

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HOMOTOPİ TİPLERİNDE KUADRATİK MODÜL VE KUADRATİK
KOMPLEKS**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Simge ÖZTUNÇ

Anabilim Dalı : Matematik
Programı : Topoloji

MANİSA 2009

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HOMOTOPİ TİPLERİNDE KUADRATİK MODÜL VE KUADRATİK
KOMPLEKS**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK – Simge ÖZTUNÇ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 02. 01. 2009

Tezin Savunulduğu Tarih : 02. 01. 2009

Tez Danışmanı :Yrd. Doç. Dr. Ali MUTLU (Celal Bayar Üniversitesi)
Diğer Jüri Üyeleri :Prof. Dr. İsmet KARACA (Ege Üniversitesi)
Prof. Dr. Necdet BİLDİK (Celal Bayar Üniversitesi)

MANİSA 2009

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
 SIFIRINCI BÖLÜM:	
Temel Tanımlar ve Kavramlar	1
BİRİNCİ BÖLÜM:	
Simplişiil Steenrod Cebirleri	10
İKİNCİ BÖLÜM:	
Değişmeli Cebirlerin Homotopik Görünüşleri	19
ÜÇÜNCÜ BÖLÜM:	
Simplişiil Steenrod Cebirlerinden Kuadratik Modüller	28
KAYNAKLAR	44

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu veren, çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Ali MUTLU'ya, eğitim-öğrenimimde emeği geçen bütün Hocalarıma, hayatım boyunca her zaman bana destek olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Simge ÖZTUNÇ

ÖZET

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Sıfırıncı bölümde tezde kullanacağımız temel tanım ve kavramlar verildi.

Birinci bölümde Simplişıl Steenrod Cebirleri, Kros Modüller, Serbest Kros Modüller anlatıldı ve örnekler sunuldu.

İkinci bölümde Değişmeli Simplişıl Steenrod Cebirleri, Steenrod Hiperkros Kompleks Çiftleri, Simplişıl Steenrod Cebirlerinden 2 – kros modüller, Kros Karelerden 2 – kros modüller, Simplişıl Steenrod Cebirlerinden Steenrod Kros Kareler incelendi.

Üçüncü bölümde 2 – kros modüllerden Kuadratik modüller, Simplişıl Steenrod Cebirlerinden Kuadratik Modüllerin İnşası, Kros Karelerden Kuadratik Modüller incelendi ve Kuadratik Kompleks tanımı verildi.

ABSTRACT

This Thesis consists of three chapters.

In the preface chapter basic definitions and concepts which will be used in the Thesis are given.

In the first chapter Simplicial Steenrod Algebras, Cross Modules, Free Cross Modules explained and examples are presented.

In the second chapter Commutative Simplicial Steenrod Algebras, Steenrod Hypercross Complex Pairs, 2 – Cross Modules from Simplicial Steenrod Algebras, 2 – Cross Modules from Cross Squares, Steenrod Cross Squares from Simplicial Steenrod Algebras are investigated.

In the third chapter Quadratic Modules from 2 – Cross Modules, Quadratic Modules from Simplicial Steenrod Algebras, Constructions of Quadratic Modules from Simplicial Steenrod Algebras, Quadratic Modules from Cross Squares are searched and the definition of Quadratic Complex is given.

BÖLÜM 0: TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

0.1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 0.1.1. (Homotopi). f ve f' , X uzayından Y uzayının içine sürekli dönüşümler olsun. Her $x \in X$ için

$$F(x,0) = f(x) \text{ ve } F(x,1) = f'(x)$$

olacak şekilde $F : X \times I \rightarrow Y$ dönüşümü varsa f f' ye homotopiktir denir. (Burada $I = [0,1]$.) F , f ve f' arasında homotopi olarak adlandırılır. f , f' ye homotopik ise, $f \simeq f'$ yazarız.

Tanım 0.1.2. (Homoloji). X bir topolojik uzay olsun. Bir homoloji teori

$$H_*(X) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(X)$$

$n=1,2,\dots$ için X uzayını $H_n(X)$ abel gruplarının bir ailesine ayırıştırır. $H_*(X)$ direkt toplamına X 'in bir homolojisi ve her n için $H_n(X)$ direkt toplam terimine de X 'in n . homoloji grubu denir.

Tanım 0.1.3. (Eşhomoloji). C bir diferansiyel grup ve G bir değişmeli grup olsun. $C^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, G)$ değişmeli grubunu oluşturalım; elemanları 'katsayılar' G 'de olmak üzere eşzincirler olarak adlandırılan $f : C \rightarrow G$ grup homomorfizmleridir. $d : C \rightarrow C$ diferansiyeli $d^* f = fd : C \rightarrow G$ ile tanımlı $d^* : C^* \rightarrow C^*$ dönüşümünü doğurur; $d^* f$, f eşzincirinin eşsınırı olarak adlandırılır; genellikle $\delta f = d^* f$ olarak yazılır. $d^2 = 0$ olduğundan $(d^*)^2 = 0$. Böylece C^* , d^* diferansiyeli ile birlikte bir diferansiyel gruptur. Bunun homolojisi G 'deki katsayılarla birlikte C 'nin eşhomolojisi olarak adlandırılır ve $H^*(C, G) = H(\text{Hom}(C, G))$ olarak yazılır.

Tanım 0.1.4. (Kros Modül). Bir kros modül tüm $r \in R$ ve $c, c' \in C$ için $\partial(c \cdot r) = \partial(c) \cdot r$ ve $c' \partial(c) = cc'$ olacak şekilde R 'nin C üzerindeki etkisi ile birlikte bir $\partial : C \rightarrow R$ Steenrod Cebiri homomorfizmidir. İkinci bağıntı Peiffer özdeşliği olarak adlandırılır. Böylece bir kros modülü (C, R, ∂) ile göstereceğiz.

Tanım 0.1.5. (Yarı Kros Modül). Bir yarı-kros modül tüm $r \in R$ ve $c \in C$ için $\partial(c \cdot r) = \partial(c) \cdot r$ bağıntısını sağlayan $r \in R$ ve $c \in C$ için $c \cdot r$ olarak yazılan R 'nin C üzerindeki bir etkisi ile birlikte $\partial : C \rightarrow R$ homomorfizmidir.

Tanım 0.1.6. (2 - Kros Modül). k - cebirlerin bir 2 – kros modülü

$$\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$$

Bir kros modül olacak şekilde C_0 kendi üzerinde çarpımla etki etmek üzere C_0 – cebirlerinin bir

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

kompleksinden ve C_0 – cebirlerinin ∂_2, ∂_1 morfizmlerinden oluşur. Şu halde C_1 C_2 üzerinde C_0 ile etki eder ve tüm $x \in C_2, y \in C_1, z \in C_0$ için $(xy)z = x(yz)$ olmasını istiyoruz. Üstelik tüm $x, x_1, x_2 \in C_2, y, y_0, y_1, y_2 \in C_1$ ve $z \in C_0$ için aşağıdaki aksiyomları sağlayan, Peiffer Lifting olarak adlandırılan

$$\{- \otimes -\} : C_1 \otimes_{C_0} C_1 \rightarrow C_2$$

olarak verilen verilen bir $\{, \}$ bilineer fonksiyonu vardır.

$$\mathbf{2CM1)} \partial_2 \{y_0 \otimes y_1\} = y_0 y_1 - y_0 \cdot \partial_1 y_1$$

$$\mathbf{2CM2)} \{\partial_2(x_1) \otimes \partial_2(x_2)\} = x_1 x_2$$

$$\mathbf{2CM3)} \{y_0 \otimes y_1 y_2\} = \{y_0 y_1 \otimes y_2\} + \{y_0 \otimes y_1\} \cdot \partial_1 y_2$$

$$\mathbf{2CM4)} \mathbf{a)} \{\partial_2 x \otimes y\} = x \cdot y - x \cdot \partial_1 y$$

$$\mathbf{b)} \{y \otimes \partial_2 x\} = x \cdot y$$

$$\mathbf{2CM5)} \{y_0 \otimes y_1\} \cdot z = \{y_0 \cdot z \otimes y_1\} = \{y_0 \otimes y_1 \cdot z\}$$

Steenrod Cebirlerinin bir 2 – kros modülünün bir morfizmi

$$f_0 \partial_1 = \partial_1' f_1, \quad f_1 \partial_2 = \partial_2' f_2$$

olacak şekilde ve

$$f_1(c_0 \cdot c_1) = f_0(c_0) \cdot f_1(c_1), \quad f_2(c_0 \cdot c_2) = f_0(c_0) \cdot f_2(c_2)$$

ve tüm $c_2 \in C_2, c_1 \in C_1, c_0 \in C_0$ için

$$\{\otimes\} f_1 \otimes f_1 = f_2 \{\otimes\}$$

olacak şekilde

$$\begin{array}{ccccc} C_2 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 \\ f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow \\ C'_2 & \xrightarrow{\partial'_2} & C'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & C'_0 \end{array}$$

diyagramıyla gösterilebilir. Değişmeli Steenrod cebirlerinin 2 – kros modül kategorisi $\mathbf{SX}_2\mathbf{Mod}$ ile gösterilir.

Tanım 0.1.7. (Moore Kompleksi). Verilen bir $\mathbf{SA}$ simplişil Steenrod cebiri için $\mathbf{SA}$ ’nın $(\mathbf{NSA}, \partial)$ Moore kompleksi $\partial_n : \mathbf{NSA}_n \rightarrow \mathbf{NSA}_{n-1}$ d^n ’den kısıtlamayla üretilmek üzere

$$\mathbf{NSA}_n = \text{çek}d_0^n \cap \text{çek}d_1^n \cap \cdots \cap \text{çek}d_{n-1}^n$$

ile tanımlı zincir kompleksidir.

Tanım 0.1.8. (Homotopi Modülü). $\mathbf{SA}$ ’nın n . homotopi modülü $\pi_n(\mathbf{SA})$, $\mathbf{SA}$ Moore kompleksinin n . homolojisi, yani

$$\pi_n(\mathbf{SA}) \cong H_n(\mathbf{NSA}, \partial) = \bigcap_{i=0}^n \text{çek}d_i^n / d_{n+1}^{n+1} \left(\bigcap_{i=0}^n \text{çek}d_i^{n+1} \right).$$

Tanım 0.1.9. (Homotopi Tipi). S ve T iki topolojik uzay olsun. $g \circ f : S \rightarrow S$, $i : S \rightarrow S$ özdeşlik fonksiyonuna homotop ve $f \circ g : T \rightarrow T$, $j : T \rightarrow T$ özdeşlik fonksiyonuna homotop olacak şekilde $f : S \rightarrow T$, $g : T \rightarrow S$ sürekli fonksiyonları varsa, S uzayı T ile aynı homotopi tipindedir denir. Açıkça S, T ye topolojik olarak eş yapılı ise, S, T ’nin homotopi tipindedir. Fakat aynı homotopi tipindeki uzayların topolojik eş yapılı olması gerekmez.

Tanım 0.1.10. (Zincir Kompleksi). C zincir kompleksi C_n abel gruplarının bir uzun dizisi ile $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n+1}$ homomorfizmalarından oluşur öyle ki

$$\Lambda \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} \Lambda$$

dizisinde her n için $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ dır. Başka bir deyişle $\text{gör} \partial_{n+1} \subset \text{çek} \partial_n$.

Tanım 0.1.11. (Simpleks). $x_0, x_1, \dots, x_p$ ($p \geq 0$) $\mathbb{R}^n$ 'in lineer bağımsız noktaları olsun, bu takdirde

$$s_p = \left\{ \sum_{i=0}^p \lambda_i x_i : \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1 \text{ ve } \lambda_i \geq 0, i = 0, 1, 2, \dots, p \right\}$$

kümesine bir afin simpleks denir.

Tanım 0.1.12. (Simplişiil Kompleks). $\mathcal{S}$ $\mathbb{R}^n$ deki afin simplekslerin aşağıdaki iki bağıntıyı sağlayan sonlu bir kümesi olsun.

(K1) Eğer s_p simpleksi $\mathcal{S}$ ye ait ise, bu takdirde s_p nin her yüzeyi de $\mathcal{S}$ ye aittir.

(K2) $\mathcal{S}$ nin iki simpleksinin arakesiti ya boştur ya da bir ortak yüzeydir.

$\mathbb{R}^n$ 'in bir alt uzayı simplekslerin böyle bir $\mathcal{S}$ kümesinin simplekslerinin birleşimi olarak gösterilebilirse, bu sonlu geometrik simplişiil kompleks olarak adlandırılır.

Tanım 0.1.13. (Kategori). Bir $\mathbf{K}$ kategorisi

(a) $\text{Obj}(\mathbf{K})$ nesneler sınıfından,

(b) Her sıralı (X, Y) nesneler çifti için $\text{Hom}\mathbf{K}(X, Y)$ ile gösterilen morfizmalar kümesinden,

(c) Her sıralı (X, Y, Z) nesneler üçlüsü için $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow Z$ morfizmler olmak üzere $gf = g \circ f : X \rightarrow Z$ ile tanımlı aşağıdaki aksiyomları sağlayan fonksiyonlardan oluşur:

i) Her X, Y, Z, W nesneleri için $f \in \text{Hom}\mathbf{K}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}\mathbf{K}(Y, Z)$ ve $h \in \text{Hom}\mathbf{K}(Z, W)$ ise $h(gf) = (gh)f$ birleşme aksiyomu sağlanır.

ii) Her Y nesnesi için $f \in \text{Hom}\mathbf{K}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}\mathbf{K}(Y, Z)$ ise $1_Y f = f$ ve $1_Y g = g$ olacak şekilde $1_Y \in \text{Hom}\mathbf{K}(Y, Y)$ birim homomorfizması vardır.

Tanım 0.1.14. (Fanktör). Bir $\mathbf{C}$ kategorisinden bir $\mathbf{D}$ kategosisine bir F fanktörü $F(1) = 1$ ve $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ olacak şekilde $\mathbf{C}$ 'deki her bir X nesnesini $\mathbf{D}$ 'deki bir $F(X)$ nesnesine ve $\mathbf{C}$ 'deki her bir $f \in \text{Mor}(X, Y)$ morfizmini $\mathbf{D}$ 'deki bir $F(f) \in \text{Mor}(F(X), F(Y))$ morfizmine taşıyan bir dönüşümdür.

Tanım 0.1.15. (Cebir). C, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her $x, y, z \in C$ ve her $\alpha \in F$ için $\cdot : C \times C \rightarrow C$ işlemi aşağıdaki şartları sağlıyorsa C 'ye F üzerinde cebir denir.

C1) $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)$

C2) $x \cdot (y + z) = xy + xz$ ve $(x + y)z = xz + yz$

C3) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

Tanım 0.1.16. (Kros Kare). Bir kros kare R 'nin L, M ve N üzerindeki etkisi ile birlikte değişmeli bir

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \lambda' \downarrow & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\nu} & R \end{array}$$

diyagramıdır. Şu halde M 'nin L ve N üzerinde μ ile değişmeli etkileri ve bir h – dönüşümü olan bir

$$h : M \times N \rightarrow L$$

fonksiyonu vardır. Bu veri aşağıdaki aksiyomları sağlamalıdır:

tüm $l \in L, m, m' \in M$ ve $n, n' \in N, r \in R, k \in A$ için

1. $\lambda, \lambda', \mu, \nu$ ve $\mu\lambda = \nu\lambda'$ kros modüllerdir.
2. λ, λ' dönüşümleri R 'nin etkisini korur.
3. $kh(m, n) = h(km, n) = h(m, kn)$;
4. $h(m + m', n) = h(m, n) + h(m', n)$;
5. $h(m, n + n') = h(m, n) + h(m, n')$;
6. $r \cdot h(m, n) = h(r \cdot m, n) = h(m, r \cdot n)$;
7. $\lambda h(m, n) = m \cdot n$
8. $\lambda' h(m, n) = n \cdot m$
9. $h(m, \lambda' l) = m \cdot l$;
10. $h(\lambda l, n) = n \cdot l$.

Böyle bir kros kare (L, M, N, R) ile gösterilir.

Tanım 0.1.17. (nil(2) -modül). Bir nil(2) -modül ilave olarak 'nilpotence' bağıntısıyla birlikte bir $\partial : C \rightarrow R$ yarı-kros modüldür.

Tanım 0.1.18. (Kuadratik Modül). Bir $(\omega, \delta, \partial)$ kuadratik modülü aşağıdaki aksiyomlar sağlanacak şekilde cebir homomorfizmlerinin değişmeli bir

$$\begin{array}{ccccc} & & C \otimes C & & \\ & \swarrow \omega & \downarrow w & & \\ L & \xrightarrow{\delta} & M & \xrightarrow{\partial} & N \end{array}$$

diyagramıdır:

QM1) $\partial: M \rightarrow N$ homomorfizması bir $nil(2)$ -modüldür ve $M \twoheadrightarrow C = M^{cr}/(M^{cr})^2$ bölüm dönüşümü, $[x] \in C$ $x \in M$ ile temsil edilen sınıfı göstermek üzere $x \mapsto [x]$ ile verilir. w dönüşümü Peiffer çarpımıyla tanımlıdır, yani

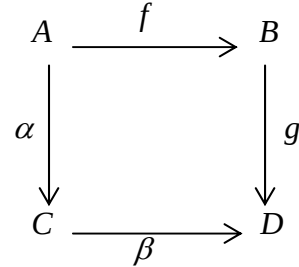
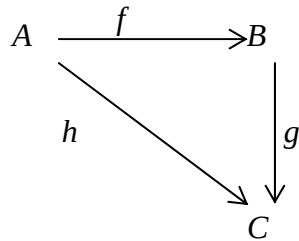
$$w([x] \otimes [y]) = xy - x \cdot \partial(y).$$

QM2) δ ve ∂ homomorfizmaları $\delta\partial = 0$ 'ı sağlar ve ω dönüşümü w 'nin bir liftingidir, yani $\delta\omega = w$ veya denk olarak $x, y \in M$ için $\delta\omega([x] \otimes [y]) = \omega([x] \otimes [y]) = xy - x \cdot \partial(y)$

QM3) L bir N -Steenrod cebiridir ve diyagramdaki tüm homomorfizmler N 'nin etkisine göre denktir. Üstelik N 'nin L üzerindeki etkisi $a \in L$ ve $x \in N$ için aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$a \cdot \partial(x) = \omega([\delta a] \otimes [x] + [x] \otimes [\delta a]).$$

Tanım 0.1.19. (Değişmeli Diyagram). Verilen bir $\mathbf{C}$ kategorisinde, verilen bir çıkış nesnesinden verilen bir varış nesnesine bütün bileşke morfizmleri eşit ise, nesnelerin ve morfizmlerin diyagramına değişmelidir denir. Örneğin A, B, C ve D , $\mathbf{C}$ 'deki nesneler olmak üzere



diyagramları değişmelidir ancak ve ancak, sırasıyla, $h = g \circ f$ ve $\beta \circ \alpha = g \circ f$ olmasıdır.

2. STEENROD CEBİRİ

Matematiğin bir branşı olan cebirsel topolojide Steenrod cebiri eşhomoloji operatörlerinin teorisinde içeren bir yapıdır. Bu özellikle homotopi teoristleri için büyük önem taşıyan bir konudur.

Daha açık olarak verilen bir p asal sayısı için, katsayılar modülo p olmak üzere $\mathbb{Z}/p$ cisimindeki graded cebirdir. Kısaca mod p singüler eşhomoloji için stable eşhomoloji operatörlerinin cebiridir. İndirgenmiş p . Steenrod kuvvetleriyle veya $p=2$ ise Steenrod kareleriyle üretilir. Homotopi gruplarının hesaplanması için gerekenler Steenrod cebiri üzerindeki homolojik cebirin göz önünde bulundurulması anlamındadır.

2.1. Eşhomoloji Operatörleri

Bir eşhomoloji operatörü, eşhomoloji fanktörleri arasındaki eşhomoloji fanktörleri arasındaki doğal bir dönüşümdür. Örneğin eşhomolojiyi bir halkadaki katsayılarla birlikte alırsak cup çarpım kareleme işlemi eşhomoloji operatörlerinin bir

$$\begin{aligned} H^n(X; R) &\rightarrow H^{2n}(X; R) \\ x &\mapsto x \smile x \end{aligned}$$

Eşhomoloji operatörlerinin grup homomorfizmaları olması gerekmediğine dikkat edelim.

Bu operatörlerin kullanımı sınırlıdır, çünkü süspansiyon ile değişmezler, yani dengeli değildirler (unstable). Bu, Y bir X uzayının süspansiyonu ise Y 'nin kohomolojisi üzerindeki cup çarpımın aşık (trivial) olmasından kaynaklanır.

Norman Steenrod sıfırdan büyük tüm i 'ler için

$$\begin{aligned} Sq^i : H^n(X, \mathbb{Z}/2) &\rightarrow H^{n+i}(X, \mathbb{Z}/2) \\ p^i : H^n(X; \mathbb{Z}/p) &\rightarrow H^{n+2i(p-1)}(X; \mathbb{Z}/p) \end{aligned}$$

dengeli (stable) işlemlerini inşa etti.

Sq gösterimi ve adı, Steenrod kareleri, Sq^n 'in n . dereceden sınıflara kısıtlanan cup kare olması durumundan gelir. Tek asal katsayılar için, genellikle p^i ile gösterilen ve indirgenmiş p . kuvvet işlemleri olarak adlandırılan benzer işlemler vardır. Çarpım işlemlerin bileşkesiyle verilmek üzere $Sq^i \mathbb{Z}/2$ üzerinde bir bağlantılı graded cebiri üretir. Bu mod 2 Steenrod cebiridir. $p > 2$ durumunda mod p Steenrod cebiri p^i ile üretilir ve β Bockstein işlemi

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow \mathbb{Z}/p^2 \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow 0$$

kısa tam dizisine birleştirilir.

(Bockstein ayrıca mod 2 durumunda da, Sq^1 gibi meydana gelir.)

2.2. Aksiyomatik Karakterizasyon

Sq^n Steenrod kareleri aşağıdaki aksiyomları sağlar.

1. Doğallık: Herhangi bir $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü için,

$$f^*(Sq^n x) = Sq^n f^*(x).$$

2. Toplamsallık: $Sq^n(x + y) = Sq^n(x) + Sq^n(y)$.

3. Cartan Formülü: $Sq^n(x \smile y) = \sum_{i+j=n} (Sq^i x) \smile (Sq^j y)$

4. Dengelilik (Stability): (Eğer dikkatli olursak) Kareler süspansiyon izomorfizmleriyle değişir.

5. Sq^n n . dereceden sınıflar üzerinde cup karedir.

6. Sq^0 birim homomorfizmasıdır.

7. Sq^1 ,

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/4 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$$

tam dizisinin Bockstein homomorfizmasıdır.

Aşağıda tanımlanan Adem bağıntıları ile birlikte, bu aksiyomlar Steenrod Karelerini bir tek biçimde karakterize eder. Benzer aksiyomlar $p > 2$ için indirgenmiş p . kuvvetlere uygulanır.

Adem Bağıntıları ve Serre - Cartan Bazı

Steenrod cebirleri hakkındaki ilk sorulardan biri, işlemlerin bileşkesinin ne zaman sıfırdan farklı olacağıdır. Steenrod cebirinin halka yapısı oldukça karışıktır. Gerçekten, aşağıda tarif edildiği gibi eşhomolojisi kürelerin dengeli homotopi gruplarına bir yaklaşım olarak göz önüne alınabilir, modern matematiğin nesneleri tanımlanması zor olduğu için meşhurdur. Jean – Pierre Sere ve Henri Cartan, bulucusu José Adem ile adlandırılan Adem bağıntılarını inceleyerek Steenrod cebiri için iyi bir baz buldular. Bu baz tamsayı dizileri için admissibility'nin belirli bir gösterimi üzerine dayanır. Her bir j için $i_j \geq 2i_{j+1}$ ise

$$i_1, i_2, \dots, i_n$$

dizisinin admissible olduğunu söyleriz. Bu takdirde

$$Sq^I = Sq^{i_1} \cdots Sq^{i_n}$$

elemanları I bir admissible dizi olmak üzere mod 2 Steenrod cebiri için bir baz (Sere-Cartan bazı) oluşturur. $p > 2$ için de benzer bir baz vardır. Admissibility gösterimi $i < 2j$ olacak şekilde tüm $i, j > 0$ için

$$Sq^i Sq^j = \sum_{k=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \binom{j-k-1}{i-2k} Sq^{i+j-k} Sq^k$$

olan Adem bağıntılarından gelir. (Binom katsayıları mod 2'ye göre düzenlenmiştir.) Adem bağıntıları Steenrod karelerinin keyfi bir birleşimini Serre - Cartan baz elemanlarının bir toplamı olarak yazma imkanı sağlar.

Son olarak Adem bağıntıları Steenrod karelerinin mümkün olan tüm birleşimlerini p elemanlı F_p cismi üzerindeki sonsuz boyutlu bir cebiri elemanları olarak ifade etmemize olanak sağlar. Bu Steenrod cebiri teriminin ne anlama geldiğidir: $p = 2$ durumunda bu aynı yolla inşa edilebilir. M_i , Sq^i sembolü üzerindeki serbest F_2 – modül ve M , i . dereceden homojen kısmı M_i 'ye eşit olmak üzere bir graded F_2 modül olsun. Bu takdirde Steenrod cebiri M

modülünün tensör cebirinin Adem bağıntılarıyla üretilen ideal ile bölümüdür. Bu tanımla herhangi bir uzayın $\text{mod } p$ eşhomolojisi $\text{mod } p$ Steenrod cebiri üzerinde bir graded modül oluşturur.

2.3. İlk Uygulamalar

Steenrod cebirinin en meşhur ilk uygulamaları Hopf invaryant probleminin J. Frank Adams tarafından verilen çözümleri olan topolojik problemleri ve küre problemi üzerindeki vektör cisimlerini anlamaya yöneliktir. Milnor ve Bott, ve Kervaire de bir Hopf invaryantı probleminin ikinci bir çözümünü K – teorideki işlemleri kullanarak verdi; bunlar Adams işlemleridir. $\text{mod } 2$ Steenrod cebirinin bir uygulaması oldukça elemanter olan aşağıdaki teoremdir.

2.4. Teorem: Eğer bir Hopf invaryantının bir $S^{2n-1} \rightarrow S^n$ dönüşümü varsa, bu takdirde n 2 'nin bir kuvvetidir.

İspat Sq^k 'nin 2 'nin bir kuvveti olmayan k için ayrışabilir olması durumunu kullanır; yani böyle bir eleman oldukça küçük dereceden karelerin bir çarpımıdır. ■

BÖLÜM I: SİMLİŞİL STEENROD CEBİRLERİ

Bu bölümde iyi bilinen birkaç tanımı ve simplişil Steenrod cebirleri ve homoloji modülleri hakkındaki durumları tekrarlayacağız. Bunlarla ilgili daha fazla detay için M. André'nin *Homologie des algèbres commutatives* kitabını referans veririz.

GİRİŞ

Bu çalışmanın ilk başlangıç motivasyonu değişmeli Steenrod cebirlerin kavramını genelleştiren kros homotopik cebirlerin grup teoretik kısımlarının ne olduğunu görmek ve değişmeli Steenrod cebirlerin benzerlikle aktif olabilen kısımlarının nasıl meydana geldiğini görmektir. Teorik grup durumun bir sınıflandırması için amaç belki de değişmeli Steenrod cebirler içinde "yeni" araçlar tanıtmaktır.

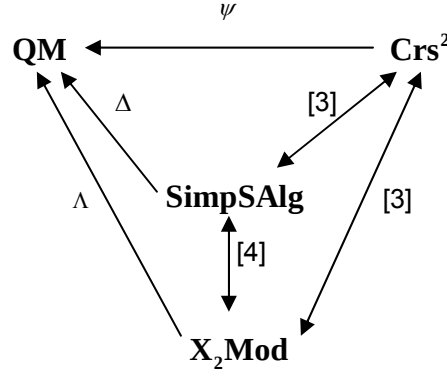
Simplişil Steenrod değişmeli cebirler Homolojik Cebir, Homotopi Teorisi, Cebirsel K – Teori ve Cebirsel Geometri arasında yer alır. Her bir konuda (branşa) zamanla meydana gelen gelişmelerde önemli bir rol oynamıştır. Bunların kendi içindeki yapısıyla bereber değişmeli cebirler [4,6,7] 'de çalışılmıştır. Günümüzdeki çalışmalar değişmeli simplişil Steenrod cebirlerin çeşitli tiplerine ışık tutar ve esas olarak çeşitli homolojik yapılarındaki sonuçlara uygulanacaktır.

Grupların kros modülleri geçen yüzyılın ortalarına doğru Whitehead [42] tarafından tanıtıldı. Bunlar ikiden büyük boyuttaki aşık homotopi gruplu homotopi tipleri için modeldir. 2 – uzunluklu grupların kros modül cinsinden bağlantılı 3 – tipleri için cebirsel modeller Conduché [18] tarafından tanımlanan 2 – kros modül ve Guin - Walery, Loday [26] tarafından tanımlanan kros karelerdir. Bu yapıların değişmeli cebir versiyonları sırasıyla Grandjeán - Vale [25] ve Ellis [22] tarafından tanımlanmıştır. Porter ([4,6,7]) ayrıca bu yapılar ve simplişil cebirler arasındaki bağıntıları verdi. Alternatif bir model için grupların kuadratik modül fikri Baues ([13]) tarafından tanımlandı. Bu ek olarak nilpotent bağıntıları ile birlikte bir 2 – kros modüldür.

Bu çalışmada kuadratik modüllerin değişmeli Steenrod cebiri versiyonunu tanımlarız ve daha yüksek boyutlu Peiffer elemanlarını değişmeli simplişil Steenrod cebirlerinden kuadratik modüllere bir fanktör inşa ederiz. Bu yapıda hiperkros kompleks çiftlerinin rolünü uyguluyoruz. Üstelik kuadratik modüller 2 – kros modüller, kros kareler ve 2 uzunluğundaki Moore Kompleksli değişmeli Simplişil Steenrod cebirleri arasındaki bağıntıyı veririz. (3 – tiplerinin diğer bir cebirsel modeli [15]'de Brown ve Gilbert tarafından tanıtılan "braided regüler kros modül"dür. Bu model ayrı bir makalede analiz edilmiştir.)

Quillen [41] ve Illusie [27]'nin ikisi de simplişil cebirlerin temel homotopik cebirini ve bunların deformasyon teorisindeki uygulamalarını tartıştı. André [1] bunların yapısının detaylı bir incelemesini verir ve bunları kotanjant kompleks yapısıyla eşhomolojiye uygular.

Şu halde bu çalışmada incelenen ve [4], [6] gibi modellerle ilgili olan durumlar Λ, Δ, ψ ve diyagramdaki sayılar referanslara karşılık gelmek üzere aşağıdaki diyagramla özetlenebilir.



Tanım 1.1.1: Bir **SA** Steenrod cebiri, her bir $n \geq 0$ için sırasıyla yüz operatörleri ve dejenereler olarak adlandırılan

$$\begin{aligned} d_i^n : SA_n &\rightarrow SA_{n-1} & 0 \leq i \leq n \neq 0 \\ s_i^n : SA_n &\rightarrow SA_{n+1} & 0 \leq j \leq n \end{aligned}$$

A Steenrod cebiri homomorfizmleriyle birlikte SA_n ($n \in \mathbb{N}$) A Steenrod cebirlerinin bir koleksiyonudur. Bu homomorfizmlerin aşağıdaki aksiyomları sağlaması gerekir.

1. $0 \leq i < j \leq n$ için $d_i^{n-1} d_j^n = d_{j-1}^{n-1} d_i^n$,
2. $0 \leq i \leq j \leq n$ için $s_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n$,
3. $0 \leq i < j \leq n$ için $d_i^{n+1} s_j^n = s_{j-1}^{n-1} d_i^n$,
4. $i = j$ veya $i = j + 1$ için $d_i^{n+1} s_j^n = \text{id}$,
5. $0 \leq j < i - 1 \leq n$ için $d_i^{n+1} s_j^n = s_j^{n-1} d_{i-1}^n$.

Hesaplamaadaki kullanım için yukarıdaki eşitliklerin aşağıdakileri sağladığını hatırlatmak uygundur.

1. $0 \leq j \leq i \leq n$ için $d_i d_j = d_j d_{i+1}$,
2. $0 \leq j < i \leq n$ için $s_i s_j = s_j s_{i-1}$,
3. $j \leq i$ için $s_i d_j = d_j s_{i+1}$,
4. $i > j$ için $s_i d_j = d_{j+1} s_i$.

Bu eşitlikler standarttır ve [20],[21],[29] ve [30]'da bulunabilir.

$x \in SA_n$ elemanları n – boyutlu simpleksler olarak adlandırılır. Bir x simpleksi bazı y ’ler için $x = s_i(y)$ ise dejenere olarak adlandırılır.

Simplişil Steenrod cebirlerinin bir $f : \mathbf{SA} \rightarrow \mathbf{SB}$ homomorfizmi tüm yüz operatörleri, d_i^n ve dejenere operatörler, s_j^n ile deęiřen yani;

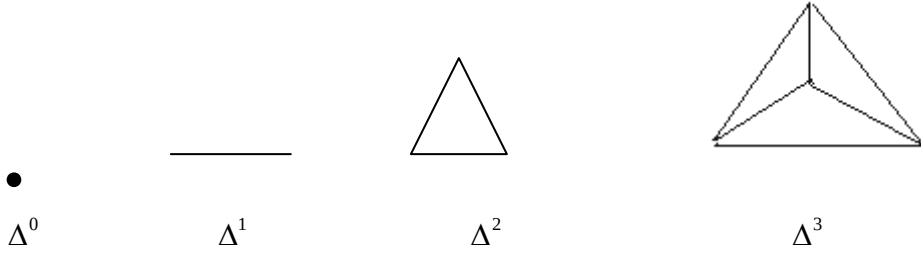
$$d_i f_n = f_{n-1} d_i, \quad f_n s_i = s_i f_{n-1}$$

olan $f_n : SA_n \rightarrow SB_n$ Steenrod cebiri homomorfizmlerinin bir kümesidir.

řu halde **SimpSAlg** ile göstereceğimiz simplişil Steenrod cebirlerinin kategorisini tanımlamış olduk.

Bu tanımın küçük boyutlar için geometrik yorumu aşağıdaki gibi düşünölebilir:

$n = 0$ için bir 0 – simpleks basit olarak $x \in SA_0$ noktasıdır ve bir 1 – boyutlu simpleks $x \in SA_1$ için bir doğrudur. $x \in SA_2$ için 2 – boyutlu simpleksler üçgenlerdir ve 3 – boyutlu simpleksler dörtyüzlüdür ve bu şekilde devam eder.



Tanım 1.1.2: Bir simplişil Steenrod modöölü $n \geq 0$ için SA_n simplişil Steenrod modööllerinin ve Tanım 1.1.1’deki eşitlikleri sağlayan Steenrod modöl homomorfizmlerinin bir ailesidir.

Uyarı 1.1.3: Herhangi bir $\mathbf{SA}$ simplişil Steenrod modöölü için Steenrod modööllerinin birleşmeli bir zincir kompleksi vardır. $\partial_n : SA_n \rightarrow SA_{n-1}$ diferansiyelleri

$$\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^n$$

ile tanımlıdır. Simplişil Steenrod cebirlerinin tanımındaki birinci aksiyomdan $\partial_{n+1} \partial_n = 0$. řu halde bu $\mathbf{SA}$ simplişil Steenrod modöölüne birleştirilen bir zincir kompleksidir. Böylece $\mathbf{SA}$ simplişil Steenrod modöölünün

$$H_n(\mathbf{SA}) = \frac{\text{Çek} \partial_n}{\text{Gör} \partial_{n+1}}$$

ile tanımlı n . homoloji modöölü $H_n(\mathbf{SA})$ ’dan bahsedebiliriz.

Tanım 1.1.4: Bir $\mathbf{SA}$ Steenrod cebiri, $fd_0^1 = fd_1^1 : SA_1 \rightarrow SA$ olmak üzere $f = d_0^0 : SA_0 \rightarrow SA$ örten bir Steenrod cebir homomorfizmini ve sabit bir $\mathbf{K}(\mathbf{SA}, 0)$ simplişil Steenrod cebirini belirleyerek eklenmiştir (augmented). Bir $\mathbf{SA}$ simplişil Steenrod cebirinin eklemesi (augmentasyonu) bir

$$\mathbf{SA} \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{SA}, 0)$$

dönüşümüdür.

Eğer karşılık gelen kompleks devirsiz ise, yani $n > 0$ için $H_n(\mathbf{SA}) \cong 0$ ve $H_n(\mathbf{SA}) \cong SA$ ise bir eklenmiş simplişil Steenrod cebiri devirlidir.

BİR C STEENROD CEBİRİNİN SİMLİŞİL YENİDEN ÇÖZÜMLEMESİ

Tanım 1.1.5: C bir değişmeli Steenrod cebiri olsun. C 'nin serbest simplişil yeniden çözümlemesi $(\mathbf{SA}, f)$ devirli ve her bir SA_n serbest olacak şekilde $f : SA_0 \rightarrow C$ eklemesi ile birlikte $\mathbf{SA}$ simplişil Steenrod cebirlerinden oluşur.

(Bu bölümdeki simplişil yeniden çözümlemenin André yapısını Simplişil Steenrod cebir yapısı üzerinde özetleyeceğiz.)

MOORE KOMPLEKSİ VE BİR SİMLİŞİL STEENROD CEBİRİNİN HOMOTOPI MODÜLÜ

Verilen bir $\mathbf{SA}$ simplişil Steenrod cebirinin $\partial_n : NSA_n \rightarrow NSA_{n-1}$ kısıtlama ile d_n^n den doğrulamak üzere

$$(\mathbf{NSA})_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{çek} d_i^n$$

ile tanımlanan bir zincir kompleksi olan $\mathbf{SA}$ 'nın $(\mathbf{NSA}, \partial)$ Moore kompleksi olduğuna dikkat edelim.

$\mathbf{SA}$ 'nın $\pi_n(\mathbf{SA})$ n . homotopi modülü $\mathbf{SA}$ Moore kompleksinin n . homolojisi, yani ,

$$\begin{aligned} \pi_n(\mathbf{SA}) &\cong H_n(\mathbf{NSA}, \partial) \\ &= \bigcap_{i=0}^n \text{çek} d_i^n / d_{n+1}^{n+1} \left(\bigcap_{i=0}^n \text{çek} d_i^{n+1} \right). \end{aligned}$$

$\mathbf{NSA}$ ve $\pi_n(\mathbf{SA})$ 'nın yorumu aşağıdaki gibidir:

$n = 1$ için $\omega \in NSA_1$ ve $w \in SA_2$ aşağıdaki gibidir ve böyle devam eder.

Not: Eğer 3. yüzeyinde w ile birlikte bir x 3-simpleksi varsa ve diğer tüm yüzler sıfır ise $\pi_2(\mathbf{SA})$ 'nin aşikar elemanı verilmek üzere aşağıdaki şekildeyse $w \in NSA_2$ çek ∂ 'dedir.

($\mathbf{NSA}$ ve $\pi_n(\mathbf{SA})$ 'nin elemanlarının bu basit yorumu diğer durumlardaki elemanların bazılarının yorumlarının katılmasıyla daha sonra sonuçlanacaktır.)

1.3. KROS MODÜLLER

Geçen yüzyılın ortalarına doğru J.J.C. Whitehead (1949) tarafından tanımlanan kros modüllerin değişik kavramlarda özellikle de relatif homotopi gruplarının cebirsel yapılarındaki incelemeleri yapıldı. Bu bölümde T. Porter tarafından verilen değişmeli cebirlerin kros modüllerinin elemanter teorisini Steenrod cebir yapısına uydurarak tanıma giriş yapacağız. Bununla ilgili daha fazla detay [39],[22] ve [23]'da bulunabilir, ayrıca [11]'e bakınız.

M ve R değişmeli Steenrod cebirleri ise

$$R \times M \rightarrow M$$

$$(r, m) \mapsto r \cdot m$$

dönüşümü bir değişmeli etkidir ancak ve ancak tüm $k \in \mathbf{k}$, $m, m' \in M$, $r, r' \in R$ için

1. $k(r \cdot m) = (kr) \cdot m = r \cdot (km)$,
2. $r \cdot (m + m') = r \cdot m + r \cdot m'$,
3. $(r + r') \cdot m = r \cdot m + r' \cdot m$,
4. $r \cdot (mm') = (r \cdot m)m' = m(r \cdot m')$
5. $(rr') \cdot m = r(r' \cdot m)$.

Bu tez boyunca $r \in R$ 'nin $m \in M$ üzerindeki etkisini $r \cdot m$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.3.1: R bir birimli Steenrod cebiri olsun. Değişmeli Steenrod cebirlerinin yarı kros modülü tüm $c \in C$ ve $r \in R$ 'ler için

$$\mathbf{CM1)} \quad \partial(r \cdot c) = r \partial c$$

olacak şekilde

$$\partial : C \rightarrow R$$

Steenrod R -cebir morfizmi ve R 'nin C etkisiyle birlikte bir C Steenrod R -cebiridir.

Ek olarak eğer tüm $c, c' \in C$ 'ler için

$$\mathbf{CM2)} \quad \partial c \cdot c' = cc'$$

ise bu bir kros Steenrod R -modüldür.

Son bağıntı Peiffer özdeşliği olarak adlandırılır. Böyle bir kros modülü (C, R, ∂) ile göstereceğiz. Açık olarak herhangi bir kros modül, bir yarı-kros modüldür.

Tanım 1.3.2: (C, R, ∂) 'den (C', R', ∂') 'ye kros modüllerin bir morfizmi

$$\theta(r \cdot c) = \psi(r) \cdot \theta(c) \text{ ve } \partial' \theta(c) = \psi \partial(c)$$

olacak şekilde

$$\theta : C \rightarrow C', \quad \psi : R \rightarrow R'$$

Steenrod cebir morfizmlerinin bir çiftidir.

Bu durumda $R = R'$ ve ψ birim ise θ 'nın bir Steenrod R -modül morfizmi olduğunu söyleyeceğiz. Bundan dolayı **SXMod** ile göstererek Steenrod kros modüllerinin kategorisini tanımlayabiliriz.

1.3.1. ÖRNEKLER

Örnek 1.3.3: I bir R Steenrod cebirinin herhangi bir ideali olsun.

$$\text{inc} : I \rightarrow R$$

kapsama dönüşümünü göz önüne alalım. Bu takdirde (I, R, inc) bir kros modüldür. Tersine olarak verilen herhangi bir $\partial : C \rightarrow R$ Steenrod kros R -modülü için $\partial C = I$ 'nin R 'de bir ideal olduğu kolayca elde edilebilir.

Örnek 1.3.4: M herhangi bir Steenrod R -modülü olsun. Bu sıfır çarpanı ile birlikte bir R Steenrod cebiri olarak göz önüne alınabilir, ve bu takdirde tüm $c, c' \in C$ için $\mathbf{o}(c) \cdot c' = 0c' = 0 = cc'$ ile $\mathbf{o} : M \rightarrow R$ bir Steenrod kros R modüldür.

Tersine olarak verilen herhangi bir $\partial : C \rightarrow R$ Steenrod kros modülü için, bu takdirde çek ∂ bir $R/\partial C$ modüldür. Bunun için Önerme 1.3.6'ya bakınız.

Lemma 1.3.5: Bir **SA** Simplişil Steenrod cebirinin ve bir simplişil **I** idealinin verildiğini kabul edelim.

$$\text{inc} : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{SA}$$

kapsaması

$$\partial : \pi_0(\mathbf{I}) \rightarrow \pi_0(\mathbf{SA})$$

dönüşümünü doğurur ve çarpma ile **I** üzerindeki **SA** etkisi $\pi_0(\mathbf{I})$ üzerindeki $\pi_0(\mathbf{SA})$ etkisini doğurur. Bu takdirde $(\pi_0(\mathbf{I}), \pi_0(\mathbf{SA}), \partial)$ bir kros simplişil modüldür.

İspat: CM1) Tüm $e \in \mathbf{SA}$ için

$$\begin{aligned} \partial([e] \cdot [i]) &= [ei], \\ &= [e][\text{inc}(i)], \\ &= [e]\partial([i]). \end{aligned}$$

CM2) Tüm $i, i' \in \mathbf{I}$ için

$$\begin{aligned}
\partial([i]) \cdot [i'] &= [\text{inc}(i) \cdot i'] \\
&= [ii'] \\
&= [i][i'].
\end{aligned}$$

Herhangi bir simplişil kros modül simplişil Steenrod cebirlerinin $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{SA}$ ideal kapsamasının π_0 'ı olarak elde edilebilir, fakat ispata burada yer vermeyeceğiz.

Aşağıdaki sonuç N.M.Shammu [39]'ye göredir.

Önerme 1.3.6: (C, R, ∂) bir Steenrod kros R – modül ise, bu takdirde

- i) çek ∂ , C 'nin merkez idealidir.
- ii) C/C^2 ve çek ∂ 'nin her ikisi de doğal $R/\partial C$ modül yapısına sahiptir.

İspat: i) $c \in C$ için $a \in \text{çek } \partial$ olduğundan, istendiği gibi

$$ac = \partial a \cdot c = 0c = 0 = c0 = c \cdot \partial a = ca.$$

ii) ∂C 'nin çek ∂ ve C/C^2 üzerinde aşikar olarak etki ettiğini göstermek yeterlidir.

$a \in \text{çek } \partial$, $\partial c \in \partial C$ için $\partial c \cdot a = c \cdot \partial a = c0 = 0$ ile ∂C , çek ∂ üzerinde aşikar olarak etki eder.

$\partial c \in \partial C$, $c' + C \in C/C^2$ için aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz,

$$\begin{aligned}
\partial c \cdot (c' + C^2) &= \partial c \cdot c' + C^2 \\
&= cc' + C^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

böylece ∂C C/C^2 üzerinde aşikar olarak etki eder. Böylece şüphesiz

$$\begin{aligned}
R/\partial C \times \text{çek } \partial &\rightarrow \text{çek } \partial & R/\partial C \times C/C^2 &\rightarrow C/C^2 \\
(r + \partial c, a) &\mapsto ra & (r + \partial c, c + C^2) &\mapsto rc + C^2
\end{aligned}$$

dönüşümlerini tanımlayabiliriz ve bunun $R/\partial C$ modülleri içinde çek ∂ ve C/C^2 değişmeli gruplarına dönüşeceğini kontrol etmek normaldir. Şu halde çek ∂ ve C/C^2 $R/\partial C$ modül yapısına sahiptir. ■

1.4. Serbest Kros Modüller

Değişmeli Steenrod cebirlerin serbest kros modül fikri, daha önceden E.R. Aznar tarafından tarif edilen değişmeli cebirlerin serbest kros modül fikri Steenrod cebirlerine uygulanacaktır. Bu bölümde bir Steenrod cebirinde serbest kros modülün nasıl oluşturulduğunu verelim.

Tanım 1.4.1: (C, R, ∂) bir Steenrod kros modülü olsun, Y bir küme ve $\nu: Y \rightarrow C$ bir fonksiyon olsun, bu takdirde (C, R, ∂) 'nın ν bazıyla birlikte bir Steenrod kros R -modülü olduğu söylenir, veya farklı olarak $\partial' \nu' = \partial \nu$ olacak şekilde $\nu': Y \rightarrow C'$ fonksiyonu ve herhangi bir (C', R, ∂') Steenrod kros R -modülü için $\partial \nu: Y \rightarrow R$ üzerinde, $\phi \nu = \nu'$ olacak şekilde bir tek

$$\phi: (C, R, \partial) \rightarrow (C', R, \partial')$$

morfizmi vardır.

Eğer R bir serbest Steenrod cebiri ise, (C, R, ∂) Steenrod kros modülü total serbesttir. 'kros' kelimesinin yerini 'yarı kros' ile değiştirerek (total) serbest Steenrod kros modülün yukarıdaki tanımında (total) serbest Steenrod yarı kros modülün uygun bir tanımını elde ederiz. Sonucun aşağıdaki ispatı Steenrod cebirlerinde T. Porter'a göre yapılmıştır.

Teorem 1.4.2: Bir (C, R, ∂) serbest Steenrod R -modülü R eşdeğer bölgesi herhangi bir $f: Y \rightarrow R$ fonksiyonu üzerinde mevcuttur.

İspat: Bir Y kümesinden bir R Steenrod cebirine verilen bir fonksiyon için $f: Y \rightarrow R$ için $E = R^+[Y]$ 'yi göz önüne alalım, R, E üzerinde çarpma ile etki edecek şekilde Y üzerindeki polinom halkasının pozitif graded (dereceli) kısmıdır. f fonksiyonu $\theta(y) = f(y)$ ile verilen Steenrod R -cebirlerinin

$$\theta: R^+[Y] \rightarrow R$$

morfizmini doğurur.

(A, R, δ) herhangi bir Steenrod kros modülü olsun. $\delta \omega = f$ olacak şekilde $\omega: Y \rightarrow A$ verildiğini kabul edelim. P ,

$$P = \{pq - \theta(p)q : p, q \in R^+[Y]\}$$

Şeklindeki tüm elemanlarla üretilen $R^+[Y]$ 'nin bir ideali olsun. $\theta(P) = 0$ olduğu kolayca görülür. $C = E / P$ alırsak, bu takdirde

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Theta} & E/P \\ \theta \searrow & & \nearrow \partial \\ & R & \end{array}$$

doğal değişmeli diyagramına sahip oluruz. Burada Θ Steenrod cebirlerinin kanonik bölüm dönüşümüdür. Şimdi Peiffer bağıntısının aşağıdaki gibi sağlanabileceğini göstereceğiz:

Tüm $y_1 + P, y_2 + P \in C$ için,

$$\begin{aligned}
 \partial(y_1 + P) \cdot (y_2 + P) &= \theta y_1(y_2 + P) \\
 &= \theta y_1 y_2 + P \\
 &= y_1 y_2 + P \pmod{p} \\
 &= (y_1 + P)(y_2 + P).
 \end{aligned}$$

$\delta\phi = \partial$ olacak şekilde $\phi(y + P) = w(y)$ ile verilen bir tek $\phi: C \rightarrow A$ morfizmi mevcuttur, yani

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{\nu} & C & \xrightarrow{\partial} & R \\
 \parallel & & \downarrow \phi & & \parallel \\
 Y & \xrightarrow{\omega} & A & \xrightarrow{\delta} & R
 \end{array}$$

$\exists!$

Böylece $(C(f), R, \partial)$, f üzerindeki istenen serbest kros Steenrod R – modüldür. ■

BÖLÜM II: DEĞİŞMELİ CEBİRLERİN HOMOTOPIK GÖRÜNÜŞLERİ

Bu çalışma homolojik uygulamalara¹ bakış açısıyla değişmeli simplişil Steenrod Cebirlerinin homotopi Teorisini inceler.

2.1. DEĞİŞMELİ SİMLİŞİL STEENROD CEBİRLERİ ÖN BİLGİLER

İlerleyen bölümlerde ‘cebirlere’ belirlenmiş değişmeli bir $\mathbf{k}$ - halkası üzerindeki değişmeli cebirler olacaktır, fakat uygunluk açısından çarpımsal terse sahip olmaya gerek yoktur. Değişmeli Steenrod cebirlerinin kategorisi $\mathbf{SA}$ ile gösterilecektir.

Bir $\mathbf{SA}$ değişmeli simplişil Steenrod Cebiri André [1] veya Illusie [19]’da verilen alışılmış simplişil özelliklerini sağlayan $d_i = d_i^n : SA_n \rightarrow SA_{n-1}$, $0 \leq i \leq n$, ($n \neq 0$) ve $s_i = s_i^n : SA_n \rightarrow SA_{n+1}$, $0 \leq i \leq n$ dejenere dönüşümleri ve yüz dönüşümleriyle birlikte Steenrod cebirlerinin bir $\{SA_n\}$ ailesinden oluşur. Bu tamamen Δ sonlu $[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$ ordinarlarının ve azalan dönüşümlerin kategorisi olmak üzere bir $\mathbf{SA} : \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{SAlg}$ fanktörü olarak tarif edilebilir. Simplişil Steenrod cebirlerinin kategorisini $\mathbf{SimpSAlg}$ ile göstereceğiz.

Verilen bir $\mathbf{SA}$ simplişil Steenrod cebiri için $\mathbf{SA}$ ’nın $(\mathbf{NSA}, \partial)$ Moore kompleksi $\partial_n : NSA_n \rightarrow NSA_{n-1}$ d_n^n ’den kısıtlamayla üretilmek üzere

$$NSA_n = \text{çek}d_0^n \cap \text{çek}d_1^n \cap \dots \cap \text{çek}d_{n-1}^n$$

ile tanımlı zincir kompleksidir.

$\mathbf{SA}$ ’nın n . homotopi modülü $\pi_n(\mathbf{SA})$, $\mathbf{SA}$ Moore kompleksinin n . homolojisi, yani

$$\pi_n(\mathbf{SA}) \cong H_n(\mathbf{NSA}, \partial) = \bigcap_{i=0}^n \text{çek}d_i^n / d_{n+1}^{n+1} \left(\bigcap_{i=0}^n \text{çek}d_i^{n+1} \right).$$

Eğer tüm $n \geq k+1$ için $NSA_n = 0$ ise bir simplişil Steenrod cebirinin $\mathbf{NSA}$ Moore kompleksinin k uzunluğunda olduğunu söyleriz, böylece k uzunluğundaki bir Moore kompleksi, ayrıca $l \geq k$ için l uzunluğundadır. Şu halde k uzunluğundaki Moore kompleksli simplişil Steenrod cebirlerinin kategorisini $\mathbf{SimpSAlg}_{\leq k}$ ile gösteririz.

¹ Kuadratik Modüller, Simplişil Değişmeli Cebirler, 2 – Kros Modüller, Kros Kareler.

Aşağıdaki terminolojiler ve gösterimler [16]'dan ve teorik grup durumuna benzer olan, yayınlanmış versiyonu [17]'den türetilmiştir. Detaylı araştırmalar için [6]'e bakınız.

$[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$ sıralı kümesi için $\alpha_i^n : [n+1] \rightarrow [n]$

$$\alpha_i^n(j) = \begin{cases} j & j \leq i \text{ ise} \\ j-1 & j > i \text{ ise} \end{cases}$$

ile verilen azalan örten dönüşüm olsun. $S(n, n-r)$ $[n]$ 'den $[n-r]$ 'ye tüm monoton artan örten dönüşümlerin kümesi olsun. Bu bileşke ile çeşitli α_i^n dönüşümlerinden türetilir. Bu üretilen dönüşümlerin bileşkesi şu kurala göredir: $\alpha_j \alpha_i = \alpha_{i-1} \alpha_j$, $i < j$. Bu i_k indisleri $\{i_1, \dots, i_r\} = \{i : \alpha(i) = \alpha(i+1)\}$ olacak şekilde $[n]$ 'in elemanları iken $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n-1$ olmak üzere her $a \in S(n, n-1)$ elemanının $\alpha = \alpha_{i_1} \circ \alpha_{i_2} \circ \dots \circ \alpha_{i_r}$ şeklinde bir tek ifadeye sahip olmasını gerektirir. Şu halde $\{(i_r, \dots, i_1) : 0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n-1\}$ kümesi ile birlikte $S(n, n-r)$ 'yi belirleyebiliriz. Özel olarak, $S(n, n)$ 'nin tek elemanı $[n]$ üzerindeki birim dönüşümüyle tanımlanır, ϕ_n ile gösterilen $()$ boş 0 -lıya karşılık gelir. Benzer şekilde $S(n, 0)$ 'in tek elemanı $(n-1, n-2, \dots, 0)$ 'dir. Tüm $n \geq 0$ için

$$S(n) = \bigcup_{0 \leq r \leq n} S(n, n-r)$$

olsun. $i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k$ fakat $i_{k+1} > j_{k+1}$ ($k \geq 0$) veya $i_1 = j_1, \dots, i_r = j_r$ ve $r < s$ ise $\alpha = (i_r, \dots, i_1) < \beta = (j_s, \dots, j_1)$ 'in $S(n)$ 'de olduğunu söyleriz. Bu $S(n)$ 'i sıralı bir küme yapar.

STEENROD HİPERKROS KOMPLEKS ÇİFTLERİ

İlerleyen ifadeleri [6]'dan veririz. Detaylar için [17] (grup durumu) ve [4]'e bakınız. Amacımız [6] (Grup durumu [11]) deki fikri simplişil Steenrod cebir yapısına uygulamaktır. $\alpha = (i_r, \dots, i_1), \beta = (j_s, \dots, j_1) \in S_n$ iken $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ve $\beta < \alpha$ olmak üzere $S(n)$ 'den (α, β) elemanlarının çiftlerinden oluşan bir $P(n)$ kümesi tanımlanır. İhtiyaç duyacağımız

$$\{E_{\alpha, \beta} : NSA_{n-\#\alpha} \otimes NSA_{n-\#\beta} \rightarrow NSA_n : (\alpha, \beta) \in P(n), n \geq 0\}$$

k - lineer morfizmleri aşağıdaki işlemlerle verilir:

Aşağıdaki değişmeşli diyagramla

$$\begin{array}{ccc}
NSA_{n-\#\alpha} \otimes NSA_{n-\#\beta} & \xrightarrow{E_{\alpha,\beta}} & NA_n \\
\downarrow S_\alpha \times S_\beta & & \downarrow p \\
SA_n \otimes SA_n & \xrightarrow{\mu} & SA_n
\end{array}$$

$j = 0, 1, \dots, n-1$ için $p_j = 1 - s_j d_j$ ile birlikte
 $s_\alpha = s_{i_r} \cdots s_{i_1} : NSA_{n-\#\alpha} \rightarrow SA_n$, $s_\beta = s_{j_s} \cdots s_{j_1} : NSA_{n-\#\beta} \rightarrow SA_n$, $p = p_{n-1} \cdots p_0$ bileşke
 izdüşümleri ile tanımlanmak üzere ve $\mu : SA_n \otimes SA_n \rightarrow SA_n$ çarpımı göstermek üzere

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(x_\alpha \otimes y_\beta) &= p\mu(s_\alpha \otimes s_\beta)(x_\alpha \otimes y_\beta) \\
&= p(s_\alpha(x_\alpha)s_\beta(y_\beta)) \\
&= (1 - s_{n-1}d_{n-1}) \cdots (1 - s_0d_0)(s_\alpha(x_\alpha)s_\beta(y_\beta)).
\end{aligned}$$

Şimdi tüm $(\alpha, \beta) \in P_n$ için $x_\alpha \in NSA_{n-\#\alpha}$ ve $y_\beta \in NSA_{n-\#\beta}$ olmak üzere

$$E_{\alpha,\beta}(x_\alpha \otimes y_\beta)$$

şeklindeki tüm elemanlar tarafından üretilecek şekilde SA_n 'de I_n idealini göz önüne alalım ve $\#\alpha$ 'nın anlamı α cümlesindeki elemanların sayısıdır. $\#\beta$ da benzer şekilde tanımlanır.

Önerme 2.1.1: ([6]) SA bir simplişil Steenrod cebiri $n > 0$ ve D_n dejenere elemanlar tarafından üretilen SA_n 'de bir ideal olsun. $SA_n = D_n$ olduğunu farz edelim ve I_n $1 \leq r, s \leq n$ olmak üzere $x_\alpha \in NSA_{n-\#\alpha}$, $y_\beta \in NSA_{n-\#\beta}$ iken

$$\alpha, \beta \in P(n) \text{ olmak üzere } E_{\alpha,\beta}(x_\alpha \otimes y_\beta)$$

şeklindeki elemanlar tarafından üretilen bir ideal olsun. Bu takdirde,

$$\partial_n(NSA_n) = \partial_n(I_n).$$

Şimdi yukarıdaki önermeye göre $n = 2, 3$ için I_n 'in ∂_n ile görüntüsünün nasıl olacağı gösterilir.

$D_2 = SA_2$ olduğunu kabul edelim. $\beta = (1)$, $\alpha = (0)$ ve $x, y \in SA_1 = \text{çek} d_0$ alalım. I_2 idealinin

$$E_{(1)(0)}(x \otimes y) = p_1 p_0 (s_1 x s_0 y) = s_1 x (s_1 y - s_0 y)$$

şeklindeki elemanlar tarafından üretilir. Bu takdirde $x \in \text{çekd}_0$ ve $y - s_0 d_1 y \in \text{çekd}_1$ olmak üzere I_2 'nin ∂_2 ile görüntüsü $d_2[E_{(1)(0)}(x \otimes y)] = x(y - s_0 d_1 y)$. Bundan dolayı I_2 'nin ∂_2 ile görüntüsü $\text{çekd}_0 \text{ çekd}_1$ 'dir.

$n = 3$ için lineer morfizmler

$$\begin{aligned} E_{(1,0),(2)}, E_{(2,0),(1)}, E_{(2,1),(0)} \\ E_{(2),(0)}, E_{(2),(1)}, E_{(1),(0)} \end{aligned}$$

Bu takdirde I_3 ideali; $x \in NSA_1$ ve $y \in NSA_2$ için

$$\begin{aligned} E_{(1,0),(2)}(x \otimes y) &= (s_1 s_0 x - s_2 s_0 x) s_2 y \\ E_{(2,0),(1)}(x \otimes y) &= (s_2 s_0 x - s_2 s_1 x)(s_1 y - s_2 y) \\ E_{(2,0),(1)}(x \otimes y) &= s_2 s_1 x(s_0 y - s_1 y + s_2 y) \end{aligned}$$

ve $x, y \in NSA_2$ için

$$\begin{aligned} E_{(1),(0)}(x \otimes y) &= s_1 x(s_0 y - s_1 y) + s_2 xy \\ E_{(2),(0)}(x \otimes y) &= s_2 x s_0 y \\ E_{(2),(0)}(x \otimes y) &= s_2 x(s_1 y - s_2 y) \end{aligned}$$

elemanlarıyla üretilir. Şu halde I_3 'nin ∂_3 ile görüntüsü

$$\begin{aligned} \partial_3(E_{(1,0),(2)}(x \otimes y)) &= (s_1 s_0 d_1 x - s_0 x) y \in \text{çekd}_2 (\text{çekd}_0 \cap \text{çekd}_1) \\ \partial_3(E_{(2,0),(1)}(x \otimes y)) &= (s_0 x - s_1 x)(s_1 d_2 y - y) \in \text{çekd}_1 (\text{çekd}_0 \cap \text{çekd}_2) \\ \partial_3(E_{(2,0),(1)}(x \otimes y)) &= s_1 x(s_0 d_2 y - s_1 d_2 y + y) \in \text{çekd}_0 (\text{çekd}_1 \cap \text{çekd}_2) \\ \partial_3(E_{(1),(0)}(x \otimes y)) &= x(s_1 d_2 y - y) \in (\text{çekd}_0 \cap \text{çekd}_1)(\text{çekd}_0 \cap \text{çekd}_2) \\ \partial_3(E_{(2),(0)}(x \otimes y)) &= x s_0 d_2 y \in K_{\{0,1\}} K_{\{1,2\}} + K_{\{0,1\}} K_{\{0,2\}} \\ \partial_3(E_{(1),(0)}(x \otimes y)) &= s_1 d_2 x s_0 d_2 y - s_1 d_2 x s_1 d_2 y + xy \in K_{\{0,2\}} K_{\{1,2\}} + K_{\{0,1\}} K_{\{1,2\}} + K_{\{0,1\}} K_{\{0,2\}} \end{aligned}$$

$n = 4$ ise bu takdirde $I \cup J = [n-1]$ ile birlikte $\emptyset \neq I, J \subset [n-1] = \{0, 1, \dots, n-2\}$ ve

$$K_I = \bigcap_{i \in I} \text{çekd}_i \text{ ve } K_J = \bigcap_{i \in J} \text{çekd}_i$$

olmak üzere **SA** simplişil Steenrod cebirinin Moore kompleksinin görüntüsü

$$\partial_n(NSA_n) = \sum_{I, J} K_I K_J$$

şeklinde verilebilir.

2.2. SİMLİŞİL STEENROD CEBİRLERİNDEN 2- KROS MODÜLLER

Kros modül teknikleri bir homotopi tipi üzerinde bilgi edinmek için faydalı bir yol verir. Bunlar bir 2 – tipine karşılık gelir. Kros modüllerin benzeri olan değişmeli cebirler Porter tarafından [38]'de

verilmiştir. Bu fikri Steenrod cebirlerine aktaracağız. Bu çalışma boyunca $r \in R$ 'nin $c \in C$ üzerindeki etkisini $c \cdot r$ ile göstereceğiz.

Bir kros modül tüm $r \in R$ ve $c, c' \in C$ için $\partial(c \cdot r) = \partial(c) \cdot r$ ve $c' \partial(c) = cc'$ olacak şekilde R 'nin C üzerindeki etkisi ile birlikte bir $\partial: C \rightarrow R$ Steenrod Cebiri homomorfizmidir. İkinci bağıntı Peiffer özdeşliği olarak adlandırılır. Böylece bir kros modülü (C, R, ∂) ile göstereceğiz. (C, R, ∂) 'den (C', R', ∂') 'ye kros modüllerin bir morfizmi $\phi(c \cdot r) = \phi(c) \cdot \phi(r)$ olacak şekilde Steenrod Cebiri homomorfizmlerinin $\phi: C \rightarrow C', \phi: R \rightarrow R'$ çiftidir. Şu halde **SXMod** ile gösterilen değişmeli Steenrod Cebirlerinin kros modül yapısı tanımlanır.

Girişte hatırlattığımız gibi grupların 2 – kros modülü düşüncesi, bağlantılı 3 – tipleri için bir model olarak Conduché tarafından [18]'de tanıtıldı. Conduché 2 – kros modüllerin kategorisinin 2 uzunluğundaki Moore Kompleksli Simplişil grupların kategorisine denk olarak gösterdi. Grandjeán ve Vale, [25], 2 – kros modül düşüncesini değişmeli cebirler üzerinde verdi. Şimdi [25]'den Steenrod Cebirlerinde 2 – kros modülün tanımını tekrarlayalım:

k - cebirlerin bir 2 – kros modülü

$$\partial_2: C_2 \rightarrow C_1$$

Bir kros modül olacak şekilde C_0 kendi üzerinde çarpımla etki etmek üzere C_0 – cebirlerinin bir

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

kompleksinden ve C_0 – cebirlerinin ∂_2, ∂_1 morfizmlerinden oluşur. Şu halde C_1, C_2 üzerinde C_0 ile etki eder ve tüm $x \in C_2, y \in C_1, z \in C_0$ için $(xy)z = x(yz)$ olmasını istiyoruz. Üstelik tüm $x, x_1, x_2 \in C_2, y, y_0, y_1, y_2 \in C_1$ ve $z \in C_0$ için aşağıdaki aksiyomları sağlayan, Peiffer Lifting olarak adlandırılan

$$\{- \otimes -\}: C_1 \otimes_{C_0} C_1 \rightarrow C_2$$

olarak verilen verilen bir $\{, \}$ bilineer fonksiyonu vardır.

$$\mathbf{2CM1)} \quad \partial_2\{y_0 \otimes y_1\} = y_0 y_1 - y_0 \cdot \partial_1 y_1$$

$$\mathbf{2CM2)} \quad \{\partial_2(x_1) \otimes \partial_2(x_2)\} = x_1 x_2$$

$$\mathbf{2CM3)} \quad \{y_0 \otimes y_1 y_2\} = \{y_0 y_1 \otimes y_2\} + \{y_0 \otimes y_1\} \cdot \partial_1 y_2$$

$$\mathbf{2CM4)} \quad \mathbf{a)} \quad \{\partial_2 x \otimes y\} = x \cdot y - x \cdot \partial_1 y$$

$$\mathbf{b)} \quad \{y \otimes \partial_2 x\} = x \cdot y$$

$$\mathbf{2CM5)} \quad \{y_0 \otimes y_1\} \cdot z = \{y_0 \cdot z \otimes y_1\} = \{y_0 \otimes y_1 \cdot z\}$$

Steenrod Cebirlerinin bir 2 – kros modülünün bir morfizmi

$$f_0 \partial_1 = \partial_1' f_1, \quad f_1 \partial_2 = \partial_2' f_2$$

olacak şekilde ve

$$f_1(c_0 \cdot c_1) = f_0(c_0) \cdot f_1(c_1), \quad f_2(c_0 \cdot c_2) = f_0(c_0) \cdot f_2(c_2)$$

ve tüm $c_2 \in C_2, c_1 \in C_1, c_0 \in C_0$ için

$$\{\otimes\} f_1 \otimes f_1 = f_2 \{\otimes\}$$

olacak şekilde

$$\begin{array}{ccccc} C_2 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 \\ f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow \\ C'_2 & \xrightarrow{\partial'_2} & C'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & C'_0 \end{array}$$

diyagramıyla gösterilebilir. **SX₂Mod** ile değişmeli Steenrod cebirlerinin 2 – kros modül kategorisi gösterilir.

2.3. KROS KARELERDEN 2 - KROS MODÜLLER

Kros kareler başlangıç olarak Guin- Waléry ve Loday tarafından [26]'de tanıtıldı. Kros karelere benzer değişmeli cebirler Ellis tarafından çalışıldı.([22])

Şimdi (Ellis'e göre olan) Steenrod cebirlerinin bir kros karesinin tanımını hatırlatacağız. Bir kros kare R 'nin L, M ve N üzerindeki etkisi ile birlikte değişmeli bir

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \lambda' \downarrow & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\nu} & R \end{array}$$

diyagramıdır. Şu halde M 'nin L ve N üzerinde μ ile değişmeli etkileri ve bir h – dönüşümü olan bir

$$h : M \times N \rightarrow L$$

fonksiyonu vardır. Bu veri aşağıdaki aksiyomları sağlamalıdır:

tüm $l \in L, m, m' \in M$ ve $n, n' \in N, r \in R, k \in A$ için

1. $\lambda, \lambda', \mu, \nu$ ve $\mu\lambda = \nu\lambda'$ kros modüllerdir.
2. λ, λ' dönüşümleri R 'nin etkisini korur.
3. $kh(m, n) = h(km, n) = h(m, kn)$;
4. $h(m + m', n) = h(m, n) + h(m', n)$;
5. $h(m, n + n') = h(m, n) + h(m, n')$;
6. $r \cdot h(m, n) = h(r \cdot m, n) = h(m, r \cdot n)$;

7. $\lambda h(m, n) = m \cdot n$
8. $\lambda' h(m, n) = n \cdot m$
9. $h(m, \lambda' l) = m \cdot l$;
10. $h(\lambda l, n) = n \cdot l$.

Böyle bir kros kare (L, M, N, R) ile gösterilir.

Kros karelerin $\Phi : (L, M, N, R) \rightarrow (L', M', N', R')$ morfizmi $m \in M, n \in N$ ve Φ_L, Φ_M, Φ_N

Steenrod homomorfizmleri Φ_R – denk olmak üzere

$$\Phi_L h(m, n) = h(\Phi_M m, \Phi_N n)$$

değişmeli Steenrod homomorfizmlerin kübü olacak şekilde

$$\begin{aligned} \Phi_L : L &\rightarrow L' & \Phi_M : M &\rightarrow M' \\ \Phi_N : N &\rightarrow N' & \Phi_R : R &\rightarrow R' \end{aligned}$$

homomorfizmlerinden oluşur. Steenrod kros karelerin kategorisi $\mathbf{SCrs}^2$ ile gösterilecektir.

Conduché (Brown ile işbirliği içinde, (ayrıca yayınlanmış versiyonu olan [19]'e bakınız)) grupların bir kros karesinden bir 2 – kros modülün yapısını verir. Diğer taraftan [4]'de bir kros kareden cebirlerin bir 2 – kros modülünün düzgün bir tarifini verdi. [4]'de değişmeli cebirlerin bir kros karesinden bir 2 – kros modüldür.

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\nu} & R \end{array}$$

Conduché tarafından grup durumunda verilene benzer olarak ([19]) Steenrod cebirlerinde

$$L \xrightarrow{(-\lambda, \lambda')} M \rtimes N \xrightarrow{\mu + \nu} R$$

şeklinde inşa etti. Bu yapı kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Bir bisimplişil cebir elde etmek için her iki yönde nerve uygulayalım, daha sonra bir simplişil Steenrod cebiri elde etmek ve Moore kompleksi almak için diyagonali veya Artin-Mazur eşdiyagonal fanktörü ([2]) uygulayalım. Sonuç olarak [4, Önerme 5.1] de bu simplişil Steenrod cebirinin Moore kompleksinin koni kompleks dönüşümüne izomorfik olduğunu gösterdi, Loday'ın durumunda kros karenin ve bu kare dönüşümün cebirlerin 2 – kros modül yapısına sahip olduğunu gösterdi.

Yukarıda özetlenen yapının homotopi modüllerini koruduğuna dikkat edelim. Aslında Ellis [23]'de

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\lambda} & M \\
 \downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\
 N & \xrightarrow{\nu} & R
 \end{array}$$

kros karesinin homotopilerinin

$$L \xrightarrow{(-\lambda, \lambda')} M \rtimes N \xrightarrow{\mu + \nu} R \longrightarrow 0$$

kompleksinin homolojileri olduğunu ispatladı. Bu yapı ve ispat tarzı aynen Steenrod cebirlerinde de korundu.

2.4. SİMLİŞİL STEENROD CEBİRLERDEN STEENROD KROS KARELER

1991'de Porter simlişil grupların kategorisinden [24]'da Ellis ve Steiner tarafından tanımlanan, Loday'in düşüncesini temel alan ([28]) kros n -küplerine bir fanktör tanımladı. Değişmeli cebirler, Jordan cebirleri, Lie Cebirleri gibi cebirsel yapılardaki kros n -küpleri [22]'de Ellis tarafından tanımlandı. Ellis tarafından tanımlanan değişmeli cebirlerin kros n -küpleri düşüncesi şüphesiz önemlidir, bununla birlikte bu çalışmada sadece $n = 2$, yani kros kareler için olan durum kullanılır. Böylece bir kros n -kübün genel tanımını hatırlatmayız. [22]'den küçük boyutlarda bir kros 1-küp bir kros modül ile ve bir kros 2-küp bir kros kare ile aynıdır ve hatta 2-kros modüldür. Bu yapılar Steenrod cebirine aktarılır.

[4]'de, Arvasi değişmeli cebir durumu için Porter tarafından verilen fanktörün açık bir benzerini vermeye yönelik tarifini yeniden düzenledi. Bu çalışmada yeniden düzenlenen tanım Steenrod cebir yapısına transfer edildi.

Aslında aşağıdaki sonuç grup durumunda Porter tarafından verilene benzer olarak, Arvasi [4] tarafından verilen bir simlişil cebirden cebirlerin kros n -kübünün genel yapısının 2-boyutlu durumunun simlişil Steenrod cebir yapısındaki durumunu ifade eder.

SA bir simlişil Steenrod cebiri olsun. Bu takdirde aşağıdaki

$$\begin{array}{ccc}
 NSA_2 / \partial_3 NSA_2 & \xrightarrow{\partial_2} & NSA_1 \\
 \downarrow \partial'_2 & & \downarrow \mu \\
 \overline{NSA_1} & \xrightarrow{\mu'} & SA_1
 \end{array}$$

Diyagramı bir kros karede dikkate alınan karedir. Ekstra yapı aşağıdaki gibi verilir;

$NSA_1 = \text{çek}d_0^1$, $\overline{NSA_1} = \text{çek}d_1^1$. SA_1 $NSA_2 / \partial_3 NSA_3$, $\overline{NSA_1}$ ve NSA_1 üzerinde etki ettiğinden $\overline{NSA_1}$ 'in μ' ile $NSA_2 / \partial_3 NSA_3$ ve NSA_1 üzerinde etkileri vardır ve NSA_1, μ ile

$NSA_2 / \partial_3 NSA_3$ ve $\overline{NSA_1}$ üzerinde etki eder. μ ve μ' kapsamaları ve tüm etkiler çarpma ile verilir. h – dönüşümü

$$h : NSA_1 \times \overline{NSA_1} \rightarrow NSA_2 / \partial_3 NSA_3$$

$$(x, \bar{y}) \mapsto h(x, \bar{y}) = s_1 x (s_1 y - s_0 y) + \partial_3 NSA_3.$$

Burada NSA_1 ve $\overline{NSA_1}$ arasında bir doğal bijeksiyon x ve y NSA_1 'dedir. Bu açık olarak fonktördür ve bunu

$$\mathbf{M}(-, 2) : \mathbf{SimpSAlg} \rightarrow \mathbf{SCrs}^2$$

ile gösterilir.

BÖLÜM III:

SİMLİŞİL STEENROD CEBİRLERİNDEN KUADRATİK MODÜLLER

3.1. 2- KROS MODÜLLERDEN KUADRATİK MODÜLLER

Girişte bahsettiğimiz gibi, Baues bağlantılı 3–tiplerinin cebirsel bir modeli olarak grupların kuadratik modülünü tanımladı. Bu bölümde bu yapının değişmeli Steenrod cebiri versiyonu verilir ve 2–kros modüllerin kategorisinden bu Steenrod cebirlerinin kuadratik modüllerine bir fanktörü tanımlarız. Kuadratik modülün tanımını vermeden önce bazı temel bilgileri hatırlatacağız.

Bir yarı-kros modülün tüm $r \in R$ ve $c \in C$ için $\partial(c \cdot r) = \partial(c) \cdot r$ bağıntısını sağlayan $r \in R$ ve $c \in C$ için $c \cdot r$ olarak yazılan R 'nin C üzerindeki bir etkisi ile birlikte $\partial: C \rightarrow R$ homomorfizmi olduğunu hatırlatalım.

Bir C Steenrod cebiri için C/C^2 , C Steenrod cebirinin karelerin idealleri ile bölümüdür. Bu takdirde $\mathbf{k}$ –cebirlerinin kategorisinden $\mathbf{k}$ –modüllerinin kategorisine bir fanktör vardır. Bu fanktör C 'den C/C^2 'ye gider, $\mathbf{k}$ –cebirlerinin kategorisinde abelyenleştirme rolü oynar. Modüller sık sık singüler Steenrod cebirler olarak adlandırıldığından (örneğin singüler genişlemeler teorisinde) bu fanktörü "singülerizasyon" olarak adlandıracağız.

Şimdi bu düşünceleri yarı-kros modüllere genelleştirelim. $\partial: C \rightarrow R$ bir yarı-kros modüllere genelleştirelim. $\partial: C \rightarrow R$ bir yarı-kros modül ve $P_1(\partial) = C$ ve $P_2(\partial)$ $x, y \in C$ için Peiffer elemanları olarak adlandırılan

$$\langle x, y \rangle = xy - x \cdot \partial y$$

Şeklindeki elemanlar tarafından üretilen C 'nin Peiffer elemanı olsun.

Bir $\text{nil}(2)$ -modül ilave olarak 'nilpotence' bağıntısıyla birlikte bir $\partial: C \rightarrow R$ yarı-kros modülüdür. Bu bağıntı $P_3(\partial)$ 3 uzunluğundaki $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ Peiffer elemanları tarafından üretilen C 'nin ideali olmak üzere $P_3(\partial) = 0$.

$$[x] = x + P_2(\partial), [y] = y + P_2(\partial) \in C^{cr} \text{ için}$$

$$\begin{aligned}
\langle [x], [y] \rangle &= (x + P_2(\partial))(y + P_2(\partial)) - (x + P_2(\partial)) \cdot \partial^{cr}(y + P_2(\partial)) \\
&= (xy + P_2(\partial)) - (x + P_2(\partial)) \cdot \partial^{cr}(y + P_2(\partial)) \\
&= xy - x \cdot \partial(y) + P_2(y) \\
&= P_2(\partial) \quad (\because \langle x, y \rangle \in P_2(\partial)) \\
&= [0]
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\partial^{cr} : C^{cr} = C / P_2(\partial) \rightarrow R$$

homomorfizmi $\partial : C \rightarrow R$ yarı-kros modülüne birleştirilen kros modüldür.

Şimdi Steenrod cebirlerin kuadratik modül tanımını verebiliriz.

Tanım 3.1.1: Bir $(\omega, \delta, \partial)$ kuadratik modülü aşağıdaki aksiyomlar sağlanacak şekilde cebir homomorfizmlerinin değişmeli bir

$$\begin{array}{ccccc}
& & C \otimes C & & \\
& \swarrow \omega & \downarrow w & & \\
L & \xrightarrow{\delta} & M & \xrightarrow{\partial} & N
\end{array}$$

diyagramıdır:

QM1) $\partial : M \rightarrow N$ homomorfizması bir $nil(2)$ -modüldür ve $M \twoheadrightarrow C = M^{cr} / (M^{cr})^2$ bölüm dönüşümü, $[x] \in C$ $x \in M$ ile temsil edilen sınıfı göstermek üzere $x \mapsto [x]$ ile verilir. w dönüşümü Peiffer çarpımıyla tanımlıdır, yani

$$w([x] \otimes [y]) = xy - x \cdot \partial(y).$$

QM2) δ ve ∂ homomorfizmleri $\delta \partial = 0$ 'ı sağlar ve ω dönüşümü w 'nin bir liftingidir, yani $\delta \omega = w$ veya denk olarak $x, y \in M$ için $\delta \omega([x] \otimes [y]) = \omega([x] \otimes [y]) = xy - x \cdot \partial(y)$

QM3) L bir N - Steenrod cebiridir ve diyagramdaki tüm homomorfizmler N 'nin etkisine göre denktir. Üstelik N 'nin L üzerindeki etkisi $a \in L$ ve $x \in N$ için aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$a \cdot \partial(x) = \omega([\delta a] \otimes [x] + [x] \otimes [\delta a]).$$

Kuadratik modüller arasındaki bir $\varphi : (\omega, \delta, \partial) \rightarrow (\omega', \delta', \partial')$ dönüşümü l bir n -denk homomorfizm ve (m, n) $\varphi_* : C \rightarrow C'$ dönüşümünü doğuran yarı-kros modüller arasındaki bir dönüşüm olmak üzere, $\varphi = (l, m, n)$

$$\begin{array}{ccccccc}
C \otimes C & \xrightarrow{\omega} & L & \xrightarrow{\delta} & M & \longrightarrow & N \\
\downarrow \varphi_* \otimes \varphi_* & & \downarrow l & & \downarrow m & & \downarrow n \\
C' \otimes C' & \xrightarrow{\omega'} & L' & \xrightarrow{\delta'} & M' & \longrightarrow & N'
\end{array}$$

değişmeli diyagramıyla verilir. **SQM** Steenrod kuadratik modüllerin ve yukarıdaki diyagramdaki gibi dönüşümlerin kategorisi olsun.

Şimdi 2 – kros modüllerin kategorisinden kuadratik modüllerin kategorisine bir fanktör inşa edeceğiz.

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

Steenrod cebirlerinin bir 2 – kros modülü olsun. P_3 , $x, y, z \in C_1$ için

$$<< x, y >, z > = < x, y > z - < x, y > \cdot \partial_1 z$$

ve

$$< x, < y, z > > = x < y, z > - x \cdot \partial_1 < y, z >$$

şeklindeki elemanlar tarafından üretilen C_1 'in bir ideali olsun.

$$q_1 : C_1 \rightarrow C_1 / P_3$$

Bir bölüm dönüşümü ve $M = C_1 / P_3$ bölüm cebiri olsun. ∂_1 bir yarı-kros modül olduğundan

$x, y, z \in C_1$ için

$$\begin{aligned}
\partial_1(<< x, y >, z >) &= \partial_1(< x, y > z - < x, y > \cdot \partial_1 z) \\
&= \partial_1((xy - x \cdot \partial_1 y)z - (xy - x \cdot \partial_1 y) \cdot \partial_1 z) \\
&= \partial_1 x \partial_1 y \partial_1 z - \partial_1 x \partial_1 y \partial_1 z - \partial_1 x \partial_1 y \partial_1 z + \partial_1 x \partial_1 y \partial_1 z \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\partial_1(< x, < y, z > >) &= \partial_1(x < y, z > - x \cdot \partial_1 < y, z >) \\
&= \partial_1(x(yz - y \cdot \partial_1 z) - x \cdot \partial_1(yz - y \cdot \partial_1 z)) \\
&= \partial_1(x(yz - y \cdot \partial_1 z) - x \cdot (\partial_1 y \partial_1 z - \partial_1 y \partial_1 z)) \\
&= \partial_1(x(yz - y \cdot \partial_1 z)) \\
&= \partial_1 x \partial_1 y \partial_1 z - \partial_1 x \partial_1 y \partial_1 z \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde ederiz. Yani $\partial_1(P_3) = 0$. Şu halde tüm $x \in C_1$ için $\partial_3(x + P_3) = \partial_1(x)$ ile verilen

$\partial : M \rightarrow C_0$ dönüşümü $\partial_1(P_3) = 0$ olduğundan iyi tanımlı bir homomorfizmdir. Bundan dolayı

$q_1 : C_1 \rightarrow M$ bölüm dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{ccc}
 C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 \\
 q_1 \searrow & & \nearrow \partial \\
 & M &
 \end{array}$$

değişmeli diyagramını yazabiliriz. P'_3 , $\{-\otimes-\}$ Peiffer lifting dönüşümü olmak üzere

$$\{x \otimes \langle y, z \rangle\} \text{ ve } \{\langle x, y \rangle \otimes z\}$$

şeklindeki elemanlar tarafından üretilen C_2 'nin ideali olsun.

$$L = C_2 / P'_3$$

eşitliğine sahibiz. **2CM1)**'den

$$\partial_2 \{x \otimes \langle y, z \rangle\} = \langle x, \langle y, z \rangle \rangle$$

ve

$$\partial_2 \{\langle x, y \rangle \otimes z\} = \langle \langle x, y \rangle, z \rangle$$

yazabiliriz ve şu halde $\partial_2(P'_3) = P_3$ elde ederiz. Bu takdirde $\delta(l + P'_3) = \partial_2 l + P_3$ ile verilen $\delta: L \rightarrow M$ iyi tanımlı bir homomorfizmdir. Gerçekten $l + P'_3 = l' + P'_3$ ise bu takdirde $l - l' \in P'_3$, ve $\partial_2(l - l') \in \partial_2(P'_3)$. $\partial_2(P'_3) = P_3$ olduğundan, $\partial_2(l) - \partial_2(l') \in P_3$, yani, $\partial_2 l + P_3 = \partial_2 l' + P_3$.

$$C = \frac{M^{cr}}{(M^{cr})^2}$$

olsun. Şu halde q_1 ve q_2 bölüm dönüşümleri olmak üzere aşağıdaki değişmeli diyagramı elde ederiz.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C \otimes C & & \\
 & \swarrow \omega & \downarrow w & & \\
 L & \xrightarrow{\delta} & M & \xrightarrow{\partial} & N \\
 \uparrow q_2 & & \uparrow q_1 & & \parallel \\
 C_2 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0
 \end{array}$$

$\omega: C \otimes C \rightarrow L$ kuadratik dönüşümü Peiffer lifting dönüşümüyle verilir, yani tüm $x, y \in C_1$, $q_1 x, q_1 y \in M[q_1 x] \otimes [q_1 y] \in C \otimes C$ ve $[q_1 x] \otimes [q_1 y] \in C \otimes C$ için

$$\omega([q_1 x] \otimes [q_1 y]) \in q_2 \{x \otimes y\}.$$

Önerme 3.1.2:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C \otimes C & & \\
 & \swarrow \omega & \downarrow w & & \\
 L & \xrightarrow{\delta} & M & \xrightarrow{\partial} & N
 \end{array}$$

diagramı Steenrod cebirlerinin bir kuadratik modüldür.

İspat: Tüm kuadratik modül aksiyomlarının sağlandığını göstereceğiz.

QM1), $M = C_1 / P_3$ 'deki üçlü Peiffer elemanları aşikar olduğundan $\partial : M \rightarrow N$ bir nil(2) – modüldür. Gerçekten $x + P_3, y + P_3, z + P_3 \in M$ için,

$$\begin{aligned}
 \langle x + P_3, \langle y + P_3, z + P_3 \rangle \rangle &= \langle x, \langle y, z \rangle \rangle + P_3 \\
 &= 0 + P_3 \quad (\langle x, \langle y, z \rangle \rangle \in P_3 \text{ olmasından}) \\
 &= P_3
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \langle \langle x + P_3, y + P_3 \rangle, z + P_3 \rangle &= \langle \langle x, y \rangle, z \rangle + P_3 \\
 &= 0 + P_3 \quad (\langle \langle x, y \rangle, z \rangle \in P_3 \text{ olmasından}) \\
 &= P_3.
 \end{aligned}$$

QM2) $q_1 x, q_1 y \in M$ ve $[q_1 x] \otimes [q_1 y] \in C \otimes C$ için

$$\begin{aligned}
 \delta \omega([q_1 x] \otimes [q_1 y]) &= \delta q_2 \{x \otimes y\} \\
 &= q_1 \partial \{x \otimes y\} \\
 &= q_1 x q_1 y - q_1 x \cdot \partial(q_1 y) \quad (\text{2CM1'den}) \\
 &= w([q_1 x] \otimes [q_1 y])
 \end{aligned}$$

eşitliğine sahibiz.

QM3) $q_2 a \in L, q_1 x \in M$ ve $[\delta q_2 a] \otimes [q_1 x] \in C \otimes C$ için

$$\begin{aligned}
 \omega([\delta q_2 a] \otimes [q_1 x]) &= \omega([q_1 \partial_2 a] \otimes [q_1 x]) \\
 &= q_2 \{\partial_2 a \otimes x\} \\
 &= -q_2 a \cdot x + q_2 a \cdot \partial q_1(x) \quad (\text{2CM4'den})
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \omega([q_1 x] \otimes [\delta q_2 a]) &= \omega([q_1 x] \otimes [q_1 \partial_2 a]) \\
 &= q_2 \{x \otimes \partial_2 a\} \\
 &= q_2 a \cdot x \quad (\text{2CM4'den})
 \end{aligned}$$

eşitliklerine sahibiz. Bu takdirde

$$\omega([\delta q_2 a] \otimes [q_1 x] + [q_1 x] \otimes [\delta q_2 a]) = q_2 a \cdot \partial q_1 x$$

eşitliğine sahip oluruz.

QM4) $q_2a, q_2b \in L$ ve $[\delta q_2a] \otimes [\delta q_2b] \in C \otimes C$ için

$$\begin{aligned}\omega([\delta q_2a] \otimes [\delta q_2b]) &= \omega([q_1\partial_2a] \otimes [q_1\partial_2b]) \\ &= q_2\{\partial_2a \otimes \partial_2b\} \\ &= (q_2a)(q_2b) \quad (\mathbf{2CM2})\text{'den}\end{aligned}$$

eşitliğine sahibiz.

Bundan dolayı Steenrod 2 – kros modüllerin kategorisinden Steenrod cebirlerinin kuadratik modüllerine bir fanktör tanımlamış olduk. Bunu

$$\Lambda : \mathbf{SX}_2\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{SQM}$$

ile gösteririz.

Şimdi yukarıda tarif edilen Λ fanktörünün homotopi modüllerini koruduğunu göstereceğiz.

Önerme 3.1.3:

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

2 – kros modül ve tüm $i \geq 0$ için π_i bunun homotopi modülleri olsun. π_i' bunun

$$\begin{array}{ccccc} & & C \otimes C & & \\ & \swarrow \omega & \downarrow w & & \\ L & \xrightarrow{\delta} & M & \xrightarrow{\partial} & N \end{array}$$

kuadratik modülünü gösteren homotopi modülleri olsun. Bu takdirde tüm $i \geq 0$ için $\pi_i \cong \pi_i'$.

İspat: 2 – kros modülün homotopi modülleri

$$\pi_i = \begin{cases} C_0 / \partial_1(C_1) & i = 1 \\ \text{çek} \partial_1 / \text{gör} \partial_2 & i = 2 \\ \text{çek} \partial_2 & i = 3 \\ 0 & i = 0, i > 3 \end{cases}$$

ve bunun birleştirilmiş kuadratik modülünün homotopi modülleri

$$\pi_i' = \begin{cases} N / \partial(M) & i = 1 \\ \text{çek} \partial / \text{gör} \delta & i = 2 \\ \text{çek} \delta & i = 3 \\ 0 & i = 0, i > 3. \end{cases}$$

Şimdi tüm $i \geq 0$ için $\pi_i \cong \pi_i'$ olduğunu göstereceğiz. $\partial_1(P_3) = 0, M = C_1 / P_3, N = C_0$ ve

$\partial(M) \cong \partial_1(C_1)$ olduğundan, açık olarak

$$\pi_1 = C_0 / \partial_1(C_1) \cong N / \partial(M) = \pi_1'$$

eşitliğine sahibiz. $\text{çek}\partial \cong \frac{\text{çek}\partial_1}{P_3}$ ve $\text{gör}\delta \cong \frac{\text{gör}\partial_2}{P_3}$ olduğundan böylece

$$\pi_2' = \frac{\text{çek}\partial}{\text{gör}\delta} \cong \frac{\text{çek}\partial_1 / P_3}{\text{gör}\partial_2 / P_3} \cong \frac{\text{çek}\partial_1}{\text{gör}\partial_2} = \pi_2$$

eşitliğine sahibiz. Şimdi, $\pi_3 \cong \pi_3'$ olduğunu göstereceğiz.

$$\pi_3' = \{x + P_3' : \partial_2(x) \in P_3\}$$

eşitliğini göz önüne alalım. π_3' 'nin bir $x + P_3'$ elemanı için $x + P_3' = x' + P_3'$ ve $x' \in \text{çek}\partial_2$ olacak şekilde bir π_3' 'nin bir $x' + P_3'$ elemanı olduğunu göstereceğiz. Aslında **2CM1**'den $\partial_2\{<x, y> \otimes z\} = <<x, y>, z>$ ve $\partial_2\{x \otimes <y, z>\} = <x, <y, z>>$ olduğunu elde ederiz ve $\partial_2(P_3') = P_3$ eşitliğine sahibiz. Böylece $\partial_2(x) \in P_3$ olması $\partial_2(x) = \partial_2(w)$, $w \in P_3'$ olmasını gerektirir; Şu halde $\partial_2(x - w) = 0$; bu takdirde $x' = x - w$ alalım, böylece $x + P_3' = x' + P_3'$ ve $\partial_2(x') = 0$. $\mu : \pi_3' \rightarrow \pi_3$ dönüşümünü $x' + P_3' \mapsto x'$ ile ve $\nu : \pi_3 \rightarrow \pi_3'$ dönüşümünü $x \mapsto x + P_3$ ile tanımlayalım. Bu takdirde μ ve ν ters bijeksiyonlardır, yani $\pi_3 \cong \pi_3'$ 'e sahibiz. Şu halde 2-kros modülün homotopi modülleri kendisinin birleştirilmiş kuadratik modülüne izomorfiktir.

Tanım 3.1.4. Bir N kuadratik kompleksi d_2 bir kuadratik modül olmak üzere N_1 Steenrod cebirleri ve N_n , $n \geq 3$ abelyen ve $\pi_1 = \text{eşçek}(d_2)$ iken N_1 'in etkisiyle bir π_1 modülü arasındaki

$$\cdots \xrightarrow{d_4} N_3 \xrightarrow{d_3} N_2 \xrightarrow{d_2} N_1$$

homomorfizmalarının bir dizisidir. Üstelik $n \geq 3$ için $d_{n-1}d_n = 0$. Bir $f : N \rightarrow N'$ morfizmi f_1 -denklerini d_n ile değiştiren $f_n : N_n \rightarrow N'_n$ homomorfizmalarının bir dizisidir. $\pi_n(N) = \text{çek}(d_n) / \text{gör}(d_{n+1})$, N 'nin homolojisi olsun. Bu taktirde tüm n 'ler için $\pi_n(f)$ bir izomorfizm ise f bir zayıf denkliktir.

3.2. SİMLİŞİL STEENROD CEBİRLERİNDE KUADRATİK MODÜLLERİN İNŞASI

Baues, [12], simlişil gruplardan kuadratik modüllere bir fanktör tanımladı. Bu fanktörün inşasında ω kuadratik dönüşümünü tanımlamak için, Baues [12]'de verilene benzer olarak hiperkros kompleks çiftleri cinsinden simlişil Steenrod cebirlerinin kategorisinden kuadratik modüllerin kategorisine bir fanktör inşa edilir. Bu yapıda ω kuadratik dönüşümünü tanımlamak

için [6, Önerme 5.2] de Arvasi ve Porter tarafından verilen Peiffer lifting dönüşümünü kullanacağız.

Şimdi simplişil Steenrod cebirlerinden kuadratik modüllere bir fanktörü $E_{\alpha,\beta}$ fonksiyonlarını kullanarak inşa edeceğiz. $E_{\alpha,\beta}$ fonksiyonlarını kuadratik modül aksiyomlarının sağlanmasında kullanılır.

SA, **NSA** Moore kompleksi ile birlikte bir simplişil Steenrod cebiri olsun. $x, y \in NSA_1$ için w dönüşümü

$$w(x, y) = xy - x \cdot \partial_1 y$$

ile ve $x, y \in NSA_1$ için ω' dönüşümü

$$\omega'(x, y) = \overline{s_1 x(s_1 y - s_0 y)} = s_1 x(s_1 y - s_0 y) + \partial_3(NSA_3)$$

ile verilmek üzere aşağıdaki

$$\begin{array}{ccccc} & & NSA_1 \times NSA_2 & & \\ & \swarrow \omega' & \downarrow w & \searrow & \\ NSA_2 / \partial_3(NSA_3) & \xrightarrow{\bar{\partial}_2} & NSA_1 & \xrightarrow{\partial_1} & NSA_0 \end{array}$$

değişmeli diyagramı kullanarak bir kuadratik modül elde edeceğiz.

$P_3(\partial_1)$, $x, y, z \in NSA_1$ için

$$\langle x, \langle y, z \rangle \rangle \text{ ve } \langle \langle x, y \rangle, z \rangle$$

Şeklindeki elemanlar tarafından üretilen NSA_1 'in ideali olsun. ∂_1 bir yarı-kros modül olduğundan, $\partial_1(P_3(\partial_1)) = 0$ yazabiliriz. Bu takdirde $x \in NSA_1$ için $\partial(x + P_3(\partial_1)) = \partial_1 x$ ile verilen $\partial : NSA_1 / P_3(\partial_1) \rightarrow NSA_0$ iyi tanımlı bir homomorfizmdir. Şu halde q_1 bölüm dönüşümü olmak üzere aşağıdaki değişmeli diyagramı elde ederiz.

$$\begin{array}{ccc} NSA_1 & \xrightarrow{\partial_1} & NSA_0 \\ & \searrow q_1 & \nearrow \partial \\ & NSA_1 / P_3(\partial_1) & \end{array}$$

$P'_3(\partial_1)$, x, y, z Peiffer elemanlarıyla yani $x, y, z \in NSA_1$ için

$$\omega'(\langle x, y \rangle, z) = s_1(\langle x, y \rangle)(s_1 z - s_0 z)$$

ve

$$\omega'(x, \langle y, z \rangle) = s_1(x)(s_1(\langle y, z \rangle) - s_0(\langle y, z \rangle))$$

şeklindeki elemanlarla üretilen $NSA_2 / \partial_3(NSA_3)$ 'ün bir ideali olsun.

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_2 \omega'(x, \langle y, z \rangle) &= d_2(s_1(x)(s_1(\langle y, z \rangle) - s_0(\langle y, z \rangle))) \\ &= x(\langle y, z \rangle) - xs_0 d_1(\langle y, z \rangle) \\ &= \langle x, \langle y, z \rangle \rangle\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_2 \omega'(\langle x, y \rangle, z) &= d_2(s_1(\langle x, y \rangle)(s_1(z) - s_0(z))) \\ &= \langle x, y \rangle (z - s_0 d_1 z) \\ &= \langle \langle x, y \rangle, z \rangle\end{aligned}$$

olduğuna dikkat edelim. $\bar{\partial}_2(P'_3(\partial_1)) = P_3(\partial_1)$ 'i elde ederiz.

$$M = NSA_1 / P_3(\partial_1)$$

ve

$$L = (NSA_2 / \partial_3(NSA_3)) / P'_3(\partial_1)$$

Steenrod bölüm cebirleri olsun. Şu halde $\bar{\partial}_2(P'_3(\partial_1)) = P_3(\partial_1)$ olduğundan

$\delta(a + P'_3(\partial_1)) = \bar{\partial}_2(a) + P_3(\partial_1)$ ile verilen

$$\delta : (NSA_2 / \partial_3 NSA_3) / P'_3(\partial_1) \rightarrow NSA_1 / P_3(\partial_1)$$

dönüşümünün iyi tanımlı bir homomorfizm olduğunu görürüz. $C = M^{cr} / (M^{cr})^2$ ve q_1, q_2

bölüm dönüşümleri ve ω kuadratik dönüşümü $q_1 x, q_1 y \in M$ için

$$\omega([q_1 x] \otimes [q_2 y]) = q_2 \omega'(x, y) = q_2 (s_1 x (s_1 y - s_0 y) + \partial_3(NSA_3))$$

ile verilebilmek ve $[q_1 x] \otimes [q_2 y] \in C \otimes C$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc} & & C \otimes C & & \\ & \swarrow \omega & \downarrow w & & \\ L & \xrightarrow{\delta} & M & \xrightarrow{\partial} & N \\ \uparrow q_2 & & \uparrow q_1 & & \parallel \\ NSA_2 / \partial_3(NSA_3) & \xrightarrow{\bar{\partial}_2} & NSA_1 & \xrightarrow{\partial_1} & NSA_0 \end{array}$$

Değişmeli diyagramını elde ederiz.

Önerme 3.2.1:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C \otimes C & & \\
 & \swarrow \omega & \downarrow w & & \\
 L & \xrightarrow{\delta} & M & \xrightarrow{\partial} & N
 \end{array}$$

diagramı Steenrod cebirlerinin bir kuadratik modülüdür.

İspat: $E_{\alpha\beta}$ fonksiyonlarını kullanarak kuadratik modül aksiyomlarının sağlandığını göstereceğiz. Uyumu sağlamak açısından hesaplamamızdaki üst çizgileri ihmal eden elemanları göz önüne alacağız.

QM1) Açık olarak $\partial : M \rightarrow N$ bir $\text{nil}(2) - \text{modül}$ dür. Çünkü

$x + P_3(\partial_1), y + P_3(\partial_1), z + P_3(\partial_1) \in M = NSA_1 / P_3(\partial_1)$ için

$$\begin{aligned}
 \langle x + P_3(\partial_1), \langle y + P_3(\partial_1), z + P_3(\partial_1) \rangle \rangle &= \langle x, \langle y, z \rangle + P_3(\partial_1) \rangle \\
 &= 0 + P_3(\partial_1) \quad (\langle x, \langle y, z \rangle \rangle \in P_3(\partial_1) \text{'den}) \\
 &= P_3(\partial_1)
 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
 \langle \langle x + P_3(\partial_1), y + P_3(\partial_1) \rangle, z + P_3(\partial_1) \rangle &= \langle \langle x, y \rangle, z \rangle + P_3(\partial_1) \\
 &= 0 + P_3(\partial_1) \quad (\langle x, \langle y, z \rangle \rangle \in P_3(\partial_1) \text{ olduğundan}) \\
 &= P_3(\partial_1).
 \end{aligned}$$

QM2) $x, y \in NSA_1$, $q_1 x, q_1 y \in M$ ve $[q_1 x] \otimes [q_1 y] \in C \otimes C$ için

$$\begin{aligned}
 \delta \omega([q_1 x] \otimes [q_1 y]) &= \delta q_2(s_1(x)(s_1 y - s_0 y)) \\
 &= q_1(d_2(s_1(x)(s_1 y - s_0 y))) \quad (\delta q_2 = q_1 \bar{\partial}_2 \text{ olduğundan}) \\
 &= q_1(x)q_1(y) - q_1(x) \cdot \bar{\partial}_1(q_1(y)) \quad (\partial q_1 = d_1 \text{ olduğundan}) \\
 &= w([q_1 x] \otimes [q_1 y]).
 \end{aligned}$$

QM3) $q_2 a \in L$ ve $q_1 x \in M$ için

$$\omega([\delta q_2 a] \otimes [q_1 x]) = \omega([q_1 \bar{\partial}_2 a] \otimes [q_1 x])$$

ve

$$\omega([q_1 \bar{\partial}_2 a] \otimes [q_1 x]) = q_2(s_1 d_2 a(s_1 x - s_0 x))$$

eşitliklerine sahibiz. Diğer taraftan

$$\partial_3(E_{(2,0)(1)}(x \otimes a)) = (s_0 x - s_1 x)s_1 d_2 a - (s_0 x - s_1 x)a \in \partial_3(NSA_1)$$

olmasından

$$\begin{aligned}\omega([q_1 \bar{\partial}_2 a] \otimes [q_1 x]) &= s_0 d_1 x(q_2 a) - s_1 x(q_2 a) \mod(\partial_3(NSA_3)) \\ &= (q_2 a) \cdot \bar{\partial}_1 q_1 x - x \cdot (q_2 a) \quad (\bar{\partial}_1 q_1 = d_1 \text{ olduğundan})\end{aligned}$$

eşitliklerine sahibiz. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\omega([q_1 x] \otimes [\delta q_2 a]) &= \omega([q_1 x] \otimes [q_1 \bar{\partial}_2 a]) \\ &= q_2(s_1 x(s_1 d_2 a - s_0 d_2 a))\end{aligned}$$

eşitliklerine sahibiz.

$$\partial_3(E_{(2,0)(1)}(x \otimes a)) = s_1 x(s_0 d_2 a - s_1 d_2 a) + s_1 x a \in \partial_3(NSA_3)$$

olmasından

$$\omega([q_1 x] \otimes [q_1 \bar{\partial}_2 a]) \equiv x \cdot (q_2 a) \mod(\partial_3(NSA_3))$$

yazabiliriz. Bundan dolayı

$$\omega([\delta q_2 a] \otimes [q_1 x] + [q_1 x] \otimes [\delta q_2 a]) = (q_2 a) \cdot \partial(q_1 x).$$

QM4) $q_2 a, q_2 b \in L$ için

$$\omega([\delta q_2 a] \otimes [\delta q_2 b]) = q_2(s_1 d_2 a(s_1 d_2 b - s_0 d_2 b))$$

yazabiliriz.

$$\partial_3(E_{(1)(0)}(a \otimes b)) = s_1 d_1 a(s_0 d_2 b - s_1 d_2 b) + ab \in (NSA_3)$$

olmasından

$$\omega([q_1 \bar{\partial}_2 a] \otimes [q_1 \bar{\partial}_2 b]) \equiv q_2(a)q_2(b) \mod(\partial_3(NSA_3))$$

elde ederiz. ■

Böylece simplişil Steenrod cebirlerinin kategorisinden Steenrod cebirlerinin kuadratik modülüne bir fanktör tanımlamış olduk. Bunu

$$\Delta : \text{SimpSA} \rightarrow \text{SQM}$$

ile gösteririz.

Farklı olarak bu önerme Arvasi ve Porter ([6]) tarafından simplişil bir cebirden oluşturulan 2 – kros modülün kullanımıyla değişik biçimde yeniden ispatlanabilir. Şimdi tartışmanın kısa bir bölümünü vereceğiz. [6, Önerme 5.2] de verilen bir **SA** simplişil Steenrod cebiri için $x, y \in NSA_1$ için $\{x \otimes y\} = s_1 x(s_1 y - s_0 y) + \partial_3(NSA_3 \cap D_3)$ olmak üzere bir 2 – kros modülün

$$NSA_2 / \partial_3(NSA_3 \cap D_3) \xrightarrow{\bar{\partial}_2} NSA_1 \xrightarrow{\partial_1} NSA_0 \quad (1)$$

inşa edilebileceği gösterildi. Açık olarak

$$\begin{array}{ccccc} NSA_2 / \partial_3(NSA_3 \cap D_3) & \xrightarrow{\bar{\partial}_2} & NSA_1 & \xrightarrow{\partial_1} & NSA_0 \\ \downarrow j & & \parallel & & \parallel \\ NSA_2 / \partial_3(NSA_3) & \longrightarrow & NSA_1 & \xrightarrow{\partial_1} & NSA_0 \end{array}$$

değişmeli diyagramına sahip oluruz. Bu çalışmada (3.1'de) olduğu gibi (1) 2 – kros modülüne birleştirilen kuadratik modülü göz önüne alalım.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C \otimes C & & \\
 & \swarrow \omega' & \downarrow & & \\
 L' & \xrightarrow{\delta'} & M & \longrightarrow & N \\
 \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
 \frac{NSA_2}{\partial_3(NSA_3 \cap D_3)} & \xrightarrow{\partial_2} & NSA_1 & \xrightarrow{\partial_1} & NSA_0
 \end{array}$$

Bu takdirde A , NSA_2 'nin

$$s_1(< x, y >)(s_1 z - s_0 z) \text{ ve } s_1(x)(s_1(< y, z >)) - s_0(< y, z >)$$

Şeklindeki elemanlar tarafından üretilen ideali olmak üzere $L' = A / \partial_3(NSA_3 \cap D_3)$ olduğu görülebilir. Diğer taraftan 3.1'den $L = A / \partial_3(NSA_3)$ 'e sahibiz. Böylece

$$\omega = i\omega', \quad \delta' = \delta i \quad (2)$$

olmak üzere bir $i : L' \rightarrow L$ dönüşümü vardır.

$$C \otimes C \xrightarrow{\omega'} L' \xrightarrow{\delta'} M \xrightarrow{\partial} N$$

yapı ile bir kuadratik modül olduğundan (2)'yi kullanarak

$$C \otimes C \xrightarrow{\omega} L \xrightarrow{\delta} M \xrightarrow{\partial} N$$

kısa tam dizinin de ayrıca bir kuadratik modül olduğunu kontrol etmek uygundur.

Şimdi yukarıda tarif edilen Δ funktörünün homotopi modüllerini koruduğunu göstereceğiz.

Önerme 3.2.2: SA bir simplişil Steenrod cebiri olsun, $\pi_i SA$ 'nın sınıflandırılmış uzayların sınıflandırılmış uzayının homotopi modülleri olsun, ve π'_i , bunun birleştirilmiş kuadratik modülünün homotopi modülü olsun; bu takdirde $i = 0, 1, 2, 3$ için $\pi_i \cong \pi'_i$.

İspat: SA bir simplişil Steenrod cebiri olsun. SA 'nın n .homotopi modülü SA 'nın Moore kompleksinin n .homolojisine izomorfiktir, yani $\pi_n(SA) \cong H_n(NSA)$. Şu halde SA 'nın $\pi_n(SA) = \pi_n$ homotopi modülleri

$$\pi_n = \begin{cases} NSA_0 / d_1(NSA_1) & n = 1 \\ \frac{\text{çek}d_1 \cap NSA_1}{d_3(NSA_2)} & n = 2 \\ \frac{\text{çek}d_2 \cap NSA_2}{d_3(NSA_3)} & n = 3 \\ 0 & n = 0 \text{ veya } n > 3 \end{cases}$$

ve bunun birleştirilmiş kuadratik modülünün π'_n homotopi modülleri

$$\pi'_n = \begin{cases} NSA_0 / \partial(M) & n = 1, \\ \text{çek}\partial / \text{çek}\delta & n = 2, \\ \text{çek}\delta & n = 3, \\ 0 & n = 0 \text{ veya } n > 3. \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, 3$ için $\pi'_n \cong \pi_n$ olduğunu iddia ediyoruz. $M = NSA_1 / P_3(\partial_1)$ ve $\partial_1(P_3(\partial_1)) = 0$ olduğundan

$$\partial(M) = \partial(NSA_1 / P_3(\partial_1)) = d_1(NSA_1)$$

eşitliğine sahibiz ve bu takdirde

$$\pi'_1 = NSA_0 / \partial(M) \cong NSA_0 / d_1(NSA_1) = \pi_1.$$

Ayrıca $\text{çek}\partial = \frac{\text{çek}d_1 \cap NSA_1}{P_3(\partial_1)}$ ve $\text{Gör}\delta = d_2(NSA_2) / P_3(\partial_1)$. Böylece

$$\pi'_2 = \frac{\text{çek}\partial}{\text{çek}\delta} = \frac{(\text{çek}d_1 \cap NSA_1) / P_3(\partial_1)}{d_2(NSA_2) / P_3(\partial_1)} \cong \frac{\text{çek}d_1 \cap NSA_1}{d_2(NSA_2)} = \pi_2$$

eşitliklerine sahibiz. π'_3 ve π_3 arasındaki izomorfizm Önerme 3.1.3'ün ispatına benzer bir şekilde ispatlanabilir.

Uyarı: Bir önceki bölümde 2 – kros modüllerin kategorisinden kuadratik modüllerin kategorisine Λ fanktörü tanımladığımızı not edelim. 2.2 ve yukarıda hatırlatıldığı gibi Arvasi ve Porter, [6], 2 uzunluğundaki Moore kompleksli simplişil cebirler ve cebirlerin 2 – kros modülleri arasında bir fanktör inşa etti. Bu ifadeleri aşağıdaki diyagramda özetleyebiliriz.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SX}_2\mathbf{Mod} & \longleftrightarrow & \mathbf{SimpSAlg}_{\leq 2} \\ & \searrow \Lambda \quad \swarrow \Delta & \\ & \mathbf{SQM} & \end{array}$$

3.3. KROS KARELERDEN KUADRATİK MODÜLLER

Bu bölümde Steenrod cebir yapısında kros karelerden cebirlerin kuadratik modüllerine bir fanktör tanımlayacağız. Yapımız kısaca aşağıdaki gibi açıklanabilir:

Steenrod cebirlerin verilen bir kros karesi için, 2.2'den birleştirilmiş 2 – kros modülü göz önüne alalım ([4]) ve bu takdirde 3.1'deki gibi bu 2 – kros modüle karşılık gelen 2 – kros modülü inşa ederiz. Diğer bir ifadeyle sadece iki fanktörü birleştiriyoruz. Özel olarak her bir adımda korunduğu gibi homotopi tipi açık olarak korunur.

Şimdi 3. Bölümde bahsettiğimiz gibi Conduché tarafından grup durumunda verilene benzer olarak ([19])

$$L \xrightarrow{(-\lambda, \lambda')} M \rtimes N \xrightarrow{\mu + \nu} R \quad (3)$$

şeklinde değişmeli cebirlerin bir

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \lambda' \downarrow & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\nu} & R \end{array}$$

kros karesinden bir 2 – kros modül inşa ettiğini tekrarlayalım.

Şimdi

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \lambda' \downarrow & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\nu} & R \end{array}$$

Steenrod cebirlerinin bir kros karesi olsun. Bunun birleştirilmiş 2 – kros modül (3)'ü göz önüne alalım. Bu 2 – kros modülden $N = R, M' = (M \rtimes N) / P_3, L' = L / P'_3, C = (M')^{cr} / ((M')^{cr})^2$ olmak üzere 3.1'deki gibi bir

$$\begin{array}{ccccc} & & C \otimes C & & \\ & \swarrow \omega & \downarrow w & & \\ L & \xrightarrow{\delta} & M' & \xrightarrow{\partial} & N \end{array}$$

kuadratik modülü inşa edilebilir.

$M \rtimes N$ 'deki Peiffer elemanları

$$\begin{aligned}
\langle (m, n), (c, a) \rangle &= (m, n)(c, a) - (m, n) \cdot (\mu(c) + \nu(a)) \\
&= (mc + m \cdot \nu(a) + c \cdot \nu(n), na) \\
&\quad - (m \cdot \mu(c) + m \cdot \nu(a), n \cdot \mu(c) + n \cdot \nu(a)) \\
&= (c \cdot \nu(n), -n \cdot \mu(c))
\end{aligned}$$

ile verilir. 3.1'den $M \rtimes N$ 'nin P_3 idealinin $(m, n), (c, a), (m', n') \in M \rtimes N$ için

$$\langle \langle (m, n), (c, a) \rangle, (m', n') \rangle = (-m' \cdot \nu(n \cdot \mu(c)), \mu(m') \cdot (n \cdot \mu(c)))$$

ve

$$\langle (m, n), \langle (c, a), (m', n') \rangle \rangle = ((m' \cdot \nu(a)) \cdot \nu(n), -n \cdot \mu(m' \cdot \nu(a)))$$

şeklindeki elemanlar tarafından üretilir. Şu halde $(\mu + \nu)(P_3) = 0$ eşitliğine ve

$\partial((m, n) + P_3) = \mu(m) + \nu(n)$ ile verilen $\partial : (M \rtimes N) / P_3 \rightarrow R$ dönüşümü elde edilir.

Ayrıca L 'nin P'_3 idealinin tüm $m', c \in M$ ve $n, a \in N$ için

$$h(m', -n \cdot \mu(c)) \text{ ve } h(m' \cdot \nu(a), n)$$

şeklindeki elemanlar tarafından üretilir. Kros kare aksiyomlarından

$$\begin{aligned}
(-\lambda, \lambda')(h(m', -n \cdot \mu(c))) &= (-m' \cdot \nu(n \cdot \mu(c)), \mu(m') \cdot (n \cdot \mu(c))) \\
&= \langle \langle (m, n), (c, a) \rangle, (m', n') \rangle
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(-\lambda, \lambda')(h(m' \cdot \nu(a), n)) &= ((m' \cdot \nu(a)) \cdot \nu(n), -n \cdot \mu(m' \cdot \nu(a))) \\
&= \langle (m, n), \langle (c, a), (m', n') \rangle \rangle
\end{aligned}$$

Eşitlikleri bulunur. Şu halde $\delta : L' \rightarrow M'$ dönüşümü tüm $l \in L$ 'ler için $\delta(l + P'_3) = (-\lambda l, \lambda' l) + P'_3$ ile verilir.

$$\omega : C \otimes C \rightarrow L'$$

kuadratik dönüşümü tüm $(m, n), (c, a) \in M \rtimes N$ $q_1(m, n), q_1(c, a) \in M'$ ve

$[q_1(m, n)] \otimes [q_1(c, a)] \in C \otimes C$ için ve h kros karenin h - dönüşümü olmak üzere

$$\omega([q_1(m, n)] \otimes [q_1(c, a)]) = q_2(h(c, na))$$

ile verilebilir.

Önerme 3.3.1:

$$\begin{array}{ccccc}
& & C \otimes C & & \\
& \swarrow \omega & \downarrow w & & \\
L & \xrightarrow{\delta} & M' & \xrightarrow{\partial} & N
\end{array}$$

diyagramı Steenrod cebirlerinin bir kuadratik modülüdür.

İspat: Tüm kuadratik modül aksiyomlarının sağlandığı gösterilir.

QM1) Açık olarak $\partial : M' \rightarrow N$, M' 'deki üçlü Peiffer elemanları aşikar olduğundan bir nil(2) – modüldür. Bu 3.1.2'nin ispatına benzer bir şekilde ispatlanabilir.

QM2) $q_1(m, n)$ ve $q_1(c, a) \in M'$ ve $[q_1(m, n)], [q_1(c, a)] \in C$ için

$$\begin{aligned}\delta\omega([q_1(m, n)] \otimes [q_1(c, a)]) &= (-\lambda, \lambda')q_2(h(c, na)) \\ &= q_1(-\lambda h(c, na), \lambda' h(c, na)) \\ &= w([q_1(m, n)] \otimes [q_1(c, a)]).\end{aligned}$$

QM3) $q_1(c, a), \delta(q_2 l) \in M'$ ve $[\delta q_2 l], [q_1(c, a)] \in C$ için

$$\begin{aligned}\omega([\delta q_2 l] \otimes [q_1(c, a)]) + \omega([q_1(c, a)] \otimes [\delta q_2 l]) &= \omega[q_1(-\lambda l, \lambda' l) \otimes [q_1(c, a)]] \\ &\quad + \omega[q_1(c, a) \otimes [q_1(-\lambda l, \lambda' l)]] \\ &= q_2(h(c, (\lambda' l)a)) + q_2(-\lambda l, a\lambda' l) \\ &= q_2(h(c, \lambda'(la))) + q_2(h(-\lambda l, \lambda'(la))) \\ &= (\mu(c) + \nu(a)) \cdot q_2(l).\end{aligned}$$

QM4) $\delta(q_2 l) = q_1(-\lambda l, \lambda' l)$ ve $\delta(q_2 l_0) = q_1(-\lambda l_0, \lambda' l_0) \in M'$ ve $[\delta q_2 l], [\delta q_2 l_0] \in C$ için,

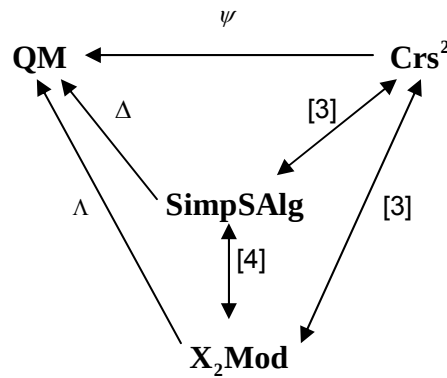
$$\begin{aligned}\omega([\delta q_2 l] \otimes [\delta q_2 l_0]) &= \omega[q_1(-\lambda l, \lambda' l) \otimes [q_1(-\lambda l_0, \lambda' l_0)]] \\ &= q_2(h(\lambda l, \lambda'(l_0))) \\ &= (q_2 l)(q_2 l_0).\end{aligned}$$

Şu halde kros karelerin kategorisinden değişmeli Steenrod cebirlerinin kuadratik modüllerine bir fanktör tanımlanmış oldu. Bunu

$$\psi : \mathbf{SCrs}^2 \rightarrow \mathbf{SQM}$$

ile gösteririz.

Şu halde girişte verilen aşağıdaki diyagram tamamlanmıştır.



KAYNAK

- [1] M. André, Homologies des algèbres commutatives, *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, **206** Springer-Verlag (1970).
- [2] Artin M. And Mazur B., On The Van Kampen Theorem, *Topology*, **5**, 179-189, (1966).
- [3] Ashley N., Simplicial T-Complexes: A non abelian version of a Theorem of Dold-Kan, *Dissertation of Math.* 165 (1988), 11-58, Phd Tsesis, UCNW (1978).
- [4] Arvasi Z., Crossed Squares and 2 – crossed modules of commutative algebras, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 3, No.7 pp 160–181, (1997).
- [5] Arvasi Z., Applications in Commutative Algebra of The Moore Complex of A Simplicial Algebra, *Ph.D. Thesis*, University of Wales Bangor, (1998).
- [6] Arvasi Z. And Porter T., Higher Dimensional Peifer Elements in Simplicial Commutative Algebras, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 3, No.1 pp 1–23, (1998).
- [7] Arvasi Z. and Porter T., Freeness conditions for 2 – crossed module of commutative algebras, *Applied Categorical Structures*, **6**, pp 455–477, (1998).
- [8] Arvasi Z. and Ulualan E., Homotopical Aspects of Commutative algebras Freeness Conditions of Crossed Square (Preprint) , (2007)
- [9] Z. Arvasi and E. Ulualan, Quadratic and 2-Crossed Modules of algebras *Algebra Colloquium*, Vol. 14, Issue 4, 2007, page 669–686 , (2007).
- [10] Z. Arvasi and E. Ulualan, On Algebraic Models For Homotopy 3-types, "Journal of Homotopy and Related Structures" 1, No.1, 1–27, (2006).
- [11] Aznar E.R., Cohomologia no Abeliana in Categories de Interes, Phd Thesis, Universidad de Santiago de Compostela, *Algebra*, **33**, (1981).
- [12] Baues H.J., Combinatorial homotopy and 4-dimentional complexes, *Walter de Gruyter*, **15**, 380 pages, (1991).
- [13] Baues H.J., Algebraic Homotopy, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, **15**, 450 pages, (1998).
- [14] Berger C., Double loop spaces, braided monoidal categories and algebraic 3-types of spaces, *Contemporary Mathematics*, **227**, 46–66, (1999).
- [15] Brown R. and Gilbert N.D., Algebraic models of 3 – types and automorphism structures for crossed modules, *Proc. London Math. Soc.* (3) **59**, pp 51–73, (1989).
- [16] Carrasco P., Complejos hipercruzados, cohomologia y extensiones. *Ph.D. Thesis*, Univ. de Granada, (1987).
- [17] Carrasco P. and Cegarra A.M., Group-theoretic algebraic models for homotopy types, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **75**, pp 195–235, (1991).
- [18] Conduché D., Modules croisés Généralisés de longueur 2, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **34**, pp 155–178, (1984).
- [19] Conduché D., Simplicial crossed modules and mapping cones, *Georgian Mathematical Journal*, **10**, No. 4, 623–636, (2003).
- [20] Curtis E.B., Simplicial Homotopy Theory, *Adv. in Math.* **6**, (1971), 107-209.
- [21] Duskin J., Simplicial Methods and Interpretation of Triple Cohomology, *Memoir A.M.S.*, Vol:3, 163 (1975).

- [22] Ellis G.J., Higher dimensional crossed modules of algebras, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **52**, 277–282, (1988).
- [23] Ellis G.J., Crossed squares and combinatorial homotopy, *Math.Z.*, **214**, 93–110, (1993).
- [24] Ellis G.J. and Steiner R, Higher dimensional crossed modules and the homotopy groups of $(n+1)$ – ads., *Journal of Pure and Applied Algebra*, **46**, pp 117–136, (1987).
- [25] Grandjeán A.R. and Vale M.J., 2 – modulus cruzados an la cohomologia de André-Quillen, *Memorias de la Real Academia de Ciencias*, **22**, (1986).
- [26] Guin D. -Waléry and Loday J-L., Obsrucciónal'excision en K-theories algébrique, In: *Friedlander, E.M., Stein, M.R.(eds.) Evanston conf. on algebraic K – Theory 1980*, (Lect. Notes Math., vol. 854, pp 179–216), Berlin Heidelberg New York: Springer (1981).
- [27] Illusie L., Complex cotangent et deformations I, II. *Springer Lecture Notes in Math.*, 239 (1971) II 283 (1972).
- [28] Loday J-L., Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **24**, pp 179–202, (1982).
- [29] May J.P. Simplicial Objects in Algebraic Topology, Van Nostrand, Math. Studies II.
- [30] Morgenegg C. Sur les Invariants d'un Anneau Local A Carps Residuel de Caracteristique 2. Phd. Thesis, Lausanne EPFL (1979).
- [31] Munkres Elements of Algebraic Topology.
- [32] Mutlu A., Free 2-crossed complexes of simplicial algebras, *Mathematical & Computational Applications*. **Vol. 5**, No: 1, pp. 13–22, (2000).
- [33] Mutlu A., Peiffer pairings in the Moore complex of a simplicial group, *Ph.D. Thesis*, University of Wales Bangor, (1997).
- [34] Mutlu A. And Porter T., Applications of Peiffer pairings in the Moore complex of a simplicial group, *Theory and Applications of Categories*, **Vol. 4**, No: 7, pp. 148–173, (1998).
- [35] Mutlu A. And Porter T., Freeness conditions for 2-crossed modules and complexes, *Theory and Applications of Categories*, **Vol. 4**, No: 8, pp. 174–194, (1998).
- [36] Porter T., $\bar{N}$ – type of simplicial groups and crossed n – Cubes, *Topology*, **32**, pp 5–24, (1993).
- [37] Porter T., Some categorical results in the theory of crossed modules in commutative algebras, *Journal of Algebra*, **109**, pp 415–429, (1987).
- [38] Porter T., Homology of commutative algebras and an invariant of Simis and Vasconceles, *Journal of Algebra*, **99**, pp 458–465, (1986).
- [39] Shamnu N.M., Algebraic and Categorical Structure of Category of Crossed Modules of Algebras, Phd Thesis, U.C.N.N. (1992).
- [40] Steenrod N. And Eilenberg S., Foundations of Algebraic Topology, Princeton, New Jersey, Princeton University Pres, 1952.
- [41] Quillen D., On the homology of commutative rings, *Porc. Sympos. Pure Math*, **17**, (1970).
- [42] Whitehead J.H.C., Combinatorial homotopy II, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55**, pp 453–496, (1949)

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Simge ÖZTUNÇ
Baba Adı : Hüseyin
Ana Adı : Hesna
Doğum Tarihi : 26/12/1982
Doğum Yeri : İzmir

İlk öğrenimini Edirne'de Trakya Birlik İlköğretim Okulunda , Ortaokulu Bornova Yahya Kemal Beyatlı İlköğretim Okulunda, lise öğrenimini Suphi Koyuncuoğlu Lisesinde tamamladı. 2005 yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2005-2006 Öğretim yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansa başladı ve hala öğrenimine devam etmektedir.