a^C I_t^{n-\alpha} D^n f(t)) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^n(\tau) d\tau, n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), n = \alpha \end{cases} \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır (Caputo, 1967).

2.4 Tanım: (Riemann-Liouville Kesirli Türevi)

$a \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{N}$ ve $n-1 < \alpha \leq n$ olmak üzere f fonksiyonunun α mertebeli Riemann Liouville kesirli türevi,

$${}_a^R D_t^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n {}_a^R D^{\alpha-n} f(t) \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
{}^R D_t^\alpha f(t) &= {}^R D^n ({}_R I_t^{n-\alpha} f(t)) \\
&= \begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^n(\tau) d\tau \right], & n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) & , n = \alpha \end{cases}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir (Podlubny,1999).

3. MODİFİYE (DEĞİŞTİRİLMİŞ) HOMOTOPI PERTÜRBASYON YÖNTEMİ

Analitik yaklaşık bir çözümü sağlayan homotopi pertürbasyon yöntemi, çeşitli doğrusal olmayan problemlere (Sing ve Kumar,2012; Kashkheri,2014; Narmatha vd.,2021; Nuntadilok,2021; Noufe vd.,2023) uygulanır. Bu bölümde, homotopi pertürbasyonun yeni modifikasyonunun algoritma yöntemini sunuyoruz. Yeni modifikasyonun temel fikirlerini göstermek için aşağıdaki doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemi ele alıyoruz.

$$D_*^\alpha u(t) + L(u(t)) + N(u(t)) = f(t), \quad t > 0, \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad (3.1)$$

Burada L , α dan küçük mertebeden diğer kesirli türevleri içerebilen lineer bir operatördür. N doğrusal olmayan bir operatördür, α dan küçük mertebeden diğer kesirli türevleri de içerebilir, f bilinen bir analitik fonksiyondur ve D_*^α başlangıç koşullarına tabi olarak α mertebesinin Caputo kesirli türevi,

$$u^k(0) = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.2)$$

Homotopi tekniği göz önüne alındığında, aşağıdaki homotopiyi oluşturabiliriz:

$$u^{(m)} + L(u) - f(t) = p[u^{(m)} - N(u) - D_*^\alpha] , \quad p \in [0,1] \quad (3.3)$$

veya

$$u^{(m)} - f(t) = p[u^{(m)} - L(u) - N(u) - D_*^\alpha] , \quad p \in [0,1] \quad (3.4)$$

Homotopi parametresi p her zaman sıfırdan bire değişir. $p = 0$ durumunda, denklem (3.3) doğrusal denklem haline gelir.

$$\frac{d^m u}{dt^m} + L(u) = f(t) \quad (3.5)$$

ve (3.4) doğrusallaştırılmış denklem haline gelir.

$$\frac{d^m u}{dt^m} = f(t) \quad (3.6)$$

ve $p = 1$ olduğunda (3.3) veya (3.4) orijinal kesirli diferansiyel denklem (3.1) olarak ortaya çıkar. Temel varsayım denklemin çözümü budur. (3.3) veya (3.4) denklemleri p de bir kuvvet serisi olarak yazılabilir.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots \quad (3.7)$$

(3.7) ifadesini (3.3) veya (3.4) de yerine yazarsak ve p terimlerinin özdeş kuvvetleriyle eşitleyerek, formun bir dizi doğrusal denklemini elde edebiliriz.

$$p^0: \frac{d^m u_0}{dt^m} + L_0(u_0) = f(t), \quad u^k(0) = c_k$$

$$\begin{aligned}
p^1: \frac{d^m u_1}{dt^m} + L_1(u_0, u_1) &= \frac{d^m u_0}{dt^m} - N_0(u_0) - D_*^\alpha u_0, \quad u^k(0) = 0 \\
p^2: \frac{d^m u_2}{dt^m} + L_2(u_0, u_1, u_2) &= \frac{d^m u_1}{dt^m} - N_1(u_0, u_1) - D_*^\alpha u_1, \quad u^k(0) = 0 \\
p^3: \frac{d^m u_3}{dt^m} + L_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= \frac{d^m u_2}{dt^m} - N_2(u_0, u_1, u_3) - D_*^\alpha u_2, \quad u^k(0) = 0 \quad (3.8) \\
&\dots
\end{aligned}$$

veya sadeleştirme yapılırsa

$$\begin{aligned}
p^0: \frac{d^m u_0}{dt^m} &= f(t), \quad u^k(0) = c_k \\
p^1: \frac{d^m u_1}{dt^m} &= \frac{d^m u_0}{dt^m} - L_0(u_0) - N_0(u_0) - D_*^\alpha u_0, \quad u^k(0) = 0 \\
p^2: \frac{d^m u_2}{dt^m} &= \frac{d^m u_1}{dt^m} - L_1(u_0, u_1) - N_1(u_0, u_1) - D_*^\alpha u_1, \quad u^k(0) = 0 \\
p^3: \frac{d^m u_3}{dt^m} &= \frac{d^m u_2}{dt^m} - L_2(u_0, u_1, u_3) - N_2(u_0, u_1, u_3) - D_*^\alpha u_2, \quad u^k(0) = 0 \quad (3.9) \\
&\dots
\end{aligned}$$

sırasıyla, burada $L_0, L_1, L_2, \dots$ ve $N_0, N_1, N_2, \dots$ aşağıdaki denklemleri karşılar:

$$L(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) = L_0(u_0) + pL_1(u_0, u_1) + p^2L_2(u_0, u_1, u_2), + \dots$$

$$N(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) = N_0(u_0) + pN_1(u_0, u_1) + p^2N_2(u_0, u_1, u_2), + \dots$$

Denklemden $p = 1$ için (3.7) denkleminin çözümünü verir. (3.8) veya (3.9) doğrusal denklemlerini çözmenin kolay olduğu açıktır ve homotopi pertürbasyon yönteminin $u_n, n \geq 0$ için bileşenleri tamamen belirlenebilir ve böylece seri çözümler tamamen belirlenir.

Son olarak,

$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ kesikli seriye göre

$$\phi_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(t) \quad (3.10)$$

çözümünü elde ederiz.

3.1 Bazı Olasılık Dağılımları

3.1.1 Sürekli Düzgün Dağılım:

X rastgele değişkeni $[a, b]$ kapalı aralığında düzgün dağılıma sahip olduğundan olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(x) = f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir(Khaniyev vd., 2017).

$X \sim U(a, b)$ düzgün dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere, moment çıkaran fonksiyonu:

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \begin{cases} \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

3.1.2 Normal Dağılım:

X sürekli rastgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; -\infty < x < \infty, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

şeklinde ise X rastgele değişkeni μ, σ^2 parametrelili normal dağılıma sahiptir.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ şeklinde gösterilir. Bazen bu dağılıma Gauss dağılımı da denir(Khaniyev vd.,2017).

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere, moment çıkaran fonksiyonu:

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

3.1.3 Üstel Dağılım:

X rastgele değişkeninin, $\zeta > 0$ parametre olmak üzere, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\Phi(x) = \begin{cases} \zeta e^{-\zeta x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

şeklinde verilmişse X 'e üstel dağılmış rastgele değişken, $\Phi(x)$ 'e de üstel dağılım denir.

Bu dağılımın tek parametresi ζ 'dir. Bu durumda birikimli dağılım fonksiyonu

$$\Theta(X) = P(X \leq x) = \int_0^x \zeta e^{-\zeta t} dt = 1 - e^{-\zeta x} \quad (3.12)$$

$$\Theta(X) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\zeta x}, & x \geq 0 \\ 1, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.13)$$

şeklindedir.

Moment çıkaran fonksiyon tanımı kullanılarak bu dağılımın moment çıkaran fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \int_0^\infty e^{xt} \zeta e^{-\zeta x} dx = \zeta \int_0^\infty e^{(t-\zeta)x} dx = \frac{\zeta}{\zeta-t} e^{(t-\zeta)x} \Big|_0^\infty \quad (3.14)$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(t-\zeta)x} = 0$ olduğu için;

$M(t) = \frac{\zeta}{t-\zeta}; t < \zeta$ için elde edilir.

Moment çıkaran fonksiyon, beklenen değer ve varyans tanımları kullanılarak beklenen değer ve varyans hesaplanabilir (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017). Bu durumda beklenen değer:

$$E(X) = \int_0^{\infty} \zeta x e^{-\zeta x} dx \quad (3.15)$$

Hesaplamamızda parçalı integral kullanırsak ($u = x, dv = \zeta e^{-\zeta x}$)

$$E(X) = -x e^{-\zeta x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\zeta x} dx = \frac{1}{\zeta} \quad (3.16)$$

şeklinde elde edilir. Bu sonuç kullanılarak aşağıdaki şekilde de varyans elde edilir.

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \zeta x^2 e^{-\zeta x} dx = \frac{2}{\zeta^2} \quad (3.17)$$

$E(x^2)$ hesaplanırken de parçalı integral kullanılır. ($x^2 = u, dv = e^{-\zeta x} dx$)

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (3.18)$$

$$Var(X) = \frac{2}{\zeta^2} - \frac{1}{\zeta^2} = \frac{1}{\zeta^2}$$

3.1.4 Laplace Dağılımı:

Laplace dağılımı genellikle çift üstel dağılım olarak bilinir. X rastgele değişkeni Laplace dağılımına sahip ise $a \in \mathbb{R}$ yerel parametre ve $b \in (0, \infty)$ ölçek parametresi olmak üzere f olasılık yoğunluk fonksiyonu (Krishnamoorthy, 2006);

$$f(x) = \frac{1}{2b} \exp\left\{-\frac{|x-a|}{b}\right\}, x \in \mathbb{R}$$

şeklindedir. F dağılım fonksiyonu;

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{x-a}{b}\right\}, & x \in (-\infty, a) \\ 1 - \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{x-a}{b}\right\}, & x \in [a, \infty) \end{cases}$$

şeklindedir. M moment çıkaran fonksiyonu

$$M(t) = E(e^{tx}) = \frac{e^{at}}{1 - b^2 t^2}, t \in \left(-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right)$$

olarak verilir. Beklenen değeri ve varyansı;

$$E(X) = a$$

ve

$$Var(X) = 2b^2 \quad (3.19)$$

şeklindedir.

3.1.5 Standart Laplace Dağılımı

Standart Laplace dağılımının g olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$g(u) = \frac{1}{2} e^{-|u|}, u \in \mathbb{R}$$

şeklindedir. G dağılım fonksiyonu;

$$G(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^u, u \in (-\infty, 0] \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-u}, u \in [0, \infty) \end{cases}$$

M moment çıkaran fonksiyonu;

$$M(t) = E(e^{ta}) = \frac{1}{1-t^2}, t \in (-1,1)$$

olarak verilir.

$$E(u) = 0$$

ve

$$Var(u) = 2$$

şeklindedir.

(3.20)

4. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde katsayıları veya başlangıç koşulları mutlak sürekli dağılımlardan seçilerek rastgele hale getirilen kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri HPM ile çözülerek olasılık karakteristikleri hesaplanmıştır. Elde edilen çözümlerin kesirli mertebeden türevin farklı değerleri için beklenen değer, varyans ve güvenlik aralıkları hesaplanarak MATLAB veya MAPLE paket programları yardımı ile çizdirilmiştir.

4.1 Katsayıları Rastgele Olan Kesirli Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin HPM Yöntemi İle Çözümleri

Örnek 1:

Rastgele katsayılı adi diferansiyel denklemin Modified HPM ile çözümü

$$\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = u(t)^2 + B^2, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

$0 < \alpha \leq 1$, B rastgele değişkeni, $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 1)$ başlangıç koşulu ile verilmiş olsun.

$$u(0) = 0 \text{ başlangıç koşulu} \quad (4.2)$$

$\alpha = 1$ olduğundan tam çözüm olsun. (4.1) denkleminin çözümü için Modified yöntemini uygulayalım, (4.1) denkleminin HPM si aşağıdaki oluşturulabilir.

$$u(t) = \tan(tB + \arctan(A/B)) B \quad (4.3)$$

Modified HPM yöntemine göre, (4.1) denkleminin HPM'ni aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$u' - B^2 = p[u' + u^2 - D_*^\alpha u] \quad (4.4)$$

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots \quad (4.5)$$

Başlangıç koşulları (4.2) ve (4.5) i, (4.4) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & u'_0 + pu'_1 + p^2u'_2 + p^3u'_3 + \dots - B^2 \\ &= p[u'_0 - pu'_1 + p^2u'_2 + p^3u'_3 + (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3)^2 \\ &\quad - D_*^\alpha u_0 - pD_*^\alpha u_1 - p^2D_*^\alpha u_2 - p^3D_*^\alpha u_3 + u_0^2 + 2u_0u_1p \\ &\quad + 2u_0u_2p^2 + u_1^2p^2 + 2u_0u_3p^3 + 2u_1u_2p^3 + 2u_1u_3p^4 + u_2^2p^4 \\ &\quad + 2u_2u_3p^5 + u_3^2p^6] \end{aligned}$$

Aşağıdaki lineer diferansiyel denklem sistemleri elde edilir.

$$u(0) = u_0(0) + pu_1(0) + p^2u_2(0) + p^3u_3(0) + \dots = 0$$

Buradan $u_0(0) = 0$, $u_1(0) = 0$, $u_2(0) = 0$, ...

$$u'_0 = B^2 , u_0(0) = 0$$

$$u'_1 = u'_0 + u_0^2 - D_*^\alpha u_0 , u_1(0) = 0$$

$$u'_2 = u'_1 + 2u_0u_1 - D_*^\alpha u_1 , u_2(0) = 0$$

$$u'_3 = u'_2 + 2u_0u_2 + u_1^2 - D_*^\alpha u_2 , u_3(0) = 0$$

...

$$u'_0 = B^2 \Rightarrow u_0 = B^2t + c_1 \Rightarrow u_0(0) = 0 \Rightarrow B^2 \cdot 0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$u_0 = B^2t$$

$$u'_1 = B^2 + B^4t^2 - D_*^\alpha B^2t$$

$$u'_1 = B^2 + B^4t^2 - B^2 \cdot \frac{\Gamma(2) \cdot t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$$

$$u_1(t) = B^2t + \frac{B^4t^3}{3} - \frac{B^2t^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$$

$$u_1(t) = B^2t + \frac{B^4t^3}{3} - \frac{B^2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}$$

$$u'_2 = u'_1 + 2u_0u_1 - D_*^\alpha u_1$$

$$u'_2 = B^2 + B^4t^2 - \frac{B^2t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + 2B^2t \left(B^2t + \frac{B^4t^3}{3} - \frac{B^2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right) - D_*^\alpha \left(B^2t + \frac{B^4t^3}{3} - \frac{B^2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right)$$

$$u'_2 = B^2 + B^4t^2 - \frac{B^2t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + 2B^4t^4 + \frac{2}{3}B^6t^4 - \frac{2B^4t^{3-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + B^2 \frac{\Gamma(2)t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{B^4\Gamma(4)t^{3-\alpha}}{3\Gamma(4-\alpha)} - \frac{B^2}{\Gamma(3-\alpha)} \Gamma(3-\alpha) \frac{t^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)}$$

$$u_2(t) = B^2t + \frac{B^4t^3}{3} - \frac{B^2t^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} + \frac{2B^4t^3}{3} + \frac{2}{15}B^6t^5 - \frac{2B^4t^{4-\alpha}}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} + \frac{B^2t^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} + \frac{2B^4t^{4-\alpha}}{(4-\alpha)\Gamma(4-\alpha)} - \frac{B^2t^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)\Gamma(3-2\alpha)}$$

yukarıda elde edilen $u_0, u_1, u_2, \dots$ fonksiyonları seri çözümde yerine yazılıp $p = 1$ alınırsa,

$$u(t) = u_0 + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \dots$$

$$u(t) = 3B^2t + \frac{4B^4t^3}{3} + \frac{2}{15}B^6t^5 - B^2 \frac{t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} \\ + B^4 \left(\frac{2}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{2}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \right) t^{4-\alpha} + \dots$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, Normal dağılımının moment çıkaran fonksiyonundan

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)} \quad (4.6)$$

$B \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri ve varyansı

$$E[B] = \mu,$$

$$E[B^2] = \mu^2 + \sigma^2,$$

$$E[B^4] = 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4,$$

$$E[B^6] = 15\sigma^6 + 45\sigma^4\mu^2 + 15\sigma^2\mu^4 + \mu^6 \text{ ve}$$

$$Var[B] = \sigma^2,$$

$$Var[B^2] = 2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu^2,$$

$$Var[B^4] = 96\sigma^8 + 384\sigma^6\mu^2 + 168\sigma^4\mu^4 + 16\sigma^2\mu^6,$$

$$Var[B^6] = 10170\sigma^{12} + 61020\sigma^{10}\mu^2 + 49500\sigma^8\mu^4 + 12480\sigma^6\mu^6 + 1170\sigma^4\mu^8 + 36\sigma^2\mu^{10}$$

Bu momentler kullanılarak ve x ve y rastgele bağımsız değişken ise $E[x.y] = E[x]E[y]$ olduğundan, beklenen değer ve varyansın yaklaşık formülleri

Beklenen değeri;

$$E[u(t)] = E \left[3B^2t + \frac{4B^4t^3}{3} + \frac{2}{15}B^6t^5 - B^2 \frac{t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} \right. \\ \left. + B^4 \left(\frac{2}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{2}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \right) t^{4-\alpha} \right] \\ = 3tE(B^2) + \frac{4t^3E(B^4)}{3} + \frac{2}{15}t^5E(B^6) - E(B^2) \frac{t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} \\ + E(B^4) \left(\frac{2}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{2}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \right) t^{4-\alpha} \\ = 3t(\mu^2 + \sigma^2) + \frac{4t^3(3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4)}{3} \\ + \frac{2}{15}t^5(15\sigma^6 + 45\sigma^4\mu^2 + 15\sigma^2\mu^4 + \mu^6) - (\mu^2 + \sigma^2) \frac{t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} \\ + (3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4) \left(\frac{2}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{2}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \right) t^{4-\alpha}$$

Varyansı;

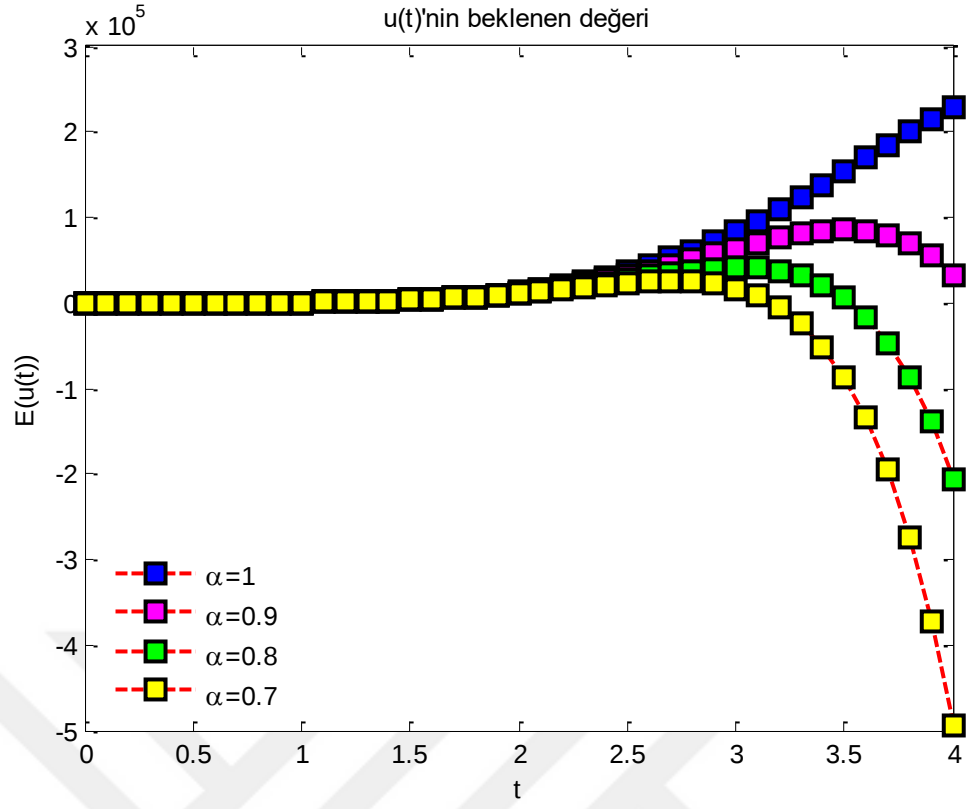
$$\begin{aligned}
Var[u(t)] &= Var \left[3B^2t + \frac{4B^4t^3}{3} + \frac{2}{15}B^6t^5 - B^2 \frac{t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} \right. \\
&\quad \left. + B^4 \left(\frac{2}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{2}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \right) t^{4-\alpha} \right] \\
&= 9t^2Var(B^2) + \frac{16t^6Var(B^4)}{9} + \frac{4}{225}t^{10}Var(B^6) \\
&\quad - Var(B^2) \frac{t^{6-4\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)^2} \\
&\quad + Var(B^4) \left(\frac{2}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{2}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \right)^2 t^{8-2\alpha} \\
&= 9t^2(2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu^2) + \frac{16t^6(96\sigma^8 + 384\sigma^6\mu^2 + 168\sigma^4\mu^4 + 16\sigma^2\mu^6)}{9} \\
&\quad + \frac{4}{225}t^{10}(10170\sigma^{12} + 61020\sigma^{10}\mu^2 + 49500\sigma^8\mu^4 + 12480\sigma^6\mu^6 \\
&\quad + 1170\sigma^4\mu^8 + 36\sigma^2\mu^{10}) - (2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu^2) \frac{t^{6-4\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)^2} \\
&\quad + (96\sigma^8 + 384\sigma^6\mu^2 + 168\sigma^4\mu^4 \\
&\quad + 16\sigma^2\mu^6) \left(\frac{2}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{2}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \right)^2 t^{8-2\alpha}
\end{aligned}$$

hesaplanabilir.

$B \sim N(\mu, \sigma^2)$ için özel olarak $\mu = 2$, $\sigma^2 = 1$ seçilirse,

Beklenen değer;

$$\begin{aligned}
E[u(t)] &= 3t \left(15t + \frac{172}{3}t^3 + \frac{998}{15}t^5 - \frac{5t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \left(\frac{86}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{86}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \right) (t^{4-\alpha})^2 + 1 \right) + \\
&\quad \frac{172}{3}t^3 + \frac{998}{15}t^5 - \frac{5t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \left(\frac{86}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{86}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \right) t^{4-\alpha}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

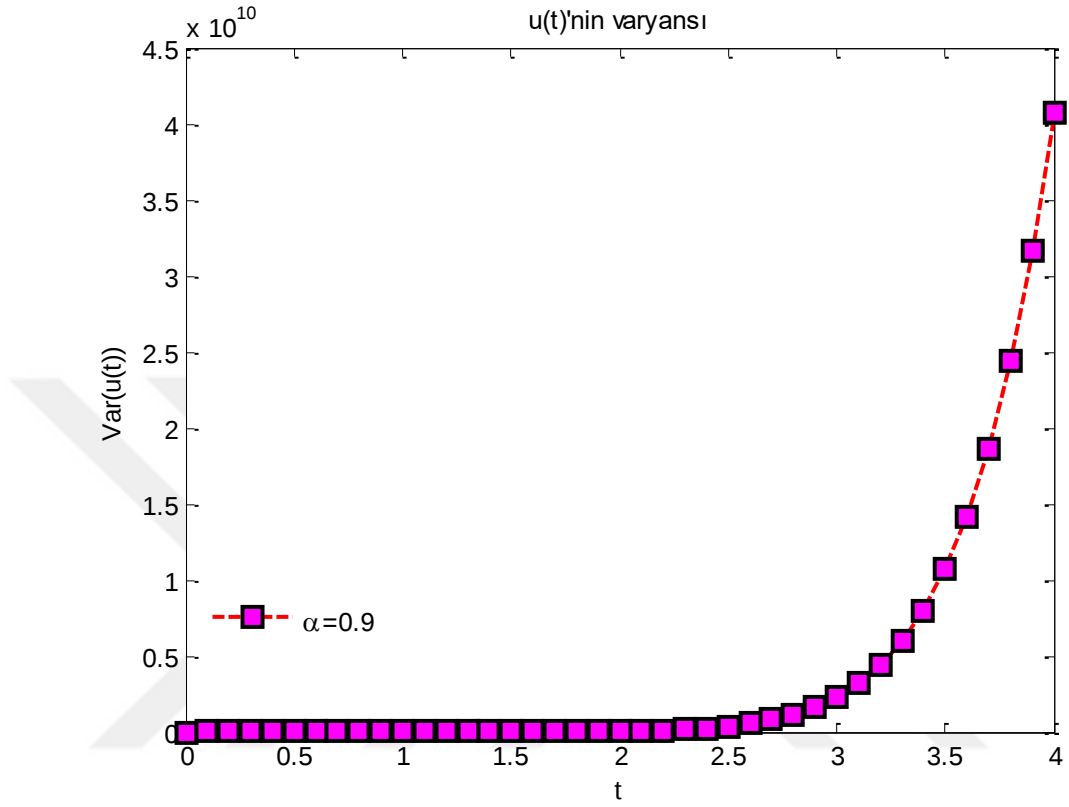


Şekil 1. $\mu = 2$, $\sigma^2 = 1$ değerleri ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ için (4.7) denkleminin beklenen değerleri

ve

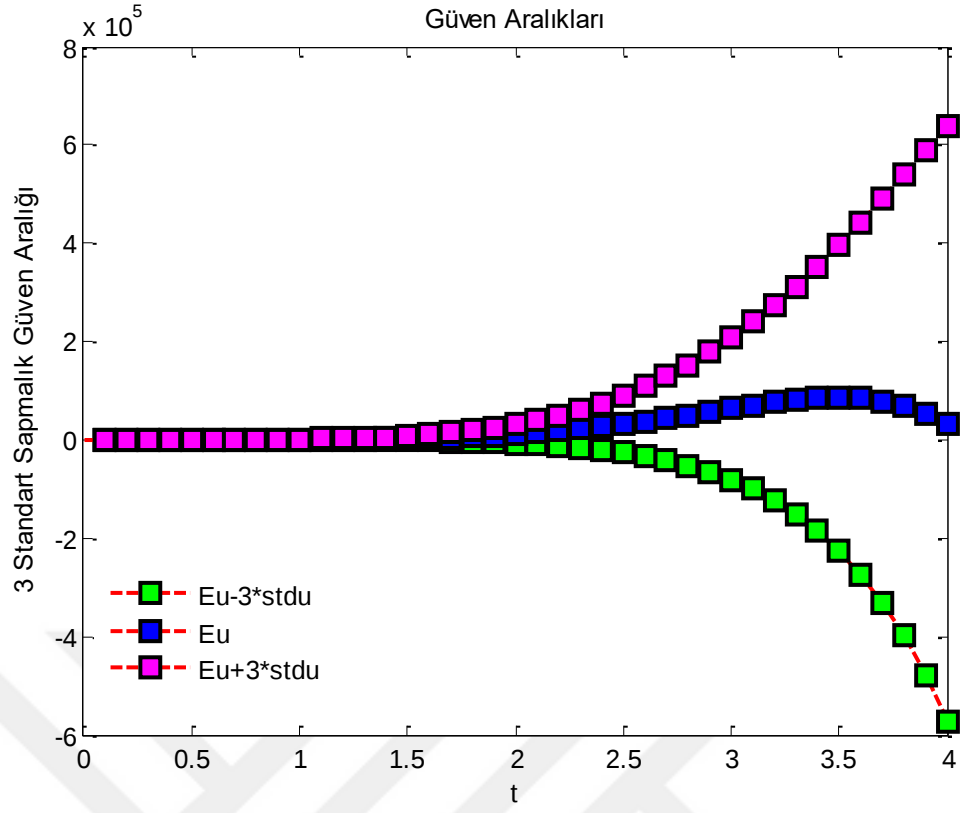
Varyansı;

$$Var[u(t)] = 162t^2 + \frac{85504}{9}t^6 + \frac{2908472}{75}t^{10} - \frac{18t^{6-4\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)^2} + 5344 \left(\frac{2}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{2}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \right)^2 t^{8-2\alpha} \quad (4.8)$$



Şekil 2. $\mu = 2$, $\sigma^2 = 1$ değerleri ve $\alpha = 0.9$ için (4.8) denkleminin varyansları

$AGS = E(u(t)) - 3\sqrt{Var(u(t))}$ alt güven sınırı ve $UGS = E(u(t)) + 3\sqrt{Var(u(t))}$ olarak bulunur.



Şekil 3. $\mu = 2, \sigma^2 = 1$ değerleri ve $\alpha = 0.9$ için (4.8) denkleminin $K = 3$ için güven aralıkları olarak bulunur.

4.2 Başlangıç Koşulu Rastgele Olan Kesirli Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin HPM Yöntemi İle Çözümleri

Örnek 2:

Başlangıç koşulu rastgele olan kesirli Ricatti denkleminin Modified HPM ile çözümü

$$\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = u(t)^2 + 2u(t) + 5 \quad (4.9)$$

$0 < \alpha \leq 1$, $A \sim U(a, b)$ düzgün dağılıma sahip rastgele değişken olsun. $u(0) = A$ başlangıç koşulu (4.10)

$\alpha = 1$ olduğunda tam çözüm

$$u(t) = -1 + 2 \tan \left(2t + \arctan \left(\frac{A}{2} + \frac{1}{2} \right) \right) \quad (4.11)$$

Modified HPM yöntemine göre, (4.9) denkleminin HPM'si aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$u' - 5 = p[u' + u^2 + 2u - D_*^\alpha u] \quad (4.12)$$

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots \quad (4.13)$$

(4.10) başlangıç koşulu ve (4.13) i (4.12) te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} u'_0 + pu'_1 + p^2u'_2 + p^3u'_3 - 5 \\ = p[u'_0 + pu'_1 + p^2u'_2 + p^3u'_3 + (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3)^2 \\ + 2(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3) - D_*^\alpha u_0 - pD_*^\alpha u_1 - p^2D_*^\alpha u_2 \\ - p^3D_*^\alpha u_3] \end{aligned}$$

$$u(0) = u_0(0) + pu_1(0) + p^2u_2(0) + p^3u_3(0) + \dots = A$$

$$u'_0 = 5$$

$$u_0(0) = A$$

$$u'_1 = u'_0 + u_0^2 + 2u_0 - D_*^\alpha u_0 \quad , \quad u_1(0) = 0$$

$$u'_2 = u'_1 + 2u_1 + 2u_0u_1 - D_*^\alpha u_1 \quad , \quad u_2(0) = 0$$

$$u'_3 = u'_2 + 2u_2 + 2u_0u_2 + u_1^2 - D_*^\alpha u_2 \quad , \quad u_3(0) = 0$$

$$u'_0 = 5 \Rightarrow u_0 = 5t + c_1 \Rightarrow u_0(0) = 5.0 + c_1 = A \Rightarrow c_1 = A$$

$$u_0(t) = 5t + A$$

$$u'_1 = u'_0 + u_0^2 + 2u_0 - D_*^\alpha u_0$$

$$u'_1 = 5 + 25t^2 + 10At + A^2 + 10t + 2A - D_*^\alpha (5t + A)$$

$$u'_1 = 5 + 2A + A^2 + (10A + 10)t + 25t^2 - \frac{5t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{At^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

$$u_1(t) = (5 + 2A + A^2)t + (5A + 5)t^2 + \frac{25}{3}t^3 - \frac{5t^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} - \frac{At^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$$

$$u_1(t) = (5 + 2A + A^2)t + (5A + 5)t^2 + \frac{25}{3}t^3 - \frac{5t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{At^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$$

$$u'_2 = u'_1 + 2u_1 + 2u_0u_1 - D_*^\alpha u_1$$

$$\begin{aligned} u'_2 = & (5 + 2A + A^2) + (10A + 10)t + 25t^2 - \frac{5(2-\alpha)t^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{2At^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \\ & + 2(5t + A) \left(((5 - 2A + A^2)t + (5A + 5)t^2 + \frac{25}{3}t^3 - \frac{5t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right. \\ & \left. - \frac{At^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) \\ & - D_*^\alpha \left[(5 + 2A + A^2)t + (5A + 5)t^2 + \frac{25}{3}t^3 - \frac{5t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{At^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(t) = & (5 + 2A + A^2)t + (5A + 5)t^2 + \frac{25}{3}t^3 - \frac{5(2-\alpha)t^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \\ & - \frac{A(1-\alpha)t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} + (5 + 2A + A^2)t^2 + (10A + 10)\frac{t^3}{3} + \frac{25}{6}t^4 \\ & - \frac{10t^{3-\alpha}}{(3-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} - \frac{2At^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} + (5 + 2A^2 + A^3)t^2 \\ & + \frac{(50 + 30A + 20A^2)t^3}{3} + \left(50 + \frac{200A}{3} \right) \frac{t^4}{4} - \frac{50t^{4-\alpha}}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \\ & - \frac{10At^{3-\alpha}}{(3-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} - \frac{10At^{3-\alpha}}{(3-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} - \frac{2At^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \\ & - \frac{(5 + 2A + A^2)t^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} - \frac{10At^{3-\alpha}}{(3-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} - \frac{50t^{4-\alpha}}{(4-\alpha)\Gamma(4-\alpha)} \\ & + \frac{5t^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)\Gamma(3-2\alpha)} + \frac{At^{2-2\alpha}}{(2-2\alpha)\Gamma(2-2\alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(t) = & (5 + 2A + A^2)t + (5A + 5)t^2 + \frac{25}{3}t^3 - \frac{5t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{At^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \\
& + (5 + 2A + A^2)t^2 + (10A + 10)\frac{t^3}{3} + \frac{25}{6}t^4 - \frac{10t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{2At^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \\
& + (5 + 2A^2 + A^3)t^2 + \frac{(50 + 30A + 20A^2)t^3}{3} + \left(50 + \frac{200A}{3}\right)\frac{t^4}{4} \\
& - \frac{50t^{4-\alpha}}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} - \frac{10At^{3-\alpha}}{(3-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} - \frac{10At^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{2At^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \\
& - \frac{(5 + 2A + A^2)t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{10At^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{50t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{5t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} \\
& + \frac{At^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)}
\end{aligned}$$

$$u(t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$\begin{aligned}
u(t) = & A + 2\left(\frac{15}{2} + 2A + A^2\right)t + (20 + 14A + 2A^2)t^2 + \left(\frac{110 + 40A + 20A^2}{3}\right)t^3 \\
& - \frac{15t^{2-\alpha} + 4At^{2-\alpha} - 3A^2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - 2\frac{At^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \left(\frac{325 + 400A}{6}\right)t^4 \\
& - \frac{20t^{3-\alpha} - (10A + 10)t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{50t^{4-\alpha}}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} - \frac{10At^{3-\alpha}}{(3-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \\
& - \frac{50t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{5t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{At^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)}
\end{aligned}$$

$A \sim U(a, b)$ düzgün dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere,

$$M_z(t) = E[e^{tz}] = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

$A \sim U(a, b)$, $E[A] = \frac{a+b}{2}$, $E[A^2] = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{3}b^2$, $Var[A] = \frac{(a-b)^2}{12}$, $Var[A^2] = \frac{4}{45}a^4 - \frac{1}{45}ba^3 - \frac{2}{15}b^2a^2 - \frac{1}{45}b^3a + \frac{4}{45}b^4$ bu momentleri kullanırken x ve y bağımsız rastgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$ bu yaklaşık formüller kullanılarak, beklenen değer ve varyansın yaklaşık formülleri;

Beklenen değeri;

$$\begin{aligned}
E[u(t)] &= E \left[A + 2 \left(\frac{15}{2} + 2A + A^2 \right) t + (20 + 14A + 2A^2) t^2 \right. \\
&\quad + \left(\frac{110 + 40A + 20A^2}{3} \right) t^3 - \frac{15t^{2-\alpha} + 4At^{2-\alpha} - 3A^2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \\
&\quad - 2 \frac{At^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \left(\frac{325 + 400A}{6} \right) t^4 - \frac{20t^{3-\alpha} - (10A + 10)t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \\
&\quad - \frac{50t^{4-\alpha}}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} - \frac{10At^{3-\alpha}}{(3-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} - \frac{50t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{5t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} \\
&\quad \left. + \frac{At^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)} \right] \\
&= E(A) + 2 \left(\frac{15}{2} + 2E(A) + E(A^2) \right) t + (20 + 14E(A) + 2E(A^2)) t^2 \\
&\quad + \left(\frac{110 + 40E(A) + 20E(A^2)}{3} \right) t^3 \\
&\quad - \frac{15t^{2-\alpha} + 4E(A)t^{2-\alpha} - 3E(A^2)t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - 2 \frac{E(A)t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \\
&\quad + \left(\frac{325 + 400E(A)}{6} \right) t^4 - \frac{20t^{3-\alpha} - (10E(A) + 10)t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \\
&\quad - \frac{50t^{4-\alpha}}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} - \frac{10E(A)t^{3-\alpha}}{(3-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} - \frac{50t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{5t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} \\
&\quad + \frac{E(A)t^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)} \\
&= \frac{a+b}{2} + 2 \left(\frac{15}{2} + 2 \frac{a+b}{2} + \left(\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{3} ab + \frac{1}{3} b^2 \right) \right) t \\
&\quad + \left(20 + 14 \frac{a+b}{2} + 2 \left(\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{3} ab + \frac{1}{3} b^2 \right) \right) t^2 \\
&\quad + \left(\frac{110 + 40 \frac{a+b}{2} + 20 \left(\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{3} ab + \frac{1}{3} b^2 \right)}{3} \right) t^3 \\
&\quad - \frac{15t^{2-\alpha} + 4 \frac{a+b}{2} t^{2-\alpha} - 3 \left(\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{3} ab + \frac{1}{3} b^2 \right) t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \\
&\quad - 2 \frac{\frac{a+b}{2} t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \left(\frac{325 + 400 \frac{a+b}{2}}{6} \right) t^4 \\
&\quad - \frac{20t^{3-\alpha} - \left(10 \frac{a+b}{2} + 10 \right) t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{50t^{4-\alpha}}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)}
\end{aligned}$$

$$-\frac{10\frac{a+b}{2}t^{3-\alpha}}{(3-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} - \frac{50t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{5t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{\frac{a+b}{2}t^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)}$$

Varyansı;

$$Var[u(t)]$$

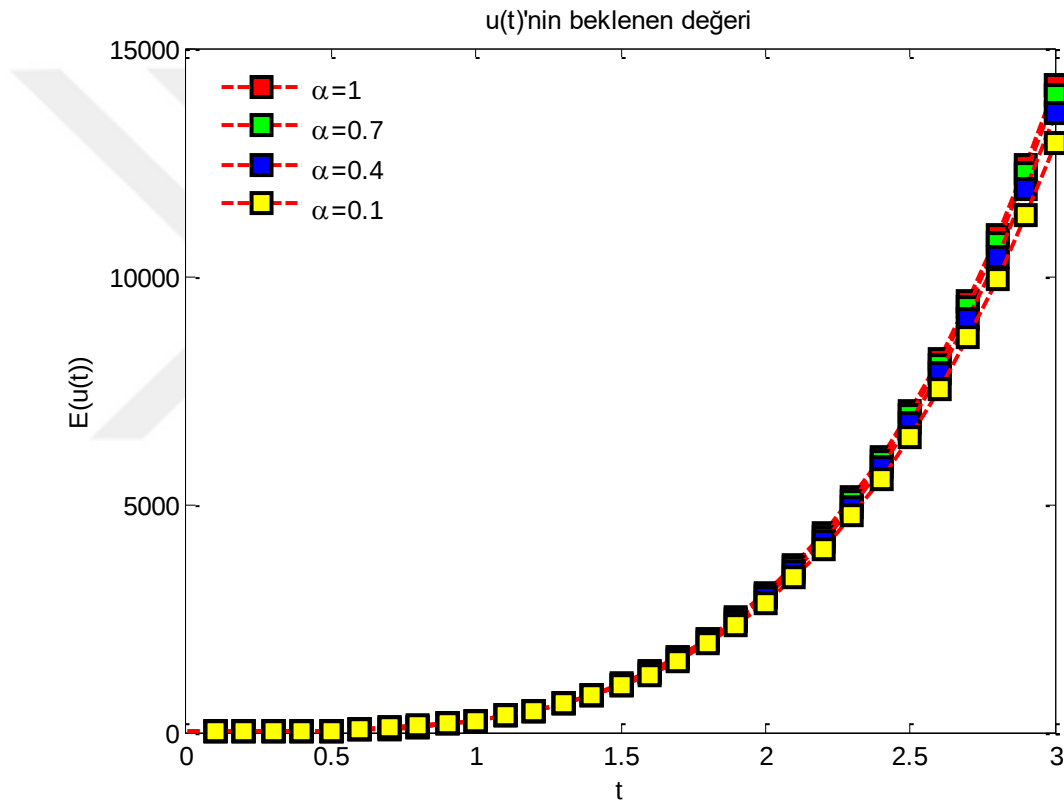
$$\begin{aligned} &= Var\left[A + 2\left(\frac{15}{2} + 2A + A^2\right)t + (20 + 14A + 2A^2)t^2 + \left(\frac{110 + 40A + 20A^2}{3}\right)t^3\right. \\ &\quad - \frac{15t^{2-\alpha} + 4At^{2-\alpha} - 3A^2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - 2\frac{At^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \left(\frac{325 + 400A}{6}\right)t^4 \\ &\quad - \frac{20t^{3-\alpha} - (10A + 10)t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{50t^{4-\alpha}}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} - \frac{10At^{3-\alpha}}{(3-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} - \frac{50t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} \\ &\quad \left. + \frac{5t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{At^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)}\right] \\ &= Var[A] + (16Var[A] + Var[A^2])t^2 + (196Var[A] + 4Var[A^2])t^4 \\ &\quad + \left(\frac{40^2Var[A] + 20^2Var[A^2]}{9}\right)t^6 + \frac{16Var[A]t^{4-2\alpha} + 9Var[A^2]t^{4-2\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)^2} \\ &\quad + \frac{Var[A]t^{2-2\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)^2} + \left(\frac{400^2Var[A]}{36}\right)t^8 + \frac{(100Var[A])t^{6-2\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)^2} + \frac{100Var[A]t^{6-2\alpha}}{(3-\alpha)^2\Gamma(2-\alpha)^2} \\ &\quad + \frac{Var[A]t^{4-4\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)^2} \\ &= \frac{(a-b)^2}{12} + \left(16\frac{(a-b)^2}{12} + \left(\frac{4}{45}a^4 - \frac{1}{45}ba^3 - \frac{2}{15}b^2a^2 - \frac{1}{45}b^3a + \frac{4}{45}b^4\right)\right)t^2 \\ &\quad + \left(196 + \frac{(a-b)^2}{12} + 4\left(\frac{4}{45}a^4 - \frac{1}{45}ba^3 - \frac{2}{15}b^2a^2 - \frac{1}{45}b^3a + \frac{4}{45}b^4\right)\right)t^4 \\ &\quad + \left(\frac{40^2\frac{(a-b)^2}{12} + 20^2\left(\frac{4}{45}a^4 - \frac{1}{45}ba^3 - \frac{2}{15}b^2a^2 - \frac{1}{45}b^3a + \frac{4}{45}b^4\right)}{9}\right)t^6 \\ &\quad + \frac{16\frac{(a-b)^2}{12}t^{4-2\alpha} + 9\left(\frac{4}{45}a^4 - \frac{1}{45}ba^3 - \frac{2}{15}b^2a^2 - \frac{1}{45}b^3a + \frac{4}{45}b^4\right)t^{4-2\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)^2} \\ &\quad + \frac{\frac{(a-b)^2}{12}t^{2-2\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)^2} + \left(\frac{400^2\frac{(a-b)^2}{12}}{36}\right)t^8 + \frac{\left(100\frac{(a-b)^2}{12}\right)t^{6-2\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)^2} \\ &\quad + \frac{\left(100\frac{(a-b)^2}{12}\right)t^{6-2\alpha}}{(3-\alpha)^2\Gamma(2-\alpha)^2} + \frac{\frac{(a-b)^2}{12}t^{4-4\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)^2} \end{aligned}$$

hesaplanabilir.

$A \sim U(a, b)$ için özel olarak $a = 2, b = 1$ seçilirse

Beklenen değer;

$$E[u(t)] = \frac{3}{2} + \frac{77}{3}t + \frac{137t^2}{3} + \frac{650t^3}{9} - \frac{14t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{3t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{925t^4}{6} + \frac{5t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{50t^{4-\alpha}}{(4-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} - \frac{15t^{3-\alpha}}{(3-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} - \frac{50t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{5t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{\frac{3}{2}t^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)} \quad (4.14)$$

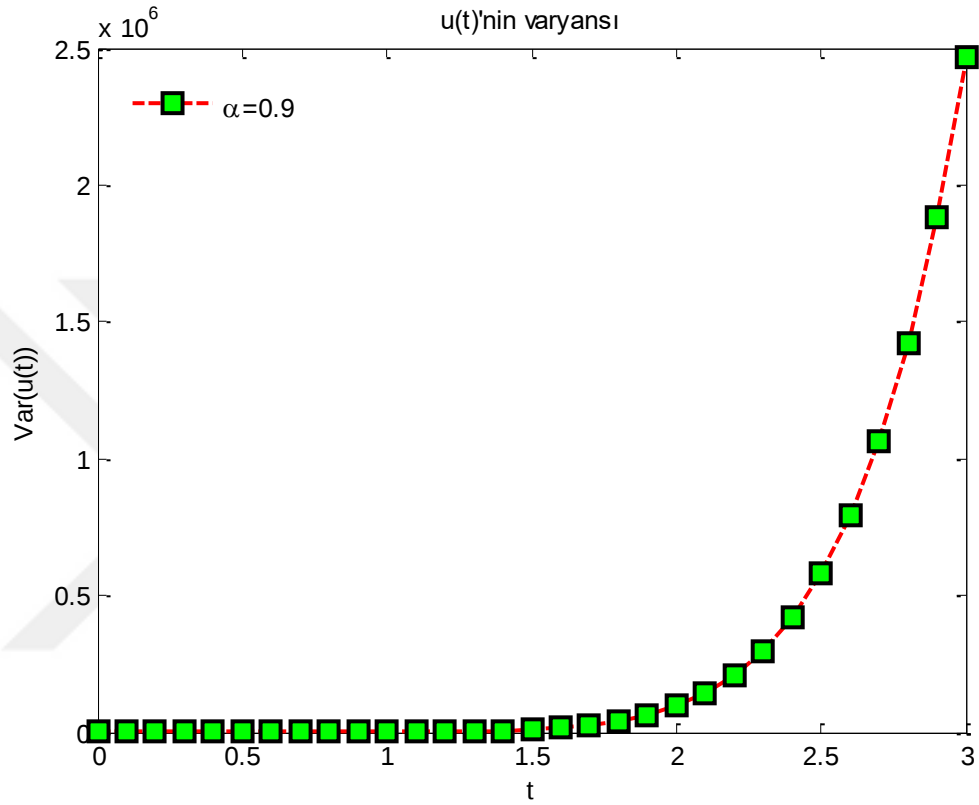


Şekil 4. $a = 2, b = 1$ değerleri ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ için (4.14) denkleminin beklenen değerleri

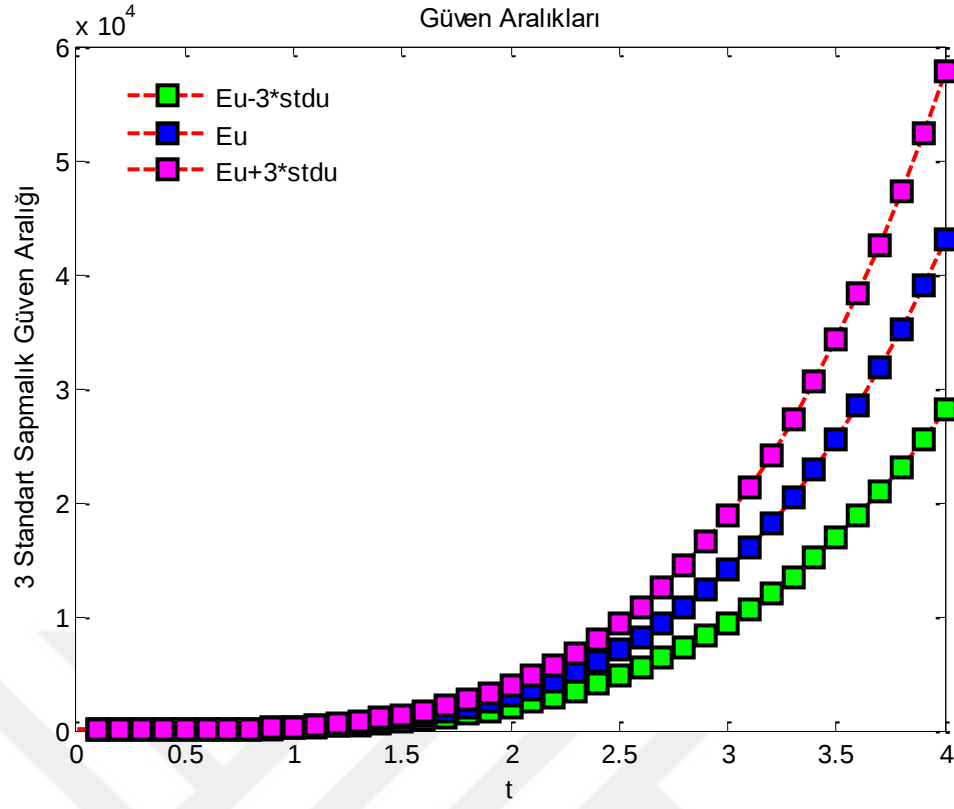
ve

Varyansı;

$$\begin{aligned} Var[u(t)] = & \frac{1}{12} + \frac{94}{45} t^2 + \frac{871}{45} t^4 + \frac{3920}{81} t^6 + \frac{\frac{122}{15} t^{4-2\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)^2} + \frac{\frac{1}{12} t^{2-2\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)^2} + \frac{10000}{27} t^8 + \frac{\frac{25}{3} t^{6-2\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)^2} + \\ & \frac{\frac{25}{3} t^{6-2\alpha}}{(3-\alpha)^2 \Gamma(2-\alpha)^2} + \frac{\frac{1}{12} t^{4-4\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$



Şekil 5. $a = 2, b = 1$ değerleri ve $\alpha = 0.9$ için (4.15) denkleminin varyansları $AGS = E(u(t)) - 3\sqrt{Var(u(t))}$ alt güven sınırı ve $UGS = E(u(t)) + 3\sqrt{Var(u(t))}$ olarak bulunur.



Şekil 6. $a = 2, b = 1$ değerleri ve $\alpha = 0.9$ için (4.15) denkleminin $K = 3$ için güven aralıkları olarak bulunur.

5. DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ İÇİN HOMOTOPI PERTÜRBASYON METODU

$$D^{\alpha_i} y_i = p f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (5.1)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ ve p gömme parametresi $p \in [0, 1]$, (5.1) deki $p = 0$ alınırsa

$$D^{\alpha_i} y_i = 0 \quad (5.2)$$

olur.

$p = 1$ olduğunda (5.1)-(5.3) te verilen orijinal sisteme dönüşür. p parametresi kullanılarak (5.1)-(5.3) sistem çözümü

$$y_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_{in} = y_{i0} + p y_{i1} + p^2 y_{i2} + p^3 y_{i3} + \dots \quad (5.3)$$

p nin aynı dereceli terimlerini birleştirerek, aşağıdaki formdaki lineer denklemlerin serileri elde edilir.

$$D^{\alpha_i} y_i = p \cdot f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$p^0: D^{\alpha_i} y_{i0} = 0,$$

$$p^1: D^{\alpha_i} y_{i1} = f_{i1}(t, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}),$$

$$p^2: D^{\alpha_i} y_{i2} = f_{i2}(t, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1}),$$

$$p^3: D^{\alpha_i} y_{i3} = f_{i3}(t, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1}, y_{12}, y_{22}, \dots, y_{n2}),$$

$$\begin{aligned} f_i(t, y_{10} + p y_{11} + p^2 y_{12} + \dots + y_{n0} + p y_{n1} + p^2 y_{n2} + \dots) \\ = f_{i1}(t, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) + p f_{i2}(t, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1}) \\ + p^2 f_{i3}(t, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1}, y_{12}, y_{22}, \dots, y_{n2}, \dots) \end{aligned}$$

Örnek 1:

$$D^{\alpha} x(t) = x(t) + y(t)$$

$$D^{\beta} y(t) = -x(t) + y(t) \quad (5.4)$$

Lineer kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Başlangıç koşulları $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ olsun, (5.1) e göre aşağıdaki homotopiyi oluşturalım.

$$D^{\alpha} x = p(x + y)$$

$$D^{\beta} y = p(-x + y) \quad (5.5)$$

$$x(t) = x_0 + p x_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + \dots$$

$$y(t) = y_0 + p y_1 + p^2 y_2 + p^3 y_3 + \dots \quad (5.6)$$

(5.6) yı (5.5) te yerine yazalım.

$$D^{\alpha} x = p(x + y)$$

$$D^\alpha[x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + \dots] = p[x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + \dots + y_0 + py_1 + p^2y_2 + p^3y_3 + \dots] \quad (5.7)$$

$$D^\beta y = p(-x + y)$$

$$D^\beta[y_0 + py_1 + p^2y_2 + p^3y_3 + \dots] = p[-x_0 - px_1 - p^2x_2 - p^3x_3 + \dots + y_0 + py_1 + p^2y_2 + p^3y_3 + \dots] \quad (5.8)$$

(5.7) de p aynı dereceli terimler denklem arasında düzenlenirse

$$p^0: D^\alpha x_0 = 0$$

$$p^1: D^\alpha x_1 = x_0 + y_0$$

$$p^2: D^\alpha x_2 = x_1 + y_1$$

$$p^3: D^\alpha x_3 = x_2 + y_2$$

(5.8) de p nin aynı dereceli terimleri eşitlenirse

$$p^0: D^\beta y_0 = 0$$

$$p^1: D^\beta y_1 = -x_0 + y_0$$

$$p^2: D^\beta y_2 = -x_1 + y_1$$

$$p^3: D^\beta y_3 = -x_2 + y_2$$

...

(5.6) da yerine yazılırsa

$$x(t) = x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + \dots$$

$$x(0) = x_0(0) + px_1(0) + p^2x_2(0) + p^3x_3(0) + \dots = 0$$

$$x_0(0) = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0$$

$$y(t) = y_0 + py_1 + p^2y_2 + p^3y_3 + \dots$$

$$y(0) = y_0(0) + py_1(0) + p^2y_2(0) + p^3y_3(0) + \dots = 0$$

$$y_0(0) = 0, \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0$$

$$x_0 = x_0(0) = 0$$

$$y_0 = y_0(0) = 1$$

$$D^\alpha x_1 = x_0 + y_0$$

$$D^\alpha x_1 = 1 \Rightarrow J^\alpha D^\alpha x_1 = J^\alpha 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\Gamma(0+1)t^{0+\alpha}}{\Gamma(0+\alpha+1)} = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$D^\beta y_1 = 1 \Rightarrow J^\beta D^\beta y_1 = J^\beta 1 \Rightarrow y_1 = \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}$$

$$D^\alpha x_2 = x_1 + y_1$$

$$D^\alpha x_2 = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}$$

integral alınırsa

$$x_2 = J^\alpha \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + J^\beta \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)t^2}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(\beta + 1)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)}$$

$$x_2 = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}$$

$$D^\beta y_2 = -x_1 + y_1$$

$$D^\beta y_2 = \frac{-t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}$$

integral alınırsa

$$y_2 = J^\beta \frac{-t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + J^\beta \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} = \frac{-\Gamma(\alpha + 1)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{\Gamma(\beta + 1)t^{2\beta}}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(2\beta + 1)}$$

$$y_2 = \frac{-t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)}$$

$$D^\alpha x_3 = x_2 + y_2$$

$$D^\alpha x_3 = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} - \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)}$$

$$D^\alpha x_3 = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)}$$

integral alınırsa

$$x_3 = J^\alpha \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + J^\beta \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)}$$

$$x_3 = \frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(2\beta + 1)t^{2\beta+\alpha}}{\Gamma(2\beta + 1)\Gamma(2\beta + \alpha + 1)}$$

$p = 1$ için

$$x(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{t^{2\beta+\alpha}}{\Gamma(2\beta + \alpha + 1)} + \dots$$

$$y(t) = 1 + \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} + \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)} - \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} - \frac{t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} - 2 \frac{t^{2\beta+\alpha}}{\Gamma(2\beta + \alpha + 1)} + \frac{t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta + 1)} + \dots$$

$t = 1, \alpha = 1, \beta = 1$ için

$$r_1 = \frac{\|x_2\|}{\|x_1\|} = \frac{\left\| \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right\|}{\left\| \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\|} = 1$$

$$r_2 = \frac{\|x_3\|}{\|x_2\|} = \frac{\left\| \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{\Gamma(2\beta+1)t^{2\beta+\alpha}}{\Gamma(2\beta+1)\Gamma(2\beta+\alpha+1)} \right\|}{\left\| \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right\|} = 0.333 < 1$$

$$\vdots$$

1'den küçük olduğundan yakınsak olduğu görülür.

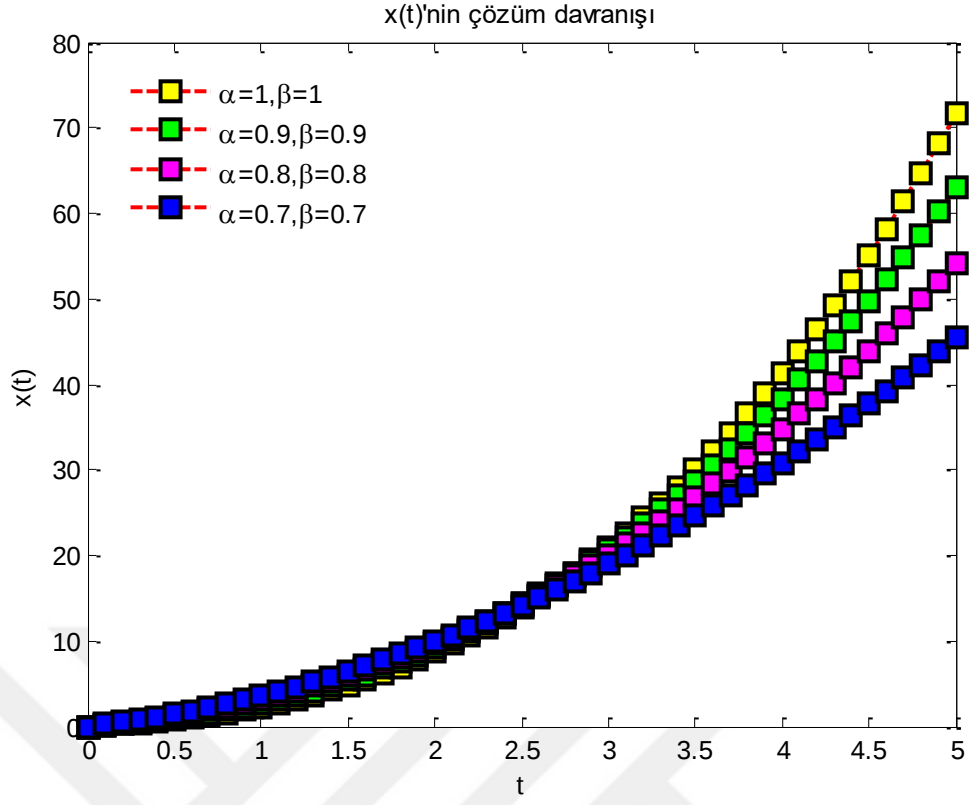
$t = 1, \alpha = 1, \beta = 1$ için

$$s_1 = \frac{\|y_2\|}{\|y_1\|} = \frac{\left\| \frac{-t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} \right\|}{\left\| \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right\|} = 1$$

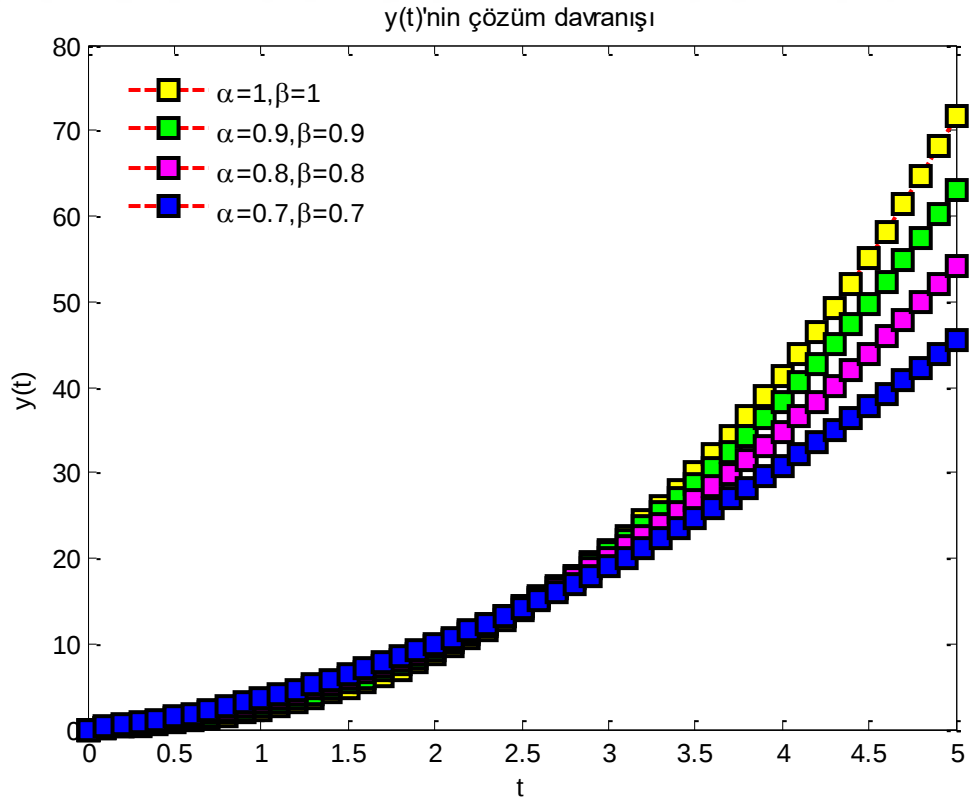
$$s_2 = \frac{\|y_3\|}{\|y_2\|} = \frac{\left\| -\frac{t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} - 2\frac{t^{2\beta+\alpha}}{\Gamma(2\beta+\alpha+1)} + \frac{t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)} \right\|}{\left\| \frac{-t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} \right\|} = 0.333 < 1$$

$$\vdots$$

1'den küçük olduğundan yakınsak olduğu görülür.



Şekil 7. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $x(t)$ 'nin çözüm davranışları



Şekil 8. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $y(t)$ 'nin çözüm davranışları

5.1 Katsayıları Rastgele Olan Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklem Sistemleri

Örnek 1:

$$D_*^\alpha x(t) = Ax + (B - A)y$$

$$D_*^\beta y(t) = (B - A)x + Ay \quad (5.9)$$

$x(0)=1, y(0)=-1$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$A \sim \text{Gamma}(\zeta, \theta) \rightarrow A \sim \text{Gamma}(2, 4)$ Gamma dağılıma sahip,

$B \sim \text{Beta}(u, v) \rightarrow B \sim \text{Beta}(3, 2)$ Beta dağılıma sahip, rastgele değişkenler olmak üzere rastgele Homotopi Perturbasyon Yöntemiyle denkleminin çözüm davranışlarını elde ediniz.

Çözüm:

$\alpha = \beta = 1$ için tam çözüm

$$x(t) = e^{(-B+2A)t}, \quad y(t) = -e^{(-B+2A)t}$$

Lineer kesirli mertebeden rastgele diferansiyel denklem sistemi (5.1) denklemine göre aşağıdaki homotopi oluşturulursa

$$D^\alpha x = p(Ax + (B - A)y)$$

$$D^\beta y = p((B - A)x + Ay) \quad (5.10)$$

$$x(t) = x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + \dots$$

$$y(t) = y_0 + py_1 + p^2y_2 + p^3y_3 + \dots \quad (5.11)$$

(5.10) u (5.11) de yerine yazalım.

$$D^\alpha x = p(Ax + (B - A)y)$$

$$D^\alpha [x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + \dots] = p[A(x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + \dots) + (B - A)(y_0 + py_1 + p^2y_2 + p^3y_3 + \dots)] \quad (5.12)$$

$$D^\beta y = p((B - A)x + Ay)$$

$$D^\beta [y_0 + py_1 + p^2y_2 + p^3y_3 + \dots] = p[(B - A)(x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + \dots) + A(y_0 + py_1 + p^2y_2 + p^3y_3 + \dots)] \quad (5.13)$$

(5.12) ve (5.13) te p 'nin aynı dereceli terimlerin eşitliğinden p 'nin kuvvetlerine göre düzenleme yapılırsa,

$$p^0: D^\alpha x_0 = 0$$

$$p^1: D^\alpha x_1 = Ax_0 + (B - A)y_0$$

$$p^2: D^\alpha x_2 = Ax_1 + (B - A)y_1$$

$$p^3: D^\alpha x_3 = Ax_2 + (B - A)y_2$$

...

$$p^0: D^\beta y_0 = 0$$

$$p^1: D^\beta y_1 = (B - A)x_0 + Ay_0$$

$$p^2: D^\beta y_2 = (B - A)x_1 + Ay_1$$

$$p^3: D^\beta y_3 = (B - A)x_2 + Ay_2$$

...

(5.12) de başlangıç koşulları yerine yazılırsa,

$$x(t) = x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + \dots$$

$$t = 0, \quad x(0) = x_0(0) + px_1(0) + p^2x_2(0) + p^3x_3(0) + \dots = 0$$

$$x_0(0) = 1$$

$$x_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = 0$$

...

$$y(t) = y_0 + py_1 + p^2y_2 + p^3y_3 + \dots$$

$$y(0) = y_0(0) + py_1(0) + p^2y_2(0) + p^3y_3(0) + \dots = -1$$

$$y_0(0) = -1$$

$$y_1(0) = 0$$

$$y_2(0) = 0$$

$$y_3(0) = 0$$

...

$$D^\alpha x_1 = Ax_0 + (B - A)y_0$$

$$D^\alpha x_1 = A + A - B \Rightarrow D^\alpha x_1 = 2A - B \Rightarrow J^\alpha D^\alpha x_1 = J^\alpha (2A - B) \Rightarrow x_1$$

$$= \frac{\Gamma(0 + 1)t^{0+\alpha}}{\Gamma(0 + \alpha + 1)}(2A - B) = \frac{(2A - B)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

$$D^\beta y_1 = (B - A)x_0 + Ay_0$$

$$D^\beta y_1 = B - A - A \Rightarrow D^\beta y_1 = B - 2A \Rightarrow J^\beta D^\beta y_1 = D^\beta (B - 2A)t^0 \Rightarrow y_1$$

$$= \frac{(B - 2A)t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}$$

$$D^\alpha x_2 = Ax_1 + (B - A)y_1$$

$$D^\alpha x_2 = \frac{A(2A - B)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + (B - A) \frac{(B - 2A)t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}$$

integral alınırsa,

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{A(2A - B)J^\alpha t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(B - A)(B - 2A)}{\Gamma(\beta + 1)} J^\alpha t^\beta \\ &= \frac{A(2A - B)}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{\Gamma(\alpha + 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + (B - A) \frac{(B - 2A)\Gamma(\beta + 1)t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\ x_2 &= \frac{A(2A - B)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(B - A)(B - 2A)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} t^{\beta+\alpha} \end{aligned}$$

$$D^\beta y_2 = (B - A)x_1 + Ay_1$$

$$D^\beta y_2 = \frac{(B - A)(2A - B)t^\beta}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{A(B - 2A)t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}$$

integral alınırsa,

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{(B - A)(2A - B)J^\beta t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{A(B - 2A)}{\Gamma(\beta + 1)} J^\beta t^\beta \\ &= \frac{(B - A)(2A - B)\Gamma(\alpha + 1)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + \alpha + 1)} + \frac{A(B - 2A)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(2\beta + 1)} t^{2\beta} \\ y_2 &= \frac{(B - A)(2A - B)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} t^{\alpha+\beta} + \frac{A(B - 2A)}{\Gamma(2\beta + 1)} t^{2\beta} \end{aligned}$$

$$D^\alpha x_3 = Ax_2 + (B - A)y_2$$

$$\begin{aligned} D^\alpha x_3 &= A \left(\frac{A(2A - B)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + (B - A) \frac{(B - 2A)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right) + (B \\ &\quad - A) \left(\frac{(B - A)(2A - B)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} t^{\alpha+\beta} + \frac{A(B - 2A)}{\Gamma(2\beta + 1)} t^{2\beta} \right) \end{aligned}$$

integral alınırsa,

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{A^2(2A - B)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{A(B - A)(B - 2A)t^{\beta+2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} + \frac{(B - A)^2(2A - B)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} \\ &\quad + \frac{A(B - A)(B - 2A)}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)} t^{2\beta+\alpha} \end{aligned}$$

$$D^\beta y_3 = (B - A)x_2 + Ay_2$$

$$D^\beta y_3 = (B - A) \left(\frac{A(2A - B)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(B - A)(B - 2A)t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right) \\ + A \left(\frac{(B - A)(2A - B)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} t^{\alpha+\beta} + \frac{A(B - 2A)}{\Gamma(2\beta + 1)} t^{2\beta} \right)$$

integral alınırsa,

$$y_3 = \frac{A(B - A)(2A - B)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} + \frac{(B - A)^2(B - 2A)t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)} \\ + \frac{A(B - A)(2A - B)}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} t^{2\alpha+\beta} + \frac{A^2(B - 2A)}{\Gamma(3\beta + 1)} t^{3\beta}$$

...

bulduğumuz çözümleri (5.12) de yerine yazarsak,

$$x(t) = 1 + \left(\frac{(2A - B)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) p + \left(\frac{A(2A - B)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(B - A)(B - 2A)t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right) p^2 \\ + \left(\frac{A^2(2A - B)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{A(B - A)(B - 2A)t^{\beta+2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} \right. \\ \left. + \frac{(B - A)^2(2A - B)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} + \frac{A(B - A)(B - 2A)t^{2\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)} \right) p^3 + \dots \\ y(t) = -1 + \left(\frac{(B - 2A)t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \right) p + \left(\frac{(B - A)(2A - B)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{A(B - 2A)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)} \right) p^2 \\ + \left(\frac{A(B - A)(2A - B)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} + \frac{(B - A)^2(B - 2A)t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)} \right. \\ \left. + \frac{A(B - A)(2A - B)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} + \frac{A^2(B - 2A)t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta + 1)} \right) p^3 + \dots$$

$p = 1$ için

$$x(t) = 1 + \left(\frac{(2A - B)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) + \left(\frac{(2A^2 - AB)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(B^2 - 3AB + 2A^2)t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right) \\ + \left(\frac{(2A^3 - A^2B)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{(AB^2 - 3A^2B + 2A^3)t^{\beta+2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} \right. \\ \left. + \frac{(4AB^2 - B^3 - 5A^2B + 2A^3)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} + \frac{(AB^2 - 3A^2B + 2A^3)t^{2\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)} \right)$$

$$\begin{aligned}
y(t) = & -1 + \left(\frac{(B - 2A)t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \right) + \left(\frac{(3BA - B^2 - 2A^2)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{(AB - 2A^2)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)} \right) \\
& + \left(\frac{(3BA^2 - AB^2 - 2A^3)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} + \frac{(B^3 - 4AB^2 + 5BA^2 - 2A^3)t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)} \right) \\
& + \frac{(3BA^2 - AB^2 - 2A^3)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} + \frac{(BA^2 - 2A^3)t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta + 1)} + \dots
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz.

Gamma dağılıma sahip A rastgele değişkenin parametreleri, $A \sim \text{Gamma}(\zeta, \theta)$ dir.

Gamma dağılımının moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = 1/(1 - \theta t)^\zeta \quad (5.14)$$

ifadesi bulunur. $A \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$ rastgele değişkeninin, birinci moment ve varyansı

$$E[A] = \zeta\theta,$$

$$E[A^2] = \zeta^2\theta^2 + \zeta\theta^2, E[A^3] = \zeta^3\theta^3 + 3\zeta^2\theta^3 + 2\zeta\theta^3, E[A^4] = \zeta^4\theta^4 + 6\zeta^3\theta^4 + 11\zeta^2\theta^4 + 6\zeta\theta^4,$$

$$\text{Var}[A] = \zeta\theta^2, \text{Var}[A^2] = 4\zeta^3\theta^4 + 10\zeta^2\theta^4 + 6\zeta\theta^4,$$

$$\text{Var}[A^3] = 9\zeta^5\theta^6 + 72\zeta^4\theta^6 + 213\zeta^3\theta^6 + 270\zeta^2\theta^6 + 120\zeta\theta^6 \quad (5.15)$$

dir (Akdeniz, 2014, Khaniyev vd., 2017).

Beta dağılımına sahip B rastgele değişkeninin, beklenen değeri ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibidir (Khaniyev vd., 2017).

$$E[B] = \frac{u}{u + v}$$

$$E[B^2] = \frac{u(u + 1)}{(u + v)(u + v + 1)}$$

$$E[B^3] = \frac{u(u+1)(u+2)}{(u+v)(u+v+1)(u+v+2)}$$

$$E[B^4] = \frac{u(u + 1)(u + 2)(u + 3)}{(u + v)(u + v + 1)(u + v + 2)(u + v + 3)}$$

$$\text{Var}(B) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

$$\text{Var}(B^2) = \frac{2(\alpha+1)\alpha\beta(2\alpha^2+2\alpha\beta+6\alpha+3\beta+3)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)^2(\alpha+\beta)^2}$$

$$\text{Var}(B^3) =$$

$$\frac{3(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha\beta(40+99\alpha^2+120\alpha+30\alpha^3+45\alpha^2\beta+99\alpha\beta+60\beta+6\alpha^3\beta+3\alpha^2\beta^2+15\alpha\beta^2+20\beta^2+3\alpha^4)}{(\alpha+\beta+5)(\alpha+\beta+4)(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2(\alpha+\beta+1)^2\alpha\beta^2} \quad (5.16)$$

$$Var[AB] = E[A^2]E[B^2] - E[A]^2E[B]^2 = \frac{(\zeta^2\theta^2 + \zeta\theta^2)u(u+1)}{(u+v)(u+v+1)} - \left(\frac{u}{u+v}\right)^2 (\zeta\theta)^2$$

$$Var[AB^2] = E[A^2]E[B^4] - E[A]^2E[B^2]^2 = \frac{(\zeta^2\theta^2 + \zeta\theta^2)u(u+1)(u+2)(u+3)}{(u+v)(u+v+1)(u+v+2)(u+v+3)} -$$

$$(\zeta\theta)^2 \left(\frac{u(u+1)}{(u+v)(u+v+1)}\right)^2$$

$$\begin{aligned} Var[A^2B] &= E[A^4]E[B^2] - E[A^2]^2E[B]^2 \\ &= \frac{u(u+1)(\zeta^4\theta^4 + 6\zeta^3\theta^4 + 11\zeta^2\theta^4 + 6\zeta\theta^4)}{(u+v)(u+v+1)} \\ &\quad - (\zeta^2\theta^2 + \zeta\theta^2)^2 \left(\frac{u}{u+v}\right)^2 \end{aligned}$$

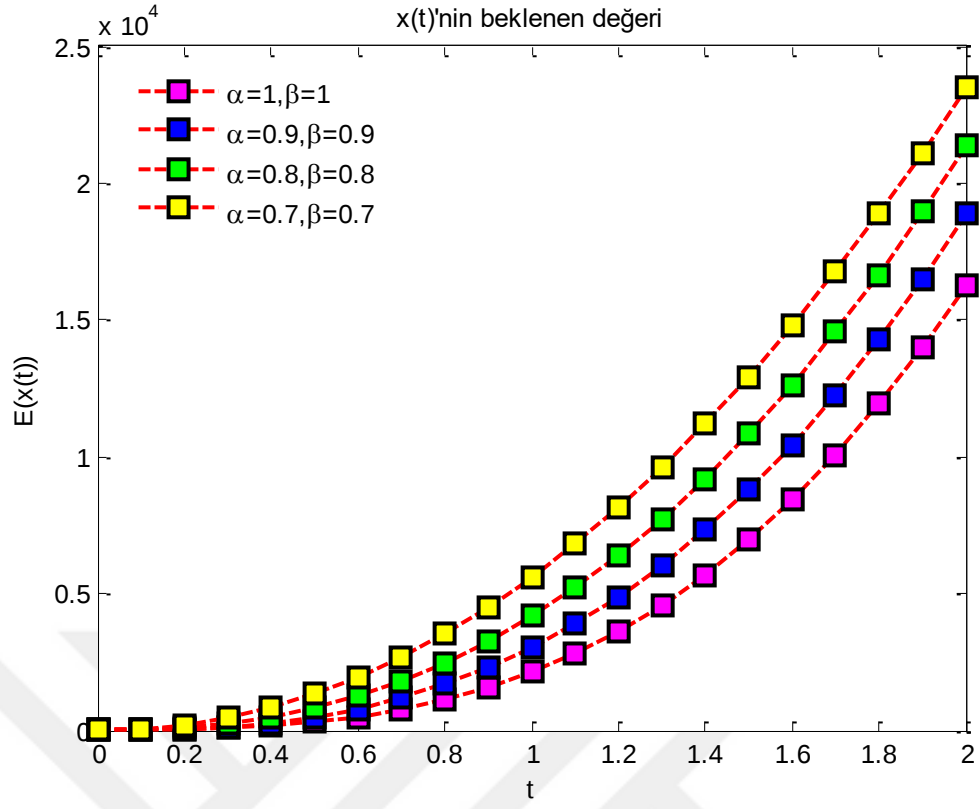
Yukarıdaki çözümlerin beklenen değerleri;

$$\begin{aligned} E(x(t)) &= E \left[1 + \left(\frac{(2A - B)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) + \left(\frac{(2A^2 - AB)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(B^2 - 3AB + 2A^2)t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{(2A^3 - A^2B)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{(AB^2 - 3A^2B + 2A^3)t^{\beta+2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(4AB^2 - B^3 - 5A^2B + 2A^3)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} + \frac{(AB^2 - 3A^2B + 2A^3)t^{2\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)} \right) \right] \\ &= 1 + \left(\frac{(2E[A] - E[B])t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \\ &\quad + \left(\frac{(2E[A^2] - E[A]E[B])t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(E[B^2] - 3E[A]E[B] + 2E[A^2])t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right) \\ &\quad + \left(\frac{(2E[A^3] - E[A^2]E[B])t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right. \\ &\quad + \frac{(E[A]E[B^2] - 3E[A^2]E[B] + 2E[A^3])t^{\beta+2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} \\ &\quad + \frac{(4E[A]E[B^2] - E[B^3] - 5E[A^2]E[B] + 2E[A^3])t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} \\ &\quad \left. \left. + \frac{(E[A]E[B^2] - 3E[A^2]E[B] + 2E[A^3])t^{2\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{\left(\left(2\zeta\theta - \frac{u}{(u+v)} \right) t^\alpha \right)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\left(2(\zeta^2\theta^2 + \zeta\theta^2) - \frac{\zeta\theta u}{(u+v)} \right) t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
&+ \frac{\left(\frac{u(v+1)}{(u+v)(u+v+1)} - \frac{3\zeta\theta u}{(u+v)} + 2(\zeta^2\theta^2 + \zeta\theta^2) \right) t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&+ \frac{\left(2(\zeta^3\theta^3 + 3\zeta^2\theta^3 + 2\zeta\theta^3) - \frac{(\zeta^2\theta^2 + \zeta\theta^2)u}{(u+v)} \right) t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \\
&+ \frac{\left(\frac{\zeta\theta(u(v+1))}{(u+v)(u+v+1)} - \frac{3u(\zeta^2\theta^2 + \zeta\theta^2)}{(u+v)} + 2\zeta^3\theta^3 + 6\zeta^2\theta^3 + 4\zeta\theta^3 \right) t^{\beta+2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} \\
&+ \frac{\left(\frac{4\zeta\theta u(v+1)}{(u+v)(u+v+1)} - \frac{u(u+1)(u+2)}{(u+v)(u+v+1)(u+v+2)} \right) t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} \\
&+ \frac{\left(-\frac{5u(\zeta^2\theta^2 + \zeta\theta^2)}{(u+v)} + 2\zeta^3\theta^3 + 6\zeta^2\theta^3 + 4\zeta\theta^3 \right) t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} \\
&+ \frac{\left(\frac{\zeta\theta u(v+1)}{(u+v)(u+v+1)} - \frac{3u(\zeta^2\theta^2 + \zeta\theta^2)}{(u+v)} + 2\zeta^3\theta^3 + 6\theta^3 + 4\zeta\theta^3 \right) t^{2\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)}
\end{aligned}$$

$\zeta = 2, \theta = 4, u = 3, v = 2$ özel değerleri için beklenen değer;

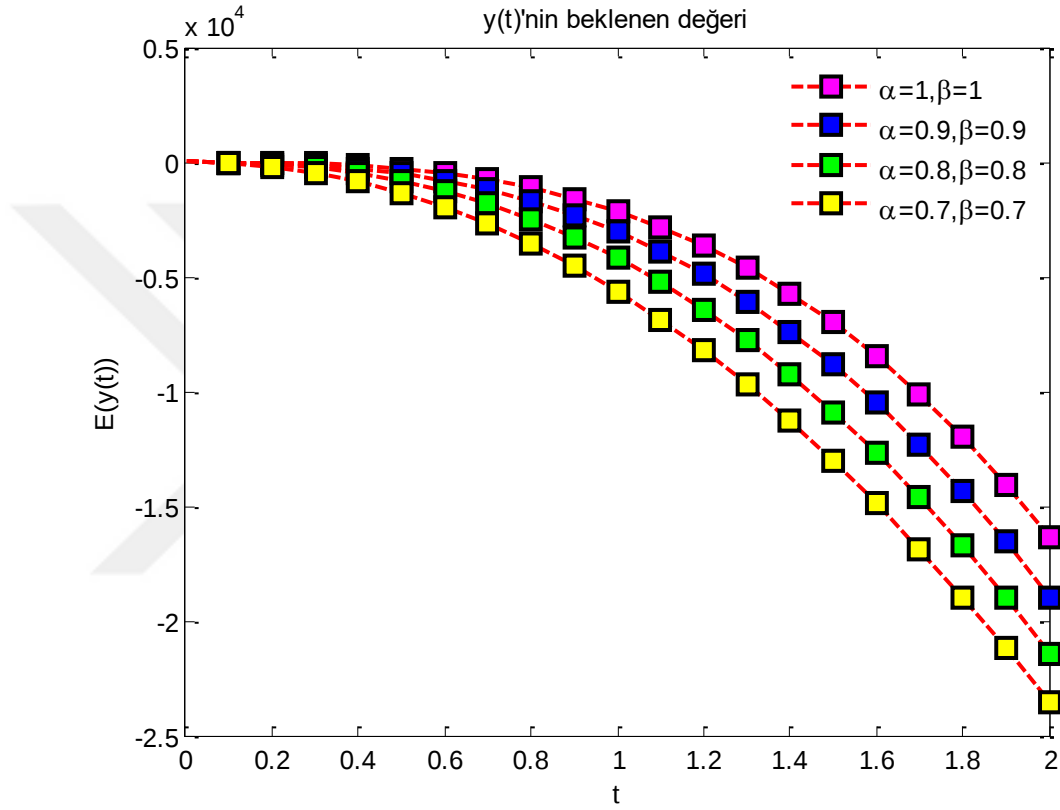
$$\begin{aligned}
E(x(t)) &= 1 + \frac{\frac{77}{5} t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{936}{5} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{942}{5} \frac{t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{15072}{5} \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \\
&+ \frac{28056}{5} \frac{t^{\beta+2\alpha}}{\Gamma(\beta+2\alpha+1)} + \frac{t^{2\beta+\alpha}}{\Gamma(2\beta+\alpha+1)}
\end{aligned}$$



Şekil 9. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $E(x(t))$ 'nin çözüm davranışları

$$\begin{aligned}
& E(y(t)) \\
&= E \left[-1 + \left(\frac{(B-2A)t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right) + \left(\frac{(B-A)(2A-B)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{A(B-2A)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} \right) \right. \\
&+ \left(\frac{A(B-A)(2A-B)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} + \frac{(B-A)^2(B-2A)t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} + \frac{A(B-A)(2A-B)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} \right. \\
&\left. \left. + \frac{A^2(B-2A)t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)} \right) \right] \\
&= -1 + \left(\frac{(E[B] - 2E[A])t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right) \\
&+ \left(\frac{(3E[A]E[B] - E[B^2] - 2E[A^2])t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{(E[A]E[B] - 2E[A^2])t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} \right) \\
&+ \left(\frac{(3E[A^2]E[B] - E[A]E[B^2] - 2E[A^3])t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} \right. \\
&+ \frac{(E[B^3] - 4E[A]E[B^2] + 5E[A^2]E[B] - 2E[A^3])t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} \\
&+ \frac{(3E[A^2] - E[A]E[B^2] - 2E[A^3])t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} + \left. \frac{(E[A^2]E[B] - 2E[A^3])t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)} \right) \\
&= -1 + \left(\frac{\left(\frac{u}{u+v} - 2\zeta\theta \right) t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right) \\
&+ \left(\frac{\left(3\zeta\theta \left(\frac{u}{u+v} \right) - \frac{u(u+1)}{(u+v)(u+v+1)} - 2(\zeta^2\theta^2 + \zeta\theta^2) \right) t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right. \\
&\left. + \frac{\left(\zeta\theta \left(\frac{u}{u+v} \right) - 2(\zeta^2\theta^2 + \zeta\theta^2) \right) t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} \right) \\
&+ \frac{\left(\frac{3u\zeta^2\theta^2 + 3u\zeta\theta^2}{u+v} - \frac{\zeta\theta u(u+1)}{(u+v)(u+v+1)} - 2\zeta^3\theta^3 + 3\zeta^2\theta^3 + 2\zeta\theta^3 \right) t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} \\
&+ \frac{\left(\frac{u(u+1)(u+2)}{(u+v)(u+v+1)(u+v+2)} - \frac{4\zeta\theta u(u+1)}{(u+v)(u+v+1)} + \frac{5u\zeta^2\theta^2 + 5u\zeta\theta^2}{u+v} \right) t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} \\
&+ \frac{(-2\zeta^3\theta^3 + 3\zeta^2\theta^3 + 2\zeta\theta^3)t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} + \frac{\left(3\zeta^2\theta^2 + 3\zeta\theta^2 - \frac{\zeta\theta u(u+1)}{(u+v)(u+v+1)} \right) t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} \\
&+ \frac{(-2\zeta^3\theta^3 + 3\zeta^2\theta^3 + 2\zeta\theta^3)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} + \frac{\left(\frac{u\zeta^2\theta^2 + u\zeta\theta^2}{u+v} - 2\zeta^3\theta^3 + 3\zeta^2\theta^3 + 2\zeta\theta^3 \right) t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)}
\end{aligned}$$

$$E(y(t)) = 1 - \frac{77t^\beta}{5\Gamma(\beta+1)} - \frac{192t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} - \frac{936t^{2\beta}}{5\Gamma(2\beta+1)} - \frac{29568t^{\beta+2\alpha}}{5\Gamma(\beta+2\alpha+1)} - \frac{13704t^{2\beta+\alpha}}{5\Gamma(2\beta+\alpha+1)} - \frac{15072t^{3\beta}}{5\Gamma(3\beta+1)}$$

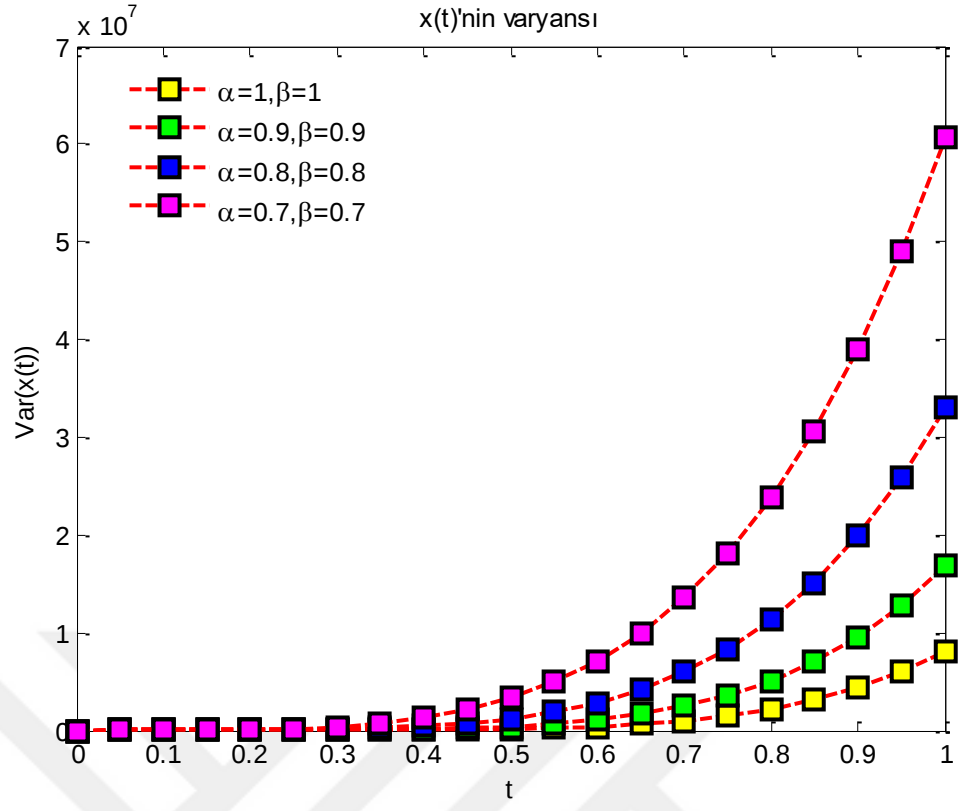


Şekil 10. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $E(y(t))$ 'nin çözüm davranışları

$$\begin{aligned}
& \text{Var}(x(t)) \\
&= \text{Var} \left[1 + \left(\frac{(2A - B)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) + \left(\frac{(2A^2 - AB)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(B^2 - 3AB + 2A^2)t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right) \right. \\
&\quad + \left(\frac{(2A^3 - A^2B)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{(AB^2 - 3A^2B + 2A^3)t^{\beta+2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(4AB^2 - B^3 - 5A^2B + 2A^3)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} + \frac{(AB^2 - 3A^2B + 2A^3)t^{2\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)} \right) \right] \\
&= \left(\frac{(4\text{Var}[A] + \text{Var}[B])t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2} \right) + \frac{(4\text{Var}[A^2] + E[A^2]E[B^2] - E[A]^2E[B]^2)t^{4\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)^2} \\
&\quad + \frac{(\text{Var}[B^2] + 9(E[A^2]E[B^2] - E[A]^2E[B]^2) + 4\text{Var}[A^2])t^{2\beta+2\alpha}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)^2} \\
&\quad + \left(\frac{(4\text{Var}[A^3] + (E[A^4]E[B^2] - E[A^2]^2E[B]^2))t^{6\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{((E[A^2]E[B^4] - E[A]^2E[B^2]^2) + 9(E[A^4]E[B^2] - E[A^2]^2E[B]^2) + 4\text{Var}[A^3])t^{2\beta+4\alpha}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)^2} \right. \\
&\quad + \frac{(16(E[A^2]E[B^4] - E[A]^2E[B^2]^2) + \text{Var}[B^3])t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)^2} \\
&\quad + \frac{25(E[A^4]E[B^2] - E[A^2]^2E[B]^2) + 4\text{Var}[A^3])t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)^2} \\
&\quad \left. + \frac{((E[A^2]E[B^4] - E[A]^2E[B^2]^2) + 9(E[A^4]E[B^2] - E[A^2]^2E[B]^2) + 4\text{Var}[A^3])t^{4\beta+2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)^2} \right) \\
&= \frac{\left(4\zeta\theta^2 + \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \right) t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2} \\
&\quad + \frac{\left(44\zeta^3\theta^4 + 10\zeta^2\theta^4 + 6\zeta\theta^4 + \frac{(\zeta^2\theta^2 + \zeta\theta^2)u(u + 1)}{(u + v)(u + v + 1)} - \left(\frac{u}{u + v} \right)^2 (\zeta\theta)^2 \right) t^{4\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)^2} \\
&\quad + \frac{\left(\frac{2\alpha\beta(\alpha + 1)(2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 6\alpha + 3\beta + 3)}{(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 1)^2(\alpha + \beta)^2} \right) t^{2\beta+2\alpha}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)^2} \\
&\quad + \frac{\left(\frac{9\zeta\theta^2\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} + 44\zeta^3\theta^4 + 10\zeta^2\theta^4 + 6\zeta\theta^4 \right) t^{2\beta+2\alpha}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(36\zeta^5\theta^6 + 288\zeta^4\theta^6 + 852\zeta^3\theta^6 + 1080\zeta^2\theta^6 + 480\zeta\theta^6 + 4\zeta^3\theta^4 + 10\zeta^2\theta^4)t^{6\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)^2} \\
& + \frac{\left(\frac{6\zeta\theta^4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}\right)t^{6\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)^2} \\
& + \frac{\left(\frac{32\zeta\theta^2\alpha\beta(\alpha + 1)(2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 6\alpha + 3\beta + 3)}{(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 1)^2(\alpha + \beta)^2}\right)t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)^2} \\
& + \frac{\left(\frac{3\alpha\beta(\alpha + 2)(\alpha + 1)(40 + 99\alpha^2 + 120\alpha + 30\alpha^3 + 45\alpha^2\beta + 99\alpha\beta)}{(\alpha + \beta + 5)(\alpha + \beta + 4)(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 2)^2(\alpha + \beta + 1)^2\alpha + \beta^2}\right)t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)^2} \\
& + \frac{\left(\frac{3\alpha\beta(\alpha + 2)(\alpha + 1)(60\beta + 6\alpha^3\beta + 3\alpha^2\beta^2 + 15\alpha\beta^2 + 20\beta^2 + 3\alpha^4)}{(\alpha + \beta + 5)(\alpha + \beta + 4)(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 2)^2(\alpha + \beta + 1)^2\alpha + \beta^2}\right)t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)^2} \\
& + \frac{\frac{\alpha\beta(100\zeta^3\theta^4 + 250\zeta^2\theta^4 + 150\zeta\theta^4)}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)^2} \\
& + \frac{(36\zeta^5\theta^6 + 288\zeta^4\theta^6 + 852\zeta^3\theta^6 + 1080\zeta^2\theta^6 + 480\zeta\theta^6)t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)^2} \\
& + \frac{\frac{2\zeta\theta^2\alpha\beta(\alpha + 1)\alpha\beta(2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 6\alpha + 3\beta + 3)}{(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 1)^2(\alpha + \beta)^2}t^{4\beta+2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)^2} \\
& + \frac{(94\zeta^3\theta^4 + 10\zeta^2\theta^4)t^{4\beta+2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)^2} + \frac{\frac{6\zeta\theta^4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}t^{4\beta+2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)^2} \\
& + \frac{(36\zeta^5\theta^6 + 288\zeta^4\theta^6 + 852\zeta^3\theta^6 + 1080\zeta^2\theta^6 + 480\zeta\theta^6)t^{4\beta+2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(x(t)) = & \frac{3201}{25}t^{2\alpha} + \frac{2955531235926999}{34359738368}t^{4\alpha} + \frac{5911769889781655}{68719476736}t^{2\alpha+2\beta} \\
& + \frac{2454138815376261}{33554432}t^{6\alpha} + \frac{4909202225886709}{33554432}t^{4\alpha+2\beta} \\
& + \frac{306796221388367}{4194304}t^{2\alpha+4\beta} \\
& + \frac{306796221388367}{4194304}t^{2\alpha+4\beta}
\end{aligned}$$

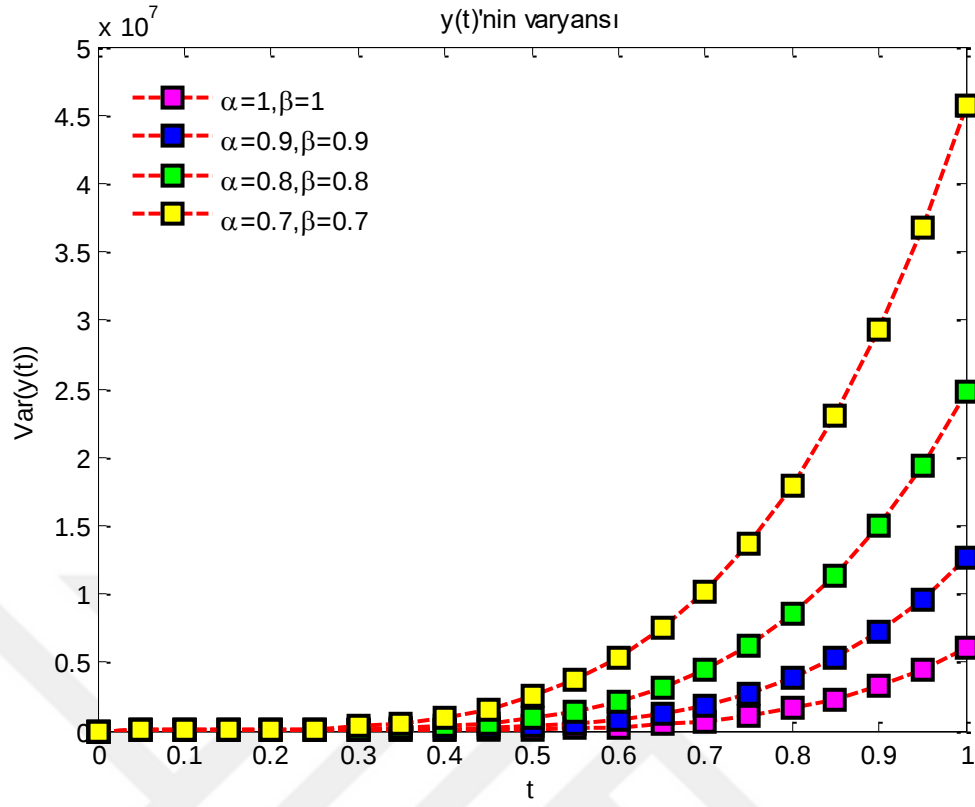


Şekil 11. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $\text{Var}(x(t))$ 'nin çözüm davranışları

$$\begin{aligned}
& \text{Var}(y(t)) \\
&= \text{Var} \left(-1 + \left(\frac{(B-2A)t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right) + \left(\frac{(3BA-B^2-2A^2)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{(AB-2A^2)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} \right) \right. \\
&\quad + \left(\frac{(3BA^2-AB^2-2A^3)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} + \frac{(B^3-4AB^2+5BA^2-2A^3)t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(3BA^2-AB^2-2A^3)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} + \frac{(BA^2-2A^3)t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)} \right) \right) \\
&= \left(\frac{(\text{Var}[B] + 4\text{Var}[A])t^{2\beta}}{\Gamma(\beta+1)^2} \right. \\
&\quad + \frac{(9(E[A^2]E[B^2] - E[A]^2E[B]^2) + \text{Var}[B^2] + 4\text{Var}[A^2])t^{2\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)^2} \\
&\quad + \frac{((E[A^2]E[B^2] - E[A]^2E[B]^2) + 4\text{Var}[A^2])t^{4\beta}}{\Gamma(2\beta+1)^2} \\
&\quad + \frac{(9(E[A^4]E[B^2] - E[A^2]^2E[B]^2) + (E[A^2]E[B^4] - E[A]^2E[B^2]^2) + 4\text{Var}[A^3])t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)^2} \\
&\quad + \frac{(\text{Var}[B^3] + 16(E[A^2]E[B^4] - E[A]^2E[B^2]^2))t^{2\alpha+4\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)^2} \\
&\quad + \frac{(25(E[A^4]E[B^2] - E[A^2]^2E[B]^2) + 4\text{Var}[A^3])t^{2\alpha+4\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)^2} \\
&\quad + \frac{(9(E[A^4]E[B^2] - E[A^2]^2E[B]^2) + (E[A^2]E[B^4] - E[A]^2E[B^2]^2) + 4\text{Var}[A^3])t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)^2} \\
&\quad \left. + \frac{((E[A^4]E[B^2] - E[A^2]^2E[B]^2) + 4\text{Var}[A^3])t^{6\beta}}{\Gamma(3\beta+1)^2} \right) \\
&= \left(\frac{\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} + 4\zeta\theta^2 \right) t^{2\beta}}{\Gamma(\beta+1)^2} \right. \\
&\quad + \frac{\left(\frac{9\alpha\beta\zeta\theta^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} + \frac{2\alpha\beta(\alpha+1)(2\alpha^2+2\alpha\beta+6\alpha+3\beta+3)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)^2(\alpha+\beta)^2} \right) t^{2\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)^2} \\
&\quad + \frac{(16\zeta^3\theta^4 + 40\zeta^2\theta^4 + 24\zeta\theta^4)t^{2\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)^2} \\
&\quad + \frac{\left(\frac{\zeta\theta^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} + 16\zeta^3\theta^4 + 40\zeta^2\theta^4 + 24\zeta\theta^4 \right) t^{4\beta}}{\Gamma(2\beta+1)^2} \\
&\quad \left. + \frac{\left(\frac{\alpha\beta(36\zeta^3\theta^4 + 90\zeta^2\theta^4 + 54\zeta\theta^4)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \right) t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)^2} \right)
\end{aligned}$$

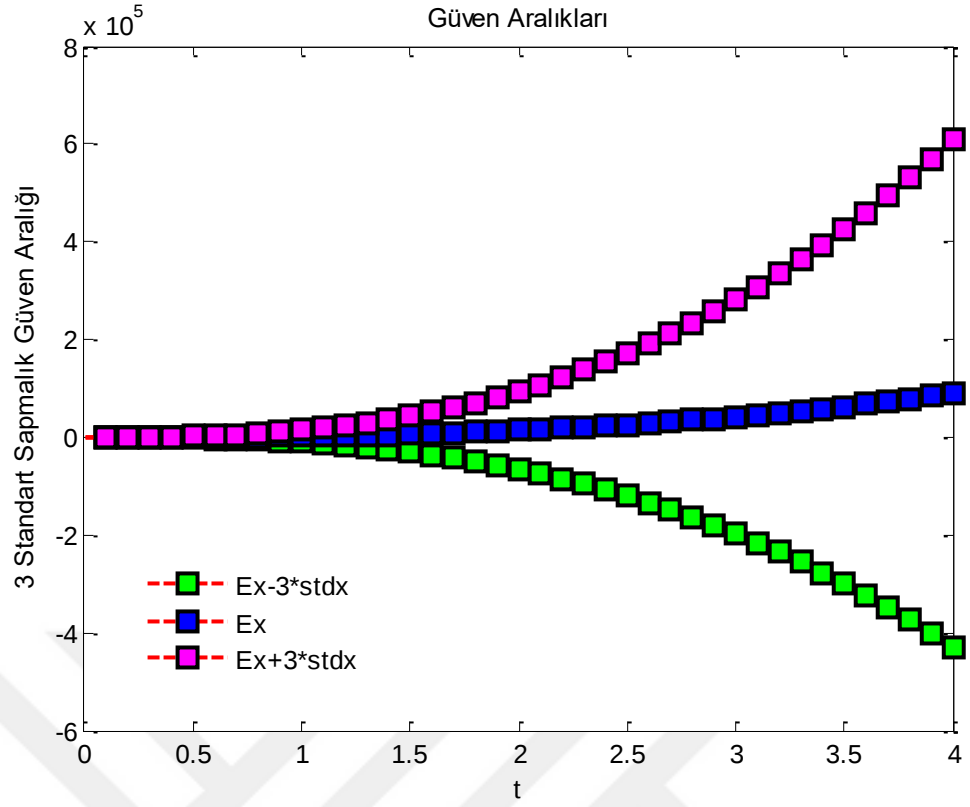
$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(\frac{2\zeta\theta^2\alpha\beta(\alpha+1)(2\alpha^2+2\alpha\beta+6\alpha+3\beta+3)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)^2(\alpha+\beta)^2} \right) t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)^2} \\
& + \frac{(36\zeta^5\theta^6 + 288\zeta^4\theta^6 + 852\zeta^3\theta^6 + 1080\zeta^2\theta^6 + 480\zeta\theta^6) t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)^2} \\
& + \frac{\frac{2(\alpha+1)\alpha\beta(2\alpha^2+2\alpha\beta+6\alpha+3\beta+3)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)^2(\alpha+\beta)^2} t^{2\alpha+4\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)^2} \\
& + \frac{\left(\frac{32\zeta\theta^2\alpha\beta(\alpha+1)(2\alpha^2+2\alpha\beta+6\alpha+3\beta+3)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)^2(\alpha+\beta)^2} \right) t^{2\alpha+4\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\alpha\beta(100\zeta^3\theta^4 + 250\zeta^2\theta^4 + 150\zeta\theta^4)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \right) t^{2\alpha+4\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)^2} \\
& + \frac{(36\theta^6 + 288\zeta^4\theta^6 + 852\zeta^3\theta^6 + 1080\zeta^2\theta^6 + 480\zeta\theta^6) t^{2\alpha+4\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\alpha\beta(36\zeta^3\theta^4 + 90\zeta^2\theta^4 + 54\zeta\theta^4)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \right) t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)^2} \\
& + \frac{\left(\frac{2\zeta\theta^2\alpha\beta(\alpha+1)(2\alpha^2+2\alpha\beta+6\alpha+3\beta+3)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)^2(\alpha+\beta)^2} \right) t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)^2} \\
& + \frac{(36\theta^6 + 288\zeta^4\theta^6 + 852\zeta^3\theta^6 + 1080\zeta^2\theta^6 + 480\zeta\theta^6) t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)^2} \\
& + \frac{\frac{\alpha\beta(4\zeta^3\theta^4 + 10\zeta^2\theta^4 + 6\zeta\theta^4)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} t^{6\beta}}{\Gamma(3\beta+1)^2} \\
& + \frac{(36\theta^6 + 288\zeta^4\theta^6 + 852\zeta^3\theta^6 + 1080\zeta^2\theta^6 + 480\zeta\theta^6) t^{6\beta}}{\Gamma(3\beta+1)^2} \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(y(t)) = & \frac{3201}{25} t^{2\beta} + \frac{5911769889781655}{68719476736} t^{2\alpha+2\beta} + \frac{2955531235926999}{34359738368} t^{4\beta} \\
& + \frac{306796221388367}{2097152} t^{4\alpha+2\beta} + \frac{2454832454779773}{33554432} t^{2\alpha+4\beta} \\
& + \frac{2454138815376261}{33554432} t^{6\beta}
\end{aligned}$$

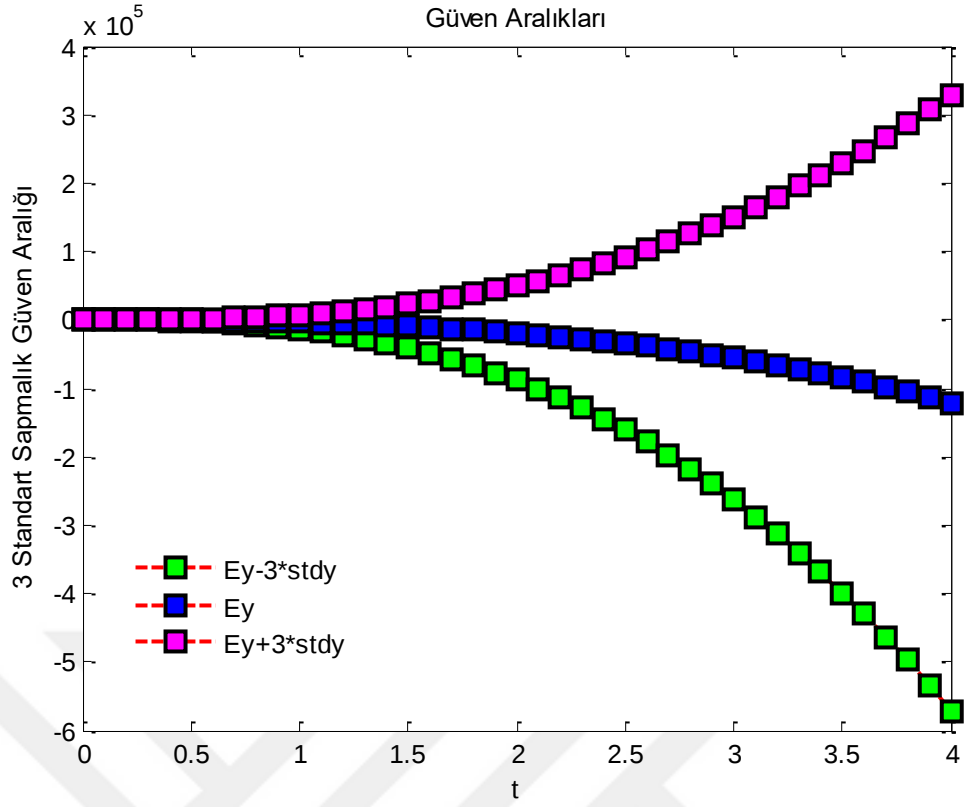


Şekil 12. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $Var(y(t))$ 'nin çözüm davranışları

$AGS = E(y(t)) - 3\sqrt{Var(y(t))}$ alt güven sınırı ve $UGS = E(y(t)) + 3\sqrt{Var(y(t))}$ olarak bulunur.



Şekil 13. $\zeta = 2, \theta = 4, u = 3, v = 2$ değerleri ve $\alpha, \beta = 0.9$ için $y(t)$ 'nin $K = 3$ için güven aralıkları $AGS = E(x(t)) - 3\sqrt{Var(x(t))}$ alt güven sınırı ve $UGS = E(x(t)) + 3\sqrt{Var(x(t))}$ olarak bulunur.



Şekil 14. $\zeta = 2, \theta = 4, u = 3, v = 2$ değerleri ve $\alpha, \beta = 0.9$ için $y(t)$ 'nin $K = 3$ için güven aralıkları

5.2 Başlangıç Koşulları Rastgele Olan Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklem Sistemleri

Örnek 2:

Başlangıç koşulları rastgele olan lineer kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemi

$$D^\alpha x(t) = x - y$$

$$D^\beta y(t) = x + y$$

(5.17)

$$x(0) = A, y(0) = B$$

başlangıç koşulları olmak üzere, $A \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow A \sim N(3, 2)$ Normal dağılıma sahip, $B \sim L(a, b) \rightarrow B \sim L(4, 2)$ Laplace dağılıma sahip, rastgele değişkenler olmak üzere rastgele Homotopi Pertürbasyon Yöntemiyle denkleminin çözüm davranışlarını elde ediniz.

Çözüm:

$\alpha = \beta = 1$ olduğunda tam çözüm,

$$x(t) = e^t[-Bsint + Acost]$$

$$y(t) = e^t[Bcost + Asint]$$

lineer kesirli mertebeden başlangıç koşulları rastgele olan diferansiyel denklem sistemi (5.17) ye göre aşağıdaki homotopi kullanılırsa

$$D^\alpha x = p(x - y)$$

$$D^\beta y = p(x + y) \quad (5.18)$$

$$x(t) = x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + \dots$$

$$y(t) = y_0 + py_1 + p^2y_2 + p^3y_3 + \dots \quad (5.19)$$

(5.19), (5.18) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} D^\alpha [x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + \dots] \\ = p[(x_0 - y_0) + p(x_1 - y_1) + p^2(x_2 - y_2) + p^3(x_3 - y_3) + \dots] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^\beta [y_0 + py_1 + p^2y_2 + p^3y_3 + \dots] \\ = p[(x_0 + y_0) + p(x_1 + y_1) + p^2(x_2 + y_2) + p^3(x_3 + y_3) + \dots] \end{aligned}$$

(5.19) da p 'nin aynı dereceli terimlerinin eşitliği p 'nin kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$p^0: D^\alpha x_0 = 0$$

$$p^1: D^\alpha x_1 = x_0 - y_0$$

$$p^2: D^\alpha x_2 = x_1 - y_1$$

$$p^3: D^\alpha x_3 = x_2 - y_2$$

...

$$p^n: D^\alpha x_n = x_{n-1} - y_{n-1}$$

$$p^0: D^\beta y_0 = 0$$

$$p^1: D^\beta y_1 = x_0 + y_0$$

$$p^2: D^\beta y_2 = x_1 + y_1$$

$$p^3: D^\beta y_3 = x_2 + y_2$$

...

$$p^n: D^\beta y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$$

(5.17) denkleminde başlangıç koşulları yerine yazılırsa

$$x(t) = x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + \dots$$

$$t = 0, \quad x(0) = x_0(0) + px_1(0) + p^2x_2(0) + p^3x_3(0) + \dots = A$$

$$y(0) = y_0(0) + py_1(0) + p^2y_2(0) + p^3y_3(0) + \dots = B$$

$$x_0(0) = A, x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, \dots, x_n(0) = 0$$

$$y_0(0) = B, y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0, \dots, y_n(0) = 0$$

$$x_0 = x_0(0) = A, \quad y_0 = y_0(0) = B$$

$$D^\alpha x_1 = x_0 - y_0$$

$$D^\alpha x_1 = A - B$$

her iki tarafın J^α integrali alınır;

$$J^\alpha D^\alpha x_1 = J^\alpha (A - B) t^0 \Rightarrow x_1 = \frac{\Gamma(0 + 1) t^{0+\alpha} (A - B)}{\Gamma(0 + 1 + \alpha)}$$

$$x_1 = \frac{(A - B) t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

$$D^\beta y_1 = x_0 + y_0$$

$$D^\beta y_1 = A + B$$

her iki tarafın J^β integrali alınır;

$$y_1 = \frac{\Gamma(0 + 1) t^{0+\beta} (A + B)}{\Gamma(0 + 1 + \beta)}$$

$$y_1 = \frac{(A + B) t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}$$

$$D^\alpha x_2 = x_1 - y_1$$

$$D^\alpha x_2 = \frac{(A - B) t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{(A + B) t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}$$

her iki tarafın J^α integrali alınır;

$$x_2 = \frac{(A - B) \Gamma(\alpha + 1) t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{(A + B) \Gamma(\beta + 1) t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(\alpha + \beta + 1)}$$

$$x_2 = \frac{(A - B) t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{(A + B) t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}$$

$$D^\beta y_2 = x_1 + y_1$$

$$D^\beta y_2 = \frac{(A - B) t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(A + B) t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}$$

her iki tarafın J^β integrali alınır;

$$y_2 = \frac{(A - B) \Gamma(\alpha + 1) t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{(A + B) \Gamma(\beta + 1) t^{2\beta}}{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(2\beta + 1)}$$

$$y_2 = \frac{(A - B) t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{(A + B) t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)}$$

$$D^\alpha x_3 = x_2 - y_2$$

$$D^\alpha x_3 = \frac{(A-B)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{(A+B)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} - \frac{(A-B)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} - \frac{(A-B)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)}$$

her iki tarafın J^α integrali alınır;

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{(A-B)\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{2A\Gamma(\alpha+\beta+1)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(2\alpha+\beta+1)} \\ &\quad - \frac{(A+B)\Gamma(2\beta+1)t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)\Gamma(\alpha+2\beta+1)} \\ x_3 &= \frac{(A-B)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{2A.t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} - \frac{(A+B)t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} \end{aligned}$$

$$D^\beta y_3 = x_2 + y_2$$

$$D^\beta y_3 = \frac{(A-B)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{(A+B)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{(A-B)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{(A+B)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)}$$

her iki tarafın J^β integrali alınır;

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{(A-B)\Gamma(2\alpha+1)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(2\alpha+\beta+1)} - \frac{2B\Gamma(\alpha+\beta+1)t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+2\beta+1)} \\ &\quad + \frac{(A+B)\Gamma(2\beta+1)t^{3\beta}}{\Gamma(2\beta+1)\Gamma(3\beta+1)} \\ y_3 &= \frac{(A-B)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} - \frac{2Bt^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} + \frac{(A+B)t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)} \end{aligned}$$

bulunan x_0, x_1, x_2, x_3 ve y_0, y_1, y_2, y_3 (5.19) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} x(t) &= A + \frac{(A-B)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}p + \left(\frac{(A-B)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{(A+B)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right)p^2 \\ &\quad + \left(\frac{(A-B)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{2At^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} - \frac{(A+B)t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} \right)p^3 + \dots \\ y(t) &= B + \frac{(A+B)t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}p + \left(\frac{(A-B)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{(A+B)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} \right)p^2 \\ &\quad + \left(\frac{(A-B)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} - \frac{2Bt^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} + \frac{(A+B)t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)} \right)p^3 + \dots \end{aligned}$$

$p = 1$ alınır,

$$x(t) = A + \frac{(A-B)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \left(\frac{(A-B)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{(A+B)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right) \\ + \left(\frac{(A-B)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{2At^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} - \frac{(A+B)t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} \right)$$

$$y(t) = B + \frac{(A+B)t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \left(\frac{(A-B)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{(A+B)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} \right) \\ + \left(\frac{(A-B)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} - \frac{2Bt^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} + \frac{(A+B)t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)} \right)$$

sonucunu elde ederiz.

Normal dağılıma sahip A rastgele değişkenin parametreleri, $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \quad (5.20)$$

(5.20) ifadesi bulunur. $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin, birinci momenti ve varyansı

$$E[A] = \mu, \quad Var[A] = \sigma^2 \quad (5.21)$$

dır (Akdeniz, 2014, Khaniyev vd., 2017).

Laplace dağılımının moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{at}}{1 - b^2 t^2}$$

Laplace dağılımına sahip $B \sim L(a, b)$ rastgele değişkeninin, beklenen değeri ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibidir (Khaniyev vd., 2017).

$$E[B] = a, \quad Var(B) = 2b^2 \quad (5.22)$$

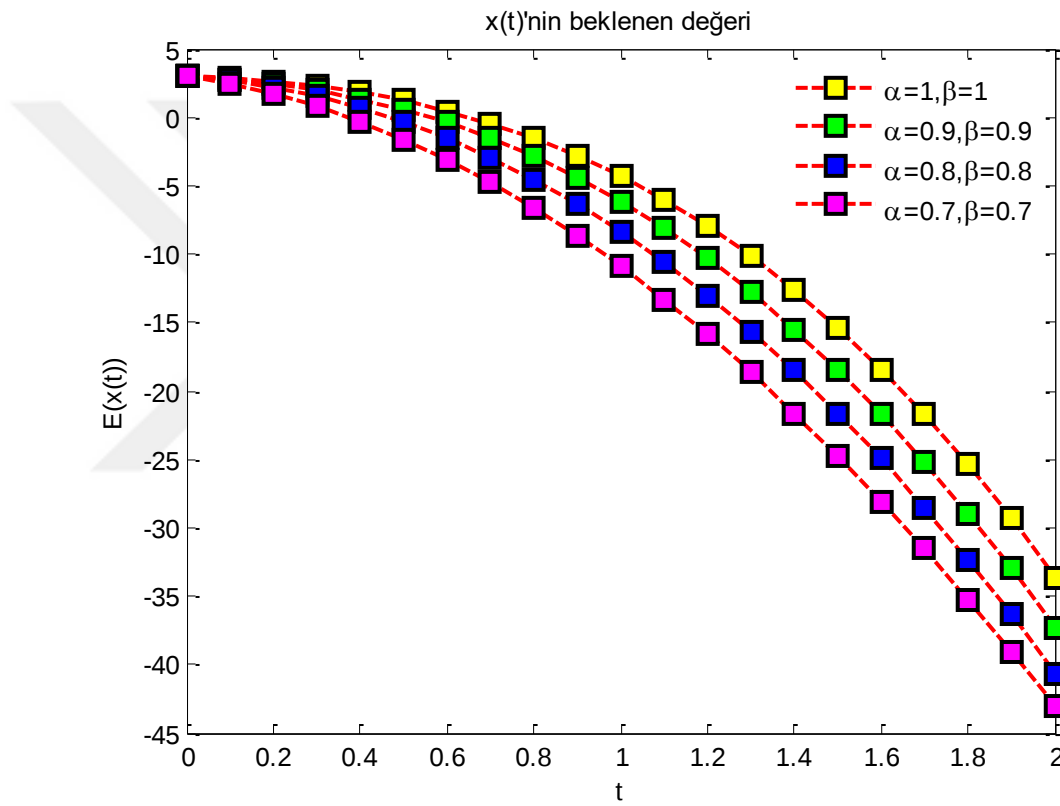
Yukarıdaki çözümlerin beklenen değerleri;

$$E(x(t)) = E \left[A + \frac{(A-B)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \left(\frac{(A-B)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{(A+B)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{(A-B)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{2At^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} - \frac{(A+B)t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} \right) \right] = \\ E[A] + \frac{(E[A] - E[B])t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \left(\frac{(E[A] - E[B])t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{(E[A] + E[B])t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right) \\ + \left(\frac{(E[A] - E[B])t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{2E[A]t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} - \frac{(E[A] + E[B])t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} \right)$$

$$= \mu + \frac{(\mu - a)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \left(\frac{(\mu - a)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{(\mu + a)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right) \\ + \left(\frac{(\mu - a)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} - \frac{2\mu t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} - \frac{(\mu + a)t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)} \right)$$

$\mu = 3, a = 4$ özel değerleri için

$$E(x(t)) = 3 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{7t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} - \frac{6t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} \\ - \frac{7t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)}$$



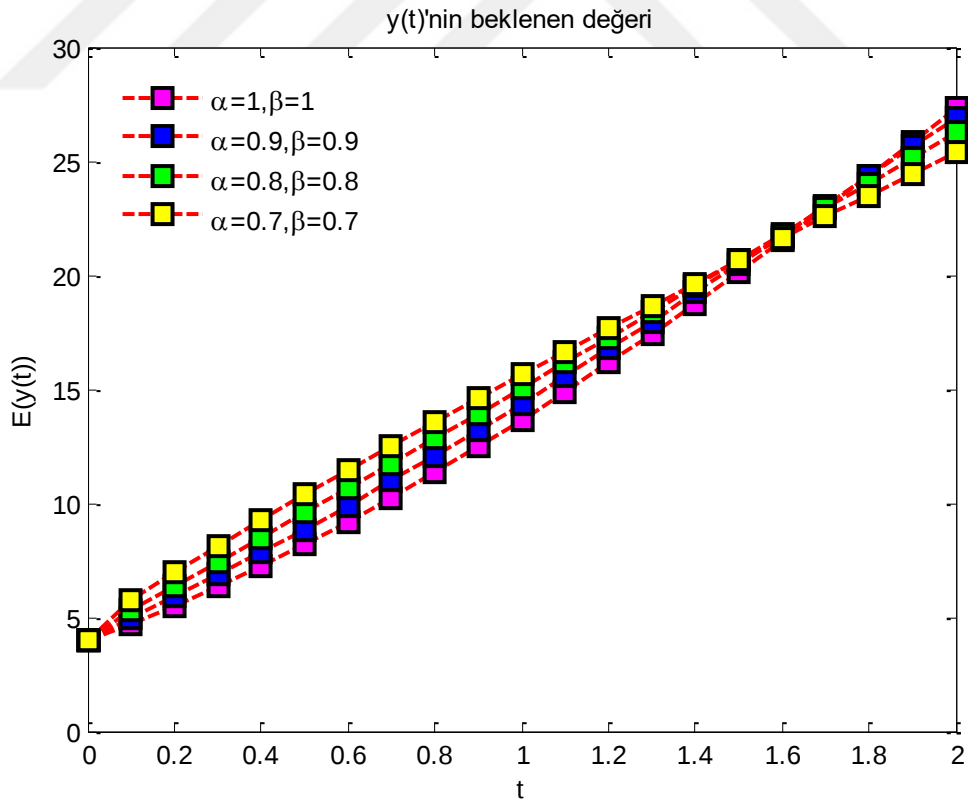
Şekil 15. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $E(x(t))$ 'nin çözüm davranışları

$$E(y(t)) = E \left[B + \frac{(A + B)t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} + \left(\frac{(A - B)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{(A + B)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{(A - B)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} - \frac{2Bt^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)} + \frac{(A + B)t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta + 1)} \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
E[B] + \frac{(E[A] + E[B])t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} + \left(\frac{(E[A] - E[B])t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{(E[A] + E[B])t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)} \right) \\
+ \left(\frac{(E[A] - E[B])t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} - \frac{2E[B]t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)} + \frac{(E[A] + E[B])t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta + 1)} \right) \\
= a + \frac{(\mu + a)t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} + \left(\frac{(\mu - a)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{(\mu + a)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)} \right) \\
+ \left(\frac{(\mu - a)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} - \frac{2at^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)} + \frac{(\mu + a)t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta + 1)} \right)
\end{aligned}$$

$\mu = 3, a = 4$ özel değerleri için

$$\begin{aligned}
E(y(t)) = 4 + \frac{7t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} - \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{7t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)} - \frac{t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha + \beta + 1)} \\
- \frac{8t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha + 2\beta + 1)} + \frac{7t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta + 1)}
\end{aligned}$$



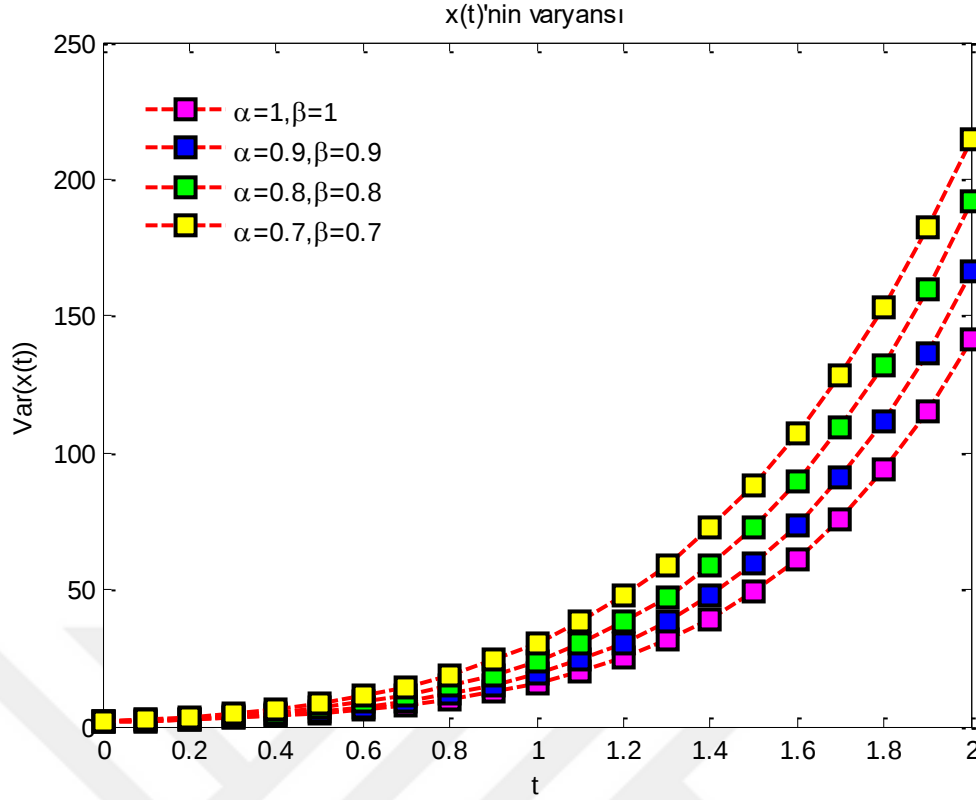
Şekil 16. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $E(y(t))$ 'nin çözüm davranışları

Yukarıdaki çözümlerin varyansları;

$$\begin{aligned}
Var(x(t)) &= Var \left[A + \frac{(A-B)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \left(\frac{(A-B)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{(A+B)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{(A-B)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{2At^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} - \frac{(A+B)t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} \right) \right] \\
&= Var[A] + \frac{(Var[A] + Var[B])t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2} \\
&\quad + \left(\frac{(Var[A] + Var[B])t^{4\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)^2} + \frac{(Var[A] + Var[B])t^{2\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)^2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{(Var[A] + Var[B])t^{6\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)^2} + \frac{4Var[A]t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(Var[A] + Var[B])t^{2\alpha+4\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)^2} \right) \\
&= \sigma^2 + \frac{(\sigma^2+2b^2)t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2} + \left(\frac{(\sigma^2+2b^2)t^{4\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)^2} + \frac{\sigma^2+2b^2)t^{2\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)^2} \right) + \left(\frac{(\sigma^2+2b^2)t^{6\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)^2} + \frac{4\sigma^2t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)^2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{(\sigma^2+2b^2)t^{2\alpha+4\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)^2} \right)
\end{aligned}$$

$\sigma^2 = 2$ ve $b = 2$ özel değerler için

$$\begin{aligned}
Var(x(t)) &= 2 + \frac{10t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2} + \frac{10t^{4\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)^2} + \frac{10t^{2\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)^2} + \frac{10t^{6\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)^2} \\
&\quad + \frac{8t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)^2} + \frac{10t^{2\alpha+4\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)^2}
\end{aligned}$$

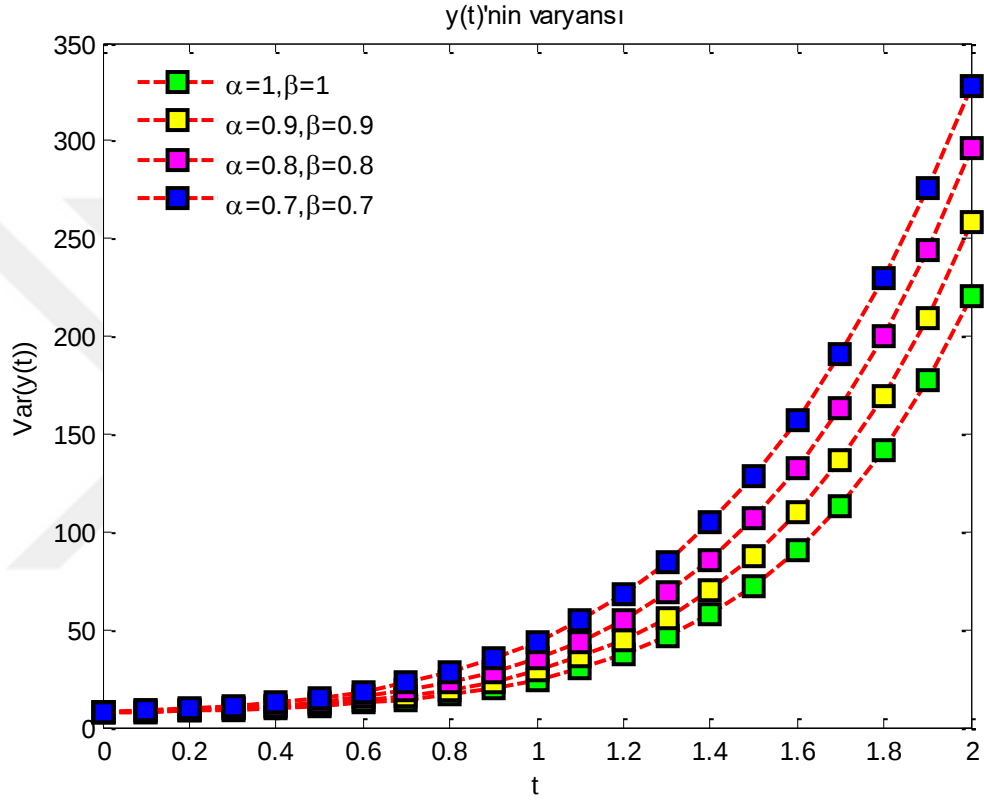


Şekil 17. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $Var(x(t))$ 'nin çözüm davranışları

$$\begin{aligned}
 Var(y(t)) &= Var \left[B + \frac{(A+B)t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \left(\frac{(A-B)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{(A+B)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{(A-B)t^{2\alpha+\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)} - \frac{2Bt^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} + \frac{(A+B)t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)} \right) \right] \\
 &= \left[Var[B] + \frac{(Var[A] + Var[B])t^{2\beta}}{\Gamma(\beta+1)^2} \right. \\
 &\quad + \left(\frac{(Var[A] + Var[B])t^{2\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)^2} + \frac{(Var[A] + Var[B])t^{4\beta}}{\Gamma(2\beta+1)^2} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{(Var[A] + Var[B])t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)^2} + \frac{4Var[B]t^{2\alpha+4\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)^2} \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(Var[A] + Var[B])t^{6\beta}}{\Gamma(3\beta+1)^2} \right) \right] \\
 &= \left[2b^2 + \frac{(\sigma^2 + 2b^2)t^{2\beta}}{\Gamma(\beta+1)^2} + \left(\frac{(\sigma^2 + 2b^2)t^{2\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)^2} + \frac{(\sigma^2 + 2b^2)t^{4\beta}}{\Gamma(2\beta+1)^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{(\sigma^2 + 2b^2)t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)^2} + \frac{4b^2t^{2\alpha+4\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)^2} + \frac{(\sigma^2 + 2b^2)t^{6\beta}}{\Gamma(3\beta+1)^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

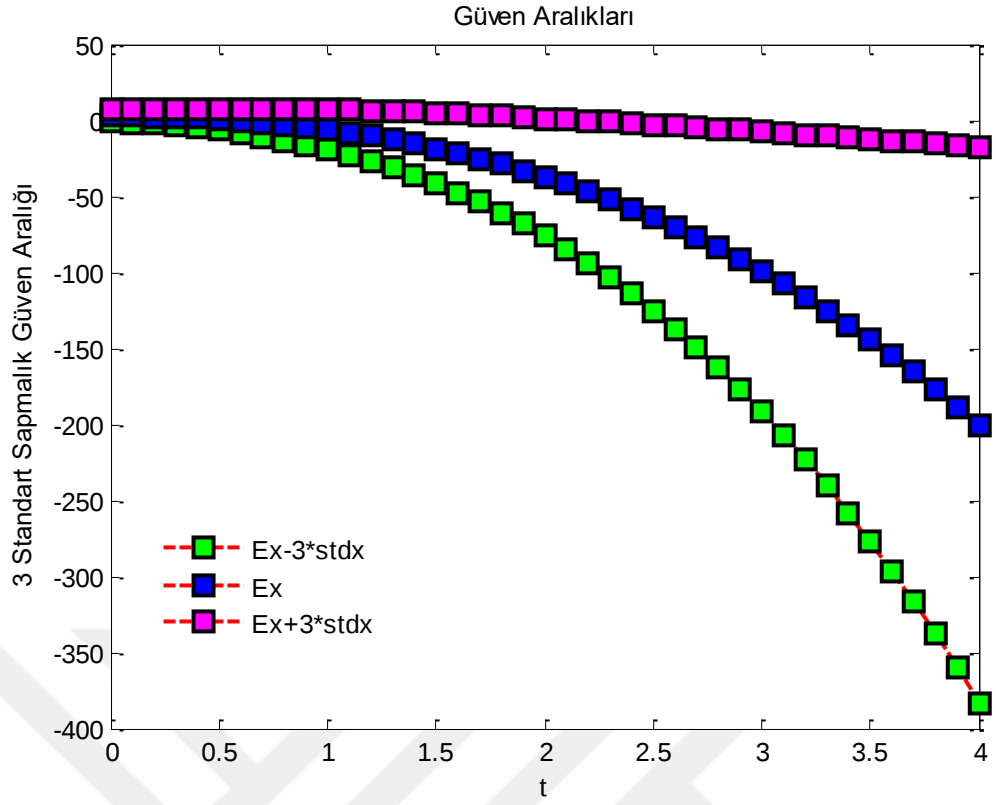
$\sigma^2 = 2$ ve $b = 2$ özel değerler için

$$\begin{aligned} Var(y(t)) = & 8 + \frac{10t^{2\beta}}{\Gamma(\beta+1)^2} + \frac{10t^{2\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)^2} + \frac{10t^{4\beta}}{\Gamma(2\beta+1)^2} + \frac{10t^{4\alpha+2\beta}}{\Gamma(2\alpha+\beta+1)^2} \\ & + \frac{32t^{2\alpha+4\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)^2} + \frac{10t^{6\beta}}{\Gamma(3\beta+1)^2} \end{aligned}$$

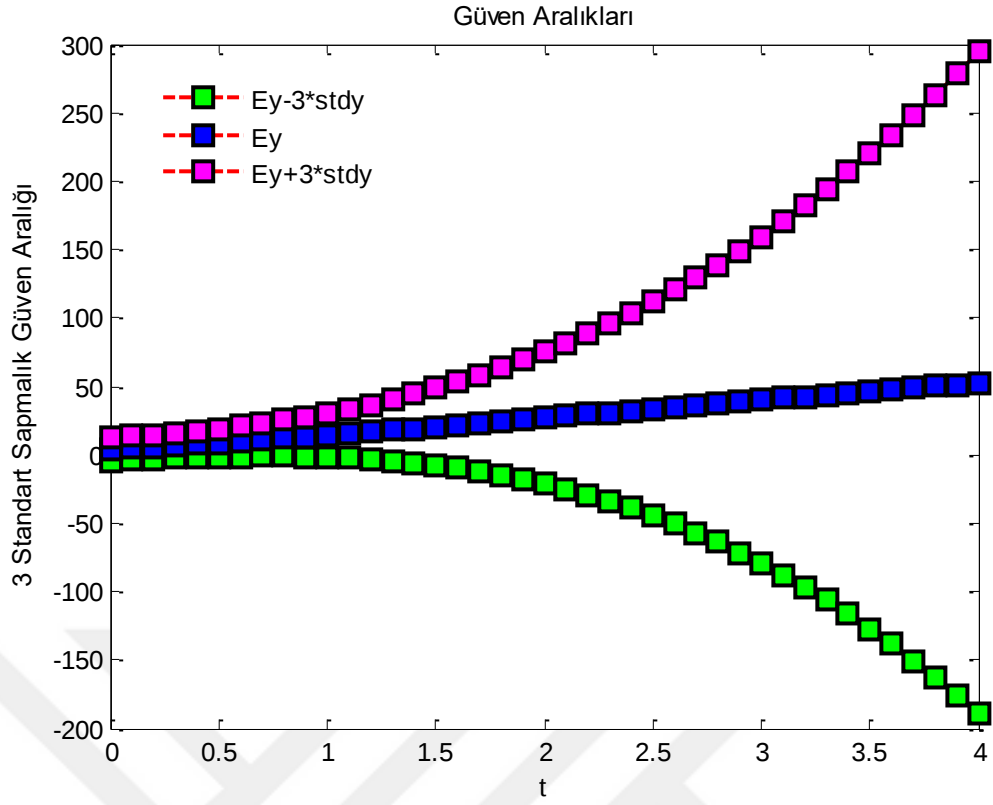


Şekil 18. $\alpha, \beta = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için $Var(y(t))$ 'nin çözüm davranışları

$AGS = E(y(t)) - 3\sqrt{Var(y(t))}$ alt güven sınırı ve $UGS = E(y(t)) + 3\sqrt{Var(y(t))}$ olarak bulunur.



Şekil 19. $\mu = 3, a = 4, \sigma^2 = 2, b = 2$ değerleri ve $\alpha, \beta = 0.9$ için $x(t)$ 'nin $K = 3$ için güven aralıkları $AGS = E(x(t)) - 3\sqrt{Var(x(t))}$ alt güven sınırı ve $UGS = E(x(t)) + 3\sqrt{Var(x(t))}$ olarak bulunur.



Şekil 20. $\mu = 3, a = 4, \sigma^2 = 2, b = 2$ değerleri ve $\alpha, \beta = 0.9$ için $y(t)$ 'nin $K = 3$ için güven aralıkları $AGS = E(y(t)) - 3\sqrt{Var(y(t))}$ alt güven sınırı ve $UGS = E(y(t)) + 3\sqrt{Var(y(t))}$ olarak bulunur.

6. KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN HPM YÖNTEMİ

Örnek 1:

$$u_{xx} + u_{yy} - u = 0 \quad (6.1)$$

$$u(0, y) = y, u_x(0, y) = y + \cosh y \quad (6.2)$$

Başlangıç koşulları ile verilen Helmholtz Denklemine (Goodman, 1968) HPM yöntemi ile çözünüz.

Çözüm:

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots \quad (6.3)$$

(6.3) ifadesini (6.1) de yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + p^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \dots \\ = p(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) - p\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + p \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + p^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \dots\right) \end{aligned}$$

x 'e göre integral alalım.

$$\int u_x(0, y) dx = \int (y + \cosh y) dx + c$$

$$u_0(x, y) = yx + x \cosh y + c$$

$$u_0(0, y) = y \cdot 0 + 0 \cdot \cosh y + c = y \Rightarrow c = 0$$

$$p^0: u_0(x, y) = yx + y + \cosh y = y(1 + x) + x \cosh y$$

$$p^1: \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = u_0 - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \Rightarrow \int u_{1xx} = y(1 + x) = \int y + yx$$

$$\int u_{1x} = \int yx + \int y \frac{x^2}{2} + \int c_1$$

$$u_1(0, y) = 0, u_{1x}(0, y) = 0$$

$$c_1 = 0, c_2 = 0$$

$$u_1(x, y) = y \frac{x^2}{2} + y \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2 = \frac{1}{2!} x^2 y + \frac{x^3 y}{3!}$$

$$p^2: \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = u_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{x^2 y}{2!} + \frac{x^3 y}{3!}$$

x 'e göre iki kere integral alınırsa;

$$\int \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} dx = y \frac{x^3}{3!} + y \frac{x^4}{4!} + c_1$$

$$\int \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} dx = y \frac{x^4}{4!} + y \frac{x^5}{5!} + c_1 x + c_2$$

$$u_2(x, y) = y \frac{x^4}{4!} + y \frac{x^5}{5!} + c_1 x + c_2$$

$$u_2(0, y) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$u_2(x, y) = y \frac{x^4}{4!} + y \frac{x^5}{5!}$$

$$p^3: u_3(x, y) = y \frac{x^6}{6!} + y \frac{x^7}{7!}$$

$$p^4: u_4(x, y) = y \frac{x^8}{8!} + y \frac{x^9}{9!}$$

$$u(x, y) = u_0(x, y) + p u_1(x, y) + p^2 u_2(x, y) + p^3 u_3(x, y) + \dots$$

$\alpha = 1, A = 1$ seçilerek yakınsaklığı incelersek, $t = 1, x = 1$ için

$$r_0: \frac{\|u_1(x, y)\|}{\|u_0(x, y)\|} = \frac{\left\| \frac{1}{2!} x^2 y + \frac{x^3 y}{3!} \right\|}{\|y(1+x) + x \cosh y\|} = 0.1882$$

$$r_1: \frac{\|u_2(x, y)\|}{\|u_1(x, y)\|} = \frac{\left\| y \frac{x^4}{4!} + y \frac{x^5}{5!} \right\|}{\left\| \frac{1}{2!} x^2 y + \frac{x^3 y}{3!} \right\|} = 0.0750 < 1$$

$$r_2: \frac{\|u_3(x, y)\|}{\|u_2(x, y)\|} = \frac{\left\| y \frac{x^6}{6!} + y \frac{x^7}{7!} \right\|}{\left\| y \frac{x^4}{4!} + y \frac{x^5}{5!} \right\|} = 0.0317 < 1$$

$$r_3: \frac{\|u_4(x, y)\|}{\|u_3(x, y)\|} = \frac{\left\| y \frac{x^8}{8!} + y \frac{x^9}{9!} \right\|}{\left\| y \frac{x^6}{6!} + y \frac{x^7}{7!} \right\|} = 0.0174 < 1$$

⋮

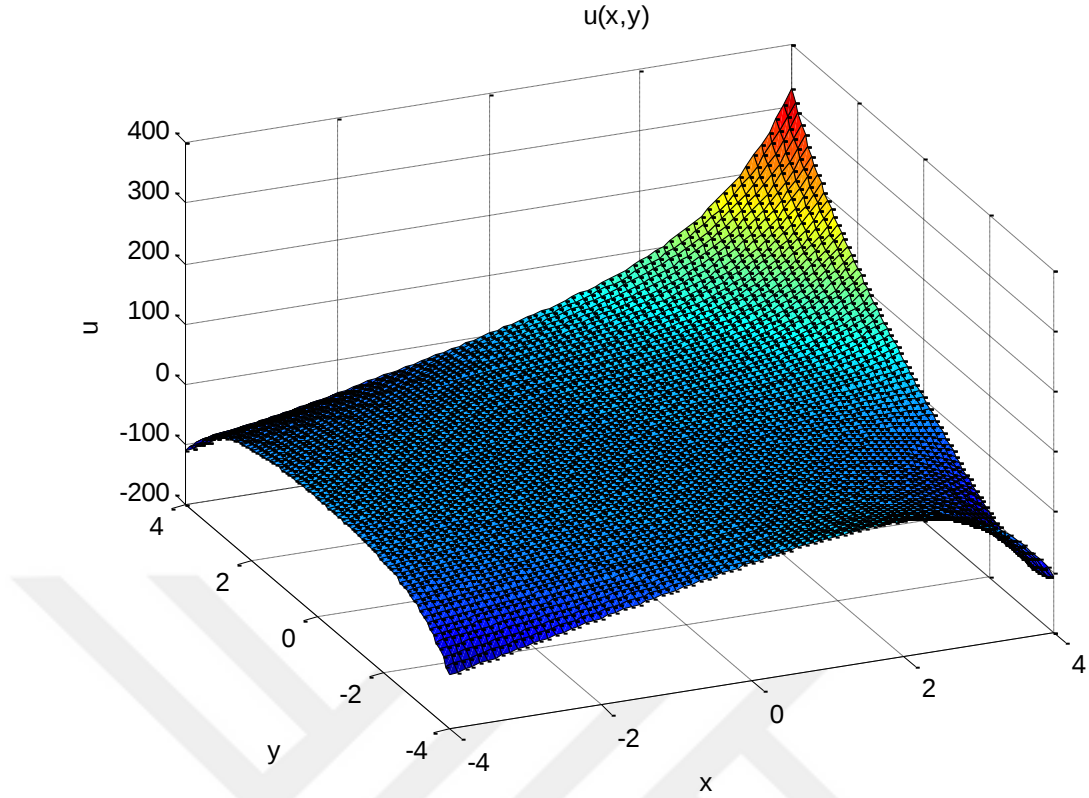
değerlerinin 1'den küçük olduğundan çözümün yakınsak olduğu görülür.

$p = 1$ için

$$u(x, y) = y + yx + x \cosh y + y \frac{x^2}{2!} + y \frac{x^3}{3!} + y \frac{x^4}{4!} + y \frac{x^5}{5!} + y \frac{x^6}{6!} + y \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$= y \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \right) + x \cosh y$$

$$u(x, y) = y e^x + x \cosh y$$



Şekil 21. Helmholtz Denkleminin çözüm davranışları

6.1 Katsayıları ve Başlangıç Koşulları Rastgele Olan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri İçin HPM Yöntemi

Örnek 2 :

$$u_{xx} - u_{yy} - u = 2Aye^x - 2\cosh y \quad (6.4)$$

$$u(0, y) = Ay + \cosh y \quad (6.5)$$

$$u_x(0, y) = 2Ay$$

$A \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \rightarrow A \sim \text{Beta}(1, 2)$ Beta dağılımına sahip rastgele değişken olsun. Verilen rastgele kısmi diferansiyel denklemi HPM yöntemi ile çözüünüz.

Çözüm:

$$u(x, y) = u_0(x, y) + pu_1(x, y) + p^2u_2(x, y) + p^3u_3(x, y) + \dots \quad (6.6)$$

(6.6) ifadesini (6.4)'te yerine yazarsak

$$u_{xx} = p(u + u_{yy} + 2Aye^x - 2\cosh y)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + p^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \dots \\ &= p \left(u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + \dots + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + p \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + p^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \dots + 2Aye^x \right. \\ & \quad \left. - 2\cosh y \right) \end{aligned}$$

başlangıç şartları

$x = 0$ için

$$u(0, y) = u_0(0, y) + pu_1(0, y) + p^2 u_2(0, y) + \dots = Ay + \cosh(y)$$

$$u_0(0, y) = Ay + \cosh(y) , \quad u_1(0, y) = 0 , \quad u_2(0, y) = 0 , \quad \dots ,$$

$$u_n(0, y) = 0$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = u_x(x, y) = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} + p \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x} + p^2 \frac{\partial u_2(x, y)}{\partial x} + \dots$$

$x = 0$ için

$$u_x(0, y) = u_{0x}(0, y) + pu_{1x}(0, y) + p^2 u_{2x}(0, y) + \dots = 2Ay$$

$$u_{0x}(0, y) = 2Ay$$

$$u_{1x}(0, y) = 0$$

$$u_{2x}(0, y) = 0$$

...

$$p^0: \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0$$

x 'e göre iki kez integral alırsak

$$u_0(x, y) = c_1 x + c_2$$

$$u_0(0, y) = c_2 = Ay + \cosh(y)$$

$$u_{0x}(0, y) = c_1 = 2Ay$$

$$u_0(x, y) = 2Ayx + Ay + \cosh(y) = Ay(1 + 2x) + \cosh y$$

$$p^1: \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = u_0 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2Aye^x - 2\cosh(y)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = Ay(1 + 2x) + \cosh y + \cosh y + 2Aye^x - 2\cosh(y)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = Ay(1 + 2x + 2e^x)$$

x 'e göre iki kez integral alırsak

$$u_1(x, y) = Ay \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + 2e^x \right) + c_1 x + c_2$$

$$u_1(0, y) = 2Ay + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -2Ay$$

$$u_{1x}(0, y) = 2Ay + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -2Ay$$

$$u_1(x, y) = Ay \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + 2e^x - 2x - 2 \right)$$

$$p^2: \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = u_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}$$

x'e göre iki kez integral alırsak

$$u_2(x, y) = Ay \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + 2e^x - \frac{x^3}{3} - x^2 \right) + c_1x + c_2$$

$$u_2(0, y) = 2Ay + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -2Ay$$

$$u_{2x}(0, y) = 2Ay + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -2Ay$$

$$u_2(x, y) = Ay \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + 2e^x - \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x - 2 \right)$$

...

$$u(x, y) = u_0(x, y) + pu_1(x, y) + p^2u_2(x, y) + p^3u_3(x, y) + \dots$$

$$= Ay(1 + 2x) + \cosh y + p \left(Ay \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + 2e^x - 2x - 2 \right) \right)$$

$$+ p^2 \left(Ay \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + 2e^x - \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x - 2 \right) \right) + \dots$$

$p = 1$ için

$$u(x, y) = Ay(1 + 2x) + \cosh y + \left(Ay \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + 2e^x - 2x - 2 \right) \right)$$

$$+ \left(Ay \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + 2e^x - \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x - 2 \right) \right) + \dots$$

$$u(x, y) = Ay(1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + O(x^6)) + \cosh y$$

Tam çözümü;

$$u(x, y) = Ay(1 + x)e^x + \cosh y$$

Beta dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $A \sim \text{Beta}(u, v)$ dir. Beta dağılımının moment çıkaran fonksiyonundan (Feller, 1968) faydalananarak B rastgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibidir (Khaniyev vd., 2017).

$$E[A] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta},$$

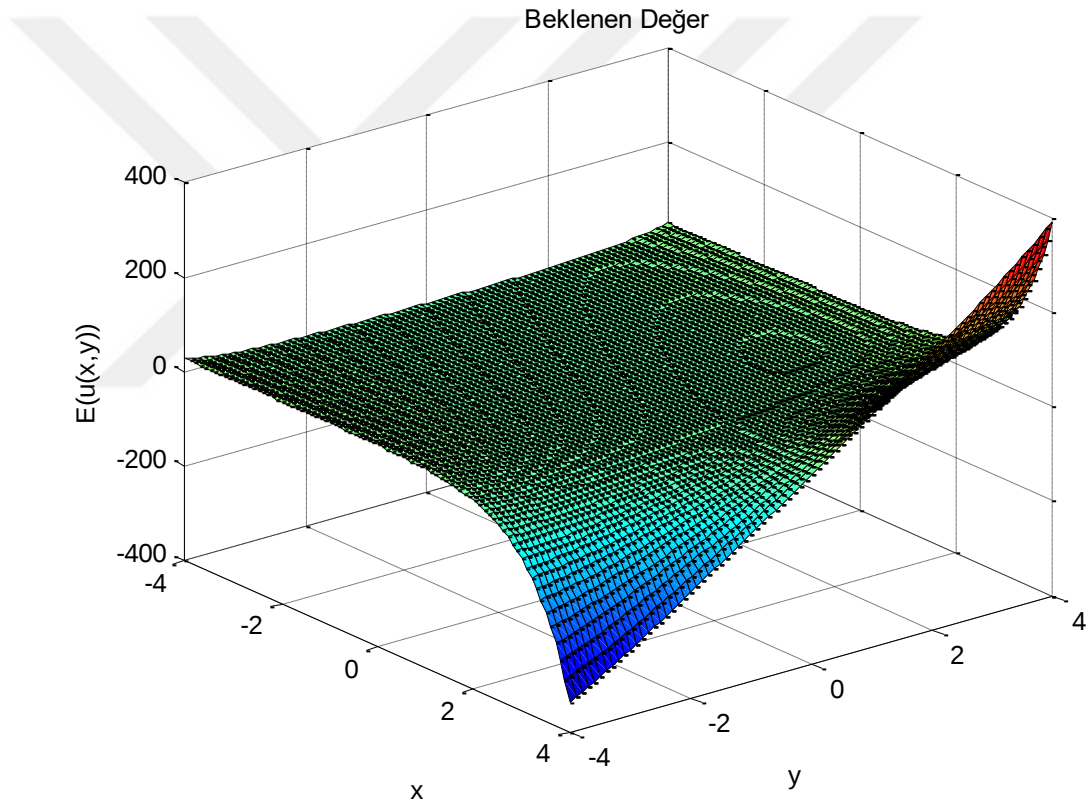
$$Var(A) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (6.7)$$

$$E(u(x, y)) = E(A)y(1 + x)e^x + coshy = \frac{\alpha y(1 + x)e^x}{\alpha + \beta} + coshy$$

$$Var(u(x, y)) = Var(A)y^2(1 + x)^2e^{2x} = \frac{\alpha\beta(1 + x)^2e^{2x}}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

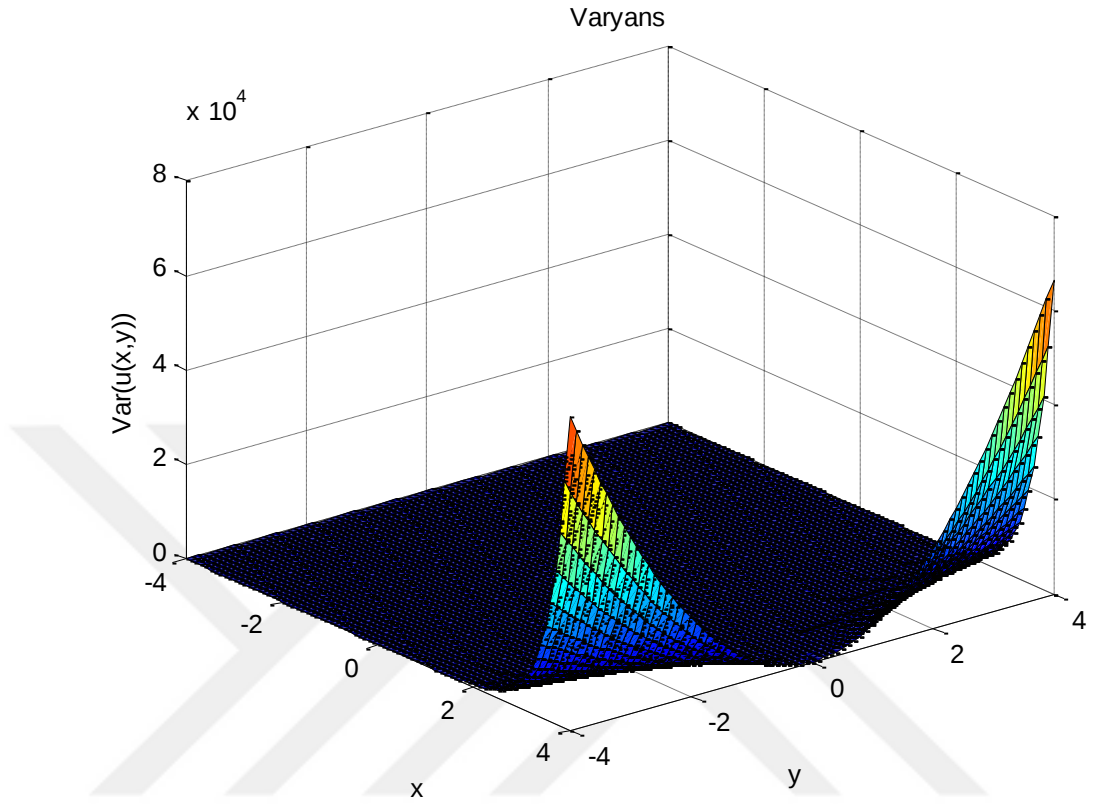
$\alpha = 1, \beta = 2$ özel değerler için,

$$E(u(x, y)) = \frac{1y(1 + x)e^x}{1 + 2} + coshy = \frac{1}{3}y(1 + x)e^x + coshy$$



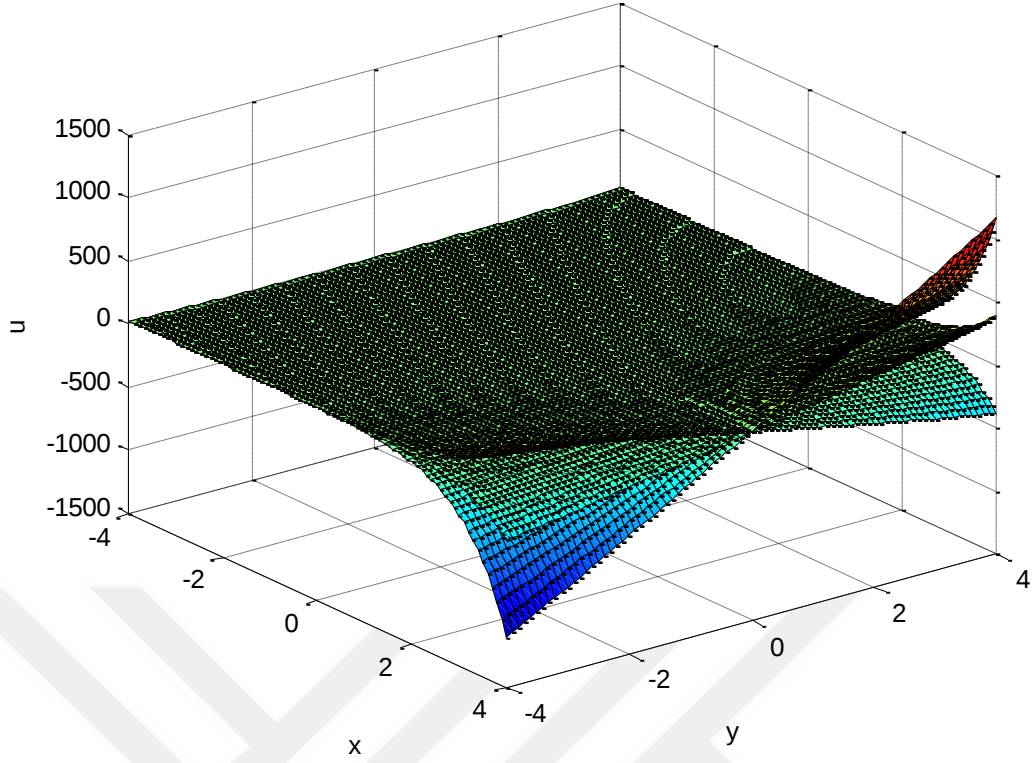
Şekil 22. $u(x, y)$ denkleminin beklenen değer grafiği

$$\text{Var}(u(x, y)) = \frac{2y^2(1+x)^2 e^{2x}}{3^{24}} = \frac{1}{18} y^2(1+x)^2 e^{2x}$$



Şekil 23. $u(x, y)$ denkleminin varyansının grafiği

3 Standart Sapmalı Güven Aralığı



Şekil 24. $u(x, y)$ 'nin $K = 3$ için güven aralıkları $AGS = E(u(x, y)) - 3\sqrt{Var(u(x, y))}$ alt güven sınırı ve $UGS = E(u(x, y)) + 3\sqrt{Var(u(x, y))}$ olarak bulunur.

Örnek 3:

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = 6Ax - Bsiny$$

$$0 \leq x, y \leq 1$$

$$v(0, y) = Bsiny$$

$$v_x(0, y) = 0$$

$$v(x, 0) = Ax^3$$

$$v_y(x, 0) = B$$

eliptik denklemi ele alalım.

$$A \sim N(\mu, \sigma^2), B \sim U(a, b)$$

şirasıyla Normal ve Düzgün dağılıma sahip rastgele değişkenler olsunlar. Verilen rastgele kısmi diferansiyel denklemi HPM yöntemi ile çözüyoruz.

Çözüm :

Homotopi denklemi göz önüne alalım, aşağıdaki homotopiyi oluşturalım.

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + p \left(\frac{v(x,y)}{\partial y^2} - 6Ax \right) = -Bsiny \quad (6.8)$$

v 'nin düzgün pertürbasyon açılımı yapılırsa;

$$v(x,y) = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n \quad (6.9)$$

(6.9) denklemi (6.8) de yerine yazılırsa oluşturulan denklemler:

$$\partial^2 \left(\frac{v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots}{\partial x^2} \right) + p \left(\frac{\partial^2 (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots)}{\partial y^2} - 6Ax \right) = -Bsiny$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + p \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - 6Ax \right) + p^2 \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) + p^3 \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right) \\ = -Bsiny \end{aligned}$$

$$p^0: \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = -Bsiny$$

$$p^1: \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - 6Ax = 0$$

$$p^2: \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0$$

$$p^3: \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = 0$$

...

$$p^n: \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial y^2} = 0, \quad n = 0$$

v_0 değerini bulmak için;

$$p^0: \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = -Bsiny$$

her iki tarafın iki katlı integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) dx dx &= \int_0^x \int_0^x (-Bsiny) dx dx \\ \int_0^x \left(\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v_0(0,y)}{\partial x} \right) dx &= \int_0^x (-Bxsiny) dx \\ \frac{\partial v_0(0,y)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

tekrar integral alınırsa

$$\int_0^x \left(\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} \right) dx = \int_0^x (-Bsin0) dx$$

$$v_0(x, y) - v_0(0, y) = \frac{-Bx^2}{2!} \sin y$$

$$v(0, y) = B \sin y$$

$$(v(x, y) = v_0(x, y) + p v_1(x, y) + p^2 v_2(x, y) + p^3 v_3(x, y) + \dots)$$

$x = 0$ için

$$v(0, y) = v_0(0, y) + p v_1(0, y) + p^2 v_2(0, y) + p^3 v_3(0, y) + \dots = B \sin y$$

$v_0(0, y) = B \sin y$ koşulu kullanılırsa;

$$v_0(x, y) = v_0(0, y) - \frac{Bx^2}{2!} \sin y$$

$$v_0(x, y) = B \sin y - \frac{Bx^2}{2!} \sin y$$

$$p^1: \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - 6Ax = 0$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \left(-B \sin y + \frac{Bx^2}{2!} \sin y \right) - 6Ax = 0$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = B \sin y - \frac{Bx^2}{2!} \sin y + 6Ax$$

x değişkenine göre iki katlı integral alınır;

$$\int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) dx dx = \int_0^x \int_0^x \left(B \sin y - \frac{Bx^2}{2!} \sin y + 6Ax \right) dx dx$$

$$v_1(x, y) = \int_0^x \left(Bx - \sin y - \frac{Bx^3}{3!} \sin y + 3Ax^2 \right) dx$$

$$v_1(x, y) = \frac{Bx^2}{2!} \sin y - \frac{Bx^4}{3!} \sin y + Ax^3$$

$$p^2: \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0$$

$v_1(x, y)$ yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = \frac{Bx^2}{2!} \sin y - \frac{Bx^4}{4!} \sin y$$

iki katlı integral uygulanırsa

$$v_2(x, y) = \frac{Bx^4}{4!} \sin y - \frac{Bx^6}{6!} \sin y$$

$$p^3: \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = \frac{Bx^4}{4!} \sin y - \frac{Bx^6}{6!} \sin y$$

iki katlı integral uygulanırsa

$$v_3(x, y) = \frac{Bx^6}{6!} \sin y - \frac{Bx^8}{8!} \sin y$$

v_0, v_1, v_2, v_3 değerleri pertürbasyon açılımında yerine yazıp, $p = 1$ alırsak

$$v(x, y) = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots$$

$$= B \sin y - \frac{Bx^2}{2!} \sin y + \frac{Bx^2}{2!} \sin y - \frac{Bx^4}{4!} + Ax^3 + \frac{Bx^4}{4!} \sin y - \frac{Bx^6}{6!} \sin y \\ + \frac{Bx^6}{6!} \sin y - \frac{Bx^8}{8!} \sin y = B \sin y + Ax^3$$

Yakınsaklığını hesaplırsak

$$A \sim N(\mu, \sigma^2), B \sim U(a, b)$$

$A = 1, B = 2$ seçersek yakınsaklık için

$$x = 1, y = 1$$

$$r_0 = \frac{\|v_1\|}{\|v_0\|} = 2.105661773$$

$$r_1 = \frac{\|v_2\|}{\|v_0\|} = 0.03826754949 < 1$$

$$r_2 = \frac{\|v_2\|}{\|v_1\|} = 0.03386699507 < 1$$

$$r_3 = \frac{\|v_3\|}{\|v_2\|} = 0.01797979798 < 1$$

⋮

1'den küçük olduğundan yakınsak olduğu görülür.

Normal dağılıma sahip A rastgele değişkeninin parametreleri, $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir.

Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan (Feller, 1968) faydalananak

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)} \quad (6.10)$$

$A \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri ve varyansı

$$E[A] = \mu, E[A^2] = \mu^2 + \sigma^2 \text{ ve } Var[A] = \sigma^2 \quad (6.11)$$

bulunur. Momentler kullanılarak A ve B bağımsız rastgele değişkenler için

$$E[AB] = E[A]E[B] \text{ olur.}$$

Düzgün dağılıma sahip B rastgele değişkeninin parametreleri, $B \sim U(a, b)$ dir.

Düzgün dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan (Feller, 1968) faydalananak

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t} \quad (6.12)$$

$B \sim U(a, b)$ rastgele değişkeninin birinci moment ve varyansı

$$E[B] = \frac{a+b}{2}, Var[B] = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (6.13)$$

bulunur.

$$v(x, y) = B \sin y + Ax^3$$

Beklenen değer ve varyans,

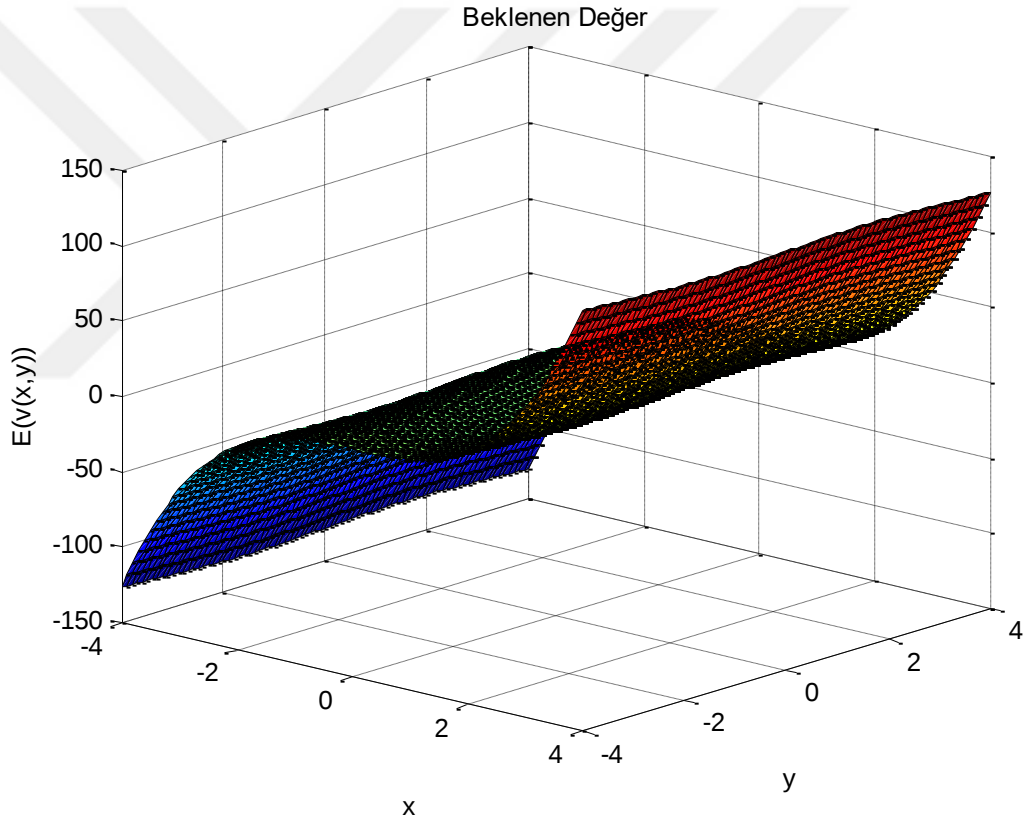
$$E[v(x, y)] = E[B \sin y + Ax^3] = \sin y E[B] + x^3 E[A] = \mu \sin y + x^3 \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

$$\text{Var}[v(x, y)] = \text{Var}[B \sin y + Ax^3] = \text{Var}[B \sin y] + \text{Var}[Ax^3]$$

$$= \sin^2 y \text{Var}[B] + x^6 \text{Var}[A] = \sin^2 y \left(\frac{(b-a)^2}{12} \right) + x^6 \sigma^2$$

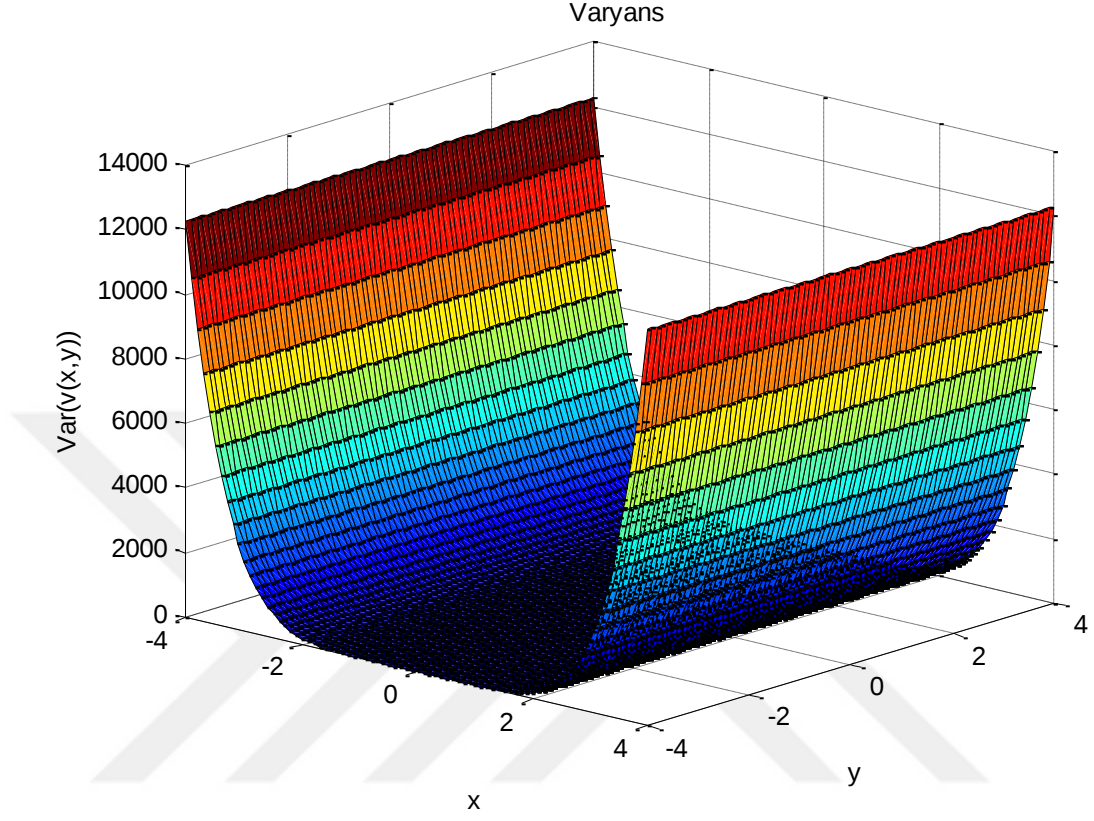
$a = 1, b = 3, \mu = 2, \sigma^2 = 3$ özel değerler için,

$$E(v(x, y)) = 2 \sin y + x^3 \left(\frac{1+3}{2} \right) = 2 \sin y + 2x^3$$

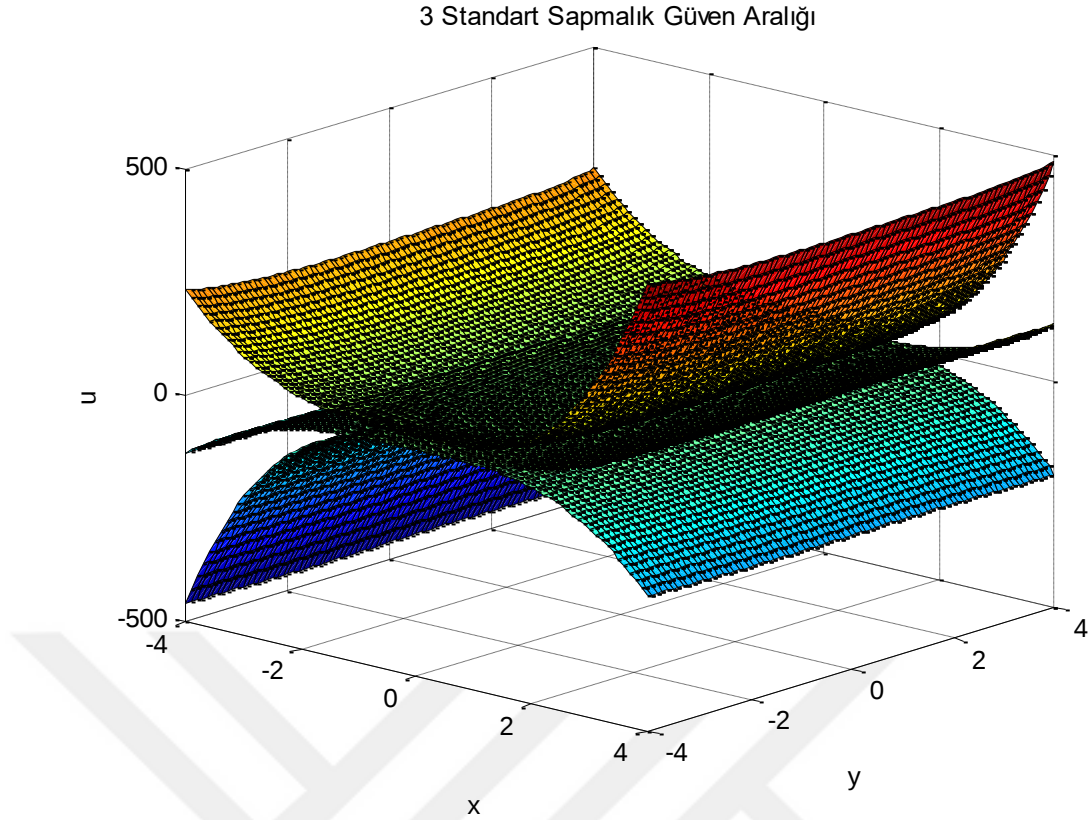


Şekil 25. $v(x, y)$ denkleminin beklenen değer grafiği

$$Var(v(x,y)) = \sin^2 y \left(\frac{(3-1)^2}{12} \right) + x^6 3 = \frac{\sin^2 y}{3} + 3x^6$$



Şekil 26. $v(x,y)$ 'nin $K = 3$ için güven aralıkları $AGS = E(v(x,y)) - 3\sqrt{Var(v(x,y))}$ alt güven sınırı ve $UGS = E(v(x,y)) + 3\sqrt{Var(v(x,y))}$ olarak bulunur.



Şekil 27. $v(x, y)$ denkleminin 3 standart sapmalık güven aralığının grafiği

6.2 Laplace Dönüşümü Homotopi Pertürbasyon Metodu (LD-HPM)

(LD-HPM)'nin nasıl çalıştığını göstermek için genel bir lineer olmayan diferansiyel denklemi aşağıdaki formda düşünelim.

$$D_*^\alpha y(t) = f(t) - Ly(t) - Ny(t) \quad (6.14)$$

$m - 1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}, t > 0$ aşağıdaki sınır koşulları,

$$\beta \left(y, \frac{dy}{dt} \right) \quad (6.15)$$

Burada L lineer bir operatör, N ise lineer olmayan bir operatör, $f(t)$ bilinen bir analitik fonksiyon ve D Caputo anlamında kesirli türevi belirtir. β sınır operatörü ve $y(t)$ bilinen bir fonksiyonun çözümü şu şekilde yazılır.

İlk önce aşağıdaki gibi homotopi oluşturacağız.

$$(1 - p)[D_*^\alpha y(t) - D_*^\alpha y_0(t)] + p[D_*^\alpha y_0(t) - f(t) + Ly(t) + Ny(t)] = 0 \quad (6.16)$$

veya

$$D_*^\alpha y(t) = D_*^\alpha y_0(t) + p[-D_*^\alpha y_0(t) + f(t) + Ly(t) - Ny(t)], p \in [0, 1] \quad (6.17)$$

Burada p bir homotopi parametresidir ve $p \in [0,1]$, y_0 sınır koşuluna uyan (6.15) denkleminin çözümü için ilk yaklaşımdır.

Şimdi, Laplace dönüşümünü (6.17) denkleminin her iki tarafına uygulayıp aşağıdaki denklemi elde edeceğiz.

$$\mathcal{L}[D_*^\alpha y(t)] = \mathcal{L}[D_*^\alpha y_0(t) + p(-D_*^\alpha y_0(t) + f(t) - Ly(t) - Ny(t))] \quad (6.18)$$

Laplace dönüşümü için formülü uygulayarak şunu elde ederiz.

$$s^\alpha \mathcal{L}[y(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) = \mathcal{L}[D_*^\alpha y_0(t) + p(-D_*^\alpha y_0(t) + f(t) - Ly(t) - Ny(t))] \quad (6.19)$$

burada, $m-1 < \alpha \leq m$ veya

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \right] + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[D_*^\alpha y_0(t) + p(-D_*^\alpha y_0(t) + f(t) - Ly(t) - Ny(t))] \quad (6.20)$$

(6.20) denkleminde her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü kullanarak şunu elde ederiz:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \right] + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[D_*^\alpha y_0(t) + p(-D_*^\alpha y_0(t) + f(t) - Ly(t) - Ny(t))] \right] \quad (6.21)$$

(6.21)'in çözümünü aşağıdaki gibi bir p kuvvet serisi olarak yazabiliriz.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n \quad (6.22)$$

Şimdi, (6.22)'yi (6.21)'te yazarak şunu elde ederiz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \right] + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[D_*^\alpha y_0(t) + p(-D_*^\alpha y_0(t) + f(t) - L \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n - N \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n)] \right] \quad (6.23)$$

Terimleri p nin aynı kuvvetleriyle eşitleyerek şu denklemleri elde ederiz:

$$p^0: y_0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \right] + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[D_*^\alpha y_0(t)] \right] \quad (6.24)$$

$$p^1: y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\mathcal{L}(-D_*^\alpha y_0(t) + f(t) - Ly_0(t) - Ny_0(t)) \right] \right]$$

$$p^2: y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\mathcal{L}(-L(y_0, y_1) - N(y_0, y_1)) \right] \right]$$

$$p^3: y_3(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\mathcal{L}(-L(y_0, y_1, y_2) - N(y_0, y_1, y_2)) \right] \right]$$

...

İlk yaklaşımın şu forma sahip olduğunu varsayarsak $y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, \dots, y^{m-1} = \alpha_{m-1}$

Bu nedenle kesin çözüm aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$y = \lim_{p \rightarrow 1} y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots \quad (6.25)$$

Örnek 4:

$$D_*^{\frac{3}{2}}y(t) = -y''(t) - y(t) + t^2 + t + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + 3 \quad (6.26)$$

$y(0) = 1, y(1) = 3$, sınır koşulları ile $1 < \alpha \leq 2, 0 \leq t \leq 1$

verilen, Bagley-Torvik (Torvik ve Bagley, 1984) sınır değer problemini (LD-HPM) yöntemi ile çözünüz.

Çözüm:

(6.26) denkleminde HPM yöntemini uygulayalım.

$$D_*^\alpha y(t) = D_*^\alpha y_0(t) + p[-D_*^\alpha y_0(t) + f(t) - Ly(t) - Ny(t)] \quad (6.27)$$

$$p \in [0,1]$$

(6.27) ifadesine Laplace Dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathcal{L}[D_*^\alpha y(t)] = \mathcal{L}[D_*^\alpha y_0(t) + p(-D_*^\alpha y_0(t) + f(t) - Ly(t) - Ny(t))]$$

Caputo kesirli türevin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}[D_*^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), m-1 < \alpha < m \quad (6.28)$$

$$s^\alpha \mathcal{L}[y(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) = \mathcal{L}[D_*^\alpha y_0(t) + p(-D_*^\alpha y_0(t) + f(t) - Ly(t) - Ny(t))] \quad (6.29)$$

$m-1 < \alpha \leq m$ ya da

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \right] + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[D_*^\alpha y_0(t) + p(-D_*^\alpha y_0(t) + f(t) - Ly(t) - Ny(t))] \quad (6.30)$$

Her iki tarafın ters Laplace Dönüşümünü alırsak,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \right] + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[D_*^\alpha y_0(t) + p(-D_*^\alpha y_0(t) + f(t) - Ly(t) - Ny(t))] \right] \quad (6.31)$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n \quad (6.32)$$

(6.32) ifadesini (6.31) te yerine yazarsak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \right] + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[D_*^\alpha y_0(t) + p(-D_*^\alpha y_0(t) + f(t) - L \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n - N \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n)] \right] \quad (6.33)$$

p 'nin aynı dereceli terimlerinin denklemi

$$p^0: y_0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \right] + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[D_*^\alpha y_0(t)] \right]$$

$$p^1: y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[-D_*^\alpha y_0(t) + f(t) - L(y_0) - N(y_0)] \right]$$

$$p^2: y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[-L(y_0, y_1) - N(y_0, y_1)] \right]$$

$$p^3: y_3(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[-L(y_0, y_1, y_2) - N(y_0, y_1, y_2)] \right]$$

Başlangıç yaklaşımları $y(0) = \alpha_0$, $y'(0) = \alpha_1$, $y''(0) = \alpha_2$, ... , $y^{m-1}(0) = \alpha_{m-1}$ olan denklemler çözülürse

$$y = \lim_{p \rightarrow 1} y = y_0 + y_1 + \dots + y_n + \dots$$

(6.30) denkleminin çözümünü LD-HPM ile bulmak için (6.32) te yerine yazalım.

$y_0(t) = 1 + At$, $y(0) = 1$, $y'(0) = A$ başlangıç koşullarını seçelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n = 1 + At + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p}{s^2} \mathcal{L} \left[- \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n'' - \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n + t^2 + t + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} + 3 \right] \right]$$

$$y_0(t) + p y_1(t) + p^2 y_2(t) + p^3 y_3(t) + \dots$$

$$= 1 + At$$

$$+ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p}{s^2} \mathcal{L}[-(y_0'' + p y_1'' + p^2 y_2'' + \dots)] - (y_0 + p y_1 + p^2 y_2 + \dots) + t^2 + t + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} + 3 \right]$$

$$p^0: y_0(t) = 1 + At$$

$$p^1: y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \left(\mathcal{L}[-y_0''] - \mathcal{L}[y_0] + \mathcal{L}(t^2 + t + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} + 3) \right) \right]$$

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \left(-\frac{1}{s} + A \frac{1}{s^2} + \frac{2!}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{2}}{s^2} + \frac{3}{s} \right) \right]$$

$$y_1(t) = \frac{8}{3} \frac{t^{3/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{32}{105} \frac{t^{7/2}}{\sqrt{\pi}} + t^2 - \frac{8}{15} \frac{(A-1)t^{5/2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$p^2: y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} (\mathcal{L}[-y_1''] - \mathcal{L}[y_1]) \right]$$

$$y_2(t) = -2t - \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{60} - \frac{8t^{7/2}}{3\sqrt{\pi}} - \frac{32}{105\sqrt{\pi}} t^{7/2} + \frac{t^2(A-1)}{2} + \frac{t^4(A-1)}{24}$$

$$p^3: y_3(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{3/2}} (\mathcal{L}[-y_2''] - \mathcal{L}[y_2]) \right]$$

$$y_3(t) = 2t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{60} + \frac{256t^{\frac{13}{2}}}{135135\sqrt{\pi}} + \frac{16t^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{\pi}} + \frac{64t^{\frac{9}{2}}}{315\sqrt{\pi}} - \frac{4(A-1)(3465 + 16t^4 + 792t^2)t^{\frac{3}{2}}}{10395\sqrt{\pi}}$$

⋮

Yukarıda hesaplanan değerler yerine yazılırsa,

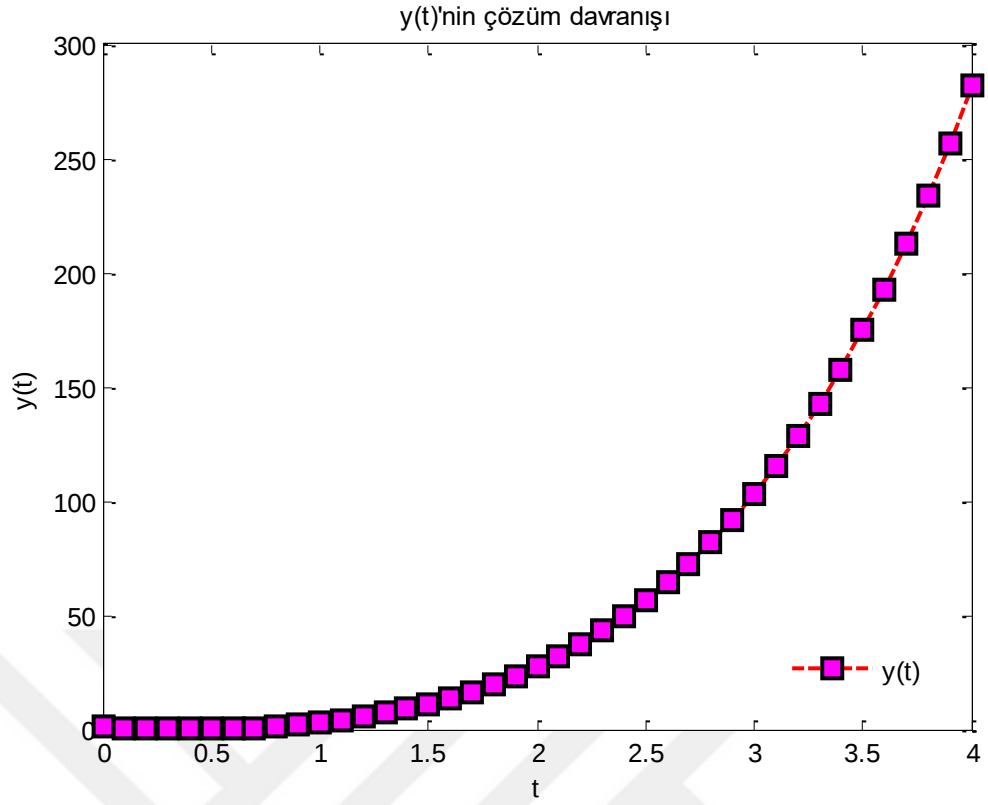
$$y(t) = \lim_{p \rightarrow 1} y(t) = y_0(t) + y_1(t) + \dots + y_n(t) + \dots$$

$$y(t) = 1 + At + \frac{8t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} + \frac{32t^{7/2}}{105\sqrt{\pi}} + t^2 - \frac{8(A-1)t^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}} - 2t - \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{60} - \frac{8t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}} - \frac{32}{105\sqrt{\pi}}t^{\frac{7}{2}} + \frac{t^2(A-1)}{2} + \frac{t^4(A-1)}{24} + 2t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{60} + \frac{256t^{\frac{13}{2}}}{135135\sqrt{\pi}} + \frac{16t^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{\pi}} + \frac{64t^{\frac{9}{2}}}{315\sqrt{\pi}} - \frac{4(A-1)(3465 + 16t^4 + 792t^2)t^{\frac{3}{2}}}{10395\sqrt{\pi}}$$

$y(0) = 1$, $y(1) = 3$ ifadeleri yerine yazılırsa, $A = -5.135838304$ bulunur, bulunan değer yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$y(t) = 1 - 5.135838304t + t^2 + \frac{6.472447095}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{5}{2}} - 0.2556599293t^2(12 + t^2) + \frac{64}{315}t^{\frac{9}{2}} + \frac{256}{135135}t^{\frac{13}{2}} + 0.2361072940t - \frac{2t^{\frac{3}{2}}(3465 + 16t^4 + 792t^2)}{\sqrt{\pi}}$$

denklemin yaklaşık analitik çözümü bulunmuş olur.



Şekil 28: $y(t)$ nin yaklaşık olarak analitik çözüm davranışı

Örnek 5:

$$D_*^{\frac{3}{2}}y(t) + y''(t) - 2y(t) = \frac{4B}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} - 2Bt^2 + 2At + 2(B - A) \quad (6.33)$$

$$1 < \alpha \leq 2, 0 \leq t \leq 1$$

$$\text{sınır koşulları } y(0) = 1, y(1) = 4 \quad (6.34)$$

$A \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow A \sim N(2,1)$ Normal dağılıma sahip, $B \sim \text{Üstel}(\lambda) \rightarrow B \sim \text{Üstel}(\lambda = 3)$ üstel dağılıma sahip, rastgele değişkenler olmak üzere rastgele Bagley-Torvik (Torvik ve Bagley, 1984) sınır değer problemini (LD-HPM) yöntemi yardımıyla çözüm davranışlarını inceleyiniz.

Çözüm:

(6.33) ifadesi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} \left[\left[D_*^\alpha y_0(t) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p \left(-D_*^\alpha y_0(t) + f(t) - L \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n - N \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n \right) \right] \right] \right] \end{aligned}$$

$y_0(t) = 1 + ct$ seçilerek (6.33)'te yerine yazılması ile LD-HPM yolu ile denklem çözülebilir.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n &= 1 + ct \\ &\quad + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p}{s^{3/2}} \mathcal{L} \left[- \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n'' + 2 \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n - 2Bt^2 + 2At + 2(B-A) \right] \right] \\ y_0(t) + p y_1(t) + p^2 y_2(t) + p^3 y_3(t) + \dots \\ &= 1 + ct \\ &\quad + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p}{s^{3/2}} \mathcal{L} [-(y_0'' + p y_1'' + p^2 y_2'' + \dots)] - (y_0 + p y_1 + p^2 y_2 + \dots) \right. \\ &\quad \left. - 2Bt^2 + 2At + 2(B-A) \right] \end{aligned}$$

$$p^0: y_0(t) = 1 + ct$$

$$p^1: y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{3/2}} (\mathcal{L}[-y_0''] - \mathcal{L}[y_0] + \mathcal{L}(-2Bt^2 + 2At + 2(B-A))) \right]$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{3/2}} \left(-\frac{1}{s} - c \frac{1}{s^2} - 2B \frac{2!}{s^3} + 2A \frac{1}{s^2} + \frac{2(B-A)}{s} \right) \right] \\ y_1(t) &= \frac{4 \left(16Bt^{\frac{7}{2}} + 35(-1 - 2A + 2B)t^{\frac{3}{2}} + 14t^{\frac{5}{2}}(-c + 2A) \right)}{105\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

$$p^2: y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{3/2}} (\mathcal{L}[-y_1''] - \mathcal{L}[y_1]) \right]$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \frac{t(4Bt^4 + 5t^3c - 10At^3 + 40Bt^2 + 40At^2 + 20t^2)}{120} \\ &\quad + \frac{t(-120At + 60ct + 240A - 240B + 120)}{120} \end{aligned}$$

$$p^3: y_3(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{3/2}} (\mathcal{L}[-y_2''] - \mathcal{L}[y_2]) \right]$$

$$y_3(t) = \frac{4 \left(-128Bt^{\frac{13}{2}} - 36036t^{\frac{5}{2}}(1+2A) - 1144t^{\frac{9}{2}}(1+6B+2A) \right)}{135135\sqrt{\pi}} \\ + \frac{4 \left(13(-c+2A)t^{\frac{3}{2}}(3465+16t^4+792t^2) \right)}{135135\sqrt{\pi}} \\ \vdots$$

Yukarıda hesaplanan değerler yerine yazılırsa,

$$y(t) = \lim_{p \rightarrow 1} y(t) = y_0(t) + y_1(t) + \dots + y_n(t) + \dots$$

$$y(t) = 1 + ct + \frac{4 \left(16Bt^{\frac{7}{2}} + 35(-1-2A+2B)t^{\frac{3}{2}} + 14t^{\frac{5}{2}}(-c+2A) \right)}{105\sqrt{\pi}} \\ + \frac{t(4Bt^4 + 5t^3c - 10At^3 + 40Bt^2 + 40At^2 + 20t^2)}{120} \\ + \frac{t(-120At + 60ct + 240A - 240B + 120)}{120}$$

$y(0) = A$, $y(1) = 4$ ifadeleri yerine yazılırsa, $c = 2.083863547 + 0.3809863674B - 0.2799051480A$ bulunur, bulunan değer yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$y(t) \\ = 1 + (2.083863547 + 0.3809863674B - 0.2799051480A)t \\ + \frac{4(-16Bt^{\frac{7}{2}} + 35(-1-2A+2B)t^{\frac{3}{2}})}{105\sqrt{\pi}} \\ + \frac{56t^{\frac{5}{2}}(-2.083863547 - 0.3809863674B + 2.279905148A)}{105\sqrt{\pi}} \\ + \frac{t(4Bt^4 + 5t^3(2.083863547 + 0.3809863674B - 0.2799051480A))}{120} \\ - \frac{t(10At^3 + 40Bt^2 + 40At^2 + 20t^2 - 120At)}{120} \\ + \frac{60t(2.083863547 + 0.3809863674B - 0.2799051480A)t + 240A - 240B + 120}{120}$$

denklemin yaklaşık analitik çözümü bulunmuş olur.

Normal dağılıma sahip A rastgele değişkenin parametreleri, $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \quad (6.35)$$

(6.35) ifadesi bulunur. $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin, birinci momenti ve varyansı

$$E[A] = \mu, \text{ Var}[A] = \sigma^2 \quad (6.36)$$

dır (Akdeniz, 2014, Khaniyev vd., 2017).

Üstel dağılıma sahip B rastgele değişkenin parametreleri, $B \sim \text{Üstel}(\lambda)$ dir. Üstel dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = \frac{\lambda}{t-\lambda} \quad (6.37)$$

(6.37) ifadesi bulunur. $B \sim \text{Üstel}(\lambda)$ rastgele değişkeninin, birinci momenti ve varyansı

$$E[B] = \frac{1}{\lambda}, \text{ Var}[B] = \frac{1}{\lambda^2} \quad (6.38)$$

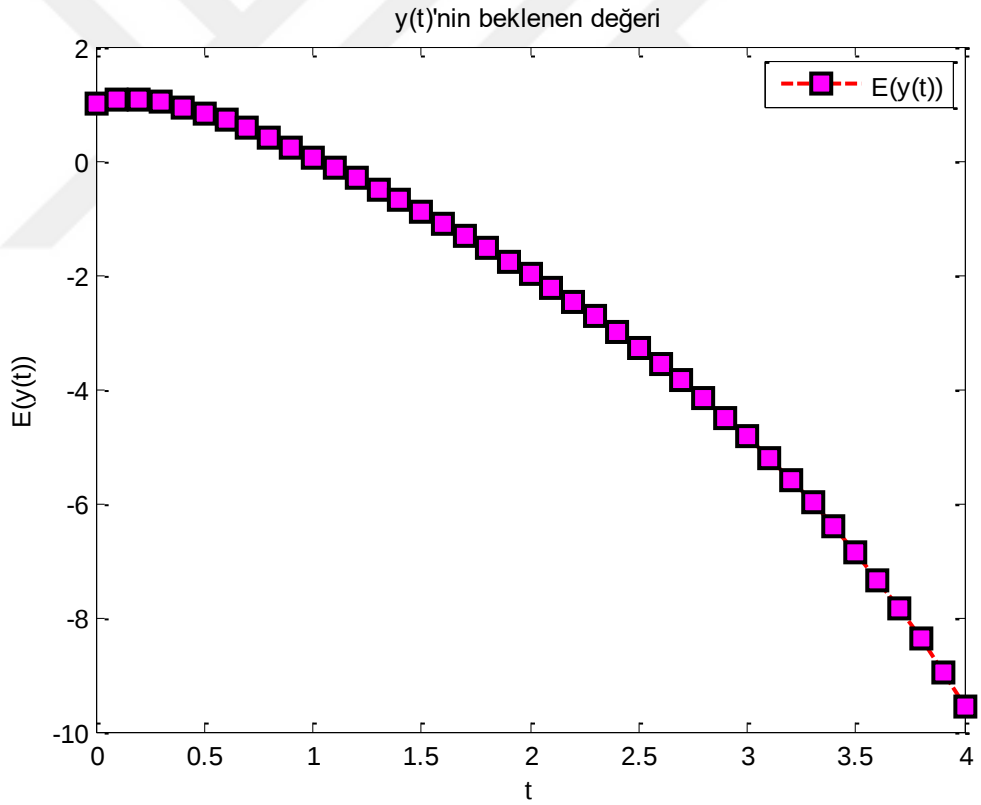
dır (Akdeniz, 2014, Khaniyev vd., 2017). Beklenen değer ve varyansı,

$$\begin{aligned} E[y(t)] &= 1 + (2.083863547 + 0.3809863674E[B] - 0.2799051480E[A])t \\ &\quad + \frac{4}{105\sqrt{\pi}}((-16E[B]t^{\frac{7}{2}} + 35(-1 - 2E[A] + 2E[B])t^{\frac{3}{2}} \\ &\quad + 14t^{\frac{5}{2}}(-2.083863547 - 0.3809863674E[B] + 2.279905148E[A])) \\ &\quad + \frac{1}{120}t(4E[B]t^4 + 5t^3(2.083863547 + 0.3809863674E[B] \\ &\quad - 0.2799051480E[A]) - 10E[A]t^3 + 40E[B]t^2 + 40E[A]t^2 + 20t^2 \\ &\quad - 120E[A]t + 60(2.083863547 + 0.3809863674E[B] \\ &\quad - 0.2799051480E[A])t + 240E[A] - 240E[B] + 120) \\ &= 1 + (2.083863547 + 0.3809863674\frac{1}{\lambda} - 0.2799051480\mu)t \\ &\quad + \frac{4}{105\sqrt{\pi}}((-16\frac{1}{\lambda}t^{\frac{7}{2}} + 35(-1 - 2\mu + 2\frac{1}{\lambda})t^{\frac{3}{2}} + 14t^{\frac{5}{2}}(-2.083863547 \\ &\quad - 0.3809863674\frac{1}{\lambda} + 2.279905148\mu)) + \frac{1}{120}t(4\frac{1}{\lambda}t^4 \\ &\quad + 5t^3(2.083863547 + 0.3809863674\frac{1}{\lambda} - 0.2799051480\mu) - 10\mu t^3 \\ &\quad + 40\frac{1}{\lambda}t^2 + 40\mu t^2 + 20t^2 - 120\mu t + 60(2.083863547 \\ &\quad + 0.3809863674\frac{1}{\lambda} - 0.2799051480\mu)t + 240\mu - 240\frac{1}{\lambda} + 120) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[y(t)] &= (0.3809863674t)^2 Var[B] + (0.2799051480t)^2 Var[A] \\
&+ \left(\frac{64}{105\sqrt{\pi}}\right)^2 t^7 Var[B] + \left(\frac{56}{17\sqrt{\pi}}\right)^2 t^3 (Var[B] + Var[A]) \\
&+ \left(\frac{2}{17\sqrt{\pi}}\right)^2 t^5 ((0.3809863674)^2 Var[B] + (2.279905148)^2 Var[A]) \\
&+ \frac{t^2}{120^2} (16t^8 Var[B] \\
&+ 25t^6 ((0.3809863674)^2 Var[B] + (0.2799051480)^2 Var[A]) \\
&+ 100Var[A]t^6 + 1600Var[B]t^4 + 1600Var[A]t^4 + 14400Var[A]t^2 \\
&+ 60^2 ((0.3809863674)^2 Var[B] + (0.2799051480)^2 Var[A])t^2 \\
&+ 240^2 Var[A] + 240^2 Var[B]) = \\
&= (0.3809863674t)^2 \frac{1}{\lambda^2} + (0.2799051480t)^2 \sigma^2 + \left(\frac{64}{105\sqrt{\pi}}\right)^2 t^7 \frac{1}{\lambda^2} \\
&+ \left(\frac{56}{17\sqrt{\pi}}\right)^2 t^3 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \sigma^2\right) + \left(\frac{2}{17\sqrt{\pi}}\right)^2 t^5 ((0.3809863674)^2 \frac{1}{\lambda^2} \\
&+ (2.279905148)^2 \sigma^2) + \frac{t^2}{120^2} (16t^8 \frac{1}{\lambda^2} \\
&+ 25t^6 \left((0.3809863674)^2 \frac{1}{\lambda^2} + (0.2799051480)^2 \sigma^2\right) + 100\sigma^2 t^6 \\
&+ 1600 \frac{1}{\lambda^2} t^4 + 1600\sigma^2 t^4 + 14400\sigma^2 t^2 \\
&+ 60^2 \left((0.3809863674)^2 \frac{1}{\lambda^2} + (0.2799051480)^2 \sigma^2\right) t^2 + 240^2 \sigma^2 \\
&+ 240^2 \frac{1}{\lambda^2})
\end{aligned}$$

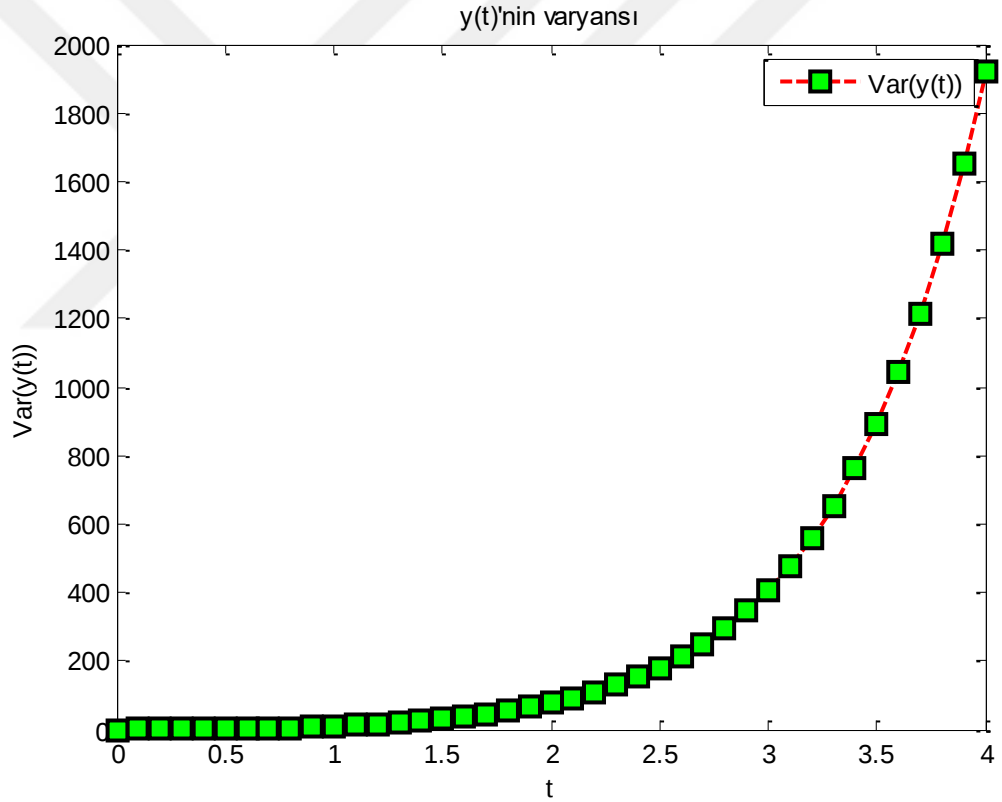
$\lambda = 3, \mu = 2, \sigma = 1$ özel değerleri için

$$\begin{aligned}
E[y(t)] = & 1 + (2.083863547 + 0.3809863674 \frac{1}{3} - 0.2799051480 * 2)t \\
& + \frac{4}{105\sqrt{\pi}} ((-16 \frac{1}{3} t^{\frac{7}{2}} + 35 (-1 - 2 * 2 + 2 \frac{1}{3}) t^{\frac{3}{2}} \\
& + 14 t^{\frac{5}{2}} (-2.083863547 - 0.3809863674 \frac{1}{3} + 2.279905148 * 2)) \\
& + \frac{1}{120} t (4 \frac{1}{3} t^4 + 5 t^3 (2.083863547 + 0.3809863674 \frac{1}{3} \\
& - 0.2799051480 * 2) - 10 * 2 t^3 + 40 \frac{1}{3} t^2 + 40 * 2 t^2 + 20 t^2 - 120 \\
& * 2 t + 60 (2.083863547 + 0.3809863674 \frac{1}{3} - 0.2799051480 * 2) t \\
& + 240 * 2 - 240 \frac{1}{3} + 120)
\end{aligned}$$

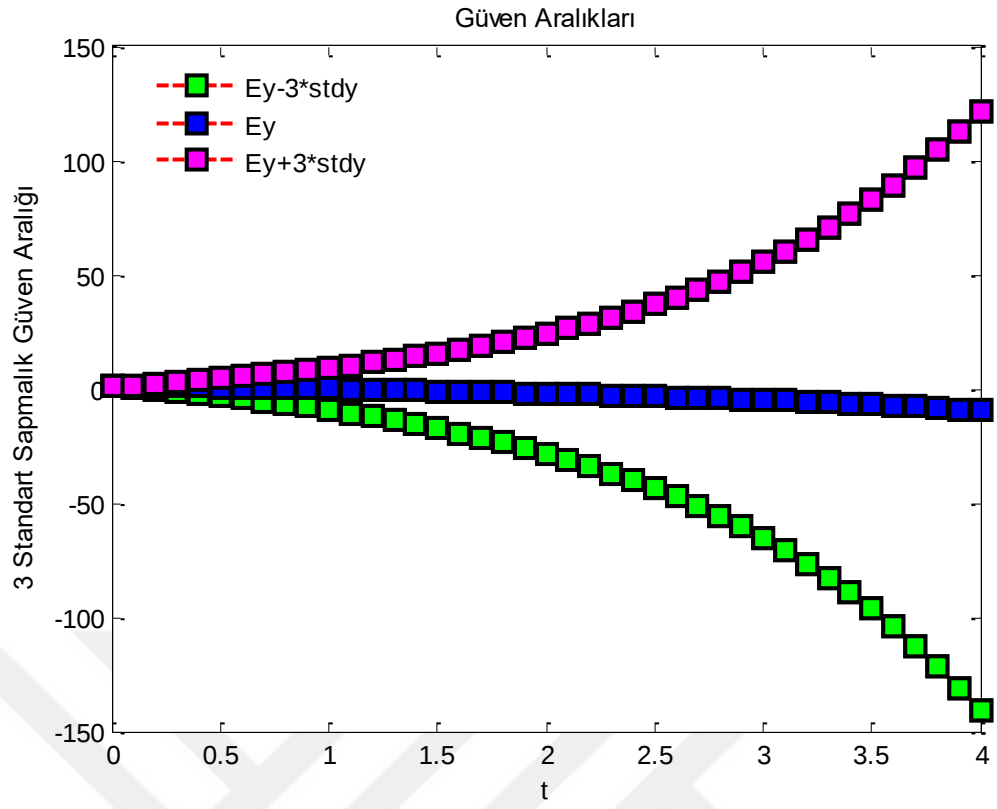


Şekil 29: y(t) nin beklenen değerinin yaklaşık olarak analitik çözüm davranışı

$$\begin{aligned}
Var[y(t)] = & (0.3809863674t)^2 \frac{1}{3^2} + (0.2799051480t)^2 1^2 + \left(\frac{64}{105\sqrt{\pi}}\right)^2 t^7 \frac{1}{3^2} \\
& + \left(\frac{56}{17\sqrt{\pi}}\right)^2 t^3 \left(\frac{1}{3^2} + 1^2\right) + \left(\frac{2}{17\sqrt{\pi}}\right)^2 t^5 \left((0.3809863674)^2 \frac{1}{3^2} \right. \\
& + (2.279905148)^2 1^2) + \frac{t^2}{120^2} (16t^8 \frac{1}{3^2} \\
& + 25t^6 \left((0.3809863674)^2 \frac{1}{3^2} + (0.2799051480)^2 1^2\right) + 100 * 1^2 t^6 \\
& + 1600 \frac{1}{3^2} t^4 + 1600 * 1^2 t^4 + 14400 * 1^2 t^2 \\
& + 60^2 \left((0.3809863674)^2 \frac{1}{3^2} + (0.2799051480)^2 1^2\right) t^2 + 240^2 1^2 \\
& + 240^2 \frac{1}{3^2})
\end{aligned}$$



Şekil 30: y(t) nin varyansının yaklaşık olarak analitik çözüm davranışı



Şekil 31: $y(t)$ nin 3 standart sapmalı güven aralığının davranışı

7. İRDELEME

Bu tez çalışmasında elde edilen bulgulardan çıkarılan sonuca göre, adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile diferansiyel denklem sistemlerinin yanı sıra, kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemleri başlangıç koşulları veya katsayılar rastgele seçilerek, rastgele hale dönüştürülmüşlerdir. Kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile diferansiyel denklem sistemleri rastgele etkiler altında incelenmesi için normal, düzgün, beta, gamma, Laplace ve üstel dağılımlarına sahip rastgele etki terimleri kullanılmıştır. Bu rastgele kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözümleri için literatürde çok sık kullanılan yöntemlerden birisi olan HPM (Homotopi Pertürbasyon Metodu) ve LD-HPM (Laplace Dönüşüm-Homotopi Pertürbasyon Metodu) yöntemlerinden istifade edilmiştir. Elde edilen bu çözümlerin beklenen değer, varyans ve güven aralıkları hesaplanarak MATLAB paket programı yardımıyla grafiksel olarak gösterilmiştir.

8. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada kesirli ve kesirli mertebeden olmayan adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemleri başlangıç koşulları ya da katsayıları sürekli zamanlı olasılık dağılımları olan düzgün, normal, beta, Laplace, gamma ve üstel dağılımlarından herhangi biri seçilerek denklemler rastgele hale dönüştürülmüştür. Bu rastgele hale getirilen denklemlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans ve güvenlik aralıkları hesaplanmıştır. Rastgele hale dönüştürülen adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için yaklaşık analitik çözüm yöntemlerinden literatürde çok yaygın olarak kullanılan HPM ve LD-HPM yöntemlerinden faydalanılmıştır. Buna ek olarak kesirli türevin farklı değerleri için analizler yapılmıştır. Son olarak elde edilen çözümlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans ve güven aralıklarının çözüm grafikleri MATLAB 2013 paket programı yardımıyla çizilmiştir.

9. ÖNERİLER

Bu çalışmada lineer ve lineer olmayan kesirli ve kesirli olmayan mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemler ve denklem sistemleri rastgele hale dönüştürülerek olasılık karakteristikleri incelenmiştir. Rastgele hale getirilen denklemler HPM yöntemiyle yaklaşık analitik çözümleri elde edilmiştir. Rastgele lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemler kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere dönüştürülerek gecikme terimi eklenerek HPM ve LD-HPM yöntemleriyle yaklaşık analitik çözümleri bulunabilir. Literatür de çok sık kullanılan homotopi analiz, sumudu, aboodh, diferansiyel dönüşüm, varyasyonel iterasyon ve Adomian ayrışım yöntemi yardımıyla yaklaşık analitik çözümler bulunabilir.

KAYNAKÇA

- Akdeniz, A. (2014). Olasılık ve istatistik, Akademisyen Kitabevi, Ankara.
- Bekiryazici, Z., Kesemen, T. ve Merdan, M. (2017). Stochastic and random models of Malaria disease with vertical transmission. *New Trends in Mathematical Sciences*. 5(1), 269-277.
- Bekiryazici, Z., Merdan, M. ve Kesemen, T. (2018). Generalized beta parameters for a -type random model of Polio transmission, *AIP Conference Proceedings*. 2037(1), 020004.
- Bekiryazici, Z., Merdan, M., Kesemen, T. ve Najmuldeen, M. (2016). Mathematical modeling of Dengue disease under random effects. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*. 4(2), 58-70.
- Bekiryazici, Z., Kesemen, T., Merdan, M., ve Khaniyev T., (2022). A modification of approximate random characteristics for a model of Zika virus transmission. *Thermal Science*. 26 (4 Part A), 3067-3077.
- Caputo, M. (1967) Linear Models of Dissipation Whose Q Is Almost Frequency Independent II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 13, 529-539.
- El-Latif, GM. (2005) A homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems. *Appl Math Comput*. 169, 576–88.
- El-Shahed, M. (2005). Application of He's homotopy perturbation method to Volterra's integro-differential equation. *Int J Nonlinear Sci Numer Simulat*. 6(2), 163–8.
- Feller, W. (1968). Extension of the law of repeating logarithms to variables without variance. *Journal of Mathematics and Mechanics*. 18(4), 343-355.
- Goodman, J.W. (1968) *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y.
- He, JH. (1999). Homotopy perturbation technique. *Comput Meth Appl Mech Eng*. 178, 257–62.
- He, JH. (2000). A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems. *Int J Nonlinear Mech*. 35(1), 37–43.
- He, JH. (2003) Homotopy perturbation method: A new nonlinear analytic technique. *Appl Math Comput*. 135, 73–9.
- He, JH. (2004). Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method. *Appl Math Comput*. 156, 527–39.

- He, JH. (2004). Asymptotology by homotopy perturbation method. *Appl Math Comput.* 156, 591–6.
- He, JH. (2004). The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities. *Appl Math Comput.* 151, 287–92.
- He, JH. (2005). Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems. *Int J Nonlinear Sci Numer Simul.* 6(2), 207–8.
- He, JH. (2005). Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals.* 26(3), 695–700.
- He, JH. (2006). Homotopy perturbation method for solving boundary value problems. *Phys Lett A.* 350(1–2), 87–8.
- Jaradat, E.K., Alomari, O., Abudayah, M., Al-Faqih, A.M. (2018). An approximate analytical solution of the nonlinear Schrödinger equation with harmonic oscillator using homotopy perturbation method and Laplace-Adomian decomposition method. *Adv. Math. Phys.* 6765021.
- Kashkari, B.S. (2014). Numerical solution of Kawahara equations by using Laplace homotopy perturbations method. *Appl. Math. Sci.* 8, 3243–3254.
- Khaniyev, T., Ünver, İ., Küçük, Z., ve Kesemen T. (2017). Olasılık Kuramında Çözümlü Problemler, Nobel Akademik Yayıncılık.
- Krishnamoorthy, K (2006). *Handbook of Statistical Distributions with Applications*, Chapman and Hall/CRC, New York.
- Merdan, M., Bekiryazici, Z., Kesemen, T. ve Khaniyev, T. (2017). Deterministic stability and random behavior of a Hepatitis C model. *PloS One*, 12(7), 0181571.
- Merdan, M., Bekiryazici, Z., Kesemen, T. ve Khaniyev, T. (2018). Analyzing the dynamics of Ebola transmission with random effects. *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, 22.
- Merdan, M. ve Khaniyev, T. (2008). On the Behavior of Solutions under the influence of stochastic Effect of Avian-Human influenza epidemic Model, *International Journal of Biotechnology and Biochemistry*, 4(1), 75-100.
- Merdan, M. ve Atasoy N. (2023). On the solutions of fractional random ordinary differential equations with the Residual power series method, *Alexandria Engineering Journal* 70, 169-177.
- Merdan, M., Merdan, M., ve Şahin, R., (2023). Investigation of Behavior on Solutions of Lane–Emden Complex Differential Equations by a Random Differential Transformation Method, *Complexity* . 3713454.

- Narmatha, S., Ananthaswamy, V., Rasi, M. (2021). Application of new approach to homotopy perturbation method in solving a system of nonlinear self-igniting reaction diffusion equations. *Math. Eng. Sci. Aerosp.* 12, 231–244.
- Nuntadilok, B. (2021). The solution of some nonlinear space-time fractional Fokker-Planck equations by using homotopy perturbation method. *J. Phys. Conf. Ser. Iop Publ.* 1850, 012093.
- Noufe H. Aljahdaly, Alhanouf M. Alweldi (2023). On the Modified Laplace Homotopy Perturbation Method for Solving Damped Modified Kawahara Equation and Its Application in a Fluid, *Symmetry*, 15, 394.
- Podlubny, I. (1999) *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego.
- Rafiq, A., Ahmed, M., Hussain, S., (2008). A general approach to specific second order ordinary differential equations using homotopy perturbation method. *Physics Letters A*, 372, 4973–4976.
- Singh, J., Kumar, D. (2012). Homotopy perturbation algorithm using Laplace transform for gas dynamics equation. *J. Appl. Math. Stat. Inform.* 8, 55–61.
- Torvik P.J, . Bagley, R.L, (1984). On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials, *J. Appl. Mech.*, 51, 294–298.
- Weilbeer, M. (2005). *Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background*, Papierflieger.

ÖZGEÇMİŞ

Sefanur TOSUN. İlk ve orta öğretimini Trabzon/Cumhuriyet İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini Trabzon/Yavuz Sultan Selim Anadolu Lisesinde tamamladı. 2012-2013 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. 2017-2018 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi'nden Pedagojik Formasyon Eğitimi sertifikasını aldı. 2020-2021 eğitim-öğretim yılında, Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı. 2024 yılından itibaren Gençlik ve Spor Bakanlığına bağlı olan yurtlarda, yurt yönetim memuru olarak çalışmaktadır.



