

766020

**HOTELLİNG -T² ve BONFERRONİ YÖNTEMLERİNİN SANAL
ORTAMDA BİR DEĞERLENDİRMESİ**

Şerife NADAROĞLU

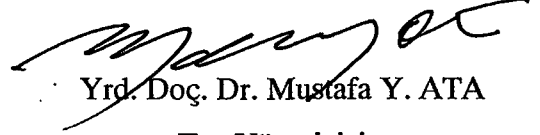
**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ağustos 2005

ANKARA

Şerife NADAROĞLU tarafından hazırlanan HOTELLİNG-T² ve BONFERRONİ YÖNTEMLERİNİN SANAL ORTAMDA BİR DEĞERLENDİRMESİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.


Yrd. Doç. Dr. Mustafa Y. ATA

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından İstatistik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan

: Prof. Dr. Müslim EKNİ



Üye

: Prof. Dr. Serdar KILIÇKAPLAN

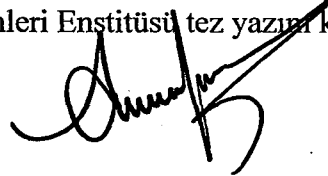


Üye

: Yrd. Doç. Dr. Mustafa Y. ATA



Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



HOTELLİNG -T² VE BONFERRONİ YÖNTEMLERİNİN SANAL ORTAMDA BİR DEĞERLENDİRMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Şerife NADAROĞLU

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ağustos 2005

ÖZET

Üretim süreçlerinde nitelik denetim sorunları genellikle çok değişkenlidir ve söz konusu ürüne ilişkin niteliklerin eşanlı olarak izlenmesini gerektirir. Bu çalışmada, süreç ortalamasındaki bir kaymayı saptamada en çok kullanılan çok değişkenli süreç nitelik denetim yöntemlerinden Hotelling'in T²'si ve süreç ortalamasında bir kayma saptanmışken bu kaymanın hangi değişkenden ileri geldiğini belirlemede başvurulabilecek Bonferroni eşanlı güven aralıkları yönteminin sanal bir ortamdaki değerlendirilmesi sunulmuştur.

Bilim Kodu : 212
Anahtar Kelimeler : Çok Değişkenli Nitelik Denetim, Hotelling T² , Bonferroni
Sayfa Adedi : 61
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. M. Yavuz ATA

**AN EVALUATION OF HOTELLING - T^2 AND BONFERRONI
METHODS IN THE VIRTUAL ENVIRONMENT**

(M.Sc. Thesis)

Şerife NADAROĞLU

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

August 2005

ABSTRACT

The problems of quality control in manufacturing process is generally multivariate and the characteristics of the product is required to be monitored simultaneously. In this work, an evaluation of Hotelling's T^2 which is one of the most widely used multivariate process quality control methods in determining a shift in the process mean and the Bonferroni's simultaneous confidence interval that can be used to determine the source of the shift when a shift in the process mean has been occurred is presented in the virtual environment.

Bilim Kodu : 212
Anahtar Kelimeler : Multivariate Quality Control, Hotelling T^2 , Bonferroni
Sayfa Adedi : 61
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. M. Yavuz ATA

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamın tüm aşamalarındaki değerli yardım ve katkılarından dolayı danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. M. Yavuz ATA' ya, MatLab program kodunun oluşturulmasında yol gösteren Sayın Arş.Gör. Bülent ALTUNKAYNAK' a, çalışmam boyunca maddi-manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme, Sayın Öğr.Gör. Mustafa KALE ve ailesine, arkadaşım Ahmet UĞUR' a teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ.....	1
2. SÜREÇ ORTALAMASINDAKİ KAYMANIN VE KAYMADAN SORUMLU DEĞİŞKENİN SAPTANMASI	5
2.1. Ardışık Hotelling'in T^2 Sınaması	7
2.2. Çok Boyutlu Shewhart Çizgeleri.....	10
2.3. Bonferroni Eşanlı Güven Aralıkları Yöntemi	14
2.4. Süreç Nitelik Denetim Yönteminin Başarı Ölçütü	24
3. MONTE CARLO SANAL DENEY	27
3.1 Monte Carlo Sanal Deney Tasarımı	27
3.1 Monte Carlo Sanal Deney Sonuçları	37
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	44
KAYNAKLAR	46
EKLER.....	48
EK-1. Çok Boyutlu Shewhart Nitelik Denetim Çizgesinin Oluşturulması.....	49
EK-2. Değişkenlerin İlişkisiz Olduğu Durum İçin Denetim-içi Deneysel ODU_{D_0} Değerlerinin Hesaplanması.....	50
EK-3. Değişkenlerin İlişkili Olduğu Durum İçin Denetim-içi Deneysel ODU_{D_0} Değerlerinin Hesaplanması.....	52
EK-4. Değişkenlerin İlişkisiz Olduğu Durum İçin Denetim-dışı Deneysel ODU_{D_1} Değerlerinin Hesaplanması	54

Sayfa

EK-5. Değişkenlerin İlişkili Olduğu Durum İçin Denetim-dışı Deneysel ODU_{D_1} Değerlerinin ve δ Başarı Oranlarının Hesaplanması.....	56
EK-6. δ Başarı Oranlarının Hesaplanması	58
ÖZGEÇMİŞ	61



ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. 100. örneğe ilişkin veriler	11
Çizelge 2.2. 100 örneğe ilişkin olarak hesaplanan T^2 değerleri	13
Çizelge 2.3. Denetim-dışı duruma neden olan değişkenlerin Bonferroni eşanlı güven aralıkları ile saptanması	23
Çizelge 3.1. Örnek çapı (n) ve değişken sayısı (p)'ye göre değişkenlerin ilişkisiz olduğu durum için denetim-içi ODU_{D_0} değerleri	37
Çizelge 3.2. Örnek çapı (n) ve değişken sayısı (p)'ye göre değişkenlerin ilişkili olduğu durum için denetim-içi ODU_{D_0} değerleri	38
Çizelge 3.3. Örnek çapı (n), değişken sayısı (p) ve süreç ortalamasındaki kayma için değişkenlerin ilişkisiz olduğu durumda denetim-dışı ODU_{D_1} değerleri	39
Çizelge 3.4. Örnek çapı (n), değişken sayısı (p) ve süreç ortalamasındaki kayma için değişkenlerin ilişkili olduğu durumda denetim-dışı ODU_{D_1} değerleri	39
Çizelge 3.5. Örnek çapı (n), değişken sayısı (p) ve süreç ortalamasındaki kaymaya göre Bonferroni yönteminin başarılı oranları, δ	42
Çizelge 3.6. Örnek çapı (n), değişken sayısı (p) ve değişkenlerin ilişkili olduğu durum için süreç ortalamasındaki kaymaya göre Bonferroni yönteminin başarılı oranı, δ	42

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Tek-boyutlu ve iki-boyutlu denetim-içi bölgeler	6
Şekil 2.2. 100. örneğe ilişkin T^2 değerlerine göre çizilen Shewhart çizgesi	14



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

Açıklama

p

Değişken sayısı

n

Gözlem sayısı

μ

Yığın ortalaması

$\bar{x}$

Örnek ortalaması

Σ

Yığın değişke-bideğişkesi

S

Örnek değişke-bideğişkesi

Kisaltmalar

Açıklama

ÇS

Çok değişkenli Shewhart

ÇBİTOP

Çok değişkenli Birikimli Toplam

ÇÜAHO

Çok değişkenli Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama

ODU_{D_0}

Denetim-içi Ortalama Deneme Uzunluğu

ODU_{D_1}

Denetim-dışı Ortalama Deneme Uzunluğu

1. GİRİŞ

İlk olarak endüstri devrimi ile başlayan nitelik denetim çalışmalarında özellikle İkinci Dünya savaşıdan sonra önemli ilerlemeler olmuştur. Savaş yıllarında malzeme alışlarını standarda bağlama ve denetim yaparak satın alma gereği duyulmuş olması bu konudaki çalışmaların hızlanmasında etkili olmuştur. Amerika Birleşik Devletleri (A.B.D.)'nde Bell Telefon Laboratuvarları'nda bir fizikçi olan W. A. Shewhart istatistik yöntemlerini nitelik denetiminde ilk kez uygulamıştır (1). İkinci Dünya savaşı sırasında silahlı kuvvetlerin gereksinim duyduğu tüm lojistik ürünlerin kitlesel üretiminde İngiltere ve A.B.D. yönetimlerinin bu konuya özel önem vermiş olmaları da, istatistiksel nitelik denetiminin gelişmesine önemli bir katkı ve ivme kazandırmıştır.

İstatistiksel süreç denetimi, basit bir nitelik muayenesi değildir. Üretim işleminin normal koşullar altında kurulmasını ve yürütülmesini sağlamada çok önemli rol oynayan, üretimin denetim dışına çıkması halinde bu durumu hemen tespit ederek, gerekli önlemlerin zamanında alınmasına olanak veren bir yöntemdir (2). Başka bir ifadeyle istatistiksel süreç denetimi, üretim sürecindeki değişkenliğin denetim altında olup olmadığı sorusuna ışık tutmaktadır.

Üretim süreci, kaynağı belirlenebilir nedenler olarak adlandırılan; hammaddedeki değişkenlik, ekipmandaki hasar, tecrübesiz operatör hataları gibi genellikle malzeme, ekipman, kullanılan yöntem ve personelden kaynaklanan değişkenlikler altında kabul edilemez bir düzeyde gerçekleşiyorsa, sürecin istatistiksel olarak denetim altında olmadığı; eğer süreç yalnızca genel ve tesadüfi değişkenliğin etkisinde sürüyorsa, sürecin istatistiksel olarak denetim altında olduğu söylenebilir (3).

Denetim çizgesi, süreçteki tesadüfi olmayan durumu veya denetim-dışı olma durumunu saptamaya yarayan bir araçtır. Denetim çizgelerinin temel amacı; süreç performansının kabul edilebilir bir nitelik düzeyinde olup olmadığını belirlemektir. 1930'lu yıllarda Dr. Walter A. Shewhart tarafından geliştirilen istatistiksel denetim çizgelerinin ilk biçimleri Shewhart çizgeleri olarak adlandırılır (4). Sürecin tek

boyutta izlendiği Shewhart denetim çizgelerinin, σ süreç standart sapması olmak üzere yalnızca 1.5σ 'dan daha büyük kaymalara karşı duyarlı oldukları saptanmıştır (5).

Süreç niteliği çok boyutlu bir yöney biçiminde gözlemlendiğinde, süreç özellikleri birbiriyle ilişkili değilse, yine tek boyutlu yöntemlerle nitelik denetimi yapılabilir. Ancak çok boyutlu süreç bileşenleri genellikle birbiri ile ilişkili değişkenlerden oluşur. Bu nedenle çok boyutlu bir süreç, birbiri ile ilişkili değişkenlerinin her birinin ilişkin olduğu tek boyutlu denetim çizgelerinde denetim altında gözükmese bile, değişkenlerin ortak denetim bölgesi göz önüne alındığında değişkenlerden biri ya da bir kaç denetim dışına düşmüş olabilir. Dolayısı ile, çok boyutlu bir sürecin nitelik denetiminde, ilişki içindeki değişkenlerin eşanlı ve çok boyutlu denetim-içi bölgelerinin tanımlandığı yöntemlere gereksinim duyulur.

Temelde tek boyutlu bir yığın ortalaması üzerine kurulu basit bir denence sınaması süreci olan Shewhart türü istatistiksel süreç nitelik denetim çizgelerinin doğal uzantısı olan çok boyutlu biçimi Hotelling tarafından önerilmiştir (6-7). Çok boyutlu nitelik denetim yöntemleri arasında ilk ve en yaygın kullanımı olan *Hotelling- T^2 çizgesi*, *Çok Boyutlu Shewhart (ÇS) çizgesi* veya süreç değişke-bideğişke dizeyinin bilindiği durumda Hotelling- T^2 istatistiğinin dağılımından dolayı χ^2 çizgesi olarak da adlandırılmaktadır (5).

Süreç ortalamasındaki 1.5σ 'dan daha küçük kaymaları saptamada yetersiz kaldığı görülen Shewhart denetim çizgelerinden sonra önerilen tek boyutlu *Birikimli Toplam (BİTOP)* ve *Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama (ÜAHO) çizgeleri* gibi başka seçeneklerin de çok boyutlu biçimleri geliştirilmiş ve karşılıklı değerlendirmeleri yapılmıştır (8-14). Çok boyutlu Shewhart çizgesine karşılık olarak önerilen bu yöntemlerin tasarımındaki temel çıkış noktası, süreç ortalamasındaki bir kaymayı en kısa sürede yakalayacak istatistiklerden yararlanmaktır. Adın da anlaşılacağı üzere örneğin ÜAHO çizgelerinde, süreç ortalaması örnek birimlerinin aritmetik ortalamaları biçiminde değil, örnek birimlerinin üstel ağırlıklı hareketli ortalamaları

biçiminde izlenir. Bu yöntemler hesaplama açısından az bile olsa mutlaka bir ek hesaplama maliyetine yol açar. Dolayısı ile çok boyutlu Shewhart çizgesi ile çok boyutlu ÜAHO çizgesi arasındaki bir seçim, süreç ortalamasının izlenmesinde hangi ortalamanın daha uygun olacağına bağlıdır. Bu ise nitelik denetim yöntemi uygulanacak sürecin yapısı hakkında doğru bilgiye sahip olmayı gerektirir.

Çok boyutlu süreç nitelik denetiminde, tek boyutlu süreç denetiminde olduğu gibi sürecin beklenen değerinde bir kayma olup olmadığını saptamanın yanında, bir kayma söz konusu ise bu kaymanın hangi değişken ya da değişkenlerin beklenen değerlerindeki bir değişmeden ileri geldiğinin saptanması da temel amaçlar arasındadır. Süreç ortalamasındaki kaymanın hangi değişken ya da değişkenlerin ortalamalarındaki bir kaymadan ileri geldiğini saptama amacına yönelik olarak geliştirilen belli başlı yöntemler ve çok boyutlu Shewhart denetim çizgelerindeki denetim-dışı sinyali yorumlamanın zorluğu Alt (15), Chua ve Montgomery (16), Doğanaksoy vd. (17), Jackson (18), Murphy (19), Pignatiello ve Runger (11) tarafından geniş bir şekilde tartışılmıştır.

Çalışmamızda bu yöntemlerden Hotelling'in T^2 istatistiği ve çok boyutlu Shewhart çizgesi ile Bonferroni eşanlı güven aralıkları yöntemlerinin sanal ortamda bir değerlendirmesi sunulmuştur.

Çalışmanın İkinci Bölümü'nde, süreç ortalama yöneyindeki kaymanın ve bu kaymaya neden olan değişkenin saptanmasında yaygın olarak kullanılan ardışık Hotelling'in T^2 sınaması ve çok boyutlu Shewhart denetim çizgesi ile Bonferroni eşanlı güven aralıkları yöntemi hakkında genel bilgiler özetlenmiştir.

Üçüncü Bölüm'de, denetim-içi ve denetim-dışı ortalama deneme uzunluğu ölçütüne göre çok boyutlu Shewhart denetim çizgesinin ve denetim-dışı durumdan sorumlu değişkenin saptanmasında başvuru Bonferroni eşanlı güven aralıklarının deneysel ve kuramsal güven düzeylerinin karşılaştırması amacı ile gerçekleştirilecek Monte Carlo sanal deney tasarımı ve bulguları sunulmuştur.

Son bölümde ise, genel bir değerlendirme yapılarak bu konuda ileride yapılacak çalışmalar için önerilere yer verilmiştir.



2. SÜREÇ ORTALAMASINDAKİ KAYMANIN VE BU KAYMADAN SORUMLU DEĞİŞKENİN SAPTANMASI

İstatistiksel süreç nitelik denetimi, ister tek boyutta isterse çok boyutta olsun, temelde tek yığın ortalamasına ilişkin ardışık bir denence sınavasıdır.

p değişken sayısı olmak üzere, μ yığın ortalamasının $p \times 1$ boyutlu bir yöneyle ifade edildiği,

$$D_o : \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ . \\ . \\ \mu_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{01} \\ \mu_{02} \\ . \\ . \\ \mu_{0p} \end{bmatrix} = \mu_0 \quad [2.1]$$

$$D_1 : \mu \neq \mu_0$$

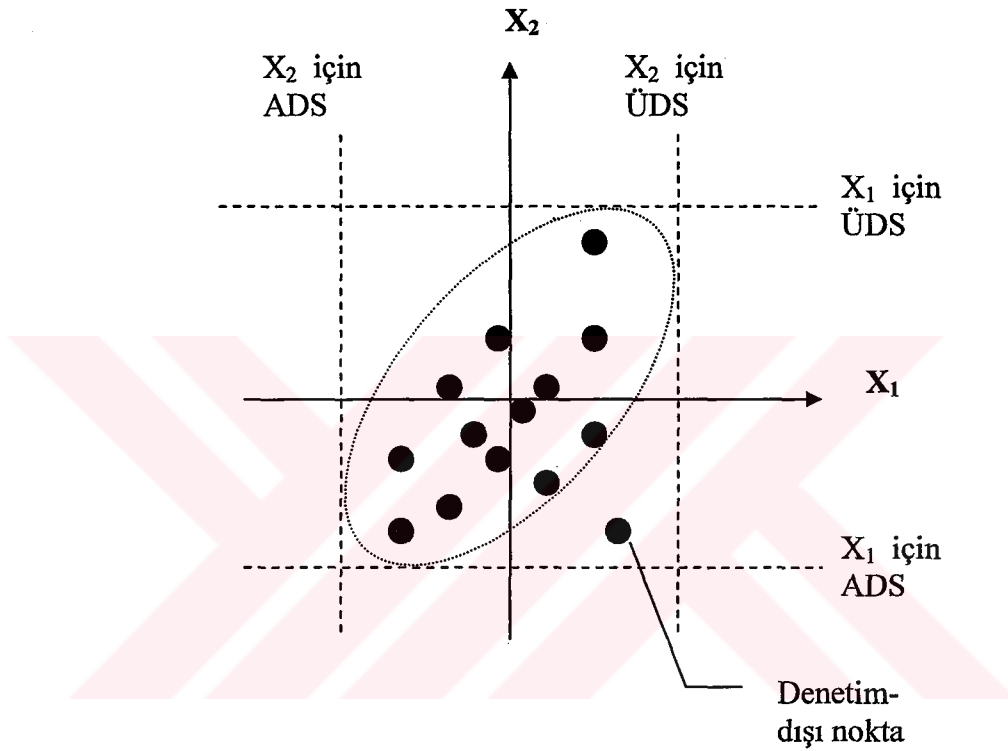
biçimindeki bir denence yapısının her koşulda, bu çok boyutlu yığın ortalama yöneyinin her bir boyutu için ayrı ayrı

$$\begin{aligned} D_o : \mu_j &= \mu_{0j}, j = 1, 2, \dots, p \\ D_1 : \mu_j &\neq \mu_{0j} \end{aligned} \quad [2.2]$$

biçiminde ifade edilecek tek boyutlu denenceler ile ele alınamayacağını Hotelling göstermiştir (7).

İstatistiksel denence sınavasındaki kabul ve red bölgeleri terimlerinin, nitelik denetimindeki karşılıkları denetim-içi ve denetim-dışı bölgelerdir. Nitelik denetim sürecinde, “Eş. 2.1”deki bir denence yapısının neden “Eş. 2.2”deki gibi bir denence yapısı biçiminde ele alınamayacağı, basit bir örnekle görsel olarak açıklanabilir. Şekil 2.1’de iki boyutlu bir sürecin, boyutların her birinde ayrı ayrı ve her ikisinde

birlikte tanımlanan denetim-içi ve denetim-dışı bölgeleri görülmektedir. Sürecin iki boyutlu noktalarının tümü, X_1 ve X_2 değişkenleri için tanımlanan alt ve üst denetim sınırlarının belirlediği alanda yer alırken, sağ alt köşedeki nokta, elips biçimindeki iki değişkenin *ortak denetim-içi bölgesi* dışına düşmüştür.



Şekil 2.1. Tek boyutlu ve iki boyutlu denetim-içi bölgeler

Her bir boyutun birbiriyle ilişkisiz olduğu varsayılarak çok boyutlu bir sürecin tek boyuttaki bileşenleri cinsinden nitelik denetiminin yapılması durumunda bir başka sakınca daha vardır. Tek değişkenli bir testte α anlamlılık düzeyinde süreç gerçekte denetim-altında iken, yani yığın ortalamaları arasında fark yokken D_0 denencesini kabul etme olasılığı $(1-\alpha)$ 'dır. Eğer p -boyutlu bir süreç gerçekte denetim altında ise, her bir boyuta ilişkin örnek ortalamalarının hepsinin de denetim-içi bölgede olma olasılığı ise $(1-\alpha)^p$ olacaktır. Dolayısı ile, *ortak* I. tür hata olasılığı $1-(1-\alpha)^p$ 'nın α 'dan çok daha büyük olacağı açıktır.

Yukarıda belirtilen bu iki nedenden dolayı, “Eş. 2.1”deki yapıda ardışık bir denence sınaması süreci olan çok boyutlu nitelik denetiminde, *ortak kabul bölgesi* ya da *ortak denetim-içi bölgesi* ve sürecin denetim-dışına sürüklenmesinden sorumlu boyutun saptanabilmesi için de *eşanlı güven aralıkları* tanımlanmak zorundadır.

“Eş. 2.1”deki yapıya sahip bir denencenin sınanması, Hotelling tarafından önerilen T^2 istatistiği kullanılarak yapılır (6). Böyle bir denencenin ardışık sınanmasında, D_0 denencesinin reddedilmesi durumunda, “Eş. 2.2”deki bir denence sınamasının hangi boyut ya da boyutlarda reddedilmesinden ileri geldiği ise, *Bonferroni eşanlı güven aralıkları* yöntemi ile araştırılabilir. Bu bölümde, çok boyutlu nitelik denetim yöntemlerinin temelini oluşturan Hotelling’in T^2 istatistiği ve Bonferroni eşanlı güven aralıkları yöntemi ile ilgili bilgiler verildikten sonra, uygulamada en çok kullanılan çok boyutlu Shewhart denetim çizgesi tanıtılacaktır.

2.1. Ardışık Hotelling T^2 Sınaması

Hotelling T^2 istatistiğinin temeli, tek değişkenli denencelerin sınanmasında kullanılan Student’in t sınamasına dayanır.

“Eş. 2.2”deki yapıya sahip bir denence sınamasında, $N(\mu, \sigma^2)$ yığınının rassal olarak seçilmiş $x_1, x_2, \dots, x_n$ örnek gözlem değerlerinden hesaplanan n çaplı örnek ortalaması,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad [2.3]$$

ve yığın değişkesinin sapmasız bir tahmini olarak örnek değişkesi,

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad [2.4]$$

olmak üzere,

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} = \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{s / \sqrt{n}} \quad [2.5]$$

biçiminde tanımlanan t -istatistiğinin dağılımı, D_0 denencesinin doğru olduğu varsayımı altında, $n-1$ serbestlik dereceli bir t dağılımına sahiptir. Buna göre, $n-1$ serbestlik derecesi ile t dağılımının üst %50 α 'lık noktası $t_{\alpha/2; n-1}$ olmak üzere, $|t| < t_{\alpha/2; n-1}$ ise, D_0 ; $|t| > t_{\alpha/2; n-1}$ ise, D_1 kabul edilir.

Student'in t sınavasının çok boyutlu benzerinde, p -boyutlu beklenen değer yöneyi,

$$\mu' = [\mu_1, \dots, \mu_p]; \quad [2.6]$$

ve $p \times p$ boyutlu bilinmeyen değişke-bideğişke dizeyi,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdot & \cdot & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdot & \cdot & \sigma_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdot & \cdot & \sigma_{pp}^2 \end{bmatrix} \quad [2.7]$$

olan, $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ yığınınından rassal olarak seçilen n birimlik

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{p1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{pn} \end{bmatrix} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p] \quad [2.8]$$

örnek birimlerinden j 'inci bileşeni,

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ji}, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad [2.9]$$

biçiminde hesaplanan μ 'nün tahmini örnek ortalama yöneyi,

$$\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \dots \quad \bar{x}_p] \quad [2.10]$$

ve k . satır, l . sütun birimi

$$s_{kl} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_{kj} - \bar{x}_k)(x_{lj} - \bar{x}_l) \quad [2.11]$$

olan Σ 'nın tahmini örnek değişke-bideğişke dizeyi,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & \dots & s_{pp} \end{bmatrix} \quad [2.12]$$

olmak üzere,

$$T^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0) \quad [2.13]$$

biçiminde tanımlanan tek örnek Hotelling T^2 istatistiğinden yararlanılır. “Eş. 2.1” deki yokluk denencesi doğru olduğunda, T^2 istatistiği,

$$F = \frac{n-p}{p(n-1)} T^2 \quad [2.14]$$

p ve $n-p$ serbestlik dereceli F dağılımına sahip olur. Buna göre, $\%100(1-\alpha)$ güvenilirlik düzeyindeki bir sınamanın karar kuralı,

$$T^2 \leq \frac{p(n-1)}{n-p} F_{\alpha; p, n-p} \quad [2.15]$$

ise, $D_0 : \mu = \mu_0$ denencesinin kabulü; değilse D_0 'ın reddedilmesi biçiminde olacaktır.

2.2. Çok Boyutlu Shewhart Çizgeleri

Uygulamada, süreç ortalamasına ilişkin çok boyutlu nitelik denetim yöntemi olarak ardışık T^2 sınamasının görselleştirilmiş bir biçimi olan Shewhart çizgelerinden yararlanılır. Hotelling T^2 çizgesi olarak da anılan bu çizgeler $1,5\sigma$ 'dan daha büyük kaymaların saptanmasında etkindirler (4).

Hotelling T^2 ya da ÇS süreç nitelik denetim çizgesinin oluşturulmasını göstermek amacı ile, EK-1'de kodu verilen MatLab program kaynak kodu kullanılarak, örnek çapı $n=25$ olmak üzere, ortalama vektörü ve değişke-bideğişke dizeyi,

$$\mu = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 1 \end{bmatrix}$$

olan $p=3$ boyutlu normal bir dağılımdan rassal 100 örneğe ilişkin veriler benzetim yolu ile üretilmiştir. 100'üncü örneğe ilişkin veriler Çizelge 2.1'de yer almaktadır.

Çizelge 2.1. 100. örneğe ilişkin veriler

Birim No	1.Değişken	2.Değişken	3.Değişken
1	5,7573	1,8919	0,3554
2	4,9235	2,9653	-0,7628
3	4,3261	2,1577	-0,3903
4	5,1495	3,8546	1,6541
5	3,9758	1,4081	-1,7113
6	3,3032	2,1154	-0,3019
7	5,8340	5,2882	0,9921
8	3,3565	2,2619	0,5063
9	5,1504	3,3373	-0,0766
10	5,8699	1,4355	1,8925
11	5,5801	3,3144	2,2781
12	3,9279	1,4554	-0,1412
13	4,2062	3,1029	0,5488
14	4,9832	3,5312	1,7556
15	5,0932	3,5185	1,0824
16	4,7826	2,3311	0,4789
17	6,0766	4,0560	2,1760
18	3,2592	2,3826	-0,1255
19	3,3303	2,2399	0,5135
20	5,0617	3,6259	-0,5277
21	2,9990	4,1984	-1,2834
22	5,9231	2,1311	0,4832
23	5,2692	3,2122	0,7634
24	5,6515	2,3358	1,4746
25	5,6034	2,9739	2,0948

Çizelge 2.1’deki 25×3 boyutlu veri dizeyinden, örnek ortalama yöneyi ve değişke-
bideğişke dizeyi,

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4,7757 \\ 2,8450 \\ 0,5492 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0,9489 & 0,2418 & 0,6638 \\ 0,2418 & 0,9319 & 0,2664 \\ 0,6638 & 0,2664 & 1,1757 \end{bmatrix}$$

olarak ve “Eş. 2.13”ten 100. örneğe ilişkin T^2 değeri de,

$$\begin{aligned}
T^2 &= n(\bar{x} - \mu_0)' S^{-1} (\bar{x} - \mu_0) \\
&= 25 \times \begin{bmatrix} -0,2243 & -0,1550 & -0,4508 \end{bmatrix} \times \\
&\quad \begin{bmatrix} 0,9489 & 0,2418 & 0,6638 \\ 0,2418 & 0,9319 & 0,2664 \\ 0,6638 & 0,2664 & 1,1757 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -0,2243 \\ -0,1550 \\ -0,4508 \end{bmatrix} \\
&= 25 \times \begin{bmatrix} -0,2243 & -0,1550 & -0,4508 \end{bmatrix} \times \\
&\quad \begin{bmatrix} 1,7715 & -0,1857 & -0,9581 \\ -0,1857 & 1,1669 & -0,1595 \\ -0,9581 & -0,1595 & 1,4276 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,2243 \\ -0,1550 \\ -0,4508 \end{bmatrix} \\
&= 25 \times \begin{bmatrix} -0,0634 & -0,0673 & -0,4039 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,2243 \\ -0,1550 \\ -0,4508 \end{bmatrix} \\
&= 25 \times 0,1783 = 4,4575
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

100 örneğin tümü için EK-1'deki MatLab program kodu yardımı ile hesaplanan T^2 değerleri Çizelge 2.2'de verilmiştir.

“Eş. 2.15”ten, (3,25-3) serbestlik dereceli F dağılımının üst %95’lik değerine göre, *kritik- T^2 değeri* ise,

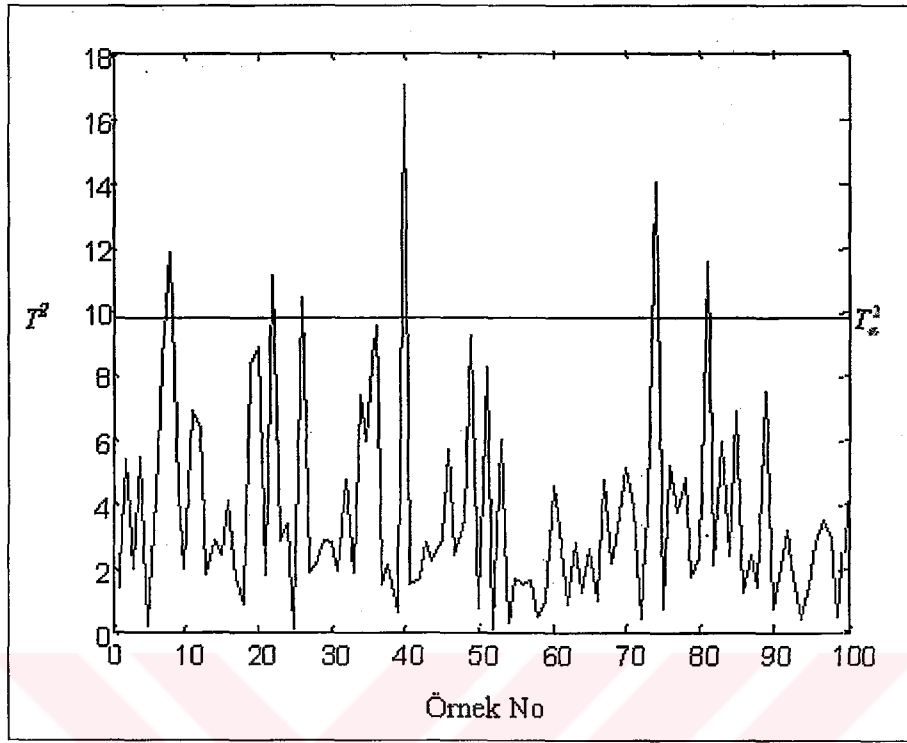
$$\begin{aligned}
T_{\alpha}^2 &= \frac{p(n-1)}{n-p} F_{0,05;(3,22)} \\
&= \frac{3(25-1)}{25-3} 3,05 \\
&= \frac{72}{22} 3,05 \\
&= 9,9818
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Hesaplanan T_{α}^2 değeri aynı zamanda çok boyutlu Shewhart çizgesinin üst denetim sınırına karşı gelir. Uygulamada genellikle alt denetim sınırı sıfır alınır. Bunun sebebi, ortalamadan herhangi bir farklılık her bir i için hesaplanan T_i^2 istatistiğinin artmasını sağlayacak ve böylece alt denetim sınırı önemini yitirecektir (20).

Çizelge 2.2. 100 örneğe ilişkin olarak hesaplanan T^2 değerleri

Örnek no	T^2	Örnek no	T^2	Örnek no	T^2	Örnek no	T^2
1	0,7584	26	10,3864	51	8,1905	76	5,1852
2	5,3556	27	1,8437	52	0,0672	77	3,7181
3	1,9582	28	2,1159	53	5,9611	78	4,7849
4	5,3912	29	2,8544	54	0,2477	79	1,7174
5	0,1630	30	2,7389	55	1,6616	80	2,3180
6	4,1650	31	1,9459	56	1,4741	81	11,5112
7	8,3286	32	4,6876	57	1,6286	82	2,0928
8	11,8234	33	1,8753	58	0,5015	83	5,9197
9	4,2686	34	7,3553	59	0,9419	84	2,4681
10	1,9748	35	5,8948	60	4,5534	85	6,8635
11	6,8515	36	9,9690	61	3,2431	86	1,2591
12	6,3627	37	1,4891	62	0,8660	87	2,4536
13	1,8015	38	2,1249	63	2,7568	88	1,3879
14	2,8839	39	0,6025	64	1,2346	89	7,4554
15	2,4175	40	16,9793	65	2,6023	90	0,7843
16	4,0458	41	1,4853	66	0,9547	91	1,6858
17	1,6367	42	1,6802	67	4,7328	92	3,2053
18	0,8772	43	2,7629	68	2,1847	93	1,6937
19	8,2775	44	2,2151	69	3,5821	94	0,3960
20	8,8426	45	2,8988	70	5,1014	95	1,4044
21	1,7654	46	5,6382	71	3,8690	96	2,7390
22	11,1006	47	2,4313	72	0,3798	97	3,4930
23	2,8697	48	3,4743	73	3,8344	98	2,9551
24	3,3560	49	9,2328	74	14,0349	99	0,4995
25	1,1235	50	0,6948	75	0,7842	100	4,4575

Çizelge 2.2'deki T^2 değerlerinden, 8., 22., 26., 40., 74. ve 81. örneğe ilişkin olanlar hesaplanan T_{α}^2 değerini aşmıştır. Çizelge 2.2'deki T^2 değerlerine ve hesaplanan T_{α}^2 değerine göre oluşturulan çok boyutlu Shewhart çizgesi de Şekil 2.2'de görüldüğü gibidir.



Şekil 2.2. 100 örneğe ilişkin T^2 değerlerine göre çizilen Shewhart çizgesi

Hotelling T^2 çizgesinden, sürecin 8., 22., 26., 40., 74. ve 81. örnek ortalamalarına göre %95'lik güven üst sınırını aşarak denetim dışına düştüğü açıkça görülebilmektedir.

2.3. Bonferroni Eşanlı Güven Aralıkları Yöntemi

“Eş. 2.1”deki yokluk denencesinin reddedilmesi, örnek ortalama yöneyindeki en az bir değişkene ilişkin ortalamanın, ilgili yığın ortalamasından farklı olduğu anlamına gelir. Çok boyutlu süreç nitelik denetiminde, sürecin beklenen değerinde bir kayma söz konusu ise bu kaymanın hangi değişken ya da değişkenlerin beklenen değerlerindeki bir farklılıktan ileri geldiğinin saptanması da gerekir. Hotelling T^2 istatistiği, çok boyutlu süreç ortalama yöneyindeki genel bir kaymayı yakalayabilen optimal bir sınama olmasına karşılık sürecin denetim-dışına çıkmasına neden olan değişken ya da değişkenlerin saptanması konusunda bir bilgi vermez (21).

Bu amaçla güven aralıkları yönteminden yararlanılabilir. Güven aralıkları, hem farklı değişkenlerin belirlenmesi hem de incelenen değişkene ilişkin çok boyutlu güven aralıklarının bulunmasında yardımcı olur (22).

Alt, çok boyutlu nitelik denetim çizgelerinde denetim-dışı sinyali yorumlamak için bireysel değişkenler üzerinde *Bonferroni eşanlı güven aralıklarının* kullanılmasını önermiştir (15). Aşağıda eşanlı güven aralıkları ve özel olarak da Bonferroni eşanlı güven aralığı ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

Bilinmeyen yığın parametrelerinin bir yöneyi θ , ve θ 'nın tüm olası değerler kümesi Θ olsun. Veri dizeyi $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ olmak üzere, olası θ değerlerinin $\%100(1-\alpha)$ 'lık güven bölgesi $B(X)$, $1-\alpha$ olasılıkla gerçek θ değerini kapsar. Öte yandan eğer X , örnek ortalama yöneyi ve örnek değişke-bideğişke dizeyi

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad S = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})(X_j - \bar{X})' \quad [2.16]$$

olmak üzere, p -boyutlu $N_p(\mu, \Sigma)$ yığınınından rassal bir örnek ve $F_{p, n-p}(\alpha)$, $F_{p, n-p}$ dağılımının üst 100α 'inci yüzdeliği ise,

$$P\left\{T^2 \equiv n(\bar{X} - \mu)'S^{-1}(\bar{X} - \mu) \leq \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p, n-p}(\alpha)\right\} = 1 - \alpha \quad [2.17]$$

olduğu biliniyor (23).

Dolayısı ile gözlemleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ olmak üzere ortalama yöneyi ve değişke-bideğişke dizeyi,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \quad S = \frac{1}{(n-1)} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})' \quad [2.18]$$

olan belli bir örneğe göre oluşturulacak p -boyutlu normal bir dağılımın ortalaması için $\%100(1-\alpha)$ 'lık güven aralığı $B(\mathbf{X})$,

$$n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}) \leq \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p, n-p}(\alpha) \quad [2.19]$$

koşulunu sağlayan tüm $\boldsymbol{\mu}$ 'lerin bir kümesi olan $\bar{\mathbf{x}}$ merkezli bir elipsoidir (23).

$\mathbf{X}$ rassal örneğinin,

$$\mathbf{Z} = \ell_1 \mathbf{X}_1 + \ell_2 \mathbf{X}_2 + \dots + \ell_p \mathbf{X}_p = \ell' \mathbf{X} \quad [2.20]$$

biçimindeki doğrusal bir bileşeninin, $N(\ell' \boldsymbol{\mu}, \ell' \boldsymbol{\Sigma} \ell)$ dağılımlı olduğu ve $\mathbf{Z}$ 'lerin rassal bir örneğinin, $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n$ 'den hesaplanan sırası ile örnek ortalaması ve değişkesi,

$$\bar{z} = \ell' \bar{\mathbf{x}}, \quad s_z^2 = \ell' \mathbf{S} \ell \quad [2.21]$$

olmak üzere,

$$\mathbf{Z}_j = \ell_1 \mathbf{X}_{1j} + \ell_2 \mathbf{X}_{2j} + \dots + \ell_p \mathbf{X}_{pj} = \ell' \mathbf{X}_j, \quad j = 1, \dots, n \quad [2.22]$$

biçiminde elde edilebileceği açıktır.

Student t dağılımlı,

$$t = \frac{\bar{z} - E(Z)}{\sqrt{\frac{s_z^2}{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\ell'\bar{x} - \ell'\mu)}{\sqrt{\ell'S\ell}} \quad [2.23]$$

t -istatistiği, $n-1$ serbestlik dereceli t dağılımının üst $100(\alpha/2)$ 'inci yüzdeliği $t_{n-1}(\alpha/2)$ olmak üzere,

$$P\left\{\ell'\bar{x} - t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{\ell'S\ell}{n}} \leq \ell'\mu \leq \ell'\bar{x} + t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{\ell'S\ell}{n}}\right\} = 1 - \alpha \quad [2.24]$$

güven aralığını oluşturmada kullanılabilir.

Eğer,

$$\ell_k' = \left[\ell_i = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}, i = 1(1)p \right], k \leq p \quad [2.25]$$

olarak tanımlanırsa, “Eş. 2.24”deki ifade,

$$P\left\{\bar{x}_k - t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{s_{kk}}{n}} \leq \mu_k \leq \bar{x}_k + t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{s_{kk}}{n}}\right\} = 1 - \alpha \quad [2.26]$$

biçiminde, μ ortalama vektörünün k 'inci bileşeni μ_k 'ya ilişkin bir güven aralığına dönüşür.

“Eş. 2.26”, her $k \leq p$ için, her biri aynı $(1-\alpha)$ güven katsayısına sahip olan ilişkisiz güven aralıkları tanımlar. Ancak, p tane ilişkisiz güven aralığının eşanlı olarak gerçek ortalama vektörü μ 'yü kapsama olasılığı $(1-\alpha)^p$ olduğundan, genel eşanlı güven düzeyi $(1-\alpha)$ 'dan çok daha küçüktür (23).

ℓ 'nin özel bir biçimi seçilerek, “Eş. 2.26”dakinden daha az duyarlı aralıklarla, genel güven düzeyi $(1-\alpha)$ olan eşanlı güven aralıkları tanımlanabilir. Belli bir $\bar{\mathbf{x}}$ ve ℓ için, “Eş. 2.26”daki güven aralığı,

$$t^2 = \frac{n(\ell'(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}))^2}{\ell' \mathbf{S} \ell} \leq t_{n-1}^2(\alpha/2) \quad [2.27]$$

koşulunu sağlayan $\ell' \boldsymbol{\mu}$ değerler kümesine, eşanlı güven bölgesi ise, $t^2 \leq \delta^2$ olmak üzere,

$$\max_{\ell} \frac{n(\ell'(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}))^2}{\ell' \mathbf{S} \ell} \leq \delta^2 \quad [2.28]$$

koşulunu sağlayan $\ell' \boldsymbol{\mu}$ değerler kümesine göre oluşur.

Genişletilmiş Cauchy-Schwartz eşitsizliği¹ kullanılarak, “Eş. 2.28”in

$$\max_{\ell} \frac{n(\ell'(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}))^2}{\ell' \mathbf{S} \ell} = n \left[\max_{\ell} \frac{(\ell'(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}))^2}{\ell' \mathbf{S} \ell} \right] = n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) = T^2 \leq \delta^2 \quad [2.29]$$

olarak ifade edilebileceği ve bunun da “Eş. 2.17”dan dolayı her ℓ için

$$P \left\{ \begin{aligned} \ell' \bar{\mathbf{x}} - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{\ell' \mathbf{S} \ell}{n}} &\leq \ell' \boldsymbol{\mu} \\ &\leq \ell' \bar{\mathbf{x}} + \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{\ell' \mathbf{S} \ell}{n}} \end{aligned} \right\} = 1 - \alpha \quad [2.30]$$

olmasını gerektireceği gösterilebilir (23).

¹ Eğer $\mathbf{b}_{(px1)}$ ve $\mathbf{d}_{(px1)}$ her hangi iki yöney ve $\mathbf{B}_{(p \times p)}$ olumlu belirli bir dizey ise, $(\mathbf{b}'\mathbf{d})^2 \leq (\mathbf{b}'\mathbf{B}\mathbf{b})(\mathbf{d}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d})$

“Eş. 2.25”e göre “Eş. 2.30”daki aralık için ardışık ℓ seçimleri, tümü eşanlı $(1-\alpha)$ güven katsayılı bireysel

$$P \left\{ \begin{aligned} \bar{x}_k - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}} F_{p,n-p}(\alpha) \sqrt{\frac{s_{kk}}{n}} &\leq \mu_k \\ &\leq \bar{x}_k + \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}} F_{p,n-p}(\alpha) \sqrt{\frac{s_{kk}}{n}} \end{aligned} \right\} = 1 - \alpha \quad [2.31]$$

ifadelerini üretir. $(1-\alpha)$ katsayısını ayarlamadan,

$$\ell' = \left[\ell_j = \begin{cases} 1, j = i \\ -1, j = k \\ 0, j \neq i, j \neq k, \end{cases}, j = 1(1)p \right], \quad i \leq k \leq p \quad [2.32]$$

olmak üzere, $\mu_i - \mu_k$ farklarına ilişkin aralıklar da oluşturulabilir. Bu durumda, $\ell'S\ell = s_{ii} - 2s_{ik} + s_{kk}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \bar{x}_i - \bar{x}_k - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}} F_{p,n-p}(\alpha) \sqrt{\frac{s_{ii} - 2s_{ik} + s_{kk}}{n}} &\leq \mu_i - \mu_k \\ &\leq \bar{x}_i - \bar{x}_k + \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}} F_{p,n-p}(\alpha) \sqrt{\frac{s_{ii} - 2s_{ik} + s_{kk}}{n}} \end{aligned} \quad [2.33]$$

ifade edilebilir (23).

Eğer $\ell'\mu = \ell_1\mu_1 + \ell_2\mu_2 + \dots + \ell_p\mu_p$ doğrusal bileşeninin ya da belirlenen bileşen ortalamaları μ_i 'lerin sayısı m az ise, eşanlı T^2 aralıklarından daha küçük ve daha duyarlı eşanlı güven aralıkları oluşturulabilir. Aynı adı taşıyan bir olasılık eşitsizliğinden kaynaklandığı için, bu yöntem *Bonferroni* eşanlı güven aralıkları denilmektedir.

Veriler elde edilmeden önce, m tane $\ell'_1\mu, \ell'_2\mu, \dots, \ell'_m\mu$ doğrusal bileşenine ilişkin güven aralığı gerektiğini düşünelim. G_i , $P[G_i \text{ doğru}] = 1 - \alpha_i$, $i=1,2,\dots,m$ olmak üzere, $\ell'_i\mu$ değerine ilişkin güven ifadesi olsun. Buna göre tüm G_i 'lerin aynı anda doğru olma olasılığı,

$$\begin{aligned} P[\text{tüm } G_i \text{ doğru}] &= 1 - P(\text{en az bir } G_i \text{ yanlış}) \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^m P(G_i \text{ yanlış}) = 1 - \sum_{i=1}^m (1 - P(G_i \text{ doğru})) \quad [2.34] \\ &= 1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bonferroni eşitsizliğinin özel bir biçimi olan “Eş. 2.34”, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ olan genel hata oranını, güven ifadelerinin gerisindeki ilişki yapısına bakmadan, denetim altında tutmaya izin verir. Önemli ifadelerin bir grubu için hata oranını denetleme ve daha az önemli olan ifade için bir başka seçimle dengeleme esnekliği sağlar.

μ 'nün μ_i bileşenlerinden oluşan kısıtlı bir kümesi için eşanlı aralık tahminlerini oluşturalım. Bu bileşenlerin göreceli önemi üzerine bir bilgi yokken, $\alpha_i = \frac{\alpha}{m}$ olmak üzere,

$$\bar{x}_i \pm t_{n-1, \frac{\alpha_i}{2}} \sqrt{\frac{s_{ii}}{n}}, \quad i=1,2,\dots,m$$

t aralıklarını ele alalım. Her i için “Eş. 2.17”e göre,

$$P\left[\bar{X}_i - t_{n-1, \frac{\alpha}{2m}} \sqrt{\frac{s_{ii}}{n}} \leq \mu_i \leq \bar{X}_i + t_{n-1, \frac{\alpha}{2m}} \sqrt{\frac{s_{ii}}{n}}\right] = 1 - \frac{\alpha}{m}, \quad i=1,2,\dots,m$$

olduğundan, her i için,

$$P\left[\bigcap_{i=1}^m \left\{ \mu_i : \bar{X}_i - t_{n-1, \frac{\alpha}{2m}} \sqrt{\frac{S_{ii}}{n}} \leq \mu_i \leq \bar{X}_i + t_{n-1, \frac{\alpha}{2m}} \sqrt{\frac{S_{ii}}{n}} \right\}\right] \geq 1 - \sum_{i=1}^m \left(\frac{\alpha}{m}\right) \quad [2.35]$$

$$= 1 - \alpha$$

olduğu söylenebilir. Dolayısı ile, $(1-\alpha)$ 'ya eşit ya da daha büyük olan genel bir güven düzeyinde,

$$P\left\{ \bar{x}_k - t_{n-1, \frac{\alpha}{2p}} \sqrt{\frac{S_{kk}}{n}} \leq \mu_k \leq \bar{x}_k + t_{n-1, \frac{\alpha}{2p}} \sqrt{\frac{S_{kk}}{n}} \right\} = 1 - \frac{\alpha}{p}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad [2.36]$$

$m=p$ tane ifade kurulabilir.

“Eş. 2.36” ve “Eş. 2.31” ifadeleri karşılaştırılırsa, her iki aralığın da, “Eş. 2.33”deki

$\sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}} F_{p, n-p}(\alpha)$ yüzdeliği yerine, “Eş. 2.36”da $t_{n-1, \frac{\alpha}{2p}}$ yüzdeliğinin gelmesi dışında, aynı yapıda olduğu görülür.

$\ell'\mu$ doğrusal bileşenleri için Bonferroni aralıkları ile T^2 aralıkları genel olarak aynı

$$\ell'\bar{x} \pm (\text{kritik deger}) \sqrt{\frac{\ell'S\ell}{n}}$$

biçimindedir.

$\alpha_i = \alpha/m$ durumunda, Bonferroni aralığı uzunluğunun T^2 aralıkları uzunluğuna oranının, rassal $\bar{X}$ ve S' 'den bağımsız olarak, her zaman

$$\frac{t_{n-1, \frac{\alpha}{2m}}}{\sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p, n-p}(\alpha)}} < 1 \quad [2.37]$$

olduğu söylenebilir (23).

Hotelling T^2 çizgesinden (Bkz. Şekil 2.1), sürecin 8., 22., 26., 40., 74. ve 81. örnek ortalamalarına göre %95'lik güven üst sınırını aştığı daha önce saptanmıştı. Şimdi sürecin denetim-dışı duruma düşmesine yol açan değişkenlerin Bonferroni eşanlı güven aralığı yöntemi ile saptanmasını 8. örnek verileri için gösterelim.

Bu örneğe ilişkin örnek ortalamaya yöneyi ve değişkenler arası kovaryans matrisinin ana köşegen birimleri aşağıdaki gibidir:

$$\bar{\mathbf{x}} = [5,2204 \quad 2,446 \quad 0,9901]; \quad s_{11} = 0,647, \quad s_{22} = 0,7333, \quad s_{33} = 1,1375$$

$\alpha=0,05$ için t değeri, $t_{(n-1; \frac{\alpha}{2p})} = t_{(24; 0,00833)} = 2,574$ olmak üzere, bu verilere göre her bir değişkenin ortalamasına ilişkin “Eş. 2.36”deki Bonferroni eşanlı güven aralıklarının alt ve üst sınırları,

$$4,8060 \leq \mu_1 \leq 5,6345$$

$$2,1152 \leq \mu_2 \leq 2,8868$$

$$0,4410 \leq \mu_3 \leq 1,5401$$

olarak bulunur.

İkinci değişkene ilişkin güven aralığı, $\mu_2 = 3$ olan yığın ortalamasını içermemektedir. Buradan denetim-dışı duruma bu değişkenin sebep olduğu yorumu yapılabilir.

x_1 ve x_3 değişkenlerine ilişkin olarak bulunan güven aralıkları ise $\mu_1 = 5$ ve $\mu_3 = 1$ yığın ortalamalarını içerdiklerinden bu değişkenlerin kayma üzerinde etkili olmadıkları yorumu yapılabilir.

Geri kalan denetim-dışı durumların kaynağını saptamak için, her bir değişkene ilişkin olarak hesaplanan Bonferroni eşanlı güven aralıklarının alt ve üst sınırları ile bu sınırların hesaplanmasında kullanılan örnek ortalamaları ve değişkeleri Çizelge 2.3'te bir arada verilmiştir. Söz konusu güven aralığı yığın ortalamasını içeriyorsa “+”, içermiyorsa “-” işareti ile çizelgenin “Sonuç” sütununda belirtilmiştir.

Çizelge 2.3. Denetim-dışı duruma neden olan değişkenlerin Bonferroni eşanlı güven aralıkları ile saptanması

Örnek	i	$\bar{x}_i$	s_{ii}	AGS_i	$\bar{UGS}_i$	Sonuç
8	1	5,2204	0,6470	4,8060	5,6345	+
	2	2,4460	0,7333	2,1152	2,8868	-
	3	0,9901	1,1375	0,4410	1,5401	+
22	1	5,3642	0,6234	4,9577	5,7706	+
	2	3,4156	1,3139	2,8255	4,0057	+
	3	1,3995	1,0059	0,8832	1,9158	+
26	1	4,7383	0,9266	4,2427	5,2338	+
	2	3,4637	0,8601	2,9862	3,9411	+
	3	0,8482	1,2128	0,2813	1,4151	+
40	1	5,2103	1,2061	4,6449	5,7757	+
	2	2,5566	0,4091	2,2273	2,8858	-
	3	1,1518	1,0539	0,6233	1,6803	+
74	1	5,5450	0,7201	5,1078	5,9821	-
	2	2,9812	1,0610	2,4509	3,5114	+
	3	1,1878	2,1155	0,4390	1,9365	+
81	1	5,1094	0,9230	4,6148	5,6039	+
	2	2,7836	0,8674	2,3041	3,2631	+
	3	0,6161	0,7601	0,1673	1,0649	+

Çizelge 2.3 incelendiğinde 8. örnekte olduğu gibi, 40. ve 74. örneklerde de sürecin denetim-dışına çıkmasına neden olan değişkenlerin tespit edilebildiği görülmektedir. Buna göre 40. örneğin denetim-dışına çıkmasına x_2 değişkeni, 74. örneğin denetim-dışına çıkmasına x_1 değişkeni neden olmuştur.

22., 26. ve 81. örneklere ait örnek ortalamaları için oluşturulan güven aralıklarının ise her üç değişkeni de içerdği görülmektedir. Denetim-dışı durumun ortaya çıkmasında bu değişkenlerin bir etkisinin olmadığı, 0,05'lik hata payı içerisinde bunun belirlenemeyen nedenlerden kaynaklanabileceği yorumu yapılabilir.

Sonuç olarak bu 100 gözlemlilik sanal deney için $\alpha = 0,05$ olmak üzere, 100 örnekte beş tanesinin denetim-dışına çıkması beklenen bir durumdur. Nitekim süreç altı örnekte denetim-dışına çıkmış ve bunlardan üç tanesi Bonferroni eşanlı güven aralıkları ile saptanmıştır.

2.4. Süreç Nitelik Denetim Yönteminin Başarı Ölçütü

Hotelling T^2 istatistiğine dayalı süreç nitelik denetim yöntemi ardışık bir denence sınaması olduğuna göre, yöntemin başarısı diğer denence sınamalarının başarı değerlendirilmesinde olduğu gibi, örneğin denence sınamasında kabul edilen I.tür hata olasılığı α ile, gerçekleşen I. tür hata olasılığı $\hat{\alpha}$ değeri karşılaştırılarak yapılabilir. Ancak yöntemin başarısını, bu sınamanın ardışık olma özelliğini de yansıtan *Ortalama Deneme Uzunluğu (ODU)* kavramı cinsinden ölçmek daha doğru olur.

ODU, süreç gerçekte denetim içinde yani “Eş. 2.1”deki D_0 denencesi doğru iken, sürecin denetim-içi olduğu yolunda doğru bir kararla sonuçlanan ardışık deneme sayısının, ya da süreç gerçekte denetim dışında yani “Eş. 2.1”deki D_0 denencesi yanlış iken, sürecin denetim-dışı olduğu yolunda doğru bir kararla sonuçlanan ardışık deneme sayısının beklenen değeridir. Bu iki durumu ayırt etmek için, *ODU*, denetim-içi ve denetim-dışı olmak üzere iki biçimde tanımlanabilir.

Denetim-içi ortalama deneme uzunluğu, U , süreçte bir kayma olmadığı halde bir kayma olduğu yolunda yanlış bir kararla karşılaşıncaya kadar olan örnek sayısı; α , süreç ortalamasında bir kayma yokken denetim-dışı durumu saptama olasılığı,

yani I. tür hata olasılığı; U . örnekte kayma durumu saptama olasılığı $P(U) = (1-\alpha)^{u-1}\alpha$ ve $k = 1-\alpha$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 ODU_{D_0} &= \langle U \rangle = \sum_{u=1}^{\infty} u \cdot P(U=u) = \sum_{u=1}^{\infty} u \cdot [(1-\alpha)^{u-1}\alpha] \\
 &= \alpha \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\partial k^u}{\partial k} = \alpha \frac{\partial}{\partial k} \sum_{u=1}^{\infty} k^u = \alpha \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{k}{1-k} \right) \\
 &= \alpha \frac{1}{(1-k)^2} \\
 &= \frac{1}{\alpha}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

olduğu görülebilir.

Benzer biçimde, denetim-dışı ortalama deneme uzunluğunun, U' , süreç parametresindeki bir kayma saptanuncaya kadarki örneklerin sayısı; β , süreç ortalamasında bir kayma varken denetim-dışı durumun saptanamama olasılığı, yani II. tür hata olasılığı; kaymayı U' . örnekte yakalama olasılığı $P(U') = \beta^{u'-1}(1-\beta)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 ODU_{D_1} &= \langle U' \rangle = \sum_{u'=1}^{\infty} u' \cdot P(u') = \sum_{u'=1}^{\infty} u' \cdot [\beta^{u'-1}(1-\beta)] \\
 &= (1-\beta) \sum_{u'=1}^{\infty} \frac{\partial \beta^{u'}}{\partial \beta} = (1-\beta) \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{u'=1}^{\infty} \beta^{u'} \\
 &= (1-\beta) \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\beta}{1-\beta} \right) = (1-\beta) \frac{1}{(1-\beta)^2} \\
 &= \frac{1}{1-\beta}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

olduğu gösterilebilir.

Bu tanımlara göre, sürecin denetim-içi olduğu durumda, süreçte meydana gelecek bir kaymayı yakalamak için gerekli olan ortalama örnek sayısını veren denetim-içi ODU_{D_0} yüksek değerli olmalıdır. Aynı şekilde sürecin denetim-dışı olduğu varsayımı altında, denetim-dışı duruma karşılık gelen kaymayı yakalamak için gerekli ortalama örnek sayısını veren denetim-dışı ODU_{D_1} ise düşük değerli olmalıdır.



3. MONTE CARLO SANAL DENEY

Bir önceki bölümde tanımlanan, süreç nitelik denetim yönteminin başarı ölçütleri, “Eş. 2.1”deki D_0 denencenin doğru ya da yanlış olduğu yolundaki kesin bir bilgiye dayalı olarak Monte Carlo sanal bir deney ile tahmin edilebilir. Bu bölümde, ilk olarak, süreç ortalamasındaki bir kaymayı ve bu kaymaya neden olan değişkeni saptamaya yönelik Hotelling T^2 ve Bonferroni eşanlı güven aralıkları yöntemlerinin başarısını değerlendirme amacı ile değişkenlerin ilişkili ve ilişkisiz olduğu durumlar için düzenlenen sanal deneylerin tasarımı ve matematiksel modelleri verilmiştir. Daha sonra da, gerçekleştirilen Monte Carlo sanal deney sonuçları sunulmuştur.

3.1. Monte Carlo Sanal Deneyin Tasarımı

Süreç nitelik denetim yöntemi Hotelling T^2 çizgesinin başarı ölçütü olarak Bölüm 2.4’te açıklanan ortalama deneme uzunluğundan yararlanılmıştır.

Eğer süreç gerçekten denetim-içi ise, sürecin denetim-içi olduğu durumda gerçekleştirilecek çok sayıdaki denemeye göre hesaplanabilecek deneysel denetim-içi ODU_{D_0} değeri, “Eş. 2.38”de tanımlanan kuramsal ODU_{D_0} ile ve benzer biçimde, süreç gerçekten denetim-dışı ise, sürecin denetim-dışı olduğu durumda gerçekleştirilecek çok sayıdaki denemeye göre hesaplanabilecek deneysel denetim-dışı ODU_{D_1} değeri, “Eş. 2.39”da tanımlanan kuramsal ODU_{D_1} ile bağdaşmalıdır.

Deneysel denetim-içi ODU_{D_0} ve deneysel denetim-dışı ODU_{D_1} değerleri, “Eş. 2.38” ve “Eş. 2.39”da tanımları verilen kuramsal değerlerin birer Monte Carlo tahminidir.

T_i^2 , i .nci örnek için hesaplanan Hotelling T^2 istatistiği ve T_α^2 , I. tür hata olasılığı α için üst denetim sınırı olmak üzere, kuramsal denetim-içi ODU_{D_0} değerinin Monte Carlo bir tahmini olan deneysel denetim-içi $ODU_{D_0}^*$,

$$\begin{aligned}
a_i &= \begin{cases} 0, & T_i^2 < T_\alpha^2 \\ 1, & T_i^2 \geq T_\alpha^2 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, 1000 \\
J &= \sum_{i=1}^{1000} a_i \\
b_i &= \begin{cases} 1, & T_i^2 < T_\alpha^2 \\ 0, & T_i^2 \geq T_\alpha^2 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, 1000 \\
u_j &= \sum_{i=u_{j-1}+k}^{b_i=0} b_i, \quad k = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, J \\
ODU_{D_0} &= \frac{\sum_{j=1}^J u_j}{J}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

ve kuramsal denetim-dışı ODU_{D_1} değerinin Monte Carlo bir tahmini olan deneysel denetim-dışı ODU_{D_1} da,

$$\begin{aligned}
a_i &= \begin{cases} 1, & T_i^2 < T_\alpha^2 \\ 0, & T_i^2 \geq T_\alpha^2 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, 1000 \\
J &= \sum_{i=1}^{1000} a_i \\
b_i &= \begin{cases} 0, & T_i^2 < T_\alpha^2 \\ 1, & T_i^2 \geq T_\alpha^2 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, 1000 \\
u_j &= \sum_{i=u_{j-1}+k}^{b_i=0} b_i, \quad k = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, J \\
ODU_{D_1} &= \frac{\sum_{j=1}^J u_j}{J}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

biçiminde hesaplanabilir.

“Eş. 3.1” ve “Eş. 3.2”deki i ’nci örneğe ilişkin T_i^2 değeri “Eş. 2.13”e göre,

$$T_i^2 = n(\bar{\mathbf{x}}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \mathbf{S}_i^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \tag{3.3}$$

biçiminde tanımlanabilir. “Eş. 2.1”deki yokluk denencesinin doğru olduğu varsayımı altında hesaplanacak “Eş. 3.3”teki μ_0 , genelleme açısından bir sakınca doğurmayacağı için sanal deneyin her konumu ve her denemesinde,

$$\mu_0 = [0 \ 0 \ . \ . \ 0]' \quad [3.4]$$

olarak alınması ile hesaplama kolaylığı sağlanır. Buna göre sanal deneyin matematiksel modelinde “Eş. 3.3” yerine,

$$T_i^2 = n\bar{\mathbf{x}}_i' \mathbf{S}_i^{-1} \bar{\mathbf{x}}_i \quad [3.5]$$

alınabilir.

“Eş. 3.1” ve “Eş. 3.2”deki T_α^2 değeri de, “Eş. 2.15”e göre

$$T_\alpha^2 = \frac{p(n-1)}{n-p} F_{\alpha; p, n-p} \quad [3.6]$$

olarak hesaplanır.

“Eş. 3.5” ve “Eş. 3.6”dan sanal deneyin tasarım boyutları olarak,

- I.tür hata olasılığı α ,
- örnek çapı n ,
- değişken sayısı ya da boyut sayısı p

ayrıt edilebilir.

Sanal deney sonuçlarının genellenmesinde, farklı I. tür hata olasılık değerlerinin bir rolü olmayacağı için, sanal deneyin tümü için I. tür hata olasılığı $\alpha=0,05$ olarak alınmıştır.

Dolayısı ile, denetim içi ODU_{D_0} 'nun Monte Carlo tahmini için tasarlanacak sanal deneyin tasarım uzayının boyutları olarak örnek çapı n ve değişken sayısı p yeterli olacaktır. Örnek çapı n için 10, 20, 30, 40 ve 50 değerlerinin; değişken sayısı p için de 2, 4 ve 6 değerlerinin genelleme açısından yeterli bilgiyi üreteceği öngörülerek, ODU_{D_0} 'nun Monte Carlo tahmin değerlerini elde etmek üzere gerçekleştirilecek sanal deneyin tasarım noktalarının sayısı 15 olarak belirlenmiştir. Denetim-içi ODU_{D_0} 'nun Monte Carlo tahmin değerlerini verecek sanal deneyin matematiksel modeli, “Eş. 3.5”teki $\bar{x}$ ve S girdilerinin tanımlanması ile tamamlanmış olur.

Denetim-içi durum, “Eş. 2.1”deki yokluk denencesinin doğru olduğu durum olduğuna göre, “Eş. 3.5”teki örnek ortalama yöneyi ve değişke-bideğişke dizeyi, örnek çapı n ve değişken sayısı p olmak üzere, beklenen değeri μ_0 ve değişke-bideğişke dizeyi Σ olan p -boyutlu normal bir yığından rassal örnekleme ile elde edilecek bir veri dizeyinden bulunmuştur.

Değişkenlerin ilişkisiz olduğu deneylerde örnek verilerinin rassal seçileceği yığın çok boyutlu standart normal olarak belirlenmiştir. Değişkenlerin ilişkili olduğu durum için ise,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,12 & 1 & 0,24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,24 & 1 & 0,36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,36 & 1 & 0,48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,48 & 1 & 0,60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,60 & 1 \end{bmatrix}$$

değişke-bideğişke dizeyine sahip çok boyutlu normal dağılımdan örnekleme yapılmıştır.

Değişke-bideğişke dizeyinden de anlaşılacağı üzere tüm değişkenler birbiriyle ilişki içinde değildir. Birinci değişken, ikinci değişkenle; ikinci değişken, üçüncü

değişkenle; üçüncü değişken, dördüncü değişkenle; dördüncü değişken, beşinci değişkenle ve beşinci değişken de altıncı değişkenle ilişki içindedir.

Bu açıklamalar ışığında, ODU_{D_0} 'nun Monte Carlo tahmin değerlerini elde etmek üzere tasarlanan sanal deneyin matematiksel modeli “Eş. 3.7”deki gibi kurulabilir.

$$n = 10, 20, 30, 40, 50; \quad p = 2, 4, 6$$

$$\mu_{0k} = 0; \quad \sigma_{kk}^2 = 1, \quad k = 1, \dots, p$$

$$F = [F_{n-p, p; \alpha}]_{p \times p}$$

$$T_{\alpha}^2 = \frac{p(n-1)}{n-p} F_{n-p, p; \alpha}$$

$$X_{n \times p} \sim N(\theta, \Sigma)$$

$$\bar{x} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i,k} : k = 1, 2, \dots, p \right]$$

$$S = \left[s_{kl} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{kj} - \bar{x}_k)(x_{lj} - \bar{x}_l) \right]$$

$$T_i^2 = n \bar{x} S^{-1} \bar{x}'$$

$$a_i = \begin{cases} 0, & T_i^2 < T_{\alpha}^2 \\ 1, & T_i^2 \geq T_{\alpha}^2 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, 1000$$

$$J = \sum_{i=1}^{1000} a_i$$

$$b_i = \begin{cases} 1, & T_i^2 < T_{\alpha}^2 \\ 0, & T_i^2 \geq T_{\alpha}^2 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, 1000$$

$$u_j = \sum_{i=u_{j-1}+k}^{b_i=0} b_i, \quad k = 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, J$$

$$ODU_{D_0} = \frac{\sum_{j=1}^J u_j}{J}$$

[3.7]

İlişkisiz değişkenler için sürecin denetim-içi olduğu durumda, sanal deneyin tasarım noktalarının her birindeki deneysel ODU_{D_0} değerlerinin hesaplanmasında

yararlanmak üzere “Eş. 3.7”deki algoritmaya göre MatLab dilinde kodlanan program EK-2’de verilmiştir (24).

Aynı şekilde ilişkili değişkenler için sürecin denetim-içi olduğu durumda, sanal deneyin tasarım noktalarının her birindeki deneysel ODU_{D_0} değerlerinin hesaplanmasında kullanılan MatLab dilinde kodlanan program ise EK-3’de verilmiştir.

Denetim-dışı deneysel ODU_{D_1} ya da kuramsal denetim-dışı ODU_{D_1} değerlerinin Monte Carlo tahminlerini elde etmek için tasarlanacak sanal deneyin tasarım noktaları da denetim-içi ODU_{D_0} ’nun Monte Carlo tahmin değerlerini elde etmek üzere gerçekleştirilecek sanal deneyinkileri içermekle birlikte, bu kez denetim-dışı durumun da belirlenmesi gerekecektir. Denetim-dışı durum, süreç çok boyutlu beklenen değer yöneyinin herhangi bir bireyinde, ya da değişkeninin beklenen değerindeki bir kaymadan oluşabilir. Bu kayma, “Eş. 2.1”deki yokluk ve karşıt denencelerindeki süreç beklenen değeri arasındaki

$$z = |\mu_0 - \mu_1| \quad [3.8]$$

farkı ile ifade edilebilir. Sanal deney tasarımında, “Eş. 3.4”deki μ_0 kabul edilmek üzere, “Eş. 3.8”deki kayma doğrudan,

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_p \end{bmatrix} = \mu_1 \quad [3.9]$$

olarak da tanımlanabilir.

Öte yandan “Eş. 2.1”deki denencenin Hotelling T^2 sınamalarındaki örnek verilerinin çok boyutlu normal dağılımdan rassal olarak seçildiği varsayımına göre, “Eş. 3.9”daki kayma yöneyinin her hangi bir bireyinin 3’ten büyük olması apaçık bir kayma olacağından, z yöneyinin yalnızca bir bireyinin 0.5,1.0,1.5,2.0,2.5, ve 3.0 değerlerini alması, denetim-dışı senaryoyu üretmek için yeterli olacaktır.

Buna göre, denetim-dışı ODU Monte Carlo tahminlerini üretecek sanal deneyin tasarım boyutlarına, $z=6$ değer içeren kayma boyutu eklendiğinde, sanal deney tasarım noktalarının sayısı $n \times p \times z = 5 \times 3 \times 6 = 90$ olur.

Denetim-dışı durum, “Eş. 2.1”deki yokluk denencesinin doğru olmadığı durum olduğuna göre, “Eş. 3.3” ya da “Eş. 3.5”teki örnek ortalama yöneyi ve değişke-bideğişke dizeyi, örnek çapı n ve değişken sayısı p olmak üzere, beklenen değeri $\mu_1 = [0 \ 0 \dots\dots z]$ ve değişke-bideğişke dizeyi Σ olan çok boyutlu normal bir yığından rassal örnekleme ile elde edilecek bir veri dizeyinden bulunabilir.

Bu açıklamaların ışığında, ODU_{D_1} ’nin Monte Carlo tahminlerini elde etmek üzere tasarlanan sanal deneyin matematiksel modeli “Eş. 3.10”daki gibi kurulabilir.

$$n = 10, 20, 30, 40, 50; p = 2, 4, 6$$

$$z = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$$

$$F = [F_{n-p, p; \alpha}]$$

$$\mu_{0k} = 0; \sigma_{kk}^2 = 1, k = 1, \dots, p$$

$$\mu_1 = [0 \ 0 \dots z] = \left[\mu_k = \begin{cases} 0, & k < p \\ z, & k = p \end{cases} \right]$$

$$T_\alpha^2 = \frac{p(n-1)}{n-p} F_{n-p, p; \alpha}$$

$$X_{n \times p} \sim N(\mu_1, \Sigma)$$

$$\bar{x} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i,k} : k = 1, 2, \dots, p \right]$$

$$S = \left[s_{kl} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{kj} - \bar{x}_k)(x_{lj} - \bar{x}_l) \right]$$

$$T_i^2 = n(\bar{x} - \mu_0)S^{-1}(\bar{x} - \mu_0)'$$

$$a_i = \begin{cases} 0, & T_i^2 < T_\alpha^2 \\ 1, & T_i^2 \geq T_\alpha^2 \end{cases}, i = 1, 2, \dots, 1000$$

$$J = \sum_{i=1}^{1000} a_i$$

$$b_i = \begin{cases} 1, & T_i^2 < T_\alpha^2 \\ 0, & T_i^2 \geq T_\alpha^2 \end{cases}, i = 1, 2, \dots, 1000$$

$$u_j = \sum_{i=u_{j-1}+k}^{b_i=0} b_i, \quad k = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, J$$

$$ODU_{D_1} = \frac{\sum_{j=1}^J u_j}{J}$$

[3.10]

İlişkısız değişkenler için surecin denetim-dışı olduğu durumda, sanal deneyin 90 tasarım noktasının her birindeki deneysel ODU_{D_1} değerlerinin hesaplanmasında yararlanmak üzere “Eř. 3.10”daki algoritmaya göre MatLab dilinde kodlanan program EK-4’de verilmiştir.

Aynı şekilde ilişkili değişkenler için sürecin denetim-dışı olduğu durumda, sanal deneyin 90 tasarım noktasının her birindeki deneysel ODU_{D_1} değerlerinin hesaplanmasında yararlanılan MatLab dilinde kodlanan program ise EK-5’de verilmiştir.

Bonferroni eşanlı güven aralığı yöntemi ile sürecin denetim-dışına düşmesinden sorumlu değişkenlerin saptanmasındaki başarının ölçülmesi için yalnızca denetim-dışı durumdaki senaryo kullanılmıştır. Süreç denetim-dışı iken, ya da “Eş. 2.1”deki yokluk denencesi yanlışken, sürecin denetim-içi olması durumuna göre $1000(1-\beta)$ gibi çok daha fazla sayıda örnek Bonferroni yöntemi için ortam oluşturur. Sanal ortamda, süreç ortalamasındaki kaymanın $k \leq p$ olmak üzere k ’ıncı değişkenden kaynaklandığı biliniyorsa, süreç ortalamasındaki kayma T^2 istatistiği ile saptandıktan sonra, Bonferroni yönteminin başarı oranı δ ,

$$\begin{aligned}
 a_i &= \begin{cases} 1, & T_i^2 > T_\alpha^2 \\ 0, & T_i^2 \leq T_\alpha^2 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, 1000 \\
 J &= \sum_{i=1}^{1000} a_i \\
 b_j &= \begin{cases} 0, & \bar{x}_k - t_{n-1, \frac{\alpha}{2p}} \sqrt{\frac{s_{kk}}{n}} \leq \mu_k \leq \bar{x}_k + t_{n-1, \frac{\alpha}{2p}} \sqrt{\frac{s_{kk}}{n}} \\ 1, & \{\bar{x}_k - t_{n-1, \frac{\alpha}{2p}} \sqrt{\frac{s_{kk}}{n}} > \mu_k\} \vee \{\mu_k > \bar{x}_k + t_{n-1, \frac{\alpha}{2p}} \sqrt{\frac{s_{kk}}{n}}\} \end{cases}, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad [3.11] \\
 \delta &= \frac{\sum_{j=1}^J b_j}{J}
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Bonferroni eşanlı güven aralıklarının başarı oranını tahmin etmek üzere tasarlanmış sanal deneyin matematiksel modeli, “Eş. 3.10”daki modele “Eş. 3.11”deki $t_{n-1, \frac{\alpha}{2p}}$

temel girdileri ile “Eş. 3.11”deki güven aralığı yoklamasının eklenmesi ile “Eş. 3.12”deki gibi oluşturulmuştur.

$$n = 10, 20, 30, 40, 50; p = 2, 4, 6$$

$$z = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$$

$$F = [F_{n-p, p; \alpha}]_{n \times p}$$

$$T = \left[t_{n-1, \frac{\alpha}{2p}} \right]_{n \times p}$$

$$\mu_{0k} = 0; \sigma_{kk}^2 = 1, k = 1, \dots, p$$

$$\mu_I = [0 \quad 0 \dots \dots z] = \left[\mu_k = \begin{cases} 0, & k < p \\ z, & k = p \end{cases} \right]$$

$$T_\alpha^2 = \frac{p(n-1)}{n-p} F_{n-p, p; \alpha}$$

$$X_{n \times p} \sim N(\mu_I, \Sigma)$$

$$\bar{x} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i,k} : k = 1, 2, \dots, p \right]$$

$$S = \left[s_{kl} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{kj} - \bar{x}_k)(x_{lj} - \bar{x}_l) \right]$$

$$T_i^2 = n(\bar{x} - \mu_0) S^{-1} (\bar{x} - \mu_0)'$$

$$a_i = \begin{cases} 0, & T_i^2 < T_\alpha^2 \\ 1, & T_i^2 \geq T_\alpha^2 \end{cases}, i = 1, 2, \dots, 1000$$

$$J = \sum_{i=1}^{1000} a_i$$

$$c_i = t_{n-1, \frac{\alpha}{2p}} \sqrt{\frac{s_{kk}}{n}}$$

$$b_j = \begin{cases} 1, & \bar{x}_k - c_i < 0 \wedge \bar{x}_k + c_i > 0 \\ 0, & \sim \{ \bar{x}_k - c_i < 0 \wedge \bar{x}_k + c_i > 0 \} \end{cases}, j = 1, 2, \dots, J$$

$$u_j = \sum_{i=1}^J b_i, j = 1, 2, \dots, J$$

$$\delta_{n,k,z} = \frac{\sum_{j=1}^J u_j}{J}$$

[3.12]

İlişkisiz değişkenler için sürecin denetim-dışı olduğu durumda, sanal deneyin 90 tasarım noktasının her birindeki deneysel Bonferroni eşanlı güven aralığı sınımasının, süreç ortalamasındaki kaymaya neden olan 2. değişkeni kaymanın kaynağı olarak belirlemedeki başarı oranlarının hesaplanmasında yararlanmak üzere “Eş. 3.12”deki algoritmaya göre MatLab dilinde kodlanan program EK-6’de verilmiştir.

Son tasarım ise ilişkili değişkenlerden oluşan denetim-dışı süreci içermektedir. Burada da bir öncekinden farklı olarak süreç ortalamasındaki kaymaya neden olan 2., 4. ve 6. değişkeni kaymanın kaynağı olarak belirlemedeki başarı oranları hesaplanmıştır. Bu hesaplama ile ilgili “Eş. 3.12”deki algoritmaya göre MatLab dilinde kodlanan program EK-5’de verilmiştir.

3.2 Monte Carlo Sanal Deney Sonuçları

EK-2’deki ve EK-3’teki program yardımı ile “Eş. 3.7”de matematiksel modeli verilen sanal deneyin 1000 kere yinelenmesi sonucu, 15 tasarım noktasının her birinde değişkenlerin ilişkili olup olmama durumlarına göre elde edilen denetim-içi ODU_{D_0} değerlerine ilişkin Monte Carlo sanal deney sonuçları sırasıyla Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2’de verilmiştir.

Çizelge 3.1. Örnek çapı (n) ve değişken sayısı (p)’ye göre değişkenlerin ilişkisiz olduğu durum için denetim-içi ODU_{D_0} değerleri

n	p		
	2	4	6
10	18.8400	20.4889	17.6538
20	18.4706	16.4821	15.6500
30	19.6042	19.0612	20.7907
40	23.9143	14.1406	19.2449
50	23.0976	16.6429	15.0328

Çizelge 3.2. Örnek çapı (n) ve değişken sayısı (p)'ye göre değişkenlerin ilişkili olduğu durum için denetim-içi ODU_{D_0} değerleri

n	p		
	2	4	6
10	18,5686	17,3333	21,5000
20	17,9804	14,7903	23,1500
30	17,4074	19,8261	19,1837
40	20,0213	23,9474	16,0345
50	16,8214	19,8125	19,7917

Gerçekte süreç denetim-içi iken elde edilen ODU değerlerinin olabildiğince yüksek olması beklenir. Söz konusu sanal deneyde de 1.tür hata olasılığı $\alpha=0.05$ alındığına göre, kuramsal ya da beklenen ODU uzunluğu, “Eş. 2.40”e göre

$$ODU_{D_0} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.05} = 20$$

olması beklenir.

Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2 incelendiğinde sanal deney bulguları, her bir değişken sayısı ve örnek çapı için aşağı yukarı beklenen ODU değerine yakın çıkmıştır.

EK-4 ve EK-5’de verilen program yardımı ile “Eş. 3.10”da matematiksel modeli verilen sanal deney 1000 kere yinelenmiştir. Bunun sonucunda 90 tasarım noktasının her birinde değişkenlerin ilişkili olup olmama durumlarına göre elde edilen denetim-dışı ODU_{D_1} değerlerine ilişkin Monte Carlo tahmin değerleri sırasıyla Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4’de verilmiştir.

Çizelge 3.3. Örnek çapı (n), değişken sayısı (p) ve süreç ortalamasındaki kayma için değişkenlerin ilişkisiz olduğu durumda denetim-dışı ODU_{D_1} değerleri

		<i>Kayma Derecesi</i>					
n	p	0.5σ	1.0σ	1.5σ	2.0σ	2.5σ	3.0σ
10	2	5,5444	1,5576	1,0695	1,0050	1	1
	4	7,3657	2,4545	1,3409	1,0483	1,0111	1
	6	10,9545	4,8867	2,3072	1,4520	1,1765	1,0560
20	2	2,2178	1,0331	1	1	1	1
	4	3,4014	1,1390	1,0040	1	1	1
	6	4,4798	1,2987	1,0121	1	1	1
30	2	1,6207	1,0030	1	1	1	1
	4	2,0731	1,0081	1	1	1	1
	6	2,8462	1,0309	1	1	1	1
40	2	1,3127	1	1	1	1	1
	4	1,5221	1,0010	1	1	1	1
	6	1,7314	1,0040	1	1	1	1
50	2	1,1521	1	1	1	1	1
	4	1,2788	1	1	1	1	1
	6	1,4556	1	1	1	1	1

Çizelge 3.4. Örnek çapı (n), değişken sayısı (p) ve süreç ortalamasındaki kayma için değişkenlerin ilişkili olduğu durumda denetim-dışı ODU_{D_1} değerleri

		<i>Kayma Derecesi</i>					
n	p	0.5σ	1.0σ	1.5σ	2.0σ	2.5σ	3.0σ
10	2	5,8935	1,5205	1,0583	1,0010	1	1
	4	7,4403	2,6152	1,2940	1,0406	1,0050	1
	6	10,3229	4,7799	2,2705	1,3671	1,1404	1,0352
20	2	2,1652	1,0450	1	1	1	1
	4	2,9880	1,0978	1,0050	1	1	1
	6	4,1632	1,1825	1,0081	1	1	1
30	2	1,5512	1,0000	1	1	1	1
	4	2,0924	1,0060	1	1	1	1
	6	2,3786	1,0257	1	1	1	1
40	2	1,2978	1	1	1	1	1
	4	1,4888	1	1	1	1	1
	6	1,6442	1,0020	1	1	1	1
50	2	1,1391	1	1	1	1	1
	4	1,2646	1	1	1	1	1
	6	1,4211	1,0010	1	1	1	1

Süreç denetim-dışı iken yani bir kayma söz konusu olduğunda bu durumun hemen yakalanması istenir. Bu da denetim-dışı ODU_{D_1} 'nın bire yakın değerler almasına karşılık gelir. Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4 incelendiğinde de istenilen durumun ortaya çıktığı rahatlıkla söylenebilir.

Değişkenlerin ilişkili olup olmamalarının denetim-dışı ODU_{D_1} üzerine etkisini görmek adına düzenlenen sanal deney sonucu elde edilen Monte Carlo tahmin değerlerine göre Hotelling T^2 tekniğinin her iki durumda da başarılı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Öyle ki örnek çapının 20'den büyük ve kayma derecesinin 1.5σ ve daha büyük olduğu durumlarda değişkenlerin ilişkili ve ilişkisiz olduğu durumlar arasında denetim-dışı ODU_{D_1} bakımından çok fazla fark görülememiştir. Bu nedenle yorumları ortak olarak ele alınmıştır

Kayma dereceleri arttıkça sürecin denetim-dışı durumu tespit etmesi kolaylaşacağından, ODU_{D_1} değeri, genel olarak kayma değeri attıkça küçülmüştür. Örneğin, örnek çapı 10, değişken sayısı 2 ve kayma derecesi 0.5σ iken denetim-dışı ODU_{D_1} değeri 5.5444 olarak hesaplanmışken, örnek çapı ve değişken sayısı aynı ancak kayma derecesi 2.5σ ve daha büyük olduğunda denetim-dışı ODU_{D_1} değeri 1 olarak hesaplanmıştır (Bkz. Çizelge 3.3).

Aynı şekilde kayma derecesi ile birlikte örnek çapının da artması durumunda 1.5σ ve daha büyük kaymalara gerek olmaksızın denetim-dışı durumun kolaylıkla yakalandığı görülmüştür. Örneğin, örnek çapı 10, değişken sayısı 6 ve kayma derecesi 1.0σ iken denetim-dışı ODU_{D_1} değeri 4.8867 olarak hesaplanmışken değişken sayısı ve kayma derecesi aynı ancak örnek çapı 50 iken denetim-dışı ODU_{D_1} değeri 1 olarak hesaplanmıştır (Bkz. Çizelge 3.3). Zaten genel olarak büyük çaplı örneklerin süreçteki küçük değişimleri yakalamayı kolaylaştırdığı bilinmektedir (25).

Her iki çizelgede değişken sayısı bakımından incelendiğinde ise, değişken sayısı arttıkça denetim-dışı durumun yakalanmasının geciktiği gözlemlenmiştir. Örneğin, örnek çapı 10, kayma derecesi 0.5σ ve değişken sayısı 2 iken denetim-dışı ODU_{D_1} değeri 5,8935 olarak hesaplanmış; örnek çapı ve kayma derecesi aynı olmak üzere değişken sayısı artırılıp 6 olduğunda denetim-dışı ODU_{D_1} değerinin de 10,3229 olarak hesaplandığı gözlemlenmiştir. Hem kayma derecesinin hem de örnek çapının arttığı durumlarda ise değişken sayısı önemini yitirmektedir. Örneğin, örnek çapının 30, kayma derecesinin de 1.5σ olduğu durumda değişken sayısı 2 olarak alındığında da, 6 olarak alındığında da denetim-dışı ODU_{D_1} değeri 1 olarak gözlemlenmiştir (Bkz. Çizelge 3.4).

EK-5 ve EK-6'daki program yardımı ile "Eş. 3.12"de matematiksel modeli verilen sanal deney, değişkenlerin ilişkili olup olmadıkları durumları da dikkate alacak şekilde 1000 kere tekrarlanmıştır. Bunun sonucunda, 90 tasarım noktasının her birindeki deneysel Bonferroni eşanlı güven aralığı sınamasının, süreç ortalamasındaki kaymaya neden olan değişkeni kaymanın kaynağı olarak belirlemedeki başarı oranları hesaplanmıştır. Değişkenlerin ilişkisiz oldukları varsayımı altında hesaplanan Çizelge 3.5'de kaymanın kaynağı olarak sadece 2. değişken alınmışken, değişkenlerin ilişkili oldukları varsayımı altında hesaplanan Çizelge 3.6'da kaymanın kaynağı olarak her seferinde bir tanesi alınmak üzere 2., 4. ve 6. değişkenler ele alınmıştır. Bu işlem EK-5'de verilen MatLab dilinde kodlanan program parçasında bir döngüyle gerçekleştirilmiştir.

Hesaplamalar sonucu elde edilen Bonferroni yönteminin başarı oranlarını ifade eden 8 değerleri, Çizelge 3.5 ve Çizelge 3.6'da verildiği gibidir:

Çizelge 3.5. Örnek çapı (n), değişken sayısı (p) ve süreç ortalamasındaki kaymaya göre Bonferroni yönteminin başarı oranları, δ

		<i>Kayma Derecesi</i>					
n	p	0.5σ	1.0σ	1.5σ	2.0σ	2.5σ	3.0σ
10	2	0.4444	0.8660	0.9893	1	1	1
	4	0.2537	0.7543	0.9812	1	1	1
	6	0.1250	0.6798	0.9792	1	1	1
20	2	0.8400	0.9938	1	1	1	1
	4	0.6565	0.9897	1	1	1	1
	6	0.6143	0.9818	1	1	1	1
30	2	0.9141	1	1	1	1	1
	4	0.8246	1	1	1	1	1
	6	0.7692	0.9990	1	1	1	1
40	2	0.9540	1	1	1	1	1
	4	0.8980	1	1	1	1	1
	6	0.8856	1	1	1	1	1
50	2	0.9839	1	1	1	1	1
	4	0.9540	1	1	1	1	1
	6	0.9345	1	1	1	1	1

Çizelge 3.6. Örnek çapı (n), değişken sayısı (p) ve değişkenlerin ilişkili olduğu durum için süreç ortalamasındaki kaymaya göre Bonferroni yönteminin başarı oranı, δ

		<i>Kayma Derecesi</i>					
n	p	$0,5\sigma$	$1,0\sigma$	$1,5\sigma$	$2,0\sigma$	$2,5\sigma$	$3,0\sigma$
10	2	0,4740	0,8498	0,9927	1	1	1
	4	0,1901	0,7013	0,9790	0,9990	1	1
	6	0,0859	0,5724	0,9314	1	1	1
20	2	0,8085	0,9949	1	1	1	1
	4	0,6224	0,9755	1	1	1	1
	6	0,4240	0,9447	1	1	1	1
30	2	0,8854	1	1	1	1	1
	4	0,7985	0,9990	1	1	1	1
	6	0,5862	0,9960	1	1	1	1
40	2	0,9565	1	1	1	1	1
	4	0,8845	1	1	1	1	1
	6	0,7156	0,9990	1	1	1	1
50	2	0,9864	1	1	1	1	1
	4	0,9151	1	1	1	1	1
	6	0,8008	1	1	1	1	1

Çizelge 3.5 ve Çizelge 3.6 incelendiğinde değişkenlerin ilişkili ve ilişkisiz olduğu her iki durum içinde 1.5σ ve daha büyük kaymalarda başarı oranlarının 1 çıktığı görülmektedir. Bu da kullanılan Bonferroni yönteminin 1.5σ ve daha büyük kaymalarda ne kadar etkin olduğunun göstergesidir.

Her iki durum küçük kayma dereceleri için incelendiğinde ise birbirine yakın sonuçların elde edildiği gözlenmiştir. Örneğin, değişkenlerin ilişkisiz olduğu varsayımı altında örnek çapı 10, değişken sayısı 2 ve kayma derecesi 0.5σ iken Bonferroni yönteminin başarılı karar oranı olan δ değeri 0,4444 olarak hesaplanmışken (Bkz. Çizelge 3.5); değişkenlerin ilişkili olduğu durumda aynı örnek çapı, değişken sayısı ve kayma derecesi için bu değer 0,4740 olarak hesaplanmıştır (Bkz. Çizelge 3.6).

Örnek çapı arttıkça, δ değerinin büyüdüğü gözlenmiştir. Örneğin, değişken sayısı 6, kayma derecesi 0.5σ , örnek çapı 10 için δ değeri 0,0859 olarak hesaplanmışken; örnek çapını artırıp 50 olarak aldığımızda δ değeri 0,8008 olarak hesaplanmıştır (Bkz. Çizelge 3.6). Örnek çapı arttıkça δ değerinin daha iyileşmesi yani 1'e yaklaşması kuramsal çerçevede beklenen bir durumdur.

Aynı örnek çapı içerisinde p değişken sayısı büyüdükçe başarı oranının azaldığı görülmüştür. Ancak 1.5σ ve daha büyük kaymalarda değişken sayısının kaç olduğunun bir öneminin kalmadığı da kolaylıkla söylenebilmektedir. Çünkü değişken sayısı kaç olursa olsun δ , 1 değerini almıştır (Bkz. Çizelge 3.5 ve Çizelge 3.6)

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bir çok endüstri dalında ürünün niteliğini tanımlayan birbiriyle ilişkili birden çok değişken bulunmaktadır. Böyle değişkenlere sahip süreçleri izlemenin en bilinen yöntemi p değişkenin çok boyutlu dağılımını göz ardı etmek ve her bir değişken için ayrı ayrı denetim çizgeleri oluşturmaktır. Ancak bu yaklaşım, bu çalışmada da değinildiği gibi istenmeyen durumlara neden olmaktadır.

Bu çalışmanın temel amacı, bu gibi problemleri aşmak amacıyla geliştirilen çok boyutlu nitelik denetim yöntemlerinden olan Hotelling T^2 istatistiğinden yararlanarak, farklı örnek çapı, değişken sayısı ve kayma derecelerine göre denetim-dışı olma etkinliğini gözlemlemek, bunun yanı sıra denetim-dışına çıkmasına neden olan değişkenleri tespit etmede Bonferroni eşanlı güven aralıkları yönteminin başarısını ölçmektir.

Bu amaçla ilk olarak, sürecin denetim-içi olduğu varsayımı ve Monte Carlo sanal deney tasarımının matematiksel modeli altında MatLab programlama kodundan yararlanılarak değişkenlerin ilişkili ve ilişkisiz olduğu durumlar için sanal gözlem değerleri elde edilmiştir. Bu verilere dayanarak denetim-içi ODU_{D_0} değerleri hesaplanmıştır. Süreç denetim-içi iken ODU_{D_0} değerlerinin α anlamlılık düzeyine bağlı olarak olabildiğince büyük çıkması beklenmiştir. Elde edilen sonuçlar da kuramsal çerçeve içerisinde beklendiği gibi gerçekleşmiştir.

Bir sonraki aşamada aynı işlemler sürecin denetim-dışı olduğu varsayımı altında yapılmıştır. Burada da denetim-dışı ODU_{D_1} 'ler elde edilmiştir. Kuramsal çerçeve gereği denetim-dışı ODU_{D_1} 'lerin kayma derecesi arttıkça 1'e yaklaşması beklenmiştir. Sonuçta beklenildiği gibi 1.5σ ve daha büyük kaymalar için ODU_{D_1} değerleri 1 ve 1'e çok yakın değerler olarak elde edilmiştir.

En son aşamada da, sürecin denetim-dışı durumu için, Bonferroni eşanlı güven aralıklarının, sürecin denetim dışına çıkmasına neden olan değişkeni yakalama başarısı ölçülmüştür. Denetim-dışı durum ilk olarak, değişkenlerin ilişkisiz olduğu durum için sadece 2. değişkende kayma olduğu varsayımı altında uygulanmıştır. Daha sonra ise değişkenlerin bazılarının birbirleriyle ilişkili olduğu durum için, her defasında tek bir değişken olmak üzere 2., 4. ve 6. değişkenler için uygulanmıştır. İstenirse aynı durum her bir değişkenin birbiriyle ilişkili olduğu çok boyutlu bir süreç için ele alınabilir. Ancak çalışmanın hacmini çok büyüteceği düşüncesiyle bu duruma yer verilmemiştir.

Sonuç olarak, kayma derecesinin ve örnek çapının büyük olduğu durumlarda, denetim-dışı durumu tespit etmede Hotelling T^2 yönteminin yeterli olduğu görüşüne varılmıştır. Aynı zamanda denetim-dışı duruma neden olan değişken ya da değişkenlerin saptanmasında da Bonferroni eşanlı güven aralıkları yöntemi başarılı bir sonuç vermiştir.

KAYNAKLAR

1. Duncan, A. J., "Quality Control Theory and Industrial Statistics", *R. Irwin inc.*, 1-4 (1974).
2. Kurt, M. İ., "İstatistiksel Kalite Kontrol Yöntemleri Ve Bir Uygulama", Yüksek Lisans Tezi, *Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü*, İstanbul, 7-10 (1995).
3. Oktay, E., "Kalite Kontrol Grafikleri", *Şafak Yayınevi*, Erzurum, 6-8 (1998).
4. Oktay, E., Özçomak, S., "Hotelling T^2 Kontrol Grafiğinde Kontrol Dışı Sinyal Veren Örneklerin Mason-Young-Tracy'nin T^2 Ayırıştırma Metoduyla Tespiti Ve Yorumlanması Üzerine Bir Çalışma", *VI. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu*, Ankara, 1-7 (2003).
5. Oğuzlar, A., "Çok Değişkenli İstatistiksel Süreç Kontrolü Ve Bir Uygulama Denemesi", Doktora Tezi, *Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü*, Bursa, 1-2, 43-44 (1998).
6. Hotelling, H. H., "Multivariate Quality Control", *Techniques of Statistical Analysis*, C. Eisenhart, M. W. Hastay and W. A. Wallis, *Mc Graw Hill*, New York, 84-111 (1947).
7. Hotelling, H., "A Generalized T and Measure of Multivariate Dispersion", *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley, 23-41 (1951).
8. Woodall, W. H., Ncube, M. M., "Multivariate CUSUM Quality Control Procedures", *Technometrics*, 27 (3): 285-292 (1985).
9. Healy, J. D., "A Note on Multivariate CUSUM Procedures", *Technometrics*, 29 (4): 409-412 (1987).
10. Crosier, R. B., "Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality Control Schemes", *Technometrics*, 30 (3): 291-303 (1988).
11. Pignatiello, J. J., Runger, G. C., "Comparisons of Multivariate CUSUM Charts", *Journal of Quality Technology*, 22 (3): 173-186 (1990).
12. Lowry, C. A., Woodall, W. H., Champ, C. W., Ridgon, S. E., "A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart", *Technometrics*, 34 (1): 46-53 (1992).
13. Prabhu, S. S., Runger, G. C., "Designing a Multivariate EWMA Control Chart", *Journal of Quality Technology*, 29 (1): 8-15 (1997).

14. Javahari, A., Houshmand, A. A., "Average Run Length Comparison of Multivariate Control Charts", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 69: 125-140 (2001).
15. Alt, F. B., "Multivariate Quality Control", Encyclopedia of Statistical Sciences 6th ed., N.L. Johnson-S. Kotz, *John Wiley*, New York, 110-122 (1985).
16. Chau, M., Montgomery, D. C., "Investigation and Characterization of a Control Scheme for Multivariate Quality Control", *Quality and Reliability Engineering International*, 8: 37-44 (1992).
17. Doğanaksoy, N., Faltin, F. W., and Tucker, W. T., "Identification of Out of Control Quality Characteristics in a Multivariate Manufacturing Environment", *Communication in Statistics: Theory and Methods*, 20 (9): 2775-2790 (1991).
18. Jackson, J. E., "Multivariate Quality Control", *Communication in Statistics: Theory and Methods*, 14 (11): 2657-2688 (1985).
19. Murphy, B. J., "Selection Out of Control Variables with the T^2 Multivariate Quality Control Procedure", *The Statistician*, 36: 571-583 (2001).
20. Özkan, F. Z. "Kalite Kontrolünde Kullanılabilen Çok Değişkenli İstatistik Yöntemlerin Normallikten Sapmadan Etkilenme Bakımından Karşılaştırılmaları" Yayınlanmamış Doktora Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 53-54 (1995).
21. Hawkins, D. M., "Multivariate Quality Control Based on Regression-Adjusted Variables", *Technometrics*, 33 (1): 61-75 (1991).
22. Alpar, R., "Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemlere Giriş-1", *Nobel Yayınları*, Ankara, 123-128 (2003).
23. Johnson, R. A., Wichern, D. W., "Applied Multivariate Statistical Analysis", *Prentice-Hall Inc.*, New Jersey, 179-190 (1982).
24. Çetin, E., "Herkes İçin MatLab 6.5", *Alfa Basım Yayın Dağıtım Ltd.Sti.*, İstanbul, 58-61, 185-212, 713 (2003).
25. Montgomery, D. C., "Introduction to Statistical Quality Control", Second Edition, *John Wiley & Sons*, Singapore, 15-29 (1991).



EKLER

EK-1: Çok Boyutlu Shewhart Nitelik Denetim Çizgesinin Oluşturulması

```

clear all
OrSay=100;
OrCap=25;
DegSay=3;
F=((DegSay*(OrCap-1))/(OrCap-DegSay))*3.05
ort=[5 3 1];
cvar=[1 0.2 0.3;
      0.2 1 0.1;
      0.3 0.1 1];
for i=1:OrSay
    uret=mvnrnd(ort,cvar,OrCap);
    a(i,:)=mean(uret);
    x=mean(uret);
    ycvar=cov(uret);
    s=inv(cov(uret));
    b(i,:)=reshape(ycvar,1,n);
    T(i)=OrCap*(x-ort)*s*(x-ort)';
    if T(i)>F
        i, T(i)
        a(i,:), b(i,:)
        W=1;
    else
        W=0;
    end
    TopW=TopW+W;
end
uret , T, a(i,:), b(i,:), s
plot(T,'-')

```

EK-2: Değişkenlerin İlişkisiz Olduğu Durum İçin Denetim-içi Deneysel ODU_{D_0}
Değerlerinin Hesaplanması

%ODU-D0

clear all

OrSay=1000

F95=[4.46 4.53 6.16 19.37

3.55 3.01 2.85 2.85

3.34 2.74 2.51 2.40

3.25 2.63 2.38 2.25

3.19 2.57 2.31 2.17];

for OrCap=10:10:50

for DegSay=2:2:6

clear a b ort cvar n x ycvar s T F

for satir=1:DegSay

ort(1,satir) = 0;

for sutun=1:DegSay

if satir==sutun

cvar(satir,sutun)=1;

end

end

end

cvar

DegSay,OrCap

F=((DegSay*(OrCap-1))/(OrCap-DegSay))*F95(OrCap/10,DegSay/2)

TW=0;

TDU=0;

DDCS=0;

for i=1:OrSay

uret = mvnrnd(ort,cvar,OrCap);

EK-2: Değişkenlerin İlişkisiz Olduğu Durum İçin Denetim-içi Deneysel ODU_{D_0} Değerlerinin Hesaplanması (Devamı)

```

a(i,:)=mean(uret);
x=mean(uret);
ycvar=cov(uret);
s=inv(cov(uret));
b(i,:)=reshape(ycvar,1,n);
T(i)=OrCap*(x-ort)*s*(x-ort)';
    if T(i)>F
        i;T(i);
        DDSCS=DDSCS+1;
        TDU=TDU+TW;
        TW=0;
    else
        TW=TW+1;
    end
end
DDSCS
TDU
ODU=TDU/DDSCS
%DDCO=DDSCS/OrSay
Ftablo(1,DegSay/2+1)=DegSay;
Ftablo(OrCap/10+1,DegSay/2+1)=F95(OrCap/10,DegSay/2);
Tablo(1,DegSay/2+1)=DegSay
Tablo(OrCap/10+1,DegSay/2+1)=ODU
end
Ftablo(OrCap/10+1,1)=OrCap;
Tablo(OrCap/10+1,1)=OrCap;
end
Tablo

```

EK-3: Değişkenlerin İlişkili Olduğu Durum İçin Denetim-içi Deneysel ODU_{D_0}
Değerlerinin Hesaplanması

```

clear all
OrSay=1000

F95=[4.46 4.53 6.16 19.37
      3.55 3.01 2.85 2.85
      3.34 2.74 2.51 2.40
      3.25 2.63 2.38 2.25
      3.19 2.57 2.31 2.17];

for OrCap=10:10:50
for DegSay=2:2:6
clear a b ort cvar n x ycvar s T F

    for satir=1:DegSay
        ort(1,satir) = 0;

        for sutun=1:DegSay

            if sutun==satir+1
                cvar(satir,sutun)=(sutun-1)*0.12;
            end
            if sutun+1==satir
                cvar(satir,sutun)= cvar(sutun,satir);
            end
            if satir==sutun
                cvar(satir,sutun)=1;
            end
        end
    end
    cvar

    DegSay,OrCap
    F=((DegSay*(OrCap-1))/(OrCap-DegSay))*F95(OrCap/10,DegSay/2)

    TW=0;
    TDU=0;
    DDCS=0;
    for i=1:OrSay
        uret = mvnrnd(ort,cvar,OrCap);
        a(i,:)=mean(uret);
        x=mean(uret);
        ycvar=cov(uret);
        s=inv(cov(uret));
        b(i,:)=reshape(ycvar,1,n);
    end

```

EK-3: Değişkenlerin İlişkili Olduğu Durum İçin Denetim-içi Deneysel ODU_{D_0}
Değerlerinin Hesaplanması (Devamı)

```
T(i)=OrCap*(x-ort)*s*(x-ort)';
if T(i)>F
    i;T(i);
    DDCS=DDCS+1;
    TDU=TDU+TW;
    TW=0;
else
    TW=TW+1;
end
end
```

DDCS

TDU

ODU=TDU/DDCS

%DDCO=DDCS/OrSay

FTablo(1,DegSay/2+1)=DegSay;

FTablo(OrCap/10+1,DegSay/2+1)=F95(OrCap/10,DegSay/2);

Tablo31(1,DegSay/2+1)=DegSay

Tablo31(OrCap/10+1,DegSay/2+1)=ODU;

end

FTablo(OrCap/10+1,1)=OrCap;

Tablo31(OrCap/10+1,1)=OrCap;

end

save HT2_D0Tablo31.txt Tablo -ascii

plot(T, '-');

EK-4: Değişkenlerin İlişkisiz Olduğu Durum İçin Denetim-dışı Deneysel ODU_{D_1}
Değerlerinin Hesaplanması

ODU-D1

clear all

OrSay=100

F95=[4.46 4.53 6.16 19.37

3.55 3.01 2.85 2.85

3.34 2.74 2.51 2.40

3.25 2.63 2.38 2.25

3.19 2.57 2.31 2.17];

for kayma=0.5:0.5:3

for OrCap=10:10:50

for DegSay=2:2:6

clear a b ort ort1 cvar n x ycvar s T F

for satir=1:DegSay

ort(1,satir) = 0;

ort1(1,satir)=0;

for sutun=1:DegSay

if satir==sutun

cvar(satir,sutun)=1;

end

end

end

ort1(1,2)=kayma

cvar

DegSay,OrCap

F=((DegSay*(OrCap-1))/(OrCap-DegSay))*F95(OrCap/10,DegSay/2)

TW=0; TDU=0;

DDCS=0;

EK-4: Değişkenlerin İlişkisiz Olduğu Durum İçin Denetim-dışı Deneysel Değerlerinin Hesaplanması (Devamı)

```

for i=1:OrSay
    uret = mvnrnd(ort1,cvar,OrCap);
    a(i,:)=mean(uret);
    x=mean(uret);
    ycvar=cov(uret);
    s=inv(cov(uret));
    b(i,:)=reshape(ycvar,1,n);
    T(i)=OrCap*(x-ort)*s*(x-ort)';
    if T(i)>F
        i;T(i);
        DDCS=DDCS+1;
        TDU=TDU+TW;
        TW=0;
    else
        TW=TW+1;
    end
end
DDCS, TDU , ODU=TDU/DDCS
Ftablo(1,DegSay/2+1)=DegSay;
Ftablo(OrCap/10+1,DegSay/2+1)=F95(OrCap/10,DegSay/2);
Tablo(1,DegSay/2+1)=DegSay
Tablo(OrCap/10+1,DegSay/2+1)=ODU;
end
Ftablo(OrCap/10+1,1)=OrCap;
Tablo(OrCap/10+1,1)=OrCap;
end
kayma, Ftablo, Tablo, OrSay
pause
end

```

EK-5: Değişkenler İlişkili Olduğu Durum İçin Denetim-dışı Deneysel ODU_{D_1}
Değerlerinin ve δ Başarı Oranlarının Hesaplanması

```
clear all
OrSay=1000
```

```
F95=[4.46 4.53 6.16 19.37
      3.55 3.01 2.85 2.85
      3.34 2.74 2.51 2.40
      3.25 2.63 2.38 2.25
      3.19 2.57 2.31 2.17];
```

```
t05=[2.6848 3.1114 3.3696 3.5557
      2.4304 2.7578 2.9430 3.0707
      2.3604 2.6620 2.8291 2.9428
      2.3274 2.6275 2.7767 2.8801
      2.3085 2.5920 2.7466 2.8508];
```

```
for kayma=0.5:0.5:3
for OrCap=10:10:50
for DegSay=2:2:6
    for satir=1:DegSay
        ort(1,satir) = 0;
        ort1(1,satir)=0;
        for sutun=1:DegSay
            if sutun==satir+1
                cvar(satir,sutun)=(sutun-1)*0.12;
            end
            if sutun+1==satir
                cvar(satir,sutun)= cvar(sutun,satir);
            end
            if satir==sutun
                cvar(satir,sutun)=1;
            end
        end
    end
end
cvar
pause
ort1(1,DegSay)=kayma
```

```
DegSay,OrCap
F=((DegSay*(OrCap-1))/(OrCap-DegSay))*F95(OrCap/10,DegSay/2)TW=0;
TDU=0;
DDCS=0;
delta=0;
```

EK-5: Değişkenlerin İlişkili Olduğu Durum İçin Denetim-dışı Deneysel ODU_{D_1}
Değerlerinin ve δ Başarı Oranlarının Hesaplanması (Devamı)

```

for i=1:OrSay
    uret = mvnrnd(ort1,cvar,OrCap);
    a(i,:)=mean(uret);
    x=mean(uret);
    ycvar=cov(uret);
    s=inv(cov(uret));
    b(i,:)=reshape(ycvar,1,n);
    T(i)=OrCap*(x-ort)*s*(x-ort)';
    if T(i)>F
        alt=x(DegSay)-t05(OrCap/10,DegSay/2)*sqrt(1/OrCap);
        ust=x(DegSay)+t05(OrCap/10,DegSay/2)*sqrt(1/OrCap);
        if alt>0|ust<0
            delta=delta+1;
        end
        DDCS=DDCS+1;
        TDU=TDU+TW;
        TW=1;
    else
        TW=TW+1;
    end
end

DDCS
TDU
ODU=TDU/DDCS
BBKO=delta/DDCS

Tablo32(1,DegSay/2+1)=DegSay;
Tablo32(OrCap/10+1,DegSay/2+1)=ODU;
Tablo33(1,DegSay/2+1)=DegSay;
Tablo33(OrCap/10+1,DegSay/2+1)=BBKO;
end

Tablo32(OrCap/10+1,1)=OrCap;
Tablo33(OrCap/10+1,1)=OrCap;
end
kayma
DegSay
Tablo32
Tablo33

save Bonferroni_D1Tablo32.txt Tablo32 Tablo33 -ascii
plot(T, '-');
end

```

EK-6: δ Başarı Oranlarının Hesaplanması

%ODU-D1

clear all

OrSay=1000

F95=[4.46 4.53 6.16 19.37

3.55 3.01 2.85 2.85

3.34 2.74 2.51 2.40

3.25 2.63 2.38 2.25

3.19 2.57 2.31 2.17];

t05=[2.6848 3.1114 3.3696 3.5557

2.4304 2.7578 2.9430 3.0707

2.3604 2.6620 2.8291 2.9428

2.3274 2.6275 2.7767 2.8801

2.3085 2.5920 2.7466 2.8508];

for kayma=0.5:0.5:3

for OrCap=10:10:50

for DegSay=2:2:6

clear a b ort ort1 cvar n x ycvar s T F delta BBKO

for satir=1:DegSay

ort(1,satir) = 0;

ort1(1,satir)=0;

for sutun=1:DegSay

if satir==sutun

cvar(satir,sutun)=1;

end

end

ort1(1,2)=kayma

DegSay,OrCap

$F=((\text{DegSay}*(\text{OrCap}-1))/(\text{OrCap}-\text{DegSay}))*F95(\text{OrCap}/10,\text{DegSay}/2)$

EK-6: δ Başarı Oranlarının Hesaplanması (Devamı)

```

TW=0;
TDU=0;
DDCS=0;
delta=0;
for i=1:OrSay
    uret = mvnrnd(ort1,cvar,OrCap);
    a(i,:)=mean(uret);
    x=mean(uret);
    ycvar=cov(uret);
    s=inv(cov(uret));
    b(i,:)=reshape(ycvar,1,n);
    T(i)=OrCap*(x-ort)*s*(x-ort)';
    if T(i)>F
        alt=x(2)-t05(OrCap/10,DegSay/2)*sqrt(1/OrCap);
        ust=x(2)+t05(OrCap/10,DegSay/2)*sqrt(1/OrCap);
        if alt>0|ust<0
            delta=delta+1;
        end
        DDCS=DDCS+1;
        TDU=TDU+TW;
        TW=0;
    else
        TW=TW+1;
    end
end
DDCS
TDU
ODU=TDU/DDCS
BBKO=delta/DDCS
Tablo32(1,DegSay/2+1)=DegSay;

```

EK-6: δ Başarı Oranlarının Hesaplanması (Devamı)

```
Tablo32(OrCap/10+1,DegSay/2+1)=ODU;  
Tablo33(1,DegSay/2+1)=DegSay;  
Tablo33(OrCap/10+1,DegSay/2+1)=BBKO;  
end  
Tablo32(OrCap/10+1,1)=OrCap;  
end  
kayma  
OrSay  
DegSay  
Tablo32  
Tablo33  
pause  
save Bonferroni_D1Tablo32.txt Tablo32 Tablo33 -ascii  
plot(T, '-');  
end
```

ÖZGEÇMİŞ

Şerife Nadaroğlu, 1979’da Ankara’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara Keçiören ilçesinde tamamlayarak 1998 yılında Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümünü kazandı. Öğrenimi sırasında çeşitli kuruluşların anket çalışmalarına katıldı. “Taksi şoförlerinin sosyo-ekonomik durumlarının kazalar üzerine etkisi” ile ilgili araştırma projesinde yer aldı. 2002 yılında bölümünden dereceyle mezun oldu. Aynı yıl Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik anabilim dalında yüksek lisans yapmaya hak kazandı. Yüksek lisans eğitimi sırasında da “Tarım sektöründe üretim değerleri bakımından illerin etkinliklerinin Veri Zarflama Analizi ile ölçümü” konu başlıklı etkinlik analizi projesini gerçekleştirdi.

