

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HORADAM SAYI VEKTÖRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RÜMEYSA BİNGÖL

DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ HASAN GÖKBAŞ

OCAK-2025

BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HORADAM SAYI VEKTÖRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RÜMEYSA BİNGÖL
ORCID: 0009-0000-1877-466X

DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ HASAN GÖKBAŞ

OCAK-2025
BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Bu tezdeki bütün bilgiler etik davranış ve akademik kurallar çevresinde ele alınmış olup tez yazım kurallarına uyulmuştur. İçerisinde yer alan ifade ve bilgiler kaynakçada eksiksiz olarak belirtilmiştir.

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisiyim. Çalışmış olduğum “HORADAM SAYI VEKTÖRLERİ” başlıklı tezde aktardığım verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar kapsamında elde ettiğimi; tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kuralları doğrultusunda aktardığımı; tez çalışmasında faydalandığım eserlerin tamamına uygun göndermelerde bulunarak kaynak gösterdiğimi; kullanılan veriler üzerinde herhangi bir değişiklik yapmadığımı; bu tezde aktardığım çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

20/1/2025

İmza

Rümeysa BİNGÖL

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ YAZIM KILAVUZU UYGUNLUK BEYANI

“HORADAM SAYI VEKTÖRLERİ” başlıklı yüksek lisans tezi Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırlanmıştır. 20/1/2025

Tezi Hazırlayan

İmza

Rümeysa BİNGÖL

Danışman

İmza

Dr. Öğretim Üyesi Hasan GÖKBAŞ

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

İmza

Prof. Dr. Hatice KUŞAK-SAMANCI

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY SAYFASI

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı öğrencisi Rümeysa BİNGÖL tarafından hazırlanan “HORADAM SAYI VEKTÖRLERİ” isimli yüksek lisans teziyle ilgili tez savunma sınavı, 20/1/2025 tarihinde yapılmış ve tezin oy birliğiyle kabul edilmesine karar verilmiştir.

JÜRİ:

İMZA

Danışman:

Üye:

Üye:

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun tarih ve Sayılı kararıyla jüri tarafından kabul edilmiş bu çalışmanın yüksek lisans tezi olarak kabulü onaylanmıştır.

...../..... /2025

Prof. Dr. Mehmet Bakır ŞENGÜL

Enstitü Müdürü

T.C.

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

HORADAM SAYI VEKTÖRLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Rümeysa BİNGÖL

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Hasan GÖKBAŞ

Ocak 2025

ÖZET

Cebir ve Sayılar Teorisi alanlarında, sayı dizileri altın, gümüş, bakır gibi metalik oranları verdiği için çeşitli alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Horadam sayı dizisi, Alwyn Francis Horadam tarafından tanımlanarak Fibonacci, Lucas, Pell, Jacobsthal gibi karakteristik denklemi ikinci dereceden olan sayı dizilerinin genellemesi olarak literatürde yer almıştır. Horadam sayıları, Horadam polinomları gibi çeşitli çalışmalar sergilenmiştir. Bu çalışmada, Horadam vektörlerinin tanımı yapılarak, Horadam vektörlerinin Binet formülü verilmiştir. Horadam vektörlerinin iç çarpımı ve norm değeriyle Horadam vektörlerinin vektörel çarpımları elde edilmiştir. Horadam vektörleri arasındaki açılar iki boyutlu kısıtlamalar dahilinde analiz edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Horadam sayıları, Horadam vektörleri, İç çarpım, Vektörel çarpım, Norm.

Republic of Türkiye

Bitlis Eren University Graduate School Department of Mathematics

HORADAM VECTORS

Master's Thesis

Rümeysa BİNGÖL

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hasan GÖKBAŞ

January 2025

ABSTRACT

In the fields of Algebra and Number Theory, number sequences are widely used in various fields because they give metallic ratios such as gold, silver, copper. Horadam number sequence, defined by Alwyn Francis Horadam, is a generalisation of Fibonacci, Lucas, Pell, Jacobsthal number sequences whose characteristic equation is quadratic. Various studies such as Horadam numbers, Horadam polynomials have been exhibited. In this study, Horadam vectors are defined and the Binet formula of Horadam vectors is given. The inner product of Horadam vectors and vector products of Horadam vectors with norm value are obtained. The angles between Horadam vectors are analysed within two dimensional constraints.

Key words: Horadam number, Horadam vector, Inner product, Vectorial product, Norm.

TEŞEKKÜR

“Horadam Vektörleri” adlı bu çalışma Bitlis Eren Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı Dr. Öğr. Üyesi Hasan GÖKBAŞ yönetimiyle hazırlanmış olup Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’ne sunulmuştur.

Yapılan tüm çalışmalarda tüm desteğini sunan sayın hocam Dr. Öğretim Üyesi Hasan GÖKBAŞ’a saygı ve şükranlarımı sunarım. Her zaman yanımda olan ve desteğini esirgemeyen eşime ve oğluma teşekkür ederim. Yüksek lisans öğrenimim boyunca bana burs desteğini temin eden TÜBİTAK - Bilim Adamı Yetiştirme Grubuna (BAYG) teşekkür ederim.

Rümeysa BİNGÖL

BİTLİS-2025

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
SİMGELER	V
1.GİRİŞ	1
2. MATERYAL ve YÖNTEM.....	2
2.1. Sayı Dizileri	2
2.2. Kaynak Araştırması	9
2.3. Vektörler	14
2.3.1. Vektörlerin Toplamı	15
2.3.2. Vektörlerin Farkı	15
2.3.3. İki Vektörün İç Çarpımı	16
2.3.4. İki Vektör Arasındaki Açısı.....	16
2.4. Normlar	17
2.4.1. Vektör Normları	17
3. BULGULAR ve TARTIŞMA.....	18
3.1. Horadam Sayıları	18
3.2. Horadam Vektörleri.....	19
3.3. İki Boyutlu Açılar	23
3.4. a ve b Vektörlerinin Nokta Çarpımları	24
3.5. a ve b Vektörlerinin Kosinüsü	25
4. SONUÇ.....	28
5. KAYNAKLAR	29

SİMGELER

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi,

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi,

F_n : n . Fibonacci sayısı,

L_n : n . Lucas sayısı,

P_n : n . Pell sayısı,

Q_n : n . Pell-Lucas sayısı,

J_n : n . Jacobsthal sayısı,

j_n : n . Jacobsthal Lucas sayısı,

M_n : n . Mersenne sayısı,

m_n : n . Mersenne Lucas sayısı,

H_n : n . Horadam sayısı,

$F_{k,n}$: n . k -Fibonacci sayısı,

$L_{k,n}$: n . k -Lucas sayısı,

$H_{k,n}$: n . k -Horadam sayısı,

$\|\overrightarrow{KL}\|$: KL vektör uzunluğu.

1.GİRİŞ

Sayılar teorisinde, sayı dizileri önemli bir alana sahiptir. Araştırmacılar tarafından sayı dizileriyle ilgili pek çok çalışmalar sergilenmiştir. Kuvvet serilerinde, üreteç fonksiyonlarında, zaman seri analizlerinde, queueing teorisinde ve bunun gibi birçok bilim dalında kullanılmaktadır. Tam sayı dizileri olarak ilk akla gelen dizi Fibonacci dizisi olmaktadır. Fibonacci sayıları, Pascal üçgeni, Pisagor üçlülere, bilgisayar algoritmaları, grafik teorisinde gibi matematiğin birçok alanında bulunabilmektedir. Ayrıca, fizik, finans, mimarlık, müzik ve sanat dallarında da görülebilmektedir.

Güzellik ölçülebilen bir kavram değilken, uyum matematiksel olarak açıklanabilir. Matematiksel güzelliği anlatmak zordur lakin bu tüm güzellikler için geçerlidir. Ancak matematikçiler bu güzelliklere bakmak isterlerse; kar taneciklerine bakarak, arıların geometrik petek dizilimlerine ve bazı ağaçların gelişimlerini izlemeleri yeterli olacaktır. Tabi bunun gibi birçok örnekte verilebilir. Biz buna matematiğin estetiği diyoruz. Perspektif, simetri ve orantı gibi kavramlar ölçülebilir olduğundan bu kavramlar matematiğin estetiğidir diyebiliriz.

Birçok farklı branştan bilim insanları ve din adamları aralarında yüzlerce yıllık zaman ya da mekan farkı gözetmeksizin aslında ortak çalışmalar ortaya koymuşlardır. Bunlardan biri de “Altın Oran” kavramıdır. Kesmek anlamına gelen bu kavram, altın bölüm, kutsal kesit, Fibonacci sayısı gibi birçok şekilde adlandırılmıştır. Altın oran ve Fibonacci sayılarını Dünya’nın yedi harikası olan Piramitlerde, Rönesans sanatçılarının resimlerinde ve birçok alanda görmek mümkündür.

Başlangıç değerleri $H_0 = a$ ve $H_1 = b$ olmak üzere, $H_{n+2} = pH_{n+1} + qH_n$ ikinci mertebeden, lineer yineleme bağıntısına sahip dizisine Alwyn Francis Horadam’ın çalışmalarından dolayı Horadam Dizisi denmektedir. Horadam dizisi, Fibonacci ve Lucas dizilerinin bir genellemesi olarak da adlandırılabilir. Bu diziler, sayılar teorisindeki çalışmaların ana unsuru olup, büyük bir öneme sahiptir ayrıca matematik ve diğer bilim dallarının çok başka kısımlarında karşımıza çıkmaktadır. Literatürde Horadam türü dizilerle ilgili olan kaynakların çokluğu bu diziyi incelemeye değer kılmaktadır.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

Çalışmamızda fayda sağlayacak temel kavramları ve çalışmaları ele alacağız.

2.1. Sayı Dizileri

Tanım 2.1.1. (Fibonacci Sayı Dizisi) $n \geq 0$ olmak üzere $F_0 = 0, F_1 = 1$ ve $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ doğrusal yineleme bağıntısı ile ifade edilen tam sayı dizisine Fibonacci dizisi denir. Fibonacci sayı dizisinde, her n doğal sayısına karşılık gelen değere n .Fibonacci sayısı denir.

Fibonacci sayıları için Binet formülü,

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

şekindedir. Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^{\infty} F_i \cdot x^i = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Simpson formülü,

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

ve toplam formülü

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$$

olarak verilir (Koshy, 2001).

Tanım 2.1.2. (Lucas Sayı Dizisi) $n \geq 0$ olmak üzere, $L_0 = 2, L_1 = 1$ ve $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ doğrusal yineleme bağıntısı ile ifade edilen tamsayı dizisine Lucas dizisi denir. Lucas dizisinde her n doğal sayısına karşılık gelen değere n . Lucas sayısı denir.

Lucas sayıları için Binet formülü,

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

şeklindedir. Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^{\infty} L_i \cdot x^i = \frac{2x^2 + x}{1 - x - x^2}$$

Simpson formülü,

$$L_{n+1} \cdot L_{n-1} - L_n^2 = 5 \cdot (-1)^{n-1}$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=1}^n L_i = L_{n+2} - 3$$

olarak verilir (Koshy, 2001).

Tanım 2.1.3. (Pell Sayı Dizisi) $n \geq 0$ olmak üzere, $P_0 = 0, P_1 = 1$ ve $P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$ doğrusal yineleme bağıntısı ile ifade edilen tam sayı dizisine Pell dizisi denir. Pell dizisinde, her n doğal sayısına karşılık gelen değere n .Pell sayısı denir.

Pell sayıları için Binet formülü,

$$P_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

şeklindedir. Pell sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i \cdot x^i = \frac{x}{1 - 2x - x^2}$$

Simpson formülü,

$$P_{n+1} \cdot P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=0}^n P_i = \frac{1}{2} \cdot (P_{n+1} + P_n - 1)$$

olarak verilir (Koshy, 2014).

Tanım 2.1.4. (Pell-Lucas Sayı Dizisi) $n \geq 0$ olmak üzere, $Q_0 = 2, Q_1 = 2$ ve $Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n$ doğrusal yineleme bağıntısı ile ifade edilen tam sayı dizisine Pell –Lucas denir. Pell-Lucas dizisinde, her n doğal sayısına karşılık gelen değere n .Pell-Lucas sayısı denir.

Pell-Lucas sayıları için Binet formülü,

$$Q_n = (1 - \sqrt{2})^n + (1 + \sqrt{2})^n$$

şekindedir. Pell-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{i=0}^{\infty} Q_i \cdot x^i = \frac{2 - 2x}{1 - 2x - x^2}$$

Simpson formülü,

$$Q_{n+1} \cdot Q_{n-1} - Q_n^2 = 8 \cdot (-1)^{n-1}$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=0}^n Q_i = \frac{1}{2} \cdot (Q_{n+1} + Q_n - 2)$$

olarak verilir (Koshy, 2014).

Tanım 2.1.5. (Jacobsthal Sayı Dizisi) $n \geq 0$ olmak üzere, $J_0 = 0, J_1 = 1$ ve $J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$ doğrusal yineleme bağıntısı ile ifade edilen tam sayı dizisine Jacobsthal dizisi denir. Jacobsthal dizisinde, her n doğal sayısına karşılık gelen değere n .Jacobsthal sayısı denir.

Jacobsthal sayıları için Binet formülü,

$$J_n = \frac{1}{3} \cdot (2^n - (-1)^n)$$

şekindedir. Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{i=0}^{\infty} J_{i+1} \cdot x^i = \frac{1}{1 - x - 2x^2}$$

Simpson formülü,

$$J_{n+1} \cdot J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n \cdot 2^{n-1}$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=2}^n J_i = \frac{1}{2} \cdot (J_{n+2} - 3)$$

olarak verilir (Uygun, 2016).

Tanım 2.1.6. (Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi) $n \geq 0$ olmak üzere $J_0 = 2, J_1 = 1$ ve $J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$ doğrusal yineleme bağıntısı ile ifade edilen verilen tam sayı dizisine Jacobsthal-Lucas dizisi denir. Bu dizide, her n doğal sayısına karşılık gelen değere n .Jacobsthal-Lucas sayısı denir.

Jacobsthal-Lucas sayıları için Binet formülü,

$$J_n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindedir. Jacobsthal-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{i=0}^{\infty} J_i \cdot x^i = \frac{1 + 4x}{1 - x - 2x^2}$$

Simpson formülü,

$$J_{n+1} \cdot J_{n-1} - J_n^2 = 9 \cdot (-1)^n \cdot 2^{n-1}$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=1}^n J_i = \frac{1}{2} \cdot (J_{n+2} - 5)$$

olarak verilir (Uygun, 2016).

Tanım 2.1.7. (Mersenne Dizisi) $n \geq 2$ olmak üzere $M_0 = 0, M_1 = 1$ ve $M_n = 3M_{n-1} - 2M_{n-2}$ doğrusal yineleme bağıntısı ile ifade edilen tam sayı dizisine Mersenne sayı dizisi denir. Mersenne dizisinde, her n doğal sayısına karşılık gelen değere n .Mersenne sayısı denir.

Mersenne sayıları için Binet formülü,

$$M_n = 2^n - 1$$

şeklindedir. Mersenne sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{i=0}^{\infty} M_i \cdot x^i = \frac{x}{1 - 3x + 2x^2}$$

Simpson formülü,

$$M_{n+1} \cdot M_{n-1} - M_n^2 = -2^{n-1}$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=1}^n M_i = M_{n+1} - 1 - n$$

olarak verilir (Soykan, 2021).

Tanım 2.1.8. (Mersenne-Lucas Sayı Dizisi) $n \geq 2$ olmak üzere $m_0 = 2$ ve $m_1 = 3$ $m_n = 3m_{n-1} - 2m_{n-2}$ doğrusal yineleme bağıntısı ile ifade edilen tamsayı dizisine Mersenne-Lucas sayı dizisi denir. Mersenne-Lucas dizisinde, her n doğal sayısına karşılık gelen değere n .Mersenne-Lucas sayısı denir.

Mersenne-Lucas sayıları için Binet formülü,

$$m_n = 2^n + 1$$

şeklindedir. Mersenne-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{i=0}^{\infty} m_i \cdot x^i = \frac{2 - 4x}{1 - 3x + 2x^2}$$

Simpson formülü,

$$m_{n+1} \cdot m_{n-1} - m_n^2 = -2^{n-1}$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=1}^n m_i = m_{n+1} - 1 + n$$

olarak verilir (Soykan, 2021).

Tanım 2.1.9. (Horadam Sayı Dizisi) $a, b, p, q \in Z$ ve $w_0 = a$, $w_1 = b$ ne $w_{n+2} = pw_{n+1} - qw_n$ şeklinde tanımlanan sayı dizisinin Horadam dizisi ve bu dizinin elemanlarına Horadam sayıları denir.

Horadam sayıları için Binet formülü,

$$\Psi = \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}, \eta = \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}, A = \frac{b-a\eta}{\Psi-\eta} \text{ ve } B = \frac{b-a\Psi}{\Psi-\eta} \text{ olmak üzere,}$$

$$w_n = A \cdot \Psi^n + B \cdot \eta^n$$

şeklindedir. Horadam sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n \cdot x^n = \frac{a + x \cdot (b - pa)}{1 - p \cdot x + q \cdot x^2}$$

olarak verilir (Horadam, 1965).

Tanım 2.1.10. (k-Fibonacci Sayı Dizisi) $\forall k > 0$ reel sayısı için $F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1$ olmak üzere,

$$F_{k,n+2} = kF_{k,n+1} + F_{k,n}$$

şeklinde ifade edilen diziye k -Fibonacci dizisi ve dizi elemanlarına k -Fibonacci sayıları denir.

$\alpha_k = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\beta_k = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ olmak üzere k -Fibonacci sayılarının Binet formülü,

$$F_{k,n} = \frac{\alpha_k^n - \beta_k^n}{\alpha_k - \beta_k}$$

şeklindedir (Falcon ve Plaza, 2007).

Tanım 2.1.11. (k-Lucas Sayı Dizisi) $\forall k > 0$ reel sayısı için $L_{k,0} = 2, L_{k,1} = k$ olmak üzere,

$$L_{k,n+2} = k \cdot L_{k,n+1} + L_{k,n}$$

şeklinde ifade edilen diziye k -Lucas dizisi ve dizi elemanlarına k -Lucas sayıları denir.

$\alpha_k = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\beta_k = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ olmak üzere k -Lucas sayılarının Binet formülü,

$$L_{k,n} = \alpha_k^n + \beta_k^n$$

şeklindedir (Falcon ve Plaza, 2007).

Tanım 2.1.12. (k-Horadam Sayı Dizisi) $\forall k > 0$ reel sayısı için $H_{k,0} = a, H_{k,1} = b$ olmak üzere,

$$H_{k,n+2} = f(k) \cdot H_{k,n+1} + g(k) \cdot H_{k,n}$$

şeklinde tanımlanan diziye k -Horadam sayı dizisi denir ve dizi elemanlarına k -Horadam sayıları denir.

$\alpha_k = \frac{f(k)+\sqrt{f(k)^2+4g(k)}}{2}$ ve $\beta_k = \frac{f(k)-\sqrt{f(k)^2+4g(k)}}{2}$ olmak üzere k -Horadam

sayılarının Binet formülü,

$A = b - a \cdot \alpha_k$ ve $B = b - a \cdot \beta_k$ olmak üzere,

$$H_{k,n} = \frac{A \cdot \alpha_k^n - B \cdot \beta_k^n}{\alpha_k - \beta_k}$$

şeklindedir (Yazlık ve Taskara, 2012).

Tanım 2.1.13. (Bi-periodic Fibonacci Sayı Dizisi) Herhangi iki pozitif tamsayı a ve b için, bi-periodic Fibonacci dizisi $f_0 = 0, f_1 = 1$ olmak üzere,

$$f_n = \begin{cases} a \cdot t_{n-1} + t_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ b \cdot t_{n-1} + t_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan diziye bi-periodic Fibonacci dizisi denir ve sayı dizisinin elemanlarına bi-periodic Fibonacci sayısı denir (Ramirez 2013).

Tanım 2.1.14. (Bi-periodic Lucas Sayı Dizisi) Herhangi iki pozitif tamsayı a ve b için bi-periodic Lucas dizisi için $l_0 = 2, l_1 = a$ olmak üzere,

$$l_n = \begin{cases} a \cdot L_{n-1} + L_{n-2}, & n \text{ tek ise} \\ b \cdot L_{n-1} + L_{n-2}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan diziye bi-periodic Lucas dizisi denir ve sayı dizisinin elemanlarına bi-periodic Lucas sayısı denir (Uygun ve Karatas, 2019).

Tanım 2.1.15. (Bi-periodic Horadam Sayı Dizisi) Herhangi iki pozitif tamsayı a ve b için bi-Periodic Horadam dizisi $w_0 = p$ ve $w_1 = p$ olmak üzere

$$\omega_n = \begin{cases} a \cdot \omega_{n-1} + \omega_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ b \cdot \omega_{n-1} + \omega_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan sayı dizisine bi-Periodic Horadam dizisi denir ve sayı dizisinin elemanlarına bi-periodic Horadam sayısı denir (Tan ve Ekin, 2015).

Tanım 2.1.16. (Fibonacci-p Sayı Dizisi) $p \geq 0, n > p$ tam sayı olduğunda Fibonacci p -sayıları

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1)$$

$$F_p(0) = 0, F_p(1) = F_p(2) = \dots = F_p(p) = 1$$

şeklinde tanımlanır (Stakhov ve Rozin, 2006).

Tanım 2.1.17. (Lucas p-Sayı Dizisi) $p \geq 0, n > p$ tam sayı olmak üzere Lucas p -sayıları

$$L_p(n) = L_p(n-1) + L_p(n-p-1)$$

$$L_p(0) = p+1, L_p(1) = L_p(2) = \dots = L_p(p) = 1$$

şeklinde tanımlanır (Stakhov ve Rozin, 2006).

Tanım 2.1.18. (q-Fibonacci Sayı Dizisi) q -Fibonacci sayıları,

$$f_{n+2}(q) = f_{n+1}(q) + q^{n+1}f_n(q)$$

$$f_0(q) = f_1(q) = 1$$

eklinde tanımlanır (Munarini, 1998).

Tanım 2.1.19. (q-Lucas Sayı Dizisi) q -Lucas sayıları,

$$l_{n+2}(q) = l_{n+1}(q) + q^{n+1}l_n(q)$$

$$l_0(q) = 1 + q, \quad l_1(q) = 1$$

eklinde tanımlanır (Munarini, 1998).

Tanım 2.1.20. ((k,n)-Fibonacci Sayı Dizisi) (k, n) -Fibonacci sayıları, başlangıç koşulları $n \geq k$ ve $k \geq 2$, $F(k, n) = n + 1$ için $n = 0, 1, 2, \dots, (k - 1)$ olmak üzere,

$$F(k, n) = F(k, n - 1) + F(k, n - k)$$

şeklinde tanımlanır (Kwasnik ve Wloch, 2000).

Tanım 2.1.21. ((k,n)-Lucas Sayı Dizisi) (k, n) -Lucas sayıları, başlangıç koşulları $n \geq 2k$ ve $L(k, n) = n + 1$ için $n = 0, 1, 2, \dots, (2k - 1)$ olmak üzere,

$$L(k, n) = L(k, n - 1) + L(k, n - k)$$

şeklinde tanımlanır (Wloch, 2013).

2.2. Kaynak Araştırması

Horadam (1965), “*Basic properties of a certain generalized sequence of numbers*” adlı akademik çalışmasında Fibonacci dizisinden hareketle yeni bir dizi tanımlamış, dizinin temel eşitliklerini araştırmıştır.

Horadam (1971) dizilerle ilgili yaptığı akademik çalışmalarda, Pell ve Pell Lucas sayı dizilerini tarif etmiş ve bu dizinin terimlerinin adlarını Pell ve Pell Lucas sayıları diye adlandırmıştır.

A. F. Horadam(1966), “*Jacobsthal Representation Numbers*” adlı akademik çalışmasında Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizisini ortaya koymuş, bu sayıların önemini ve birbirleriyle ilişkilerini ve bu dizilerin bilinen temel özelliklerini oluşturmuştur.

Falcon ve Plaza (2009), “*On k-Fibonacci numbers of arithmetic indexes*” adlı akademik çalışmalarında numaralandırılması aritmetik dizi olan k -Fibonacci dizisinin sonlu toplamlarıyla ilgili eşitlikler bulmuştur. Böylelikle buna benzer dizilerin sayı toplamalarını bulmada işe yarayacak farklı formüller bulunmasına imkan sağlamışlardır.

Horzum ve Kocer (2009), “*On some properties of Horadam polynomials*” adlı akademik çalışmalarında Horadam isminde polinom dizisi oluşturmuşlardır. Horadam polinomlarının bilinen temel eşitliklerini ifade etmişlerdir.

Falcon (2011), “*On the k-Lucas numbers*” adlı akademik çalışmasında k -Lucas dizisini ifade etmişler, bu dizinin özelliklerini incelemiş ve bu dizinin, k -Fibonacci sayıları ile arasındaki ilişkilerini incelemiştir.

Serpil Halici ve Adv. Appl (2012), “*On Fibonacci quaternions*” makalesinde Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarını araştırmıştır ve bu sayı dizisiyle ilgili bazı toplam formüllerini üretmiştir.

Andrzej Wtoch (2012), “*Some identities for the generalized Fibonacci numbers and the generalized Lucas*” Bu yazıda genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının ve genelleştirilmiş Lucas sayılarının bazı özelliklerini incelemiştir. Grafiklerdeki k -bağımsız kümelerin sayılmasında yardımcı olacak bazı genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ve genelleştirilmiş Lucas sayıları için özdeşlikler vermiştir.

Falcon ve Plaza (2006), “*The Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle*” Genelleştirilmiş k -Fibonacci dizisi 4-üçgen en uzun kenar bölümünde yer alan iki geometrik dönüşümün yinelenmesiyle bulunmuştur. Bu yazıda bu diziyle ilgili özellikler verilmiştir ve Pascal 2 üçgeni olarak adlandırılan üçgenle ilişkilendirmiştir.

Lind (1970), “*A Fibonacci circulant*” adlı akademik çalışmasında elemanları Fibonacci sayılarından oluşan circulant ve ters circulant matrisleri, bu matrislerin determinantlarını, n . dereceden ilkel kökünden yararlanarak ortaya koymuştur.

Falcon ve Plaza (2007), “*On the Fibonacci k-numbers*” adlı akademik çalışmalarında Fibonacci sayılarının yeni bir genellemesi olan k -Fibonacci sayı dizisini ifade etmişlerdir. İfade ettikleri bu dizi, klasik Fibonacci ve Pell sayılarının her ikisinin de genel bir ifadesini oluşturmuştur. $\{F_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ n . k -Fibonacci sayısı 4-triangle longest-edge (4TLE) paylaşımı metoduyla elde edilen, iki geometriksel uygulama üzerinde

yapılan akademik çalışmalar ile keşfedilmiştir. Bu sayıların birçok özelliği burada tanımlanan matris kullanılarak elde edilmiştir.

Uslu ve Ark.(2011), “*The generalized k-Fibonacci and k-Lucas numbers*” adlı akademik araştırmalarında genelleştirilmiş k -Fibonacci dizisini ifade etmiş, temel özellikleri üzerinde araştırmalar yapmışlardır.

E.Kılıç, D.Taşcı ve P. Haukkanen (2014),”*On the generalized Lucas sequences by Hessenberg matrices*” Genelleştirilmiş Lucas dizi özelliklerini ve Hessenberg matrisiyle olan ilişkisini incelemişlerdir.

Merve Taştan ve Engin Özkan (2020), “*Catalan transform of the k-Pell, k-Pell-lucas ve modified k-Pell sequence*” k -Pell, k -pell-lucas ve modified k -Pell dizilerinin Katalan özelliklerini sunmuşlardır ve Katalan dönüşümlerinin üretici fonksiyonlarını elde etmişlerdir.

Merve Taştan ve Engin Özkan (2020), “*Catalan Transform of The k-Lucas Numbers*” k -Lucas dizisinin Katalan dönüşümüne yer verilmiştir. k -Lucas dizisinin Katalan dönüşümünü veren fonksiyon bulmuşlardır.

Uslu ve Ark. (2010), “*The Generalized k-Fibonacci and k-Lucas Numbers*” adlı akademik çalışmalarında genelleştirilmiş k -Fibonacci ve genelleştirilmiş k -Lucas dizilerinin özelliklerini, Binet formüllerini ve Simpson formüllerine yer vermişlerdir.

Cerin ve Gianella(2007), “*On Sums of Pell Numbers*” isimli akademik araştırmalarında Pell dizi elemanlarının, çift tek toplamlarını bu sayıların karelerinin toplamı ve tek ve ardışık toplamı için formüller ortaya koymuşlardır.

Koçer ve Tuğlu (2007), “*The Binet Formulas for the Pell and Pell-Lucas p-Numbers*” adlı çalışmalarında p -Pell ve Pell-Lucas sayı dizilerini ifade etmişler. P 'nin bazı hususi durumlarına göre Binet formülleri ortaya koymuşlardır.

Edson ve Yayenie(2009), “*A New Generalization of Fibonacci Sequence & Extended Binet's Formula*” adlı akademik çalışmalarında iki periyotlu Fibonacci dizilerini tanımlamışlar ve bu dizilerin Binet formüllerini, üreten fonksiyonlarını ve bazı temel niteliklerinin üzerinde durmuşlardır. Buldukları Binet formülleri ile Binom katsayılarını da içinde bulunduran toplam formüllerini ortaya koymuşlardır.

Sukran Uygun ve Evans Owusu(2019), “*A New Generalization of Jacobsthal Lucas Numbers (Bi-Periodic Jacobsthal Lucas Sequence)*” adlı akademik çalışmada

Jacobsthal Lucas dizisini tanımlayıp yeni bir genellemesi olan iki periyodik Jacobsthal Lucas'ı incelemişlerdir.

Kübra Gül (2019), “*On Bi-periodic Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Quaternions*” adlı akademik çalışmada Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarını tanıtmışlardır. Bu kuaterniyonların Binet formüllerini vermişlerdir. Toplam formüllerini ve Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

Paula Catarino, Helena Campos, Paulo Vasco (2016), “*On the Mersenne sequence*” adlı çalışmada Mersenne dizisinin Binet formülünü ele almışlar. Mersenne sayılarını içeren matrisler ile üç köşegen matris ile dairesel tip matrisler elde etmişlerdir.

Mourad Chelgham ve Ali Boussayoud(2021), “*On the k-Mersenne-Lucas numbers*” adlı çalışmada Fibonacci, Lucas, Pell, Jacobsthal ve Mersenne dizilerini tanımlamışlardır. Mersenne sayı dizisini ayrıntılı bir şekilde incelemişlerdir.

B.Malini Devi ve S. Devibala (2023), “*Relations On Bi-Periodic Mersenne ve Mersenne-Lucas Sequences*” adlı çalışmada iki periyotlu Mersenne ve iki periyotlu Mersenne-Lucas dizilerinin Binet formülleri ile üreten fonksiyonları verilmiştir. Bu iki dizi hakkında daha ayrıntılı inceleme yapılmıştır.

Horadam (1965), “*Basic properties of a certain generalized sequence of numbers*” adlı akademik çalışmasında Horadam dizisini tanıtmıştır ve bu dizinin genel niteliklerinin üzerinde durmuştur.

Mansour (2004), “*A formula for the generating functions of powers of Horadam's sequence*” adlı akademik çalışmasında Horadam sayılarının kuvvetlerinin üreteç fonksiyonları için yeni yöntemler ortaya koymuştur. Yani; $H_k(x; p, q, a, b) = \sum_{n \geq 0} W_n^k \cdot x^n$ ifadesini formüle etmiştir.

Yazlık ve Taskara (2012), “*A note on generalized k-Horadam sequence*” adlı akademik araştırmada genelleştirilmiş k-Horadam dizisini tarif etmiş, dizi elemanlarının bazı niteliklerini determinant kullanarak kanıtlamışlardır.

Yazlık ve Taskara (2012), “*Spectral norm, eigenvalues and determinant of circulant matrix involving generalized k-Horadam numbers*” adlı akademik çalışmalarında elemanları genelleştirilmiş k-Horadam sayılarından oluşturulan bir sirkülant matrisi tarif etmişler ve bu matrisin spectral normunu, öz değerlerini ve determinantını hesaplamışlardır.

Tan(2017), “*Some properties of the bi-periodic Horadam sequences*” adlı akademikçalışmada iki periyodik Horadam hakkında bilgi vermiştir ve ayrıca bilinen özellikleriyle iki periyodik Fibonacci ve iki periyodik Lucas dizilerinin özellikleriyle genellemeler yapmıştır.

Peter J. Larcombe, Ovidiu D.Bagdasar ve Eric J. Fennessey (2013), “*Horadam Sequences: A Survey*” adlı çalışmada Horadam dizileri hakkında genel bir bilgilendirme yapmışlardır ve anket çalışma tarzı bir içerik ile ele almışlardır.

O.Bagdasar, P.J. Larcombe ve A. Anjum (2013), “*Particular Orbits Of Periodic Horadam Sequences*” adlı çalışmada Horadam dizilerinin bazı özel yörüngelerinden bahsedilmiştir. Yıldız çokgenlerini, iki parçalı grafikleri ve çeşitli geometrik şekiller tanımlamışlardır.

Koçer ve Tuğlu (2007), “*The Binet formulas for the Pell and Pell-Lucas p-numbers*” adlı çalışmada Pell ve Pell-Lucas sayı dizilerini tanımlamışlardır ve ayrıca formüller üretmişlerdir.

Kübra Çetinberk ve Salim Yüce (2020), “*On Fibonacci Vectors*” adlı çalışmada Fibonacci 3-vektörleri, 4-vektörleri ve Fibonacci vektör çarpımlarını incelemektedir. Lorentz iç çarpımlarını, Lorentz vektör çarpımlarını incelemişlerdir.

Ena Salter (2005), “*Fibonacci vectors*” adlı çalışmada herhangi iki Fibonacci vektörünün herhangi iki Lucas vektörünün ve herhangi bir Fibonacci vektörünün ve herhangi Lucas vektörünün iç çarpımlarını vermiştir. Bu veriler eşliğinde Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren bir takım dizi özdeşlikleri bulma yolunda kullanmıştır.

Güven ve Nurkan (2015), “*Dual Fibonacci Quaternions*” adlı çalışmada yeni bir vektör olan dual Fibonacci’yi tanımlamışlar ve özelliklerini vermişlerdir.

Salim Yüce ve Fügen Torunbalcı Aydın (2016), “*A new Aspect of Dual Fibonacci Quaternions*” adlı çalışmada genelleştirilmiş dual Fibonacci vektörlerinin tanımı vermiştir. İki genelleştirilmiş dual Fibonacci vektörlerinin iç çarpımı, çapraz çarpımı ve üç genelleştirilmiş dual Fibonacci vektörleri için de bu işlemler gösterilmiştir.

Kaya ve Önder (2018), “*On Fibonacci and Lucas Vectors and Quaternions*” adlı çalışmada iki Fibonacci 3-vektörü, iki Lucas 3-vektörünün Binet Formüllerini vektörel olarak ifade etmişlerdir ve ortaya çıkan yeni vektörel ürünler incelenmiştir.

2.3. Vektörler

Çeşitli fiziksel uygulamalarda sıcaklık, kütle gibi bazı değerler gerçel sayılarla ifade edilebilir. Kuvvet, hız gibi bazı değerler sadece skaler sayılarla vermek doğru olmayacaktır yönlerini de belirtmemiz gerekecektir. Bunu da adına vektör dediğimiz kavramlarla sağlamak mümkündür.

Bu bölümde vektör kavramını geometrik olarak ifade edeceğiz. Ayrıca vektörlerde toplama, skalerle çarpım, iç çarpım ve iki vektör arasındaki açıyı göreceğiz.

Euclide uzayında vektör tanımını kavrayabilmek için koordinat uzayı tanımlarını bilmeliyiz. Düzlemde bir d doğrusu verilmiş olsun. d ile çakışan ya da d doğrusuna paralel olan doğruya d ile aynı *doğrultudadır* denir. d ile aynı doğrultuda olan bütün doğrular kümesi R olsun. R kümesine düzlemde *doğrultu* denir. Düzlemde her doğru bir doğrultuya aittir ve farklı doğrultuların kesişimleri boştur.

R doğrultusuna ait bir r doğrusunu ele alalım. Bu doğru üzerinde K ve L gibi iki nokta seçelim. K noktasından L noktasına doğru hareket yönüne KL yönü, tam tersi L noktasından K noktasına doğru hareket yönüne LK yönü denir. Böylece R doğrultusu üzerinde iki yön belirtmiş olduk ve bu yönler birbirine zıttır. d_1 ve d_2 doğruları birbirine paralel ve zıt işaretli olsun d_1 doğrusu KL yönünde d_2 doğrusu LK yönündedir. Bu doğrular belirli bir yöne çıkan oklarla ifade edilir. Yönlendirilmiş bir doğrultu kullanılan ve ölçülebilen büyüklükler vektörel büyüklüklerdir. O halde vektör, belli bir yönü, uzunluğu ve doğrultusu bulunan doğru parçalarıdır. K ve L noktaları arasındaki doğru parçası K ve L noktalarına yönlendirilmişse bu vektör $\overrightarrow{KL}$ sembolü ile gösterilir.

$\overrightarrow{KL}$ vektörünün uzunluğu KL doğru parçasının uzunluğuna eşittir. $\|\overrightarrow{KL}\|$ ile gösterilir. $\vec{k}$ ve $\vec{l}$ iki vektörün uzunluğu ve yönü aynı ise bu vektörler birbirine eşittir. $\vec{k} = \vec{l}$ ile gösterilir.

Bir doğru üzerindeki her noktaya bir reel sayı ve bu reel sayılara da doğru üzerinde bir nokta karşılık getirilerek sayı doğrusu elde edilir. Bu sayı doğrusunda 0 (sıfır) başlangıç noktası kabul edilir. Her reel sayı mutlak değerce başlangıcı sıfır noktasında olan bir vektörün uzunluğunu verir. Birbirini orijinde dik kesen iki doğrudan yatay olana x eksen dikey olana y eksen denir bu eksenlerin oluşturduğu sisteme *koordinat sistemi* denir.

Tanım 2.3.1. $\vec{k} = \overrightarrow{KL}$ ve $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ iki vektör verildiğinde

- i. $\vec{k} = \overrightarrow{KL}$ ve $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ vektörleri paralel,
- ii. $\vec{k} = \overrightarrow{KL}$ ve $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ vektörlerinin uzunlukları eşit,
- iii. $\vec{k} = \overrightarrow{KL}$ ve $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ vektörlerinin yönleri aynı ise $\vec{k} = \overrightarrow{KL}$ ve $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ vektörleri birbirlerine denktir denir.

2.3.1. Vektörlerin Toplamı

Tüm vektörlerin kümesi A olsun. $\vec{k}, \vec{l} \in A$ olmak üzere $\vec{k} + \vec{l} \in A$ vektörünü bulacak olursak; $\vec{k} = \overrightarrow{KL}$ ve $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ olmak üzere bu vektörlerin toplamı:

$$\vec{k} + \vec{l} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KN}$$

olur. K, L, M gibi üç nokta verildiğinde $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KN}$ olur. Şu ayrıntı unutulmamalıdır ki iki vektörün toplanabilmesi için başlangıç noktaları aynı olmalıdır. Eğer ki başlangıç noktaları farklı ise vektöre denk olan vektör alınıp başlangıç noktası denk yapıp toplama yapılır hale getirilir. $\overrightarrow{KN}$ vektörü bu vektörler üzerine kurulan paralel kenarın köşegen uzunluğudur. Buna göre iki vektörü toplamak için vektörlerin yönü ve doğrultusu değiştirilmeden paralel kaydırma yapılarak vektörler aynı başlangıç noktasına çekilir. Daha sonra vektörlerin uç noktalarından diğer vektöre paralel doğrular çizilir. Elde edilen paralel kenarın köşegeni istenen vektördür.

2.3.2. Vektörlerin Farkı

$\vec{k}$ ve $\vec{l}$ vektörlerinin farkı $\vec{k} + (-\vec{l}) = \vec{k} - \vec{l}$ şeklinde tanımlanır. Buradaki $-\vec{l}$ vektörü $\vec{l}$ vektörü ile zıt yönlü ve uzunluğu $\vec{l}$ vektörü ile aynı olan vektördür.

Tanım 2.3.2. (Bir Vektörün Uzunluğu) n boyutlu Euclide uzayında başlangıç noktası $K(k_1, k_2, \dots, k_n)$ ve bitiş noktası $L(l_1, l_2, \dots, l_n)$ olan bir vektörün uzunluğu, K ve L noktaları arasındaki uzunluktur. $\overrightarrow{KL}$ vektörünün uzunluğu $\|\overrightarrow{KL}\|$ ile gösterilir. İki nokta arasındaki uzaklık formülünden

$$\|\overrightarrow{KL}\| = \sqrt{(l_1 - k_1)^2 + (l_2 - k_2)^2 + \dots + (l_n - k_n)^2}$$

olur.

2.3.3. İki Vektörün İç Çarpımı

Tanım 2.3.3. n boyutlu Euclide uzayında herhangi iki vektör $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ ve $L = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ olmak üzere

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(k, L) \rightarrow \langle k, L \rangle$$

şeklinde tanımlanan bu dönüşüme iki vektörün *iç çarpımı* denir.

Burada $\langle k, L \rangle$ ifadesi,

$$\langle k, L \rangle = k_1 \cdot l_1 + k_2 \cdot l_2 + \dots + k_n \cdot l_n$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer k ve l vektörlerinin bileşenleri karmaşık sayılardan tanımlanmışsa iki vektörün iç çarpımı,

$$\langle k, L \rangle = k_1 \cdot \bar{l}_1 + k_2 \cdot \bar{l}_2 + \dots + k_n \cdot \bar{l}_n$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\bar{l}_i$ l_i bileşiminin eşleniğidir.

Teorem 2.3.1. u, v, x, y n -boyutlu Euclide uzayında vektörler ve $m, n \in \mathbb{R}$ ise,

- i. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- ii. $u \cdot \langle x + y \rangle = \langle u, x \rangle + \langle u, y \rangle$
- iii. $\langle mu, nv \rangle = (mn) \cdot \langle u, v \rangle$
- iv. $\langle u, u \rangle = \|\vec{u}\|^2$. Eğer $\vec{u} = 0$ ise $\langle u, u \rangle = 0$

ifadeleri geçerlidir.

Bu teoremi kullanarak bir vektörün uzunluğunu iç çarpım olarak ifade edebiliriz. Yani $\langle u, u \rangle = \|\vec{u}\|^2$ ifadesinin her iki tarafın kare kökünü alırsak

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

elde edilir.

2.3.4. İki Vektör Arasındaki Açı

Tanım 2.3.4. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri aynı düzlemde olmak üzere bu vektörlerin doğrultuları arasındaki açıya bu *iki vektör arasındaki açı* denir.

Teorem 2.3.2. u ve v , n -boyutlu Euclidean uzayında iki vektör ve bu vektörler arasındaki açı $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ ise

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

dir.

2.4. Normlar

2.4.1. Vektör Normları

Tanım 2.4.1. $\mathbb{C}$ kompleks ve reel sayılar olduğunda $\|\cdot\|: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- i. Her $x \in \mathbb{C}^n$ için $\|x\| \geq 0$ 'dır. Eşitlik olabilmesi için gerek ve yeter şart $x = 0$ olmasıdır.
- ii. Her $x, y \in \mathbb{C}^n$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 'dir. (Üçgen eşitsizliği)
- iii. Her $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $x \in \mathbb{C}^n$ için $\|\alpha x\| = \|\alpha\| \cdot \|x\|$ 'dir.

şartlarını sağlıyorsa, negatif olmayan $\|x\|$ reel sayısına x vektörünün *vektör normu* veya *normu* denir.

Şimdi vektör normlarının diğer çeşitlerine bakalım:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Şeklinde tanımlanan her üç norm da yukarıda verilen vektör normu şartlarını sağlar. Yukarıda verilen $\|x\|_2$ norma özel olarak, x vektörünün *Euclidean* ve ya *Frobenius normu* denir. Herhangi iki x ve y vektörü için iç çarpım tanımı

$$\langle x, y \rangle = \bar{x}_1 \cdot y_1 + \bar{x}_2 \cdot y_2 + \dots + \bar{x}_n \cdot y_n$$

şeklindedir. O halde $\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$ olur. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere yukarıda verilen ilk iki normu

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$$

ile karakterize edebiliriz.

3. BULGULAR ve TARTIŞMA

3.1. Horadam Sayıları

Horadam sayıları H_n , tüm n tam sayıları için ikinci dereceden yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

$$H_{n+2} = pH_{n+1} + qH_n,$$

başlangıç koşulları, $H_0 = a$ ve $H_1 = b$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Tanım 3.1.1. H_n Horadam sayılarını göstermek üzere, $h_n = [H_n, H_{n+1}]^T$ şeklinde gösterilen vektörlere Horadam vektörleri denir.

F_n , Fibonacci sayılarını ve L_n , Lucas sayılarını göstermek üzere, $\vec{f}_n = [F_n, F_{n+1}]^T$ ve $\vec{l}_n = [L_n, L_{n+1}]^T$ vektörleri Fibonacci vektörleri ve Lucas vektörleri olarak gösterilmektedir (Salter, 2005). Diğer sayı dizileri ele alınarak, o dizilerin vektörleri elde edilebilmektedir.

Horadam sayılarının binet formülünden yararlanarak elde ettiğimiz doğrusal cebirsel yaklaşımımız;

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

şeklinde olacaktır.

Teorem 3.1.1. Denklemdeki gibi T olsun. Tüm n tam sayıları için $h_n = [H_n, H_{n+1}]^T$ olsun. Daha sonra

$$\vec{h}_{n+1} = T \cdot \vec{h}_n$$

Tüm k tam sayıları için;

$$\vec{h}_{n+1} = T^{n-k+1} \cdot \vec{h}_k$$

Bu teorem Horadam özdeşliklerini ispatlamak için kullanılır. T matrisinin satır ve sütunları $\vec{h}_0$ ve $\vec{h}_1$ olduğunu görebiliriz aynı şekilde T_{n+1} matrisinin satır ve sütunları da $\vec{h}_{n+1}$ ve $\vec{h}_{n+2}$ 'i vereceğini görebiliriz. Buradan yola çıkarak $T^n = T^{n-k}T^k$ olduğunu görebiliriz.

3.2. Horadam Vektörleri

Lemma 3.2.1. T matrisinin karakteristik denklemi $x^2 - px - q = 0$ dir. T matrisinin 0'dan farklı özdeğerleri $\alpha = (p + \sqrt{p^2 + 4q}) / 2$ ve $\beta = (p - \sqrt{p^2 + 4q}) / 2$ dir. Özvektörleri ise şunlardır;

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \end{bmatrix} \text{ ve } \vec{b} = \begin{bmatrix} \beta^0 \\ \beta^1 \end{bmatrix}$$

Lemma 3.2.2. Tüm n tam sayıları için,

$$\vec{h}_n = A \cdot \alpha^n \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \end{bmatrix} + B \cdot \beta^n \begin{bmatrix} \beta^0 \\ \beta^1 \end{bmatrix}$$

İspat.

$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$, $\beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$, $A = \frac{b - a\beta}{\alpha - \beta}$ ve $B = \frac{b - a\alpha}{\alpha - \beta}$ olduğunu biliyoruz.

$$\vec{h}_n = A \cdot \alpha^n \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \end{bmatrix} + B \cdot \beta^n \begin{bmatrix} \beta^0 \\ \beta^1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{h}_0 = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \end{bmatrix} = A \cdot \alpha^0 \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \end{bmatrix} + B \cdot \beta^0 \begin{bmatrix} \beta^0 \\ \beta^1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{h}_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \end{bmatrix} + B \cdot \begin{bmatrix} \beta^0 \\ \beta^1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{h}_n = T^n h_0 = A \cdot T^n \cdot \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \end{bmatrix} + B \cdot T^n \cdot \begin{bmatrix} \beta^0 \\ \beta^1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{h}_n = A \cdot \alpha^n \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \end{bmatrix} + B \cdot \beta^n \begin{bmatrix} \beta^0 \\ \beta^1 \end{bmatrix}$$

Lemma 3.2.3.

$$\alpha \cdot \beta = -q$$

$$\alpha + \beta = p$$

$$\alpha - \beta = \sqrt{p^2 + 4q}$$

$$\beta^2 - q = p\beta$$

$$\alpha^2 - q = p\alpha$$

İspat. α ve β , $x^2 - px - q = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğu için kolaylıkla bulunabilir.

m sabit pozitif bir tam sayı alırsak, T matrisini $m \times m$ biçiminde aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & p \end{bmatrix}.$$

Lemma 3.2.4. Yukarıda tanımladığımız T matrisinin karakteristik polinomları $x^{(m-1)}(x^2 - px - q)$ dır. T matrisinin 0'dan farklı özdeğerleri $\alpha = (p + \sqrt{p^2 + 4q}) / 2$ ve $\beta = (p - \sqrt{p^2 + 4q}) / 2$ dir. Her birinin geometrik ve aritmetik çarpımı $-q$ 'dur. α ve β ile öz uzaylar sırasıyla $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörler yardımıyla kaplanır.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \vdots \\ \alpha^{m-2} \\ \alpha^{m-1} \end{bmatrix} \text{ ve } \vec{b} = \begin{bmatrix} \beta^0 \\ \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \\ \vdots \\ \beta^{m-2} \\ \beta^{m-1} \end{bmatrix}.$$

T matrisi, α ve β vektörlerinin m 'ye bağlı olduğu açıktır. Sonlu bir geometrik serinin toplamında aşağıdaki formülü kullanacağız.

Lemma 3.2.5. $t \neq 1$ reel sayıları tüm pozitif tam sayı m değerleri için,

$$\sum_{k=0}^{m-1} t^k = \frac{t^m - 1}{t - 1}.$$

Lemma 3.2.6.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = \frac{\beta^{2m} - 1}{\beta^2 - 1}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1 - (-q)^m}{q + 1}$$

İspat.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \vdots \\ \alpha^{m-2} \\ \alpha^{m-1} \end{bmatrix} \text{ ve } \vec{b} = \begin{bmatrix} \beta^0 \\ \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \\ \vdots \\ \beta^{m-2} \\ \beta^{m-1} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere;}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \vdots \\ \alpha^{m-2} \\ \alpha^{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \vdots \\ \alpha^{m-2} \\ \alpha^{m-1} \end{bmatrix} = (\alpha^0)^2 + (\alpha^1)^2 + \dots + (\alpha^{m-1})^2$$

$$(\alpha^2)^0 + (\alpha^2)^1 + \dots + (\alpha^2)^{m-1}$$

Geometrik seri elde etmiş oluruz. Formülden,

$$= \frac{(\alpha^2)^m - 1}{\alpha^2 - 1}$$

$$\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} \beta^0 \\ \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \\ \vdots \\ \beta^{m-2} \\ \beta^{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta^0 \\ \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \\ \vdots \\ \beta^{m-2} \\ \beta^{m-1} \end{bmatrix} = (\beta^0)^2 + (\beta^1)^2 + \dots + (\beta^{m-1})^2$$

$$= (\beta^2)^0 + (\beta^2)^1 + \dots + (\beta^2)^{m-1}$$

İfademiz geometrik seriye dönüştü. Formülden,

$$= \frac{(\beta^2)^m - 1}{\beta^2 - 1}$$

$$= \frac{\beta^{2m} - 1}{\beta^2 - 1}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \vdots \\ \alpha^{m-2} \\ \alpha^{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta^0 \\ \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \\ \vdots \\ \beta^{m-2} \\ \beta^{m-1} \end{bmatrix} = (\alpha\beta)^0 + (\alpha\beta)^1 + \dots + (\alpha\beta)^{m-1}$$

Daha önce $\alpha \cdot \beta = -q$ olduğunu bulmuştuk. Yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} &= (-q)^0 + (-q)^1 + (-q)^2 + \dots + (-q)^{m-1} \\ &= 1 + (-q)^1 + (-q)^2 + \dots + (-q)^{m-1} \end{aligned}$$

Geometrik seriye dönüştürdük. Formülden,

$$\begin{aligned} &= \frac{(-q)^m - 1}{-q - 1} \\ &= \frac{1 - (-q)^m}{q + 1} \end{aligned}$$

Herhangi bir $\vec{r}$ vektörünün uzunluğunun karesi,

$$\|\vec{r}\|^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}.$$

Sonuç 3.2.1.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1}}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{\frac{\beta^{2m} - 1}{\beta^2 - 1}}$$

$$\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| = \sqrt{\frac{1 - (-q)^m}{q + 1}}$$

Tanım 3.2.1. Tüm m ve n tam sayıları için,

$$\vec{h}_n^m = \begin{bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \\ H_{n+2} \\ H_{n+3} \\ \vdots \\ H_{n+m-2} \\ H_{n+m-1} \end{bmatrix}$$

$\vec{h}_n^m$, m uzunluğundaki n . Horadam vektörüdür.

Lemma 3.2.7. (3.1.1.) deki T matrisini ele alalım. O halde tüm n tam sayıları için,

$$\vec{h}_{n+1}^m = T \cdot \vec{h}_n^m$$

Ve tüm $k \geq n + 1$ için,

$$\vec{h}_{n+1}^m = T^{n-k+1} \cdot \vec{h}_k^m.$$

Teorem 3.2.1. Tüm n tamsayıları için,

$$\vec{h}_n^m = A \cdot \alpha^n \cdot \vec{a} + B \cdot \beta^n \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \vdots \\ \alpha^{m-2} \\ \alpha^{m-1} \end{bmatrix} \text{ ve } \vec{b} = \begin{bmatrix} \beta^0 \\ \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \\ \vdots \\ \beta^{m-2} \\ \beta^{m-1} \end{bmatrix}.$$

$A = \frac{b-a\beta}{\alpha-\beta}$ ve $B = \frac{b-a\alpha}{\alpha-\beta}$ ise; $\vec{h}_n^m$, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin kapsadığı alanda bulunur.

İspat. $\vec{h}_n^m$ 'in j 'inci girdisi $h_{n+j-1} = A \cdot \alpha^{n+j-1} + B \cdot \beta^{n+j-1}$.

$A \cdot \alpha^n \cdot \vec{a} + B \cdot \beta^n \cdot \vec{b}$ 'in j 'inci girdisi ise $A \cdot \alpha^n \alpha^{j-1} + B \cdot \beta^n \cdot \beta^{j-1}$.

3.3. İki Boyutlu Açılar

Bu kısımda bir önceki başlıklarda incelemiş olduğumuz vektörler arasındaki açılara bakacağız. Formüller farklılaştıkça aynı boyutlar olarak bir sınırlandırma yapmamız gerekecek. Tek boyut üzerinde incelemeler yapacağız.

σ_1 ve σ_2 vektörlerin arasındaki θ açısı formülümüzü hatırlayalım.

$$\cos \theta = \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\|\sigma_1\| \cdot \|\sigma_2\|}$$

3.4. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ Vektörlerinin Nokta Çarpımları

Bu kısımda $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nokta çarpımlarını Horadam vektörlerine göre hesaplayacağız.

Lemma 3.4.1. n tam sayı ve m pozitif çift tam sayı alırsak,

$$\vec{h}_n^m \cdot \vec{a} = A \cdot \alpha^n \left(\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1} \right) + B \cdot \beta^n \left(\frac{1 - (-q)^m}{q + 1} \right)$$

$$\vec{h}_n^m \cdot \vec{b} = A \cdot \alpha^n \left(\frac{1 - (-q)^m}{q + 1} \right) + B \cdot \beta^n \left(\frac{\beta^{2m} - 1}{\beta^2 - 1} \right)$$

İspat.

$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$, $\beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$, $A = \frac{b - a\beta}{\alpha - \beta}$ ve $B = \frac{b - a\alpha}{\alpha - \beta}$ olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} \vec{h}_n^m \cdot \vec{a} &= (A \cdot \alpha^n \cdot \vec{a} + B \cdot \beta^n \cdot \vec{b}) \vec{a} \\ &= A \cdot \alpha^n \cdot \vec{a} \cdot \vec{a} + B \cdot \beta^n \cdot \vec{b} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

Lemma 3.2.6.'da $\vec{a} \cdot \vec{a}$ ve $\vec{b} \cdot \vec{a}$ yerine yazılırsa,

$$\vec{h}_n^m \cdot \vec{a} = A \cdot \alpha^n \left(\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1} \right) + B \cdot \beta^n \left(\frac{1 - (-q)^m}{q + 1} \right)$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned} \vec{h}_n^m \cdot \vec{b} &= (A \cdot \alpha^n \cdot \vec{a} + B \cdot \beta^n \cdot \vec{b}) \vec{b} \\ &= A \cdot \alpha^n \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + B \cdot \beta^n \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Lemma 3.2.6'da $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ve $\vec{b} \cdot \vec{b}$ yerine yazılırsa,

$$\vec{h}_n^m \cdot \vec{b} = A \cdot \alpha^n \cdot \left(\frac{1 - (-q)^m}{q + 1} \right) + B \cdot \beta^n \cdot \left(\frac{\beta^{2m} - 1}{\beta^2 - 1} \right)$$

elde ederiz.

Lemma 3.4.2. $\vec{h}_n^m$, m uzunluğunda n . Horadam vektör olmak üzere,

$$\|\vec{h}_n^m\| = \sqrt{(A\alpha^n)^2 \left(\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1} \right) + (B\beta^n)^2 \left(\frac{\beta^{2n} - 1}{\beta^2 - 1} \right) + 2AB \left(\frac{1 - (-q)^n}{q + 1} \right) (-q)^n}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$$\begin{aligned} \vec{h}_n^m \cdot \vec{h}_n^m &= (A \cdot \alpha^n \cdot \vec{a} + B \cdot \beta^n \cdot \vec{b}) \cdot (A \cdot \alpha^n \cdot \vec{a} + B \cdot \beta^n \cdot \vec{b}) \\ &= A^2 \cdot \alpha^{2n} \cdot \vec{a} \cdot \vec{a} + B^2 \cdot \beta^{2n} \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} + 2 \cdot A \cdot B \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \alpha^n \cdot \beta^n \\ &= A^2 \alpha^{2n} \left(\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1} \right) + B^2 \beta^{2n} \left(\frac{\beta^{2m} - 1}{\beta^2 - 1} \right) + 2AB \left(\frac{1 - (-q)^m}{q + 1} \right) \alpha^n \beta^n \\ &= A^2 \alpha^{2n} \left(\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1} \right) + B^2 \beta^{2n} \left(\frac{\beta^{2m} - 1}{\beta^2 - 1} \right) + 2AB \left(\frac{1 - (-q)^m}{q + 1} \right) (\alpha\beta)^n \\ &= A^2 \alpha^{2n} \left(\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1} \right) + B^2 \beta^{2n} \left(\frac{\beta^{2n} - 1}{\beta^2 - 1} \right) + 2AB \left(\frac{1 - (-q)^n}{q + 1} \right) (-q)^n. \end{aligned}$$

$$\|\vec{h}_n^m\| = \sqrt{\vec{h}_n^m \cdot \vec{h}_n^m} \text{ olduğundan,}$$

$$\|\vec{h}_n^m\| = \sqrt{(A\alpha^n)^2 \left(\frac{\alpha^{2m}-1}{\alpha^2-1} \right) + (B\beta^n)^2 \left(\frac{\beta^{2n}-1}{\beta^2-1} \right) + 2AB \left(\frac{1-(-q)^n}{q+1} \right) (-q)^n}.$$

3.5. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ Vektörlerinin Kosinüsü

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ Horadam vektörleri baktığımız diğer vektörlerle aynı bölgede olduğunu unutmamalıyız.

Lemma 3.5.1. Tüm k tam sayısı ve tüm pozitif tam sayı m için, $\vec{h}_{2k}^m \vec{b}$ 'nin $\vec{a}$ olarak karşı tarafında iken $\vec{h}_{2k+1}^m \vec{b}$, $\vec{a}$ 'nın yanındadır.

İspat. $\beta < 0$ durumunu göz önünde bulundurmalıyız. β^{2k} pozitifken, β^{2k-1} negatiftir.

Teorem 3.5.2. $\varphi_{n,m}$, $\vec{h}_n^m$ ile $\vec{a}$; $\omega_{n,m}$, $\vec{h}_n^m$ ile $\vec{b}$ vektörleri arasındaki açıyı göstermek üzere, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\cos \varphi_{n,m} = \frac{A \cdot \alpha^n \cdot \left(\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1} \right) + B \cdot \beta^n \cdot \left(\frac{1 - (-q)^m}{q + 1} \right)}{(A\alpha^n)^2 \cdot \sqrt{\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1}}},$$

$\cos \omega_{n,m}$

$$= \frac{A\alpha^n \left(\frac{1 - (-q)^m}{q+1} \right) + B\beta^n \left(\frac{\beta^{2m} - 1}{\beta^2 - 1} \right)}{\sqrt{(A\alpha^n)^2 \left(\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1} \right) + (B\beta^n)^2 \left(\frac{\beta^{2n} - 1}{\beta^2 - 1} \right) + 2AB \left(\frac{1 - (-q)^n}{q+1} \right) (-q)^n \sqrt{\frac{\beta^{2n} - 1}{\beta^2 - 1}}}}.$$

İspat. Lemma 3.2.6'dan

$$\vec{h}_n^m \cdot \vec{a} = A \cdot \alpha^n \left(\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1} \right) + B \cdot \beta^n \left(\frac{1 - (-q)^m}{q+1} \right),$$

$$\vec{h}_n^m \cdot \vec{b} = A \cdot \alpha^n \left(\frac{1 - (-q)^m}{q+1} \right) + B \cdot \beta^n \left(\frac{\beta^{2m} - 1}{\beta^2 - 1} \right),$$

$$\|\vec{h}_n^m\| = \sqrt{(A\alpha^n)^2 \left(\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1} \right) + (B\beta^n)^2 \left(\frac{\beta^{2n} - 1}{\beta^2 - 1} \right) + 2AB \left(\frac{1 - (-q)^n}{q+1} \right) (-q)^n},$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\frac{\alpha^{2m}-1}{\alpha^2-1}} \text{ ve } \|\vec{b}\| = \sqrt{\frac{\beta^{2m}-1}{\beta^2-1}}$$

değerlerini kullanacak olursak;

$$\cos \varphi_{n,m} = \frac{\vec{h}_n^m \cdot \vec{a}}{\|\vec{h}_n^m\| \cdot \|\vec{a}\|}$$

$$= \frac{A\alpha^n \left(\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1} \right) + B\beta^n \left(\frac{1 - (-q)^m}{q+1} \right)}{\sqrt{(A\alpha^n)^2 \left(\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1} \right) + (B\beta^n)^2 \left(\frac{\beta^{2n} - 1}{\beta^2 - 1} \right) + 2AB \left(\frac{1 - (-q)^n}{q+1} \right) (-q)^n} \sqrt{\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1}}},$$

$$\cos \omega_{n,m} = \frac{\vec{h}_n^m \cdot \vec{b}}{\|\vec{h}_n^m\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

$$= \frac{A \cdot \alpha^n \cdot \left(\frac{1 - (-q)^m}{q+1} \right) + B \cdot \beta^n \cdot \left(\frac{\beta^{2m} - 1}{\beta^2 - 1} \right)}{\sqrt{(A\alpha^n)^2 \left(\frac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1} \right) + (B\beta^n)^2 \left(\frac{\beta^{2n} - 1}{\beta^2 - 1} \right) + 2AB \left(\frac{1 - (-q)^n}{q+1} \right) (-q)^n} \sqrt{\frac{\beta^{2n} - 1}{\beta^2 - 1}}}.$$

Sonuç 3.5.3. Tüm n tamsayıları ve tüm m çift tam sayıları için baktığımızda,

$|\varphi_{n,m}| > |\varphi_{n+1,m}|$ olduğunu görürüz.

İspat. Teorem 3.2.2'ten $\vec{h}_n^m$ $\vec{a}$ katsayısının pozitif olduğundan $\varphi_{n,m}$ dar açı olduğunu biliyoruz. Buradan $|\varphi_{n,m}| > |\varphi_{n+1,m}|$ 'i göstermek için $\cos \varphi_{n,2k} < \cos \varphi_{n+1,m}$ göstermemiz yeterli olacaktır. $a^j / H_j > a^{j+1} / H_{j+1}$ olduğunu görebiliriz. Bu da istenilendir.

Sonuç 3.5.4. Tüm n tamsayıları ve tüm pozitif k sayısı için,

$\varphi_{n,2k} = \varphi_{n+k,2} = -\omega_{n+k} = -\omega_{n,2k}$. Özellikle $\{\varphi_{j,2k}\}_{j=1}^{\infty}$ açı dizisi, $\{-\omega_{j,2k}\}_{j=1}^{\infty}$ ve $\{\varphi_{k+j,2}\}_{j=1}^{\infty}$ eşittir.

4. SONUÇ

Horadam sayıları birçok yazar tarafından çalışılmaktadır. Horadam sayı özdeşlikleri, tekrarlama bağıntıları, üreteç fonksiyonları, Binet formülü ve daha pek çok özellik araştırmacılar tarafından araştırılmış ve araştırılmaya devam edecektir. Bu çalışmada, Horadam sayılarından hareketle Horadam vektörleri tanıtılmıştır. Horadam sayılarının cebirsel özellikleri kullanılarak Horadam vektörlerinin geometrik özellikleri incelenmiştir. Horadam dizisini oluşturan karakteristik denklem köklerinin ikili iç çarpımlarından hareketle, Horadam vektörlerinin iç çarpımları, normları ve vektörel çarpımları incelenmiştir. Horadam vektörleri arasındaki açılar iki boyutlu kısıtlamalar dahilinde ele alınmıştır. Bu çalışmada elde edilen özellikler, Horadam sayılarından elde edilecek sayı dizilerine uygulanarak, bu sayı dizilerinin vektörleri ve özellikleri incelenebilir. Ayrıca, karakteristik denkleminin derecesi ikiden büyük olan sayı dizilerinin de vektörel özellikleri araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

- [1] M. Alp, N. Irmak ve L. Szalay, “Two-periodic ternary recurrences and their Binetformula”, *Acta Math. Univ. Comenianae*, vol. 2, pp. 227–232, 2012.
- [2] O. Bagdasar, P.J. Larcombe ve A. Anjum, “Particular Orbits Of Periodic Horadam Sequences”, *Fibonacci Quart*, vol. 51, no. 1, pp. 28–37, 2013.
- [3] D. Bozkurt ve B. Türen, “Lineer Cebir”, S.Ü. Basımevi, 2007.
- [4] L. Carlitz, “Fibonacci notes. III. q -Fibonacci numbers”, *Fibonacci Quart*, vol.12, pp. 317–322, 1974.
- [5] L. Carlitz, “Fibonacci notes. IV. q -Fibonacci polynomials”, *Fibonacci Quart*, vol. 13, pp. 97–102, 1975.
- [6] Z. Cerin ve G. M. Gianella, “On sums of Pell numbers”, *Accad. Sc. Torino – Atti Sci. Fis*, vol. 141, pp. 23-31, 2007.
- [7] Z. Cerin ve G. M. Gianella, “On Sums of Pell Numbers”, *Atti Della Accademia Delle Scienzdei Torino, Classe Di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali*, pp. 23-31, 2007.
- [8] P. Catarino, “On some identities and generating functions for k -Pell numbers”, *International Journal of Mathematics and Analysis*, vol.7, no.38, pp. 1877–1884, 2013.
- [9] P. Catarino, “On some identities and generating function for k -Fibonacci sequence” *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, vol. 9, no. 1, pp. 37–42, 2014.
- [10] P. Catarino, “On some identities and generating functions for k -Pell numbers”, *Int. J. Math. Ana*, vol. 7, no. 38, pp. 1877-1884, 2013.
- [11] P. Catarino, H. Campos ve P. Vasco, “On the Mersenne sequence”, *Annales Mathematicae et Informaticae*, vol. 46, pp. 37–53, 2016.
- [12] M. Chelgham ve A. Boussayoud, “On the k -Mersenne-Lucas numbers”, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, vol. 27,no. 1, pp. 7–13, 2021.
- [13] K. Çetinberk ve S. Yüce, “On Fibonacci Vectors”, *Research Article*, vol. 2, no. 2, pp.12-25, 2020.
- [14] M. Edson ve O. Yayenie, “A New Generalization of Fibonacci Sequence & Extended Binet’s Formula”, *Integers*, vol. 9, no.6, 2010.
- [15] S. Falcon ve A. Plaza, “On the Fibonacci k -numbers” ,*Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 32, pp. 1615-1624, 2007.

- [16] S. Falcon ve A. Plaza, “On k -Fibonacci numbers of arithmetic indexes”, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 208, pp. 180–185, 2009.
- [17] S. Falcon, “On the k -Lucas numbers”, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, vol. 6, no. 21, pp. 1039-1050, 2011.
- [18] S. Falcon ve A. Plaza, “The k -Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle”, *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 33, no. 1, pp. 38-49, 2007.
- [19] S. Falcon, “On the k -Lucas numbers,” *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, pp. 1-2, 2011.
- [20] S. Falcon ve A. Plaza, “The Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle,” vol. 33, no. 1, pp. 38-49, 2007.
- [21] S. Falcon ve A. Plaza, “On the Fibonacci k -numbers”, *Chaos, Solitons & Fraktals*, vol. 32, no. 5, pp. 1615-1624, 2007.
- [22] K. Gül, “On Bi-periodic Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Quaternions”, *Published in Journal of Mathematics*, vol. 11, no. 2, 2019.
- [23] İ. A. Güven ve S.K. Nurkan, “Dual Fibonacci Quaternions”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 25, pp. 403-414, 2015.
- [24] S. Halici, “On Fibonacci quaternions”, *Advances in Applied Mathematics*, pp. 3-7, 2012.
- [25] A.F. Horadam, “Generating functions for powers of a certain generalised sequence of numbers”, *Duke Mathematical Journal*, vol. 32 no. 3, pp. 437-446, 1965.
- [26] A.F. Horadam, “Jacobsthal representation numbers”, *The Fibonacci Quarterly*, vol. 4, pp. 40-54, 1996.
- [27] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [28] A. F. Horadam, “Basic properties of certain generalized sequence of numbers”, *The Fibonacci Quarterly*, vol. 3, no. 3, pp. 161-176, 1965.
- [29] A.F. Horadam, “Jacobsthal Representation Numbers”, *The Fibonacci Quarterly*, vol. 34, no. 1, pp. 40-54, 1996.
- [30] A. F. Horadam “Jacobsthal Representation Numbers”, *The Fibonacci Quarterly*, vol. 4, no. 1, pp. 40-54, 1996.
- [31] D. Jhala, K. Sisodiya ve G. P. S. Rathore, “On some identities for k -Jacobsthal numbers”, *Int. J. Math. Anal*, vol. 7, no. 12, pp. 551-556, 2013.

- [32] O. Kaya ve M. Önder, “On Fibonacci and Lucas Vectors and Quaternions”, *Universal Journal of Applied Mathematics*, vol. 6, no. 5, pp. 156-163, 2018.
- [33] M. Kwasnik, I. Wloch, “The total number of generalized stable sets and kernels of graphs,” *Ars Comb.*, vol. 55, pp. 139-146, 2000.
- [34] E. Kılıç, D. Taşcı ve P. Haukkanen, “On the generalized Lucas sequences by Hessenberg matrices”, *Ars Combin*, vol. 95, pp. 383-395, 2010.
- [35] E. G. Koçer ve N. Tuğlu, “The Binet Formulas for the Pell and Pell-Lucas p -Numbers”, *Ars Combinatoria*, vol. 85, pp. 3-17, 2007.
- [36] E. G. Koçer ve N. Tuğlu, “The Binet formulas for the Pell and Pell-Lucas p -numbers”, *Ars Combinatoria*, vol. 85, pp. 3-17, 2007.
- [37] P. J. Larcombe, O.D. Bagdasar ve E. J. Fennessey, “Horadam Sequences: A Survey”, *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its*, 2017.
- [38] D. A. Lind, “A Fibonacci circulant”, *The Fibonacci Quarterly*, vol. 8, no. 5, pp. 449-455, 1970.
- [39] B. Malini Devi ve S. Devibala, “Relations On Bi-Periodic Mersenne ve Mersenne-Lucas Sequences”, *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, vol. 22, no. 3, pp. 751-767, 2023.
- [40] A. E. Mansour, “A formula for the generating functions of powers of Horadam’s sequence”, *Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 30, pp. 207–212, 2004.
- [41] E. Munarini, “A combinatorial interpretation of the generalized Fibonacci numbers”, *Adv. In Appl. Math.* vol. 19, pp. 306–318, 1998.
- [42] J. L. Ramírez, “Bi-periodic incomplete Fibonacci sequences”, *Ann. Math. Inform*, vol. 42, pp. 83–92, 1996.
- [43] E. Salter, “*Fibonacci Vectors*”, 2020.
- [44] E. Salter, “*Fibonacci Vectors*”, Graduate Theses and Dissertations, University of South Florida, USA, 2005.
- [45] Y. Soykan, “A study on generalized Mersenne numbers”, *Journal of Progressive Research in Mathematics*, vol. 18, no. 3, pp. 90-112, 2021.
- [46] A. Stakhov, ve B. Rozin, “Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p -numbers”, *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 27, no. 5, pp. 1162–1177, 2006.
- [47] E. Tan ve A. B. Ekin, “Bi-Periodic Incomplete Lucas Sequences”, *Ars Combinatoria*, vol. 123, pp. 371–380, 2015.
- [48] E. Tan, “Some properties of the bi-periodic Horadam sequences”, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, vol. 23, no. 4, pp. 56–65, 2017.

- [49] M. Taştan ve E. Özkan, “Catalan transform of the k -Pell, k -Pell-lucas ve modified k -Pell sequence”, *Notes On Number Theory and Discrete Mathematics*, vol. 27, no. 1, pp. 198-207, 2021.
- [50] M. Taştan ve E. Özkan, “Catalan Transform of The k -Lucas Numbers”, *Dergi Park*, vol. 13, no. 1, pp. 145 -149, 2020.
- [51] K. Uslu ve V. Deniz, “Some identities of k -Mersenne numbers,” *Advances and Applications in Discrete Mathematics*, vol. 18, no. 4, pp. 413–423, 1996.
- [52] S. Uygun ve H. Karatas, “A new generalization of Pell-Lucas numbers (Bi-periodic Pell-Lucas sequence)”, *Commun. Math. Appl*, vol. 10, pp. 469–479, 2019.
- [53] S. Uygun, H. Karatas ve E. Akinci, “Relations on Bi-periodic Jacobsthal sequence”, *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics* vol. 10, no. 2, pp. 141-151, 2018.
- [54] S. Uygun ve E. Owusu, “A new generalization of Jacobsthal numbers (Bi-Periodic Jacobsthal Sequences)”, *Journal of Mathematical Analysis*, vol. 7, no. 5, pp. 28-39, 2016.
- [55] K. Uslu, N. Taskara ve H. Köse, “The generalized k -Fibonacci and k -Lucas numbers”, *Ars Combinatoria* , vol. 99, no. 2011, pp. 25-32, 2010.
- [56] A. Włoch, “Some identities for the generalized Fibonacci numbers and the generalized Lucas numbers”, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, no. 10, pp. 5564-5568, 2013.
- [57] Y. Yazlik ve N. Taskara, “A note on generalized k -Horadam sequence”, *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 63, no. 1, pp. 36-41, 2012. .
- [58] Y. Yazlik ve N. Taskara, “Spectral norm, eigenvalues and determinant of circulant matrix involving generalized k -Horadam numbers”, *Ars Combinatoria*, vol. 104, pp. 505-512, 2012.
- [59] S. Yüce ve F. Torunbalcı Aydın, “A new Aspect of Dual Fibonacci Quaternions”, *The International Journal of Science & Technoledge* vol. 26, pp. 873-884, 2016.