

KASIM 2018

Yüksek Lisans - Matematik

ABDULKADİR TÜMBAŞ

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HORADAM SAYI VE MATRİS
DİZİLERİ

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ABDULKADİR TÜMBAŞ

KASIM 2018

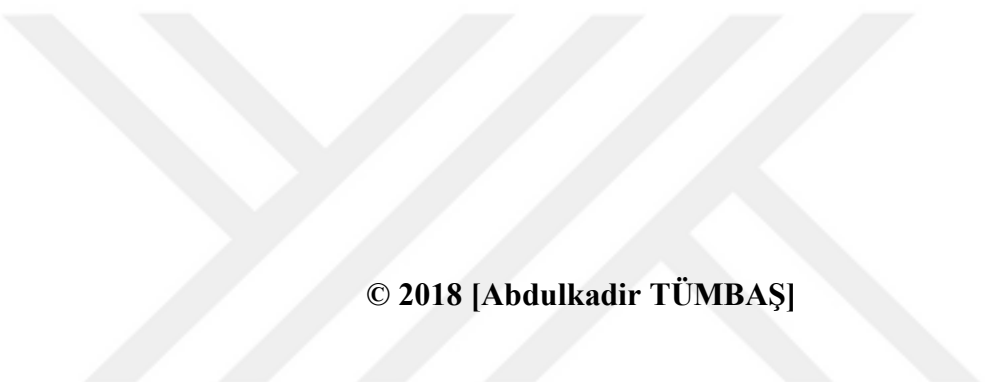
**Horadam Sayı ve Matris
Dizileri**

**Gaziantep Üniversitesi
Matematik
Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN**

Abdulkadir TÜMBAŞ

Kasım 2018



© 2018 [Abdulkadir T  MBAŐ]

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Horadam Sayı ve Matris Dizileri

Öğrencinin Adı Soyadı: Abdulkadir TÜMBAŞ

Tez Savunma Tarihi: 21 Kasım 2018

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ahmed Necmeddin YAZICI

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

İmzası

Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

.....

Dr. Öğr. Üyesi Bilge İNAN

.....

Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Abdulkadir TÜMBAŞ

HORADAM INTEGER AND MATRIX SEQUENCES

TÜMBAŞ, Abdulkadir

M.Sc. Thesis in Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Şükran UYGUN

November 2018

97 pages

In this study, after a detailed introduction of the literature concerning the Horadam sequence, information about its most popular ones such as Fibonacci, Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas, Pell and Pell Lucas and their basic features are presented. Besides, polynomial sequence, which is an aggregation of these number sequences, is also introduced.

Then, Horadam number and polynomial sequences are analyzed in detail. In the following part, Horadam polynomials and Chebyshev polynomials are associated with each other. Following this, features related with the generalized Horadam sequences are acquired through the use of matrix.

Finally, in the last part, after the introduction of Generalized Fibonacci and Generalized Lucas number sequences, and some of their basic features, Generalized Fibonacci, Generalized Lucas and Horadam matrix sequences are examined in detail.

Keywords: Generalized Fibonacci sequences, Generalized Lucas sequences, Horadam sequences, Binet formula, Generating functions

ÖZET

HORADAM SAYI VE MATRİS DİZİLERİ

TÜMBAŞ, Abdulkadir

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Tez Yöneticisi: Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN

Kasım 2018

97 sayfa

Bu çalışmada Horadam dizileri hakkında ayrıntılı bir literatür bilgisi verildikten sonra popüler olan Fibonacci, Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas, Pell, Pell Lucas gibi dizileri ve temel özellikleri hakkında bilgiler verilmiştir. Bu sayı dizilerinin bir genelleştirmesi olan polinom dizileri de kısaca tanıtılmıştır.

3. Bölümde Horadam sayı ve polinom dizileri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Sonra 4. bölümde Horadam polinomları ve Chebyshev polinomları arasında bir bağ kurulmuştur. Sonrasında genelleştirilmiş Horadam dizileri ile ilgili özellikler matris kullanarak elde edilmiştir.

Son bölümde ise Genelleştirilmiş Fibonacci, Genelleştirilmiş Lucas sayı dizileri ve temel bazı özellikleri tanıtıldıktan sonra, Genelleştirilmiş Fibonacci, Genelleştirilmiş Lucas ve Horadam matris dizileri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Fibonacci dizileri, Genelleştirilmiş Lucas dizileri, Horadam dizileri, Binet formülü ve Üreteç fonksiyonu



Çok kıymetli aileme...

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince desteğini, deneyimini ve emeğini hiçbir zaman benden esirgemeyen ve aynı zamanda kişiliğiyle de bana örnek olan saygıdeğer hocalarım:

- Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden saygıdeğer Yüksek Lisans danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN’a,
- Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ana Bilim Dalı Başkanımız saygıdeğer Prof. Dr. Adil KILIÇ’a,
- Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitü Müdürümüz ve aynı zamanda lisans eğitimimde Fizik hocam olan çok kıymetli saygıdeğer Prof. Dr. Ahmed Necmeddin YAZICI’ya,
- Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölümünde öğrenim görüyor iken Sınıf Öğretmenliğimi yapan bilgisi ve tecrübesi ile hayatıma yön veren aynı zamanda Jüri üyeliğimi kabul eden Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ hocama ve beni kırmayıp Jüri üyeliğimi kabul eden Dr. Öğr. Üyesi Bilge İNAN hocama,
- Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölümü’ndeki tüm hocalarıma, lisans ve yüksek lisans hayatımdaki emeklerinden dolayı,
- Son olarak bu hayattaki en büyük destekçilerim, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda bulunarak varoluşumdan bu günlere gelmemde ki en büyük pay sahibi olan sevgili annem Selma TÛMBAŞ ve saygıdeğer babam Mustafa TÛMBAŞ’a kıymetli ablalarım ve tüm sevdiklerime,

minnettarlığımı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ABSTRACT	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ	xi
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2.....	11
ÖZEL TAM SAYI DİZİLERİ	11
2.1 Fibonacci ve Lucas Sayı ve Polinom Dizileri	11
2.2 Pell, Pell Lucas Sayı ve Polinom Dizileri	16
2.3 Jacobsthal, Jacobsthal Lucas Sayı ve Polinom Dizileri	19
BÖLÜM 3.....	28
HORADAM SAYI ve POLİNOM DİZİLERİ.....	28
3.1 Horadam Sayı Dizileri.....	28
3.2 Horadam Polinomu Dizileri	33
BÖLÜM 4.....	38
GENELLEŞTİRİLMİŞ k-HORADAM DİZİSİ.....	38
BÖLÜM 5.....	46
HORADAM DİZİSİ İLE CHEBYSHEV POLİNOMLARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR.....	46
5.1 Chebyshev Polinomları	46

BÖLÜM 6	62
GENELLEŞTİRİLMİŞ FIBONACCI, GENELLEŞTİRİLMİŞ LUCAS ve HORADAM MATRİS DİZİLERİ	62
6.1 Genelleştirilmiş Fibonacci, Genelleştirilmiş Lucas ve Horadam Sayı Dizileri ...	62
6.2 Genelleştirilmiş Fibonacci Matris Dizileri.....	68
6.3 Genelleştirilmiş Lucas Matris Dizileri	77
6.4 Horadam Matris Dizileri	81
6.5 Genelleştirilmiş Fibonacci Genelleştirilmiş Lucas ve Horadam Matris Dizileri Arasındaki Bağlıntılar	86
BÖLÜM 7	93
SONUÇ VE ÖNERİLER	93
KAYNAKLAR	94

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

C_n : Jacobsthal Lucas matris dizisinin n -inci elemanı

c_n : Jacobsthal Lucas sayı dizisinin n -inci elemanı

F_n : Fibonacci dizisinin n -inci elemanı

H_n : Horadam matris dizisinin n -inci elemanı

h_n : Horadam sayı dizisinin n -inci elemanı

J_n : Jacobsthal matris dizisinin n -inci elemanı

j_n : Jacobsthal sayı dizisinin n -inci elemanı

L_n : Lucas dizisinin n -inci elemanı

P_n : Pell dizisinin n -inci elemanı

Q_n : Pell Lucas dizisinin n -inci elemanı

U_n : Genelleştirilmiş Fibonacci matris dizisinin n -inci elemanı

u_n : Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisinin n -inci elemanı

V_n : Genelleştirilmiş Lucas matris dizisinin n -inci elemanı

v_n : Genelleştirilmiş Lucas sayı dizisinin n -inci elemanı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Sayı dizileri özellikle sayılar teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Birçok araştırmacı tarafından üzerinde çalışmalar yapılan sayı dizileri, rasyonel fonksiyonları temsil eden kuvvet serileri teorisinde, Hilbert serilerinde, grup teoriden gelen üreteç fonksiyonlarında ve bunun gibi birçok bilimde kullanılmıştır. Bu gibi konularda ciddi ilerlemeler elde edilmiştir. Tamsayı dizileri denilince ilk akla gelen dizi Fibonacci dizisidir.

Fibonacci dizisinin elemanları Leonardo Fibonacci tarafından üretilen bir tavşan probleminden esinlenilerek elde edilmiştir. Leonardo Fibonacci 1170 yılında İtalya'nın Pisa şehrinde dünyaya gelmiştir (1170-1240). Çocukluğu babasının ticaretle uğraşmasından dolayı Cezayir'de geçmiştir. Burada, Müslüman bilim adamlarından onluk Arap sayı sistemini öğrenmiş böylece Roma rakam sisteminin onluk Arap sayı sistemine nazaran hiç fonksiyonel olmadığını anlamıştır. Başka bazı matematikçiler ile birlikte Fibonacci sayesinde, Hint Arap sayı sistemi, Hindistan'dan İran'a ve daha sonrasında Orta Doğu ve Kuzey Afrika'ya, oradan da Avrupa'ya geçmiştir. O, Arap rakamlarını tüm sayılar ve oranlarda, bir sayıyı asal çarpanlarına ayırmada, köklü sayılarda vb. kullanmayı düşünmüştür. Fakat sayısız avantajlarına rağmen bu sistemi oturtmak kolay olmamıştır. O dönemde gerçekleşen Haçlı Seferleri, üzerinde "Arap" etiketi olan herhangi bir şeyi şüpheli hale getiriyordu. Hatta 1299 yılında Arap rakamları, "üzerlerinde değişiklik yapılması Romen rakamlarına göre daha kolay" olduğu gerekçesiyle yasaklanmıştır.

Babasının işi dolayısıyla, birlikte Arap ve Akdeniz ülkelerine yaptıkları seyahatler sayesinde Fibonacci, Doğu ülkelerinde (Mısır, Suriye, Cezayir, Yunanistan, vs.) yaşayan büyük matematikçilerle tanışma şansı yakalamıştır. Kendisi daha sonra İtalya'ya dönmüş ve 32 yaşındayken, Arap rakam sisteminin önemini açıklayan *Liber Abaci* (1202) adlı kitabını yayımlamıştır. Bu yöntemi ticaret dünyasında karşısına çıkan sorunlara (döviz alım satımı, ticari muhasebe, ağırlık ve

uzunlukların birimlerini çevirmek vs.) uygulayarak Romen rakamlarından daha pratik olduğunu göstermeye uğraşmıştır. Çeyrek asır sonra, 1227’de ise, “*Liber Abaci*”nin ikinci (el yazısı ile hazırlanan ilk metnin bir kopyası olmadığı için) versiyonunu yayımlamıştır. İtalya’ya döndükten sonra, kitabının ikinci versiyonunu ilham aldığı bir matematikçi ve astrolog olan Michael Scotus’a adamıştır. Michael Scotus’la devam ettirdiği yazışmaları sayesinde Fibonacci’nin çalışmalarından dönemin Roma imparatoru Federico II de Hohentaufen (1194-1250) haberdar olmuştur. Sarayın bir çalışanı olan Palermolu Johannes de Scotus, Fibonacci’ye çözmesi için verdiği problem ile onun tarihe geçmesine ön ayak olmuştur.

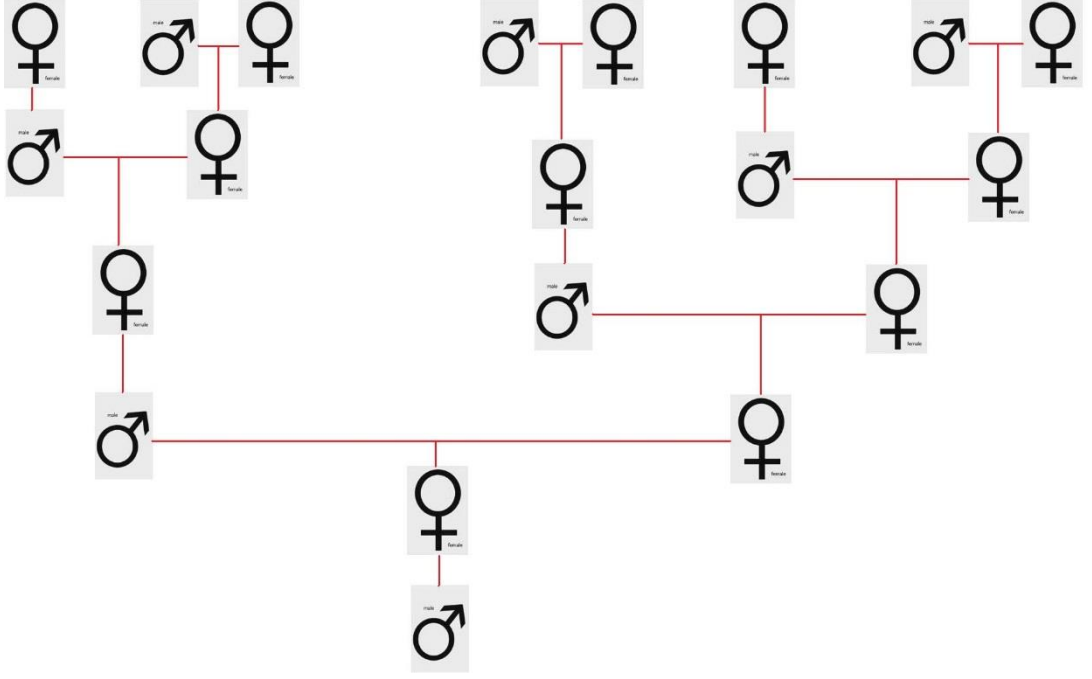
Tavşan Problemi: Bir adam kapalı alana 2 tavşan koyar. Eğer her ay her çift yeni bir çift doğuruyor ise, 1 yıl sonunda toplam kaç çift üremiş olur?

Fibonacci, bu soruyu “Flos (1225)” adını verdiği bir makalede ele almıştır. Ayrıca, bu çalışmada tarihe Fibonacci sayıları olarak geçecek bir sayı dizisi üretmiştir. Dizi, 0 ve 1 sayıları ile başlayacak ve üçüncü elemandan itibaren önceki iki sayının toplamına eşit olacak şekilde düşünülmüştür. Söz konusu model, bir kovanda sadece kraliçe arının yumurtalarını bırakarak üremeyi gerçekleştirdiği, arıların üreme şemasını mükemmel şekilde açıklar.

Yumurtalar döllenirse işçi (dişi) arılar doğmaktadır. Bu arıların genetik bilgisinin yarısı anneden (kraliçe arı) yarısı da babadan (erkek arı) gelmektedir.

Yumurtalar döllenmezse erkek arılar doğmaktadır. Bu nedenle, işçi arıların iki, erkek arıların tek ebeveyni vardır. Bunların genetik bilgilerinin tamamı anneden gelir (Şekil 1).

Arılar tek örnek değildir. Fibonacci sayıları doğadaki birçok fenomenin perde arkasında bulunmaktadır: Taç yaprakların dizilimi, hortumların oluşumu vs. Etrafımızdaki birçok matematiksel yapının arkasında bulunan bu sayıların gizemi yüzyıllar boyunca uzmanları büyülemeye devam etmiştir ve hatta günümüzde sadece Fibonacci sayılarının gözlemlenebildiği yeni alanları belirleyen yayınlar bulunmaktadır.



Orta çağ matematiğinden “altın oran” kavramına

Peki gerçekte Fibonacci sayılarının ardında ne kadar “sihir” var? Fibonacci ne oranda bu sayıların ve aralarındaki ilişkiyi ortaya çıkaran oranın kaşifi sayılabilir?

Tarihe baktığımızda, Gopala (1135) ve Hemanchandra (1150) gibi birçok Hintli matematikçinin söz konusu formüle atıflar yaptığı göze çarpmaktadır; Fibonacci henüz doğmadan çok önce yaptıkları çalışmalarda bu formülden bahsedilmektedir. Birkaç yüzyıl sonra, Fibonacci dizisi üzerine yaptığı araştırmalar sonucu büyülenen Kepler ise “*Strena Seu de Nive Sexangula*” (1611) adlı eserinde tarihe “altın oran” olarak geçecek kavramı geliştirmiştir.

Kepler ardışık sayılar arasındaki oranı kullanarak diziyi yeniden keşfetmiştir. 2’nin 3’e, 3’ün 5’e, 5’in 8’e oranı şeklinde devam ederek bütün elemanları incelemiştir. Bu işlemin sonucunda, her aşamadan sonra daha da belirginleşen bir oranın söz konusu olduğunu (altın oran) görmüştür. Bu oranı (Yunan heykeltıraş Fidas’ın onuruna, Fibonacci’nin değil) *phi* sayısı ile sembolize etmiştir: $\phi = 1.618$.

Kepler’in Fibonacci dizisinden esinlenerek geliştirdiği biyolojik oto-replikasyon (kendini kopyalama) süreci kısa bir süre öncesine kadar (Phyllotaxis

denilen ve yaprakların, bitkilerin gövdesinde dizilişini ifade eden fenomen bilimsel olarak da incelenene kadar) biyologlar tarafından göz ardı edilmiştir.

Fibonacci dizisi, her sayının kendisinden bir önceki sayı ile toplanması sonucu elde edilen sayılar dizisidir. Fibonacci sayıları üç nedenden dolayı büyük önem arz etmektedir: Birincisi dizinin ilk elemanlarının doğada bitkilerde, böceklerde kısacası birçok yerde karşımıza çok sık çıkmasıdır. İkincisi Fibonacci dizisinde yer alan rakamların özelliği, Fibonacci dizisinde yer alan sayıların kendilerinden bir öncekiyle oranlandığında oluşan serinin altın orana yaklaşarak ilerlemesidir. “Altın oran” denilen bu sayı vücudumuzdaki oranlarda, çevremizdeki ağaçlarda, çiçeklerde, Mısır’daki piramitlere kadar sayısız alanda karşımıza çıkmaktadır. Fibonacci dizisi ile ulaşabildiğimiz altın oran insan yüzündeki duyu organlarının oranlamasıyla da ortaya çıkmaktadır. Örneğin, kulaklarımızın, burnumuzun altından çenemize kadar olan alan altın oranı vermektedir. İşaret parmağımızın bir önceki boğum ile oranı altın oranı vermektedir. Fibonacci dizisinde yer alan altın oranı eski Mısırlılar bulmuşlardır. Yunanlılar da, Mısırlılar gibi bu sayıyı mimaride kullanmışlardır. Mısır piramitlerinde de tabanının yüksekliğine oranı altın oranı vermektedir. Fibonacci dizisi finans sektöründe finansal varlıkların alacakları değeri tahmin etmekte kullanılır. Üçüncü neden, bu sayıların sayılar teorisinde çok ilginç özelliklerinin bulunmasıdır. Dizinin terimlerini oluşturabilmek için ilk iki elemanın verilmesi gerekir. Fibonacci dizisi en kolay sayılar olan $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ile başlar. Ama istenirse başlangıç şartları değiştirilerek tamamen bu diziden bağımsız başka bir sayı dizisi de oluşturulabilir. Buna örnek olarak Fransız matematikçi Edward Lucas başlangıç şartları için seçilebilecek başka en basit $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ değerlerini kullanarak Lucas sayı dizilerini oluşturmuştur ve bu sayı dizisi de kayda değer bir popülerite kazanmıştır. Lucas sayı dizisinin literatürde bu kadar çok kullanılmasının nedeni Fibonacci sayı dizileri ile arasında birçok ilginç bağıntının bulunmasıdır.

Horadam Dizisi:

Bir genel lineer, ikinci dereceden yineleme bağıntısı ile üretilen Horadam dizileri hakkında çalışmalar devam etmektedir. Bu bölümde Horadam dizileriyle ilgili yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilecektir.

Keyfi başlangıç değerleri $w_0 = a$ ve $w_1 = b$ seçilerek

$$w_n = pw_{n-1} - qw_{n-2}$$

ikinci mertebeden, lineer yineleme bağıntısına sahip $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine A.F.Horadam'ın üzerinde çalışmasından dolayı Horadam dizisi denmiştir. Bu dizi, iyi bilinen Fibonacci, Pell, Lucas, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, Tagiuri, Fermat, Fermat-Lucas, ... gibi dizilerin popülerliğini artırmıştır. Bu manada tamsayı dizilerine pozitif bir etkisi olmuştur. Horadam dizisinin yineleme bağıntısı Fibonacci ve Lucas dizilerinin bir genelleştirmesinin yineleme bağıntısı olarak da adlandırılabilir. Çünkü $\{w_n(0,1;1,-1)\}_0^{\infty}$ Fibonacci ve $\{w_n(2,1;1,-1)\}_0^{\infty}$ Lucas dizilerini vermektedir. Ama Horadam yineleme bağıntısı olarak adlandırmak daha uygun olacaktır. Bazı yazarlar $\{w_n(0,1;p,q)\}_0^{\infty}$ ve $\{w_n(2,p;p,q)\}_0^{\infty}$ dizilerine, E. Lucas'ın 1891 deki saygın çalışmasına "Theorie des Nombres" (Bölüm XVIII te) bağlı olarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas olarak adlandırmaktadır. Dikkat edilirse $T_n(x)$ 1.çeşit, $U_n(x)$ 2.çeşit Chebyshev polinomları, Horadam yineleme bağıntısında $p = 2x$ ve $q = 1$ yerleştirilerek elde edilir: $T_n(x) = w_n(1,x;2x,1)$ ve $U_n(x) = w_n(1,2x;2x,1)$.

Yineleme dizileri sayılar teorisindeki çalışmaların ana parçası olduğundan büyük bir öneme sahiptir. Bu diziler matematik ve bilgisayar biliminin farklı alanlarında karşımıza çıkmaktadır. Üreteç fonksiyonları teorisinde, k – düzenli ve otomatik dizilerde, hücrel otomobilde, Diophantine denklemlerinde...

Hilbert serileri, kuvvet serilerinin önemli bir çeşidi olan üreteç fonksiyonları, Poincare serileri gibi durumlarda serilerin katsayıları, lineer yineleme dizileri oldukları için önemli sonuçlar elde edilebilir. Ek olarak ortogonal polinomları (Chebyshev polinomları dahil) yineleme bağıntılarına sahiptir ve lineer yineleme

dizileri bir çok alanda mesela bilgisayar grafiğinde, yaklaşım teorisinde, kriptolojide, zaman seri analizinde karşımıza çıkar.

1960'ların başında Horadam, L. Carlitz ve diğerleri tarafından Horadam dizileri çalışılmaya başlanmıştır. Horadam 1961 yılında $\{w_n(a, a+b; 1, -1)\}_0^\infty$ özel dizisi üzerine çalışmıştır. Arkasından 1962 yılında $\{w_n(1, p; p, q)\}_0^\infty$ dizisinin terimlerinin kuvvetleri için üreteç fonksiyonlarının Carlitz formulasyonunu çalışmıştır (Eş zamanlı olarak Riordan tarafından Fibonacci dizileri için benzer bir çalışma yapıldığı belirtilmektedir). Bir sonraki yıl Buschman, Horadamın 1961 yılındaki çalışmasını belirtmiş ve Horadam yineleme denkleminde elde edilen genel Horadam dizileri için bazı özdeşlikler elde etmiştir. Bu esnada Raab kesin koşullarda n nin çok büyük değerleri için $\frac{w_{n+1}(a, b; p, q)}{w_n(a, b; p, q)}$ oranını incelemiştir. Bu da Raab'ı Pascal üçgeninin bir genelleştirmesi kavramına yöneltmiştir. Sonra, 1965 yılında iki makale yayınlanmıştır: Bu makalelerde Carlitz'in sonuçları iyileştirilmiş daha genel Horadam dizilerini kapsayacak şekilde genişletilmiş ve düzenlenmiş sonuçlar elde edilmiştir. Bu sırada, yineleme bağıntısı kullanılarak oluşturulan $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$ karakteristik denkleminin sırasıyla eş kök ($p^2 = 4q$) ve ayrık kökler ($p^2 \neq 4q$) durumu dizinin temel aritmetik özellikleri verilmiştir. Horadam makalesinin giriş bölümünde, makaledeki niyetinin Horadam dizisinin özelliklerini araştıran ilk çalışma olmasını istediğini yazmıştır. Ancak bunu başka yayınlar hızlıca takip etmiştir. 1967 yılında dizinin üç önemli özelliğini: "Pythagorean" özelliği, geometrik paradoks ve yeni kompleks durumu araştırılmıştır. 1969 yılında dizinin Chebyshev fonksiyonları ile ilgisi araştırılmış ve Riordan tarafından 10 yıl önce kullanılan bazı fonksiyonlarla da ilgisi incelenmiştir. Ek olarak görünüşte pek bilinmeyen 1966 yılındaki makalede Horadam yineleme dizisi $\{w_n(a, b; p, q)\}_0^\infty$, Fibonacci dizisini içeren K. Subba Rao tarafından elde edilen sonuçları genelleştirmiştir. Bunlar için genel Horadam sayısının rankını ve asimptotik davranışını incelemiştir.

Horadam'ın ilk çalışması çağının önemli ilginç bir temsilcisidir. Özellikle 1965 yılında dejenere olmayan durum için Horadam dizisinin üreteç fonksiyonu

$$w_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n = \frac{a + (b - pa)x}{1 - px + qx^2},$$

olarak belirtmiştir. Hemen sonra keyfi k -kuvvet için üreteç fonksiyonu olan

$w_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (w_n)^k x^n$ ifadesi ile ilgilenmiştir. w_n için lineer olmayan (kuadratik)

yinelemeleri geliştirmiştir ve Carlitz'in makalesine başvurarak

$$(1 - \alpha^k x)(1 - \beta^k x) = a^k - (pa - b)^k x + kx \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^j}{j} e^j a_{kj} w_{k-2j}(q^j x),$$

eşitliğini elde etmiştir. Burada α ve β , $e = pab - qa^2 - b^2$ 'nin ayrık karakteristik

köklerdir. a_{kj} ise $\sum_{k=2j}^{\infty} a_{kj} x^{k-2j} = (1 - px + qx^2)^{-j}$ ters j kuvvet açılımından elde edilir.

Kapalı formu makalede $A = \frac{b - a\beta}{\alpha - \beta}$, $B = \frac{a\alpha - b}{\alpha - \beta}$ olmak üzere

$$w_k(x) = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} A^{k-s} B^s (1 - \alpha^{k-s} \beta^s x)^{-1},$$

şeklinde verilmiştir.

Dejenere durum $\left(\alpha = \beta = \frac{p}{2}\right)$ için ana sonuç

$$w_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{p}{2}\right)^n \left\{ \frac{2bn}{p} - a(n-1) \right\} \right]^k x^n$$

şeklinde verilmiştir. Horadam $u_n(p, q) = w_n(1, p; p, q)$ ve $v_n(p, q) = w_n(2, p; p, q)$

özel durumları için bulunan sonuçlarla ilgilenmiştir. Horadam, dizisinin lineer

özelliklerini araştırmaya devam etmeden önce, u_n, v_n, w_n yineleme çiftlerini

geliştirmiş ve $\frac{w_n}{w_{n-1}}$ ile $\frac{w_n}{w_{n-k}}$ oranlarının asimptotik formlarına dikkat ederek dizinin

çift indisli elemanları için

$$w_{2n} = (-q)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{-p}{q}\right)^{n-j} w_{n-j}$$

formunu elde etmiştir. Horadam dizilerinin non-lineer özellikleri non-lineer

yinelemeler kullanılarak elde edilir. Şöyle ki; kareli ve küplü terimler için

$$w_{n+1}^2 - q^2 w_{n-1}^2 = b w_{2n+1} + (b - pa) q w_{2n-1}$$

ve

$$w_{n+1}^3 + (3pq - p^3)w_n^3 + q^3 w_{n-1}^3 = -3pq^n e w_n$$

sonuçlarını bulmuştur.

Literatürde Horadam ve Horadam tipi dizilerle ilgili var olan kaynakların genişliği bu dizileri incelemeye değer olduğunu gösterir. Şüphesiz, Horadam veya “yakın komşuluktaki” diziler (Bu diziler genel Horadam dizisinin kısmi veya tam özelleştirmesiyle elde edilir.) için kaynak bolluğu daha kapsamlı bir çalışmaya yöneltmiştir.

Zeitlin 1965 yılında, Horadam sayılarının genelleştirilmiş versiyonu için çift kuvvetli özellikler elde etmiştir. Sonraki yıl Carlitz kuadratik formun lineer transformasyonel için iyi bilinen bir sonuç kullanarak $|(w_{n+r+s})^k|$ determinantları için bir kapalı form elde etmiştir. 1970 yılında Zeitlin, Horadam sayıları için yeni yineleme ve formüller elde etmiştir. 1973 yılında, Alter ve Kubota 1950 ve 1960’lı yıllarda elde edilmiş özel sonuçları genelleştirmişlerdir. Hilton, Horadam dizilerinin genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizileri olarak parçalanabileceğini 1974 yılında belirtmiştir. Sonraki 10 yıl içinde Shannon tarafından Horadam dizilerinin daha genel bir sınıfını parçalama fikri ortaya atılmıştır. Ayrıca 1974 yılında Waddill, 1960 yılının başlarından ortalarına kadar olan çalışmaları toplamış, Horadam’ın bulduğu özdeşlikleri yeniden oluşturmuş ve matris vektör temeline dayanarak yeni özdeşlikler bulmuştur. Shannon’un 1979 yılındaki çalışmasına ek olarak Shannon ve Horadam aynı yıl içinde $\{w_n\}_0^\infty$ için bir q -serisinin yineleme bağıntısını içeren fonksiyonel bir yineleme bağıntısı elde etmişlerdir. Shannon, Horadam sayılarının bir değişmeli halkanın elemanları olarak kabul edilebileceğini önermiştir.

Horadam ve Shannon, Morgado’nun Fibonacci sayı özdeşliklerini genelleştirmiş, bu sayede genel Horadam dizisiyle ilgili özdeşlikler oluşturmuştur. Bu çalışma Morgado tarafından genişletilmiştir. Lee, w_{mn} Horadam sayılarının bazı

özelliklerini vermiş ve $\sum_{k=0}^{n-1} (w_k)^t$ kuvvetin sonlu toplamalarını incelemiştir. Bir sonraki

yıl Horadam ters Horadam sayı terimlerinin sonsuz toplamalarını analiz etmiş $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{w_n}$

mutlak yakınsaklığını bulmuş ve Lambert serisini, bir elliptik integral terimiyle

$$\frac{1}{w_{2n-1}} \text{ ve } \frac{1}{w_{2n}} \text{ serilerini incelemeye devam etmiştir } \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{w_n} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{w_{2n-1}} + \frac{1}{w_{2n}} \right) \right).$$

Bunun arkasından 1993 yılında Horadam, Freitag ve Phillips'ten bir fikir alarak Horadam temel yinelemesinden yeni bir tip birleşmiş Horadam dizileri diye adlandırdığı diziyi oluşturmuş, bunun özelliklerini analiz etmiştir. 1994 yılında Melham ve Shannon tarafından verilmiş genel ve özelleştirilmiş Horadam dizileriyle ilgili bazı ilginç kongrüans yineleme formülleri verilmiştir. Aynı yazarlar tarafından non – kongrüans formülleri verilmiştir. Udrea, Horadam'ın bazı yeni özelliklerini vermiş ve bunların her iki tip Chebyshev polinomlarıyla ilgisini elde etmiştir. Daha sonra Zhang, Horadam dizileriyle ilgili Carlitz'in bir metodunu uyarlayarak bir düzine özdeşlik elde etmiştir. Zhang ve Liu buldukları sonuçları genişletmişler, Kılıç ve Tan bu sonuçları 10 yıl sonra bir adım daha ilerletmişlerdir.

$$1990'lı \text{ yıllarda Rabinowitz iki özel toplam } \sum_{n=1}^N \frac{1}{w_{k \cdot 2^n}}(0, b; p, \pm 1) \text{ için kapalı}$$

form elde etmiş. Ayrıca w_{m+n} için “sade” formül olarak adlandırılan problemi çözmüş Reiter, Waddill tarafından Horadam sayıları için matris oluşturulmasını vurgulamış ve matris özellikleri ve kuvvetini kullanarak yerleştirildiği programlama dilinde Horadam sayılarını elde etmiştir. Kerf, standart Binet tipi kapalı formu kullanarak Horadam sayılarını hesaplamayı örneklemiştir.

1960 ve 1970'li yıllarda çoğu araştırmalar sayıların teorik sonuçları ve sınıflara ayrılmasıyla ilgiliydi. Arkasından gelen 10 yıl boyunca Horadam dizilerinin çeşitli genelleştirmeleri incelenmiştir. 1990'larda deneysel matematiğin teknikleri Horadam dizi analizine uyarlanmıştır.

Özel Horadam sayısı $w_n(0, b; p, q)$ için özel konvolüsyon formülleri geliştirilmiştir. Dairesel matrislerin özelliklerini vurgulayarak Koçer ve arkadaşları ilk kez Horadam sayılı dairesel matrislerin spektral normu için en iyi sınırları elde etmiş ve özdeğerleri bulmuşlardır. Ayrıca uygun yarı dairesel Horadam matrisini tanımlamış ve iki matris tipi için bazı normlar elde etmişlerdir. Gould ve Quaintance bir genel Horadam tipi yinelemesini sağlayan terimlerin çarpımının bir gösterimini

bulmuşlardır. Carson, periodik olan bir genel üç terimli yineleme bağıntısına bakmış ve yakın periyotlu uygun dizi elemanları arasında bir değişmez üç terimli yineleme bağıntısının var olduğunu göstermiştir. Kılıç ve Irmak, birçok özel durumu içeren Horadam sayılarının k . kuvvetinin ters toplamı ile ilgili yeni özdeşlikler elde etmiştir. He ve Shiue, Horadam dizisinin genel terimi için bir açık formül oluşturmak için yeni bir metot oluşturmuşlardır. Kılıç ve Tan, Fibonacci ile ilgili sonuçları temel alıp Horadam dizileri için yenilerini geliştirmişlerdir. Yazlık ve Taşkara k -Horadam dizisi diye adlandırdığı $\{H_{k,n}\}_{n \geq 0}$ dizisini $H_{k,n+2} = f(k)H_{k,n+1} + g(k)H_{k,n}$ incelemiş özellikle kapalı Binet formu için yineleme temeline dayanan bir ispat vermiş ve $\sum_{i=0}^n H_{k,pi+q}$ toplamını, elemanları k -Horadam sayıları olan 2×2 'lik matrislerin determinantını kullanarak bazı özdeşlikler elde etmiştir.

Horzum ve Koçer Horadam polinom dizisi $\{h_n(x)\}_{n \geq 0}$ 'i tanımlamış diğer bilinen polinom dizilerinin bir genelleştirmesi olduğunu belirtmişler ve 1. ve 2. polinom kuvvetlerini içeren toplam formülleri vermiştir. Kılıç ve Stanica, bu genel polinom dizisinin gösterimini, faktörizasyonunu (çarpanlara ayrılışını) vermişlerdir.

BÖLÜM 2

ÖZEL TAM SAYI DİZİLERİ

Bu bölümde literatürde önemli bir yer tutan bazı tamsayı dizileri tanımlanacak ve bunlarla ilgili temel bazı özellikler verilecektir.

2.1 Fibonacci ve Lucas Sayı ve Polinom Dizileri

Tanım 2.1.1. $f_0 = 0$ ve $f_1 = 1$ olmak üzere; $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Fibonacci sayı dizisi denir. Fibonacci

dizisinin Binet benzeri formülü $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere

$f_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$ şeklindedir. Binet formülünden hareketle $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = r_1$ olduğu

kolayca görülmektedir. Buradaki α sayısı “Altın Oran” olarak adlandırılmaktadır. Altın Oran, sayısı insanlık, bilim ve sanat tarihinde oynadığı inanılmaz bir rol oynar. Altın oran doğada, bitkilerde, çiçeklerde, ideal insan vücudunda, mimari eserlerde ve birçok alanda karşımıza çıkar. Altın oran, evren ve yaşamı anlama konusunda bizlere yeni kapılar açmaya devam etmektedir. Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

şeklindedir (T. Koshy, 2001). Simpson formülü

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^n f_k = f_{n+2} - 1$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.2. $l_0 = 2$ ve $l_1 = 1$ olmak üzere; $l_{n+1} = l_n + l_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Lucas sayı dizisi denir. Lucas dizisinin Binet formülü $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $l_n = r_1^n + r_2^n$ şeklindedir (Lupaş,1999).

Binet formülünden hareketle $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = r_1$ olduğu kolayca görülmektedir. Bu değer sayesinde Lucas sayı dizisi de en az Fibonacci sayı dizisi kadar önemli hale gelmiştir. Fibonacci sayıları ile Lucas sayıları arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur.

$$l_{n+1} + l_{n-1} = 5f_n$$

$$f_n l_n = f_{2n}$$

$$l_n^2 - 5f_n^2 = 4(-1)^n$$

Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n x^n = \frac{2x^2 + x}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir (T. Koshy, 2001).

Simpson formülü

$$l_{n+1}l_{n-1} - l_n^2 = 5(-1)^{n-1}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^n l_k = l_{n+2} - 3$$

şeklinde verilir (T.Koshy, 2001).

Fibonacci ve Lucas sayıları için Koshy ‘nin (2001) kitabı önemli bir kaynaktır.

Tanım 2.1.3: $n \geq 1$ tamsayısı için; $\{F_n(x)\}$ Fibonacci polinom dizisi, başlangıç şartları $F_0(x) = 0$, $F_1(x) = 1$ olmak üzere;

$$F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır (Lupaş, 1999).

Teorem 2.1.4 (Binet Formülü): Fibonacci polinomları için Binet formülü

$$\alpha = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \text{ olmak üzere}$$

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n - (-\alpha)^{-n}}{\alpha + \alpha^{-1}}$$

ile verilir (Lupaş, 1999).

Tanım 2.1.5: $n \geq 1$ tamsayısı için; $\{L_n(x)\}$ Lucas polinom dizisi, başlangıç şartları $L_0(x) = 2$, $L_1(x) = x$ olmak üzere;

$$L_{n+1}(x) = xL_n(x) + L_{n-1}(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır (T.Koshy, 2001).

Fibonacci ve Lucas polinomları için üreteç fonksiyonları;

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) t^n = \frac{t}{1 - xt - t^2}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = \frac{2 - xt}{1 - xt - t^2}$$

şeklinde verilir (Horadam, 1999).

Tanım 2.1.6: $n \geq 2$ tamsayısı için; $\{b_n(x)\}$ genelleştirilmiş Fibonacci-Lucas polinom dizisi, başlangıç şartları $b_0(x) = 2b$, $b_1(x) = s$ olmak üzere;

$$b_n(x) = xb_{n-1}(x) + b_{n-2}(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır. Genelleştirilmiş Fibonacci-Lucas polinomları için üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) t^n = \frac{2b(1-xt) + st}{(1-xt-t^2)}$$

(Singh, 2014).

n, r tamsayıları ve $n > r$ için Catalan özdeşliği

$$F_{n-r}(x)F_{n+r}(x) - F_n^2(x) = (-1)^{n-r-1} F_r^2(x)$$

şeklindedir.

Yukardaki eşitlikte $r = 1$ için Cassini özdeşliği

$$F_{n-1}(x)F_{n+1}(x) - F_n^2(x) = (-1)^n$$

şeklinde elde edilir.

a, b, c, d ve r tamsayılar olmak üzere $a + b = c + d$ için genel lineer formülü

$$F_a(x)F_b(x) - F_c(x)F_d(x) = (-1)^r (F_{a-r}(x)F_{b-r}(x) - F_{c-r}(x)F_{d-r}(x))$$

olarak bulunmuştur. $n \leq m$ tamsayıları için; d'Ocagne's Özdeşliği

$$F_{n+1}(x)F_m(x) - F_n(x)F_{m+1}(x) = (-1)^{n-1} F_{m-n}(x)$$

olarak elde edilmiştir.

İlk n polinomun toplamı

$$\sum_{i=1}^n F_i(x) = \frac{F_{n+1}(x) + F_n(x) - 1}{x}$$

olarak bulunmuştur.

Teorem 2.1.7: Fibonacci polinomları için türev formülü

$$F'_n(x) = \frac{nF_{n+1}(x) - xF_n(x) + nF_{n-1}(x)}{x^2 + 4}$$

ile verilir.

İspat:

$$F'_n(x) = n \frac{\alpha^{n-1} - (-\alpha)^{-n-1}}{\alpha + \alpha^{-1}} \alpha' - \frac{\alpha^n - (-\alpha)^{-n}}{(\alpha + \alpha^{-1})^2} (1 - \alpha^{-2}) \alpha'$$

$$\alpha = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \text{ olmaktadır. Bu nedenle } \alpha' = \frac{\alpha}{\alpha + \alpha^{-1}} \text{ ve } 1 - \alpha^{-2} = \frac{x}{\alpha} \text{ dir. O}$$

halde

$$\begin{aligned} F'_n(x) &= n \frac{\alpha^n + (-\alpha)^{-n}}{(\alpha + \alpha^{-1})^2} - \frac{\alpha^n - (-\alpha)^{-n}}{\alpha + \alpha^{-1}} \frac{x}{(\alpha + \alpha^{-1})^2} \\ &= n \frac{\alpha^n + (-\alpha)^{-n}}{(\alpha + \alpha^{-1})^2} - \frac{x F_n(x)}{(\alpha + \alpha^{-1})^2} \end{aligned}$$

dir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) &= \frac{\alpha^{n+1} - (-\alpha)^{-n-1}}{\alpha + \alpha^{-1}} + \frac{\alpha^{n-1} - (-\alpha)^{-n+1}}{\alpha + \alpha^{-1}} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} [\alpha^{n-1}(\alpha^2 + 1) - (-\alpha)^{-n-1}(1 + \alpha^2)] \\ &= \alpha^n + (-\alpha)^{-n} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Çeşitli Türev Özellikleri

$$\text{i. } F'_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (n-2i) \binom{n-i}{i} x^{n-1-2i}, \quad n \geq 1 \text{ için}$$

$$\text{ii. } F''_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (n-2i)(n-1-2i) \binom{n-i}{i} x^{n-2-2i}, \quad n \geq 2 \text{ için}$$

$$\text{iii. } \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x) F_{n-i}(x) = \frac{x(n-1)F_n(x) + 2nF_{n-1}(x)}{x^2 + 4}, \quad n > 1 \text{ için}$$

$$\text{iv. } F'_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (-1)^i (n-2i) F_{n-2i}(x), \quad n \geq 1 \text{ için}$$

$$\text{v. } F_n(x) = \frac{1}{n} [F'_{n+1}(x) + F'_{n-1}(x)] \quad n \geq 1 \text{ için}$$

2.2 Pell, Pell Lucas Sayı ve Polinom Dizileri

Tanım 2.2.1. $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olmak üzere; $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Pell sayı dizisi denir. Pell dizisinin Binet

formülü $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ ve $r_2 = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere $P_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$ şeklindedir. Negatif

indisli Pell sayı dizisi $P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$ şeklinde tanımlanır (Horadam, Mahon, 1985).

Pell sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n = \frac{x}{1 - 2x - x^2}$$

şeklinde olup Simpson formülü

$$P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^n P_k = \frac{1}{2} (P_{n+1} + P_n - 1)$$

şeklinde verilir (Horadam, 1971).

Tanım 2.2.2: $Q_0 = 2$ ve $Q_1 = 1$ olmak üzere; $Q_{n+1} = 2Q_n + Q_{n-1}$ yineleme bağıntısı

ile verilen $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Pell Lucas sayı dizisi denir. Pell Lucas

dizisinin Binet formülü $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ ve $r_2 = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere $Q_n = r_1^n + r_2^n$

şeklindedir. Negatif indisli Pell Lucas sayı dizisi $Q_{-n} = (-1)^{n+1} Q_n$ şeklinde tanımlanır (Horadam, Mahon, 1985).

Pell Lucas sayılarının üreteç fonksiyon

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n x^n = \frac{2-2x}{1-2x-x^2}$$

şeklinde tanımlandıktan sonra Simpson formülü

$$Q_{n+1}Q_{n-1} - Q_n^2 = 8(-1)^{n-1}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^n Q_k = \frac{1}{2}(Q_{n+1} + Q_n - 2)$$

şeklinde verilir (Horadam, 1971).

Pell ve Pell Lucas sayıları arasında aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$P_{m+n} = 2P_m Q_n - (-1)^n P_{m-n}$$

$$Q_m^2 = 2P_m^2 + (-1)^m$$

$$Q_{2m} = 2Q_m^2 - 2(-1)^m$$

(Horadam, 1971).

Tanım 2.2.3: $n \geq 0$ tamsayısı için; $\{P_n(x)\}$ Pell polinom dizisi, başlangıç şartları

$P_0(x) = 0$, $P_1(x) = 1$ olmak üzere;

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır (Horadam, 1971).

Tanım 2.2.4: $n \geq 0$ tamsayısı için; $\{Q_n(x)\}$ Pell Lucas polinom dizisi, başlangıç

şartları $Q_0(x) = 2$, $Q_1(x) = 2x$ olmak üzere;

$$Q_{n+2}(x) = 2xQ_{n+1}(x) + Q_n(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır (Horadam, Mahon, 1985).

$\lambda^2 + 2x\lambda - 1 = 0$ fark denklemi kullanılarak kökler; $r_1(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$,
 $r_2(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ şeklinde bulunur. Pell ve Pell Lucas polinomu için Binet formülleri;

$$P_n(x) = \frac{r_1^n(x) - r_2^n(x)}{r_1(x) - r_2(x)},$$

$$Q_n(x) = r_1^n(x) + r_2^n(x)$$

şeklinde verilir (Horadam, 1971).

Pell ve Pell Lucas polinomu için üreteç fonksiyonları;

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_{r+1}(x)y^r = \frac{1}{1-2xy-y^2},$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} Q_{r+1}(x)y^r = \frac{2x+2y}{1-2xy-y^2}$$

şeklinde verilir (Horadam, 1995).

$P_n(x)$, $Q_n(x)$ için Temel Özellikler

$$i) \quad P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = Q_n(x) = 2xP_n(x) + 2P_{n-1}(x)$$

$$ii) \quad Q_{n+1}(x) + Q_{n-1}(x) = 4(x^2 + 1)P_n(x)$$

$$iii) \quad P_n(x)Q_n(x) = P_{2n}(x)$$

$$iv) \quad Q_{2n}(x) = \frac{1}{2} \{Q_n^2(x) + 4(x^2 + 1)P_n^2(x)\}$$

$$v) \quad P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) - P_n^2(x) = (-1)^n$$

$$vi) \quad Q_{n+1}(x)Q_{n-1}(x) - Q_n^2(x) = (-1)^{n-1} 4(x^2 + 1)$$

$$vii) \quad P_{n+1}^2(x) - P_{n-1}^2(x) = 2xP_{2n}(x)$$

$$viii) \quad 4(x^2 + 1)P_n^2(x) - Q_n^2(x) = 4(-1)^{n-1}$$

$$ix) Q_{4n}(x) - 2 = 4(x^2 + 1)P_{2n}^2(x)$$

$$x) P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + Q_{n-1}(x)Q_{n+1}(x) = (4x^2 + 5)P_n^2(x) + (-1)^{n-1}(4x^2 - 1)$$

$P_n(x), Q_n(x)$ için Temel Toplam Formülleri

$$i) \sum_{r=1}^n P_{2r}(x) = (P_{2n+1}(x) - 1)/2x$$

$$ii) \sum_{r=1}^n P_{2r-1}(x) = P_{2n}(x)/2x$$

$$iii) \sum_{r=1}^n P_r(x) = (P_{n+1}(x) + P_n(x) - 1)/2x$$

$$iv) \sum_{r=1}^n Q_{2r}(x) = (Q_{2n+1}(x) - 2x)/2x$$

$$v) \sum_{r=1}^n Q_{2r-1}(x) = (Q_{2n}(x) - 2)/2x$$

$$vi) \sum_{r=1}^n Q_r(x) = (Q_{n+1}(x) + Q_n(x) - 2 - 2x)/2x$$

$$vii) P_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-m-1}{m} (2x)^{n-2m-1}$$

$$viii) Q_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n}{n-m} \binom{n-m}{m} (2x)^{n-m}, n \neq 0$$

Teorem 2.2.5: $n > 0$ olmak üzere Pell Lucas polinomlarının x 'e göre türevi aşağıdaki gibi verilir:

$$\frac{dQ_n(x)}{dx} = 2nP_n(x)$$

2.3 Jacobsthal, Jacobsthal Lucas Sayı ve Polinom Dizileri

Tanım 2.3.1: $j_0 = 0, j_1 = 1$ olmak üzere; $j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{j_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki sayı dizisine Jacobsthal sayı dizisi denir. Yineleme

bağıntısının fark denklemi $x^2 - x - 2 = 0$ şeklinde elde edilir. Bu denklemin kökleri 2 ve -1 sayılarıdır (Horadam, Flipponi, 1997).

Tanım 2.3.2: $c_0 = 2$, $c_1 = 1$ olmak üzere; $c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sayı dizisine Jacobsthal Lucas sayı dizisi denir (Koshy, 2001).

Teorem 2.3.3: Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları için Binet formülü

$$j_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

ve

$$c_n = x_1^n + x_2^n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindedir (Horadam, Flipponi, 1997).

Önerme 2.3.4 (Catalan özdeşliği): $n > 0$ tamsayısı için

$$j_{n-r} j_{n+r} - j_n^2 = (-1)^{n+1-r} j_r^2 2^{n-r}$$

eşitliği sağlanır (Horadam, Flipponi, 1997).

Önerme 2.3.5 (D'ocagne özdeşliği): $m, n > 0$ tamsayıları ve $m > n$ için

$$j_m j_{n+1} - j_{m+1} j_n = (-2)^n j_{m-n}$$

dir (Horadam, Flipponi, 1997).

Teorem 2.3.6: k herhangi iki tamsayı olmak üzere, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının üreteç fonksiyonları için

$$\sum_{k=0}^{\infty} j_k x^k = \frac{x}{1-x-2x^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \frac{2-x}{1-x-2x^2}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.3.7: n, k herhangi iki tamsayı olmak üzere, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının kısmi toplam formülü

$$\sum_{i=2}^n j_i = \frac{1}{2}(j_{n+2} - 3)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i = \frac{1}{2}(c_{n+2} - 5)$$

şekilde yazılır.

Tanım 2.3.8: $\{J_n(x)\}$ Jacobsthal polinomlar ve $\{j_n(x)\}$ Jacobsthal Lucas polinomlar dizisini göstermek üzere aşağıdaki yineleme bağıntıları kullanılarak tanımlanır:

$$J_{n+2}(x) = J_{n+1}(x) + 2xJ_n(x), \quad J_0(x) = 0, \quad J_1(x) = 1$$

$$j_{n+2}(x) = j_{n+1}(x) + 2xj_n(x), \quad j_0(x) = 2, \quad j_1(x) = 1$$

$\{J_n(x)\}$ ve $\{j_n(x)\}$ polinomlar dizisi için karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - \lambda - 2x = 0$$

şeklinde verilir. Bu denklemin kökleri

$$r_1(x) = \frac{1 + \sqrt{8x+1}}{2} \quad \text{ve} \quad r_2(x) = \frac{1 - \sqrt{8x+1}}{2}$$

olarak bulunur. Kökler arasında

$$r_1(x) + r_2(x) = 1$$

$$r_1(x)r_2(x) = -2x$$

$$r_1(x) - r_2(x) = \sqrt{8x+1} = \Delta(x)$$

$$\Delta(1) = 3$$

Bağıntıları kolaylıkla görülebilir. Diğer taraftan

$$r_1^2(x) + 2x = \Delta(x)r_1(x)$$

$$r_2^2(x) + 2x = -\Delta(x)r_2(x)$$

eşitlikleri de geçerlidir.

İlk 10 Jacobsthal polinomu $\{J_n(x)\}: 0 \leq n \leq 10$ aşağıdaki gibi verilir:

$$J_0(x) = 0$$

$$J_1(x) = 1$$

$$J_2(x) = 1$$

$$J_3(x) = 1 + 2x$$

$$J_4(x) = 1 + 4x$$

$$J_5(x) = 1 + 6x + 4x^2$$

$$J_6(x) = 1 + 8x + 12x^2$$

$$J_7(x) = 1 + 10x + 24x^2 + 8x^3$$

$$J_8(x) = 1 + 12x + 40x^2 + 32x^3$$

$$J_9(x) = 1 + 14x + 60x^2 + 80x^3 + 16x^4$$

$$J_{10}(x) = 1 + 16x + 84x^2 + 160x^3 + 80x^4$$

İlk 10 Jacobsthal - Lucas polinomu $\{j_n(x)\}: 0 \leq n \leq 10$ aşağıdaki gibi verilir:

$$j_0(x) = 2$$

$$j_1(x) = 1$$

$$j_2(x) = 1 + 4x$$

$$j_3(x) = 1 + 6x$$

$$j_4(x) = 1 + 8x + 8x^2$$

$$j_5(x) = 1 + 10x + 20x^2$$

$$j_6(x) = 1 + 12x + 36x^2 + 16x^3$$

$$j_7(x) = 1 + 14x + 56x^2 + 56x^3$$

$$j_8(x) = 1 + 16x + 80x^2 + 128x^3 + 32x^4$$

$$j_9(x) = 1 + 18x + 108x^2 + 240x^3 + 144x^4$$

$$j_{10}(x) = 1 + 20x + 140x^2 + 400x^3 + 400x^4 + 64x^5$$

$\{J_n(x)\}$ Jacobsthal polinomlar ve $\{j_n(x)\}$ Jacobsthal Lucas polinomlar dizisinin üreteç fonksiyonları

$$\sum_{i=1}^{\infty} J_i(x) y^{1-i} = (1 - y - 2xy^2)^{-1}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} j_i(x) y^{i-1} = (1 + 4xy)(1 - y - 2xy^2)^{-1}$$

şeklinde elde edilir. $\{J_n(x)\}$ Jacobsthal polinomlar ve $\{j_n(x)\}$ Jacobsthal Lucas polinomlar dizisinin Binet formülleri

$$J_n(x) = \frac{r_1^n(x) - r_2^n(x)}{\Delta(x)}$$

ve

$$j_n(x) = r_1^n(x) + r_2^n(x)$$

şeklinde verilir. $\{J_n(x)\}$ Jacobsthal polinomlar ve $\{j_n(x)\}$ Jacobsthal Lucas polinomlar dizisinin Simpson formülleri

$$J_{n+1}(x)J_{n-1}(x) - J_n^2(x) = (-1)^n (2x)^{n-1}$$

$$j_{n+1}(x)j_{n-1}(x) - j_n^2(x) = -\Delta^2(x)(-1)^n (2x)^{n-1}$$

$$= -\Delta^2(x)(J_{n+1}(x)J_{n-1}(x) - J_n^2(x))$$

şeklinde dir. Jacobsthal polinomlar ve Jacobsthal Lucas polinomlar dizisinin kısmi toplam formülleri

$$\sum_{i=1}^n J_i(x) = \frac{J_{n+2}(x) - 1}{2x}$$

ve

$$\sum_{i=0}^n j_i(x) = \frac{j_{n+2}(x) - 1}{2x}$$

dir. $\{J_n(x)\}$ Jacobsthal polinomlar ve $\{j_n(x)\}$ Jacobsthal Lucas polinomlar dizisinin kapalı formları

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-r}{r} (2x)^r$$

ve

$$j_n(x) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} (2x)^r$$

dir (Horadam, 1997). $\{J_n(x)\}$ Jacobsthal polinomlar ve $\{j_n(x)\}$ Jacobsthal Lucas polinomlar dizisi için çeşitli eşitlikler aşağıdaki gibi verilir:

$$i) \quad j_n(x)J_n(x) = J_{2n}(x)$$

$$ii) \quad j_n(x) = J_{n+1}(x) + 2xJ_{n-1}(x)$$

$$iii) \quad \Delta^2(x)J_n(x) = j_{n+1}(x) + 2xj_{n-1}(x)$$

$$iv) \quad J_n(x) + j_n(x) = 2J_{n+1}(x)$$

$$v) \Delta^2(x)J_n(x) + j_n(x) = 2j_{n+1}(x)$$

$$vi) \Delta(x)J_n(x) + j_n(x) = 2\alpha^n(x)$$

$$vii) \Delta(x)J_n(x) - j_n(x) = -2\beta^n(x)$$

$$viii) J_m(x)j_n(x) + J_n(x)j_m(x) = 2J_{m+n}(x)$$

$$ix) j_m(x)j_n(x) + \Delta^2(x)J_m(x)J_n(x) = 2j_{m+n}(x)$$

Teorem 2.3.9: $n > 0$ olmak üzere Jacobsthal Lucas polinomlarının x 'e göre türevi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{dj_n(x)}{dx} = 2nJ_{n-1}(x)$$

İspat:

$$j_n(x) = r_1^n(x) + r_2^n(x) \text{ denkleminde } r_1(x) = \frac{1 + \sqrt{8x+1}}{2}, \quad r_2(x) = \frac{1 - \sqrt{8x+1}}{2}$$

değerleri yerine yazılır ve türevi alınır

$$\begin{aligned} (r_1^n(x) + r_2^n(x))' &= \left(\left(\frac{1 + \sqrt{8x+1}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{8x+1}}{2} \right)^n \right)' \\ &= n \left(\frac{1 + \sqrt{8x+1}}{2} \right)^{n-1} \frac{8}{4\sqrt{8x+1}} + n \left(\frac{1 - \sqrt{8x+1}}{2} \right)^{n-1} \frac{-8}{4\sqrt{8x+1}} \\ &= 2n \frac{r_1^{n-1}(x)}{\sqrt{8x+1}} - 2n \frac{r_2^{n-1}(x)}{\sqrt{8x+1}} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur $r_1(x) - r_2(x) = \sqrt{8x+1} = \Delta(x)$ ifadesi eşitlikte yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$= 2n \frac{r_1^{n-1}(x)}{r_1(x) - r_2(x)} - 2n \frac{r_2^{n-1}(x)}{r_1(x) - r_2(x)}$$

$$\begin{aligned}
&= 2n \left(\frac{r_1^{n-1}(x)}{r_1(x) - r_2(x)} - \frac{r_2^{n-1}(x)}{r_1(x) - r_2(x)} \right) \\
&= 2n \left(\frac{r_1^{n-1}(x)}{\Delta(x)} - \frac{r_2^{n-1}(x)}{\Delta(x)} \right) \\
&= 2n \left(\frac{r_1^{n-1}(x) - r_2^{n-1}(x)}{\Delta(x)} \right) \\
&= 2n J_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.3.10: Jacobsthal polinomlarının x 'e göre türevi aşağıdaki gibidir:

$$\Delta^2(x) \frac{dJ_n(x)}{dx} = 2n j_{n-1}(x) - 4J_n(x)$$

İspat:

$$J_n(x) = \frac{r_1^n(x) - r_2^n(x)}{\Delta(x)} \text{ denkleminde } r_1(x) = \frac{1 + \sqrt{8x+1}}{2}, \quad r_2(x) = \frac{1 - \sqrt{8x+1}}{2}$$

ve $\sqrt{8x+1} = \Delta(x)$ değerleri yerine yazılır türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\Delta^2(x) \frac{dJ_n(x)}{dx} &= (8x+1) \left(\frac{\left(\frac{1 + \sqrt{8x+1}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{8x+1}}{2} \right)^n}{\sqrt{8x+1}} \right)' \\
&= (8x+1) \frac{\left(n \left(\frac{1 + \sqrt{8x+1}}{2} \right)^{n-1} \frac{8}{4\sqrt{8x+1}} + n \left(\frac{1 - \sqrt{8x+1}}{2} \right)^{n-1} \frac{8}{4\sqrt{8x+1}} \right) \sqrt{8x+1} - \left(\left(\frac{1 + \sqrt{8x+1}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{8x+1}}{2} \right)^n \right) \frac{8}{2\sqrt{8x+1}}}{8x+1}
\end{aligned}$$

elde edilen denklemde $\frac{1+\sqrt{8x+1}}{2} = r_1(x)$ ve $\frac{1-\sqrt{8x+1}}{2} = r_2(x)$ değerleri

yerine yazılırsa gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki forma dönüşür

$$= 2n(r_1^{n-1} + r_2^{n-1}) - \left(\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \right) 4$$

$$= 2nj_{n-1}(x) - 4J_n(x)$$

şeklinde olur. Bu da bize ispatı verir.



BÖLÜM 3

HORADAM SAYI ve POLİNOM DİZİLERİ

Bu bölümdeki bilgiler Tugba Horzum'un yüksek lisans tezinden faydalanılarak yazılmıştır.

3.1 Horadam Sayı Dizileri

Tanım 3.1.1: $n \geq 2$; $a, b, p, q \in \mathbb{Z}$ ve $p^2 + 4q \neq 0$ olmak üzere;

$$h_n(a, b; p, q) = ph_{n-1}(a, b; p, q) + qh_{n-2}(a, b; p, q) \quad (3.1.1)$$

rekürans bağıntısı ve

$$h_0(a, b; p, q) = a, \quad h_1(a, b; p, q) = b \quad (3.1.2)$$

başlangıç şartları ile tanımlanan diziye Horadam dizisi denir (Horzum, Koçer, 2009).

(3.1.1) bağıntısının karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0 \quad (3.1.3)$$

olup (3.1.3) denkleminin kökleri

$$r_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \quad \text{ve} \quad r_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

dir. Kökler toplam fark ve çarpımı $r_1 + r_2 = p$, $r_1 - r_2 = \sqrt{p^2 + 4q}$, $r_1 \cdot r_2 = -q$ ile verilir.

Horadam dizisinin ilk birkaç elemanını tabloda görebiliriz.

n	$h_n(a, b; p, q)$
0	a
1	b
2	$pb + qa$
3	$p^2b + pqa + qb$
4	$p^3b + p^2qa + 2pqb + q^2a$
5	$p^4b + p^3qa + 3p^2qb + 2pq^2a + q^2b$
6	$p^5b + p^4qa + 4p^3qb + 3p^2q^2a + 3pq^2b + q^3a$

$h_n(a, b; p, q)$, n. Horadam sayısı olmak üzere, Horadam dizisi için bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir.

- 1) $a = 0, b = 1; p = q = 1$ için $h_n(0, 1; 1, 1) = f_n$ olup f_n , n. Fibonacci sayısıdır.
- 2) $a = 2, b = 1; p = q = 1$ için $h_n(2, 1; 1, 1) = l_n$ olup l_n , n. Lucas sayısıdır.
- 3) $a = 0, b = 1; p = 2, q = 1$ için $h_n(0, 1; 2, 1) = p_n$ olup p_n , n. Pell sayısıdır.
- 4) $a = 2, b = 2; p = 2, q = 1$ için $h_n(2, 2; 2, 1) = q_n$ olup q_n , n. Pell-Lucas sayısıdır.
- 5) $a = 0, b = 1; p = 1, q = 2$ için $h_n(0, 1; 1, 2) = j_n$ olup j_n , n. Jacobsthal sayısıdır.
- 6) $a = 2, b = 1; p = 1, q = 1$ için $h_n(2, 1; 1, 2) = c_n$ olup c_n , n. Jacobsthal-Lucas sayısıdır.
- 7) $p = q = 1$ için $h_n(a, b; 1, 1) = \tau_n$ dir. τ_n , n. Tagiuri sayısıdır.

Teorem 3.1.2: $h(t)$ Horadam sayılarının üreteç fonksiyonu

$$h(t) = \frac{a + t(b - ap)}{1 - pt - qt^2}$$

şeklinde verilir (Horadam, 1965).

Teorem 3.1.3: Horadam dizisinin tek ve çift indisli elemanlarından oluşan dizilerin üreteç fonksiyonları sırasıyla;

$$h_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_{2n+1} t^n = \frac{bt - qt^3(b - ap)}{(1 - pt - qt^2)(1 + pt - qt^2)}$$

ve

$$h_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_{2n} t^n = \frac{a(1 - qt^2) + pt^2(b - ap)}{(1 - pt - qt^2)(1 + pt - qt^2)}$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.4 (Binet Formülü): Horadam dizisi için Binet formülü

$$h_n(a, b; p, q) = \frac{(b - r_2 a) r_1^n - (b - r_1 a) r_2^n}{r_1 - r_2}$$

şeklindedir.

İspat: İspat için farklı yöntemler kullanılabilir ama burada Horadam sayı dizileri için üreteç fonksiyonu kullanılacaktır.

Bu ifadeyi basit kesirlerine ayırırsak

$$H(x, t) = \frac{a + t(b - ap)}{(1 - r_1 t)(1 - r_2 t)} = \frac{A}{1 - r_1 t} + \frac{B}{1 - r_2 t} \quad (3.1.4)$$

şekline dönüşür. Payda eşitleme yapıldığında

$$\begin{aligned} A + B &= a \\ Ar_2 + Br_1 &= -(b - ap) \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülürse

$$A = \frac{b - ar_2}{r_1 - r_2} \quad \text{ve} \quad B = -\frac{b - ar_1}{r_1 - r_2}$$

elde edilir. Bu değerler (3.1.4) de yerine yazılırsa

$$H(x, t) = \frac{\frac{b-ar_2}{r_1-r_2}}{1-r_1t} - \frac{\frac{b-ar_1}{r_1-r_2}}{1-r_2t} = \frac{1}{r_1-r_2} \left[\frac{b-ar_2}{1-r_1t} - \frac{b-ar_1}{1-r_2t} \right]$$

bulunur. $\sum_{n=1}^{\infty} ab^{n-1}x^{n-1} = \frac{a}{1-bx}$ ifadesinden faydalanılırsa

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_{n-1}t^{n-1} = \frac{1}{r_1-r_2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (b-ar_2)r_1^{n-1}t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (b-ar_1)r_2^{n-1}t^{n-1} \right] \\ &= \frac{1}{r_1-r_2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left[(b-ar_2)r_1^{n-1} - (b-ar_1)r_2^{n-1} \right] t^{n-1} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$h_{n-1} = \frac{(b-ar_2)r_1^{n-1} - (b-ar_1)r_2^{n-1}}{r_1-r_2}$$

olur. Dolayısıyla $A_1 = b-ar_2$ ve $A_2 = b-ar_1$ olmak üzere Horadam dizisinin Binet formülü

$$h_{n-1}(x) = \frac{A_1r_1^{n-1} - A_2r_2^{n-1}}{r_1-r_2}$$

şeklindedir.

Lemma 3.1.6: $n \geq l$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \left(\frac{n}{n-k} \right) \binom{n-k}{k} = 2 \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} - \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-k}{k}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 3.1.7: h_n , n . Horadam sayısı ve $n \geq 0$ olmak üzere; Horadam dizisi için kısmi toplam formülü

$$\sum_{n=1}^{k-1} h_n = \frac{h_k + qh_{k-1} - a - b + ap}{p + q - 1}$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.8 (Cassini Özdeşliği): $n \geq 0$ ve h_n, n . Horadam sayıları olmak üzere;

$$h_{n+1}h_{n-1} - h_n^2 = (b^2 - abp - a^2q)(-1)^{n-1}q^{n-2}$$

dir (Horadam, 1965).

Teorem 3.1.9 (Catalan Özdeşliği): $n \geq 0, n \geq r$ ve h_n, n . Horadam sayıları olmak üzere;

$$h_n^2 - h_{n+r}h_{n-r} = \frac{(-q)^{n-r-1}[bh_{r+1} - ah_{r+2}]^2}{b^2 - abpq - a^2q}$$

şeklindedir

Teorem 3.1.10 (D'Ocagne's Özdeşliği): $n \geq 0, m \geq 0$ ve h_n, n . Horadam sayıları olmak üzere;

$$h_m h_{n+1} - h_n h_{m+1} = (-q)^{n-1}[bh_{m-n+1} - ah_{m-n+2}]$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 3.1.11 (Honsberger Özdeşliği): $n \geq 2, m \geq 2, h_n, n$. Horadam sayıları olmak üzere;

$$h_{m+n} = \frac{[(bp - ap^2 - aq)h_{m+1} + q(b - ap)h_m]h_n + q[(b - ap)h_{m+1} - aqh_m]h_{n-1}}{b^2 - abp - a^2q}$$

biçimindedir.

Teorem 3.1.12 (Konvolüsyon Özdeşliği): $n \geq 2, m \geq 2, h_n, n$. Horadam sayıları olmak üzere;

$$h_{m+n} = h_m h_{n+1} + qh_n h_{m-1}$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.13: $n \geq 0, m \geq 0, r \geq 0, h_n, n$. Horadam sayıları ve

$$W = h_m h_n - h_{m-r} h_{n+r}$$

olmak üzere

$$W = (-q)^{m-r-1} \frac{[bh_{r+1} - ah_{r+2}][bh_{n+r-m+1} - ah_{n+r-m+2}]}{b^2 - abp - a^2q}$$

dir.

Teorem 3.1.14: $A_1 = b - ar_2$ ve $A_2 = b - ar_1$ olmak üzere;

$$\sum_{n=1}^k h_n^2 = \frac{h_{k+1}(h_{k+1} - q^2 h_{k-1}) - A_1 A_2 \left(2 \frac{1 - (-q)^k}{1 + q} + (-q)^k \right) + (b - ap)^2 - a^2}{(p^2 + 2q - q^2 - 1)}$$

dir (Horzum, Koçer, 2009).

3.2 Horadam Polinomu Dizileri

Bu bölümde Horadam sayılarının genelleştirmesi olan Horadam polinomunu tanımlayarak bu polinomun özelliklerini inceleyeceğiz. Bu bölümdeki bilgiler Tugba Horzum'un yüksek lisans tezinden faydalanılarak yazılmıştır. Horadam polinomunu $h_n(x; a, b, p, q)$ ya da kısaca $h_n(x)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.2.1: $n \geq 3$; a, b, p, q reel sayılar ve $p^2 x^2 + 4q \neq 0$ olmak üzere;

$$h_n(x; a, b, p, q) = pxh_{n-1}(x; a, b, p, q) + qh_{n-2}(x; a, b, p, q)$$

rekürans bağıntısı ve $h_1(x; a, b, p, q) = a$, $h_2(x; a, b, p, q) = bx$ başlangıç şartları ile tanımlanan polinom dizisine Horadam polinom dizisi denir (Horadam, 1965).

Bu bağıntının karakteristik denklemi $t^2 - pxt - q = 0$ olup, kökleri

$$r_1 = \frac{px + \sqrt{p^2 x^2 + 4q}}{2} \quad \text{ve} \quad r_2 = \frac{px - \sqrt{p^2 x^2 + 4q}}{2}$$

dir. Kökler toplam fark ve çarpımı $r_1 + r_2 = px$, $r_1 - r_2 = \sqrt{p^2 x^2 + 4q}$, $r_1 r_2 = -q$ ile verilir.

Horadam polinomunun ilk birkaç elemanını aşağıdaki tabloda verilebilir.

n	$h_n(x; a, b, p, q)$
1	a
2	bx
3	$bp^2x^2 + aq$
4	$bp^3x^3 + (apq + bq)x$
5	$bp^4x^4 + (ap^2q + 2bpq)x^2 + aq^2$
6	$bp^5x^5 + (ap^3q + 3bp^2q)x^3 + (2apq^2 + bq^2)x$
7	$bp^6x^6 + (ap^4q + 4bp^3q)x^4 + (3ap^2q^2 + 3bpq^2)x^2 + aq^3$

$h_n(a, b; p, q)$, n . Horadam sayısı olmak üzere, Horadam dizisi için bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir.

1) $a = b = p = q = 1$ için Horadam polinomu, Fibonacci polinomuna dönüşür. Yani

$$h_n(x; 1, 1, 1, 1) = F_n(x) \text{ dir.}$$

2) $a = 2, b = p = q = 1$ için Horadam polinomu, Lucas polinomuna dönüşür. Yani

$$h_n(x; 2, 1, 1, 1) = L_{n-1}(x) \text{ dir.}$$

3) $a = q = 1, b = p = 2$ için Horadam polinomu, Pell polinomuna dönüşür. Yani

$$h_n(x; 1, 2, 2, 1) = P_n(x) \text{ dir.}$$

4) $a = b = p = 2, q = 1$ için Horadam polinomu, Pell-Lucas polinomuna dönüşür. Yani

$$h_n(x; 2, 2, 2, 1) = Q_{n-1}(x) \text{ dir.}$$

5) $a = b = p = x = 1, q = 2y$ için Horadam polinomu, Jacobsthal polinomuna dönüşür.

Yani

$$h_n(1; 1, 1, 1, 2y) = J_n(y) \text{ dir.}$$

6) $a=2, b=p=x=1, q=2y$ için Horadam polinomu, Jacobsthal-Lucas polinomuna dönüşür. Yani

$$h_n(1;2,1,1,2y) = j_{n-1}(y) \text{ dir.}$$

7) $a=1, b=1, p=2, q=-1$ için Horadam polinomu, birinci çeşit Chebyshev polinomuna dönüşür. Yani

$$h_n(x;1,1,2,-1) = T_{n-1}(x) \text{ dir.}$$

8) $a=1, b=p=2, q=-1$ için Horadam polinomu, ikinci çeşit Chebyshev polinomuna dönüşür. Yani

$$h_n(x;1,2,2,-1) = U_{n-1}(x) \text{ dir.}$$

9) $x=1$ için Horadam polinomu Horadam sayılarına dönüşür. Yani

$$h_n(1; a, b, p, q) = h_{n-1}(a, b; p, q) \text{ dir.}$$

Teorem 3.2.2 : $n \geq 1$; a, b, p, q tamsayılar ve $h_n(x)$, n . Horadam polinomu olmak üzere

$$h_{n+1}(x) = a \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} (px)^{n-2k} q^k + \left(\frac{b}{p} - a \right) \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-k}{k} (px)^{n-2k} q^k$$

şeklinde ifade edilir.

Lemma 3.2.3: $n \geq 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \left(\frac{n}{n-k} \right) \binom{n-k}{k} (x)^{n-2k} = 2 \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} (x)^{n-2k} - \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-k}{k} (x)^{n-2k}$$

eşitliği geçerlidir.

Tanım 3.2.4: $g_1, g_2, g_3, \dots$ tek değişkenli fonksiyonların kümesi olmak üzere

$G(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) t^{n-1}$ ifadesine $\{g_n(x)\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir.

Teorem 3.2.5: $\{h_n(x)\}$ Horadam polinomları dizisinin üreteç fonksiyonu

$$H(x, t) = \frac{a + xt(b - ap)}{1 - pxt - qt^2}$$

şeklinde verilir.

Teorem 3.2.6: Horadam polinom dizisinin tek ve çift üreteç fonksiyonları sırasıyla;

$$H_1(x, t) = \frac{bxt - qxt^3(b - ap)}{(1 - pxt - qt^2)(1 + pxt - qt^2)}$$

ve

$$H_2(x, t) = \frac{a(1 - qt^2) + px^2t^2(b - ap)}{(1 - pxt - qt^2)(1 + pxt - qt^2)}$$

dir.

Teorem 3.2.7: $h_n(x)$, n . Horadam polinomu ve $n \geq 0$ olmak üzere; Horadam polinom dizisinin kısmi toplam formülü

$$\sum_{n=1}^{k-1} h_n(x) = \frac{h_k(x) + qh_{k-1}(x) - a - x(b - ap)}{px + q - 1}$$

şeklinde yazılır.

Teorem 3.2.8 (Cassini Özdeşliği): $n \geq 0$ için

$$h_{n+1}(x)h_{n-1}(x) - h_n^2(x) = (b^2x^2 - abpx^2 - a^2q)(-1)^{n-1}q^{n-2}$$

dir.

Teorem 3.2.9 (Catalan Özdeşliği): $n \geq 0$, $n \geq r$ olmak üzere;

$$h_n^2(x) - h_{n+r}(x)h_{n-r}(x) = \frac{(-q)^{n-r-1}[bxh_{r+1}(x) - ah_{r+2}(x)]^2}{b^2x^2 - abpqx^2 - a^2q}$$

dir.

Teorem 3.2.10 (D'Ocagne's Özdeşliği): $n \geq 0$, $m \geq 0$ olmak üzere;

$$h_m(x)h_{n+1}(x) - h_n(x)h_{m+1}(x) = (-q)^{n-1}[bxh_{m-n+1}(x) - ah_{m-n+2}(x)]$$

dir.

Teorem 3.2.11 (Honsberger Özdeşliği): $n \geq 2$, $m \geq 2$ olmak üzere;

$$h_{m+n}(x) = \frac{[(bpx^2 - ap^2x^2 - aq)h_{m+1}(x) + qx(b - ap)h_m(x)]h_n(x)}{b^2x^2 - abpx^2 - a^2q} + \frac{q[x(b - ap)h_{m+1}(x) - aqh_m(x)]h_{n-1}(x)}{b^2x^2 - abpx^2 - a^2q}$$

dir.

Teorem 3.2.12: $n \geq 0$, $m \geq 0$, $r \geq 0$, ve

$$W = h_m(x)h_n(x) - h_{m-r}(x)h_{n+r}(x)$$

olmak üzere

$$W = (-q)^{m-r-1} \frac{[bxh_{r+1}(x) - ah_{r+2}(x)][bxh_{n+r-m+1}(x) - ah_{n+r-m+2}(x)]}{b^2x^2 - abpx^2 - a^2q}$$

dir.

Teorem 3.2.13: $h_n(x)$, n . Horadam polinomu, $A_1 = bx - ar_2$ ve $A_2 = bx - ar_1$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^k h_n^2(x) = \frac{h_{k+1}(x)(h_{k+1}(x) - q^2h_{k-1}(x)) - A_1A_2 \left(2 \frac{1 - (-q)^k}{1 + q} + (-q)^k \right) + x^2(b - ap)^2 - a^2}{(p^2x^2 + 2q - q^2 - 1)}$$

dir .

BÖLÜM 4

GENELLEŞTİRİLMİŞ k -HORADAM DİZİSİ

Tanım 4.1: k herhangi bir pozitif reel sayı ve $f(k), g(k)$ skaler değerli polinomlar olsun. $n \geq 0$ için $f^2(k) + 4g(k) > 0$, olmak üzere genelleştirilmiş k -Horadam dizisi $\{H_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$H_{k,n+2} = f(k)H_{k,n+1} + g(k)H_{k,n} \quad (4.1)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlı ve başlangıç koşulu $H_{k,0} = a, H_{k,1} = b$ dır. Karakteristik denklemi

$$\lambda^2 = f(k)\lambda + g(k) \quad (4.2)$$

olup kökleri

$$r_1 = \frac{f(k) + \sqrt{f^2(k) + 4g(k)}}{2} \quad \text{ve} \quad r_2 = \frac{f(k) - \sqrt{f^2(k) + 4g(k)}}{2}, \quad (r_1 > r_2)$$

şeklindedir. r_1, r_2 sayıları için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$r_1 + r_2 = f(k), \quad r_1 - r_2 = \sqrt{f^2(k) + 4g(k)}, \quad r_1 r_2 = -g(k). \quad (4.3)$$

Lemma 4.2: r_1 ve r_2 (4.2) denkleminin kökleri olmak üzere

$$H_{k,n} = r_1 H_{k,n-1} + (H_{k,1} - r_1 H_{k,0}) r_2^{n-1} \quad (4.4)$$

eşitliği geçerlidir (Yazlik, Taşkara, 2012).

İspat: (4.3) kullanarak, (4.1) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$H_{k,n} = (r_1 + r_2)H_{k,n-1} - (r_1 r_2)H_{k,n-2},$$

$$H_{k,n} - r_1 H_{k,n-1} = r_2 (H_{k,n-1} - r_1 H_{k,n-2}). \quad (4.5)$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} H_{k,n-1} &= (r_1 + r_2) H_{k,n-2} - (r_1 r_2) H_{k,n-3}, \\ H_{k,n-1} &= r_1 H_{k,n-2} + r_2 H_{k,n-2} - (r_1 r_2) H_{k,n-3}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

(4.5) denklemine (4.6) denklemi yerleştirilirse

$$H_{k,n} - r_1 H_{k,n-1} = r_2^2 (H_{k,n-2} - r_1 H_{k,n-3})$$

ve sürekli indirgeme işlemine devam edilirse

$$H_{k,n} - r_1 H_{k,n-1} = r_2^{n-1} (H_{k,1} - r_1 H_{k,0}),$$

olduğu görülebilir.

Teorem 4.3: Her $n \in N$ için, Binet formülü

$$H_{k,n} = \frac{A_1 r_1^n - A_2 r_2^n}{r_1 - r_2},$$

$A_1 = b - ar_2$ ve $A_2 = b - ar_1$ şeklinde olduğundan $H_{k,0} = a$, $H_{k,1} = b$ değerlerini yerine yazdığımızda $A_1 = H_{k,1} - H_{k,0} r_2$ ve $A_2 = H_{k,1} - H_{k,0} r_1$ şeklinde yazılır (Yazlık, Taşkara, 2012).

İspat: Lemma (4.2) deki (4.4) eşitliğinin her iki tarafını r_2^n ile bölersek

$$\frac{H_{k,n}}{r_2^n} = \frac{r_1}{r_2} \frac{H_{k,n-1}}{r_2^{n-1}} + \frac{H_{k,1} - r_1 H_{k,0}}{r_2}$$

elde edilir. Şimdi $\frac{H_{k,n}}{r_2^n} = v_n$ alalım. O zaman birinci dereceden lineer fark denklemi:

$$v_n = \frac{r_1}{r_2} v_{n-1} + \frac{H_{k,1} - r_1 H_{k,0}}{r_2}$$

şeklinde olur. Bu denklemin çözümü

$$v_n = H_{k,0} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^n + \frac{H_{k,1} - r_1 H_{k,0}}{r_2} \frac{\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^n - 1}{\left(\frac{r_1}{r_2} \right) - 1}$$

$$= \frac{1}{r_2^n} \left(r_1^n H_{k,0} + \frac{H_{k,1} - r_1 H_{k,0}}{r_2} \left(\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \right) \right) r_2$$

olur. En sonunda

$$H_{k,n} = \left(\frac{H_{k,1} - r_2 H_{k,0}}{r_1 - r_2} \right) r_1^n - \left(\frac{H_{k,1} - r_1 H_{k,0}}{r_1 - r_2} \right) r_2^n$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.4: Genelleştirilmiş k – Horadam denkleminin kısmi toplam formülü,

$q > p \geq 0$ için,

$$\sum_{i=0}^n H_{k,pi+q} = \frac{(-g(k))^p (H_{k,pn+q} - H_{k,q-p}) - H_{k,pn+p+q} + H_{k,q}}{(-g(k))^p - r_1^p - r_2^p + 1}$$

şeklindedir (Yazlık, Taşkara, 2012).

İspat: Genelleştirilmiş k – Horadam denklemin için Binet formülünü kullanılarak yukarıdaki sonucu ispat edilebilir. O zaman

$$A = \frac{H_{k,1} - r_2 H_{k,0}}{r_1 - r_2}, \quad B = \frac{H_{k,1} - r_1 H_{k,0}}{r_1 - r_2}$$

$$\sum_{i=0}^n H_{k,pi+q} = \sum_{i=0}^n \frac{Ar_1^{pi+q} - Br_2^{pi+q}}{r_1 - r_2} = \frac{Ar_1^q}{r_1 - r_2} \sum_{i=0}^n r_1^{pi} - \frac{Br_2^q}{r_1 - r_2} \sum_{i=0}^n r_2^{pi}$$

elde edilebilir. Geometrik dizi toplamından,

$$\sum_{i=0}^n H_{k,pi+q} = \frac{Ar_1^q}{r_1 - r_2} \left(\frac{r_1^{pn+p} - 1}{r_1^p - 1} \right) - \frac{Br_2^q}{r_1 - r_2} \left(\frac{r_2^{pn+p} - 1}{r_2^p - 1} \right)$$

bulunur. Teorem 4.3 ve (4.3) eşitliği dikkate alınırsa

$$\sum_{i=0}^n H_{k,pi+q} = \frac{(-g(k))^p (H_{k,pn+q} - H_{k,q-p}) - H_{k,pn+p+q} + H_{k,q}}{(-g(k))^p - r_1^p - r_2^p + 1}$$

elde edilir.

Genelleştirilmiş k – Horadam dizisi için Cassini özdeşliği aşağıdaki teorem kullanılarak verilir.

Teorem 4.5: Elemanları genelleştirilmiş k – Horadam sayıları olan

$$X_n = \begin{bmatrix} H_{k,m-1} & H_{k,m} \\ H_{k,m} & H_{k,m+1} \end{bmatrix} \text{ matrisinin determinanı } m \geq 1 \text{ için}$$

$$|X_m| = (-g(k))^{m-1} (a^2 g(k) + abf(k) - b^2)$$

şeklinde gösterilir.

İspat: m üzerindeki matematiksel tümevarım ilkesi kullanılırsa

$m=1$ için;

$$|X_1| = \begin{vmatrix} H_{k,0} & H_{k,1} \\ H_{k,1} & H_{k,2} \end{vmatrix} = (-g(k))^0 (a^2 g(k) + abf(k) - b^2)$$

Bunu $m=2$ için kolaylıkla görülür.

$$|X_2| = \begin{vmatrix} H_{k,1} & H_{k,2} \\ H_{k,2} & H_{k,3} \end{vmatrix} = (-g(k)) (a^2 g(k) + abf(k) - b^2)$$

$n \leq m$ tüm pozitif tamsayılar için doğru olsun. Yani

$$|X_m| = \begin{vmatrix} H_{k,m-1} & H_{k,m} \\ H_{k,m} & H_{k,m+1} \end{vmatrix} = (-g(k))^{m-1} (a^2 g(k) + abf(k) - b^2). \quad (4.7)$$

$m+1$ için doğru olduğunun gösterilmesi gerekir. Yani

$$|X_{m+1}| = (-g(k))^m (a^2 g(k) + abf(k) - b^2). \quad (4.8)$$

Denklem (4.7) deki matriste elementer matris satır işlemleri yapılarak (4.8) denklemini elde edilir. Önce ilk satırı $g(k)$ ile çarpıp ikinci satırı da $f(k)$ ile çarpıp birinci satıra eklenir. Sonuç olarak bu iki satır yer değiştirilse istenen elde edilir. Şöyle ki

$$\begin{aligned}
f(k).g(k) \begin{vmatrix} H_{k,m-1} & H_{k,m} \\ H_{k,m} & H_{k,m+1} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} g(k)H_{k,m-1} & g(k)H_{k,m} \\ f(k)H_{k,m} & f(k)H_{k,m+1} \end{vmatrix} \\
f(k).g(k) \begin{vmatrix} H_{k,m-1} & H_{k,m} \\ H_{k,m} & H_{k,m+1} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} f(k)H_{k,m} + g(k)H_{k,m-1} & f(k)H_{k,m+1} + g(k)H_{k,m} \\ f(k)H_{k,m} & f(k)H_{k,m+1} \end{vmatrix} \\
f(k).g(k) \begin{vmatrix} H_{k,m-1} & H_{k,m} \\ H_{k,m} & H_{k,m+1} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} H_{k,m+1} & H_{k,m+2} \\ f(k)H_{k,m} & f(k)H_{k,m+1} \end{vmatrix} \\
f(k).g(k)|X_m| &= -f(k) \begin{vmatrix} H_{k,m} & H_{k,m+1} \\ H_{k,m+1} & H_{k,m+2} \end{vmatrix} = -g(k)|X_{m+1}|
\end{aligned}$$

sadeleştirmelerden sonra

$$|X_{m+1}| = -g(k)(-g(k))^{m-1}(a^2 g(k) + abf(k) - b^2)$$

istenene ulaşılır.

$f(k) = g(k) = 1, a = 0$ ve $b = 1$, seçilirse Fibonacci sayıları bilinen Cassini özdeşliğine indirgenir.

Teorem 4.6: $r \geq 0$ için elemanları genelleştirilmiş k –Horadam sayıları olan

$$Y_r = \begin{bmatrix} H_{k,n+r} & H_{k,n} \\ H_{k,n+r+1} & H_{k,n+1} \end{bmatrix} \text{ matrisi için aşağıdaki özellikler geçerlidir:}$$

- (i) $|Y_{r+2}| = f(k)|Y_{r+1}| + g(k)|Y_r|$
- (ii) $|Y_r| = (-g(k))^n (bH_{k,r} - aH_{k,r+1})$

İspat : İlk olarak, (i) eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$$(i) \quad A = f(k)|Y_{r+1}| + g(k)|Y_r| \text{ için}$$

$$\begin{aligned}
A &= f(k) \begin{vmatrix} H_{k,n+r+1} & H_{k,n} \\ H_{k,n+r+2} & H_{k,n+1} \end{vmatrix} + g(k) \begin{vmatrix} H_{k,n+r} & H_{k,n} \\ H_{k,n+r+1} & H_{k,n+1} \end{vmatrix} \\
&= f(k)(H_{k,n+1}H_{k,n+r+1} - H_{k,n}H_{k,n+r+2}) + g(k)(H_{k,n+1}H_{k,n+r} - H_{k,n}H_{k,n+r+1}) \\
&= H_{k,n+1}(f(k)H_{k,n+r+1} + g(k)H_{k,n+r}) - H_{k,n}(f(k)H_{k,n+r+2} + g(k)H_{k,n+r+1})
\end{aligned}$$

elde edilir.

(4.1) eşitliği kullanılarak son eşitlik tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned}
f(k)|Y_{r+1}| + g(k)|Y_r| &= H_{k,n+1}H_{k,n+r+2} - H_{k,n}H_{k,n+r+3} \\
&= |Y_{r+2}|
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

(ii) r değeri için tümevarım uygulayalım. $r = 0$ için $|Y_0| = 0$ olduğunu göstermek kolaydır. $r = 1$ için Teorem 4.5 kullanılarak

$$\begin{aligned}
|Y_1| &= (-g(k))^n (bH_{k,1} - aH_{k,2}) \\
&= (-g(k))^n (b^2 - a^2g(k) - abf(k))
\end{aligned}$$

bulunur. $r \leq n$ tüm pozitif tamsayılar için doğru olsun. Yani

$$|Y_r| = (-g(k))^n (bH_{k,r} - aH_{k,r+1}). \quad (4.9)$$

$r+1$ için ifadenin doğruluğunu gösterelim. Diğer bir deyişle

$$|Y_{r+1}| = (-g(k))^n (bH_{k,r+1} - aH_{k,r+2}).$$

eşitliliğin geçerliliğini göstermek istiyoruz. (i) ve (4.9) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
|Y_{r+1}| &= f(k)|Y_r| + g(k)|Y_{r-1}| \\
&= f(k)(-g(k))^n (bH_{k,r} - aH_{k,r+1}) + g(k)(-g(k))^n (bH_{k,r-1} - aH_{k,r}) \\
&= (-g(k))^n [b(f(k)H_{k,r} + g(k)H_{k,r-1}) - a(f(k)H_{k,r+1} + g(k)H_{k,r})]
\end{aligned}$$

$$= (-g(k))^n (bH_{k,r+1} - aH_{k,r+2})$$

ispat sona erer.

Yukarıdaki teorem 4.6 dan $n+r$ yerine m alırsak genelleştirilmiş k – Horadam dizisi için d’Ocagne özdeşliğini buluruz.

$$H_{k,m}H_{k,n+1} - H_{k,m+1}H_{k,n} = (-g(k))^n (bH_{k,m-n} - aH_{k,m-n+1})$$

Teorem 4.7: Her matrisin girdileri $Z_s = \begin{bmatrix} H_{k,n} & H_{k,n-r} \\ H_{k,n+s} & H_{k,n-r+s} \end{bmatrix}$ genelleştirilmiş k – Horadam sayılarıdır. $s \geq 0$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

$$(i) |Z_{s+2}| = f(k)|Z_{s+1}| + g(k)|Z_s|$$

$$(ii) |Z_s| = (-g(k))^{n-r} \frac{(bH_{k,r} - aH_{k,r+1})(bH_{k,s} - aH_{k,s+1})}{b^2 - a^2g(k) - abf(k)}$$

(Yazlık, Taşkara, 2012).

İspat : Bu teoremin ispatı Teorem 4.6 ile benzer biçimde daha kolay gösterilebilir.

Burada göze çarpan, yukarıdaki teoremden s yerine $m-n+r$ alınırsa genelleştirilmiş k – Horadam dizisi için d’Ocagne ve Catalan gibi bazı eşitlikler elde edilir.

$$B = \frac{(-g(k))^{n-r} (bH_{k,r} - aH_{k,r+1})(bH_{k,m-n+r} - aH_{k,m-n+r+1})}{b^2 - a^2g(k) - abf(k)} \quad (4.10)$$

$$B = H_{k,m}H_{k,n} - H_{k,m+r}H_{k,n-r}$$

Ayrıca, genelleştirilmiş k – Horadam dizisi için (4.10) eşitliğinin farklı uygulamalarından şu sonuçlar elde edilir:

- (4.10) da $r=1$ ve n yerine $n+1$ alınırsa, Teorem 4.7 deki d’Ocagne özdeşliği elde edilir.
- (4.10) da m yerine n alınırsa, Catalan özdeşliğini elde edilir.

Teorem 4.8: Genelleştirilmiş k – Horadam dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{i=0}^{\infty} H_{k,i} x^i = \frac{H_{k,0} + x(H_{k,1} - f(k)H_{k,0})}{1 - f(k)x - g(k)x^2}$$

eşitliği ile verilir.

İspat : $\{H_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için üreteç fonksiyonu $H(x)$ olsun:

$$H(x) = H_{k,n} = H_{k,0} + xH_{k,1} + \dots + x^n H_{k,n} + \dots \quad (4.11)$$

(4.11) denklemi sırasıyla $f(k)x$ ve $g(k)x^2$ ile çarpılırsa

$$f(k)xH_{k,n} = f(k)xH_{k,0} + f(k)x^2H_{k,1} + \dots + f(k)x^{n+1}H_{k,n} + \dots \quad (4.12)$$

$$g(k)x^2H_{k,n} = g(k)x^2H_{k,0} + g(k)x^3H_{k,1} + \dots + f(k)x^{n+2}H_{k,n} + \dots \quad (4.13)$$

elde edilir. Sonuç olarak, denklem (4.11) , (4.12) ve (4.13) dikkate alınır

$$(1 - f(k)x - g(k)x^2)H_{k,n} = H_{k,0} + x(H_{k,1} - f(k)H_{k,0})$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} H_{k,i} x^i = \frac{H_{k,0} + x(H_{k,1} - f(k)H_{k,0})}{1 - f(k)x - g(k)x^2}$$

eşitliği elde edilir.

BÖLÜM 5

HORADAM DİZİSİ İLE CHEBYSHEV POLİNOMLARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR

5.1 Chebyshev Polinomları

Bu bölümde G. Udrea'nın "A note on the sequence $(W_n)_{n>0}$ of A.F. Horadam" adlı makalesinden esinlenilmiştir.

Tanım 5.1.1: $a, b; p, q$ reel sayıları, $n \geq 3$ tamsayıları için A.F.Horadam tarafından 1965 yılında

$$W_n = W_n(a, b; p, q) = pW_{n-1} - qW_{n-2}, \quad W_0 = a, \quad W_1 = b$$

dizisi tanımlanmıştır (Horadam, 1965). Bu dizinin Binet formülü

$A_1 = b - ar_2, \quad A_2 = b - ar_1$ olmak üzere

$$W_n = \frac{A_1 r_1^n - A_2 r_2^n}{r_1 - r_2}$$

ile verilir. $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$ karakteristik denkleminin kökleri

$$r_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad r_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

şeklindedir. Kökler arasında

$$r_1 + r_2 = p, \quad r_1 - r_2 = \sqrt{p^2 - 4q}, \quad r_1 r_2 = q$$

eşitlikleri geçerlidir. a, b, p, q sayılarının özel değerleri için aşağıdaki sayı dizileri elde edilir. Bunlar;

$$F_n = W_n(0, 1; 1, -1) = \frac{A_1 r_1^n - A_2 r_2^n}{r_1 - r_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad n \in \mathbb{N}$$

Fibonacci sayı dizisi

$$H_n = W_n(0,1; p, q) = \frac{A_1 r_1^n - A_2 r_2^n}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \left[\left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right)^n - \left(\frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right)^n \right]$$

Horadam sayı dizisi

$$L_n = W_n(2,1;1-1) = \frac{A_1 r_1^n - A_2 r_2^n}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] + \frac{2}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right]$$

Lucas sayı dizisi

$$P_n = W_n(0,1;2,-1) = \frac{A_1 r_1^n - A_2 r_2^n}{r_1 - r_2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \right)^n \right]$$

Pell sayı dizisi ve

$$\mathcal{T}_n = W_n(a,b;1,-1) = \frac{A_1 r_1^n - A_2 r_2^n}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ b \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] - a \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \right\}$$

Tagiuri sayı dizisi elde edilir (Morgado,1995).

Tanım 5.1.2: $n \geq 3$ tamsayıları için

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x); \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1$$

rekürans bağıntısı ve başlangıç şartları ile tanımlanan polinoma birinci çeşit Chebyshev polinomu denir (Udrea, 1995).

Birinci çeşit Chebyshev polinomunun ilk birkaç elemanı

$$T_n(x) = \{0, x, 2x^2 - 1, 4x^3 - 3x, 8x^4 - 8x^2 + 1, 16x^5 - 20x^3 + 5x, \dots\}$$

şeklindedir ve

$$T_n(\cos \varphi) = \cos n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \varphi \in \mathbb{C}$$

şeklinde de gösterilir.

Tanım 5.1.3: $n \geq 3$ tamsayıları için

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x); \quad U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_2(x) = 4x^2 - 1$$

rekürans bağıntısı ve başlangıç şartları ile tanımlanan polinoma ikinci çeşit Chebyshev polinomu denir (Udrea, 1995).

Bu tanıma göre ikinci çeşit Chebyshev polinomunun ilk birkaç elemanı

$$U_n(x) = \{1, 2x, 4x^2 - 1, 8x^3 - 4x, 16x^4 - 12x^2 + 1, 32x^5 - 32x^3 + 6x, \dots\}$$

şeklindedir ve

$$U_{n-1}(\cos \varphi) = \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi \in \mathbb{C}, \quad \sin \varphi \neq 0$$

şeklinde de gösterilir.

Horadam dizisinde, $p = 2x$, $q = 1$, $a = 1$, $b = x$ veya $b = 2x$, $x \in \mathbb{C}$ yerleştirilirse sırasıyla birinci ve ikinci tür Chebyshev polinom dizileri elde edilir:

$$T_n(x) = W_n(1, x; 2x, 1), \quad n \geq 0, \quad x \in \mathbb{C}$$

$$U_n(x) = W_n(1, 2x; 2x, 1), \quad n \geq 0, \quad x \in \mathbb{C}$$

Birinci tür Chebyshev polinomlar dizisi $(T_n)_{n \geq 0}$, ve ikinci tür Chebyshev polinomlar dizisi, $(U_n)_{n \geq 0}$, $(W_n)_{n \geq 0}$, dizisi ile aynı özelliklere sahiptir.

Tersine, $\cos \varphi = \frac{p}{2\sqrt{q}}$, $\varphi \in \mathbb{C}$; olarak seçilirse

$$r_1, r_2 = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \sqrt{q} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right)^2 - 1} = \sqrt{q} (\cos \varphi \pm i \sin \varphi),$$

elde edilir.

$$E_W = -A_1 A_2 = pab - qa^2 - b^2$$

tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} H_n &= W_n(0,1; p, q) = \frac{A_1 r_1^n - A_2 r_2^n}{r_1 - r_2} \\ &= \frac{(\sqrt{q})^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n - (\sqrt{q})^n (\cos \varphi - i \sin \varphi)^n}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{q^{\frac{n}{2}} (\cos n\varphi + i \sin n\varphi - \cos n\varphi + i \sin n\varphi)}{\sqrt{q} 2i \sin \varphi} \\ &= q^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} = q^{\frac{n-1}{2}} U_{n-1}(\cos \varphi) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca, birinci tür Chebyshev polinomlar dizisi için, $p = 2x$, $q = 1$, $a = 1$, $b = x$ olduğundan

$$E_W = -A_1 A_2 = pab - qa^2 - b^2 = E_T = x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{C}$$

elde edilir. Aynı şekilde ikinci tür Chebyshev polinomlar dizisi için, $p = 2x$, $q = 1$, $a = 1$, $b = 2x$ olduğundan

$$E_W = -A_1 A_2 = pab - qa^2 - b^2 = E_U = -1$$

elde edilir.

Sonuç 5.1.4: $n \geq l$ tamsayıları için

$$H_n = q^{\frac{n-1}{2}} U_{n-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$$H_n = W_n(0,1; p, q) = \frac{A_1 r_1^n - A_2 r_2^n}{r_1 - r_2} = (\sqrt{q})^{n-1} \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$$

$$\left(H_n = q^{\frac{n-1}{2}} U_{n-1}(\cos \varphi) = q^{\frac{n-1}{2}} U_{n-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right) \right)$$

Sonuç 5.1.5: $n \geq l$ tamsayıları için,

$$W_n = q^{\frac{n}{2}} \left[a T_n \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right) + \frac{2b - ap}{2\sqrt{q}} U_{n-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right) \right],$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $W_n = \frac{1}{r_1 - r_2} (A_1 r_1^n - A_2 r_2^n)$

$r_1, r_2 = \sqrt{q}(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$ denklemi yukardaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$= \frac{1}{r_1 - r_2} \left[A_1 (\sqrt{q})^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) - A_2 (\sqrt{q})^n (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) \right]$$

elde edilir ve gerekli matematiksel işlemler yapılırsa

$$= \frac{(\sqrt{q})^n}{r_1 - r_2} [(A_1 - A_2) \cos n\varphi + i(A_1 + A_2) \sin n\varphi]$$

$$= q^{\frac{n}{2}} \left[\frac{A_1 - A_2}{r_1 - r_2} \cos n\varphi + i \frac{A_1 + A_2}{r_1 - r_2} \sin n\varphi \right]$$

ifadesi bulunur $A_1 = b - ar_2$, $A_2 = b - ar_1$ olduğundan $A_1 - A_2 = a(r_1 - r_2)$ ve $A_1 + A_2 = 2b - a(r_1 + r_2) = 2b - ap$ eşitliklerini elde edilir ve bu eşitlikler denklemde kullanılırsa

$$= q^{\frac{n}{2}} \left[a \cos n\varphi + \frac{2b - ap}{2\sqrt{q} \sin \varphi} \sin n\varphi \right]$$

elde edilir $T_n(\cos \varphi) = \cos n\varphi$ ve $U_{n-1}(\cos \varphi) = \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$ eşitlikleri denklemde yerine yazılırsa

$$= q^{\frac{n}{2}} \left[aT_n(\cos \varphi) + \frac{2b - ap}{2\sqrt{q}} U_{n-1}(\cos \varphi) \right]$$

bulunur $\cos \varphi = \frac{p}{2\sqrt{q}}$ ifadesi kullanılırsa

$$= q^{\frac{n}{2}} \left[aT_n\left(\frac{p}{2\sqrt{q}}\right) + \frac{2b - ap}{2\sqrt{q}} U_{n-1}\left(\frac{p}{2\sqrt{q}}\right) \right]$$

elde edilir. Böylece

$$W_n = q^{\frac{n}{2}} \left[aT_n\left(\frac{p}{2\sqrt{q}}\right) + \frac{2b - ap}{2\sqrt{q}} U_{n-1}\left(\frac{p}{2\sqrt{q}}\right) \right], \quad n \in N^*.$$

bulunur. Ayrıca,

$$T_n(x) = xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad \forall x \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in N, \quad n \geq 2$$

özdeşliği kullanılırsa

$$W_n = q^{\frac{n}{2}} \cdot \left[aT_n\left(\frac{p}{2\sqrt{q}}\right) + \frac{2b - a.p}{2\sqrt{q}} U_{n-1}\left(\frac{p}{2\sqrt{q}}\right) \right],$$

$$W_n = q^{\frac{n}{2}} \cdot \left[a \cdot \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} U_{n-1}\left(\frac{p}{2\sqrt{q}}\right) - U_{n-2}\left(\frac{p}{2\sqrt{q}}\right) \right) + \frac{2b - a.p}{2\sqrt{q}} U_{n-1}\left(\frac{p}{2\sqrt{q}}\right) \right],$$

$$W_n = q^{\frac{n}{2}} \left[\frac{b}{\sqrt{q}} U_{n-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right) - a U_{n-2} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right) \right], \quad n \in N,$$

şeklinde de ifade edilebilir. Diğer yandan

$$\sqrt{(A-B)^2 + (i(A+B))^2} = 2\sqrt{E}$$

özelligi kullanılırsa

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{(\sqrt{q})^n}{r_1 - r_2} [(A_1 - A_2) \cos n\phi + i(A_1 + A_2) \sin n\phi] \\ &= \frac{q^{\frac{n}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} 2i \sin \phi} \left[\frac{\frac{A_1 - A_2}{\sqrt{(A_1 - A_2)^2 + (i(A_1 + A_2))^2}} \cos n\phi}{+ \frac{i(A_1 + A_2)}{\sqrt{(A_1 - A_2)^2 + (i(A_1 + A_2))^2}} \sin n\phi} \right] \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + (i(A_1 + A_2))^2} \\ &= \frac{2\sqrt{E}.q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{p^2 - 4q}} \left[\frac{A_1 - A_2}{2\sqrt{E}} \cos n\phi + i \frac{A_1 + A_2}{2\sqrt{E}} \sin n\phi \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Denklemden $\frac{A_1 - A_2}{2\sqrt{E}}$ ve $\frac{A_1 + A_2}{2\sqrt{E}}$ ifadelerini $\cos \phi$ ve $\sin \phi$ olarak

kullanılabilir. Çünkü $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ olduğundan $\left(\frac{A_1 - A_2}{2\sqrt{E}} \right)^2 + \left(\frac{A_1 + A_2}{2\sqrt{E}} \right)^2 = 1$

bulunacağından $\frac{A_1 - A_2}{2\sqrt{E}} = \cos \phi$ ve $\frac{A_1 + A_2}{2\sqrt{E}} = \sin \phi$ olarak alınabilir.

$$= \frac{2\sqrt{E}.q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{p^2 - 4q}} [\cos \phi \cos n\phi - \sin \phi \sin n\phi]$$

$$= \frac{2\sqrt{E}.q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{p^2 - 4q}} \cos(n\phi + \phi)$$

$$= \frac{2\sqrt{E}.q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{p^2 - 4q}} T_n \left(\cos \left(\phi + \frac{\phi}{n} \right) \right),$$

$$\cos \varphi = \frac{p}{2\sqrt{q}}, \varphi \in \mathbb{C} \text{ ve } \cos \phi = \frac{A_1 - A_2}{2\sqrt{E}}, \phi \in \mathbb{C}. \text{ (Harman, 1981) ve (Horadam, 1986)}$$

Sonuç olarak,

$$W_n(a, b; p, q) = \frac{2\sqrt{E}q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{p^2 - 4q}} \cos(n\varphi + \phi), \quad n \in N,$$

$$\cos \varphi = \frac{p}{2\sqrt{q}}, \varphi \in \mathbb{C} \text{ ve } \cos \phi = \frac{a\sqrt{p^2 - 4q}}{2\sqrt{E}}, \phi \in \mathbb{C}$$

elde edilir.

Sonuç 5.1.6: Aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir.

$$\text{a) } F_{n+1} = i^{3n} U_n\left(\frac{i}{2}\right),$$

$$\text{b) } L_n = i^{3n} 2T_n\left(\frac{i}{2}\right),$$

$$\text{c) } P_{n+1} = i^{3n} U_n(i),$$

$$\text{d) } \mathcal{T}_n = a.F_{n-1} + b.F_n$$

(Udrea, 1995).

İspat: Bu ifadelerin ispatı aşağıdaki gibidir:

$$\text{a) } F_n = W_n(a, b; p, q) = W_n(0, 1; 1, -1)$$

$$= q^{\frac{n}{2}} \left[\frac{b}{\sqrt{q}} U_{n-1}\left(\frac{b}{2\sqrt{q}}\right) - a U_{n-2}\left(\frac{b}{2\sqrt{q}}\right) \right]$$

$$= i^n \frac{1}{i} U_{n-1}\left(\frac{1}{2i}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= i^{n-1} U_{n-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \\
&= i^{n-1} (-1)^{n-1} U_{n-1} \left(\frac{i}{2} \right) \\
&= i^{3(n-1)} U_{n-1} \left(\frac{i}{2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğerleri aşağıdaki şekilde yapılır.

$$\mathbf{b)} \quad L_n = W_n(2,1;1,-1) = 2i^n T_n \left(\frac{i}{2} \right)$$

Lucas sayı dizisinin Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L_n &= r_1^n + r_2^n = (\sqrt{q})^n (2 \cos \varphi) \\
&= (\sqrt{-1})^n 2T_n(\cos \varphi) = 2i^n T_n \left(\frac{1}{2i} \right) \\
&= 2i^n T_n \left(-\frac{i}{2} \right) = 2i^n (-1)^n T_n \left(\frac{i}{2} \right) \\
&= 2i^{3n} T_n \left(\frac{i}{2} \right)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$$\mathbf{c)} \quad P_n = W_n(0,1;2,-1) = i^{3n} U_n(i)$$

Pell sayı dizisinin Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} = q^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}} U_{n-1}(\cos \varphi) = i^{n-1} U_{n-1} \left(\frac{P}{2\sqrt{q}} \right) \\
&= i^{n-1} U_{n-1} \left(\frac{2}{2i} \right) = i^{n-1} U_{n-1} \left(\frac{1}{i} \right)
\end{aligned}$$

$$= i^{n-1} U_{n-1}(-i) = i^{n-1} (-1)^{n-1} U_{n-1}(i)$$

$$= i^{3(n-1)} U_{n-1}(i)$$

ifadesi elde edilir.

d) $L_n - F_n = 2F_{n-1}$, özelliği ve bu teoremin a ve b özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n &= W_n(a, b; 1, -1) = i^n \cdot \left[a T_n\left(\frac{1}{2i}\right) + \frac{2b-a}{2i} U_{n-1}\left(\frac{1}{2i}\right) \right] \\ &= i^n \left[a T_n\left(-\frac{i}{2}\right) + \frac{2b-a}{2i} U_{n-1}\left(-\frac{i}{2}\right) \right] \\ &= i^n \left[a (-1)^n T_n\left(\frac{i}{2}\right) + \frac{2b-a}{2i} (-1)^{n-1} U_{n-1}\left(\frac{i}{2}\right) \right] \\ &= i^n \left[a (-1)^n \frac{1}{2} i^n L_n + \frac{2b-a}{2i} (-1)^{n-1} i^{n-1} F_n \right] \\ &= \frac{a}{2} L_n + \frac{2b-a}{2} F_n = a \frac{L_n - F_n}{2} + b F_n = a F_{n-1} + b F_n, \end{aligned}$$

ispat elde edilmiş olur.

Teorem 5.1.7: $n, r, s \in N$ olmak üzere

$$W_n \cdot W_{n+r+s} - W_{n+r} \cdot W_{n+s} = E_W q^n H_r H_s$$

eşitliği geçerlidir (Udrea, 1995).

İspat:

$$\begin{aligned} W_n W_{n+r+s} &= \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{p^2 - 4q}} q^{\frac{n}{2}} \cos(n\varphi + \phi) \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{p^2 - 4q}} q^{\frac{n+r+s}{2}} \cos((n+r+s)\varphi + \phi) \\ &= \frac{4E}{p^2 - 4q} q^{\frac{2n+r+s}{2}} \cos(n\varphi + \phi) \cos((n+r+s)\varphi + \phi) \\ W_{n+r} W_{n+s} &= \frac{4E}{p^2 - 4q} q^{\frac{2n+r+s}{2}} \cos((n+r)\varphi + \phi) \cos((n+s)\varphi + \phi), \end{aligned}$$

$$W_n.W_{n+r+s} - W_{n+r}.W_{n+s}$$

$$= \frac{4E}{p^2 - 4q} \cdot q^{\frac{2n+r+s}{2}} \cdot \begin{bmatrix} \cos(n\varphi + \phi) \cdot \cos((n+r+s)\varphi + \phi) \\ -\cos((n+r)\varphi + \phi) \cdot \cos((n+s)\varphi + \phi) \end{bmatrix}$$

Trigonometrik toplam formülü kullanılarak

$$= \frac{4E}{p^2 - 4q} q^{\frac{2n+r+s}{2}} \left[\frac{\cos((2n+r+s)\varphi + 2\phi) + \cos(r+s)\varphi}{2} - \frac{\cos((2n+r+s)\varphi + 2\phi) + \cos(r-s)\varphi}{2} \right]$$

$$= \frac{4E}{p^2 - 4q} q^{\frac{2n+r+s}{2}} \frac{\cos(r+s)\varphi - \cos(r-s)\varphi}{2}$$

$$= \frac{4E}{p^2 - 4q} q^{\frac{2n+r+s}{2}} (-1) \sin r\varphi \sin s\varphi$$

$$= (-\sin^2 \varphi) \frac{4E}{p^2 - 4q} q^{\frac{2n+r+s}{2}} \frac{\sin r\varphi}{\sin \varphi} \frac{\sin s\varphi}{\sin \varphi}$$

$$= (\cos^2 \varphi - 1) \frac{4E}{p^2 - 4q} q^{\frac{2n+r+s}{2}} U_{r-1}(\cos \varphi) U_{s-1}(\cos \varphi)$$

$$= \left[\left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right)^2 - 1 \right] \frac{4E}{p^2 - 4q} q^{\frac{2n+r+s}{2}} U_{r-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right) U_{s-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right)$$

$$= E q^{\frac{2n+r+s-2}{2}} U_{r-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right) U_{s-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$W_n.W_{n+r+s} - W_{n+r}.W_{n+s} = E \cdot q^{\frac{2n+r+s-2}{2}} \cdot U_{r-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right) \cdot U_{s-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right),$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan, sonuç 5.1.4 kullanılarak

$$Eq^n H_r H_s = Eq^n q^{\frac{r-1}{2}} U_{r-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right) q^{\frac{s-1}{2}} U_{s-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right)$$

$$= Eq^{\frac{2n+r+s-2}{2}} U_{r-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right) U_{s-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right)$$

$$Eq^n H_r H_s = Eq^{\frac{2n+r+s-2}{2}} U_{r-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right) U_{s-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{q}} \right)$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.1.8: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ olsun. O zaman

$$A^n = \begin{cases} \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} A - \delta_A \cdot \frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} I_2, & \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ n \cdot \lambda^{n-1} \cdot A - (n-1) \cdot \delta_A \cdot \lambda^{n-2} I_2, & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \end{cases}$$

şeklinde yazılır (Udrea, 1996).

Sonuç 5.1.9: $\delta_A = \det A = ad - bc$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, λ_1 ve λ_2 A matrisinin karakteristik

denklemini olan $\lambda^2 - (a+d)\lambda + \delta_A = 0$ eşitliğinin kökleri olsun.

Diğer yandan,

$$\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = W_n(0, I; a+d, \delta_A) = H_n = q^{\frac{n-1}{2}} U_{n-1} \left(\frac{p}{2\sqrt{\delta_A}} \right) = \delta_A^{\frac{n-1}{2}} U_{n-1} \left(\frac{a+d}{2\sqrt{\delta_A}} \right),$$

olduğunu biliniyor. Sonuç 5.1.4 den dolayı

$$A^n = \delta_A^{\frac{n-1}{2}} \left[U_{n-1} \left(\frac{a+d}{2\sqrt{\delta_A}} \right) A - \delta_A^{\frac{1}{2}} U_{n-2} \left(\frac{a+d}{2\sqrt{\delta_A}} \right) I_2 \right] \quad (5.1)$$

$T_n(x) = x U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$, özelliği kullanılarak

$$= \delta_A^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left[U_{n-1} \left(\frac{a+d}{2\sqrt{\delta_A}} \right) \cdot \left(A - \frac{a+d}{2} I_2 \right) + \delta_A^{\frac{1}{2}} T_n \left(\frac{a+d}{2\sqrt{\delta_A}} \right) I_2 \right], \quad (5.2)$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ve $\delta_A \neq 0$.

(5.1) ve (5.2) de $\delta_A = 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} A^n &= U_{n-1} \left(\frac{a+d}{2} \right) A - U_{n-2} \left(\frac{a+d}{2} \right) I_2 \\ &= U_{n-1} \left(\frac{a+d}{2} \right) \left(A - \frac{a+d}{2} I_2 \right) + T_n \left(\frac{a+d}{2} \right) I_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $\delta_A = -1$ için

$$A^n = i^{3(n-1)} \left[U_{n-1} \left(i \frac{a+d}{2} \right) A + i U_{n-2} \left(\frac{a+d}{2} i \right) I_2 \right], \quad (5.3)$$

elde edilir. $i^2 = -1$, $n \in N^*$ dır. (5.3) eşitliğinde $a+d=1$ alınır

$$A^n = F_n A + F_{n-1} I_2, \quad n \in N^*,$$

sonucu çıkarılır.

Örnek 5.1.10:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ için $a+d=3$ ve $\delta_A = 1$ olduğu aşıkardır. (5.3) kullanılarak

$$\begin{aligned} A^n &= U_{n-1} \left(\frac{3}{2} \right) A - U_{n-2} \left(\frac{3}{2} \right) I_2 \\ &= U_{n-1} \left(- \left(-\frac{3}{2} \right) \right) A - U_{n-2} \left(- \left(-\frac{3}{2} \right) \right) I_2 \\ &= (-1)^{n-1} \left[U_{n-1} \left(-\frac{3}{2} \right) A + U_{n-2} \left(-\frac{3}{2} \right) I_2 \right] \end{aligned}$$

$T_2 \left(\frac{i}{2} \right) = \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \frac{i^2}{4} - 1 = -\frac{3}{2}$ eşitliğinden

$$= (-1)^{n-1} \left[U_{n-1} \left(T_2 \left(\frac{i}{2} \right) \right) A + U_{n-2} \left(T_2 \left(\frac{i}{2} \right) \right) I_2 \right]$$

$$U_{n-1}(T_k(x)) = \frac{U_{nk-1}(x)}{U_{k-1}(x)}, \quad \forall n, k \in N^*, \quad x \in \mathbb{C}; \text{ özelliği kullanılarak}$$

$$= (-1)^{n-1} \left[\frac{U_{2n-1}\left(\frac{i}{2}\right)}{U_{2-1}\left(\frac{i}{2}\right)} A + \frac{U_{2(n-1)-1}\left(\frac{i}{2}\right)}{U_{2-1}\left(\frac{i}{2}\right)} I_2 \right]$$

$$U_{2-1}\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha = 2 \left(\frac{i}{2}\right) = i \text{ eşitliğinden}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{1}{i} \left[U_{2n-1}\left(\frac{i}{2}\right) A + U_{2n-3}\left(\frac{i}{2}\right) I_2 \right]$$

$$= i^{2n-3} \left[U_{2n-1}\left(\frac{i}{2}\right) A + U_{2n-3}\left(\frac{i}{2}\right) I_2 \right]$$

$$= i^{2n-3} \left[i^{2n-1} F_{2n} A + i^{2n-3} F_{2(n-1)} I_2 \right]$$

$$= F_{2n} A - F_{2(n-1)} I_2 = \begin{pmatrix} F_{2(n+1)} & F_{2n} \\ -F_{2n} & -F_{2(n-1)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{2(n+1)} & F_{2n} \\ -F_{2n} & -F_{2(n-1)} \end{pmatrix},$$

$$1 = \left(\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)^n = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n = \det \begin{pmatrix} F_{2(n+1)} & F_{2n} \\ -F_{2n} & -F_{2(n-1)} \end{pmatrix} = F_{2n}^2 - F_{2(n-1)} F_{2(n+1)},$$

Ayrıca

$$F_{m-r} F_{m+r} + (-1)^{m-r} F_r^2 = F_m^2, \quad m, r \in N, \quad m \geq 2, \quad m > r. \quad \text{Catalan özdeşliğinde}$$

(Morgado, 1980). $m = 2n$ ve $r = 2$ seçilerek

$$F_{2n}^2 - F_{2(n-1)} F_{2(n+1)} = 1, \quad \forall n \in N^*$$

eşitliği elde edilir.

$(T_n)_{n \geq 0}$ ve $(U_n)_{n \geq 0}$ Chebyshev polinomları için aşağıdaki özellikler mevcuttur:

a) $T_n T_{n+2r} - (x^2 - 1) U_{r-1}^2 = T_{n+r}^2,$

b) $T_{n+2r} T_{n+4r} - (x^2 - 1) U_{r-1}^2 = T_{n+3r}^2,$

c) $T_n T_{n+4r} - (x^2 - 1) U_{2r-1}^2 = T_{n+2r}^2,$

d) $4T_n T_{n+r} T_{n+2r} T_{n+3r} + (x^2 - 1)^2 U_{r-1}^2 U_{2r-1}^2 = (T_n T_{n+3r} + T_{n+r} T_{n+2r})^2,$

e) $4T_{n+r} T_{n+2r} T_{n+3r} T_{n+4r} + (x^2 - 1)^2 U_{r-1}^2 U_{2r-1}^2 = (T_{n+2r} T_{n+3r} + T_{n+r} T_{n+4r})^2,$

f) $4T_{n+r} T_{n+2r}^2 T_{n+3r} + (x^2 - 1)^2 U_{r-1}^4 = (T_{n+r} T_{n+3r} + T_{n+2r}^2)^2,$

g) $U_m U_{m+2r} + U_{r-1}^2 = U_{m+r}^2,$

h) $U_{m+2r} U_{m+4r} + U_{r-1}^2 = U_{m+3r}^2,$

i) $U_m U_{m+4r} + U_{2r-1}^2 = U_{m+2r}^2,$

j) $4U_m U_{m+r} U_{m+2r} U_{m+3r} + U_{r-1}^2 U_{2r-1}^2 = (U_m U_{m+3r} + U_{m+r} U_{m+2r})^2,$

k) $4U_{m+r} U_{m+2r} U_{m+3r} U_{m+4r} + U_{r-1}^2 U_{2r-1}^2 = (U_{m+2r} U_{m+3r} + U_{m+r} U_{m+4r})^2,$

l) $4U_{m+r} U_{m+2r}^2 U_{m+3r} + (x^2 - 1)^2 U_{r-1}^4 = (U_{m+r} U_{m+3r} + U_{m+2r}^2)^2,$

(Udrea, 1995).

Şimdi $S_k = T_k(A)$ ve $R_k = U_k(A)$, $A \in M_p(\mathbb{C})$, $p, k \in N$, $p \geq 2$ matris dizileri olarak tanımlayalım.

Uyarı 5.1.11:

a) Catalan özelliğine benzer $(S_n)_{n \geq 0}$ dizisi için ve $(R_n)_{n \geq 0}$ kullanılarak aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$S_{n-r}S_{n+r} - (A^2 - I_2)R_{r-1}^2 = S_n^2, \text{ (b şıkkı kullanılarak)}$$

$$R_{n-r}R_{n+r} + R_{r-1}^2 = R_n^2, \quad m, r \in N^*, \quad m > r. \text{ (g şıkkı kullanılarak)}$$

b) Her $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ için $A^2 = (a+d)A - \delta_A I_2$, olduğu biliniyor.

$A^{n+2} = (a+d)A^{n+1} - \delta_A A^n$, $\forall n \in N^*$ sonucunu verir.

$\tilde{W}_n = A^n$ eşitliğinin doğruluğu gösterilirse $\left(\tilde{W}_n \right)_{n \geq 0}$ dizisi elde edilir.

BÖLÜM 6

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ, GENELLEŞTİRİLMİŞ LUCAS ve HORADAM MATRİS DİZİLERİ

Bu bölümde bulunan sonuçlar tarafımızca, incelenmek üzere bir dergiye gönderilmiştir.

6.1 Genelleştirilmiş Fibonacci, Genelleştirilmiş Lucas ve Horadam Sayı Dizileri

Tanım 6.1.1: Başlangıç şartları $u_0 = 0, u_1 = 1$ olan, yineleme bağıntısı

$u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2}$ ile verilen sayı dizisine, genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi denir.

İlk birkaç elemanı $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = p, u_3 = p^2 + q, u_4 = p^3 + 2pq \dots$

şeklindedir. Karakteristik denklemi $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$ şeklindedir. Karakteristik

denklemin kökleri $r_1, r_2 = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ olarak bulunur. Binet formülü $\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$

şeklindedir. Kökler toplam fark ve çarpımı $r_1 + r_2 = p, r_1 - r_2 = \sqrt{p^2 + 4q},$

$r_1 r_2 = -q$ ile verilir (Horadam, 1961).

Tanım 6.1.2: Başlangıç şartları sırasıyla $v_0 = 2, v_1 = p$ olan yineleme bağıntısı

$v_n = pv_{n-1} + qv_{n-2}$ ile verilen sayı dizisine genelleştirilmiş Lucas sayı dizisi denir. İlk

birkaç elemanı $v_0 = 2, v_1 = p, v_2 = p^2 + 2q, v_3 = p^3 + 3pq, v_4 = p^4 + 4p^2q + 2q^2$

şeklindedir. Karakteristik denklemi $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$ dir. Karakteristik denklemin

kökleri $r_1, r_2 = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ olarak bulunur.

Teorem 6.1.3: Binet formülü $v_n = r_1^n + r_2^n$ şeklindedir.

İspat: Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisinin Binet formülü $u_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$

denkleminde yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
v_n &= pu_n + 2qu_{n-1} = p \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} + 2q \frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{\left(p + \frac{2q}{r_1}\right)r_1^n - \left(p + \frac{2q}{r_2}\right)r_2^n}{r_1 - r_2} = \frac{\frac{r_1 p + 2q}{r_1} r_1^n - \frac{r_2 p + 2q}{r_2} r_2^n}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{\frac{r_1^2 + q}{r_1} r_1^n - \frac{r_2^2 + q}{r_2} r_2^n}{r_1 - r_2} = \frac{\left(\frac{r_1^2 - r_1 r_2}{r_1}\right)r_1^n - \left(\frac{r_2^2 - r_1 r_2}{r_2}\right)r_2^n}{r_1 - r_2} \\
&= r_1^n + r_2^n
\end{aligned}$$

genelleştirilmiş Lucas sayı dizisinin Binet formülü elde edilir.

Teorem 6.1.4: $n, r > 0$ olmak üzere Genelleştirilmiş Fibonacci, Lucas, Horadam sayı dizileri için Catalan özelliği

$$\begin{aligned}
u_{n-r}u_{n+r} - u_n^2 &= -(-q)^{n-r}u_r^2 \\
v_{n-r}v_{n+r} - v_n^2 &= (p^2 + 4q)(-q)^{n-r}u_r^2 \\
h_{n+r}h_{n-r} - h_n^2 &= -(b - ar_2)(b - ar_1)(-q)^{n-r}u_r^2
\end{aligned}$$

şeklinde verilir (Morgado, 1980).

İspat: Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri için ispatı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
u_{n-r}u_{n+r} - u_n^2 &= \left(\frac{r_1^{n-r} - r_2^{n-r}}{r_1 - r_2}\right)\left(\frac{r_1^{n+r} - r_2^{n+r}}{r_1 - r_2}\right) - \left(\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(r_1 - r_2)^2} \left[r_1^{2n} + r_2^{2n} - (-q)^n \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^r - (-q)^n \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^r - r_1^{2n} - r_2^{2n} + 2(-q)^n \right] \\
&= \frac{1}{(r_1 - r_2)^2} \left[-(-q)^n \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^r - (-q)^n \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^r + 2(-q)^n \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(r_1 - r_2)^2} \left[(-q)^n \left(2 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^r - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^r \right) \right]$$

$$= -(-q)^n \left[\frac{r_1^{2r} + r_2^{2r} - 2(r_1 r_2)^r}{(r_1 r_2)^r (r_1 - r_2)^2} \right]$$

$$= -(-q)^{n-r} \left(\frac{r_1^r - r_2^r}{r_1 - r_2} \right)^2$$

$$= -(-q)^{n-r} u_r^2$$

Genelleştirilmiş Lucas sayı dizileri için ispatı aşağıdaki gibidir:

$$v_{n-r} v_{n+r} - v_n^2 = (r_1^{n-r} + r_2^{n-r}) (r_1^{n+r} + r_2^{n+r}) - (r_1^n + r_2^n)^2$$

$$= r_1^{2n} + r_2^{2n} + (-q)^n \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^r + (-q)^n \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^r - r_1^{2n} - r_2^{2n} - 2r_1^n r_2^n$$

$$= (-q)^n \left(\frac{r_1^{2r} + r_2^{2r} - 2r_1^r r_2^r}{(r_1 r_2)^r} \right)$$

$$= (-q)^{n-r} \frac{(r_1^r - r_2^r)^2}{(r_1 - r_2)^2} (r_1 - r_2)^2$$

$$= (p^2 + 4q) (-q)^{n-r} u_r^2$$

Horadam sayı dizileri için ispatı aşağıdaki gibidir:

$A_1 = b - ar_2$ ve $A_2 = b - ar_1$ olduğundan

$$h_{n+r} h_{n-r} - h_n^2 = \frac{(A_1 r_1^{n+r} - A_2 r_2^{n+r}) (A_1 r_1^{n-r} - A_2 r_2^{n-r}) - (A_1 r_1^n - A_2 r_2^n)^2}{(r_1 - r_2)^2}$$

$$= \frac{A_1^2 r_1^{2n} + A_2^2 r_2^{2n} - A_1 A_2 r_1^{n+r} r_2^{n-r} - A_1 A_2 r_2^{n+r} r_1^{n-r} - A_1^2 r_1^{2n} - A_2^2 r_2^{2n} + 2A_1 A_2 (r_1 r_2)^n}{(r_1 - r_2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{(r_1 - r_2)^2} A_1 A_2 (r_1 r_2)^n \left[\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^r + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^r - 2 \right] \\
&= -\frac{1}{(r_1 - r_2)^2} A_1 A_2 (-q)^n \left[\frac{r_1^{2r} + r_2^{2r} - 2(r_1 r_2)^r}{(r_1 r_2)^r} \right] \\
&= -A_1 A_2 (-q)^{n-r} u_r^2
\end{aligned}$$

Teorem 6.1.5: $n, m > 0$ için ve tamsayı olmak üzere D'ocagne özeliği

$$u_m u_{n+1} - u_n u_{m+1} = (-q)^n u_{m-n}$$

$$v_m v_{n+1} - v_n v_{m+1} = -(p^2 + 4q)(-q)^n u_{m-n}$$

$$h_m h_{n+1} - h_n h_{m+1} = (-q)^{n-1} (b h_{m-n+1} - a h_{m-n+2})$$

şeklinde verilir (Hilton, 1974).

İspat: Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri için ispatı aşağıdaki gibidir:

Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
u_m u_{n+1} - u_n u_{m+1} &= \frac{(r_1^m - r_2^m)(r_1^{n+1} - r_2^{n+1})}{(r_1 - r_2)^2} - \frac{(r_1^n - r_2^n)(r_1^{m+1} - r_2^{m+1})}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= \frac{r_1^{m+n+1} + r_2^{m+n+1} - r_1^m r_2^{n+1} - r_1^{n+1} r_2^m - r_1^{n+m+1} - r_2^{m+n+1} + r_1^n r_2^{m+1} + r_1^{m+1} r_2^n}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= \frac{r_1^m r_2^n (r_1 - r_2) + r_1^n r_2^m (r_2 - r_1)}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= \frac{r_1^m r_2^n - r_1^n r_2^m}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{(r_1 r_2)^n (r_1^{m-n} - r_2^{m-n})}{r_1 - r_2} \\
&= (-q)^n u_{m-n}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Genelleştirilmiş Lucas sayı dizileri için ispatı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
v_m v_{n+1} - v_n v_{m+1} &= (r_1^m + r_2^m)(r_1^{n+1} + r_2^{n+1}) - (r_1^n + r_2^n)(r_1^{m+1} + r_2^{m+1}) \\
&= r_1^{m+n+1} + r_1^m r_2^{n+1} + r_2^m r_1^{n+1} + r_2^{m+n+1} - r_1^{m+n+1} - r_1^n r_2^{m+1} - r_2^n r_1^{m+1} - r_2^{m+n+1} \\
&= r_1^m r_2^n (r_2 - r_1) + r_1^n r_2^m (r_1 - r_2) \\
&= (r_1 - r_2)(r_1 r_2)^n (r_2^{m-n} - r_1^{m-n}) \\
&= -(r_1 - r_2)^2 (r_1 r_2)^n \left(\frac{r_1^{m-n} - r_2^{m-n}}{r_1 - r_2} \right) \\
&= -(p^2 + 4q)(-q)^n u_{m-n}.
\end{aligned}$$

Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri ve Genelleştirilmiş Lucas sayı dizilerinin ispatları gibi Horadam sayı dizilerinin de ispatı benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 6.1.6: Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi, Genelleştirilmiş Lucas sayı dizisi ve Horadam sayı dizisi için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \frac{t}{1 - pt - qt^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n = \frac{2 - tp}{1 - pt - qt^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n t^n = \frac{a + t(b - ap)}{1 - pt - qt^2}$$

şeklinde verilir (Hilton, 1974).

İspat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \dots$$

$$-pt \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = -pu_0 t - pu_1 t^2 + \dots$$

$$-qt^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = -qu_0 t^2 + \dots$$

Eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$(1 - pt - qt^2) \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = t$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Diğer ispatlar da benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 6.1.7: $n > 0$ tamsayıları için

$$u_{n+1}^2 - qu_n^2 = \frac{pv_{2n+1} - 4(-q)^{n+1}}{p^2 + 4q}$$

şeklindedir.

İspat: Geneleştirilmiş Fibonacci sayı dizisinin Binet formülü $u_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$

denkleme yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - qu_n^2 &= \left(\frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2} \right)^2 - q \left(\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \right)^2 \\ &= \frac{r_1^{2n+2} + r_2^{2n+2} - 2(r_1 r_2)^{n+1}}{(r_1 - r_2)^2} - \frac{q(r_1^{2n} + r_2^{2n} - 2(r_1 r_2)^n)}{(r_1 - r_2)^2} \\ &= \frac{r_1^{2n}(r_1^2 - q) + r_2^{2n}(r_2^2 - q) - 2(r_1 r_2)^n [r_1 r_2 - q]}{(r_1 - r_2)^2} \\ &= \frac{r_1^{2n}(r_1^2 - q) + r_2^{2n}(r_2^2 - q) - 2(-q)^n [-2q]}{(r_1 - r_2)^2} \\ &= \frac{pr_1^{2n+1} + pr_2^{2n+1} - 4(-q)^{n+1}}{(r_1 - r_2)^2} \\ &= \frac{p(r_1^{2n+1} + r_2^{2n+1}) - 4(-q)^{n+1}}{(r_1 - r_2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{pv_{2n+1} - 4(-q)^{n+1}}{p^2 + 4q}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 6.1.8: Genelleştirilmiş Fibonacci, Genelleştirilmiş Lucas, Horadam sayı dizilerinin elemanları arasında aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$v_n = pu_n + 2qu_{n-1} = u_{n+1} + qu_{n-1},$$

$$(p^2 + 4q)u_n = pv_n + 2qv_{n-1},$$

$$u_{2n} = u_n v_n,$$

$$h_n = bu_n + qau_{n-1},$$

$$(p^2 + 4q)h_n = (bp + 2aq)v_n + q(2b - ap)v_{n-1},$$

$$u_{n+1}^2 - qu_n^2 = \frac{pv_{2n+1} - 4(-q)^{n+1}}{p^2 + 4q}$$

6.2 Genelleştirilmiş Fibonacci Matris Dizileri

Tanım 6.2.1: Başlangıç şartları $U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $U_1 = \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix}$ olan yineleme bağıntısı

$U_n = pU_{n-1} + qU_{n-2}$ ile verilen matris dizisine genelleştirilmiş Fibonacci matris dizisi denir

Teorem 6.2.2: Genelleştirilmiş Fibonacci matris dizisi, genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisinin elemanları kullanılarak aşağıdaki gibi verilir:

$$U_n = \begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ qu_n & qu_{n-1} \end{bmatrix}$$

İspat: İspat tümevarım kullanılarak yapılacaktır. $n=1$ için doğruluğu kolaylıkla görülür. $n \leq k$ için doğru olsun. $n = k+1$ için

$$U_{k+1} = pU_k + qU_{k-1}$$

$$\begin{aligned}
&= p \begin{bmatrix} u_{k+1} & u_k \\ qu_k & qu_{k-1} \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} u_k & u_{k-1} \\ qu_{k-1} & qu_{k-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_{k+2} & u_{k+1} \\ qu_{k+1} & qu_k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

eşitliğinin doğru olduğu görülebilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.2.3: $U_1 = \begin{bmatrix} u_2 & u_1 \\ qu_1 & qu_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu matrisin n . kuvveti

$$U_1^n = U_n = \begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ qu_n & qu_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrisi ile ifade edilir.

İspat: İspat tümevarım kullanılarak yapılacaktır. $n=1$ için doğruluğu kolaylıkla görülür. $n=k$ için doğru olsun. $n=k+1$ için

$$\begin{aligned}
U_1^{n+1} &= U_1^n U_1 = \begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ qu_n & qu_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ qu_{n+1} & qu_n \end{bmatrix} = U_{n+1}
\end{aligned}$$

doğruluğu görülür. Böylece istenen sağlanmış olur.

Teorem 6.2.4: Matris dizileri kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri için

$$u_{n+m} = u_m u_{n+1} + qu_{m-1} u_n$$

eşitliği yazılabilir.

İspat:

$$U_{n+m} = \begin{bmatrix} u_{n+m+1} & u_{n+m} \\ qu_{n+m} & qu_{n+m-1} \end{bmatrix}$$

$$U_1^{n+m} = \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ qu_n & qu_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{m+1} & u_m \\ qu_m & qu_{m-1} \end{bmatrix}$$

Matrisin (1,2) elemanını eşitlenirse istenen ifade elde edilir.

$$u_{n+m} = u_m u_{n+1} + qu_{m-1} u_n$$

$m = n$ için

$$u_{2n} = u_n u_{n+1} + qu_{n-1} u_n$$

$$u_{2n} = pu_n^2 + 2qu_n u_{n-1}$$

özdeşliği geçerlidir.

Teorem 6.2.5:

i) $\det(U_1) = -q$

$$\det(U_n) = \det(U_1^n) = (-q)^n$$

ii) Cassini(= Simpson) Özelliği

$$\det \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ qu_n & qu_{n-1} \end{pmatrix} = q(u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2) = (-q)^n$$

$$= u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n q^{n-1}$$

sağlanır.

Teorem 6.2.6: $m > 0, n > 0$ için

$$U_{m+n} = U_m U_n$$

dir.

İspat: Tümevarım metodu kullanılarak ispatı yapılırsa

$n = 0$ için $U_m = U_m U_0$ doğruluğu kolaylıkla görülür. $n = k$ için doğru olsun.

$n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
U_{m+k+1} &= pU_{m+k} + qU_{m+k-1} \\
&= pU_m U_k + qU_m U_{k-1} \\
&= U_m (pU_k + qU_{k-1}) \\
&= U_m U_{k+1}
\end{aligned}$$

ifadesinin doğru olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.2.7: Genelleştirilmiş Fibonacci matrisinin Binet formülü

$$U_n = \begin{bmatrix} \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2} & \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \\ q \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} & q \frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ qu_n & qu_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 6.2.8: Genelleştirilmiş Fibonacci matrisinin Binet formülü

$$U_n = \left(\frac{U_1 - r_2 U_0}{r_1 - r_2} \right) r_1^n - \left(\frac{U_1 - r_1 U_0}{r_1 - r_2} \right) r_2^n$$

şeklinde verilir.

İspat: $U_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ şeklinde belirtelim.

$$n=0 \text{ için } U_0 = c_1 + c_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$n=1 \text{ için } U_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2 = \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix}$$

$c_1 = U_0 - c_2$ olduğundan

$$U_1 = (U_0 - c_2) r_1 + c_2 r_2 = \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = U_0 r_1 - c_2 r_1 + c_2 r_2$$

$$U_1 = U_0 r_1 - c_2 (r_1 - r_2)$$

$$c_2 = \frac{r_1 U_0 - U_1}{r_1 - r_2} \text{ olur}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= U_0 - \left(\frac{r_1 U_0 - U_1}{r_1 - r_2} \right) \\ &= \frac{r_1 U_0 - r_2 U_0 - r_1 U_0 + U_1}{r_1 - r_2} \\ &= \frac{-r_2 U_0 + U_1}{r_1 - r_2} = \frac{U_1 - r_2 U_0}{r_1 - r_2} \end{aligned}$$

$U_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ denkleminde yerine yazarsak

$$U_n = \left(\frac{U_1 - r_2 U_0}{r_1 - r_2} \right) r_1^n - \left(\frac{U_1 - r_1 U_0}{r_1 - r_2} \right) r_2^n$$

şeklinde bulunur.

Teorem 6.2.9: Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri için kısmi toplam formülü aşağıdaki gibi verilir:

$$\sum_{k=0}^n U_k = S_n = \frac{1}{p+q-1} \begin{bmatrix} u_{n+2} - 1 + qu_{n+1} & u_{n+2} - 1 - pu_{n+1} + u_{n+1} \\ qu_{n+1} - q^2 u_n - q & qu_{n+1} + pqu_n - qu_n + p - 1 \end{bmatrix}$$

İspat:

Eşitliğin iki tarafını da U_1 ile çarparsak:

$$\begin{aligned} S_n U_1 &= U_1 (U_0 + U_1 + \dots + U_n) \\ &= U_1 + U_2 + \dots + U_{n+1} \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

elde edilir. (6.2.1) eşitliğinden S_n eşitliği çıkarılırsa:

$$S_n U_1 - S_n = S_n (U_1 - I) = U_{n+1} - U_0$$

$$S_n \begin{bmatrix} p-1 & 1 \\ q & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ qu_{n+1} & -qu_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_n \begin{bmatrix} p-1 & 1 \\ q & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+2}-1 & u_{n+1} \\ qu_{n+1} & -qu_n-1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Eşitliğin her iki tarafını $\begin{bmatrix} p-1 & 1 \\ q & -1 \end{bmatrix}$ matrisin tersi ile çarpılırsa:

$$S_n = \frac{1}{p+q-1} \begin{bmatrix} u_{n+2}-1 & u_{n+1} \\ qu_{n+1} & -qu_n-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ q & 1-p \end{bmatrix}$$

$$S_n = \frac{1}{p+q-1} \begin{bmatrix} u_{n+2}-1+qu_{n+1} & u_{n+2}-1-pu_{n+1}+u_{n+1} \\ qu_{n+1}-q^2u_n-q & qu_{n+1}+pqu_n-qu_n+p-1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 6.2.10: Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri için genel kısmi toplam formülü aşağıdaki gibi verilir:

$$\sum_{i=0}^{k-1} U_{mi+n} = \frac{U_n - (-q)^m U_{n-m} + (-q)^m U_{m(k-1)+n} - U_{mk+n}}{1 - V_m + (-q)^m}$$

İspat: Binet formülü, geometrik seri toplamı ve bazı cebirsel işlemler yapılarak ispat aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} U_{mi+n} &= \sum_{i=0}^{k-1} Ar_1^{mi+n} - Br_2^{mi+n} \\ &= Ar_1^n \left(\frac{1-r_1^{mk}}{1-r_1^m} \right) - Br_2^n \left(\frac{1-r_2^{mk}}{1-r_2^m} \right) \\ &= \frac{Ar_1^n (1-r_2^m - r_1^{mk} + (-q)^m r_1^{m(k-1)}) - Br_2^n (1-r_1^m - r_2^{mk} + (-q)^m r_2^{m(k-1)})}{1 - (r_1^m + r_2^m) + (-q)^m} \\ &= \frac{(Ar_1^n - Br_2^n) - (-q)^m (Ar_1^{n-m} - Br_2^{n-m})}{1 - V_m + (-q)^m} \\ &= \frac{+(-q)^m (Ar_1^{m(k-1)+n} - Br_2^{m(k-1)+n}) - (Ar_1^{mk+n} - Br_2^{mk+n})}{1 - V_m + (-q)^m} \\ A &= \frac{U_1 - r_2 U_0}{r_1 - r_2}, \quad B = \frac{U_1 - r_1 U_0}{r_1 - r_2} \end{aligned}$$

eşitlikleri denklemde yerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{k-1} U_{mi+n} = \frac{U_n - (-q)^m U_{n-m} + (-q)^m U_{m(k-1)+n} - U_{mk+n}}{1 - v_m + (-q)^m}$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 6.2.11: Genelleştirilmiş Fibonacci matris dizileri için üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n t^n = \frac{U_0 + (U_1 - pU_0)t}{1 - pt - qt^2}$$

İspat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n t^n = U_0 + U_1 t + U_2 t^2 + \dots$$

$$-pt \sum_{n=0}^{\infty} U_n t^n = -pU_0 t - pU_1 t^2 + \dots$$

$$-qt^2 \sum_{n=0}^{\infty} U_n t^n = -qU_0 t^2 + \dots$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$(1 - pt - qt^2) \sum_{n=0}^{\infty} U_n t^n = U_0 + t(U_1 - pU_0)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.2.12: $n > 0$ için

$$\sum_{k=0}^n \frac{U_k}{x^k} = \frac{x^2 U_0 - x(-U_1 + pU_0)}{x^2 - px - q} - \frac{U_{n+1}x + qU_n}{x^n(x^2 - px - q)}$$

şeklindedir.

İspat: Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi için ikinci bir Binet formülü kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^n \frac{U_k}{x^k} = \left(\frac{U_1 - r_2 U_0}{r_1 - r_2} \right) \sum_{k=0}^n \left(\frac{r_1}{x} \right)^k - \left(\frac{U_1 - r_1 U_0}{r_1 - r_2} \right) \sum_{k=0}^n \left(\frac{r_2}{x} \right)^k$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x^n} \left[\left(\frac{U_1 - r_2 U_0}{r_1 - r_2} \right) \left(\frac{x^{n+1} - r_1^{n+1}}{x - r_1} \right) - \left(\frac{U_1 - r_1 U_0}{r_1 - r_2} \right) \left(\frac{x^{n+1} - r_2^{n+1}}{x - r_2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{x^n (x - r_1)(x - r_2)} \left[\frac{(U_1 - r_2 U_0)(x^{n+1} - r_1^{n+1})(x - r_2) - (U_1 - r_1 U_0)(x^{n+1} - r_2^{n+1})(x - r_1)}{r_1 - r_2} \right] \\
&= \frac{1}{x^n (x^2 - px - q)} \left[\left(\frac{U_1 - r_2 U_0}{r_1 - r_2} \right) (x^{n+2} - r_2 x^{n+1} x r_1^{n+1} + (-q) r_1^n) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{U_1 - r_1 U_0}{r_1 - r_2} \right) (x^{n+2} - r_1 x^{n+1} - x r_2^{n+2} + (-q) r_2^n) \right] \\
&= \frac{1}{x^n (x^2 - px - q)} \left[x^{n+2} \left(\frac{U_1 - r_2 U_0 - U_1 + r_1 U_0}{r_1 - r_2} \right) - x^{n+1} \left(\frac{r_2 U_1 - r_2^2 U_0 - r_1 U_1 + r_1^2 U_0}{r_1 - r_2} \right) \right. \\
&\quad \left. - x \left(\left(\frac{U_1 - r_2 U_0}{r_1 - r_2} \right) r_1^{n+1} - \left(\frac{U_1 - r_1 U_0}{r_1 - r_2} \right) r_2^{n+1} \right) \right. \\
&\quad \left. - q \left(\left(\frac{U_1 - r_2 U_0}{r_1 - r_2} \right) r_1^n - \left(\frac{U_1 - r_1 U_0}{r_1 - r_2} \right) r_2^n \right) \right] \\
&= \frac{1}{x^n (x^2 - px - q)} [U_0 x^{n+2} - x^{n+1} (-U_1 + p U_0) - x U_{n+1} - q U_n]
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{U_k}{x^k} = \frac{x^2 U_0 - x(-U_1 + p U_0)}{x^2 - px - q} - \frac{U_{n+1} x + q U_n}{x^n (x^2 - px - q)}$$

eşitliği sağlanmış olur.

Teorem 6.2.13:

$A = \left(\frac{U_1 - r_2 U_0}{r_1 - r_2} \right)$, $B = \left(\frac{U_1 - r_1 U_0}{r_1 - r_2} \right)$ olmak üzere, r tek pozitif tamsayı için

$$\sum_{i=0}^{\infty} U_i^r x^i = \sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} \binom{r}{k} (-1)^k \left(\frac{A^{r-k} B^k - A^k B^{r-k} + (-q)^k (A^k B^{r-k} r_1^{r-2k} - A^{r-k} B^k r_2^{r-2k}) x}{1 + (-q)^r x^2 - (-q)^k (r_2^{r-2k} + r_1^{r-2k}) x} \right)$$

ve r çift pozitif tamsayı için

$$\sum_{i=0}^{\infty} U_i^r x^i = \sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} (-1)^k \binom{r}{k} (AB)^k \left[\frac{A^{r-2k} - B^{r-2k} + (-q)^k ((Br_1)^{r-2k} - (Ar_2)^{r-2k})x}{1 - (-q)^k v_{r-2k} x + (-q)^r x^2} \right] \\ + \binom{r}{r/2} \frac{(A)^{r/2} (-B)^{r/2}}{1 - (-q)^{r/2} x}$$

biçimindedir.

İspat: $|r_1^k r_2^{r-k} x| < 1$ olsun.

$$\sum_{i=0}^{\infty} (Ar_1^i - Br_2^i)^r x^i = \sum_{i=0}^{\infty} U_i^r x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (Ar_1^i)^k (-Br_2^i)^{r-k} \right) x^i \\ = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (A)^k (-B)^{r-k} \sum_{i=0}^{\infty} (r_1^k r_2^{r-k} x)^i \\ = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (A)^k (-B)^{r-k} \frac{1}{1 - r_1^k r_2^{r-k} x}$$

r tek alınırsa,

$$\sum_{i=0}^{\infty} (Ar_1^i - Br_2^i)^r x^i = \sum_{i=0}^{\infty} U_i^r x^i = \sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} \binom{r}{k} \left(\frac{(A)^k (-B)^{r-k}}{1 - r_1^k r_2^{r-k} x} + \frac{(A)^{r-k} (-B)^k}{1 - r_1^{r-k} r_2^k x} \right) \\ = \sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} \binom{r}{k} (-1)^k \left(\frac{A^{r-k} B^k}{1 - r_1^{r-k} r_2^k x} - \frac{A^k B^{r-k}}{1 - r_1^k r_2^{r-k} x} \right) \\ = \sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} \binom{r}{k} (-1)^k \left(\frac{A^{r-k} B^k - A^k B^{r-k} + (A^k B^{r-k} r_1^{r-k} r_2^k - A^{r-k} B^k r_1^k r_2^{r-k})x}{1 + (r_1 r_2)^r x^2 - (r_1^k r_2^{r-k} + r_1^{r-k} r_2^k)x} \right) \\ = \sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} \binom{r}{k} (-1)^k \left(\frac{A^{r-k} B^k - A^k B^{r-k} + (-q)^k (A^k B^{r-k} r_1^{r-2k} - A^{r-k} B^k r_2^{r-2k})x}{1 + (-q)^r x^2 - (-q)^k (r_2^{r-2k} + r_1^{r-2k})x} \right)$$

r çift alınırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} (Ar_1^i - Br_2^i)^r x^i &= \sum_{i=0}^{\infty} U_i^r x^i = \sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} \binom{r}{k} \left(\frac{(A)^k (-B)^{r-k}}{1 - r_1^k r_2^{r-k} x} + \frac{(A)^{r-k} (-B)^k}{1 - r_1^{r-k} r_2^k x} \right) \\
&\quad + \binom{r}{r/2} \frac{(A)^{r/2} (-B)^{r/2}}{1 - (-q)^{r/2} x} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} (-1)^k \binom{r}{k} \left(\frac{A^{r-k} B^k}{1 - r_1^{r-k} r_2^k x} + \frac{A^k B^{r-k}}{1 - r_1^k r_2^{r-k} x} \right) + \binom{r}{r/2} \frac{(A)^{r/2} (-B)^{r/2}}{1 - (-q)^{r/2} x} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} (-1)^k \binom{r}{k} \left(\frac{A^{r-k} B^k + A^k B^{r-k} - (r_1^k r_2^{r-k} A^{r-k} B^k + A^k B^{r-k} r_1^{r-k} r_2^k) x}{1 - x(-q)^k (r_1^{r-2k} + r_2^{r-2k}) + (-q)^r x^2} \right) \\
&\quad + \binom{r}{r/2} \frac{(A)^{r/2} (-B)^{r/2}}{1 - (-q)^{r/2} x} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} (-1)^k \binom{r}{k} (AB)^k \left(\frac{A^{r-2k} + B^{r-2k} - (-q)^k ((Ar_2)^{r-2k} + (Br_1)^{r-2k}) x}{1 - (-q)^k v_{r-2k} x + (-q)^r x^2} \right) + \\
&\quad \binom{r}{r/2} \frac{(A)^{r/2} (-B)^{r/2}}{1 - (-q)^{r/2} x}
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

6.3 Genelleştirilmiş Lucas Matris Dizileri

Tanım 6.3.1: Başlangıç şartları $V_0 = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 2q & -p \end{bmatrix}$, $V_1 = \begin{bmatrix} p^2 + 2q & p \\ qp & 2q \end{bmatrix}$ olan yineleme bağıntısı $V_n = pV_{n-1} + qV_{n-2}$ ile verilen matris dizisine genelleştirilmiş Lucas matris dizisi denir.

Teorem 6.3.2: Genelleştirilmiş Lucas matris dizisi, genelleştirilmiş Lucas sayı dizisinin elemanları kullanılarak aşağıdaki gibi verilir:

$$V_n = \begin{bmatrix} v_{n+1} & v_n \\ qv_n & qv_{n-1} \end{bmatrix}$$

İspat: İspat tümevarım kullanılarak yapılacaktır. $n=1$ için doğruluğu kolaylıkla görülür. $n \leq k$ için doğru olsun. $n = k+1$ için

$$V_{k+1} = pV_k + qV_{k-1}$$

$$\begin{aligned}
&= p \begin{bmatrix} v_{k+1} & v_k \\ qv_k & qv_{k-1} \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} v_k & v_{k-1} \\ qv_{k-1} & qv_{k-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_{k+2} & v_{k+1} \\ qv_{k+1} & qv_k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

doğru olduğu bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 6.3.3: Genelleştirilmiş Lucas matris dizisinin Binet formülü

$$V_{n+1} = \left(\frac{V_2 - r_2 V_1}{r_1 - r_2} \right) r_1^n - \left(\frac{V_2 - r_1 V_1}{r_1 - r_2} \right) r_2^n$$

şeklindedir.

İspat: $V_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ şeklinde belirtelim.

$$n=0 \text{ için } V_0 = c_1 + c_2 = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 2q & -p \end{bmatrix},$$

$$n=1 \text{ için } V_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2 = \begin{bmatrix} p^2 + 2q & p \\ qp & 2q \end{bmatrix}$$

$c_1 = V_0 - c_2$ olduğundan

$$V_1 = (V_0 - c_2) r_1 + c_2 r_2 = \begin{bmatrix} p^2 + 2q & p \\ qp & 2q \end{bmatrix}$$

$$V_1 = V_0 r_1 - c_2 r_1 + c_2 r_2$$

$$V_1 = V_0 r_1 - c_2 (r_1 - r_2)$$

$$c_2 = \frac{r_1 V_0 - V_1}{r_1 - r_2} \text{ olur}$$

$$c_1 = V_0 - \left(\frac{r_1 V_0 - V_1}{r_1 - r_2} \right)$$

$$= \frac{r_1 V_0 - r_2 V_0 - r_1 V_0 + V_1}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{-r_2 V_0 + V_1}{r_1 - r_2} = \frac{V_1 - r_2 V_0}{r_1 - r_2}$$

$V_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ denkleminde yerine yazarsak

$$V_n = \left(\frac{V_1 - r_2 V_0}{r_1 - r_2} \right) r_1^n - \left(\frac{V_1 - r_1 V_0}{r_1 - r_2} \right) r_2^n$$

şeklinde bulunur.

Teorem 6.3.4: $n > 0$ için genelleştirilmiş Lucas matris dizisinin determinanı

$$\det(V_{n+1}) = q(p^2 + 4q)(-q)^n,$$

$$v_{n+1}v_{n-1} - v_n^2 = (p^2 + 4q)(-q)^n.$$

şeklinde verilir.

İspat: $\det(V_{n+1}) = \det V_1 \det U_n = q(p^2 + 4q)(-q)^n$

Teorem 6.3.5: $n > 0$ için $A = \begin{pmatrix} V_2 - r_2 V_1 \\ r_1 - r_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} V_2 - r_1 V_1 \\ r_1 - r_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere;

$$V_{n+1}V_{n-1} - V_n^2 = -AB(p^2 + 4q)(-q)^{n-2}$$

dir.

Teorem 6.3.6: Genelleştirilmiş Lucas matris dizisi için üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n t^n = \frac{V_0 + (V_1 - pV_0)t}{1 - pt - qt^2}$$

İspat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n t^n = V_0 + V_1 t + V_2 t^2 + \dots$$

$$-pt \sum_{n=0}^{\infty} V_n t^n = -pV_0 t - pV_1 t^2 + \dots$$

$$-qt^2 \sum_{n=0}^{\infty} V_n t^n = -qV_0 t^2 + \dots$$

Eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$(1 - pt - qt^2) \sum_{n=0}^{\infty} V_n t^n = V_0 + t(V_1 - pV_0)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.3.7: Genelleştirilmiş Lucas matris dizisi için negatif indisli üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{k=0}^n \frac{V_k}{x^k} = \frac{x^2 V_1 + x(V_2 - pV_1)}{x^2 - px - q} - \frac{xV_{n+1} + qV_n}{x^{n+1}(x^2 - px - q)}$$

İspat: $A = \left(\frac{V_2 - r_2 V_1}{r_1 - r_2} \right), \quad B = \left(\frac{V_2 - r_1 V_1}{r_1 - r_2} \right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{V_k}{x^k} &= A \sum_{k=0}^n \left(\frac{r_1}{x} \right)^{k-1} - B \sum_{k=0}^n \left(\frac{r_2}{x} \right)^{k-1} \\ &= A \left(\frac{1 - \left(\frac{r_1}{x} \right)^n}{1 - \frac{r_1}{x}} \right) - B \left(\frac{1 - \left(\frac{r_2}{x} \right)^n}{1 - \frac{r_2}{x}} \right) \\ &= \frac{1}{x^{n-1}} \left[A \left(\frac{x^n - r_1^n}{x - r_1} \right) - B \left(\frac{x^n - r_2^n}{x - r_2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{x^{n-1}} \left[\left(\frac{V_2 - r_2 V_1}{r_1 - r_2} \right) \left(\frac{x^n - r_1^n}{x - r_1} \right) - \left(\frac{V_2 - r_1 V_1}{r_1 - r_2} \right) \left(\frac{x^n - r_2^n}{x - r_2} \right) \right] \\ &= \frac{[(V_2 - r_2 V_1)(x^{n+1} - x^n r_2 - x r_1^n + (-q)r_1^{n-1})] - [(V_2 - r_1 V_1)(x^{n+1} - x^n r_1 - x r_2^n + (-q)r_2^{n-1})]}{x^{n-1}(x^2 - px - q)(r_1 - r_2)} \\ &= \frac{x^{n+1}[V_2 - r_2 V_1 - V_2 + r_1 V_1] + x^n[-r_2 V_2 + r_2^2 V_1 + r_1 V_2 - r_1^2 V_1]}{x^{n-1}(x^2 - px - q)(r_1 - r_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{-x[(V_2 - r_2 V_1)r_1^n - (V_2 - r_1 V_1)r_2^n]}{x^{n-1}(x^2 - px - q)(r_1 - r_2)} \\
& - \frac{q[(V_2 - r_2 V_1)r_1^{n-1} - (V_2 - r_1 V_1)r_2^{n-1}]}{x^{n-1}(x^2 - px - q)(r_1 - r_2)} \\
& = \frac{x^{n+1}V_1(r_1 - r_2) + x^n[V_2(r_1 - r_2) - V_1(r_1^2 - r_2^2)] - x[(V_2 - r_2 V_1)r_1^n - (V_2 - r_1 V_1)r_2^n]}{x^{n-1}(x^2 - px - q)(r_1 - r_2)} \\
& - \frac{q[(V_2 - r_2 V_1)r_1^{n-1} - (V_2 - r_1 V_1)r_2^{n-1}]}{x^{n-1}(x^2 - px - q)(r_1 - r_2)} \\
& = \frac{x^{n+1}V_1(r_1 - r_2)}{x^{n-1}(x^2 - px - q)(r_1 - r_2)} + \frac{x^n[V_2(r_1 - r_2) - V_1(r_1^2 - r_2^2)]}{x^{n-1}(x^2 - px - q)(r_1 - r_2)} \\
& + \frac{-x[(V_2 - r_2 V_1)r_1^n - (V_2 - r_1 V_1)r_2^n]}{x^{n-1}(x^2 - px - q)(r_1 - r_2)} - \frac{q[(V_2 - r_2 V_1)r_1^{n-1} - (V_2 - r_1 V_1)r_2^{n-1}]}{x^{n-1}(x^2 - px - q)(r_1 - r_2)} \\
& = \frac{x^{n+1}V_1 + x^n(V_2 - pV_1) - xV_{n+1} - qV_n}{x^{n-1}(x^2 - px - q)} \\
& = \frac{x^2V_1 + x(V_2 - pV_1)}{x^2 - px - q} - \frac{xV_{n+1} + qV_n}{x^{n-1}(x^2 - px - q)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 6.3.8: Genelleştirilmiş Lucas matris dizisi için toplam formülü

$$\sum_{i=0}^{k-1} V_{mi+n} = \frac{V_n - (-q)^m V_{n-m} + (-q)^m V_{m(k-1)+n} - V_{mk+n}}{1 - v_m + (-q)^m}$$

şeklindedir.

6.4 Horadam Matris Dizileri

Bu bölümde Uygun S., Tümbaş A., tarafından 3. Uluslararası Mesleki ve Teknik Bilimler Kongresi'nde "The Generalized Fibonacci, Generalized Lucas, Horadam Matrix Sequences" adlı sunumdan faydalanmıştır.

Tanım 6.4.1: Başlangıç şartları $H_0 = \begin{bmatrix} b & \frac{a}{q} \\ qa & \frac{b-ap}{q} \end{bmatrix}$, $H_1 = \begin{bmatrix} pb+qa & b \\ qb & qa \end{bmatrix}$ olan

yineleme bağıntısı $H_n = pH_{n-1} + qH_{n-2}$ ile verilen matris dizisine Horadam matris dizisi denir.

Teorem 6.4.2: Horadam matris dizisi, Horadam sayı dizisinin elemanları kullanılarak aşağıdaki gibi verilir:

$$H_n = \begin{bmatrix} h_{n+1} & h_n \\ qh_n & qh_{n-1} \end{bmatrix}$$

İspat: İspat tümevarım kullanılarak yapılacaktır. $n=1$ için doğruluğu kolaylıkla görülür. $n \leq k$ için doğru olsun. $n = k+1$ için

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= pH_k + qH_{k-1} \\ &= p \begin{bmatrix} h_{k+1} & h_k \\ qh_k & qh_{k-1} \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} h_k & h_{k-1} \\ qh_{k-1} & qh_{k-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_{k+2} & h_{k+1} \\ qh_{k+1} & qh_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

doğru olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.4.3: Horadam matrisinin Binet formülü

$$H_n = \left(\frac{H_1 - r_2 H_0}{r_1 - r_2} \right) r_1^n - \left(\frac{H_1 - r_1 H_0}{r_1 - r_2} \right) r_2^n$$

şeklinde verilir.

İspat: $H_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ şeklinde belirtelim.

$$n=0 \text{ için } H_0 = c_1 + c_2 = \begin{bmatrix} b & \frac{a}{q} \\ qa & \frac{b-ap}{q} \end{bmatrix}$$

$$n=1 \text{ için } H_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2 = \begin{bmatrix} pb+qa & b \\ qb & qa \end{bmatrix}$$

$c_1 = H_0 - c_2$ olduğundan

$$H_1 = (H_0 - c_2)r_1 + c_2r_2 = \begin{bmatrix} pb + qa & b \\ qb & qa \end{bmatrix}$$

$$H_1 = H_0r_1 - c_2r_1 + c_2r_2$$

$$H_1 = H_0r_1 - c_2(r_1 - r_2)$$

$$c_2 = \frac{r_1H_0 - H_1}{r_1 - r_2} \text{ olur}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= H_0 - \left(\frac{r_1H_0 - H_1}{r_1 - r_2} \right) \\ &= \frac{r_1H_0 - r_2H_0 - r_1H_0 + H_1}{r_1 - r_2} \\ &= \frac{-r_2H_0 + H_1}{r_1 - r_2} = \frac{H_1 - r_2H_0}{r_1 - r_2} \end{aligned}$$

$H_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$ denkleminde yerine yazarsak

$$H_n = \left(\frac{H_1 - r_2H_0}{r_1 - r_2} \right) r_1^n - \left(\frac{H_1 - r_1H_0}{r_1 - r_2} \right) r_2^n$$

şeklinde bulunur.

Teorem 6.4.4: Horadam dizisinin üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n t^n = \frac{H_0 + (H_1 - pH_0)t}{1 - pt - qt^2}$$

şeklindeki gibidir.

İspat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n t^n = H_0 + H_1 t + H_2 t^2 + \dots$$

$$-pt \sum_{n=0}^{\infty} H_n t^n = -pH_0 t - pH_1 t^2 + \dots$$

$$-qt^2 \sum_{n=0}^{\infty} H_n t^n = -qH_0 t^2 + \dots$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$(1 - pt - qt^2) \sum_{n=0}^{\infty} H_n t^n = H_0 + t(H_1 - pH_0)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.4.5: $n > 0$, $m > 0$ için Simpson formülü

$$H_{n+1}H_{n-1} - H_n^2 = (pba + qa^2 - b^2)(-q)^m$$

şekildeki gibidir.

Teorem 6.4.6: Horadam matris dizileri için determinant formülü aşağıdaki gibidir:

$$\det(H_n) = (pbqa + q^2a^2 - b^2q)(-q)^m,$$

$$h_{n+1}h_{n-1} - h_n^2 = (pba + qa^2 - b^2)(-q)^m.$$

İspat: Horadam matris dizilerinin determinanı

$$|H_{m+1}| = |H_1 U_m| = |H_1| |U_m| = (pbqa + q^2a^2 - b^2q)(-q)^m$$

ile verilir.

Teorem 6.4.7: $j > m$ için Horadam sayıları için toplam formülü

$$\sum_{i=0}^n H_{mi+j} = \frac{H_j - (-q)^m H_{j-m} - H_{m(n+1)+j} + (-q)^m H_{mn+j}}{1 - (r_1^m + r_2^m) + (-q)^m}$$

eşitliği yazılabilir.

İspat:

$$A = \left(\frac{H_1 - r_2 H_0}{r_1 - r_2} \right), \quad B = \left(\frac{H_1 - r_1 H_0}{r_1 - r_2} \right) \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n H_{mi+j} &= \frac{1}{r_1 - r_2} \left[Ar_1^j \left(\frac{1 - r_1^{m(n+1)}}{1 - r_1^m} \right) - Br_2^j \left(\frac{1 - r_2^{m(n+1)}}{1 - r_2^m} \right) \right] \\
&= \frac{1}{r_1 - r_2} \left[\frac{Ar_1^j (1 - r_2^m - r_1^{m(n+1)} + r_1^{m(n+1)} r_2^m) - Br_2^j (1 - r_1^m - r_2^{m(n+1)} + r_1^m r_2^{m(n+1)})}{1 - r_2^m - r_1^m + (r_1 r_2)^m} \right] \\
&= \frac{1}{r_1 - r_2} \left[\frac{\left[Ar_1^j - Br_2^j \right] - (r_1 r_2)^m \left[Ar_1^{j-m} - Br_2^{j-m} \right]}{- \left[Ar_1^{m(n+1)+j} - Br_2^{m(n+1)+j} \right] + (r_1 r_2)^m \left[Ar_1^{mn+j} - Br_2^{mn+j} \right]} \right] \\
&= \frac{H_j - (-q)^m H_{j-m} - H_{m(n+1)+j} + (-q)^m H_{mn+j}}{1 - (r_1^m + r_2^m) + (-q)^m}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 6.4.8: $n > 0$ için, Horadam sayıları için

$$\sum_{k=0}^n \frac{H_k}{x^k} = \frac{x^2 H_0 - x(-H_1 + pH_0)}{x^2 - px - q} - \frac{H_{n+1}x + qH_n}{x^n(x^2 - px - q)}$$

eşitliği verilir.

İspat: Horadam sayı dizisi için ikinci Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \frac{H_k}{x^k} &= \left(\frac{H_1 - r_2 H_0}{r_1 - r_2} \right) \sum_{k=0}^n \left(\frac{r_1}{x} \right)^k - \left(\frac{H_1 - r_1 H_0}{r_1 - r_2} \right) \sum_{k=0}^n \left(\frac{r_2}{x} \right)^k \\
&= \frac{1}{x^n} \left[\left(\frac{H_1 - r_2 H_0}{r_1 - r_2} \right) \left(\frac{x^{n+1} - r_1^{n+1}}{x - r_1} \right) - \left(\frac{H_1 - r_1 H_0}{r_1 - r_2} \right) \left(\frac{x^{n+1} - r_2^{n+1}}{x - r_2} \right) \right] \\
&= \left[\frac{(H_1 - r_2 H_0)(x^{n+1} - r_1^{n+1})(x - r_2) - (H_1 - r_1 H_0)(x^{n+1} - r_2^{n+1})(x - r_1)}{x^n (x - r_1)(x - r_2)(r_1 - r_2)} \right] \\
&= \frac{1}{x^n (x^2 - px - q)} \left[\left(\frac{H_1 - r_2 H_0}{r_1 - r_2} \right) (x^{n+2} - r_2 x^{n+1} x r_1^{n+1} + (-q) r_1^n) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{H_1 - r_1 H_0}{r_1 - r_2} \right) (x^{n+2} - r_1 x^{n+1} - x r_2^{n+2} + (-q) r_2^n) \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x^n(x^2 - px - q)} \begin{bmatrix} x^{n+2} \left(\frac{H_1 - r_2 H_0 - H_1 + r_1 H_0}{r_1 - r_2} \right) \\ -x^{n+1} \left(\frac{r_2 H_1 - r_2^2 H_0 - r_1 H_1 + r_1^2 H_0}{r_1 - r_2} \right) \\ -x \left(\left(\frac{H_1 - r_2 H_0}{r_1 - r_2} \right) r_1^{n+1} - \left(\frac{H_1 - r_1 H_0}{r_1 - r_2} \right) r_2^{n+1} \right) \\ -q \left(\left(\frac{H_1 - r_2 H_0}{r_1 - r_2} \right) r_1^n - \left(\frac{H_1 - r_1 H_0}{r_1 - r_2} \right) r_2^n \right) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^n(x^2 - px - q)} [H_0 x^{n+2} - x^{n+1}(-H_1 + pH_0) - xH_{n+1} - qH_n]$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{H_k}{x^k} = \frac{x^2 H_0 - x(-H_1 + pH_0)}{x^2 - px - q} - \frac{H_{n+1}x + qH_n}{x^n(x^2 - px - q)}$$

ispat tamamlanmış olur.

6.5 Genelleştirilmiş Fibonacci Genelleştirilmiş Lucas ve Horadam Matris Dizileri Arasındaki Bağıntılar

Teorem 6.5.1: $n > 0$ tamsayısı için genelleştirilmiş Fibonacci ile genelleştirilmiş Lucas matrisleri arasında

$$V_n = pU_n + 2qU_{n-1}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: İspat tümevarım kullanılarak yapılacaktır.

$$n = 1 \text{ için } V_1 = pU_1 + 2qU_0$$

$$\begin{bmatrix} p^2 + 2q & p \\ pq & 2q \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix} + 2q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p^2 & p \\ pq & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2q & 0 \\ 0 & 2q \end{bmatrix}$$

$n \leq k$ için doğru olsun.

$n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
V_{k+1} &= pU_{k+1} + 2qU_k \\
&= p(pU_k + qU_{k-1}) + 2q(pU_{k-1} + qU_{k-2}) \\
&= p(pU_k + 2qU_{k-1}) + q(pU_{k-1} + 2qU_{k-2}) \\
&= pV_k + qV_{k-1} \\
&= V_{k+1}
\end{aligned}$$

doğru olduğu görülür. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 6.5.2: $n > 0$ tamsayısı için genelleştirilmiş Fibonacci ile genelleştirilmiş Lucas matrisleri arasında

$$V_{n+1} = V_1 U_n$$

eşitliği geçerlidir (Uygun, Tümbaş, 2018).

İspat:

Tümevarım yöntemini kullanacağız. $n = 0$ için; ifadenin doğruluğu kolaylıkla görülür. $n = 1$ için,

$$\begin{aligned}
V_2 &= V_1 U_1 = \begin{bmatrix} p^2 + 2q & p \\ qp & 2q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p^3 + 3qp & p^2 + 2q \\ qp^2 + 2q^2 & qp \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_3 & v_2 \\ qv_2 & qv_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. $n \leq N$ için doğru olduğunu kabul edelim. $n = N + 1$ için ifadenin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{aligned}
V_1 U_{N+1} &= V_1 U_N U_1 = V_{N+1} U_1 \\
&= \begin{bmatrix} v_{N+2} & v_{N+1} \\ qv_{N+1} & qv_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} v_{N+3} & v_{N+2} \\ qv_{N+2} & qv_{N+1} \end{bmatrix}$$

$$= V_{N+2}$$

doğru olduğu bulunur. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.5.3: $n > 0$ tamsayısı için genelleştirilmiş Fibonacci ile genelleştirilmiş Lucas matrisleri arasında

$$(p^2 + 4q)U_n = pV_n + 2qV_{n-1}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 6.5.4: $n > 0$ tamsayısı için genelleştirilmiş Lucas ile Horadam matrisleri arasında

$$(p^2 + 4q)H_n = (bp + 2aq)V_n + q(2b - ap)V_{n-1}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 6.5.5: $m, n > 0$ tamsayıları için genelleştirilmiş Fibonacci ile genelleştirilmiş Lucas matrisleri arasında

$$U_m V_{n+1} = V_{n+1} U_m$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Genelleştirilmiş Fibonacci ile genelleştirilmiş Lucas matrisleri arasında $V_n = pU_n + 2qU_{n-1}$ eşitliği, Teorem 6.2.6'da söylediğimiz $U_{m+n} = U_m U_n$ eşitliği ve Teorem 6.5.2'de söylediğimiz $V_{n+1} = V_1 U_n$ eşitliği kullanılırsa

$$U_m V_1 U_n = U_m (pU_1 + 2qU_0) U_n$$

$$= (pU_{m+1} + 2qU_m) U_n$$

$$= pU_{m+n+1} + 2qU_{m+n}$$

$$= pU_n U_1 U_m + 2qU_n U_m$$

$$= (pU_n U_1 + 2qU_n U_0)U_m$$

$$= (pU_1 + 2qU_0)U_n U_m$$

$$= V_1 U_n U_m$$

$$= V_{n+1} U_m$$

denklemini sağlanmış olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 6.5.6: Genelleştirilmiş Fibonacci sayı ile Horadam matrisleri arasında

$$H_n = bU_n + aqU_{n-1}$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

İspat: Tümevarım yöntemi kullanılırsa $n=1$ için eşitliğin doğruluğu görülür. $m \leq n$ için doğru olsun. $m=n+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= pH_n + qH_{n-1} \\ &= p(bU_n + aqU_{n-1}) + q(bU_{n-1} + aqU_{n-2}) \\ &= b(pU_n + qU_{n-1}) + aq(pU_{n-1} + qU_{n-2}) \\ &= bU_{n+1} + aqU_n \end{aligned}$$

doğru olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.5.7: $n+m$. Horadam matris dizisi genelleştirilmiş Fibonacci matris, Horadam matris dizisi kullanılarak şekildeki gibi verilir:

$$H_{n+m} = U_n H_m$$

İspat: İspat için tümevarım yöntemi kullanılacaktır. $n=1$ için doğru olduğunu görelim:

$$H_{m+1} = U_1 H_m$$

$$H_{m+1} = \begin{bmatrix} h_{m+1} & h_m \\ qh_m & qh_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{m+2} & h_{m+1} \\ qh_{m+1} & qh_m \end{bmatrix}$$

$n = m$ için doğru olsun. $n = m + 1$ için doğru olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
 U_n H_{m+1} &= U_n (pH_m + qH_{m-1}) \\
 &= pU_n H_m + qU_n H_{m-1} \\
 &= pH_{n+m} + qH_{n+m-1} \\
 &= H_{n+m+1}
 \end{aligned}$$

doğru olduğu görülür. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.5.8: n . Horadam matris dizisinin m . kuvveti genelleştirilmiş Fibonacci matris dizileri kullanılarak şekildeki gibi verilir:

$$H_{n+1}^m = H_1^m U_{mn}$$

İspat: İspat için tümevarım yöntemi kullanılacaktır.

$$m = 1 \text{ için } H_{n+1} = H_1 U_n$$

$m = n$ için doğru olsun

$$\begin{aligned}
 n = m + 1 \text{ için } H_{n+1}^{m+1} &= (H_{n+1}^m)(H_{n+1}) \\
 &= (H_1^m U_{mn})(H_1 U_n) \\
 &= H_1^{m+1} U_{n(m+1)}
 \end{aligned}$$

doğru olduğu görülür. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.5.9: $n \geq 0$ için $\{U_n(p, q)\}_{n \in \mathbb{N}}$, ve $\{V_n(p, q)\}_{n \in \mathbb{N}}$, arasına aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$V_{n+1}^2 = V_1^2 U_{2n}$$

$$V_{n+1}^2 = V_1 V_{2n+1}$$

$$V_{2n+1} = U_n V_{n+1}$$

İspat: Teorem 6.5.2 deki özellik kullanılarak

$$V_{n+1}^2 = V_{n+1}V_{n+1} = V_1U_nV_1U_n = V_1^2U_{2n}$$

$$V_{n+1}^2 = V_1^2U_{2n} = V_1V_1U_{2n} = V_1V_{2n+1}$$

$$V_{n+1}^2 = V_1U_{2n} = U_nV_{n+1}$$

ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 6.5.10: $n > 0$ için

$$v_{n+2}^2 + qv_{n+1}^2 = (p^2 + 4q)u_{2n+3}$$

$$v_{n+2}^2 + qv_{n+1}^2 = v_{2n+4} + qv_{2n+2}$$

$$v_{2n+1} = u_{n+1}v_{n+1} + qv_nu_n$$

dir.

İspat: Teorem 6.5.9 daki matrislerin eşitliklerinden elde edilir.

Sonuç 6.5.11: $n \geq 0$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$u_{n+1}^2 + (1 + q^2)u_n^2 + q^2u_{n-1}^2 \geq v_{2n}$$

$$u_{n+1}^2 + (1 + q^2)u_n^2 + q^2u_{n-1}^2 \geq v_{2n+4} + 2qv_{2n+2} + q^2v_{2n}$$

(Uygun, Tümbaş, 2018).

İspat:

$$\left\| \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ qu_n & qu_{n-1} \end{pmatrix} \right\|_2^2 \geq \left\| \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

$$u_{n+1}^2 + (1 + q^2)u_n^2 + q^2u_{n-1}^2 \geq r_1^{2n} + r_2^{2n} = v_{2n}$$

$$V_{n+1} = V_1U_n = (U_2 + qU_0)U_n = U_{n+2} + qU_n$$

$$\left\| \begin{pmatrix} v_{n+2} & v_{n+1} \\ qv_{n+1} & qv_n \end{pmatrix} \right\|_2^2 \geq \left\| \begin{pmatrix} r_1^{n+2} + qr_1^n & 0 \\ 0 & r_2^{n+2} + qr_2^n \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

$$\begin{aligned} v_{n+1}^2 + (1 + q^2)v_n^2 + q^2v_n^2 &\geq (r_1^{2n+4} + r_2^{2n+4}) + 2q(r_1^{2n+2} + r_2^{2n+2}) + q^2(r_1^{2n} + r_2^{2n}) \\ &= v_{2n+4} + 2qv_{2n+2} + q^2v_{2n} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispatın doğru olduğu görülür.



BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, öncelikle ciddi bir literatür taraması yapılarak bu zamana kadar Horadam dizileri ile ilgili yapılan çalışmalar verilmiştir. Sonraki bölümde çeşitli sayı dizileri temel özellikleri verilerek kısaca tanıtılmıştır. 3. Bölümde ise konumuzun temelini oluşturan Horadam sayı ve polinom dizilerini ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. 4. Bölümde ise Horadam polinom dizilerinin bir genelleştirmesi olan genelleştirilmiş k – Horadam dizisi matris cebri kullanılarak detaylı bir şekilde incelenmiştir. 5. Bölümde ise Horadam sayı dizileri ile Chebyshev ve diğer sayı dizilerinin bir genelleştirmesi olan polinom dizileri arasındaki çeşitli bağıntılar incelenmiştir.

Son olarak genelleştirilmiş Fibonacci, genelleştirilmiş Lucas ve Horadam sayı dizileri kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci, genelleştirilmiş Lucas ve Horadam matris dizileri tanımlanmıştır. Bu matris dizilerini ayrıntılı bir şekilde inceledikten sonra birbirleriyle olan bağıntıları araştırılmıştır.

Bu tez çalışmasında “Generalized k – Jacobstal Sequence” adlı bir makale Asian Journal of Pyhsics and Mathematics adlı dergide yayınlanmıştır. Ayrıca bu çalışma ile ilgili 3. Uluslararası Mesleki ve Teknik Bilimler Kongresi’nde “The Generalized Fibonacci, Generalized Lucas, Horadam Matrix Sequences” adlı sunum yapılmıştır ve Horadam Matrix Sequences ile ilgili bir makale incelenmek üzere bir dergiye gönderilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Civciv H., Turkmen R., (2008). On the (s,t) Fibonacci and Fibonacci matrix sequences, *ARS Combinatoria*, **87**, 161-173.
- [2] El-Mikkawy M., Sogabe T., (2010). A new family of k -Fibonacci numbers, *Applied Mathematics and Computation* **215**, 4456-4461.
- [3] Falcon S., Plaza A., (2009). On k -Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives, *Chaos Solitons Fractals* **39**, 1005–1019.
- [4] Harman C.T., (1981). Complex Fibonacci numbers, *The Fibonacci Quarterly*, **19**, 82-86.
- [5] Haukkanen P., (2002). A note on Horadam's sequence, *The Fibonacci Quarterly*, **40**, 358-361.
- [6] Hilton A. J.W., (1974). On the partition of Horadam's generalized sequences into generalized Fibonacci and generalized Lucas sequences, *The Fibonacci Quarterly*, **12**, 339-345.
- [7] Horadam A.F., (1965). A generalized Fibonacci sequence, *American Mathematical Monthly*, **68**, 455-459.
- [8] Horadam A.F., (1965). Basic properties of a certain generalized sequence of numbers, *The Fibonacci Quarterly*, **3**, 161-176.
- [9] Horadam A.F., (1965). Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers, *Duke Mathematics Journal*, **32**, 437-446.
- [10] Horadam A. F., (1967). Special properties of the sequence $w_n(a,b;p,q)$, *The Fibonacci Quarterly*, **5**, 424-434.
- [11] Horadam A. F. (1969). Tschebyscheff and other functions associated with the sequence $\{W_n(a,b;p,q)\}$, *The Fibonacci Quarterly*, **7**, 14-22.

- [12] Horadam A.F., Mahon J.M., (1985). Pell and Pell-Lucas polynomials, *The Fibonacci Quarterly*, **23**, 7-20.
- [13] Horadam A.F., Shannon A.G., (1987). Generalization of identities of Catalan and other, *Portugaliae Mathematica*, **44**, 137-148.
- [14] Horadam A.F., (1987). Generalization of a result of Morgado, *Portugaliae Mathematica*, **44**, 313 – 336.
- [15] Horadam A.F., (1997). Jacobsthal representation polynomials, *The Fibonacci Quarterly*, **35(2)**, 137-148.
- [16] Horzum T., Kocer E.G., (2009). On some properties of Horadam polynomials, *International Mathematical Forum*, **4**, 1243-1252
- [17] Kerf J., (1999). From Fibonacci to Horadam, *Vektor*, **15**, 122-130.
- [18] Kılıç E., Ulutaş Y.T. and Ömür, N., (2011). A formula for the generating functions of powers of Horadam's sequence with two additional parameters, *Jornal Integer Sequence*, **14**, Art. 11.5.6, 8.
- [19] Kılıç E., Ulutaş Y.T. and Ömür Y., (2011). N. Sums of products of the terms of generalized Lucas sequence $\{V_{kn}\}$, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **40(2)**, 147-161.
- [20] Kocer E.G., Mansour T. and Tuglu N., (2007). Norms of circulant and semicirculant matrices with Horadam's numbers, *Australasian Combinatorica*, **85**, 353-359.
- [21] Koshy T., 2001. Fibonacci and Lucas numbers with applications, A Wiley-Interscience Publication
- [22] Lupaş A., (1999). A Guide of Fibonacci and Lucas polynomials, *Mathematical Magazine*, **7(1)**, 2-12.
- [23] Mansour T., (2 February 2003). A note on sum of power of Horadam's sequence, *Arxiv : Math / 0302015v1 [Math.Co]*

- [24] Mansour T., (2004). A formula for the generating functions of powers of Horadam's sequence, *Australasian Journal of Combinatorics*, **30**, 207-212.
- [25] Mezo I., (2009). Several generating functions for second-order recurrence sequences, *Journal Integer Sequences*, **12**, Art. 09.3.7, 16.
- [26] Morgado J., (1987). Note on some results of A.F. Horadam and A.G. Shannon concerning a Catalan's identity on Fibonacci numbers, *Portugaliae Mathematica*, **44**, 243-252.
- [27] Morgado J., (1980). Some remarks on an identity of Catalan concerning the Fibonacci numbers, *Portugaliae Mathematica*, **39**, 341-348.
- [28] Morgado J., (1995). Note on Chebyshev Polynomials and Applications to The Fibonacci Numbers, *Portugaliae Mathematica*, **52**, 363-378.
- [29] Pethe S., Horadam A.F., (1986). Generalized gaussian Fibonacci numbers, *Bull. Austria Mathematical Society*, **33**, 37-48.
- [30] Reiter C.A., (1999). Exact Horadam numbers with a Chebyshev accent, *Vektor*, **16**, 122-131.
- [31] Shannon A.G., (1979). A generalization of Hilton's partition of Horadam's sequences, *The Fibonacci Quarterly*, **17**, 349-357.
- [32] Spivey M.Z., (2006). Fibonacci Identities via the determinant sum Property, *The College Mathematics Journal*, **37(2)**, 286-289.
- [33] Taskara N., Uslu K., Yazlik Y. and Yilmaz N., (2011). The Construction of Horadam numbers in terms of the determinant of tridiagonal matrices, *Numerical Analysis and Applied Mathematics*, AIP Conference Proceedings **1389**, 367-370.
- [34] Udrea G., (1996). A note on the sequence $(W_n)_{n>0}$ of A.F. Horadam, *Portugaliae Mathematica*, **53**, 143-155.
- [35] Udrea GH., (1995). A problem of Diophantos – Fermat and Chebyshev polynomials of the second kind, *Portugaliae Mathematica*, **52**, 301-304.

- [36] Uslu K., Taşkara N. and Köse H., (2011). The generalized k – Fibonacci and k – Lucas numbers, *Ars Combinatoria*, **99**, 25-32.
- [37] Uslu K., Uygun S., (2013). The (s,t) Jacobsthal and (s,t) Jacobsthal-Lucas Matrix sequences, *ARS Combinatoria*, **108**, 13-22.
- [38] Uygun S., Tümbas, A., Generalized k-Jacobsthal Sequence, *Asian Journal of Mathematics and Physics*, **2(2)**, 45-50.
- [39] Uygun S., Tümbas, A., Generalized Fibonacci, Generalized Lucas and Horadam Matrix Sequences, (incelenmek üzere gönderildi)
- [40] Waddill M.E., Sacks L., (1967). Another generalized Fibonacci sequence, *The Fibonacci Quarterly*, **5**, 209-222.
- [41] Zhang Z., (1997). Some identities involving generalized second – order integer sequences, *The Fibonacci Quarterly*, **35**, 265-268.
- [42] <https://www.matematiksel.org/fibonacci-sihirli-sayilari/>

