T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HURWITZ VE LIPSCHITZ YILDIZKÜMELERİNİN GAUSS GÜRÜLTÜ KANALINDAKİ KOD KAZANÇLARI VE KARŞILAŞTIRMALARI

DOKTORA TEZİ

Ramazan DURAN

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

Ekim 2024

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HURWITZ VE LIPSCHITZ YILDIZKÜMELERİNİN GAUSS GÜRÜLTÜ KANALINDAKİ KOD KAZANÇLARI VE KARŞILAŞTIRMALARI

DOKTORA TEZİ

Ramazan DURAN

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Murat GÜZELTEPE

Ekim 2024

Ramazan DURAN tarafından hazırlanan “Hurwitz ve Lipschitz Yıldızkümelerinin Gauss Gürültü Kanalındaki Kod Kazançları ve Karşılaştırmaları” adlı tez çalışması 23.10.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı : Prof. Dr. Murat GÜZELTEPE (Danışman) .....
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Refik KESKİN .....
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Gökçen ÇETİNEL .....
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Merve GÜNEY DUMAN .....
Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniversitesi

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Ekber GİRGİN .....
Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniversitesi

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum "HURWITZ VE LIPSCHITZ YILDIZKÜMELERİNİN GAUSS GÜRÜLTÜ KANALINDAKİ KOD KAZANÇLARI VE KARŞILAŞTIRMALARI" başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, etik kurul onay belgesi aldığımı, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

23/10/2024

Ramazan DURAN

Annem'e, Babam'a ve Sevgili Eşime…

TEŞEKKÜR

Doktora eğitim ve öğretimim boyunca beni teşvik eden, titizlikle yönlendiren ve değerli bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan değerli danışman hocam Prof. Dr. Murat GÜZELTEPE'ye teşekkürlerimi sunarım. Doktora tez izleme döneminde, bu tez çalışmasıyla ilgili bilgi ve deneyimlerini benden esirgemeyen değerli öğretim üyeleri Prof. Dr. Refik KESKİN'e ve Doç. Dr. Gökçen ÇETİNEL'e teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen, her zaman yanımda olan annem Salice DURAN'a, babam Durmuş DURAN'a ve kardeşlerim Salih DURAN'a ve Enes DURAN'a teşekkür ederim. Ayrıca, doktora eğitim ve öğretimim esnasında hayatıma giren ve kalan süreçte maddi ve manevi desteğini benden esirgemeyen sevgili eşim Sevgi DURAN'a teşekkür ederim.

Ramazan DURAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ v
TEŞEKKÜR ix
İÇİNDEKİLER xi
KISALTMALAR xiii
SİMGELER xv
TABLO LİSTESİ xvii
ŞEKİL LİSTESİ xix
ÖZET xxi
SUMMARY xxv
1. GİRİŞ 1
1.1. Cebirsel Tanım, Teorem ve Önermeler 1
1.2. Kodlama Teorisi ile İlgili Temel Tanım, Teorem ve Önermeler 7
1.3. Gauss Tamsayıları ve Kuaterniyonlar ile İlgili Temel Tanım, Teorem ve Önermeler 8
2. LİTERATÜR ÖZETİ 13
2.1. Kodlama Teorisi ve Bilgi Teorisinin Kısa Bir Tarihçesi 13
2.2. Literatürde Yapılan Çalışmalar 15
3. YUVARLAMA NOTASYONLARI VE MODÜLO FONKSİYONU 21
3.1. Yuvarlama Notasyonları ve Çalışma Prensipleri 21
3.2. Modülo Fonksiyonu 24
4. KODLAYICI LIPSHITZ VE KODLAYICI HURWITZ TAMSAYILARI .. 41
4.1. Kodlayıcı Lipschitz Tamsayıları : Küçük Kalanlı Bölme Özelliğine Sahip Lipschitz Tamsayıları 42
4.2. Kodlayıcı Hurwitz Tamsayıları : Küçük Kalanlı Bölme Özelliğine Sahip Hurwitz Tamsayıları 53
5. HURWITZ VE LIPSCHITZ YILDIZKÜMELERİNİN GAUSS GÜRÜLTÜ KANALINDAKİ KOD KAZANÇLARI ve KARŞILAŞTIRMALARI 67
5.1. Sinyal Yıldızkümeleri, İletişim Sistemi, Performans Ölçüleri ve Küme Bölüntüsü 68
5.1.1. Sinyal yıldızkümesi 68
5.1.2. İletişim sistemi 75
5.1.3. Performans ölçüleri 78
5.1.4. Küme bölüntüsü 82
5.2. Hurwitz ve Lipschitz Sinyal Yıldızkümelerinin TBGG Kanalındaki Performanslarının ve Kod Kazançlarının Karşılaştırılması 84
5.2.1. Gauss, Lipschitz ve Hurwitz yıldızkümelerinin TBGG kanalındaki performanslarının ve kod kazançlarının karşılaştırılması 85
5.2.2. Genişletilmiş Lipschitz ve genişletilmiş Hurwitz tamsayılarının TBGG kanalındaki performanslarının ve kod kazançlarının karşılaştırılması 102
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 113
KAYNAKLAR 117

EKLER **121**
ÖZGEÇMİŞ **133**

KISALTMALAR

CFM **:** Constellations figure of merit

$\mathbf{CFM}_{\pi}$ **:** Gauss sinyal yıldızkümesinin iletim hızı

$\mathbf{CFM}_{\alpha}$ **:** Lipschitz sinyal yıldızkümesinin iletim hızı

$\mathbf{CFM}_{\beta}$ **:** Hurwitz sinyal yıldızkümesinin iletim hızı

$\mathbf{CFM}_{\alpha'}$ **:** Genişletilmiş Lipschitz sinyal yıldızkümesinin $TBGG$ kanalındaki iletim hızı

$\mathbf{CFM}_{\beta'}$ **:** Genişletilmiş Hurwitz sinyal yıldızkümesinin $TBGG$ kanalındaki iletim hızı

$\boldsymbol{dB}$ **:** Desibel

SGO **:** Sinyal gürültü oranı

SHO **:** Sinyal hata oranı

TBGG **:** Toplanabilir beyaz Gauss gürültüsü

SİMGELER

$\mathbb{Z}$: Tamsayılar kümesi

$\mathbb{Z}^+$: Pozitif Tamsayılar kümesi

$\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$: Yarım-tamsayılar kümesi

$\mathbb{Z}_n$: Tamsayıların n modülosuna göre kalan sınıfları kümesi

$\mathcal{G}$: Gauss tamsayıları kümesi

$\mathbb{H}(\mathbb{R})$: Kuaterniyonlar sayıları kümesi

$\mathbb{H}(\mathbb{Z})$: Kuaterniyon tamsayıları kümesi

$\mathbb{H}\left(\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\right)$: Her bir bileşeni yarım-tamsayı olan Hurwitz tamsayıları kümesi

$\mathcal{L}$: Lipschitz tamsayıları kümesi

$\mathcal{H}$: Hurwitz tamsayıları kümesi

π : Gauss tamsayısı

α : Lipschitz tamsayısı

β : Hurwitz tamsayısı

α' : Genişletilmiş Lipschitz tamsayısı

β' : Genişletilmiş Hurwitz tamsayısı

$\mathcal{G}/_{\langle\pi\rangle}=\mathcal{G}_\pi$: Gauss tamsayılarının π modülosuna göre kalan sınıflarının kümesi

$\mathcal{L}/_{\langle\alpha\rangle}=\mathcal{L}_\alpha$: Lipschitz tamsayılarının α modülosuna göre sol kalan sınıflarının kümesi

$\mathcal{H}/_{\langle\beta\rangle}=\mathcal{H}_\beta$: Hurwitz tamsayılarının β modülosuna göre sol kalan sınıflarının kümesi

$[|\cdot|]$: En yakın tamsayıya yuvarlama notasyonu

$[\|\cdot\|]$: En yakın yarım-tamsayıya yuvarlama notasyonu

δ^2 : Minimum kare Öklidyen uzaklığı

$\mathcal{E}_s$: Sinyal başına ortalama enerji

$\mathcal{E}_b$: Bit başına ortalama enerji

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 3.1. $\beta = 2i + 2j + k$ tek Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları 35

Tablo 3.2. $\beta = 5/2 + 3/2\, i + 3/2\, j + 1/2\, k$ asal Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları 36

Tablo 3.3. $\beta = 2 + i + 2j + 2k$ asal Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları 37

Tablo 3.4. $\beta = 3 + 2j$ Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları 40

Tablo 4.1. $\alpha = 3 + 2i + j + k$ Lipschitz tamsayısı üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin elemanları 54

Tablo 4.2. $\alpha = 3 + 2i + 3j + 2k$ Lipschitz tamsayısı üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin elemanları 54

Tablo 4.3. $\alpha = 2 + 3i + 2j + 2k$ Lipschitz tamsayısı üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin elemanları 55

Tablo 4.4. $\beta = 3 + i + j + 2k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları 60

Tablo 4.5. $\beta = 3 + i + 2j + 2k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları 62

Tablo 4.6. $\beta = 4 + i + 2j + 2k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerrinden $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları 63

Tablo 5.1. $\beta \in \mathbb{Z} + 1/2$ olmak üzere $N(\beta) = 25$ olacak şekildeki $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin *TBGG* kanalındaki performansları ve kod kazançları...83

Tablo 5.2. $N(\beta)=30$ elemanlı $\mathcal{H}_{4+3i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinin küme bölüntü özelliğiyle elde edilen farklı eleman sayılarına sahip $\mathcal{H}_{\beta}^{(0)}$ sinyal yıldızkümelerinin minimum Öklid uzaklıkları ve *CFM* 'leri 86

Tablo 5.3. $\pi_1 > \pi_2 > 0$ ve $N(\pi) \le 100$ olacak şekildeki primitif Gauss tamsayıları üzerinden μ_π modülo fonksiyonu ile elde edilen $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümelerinin *TBGG* kanalındaki performansları 87

Tablo 5.4. Normu *100* 'den küçük veya eşit olacak şekildeki $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerinin veya $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin *TBGG* kanalındaki performansları ve kod kazançları 88

Tablo 5.5. $\beta \in \mathbb{Z} + 1/2$ olmak üzere $N(\beta) \le 100$ olacak şekildeki $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin *TBGG* kanalındaki performansları ve kod kazançları... 93

Tablo 5.6. En iyi *CFM* 'ye sahip $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin *TBGG* kanalındaki performansları ve kod kazançları 97

Tablo 5.7. Normu *100* 'den küçük veya eşit olacak şekilde [61]'de yer alan en iyi *CFM* 'ye sahip sinyal yıldızkümelerinin minimum Öklid uzaklıkları, sinyal ve bit başına ortalama enerjileri ve iletim hızları 101

Tablo 5.8. $c \ge 2$ ve $d = 13$ olacak şekildeki β' genişletilmiş kodlayıcı Hurwitz tamsayıları ve $\mathcal{H}_{\beta'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümelerinin *TBGG* kanalındaki performansları 104

Tablo 5.9. $d \le 100$ olacak şekildeki en iyi *CFM* 'ye sahip olan $\mathcal{L}_{\alpha'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümelerinin *TBGG* kanalındaki performansları ve kod kazançları 105

Tablo 5.10. $d \le 100$ olacak şekildeki en iyi *CFM* 'ye sahip olan $\mathcal{H}_{\beta'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümelerinin *TBGG* kanalındaki performansları ve kod kazançları 107

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 5.1. $\mathcal{G}_{4+3i}$ sinyal yıldızkümesinin iki boyutlu koordinat sistemindeki gösterimi..70

Şekil 5.2. $\mathcal{L}_{4+2i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi 70

Şekil 5.3. $\mathcal{L}_{4+2i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinde $\mu_\alpha(4) = -2i - 2j - k$ sinyalindeki $(0,-2,-2,-1)$ bileşenlerinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi 71

Şekil 5.4. $\mathcal{L}_{4+2i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinde her bir sinyaldeki bileşenlerin üç boyutlu uzaydaki gösterimi 72

Şekil 5.5. $\mathcal{H}_{4+2i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi..... 72

Şekil 5.6. $\mathcal{H}_{4+2i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinde her bir sinyaldeki bileşenlerin üç boyutlu uzaydaki gösterimi 73

Şekil 5.7. $\mathcal{H}_{7/2+5/2i+5/2j+1/2k}$ sinyal yıldızkümesinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi 73

Şekil 5.8. $\mathcal{H}_{7/2+5/2i+5/2j+1/2k}$ sinyal yıldızkümesinde her bir sinyaldeki bileşenlerin üç boyutlu uzaydaki gösterimi 74

Şekil 5.9. $\mathcal{H}_{7/2+7/2i+1/2j+1/2k}$ sinyal yıldızkümenin üç boyutlu uzaydaki gösterimi..... 74

Şekil 5.10. $\mathcal{H}_{9/2+3/2i+3/2j+1/2k}$ sinyal yıldızkümesinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi 75

Şekil 5.11. Toplanabilir beyaz Gauss gürültü kanalının basit bir modeli..... 77

Şekil 5.12. $N = 13$ için Gauss sinyal yıldızkümesinin, Lipschitz sinyal yıldızkümesinin, [61]'deki sinyal yıldızkümesinin ve Hurwitz sinyal yıldızkümesinin sinyal gürültü oranları ile sembol hata oranlarının karşılaştırılması 111

Şekil 5.13. $N = 39$ için $\mathcal{H}_\beta^{(0)}$ sinyal yıldızkümesi ve $\mathcal{L}_\alpha^{(0)}$ sinyal yıldızkümesinin sinyal gürültü oranları ile sembol hata oranlarının karşılaştırılması 112

HURWITZ VE LIPSCHITZ YILDIZ KÜMELERİNİN GAUSS GÜRÜLTÜ KANALINDAKİ KOD KAZANÇLARI VE KARŞILAŞTIRMALARI

ÖZET

Gauss, Lipschitz veya Hurwitz sinyal yıldızkümeleri ilgili bir modülo fonksiyonu ile elde edilmektedir. Tez çalışmasında, Hurwitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için sunulan $\mu_\beta: \mathbb{Z}_{N(\beta)} \to \mathcal{H}_\beta$ modülo fonksiyonu şu şekilde tanımlanmıştır: β asal (veya tek) Hurwitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olsun. $\mu_\beta^{(1)}: \mathbb{Z}_{N(\beta)} \to \mathcal{H}_\beta$ modülo fonksiyonu

$$\mu_\beta^{(1)}(z) = z\ (mod\ \beta) = z - \beta \left\lfloor \left| \frac{\bar{\beta} z}{N(\beta)} \right| \right\rceil$$

ve $\mu_\beta^{(2)}: \mathbb{Z}_{N(\beta)} \to \mathcal{H}_\beta$ modülo foksiyonu

$$\mu_\beta^{(2)}(z) = z\ (mod\ \beta) = z - \beta \left\lfloor \left| \frac{\bar{\beta} z}{N(\beta)} \right| \right\rceil$$

olmak üzere $\mu_\beta: \mathbb{Z}_{N(\beta)} \to \mathcal{H}_\beta$ modülo fonksiyonu, $\beta \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ ise

$$\mu_\beta(z) = \begin{cases} \mu_\beta^{(1)}(z), & N\left(\mu_\beta^{(1)}(z)\right) \le N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right)\ ise \\ \mu_\beta^{(2)}(z), & N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right) < N\left(\mu_\beta^{(1)}(z)\right)\ ise \end{cases}$$

ve $\beta \in \mathbb{H}\left(\mathbb{Z} + {}^1/_2\right)$ ise

$$\mu_\beta(z) = \begin{cases} \mu_\beta^{(1)}(z), & N\left(\mu_\beta^{(1)}(z)\right) < N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right)\ ise \\ \mu_\beta^{(2)}(z), & N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right) < N\left(\mu_\beta^{(1)}(z)\right)\ ise \\ \mu_\beta^{(1)}(z), & Normların\ eşitliği\ halinde\ z\ tek\ ise \\ \mu_\beta^{(2)}(z), & Normların\ eşitliği\ halinde\ z\ çift\ ise \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Tez çalışmasında, bileşenleri sıfırdan farklı olmak üzere primitif olma özelliğine sahip olan asal, tek ve çift Hurwitz tamsayıları ele alınmıştır. Fakat her bir bileşeni tek tamsayı olan β primitif Hurwitz tamsayılarının, μ_β modülo fonksiyonu ile Hurwitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için uygun olmadıkları gösterilmiştir. Benzer şekilde, her bir bileşeni tek tamsayı olan α primitif Lipschitz tamsayılarının, μ_α modülo fonksiyonu ile Lipschitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için uygun olmadıkları da gösterilmiştir. Bu problemleri çözmek için α primitif Lipschitz ve β primitif Hurwitz tamsayıları yerine sırasıyla kodlayıcı Lipschitz ve kodlayıcı Hurwitz tamsayıları tanımlanmıştır. Ayrıca, literatürdeki diğer modülo fonksiyonları için de α primitif Lipschitz ve β primitif Hurwitz tamsayılarının uygun olup olmadıklarını araştırmak için bazı önermeler sunulmuştur. Bununla birlikte, μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin, Gauss gürültü kanalındaki performansları ve kod kazançları literatürdeki diğer sinyal yıldızkümeleri

ile karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak, Gauss gürültü kanalında literatürdeki diğer sinyal yıldızkümelerinden daha iyi performansa ve kod kazancına sahip olacak şekilde Hurwitz sinyal yıldızkümeleri elde edilmiştir.

Bu tez çalışması, altı bölümden oluşmuştur.

Bölüm 1'de, bu tez çalışmasında önbilgiler niteliği taşıyan temel tanımlar, teoremler ve önermeler üç alt başlık altında verilmiştir.

Bölüm 2'de, kodlama teorisinin ve bilgi teorisinin kısa bir tarihçesi ve kodlama teorisinde yapılan bazı önemli çalışmalara ve bu tez çalışmasının konusu ile ilgili yapılan bazı önemli çalışmalara yer verilmiştir.

Bölüm 3'te, yuvarlama notasyonlarının çalışma prensipleri verilmiştir. Bununla birlikte, Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin elde edilmesinde kullanılan μ_β modülo fonksiyonu sunulmuştur. μ_β modülo fonksiyonunun, asal veya tek Hurwitz tamsayıları üzerinden bir halka izomorfizması olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, μ_β modülo fonksiyonu ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Bölüm 4'te, literatürde verilen primitif Lipschitz tamsayılarının ve primitif Hurwitz tamsayılarının sırasıyla μ_α ve μ_β modülo fonksiyonları ile Lipschitz ve Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin elde edilmesi için uygun olmadıkları gösterilmiştir. İlk önce, her bir bileşeni tek tamsayı olan α primitif Lipschitz tamsayıları üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen Lipschitz sinyal yıldızkümelerindeki herhangi bir $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ için Öklid bölmesindeki $0 \leq N(\mu_\alpha(z)) < N(\alpha)$ koşulu ile oluşturduğu çelişki gösterilmiştir. Yani, primitif Lipschitz tamsayılarının Öklid bölmesine uygun olmadıkları veya diğer bir ifadeyle, küçük kalanlı bölme özelliğine sahip olmadığı gösterilmiştir. Bu çelişkiyi ortadan kaldırmak için $0 \leq N(\mu_\alpha(z)) < N(\alpha)$ koşulunu sağlayacak şekildeki primitive Lipschitz tamsayılarından olan kodlayıcı Lipschitz tamsayıları tanımlanmıştır. Son olarak, her bir bileşeni tek tamsayı olan β primitif Hurwitz tamsayıları üzerinden μ_β modülo fonksiyonunun bire-bir olma koşuluyla oluşturuduğu çelişki gösterilmiştir. Bu çelişkiyi ortadan kaldırmak için bire-bir olma koşulunu sağlacak şekildeki kodlayıcı Hurwitz tamsayıları tanımlanmıştır. Bununla birlikte, kodlayıcı Lipschitz tamsayıları ve kodlayıcı Hurwitz tamsayıları üzerinden sırasıyla μ_α ve μ_β modülo fonksiyonlarının birer halka izomorfizması olduğu gösterilmiştir.

Bölüm 5'te, sinyal yıldızkümeleri, iletişim sistemi, kod kazançları, küme bölüntüsü ve sinyal başına ortalama enerjileri, bit başına ortalama enerjileri, iletim hızları gibi performans ölçüleri hakkında bilgi verilmiştir. Bununla birlikte, Hurwitz tamsayıları üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin, toplanabilir beyaz Gauss gürültü kanalındaki performansları ve kod kazançları, Lipschitz sinyal yıldızkümeleri ve Gauss sinyal yıldızkümeleri ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca, genişletilmiş Hurwitz tamsayıları üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin toplanabilir beyaz Gauss gürültü kanalındaki performansları ve kod kazançları, Hurwitz sinyal yıldızkümeleri, Lipschitz sinyal yıldızkümeleri ve Gauss sinyal yıldızkümeleri ile karşılaştırılmıştır. Tablolar üzerinden yapılan karşılaştırmalar sonucunda minimum Öklid uzaklığı 1 (bir) olacak şekildeki Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin; toplanabilir Gauss gürültü kanalındaki sinyal başına ortalam enerjileri, bit başına ortalama enerjileri, iletim hızları ve kod kazançları bakımından Lipschitz sinyal yıldızkümelerinden ve Gauss sinyal yıldızkümelerinden daha iyi performansa sahip oldukları gösterilmiştir. Bununla

birlikte, küme bölüntüsü kullanılarak elde edilen ve minimum Öklid mesafesi birden (≥ 1) büyük olacak şekildeki bazı Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin, toplanabilir beyaz Gauss gürültü kanalında iletim hızları bakımından küme bölüntüsü kullanılarak elde edilen ve Lipschitz sinyal yıldızkümelerinden daha iyi bir performansa sahip oldukları gösterilmiştir.

Bölüm 6'da, bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar sunulmuş ve bazı öneriler verilmiştir.

CODING GAINS OF HURWITZ AND LIPSCHITZ SIGNAL CONSTELLATIONS OVER THE GAUSS NOISE CHANNEL AND COMPARISONS OF THEM

SUMMARY

Gaussian, Lipschitz or Hurwitz signal constellations are obtained by a related modulo function. In this thesis study, the modulo function $\mu_\beta: \mathbb{Z}_{N(\beta)} \to \mathcal{H}_\beta$ presented to obtain Hurwitz signal constellations is defined as follows: The modulo function $\mu_\beta: \mathbb{Z}_{N(\beta)} \to \mathcal{H}_\beta$; if $\beta \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$,

$$\mu_\beta(z) = \begin{cases} \mu_\beta^{(1)}(z), & if\ N\left(\mu_\beta^{(1)}(z)\right) \leq N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right) \\ \mu_\beta^{(2)}(z), & if\ N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right) < N\left(\mu_\beta^{(1)}(z)\right) \end{cases}$$

and if $\beta \in \mathbb{H}\left(\mathbb{Z} + {}^1/_2\right)$

$$\mu_\beta(z) = \begin{cases} \mu_\beta^{(1)}(z), & if \quad N\left(\mu_\beta^{(1)}(z)\right) < N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right) \\ \mu_\beta^{(2)}(z), & if \quad N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right) < N\left(\mu_\beta^{(1)}(z)\right) \\ \mu_\beta^{(1)}(z), & Otherwise, z\ is\ an\ odd\ integer \\ \mu_\beta^{(2)}(z), & or\ z\ is\ an\ even\ integer \end{cases}$$

such that the modulo function $\mu_\beta^{(1)}: \mathbb{Z}_{N(\beta)} \to \mathcal{H}_\beta$

$$\mu_\beta^{(1)}(z) = z\ (mod\ \beta) = z - \beta \left\lfloor \left| \frac{\bar{\beta} z}{N(\beta)} \right| \right\rfloor$$

and the modulo function $\mu_\beta^{(2)}: \mathbb{Z}_{N(\beta)} \to \mathcal{H}_\beta$

$$\mu_\beta^{(2)}(z) = z\ (mod\ \beta) = z - \beta \left\lfloor \left| \left| \frac{\bar{\beta} z}{N(\beta)} \right| \right| \right\rfloor,$$

where β be a prime (or odd) Hurwitz integer and $z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$. In this thesis study, prime Hurwitz integers, odd Hurwitz integers, and even Hurwitz integers, which are the property of being primitive and each of whose components is different from zero, are considered. However, primitive Hurwitz integers β, each of whose components is an odd integer, are not suitable for obtaining Hurwitz signal constellations by the modulo function μ_β. Similarly, primitive Lipschitz integers α, each of whose components is an odd integer, are not suitable for obtaining Lipschitz signal constellations by the modulo function μ_α, too. To solve these problems, instead of primitive Lipschitz integers α and primitive Hurwitz integers β, encoding Lipschitz integers and encoding Hurwitz integers are defined, respectively. In addition, some propositions are presented to investigate whether the primitive Lipschitz integers α and primitive Hurwitz integers β are suitable for other modulo functions in the literature, or not.

Furthermore, the performances and coding gains of the Hurwitz signal constellations obtained by the modulo function μ_β over the Gaussian noise channel were compared with other signal constellations in the literature. Consequently, Hurwitz signal constellations were obtained in a way that they have better performance and coding gain than other signal constellations in the literature over the Gaussian noise channel.

This thesis study consists of six chapters.

In Chapter 1, the basic definitions, theorems and propositions that are preliminary information in this thesis study are given under three subsections.

In Chapter 2, a brief history of coding theory and information theory and some important studies in coding theory are given. Moreover, some important studies related to the subject of this thesis study are given.

In Chapter 3, the working principles of rounding notations are given. In addition, the modulo function μ_β used in obtaining Hurwitz signal constellations is presented. It is shown that the modulo function μ_β is a ring isomorphism over prime or odd Hurwitz integers. Also, some results related to the modulo function μ_β are given.

In Section 4, it is shown that primitive Lipschitz integers and primitive Hurwitz integers are not suitable for Lipschitz and Hurwitz signal constellations obtained by the modulo function μ_α and the modulo function μ_β, respectively. Firstly, the contradiction caused by the condition $0 \leq N(\mu_\alpha(z)) < N(\alpha)$ in the Euclidean division for any $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ in the Lipschitz signal constellations obtained by the modulo function μ_α over primitive Lipschitz integers α, each component is an odd integer, is shown. In other words, it is shown that primitive Lipschitz integers are not suitable for Euclidean division or, in other words, they do not have the division with small remainder property. In order to eliminate this contradiction, the encoder Lipschitz integers that satisfy the condition $0 \leq N(\mu_\alpha(z)) < N(\alpha)$ in the Euclidean division are defined. Finally, the contradiction that the modulo function μ_β over primitive Hurwitz integers β, which each component is an odd integer, is formed by the condition of one-to-one function is shown. In order to eliminate this contradiction, the encoder Hurwitz integers that satisfy the condition of one-to-one function are defined. In addition, it is shown that by the modulo function μ_α and the modulo function μ_β over encoder Lipschitz integers and encoder Hurwitz integers are ring isomorphisms, respectively.

In Section 5, information is given about signal constellations, communication system, coding gains, set partition and performance measures such as average energy per signal, average energy per bit, transmission rate. Moreover, Hurwitz signal constellations obtained by the modulo function μ_β over Hurwitz integers β are compared with Lipschitz signal constellations and Gaussian signal constellations in terms of performances and coding gains over the additive white Gaussian noise channel. In addition, Hurwitz signal constellations obtained with the modulo function μ_β over extended Hurwitz integers are compared with Hurwitz signal constellations, Lipschitz signal constellations and Gaussian signal constellations in terms of performances and coding gains over the additive white Gaussian noise channel. As a result of the comparisons made on the tables, it has been shown that Hurwitz signal constellations, which the minimum Euclidean distance is equal to one, have better performance than Lipschitz signal constellations and Gaussian signal constellations over the additive Gaussian noise channel in terms of average energy per signal, average

energy per bit, transmission rates, and coding gains. Moreover, it has been shown that some Hurwitz signal constellations obtained by using set partitioning, which the minimum Euclidean distance is the greater than one, have better performance than Lipschitz signal constellations obtained by using set partitioning, which the minimum Euclidean distance is the greater than one, in terms of transmission rates over the additive white Gaussian noise channel.

In Chapter 6, the results obtained in this thesis study are summarized and some recommendations are given.

1. GİRİŞ

Bu bölümde, bu tez çalışması için önbilgiler niteliği taşıyan temel tanım, teorem ve önermeler yer almaktadır.

1.1. Cebirsel Tanım, Teorem ve Önermeler

Tanım 1.1.1. X ve Y iki küme, f'de X'ten Y'ye bir bağıntı olsun. Eğer her $x \in X$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde bir tek $y \in Y$ varsa o zaman f'ye X'ten Y'ye bir fonksiyon denir ve $f: X \to Y$ sembolü ile gösterilir. X kümesine f'nin tanım kümesi, Y kümesine de f'nin değer kümesi adı verilir. $x \in X$ için $(x, y) \in f$ ise x'e y'nin f fonksiyonu altındaki görüntüsü denir ve $y = f(x)$ şeklinde gösterilir. Başka bir ifadeyle; X ve Y herhangi iki küme, f'de X'ten Y'ye bir bağıntı olsun. f bağıntısının bir fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul

i. $\forall x \in X$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde bir tek $y \in Y$ vardır ve

ii. $x_1, x_2 \in X$ için $x_1 = x_2$ iken $f(x_1) = f(x_2)$ olmasıdır [1].

(ii)'deki koşul bir fonksiyonun iyi tanımlı olma koşulu olarak adlandırılır [1].

Tanım 1.1.2. X ve Y iki küme olmak üzere $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ olmak üzere $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ ve $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ kümelerine sırasıyla A kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü ve B kümesinin f fonksiyonu altındaki ters görüntüsü denir. Özel olarak $A = X$ ise o zaman $f(X)$'e f nin görüntü kümesi denir ve $Görf$ ile gösterilir. Yani,

$$Görf = \{f(a) : a \in A\} = f(X) \tag{1.1.1}$$

dir [1].

Tanım 1.1.3. X ve Y iki küme ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x_1, x_2 \in X$ için $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ veya $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f'ye bire-bir fonksiyon denir [2].

Tanım 1.1.4. X ve Y iki küme olmak üzere $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $y \in Y$ için $y = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ bulunabiliyorsa o zaman f'ye bir örten

fonksiyon denir. Diğer bir ifadeyle, X ve Y herhangi iki küme olmak üzere $f: X \to Y$ fonksiyonun örten olması için gerek ve yeter koşul $G\ddot{o}rf = Y$ olmasıdır [1].

Tanım 1.1.5. G boştan farklı bir küme olsun. $G \times G$'den G'e bir fonksiyona G'de bir ikili işlem denir [2].

Tanım 1.1.6. "$*$", G'de bir ikili işlem ve $x, y \in G$ olsun. (x, y)'nin "$*$" işlemi altındaki görüntüsünü $x * y$ ile gösterilir. Fonksiyon olma özelliklerinden;

i. $\forall x, y \in G$ için G'de bir $x * y$ elemanı vardır,

ii. Bu eleman tek türlü belirlidir.

Bu özelliklerden birincisine işlemin kapalılığı, ikincisine de işlemin iyi tanımlılığı denir [2].

Tanım 1.1.7. Üzerinde en az bir ikili işlem tanımlı olan boştan farklı bir kümeye bir cebirsel yapı denir. G kümesi üzerinde bir "$*$" ikili işlemi tanımlı ise bu cebirsel yapı $(G,*)$ ile gösterilir [2].

Tanım 1.1.8. G boştan farklı bir küme ve "$*$", G'de bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $(G,*)$ cebirsel yapısına bir grup denir.

G1 **:** "$*$" işleminin G'de birleşme özelliği vardır. Yani, $\forall x, y, z \in G$ için, $x * (y * z) = (x * y) * z$'dir.

G2 **:** "$*$" işleminin G'de birim elemanı vardır. Yani, $\forall x \in G$ için, $x * e = e * x = x$ olacak şekilde $e \in G$ vardır.

G3 **:** "$*$" işlemine göre G'deki her elemanın bir tersi vardır. Yani, $x \in G$ için, $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ olacak şekilde $x^{-1} \in G$ vardır [2].

Tanım 1.1.9. $(G,*)$ bir grup ve $\forall x, y \in G$ için $x * y = y * x$ özelliği sağlanıyorsa $(G,*)$ grubuna, değişmeli grup veya Abel grubu denir [2].

Tanım 1.1.10. G bir grup ve H, G'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H, G deki işleme göre kendi başına bir grup ise H'ye G'nin bir alt grubu denir ve $H < G$ ile gösterilir [2].

Önerme 1.1.1. G bir grup ve $H < G$ olsun. $x \equiv y \ (mod\ H) \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ ile tanımlı "$\equiv$" bağıntısı G'de bir denklik bağıtısıdır. Bu denklik bağıntısına göre, $x \in G$

elemanının sınıfı $\bar{x} = Hx = \{hx : h \in H\}$ alt kümesidir. Hx'e H alt grubuna göre x'in sağ denklik sınıfı denir [2].

Önerme 1.1.2. G bir grup ve $H < G$ olsun. $x \equiv y \ (mod\ H) \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$ ile tanımlı "≡" bağıntısı G'de bir denklik bağıtısıdır. Bu denklik bağıntısına göre, $x \in G$ elemanının sınıfı $\bar{x} = xH = \{xh : h \in H\}$ alt kümesidir. xH'a H alt grubuna göre x'in sol denklik sınıfı denir [2].

Teorem 1.1.1. $N < G$ olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

i. $\forall x \in G, \forall y \in N$ için $xyx^{-1} \in N$'dir.

ii. $\forall x \in G$ için $xNx^{-1} \subset N$'dir.

iii. $\forall x \in G$ için $xNx^{-1} = N$'dir.

iv. $\forall x \in G$ için $xN = Nx$'dir [2].

Tanım 1.1.11. Teorem 1.1.1'de verilen denk koşullardan birini sağlayan G'nin bir alt grubuna normal alt grup denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir [2].

Tanım 1.1.12. $N \lhd G$ olsun. G'nin N'ye göre sağ (veya sol) denklik sınıfları kümesi G/N ile gösterilir [2].

Tanım 1.1.13. $N \lhd G$ ise G/N grubuna, G'nin N'ye göre bölüm grubu denir [2].

Tanım 1.1.14. $(G,\cdot)$ ve $(H,*)$ iki grup ve $f: G \to H$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in G$ için $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$ ise f'ye G'den H'ye bir grup homomorfizması denir [2].

Tanım 1.1.15. $f: G \to H$ bir grup homomorfizması ise

$$Çekf = \{x \in G: f(x) = e_H\} \tag{1.1.2}$$

kümesine f grup homomorfizmasının çekirdeği denir [2].

Tanım 1.1.16. Bire-bir ve örten bir grup homomorfizmasına bir grup izomorfizması denir [2].

Tanım 1.1.17. R boştan farklı bir küme ve R üzerinde tanımlı iki ikili işlem "+" ve "·" olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

H1 **:** $(R, +)$, bir değişmeli gruptur.

H2 **:** "·" işleminin R'de birleşme özelliği vardır. Yani, $\forall x, y, z \in R$ için $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$'dir.

H3 **:** "$\cdot$" işleminin "$+$" işlemi üzerinde sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır. Yani, $\forall x, y, z \in R$ için $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ve $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$'dir [2].

Halkanın "$+$" işlemine göre etkisiz elemanına halkanın sıfır elemanı denir ve "0_R" ile gösterilir. Halkanın "$\cdot$" işlemine göre etkisiz elemanı olmayabilir. Eğer "$\cdot$" işlemine göre etkisiz eleman varsa böyle bir halkaya birimli halka denir. Bu etkisiz elemana da halkanın birim elemanı denir ve "1_R" ile gösterilir. Halka, "$\cdot$" işlemine göre değişme özelliğine sahip ise halkaya değişmeli halka denir [2].

Tanım 1.1.18. R bir halka ve S'de R'nin boştan farklı bir kümesi olsun. R'deki işlemlere göre S alt kümesi kendi başına bir halka ise S'ye R halkasının bir alt halkası denir [2].

Tanım 1.1.19. R birimli ve değişmeli bir halka ve $R - \{0_R\} = R^*$, ikinci işlem "$\cdot$" ya göre bir grup ise R'ye bir cisim denir [2].

Tanım 1.1.20. R bir halka ve $\emptyset \neq I \subset R$ olsun.

i. $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$ ve

ii. $\forall a \in I$ ve $\forall r \in R$ için $ra \in I$ $(veya\ ar \in I)$

koşulları sağlanıyor ise I'ya R'nin bir sol (veya sağ) ideali denir. Hem sol hem de sağ ideale iki taraflı ideal veya kısaca ideal denir. İdealin tanımından, idealin bir alt halka olduğu anlaşılır [2].

Tanım 1.1.21. A, R halkasının bir alt kümesi olsun. R'nin, A'yı kapsayan bütün ideallerinin arakesitine A'nın ürettiği ideal denir ve (A) ile gösterilir. Eğer $A = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise A'nın ürettiği ideale temel ideal denir ve (a) ile gösterilir. R birimli ve değişmeli bir halka ise $(a) = aR = \{ar : r \in R\}$'dir [2].

Önerme 1.1.3. R halkasının, bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında

i. $(a + I) \oplus (b + I) = (a \oplus b) + I$ ve

ii. $(a + I) \odot (b + I) = (a \odot b) + I$

ile tanmlanan "$\oplus$" ve "$\odot$" işlemlerine göre R/I bir halkadır. Bu halkaya R'nin I idealine göre bölüm halkası denir [2].

$\mathbb{Z}$'nin (m) idealine göre bölüm halkası $\mathbb{Z}_m$'dir. Gerçekten, $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a \equiv b\ (mod\ m) \Leftrightarrow a - b \in (m) \Leftrightarrow m|a - b$ ile tanımlıdır. Bunun tam sayılar arasında $(mod\ m)$ denklik bağıntısı ile aynı olduğu görülür [2].

Tanım 1.1.22. $a \in \mathbb{Z}$'nin $m > 0$ ile bölümünden elde edilen kalanlar; $0,1, \dots, m-1$ olacağından, $\bar{a}$ sınıfı; $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}$ sınıflarından biridir. O halde $\mathbb{Z}_m$, m elemanlı bir kümedir ve $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ olarak alınır. Böyle bir $\mathbb{Z}_m$'de her sınıftan bir ve yalnız bir eleman almakla elde edilen sisteme tam temsilciler sistemi denir. $\mathbb{Z}_m$'nin bir tam temsilciler sistemi olarak $\{0,1, \dots, m-1\}$ alınabilir [3].

Tanım 1.1.23. $(R, +, \cdot)$ ve $(S, \oplus, \odot)$ iki halka ve $f: R \to S$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a, b \in R$ için

i. $f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$ ve

ii. $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$

koşulları sağlanıyor ise f'ye, R'den S'ye bir halka homomorfizması denir [2].

Tanım 1.1.24. $f: R \to S$ halka homomorfizması bire-bir ve örten ise f'ye bir halka izomorfizması, R ile S'ye de izomorf halkalar denir ve $R \cong S$ ile gösterilir [2].

Tanım 1.1.25. $f: R \to S$ bir halka homomorfizma ise f'nin çekirdeği

$$Çekf = \{a \in R : f(a) = 0_S\} \tag{1.1.3}$$

ile tanımlanır [2].

Tanım 1.1.26. En büyük ortak bölenleri aritmetik birimler olan elemalara aralarında asal denir ve $(a, b) = 1$ ile gösterilir [2].

Tanım 1.1.27. R bir tamlık bölgesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlacak şekilde bir $d: R \to \mathbb{Z}$ varsa R'ye bir Euclid Bölgesi denir ve kısaca EB ile gösterilir.

i. $\forall x \in R$ için $d(x) \geq 0$,

ii. $d(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_R$,

iii. $\forall x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)d(y)$,

iv. $\forall x, y \in R,\ y \neq 0_R$ için $x = qy + r$ ve $0 \leq d(r) < d(y)$ olacak şekilde $\exists q, r \in R$ bulunabilir [2].

Tanım 1.1.28. Yukarıdaki tanımda (i), (ii) ve (iii) özelliklerini sağlayan bir d fonksiyonuna, R tamlık bölgesi üzerinde verilmiş bir çarpımsal norm ve (iv) özelliğine de bölme algoritması veya Euclid algoritması denir [2].

Tanım 1.1.29. $(M,+)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. M'deki elemanların R'deki elemanlarla skaler çarpımı şeklinde tanımlanan $\cdot : R \times M \to M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa M'ye R üzerinde sol $R-$Modül denir. $\forall m, m_1, m_2 \in M$ ve $\forall r, r_1, r_2 \in R$ için

i. $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$,

ii. $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$,

iii. $(r_1 \cdot r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$

dir [5].

Tanım 1.1.30. $(M,+)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. M'deki elemanların R'deki elemanlarla skaler çarpımı şeklinde tanımlanan $\cdot : R \times M \to M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa M'ye R üzerinde sağ $R-$Modül denir. $\forall m, m_1, m_2 \in M$ ve $\forall r, r_1, r_2 \in R$ için

i. $(m_1 + m_2) \cdot r = m_1 \cdot r + m_2 \cdot r$,

ii. $m \cdot (r_1 + r_2) = m \cdot r_1 + m \cdot r_2$,

iii. $m \cdot (r_1 \cdot r_2) = (m \cdot r_1) \cdot r_2$

dir [5].

Tanım 1.1.31. $(M,+)$ bir değişmeli grup ve R değişmeli bir halka olsun. M'deki elemanların R'deki elemanlarla skaler çarpımı şeklinde tanımlanan $\cdot : R \times M \to M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa M'ye R üzerinde bir modül veya kısaca $R-$Modül denir. $\forall m, m_1, m_2 \in M$ ve $\forall r, r_1, r_2 \in R$ için

i. $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$,

ii. $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$,

iii. $(r_1 \cdot r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$,

iv. $1_R \cdot m = m$

dir [4].

Tanım 1.1.32. $\mathbb{F}_q$, q mertebeli sonlu bir cisim olsun. n uzunluklu girdileri $\mathbb{F}_q$'da olan tüm vektörlerin kümesi $\mathbb{F}_q^n = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) : v_i \in \mathbb{F}_q, i = 1,2, \dots, n\}$ olsun. $V \subset \mathbb{F}_q^n$ boştan farklı bir küme olmak üzere vektörel toplama "+" işlemi ve skaler çarpım "$\cdot$" işlemine göre aşağıdaki koşulları sağlıyorsa V'ye $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir vektör uzayı denir. $\forall u, v \in V$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}_q$ için

i. $(V, +)$, bir değişmeli grup,

ii. $\lambda v \in V$,

iii. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ ve $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$,

iv. $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$,

v. 1, $\mathbb{F}_q$'da çarpımsal birim ise $1u = u \cdot 1 = u$

dur [6].

Tanım 1.1.33. C, V vektör uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. C, V vektör uzayında tanımlı vektörel toplam ve skaler çarpım ile bir vektör uzayı oluyorsa C'ye V'nin bir alt vektör uzayı denir [6].

1.2. Kodlama Teorisi ile İlgili Temel Tanım, Teorem ve Önermeler

Tanım 1.2.1. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$, q elemanlı bir küme olsun. A kümesine kod alfabesi, kümenin elemanlarına ise kod sembolleri denir [6].

Tanım 1.2.2. $i = 0,1, \dots, n$ olsun. $w_i \in A$ olmak üzere $w = w_1 w_2 \dots w_n$ olacak şekilde oluşturulan diziye A üzerinde n uzunluklu bir söz denir [6].

Tanım 1.2.3. A^n kümesinin boştan farklı bir C alt kümesine $q-$lu bir blok kod ya da kısaca kod denir. C kodunun elemanlarına ise kodsöz denir. C'deki kodsözlerin sayısına C'nin boyutu denir ve $|C|$ ile gösterilir [6].

Tanım 1.2.4. $\mathbb{F}_q$ üzerinde n uzunluklu bir C kodunun hızı

$$R = \frac{\log_q |C|}{n} \tag{1.2.1}$$

ile hesaplanır [6].

Tanım 1.2.5. n uzunluklu ve M boyutlu bir kod (n, M) sembolü ile gösterilir [6].

Tanım 1.2.6. n uzunluklu, M boyutlu ve d uzaklığına sahip bir kod (n, M, d) sembolü ile gösterilir. Burada, n, M ve d sayılarına kodun parametreleri denir [6].

Tanım 1.2.7. C, $\mathbb{F}_q^n$ vektör uzayının boştan farklı bir alt uzayı ise C koduna $\mathbb{F}_q$ üzerinde n uzunluklu bir lineer kod denir [6].

$\mathbb{F}_q$ üzerinde n uzunluklu ve k boyutlu lineer kodun eleman sayısı $|C| = q^k$'dır. $\mathbb{F}_q$ üzerinde n uzunluklu ve k boyutlu bir C lineer kodu q −lu bir $[n, k]$ kod veya $[n, k]_q$ kod ile ifade edilir. n uzunluklu, k boyutlu ve d uzaklığına sahip olan bir lineer kod $[n, k, d]$ sembolü ile gösterilir [6].

Not 1.2.1. Kodlama teorisinin temel problemi en iyi parametrelere sahip kodları bulmaktır. Bunu yaparken uzunluk, eleman sayısı ve minimum uzaklık parametrelerinden ikisi sabit tutularak diğer parametre optimize edilir. Yani;

i. n uzunluğu ve M elaman sayısı sabit olduğunda minimum uzaklığa,

ii. M eleman sayısı ve d minimum uzaklığı sabit olduğunda mümkün olan en küçük n uzunluğuna,

iii. n uzunluğu ve d minimum uzaklığı sabit olduğunda mümkün olan en büyük M elaman sayısına,

sahip olan kodlar optimaldir [6].

1.3. Gauss Tamsayıları ve Kuaterniyonlar ile İlgili Temel Tanım, Teorem ve Önermeler

Tanım 1.3.1. $\mathbb{Z}[i] = \mathcal{G} = \{\pi = \pi_1 + \pi_2 i : \pi_1, \pi_2 \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$ kümesine Gauss tamsayılar kümesi denir [7].

$\mathcal{G}$ kümesindeki her bir elemana bir Gauss tamsayısı denir. $\pi = \pi_1 + \pi_2 i$ Gauss tamsayısında, π_1 ve π_2 sırasıyla reel ve imajiner (sanal) kısımları temsil eder. π Gauss tamsayısının; eşleğini $\overline{\pi} = \pi_1 - \pi_2 i$ ve normu $N(\pi) = \pi\overline{\pi} = \overline{\pi}\pi = \pi_1^2 + \pi_2^2$ ile tanımlanır.

Önerme 1.3.1. $N: \mathcal{G} \to \mathbb{Z}$, $N(\pi) = \pi\overline{\pi} = |\pi|^2$ ile tanımlı fonksiyon aşağıdaki koşulları sağlar.

i. $\forall \pi \in \mathcal{G}$ için $N(\pi) \geq 0$,

ii. $N(\pi) = 0 \Leftrightarrow \pi = 0$,

iii. $\forall \pi, \lambda \in \mathcal{G}$ için $N(\pi\lambda) = N(\pi)N(\lambda)$.

Bu özellikleri sağlayan bir fonksiyona çarpımsal norm denir [7].

Önerme 1.3.2. $\pi \in \mathcal{G}$ için $N(\pi)$ bir asal tam sayı ise π Gauss tamsayısına bir asal Gauss tam sayısı denir [7].

Teorem 1.3.1. (Gauss Tamsayıları için Kalanlı Bölme) $\pi, \lambda \in \mathcal{G}$ ve $\pi \neq 0$ olmak üzere

$$\lambda = \pi\delta + \gamma \; ve \; 0 \leq N(\gamma) < N(\pi) \tag{1.3.1}$$

olacak şekilde $\delta, \gamma \in \mathcal{G}$ vardır [7].

Tanım 1.3.2. $\pi = \pi_1 + \pi_2 i$ bir Gauss tamsayısı olsun. $(\pi_1, \pi_2) = 1$ ise π Gauss tamsayısına primitif Gauss tamsayısı denir [7].

Not 1.3.1. Gauss tamsayılar halkası, birimli ve değişmeli bir halka olmasından dolayı sağ denklik sınıfları ve sol denklik sınıfları aynıdır. Tez çalışmasında sol denklik sınıfları üzerinden çalışılacağından dolayı aşağıda Gauss tamsayılarının sol denklik sınıfları tanımlanmaktadır. Benzer şekilde sağ denklik sınıfları da tanımlanabilir. Teorem 1.3.1'de verilen Gauss tamsayıları için kalanlı bölme özelliği $(mod\ \pi)$'ye göre bir denklik bağıntısı ile tanımlanır. İyi tanımlı olan bu denklik bağıntısı $\lambda \ {}_{\pi} \equiv \gamma$ ile temsil edilir. Burada ${}_{\pi} \equiv$, π'nin sol denklik bağıntısını temsil eder. Bu denklik bağıntısına göre elde edilen kalan sınıfların kümesi

$$\mathcal{G}_\pi = \{\lambda \ (mod\ \pi) : \lambda \in \mathcal{G}\} \tag{1.3.2}$$

ile tanımlanır [7].

Teorem 1.3.2. $\pi = \pi_1 + \pi_2 i$ Gauss tamsayısı olsun. π_1 ve π_2 aralarında asal tamsayılar ise

$$\mathcal{G}/_{\langle \pi \rangle} \cong \mathbb{Z}_{\pi_1^2 + \pi_2^2} \tag{1.3.3}$$

dir [7].

Tanım 1.3.3. $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ ile temsil edilen Hamilton kuaterniyonu aşağıdaki dönüşümlerle birlikte birleşmeli ve birimli bir halkadır.

i. $1, i, j, k$ sembolleri üzerinde $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ bir serbest $\mathbb{R}-$modüldür. Yani, $\mathbb{H}(\mathbb{R}) = \{\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}$,

ii. 1 çarpımsal birimdir,

iii. $i^2 = j^2 = k^2 = -1$,

iv. $ij = -ji = k; jk = -kj =$ i; $ki = -ik =$ j

dir [7].

α kuaterniyon sayısının; eşleniği $\overline{\alpha} = \alpha_1 - \alpha_2 i - \alpha_3 j - \alpha_4 k$ ve normu $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\alpha = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2$ ile tanımlanır [7].

Tanım 1.3.4. Kuaterniyonlar halkası bir çarpımsal normdur. Yani, $\alpha, \lambda \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$N(\alpha\lambda) = N(\alpha)N(\lambda) \tag{1.3.4}$$

dır [7].

Tanım 1.3.5. $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$ bir kuaterniyon olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{Z}$ ise α kuaterniyonuna bir kuaterniyon tamsayısı ya da Lipschitz tamsayısı denir [7].

Lipschitz tamsayılar kümesi

$$\mathcal{L} = \mathbb{H}(\mathbb{Z}) = \{\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{Z}\} \tag{1.3.5}$$

ile tanımlanır [7].

Kuaterniyonlar üzerinde tanımlanan eşlenik ve norm, Lipschitz tamsayıları için de benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 1.3.6. α bir Lipschitz tamsayısı olsun. $N(\alpha) = 1$ olacak şekildeki Lipschitz tamsayılarına birimsel elemanlar denir. Birimsel elemanların kümesi $\mathcal{U}_{\mathcal{L}} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ olmak üzere 8 elemandan oluşmaktadır [7].

Tanım 1.3.7. $\alpha \in \mathcal{L}$ olmak üzere

i. $N(\alpha)$ bir tek tamsayı ise α Lipschitz tamsayısına tek Lipschitz tamsayısı,

ii. $N(\alpha)$ bir çift tamsayı ise α Lipschitz tamsayısına çift Lipschitz tamsayısı,

iii. $N(\alpha)$ bir asal tamsayısı ise α Lipschitz tamsayısına asal Lipschitz tamsayısı,

denir [7].

Tanım 1.3.8. $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 1$ olacak şekildeki $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4$ Lipschitz tamsayısına primitif Lipschitz tamsayısı denir [8].

Tanım 1.3.9. $\alpha, \lambda \in \mathcal{L}$ olmak üzere $\lambda = \alpha\delta$ olacak şekilde $\delta \in \mathcal{L}$ varsa α Lipschitz tamsayısına, λ Lipschitz tamsayısının bir sol böleni denir [7].

Lemma 1.3.1. α tek (ya da asal) Lipschitz tamsayısı ve $\lambda \in \mathcal{L}$ olsun.

$$\lambda = \alpha\delta + \gamma \; ve \; 0 \leq N(\gamma) < N(\alpha) \tag{1.3.6}$$

olacak şekilde $\delta, \gamma \in \mathcal{L}$ vardır [7].

Not 1.3.2. α'nın $\mathcal{L}$ halkasında oluşturduğu sol ideal, $\mathcal{L}$ halkasının bir normal alt grubudur ve bu alt grup

$$\langle\alpha\rangle = \{\alpha\delta : \delta \in \mathcal{L}\} \tag{1.3.7}$$

olarak tanımlanır. Bu alt gruba göre elde edilen kalan sınıfların kümesi

$$\mathcal{L}/_{\langle\alpha\rangle} = \mathcal{L}_\alpha = \{\lambda \; (mod \; \alpha) : \lambda \in \mathcal{L}\} \tag{1.3.8}$$

ile temsil edilir [9].

Teorem 1.3.3. $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$, primitif Lipschitz tamsayısı ise

$$\mathcal{L}/_{\langle\alpha\rangle} \cong \mathbb{Z}_{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2} \tag{1.3.9}$$

dir [10].

Tanım 1.3.10. $\mathbb{Z} + {}^1/_2 = \{\ldots, -{}^3/_2, -{}^1/_2, -{}^1/_2, {}^3/_2, \ldots\}$ yarım-tamsayılar kümesi olmak üzere her bir bileşeni yarım-tamsayı olan Hurwitz tamsayıları kümesi

$$\mathbb{H}\left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right) = \left\{\beta = \beta_1 + \beta_2 i + \beta_3 j + \beta_4 k : \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right\} \tag{1.3.10}$$

ile tanımlanır. Buradan, Hurwitz tamsayılar kümesi

$$\mathcal{H} = \mathbb{H}(\mathbb{Z}) \cup \mathbb{H}\left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.3.11}$$

ile tanımlanır.

β Hurwitz tamsayının; eşleniği $\overline{\beta} = \beta_1 - \beta_2 i - \beta_3 j - \beta_4 k$ ve normu $N(\beta) = \beta\overline{\beta} = \overline{\beta}\beta = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2$ olarak tanımlanır [11].

Tanım 1.3.11. $\beta \in \mathcal{H}$ olmak üzere

i. $N(\beta)$ bir tek tamsayı ise β Hurwitz tamsayısına tek Hurwitz tamsayısı,

ii. $N(\beta)$ bir çift tamsayı ise β Hurwitz tamsayısına çift Hurwitz tamsayısı,

iii. $N(\beta)$ bir asal tamsayısı ise β Hurwitz tamsayısına asal Hurwitz tamsayısı denir [11].

Tanım 1.3.12. $\beta = \beta_1 + \beta_2 i + \beta_3 j + \beta_4 k$ bir Hurwitz tamsayısı olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan β Hurwitz tamsayısına bir primitif Hurwitz tamsayısı denir.

i. $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{Z}^+$ ise $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = 1$'dir.

ii. $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{Z} + {}^1/_2$ ise $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere $\beta_1 = {}^{2a_1+1}/_2$, $\beta_2 = {}^{2a_2+1}/_2$, $\beta_3 = {}^{2a_3+1}/_2$ ve $\beta_4 = {}^{2a_4+1}/_2$ olsun. Buradan, $(2a_1 + 1, 2a_2 + 1, 2a_3 + 1, 2a_4 + 1) = 1$'dir.

Tanım 1.3.13. $\beta, \lambda \in \mathcal{H}$ olmak üzere $\lambda = \beta\delta$ olacak şekilde $\delta \in \mathcal{H}$ varsa β Hurwitz tamsayısına, λ Hurwitz tamsayısının bir sol böleni denir [9].

Lemma 1.3.2. β tek (ya da asal) Hurwitz tamsayısı ve $\lambda \in \mathcal{H}$ olsun.

$$\lambda = \beta\delta + \gamma \; ve \; 0 \leq N(\gamma) < N(\beta) \tag{1.3.12}$$

olacak şekilde $\delta, \gamma \in \mathcal{H}$ vardır [9].

Not 1.3.3. β'nın $\mathcal{H}$ halkasında oluşturduğu sol ideal, $\mathcal{H}$ halkasının bir normal alt grubudur ve bu alt grup

$$\langle\beta\rangle = \{\beta\delta : \delta \in \mathcal{H}\} \tag{1.3.13}$$

olarak tanımlanır. Bu alt gruba göre elde edilen kalan sınıfların kümesi

$$\mathcal{H}_\beta = \{\lambda \; (mod \; \beta) : \lambda \in \mathcal{H}\} \tag{1.3.14}$$

ile temsil edilir [9].

Önerme 1.3.3. α bir asal Lipchitz tamsayısı ve $\beta \in \mathcal{H}$ olsun.

$$\beta = \alpha\delta + \gamma \; ve \; 0 \leq N(\gamma) < N(\alpha) \tag{1.3.15}$$

olacak şekilde $\gamma \in \mathcal{H}$ ve $\delta \in \mathcal{L}$ vardır [12].

Önerme 1.3.4. α bir asal Lipchitz tamsayısı ve $\beta \in \mathcal{H}$ olsun.

$$\beta = \alpha\delta + \gamma \; ve \; 0 \leq N(\gamma) < N(\alpha) \tag{1.3.16}$$

olacak şekilde $\gamma \in \mathcal{H}$ ve $\delta \in \mathbb{H}\left(\mathbb{Z} + {}^1/_2\right)$ vardır [12].

Teorem 1.3.4. $\beta = \beta_1 + \beta_2 i + \beta_3 j + \beta_4 k$ normu asal olan bir primitif Hurwitz tamsayısı olsun. Buradan, $N(\beta) = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2$ olmak üzere

$$\mathcal{H}_\beta = {}^{\mathcal{H}}/_{\langle\beta\rangle} \cong \mathbb{Z}_{N(\beta)} \tag{1.3.17}$$

dır [13].

2. LİTERATÜR ÖZETİ

2.1. Kodlama Teorisi ve Bilgi Teorisinin Kısa Bir Tarihçesi

Fransız bilim insanı Claude Chappe, 1790 yılında başladığı çalışmalarını uzun mesafeli iletişim üzerine yoğunlaştırmış ve yapılan denemeler sonucunda 1792 yılında telgrafın atası olarak kabul edilen optik telgrafı icat etmiştir. Optik telgraftaki iletişim sistemi, tepelerin üzerine kurulmuş her bir kulenin üzerinde her konumu bir harf veya rakama tekabül eden 49 farklı konuma ayarlanabilen iki uzun kola sahip bir makine ile kulelerden oluşan bir ağın oluşturulmasıyla kurulmuştur.

Amerikalı bilim insanı Joseph Henry, 1830 yılında elektrik akımını teller aracılığıyla uzaklara taşıyıp bir elektromıknatısa bağlı olan zili çalıştırmak suretiyle elektrikli telgrafı icat etmiştir.

Kaynak kodlamanın atası olarak kabul edilen, kısa ve uzun işaretler $(\cdot \; ve \; -)$ ile bunlara karşılık gelen ışık veya sesleri kullanarak bilgi aktarımını sağlamak için tanımlanan Morse kodu 1832 yılında telgrafla ilgilenmeye başlayan Amerikalı mucit ve ressam olan Samuel Morse tarafından 1835 yılında oluşturulmuştur. Morse kodu, Samuel Morse tarafından 1837 yılında icat ettiği elektromıknatıslı telgraf ile kullanıma başlanmıştır. Fakat Morse'un bulduğu bu kodlama sisteminin kullanımı sanıldığı kadar kolay olmamıştır. Bundan dolayı Morse, asistanı Alfred Vali'nin önerdiği kısa ve uzun sinyallerin yanında duraklamalarında yer aldığı bir kodlama sistemini kullanmayı tercih etmiştir. Bu kodlama sistemi daha sonra Amerikan Mors Kodu olarak adlandırılmıştır.

İletişim sistemlerinin 1792 yılında optik telgrafın icadı ile ortaya çıktığı anlaşılmaktadır. Kodlama teorisinin ise kodlama teorisinin bir alt dalı olan kaynak kodlamasının atası olarak kabul edilen ve 1835 yılında oluşturulan ve 1837 yılında kullanıma başlanan Morse kodu ile ortaya çıktığı anlaşılmaktadır. Sonuç olarak, [14], [15] ve [16]'dan edinilen bu bilgiler ışığında, iletişim sistemlerinin 18. yüzyılın sonlarında (1792) optik telgrafın icat edilmesiyle ve kodlama teorisinin ise 19. yüzyılın ilk yarısında (1835) Morse kodunun kullanılmasıyla başladığı anlaşılmaktadır.

Claude Elwood Shannon, Amerikalı matematikçi, kriptograf ve elektrik mühendisidir. Shannon, "*Şifreleme bilimde kullanılan bazı algoritmalar sonucunda sayısal kodlarla şifrelenmiş bilgi üçüncü taraflardan gizlenebiliyorsa, neden gürültülü bir iletişim kanalında bozulmaya uğrayabilen (iletişim hattındaki parazitler, iletişim hattına dışardan müdahaleler ve diğer bozucu etkiler) bilgiyi korumasın."* [17] düşüncesiyle ortaya attığı ve 1948 yılında [18] ve [19]'da yayınlanan daha sonra [20]'de toparlanmış olarak verilen makalesi, iletişim teorisi alanında önemli bir çalışma olarak bilinmektedir. Bu çalışmasıyla Shannon, Bilgi Kuramı'nın kurulmasında, kaynak ve kanal kodlama alanında sunduğu teoriler ile kodlama teorisinin gelişimine öncülük etmiştir. Shannon'un bu çalışması iki ana kategoriye ayrılabilir. Birinci kategoride, bilgi kaynaklarıyla ilgili temel sınırları veren kaynak kodlama teoremi ele alınır. Yani, bilgi kaynakları için matematiksel modeller geliştirilir ve bir kaynağın içerdiği bilginin ölçülmesi için bir yöntem sunulur. Ayrıca, kaynak kodlamanın "*Bir kaynağın sıkıştırılıp tekrar açılabileceği asgari hız nedir?"* [17] ile ifade edilen temel sorusu ele alınır ve cevaplanır. İkinci kategoride, bilginin gürültülü kanallar üzerinden iletimiyle ilgili olan gürültülü kanal kodlama teoremi ele alınır. Yani, gürültülü kanal kodlama teoremi "*Bilginin gürültülü bir kanaldan güvenilir olarak iletilebileceği azami hız nedir?"*[17] sorusunu ele alır. Bununla birlikte güvenilir iletişim için mutlak asgari değer de gürültülü kanal kodlama teoreminde verilen eşitlikten

$$ln2 = 0.693 \approx -1.6\ dB \qquad (2.1.1)$$

olarak hesaplanmıştır. Gürültülü kanal teoremi, gürültünün bir iletişim kanalında sebep olduğu esas sınırlarının iletişimin güvenirliği üzerinde değil, iletişimin hızı üzerinde olduğunu söylemektedir. Diğer bir ifadeyle, iletim hızı R, kanal kapasitesi C'den küçükse R hızında güvenilir iletişim mümkün olmaktadır. Aksi durumda ise R hızında güvenilir iletişim mümkün olmamaktadır. Shannon bu makalesinda ayrıca, bilginin ölçülebilir bir büyüklük olduğu ve temel biriminin "bit" olduğunu ifade etmiştir. Literatürde ilk defa Shannon'un [20]'deki çalışmasında rastlanan "bit" ifadesi, sayısal koddaki değerlerden sadece biri (örneğin 0 veya 1 değeri) olarak tanımlanmaktadır. Yeterli sayıda bit kullanılarak her türlü bilginin sayı, harf, görüntü, ses, kelime ve benzeri verilerin sayısal kodlarla (0 veya 1'lerden oluşan kodsözcükler gibi) temsil edilebileceğini ifade etmiştir. Sayısal olarak kodlanan bilgiye ek olarak yeterli sayıda kontrol biti eklenmkte ve gürültülü bir kanalda iletişim esnasında bozulmaya uğrayabilecek kodların, alındığı noktada düzeltilmesi için kodlanan bilgiye

eklenen kontrol bit(ler)i ile güvenilir bir şekilde iletişimin sağlanabileceği belirtilmiştir. Bu konudaki detaylı bilgiye [17]'den ulaşılabilir.

2.2. Literatürde Yapılan Çalışmalar

Shannon'un çalışması uygun kodların var olduğunu ifade etmesine rağmen kodlamanın nasıl yapılabileceğine dair açık bir yöntem vermemektedir. Bunun üzerine uygun kodlamanın nasıl yapılabileceğine ilişkin araştırmalarla birlikte kodlama teorisindeki gelişmeler hız kazanmıştır. Bu araştırmalar ilk olarak hata tespit eden ve hata düzelten kod yapıları üzerine olmuştur.

Hata tespit eden ve hata düzelten kod yapıları üzerine yapılan ilk çalışma; Richard Wesley Hamming tarafından 1947 yılında tamamlanan ancak İkinci Dünya Savaşı'nın patlak vermesiyle ancak 1950 yılında yayımlanan "Hata Tespit Eden ve Hata Düzelten Kodlar [21]" (Hamming Kodu) adlı makalesi kabul edilmektedir.

Hata tespit eden ve hata düzelten kod yapıları üzerine literatürde yayımlanan ilk çalışma; Marcel Jules Edouard Golay'ın 1949 yılında yayımlanan "Digital Kodlama Üzerine Notlar [22]" (Golay kodu) adlı makalesidir.

David E. Muller tarafından 1954 yılında yayımlanan "Boole Cebirinin Anahtarlama Devre Tasarımına ve Hata Tespitine Uygulanması [23]" ve Irving S. Reed tarafından 1954 yılında yayımlanan "Çoklu Hata Düzelten Kodların Bir Sınıfı ve Kod Çözme Şeması [24]" (Reed-Muller kodu), Alexis Hocquenghem tarafından 1959 yılında yayımlanan "Hata Düzelten Kodlar [25]" ve Raj Chandra Bose ve Dwijendra Kumar Ray-Chaudhuri tarafından 1960 yılında yayımlanan "Hata Düzelten İkili Grup Kodların Bir Sınıfı Üzerine [26]" (BCH kodu), Irving S. Reed ve Solomon Gustave tarafından 1960 yılında yayımlanan "Belirli Sonlu Cisimler Üzerinde Polinom Kodları [27]" (Reed-Solomon kodu) ve Valerii Denisovich Goppa tarafından 1970 yılında yayımlanan "Lineer Hata Düzelten Kodların Yeni Bir Sınıfı [28]" (Goppa kodu) adlı makaleleri hata tespit eden ve hata düzelten kodlar üzerine yapılan bazı önemli çalışmalardır.

1970'lerde başlayan halkalar üzerinde tanımlı lineer kod yapıları ile ilgili bazı önemli çalışmalar [29-36]'da verilmiştir.

Yüksek boyutlu vektör uzayları üzerinde kodlar elde etmek için yapılan ilk çalışma, iki boyutlu bir vektör uzayı olan Gauss tamsayıları ile 1994 yılında Alman

matematikçi Huber tarafından [37]'de verilen çalışma olmuştur. Huber [37]'de, iki boyutlu sinyal uzayında kodlama için kullanılan Gauss tamsayıları üzerinde blok kodların nasıl inşa edileceğini göstermiştir. Huber [37]'de, $\pi = \pi_1 + \pi_2 i$ bir Gauss tamsayısı olmak üzere $\pi_1 > \pi_2 > 0$ olmak üzere $N(\pi) \equiv 1\ (mod\ 4)$ olacak biçimdeki Gauss tamsayıları ile çalışmıştır. Ayrıca, Gauss tamsayıları üzeinde kodlar için Mannheim metriği ile tek hata düzelten kodları $(OMEC)$ inşa etmiştir. Huber [37]'deki çalışmasına benzer olacak şekildeki bir çalışması da, [38]'de iki boyutlu bir vektör uzayı olan Eisenstein-Jacobi tamsayıları üzerinde yapmıştır.

Martinez ve arkadaşları [39] ve [40]'ta sırasıyla Gauss tamsayıları ve Eisenstein-Jacobi tamsayılarının bölüm halkaları üzerinde Graf Teori'yi uygulamışlardır. Böylece, Cayley graf ile üretilen ve uygun uzunlukta olacak şekildeki bir uzunluğunda mükemmel kodlar için yeni metrikler önermişlerdir.

Martinez ve arkadaşları [41]'de, Gauss yıldızkümelerini Cayley grafları ile modellemişlerdir. Bunun bir sonucu olarak, çoklu mükemmel hata düzelten kodlar için Mannheim uzaklığının uygun bir metrik olmadığını göstermişlerdir. Bundan dolayı, [41]'de çoklu mükemmel hata düzelten kodlar için uygun bir metrik olarak Gaussian uzaklığını önermişlerdir.

Özen ve Güzeltepe [35]'te, Mannheim metriğine göre Gauss tamsayıları üzerinde devirli kodları elde etmişlerdir.

Freudenberger ve arkadaşları [42]'de, küme bölüntü özelliği ve çoklu seviye kodlama tekniği ile primitif Gauss tamsayıları üzerinde kodları çalışmışlardır.

Kuateniyonlar halkası, öncelikli olarak [43] ve [44]'te, uzay-zaman kodlamasında ele alınmıştır. Martinez ve arkadaşları, [39] ve [40]'taki çalışmalara benzer olan ama yeni sonuçları [45]'te tam metin olarak sunulan seminer çalışmasında graf teoriyi kullanarak kuaterniyonların bölüm halkalarının nasıl elde edilebileceğini göstermişlerdir.

Martinez ve arkadaşları [46]'da, Cayley graflarını tanımlayarak bu graflar üzerinden Lipschitz tamsayıların bölüm halkası üzerindeki kodlar için mükemmel hata düzelten kodları tanımlamışlardır. Cayley grafları ile Lipschitz metriğini tanımlamışlardır. Ayrıca, Lee metriği ve Lipchitz metriği arasında yeni bir ilişkiyi çalışmışlardır.

Özen ve Güzeltepe [47]'de, kuaterniyon Mannheim metriğini tanıtmışlar ve normu asal olmak üzere değişme özelliğine sahip kuaterniyon tamsayıları (Lipschitz

tamsayıları) üzerinde kodları çalışmışlardır. Bununla birlikte, kuaterniyon Mannheim metriğine göre kuaterniyon tamsayıları üzerinde tek hata düzelten kodları ve çift hata düzelten kodları çalışmışlardır. Ayrıca, bu kodlar için dekodlama prosedürü sunmuşlardır.

Özen ve Güzeltepe [13]'te, kuaterniyon Mannheim metriği üzerinden normu asal olmak üzere değişme özelliğine sahip kuaterniyon tamsayıları (Lipschitz tamsayıları) üzerinde devirli kodları çalışmışlardır.

Shah ve Rasool [48]'de, Mannheim metriği eşliğinde kuaterniyon tamsayıları üzerinde n uzunluklu devirli kodlar için bir ve iki hata-düzelten kodları çalışmışlardır. Bununla birlikte, kuaterniyon tamsayıları üzerinde verilen n uzunluklu bir devirli kod için $(2n-1)$ uzunluklu devirli kodların varlığını göstermişlerdir. Ayrıca kuaterniyon tamsayıları üzerinde n ve $(2n-1)$ uzunluklu devirli kodlar için farklı dekodlama prosedürleri sunmuşlardır.

Güzeltepe [49]'da, Hurwitz tamsayıları üzerinde kodlar hakkında literatüre geniş katkılar veren bir çalışma sunmuştur. Bunlar; Hurwitz tamsayıları üzerinde kodlar için Hurwitz metriği adında yeni bir metrik tanımlamış ve bu metriğin uygunluğunu göstermiştir. Tanımladığı Hurwitz metriği eşliğinde Hurwitz tamsayıları üzerinde lineer kodların yeni sınıflarını, kendi tanımladığı bir enkodlama metodunu kullanarak elde etmiştir. Bununla birlikte, Hurwitz metriği eşliğinde iki ağırlığa kadar Hurwitz tamsayıları üzerinde hata-düzelten kodlar için dekodlama prosedürleri tanımlamıştır. Ayrıca, kod(ların), kod oranları ve ortalama enerjileri bakımından performanslarını karşılaştırmıştır.

Güzeltepe ve Heden [9]'da, Mannheim, Lipschitz ve Hurwitz metrikleri eşliğinde sırasıyla Gauss, Lipschitz ve Hurwitz tamsayıları üzerinden 1 ve 2 hata-düzelten mükemmel kodları çalışmışlardır. Ayrıca, Gauss, Lipschitz ve Hurwitz tamsayılarının bazı cebirsel özelliklerini incelemişlerdir.

Abdelmoumen ve arkadaşları [51]'de, Öklid bölmesine sahip değişmeli ve değişmeli olmayan Gauss ve Lipschitz tamsayılar halkası üzerinden kodları inşa etmişlerdir. Primitif olma özelliğine sahip Gauss tamsayıları ve tek Lipschitz tamsayılarını ele almışlardır.

Freudenberger ve Shavgulidze [8]'de, Lipschitz tamsayıları üzerinde kodlama için yeni sinyal yıldızkümelerini sunmuşlardır.

Freudenberger ve Shavgulidze [36]'da, primitif Gauss ve primitif Lipschitz tamsayılarını ele almışlardır. İlk önce normu yüzden küçük veya eşit olmak üzere aynı norma sahip olacak şekilde primitif Gauss tamsayıları ve primitif Lipschitz tamsayılarından elde edilen sırasıyla Gauss yıldızkümeleri ve Lipschitz yıldızkümelerinin, Gauss gürültü kanalındaki iletim hızını karşılaştırmak için kullanılan CFM (Constellation Figure of Merit) ve asimptotik kod kazancı anlamına gelen SGO (Sinyal Gürültü Oranı) değerlerine göre karşılaştırmışlardır.

Heden ve Güzeltepe [9]'daki çalışmalarında verilen bir sonucun tamamlayıcı olarak yayınladıkları [51]'deki makalesinde, n uzunluğa sahip bir hata düzelten Lipschitz ağırlıklı mükemmel kodları çalışmışlardır.

Güzeltepe ve Altınel [12]'de, n uzunluğa sahip bir hata düzelten Hurwitz ağırlıklı mükemmel kodları çalışmışlardır.

Güzeltepe [52]'de, yeni bir Hurwitz metriği eşliğinde Hurwitz tamsayıları üzerinde lineer kodları ele almıştır. Bu metriğe göre Hurwitz tamsayıları üzerinde bir hata düzelten mükemmel kodları tanımlamıştır. Bununla birlikte, bu kodlar için bir dekodlama metodu tanımlamıştır. Ayrıca, gürültülü Gauss kanalı üzerinde iletim açısından ortalama enerjileri ve bantgenişliği üzerinden karşılaştırmalarını yapmıştır.

Duran ve Güzeltepe [56]'da, Öklid bölme algoritması ile modülo fonksiyonu arasındaki benzerliği göz önünde bulundurarak her bir bileşeni tek tamsayı olan primitif Lipschitz tamsayıları üzerinden primitif Lipschitz tamsayılarının kodlama için uygun olmadıklarını göstermişlerdir. Bu problemi ortadan kaldırmak adına Öklid bölmesine sahip ve kodlama için uygun olan primitif Lipschitz tamsayılardan oluşan kodlayıcı Lipschitz tamsayılarını tanımlamışlardır. Ayrıca elde edilen Lipschitz yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalı üzerindeki performanslarını araştırmışlardır.

Duran [57]'de, Öklid bölme algoritması ile modülo fonksiyonu arasındaki benzerliği göz önünde bulundurarak her biri bileşeni tek tamsayı olan primitif Hurwitz tamsayıları üzerinden primitif Hurwitz tamsayılarının kodlama için uygun olmadıklarını göstermiştir. Bu problemi ortadan kaldırmak adına kodlama için uygun olan primitif Hurwitz tamsayılardan oluşan kodlayıcı Hurwitz tamsayılarını tanımlamıştır. Ayrıca elde edilen Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalı üzerindeki performanslarını araştırmıştır.

[58]'de Duran ve Güzeltepe, Hurwitz tamsayıları üzerinden sinyal yıldızkümeleri elde etmek için iki farklı modülo fonksiyonu ve minimum olma koşulları ile oluşan farklı bir modülo fonksiyonu tanımlamışlardır. Asal Hurwitz tamsayıları üzerinden tanımladıkları modülo fonksiyonu ile elde edilen Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalı üzerindeki performanslarını araştırmışlardır.

3. YUVARLAMA NOTASYONLARI VE MODÜLO FONKSİYONU

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır.

Birinci alt bölümde, en yakın tamsayıya yuvarlama ve en yakın yarım-tamsayıya yuvarlama notasyonlarının tanımları verilmektedir. Ayrıca, bu notasyonların tez çalışmasındaki çalışma prensipleri sonuçlar üzerinden sunulmaktadır.

İkinci alt bölümde, tez çalışmasında kullanılacak olan modülo fonksiyonu sunulmaktadır. Ayrıca, modülo fonksiyonu ile ilgili bazı cebirsel özellikler ve sonuçlar verilmektedir.

Bu bölümde yapılan çalışmalar aksi belirtilmedikçe asal (veya tek) Hurwitz tamsayıları üzerinden yapılacaktır.

3.1. Yuvarlama Notasyonları ve Çalışma Prensipleri

Tanım 3.1.1. $[|\cdot|]$ ile temsil edilen en yakın tamsayıya yuvarlama notasyonu; bir rasyonel tamsayının kendisine en yakın tamsayıya yuvarlanması olarak tanımlanır [12].

En yakın tamsayıya yuvarlama notasyonu, bir Gauss tamsayısının veya kuaterniyonun her bir birleşeni ayrı ayrı alınmak suretiyle ilgili bileşendeki rasyonel tamsayının kendisine en yakın tamsayıya yuvarlanması olarak tanımlanır. Örneğin; $[|{}^{1}/_{2}|] + [|{}^{3}/_{2}|]\mathrm{i} + \left[\left|-{}^{9}/_{5}\right|\right]\mathrm{j} + \left[\left|-{}^{5}/_{4}\right|\right]\mathrm{k} = \mathrm{i} - 2\mathrm{j} - \mathrm{k}.$

Uyarı 3.1.1. $\mathbb{Z} + {}^{1}/_{2} = \{\dots, -{}^{3}/_{2}, -{}^{1}/_{2}, {}^{1}/_{2}, {}^{3}/_{2}, \dots\}$ ile yarım-tamsayılar kümesi temsil edilir. Bu kümenin her bir elemanına ise bir yarım-tamsayı denir.

Tanım 3.1.2. $[\|\cdot\|]$ ile temsil edilen en yakın yarım-tamsayıya yuvarlama notasyonu; bir rasyonel tamsayının kendisine en yakın yarım-tamsayıya yuvarlanması olarak tanımlanır [12].

En yakın yarım-tamsayıya yuvarlama notasyonu, bir Gauss tamsayısının veya kuaterniyonun her bir bileşeni ayrı ayrı alınmak suretiyle ilgili bileşendeki bir rasyonel

tamsayının kendisine en yakın yarım-tamsayıya yuvaranması olarak tanımlanır. Örneğin; $[|1|] + [|-3|]\mathrm{i} + \left[\left|-{}^{11}/_{5}\right|\right]\mathrm{j} + [|{}^{7}/_{4}|]\mathrm{k} = {}^{1}/_{2} - {}^{5}/_{2}\,\mathrm{i} - {}^{5}/_{2}\,\mathrm{j} + {}^{3}/_{2}\,\mathrm{k}$.

Bu bölümden itibaren yapılan hesaplamalarda *Wolfram Mathematica 14* programı kullanılmıştır. Ek-A'da da görüleceğe üzere *Mathematica*'da oluşturulan algoritmaların içindeki en yakın tamsayıya ve en yakın yarım-tamsayıya yuvarlama işlemlerinin çalışma prensipleri aşağıda verilen sonuçlar üzerinden gösterilmektedir.

Aşağıdaki sonuç ile; bir Hurwitz tamsayısının herhangi bir bileşeni üzerinden yuvarlama notasyonlarının çalışma prensipleri verilmektetir.

Sonuç 3.1.1. $\beta = \beta_1 + \beta_2 i + \beta_3 j + \beta_4 k$ bir Hurwitz tamsayısı olsun. β_1 bileşenini ele alalım. Aşağıdaki koşullar sağlanır.

i. $\beta_1 \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ise

$$[\|\beta_1\|] = \pm\beta_1 \mp \frac{1}{2} \tag{3.1.1}$$

dir.

ii. $\beta_1 \in \mathbb{Z} + {}^{1}/_{2}$ ise

$$[|\beta_1|] = \pm\beta_1 \mp \frac{1}{2} \tag{3.1.2}$$

dir.

iii. $\beta_1 = 0$ ise

$$[\|\beta_1\|] = [\|0\|] = \frac{1}{2} \tag{3.1.3}$$

dir.

Aşağıdaki sonuç ile; herhangi iki Hurwitz tamsayısından alınan birer bileşen üzerinden bileşenlerin çarpımları için yuvarlama notasyonlarının çalışma prensipleri verilmektedir.

Sonuç 3.1.2. $\beta = \beta_1 + \beta_2 i + \beta_3 j + \beta_4 k$ ve $\beta' = \beta_1' + \beta_2' i + \beta_3' j + \beta_4' k$ iki Hurwitz tamsayısı olsun. β_1 ve β_1' bileşenlerini ele alalım. Aşağıdaki koşullar sağlanır.

i. $\beta_1\beta_1' \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ise

$$[\|\beta_1\beta_1'\|] = \pm\beta_1\beta_1' \mp \frac{1}{2} \tag{3.1.4}$$

dir.

ii. β_1 tek tamsayı ve $\beta_1' \in \mathbb{Z} + {}^1\!/_2$ için $\beta_1\beta_1' \in \mathbb{Z} + {}^1\!/_2$ olduğundan dolayı

$$[|\beta_1\beta_1'|] = \pm\beta_1\beta_1' \mp \frac{1}{2} \tag{3.1.5}$$

dir.

iii. β_1 sıfırdan farklı bir çift tamsayı ve $\beta_1' \in \mathbb{Z} + {}^1\!/_2$ için $\beta_1\beta_1' \in \mathbb{Z} - \{0\}$ olacağından dolayı (i.)'deki koşul geçerli olur.

iv. a_1 ve a_1' tek tamsayılar olmak üzere $\beta_1 = {}^{a_1}\!/_2$ ve $\beta_1' = {}^{a_1'}\!/_2$ olsun. $a_1a_1' \equiv 1\ (mod\ 4)$ ise

$$[|\beta_1\beta_1'|] = \pm\beta_1\beta_1' \mp \frac{1}{4} \tag{3.1.6}$$

ve

$$[\|\beta_1\beta_1'\|] = \pm\beta_1\beta_1' \pm \frac{1}{4} \tag{3.1.7}$$

tür. $a_1a_1' \equiv 3\ (mod\ 4)$ ise

$$[|\beta_1\beta_1'|] = \pm\beta_1\beta_1' \pm \frac{1}{4} \tag{3.1.8}$$

ve

$$[\|\beta_1\beta_1'\|] = \pm\beta_1\beta_1' \mp \frac{1}{4} \tag{3.1.9}$$

tür.

Aşağıdaki sonuç ile; herhangi bir Hurwitz tamsayısı için yuvarlama notasyonlarının çalışma prensipleri verilmektedir.

Sonuç 3.1.3. $\beta = \pm\beta_1 \pm \beta_2 i \pm \beta_3 j \pm \beta_4 k$ bir Hurwitz tamsayısı olmak üzere $\beta \in \mathbb{H}(\mathbb{Z}) - \{0\}$ ise

$$[\|\beta\|] = \left(\pm\beta_1 \mp \frac{1}{2}\right) + \left(\pm\beta_2 \mp \frac{1}{2}\right)i + \left(\pm\beta_3 \mp \frac{1}{2}\right)j + \left(\pm\beta_4 \mp \frac{1}{2}\right)k \tag{3.1.10}$$

veya $\beta \in \mathbb{H}\left(\mathbb{Z} + {}^1\!/_2\right)$ ise

$$[|\beta|] = \left(\pm\beta_1 \pm \frac{1}{2}\right) + \left(\pm\beta_2 \pm \frac{1}{2}\right)i + \left(\pm\beta_3 \pm \frac{1}{2}\right)j + \left(\pm\beta_4 \pm \frac{1}{2}\right)k \tag{3.1.11}$$

olur.

Aşağıdaki sonuç ile; $0 \in \mathcal{H}$ iken en yakın yarım-tamsayıya yuvarlama notasyonunun çalışma prensibi verilmektedir.

Sonuç 3.1.4. $0 \in \mathcal{H}$ ise

$$[\|0\|] = [\|0 + 0\mathrm{i} + 0\mathrm{j} + 0\mathrm{k}\|] = [\|0\|] + [\|0\|]i + [\|0\|]j + [\|0\|]k$$

olup Sonuç 3.1.1'deki (iii.) koşulundan dolayı

$$[\|0\|] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k \tag{3.1.12}$$

olur.

3.2. Modülo Fonksiyonu

Tanım 3.2.1. β asal (veya tek) Hurwitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olsun. $\mu_\beta^{(1)}: \mathbb{Z}_{N(\beta)} \to \mathcal{H}_\beta$ modülo fonksiyonu

$$\mu_\beta^{(1)}(z) = z\ (mod\ \beta) = z - \beta \left[\left|\frac{\bar{\beta} z}{N(\beta)}\right|\right] \tag{3.2.1}$$

ve $\mu_\beta^{(2)}: \mathbb{Z}_{N(\beta)} \to \mathcal{H}_\beta$ modülo foksiyonu

$$\mu_\beta^{(2)}(z) = z\ (mod\ \beta) = z - \beta \left[\left\|\frac{\bar{\beta} z}{N(\beta)}\right\|\right] \tag{3.2.2}$$

olmak üzere $\mu_\beta: \mathbb{Z}_{N(\beta)} \to \mathcal{H}_\beta$ fonksiyonu; $\beta \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ ise

$$\mu_\beta(z) = \begin{cases} \mu_\beta^{(1)}(z), & N\left(\mu_\beta^{(1)}(z)\right) \le N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right)\ ise \\ \mu_\beta^{(2)}(z), & N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right) < N\left(\mu_\beta^{(1)}(z)\right)\ ise \end{cases} \tag{3.2.3}$$

ve $\beta \in \mathbb{H}\left(\mathbb{Z} + {}^1/_2\right)$ ise

$$\mu_\beta(z) = \begin{cases} \mu_\beta^{(1)}(z), & N\left(\mu_\beta^{(1)}(z)\right) < N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right)\ ise \\ \mu_\beta^{(2)}(z), & N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right) < N\left(\mu_\beta^{(1)}(z)\right)\ ise \\ \mu_\beta^{(1)}(z), & Normların\ eşitliği\ halinde\ z\ tek\ ise \\ \mu_\beta^{(2)}(z), & Normların\ eşitliği\ halinde\ z\ çift\ ise \end{cases} \tag{3.2.4}$$

olarak tanımlanır.

(3.2.4)'teki koşul; her bir bileşeni yarım-tamsayı olan primitif Hurwitz tamsayıları üzerinden Ek-A'da sunulan algoritmalar üzerinden *Mathematica* ile yapılan hesaplamalar sonucunda elde edilen kalan sınıfları kümesinin elemanları arasında $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}_{N(\beta)} - \{0\}$ için $z_1 + z_2 = N(\beta)$ olmak üzere $\mu_\beta(z_1) + \mu_\beta(z_2) = 0$ olacak şekilde bir ilişki ortaya koymasından dolayı modülo fonksiyonunun işleminde yer almaktadır.

Asal (veya tek) Hurwitz tamsayıları halkası üzerinden $\mu_\beta^{(1)}$ modülo foksiyonuna göre

$$\mathcal{H}_\beta^{(1)} = \left\{\mu_\beta^{(1)}(z) : z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}\right\} \tag{3.2.5}$$

ve $\mu_\beta^{(2)}$ modülo fonksiyonuna göre

$$\mathcal{H}_\beta^{(2)} = \left\{\mu_\beta^{(2)}(z) : z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}\right\} \tag{3.2.6}$$

kalan sınıfları kümeleri elde edilir. (3.2.5) ve (3.2.6)'daki kalan sınıfları kümelerindeki her bir eleman sırasıyla (3.2.3) veya (3.2.4)'teki koşul ile

$$\mathcal{H}_\beta = \left\{\mu_\beta(z): z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}\right\} \tag{3.2.7}$$

kalan sınıfları kümesi elde edilir.

Not 3.2.1. Not 1.3.3'e göre, β'nın $\mathcal{H}$ halkasında oluşturduğu sol ideal, $\mathcal{H}$ halkasının bir normal alt grubu $\langle\beta\rangle = \{\beta\delta : \delta \in \mathcal{H}\}$ ile tanımlanır. Buradan, μ_β modülo fonksiyonu eşliğinde elde edilen (3.2.7)'deki kalan sınıfları kümesi, $\mathcal{H}$ halkası üzerinde β sol ideali ile tanımlanan $\langle\beta\rangle$ normal alt grubuna göre elde edilen kalan sınıfları kümesini temsil eder.

μ_β modülo fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olmasından dolayı (3.2.5) ve (3.2.6)'daki her bir kalan sınıfı kümesinin eleman sayısı $N(\beta)$ olur. Dolayısıyla, (3.2.7)'deki kalan sınıfları kümesinin eleman sayısı da $N(\beta)$ olur.

$\mu_\beta^{(1)}$ ve $\mu_\beta^{(2)}$ modülo fonksiyonlarında $z = 0$ için elde edilen sonuçlar aşağıdaki önerme ile verilmektedir.

Önerme 3.2.1. β asal (veya tek) Hurwitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olsun. $z = 0$ için $\mu_\beta^{(1)}$ ve $\mu_\beta^{(2)}$ modülo fonksiyonlarına göre aşağıdaki koşullar sağlanır.

i. $\mu_\beta^{(1)}(0) = 0,$

ii. $\mu_\beta^{(2)}(0) = -\beta\left({}^1\!/_2 + {}^1\!/_2\, i + {}^1\!/_2\, j + {}^1\!/_2\, k\right)$,

iii. $N\left(\mu_\beta^{(2)}(0)\right) = N(\beta)$,

iv. $\mu_\beta^{(2)}(0) = 0\ (mod\ \beta)$ dır.

İspat. β asal (veya tek) Hurwitz tamsayısı ve $z = 0$ olsun.

i. $\mu_\beta^{(1)}$ modülo fonksiyonuna göre

$$\mu_\beta^{(1)}(0) = 0 - \beta\left[\left|\frac{\bar{\beta}0}{N(\beta)}\right|\right] = -\beta[|0|] = 0 \tag{3.2.8}$$

olarak elde edilir.

ii. $\mu_\beta^{(2)}$ modülo fonksiyonuna göre

$$\mu_\beta^{(2)}(0) = 0 - \beta\left[\left\|\frac{\bar{\beta}0}{N(\beta)}\right\|\right] \tag{3.2.9}$$

dır. Buradan,

$$\begin{aligned}\mu_\beta^{(2)}(0) &= -\beta\left[\left\|\frac{(\beta_1 - \beta_2 i - \beta_3 j - \beta_4 k)0}{N(\beta)}\right\|\right] \\ &= -\beta\left(\left[\left\|\frac{\beta_1 0}{N(\beta)}\right\|\right] + \left[\left\|-\frac{\beta_2 0}{N(\beta)}\right\|\right] i + \left[\left\|-\frac{\beta_3 0}{N(\beta)}\right\|\right] j + \left[\left\|-\frac{\beta_4 0}{N(\beta)}\right\|\right] k\right) \\ &= -\beta([\|0\|] + [\|0\|]i + [\|0\|]j + [\|0\|]k)\end{aligned}$$

olup

$$\mu_\beta^{(2)}(0) = -\beta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k\right) \tag{3.2.10}$$

olarak elde edilir.

iii. (3.2.10)'daki eşitliğin normu alındığında

$$\begin{aligned}N(\mu_\beta^{(2)}(0)) &= N\left(-\beta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k\right)\right) \\ &= N(-\beta)N\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k\right)\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

olup $N(-\beta) = N(\beta)$ ve $N\left({}^1\!/_2 + {}^1\!/_2\, i + {}^1\!/_2\, j + {}^1\!/_2\, k\right) = 1$ eşitliklerinden

$$N(\mu_\beta^{(2)}(0)) = N(\beta) \tag{3.2.12}$$

olarak elde edilir.

iv. $\mu_\beta^{(2)}$ modülo fonksiyonu $\mu_\beta^{(2)}(z) = z\ (mod\ \beta)$ eşitliği ile tanımlanabileceğinden dolayı $z = 0$ için

$$\mu_\beta^{(2)}(0) = 0\ (mod\ \beta) \tag{3.2.13}$$

olarak elde edilir.

Aşağıda verilen iki teorem ile sırasıyla μ_β modülo fonksiyonunun bir halka homomorfizması ve bir halka izomorfizması olduğu gösterilmektedir.

Teorem 3.2.1. β bir asal (veya tek) Hurwitz tamsayısı olsun. μ_β modülo fonksiyonu bir halka homomorfizmasıdır.

İspat. β bir asal (veya tek) Hurwitz tamsayısı ve $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olsun. μ_β modülo fonksiyonunun bir halka homomorfizması olması için aşağıdaki dört olası durum üzerinde $\mu_\beta(z_1 + z_2) = \mu_\beta(z_1) + \mu_\beta(z_2)$ ve $\mu_\beta(z_1 z_2) = \mu_\beta(z_1)\mu_\beta(z_2)$ koşullarının sağlandığı gösterilmelidir.

i. $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(1)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(1)}(z_2)$,

ii. $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(1)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(2)}(z_2)$,

iii. $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(2)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(1)}(z_2)$,

iv. $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(2)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(2)}(z_2)$.

a.) $\mu_\beta(z_1 + z_2) = \mu_\beta(z_1) + \mu_\beta(z_2)$ koşulunun yukarıda verilen dört olası durum üzerinden sağlandığı gösterilmelidir.

i. $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(1)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(1)}(z_2)$ olsun. $\mu_\beta^{(1)}$ modülo fonksiyonuna göre

$$\begin{aligned}\mu_\beta^{(1)}(z_1) + \mu_\beta^{(1)}(z_2) &= z_1 - \beta\left[\left|\frac{\bar{\beta} z_1}{N(\beta)}\right|\right] + z_2 - \beta\left[\left|\frac{\bar{\beta} z_2}{N(\beta)}\right|\right] \\ &= z_1 + z_2 - \beta\left(\left[\left|\frac{\bar{\beta} z_1}{N(\beta)}\right|\right] + \left[\left[\left|\frac{\bar{\beta} z_2}{N(\beta)}\right|\right]\right]\right)\end{aligned}$$

olur. $\lambda \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ olmak üzere $\left[\left|{\bar{\beta} z_1}/{N(\beta)}\right|\right] = \lambda_1 \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ ve $\left[\left|{\bar{\beta} z_2}/{N(\beta)}\right|\right] = \lambda_2 \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ olacak şekilde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ olsun. Buradan,

$$\mu_\beta^{(1)}(z_1) + \mu_\beta^{(1)}(z_2) = z_1 + z_2 - \beta\lambda = (z_1 + z_2)\ (mod\ \beta) \qquad (3.2.14)$$

olur. Diğer taraftan, $\mu_\beta(z_1 + z_2) = (z_1 + z_2)\ (mod\ \beta)$, $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(1)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(1)}(z_2)$ olduğundan dolayı (3.2.14)'teki eşitlikten

$$\mu_\beta(z_1 + z_2) = \mu_\beta(z_1) + \mu_\beta(z_2) \qquad (3.2.15)$$

elde edilir.

ii. $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(1)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(2)}(z_2)$ olsun. $\mu_\beta^{(1)}$ ve $\mu_\beta^{(2)}$ modülo fonksiyonlarına göre

$$\mu_\beta^{(1)}(z_1) + \mu_\beta^{(2)}(z_2) = z_1 + z_2 - \beta\left(\left[\left|\frac{\bar{\beta}z_1}{N(\beta)}\right|\right] + \left[\left\|\frac{\bar{\beta}z_2}{N(\beta)}\right\|\right]\right)$$

olur. $\lambda \in \mathbb{H}\left(\mathbb{Z} + {}^1/_2\right)$ olmak üzere $\left[\left|{}^{\bar{\beta}z_1}/_{N(\beta)}\right|\right] = \lambda_1 \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ ve $\left[\left\|{}^{\bar{\beta}z_2}/_{N(\beta)}\right\|\right] = \lambda_2 \in \mathbb{H}\left(\mathbb{Z} + {}^1/_2\right)$ olacak şekilde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ olsun. Buradan,

$$\mu_\beta^{(1)}(z_1) + \mu_\beta^{(2)}(z_2) = z_1 + z_2 - \beta\lambda = (z_1 + z_2)\ (mod\ \beta) \qquad (3.2.16)$$

olur. Diğer taraftan, $\mu_\beta(z_1 + z_2) = (z_1 + z_2)\ (mod\ \beta)$, $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(1)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(2)}(z_2)$ olduğundan dolayı (3.2.16)'daki eşitlikten

$$\mu_\beta(z_1 + z_2) = \mu_\beta(z_1) + \mu_\beta(z_2) \qquad (3.2.17)$$

elde edilir.

iii. $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(2)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(1)}(z_2)$ olsun. $\mu_\beta^{(1)}$ ve $\mu_\beta^{(2)}$ modülo fonksiyonlarına göre

$$\mu_\beta^{(2)}(z_1) + \mu_\beta^{(1)}(z_2) = z_1 + z_2 - \beta\left(\left[\left\|\frac{\bar{\beta}z_1}{N(\beta)}\right\|\right] + \left[\left|\frac{\bar{\beta}z_2}{N(\beta)}\right|\right]\right)$$

olur. $\lambda \in \mathbb{H}\left(\mathbb{Z} + {}^1/_2\right)$ olmak üzere $\left[\left\|{}^{\bar{\beta}z_1}/_{N(\beta)}\right\|\right] = \lambda_1 \in \mathbb{H}\left(\mathbb{Z} + {}^1/_2\right)$ ve $\left[\left|{}^{\bar{\beta}z_2}/_{N(\beta)}\right|\right] = \lambda_2 \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ olacak şekilde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ olsun. Buradan,

$$\mu_\beta^{(2)}(z_1) + \mu_\beta^{(1)}(z_2) = z_1 + z_2 - \beta\lambda = (z_1 + z_2)\ (mod\ \beta) \qquad (3.2.18)$$

olur. $\mu_\beta^{(2)}(z_1)+\mu_\beta^{(1)}(z_2)=(z_1+z_2)\ (mod\ \beta)$, $\mu_\beta(z_1)=\mu_\beta^{(2)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2)=\mu_\beta^{(1)}(z_2)$ olduğundan dolayı (3.2.18)'deki eşitlikten

$$\mu_\beta(z_1+z_2)=\mu_\beta(z_1)+\mu_\beta(z_2) \tag{3.2.19}$$

elde edilir.

iv $\mu_\beta(z_1)=\mu_\beta^{(2)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2)=\mu_\beta^{(2)}(z_2)$ olsun. $\mu_\beta^{(2)}$ modülo fonksiyonuna göre

$$\mu_\beta^{(2)}(z_1)+\mu_\beta^{(2)}(z_2)=z_1+z_2-\beta\left(\left[\left\|\frac{\bar{\beta}z_1}{N(\beta)}\right\|\right]+\left[\left\|\frac{\bar{\beta}z_2}{N(\beta)}\right\|\right]\right)$$

olur. $\lambda\in\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ olmak üzere $\left[\left\|{}^{\bar{\beta}z_1}/_{N(\beta)}\right\|\right]=\lambda_1\in\mathbb{H}(\mathbb{Z}+{}^1/_2)$ ve $\left[\left\|{}^{\bar{\beta}z_2}/_{N(\beta)}\right\|\right]=\lambda_2\in\mathbb{H}(\mathbb{Z}+{}^1/_2)$ olacak şekilde $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ olsun. Buradan,

$$\mu_\beta^{(2)}(z_1)+\mu_\beta^{(2)}(z_2)=(z_1+z_2)\ (mod\ \beta) \tag{3.2.20}$$

olur. Diğer taraftan $\mu_\beta^{(2)}(z_1+z_2)=(z_1+z_2)\ (mod\ \beta)$, $\mu_\beta(z_1)=\mu_\beta^{(2)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2)=\mu_\beta^{(2)}(z_2)$ olduğundan dolayı (3.2.20)'deki eşitlikten

$$\mu_\beta(z_1+z_2)=\mu_\beta(z_1)+\mu_\beta(z_2) \tag{3.2.21}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (3.2.15), (3.2.17), (3.2.19) ve (3.2.21)'deki eşitliklerden, μ_β modülo fonksiyonunun bir halka homomorfizması olması için gereken ilk koşul olan $\mu_\beta(z_1+z_2)=\mu_\beta(z_1)+\mu_\beta(z_2)$ eşitliği sağlanır.

b) $\mu_\beta(z_1z_2)=\mu_\beta(z_1)\mu_\beta(z_2)$ koşulunun yukarıda verilen dört olası durum üzerinden sağlandığı gösterilmelidir.

i. $\mu_\beta(z_1)=\mu_\beta^{(1)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2)=\mu_\beta^{(1)}(z_2)$ olsun. $\mu_\beta^{(1)}$ modülo fonksiyonuna göre

$$\begin{aligned}\mu_\beta^{(1)}(z_1)\mu_\beta^{(1)}(z_2)&=\left(z_1-\beta\left[\left|\frac{\bar{\beta}z_1}{N(\beta)}\right|\right]\right)\left(z_2-\beta\left[\left|\frac{\bar{\beta}z_2}{N(\beta)}\right|\right]\right)\\&=z_1z_2-z_1\beta\left[\left|\frac{\bar{\beta}z_2}{N(\beta)}\right|\right]-z_2\beta\left[\left|\frac{\bar{\beta}z_1}{N(\beta)}\right|\right]+\beta\left[\left|\frac{\bar{\beta}z_1}{N(\beta)}\right|\right]\beta\left[\left|\frac{\bar{\beta}z_2}{N(\beta)}\right|\right]\end{aligned}$$

olur. $\left[\left|{}^{\bar{\beta}z_1}/_{N(\beta)}\right|\right]=\lambda_1\in\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ ve $\left[\left|{}^{\bar{\beta}z_2}/_{N(\beta)}\right|\right]=\lambda_2\in\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ olmak üzere yukarıdaki eşitlikten

$$\mu_\beta^{(1)}(z_1)\mu_\beta^{(1)}(z_2) = z_1z_2 - \beta(z_1\lambda_2 + z_2\lambda_1 - \lambda_1\beta\lambda_2) \qquad (3.2.22)$$

elde edilir. $\lambda \in \mathcal{H}$ olmak üzere $\lambda = z_1\lambda_2 + z_2\lambda_1 - \lambda_1\beta\lambda_2$ olsun. Buradan,

$$\mu_\beta^{(1)}(z_1)\mu_\beta^{(1)}(z_2) = z_1z_2 \ (mod\ \beta) \qquad (3.2.23)$$

olur. Diğer taraftan, $\mu_\beta(z_1z_2) = z_1z_2 \ (mod\ \beta)$, $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(1)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(1)}(z_2)$ olduğundan dolayı (3.2.23)'teki eşitlikten

$$\mu_\beta(z_1z_2) = \mu_\beta(z_1)\mu_\beta(z_2) \qquad (3.2.24)$$

elde edilir.

ii. $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(1)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(2)}(z_2)$ olsun. $\mu_\beta^{(1)}$ ve $\mu_\beta^{(2)}$ modülo fonksiyonlarına göre

$$\mu_\beta^{(1)}(z_1)\mu_\beta^{(2)}(z_2) = \mathrm{z}_1\mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_1\beta\left[\left\|\frac{\bar{\beta}z_2}{N(\beta)}\right\|\right] - \mathrm{z}_2\beta\left[\left|\frac{\bar{\beta}z_1}{N(\beta)}\right|\right] + \beta\left[\left|\frac{\bar{\beta}z_1}{N(\beta)}\right|\right]\beta\left[\left\|\frac{\bar{\beta}z_2}{N(\beta)}\right\|\right]$$

olur. $\left[\left|{}^{\bar{\beta}z_1}/_{N(\beta)}\right|\right] = \lambda_1 \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ ve $\left[\left\|{}^{\bar{\beta}z_2}/_{N(\beta)}\right\|\right] = \lambda_2 \in \mathbb{H}\left(\mathbb{Z} + {}^1/_2\right)$ olmak üzere yukarıdaki eşitlikten

$$\mu_\beta^{(1)}(z_1)\mu_\beta^{(2)}(z_2) = z_1z_2 - \beta(z_1\lambda_2 + z_2\lambda_1 - \lambda_1\beta\lambda_2) \qquad (3.2.25)$$

elde edilir. $\lambda \in \mathcal{H}$ olmak üzere $\lambda = z_1\lambda_2 + z_2\lambda_1 - \lambda_1\beta\lambda_2$ olsun. Buradan,

$$\mu_\beta^{(1)}(z_1)\mu_\beta^{(2)}(z_2) = z_1z_2 - \beta\lambda = z_1z_2 \ (mod\ \beta) \qquad (3.2.26)$$

olur. Diğer taraftan, $\mu_\beta(z_1)\mu_\beta(z_2) = z_1z_2 \ (mod\ \beta)$, $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(1)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(2)}(z_2)$ olduğundan dolayı (3.2.26)'daki eşitlikten

$$\mu_\beta(z_1z_2) = \mu_\beta(z_1)\mu_\beta(z_2) \qquad (3.2.27)$$

elde edilir.

iii. $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(2)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(1)}(z_2)$ olsun. $\mu_\beta^{(1)}$ ve $\mu_\beta^{(2)}$ modülo fonksiyonlarına göre

$$\mu_\beta^{(2)}(z_1)\mu_\beta^{(1)}(z_2) = \mathrm{z}_1\mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_1\beta\left[\left|\frac{\bar{\beta}z_2}{N(\beta)}\right|\right] - \mathrm{z}_2\beta\left[\left\|\frac{\bar{\beta}z_1}{N(\beta)}\right\|\right]$$
$$+\beta\left[\left\|\frac{\bar{\beta}z_1}{N(\beta)}\right\|\right]\beta\left[\left|\frac{\bar{\beta}z_2}{N(\beta)}\right|\right]$$

olur. $\left[\left\|\bar{\beta}z_1/_{N(\beta)}\right\|\right] = \lambda_1 \in \mathbb{H}(\mathbb{Z} + 1/_2)$ ve $\left[\left|\bar{\beta}z_2/_{N(\beta)}\right|\right] = \lambda_2 \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ omak üzere yukarıdaki eşitlikten

$$\mu_\beta^{(2)}(z_1)\mu_\beta^{(1)}(z_2) = z_1z_2 - \beta(z_1\lambda_2 + z_2\lambda_1 - \lambda_1\beta\lambda_2) \tag{3.2.28}$$

elde edilir. $\lambda \in \mathcal{H}$ olmak üzere $\lambda = z_1\lambda_2 + z_2\lambda_1 - \lambda_1\beta\lambda_2$ olsun. Buradan,

$$\mu_\beta^{(2)}(z_1)\mu_\beta^{(1)}(z_2) = z_1z_2 - \beta\lambda = z_1z_2\ (mod\ \beta) \tag{3.2.29}$$

olur. Diğer taraftan $\mu_\beta(z_1z_2) = z_1z_2\ (mod\ \beta)$, $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(2)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(1)}(z_2)$ olduğundan dolayı (3.2.29)'daki eşitlikten

$$\mu_\beta(z_1z_2) = \mu_\beta(z_1)\mu_\beta(z_2) \tag{3.2.30}$$

elde edilir.

iv. $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(2)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(2)}(z_2)$ olsun. $\mu_\beta^{(2)}$ modülo fonksiyonuna göre

$$\mu_\beta^{(2)}(z_1)\mu_\beta^{(2)}(z_2) = z_1z_2 - z_1\beta\left[\left\|\frac{\bar{\beta}z_2}{N(\beta)}\right\|\right] - z_2\beta\left[\left\|\frac{\bar{\beta}z_1}{N(\beta)}\right\|\right] + \beta\left[\left\|\frac{\bar{\beta}z_1}{N(\beta)}\right\|\right]\beta\left[\left\|\frac{\bar{\beta}z_2}{N(\beta)}\right\|\right]$$

olur. $\left[\left\|\bar{\beta}z_1/_{N(\beta)}\right\|\right] = \lambda_1 \in \mathbb{H}(\mathbb{Z} + 1/_2)$ ve $\left[\left\|\bar{\beta}z_2/_{N(\beta)}\right\|\right] = \lambda_2 \in \mathbb{H}(\mathbb{Z} + 1/_2)$ olmak üzere yukarıdaki eşitlikten

$$\mu_\beta^{(2)}(z_1)\mu_\beta^{(2)}(z_2) = z_1z_2 - \beta(z_1\lambda_2 + z_2\lambda_1 - \lambda_1\beta\lambda_2) \tag{3.2.31}$$

elde edilir. $\lambda \in \mathcal{H}$ olmak üzere $\lambda = z_1\lambda_2 + z_2\lambda_1 - \lambda_1\beta\lambda_2$ olsun. Buradan,

$$\mu_\beta^{(2)}(z_1)\mu_\beta^{(2)}(z_2) = z_1z_2 - \beta\lambda = z_1z_2\ (mod\ \beta) \tag{3.2.32}$$

olur. Diğer taraftan $\mu_\beta(z_1z_2) = z_1z_2\ (mod\ \beta)$, $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta^{(2)}(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2) = \mu_\beta^{(2)}(z_2)$ olduğundan dolayı (3.2.32)'deki eşitlikten

$$\mu_\beta(z_1z_2) = \mu_\beta(z_1)\mu_\beta(z_2) \tag{3.2.33}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (3.2.24), (3.2.27), (3.2.30) ve (3.2.33)'teki eşitliklerden μ_β modülo fonksiyonunun bir halka homomorfizması olması için gereken ikinci koşul olan

$\mu_\beta(z_1 z_2) = \mu_\beta(z_1)\mu_\beta(z_2)$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, μ_β modülo fonksiyonunun bir halka homomorfizması olması için gereken koşullar (a) ve (b)'de görüleceği üzere sağlanmış olur.

Teorem 3.2.2. β bir asal (veya tek) Hurwitz tamsayısı olsun. μ_β modülo fonksiyonu bir halka izomorfizmasıdır. Diğer bir ifadeyle, β bir asal (veya tek) Hurwitz tamsayısı olmak üzere $\mathbb{Z}_{N(\beta)}$ halkası $\mathcal{H}_\beta$ halkasına izomorftur.

İspat. Halka izomorfizması olduğunu göstermek için bire-bir ve örten bir halka homomorfizması olduğu gösterilmelidir. β bir asal (veya tek) Hurwitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olsun. Teorem 3.2.1'e göre μ_β modülo fonksiyonu bir halka homomorfizmadır. $Gör\mu = \{\mu_\beta(z) : z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}\} = \mathcal{H}_\beta$ olduğundan dolayı μ_β modülo fonksiyonu örten bir fonksiyon olur. $z = 0$ olmak üzere Önerme 3.2.1'deki (i.) ve (ii.) koşullarından sırasıyla $\mu_\beta^{(1)}(0) = 0$ ve $\mu_\beta^{(2)}(0) = -\beta\left({}^1/_2 + {}^1/_2\, i + {}^1/_2\, j + {}^1/_2\, k\right)$ olur. Buradan, $N\left(\mu_\beta^{(1)}(0)\right) < N\left(\mu_\beta^{(2)}(0)\right)$ eşitsizliği sağlanacağından dolayı (3.2.3) ten veya (3.2.4)'ten $\mu_\beta(0) = \min\left\{\mu_\beta^{(1)}(0), \mu_\beta^{(2)}(0)\right\} = \mu_\beta^{(1)}(0) = 0$ olur. Ayrıca, $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)} - \{0\}$ için $\mu_\beta(z) \geq 1$ eşitsizliği sağlanacağından dolayı $Çek\mu = \{z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)} : \mu_\beta(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)} : z = 0\} = \{0\}$ olur. Buradan, μ_β modülo fonksiyonu bire-bir bir fonksiyon olur. Sonuç olarak, μ_β modülo fonksiyonu hem bire-bir hem de örten bir halka homomorfizması olmasından dolayı bir halka izomorfizması olur.

Aşağıda μ_β modülo fonksiyonunun uygulaması olarak üç örnek verilmektedir. İlk örnekte; üç bileşene sahip ve normu asal olmayan tek Hurwitz tamsayısı üzerinden $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları tablo ve liste yöntemiyle gösterilmektedir. Benzer şekilde, ikinci ve üçüncü örneklerde ise sırasıyla bileşenleri yarım-tamsayı ve normu asal olan Hurwitz tamsayısı ve bileşenleri tamsayı ve normu asal olan primitif Hurwitz tamsayı üzerinden $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları tablolar ve liste yöntemleriyle gösterilmektedir.

Örneklerdeki tablolarda; $\mu_\beta^{(1)}(z)$ ile; $\mu_\beta^{(1)}$ modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin elemanları, $\mu_\beta^{(2)}(z)$ ile; $\mu_\beta^{(2)}$ modülo fonksiyonu ile elde edilen

kalan sınıfları kümesinin elemanları ve $\mu_\beta(z)$ ile; μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin elemanları temsil edilmektedir.

Örnek 3.2.1. $\beta = 2i + 2j + k$ tek Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları Tablo 3.1'de sunulmaktadır. Hesaplamalar için Ek-A'da Şekil A.1'deki *Mathematica* kodları kullanılmıştır.

Tablo 3.1. $\beta = 2i + 2j + k$ tek Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları.

z	$\mu_\beta^{(1)}(z)$	$\mu_\beta^{(2)}(z)$	$\mu_\beta(z)$
0	0	$\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	0
1	1	$-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$	1
2	2	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$
3	$-1-i+j$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$	$-1-i+j$
4	$-i+j$	$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$	$-i+j$
5	$i-j$	$-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	$i-j$
6	$1+i-j$	$-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	$1+i-j$
7	-2	$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$
8	-1	$\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	-1

$\beta = 2i + 2j + k$ Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için μ_β modülo fonksiyonuyla elde edilen ve elamanları Tablo 3.1'de $\mu_\beta(z)$ sütununda sunulan $\mathcal{H}_\beta$ kümesi aşağıdadır:

$$\mathcal{H}_\beta = \left\{ \begin{matrix} 0, 1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k, -1 - i + j, -i + j, \\ i - j, 1 + i - j, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k, -1 \end{matrix} \right\}.$$

Örnek 3.2.2. $\beta = {}^{5}/_{2} + {}^{3}/_{2}\,i + {}^{3}/_{2}\,j + {}^{1}/_{2}\,k$ asal Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları Tablo 3.2'de sunulmaktadır. Hesaplamalar için Ek-A'da Şekil A.2'deki *Mathematica* kodları kullanılmıştır.

Tablo 3.2. $\beta = {}^{5}/_{2} + {}^{3}/_{2}\,i + {}^{3}/_{2}\,j + {}^{1}/_{2}\,k$ asal Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları.

z	$\mu_\beta^{(1)}(z)$	$\mu_\beta^{(2)}(z)$	$\mu_\beta(z)$
0	0	$\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i - \frac{3}{2}j - \frac{3}{2}k$	0
1	1	$-2 + i + k$	1
2	2	$-1 + i + k$	$-1 + i + k$
3	$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$	$i + k$	$i + k$
4	$-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$	$1 + i + k$	$1 + i + k$
5	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{3}{2}j + \frac{1}{2}k$	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$
6	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{3}{2}j + \frac{1}{2}k$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{3}{2}j + \frac{1}{2}k$
7	$-1 - i - k$	$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{3}{2}j + \frac{1}{2}k$	$-1 - i - k$
8	$-i - k$	$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{3}{2}j + \frac{1}{2}k$	$-i - k$
9	$1 - i - k$	-2	$1 - i - k$
10	$2 - i - k$	-1	-1

$\beta = {}^{5}/_{2} + {}^{3}/_{2}\,i + {}^{3}/_{2}\,j + {}^{1}/_{2}\,k$ asal Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için μ_β modülo fonksiyonuyla elde edilen ve elamanları Tablo 3.2'de $\mu_\beta(z)$ sütununda sunulan $\mathcal{H}_\beta$ kümesi aşağıdadır:

$$\mathcal{H}_\beta = \begin{Bmatrix} 0, 1, -1+i+k, i+k, 1+i+k, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k, -1-i-k, -i-k, 1-i-k, -1 \end{Bmatrix}.$$

Örnek 3.2.3. $\beta = 2 + i + 2j + 2k$ asal Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları yardımıyla elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları Tablo 3.3'te sunulmaktadır. Hesaplamalar için Ek-A'da Şekil A.1'deki *Mathematica* kodları kullanılmıştır.

Tablo 3.3. $\beta = 2 + i + 2j + 2k$ asal Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları.

z	$\mu_\beta^{(1)}(z)$	$\mu_\beta^{(2)}(z)$	$\mu_\beta(z)$
0	0	$\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{5}{2}j-\frac{3}{2}k$	0
1	1	$-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	1
2	2	$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$
3	3	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$
4	$-2-i-j+k$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$
5	$-1-i-j+k$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$
6	$-i-j+k$	$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	$-i-j+k$
7	$i+j-k$	$-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	$i+j-k$
8	$1+i+j-k$	$-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	$-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$

Tablo 3.3.(Devamı) $\beta = 2 + i + 2j + 2k$ asal Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları.

z	$\mu_\beta^{(1)}(z)$	$\mu_\beta^{(2)}(z)$	$\mu_\beta(z)$
9	$2 + i + j - k$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$
10	-3	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$
11	-2	$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$	$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$
12	-1	$\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$	-1

$\beta = 2 + i + 2j + 2k$ asal Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için μ_β modülo fonksiyonuyla elde edilen ve elemanları Tablo 3.3'te $\mu_\beta(z)$ sütununda sunulan $\mathcal{H}_\beta$ kümesi aşağıdadır:

$$\mathcal{H}_\beta = \left\{ \begin{array}{c} 0, 1, -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k, -i - j + k, \\ i + j - k, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k, -1 \end{array} \right\}.$$

İki bileşene sahip, en büyük ortak böleni 1 olan ve normu 5'ten büyük veya eşit olacak şekildeki tek Hurwitz tamsayıları üzerinden μ_β ve $\mu_\beta^{(1)}$ modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümeleri arasındaki bir ilişki aşağıdaki önerme ile verilmektedir.

Önerme 3.2.2. β, $N(\beta) \geq 5$ ve en büyük ortak böleni 1 olan iki bileşenli tek Hurwitz tamsayısı ise

$$\mathcal{H}_\beta = \mathcal{H}_\beta^{(1)} \tag{3.2.34}$$

dir.

İspat. β, $N(\beta) \geq 5$ ve bileşenlerin en büyük ortak böleni 1 olan iki bileşenli tek Hurwitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olsun. $\left[\left|{\bar{\beta}z}/{N(\beta)}\right|\right] = \lambda \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ olmak üzere $\mu_\beta^{(1)}$ modülo fonksiyonu,

$$\mu_\beta^{(1)}(z) = z - \beta\lambda \tag{3.2.35}$$

olur. $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için

$$0 \leq N\left(\mu_\beta^{(1)}(z)\right) \leq \frac{N(\beta)}{2} \tag{3.2.36}$$

eşitsizliği sağlanır. $(\beta_1, \beta_2) = 1$ ve $N(\beta) \geq 5$ olacak şekilde $\beta = \beta_1 i + \beta_2 k$ tek Hurwitz tamsayısı alınırsa

$$\left[\left\|\frac{\bar{\beta}z}{N(\beta)}\right\|\right] = [\|0\|] + \left[\left\|\frac{-\beta_1 z}{N(\beta)}\right\|\right] i + [\|0\|] j + \left[\left\|\frac{-\beta_2 z}{N(\beta)}\right\|\right] k \tag{3.2.37}$$

olur. $\left[\left\|{-\beta_1 z}/{N(\beta)}\right\|\right] = \lambda_1 \in \left(\mathbb{H} + \frac{1}{2}\right)$ ve $\left[\left\|{-\beta_2 z}/{N(\beta)}\right\|\right] = \lambda_2 \in \left(\mathbb{H} + \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere Sonuç 3.1.1'in (iii.) koşulundan (3.2.37)'deki eşitlik

$$\left[\left\|\frac{\bar{\beta}z}{N(\beta)}\right\|\right] = \frac{1}{2} + \lambda_1 i + \frac{1}{2} j + \lambda_2 k \tag{3.2.38}$$

olur. Diğer taraftan, $\mu_\beta^{(2)}$ modülo fonksiyonuda

$$\mu_\beta^{(2)}(z) = z + \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right) i + (\beta_2\lambda_1 - \beta_1\lambda_2) j + \left(\frac{-\beta_2 - \beta_1}{2}\right) \tag{3.2.39}$$

eşitliği elde edilir. (3.2.39)'daki eşitliğin normu alınırsa

$$N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right) > \frac{N(\beta)}{2} \geq 0 \tag{3.2.40}$$

eşitsizliği elde edilir. $z = 0$ için Önerme 3.2.1'in (iii.) koşulundan

$$N\left(\mu_\beta^{(2)}(0)\right) = N(\beta) \tag{3.2.41}$$

olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan, μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesindeki her bir elemanın normu, $N(\beta)$'dan küçük olacağından dolayı $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için

$$N(\beta) > N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right) \geq 0 \tag{3.2.42}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.2.40) ve (3.2.42)'deki eşitsizlikler ve (3.2.41)'deki eşitlik göz önüne alındığında $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için

$$N(\beta) \geq N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right) > \frac{N(\beta)}{2} \geq 0 \tag{3.2.43}$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla, (3.2.36) ve (3.2.43)'teki eşitsizliklerden

$$N\left(\mu_\beta^{(2)}(z)\right) > N\left(\mu_\beta^{(1)}(z)\right) \geq 0 \tag{3.2.44}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan, β tek Hurwitz tamsayısı üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıflarının kümesi, (3.2.44)'deki eşitsizlik göz önüne alındığında

$$\mathcal{H}_\beta = \left\{\mu_\beta^{(1)}(z) : z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}\right\} \tag{3.2.45}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak,

$$\mathcal{H}_\beta = \mathcal{H}_\beta^{(1)} \tag{3.2.46}$$

elde edilir. Benzer şekilde, diğer iki bileşenli Hurwitz tamsayıları için de (3.2.46)'deki eşitlik sağlaır.

Önerme 3.2.2'in bir uygulaması olarak aşağıdaki örnek verilmektedir.

Örnek 3.2.4. $\beta = 3 + 2j$ tek Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları Tablo 3.4'te sunulmaktadır. Hesaplamalar için Ek-A'da Şekil A.1'deki *Mathematica* kodları kullanılmıştır.

Tablo 3.4. $\beta = 3 + 2j$ Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları.

z	$\mu_\beta^{(1)}(z)$	$\mu_\beta^{(2)}(z)$	$\mu_\beta(z)$
0	0	$-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i-\frac{5}{2}j-\frac{1}{2}k$	0
1	1	$-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	1
2	2	$-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	2

Tablo 3.4.(Devamı) $\beta = 3 + 2j$ Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları.

z	$\mu_\beta^{(1)}(z)$	$\mu_\beta^{(2)}(z)$	$\mu_\beta(z)$
3	$-2j$	$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	$-2j$
4	$-1+j$	$\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	$-1+j$
5	j	$-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$	j
6	$1+j$	$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$	$1+j$
7	$-1-j$	$-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i+\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$	$-1-j$
8	$-j$	$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i+\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$	$-j$
9	$1-j$	$-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	$1-j$
10	$2j$	$-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	$2j$
11	-2	$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	-2
12	-1	$\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$	-1

$\beta = 3 + 2j$ tek Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen ve elamanları Tablo 3.4'te $\mu_\beta(z)$ sütununda sunulan $\mathcal{H}_\beta$ kümesi aşağıdadır:

$$\mathcal{H}_\beta = \{0, 1, 2, -2j, -1+j, j, 1+j, -1-j, -j, 1-j, 2j, -2, -1\}.$$

4. KODLAYICI LIPSHITZ VE KODLAYICI HURWITZ TAMSAYILARI

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır.

[7]'de, Lipschitz ve Hurwitz tamsayılarının bir özelliğini ifade etmek için kullanılan ve bu bölümde sıkça kullanılacak olan "küçük kalanlı bölme özelliği" ifadesi; Öklid bölme algoritmasındaki kalanın bölenden küçük olma koşuluna karşılık gelmektedir. Lipschitz tamsayıları küçük kalanlı bölme özelliğine sahip değilken Hurwitz tamsayıları küçük kalanlı bölme özelliğine sahiptir [7]. Öklid bölme algoritması ile μ_β modülo fonksiyonu ve literatürde tanımlanan diğer modülo fonksiyonları arasında benzer bir ilişki vardır. Bu ilişkiden dolayı ilgili modülo fonksiyonunda kullanılacak primitif Gauss, primitif Lipschitz ve primitif Hurwitz tamsayıları uygun olacak şekilde seçilmelidir. Normu asal tamsayı veya tek tamsayı olan primitif Gauss, primitif Lipschitz veya primitif Hurwitz tamsayıları uygun olurken normu asal olmayan ve belli bir özelliğe sahip primitif Lipschitz tamsayılarının ve primitif Hurwitz tamsayılarının uygun olmadığı yapılan çalışmalar sonucuda tespit edilmiştir.

Birinci alt bölümde, her bir bileşeni tek tamsayı olacak şekildeki α primitif Lipschitz tamsayıları üzerinden primitif Lipschitz tamsayılarının, ilgili bir modülo fonksiyonu yardımıyla herhangi bir $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ için $0 \leq N\big(\mu_\alpha(z)\big) \leq N(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayacağından dolayı küçük kalanlı bölme özelliğine sahip olmadığı gösterilmektedir. Bu problemi ortadan kaldırmak için $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ için $0 \leq N\big(\mu_\alpha(z)\big) < N(\alpha)$ koşulunu sağlayacak şekildeki uygun primitif tamsayıları, kodlayıcı Lipschitz tamsayıları adıyla tanımlanmaktadır.

İkinci alt bölümde, her bir bileşeni tek tamsayı olan β primitif Hurwitz tamsayıları üzerinden primitif Hurwitz tamsayılarının, μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinde $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta(z_2)$ iken $z_1 = z_2$ ile tanımlanan bire-bir olma özelliği ile çelişki oluşturduğu gösterilmektedir. Buradaki çelişki, $\exists z_1, z_2 \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta(z_2)$ iken $z_1 \neq z_2$ ile elde edilmiştir. Bununla birlikte, bire-bir olma özelliği ile elde edilen çelişki μ_β modülo fonksiyonunun bir halka izomorfizması olmasına engel olmaktadır. Bu problemi ortadan kaldırmak için

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için $\mu_\beta(z_1) = \mu_\beta(z_2)$ iken $z_1 = z_2$ ile tanımlanan bire-bir olma ve küçük kalanlı bölme özelliklerine sahip olacak şekildeki uygun primitif Hurwitz tamsayıları, kodlayıcı Hurwitz tamsayıları adıyla tanımlanmaktadır.

Bu bölümden itibaren yapılacak çalışmalar aksi söylenmedikçe primitif Lipschitz ve primitif Hurwitz tamsayıları üzerinden yapılacaktır.

4.1. Kodlayıcı Lipschitz Tamsayıları : Küçük Kalanlı Bölme Özelliğine Sahip Lipschitz Tamsayıları

Alman matematikçi Klaus Huber [37] ve [38]'de ilgili bir modülo fonksiyonu ile sırasıyla Gauss tamsayıları ve Eisenstein-Jacobi tamsayıları üzerinden kodlar inşa etti. Huber'in çalışmalarında kullandığı bu modülo fonksiyonu, Özen ve Güzeltepe tarafından [47]'de değişme özelliğine sahip kuaterniyon tamsayılarına ve Freudenberger ve arkadaşları tarafından da [50]'de primitif Lipschitz tamsayılarına uyarlandı. μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin her bir elemanı Hurwitz tamsayısı olmasından dolayı μ_β modülo fonksiyonu Lipschitz tamsayıları için uygun olmamaktadır. Bundan dolayı, Lipschitz tamsayıları için uygun bir modülo fonksiyonu asal (veya tek) Lipschitz tamsayıları üzerinden aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.1. α asal (veya tek) Lipschitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olsun. $\mu_\alpha : \mathbb{Z}_{N(\alpha)} \to \mathcal{L}_\alpha$ modülo fonksiyonu

$$\mu_\alpha(z) = z - \alpha \left[\left|\frac{\bar{\alpha} z}{N(\alpha)}\right|\right] \tag{4.1.1}$$

olarak tanımlanır.

Asal (veya tek) Lipschitz tamsayılarının en büyük ortak böleni 1 olacağından dolayı $u, v \in \mathcal{L}$ olmak üzere $\alpha u + \overline{\alpha v} = 1$ sağlanır. μ^{-1}; $\gamma \in \mathcal{L}$ olmak üzere $z = \mu_\alpha^{-1}(\gamma) = \big(\gamma(\bar{\alpha} v) + \bar{\gamma}(\alpha u)\big) \big(mod\ N(\alpha)\big)$ olarak elde edilir. $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olduğundan $\lambda \in \mathcal{L}$ için $z = \alpha\lambda + \gamma$ ve $z = \bar{z} = \bar{\alpha}\bar{\lambda} + \bar{\gamma}$ olur. Dolayısıyla, $\gamma(\bar{\alpha} v) + \bar{\gamma}(\alpha u) = (z - \alpha\lambda)(\bar{\alpha} v) + \big(z - \bar{\alpha}\bar{\lambda}\big)(\alpha u) \equiv z(\bar{\alpha} v + \alpha u) \big(mod\ N(\alpha)\big)$ olur. $\alpha u + \bar{\alpha}\bar{v} = 1$ olduğundan dolayı $\gamma(\bar{\alpha} v) + \bar{\gamma}(\alpha u) \equiv z \big(mod\ N(\alpha)\big)$ olur. $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olmak üzere $\mu_\alpha(z_1 + z_2) = \mu_\alpha(z_1) + \mu_\alpha(z_2)$ ve $\mu_\alpha(z_1 z_2) = \mu_\alpha(z_1)\mu_\alpha(z_2)$ olacağından dolayı μ_α modülo fonksiyonu bir izomorfizma belirtir [54].

Asal (veya tek) Lipschitz tamsayıları üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesi

$$\mathcal{L}_\alpha = \{\mu_\alpha(z) : z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}\} \tag{4.1.2}$$

dır.

Not 4.1.1. Not 1.3.2'e göre α'nın $\mathcal{L}$ halkasında oluşturduğu sol ideal, $\mathcal{L}$ halkasının bir normal alt grubu $\langle\alpha\rangle = \{\alpha\delta : \delta \in \mathcal{L}\}$ olarak tanımlanır. Buradan, μ_α modülo fonksiyonu yardımıyla elde edilen (4.1.2)'deki kalan sınıfları kümesi, $\mathcal{L}$ halkası üzerinde α sol ideali ile tanımlanan (1.3.6)'daki $\langle\alpha\rangle$ normal alt grubuna göre elde edilen kalan sınıfları kümesini temsil eder.

$z = 0$ için μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfı aşağıdaki önerme ile verilmektedir.

Önerme 4.1.1. α Lipschitz tamsayı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olsun. $z = 0$ için

$$\mu_\alpha(0) = 0 \tag{4.1.3}$$

olur.

İspat. α Lipschitz tamsayı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olsun. $z = 0$ için μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfı $\mu_\alpha(0) = 0$ olduğundan ispat aşikardır.

α her bir bileşeni tek tamsayı olan bir primitif Lipschitz tamsayısı üzerinden $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olmak üzere $z = {}^{N(\alpha)}/_{2}$ için μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfı aşağıdaki önerme ile verilmektedir.

Önerme 4.1.2. α her bir bileşeni tek tamsayı olan bir primitif Lipschitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olsun. $z = {}^{N(\alpha)}/_{2}$ ise

$$\mu_\alpha\left(\frac{N(\alpha)}{2}\right) = -\alpha\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k\right) \tag{4.1.4}$$

olur.

İspat. α her bir bileşeni tek tamsayı olan bir primitif Lipschitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olsun. $z = {}^{N(\alpha)}/_{2}$ olmak üzere μ_α modülo fonksiyonu ile

$$\mu_\alpha\left(\frac{N(\alpha)}{2}\right) = \frac{N(\alpha)}{2} - \alpha\left(\left[\left|\frac{\alpha_1}{2}\right|\right] + \left[\left|\frac{-\alpha_2}{2}\right|\right]i + \left[\left|\frac{-\alpha_3}{2}\right|\right]j + \left[\left|\frac{-\alpha_4}{2}\right|\right]k\right) \tag{4.1.5}$$

elde edilir. α her bir bileşeni tek tamsayı olan bir primitif Lipschitz tamsayısı olduğundan bileşenleri pozitif tek tamsayılar olacağından dolayı

$$\mu_\alpha\left(\frac{N(\alpha)}{2}\right)=\frac{N(\alpha)}{2}-\alpha\left(\frac{\alpha_1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\alpha_2}{2}i+\frac{1}{2}i-\frac{\alpha_3}{2}j+\frac{1}{2}j-\frac{\alpha_4}{2}k+\frac{1}{2}k\right) \quad (4.1.6)$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\mu_\alpha\left(\frac{N(\alpha)}{2}\right)&=\frac{N(\alpha)}{2}-\frac{N(\alpha)}{2}-\alpha\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k\right)\\&=-\alpha\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k\right)\end{aligned} \quad (4.1.7)$$

olarak bulunur.

(4.1.4)'deki eşitliğin normu alındığında elde edilen sonuç aşağıdaki önerme ile verilmektedir.

Önerme 4.1.3. α her bir bileşeni tek tamsayı olan bir primitif Lipschitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olsun. $z = {}^{N(\alpha)}/_{2}$ için

$$N\left(\mu_\alpha\left(\frac{N(\alpha)}{2}\right)\right)=N(\alpha) \quad (4.1.8)$$

olur.

İspat. $\alpha=\alpha_1+\alpha_2 i+\alpha_3 j+\alpha_4 k$ her bir bileşeni tek tamsayı olan bir primitif Lipschitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olsun. $z = {}^{N(\alpha)}/_{2}$ ise

$$N\left(\mu_\alpha\left(\frac{N(\alpha)}{2}\right)\right)=N\left(-\alpha\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k\right)\right) \quad (4.1.9)$$

olup $N(-\alpha)=N(\alpha)$ ve $N\left(-{}^{1}/_{2}+{}^{1}/_{2}\,i+{}^{1}/_{2}j+{}^{1}/_{2}\,k\right)=1$ olduğundan dolayı

$$N\left(\mu_\alpha\left(\frac{N(\alpha)}{2}\right)\right)=N(\alpha) \quad (4.1.10)$$

olur.

Bir α primitif Lipschitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ için μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesindeki her bir kalan sınıfının normu ile α primitif Lipschitz tamsayının normu arasındaki bir ilişki aşağıdaki önerme ile verilmiektedir. Bu ilişki primitif Lipschitz tamsayılarının, Öklid bölme algoritmasındaki kalanın

bölenden küçük olma koşuluyla yani küçük kalanlı bölme özelliğiyle oluşturduğu çelişkiyi gösterir.

Önerme 4.1.4. α bir primitif Lipschitz tamsayısı olsun. $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ için

$$0 \leq N\big(\mu_\alpha(z)\big) \leq N(\alpha) \tag{4.1.11}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. α asal (veya tek tamsayı) primitif Lipschitz tamsayısı üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinde $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ için

$$0 \leq N\big(\mu_\alpha(z)\big) < N(\alpha) \tag{4.1.12}$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer taraftan, α her bir bileşeni tek tamsayı olan bir primitif tamsayısı ise $z = {}^{N(\alpha)}\!/_{2}$ için (4.1.10)'daki eşitlik sağlanır. Buradan, primitif Lipschitz tamsayıları düşünüldüğünde (4.1.12)'deki eşitsizlik ve (4.1.10)'daki eşitlik ile

$$0 \leq N\big(\mu_\alpha(z)\big) \leq N(\alpha) \tag{4.1.13}$$

elde edilir.

Normları eşit olan iki farklı Lipschitz tamsayısı birbirini böler. Yani, birbirinden farklı $\alpha, \alpha' \in \mathcal{L}$ için $\alpha \neq 0$ ve $\alpha' \neq 0$ olmak üzere $N(\alpha) = N(\alpha')$ ise ya $\alpha | \alpha'$ ya da $\alpha' | \alpha$'dır. Buradan, her bir bileşeni tek tamsayı olan α primitif Lipschitz tamsayısının normu ile $\mu_\alpha\left({}^{N(\alpha)}\!/_{2}\right)$ kalan sınıfının normu eşit olacağından dolayı ya $\alpha | \mu_\alpha\left({}^{N(\alpha)}\!/_{2}\right)$ ya da $\mu_\alpha\left({}^{N(\alpha)}\!/_{2}\right) | \alpha$ olur. Bu ilişkiden elde edilen bir sonuç aşağıda verilmektedir.

Sonuç 4.1.1. α her bir bileşeni tek tamsayı olan bir primitif Lipschitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olsun. $z = {}^{N(\alpha)}\!/_{2}$ ise

$$\mu_\alpha\left(\frac{N(\alpha)}{2}\right) \equiv 0 \ (mod\ \alpha) \tag{4.1.14}$$

olur.

Önerme 4.1.1 ve Sonuç 4.1.1 ile elde edilen iki farklı sonuç aşağıda verilmektedir.

Sonuç 4.1.2. Her bir bileşeni tek tamsayı olan bir α primitif Lipschitz tamsayısı üzerinden $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olmak üzere $z = 0$ ve $z = {}^{N(\alpha)}\!/_{2}$ için μ_α modülo fonksiyonu

ile elde edilen kalan sınıflarının sırasıyla (4.1.3) ve (4.1.14)'teki eşitliklerden sıfır kalan sınıfının elemanı olduğu görülür.

Sonuç 4.1.3. Her bir bileşeni tek tamsayı olan bir α primitif Lipschitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ için μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesini temsil eden $\mathcal{L}_\alpha$ kalan sınıfları kümesinin eleman sayısı en çok $(N(\alpha) - 1)$ olur.

Aşağıda, küçük kalanlı bölme özelliğine sahip olmayan primitif Lipschitz tamsayıları için iki örnek verilmektedir.

Örnek 4.1.1. $\alpha = 9 + 7i + 5j + k$ primitif Lipschitz tamsayısını ele alalım. α primitif Lipschitz tamsayısının normu, $N(\alpha) = 156$'dır. $z = {}^{156}/_{2} = 78$ için

$$\mu_\alpha(78) = 11 - 3i + j - 5k \tag{4.1.15}$$

olur. (4.1.15)'te elde edilen kalan sınıfının normu, $N\big(\mu_\alpha(78)\big) = 156$'dır. Buradan, $N\big(\mu_\alpha(78)\big) = N(\alpha) = 156$ olacağından dolayı (4.1.7)'deki eşitlik sağlanmış olur. Diğer taraftan, Önerme 4.1.1'e göre

$$\mu_\alpha(0) = 0 \tag{4.1.16}$$

dır. Bununla birlikte, Sonuç 4.1.1'den

$$\mu_\alpha(78) = 11 - 3i - j - 5k \equiv 0 \ (mod\ 9 + 7i + 5j + k) \tag{4.1.17}$$

olur. Sonuç 4.1.2.'e göre $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olmak üzere $z = 0$ ve $z = {}^{N(\alpha)}/_{2}$ için μ_α modülo foksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları sıfır kalan sınıfının elemanı olur. Sonuç 4.1.3'e göre ise $\mathcal{L}_\alpha$ kalan sınıfları kümesinin eleman sayısı, kümede iki sıfır kalan sınıfı olacağından dolayı en çok $N(\alpha) - 1 = 155$ olur.

Örnek 4.1.2. $\alpha = 19 + 17i + 9j + 3k$ primitif Lipschitz tamsayısını ele alalım. α primitif Lipschitz tamsayısının normu $N(\alpha) = 19^2 + 17^2 + 9^2 + 3^2 = 740$'tır. $z = {}^{740}/_{2} = 370$ için

$$\mu_\alpha(370) = 24 - 4i + 2j - 12k \tag{4.1.18}$$

olur. (4.1.18)'de elde edilen kalan sınıfının normu, $N\big(\mu_\alpha(370)\big) = 740$'tır. Dolayısıyla, $N\big(\mu_\alpha(370)\big) = N(\alpha) = 740$ eşitliği sağlanmış olur. Diğer taraftan, Önerme 4.1.1'e göre $\mu_\alpha(0) = 0$ olacağındann dolayı Sonuç 4.1.1'e göre

$$\mu_\alpha(340) = 24 - 4i + 2j - 12k \equiv 0 \left(mod\ (9 + 7i + 5j + k)\right) \qquad (4.1.19)$$

olur. Sonuç 4.1.2'ye göre $z = 0$ ve $z = {}^{N(\alpha)}/_{2}$ için elde edilen kalan sınıfları, sırasıyla (4.1.18) ve (4.1.19)'da görüleceği üzere sıfır kalan sınıfının içine düşmektedir. Sonuç 4.1.3'e göre ise $\mathcal{L}_\alpha$ kalan sınıfları kümesinin eleman sayısı, kalan sınıfları kümesinde iki sıfır kalan sınıfı olacağından dolayı en çok $N(\alpha) - 1 = 739$ olur.

Her bir bileşeni tek tamsayı olan α primitif Lipschitz tamsayıları üzerinden elde edilen çelişkiyi ortadan kaldırmak için primitif Lipschitz tamsayıları yerine küçük kalanlı bölme özelliğine sahip primitif Lipschitz tamsayıları, kodlayıcı Lipschitz tamsayıları adıyla aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Tanım 4.1.2. $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$ bir primitif Lipschitz tamsayısı olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan α primitif Lipschitz tamsayısına kodlayıcı Lipschitz tamsayısı denir.

i. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{Z}^+$,

ii. $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 1$ ve

iii. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 bileşenlerinin hepsi birden tek tamsayı olmamalıdır.

Yukarıdaki tanım şu şekilde de ifade edilebilir; her bir bileşeni tek tamsayı olan primitif Lipschitz tamsayıları dışındaki diğer primitif Lipschitz tamsayılarının her birine kodlayıcı Lipschitz tamsayısı denir.

Aşağıda verilen iki teorem ile sırasıyla α kodlayıcı Lipschitz tamsayıları üzerinden μ_α modülo fonksiyonunun bir halka homomorfizması ve bir halka izomorfizması olduğu gösterilmektedir.

Teorem 4.1.1. α kodlayıcı Lipschitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olsun. μ_α modülo fonksiyonu bir halka homomorfizmasıdır.

İspat. α kodlayıcı Lipschitz tamsayısı ve $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olsun. Buradan

$$\mu_\alpha(z_1 + z_2) = z_1 + z_2 - \alpha \left[\left|\frac{\bar{\alpha}(z_1 + z_2)}{N(\alpha)}\right|\right] \qquad (4.1.20)$$

olup

$$\mu_\alpha(z_1+z_2)=z_1+z_2-\alpha\left[\left|\frac{\bar{\alpha}z_1}{N(\alpha)}\right|\right]-\alpha\left[\left|\frac{\bar{\alpha}z_2}{N(\alpha)}\right|\right] \tag{4.1.21}$$

olur. Ayrıca,

$$\mu_\alpha(z_1)=z_1-\alpha\left[\left|\frac{\bar{\alpha}z_1}{N(\alpha)}\right|\right] \tag{4.1.22}$$

ve

$$\mu_\alpha(z_2)=z_2-\alpha\left[\left|\frac{\bar{\alpha}z_2}{N(\alpha)}\right|\right] \tag{4.1.23}$$

olduğundan dolayı

$$\mu_\alpha(z_1+z_2)=\mu_\alpha(z_1)+\mu_\alpha(z_2) \tag{4.1.24}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan,

$$\mu_\alpha(z_1)\mu_\alpha(z_2)=z_1z_2-\alpha\left(z_1\left[\left|\frac{\bar{\alpha}z_2}{N(\alpha)}\right|\right]-z_2\left[\left|\frac{\bar{\alpha}z_1}{N(\alpha)}\right|\right]+\left[\left|\frac{\bar{\alpha}z_1}{N(\alpha)}\right|\right]\alpha\left[\left|\frac{\bar{\alpha}z_2}{N(\alpha)}\right|\right]\right)$$

olup $z_1\left[\left|{}^{\bar{\alpha}z_2}/_{N(\alpha)}\right|\right]-z_2\left[\left|{}^{\bar{\alpha}z_1}/_{N(\alpha)}\right|\right]+\left[\left|{}^{\bar{\alpha}z_1}/_{N(\alpha)}\right|\right]\alpha\left[\left|{}^{\bar{\alpha}z_1}/_{N(\alpha)}\right|\right]=\lambda\in\mathcal{L}$

olmak üzere yukarıdaki eşitlik

$$\mu_\alpha(z_1)\mu_\alpha(z_2)=z_1z_2-\alpha\lambda=z_1z_2\ (mod\ \alpha) \tag{4.1.25}$$

olur. Diğer yandan, $\mu_\alpha(z_1z_2)=z_1z_2\ (mod\ \alpha)$ olduğundan dolayı

$$\mu_\alpha(z_1z_2)=\mu_\alpha(z_1)\mu_\alpha(z_2) \tag{4.1.26}$$

olur. (4.1.24) ve (4.1.26)'daki eşitliklerden bir halka homomorfizması olması için gereken koşulların sağlandığı görülür.

Primitif Lipschitz tamsayıları kümesinde her bir bileşeni tek tamsayı olan primitif Lipschitz tamsayıları da olacağından dolayı Önerme 4.1.1 ve Sonuç 4.1.1'den $Çek\mu_\alpha=\left\{0,{}^{N(\alpha)}/_2\right\}$ olarak elde edilir. Bundan dolayı, α primitif Lipschitz tamsayısı olmak üzere μ_α modülo fonksiyonu bire-bir olma koşuluyla çelişki oluşturur. Diğer bir ifadeyle, α primitif Lipschitz tamsayısı olmak üzere μ_α modülo fonksiyonu bire-bir olma koşulu ile oluşturacağı çelişkiden dolayı $\mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ halkası ile $\mathcal{L}_\alpha$ halkası arasında bir izomorfizma kurulamayacaktır. Primitif Lipschitz tamsayıları yerine tanımlanan kodlayıcı Lipschitz tamsayılarının bu çelişkiyi ortadan kaldırdığı aşağıdaki teorem ile gösterilmektedir.

Teorem 4.1.2. α kodlayıcı Lipschitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olsun.. μ_α modülo fonksiyonu bir halka izomorfizmasıdır.

İspat. α kodlayıcı Lipschitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olsun. Teorem 4.1.1.'den μ_α modülo fonksiyonunun bir halka homomorfizması olduğu gösterilmiştir. $Gör\mu = \{\mu_\alpha(z) : z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}\} = \mathcal{L}_\alpha$ olmasından dolayı μ_α modülo fonksiyonu örten bir fonksiyon olur. Diğer taraftan, Önerme 4.1.1'e göre $\mu_\alpha(0) = 0$ olur. $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)} - \{0\}$ için $\mu_\alpha(z) \geq 1$ eşitsizliği sağlanacağından dolayı,

$$Çek\mu = \{z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)} : \mu_\alpha(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)} : z = 0\} = \{0\} \tag{4.1.27}$$

olur. Buradan, μ_α modülo fonksiyonu bire-bir bir fonksiyon olur. Dolayısıyla, μ_α modülo fonksiyonu bir halka izomorfizması olur.

Asal (veya tek) Lipschitz tamsayısı için bölme algoritmasındaki $0 \leq N(\mu_\alpha(z)) < N(\alpha)$ koşulu, primitif Lipschitz tamsayıları düşünüldüğünde $0 \leq N(\mu_\alpha(z)) \leq N(\alpha)$ olur. Bu problemi ortadan kaldırmak için primitif Lipschitz tamsayılarının yerine tanımlanan kodlayıcı Lipschitz tamsayılarının küçük kalanlı bölme özelliğine sahip olduğu aşağıdaki önerme ile gösterilmektedir.

Önerme 4.1.5. α kodlayıcı Lipschitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olsun. Buradan,

$$0 \leq N(\mu_\alpha(z)) < N(\alpha) \tag{4.1.28}$$

sağlanır.

İspat. α kodlayıcı Lipschitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ olsun. Buradan, $\mu_\alpha(z)$ modülo fonksiyonundan

$$\alpha^{-1}\mu_\alpha(z) = \frac{\bar{\alpha}z}{N(\alpha)} - \left[\left|\frac{\bar{\alpha}z}{N(\alpha)}\right|\right] \tag{4.1.29}$$

olup

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}\mu_\alpha(z) = {} & \frac{\alpha_1 z}{N(\alpha)} - \left[\left|\frac{\alpha_1 z}{N(\alpha)}\right|\right] + \left(\frac{\alpha_1 z}{N(\alpha)} - \left[\left|\frac{\alpha_1 z}{N(\alpha)}\right|\right]\right) i \\ & + \left(\frac{\alpha_1 z}{N(\alpha)} - \left[\left|\frac{\alpha_1 z}{N(\alpha)}\right|\right]\right) j + \left(\frac{\alpha_1 z}{N(\alpha)} - \left[\left|\frac{\alpha_1 z}{N(\alpha)}\right|\right]\right) k\end{aligned} \tag{4.1.30}$$

olur. Kodlayıcı Lipschitz tamsayılarının tanımından dolayı $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 bileşenlerinin hepsi birden tek tamsayı olamayacağıdan dolayı ispat aşağıdaki üç durum üzerinden yapılmaktadır.

Durum 1: α_1 bir çift tamsayı ve $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tek tamsayılar olsun. $N(\alpha)$ tek tamsayı olacağından dolayı

$$0 \leq \left| \frac{\alpha_1 z}{N(\alpha)} - \left[\left| \frac{\alpha_1 z}{N(\alpha)} \right| \right] \right| < \frac{1}{2} \tag{4.1.31}$$

$$0 \leq \left| \frac{\alpha_2 z}{N(\alpha)} - \left[\left| \frac{\alpha_2 z}{N(\alpha)} \right| \right] \right| < \frac{1}{2} \tag{4.1.32}$$

$$0 \leq \left| \frac{\alpha_3 z}{N(\alpha)} - \left[\left| \frac{\alpha_3 z}{N(\alpha)} \right| \right] \right| < \frac{1}{2} \tag{4.1.33}$$

$$0 \leq \left| \frac{\alpha_4 z}{N(\alpha)} - \left[\left| \frac{\alpha_4 z}{N(\alpha)} \right| \right] \right| < \frac{1}{2} \tag{4.1.34}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (4.1.30)'daki eşitliğin normundan ve (4.1.31), (4.1.32), (4.1.33) ve (4.1.34)'teki eşitsizliklerin karelerinin toplamından

$$N\left(\alpha^{-1}\mu_\alpha(z)\right) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \tag{4.1.35}$$

olur. Buradan,

$$0 \leq N\left(\mu_\alpha(z)\right) < N(\alpha) \tag{4.1.36}$$

elde edilir.

Durum 2: α_1 ve α_2 çift tamsayılar ve α_3 ve α_4 tek tamsayılar olsun. $N(\alpha)$ bir çift tamsayı olacağından dolayı aşağıdaki iki durum üzeriden $0 \leq N\left(\mu_\alpha(z)\right) < N(\alpha)$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilir.

i. $z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ için $z = {}^{N(\alpha)}/_{2}$ ise

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}\mu_\alpha(z) = {} & \frac{\alpha_1}{2} - \left[\left| \frac{\alpha_1}{2} \right| \right] + \left(\frac{\alpha_2}{2} - \left[\left| \frac{\alpha_2}{2} \right| \right] \right) i \\ & + \left(\frac{\alpha_3}{2} - \left[\left| \frac{\alpha_3}{2} \right| \right] \right) j + + \left(\frac{\alpha_4}{2} - \left[\left| \frac{\alpha_4}{2} \right| \right] \right) k \end{aligned} \tag{4.1.37}$$

olur. α_1 ve α_2 çift tamsayılar ve α_3 ve α_4 pozitif tek tamsayılar olduklarından dolayı

$$\left[\left| \frac{\alpha_1}{2} \right| \right] = \frac{\alpha_1}{2}, \left[\left| \frac{\alpha_2}{2} \right| \right] = \frac{\alpha_2}{2}, \left[\left| \frac{\alpha_3}{2} \right| \right] = \frac{\alpha_3 - 1}{2} \; ve \; \left[\left| \frac{\alpha_4}{2} \right| \right] = \frac{\alpha_4 - 1}{2} \tag{4.1.38}$$

olur. (4.1.38)'teki eşitlikler, (4.1.37)'deki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\alpha^{-1}\mu_\alpha(z) = -\frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k \tag{4.1.39}$$

elde edilir. Buradan,

$$N\left(\alpha^{-1}\mu_\alpha(z)\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \tag{4.1.40}$$

olup

$$N\left(\mu_\alpha(z)\right) = \frac{N(\alpha)}{2} \tag{4.1.41}$$

olur. Dolayısıyla,

$$0 \leq N\left(\mu_\alpha(z)\right) < N(\alpha) \tag{4.1.42}$$

eşitsizliği sağlanır.

ii. $z \neq {}^{N(\alpha)}/_2$ olmak üzere $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ için Durum 1'deki ispata benzer olacak şekilde

$$0 \leq N\left(\mu_\alpha(z)\right) < N(\alpha) \tag{4.1.43}$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilebilir.

Durum 3: α_1, α_2 ve α_3 çift tamsayılar ve α_4 tek tamsayı olsun. $N(\alpha)$ bir tek tamsayı olacağından dolayı Durum 1'deki ispata benzer olacak şekilde

$$0 \leq N\left(\mu_\alpha(z)\right) < N(\alpha) \tag{4.1.44}$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilebilir.

Sonuç olarak, üç durum üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}$ için $0 \leq N\left(\mu_\alpha(z)\right) < N(\alpha)$ koşulunun sağladığı gösterilmiş olur.

Önerme 4.1.5'in bir sonucu olarak α kodlayıcı Lipschitz tamsayıları üzerinden tanımlanan bölme algoritması aşağıdaki sonuç ile verilmektedir.

Sonuç 4.1.4. α kodlayıcı Lipschitz tamsayıları için bölme algoritması şu şekilde tanımlanır. α kodlayıcı Lipschitz tamsayısı ve $\lambda \in \mathcal{L}$ olsun. $\lambda = \alpha\delta + \gamma$ ve $0 \leq N(\gamma) < N(\alpha)$ olacak şekilde $\exists \delta, \gamma \in \mathcal{L}$ vardır.

Önerme 4.1.5'in ispatında verilen üç durum için aşağıda birer örnek verilmektedir.

Örnek 4.1.3. $\alpha = 3 + 2i + j + k$ Lipschitz tamsayısı olmak üzere μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin elemanları Tablo 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1. $\alpha = 3 + 2i + j + k$ Lipschitz tamsayısı üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin elemanları.

z	$\mu_\alpha(z)$	z	$\mu_\alpha(z)$	z	$\mu_\alpha(z)$
0	0	5	$i - 2k$	10	$-i + 2k$
1	1	6	$1 + i - 2k$	11	$1 - i + 2k$
2	2	7	$2 + i - 2k$	12	$2i + j + k$
3	$-2i - j - k$	8	$-2 - i + 2k$	13	-2
4	$-1 + i - 2k$	9	$-1 - i + 2k$	14	-1

$\alpha = 3 + 2i + j + k$ Lipschitz tamsayısı üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen ve elamanları Tablo 4.1'de $\mu_\alpha(z)$ sütununda sunulan $\mathcal{L}_\alpha$ kümesi aşağıdadır:

$$\mathcal{L}_\alpha = \begin{Bmatrix} 0, 1, 2, -2i - j - k, -1 + i - 2k, i - 2k, 1 + i - 2k, 2 + i - 2k, \\ -2 - i + 2k, -1 - i + 2k, -i + 2k, 1 - i + 2k, 2i + j + k, -2, -1 \end{Bmatrix}.$$

Örnek 4.1.4. $\alpha = 3 + 2i + 3j + 2k$ Lipschitz tamsayısı üzerinden μ_α modülo fonksiyon ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin elemanları Tablo 4.2'de verilmektedir.

Tablo 4.2. $\alpha = 3 + 2i + 3j + 2k$ Lipschitz tamsayısı üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin elemanları.

z	$\mu_\alpha(z)$	z	$\mu_\alpha(z)$	z	$\mu_\alpha(z)$	z	$\mu_\alpha(z)$
0	0	7	$-3 + 2i$	14	$-2 - 2i$	21	$1 + 4i$
1	1	8	$-2 + 2i$	15	$-1 - 2i$	22	-4
2	2	9	$-1 + 2i$	16	$-2i$	23	-3
3	3	10	2i	17	$1 - 2i$	24	-2
4	4	11	$1 + 2i$	18	$2 - 2i$	25	-1
5	$-1 - 4i$	12	$2 + 2i$	19	$3 - 2i$		
6	$-4i$	13	$3 + 2i$	20	$4i$		

$\alpha = 3 + 2i + 3j + 2k$ Lipschitz tamsayısı üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen ve elemanları Tablo 4.2'de $\mu_\alpha(z)$ sütununda sunulan $\mathcal{L}_\alpha$ kümesi aşağıdadır:

$$\mathcal{L}_\alpha = \left\{ \begin{matrix} 0, 1, 2, 3, 4, -1 - 4i, -4i, -3 + 2i, -2 + 2i, 2\mathrm{i}, 1 + 2i, 2 + 2i, 3 + 2i, \\ -2 - 2i, -1 - 2i, -2i, 1 - 2i, 2 - 2i, 3 - 2i, 4i, 1 + 4i, -4, -3, -2, -1 \end{matrix} \right\}.$$

Örnek 4.1.5. $\alpha = 2 + 3i + 2j + 2k$ Lipschitz tamsayısı üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin elemanları Tablo 4.3'te verilmektedir.

Tablo 4.3. $\alpha = 2 + 3i + 2j + 2k$ Lipschitz tamsayısı üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin elemanları.

z	$\mu_\alpha(z)$	z	$\mu_\alpha(z)$	z	$\mu_\alpha(z)$
0	0	7	$-2 - i - j + k$	14	$2 + i + j - k$
1	1	8	$-1 - i - j + k$	15	$3 + i + j - k$
2	2	9	$-i - j + k$	16	$-2 - 2i - 2j + 2k$
3	3	10	$1 - i - j + k$	17	$-1 - 2i - 2j + 2k$
4	$1 + 2i + 2j - 2k$	11	$-1 + i + j - k$	18	-3
5	$2 + 2i + 2j - 2k$	12	$i + j - k$	19	-2
6	$-3 - i - j + k$	13	$1 + i + j - k$	20	-1

$\alpha = 2 + 3i + 2j + 2k$ Lipschitz tamsayısı üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen ve elemanları Tablo 4.3'te $\mu_\alpha(z)$ sütununda sunulan $\mathcal{L}_\alpha$ kümesi aşağıdadır:

$$\mathcal{L}_\alpha = \left\{ \begin{matrix} 0, 1, 2, 3, 1 + 2i + 2j - 2k, 2 + 2i + 2j - 2k, \\ -3 - i - j + k, -2 - i - j + k, -1 - i - j + k, \\ -i - j + k, 1 - i - j + k, -1 + i + j - k, \\ i + j - k, 1 + i + j - k, 2 + i + j - k, 3 + i + j - k, \\ -2 - 2i - 2j + 2k, -1 - 2i - 2j + 2k, -3, -2, -1 \end{matrix} \right\}.$$

4.2. Kodlayıcı Hurwitz Tamsayıları : Küçük Kalanlı Bölme Özelliğine Sahip Hurwitz Tamsayıları

$z = 0$ için β primitif Hurwitz tamsayısı üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfı aşağıdaki önerme ile verilektedir.

Önerme 4.2.1. β primitif Hurwitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olsun. $z = 0$ için

$$\mu_\beta(0) = 0 \tag{4.2.1}$$

dır.

İspat. β primitif Hurwitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olsun. $z = 0$ için $\mu_\beta^{(1)}$ ve $\mu_\beta^{(2)}$ modülo fonksiyonları ile elde edilen ve Önerme 3.2.1'in (i.) ve (ii.) koşullarındaki kalan sınıfları $\mu_\beta^{(1)}(0) = 0$ ve $\mu_\beta^{(2)}(0) = -\beta\left({}^1\!/_2 + {}^1\!/_2\, i + {}^1\!/_2\, j + {}^1\!/_2\, k\right)$'dır. Kalan sınıflarının normları ise $N\left(\mu_\beta^{(1)}(0)\right) = 0$ ve $N\left(\mu_\beta^{(2)}(0)\right) = N(\beta)$'dır. Buradan, $0 \leq N\left(\mu_\beta^{(1)}(0)\right) < N\left(\mu_\beta^{(2)}(0)\right)$ sağlanacağından dolayı $z = 0$ için μ_β modülo fonksiyonu ile

$$\mu_\beta(0) = 0 \tag{4.2.2}$$

kalan sınıfı elde edilir.

β her bir bileşeni tek tamsayı olan bir primitif Hurwitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olmak üzere $z = {}^{N(\beta)}\!/_2$ için μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfı aşağıdaki önerme ile verilmektedir.

Önerme 4.2.2. β her bir bileşeni tek tamsayı olan bir primitif Hurwitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olsun. $z = {}^{N(\beta)}\!/_2$ için μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfı

$$\mu_\beta\left(\frac{N(\beta)}{2}\right) = 0 \tag{4.2.3}$$

dır.

İspat. β her bir bileşeni tek tamsayı olan bir primitif Hurwitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olsun. $z = {}^{N(\beta)}\!/_2$ için $\mu_\beta^{(1)}$ modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfı

$$\mu_\beta^{(1)}\left(\frac{N(\beta)}{2}\right) = -\beta\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k\right) \tag{4.2.4}$$

ve $\mu_\beta^{(2)}$ modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfı

$$\mu_\beta^{(2)}\left(\frac{N(\beta)}{2}\right) = \frac{N(\beta)}{2} - \beta\left[\left\|\frac{\bar{\beta}}{2}\right\|\right] \tag{4.2.5}$$

olur. (4.2.5)'teki eşitlikten

$$\mu_\beta^{(2)}\left(\frac{N(\beta)}{2}\right)=\frac{N(\beta)}{2}-\beta\frac{\bar{\beta}}{2}=\frac{N(\beta)}{2}-\frac{N(\beta)}{2}=0 \qquad (4.2.6)$$

olur. (4.2.4) ve (4.2.6)'daki eşitliklerin normlarından $0\leq N\left(\mu_\beta^{(1)}\left({}^{N(\beta)}/_{2}\right)\right)<N\left(\mu_\beta^{(2)}\left({}^{N(\beta)}/_{2}\right)\right)$ olacağından dolayı $z={}^{N(\beta)}/_{2}$ için μ_β modülo fonksiyonundan

$$\mu_\beta\left(\frac{N(\beta)}{2}\right)=0 \qquad (4.2.7)$$

kalan sınıfı elde edilir.

Önerme 4.2.1 ve Önerme 4.2.2 ile elde edilen bir sonuç aşağıda verilmektedir.

Sonuç 4.2.1. β her bir bileşeni tek tamsayı olan bir primitif Hurwitz tamsayısı ve $z\in\mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olsun. $z=0$ ve $z={}^{N(\beta)}/_{2}$ için μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları sıfır kalan sınıfının bir elemanı olur. Bundan dolayı, μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesini temsil eden $\mathcal{H}_\beta$ kümesinin eleman sayısı en çok $(N(\beta)-1)$ olur.

Sonuç 4.2.1 ile; her bir bileşeni tek tamsayı olan β primitif Hurwitz tamsayısı için $\mu_\beta(z_1)=\mu_\beta(z_2)$ iken $0=z_1\neq z_2={}^{N(\beta)}/_{2}$ olacağından dolayı bire-bir fonksiyon olma koşulu ile çelişki oluşturduğu ifade edilir.

Sonuç 4.2.1'nin bir uygulaması olarak aşağıdaki örnek verilmektedir.

Örnek 4.2.1. $\beta=1+3i+j+3k$ primitif Hurwitz tamsayısı olsun. $N(\beta)=1^2+3^2+1^2+3^2=20$'dir. $z=0$ ve $z=10$ için μ_β modülo fonksiyonundan elde edilen kalan sınıfları

$$\mu_\beta(0)=0 \qquad (4.2.8)$$

ve

$$\mu_\beta(10)=0 \qquad (4.2.9)$$

olur. Sonuç 4.2.1'den $z=0$ ve $z=10$ için μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları, sıfır kalan sınıfının bir elemanı olacağından dolayı $\mathcal{H}_\beta$ kümesinin eleman sayısı en çok $N(\beta)-1=20-1=19$ olur.

Her bir bileşeni tek tamsayı olan bir β primitif Hurwitz tamsayısı üzerinden $\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinde Önerme 4.2.1 ve Önerme 4.2.2'den $0 \leq N\left(\mu_\beta(z)\right) < N(\beta)$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Dolayısıyla, primitif Hurwitz tamsayıları için bölme algoritmasındaki kalanın bölenden küçük olma koşulu sağlanır. Yani, primitif Lipschitz tamsayılarının aksine primitif Hurwitz tamsayıları küçük kalanlı bölme özelliğine sahiptir. Ancak, primitif Hurwitz tamsayılarının küçük kalanlı bölme özelliğine sahip olmasına rağmen bire-bir fonksiyon olma koşuluyla çelişki oluşturmaktadır. Bu çelişkiden dolayı $\mathbb{Z}_{N(\beta)}$ halkası ile $\mathcal{H}_\beta$ halkası arasında izomorfizma kurulamamaktadır. Bu problemi ortadan kaldırmak için primitif Hurwitz tamsayıları yerine bire-bir fonksiyon olma koşulunu sağlayacak şekildeki primitif Hurwitz tamsayıları, kodlayıcı Hurwitz tamsayıları adıyla aşağıda gibi tanımlanmaktadır.

Tanım 4.2.1. $\beta = \beta_1 + \beta_2 i + \beta_3 j + \beta_4 k$ bir primitif Hurwitz tamsayısı olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan β primitif Hurwitz tamsayısına kodlayıcı Hurwitz tamsayısı denir.

i. $\beta \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ ise

- $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{Z}^+$,
- $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = 1$,
- $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ve β_4 bileşenlerinin hepsi birden tek tamsayı olmamalıdır.

ii. β her bir bileşeni pozitif yarım-tamsayı olan bir primitif Hurwitz tamsayısıdır.

Yukarıdaki tanım şu şekilde de ifade edilebilir; her bir bileşeni tek tamsayı olan primitif Hurwitz tamsayıları dışındaki diğer primitif Hurwitz tamsayılarının her birine kodlayıcı Hurwitz tamsayısı denir.

β kodlayıcı Hurwitz tamsayısı olmak üzere μ_β modülo fonksiyonunun halka homomorfizması ve halka izomorfizması olduğu sırasıyla aşağıdaki iki teorem ile gösterilmektedir.

Teorem 4.2.1. β kodlayıcı Hurwitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olsun. μ_β modülo fonksiyonu bir halka homomorfizmasıdır.

İspat. β kodlayıcı Hurwitz tamsayısı olmak üzere μ_β modülo fonksiyonunun bir halka homomorfizması olduğunu göstermek için her bir bileşeni tamsayı olan kodlayıcı

Hurwitz tamsayıları ve her bir bileşeni yarım-tamsayı olan kodlayıcı Hurwitz tamsayıları için sırasıyla Teorem 4.1.1 ve Teorem 3.2.1'nin ispatları kullanılarak Teorem 4.2.1'in ispatı yapılabilir.

Teorem 4.2.2. β kodlayıcı Hurwitz tamsayısı ve $z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olsun. μ_β modülo fonksiyonu bir halka izomorfizmasıdır.

İspat. β kodlayıcı Hurwitz tamsayısı olmak üzere μ_β modülo fonksiyonunun bir halka izomorfizması olduğunu göstermek için her bir bileşeni tamsayı olan kodlayıcı Hurwitz tamsayıları ve her bir bileşeni yarım-tamsayı olan kodlayıcı Hurwitz tamsayıları için sırasıyla Teorem 4.1.2 ve Teorem 3.2.2'nin ispatları kullanılarak Teorem 4.2.2'nin ispatı yapılabilir.

Not 4.2.1. Teorem 4.2.2'de, β her bir bileşeni tek tamsayı olacak şekilde bir primitif Hurwitz tamsayısı olarak düşünülseydi (4.2.2) ve (4.2.7)'deki eşitliklerden $Çek\mu = \left\{0, \frac{N(\beta)}{2}\right\}$ olarak bulunurdu. Buradan, her bir bileşeni tek tamsayı olan β primitif Hurwitz tamsayısı üzerinden μ_β modülo fonksiyonunun bire-bir fonksiyon olma koşuluyla oluşturduğu çelişkiden dolayı bir halka izomorfizması kurulamayacaktı. Bu problemi ortadan kaldırmak için kodlayıcı Hurwitz tamsayıları tanımlanmıştır.

Aşağıdaki örnekler, kodlayıcı Hurwitz tamsayılarının uygulamaları olarak verilmektedir.

Örnek 4.2.2. $\beta = 3 + i + j + 2k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları Tablo 4.4'te verilmektedir. Hesaplamalar için Ek-A Şekil A.1'deki *Mathematica* kodları kullanılmıştır.

Tablo 4.4. $\beta = 3 + i + j + 2k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları.

z	$\mu_\beta^{(1)}(z)$	$\mu_\beta^{(2)}(z)$	$\mu_\beta(z)$
0	0	$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{5}{2}j-\frac{5}{2}k$	0
1	1	$-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	1
2	2	$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	2
3	$-i-j-2k$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$
4	$-1-2j+k$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$
5	$-2j+k$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{3}{2}k$	$-2j+k$
6	$1-2j+k$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k$
7	$2-2j+k$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k$
8	$-2+2j-k$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{3}{2}k$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{3}{2}k$
9	$-1+2j-k$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{3}{2}k$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{3}{2}k$
10	$2j-k$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{3}{2}k$	$2j-k$
11	$1+2j-k$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$
12	$i+j-2k$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$

Tablo 4.4.(Devamı) $\beta = 3 + i + j + 2k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları.

z	$\mu_\beta^{(1)}(z)$	$\mu_\beta^{(2)}(z)$	$\mu_\beta(z)$
13	-2	$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$	-2
14	-1	$\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$	-1

$\beta = 3 + i + j + 2k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen ve elemanları Tablo 4.4'te $\mu_\beta(z)$ sütununda sunulan $\mathcal{H}_\beta$ kümesi aşağıdadır:

$$\mathcal{H}_\beta = \left\{ \begin{array}{c} 0, 1, 2, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k, \\ -2j+k, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k, \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{3}{2}k, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{3}{2}k, 2j-k, \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k-2, -1 \end{array} \right\}.$$

Örnek 4.2.3. $\beta = 3 + i + 2j + 2k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları Tablo 4.5'te verilmektedir. Hesaplamalar için Ek-A Şekil A.1'deki *Mathematica* kodları kullanılmıştır.

$\beta = 3 + i + 2j + 2k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen ve elemanları Tablo 4.5'te $\mu_\beta(z)$ sütununda sunulan $\mathcal{H}_\beta$ kümesi aşağıdadır:

$$\mathcal{H}_\beta = \left\{ \begin{array}{c} 0, 1, 2, -1+i+j, i+j, 1+i+j, -1-i+2k, \\ 2-i+2k, -1+i-2k, i-2k, 1+i-2k, \\ -1-i-j, -i-j, 1-i-j, -2, -1 \end{array} \right\}.$$

Tablo 4.5. $\beta = 3 + i + 2j + 2k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları.

z	$\mu_\beta^{(1)}(z)$	$\mu_\beta^{(2)}(z)$	$\mu_\beta(z)$
0	0	$1 - 2i - 3j - 2k$	0
1	1	$-3 + i + j$	1
2	2	$-2 + i + j$	2
3	3	$-1 + i + j$	$-1 + i + j$
4	$1 - i - 2j - 2k$	$i + j$	$i + j$
5	$-2 - i + 2k$	$1 + i + j$	$1 + i + j$
6	$-1 - i + 2k$	$2 + i + j$	$-1 - i + 2k$
7	$-i + 2k$	$-j - 2k$	$-i + 2k$
8	$1 - i + 2k$	$1 - j - 2k$	$1 - i + 2k$
9	$2 - i + 2k$	$2 - j - 2k$	$2 - i + 2k$
10	$-1 + i - 2k$	$-1 + j + 2k$	$-1 + i - 2k$
11	$i - 2k$	$j + 2k$	$i - 2k$
12	$1 + i - 2k$	$1 + j + 2k$	$1 + i - 2k$
13	$2 + i - 2k$	$-1 - i - j$	$-1 - i - j$
14	$-1 + i + 2j + 2k$	$-i - j$	$-i - j$
15	$i + 2j + 2k$	$1 - i - j$	$1 - i - j$
16	-2	$2 - i - j$	-2
17	-1	$3 - i - j$	-1

Örnek 4.2.4. $\beta = 4 + i + 2j + 2k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları Tablo 4.6'da verilmektedir. Hesaplamalar için Ek-A Şekil A.1'deki *Mathematica* kodları kullanılmıştır.

Tablo 4.6. $\beta = 4 + i + 2j + 2k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısının $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları.

z	$\mu_\beta^{(1)}(z)$	$\mu_\beta^{(2)}(z)$	$\mu_\beta(z)$
0	0	$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i-\frac{7}{2}j-\frac{5}{2}k$	0
1	1	$-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	1
2	2	$-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	2
3	3	$-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	$-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$
4	$-i-2j-2k$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$
5	$1-i-2j-2k$	$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$
6	$2-i-2j-2k$	$\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	$\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$
7	$-1-i+j+3k$	$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k$	$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k$
8	$-i+j+3k$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k$
9	$1-i+j+3k$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k$
10	$-2-2i-j+k$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k$
11	$-1-2i-j+k$	$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k$	$-1-2i-j+k$

Tablo 4.6.(Devamı) $\beta = 4 + i + 2j + 2k$kodlayıcı Hurwitz tamsayısının $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin elemanları.

z	$\mu_\beta^{(1)}(z)$	$\mu_\beta^{(2)}(z)$	$\mu_\beta(z)$
12	$-2i - j + k$	$\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j - \frac{3}{2}k$	$-2i - j + k$
13	$2i + j - k$	$-\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{3}{2}k$	$2i + j - k$
14	$1 + 2i + j - k$	$-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{3}{2}k$	$1 + 2i + j - k$
15	$2 + 2i + j - k$	$-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{3}{2}k$	$-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{3}{2}k$
16	$-1 + i - j - 3k$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{3}{2}k$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{3}{2}k$
17	$i - j - 3k$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{3}{2}k$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{3}{2}k$
18	$1 + i - j - 3k$	$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{3}{2}k$	$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{3}{2}k$
19	$-2 + i + 2j + 2k$	$-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$	$-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$
20	$-1 + i + 2j + 2k$	$-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$	$-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$
21	$i + 2j + 2k$	$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$	$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$
22	-3	$\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$	$\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$
23	-2	$\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$	-2
24	-1	$\frac{7}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$	-1

$\beta = 4 + i + 2j + 2k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden $\mu_\beta^{(1)}$, $\mu_\beta^{(2)}$ ve μ_β modülo fonksiyonları ile elde edilen ve elemanları Tablo 4.6'da $\mu_\beta(z)$ sütununda sunulan $\mathcal{H}_\beta$ kümesi aşağıdadır:

$$\mathcal{H}_\beta = \left\{ \begin{array}{c} 0, 1, 2, -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k, -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k, \frac{1}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k, \\ \frac{3}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k, -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k, \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k, \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-\frac{3}{2}k, -1-2i-j+k, -2i-j+k, \\ 2i+j-k, 1+2i+j-k, -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{3}{2}k, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{3}{2}k, \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{3}{2}k, \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{3}{2}k, -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k, \\ -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k, \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k, \frac{3}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k, -2, -1 \end{array} \right\}.$$

Aşağıda, [55]'te verilen ve farklı bir cebirsel yapı tekniği üzerinden kurulan bir modülo fonksiyonun tanımı verilmektedir.

Tanım 4.2.2. $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i + \lambda_3 j + \lambda_4 k$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 1$ olacak şekilde bir Lipschitz tamsayısı ve $w = {}^1\!/_2 + {}^1\!/_2\, i + {}^1\!/_2\, j + {}^1\!/_2\, k$ olsun. $z \in \mathbb{Z}_{N(\lambda)}$ olmak üzere $\mu_\lambda : \mathbb{Z}_{N(\lambda)} \to \mathcal{H}_\lambda$ modülo fonksiyonu

$$\mu_\lambda(z) = z - \left[\left[\frac{z\bar{\lambda}}{N(\lambda)}\right]\right]\lambda \tag{4.2.10}$$

ile tanımlanır. (4.2.10)'daki eşitlikte z yerine $a, b \in \mathbb{Z}_{N(\lambda)}$ olmak üzere $a + bj$ alındığında elde edilen μ_λ modülo fonksiyonu ile

$$\mathcal{L}_\lambda = \{\mu_\lambda(a + bj) : a, b \in \mathbb{Z}_q, q = N(\lambda)\} \tag{4.2.11}$$

kalan sınıfları halkası elde edilir. (4.2.10)'daki eşitlikte z yerine $h \in \mathcal{L}_\lambda$ olmak üzere $h + w$ alındığında elde edilen μ_λ modülo fonksiyonu ile

$$\mathcal{O}_\lambda = \{\mu_\lambda(h + w) : h \in \mathcal{L}_\lambda\} \tag{4.2.12}$$

kalan sınıfları halkası elde edilir. Buradan, Hurwitz tamsayılarının kalan sınıfları halkası

$$\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda \cup \mathcal{O}_\lambda \tag{4.2.13}$$

olarak elde edilir [55].

(4.2.11)'deki $\mathcal{L}_\lambda$ kümesi $\left(N(\lambda)\right)^2$ elemanlı Lipschitz kalan sınıfları halkasını temsil etmektedir. Diğer taraftan, (4.2.12)'deki $\mathcal{O}_\lambda$ kümesi, $\left(N(\lambda)\right)^2$ elemanlı Hurwitz kalan sınıfları halkasını temsil etmektedir. Buradan, (4.2.11) ve (4.2.12)'deki kümelerin

birleşimi ile elde edilen (4.2.13)'teki $\mathcal{H}_\lambda$ sinyal yıldızkümesi $2\big(N(\lambda)\big)^2$ elemana sahip olmaktadır.

Aşağıdaki örnek ile; hem sağ denklik sınıflarına hem de sol denklik sınıflarına göre oluşturulan primitif Lipschitz veya primitif Hurwitz tamsayısı üzerinden μ_λ modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümelerinin farklı eleman sayılarına sahip oldukları gösterilmektedir. Ayrıca, [55]'te tanımlanan modülo fonksiyonu için uygun primitif Lipschitz tamsayıları kullanılmasına rağmen primitif Lipschitz tamsayılarının ve primitif Hurwitz tamsayılarının, μ_α ve μ_β modülo fonksiyonları dışında farklı bir modülo fonksiyonu için de uygun olamayacakları aşağıdaki örnek ile gösterilmektedir.

Örnek 4.2.5. $\lambda = 3 + i + j + k$ primitif Lipschitz tamsayısını ele alalım. $(a, b) \in \mathbb{Z}_{N(\lambda)} \times \mathbb{Z}_{N(\lambda)}$ olmak üzere $(a, b) = (6, 6)$ olsun. Buradan, μ_λ modülo fonksiyonu ile

$$\begin{aligned}\mu_{3+i+j+k}(6+6j) &= 6+6j \\ &\quad - \left[\left|\frac{(6+6j)(3-i-j-k)}{12}\right|\right](3+i+j+k) \\ &= 6+6j-(6+6j) = 0 \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

elde edilir. Ayrıca, $h = 0$ ve $w = {}^1\!/_2 + {}^1\!/_2\, i + {}^1\!/_2\, j + {}^1\!/_2\, k$ olmasından dolayı

$$h + w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k \tag{4.2.15}$$

olup

$$\mu_{3+i+j+k}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k \tag{4.2.16}$$

olur. $(a, b) = (6, 6)$ için μ_λ modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları

$$\left\{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k\right\} \tag{4.2.17}$$

olur. Diğer taraftan, $(a, b) = (0, 0)$ için μ_λ modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları

$$\left\{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k\right\} \tag{4.2.18}$$

olur. Dolayısıyla, (4.2.17) ve (4.2.18)'deki kümelerin birleşiminden

$$\left\{0, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k\right\} \tag{4.2.19}$$

elde edilir. (4.2.19)'dan dolayı $\mathcal{H}_\lambda$ kümesinin eleman sayısı en çok $2\left(N(\lambda)\right)^2-1=287$ olabilir. Diğer taraftan, sol denklik sınıflarına ve sağ denklik sınıflarına göre *Mathematica* programı üzerinden $\mathcal{H}_\lambda$ kalan sınıfları kümelerinin eleman sayıları sırasıyla 151 ve 157 olarak elde edilir. Sonuç olarak, $\lambda=3+i+j+k$ primitif Lipschitz tamsayısı veya primitif Hurwitz tamsayısı, μ_λ modülo fonksiyonu için uygun olmamaktadır.

Aşağıdaki örnek ile; [55]'te sağ denklik sınıflarına göre tanımlanan μ_λ modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin eleman sayısının, sol denklik sınıflarına göre tanımlanan μ_λ modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin eleman sayısından farklı olduğu gösterilmektedir.

Örnek 4.2.6. $\lambda=3+2i+j+k$ primitif Lipschitz tamsayısını ele alalım. Sol denklik sınıflarına göre μ_λ modülo fonksiyonu ile elde edilen $\mathcal{H}_{3+2i+j+k}$ kalan sınıfları halkasının elaman sayısı *Mathematica* programı üzerinden yapılan hesaplamalar sonucunda 90 olarak elde edilmiştir. Diğer taraftan, sağ denklik sınıflarına göre tanımlanan μ_λ modülo fonksiyonu ile elde edilen $\mathcal{H}_{3+2i+j+k}$ kalan sınıfları halkasının elaman sayısı *Mathematica* programı üzerinden yapılan hesaplamalar sonucunda 450 olarak elde edilmiştir.

Not 4.2.2. *Mathematica* programı üzerinden yapılan çalışmalarda tez çalışmasındaki değerler göz önüne alındığında; sol denklik sınıflarına göre tanımlanan μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin elamanlarıyla, sağ denklik sınıflarına göre tanımlanan μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesinin elemanları farklı olmasına rağmen eleman sayılarının aynı olduğu görülmüştür.

5. HURWITZ VE LIPSCHITZ YILDIZKÜMELERİNİN GAUSS GÜRÜLTÜ KANALINDAKİ KOD KAZANÇLARI VE KARŞILAŞTIRMALARI

Hurwitz (veya Lipschitz tamsayıları) halkası üzerinden ilgili bir modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesi, Hurwitz (veya Lipschitz tamsayıları) halkasının bir alt halkasını oluşturmaktadır. Bundan dolayı, Gauss, Lipschitz veya Hurwitz tamsayıları halkası üzeriden ilgili bir modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları kümesi, kalan sınıfları halkasına karşılık gelmektedir. Kodlama teorisinde ise kalan sınıfları halkası, kod kümesine karşılık gelmektedir. Kod kümesinin her bir elemanına ise kodsöz denir. Kod kümesindeki kodsözlerin iki boyutlu koordinat sisteminde veya üç boyutlu uzaydaki gösterimleri, mühendislikte bir iletişim terimi olarak kullanılan sinyal yıldızkümesi ile ifade edilmektedir. Bu bölümden itibaren kod kümeleri, sinyal yıldızkümesi ile ifade edilecektir.

Bu bölüm dört alt bölümden oluşmaktadır.

Birinci alt bölümde; ilk olarak sinyal yıldızkümesinin tanımı verilmektedir. Bununla birlikte, Gauss sinyal yıldızkümesinin, Lipschitz sinyal yıldızkümesinin ve Hurwitz sinyal yıldızkümesinin koordinat sistemindeki gösterimleri şekiller üzerinden sunulmaktadır. İkinci olarak, iletişim sistemi ve bir iletişim sistemi olarak tasarlanan toplanabilir beyaz Gauss gürültüsü ($TBGG$) hakkında bazı bilgiler verilmektedir. Üçüncü olarak, $TBGG$ kanalı üzerinden sinyal yıldızkümelerinin; minimum kare Öklid uzaklığı, sinyal başına ortalama enerjisi, bit başına ortalama enerjisi, kanaldaki iletim hızı olarak CFM'si (Constellation Figure of Merit) gibi performans ölçüleri ve asimptotik kod kazancı anlamına gelen sinyal gürültü oranı (SGO) üzerinden kod kazancı hakkında bilgiler verilmektedir. Son olarak, minimum Öklid uzaklığını genişletmek için normu asal olmayan sinyal yıldızkümelerinin alt kümelerini elde etmek üzere kullanılan küme bölüntüleme özelliği sunulmaktadır.

İkinci alt bölümde; ilk olarak, μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalı üzerindeki performansları ve kod kazançları, Gauss sinyal yıldızkümelerinin ve Lipschitz sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalı üzerindeki performansları ve kod kazançları ile karşılaştırılmaktadır. Son olarak,

genişletilmiş Hurwitz tamsayılarının küme bölüntüleme özelliği üzerinden daha geniş minimum Öklid uzaklığına sahip olacak şekildeki bir alt kümesi üzerinden Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalı üzerindeki performansları ve kod kazançları, Gauss sinyal yıldızkümelerinin ve genişletilmiş Lipschitz sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalı üzerindeki performansları ve kod kazançları ile karşılaştırılmaktadır.

Bu bölümde, Gauss, Lipschitz ve Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalı üzerindeki performans ölçüleri ve kod kazançları tablolar ile sunulmaktadır. Bu tablolar üzerinden sinyal yıldızkümeleri arasında karşılaştırmalar yapılmakta ve elde edilen sonuçlar verilmektedir.

5.1. Sinyal Yıldızkümeleri, İletişim Sistemi, Performans Ölçüleri ve Küme Bölüntüsü

5.1.1. Sinyal yıldızkümesi

Bir primitif Gauss tamsayısı, kodlayıcı Lipschitz tamsayısı veya kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden ilgili bir modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları halkası, Kodlama Teorisi'nde bir kod kümesine karşılık gelmektedir. Bir primitif Gauss tamsayısı, kodlayıcı Lipschitz tamsayısı veya kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden ilgili bir modülo fonksiyonu ile elde edilen kod kümesinin tanımı tez çalışmasına uygun olacak şekilde aşağıdaki gibi verilmektedir.

Tanım 5.1.1.1. π primitif Gauss tamsayısı üzerinden $\mu_\pi: \mathbb{Z}_{N(\pi)} \to \mathcal{G}_\pi$ modülo fonksiyonu ile elde edilen kod kümesi

$$\mathcal{G}_\pi = \{\mu_\pi(z_0), \mu_\pi(z_1), \dots, \mu_\pi(z_{n-1}) : z_i \in \mathbb{Z}_{N(\pi)}, i = 0,1, \dots, n-1\} \qquad (5.1.1.1)$$

dir.

Bu kod kümesindeki her bir eleman, bir Gauss tamsayısına karşılık geleceğinden dolayı kompleks değerli kodsöz ya da kısaca kodsöz olarak ifade edilir.

Uyarı 5.1.1.1. Bu kısımdan itibaren aksi söylenmedikçe α ile kodlayıcı Lipschitz tamsayıları ve β ile kodlayıcı Hurwitz tamsayıları temsil edilecektir.

Tanım 5.1.1.2. μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen kod kümesi

$$\mathcal{L}_\alpha = \{\mu_\alpha(z_0), \mu_\alpha(z_1), \dots, \mu_\alpha(z_{n-1}) : z_i \in \mathbb{Z}_{N(\alpha)}, i = 0,1, \dots, n-1\} \qquad (5.1.1.2)$$

dir.

Tanım 5.1.1.3. μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen kod kümesi

$$\mathcal{H}_\beta = \{\mu_\beta(z_0), \mu_\beta(z_1), \dots, \mu_\beta(z_{n-1}) : z_i \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}, i = 0,1, \dots, n-1\}. \quad (5.1.1.3)$$

dir.

Buradan itibaren "kalan sınıfları halkası" veya "kod kümesi" ifadesi yerine aşağıda tanımı verilecek olan ve kod kümesindeki kodsözlerin iki boyutlu koordinat sistemi ve üç boyutlu uzaydaki gösterimlerini ifade etmek üzere mühendislikte bir iletişim terimi olarak kullanılan "sinyal yıldızkümesi" ifadesi kullanılacaktır. Bununla birlikte, "kodsöz" ifadesi yerine de "sinyal" ifadesi kullanılacaktır. Örneğin, primitif Gauss tamsayısı, kodlayıcı Lipschitz tamsayısı veya kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden ilgili bir modülo fonksiyonu ile elde edilen kalan sınıfları halkası veya kod kümesi yerine sırasıyla Gauss sinyal yıldızkümesi, Lipschitz sinyal yıldızkümesi veya Hurwitz sinyal yıldızkümesi ifadesi kullanılacaktır.

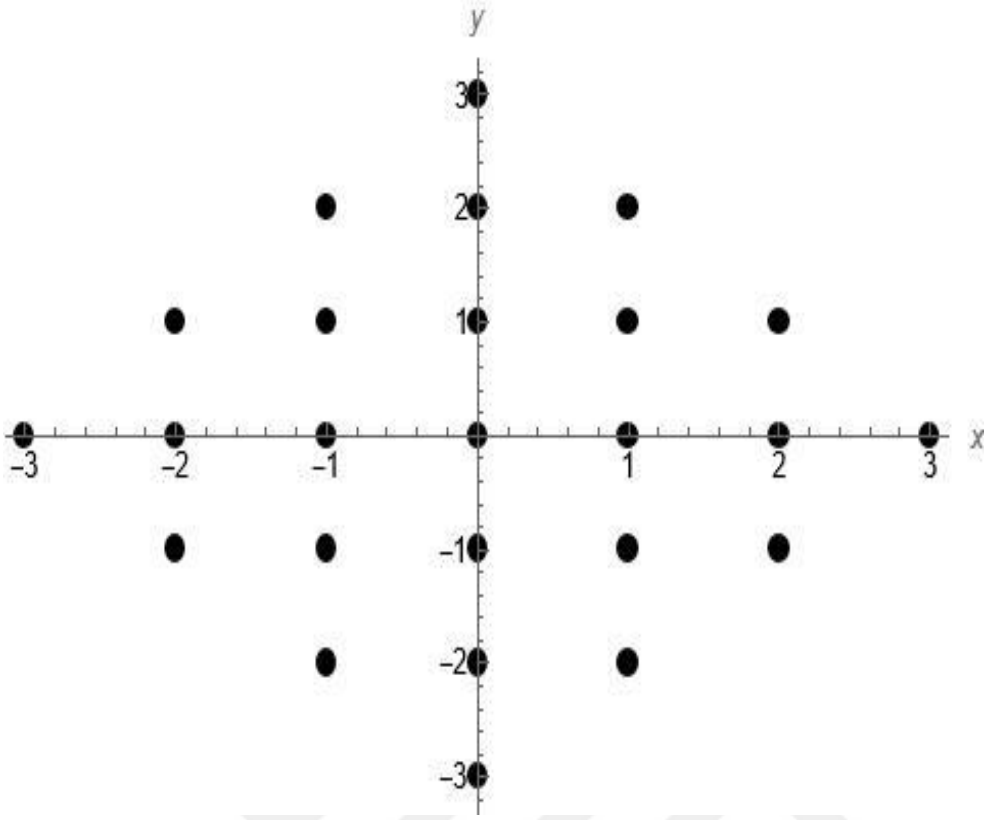
Tanım 5.1.1.4. Sinyal yıldızkümesi, bir sinyal sistemi tarafından verileri iletmek için kullanılan tüm olası sembolleri tanımlamak için kullanılan bir fiziksel diyagram olarak tanımlanmaktadır [58].

Diğer bir ifadeyle; sinyal yıldızkümesi, primitif Gauss tamsayısı, kodlayıcı Lipschitz tamsayısı veya kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden ilgili bir modülo fonksiyonu ile elde edilen kod kümesindeki kodsözlerin iki boyutlu koordinat sistemi veya üç boyutlu uzaydaki gösterimlerine karşılık gelen ve iletişim mühendisliğinde kullanılan bir terim olarak ifade edilmektedir.

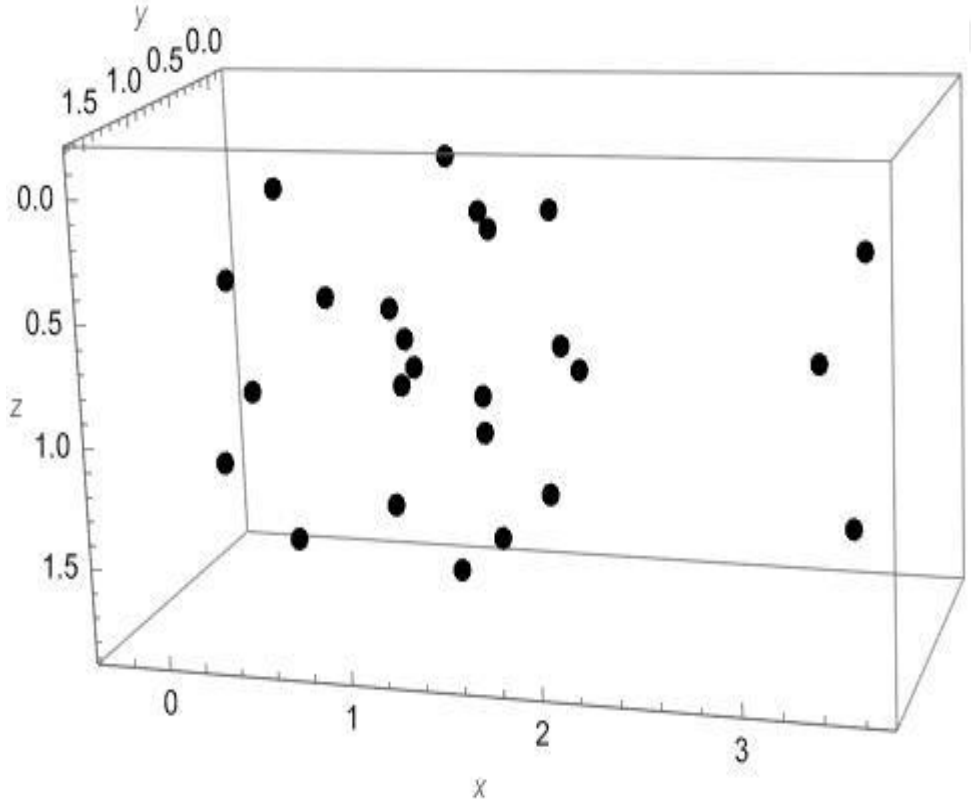
Şekil 5.1 ile; $\pi = 4 + 3i$ primitif Gauss tamsayısı üzerinden μ_π modülo fonksiyonu ile elde edilen 25 elemanlı $\mathcal{G}_{4+3i}$ sinyal yıldızkümesinin iki boyutlu koordinat sistemindeki gösterimi verilmektedir.

Şekil 5.2 ile; $\alpha = 4 + 2i + 2j + k$ kodlayıcı Lipschitz tamsayısı üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen 25 elemanlı $\mathcal{L}_{4+2i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi verilmektedir.

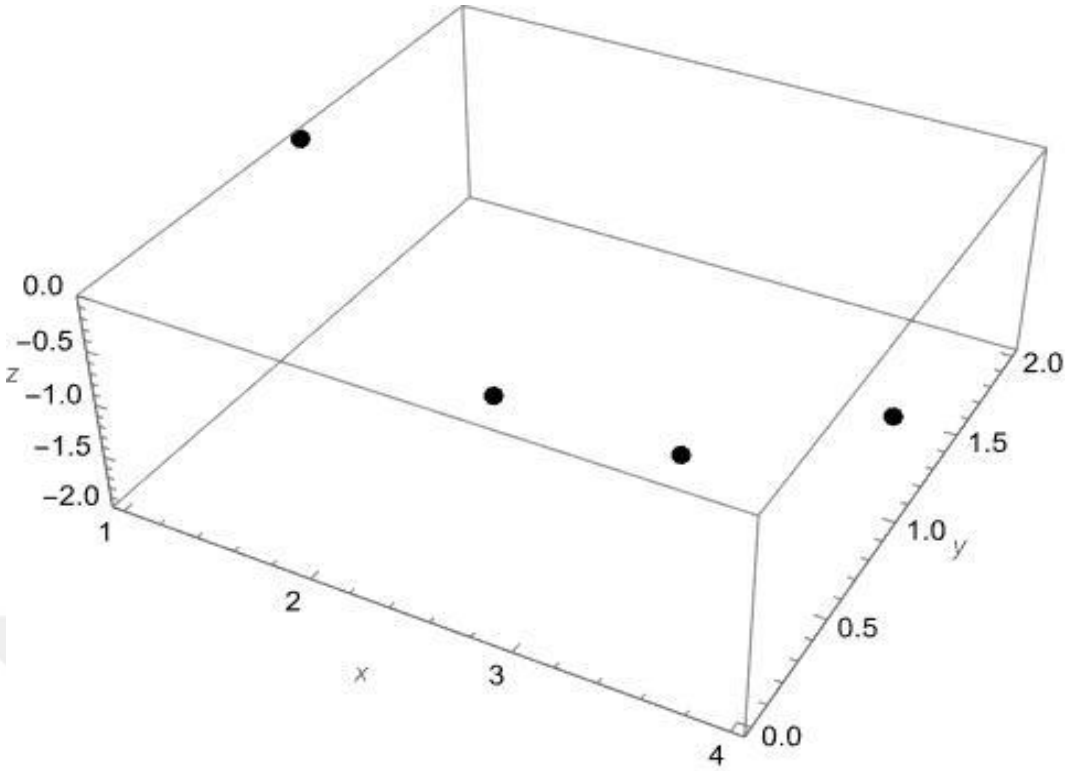
Şekil 5.3 ile; $\alpha = 4 + 2i + 2j + k$ kodlayıcı Lipschitz tamsayısı üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen 25 elemanlı $\mathcal{L}_{4+2i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinde $\mu_\alpha(4) = -2i - 2j - k$ sinyalindeki $(0, -2, -2, -1)$ bileşenlerinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi verilmektedir.



Şekil 5.1. $\mathcal{G}_{4+3i}$ sinyal yıldızkümesinin iki boyutlu koordinat sistemindeki gösterimi.



Şekil 5.2. $\mathcal{L}_{4+2i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi.



Şekil 5.3. $\mathcal{L}_{4+2i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinde $\mu_\alpha(4) = -2i - 2j - k$ sinyalindeki $(0, -2, -2, -1)$ bileşenlerinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi.

Şekil 5.4 ile; $\alpha = 4 + 2i + 2j + k$ kodlayıcı Lipschitz tamsayısı üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen 25 elemanlı $\mathcal{L}_{4+2i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinde her bir sinyaldeki bileşenlerin üç boyutlu uzaydaki gösterimi verilmektedir.

Şekil 5.5 ile; $\beta = 4 + 2i + 2j + k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen 25 elemanlı $\mathcal{H}_{4+2i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi verilmektedir.

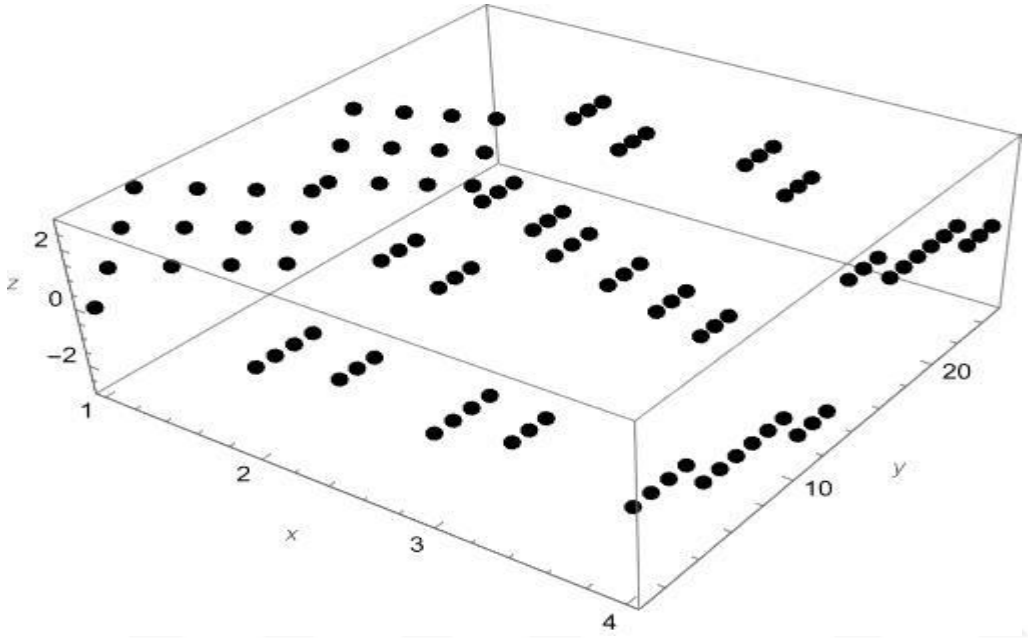
Şekil 5.6 ile; $\beta = 4 + 2i + 2j + k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen 25 elemanlı $\mathcal{H}_{4+2i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinde her bir sinyaldeki bileşenlerin üç boyutlu uzaydaki gösterimi verilmektedir.

Şekil 5.7 ile; $\beta = {}^{7}/_{2} + {}^{5}/_{2}\,i + {}^{5}/_{2}\,j + {}^{1}/_{2}\,k$ Hurwitz tamsayısı üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen 25 elemanlı $\mathcal{H}_{{}^{7}/_{2}+{}^{5}/_{2}i+{}^{5}/_{2}j+{}^{1}/_{2}k}$ sinyal yıldızkümesinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi verilmektedir.

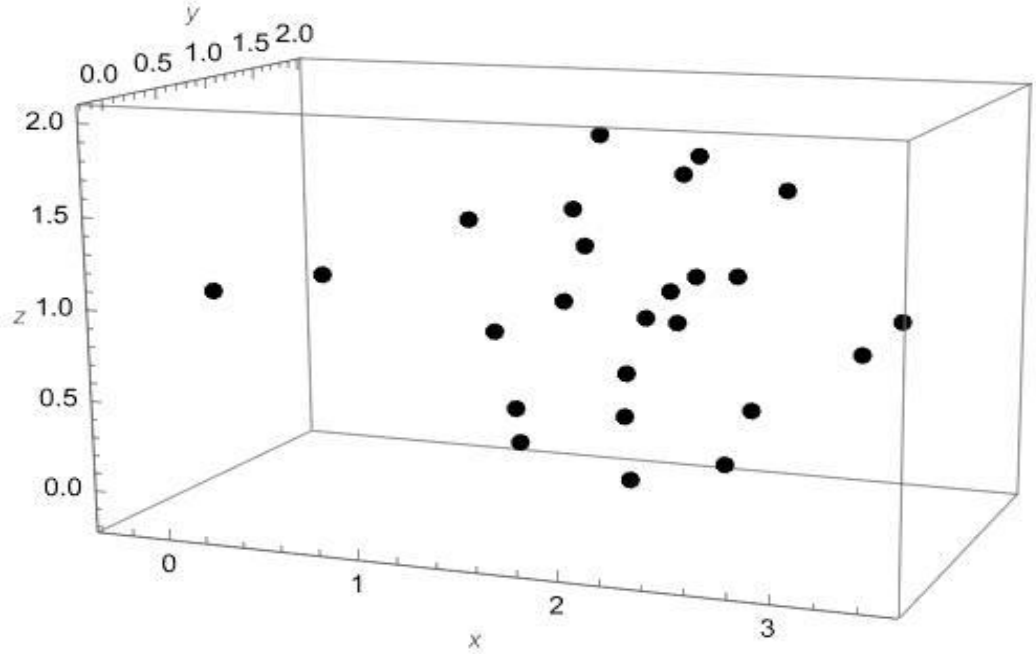
Şekil 5.8 ile; $\beta = {}^{7}/_{2} + {}^{5}/_{2}\,i + {}^{5}/_{2}\,j + {}^{1}/_{2}\,k$ Hurwitz tamsayısı üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen 25 elemanlı $\mathcal{H}_{{}^{7}/_{2}+{}^{5}/_{2}i+{}^{5}/_{2}j+{}^{1}/_{2}k}$ sinyal

yıldızkümesinde her bir sinyaldeki bileşenlerin üç boyutlu uzaydaki gösterimi verilmektedir.

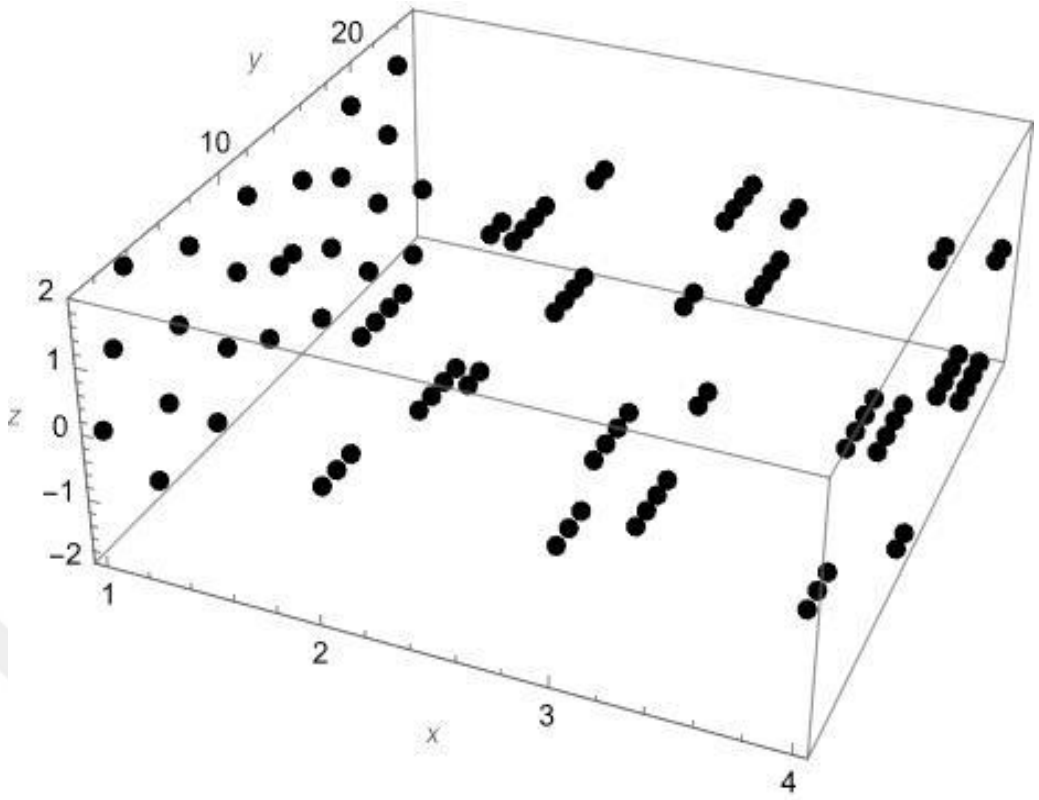
Şekil 5.9 ile; $\beta = {}^{7}/_{2} + {}^{7}/_{2}\,i + {}^{1}/_{2}\,j + {}^{1}/_{2}\,k$ Hurwitz tamsayısı üzerinden μ_{β} modülo fonksiyonu ile elde edilen 25 elemanlı $\mathcal{H}_{{}^{7}/_{2}+{}^{7}/_{2}i+{}^{1}/_{2}j+{}^{1}/_{2}k}$ sinyal yıldızkümesinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi verilmektedir.



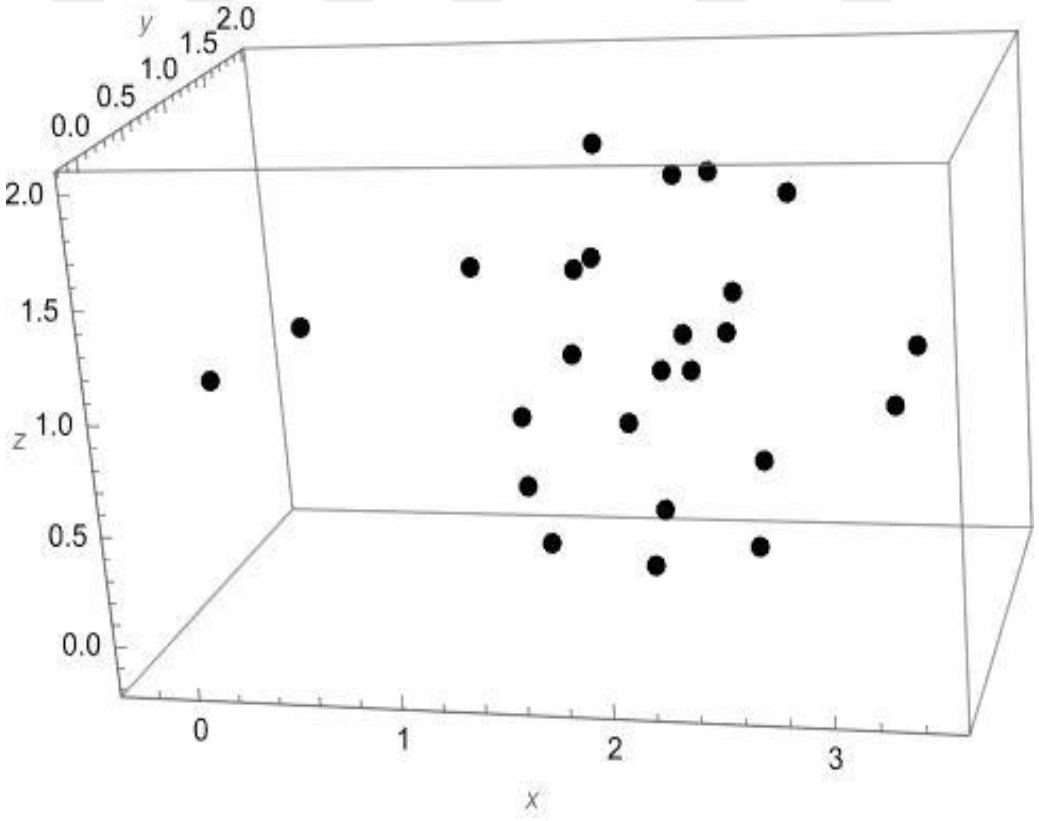
Şekil 5.4. $\mathcal{L}_{4+2i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinde her bir sinyaldeki bileşenlerin üç boyutlu uzaydaki gösterimi.



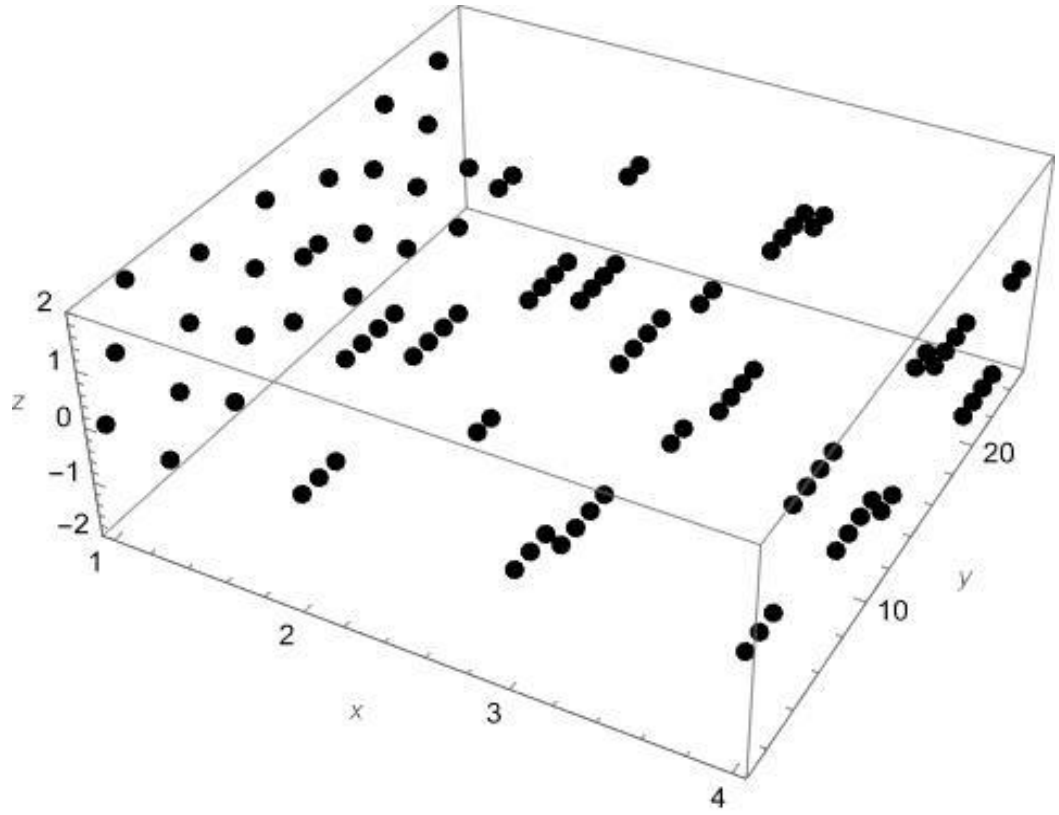
Şekil 5.5. $\mathcal{H}_{4+2i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi.



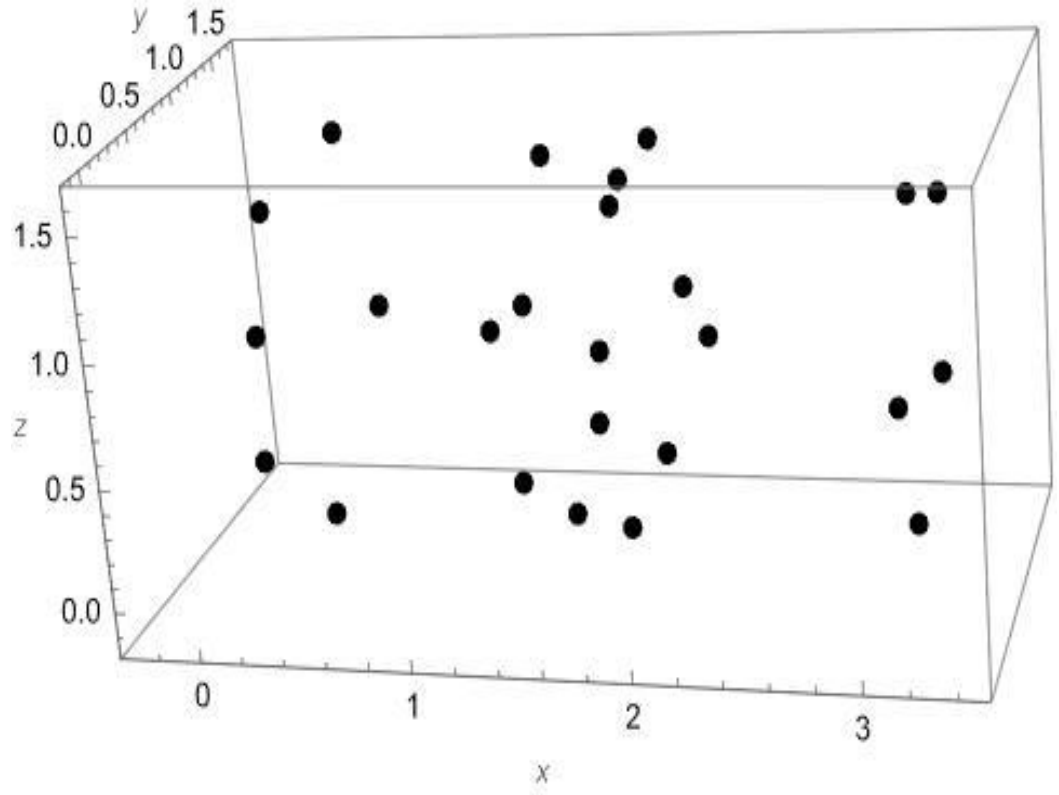
Şekil 5.6. $\mathcal{H}_{4+2i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinde her bir sinyaldeki bileşenlerin üç boyutlu uzaydaki gösterimi.



Şekil 5.7. $\mathcal{H}_{7/2+5/2i+5/2j+1/2k}$ sinyal yıldızkümesinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi.

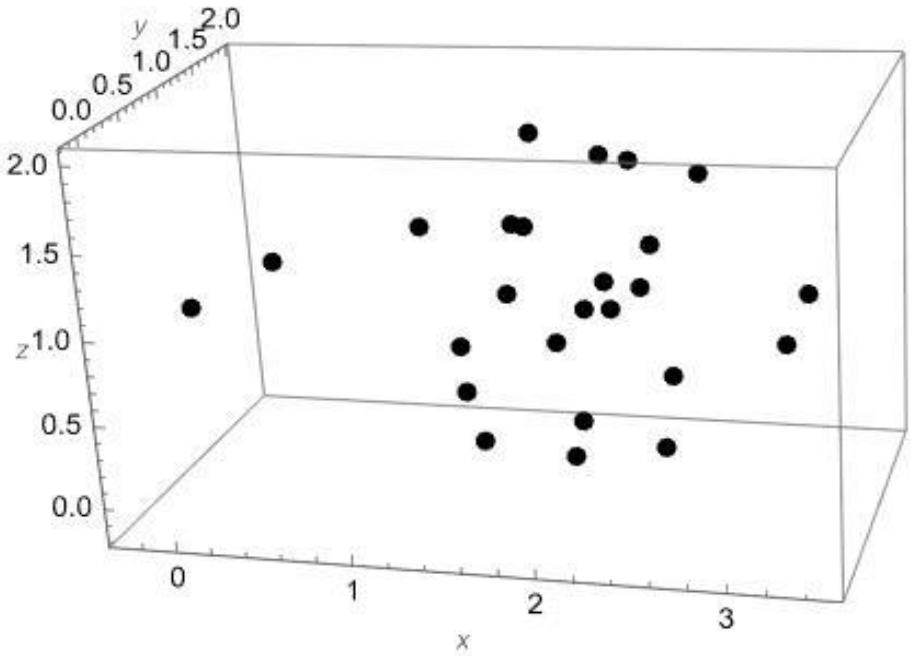


Şekil 5.8. $\mathcal{H}_{7/2+5/2i+5/2j+1/2k}$ sinyal yıldızkümesinde her bir sinyaldeki bileşenlerin üç boyutlu uzaydaki gösterimi.



Şekil 5.9. $\mathcal{H}_{7/2+7/2i+1/2j+1/2k}$ sinyal yıldızkümesinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi.

Şekil 5.10 ile; $\beta = {}^{9}/_{2} + {}^{3}/_{2}\, i + {}^{3}/_{2}\, j + {}^{1}/_{2}\, k$ Hurwitz tamsayısı üzerinden μ_{β} modülo fonksiyonu ile elde edilen 25 elemanlı $\mathcal{H}_{{}^{9}/_{2}+{}^{3}/_{2}i+{}^{3}/_{2}j+{}^{1}/_{2}k}$ sinyal yıldızkümesinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi verilmektedir.



Şekil 5.10. $\mathcal{H}_{{}^{9}/_{2}+{}^{3}/_{2}i+{}^{3}/_{2}j+{}^{1}/_{2}k}$ sinyal yıldızkümesinin üç boyutlu uzaydaki gösterimi.

5.1.2. İletişim sistemi

Bir iletişim kanalı, üzerinden bilginin iletilebileceği veya içine bilginin depolanabileceği herhangi bir ortam olarak tasarlanır. Koaksiyel kablo, iyonosferik yayılım, boş uzay, fiber optik kablolar, manyetik ve optik diskler iletişim kanallarına örnekler olarak verilebilir. Bunlar arasındaki ortak nokta girişlerinde sinyalleri kabul etmeleri ve başka bir zamanda (depolama durumu) veya başka bir yerde (iletim durumu) sinyalleri teslim etmeleridir. Dolayısıyla, her iletişim kanalı girişi ve çıkışı arasındaki bağıntı ile tanımlanır. Bu bakımdan iletişim kanalı bir sistem olarak düşünülebilir.

Bir iletişim kanalının çıktısının girdisinden farklı olmasına sebep olan birçok etken vardır. Zayıflatma, doğrusalsızlıklar, bant genişliği sınırlamaları, çok yollu yayılım ve gürültü bu etkenlere örnek olarak verilebilir. Tüm bu etkenler bir iletişim kanalındaki karmaşık girdi-çıktı ilişkisine katkıda bulunur. Sönümleme ve gürültünün varlığı yüzünden, bir iletişim kanalındaki girdi-çıktı ilişkisi genellikle olasılıksal bir ilişki ile ilişkilendirilir. Herhangi bir iletişim kanalı üzerinden bilgi iletilirken başlıca amaç

alıcıdaki doğru algılama olasılığıyla ölçülen güvenirliktir. Gürültünün varlığı yüzünden, ilk bakışta hata olasılığı sıfırdan farklı bir pozitif sayıyla sınırlanmış gibi görünür.

Bilgi teorisinin sonuçlarından biri olan iletim hızı, kanal kapasitesi adı verilen bir sayıdan düşük olduğu sürece gürültülü kanallar üzerinden bile güvenilir iletimin (yani verilen herhangi bir değerden daha düşük hata olasılığıyla iletimin) mümkün olmasıdır. İlk kez Shannon tarafından gösterilen bu sonuç gürültülü kanal teoremi olarak bilinir. Gürültülü kanal teoremi; gürültünün bir iletişim kanalında sebep olduğu esas sınırlarının iletişimin güvenirliği üzerinde değil, iletişimin hızı üzerinde olduğunu söyler. Diğer bir ifadeyle, iletim hızı R, kanal kapasitesi C'den küçükse R hızında güvenilir iletişim mümkün olur. Aksi durumda ise R hızında güvenilir iletişim mümkün değildir. Burada; iletim hızı R,

$$R = \frac{k}{n} \tag{5.1.2.1}$$

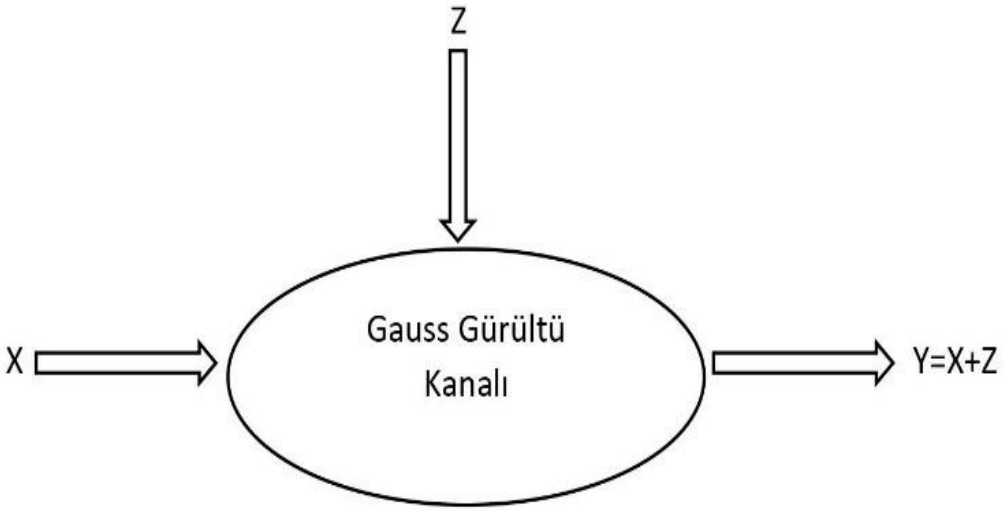
ile hesaplanır. Burada, n ile kodun uzunluğu ve k ile kodun boyutu temsil edilmektedir. Güvenilir iletişim, n'yi arttırarak hata olasılığının sıfıra istendiği kadar yaklaştırılabildiği iletim olarak tanımlanır. Hem iletim hızı R hem de kanal kapasitesi C, iletim başına bit veya kanal kullanımı başına bit cinsinden ölçülür. Bu teorem bilgi teorisindeki en önemli şemalardan biridir ve gürültülü bir kanaldan güvenilir iletişimin imkanı üzerindeki temel sınırı verir. Bu teoreme göre herhangi bir iletişim kanalı diğer tüm özelliklerine bakılmaksızın kanal kapasitesi denilen ve üzerinden ne kadar bilgi iletilebileceğini belirten bir sayıyla tanımlanır. Dolayısıyla iki iletişim kanalı bilgi iletimi açısından karşılaştırılırken kapasitelerini karşılaştırmak yeterli olacaktır.

Tez çalışmasında, iletişim kanalı olarak aşağıda tanımlanan giriş güç kısıtlaması bulunan ayrık zamanlı toplanabilir beyaz Gauss gürültü ($TBGG$) kanalı düşünülecektir.

Tanım 5.1.2.1. $TBGG$ kanalı, ortalaması sıfır ve varyans değeri 1 olup normal dağılan (Gauss dağılımı) ve eşit dağılımlara (beyaz) sahip rastgele frekansların üst üste eklenmesiyle (toplamsal) oluşan gürültü modeli olarak tanımlanır [59].

Burada; beyaz gürültü, farklı frekanslarda eşit yoğunluğa sahip olan ve ona sabit bir güç spektral yoğunluğu veren rastgele bir sinyal olarak tanımlanır. Terim; fizik, akustik mühendisliği, telekomünikasyon ve istatistiksel tahmin gibi birçok bilimsel ve

teknik disiplinde bu veya benzer anlamlarda kullanılır. Basit bir $TBGG$ kanalı şeması aşağıda Şekil 5.11'de gösterilmektedir.



Şekil 5.11. Toplanabilir beyaz Gauss gürültü kanalının basit bir modeli.

Şekil 5.11'de, Z ile Gauss gürültüsü, X ile verici tarafından alıcıya gönderilmek üzere kanala gönderilen sinyal ve Y ile Gauss gürültü kanalında Z gürültüsüne maruz kalarak vericiye ulaşan sinyal temsil edilmektedir.

Girdi güç kısıtı P olmak üzere bir ayrık zamanlı $TBGG$ kanalının kapasitesi

$$C = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{N_o W}\right) \tag{5.1.2.2}$$

ile hesaplanır. (5.1.2.2)'de; P ile ortalama iletilen güç, W ile kanalın bant genişliği ve N_0 ile toplanır gürültünün güç spektral yoğunluğu temsil edilmektedir. Ayrıca, $\frac{P}{N_o W}$; sinyal gürültü oranına karşılık gelmektedir. Gerçek bir iletişim sisteminde $R < C$ olacağından dolayı $TBGG$ kanalı düşünüldüğünde

$$C < \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{N_o W}\right) \tag{5.1.2.3}$$

olur.

Bu bölümdeki bilgiler için [59]'daki kaynak referans alınmıştır. Bu konu hakkındaki ayrıntılı bilgilere [59]'daki kaynaktan ulaşılabilir.

5.1.3. Performans ölçüleri

$TBGG$ kanalında sinyal yıldızkümelerinin sembol başına düşen ortalama enerjisi, bit başına düşen ortalama enerjisi, iletim hızı gibi performans ölçüleri ve kod kazancı için [50]'deki kaynak referans alınmıştır.

Tanım 5.1.3.1. $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ olmak üzere μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümesinden alınan $\mu_\beta(z_1)$ ve $\mu_\beta(z_2)$ birbirinden farklı herhangi iki sinyal olsun. $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümesinin kare Öklidyen uzaklığı

$$d_E\left(\mu_\beta(z_1), \mu_\beta(z_2)\right) = \left|N\left(\mu_\beta(z_1)\right) - N\left(\mu_\beta(z_2)\right)\right| \tag{5.1.3.1}$$

ile bulunur. $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümesinin minimum kare Öklidyen uzaklığı ise

$$\delta_\beta^2 = \min\left\{d_E\left(\mu_\beta(z_1), \mu_\beta(z_2)\right) : \mu_\beta(z_1), \mu_\beta(z_2) \in \mathcal{H}_\beta, \mu_\beta(z_1) \neq \mu_\beta(z_2)\right\} \tag{5.1.3.2}$$

ile bulunur.

Benzer şekilde, Gauss sinyal yıldızkümesinin ve Lipschitz sinyal yıldızkümesinin minimum kare Öklidyen uzaklıkları da bulunabilir.

Tanım 5.1.3.2. Ortalama enerji, tüm sinyallerin eşit olasılıkla kullanıldığındaki umulan enerji olarak tanımlanır ve $\mathcal{E}_s$ ile gösterilir. $\mathcal{E}_s$, sinyal yıldızkümesindeki sinyallerin normları toplamının, toplam sinyal sayısına bölünmesiyle elde edilir.

$\forall z \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}$ için μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümesindeki bir sinyalin iletilmesi için gerekli olan enerji veya sembol başına ortalama enerji

$$\mathcal{E}_s^\beta = \frac{1}{N(\beta)} \sum_{z=0}^{N(\beta)-1} N\left(\mu_\beta(z)\right) \tag{5.1.3.3}$$

ile hesaplanır.

Tanım 5.1.3.3. μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümesindeki her bir sinyaldeki bir bitin iletilmesi için gerekli olan enerji ya da bit başına düşen ortalama enerji

$$\mathcal{E}_b^\beta = \frac{\mathcal{E}_s^\beta}{\log_2 N(\beta)} \tag{5.1.3.4}$$

ile hesaplanır.

[60]'da Forney ve Wei, farklı boyutlardaki sinyal yıldızkümelerinin karşılaştırmaları için iletim hızına karşılık gelen CFM'yi (Constellation Figure of Merit) önermişlerdir.

Tanım 5.1.3.4. CFM, minimum kare Öklidyen mesafesinin boyut (vektör uzayının boyutu) ile çarpılıp iki boyut başına düşen ortalama enerjisine bölünmesi olarak tanımlanır ve

$$CFM = \frac{M\delta^2}{2\mathcal{E}_s} \tag{5.1.3.5}$$

ile hesaplanır.

(5.1.3.5)'te, δ^2 ile sinyal yıldızkümesinin minimum kare Öklid uzayı, M ile sinyal yıldızkümesinin boyutunu ve $\mathcal{E}_s$ ile sinyal yıldızkümesinin sinyal başına düşen ortalama enerjisi temsil edilmektedir. Lipschitz tamsayıları ve Hurwitz tamsayıları için $M = 4$ ve Gauss tamsayıları için de $M = 2$ olur. Buradan, $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümesinin CFM'si

$$CFM_\beta = \frac{2\delta_\beta^2}{\mathcal{E}_s^\beta} \tag{5.1.3.6}$$

ile hesaplanır. $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümesinin CFM'si de (5.1.3.6)'daki eşitlik ile benzer şekilde hesaplanır. Diğer taraftan, $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümesinin CFM'si de

$$CFM_\pi = \frac{\delta_\pi^2}{\mathcal{E}_s^\pi} \tag{5.1.3.7}$$

ile hesaplanır.

Yüksek CFM Gauss gürültü kanalında yüksek bir iletim hızı ve düşük sembol hata oranı sağlar [55]. $TBGG$ kanalında iletim hızları bakımından CFM değeri yüksek olan sinyal yıldızkümesi yüksek bir iletim hızına sahiptir. Bundan dolayı, CFM değeri Gauss gürültü kanalındaki performansları açısından sinyal yıldızkümelerinin karşılaştırmalarında öncü bir göstergedir. Tez çalışmasında, sinyal yıldızkümelerinin Gauss gürültü kanalındaki performansları açısından benzer CFM'ye sahip sinyal yıldızkümelerinin karşılaştırmalarında diğer öncü değer olarak sinyal başına ortalama enerji göz önünde bulundurulacaktır.

Sinyal yıldızkümelerinin, Gauss gürültü kanalındaki kod kazançlarının karşılaştırılmalarında asimptotik kod kazancı anlamına gelen ve aşağıda tanımı verilen sinyal gürültü oranı göz önünde bulundurulacaktır.

Tanım 5.1.3.5. Sinyal gürültü oranı, istenen bir sinyalin seviyesini arka plandaki gürültü seviyesiyle karşılaştıran bir ölçüdür [59]. SGO, sinyal gücünün gürültü gücüne oranı olarak tanımlanır ve genellikle desibel cinsinden ifade edilir. 0 (sıfır) dB'den büyük bir oran gürültüden daha fazla sinyal olduğunu gösterir. Diğer bir ifadeyle, 0 (sıfır) dB'den büyük bir oran arka plandaki gürültüyü bastırdığını gösterir. Sinyal gürültü oranı

$$SGO = 10\log(CFM) \tag{5.1.3.8}$$

ile hesaplanır.

Tanım 5.1.3.6. Kodlama teorisi ve ilgili mühendislik problemlerinde kod kazancı, hata düzeltme kodu ile kullanıldığında aynı bit hata oranı seviyelerine ulaşmak için gerekli olan kodlanmamış sistem ile kodlanmış sistem arasındaki SGO seviyeleri arasındaki farkın ölçüsü olarak tanımlanır.

$\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümesinin, $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümesine karşı oluşturduğu kod kazancı

$$SGO_\beta = 10\log\left(\frac{CFM_\beta}{CFM_\pi}\right), \tag{5.1.3.9}$$

$\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümesinin, $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümesine karşı oluşturduğu kod kazancı

$$SGO_\alpha = 10\log\left(\frac{CFM_\alpha}{CFM_\pi}\right), \tag{5.1.3.10}$$

ve $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümesinin, $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümesine karşı oluşturuduğu kod kazancı

$$SGO_{\beta/\alpha} = 10\log\left(\frac{CFM_\beta}{CFM_\alpha}\right) \tag{5.1.3.11}$$

ile hesaplanır.

(5.1.3.11)'deki eşitlik, (5.1.3.9) ile (5.1.3.10)'daki eşitliklerin farkıyla elde edilmiştir.

Örnek 5.1.3.1. $\beta \in \mathbb{Z} + {}^1/_2$ olsun. $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \geq \beta_4 > 0$ ve $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = 1$ olmak üzere $N(\beta) = 25$ olacak şekildeki β Hurwitz tamsayılarını ele alalım. β Hurwitz tamsayıları ve $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları Tablo 5.1'de verilmektedir. Hesaplamalar için Ek-A Şekil A.2'deki *Mathematica* kodları kullanılmıştır.

Tablo 5.1. $\beta \in \mathbb{Z} + {}^{1}/_{2}$ olmak üzere $N(\beta) = 25$ olacak şekildeki $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

π	β	δ_β^2	$\mathcal{E}_s^\beta$	$\mathcal{E}_b^\beta$	CFM_β	CFM_π	SGO_β
	$\frac{7}{2}+\frac{5}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{1}{2}k$	1	4.6400	0.9992	0.4310	0.4808	-0.47
4+3i	$\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	1	4.1600	0.8958	0.4808	0.4808	0
	$\frac{9}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	1	4.6400	0.9992	0.4310	0.4808	-0.47

Tablo 5.1'de; π, primitif Gauss tamsayısını ve CFM_π, Gauss sinyal yıldızkümesinin $TBGG$ kanalındaki iletim hızını temsil etmektedir. β, normu ilgili π primitif Gauss tamsayısının normuna eşit olacak şekildeki kodlayıcı Hurwitz tamsayısını temsil etmektedir. δ_β^2, $\mathcal{E}_s^\beta$, $\mathcal{E}_b^\beta$, CFM_β, ve SGO_β sırasıyla ilgili Hurwitz sinyal yıldızkümesinin; minimum Öklid uzaklığını, sembol başına düşen ortalama enerjisini, bit başına düşen ortalama enerjisini, CFM'sini ve $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümesine karşı kod kazancını temsil etmektedir.

Tablo 5.1'de, $\mathcal{H}_{7/2+5/2i+5/2j+1/2k}$ ve $\mathcal{H}_{9/2+3/2i+3/2j+1/2k}$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalı üzerinde aynı performansları sergiledikleri görülmektedir. Bununla birlikte, sinyal yıldızkümelerinin, SGO_β sütunundaki değerlerin negatif olmasından dolayı $TBGG$ kanalındaki gürültüyü bastıramadıkları görülmektedir. Diğer taraftan, $\mathcal{H}_{7/2+7/2i+1/2j+1/2k}$ sinyal yıldızkümesinin, $\mathcal{G}_{4+3i}$ sinyal yıldızkümesi ile $TBGG$ kanalında aynı performansı sergiledikleri ve kanaldaki gürültüyü bastıracak şekilde olumlu veya olumsuz bir etkisinin olmadığı görülmektedir. Genel olarak $TBGG$ kanalında; iletim hızları bakımından, $\mathcal{H}_{7/2+7/2i+1/2j+1/2k}$ sinyal yıldızkümesinin, $\mathcal{H}_{7/2+5/2i+5/2j+1/2k}$ ve $\mathcal{H}_{9/2+3/2i+3/2j+1/2k}$ sinyal yıldızkümelerinden yüksek bir iletim hızına ve $\mathcal{G}_{4+3i}$ Gauss sinyal yıldızkümesiyle de aynı iletim hızına sahip olduğu görülmektedir. Kod kazançları bakımından ise Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin, kanaldaki gürültüyü bastıramadıkları görülmektedir. Bundan dolayı, Tablo 5.1'deki Hurwitz sinyal yıldızkümeleri, $\mathcal{G}_{4+3i}$ sinyal yıldızkümesine karşı herhangi bir kod kazancı sağlayamamaktadır.

Şekil 5.7'de $\mathcal{H}_{7/_2+5/_2 i+5/_2 j+1/_2 k}$ sinyal yıldızkümesinin, Şekil 5.9'da $\mathcal{H}_{7/_2+7/_2 i+1/_2 j+1/_2 k}$ sinyal yıldızkümesinin ve Şekil 5.10'da $\mathcal{H}_{9/_2+3/_2 i+3/_2 j+1/_2 k}$ sinyal yıldızkümesinin üç boyutlu uzayda gösterimleri verilmiştir. Şekil 5.7 ve Şekil 5.10'da sinyaller ağırlıklı olarak ortada ve birbirine yakın bir mesafede dağılım gösterir. Diğer taraftan, Şekil 5.9'daki sinyaller, Şekil 5.7 ve Şekil 5.10 ile karşılaştırıldığında nispeten farklı yerlerde ve aralarındaki uzaklık biraz daha mesafeli olacak şekilde dağılım gösterir. Bundan dolayı, Şekil 5.7, Şekil 5.9 ve Şekil 5.10'daki Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin Tablo 5.1'de verilen performans ölçüleri karşılaştırıldığında sinyaller arasındaki mesafe aralığı nispeten mesafeli olan Şekil 5.9'daki Hurwitz sinyal yıldızkümesinin daha iyi bir performansa sahip olduğu görülür. Sonuç olarak, sinyaller arasındaki uzaklık arttıkça daha iyi performansa sahip sinyal yıldızkümeleri elde edilebilmektedir.

5.1.4. Küme bölüntüsü

$\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerinin veya $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları bazen istenen seviyede olamamaktadır. Örnek olarak Tablo 5.1 verilebilir. İstenen seviyelere ulaşmak adına $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümeleri veya $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümeleri, küme bölüntü işlemi ile daha geniş minimum uzaklığa sahip olacak şekilde eşit eleman sayılarına sahip alt kümelere bölünmektedir.

$c, d \in \mathbb{Z}^+$ ve $c \geq 2$ olmak üzere $N(\beta) = c \cdot d$ olsun. $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümesinin eleman sayısı asal olmayan bir tamsayı ise her biri d elemana sahip $\mathcal{H}_\beta^{(0)}$, $\mathcal{H}_\beta^{(1)}, \dots, \mathcal{H}_\beta^{(c-1)}$ olacak şekilde c tane alt kümeye bölünebilir. $\mathcal{H}_\beta^{(0)}, \mathcal{H}_\beta^{(1)}, \dots, \mathcal{H}_\beta^{(c-1)}$ alt kümeleri

$$\mathbb{Z}_{N(\beta)}^{(0)} = \{0, c, 2c, \dots, (d-1)c\} \tag{5.1.4.1}$$

ve $\mathbb{Z}_{N(\beta)}^{(0)}$'nin eşkümeleri

$$\mathbb{Z}_{N(\beta)}^{(1)}, \mathbb{Z}_{N(\beta)}^{(2)}, \dots, \mathbb{Z}_{N(\beta)}^{(c-1)} \tag{5.1.4.2}$$

olmak üzere

$$\mathbb{Z}_{N(\beta)}^{(0)}, \mathbb{Z}_{N(\beta)}^{(1)}, \dots, \mathbb{Z}_{N(\beta)}^{(c-1)} \tag{5.1.4.3}$$

tamsayılar kümesine karşılık gelir. Yani

$$\mathbb{Z}_{N(\beta)}^{(l)} = \left\{ z : z - l \in \mathbb{Z}_{N(\beta)}^{(0)} \right\} \tag{5.1.4.4}$$

olur [55]. Burada; $\mathbb{Z}_{N(\beta)}^{(0)}$, $\mathbb{Z}_{N(\beta)}$'nın toplamsal bir alt grubu olmasından dolayı $\mathcal{H}_\beta^{(0)}$, $\mathcal{H}_\beta$'nın toplamsal bir alt grubu olmaktadır. Çünkü, μ_β modülo fonksiyonu toplamaya göre bir grup izomorfizmasıdır. Ayrıca, μ_β modülo fonksiyonu bir halka izomorfizması olmasından dolayı $\mathcal{H}_\beta^{(0)}$, $\mathcal{H}_\beta$ halkasının bir alt halkasıdır. Dolayısıyla, $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümesinin küme bölüntü özelliği ile elde edilen alt kümeleri $l = 0,1, \dots, c-1$ olmak üzere

$$\mathcal{H}_\beta^{(l)} = \{\mu_\beta(0), \mu_\beta(c+l), \mu_\beta(2c+l), \dots, \mu_\beta((d-1)c+l)\} \tag{5.1.4.5}$$

olur. $l = 0$ için

$$\mathcal{H}_\beta^{(0)} = \{\mu_\beta(0), \mu_\beta(c), \mu_\beta(2c), \dots, \mu_\beta((d-1)c)\} \tag{5.1.4.6}$$

olur. $\mathcal{H}_\beta^{(0)}$'nin eşkümeleri

$$\mathcal{H}_\beta^{(1)}, \mathcal{H}_\beta^{(2)}, \dots, \mathcal{H}_\beta^{(c-1)} \tag{5.1.4.7}$$

olur.

Uyarı 5.1.4.1. $\mathcal{H}_\beta$ halkasının bir alt halkası ve $\mathcal{H}_\beta^{(1)}, \dots, \mathcal{H}_\beta^{(c-1)}$ kümelerinin eşkümeleri olmasından dolayı $\mathcal{H}_\beta^{(0)}$ sinyal yıldızkümesi, $TBGG$ kanalındaki performansların ve kod kazançların karşılaştırılmalarında dikkate alınır.

Örnek 5.1.4.1. $\beta = 4 + 3i + 2j + k$ kodlayıcı Hurwitz tamsayısını ele alalım. $N(\beta) = 30$ elemanlı $\mathcal{H}_{4+3i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesi, 15 elemanlı 2 alt kümeye ya da 10 elemanlı 3 alt kümeye ya da 5 elemanlı 6 alt kümeye ya da bunların farklı kombinasyonları şeklinde alt kümelere bölüntülenebilir. c alt küme sayısını ve d eleman sayısını göstermek üzere Tablo 5.2'de kümenin farklı bölüntüleri üzerinden $\mathcal{H}_\beta^{(0)}$ sinyal yıldızkümelerinin minimum Öklid uzaklıkları ve CFM'leri verilmektedir.

Tablo 5.2'de, 2 elemanlı 15 alt kümeye yapılan küme bölüntüsü ile elde edilen $\mathcal{H}_\beta^{(0)}$ sinyal yıldızkümesinin CFM'si, küme bölüntü özelliği ile elde edilen diğer $\mathcal{H}_\beta^{(0)}$ sinyal yıldızkümelerinin CFM'lerinden daha iyi olduğu görülmektedir. Ayrıca minimum norm arttıkça iletim hızının da arttığı Tablo 5.2'de görülmektedir. Sonuç olarak, küme bölüntü özelliği ile minimum Öklid uzaklığı arttırılarak daha iyi CFM'ye sahip sinyal

yıldızkümesi elde edilmektedir. Hesaplamalar için Ek-A Şekil A.3'deki *Mathematica* kodları kullanılmıştır.

Tablo 5.2. $N(\beta) = 30$ elemanlı $\mathcal{H}_{4+3i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinin küme bölüntü özelliğiyle elde edilen farklı eleman sayılarına sahip $\mathcal{H}_{\beta}^{(0)}$ sinyal yıldızkümelerinin minimum Öklid uzaklıkları ve CFM'leri.

c	d	$Minimum\ Öklid\ Uzaklığı\ (\delta_{\beta}^{2})$	$CFM\left(\mathcal{H}_{\beta}^{(0)}\right)$
2	15	4	1.1539
3	10	6	1.6000
5	6	5	1.3333
6	5	6	2.5000
10	3	10	3.0000
15	2	15	4.0000

5.2. Hurwitz ve Lipschitz Sinyal Yıldızkümelerinin TBGG Kanalındaki Performanslarının ve Kod Kazançlarının Karşılaştırılması

Bu bölümde, literatürdeki genelliği bozmamak adına $\pi_1 > \pi_2 > 0$ olmak üzere $(\pi_1, \pi_2) = 1$ olacak şekildeki Gauss tamsayıları, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4 > 0$ olmak üzere $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 1$ olacak şekildeki Lipschitz tamsayıları ve $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \geq \beta_4 > 0$ olmak üzere $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = 1$ olacak şekildeki Hurwitz tamsayıları düşünülecektir. Bununla birlikte, μ_α ve μ_β modülo fonksiyonlar için sırasıyla primitif Lipschitz tamsayılarının ve primitif Hurwitz tamsayılarının uygun olmadığı 4. Bölüm'de gösterildiğinden dolayı 4. Bölüm'de tanımlanan kodlayıcı Lipschitz tamsayıları ve kodlayıcı Hurwitz tamsayıları dikkate alınacaktır. Dolayısıyla, $N(\pi) \leq 100$ olacak şekildeki π primitif Gauss tamsayıları, $N(\alpha) \leq 100$ olacak şekildeki α kodlayıcı Lipschitz tamsayıları ve $N(\beta) \leq 100$ olacak şekildeki β kodlayıcı Hurwitz tamsayıları karşılaştırılmalarda kullanılacaktır.

Bu bölümde, $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları, literatürdeki $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümelerinin ve $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerinin

$TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları ile karşılaştırılacaktır. Bu karşılaştırmalar tablolar yardımıyla yapılacaktır.

5.2.1. Gauss, Lipschitz ve Hurwitz yıldızkümelerinin TBGG kanalındaki performanslarının ve kod kazançlarının karşılaştırılması

Tablo 5.3 ile; $\pi_1 > \pi_2 > 0$ ve $N(\pi) \leq 100$ olacak şekildeki primitif Gauss tamsayıları üzerinden μ_π modülo fonksiyonu ile elde edilen $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları sunulmaktadır. Bu değerler için [37] ve [42]'deki kaynaklar referans alınmıştır.

Tablo 5.3. $\pi_1 > \pi_2 > 0$ ve $N(\pi) \leq 100$ olacak şekildeki primitif Gauss tamsayıları üzerinden μ_π modülo fonksiyonu ile elde edilen $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları.

N	π	$\mathcal{E}_s^\pi$	$\mathcal{E}_b^\pi$	CFM_π	N	π	$\mathcal{E}_s^\pi$	$\mathcal{E}_b^\pi$	CFM_π
5	$2+i$	0.8000	0.3445	1.2500	58	$7+3i$	9.6724	1.6512	0.1034
10	$3+i$	1.7000	0.5118	0.5882	61	$6+5i$	10.1639	1.7138	0.0984
13	$3+2i$	2.1539	0.5821	0.4643	65	$7+4i$	10.8308	1.7984	0.0923
17	$4+i$	2.8235	0.6908	0.3542		$8+i$			
25	$4+3i$	4.1600	0.8958	0.2404	73	$8+3i$	12.1644	1.9652	0.0822
26	$5+i$	4.3462	0.9246	0.2301	74	$7+5i$	12.3378	1.9869	0.0811
29	$5+2i$	4.8276	0.9937	0.2071	82	$9+i$	13.6707	2.1503	0.0731
34	$5+3i$	5.6765	1.1158	0.1762	85	$7+6i$	14.1647	2.2100	0.0706
37	$6+i$	6.1622	1.1829	0.1623		$9+2i$			
41	$5+4i$	6.8293	1.2747	0.1464	89	$8+5i$	14.8315	2.2903	0.0674
50	$7+i$	8.3400	1.4777	0.1199	97	$9+4i$	16.1649	2.4493	0.0619
53	$7+2i$	8.8302	1.5416	0.1132					

Farklı boyutlardaki sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performanslarının ve kod kazançlarının karşılaştırmaları, eleman sayıları eşit olacak şekildeki sinyal yıldızkümeleri dikkate alınarak yapılır. Bundan dolayı, Tablo 5.3'teki N değerleri, $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümeleri ve $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümeleri için oluşturulacak tablolardaki N değerleri için refarans değer olarak alınacaktır.

Tablo 5.4'te, normu Tablo 5.3'teki N değerlerine eşit olacak şekilde var olan $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki sinyal başına ortalama enerjileri, bit başına ortalama enerjileri, CFM'leri ve $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümelerine karşı kod kazançları sunulmaktadır. Bununla birlikte, Lipschitz tamsayılarının Hurwitz tamsayılarının bir alt kümesi olmasından dolayı tablolarda verilen Lipschitz tamsayıları üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki sinyal başına ortalama enerjileri, bit başına ortalama enerjileri, CFM'leri ve $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümelerine ve $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerine karşı kod kazançları da sunulmaktadır. Tablo 5.4'teki $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerinin sahip olduğu değerler için [50]'deki kaynak referans alınmıştır. $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki sinyal başına ortalama enerjilerinin, bit başına ortalama enerjilerinin ve CFM'lerinin hesaplamalarında Ek-A Şekil A.1'deki *Mathematica* kodları kullanılmıştır.

Tablo 5.4. Normu 100'den küçük veya eşit olacak şekildeki $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerinin veya $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

N	π veya β	$\mathcal{E}_s^\alpha$ / $\mathcal{E}_s^\beta$	$\mathcal{E}_b^\alpha$ / $\mathcal{E}_b^\beta$	CFM_α / CFM_β	SGO_α / SGO_β	$SGO_{\beta/\alpha}$
10	$2+2i+j+k$	3.3000	0.9934	0.6061	0.13	2.88
		1.7000	0.5118	1.1765	3.01	
13	$2+2i+2j+k$	4.3077	1.1641	0.4643	0	3.68
		1.8462	0.4989	1.0833	3.68	
25	$4+2i+2j+k$	8.3200	1.7916	0.2404	0	2.54
		4.6400	0.9992	0.4310	2.54	
26	$3+3i+2j+2k$	8.6539	1.8411	0.2311	0.02	2.99
		4.3462	0.9246	0.4602	3.01	
34	$4+4i+j+k$	11.3235	2.2258	0.1766	0.01	3.00
		5.6765	1.1158	0.3523	3.01	
	$5+2i+2j+k$	11.3235	2.2258	0.1766	0.01	2.04
		7.0882	1.3933	0.2822	2.05	

Tablo 5.4.(Devamı) Normu 100'den küçük veya eşit olacak şekildeki $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerinin veya $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

N	π $veya$ β	$\mathcal{E}_s^\alpha$ / $\mathcal{E}_s^\beta$	$\mathcal{E}_b^\alpha$ / $\mathcal{E}_b^\beta$	CFM_α / CFM_β	SGO_α / SGO_β	$SGO_{\beta/\alpha}$
37	$4+4i+2j+k$	12.3243	2.3658	0.1623	0	2.41
		7.0811	1.3593	0.2824	2.41	
	$5+2i+2j+2k$	12.3243	2.3658	0.1623	0	3.89
		5.0270	0.9650	0.3978	3.89	
50	$4+4i+3j+3k$	16.6600	2.9519	0.1200	0	3.01
		8.3400	1.4777	0.2398	3.01	
	$6+3i+2j+k$	16.6600	2.9519	0.1200	0	1.69
		11.3000	2.0022	0.1770	1.69	
53	$6+3i+2j+2k$	17.6604	3.0832	0.1132	0	2.44
		10.0755	1.7590	0.1985	2.44	
58	$5+4i+4j+k$	19.3276	3.2994	0.1035	0	2.54
		10.7759	1.8395	0.1856	2.54	
	$5+5i+2j+2k$	19.3276	3.2994	0.1035	0	3.01
		9.6724	1.6512	0.2068	3.01	
	$6+3i+3j+2k$	19.3276	3.2994	0.1035	0	2.54
		10.7759	1.8395	0.1856	2.54	
	$7+2i+2j+k$	19.3276	3.2994	0.1035	0	2.54
		10.7759	1.8395	0.1856	2.54	
61	$5+4i+4j+2k$	20.3279	3.4275	0.0984	0	2.56
		11.2787	1.9017	0.1773	2.56	
	$7+2i+2j+2k$	20.3279	3.4275	0.0984	0	3.86
		8.3607	1.4097	0.2392	3.86	

Tablo 5.4.(Devamı) Normu 100'den küçük veya eşit olacak şekildeki $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerinin veya $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

N	$\pi\ veya\ \beta$	$\mathcal{E}_s^\alpha$ / $\mathcal{E}_s^\beta$	$\mathcal{E}_b^\alpha$ / $\mathcal{E}_b^\beta$	CFM_α / CFM_β	SGO_α / SGO_β	$SGO_{\beta/\alpha}$
65	$6+4i+3j+2k$	21.6615	3.5969	0.0923	0	1.96
		13.8154	2.2940	0.1448	1.96	
73	$5+4i+4j+4k$	24.3288	3.9305	0.0822	0	3.81
		10.1096	1.6333	0.1978	3.81	
	$7+4i+2j+2k$	24.3288	3.9305	0.0822	0	2.49
		13.7260	2.2175	0.1457	2.49	
	$8+2i+2j+k$	24.3288	3.9305	0.0822	0	2.55
		13.5342	2.1865	0.1478	2.55	
74	$6+5i+3j+2k$	24.6622	3.9717	0.0811	0	1.70
		16.6622	2.6834	0.1200	1.70	
	$6+6i+j+k$	24.6622	3.9717	0.0811	0	3.01
		12.3378	1.9869	0.1621	3.01	
82	$5+5i+4j+4k$	27.3293	4.2987	0.0732	0.01	3.01
		13.6707	2.1503	0.1463	3.01	
	$6+6i+3j+k$	27.3293	4.2987	0.0732	0.01	2.52
		15.2805	2.4035	0.1309	2.53	
	$7+4i+4j+k$	27.3293	4.2987	0.0732	0.01	2.04
		17.0854	2.6874	0.1171	2.05	
	$7+5i+2j+2k$	27.3293	4.2987	0.0732	0.01	2.52
		15.2805	2.4035	0.1309	2.53	
	$8+4i+j+k$	27.3293	4.2987	0.0732	0.01	2.54
		15.2805	2.4035	0.1309	2.53	

Tablo 5.4.(Devamı) Normu 100'den küçük veya eşit olacak şekildeki $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerinin veya $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

N	π veya β	$\mathcal{E}_s^\alpha$ / $\mathcal{E}_s^\beta$	$\mathcal{E}_b^\alpha$ / $\mathcal{E}_b^\beta$	CFM_α / CFM_β	SGO_α / SGO_β	$SGO_{\beta/\alpha}$
85	$6+6i+3j+2k$	28.3294	4.4200	0.0706	0	2.55
		15.7647	2.4596	0.1269	2.55	
	$7+4i+4j+2k$	28.3294	4.4200	0.0706	0	2.58
		15.6471	2.4413	0.1278	2.58	
	$8+4i+2j+k$	28.3294	4.4200	0.0706	0	1.78
		18.8000	2.9332	0.1064	1.78	
89	$6+6i+4j+k$	29.6629	4.5806	0.0674	0	2.43
		16.9663	2.6200	0.1179	2.43	
97	$6+6i+4j+3k$	32.3299	4.8985	0.0619	0	2.44
		18.4330	2.7929	0.1085	2.44	
	$7+4i+4j+4k$	32.3299	4.8985	0.0619	0	3.79
		13.4845	2.0431	0.1483	3.79	
	$8+4i+4j+k$	32.3299	4.8985	0.0619	0	2.51
		18.1237	2.7461	0.1104	2.51	
	$8+5i+2j+2k$	32.3299	4.8985	0.0619	0	2.44
		18.4330	2.7929	0.1085	2.44	

Tablo 5.4'te; $\alpha-\beta$, sırasıyla $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4 > 0$ olmak üzere $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 1$ olacak şekildeki kodlayıcı Lipschitz tamsayılarını ve $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{Z}$ için $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \geq \beta_4 > 0$ olmak üzere $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = 1$ olacak şekildeki kodlayıcı Hurwitz tamsayılarını temsil etmektedir. $\mathcal{E}_s^\alpha$ ve $\mathcal{E}_s^\beta$, sırasıyla $\mathcal{L}_\alpha$ ve $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin sinyal başına ortalama enerjilerini, $\mathcal{E}_b^\alpha$ ve $\mathcal{E}_b^\beta$, sırasıyla $\mathcal{L}_\alpha$ ve $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin bit başına düşen ortalama enerjilerini, CFM_α ve CFM_β, sırasıyla $\mathcal{L}_\alpha$ ve $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki iletim hızlarını, SGO_α

ve SGO_{β}, sırasıyla $\mathcal{L}_{\alpha}$ ve $\mathcal{H}_{\beta}$ sinyal yıldızkümelerinin, $\mathcal{G}_{\pi}$ sinyal yıldızkümelerine karşı sinyal gürültü oranlarını ve $SGO_{\beta/\alpha}$, $\mathcal{H}_{\beta}$ sinyal yıldızkümelerinin, $\mathcal{L}_{\alpha}$ sinyal yıldızkümelerine karşı sinyal gürültü oranlarını temsil etmektedir.

Normları Tablo 5.3'teki N değerleri ile eşit olacak şekilde var olmayan kodlayıcı Lipschitz tamsayıları veya her bir bileşeni tamsayı olan kodlayıcı Hurwitz tamsayıları, Tablo 5.4'te yer almamaktadır. Örneğin; Tablo 5.3'te yer alan $N = 5, 17, 29, 41$ değerleri için, normları bu değerlere eşit olacak şekildeki kodlayıcı Lipschitz tamsayıları veya her bir bileşeni tamsayı olan kodlayıcı Hurwitz tamsayıları var olmadığından dolayı Tablo 5.4'teki N değerleri içinde yer almamaktadır.

Örnek 5.2.1.1. Tablo 5.4'te $N = 37$ için $\mathcal{L}_{4+4i+2j+k}$ ve $\mathcal{L}_{5+2i+2j+2k}$ sinyal yıldızkümelerinin; sembol başına ortalama enerjileri $\mathcal{E}_s^{\alpha} = 12.3243$, bit başına ortalama enerjileri $\mathcal{E}_b^{\alpha} = 2.3658$, iletim hızları $CFM_{\alpha} = 0.1623$ ve $\mathcal{G}_{6+i}$ sinyal yıldızkümesine karşı sinyal gürültü oranları $SGO_{\alpha} = 0\,dB$ olmak üzere $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları bakımından birbirlerine eşit oldukları görülmektedir. Diğer taraftan, $\mathcal{H}_{4+4i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesinin; sembol başına ortalama enerjisi $\mathcal{E}_s^{\beta} = 7.0811$, bit başına ortalama enerjisi $\mathcal{E}_b^{\beta} = 1.3593$, iletim hızı $CFM_{\beta} = 0.2824$, $\mathcal{G}_{6+i}$ sinyal yıldızkümesine karşı sinyal gürültü oranı $SGO_{\beta} = 2.41\,dB$ ve $\mathcal{L}_{4+4i+2j+k}$ sinyal yıldızkümesine karşı sinyal gürültü oranı $SGO_{\beta/\alpha} = SGO_{\beta} - SGO_{\alpha} = 2.41 - 0 = 2.41\,dB$'dir. Bununla birlikte, $\mathcal{H}_{5+2i+2j+2k}$ sinyal yıldızkümesinin; sembol başına ortalama enerjisi $\mathcal{E}_s^{\beta} = 5.0270$, bit başına ortalama enerjisi $\mathcal{E}_b^{\beta} = 0.9650$, iletim hızı $CFM_{\beta} = 0.3978$, $\mathcal{G}_{6+i}$ sinyal yıldızkümesine karşı sinyal gürültü oranı $SGO_{\beta} = 3.89\,dB$ ve $\mathcal{L}_{5+2i+2j+2k}$ sinyal yıldızkümesine karşı sinyal gürültü oranı $SGO_{\beta/\alpha} = SGO_{\beta} - SGO_{\alpha} = 3.89\,dB$'dir. Dolayısıyla, $N = 37$ için $\mathcal{H}_{5+2i+2j+2k}$ ve $\mathcal{H}_{4+4i+2j+k}$ sinyal yıldızkümeleri, $\mathcal{L}_{4+4i+2j+k}$ ve $\mathcal{L}_{5+2i+2j+2k}$ sinyal yıldızkümelerine ve $\mathcal{G}_{6+i}$ sinyal yıldızkümesine karşı daha iyi performansa ve kod kazancına sahiptir. Bununla birlikte, $\mathcal{H}_{5+2i+2j+2k}$ sinyal yıldızkümesi, $\mathcal{H}_{4+4i+2j+2k}$ sinyal yıldızkümesine göre $\mathcal{G}_{6+i}$, $\mathcal{L}_{4+4i+2j+k}$ ve $\mathcal{L}_{5+2i+2j+2k}$ sinyal yıldızkümelerine karşı daha iyi bir performansa ve kod kazancına sahiptir. Ayrıca, $\mathcal{H}_{5+2i+2j+2k}$ sinyal yıldızkümesi, $\mathcal{G}_{6+i}$, $\mathcal{L}_{4+4i+2j+k}$ ve $\mathcal{L}_{5+2i+2j+2k}$

sinyal yıldızkümelerine karşı Tablo 5.4'teki en iyi kod kazancına sahip sinyal yıldızkümesidir.

Tablo 5.5'te; $\beta \in \mathbb{Z} + {}^{1}/_{2}$ olmak üzere normu Tablo 5.3'teki N değerlerine eşit olacak şekilde var olan kodlayıcı Hurwitz tamsayıları üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları sunulmaktadır. Hesaplamalar için Ek-A Şekil A.2'deki *Mathematica* kodları kullanılmıştır.

Tablo 5.5. $\beta \in \mathbb{Z} + {}^{1}/_{2}$ olmak üzere $N(\beta) \leq 100$ olacak şekildeki $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

N	β	$\mathcal{E}_s^\alpha$ / $\mathcal{E}_s^\beta$	$\mathcal{E}_b^\alpha$ / $\mathcal{E}_b^\beta$	CFM_α / CFM_β	SGO_α / SGO_β	$SGO_{\beta/\alpha}$
5	$\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	–	–	–	–	–
		0.8000	0.3445	2.5000	3.01	
13	$\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	4.3077	1.1641	0.4643	0	3.68
		1.8462	0.4989	1.0833	3.68	
	$\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	4.3077	1.1641	0.4643	0	3.01
		2.1539	0.5821	0.9286	3.01	
	$\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	4.3077	1.1641	0.4643	0	3.68
		1.8462	0.4989	1.0833	3.68	
17	$\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	–	–	–	–	–
		2.8235	0.6908	0.7083	3.01	
	$\frac{7}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	–	–	–	–	–
		3.4118	0.8347	0.5862	2.19	
25	$\frac{7}{2}+\frac{5}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{1}{2}k$	8.3200	1.7916	0.2404	0	2.54
		4.6400	0.9992	0.4310	2.54	
	$\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	8.3200	1.7916	0.2404	0	3.01
		4.1600	0.8958	0.4808	3.01	
	$\frac{9}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	8.3200	1.7916	0.2404	0	2.54
		4.6400	0.9992	0.4310	2.54	

Tablo 5.5.(Devamı) $\beta \in \mathbb{Z} + {}^{1}/_{2}$ olmak üzere $N(\beta) \leq 100$ olacak şekildeki $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

N	β	$\mathcal{E}_s^\alpha$ / $\mathcal{E}_s^\beta$	$\mathcal{E}_b^\alpha$ / $\mathcal{E}_b^\beta$	CFM_α / CFM_β	SGO_α / SGO_β	$SGO_{\beta/\alpha}$
29	$\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	–	–	–	–	–
		4.8276	0.9937	0.4143	3.01	
	$\frac{9}{2}+\frac{5}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	–	–	–	–	–
		6.6897	1.3770	0.2990	1.59	
37	$\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{5}{2}k$	12.3243	2.3658	0.1623	0	3.01
		6.1622	1.1829	0.3246	3.01	
	$\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{1}{2}k$	12.3243	2.3658	0.1623	0	3.89
		5.0270	0.9650	0.3978	3.89	
	$\frac{9}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	12.3243	2.3658	0.1623	0	2.41
		7.0811	1.3593	0.2824	2.41	
	$\frac{11}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	12.3243	2.3658	0.1623	0	3.89
		5.0270	0.9650	0.3978	3.89	
	$\frac{11}{2}+\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	12.3243	2.3658	0.1623	0	2.41
		7.0811	1.3593	0.2824	2.41	
41	$\frac{9}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{3}{2}k$	–	–	–	–	–
		9.4634	1.7664	0.2113	1.59	
	$\frac{9}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	–	–	–	–	–
		6.8293	1.2747	0.2929	3.01	
	$\frac{11}{2}+\frac{5}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	–	–	–	–	–
		8.4878	1.5843	0.2356	2.07	
53	$\frac{9}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{5}{2}k$	17.6604	3.0832	0.1132	0	3.01
		8.8302	1.5416	0.2265	3.01	
	$\frac{9}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{1}{2}k$	17.6604	3.0832	0.1132	0	2.44
		10.0755	1.7590	0.1985	2.44	

Tablo 5.5.(Devamı) $\beta \in \mathbb{Z} + {}^{1}/_{2}$ olmak üzere $N(\beta) \leq 100$ olacak şekildeki $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

N	β	$\mathcal{E}_s^\alpha$	$\mathcal{E}_b^\alpha$	CFM_α	SGO_α	$SGO_{\beta/\alpha}$
		$\mathcal{E}_s^\beta$	$\mathcal{E}_b^\beta$	CFM_β	SGO_β	
53	$\frac{11}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	17.6604	3.0832	0.1132	0	1.71
		11.9245	2.0818	0.1677	1.71	
	$\frac{13}{2}+\frac{5}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	17.6604	3.0832	0.1132	0	2.44
		10.0755	1.7590	0.1985	2.44	
61	$\frac{9}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{9}{2}j+\frac{1}{2}k$	20.3279	3.4275	0.0984	0	3.86
		8.3607	1.4097	0.2392	3.86	
	$\frac{11}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{5}{2}k$	20.3279	3.4275	0.0984	0	2.56
		11.2787	1.9017	0.1773	2.56	
	$\frac{11}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	20.3279	3.4275	0.0984	0	3.01
		10.1639	1.7138	0.1968	3.01	
	$\frac{13}{2}+\frac{5}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{5}{2}k$	20.3279	3.4275	0.0984	0	3.86
		8.3607	1.4097	0.2392	3.86	
	$\frac{13}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{1}{2}k$	20.3279	3.4275	0.0984	0	1.50
		14.3934	2.4269	0.1390	1.50	
	$\frac{15}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	20.3279	3.4275	0.0984	0	2.56
		11.2787	1.9017	0.1773	2.56	
65	$\frac{9}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{7}{2}k$	21.6615	3.5969	0.0923	0	3.01
		10.8308	1.7984	0.1847	3.01	
	$\frac{11}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{3}{2}k$	21.6615	3.5969	0.0923	0	1.96
		13.8154	2.2940	0.1448	1.96	
	$\frac{11}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	21.6615	3.5969	0.0923	0	3.01
		10.8308	1.7984	0.1847	3.01	
	$\frac{13}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	21.6615	3.5969	0.0923	0	1.73
		14.5538	2.4166	0.1374	1.73	

Tablo 5.5.(Devamı) $\beta \in \mathbb{Z} + {}^{1}/_{2}$ olmak üzere $N(\beta) \leq 100$ olacak şekildeki $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

N	β	$\mathcal{E}_s^\alpha$ / $\mathcal{E}_s^\beta$	$\mathcal{E}_b^\alpha$ / $\mathcal{E}_b^\beta$	CFM_α / CFM_β	SGO_α / SGO_β	${SGO_\beta}/{SGO_\alpha}$
65	$\frac{15}{2}+\frac{5}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	21.6615	3.5969	0.0923	0	1.96
		13.8154	2.2940	0.1448	1.96	
73	$\frac{9}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{9}{2}j+\frac{7}{2}k$	24.3288	3.9305	0.0822	0	3.81
		10.1096	1.6333	0.1978	3.81	
	$\frac{11}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{9}{2}j+\frac{3}{2}k$	24.3288	3.9305	0.0822	0	2.55
		13.5342	2.1865	0.1478	2.55	
	$\frac{11}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{5}{2}k$	24.3288	3.9305	0.0822	0	3.01
		12.1644	1.9652	0.1644	3.01	
	$\frac{11}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{1}{2}k$	24.3288	3.9305	0.0822	0	2.49
		13.7260	2.2175	0.1457	2.49	
	$\frac{13}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{5}{2}k$	24.3288	3.9305	0.0822	0	2.55
		13.5342	2.1865	0.1478	2.55	
	$\frac{13}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	24.3288	3.9305	0.0822	0	2.02
		15.2877	2.4698	0.1308	2.02	
	$\frac{15}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	24.3288	3.9305	0.0822	0	2.49
		13.7260	2.2175	0.1457	2.49	
	$\frac{17}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	24.3288	3.9305	0.0822	0	3.81
		10.1096	1.6333	0.1978	3.81	
85	$\frac{11}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{7}{2}k$	28.3294	4.4200	0.0706	0	3.01
		14.1647	2.2100	0.1412	3.01	
	$\frac{13}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{9}{2}j+\frac{3}{2}k$	28.3294	4.4200	0.0706	0	2.58
		15.6471	2.4413	0.1278	2.58	
	$\frac{13}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{5}{2}k$	28.3294	4.4200	0.0706	0	2.55
		15.7647	2.4596	0.1269	2.55	

Tablo 5.5.(Devamı) $\beta \in \mathbb{Z} + {}^{1}/_{2}$ olmak üzere $N(\beta) \leq 100$ olacak şekildeki $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

N	β	$\mathcal{E}_s^\alpha$	$\mathcal{E}_b^\alpha$	CFM_α	SGO_α	$SGO_{\beta/\alpha}$
		$\mathcal{E}_s^\beta$	$\mathcal{E}_b^\beta$	CFM_β	SGO_β	
85	$\frac{13}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{1}{2}k$	28.3294	4.4200	0.0706	0	1.78
		18.8000	2.9332	0.1064	1.78	
	$\frac{13}{2}+\frac{13}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	28.3294	4.4200	0.0706	0	3.01
		14.1647	2.2100	0.1412	3.01	
	$\frac{15}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{3}{2}k$	28.3294	4.4200	0.0706	0	1.78
		18.8000	2.9332	0.1064	1.78	
	$\frac{17}{2}+\frac{5}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{1}{2}k$	28.3294	4.4200	0.0706	0	2.58
		15.6471	2.4413	0.1278	2.58	
	$\frac{17}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	28.3294	4.4200	0.0706	0	2.55
		15.7647	2.4596	0.1269	2.55	
89	$\frac{13}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{9}{2}j+\frac{5}{2}k$	29.6629	4.5806	0.0674	0	2.05
		18.4944	2.8560	0.1081	2.05	
	$\frac{13}{2}+\frac{13}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	29.6629	4.5806	0.0674	0	3.01
		14.8315	2.2903	0.1348	3.01	
	$\frac{15}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{5}{2}k$	29.6629	4.5806	0.0674	0	2.43
		16.9663	2.6200	0.1179	2.43	
	$\frac{15}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{1}{2}k$	29.6629	4.5806	0.0674	0	1.52
		20.9213	3.2307	0.0956	1.52	
	$\frac{15}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	29.6629	4.5806	0.0674	0	1.74
		19.9101	3.0746	0.1005	1.74	
	$\frac{17}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	29.6629	4.5806	0.0674	0	2.43
		16.9663	2.6200	0.1179	2.43	
97	$\frac{11}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{11}{2}j+\frac{5}{2}k$	32.3299	4.8985	0.0619	0	3.79
		13.4845	2.0431	0.1483	3.79	

Tablo 5.5. **(Devamı)** $\beta \in \mathbb{Z} + {}^{1}/_{2}$ olmak üzere $N(\beta) \leq 100$ olacak şekildeki $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

N	β	$\mathcal{E}_s^\alpha$ / $\mathcal{E}_s^\beta$	$\mathcal{E}_b^\alpha$ / $\mathcal{E}_b^\beta$	CFM_α / CFM_β	SGO_α / SGO_β	$SGO_{\beta/\alpha}$
97	$\frac{13}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{7}{2}k$	32.3299	4.8985	0.0619	0	2.44
		18.4330	2.7929	0.1085	2.44	
	$\frac{13}{2}+\frac{13}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{5}{2}k$	32.3299	4.8985	0.0619	0	3.01
		16.1649	2.4493	0.1237	3.01	
	$\frac{13}{2}+\frac{13}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{1}{2}k$	32.3299	4.8985	0.0619	0	2.44
		18.4330	2.7929	0.1085	2.44	
	$\frac{15}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{9}{2}j+\frac{1}{2}k$	32.3299	4.8985	0.0619	0	2.51
		18.1237	2.7461	0.1104	2.51	
	$\frac{17}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{5}{2}k$	32.3299	4.8985	0.0619	0	2.04
		20.2268	3.0647	0.0989	2.04	
	$\frac{17}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{1}{2}k$	32.3299	4.8985	0.0619	0	2.51
		18.1237	2.7461	0.1104	2.51	
	$\frac{17}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	32.3299	4.8985	0.0619	0	2.44
		18.4330	2.7929	0.1085	2.44	
	$\frac{19}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	32.3299	4.8985	0.0619	0	3.79
		13.4845	2.0431	0.1483	3.79	
	$\frac{19}{2}+\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	32.3299	4.8985	0.0619	0	2.44
		18.4330	2.7929	0.1085	2.44	

Tablo 5.3'te yer alan $N = 10, 26, 34, 50, 58, 74, 82$ değerleri, normları bu değerlere eşit olacak şekilde her bir bileşeni yarım-tamsayı olan kodlayıcı Hurwitz tamsayıları var olmadığından dolayı Tablo 5.5'teki N değerleri içinde yer almamaktadır.

Tablo 5.5'te $N = 5, 17, 29, 41$ değerlerinde yer alan "$-$" işareti, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4 > 0$ olmak üzere $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 1$ olacak şekilde kodlayıcı Lipschitz tamsayıları var olmadığından dolayı ilgili satırların hesaplanamadığını ifade etmektedir.

Uyarı 5.2.1.1. Tablo 5.3, Tablo 5.4 ve Tablo 5.5'te yer alan sinyal yıldızkümelerinin minimum Öklid uzaklıkları $\delta^2 = 1$'dir.

Sonuç 5.2.1.1. Tablo 5.4 ve Tablo 5.5'teki tüm N değerleri için $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümeleri; sinyal başına ortalama enerjileri, bit başına ortalama enerjileri ve CFM'leri bakımından $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerine karşı daha iyi bir performans gösterir. Ayrıca, Tablo 5.4 ve Tablo 5.5'te hesaplanan tüm N değerleri için $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümeleri, $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümeleri ve $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümelerine karşı Tablo 5.4'te $1.50 - 3.89\ dB$ arasında kod kazancında iyileştirme sağlar. Buna rağmen, $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerinin, $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümelerine karşı kod kazançları da $0 - 0.13\ dB$ arasındadır. Sonuç olarak, Tablo 5.4 ve Tablo 5.5'teki hesaplanan tüm N değerleri için $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin, $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerine karşı daha iyi performansa ve kod kazancına sahip oldukları sonucu elde edilmiştir.

Tablo 5.4 ve Tablo 5.5'teki en iyi CFM'ye sahip $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümeleri Tablo 5.6'da sunulmaktadır.

Tablo 5.6. En iyi CFM'ye sahip $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

N	β	$\mathcal{E}_s^\beta$	$\mathcal{E}_b^\beta$	CFM_β	SGO_β	$SGO_{\beta/\alpha}$
5	$\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	0.8000	0.3445	2.5000	3.01	–
10	$2+2i+j+k$	1.7000	0.5118	1.1765	3.01	2.88
13	$2+2i+2j+k$	1.8462	0.4989	1.0833	3.68	3.68
	$\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$					
	$\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$					
17	$\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	2.8235	0.6908	0.7083	3.01	–
25	$\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	4.1600	0.8958	0.4808	3.01	3.01
26	$3+3i+2j+2k$	4.3462	0.9246	0.4602	3.01	2.99
29	$\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	4.8276	0.9937	0.4143	3.01	–
34	$4+4i+j+k$	5.6765	1.1158	0.3523	3.01	3.00

Tablo 5.6.(Devamı) En iyi CFM'ye sahip $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

N	β	$\mathcal{E}_s^\beta$	$\mathcal{E}_b^\beta$	CFM_β	SGO_β	$SGO_{\beta/\alpha}$
37	$5+2i+2j+2k$	5.0270	0.9650	0.3978	3.89	3.89
	$\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{1}{2}k$					
	$\frac{11}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$					
41	$\frac{9}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$	6.8293	1.2747	0.2929	3.01	–
50	$4+4i+3j+3k$	8.3400	1.4777	0.2398	3.01	3.01
53	$\frac{9}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{5}{2}k$	8.8302	1.5416	0.2265	3.01	3.01
58	$5+5i+2j+2k$	9.6724	1.6512	0.2068	3.01	3.01
61	$7+2i+2j+2k$	8.3607	1.4097	0.2392	3.86	3.86
	$\frac{9}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{9}{2}j+\frac{1}{2}k$					
	$\frac{13}{2}+\frac{5}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{5}{2}k$					
65	$\frac{9}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{7}{2}k$	10.8308	1.7984	0.1847	3.01	3.01
	$\frac{11}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$					
73	$5+4i+4j+4k$	10.1096	1.6333	0.1978	3.81	3.81
	$\frac{9}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{9}{2}j+\frac{7}{2}k$					
	$\frac{17}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$					
74	$6+6i+j+k$	12.3378	1.9869	0.1621	3.01	3.01
82	$5+5i+4j+4k$	13.6707	2.1503	0.1463	3.01	3.01
85	$\frac{11}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{7}{2}k$	14.1647	2.2100	0.1412	3.01	3.01
	$\frac{11}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{7}{2}k$					
89	$\frac{13}{2}+\frac{13}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$	14.8315	2.2903	0.1348	3.01	3.01

Tablo 5.6.(Devamı) En iyi CFM'ye sahip $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

N	β	$\mathcal{E}_s^\beta$	$\mathcal{E}_b^\beta$	CFM_β	SGO_β	$SGO_{\beta/\alpha}$
97	$7+4i+4j+4k$	13.4845	2.0431	0.1483	3.79	3.79
	$\frac{11}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{11}{2}j+\frac{5}{2}k$					
	$\frac{19}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k$					

Tablo 5.6'daki " $-$ " işareti, $N = 5, 17, 29, 41$ değerlerine eşit olacak şekilde kodlayıcı Lipschitz tamsayıları var olmadığından dolayı hesaplama yapılamadığını ifade etmektedir.

Tablo 5.6'daki $N = 13, 37, 61, 73, 97$ için Tablo 5.4 ve Tablo 5.5'teki $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümeleri, $TBGG$ kanalında en iyi CFM'ye sahip olduklarından dolayı Tablo 5.6'da yer verilmiştir.

Tablo 5.3, Tablo 5.4, Tablo 5.5 ve Tablo 5.6'ya kadar olan tabloların karşılaştırılması sonucunda elde edilen bazı sonuçlar aşağıda verilmektedir.

Sonuç 5.2.1.2. Tablo 5.3 ile Tablo 5.4 karşılaştırıldığında;

- CFM'leri bakımından karşılaştırıldığında $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin, $\mathcal{G}_\pi$ yıldızkümelerinden daha iyi bir iletim hızına sahip oldukları,
- $N = 13, 37, 61, 73, 97$ için $\mathcal{E}_s^\beta$ ve $\mathcal{E}_b^\beta$ değerleri karşılaştırıldığında en iyi CFM'e sahip $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin, $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümelerinden daha iyi değerlere sahip olmalarına rağmen diğer N değerleri için eşit değerlere sahip oldukları,
- SGO'ları bakımındann karşılaştırıldığında en iyi CFM'e sahip $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin, $\mathcal{G}_\pi$ yıldızkümelerine karşı $1.69 - 3.89\ dB$ arasında kod kazancında iyileştirme sağladıkları,

görülür.

Sonuç 5.2.1.3. Tablo 5.4 ve Tablo 5.5'teki $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümeleri ile $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümeleri karşılaştırıldığında;

- Sinyal ve bit başına enerjileri karşılaştırıldığında hesaplanan tüm N değerleri için $TBGG$ kanalında $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin, $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerinden daha iyi bir performansa sahip oldukları,
- CFM'leri karşılaştırıldığında hesaplanan tüm N değerleri için $TBGG$ kanalında $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin, $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerinden daha iyi bir iletim hızına sahip oldukları,
- SGO'ları karşılaştırıldığında hesaplanan tüm N değerleri için en iyi CFM'e sahip $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin, $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerine karşı $2.88 - 3.89\ dB$ arasında kod kazancında iyileştirme sağladıkları,

görülür. Bu sonuçlar Tablo 5.6'da kolayca görülebilir.

Sonuç olarak; $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin, hesaplanan tüm N değerleri için $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerine karşı $TBGG$ kanalında daha iyi bir performansa ve kod kazancına sahip oldukları sonucu elde edilmiştir.

[61] numaralı kaynak, farklı boyutlarda yapılan çalışmalar neticesinde $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları bakımından en iyi parametrelere sahip sinyal yıldızkümelerini gösterir. Bundan dolayı araştırmacılar için bir veri tabanı özelliği taşımaktadır. Tablo 5.6'da elde edilen en iyi performanslara ve kod kazançlarına sahip $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümeleri ile karşılaştırmak için [61]'deki en iyi CFM'ye sahip sinyal yıldızkümelerinin, minimum Öklid uzaklıkları, sinyal ve bit başına düşen ortalama enerjileri Tablo 5.7'de sunulmaktadır. Tablo 5.7'de, d_{min} değerleri virgülden sonra iki basamak ve $\mathcal{E}_s$, $\mathcal{E}_b$ ve CFM değerleri virgülden sonra dört basamak olacak şekilde yuvarlamıştır. Ayrıca, Tablo 5.7'deki CFM değerleri [61]'deki

$$CFM = \frac{d^2 N}{2E} \tag{5.2.1.1}$$

eşitliği ile hesaplanmıştır. (5.2.1.1)'de; N, sinyal yıldızkümelerinin boyutunu ($\mathcal{L}_\alpha$ ve $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümeleri için $N = 4$, $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümeleri için $N = 2$), d^2, minimum Öklid uzaklığı olan δ_{min}^2'yi ve E, sinyal başına ortalama enerjileri olan $\mathcal{E}_s$'yi temsil etmektedir. Buradan dört boyutlu sinyal yıldızkümeleri için (5.2.1.1)'deki eşitlik

$$CFM = \frac{2\delta_{min}^2}{\mathcal{E}_s} \tag{5.2.1.2}$$

olarak elde edilir.

[61]'deki CFM değerleri ile (5.2.1.2)'deki eşitlik ile hesaplanan CFM değerleri arasında bir tutarsızlık görülmektedir. Bundan dolayı, [61]'te yer alan CFM değerleri (5.2.1.2)'deki eşitlik göz önünde bulundurularak tekrar hesaplanmış ve elde edilen değerler Tablo 5.7'de yerine yazılmıştır. Tablo 5.7'deki CFM değerleri hesaplanırken [61]'deki δ_{min}^2 ve $\mathcal{E}_s$ değerleri göz önünde bulundurulmuştur. Örneğin; $N = 29$ için $\delta_{min}^2 = 2.9921$ ve $\mathcal{E}_s = 9.62457$'dir. Buradan, (5.2.1.2)'deki eşitlik ile $CFM = 1.86038 \approx 1.8604$ olarak hesaplanmış ve Tablo 5.7'de yerine yazılmıştır.

Tablo 5.7. Normu 100'den küçük veya eşit olacak şekilde [61]'de yer alan en iyi CFM'ye sahip sinyal yıldızkümelerinin minimum Öklid uzaklıkları, sinyal ve bit başına ortalama enerjileri ve iletim hızları.

N	δ_{min}^2	$\mathcal{E}_s$	$\mathcal{E}_b$	CFM	N	δ_{min}^2	$\mathcal{E}_s$	$\mathcal{E}_b$	CFM
5	3.91	6.1115	2.6321	5.0000	53	106	17220	3006.3300	1.3050
10	1.95	2.2918	0.6899	3.3333	58	58	5381	918.5760	1.2503
13	1.73	2.0882	0.5643	2.8822	61	122	24412	4116.1800	1.2194
17	3.02	7.3748	1.8043	2.4681	65	130	28616	4751.6200	1.1812
25	2	3.8400	0.8269	2.0833	73	146	38240	6177.8800	11149
26	1.5465	2.3847	0.5073	2.0059	74	74	9898	1594.0200	1.1065
29	2.9921	9.6246	1.9812	1.8604	82	82	12802	2013.6700	1.0505
34	34	1378	270.8620	1.6778	85	170	55852	8714.0900	1.0349
37	74	6880	1320.6800	1.5919	89	178	62464	9645.8600	1.0145
41	82	8928	1666.4300	1.5063	97	194	78252	11856.5000	0.9620
50	50	3718	658.7690	1.3448					

Örnek 5.2.1.2. [61]'de $N = 89$ ve $N = 97$ için sırasıyla $CFM = 0.0624021$ ve $CFM = -0.16862$ olarak verilmiştir. Bu değerler göz önünde bulundurulsaydı Tablo 5.6'daki $N = 89$ ve $N = 97$ değerleri için sırasıyla elde edilen $CFM = 0.1348$ ve $CFM = 0.1483$ değerlerine sahip $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümeleri, CFM açısından [61]'deki sinyal yıldızkümelerinden daha iyi oldukları sonucu elde edilecekti. Fakat, (5.2.1.2)'deki eşitlik yardımıyla yapılan hesaplamalar sonucunda [61]'de $N = 89$ ve

$N = 97$ için verilen sinyal yıldızkümelerinin, Tablo 5.6'da $N = 89$ ve $N = 97$ için verilen $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin CFM'lerinden daha iyi oldukları görülecektir.

Sonuç 5.2.1.4. Tablo 5.7'deki $N = 25, 26$ değerleri dışındaki diğer tüm N değerleri için Tablo 5.6'da sunulan $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin sinyal ve bit başına ortalama enerjileri, Tablo 5.7'teki sinyal yıldızkümelerinin sinyal ve bit başına ortalama enerjilerinden daha iyi bir performansa sahip olmaktadır.

Sonuç 5.2.1.5. CFM'leri bakımından, Tablo 5.7'deki sinyal yıldızkümeleri, Tablo 5.6'da sunulan $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinden daha iyi iletim hızına sahip olmaktadır.

CFM'leri bakımından, Tablo 5.7'deki sinyal yıldızkümelerinin daha iyi olmasının sebebi, Tablo 5.6'daki $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerinin minimum Öklid uzaklıklarının $\delta_\beta^2 = 1$ iken Tablo 5.7'deki sinyal yıldızkümelerinin minimum Öklid uzaklıklarının $\delta_{min}^2 > 1$ olmasından kaynaklanır. Buradan, geniş minimum Öklid uzaklığına sahip sinyal yıldızkümelerinin daha iyi bir iletim hızına sahip olacakları (5.1.3.5) veya (5.2.1.1)'deki eşitlikten açık bir şekilde görülebilir.

5.2.2. Genişletilmiş Lipschitz ve genişletilmiş Hurwitz tamsayılarının TBGG kanalındaki performanslarının ve kod kazançlarının karşılaştırılması

[50]'de Freudenberger ve arkadaşları, $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerinin, $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümeleri ile $TBGG$ kanalında benzer performanslara sahip olduklarını ve kod kazançları açısından herhangi bir avantaj sağlayamadıkları sonucunu elde etmişlerdir. Bundan dolayı, [50]'de Freudenberger ve arkadaşları, küme bölüntü özelliğini kullanarak önerilmiş primitif Lipschitz tamsayıları adını verdikleri Lipschitz tamsayılarını, eleman sayıları Tablo 5.3'teki N değerlerine eşit olacak şekilde alt kümelere ayırmak suretiyle geniş minimum Öklid uzaklıkları elde ederek daha iyi performansa sahip $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerini elde etmişlerdir.

Uyarı 5.2.2.1. Tez çalışmasının bu kısmından itibaren "önerilmiş primitif Lipschitz tamsayıları" ifadesi yerine "genişletilmiş kodlayıcı Lipschitz tamsayıları" ve benzer şekilde "önerilmiş primitif Hurwitz tamsayıları" ifadesi yerine "genişletilmiş kodlayıcı Hurwitz tamsayıları" ifadeleri kullanılacaktır. Ayrıca, bir önceki alt bölümdeki $\mathcal{L}_\alpha$ veya $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümeleri ile yapılacak karşılaştırmalarda karışıklığı önlemek için

genişletilmiş kodlayıcı Lipschitz tamsayıları α' ve genişletilmiş kodlayıcı Hurwitz ttamsayıları β' ile temsil edilecektir.

Genişletilmiş kodlayıcı Lipschitz tamsayıları veya genişletilmiş kodlayıcı Hurwitz tamsayıları, küme bölüntü özelliği ile d elemana sahip c tane alt kümeye bölünebilir. Dolayısıyla, genişletilmiş kodlayıcı Lipschitz tamsayılarının veya genişletilmiş kodlayıcı Hurwitz tamsayılarının eleman sayısı $N = c \cdot d$ olur. $N = c \cdot d$ eşitliğindeki d tamsayısı, Tablo 5.3'teki N sayılarına karşılık gelecek şekilde belirlenir. c tamsayısı ise $c \geq 2$ olmak üzere en iyi CFM'ye sahip olacak şekildeki sinyal yıldızkümesinin belirlenmesiyle elde edilir. Yani, c tamsayısı 2'den başlamak suretiyle birer birer arttırılarak genişletilmiş kodlayıcı Lipschitz tamsayıları veya genişletilmiş kodlayıcı Hurwitz tamsayıları üzerinden ilgili modülo fonksiyonu ile elde edilen $N = c \cdot d$ elemana sahip $\mathcal{L}_{\alpha'}$ veya $\mathcal{H}_{\beta'}$ sinyal yıldızkümelerinin bir alt kümesi üzerinden CFM'leri hesaplanır. Bununla birlikte, $\mathcal{L}_{\alpha'}$ veya $\mathcal{H}_{\beta'}$ sinyal yıldızkümelerinin bir alt kümesi üerinden hesaplanan CFM'leri arasında en iyi CFM'ye ve minimum sinyal başına ortalama enerjiye sahip olan sinyal yıldızkümesi seçilerek c tamsayısı belirlenir. Böylece, genişletilmiş kodlayıcı Lipschitz tamsayılarının veya genişletilmiş kodlayıcı Hurwitz tamsayılarının eleman sayıları, c ve d tamsayılarının belirlenmesiyle elde edilir. Genişletilmiş kodlayıcı Lipschitz tamsayılarının veya genişletilmiş kodlayıcı Hurwitz tamsayılarının nasıl elde edileceğini gösteren bir örnek aşağıda verilmektedir.

Örnek 5.2.2.1. Tablo 5.3'teki $N = 13$ değerini, her bir bileşeni tamsayı olan genişletilmiş kodlayıcı Hurwitz tamsayısının küme bölüntü özelliği ile elde edilen $\mathcal{H}_{\beta'}^{(0)}$ alt kümesinin eleman sayısını temsil edecek şekilde kabul edelim. Tablo 5.8 ile; $c \geq 2$ olacak şekilde elde edilen β' genişletilmiş Hurwitz tamsayıları üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen $d = 13$ elemana sahip $\mathcal{H}_{\beta'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve β' genişletilmiş Hurwitz tamsayıları sunulmaktadır. Hesaplamalar için Ek-A Şekil A.3'deki *Mathematica* kodları kullanılmıştır.

Tablo 5.8. $c \geq 2$ ve $d = 13$ olacak şekildeki β' genişletilmiş kodlayıcı Hurwitz tamsayıları ve $\mathcal{H}_{\beta'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları.

N	c	d	β'	$\delta_{\beta'}^2$	$\mathcal{E}_s^{\beta'}$	$CFM_{\beta'}$
26	2	13	$3+3i+2j+2k$	2	4.3077	0.9286
39	3	13	$5+3i+2j+k$	9	8.3077	2.1667
			$6+i+j+k$	3	5.5385	1.0833
52	4	13	$5+3i+3j+3k$	4	7.3846	1.0833
			$5+5i+j+k$	4	8.6154	0.9286
			$7+i+j+k$	4	7.3846	1.0833
65	5	13	$6+4i+3j+2k$	15	13.8462	2.1667
78	6	13	$6+5i+4j+k$	18	16.6154	2.1667
			$7+4i+3j+2k$	18	16.6154	2.1667
			$8+3i+2j+k$	18	16.6154	2.1667

Tablo 5.8'de, $d = 13$ elemanlı $\mathcal{H}_{\beta'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümeleri için en iyi CFM değeri $N = 39, 65, 78$ değerlerinde $CFM_{\beta'} = 2.1667$ olarak elde edilmiştir. İkinci öncü değer olarak sinyal başına düşen ortalama enerjilerine bakılarak $N = c \cdot d$ değerleri içinde minimum sinyal başına düşen ortalama enerjisine sahip olan $\mathcal{H}_{\beta'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümesi belirlenir. Buradan, en iyi CFM değerine sahip $\mathcal{H}_{\beta'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümeleri arasında $N = 39$ değeri içindeki $\mathcal{H}_{5+3i+2j+k}^{(0)}$ sinyal yıldızkümesi, $\mathcal{E}_s^{\beta'} = 8.3077$ ile minimum sinyal başına düşen enerjiye sahip olur. Dolayısıyla, $c \geq 2$ olacak şekilde $c = 3$ olarak belirlenmiş olur. Sonuç olarak, $d = 13$ elemanı için en iyi CFM değerine sahip sinyal yıldızkümesi, $c = 3$ değeri ile birlikte normu 39 olacak şekildeki $\beta' = 5+3i+2j+k$ genişletilmiş kodlayıcı Hurwitz tamsayısı üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen $\mathcal{H}_{5+3i+2j+k}^{(0)}$ sinyal yıldızkümesi olur.

Örnek 5.2.2.1'den de görüleceği üzere $N = c \cdot d$ değerindeki c ve d değerleri rastgele ya da keyfi olacak şekilde belirlenmemektedir. d değeri için Tablo 5.3'teki N değerleri referans alınırken c değeri için $c \geq 2$ olacak şekilde Tablo 5.8'deki gibi belirlenir.

Buradan, bulunan d ve c değerleri üzerinden $TBGG$ kanalında en iyi iletim hızına sahip Hurwitz sinyal yıldızkümeleri belirlenir.

[50]'de Freudenberger ve arkadaşları, genişletilmiş primitif Lipschitz tamsayıları üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen en iyi CFM'ye sahip Lipschitz sinyal yıldızkümelerini Tablo 5.9'daki gibi sunmuşlardır.

Tablo 5.9. $d \leq 100$ olacak şekildeki en iyi CFM'ye sahip olan $\mathcal{L}_{\alpha'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

$N = c \cdot d$	α'	$\delta_{\alpha'}^2$	$\mathcal{E}_s^{\alpha'}$	$\mathcal{E}_b^{\alpha'}$	$CFM_{\alpha'}$	$SGO_{\alpha'/\alpha}$
$30 = 3 \cdot 10$	$4 + 3i + 2j + k$	9	9.9000	2.9802	1.8182	4.77
$39 = 3 \cdot 13$	$5 + 3i + 2j + k$	9	12.9231	3.4923	1.3929	4.77
$150 = 6 \cdot 25$	$10 + 5i + 4j + 3k$	30	48.9600	10.5430	1.2255	7.07
$* 156 = 6 \cdot 26$	$9 + 7i + 5j + k$	36	52.1538	11.0955	1.3805	7.76
$** 130 = 5 \cdot 26$	$10 + 5i + 2j + k$	25	43.2692	9.2054	1.1556	6.99
$238 = 7 \cdot 34$	$11 + 8i + 7j + 2k$	42	79.2647	15.5804	1.0597	7.78
$222 = 6 \cdot 37$	$11 + 8i + 6j + k$	36	73.9459	14.1946	0.9737	7.78
$350 = 7 \cdot 50$	$13 + 9i + 8j + 6k$	49	116.6200	20.6632	0.8403	8.45
$371 = 7 \cdot 53$	$12 + 11i + 9j + 5k$	49	123.6230	21.5825	0.7927	8.45
$522 = 9 \cdot 58$	$17 + 14i + 6j + k$	81	173.9480	29.6942	0.9313	9.54
$549 = 9 \cdot 61$	$17 + 12i + 10j + 4k$	81	182.9510	30.8479	0.8855	9.54
$585 = 9 \cdot 65$	$15 + 14i + 10j + 8k$	81	194.4000	32.2797	0.8333	9.56
$657 = 9 \cdot 73$	$16 + 14i + 13j + 6k$	81	218.9590	35.3740	0.7399	9.54
$* 740 = 10 \cdot 74$	$19 + 17i + 9j + 3k$	100	246.7570	39.7389	0.8105	10.00
$** 666 = 9 \cdot 74$	$19 + 14i + 10j + 3k$	81	221.9590	35.7454	0.7299	9.54
$902 = 11 \cdot 82$	$28 + 9i + 6j + k$	121	300.6220	47.2858	0.8050	10.41
$850 = 10 \cdot 85$	$20 + 19i + 8j + 5k$	100	282.8240	44.1264	0.7072	10.01
$979 = 11 \cdot 89$	$29 + 8i + 7j + 5k$	121	326.2920	50.3869	0.7417	10.42
$1261 = 13 \cdot 97$	$27 + 18i + 12j + 8k$	169	420.2890	63.6809	0.8042	11.14

Tablo 5.9'da; "$*$" ile; [50]'deki ilgili genişletilmiş primitif Lipschitz tamsayıları üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen $\mathcal{L}_{\alpha'}$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$

kanalındaki performansları ve kod kazançları gösterilmektedir. $N = 6 \cdot 26 = 156$ değeri için verilen $\alpha' = 9 + 7i + 5j + k$ genişletilmiş primitif Lipschitz tamsayısının, küçük kalanlı bölme özelliğine sahip olmayan bir primitif Lipschitz tamsayısı olduğu Örnek 4.1.1'de gösterilmiştir. Benzer şekilde, $N = 10 \cdot 74 = 740$ değeri için verilen $\alpha' = 19 + 17i + 9j + 3k$ genişletilmiş primitif Lipschitz tamsayısının, küçük kalanlı bölme özelliğine sahip olmayan bir primitif Lipschitz tamsayısı olduğu da Örnek 4.1.2'de gösterilmiştir.

Tablo 5.9'daki "$**$" ile; $N = 6 \cdot 26 = 156$ ve $N = 10 \cdot 74 = 740$ değerleri dışındaki diğer N değerleri küçük kalanlı bölme özelliğine sahip olmalarından dolayı tüm tablodaki değerlerin küçük kalanlı bölme özelliğine sahip olacak şekilde oluşturulması için en iyi CFM'ye sahip olacak şekildeki $\mathcal{L}_{\alpha'}$ sinyal yıldızkümelerini temsil etmekte ve $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları gösterilmektedir.

[50]'de Freudenberger ve arkadaşları, küme bölüntü özelliği ile genişletilmiş Lipschitz tamsayıları üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen $\mathcal{L}_{\alpha'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümeleri ile $SGO_{\alpha'/_\alpha}$ sütunundan da görüleceği üzere $4.77 - 11.14\, dB$ arasında kod kazançlarında iyileştirme sağlamışlardır. Yani, Freudenberger ve arkadaşları, küme bölüntü özelliğini kullanarak genişletilmiş primitif Lipschitz tamsayıları üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile daha iyi kod kazançlarına sahip $\mathcal{L}_{\alpha'}$ sinyal yıldızkümelerini elde etmişlerdir.

β' genişletilmiş kodlayıcı Hurwitz tamsayıları üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen $\mathcal{H}_{\beta'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümelerinin, $TBGG$ kanalındaki performansları Tablo 5.10'da sunulmaktadır. Bununla birlikte, $\mathcal{H}_{\beta'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümelerinin; $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümelerine, $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümelerine, $\mathcal{L}_{\alpha'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümelerine ve $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerine karşı kod kazançları da sunulmaktadır. Tablo 5.10'da verilen değerler Ek-A'da Şekil A.3 ve Şekil A.4'deki *Mathematica* kodları kullanılarak hesaplanmıştır.

Tablo 5.10. $d \leq 100$ olacak şekildeki en iyi CFM'ye sahip olan $\mathcal{H}_{\beta'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

$N = c \cdot d$	β'	$\delta_{\beta'}^2$	$\mathcal{E}_s^{\beta'}$	$\mathcal{E}_b^{\beta'}$	$CFM_{\beta'}$	$SGO_{\beta'}$ / $SGO_{\beta'/\alpha}$	$SGO_{\beta'/\beta}$ / $SGO_{\beta'/\alpha'}$
$15 = 3 \cdot 5$	$\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$	3	2.4000	1.0336	2.5000	3.01	0
						–	–
$30 = 3 \cdot 10$	$4+3i+2j+k$	6	7.5000	2.2577	1.6000	4.35	1.34
						4.22	−0.56
$39 = 3 \cdot 13$	$5+3i+2j+k$	9	8.3077	2.2451	2.1667	6.69	3.01
	$\frac{9}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{1}{2}k$					6.69	1.92
$51 = 3 \cdot 17$	$\frac{11}{2}+\frac{7}{2}i+\frac{5}{2}j+\frac{3}{2}k$	9	11.2941	2.7631	1.5938	6.53	3.52
						–	–
$75 = 3 \cdot 25$	$7+4i+3j+k$	9	15.8400	3.4110	1.1364	6.75	3.74
	$\frac{13}{2}+\frac{9}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{1}{2}k$					6.75	−0.33
$78 = 3 \cdot 26$	$7+4i+3j+2k$	9	16.7308	3.5594	1.0759	6.70	3.69
						6.68	−1.08
$87 = 3 \cdot 29$	$\frac{13}{2}+\frac{11}{2}i+\frac{7}{2}j+\frac{3}{2}k$	9	19.0345	3.9182	0.9457	6.60	3.58
						–	–
$170 = 5 \cdot 34$	$10+6i+5j+3k$	25	35.4412	6.9664	1.4108	9.03	6.03
						9.02	1.24
$185 = 5 \cdot 37$	$9+8i+6j+2k$	25	38.1081	7.3152	1.3121	9.08	5.18
	$\frac{21}{2}+\frac{13}{2}i+\frac{9}{2}j+\frac{7}{2}k$					9.08	1.30
$205 = 5 \cdot 41$	$\frac{19}{2}+\frac{17}{2}i+\frac{11}{2}j+\frac{7}{2}k$	25	42.9268	8.0124	1.1648	9.01	6.00
						–	–
$250 = 5 \cdot 50$	$12+9i+4j+3k$	25	52.9000	9.3730	0.9452	8.97	5.96
						8.96	0.51
$265 = 5 \cdot 53$	$14+7i+4j+2k$	25	56.9811	9.9480	0.8775	8.89	5.88
						8.89	0.44

Tablo 5.10.(Devamı) $d \leq 100$ olacak şekildeki en iyi CFM'ye sahip olan $\mathcal{H}_{\beta'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümelerinin $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları.

$N = c \cdot d$	β'	$\delta_{\beta'}^2$	$\mathcal{E}_s^{\beta'}$	$\mathcal{E}_b^{\beta'}$	$CFM_{\beta'}$	$SGO_{\beta'}$ / $SGO_{\beta'/\alpha}$	$SGO_{\beta'/\beta}$ / $SGO_{\beta'/\alpha'}$
$265 = 5 \cdot 53$	$\frac{27}{2}+\frac{15}{2}i+\frac{9}{2}j+\frac{5}{2}k$	25	56.9811	9.9480	0.8775	8.89	5.88
						8.89	0.44
$406 = 7 \cdot 58$	$13+11i+10j+4k$	42	88.9483	15.1841	0.9444	9.61	6.60
						9.60	0.06
$427 = 7 \cdot 61$	$16+11i+7j+k$	49	92.2623	15.5566	1.0622	10.33	6.47
	$\frac{33}{2}+\frac{21}{2}i+\frac{13}{2}j+\frac{3}{2}k$					10.33	0.79
$455 = 7 \cdot 65$	$17+9i+7j+6k$	35	95.6308	15.8793	0.7320	8.99	5.98
	$\frac{39}{2}+\frac{13}{2}i+\frac{9}{2}j+\frac{7}{2}k$					8.99	-0.56
$511 = 7 \cdot 73$	$14+13i+11j+5k$	49	110.4660	17.8463	0.8872	10.33	6.52
	$\frac{33}{2}+\frac{21}{2}i+\frac{17}{2}j+\frac{15}{2}k$					10.33	0.79
$518 = 7 \cdot 74$	$18+11i+8j+3k$	42	111.3380	17.9304	0.7545	9.69	6.68
						9.69	-0.31
$574 = 7 \cdot 82$	$17+11i+10j+8k$	49	124.3780	19.5638	0.7879	10.33	7.31
						10.32	-0.09
$595 = 7 \cdot 85$	$19+13i+8j+k$	49	128.1410	19.9927	0.7648	10.35	7.34
	$\frac{39}{2}+\frac{25}{2}i+\frac{15}{2}j+\frac{3}{2}k$					10.35	0.34
$623 = 7 \cdot 89$	$21+13i+3j+2k$	49	133.7080	20.6475	0.7329	10.36	7.35
	$\frac{39}{2}+\frac{29}{2}i+\frac{9}{2}j+\frac{7}{2}k$					10.36	-0.05
$873 = 9 \cdot 97$	$20+18i+10j+7k$	81	189.8350	28.7633	0.8534	11.39	7.60
	$\frac{41}{2}+\frac{35}{2}i+\frac{19}{2}j+\frac{15}{2}k$					11.39	0.26

Tablo 5.10'daki "$-$" ile; normu d'ye eşit olmak üzere $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4 > 0$ olacak şekildeki α' kodlayıcı Lipschitz tamsayıları var olmadığından dolayı hesaplama yapılamadığını ifade etmektedir. $SGO_{\beta'/\alpha'}$ değerleri, Tablo 5.8'deki $\mathcal{L}_{\alpha'}$ sinyal

yıldızkümelerine karşı kod kazançlarını göstermektedir. Tablo 5.10'daki $d = 24,74$ değerleri için $SGO_{\beta'/\alpha'}$ hesaplanırken Tablo 5.9'daki "$*$" ile gösterilen değerler göz önünde bulundurulmuştur.

Sonuç 5.2.2.1. Tablo 5.10'da; Tablo 5.3'teki $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümeleri ile Tablo 5.4'teki $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümeleri benzer performans gösterdiklerinden dolayı $SGO_{\beta'}$ ve $SGO_{\beta'/\alpha}$ değerleri birbirine yakın değerlere sahip olmaktadır.

Sonuç 5.2.2.2. Tablo 5.10'daki $\mathcal{H}_{\beta'}$ sinyal yıldızkümeleri; $d \geq 10$ olmak üzere Tablo 5.6'daki $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümelerine karşı $1.34 - 7.60\ dB$ $\left(SGO_{\beta'/\beta}\right)$ arasında kod kazançlarında iyileştirme sağlar.

Sonuç 5.2.2.3. Tablo 5.10'daki $\mathcal{H}_{\beta'}$ sinyal yıldızkümeleri; Tablo 5.9'daki $\mathcal{L}_{\alpha'}$ sinyal yıldızkümelerine karşı $d = 13, 34, 37$ değerlerinde $1\ dB$'den yüksek olacak şekilde kod kazançlarında iyileştirme sağlar. Bununla birlikte, $d = 50, 53, 61, 73, 85, 97$ değerlerinde Tablo 5.9'daki $\mathcal{L}_{\alpha'}$ sinyal yıldızkümelerine karşı $0.26 - 0.79\ dB$ arasında kod kazançlarında iyileştirme sağlar. Sonuç olarak, Tablo 5.10'daki $\mathcal{H}_{\beta'}$ sinyal yıldızkümeleri, Tablo 5.9'daki $\mathcal{L}_{\alpha'}$ sinyal yıldızkümelerine karşı hesaplanan $d = 10, 13, 25, 26, 34, 37, 50, 53, 58, 61, 65, 73, 74, 82, 85, 89, 97$ değerleri içindeki $d = 13, 34, 37, 50, 53, 58, 61, 73, 85, 97$ değerlerinde $0.06 - 1.92\ dB$ arasında kod kazançlarında iyileştirme sağlar.

Sonuç 5.2.2.4. İletim hızı bakımından Tablo 5.10'daki $\mathcal{H}_{\beta'}$ sinyal yıldızkümeleri, Tablo 5.3'teki $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümeleri ve Tablo 5.4'teki $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümeleri ile karşılaştırıldığında daha iyi bir performans gösterir. Tablo 5.10'daki $\mathcal{H}_{\beta'}$ sinyal yıldızkümeleri, Tablo 5.9'daki $\mathcal{L}_{\alpha'}$ sinyal yıldızkümeleri ile karşılaştırıldığında $d = 13, 34, 37, 50, 53, 58, 61, 73, 85, 97$ değerlerinde iletim hızlarının daha iyi olacak şekilde elde edildiği görülür.

Sonuç 5.2.2.5. Tablo 5.10'daki $\mathcal{H}_{\beta'}$ sinyal yıldızkümelerinin, Tablo 5.6'daki $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümeleri ile karşılaştırıldığında $d \geq 10$ değerleri için daha iyi iletim hızına sahip oldukları görülür.

Sonuç 5.2.2.6. Tablo 5.10'daki $\mathcal{H}_{\beta'}$ sinyal yıldızkümelerinin, sinyal başına ortalama enerjileri ve bit başına ortalama enerjileri bakımından Tablo 5.9'daki $\mathcal{L}_{\alpha'}$ sinyal yıldızkümelerinden daha iyi olacak şekilde elde edildiği görülür.

Örnek 5.2.2.2. Tablo 5.10'daki $N = 39 = 13 \cdot 3$ değerine karşılık gelen ve küme bölüntü özelliği ile elde edilen $\mathcal{H}^{(0)}_{5+3i+2j+k}$ ve $\mathcal{H}^{(0)}_{9/_2+7/_2 i+5/_2 j+1/_2 k}$ sinyal yıldızkümelerini göz önüne alalım. $\mathcal{H}^{(0)}_{5+3i+2j+k}$ ve $\mathcal{H}^{(0)}_{9/_2+7/_2 i+5/_2 j+1/_2 k}$ sinyal yıldızkümelerinin; minimum Öklid uzaklıkları $\delta^2_{\beta'} = 9$, sinyal başına ortalama enerjileri $\mathcal{E}_s^{\beta'} = 8.3077$, bit başına ortalama enerjileri $\mathcal{E}_b^{\beta'} = 2.2541$ ve iletim hızları $CFM_{\beta'} = 2.1667$'dir. $N = 39 = 13 \cdot 3$ değerine karşılık gelen Tablo 5.10'daki Hurwitz sinyal yıldızkümesinin iletim hızı $CFM_{\beta'} = 2.1667$, Tablo 5.9'daki Lipschitz sinyal yıldızkümesinin iletim hızı $CFM_{\alpha'} = 1.3929$'dan daha iyi olacak şekilde elde edilmiştir. $\mathcal{H}^{(0)}_{5+3i+2j+k}$ ve $\mathcal{H}^{(0)}_{9/_2+7/_2 i+5/_2 j+1/_2 k}$ sinyal yıldızkümelerinin, Tablo 5.3'teki $N = 13$ değerine karşılık gelen $\mathcal{G}_{3+2i}$ sinyal yıldızkümesine karşı kod kazancı $SGO_{\beta'} = 6.69\ dB$ ve Tablo 5.4'teki $N = 13$ değerine karşılık gelen $\mathcal{L}_{\alpha}$ sinyal yıldızkümesine karşı kod kazancı $SGO_{\beta'/_{\alpha}} = 6.69\ dB$'dir. $\mathcal{H}^{(0)}_{5+3i+2j+k}$ ve $\mathcal{H}^{(0)}_{9/_2+7/_2 i+5/_2 j+1/_2 k}$ sinyal yıldızkümeleri, Tablo 5.6'daki $\mathcal{H}_{2+2i+2j+k}$ ve $\mathcal{H}_{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}j+\frac{3}{2}k}$ sinyal yıldızkümelerine karşı kod kazancında $3.01\ dB$'lik bir iyileştirme sağlar. Bununla birlikte, $\mathcal{H}^{(0)}_{5+3i+2j+k}$ ve $\mathcal{H}^{(0)}_{9/_2+7/_2 i+5/_2 j+1/_2 k}$ sinyal yıldızkümeleri, Tablo 5.9'daki $\mathcal{L}_{\alpha'}$ sinyal yıldızkümesine karşı $SGO_{\beta'/_{\alpha'}} = 1.92\ dB$ ile kod kazancında en iyi iyileştirmeyi gösteren sinyal yıldızkümeleri olur.

Dört boyutlu sinyal yıldızkümelerinin iki boyutta iletilen bit sayısı

$$\gamma = \frac{2}{N}(\log_2 M) \tag{5.2.2.1}$$

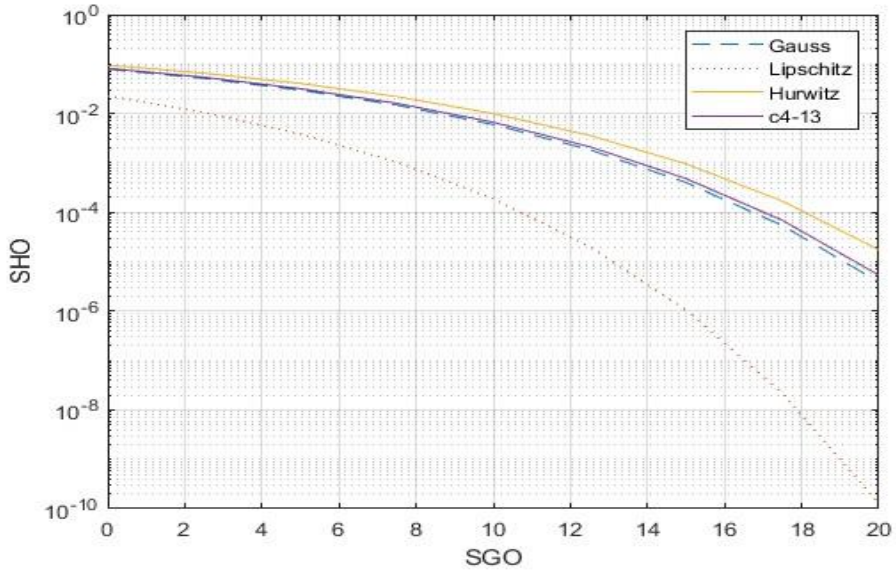
ile hesaplanır. Burada, N ile sinyal yıldızkümesinin boyutu (Gauss sinyal yıldızkümesi için $N = 2$ ve Lipschitz ve Hurwitz sinyal yıldızkümeleri için $N = 4$) ve M ile sinyal yıldızkümesinin eleman sayısı temsil edilmektedir. Örneğin, $\mathcal{H}^{(0)}_{5+3i+2j+k}$ ve $\mathcal{H}^{(0)}_{9/_2+7/_2 i+5/_2 j+1/_2 k}$ sinyal yıldızkümelerinin iki boyutta iletilen bit sayısı

$$\gamma = \frac{2}{4}(\log_2 13) = 1.85\ bits$$

olarak bulunur.

SGO, sinyal gücünün kanaldaki gürültü gücüne bölünmesiyle elde edilir. Buradan, kanaldaki gürültü gücü arttıkça SGO'nın düştüğü anlaşılır. Yani, SGO'nın düşük olması gürültünün kanalda fazla olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, düşük SGO durumunda SHO değerleri önem kazanır.

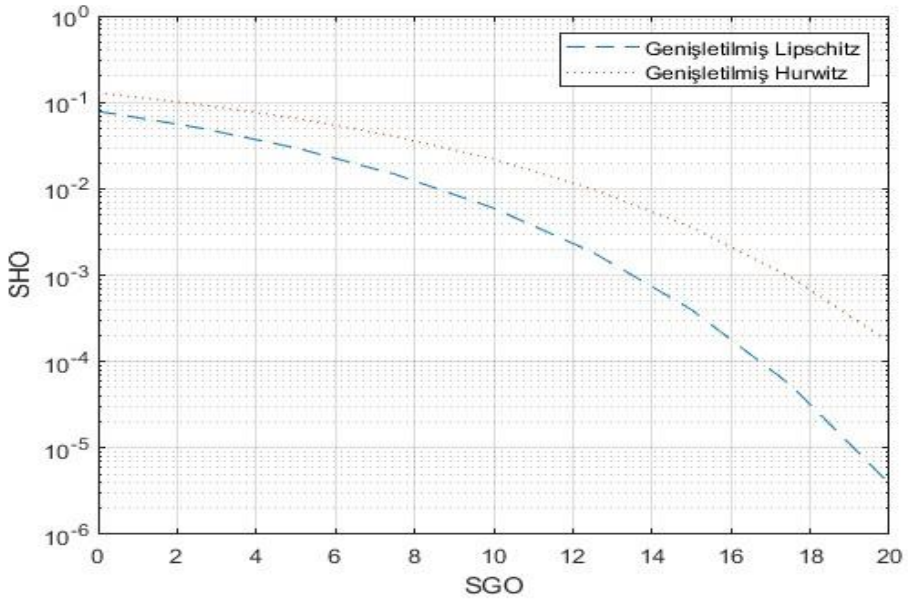
Şekil 5.12 ile; $N = 13$ için Tablo 5.3'teki $\mathcal{G}_\pi$ sinyal yıldızkümesinin, Tablo 5.4'teki $\mathcal{L}_\alpha$ sinyal yıldızkümesinin, Tablo 5.6'daki $\mathcal{H}_\beta$ sinyal yıldızkümesinin ve Tablo 5.7'deki sinyal yıldızkümesinin SHO (Sembol Hata Oranı) ile SGO arasındaki ilişki gösterilmektedir.



Şekil 5.12. $N = 13$ için Gauss sinyal yıldızkümesinin, Lipschitz sinyal yıldızkümesinin, [61]'deki sinyal yıldızkümesinin ve Hurwitz sinyal yıldızkümesinin sinyal gürültü oranları ile sembol hata oranlarının karşılaştırılması.

Şekil 5.12'de, Hurwitz sinyal yıldızkümesinin diğer yıldızkümeleri ile karşılaştırıldığında aynı SHO değerlerinde daha iyi SGO'larına sahip olduğu görülür. Bu ise Hurwitz sinyal yıldızkümesinin, diğer sinyal yıldızkümelerine göre kanaldaki gürültüyü bastıracak şekilde daha iyi sinyal gücüne sahip olduğunu göstermektedir.

Şekil 5.13 ile; $N = 39 = 13 \cdot 3$ için Tablo 5.9'daki $\mathcal{L}_{\alpha'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümesinin ve Tablo 5.10'daki $\mathcal{H}_{\beta'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümesinin SHO ile SGO arasındaki ilişki gösterilmektedir.



Şekil 5.13. $N = 39$ için $\mathcal{H}_{\beta'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümesi ve $\mathcal{L}_{\alpha'}^{(0)}$ sinyal yıldızkümesinin sinyal gürültü oranları ile sembol hata oranlarının karşılaştırılması.

Şekil 5.13'te, aynı SHO değerlerinde Hurwitz sinyal yıldızkümesinin, Lipschitz sinyal yıldızkümesine göre daha iyi SGO'larına sahip olduğu görülür. Diğer taraftan, Şekil 5.12 ve Şekil 5.13'te Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin, aynı SGO'larında sıfıra yakın SHO değerlerine sahip olmasından dolayı hata düzelten kodlar açısından diğer sinyal yıldızkümelerine göre ideal kodlar olduğu görülür.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

3. Bölüm'de, β asal (veya tek) Hurwitz tamsayıları üzerinden Hurwitz sinyal yıldızkümelerini oluşturmak için iki farklı modülo fonksiyonu ve minimum olma koşulları ile oluşan μ_β modülo fonksiyonu tanımlanmıştır. Bu modülo fonksiyonun bazı cebirsel özellikleri gösterilmiştir.

4. Bölüm'de, modülo fonksiyonunun bölme algoritmasıyla olan benzerliğinden dolayı her bir bileşeni tek tamsayı olan α primitif Lipschitz tamsayıları üzerinden primitif Lipschitz tamsayılarının, Öklid bölme algoritmasındaki kalanın bölenden küçük olma koşuluyla oluşturduğu çelişki Önerme 4.1.3 yardımıyla gösterilmiştir. Diğer taraftan, her bir bileşeni tek tamsayı olan β primitif Hurwitz tamsayıları üzerinden μ_β modülo fonksiyonunun bire-bir fonksiyon olma koşuluyla oluşturuduğu çelişki Önerme 4.2.2 yardımıyla gösterilmiştir. Hem primitif Lipschitz tamsayıları hem de primitif Hurwitz tamsayıları için elde edilen bu çelişkileri ortadan kaldırmak için sırasıyla kodlayıcı Lipschitz tamsayıları ve kodlayıcı Hurwitz tamsayıları tanımlanmıştır. Hem primitif Lipschitz tamsayılarının hem de primitif Hurwitz tamsayılarının, literatürde tanımlanan farklı bir modülo fonksiyonu üzerinden de uygun olmadıkları bir örnek üzerinden gösterilmiştir.

5. Bölüm'de, Hurwtiz tamsayıları üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin, $TBGG$ kanalındaki performansları ve kod kazançları, literatürdeki Lipschitz sinyal yıldızkümelerinin ve Gauss sinyal yıldızkümelerinin performansları ve kod kazançları ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar tablolar üzerinden yapılmış ve elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

- Tablo 5.6 ile, Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin, $TBGG$ kanalındaki sinyal başına ortalama enerjileri, bit başına ortalama enerjileri ve iletim hızları bakımından $N \leq 100$ için var olan Lipschitz sinyal yıldızkümelerinden daha iyi bir performansa sahip oldukları,

- Tablo 5.6 ile, Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin, Lipschitz sinyal yıldızkümelerine karşı $2.88 - 3.89\, dB$ arasında ve Tablo 5.3'teki Gauss sinyal

yıldızkümelerine karşı $3.01 - 3.89\,dB$ arasında kod kazancında iyileştirme sağladıkları,

- Tablo 5.10 ile, küme bölüntüsü kullanılarak elde edilen Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin, küme bölüntüsü kullanılarak elde edilen Tablo 5.9'daki Lipschitz sinyal yıldızkümelerine karşı $TBGG$ kanalında tüm N değerleri için sinyal başına ortalama enerjileri ve bit başına ortalama enerjileri bakımından daha iyi bir performansa sahip oldukları,

- Tablo 5.10 ile, küme bölüntüsü kullanılarak elde edilen Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin, Tablo 5.6'daki Hurwitz sinyal yıldızkümelerine karşı $TBGG$ kanalında $d \geq 10$ için $1.34 - 7.60\,dB$ arasında kod kazancında iyileştirme sağladıkları,

- Tablo 5.10 ile, küme bölüntüsü kullanılarak elde edilen Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin, Tablo 5.4'teki Lipschitz sinyal yıldızkümelerine karşı $4.22 - 11.39\,dB$ arasında kod kazancında iyileştirme sağladıkları,

- Tablo 5.10 ile, küme bölüntüsü kullanılarak elde edilen Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin, küme bölüntüsü kullanılarak elde edilen Tablo 5.9'daki Lipschitz sinyal yıldızkümelerine karşı $d = 13, 34, 37, 50, 53, 58, 61, 73, 85{,}97$ değerleri için $0.06 - 1.92\,dB$ arasında kod kazancında iyleştirme sağladıkları,

sonucu elde edilmiştir.

Tablo 5.10'daki $d = 13, 34, 37, 50, 53, 58, 61, 73, 85{,}97$ değerlerindeki Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin, Tablo 5.9'daki Lipschitz sinyal yıldızkümelerinden daha iyi oldukları sonucu elde edilmiştir. Yüzdesel olarak bu başarı, $\%59$'a tekabül etmektedir.

Tablo 5.6'daki Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin, $TBGG$ kanalı üzerinde tüm N değerleri için Lipschitz sinyal yıldızkümelerinden daha iyi performansa sahip oldukları sonucu elde edilmiştir.

Tez çalışmasında, $TBGG$ kanalındaki performansları açısından Lipschitz tamsayıları üzerinden μ_α modülo fonksiyonu ile elde edilen Lipschitz sinyal yıldızkümelerinden daha iyi olacak şekilde Hurwitz tamsayıları üzerinden μ_β modülo fonksiyonu ile elde edilen Hurwitz sinyal yıldızkümelerinin var oldukları Tablo 5.6 ve Tablo 5.10 ile gösterilmiştir. Bu ise Hurwitz ve Lipschitz tamsayıları halkaları üzerinden yapılmıştır.

Bir iletişim terimi olarak sinyal yıldızkümelerinin, kod kümeleri için kullanıldığı düşünüldüğünde tez çalışmasında Hurwitz tamsayıları üzerinden elde edilen kodlar için hata tespit eden ve hata düzelten kodlar incelenmemiştir. Tez çalışmasında elde edilen sol denklik sınıfları üzerinden elde edilen Hurwitz tamsayıları üzerindeki kodlar, uygun bir dekodlama metodunun kullanılması esnasında soldan dağılma özelliği kullanılacağından dolayı sol-modül tanımlanarak hata tespit eden ve hata düzelten kodlar açısından araştırılabilir. Benzer bir şekilde sağ denklik sınıfları üzerinden elde edilen Hurwitz tamsayıları üzerindeki kodlar, uygun bir dekodlama metodunun kullanılması esnasında sağdan dağılma özelliği kullanılacağından dolayı sağ-modül tanımlanarak hata tespit eden ve hata düzelten kodlar açısından araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Arıkan, A. ve Halıcıoğlu, S. (2015). *Cebire Giriş* (2. Baskı). Palme Yayınları.

[2] Çallıalp, F. (2001). *Soyut Cebir*. Birsen Yayınevi.

[3] Çallıalp, F. (2009). *Sayıların Teorisi*. Birsen Yayınevi.

[4] Çallıalp, F. ve Tekir, Ü. (2011). *Değişmeli Halkalar ve Modüller*. Birsen Yayınevi.

[5] Aydın, N. ve Kandamar, H. (2015). *Soyut Cebir* (3. Baskı). Paradigma Akademi.

[6] Ling, S. and Xing, C. (2004). *Coding Theory: A First Course*. Cambridge University Press.

[7] Davidoff, G., Sarnak, P. and Valette, A. (2003). *Elementary Number Theory, Group Theory, and Ramanujan Graphs*. Cambridge University Press.

[8] Freudenberger, J. and Shavgulidze, S. (2015, Şubat, 2-5). New Signal Constellations for Coding over Lipschitz Integers. *SCC 2015; 10th International ITG Conference on Systems, Communication and Coding* içinde. Hamburg, Germany.

[9] Güzeltepe, M. and Heden, O. (2014). Perfect Mannheim, Lipschitz and Hurwitz Weight Codes. *Mathematical Communications,* 19(2), 253-276.

[10] Grau, J. M., Miguel, C. and Oller-Marcen, A. M. (2016). On the Zero Divisor Graphs of the Ring of Lipschitz Integers Modulo n. *Advances in Applied Liffordd Algebras,* 27(2), 1191-1202. https://doi.org/10.1007/s00006-016-0709-3

[11] Conway, J. H. and Smith, D. A. (2003). *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry*. A. K. Press.

[12] Güzeltepe, M. and Altınel, A. (2017). Perfect $1-$Error$-$Correcting Hurwitz Weight Codes. *Mathematical Communications,* 22(2), 265-272.

[13] Özen, M. and Güzeltepe, M. (2011). Cyclic Codes over Some Finite Quaternion Integer Rings. *Journal of the Franklin Institute,* 348(7), 1312-1317. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2010.02.008

[14] Wikipedia (2024, 19 Şubat). Claude Chappe. https://tr.wikipedia.org/wiki/Claude_Chappe adresinden 20 Nisan 2024 tarihinde alınmıştır.

[15] Wikipedia (2023, 17 Aralık). Telgraf. https://tr.wikipedia.org/wiki/Telgraf adresinden 20 Nisan 2024 tarihinde alınmıştır.

[16] Wikipedia (2024, 8 Nisan). Mors Alfabesi. https://tr.wikipedia.org/wiki/Mors_alfabesi adresinden 20 Nisan 2024 tarihinde alınmıştır.

[17] Musoğlu, E. (2019, 19 Ocak). Claude Shannon: Sayısal Devrimi Başlatan Mühendis.https://www.herkesebilimteknoloji.com/haberler/toplum/claude-shannon-sayisal-devrimi-baslatan-muhendis adresinden 20 Nisan 2024 tarihinde alınmıştır.

[18] Shannon, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *The Bell System Technical Journal,* 27(3), 379-423. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x

[19] Shannon, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *The Bell System Technical Journal,* 27(4), 623-656. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb00917.x

[20] Shannon, C. E. (2001). A Mathematical Theory of Communication. *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review,* 5(1), 3-55. https://doi.org/10.1145/584091.584093

[21] Hamming, R. W. (1950). Error Detecting and Error Correcting Codes. *The Bell System Technical Journal,* 29(2), 147-160. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1950.tb00463.x

[22] Golay, M. J. E. (1949). Notes on Digital Coding. *Proceedings of the IRE,* 37(6), 657. https://doi.org/10.1109/JRPROC.1949.233620

[23] Muller, D. E. (1954). Application of Boolean Algebra to Switching Circuit Design and to Error Detection. *Transactions of the I.R.E. Professional Group on Electronic Computers,* EC-3(3), 6-12. https://doi.org/10.1109/IREPGELC.1954.6499441.

[24] Reed, I. S. (1954). A Class of Multiple Error Correcting Codes and the Decoding Scheme. *Transactions of the I.R.E. Professional Group on Information Theory,* 4(4), 38-49. https://doi.org/10.1109/TIT.1954.1057465i

[25] Hocquenghem, A. (1959). Codes Correcteurs D'erreurs. Chiffres, 2, 147-156.

[26] Bose, R. C. and Ray-Chaudhuri, D. K. (1960). On a Class of Error Correcting Binary Group Codes. *Information and Control,* 3(1), 68-79. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(60)90287-4

[27] Reed, I. S. and Solomon, G. (1960). Polynomial Codes over Certain Finite Fields. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics,* 8(2), 300-304.

[28] Goppa, V. D. (1970). A New Class of Linear Correcting Codes. *Problemly Peredachi Informatsii,* 6(3), 24-30.

[29] Blake, I. F. (1972). Codes over Certain Rings. *Information and Control,* 20(4), 396-404. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(72)90223-9.

[30] Blake, I. F. (1975). Codes over Integer Residue Rings. *Information and Control,* 29(4), 295-300. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(75)80001-5

[31] Spiegel, E. (1977). Codes over $\mathbb{Z}_m$. *Information and Control,* 35(1), 48-51. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(77)90526-5

[32] Spiegel, E. (1978). Codes over $\mathbb{Z}_m$, Revisited. *Information and Control,* 37(1), 100-104. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(78)90461-8

[33] Satyanarayana, C. (1979). Lee Metric Codes over Integer Residue Rings (Corresp.). *IEEE Transactions on Information Theory*, 25(2), 250-254. https://doi.org/10.1109/TIT.1979.1056017

[34] Calderbank, A. R. and Sloane, N. J. A. (1995). Modular and p − Adic Cyclic Codes. *Designs, Codes and Cryptography*, 6(1),21-35. https://doi.org/10.1007/BF01390768.

[35] Özen, M. and Güzeltepe, M. (2010). Cyclic Codes over Some Finite Rings. *Selcuk Journal of Applied Mathematics*, 11(2), 71-76.

[36] Abdelmoumen, K., Ben-Azza, H. and Najmeddine, M. (2014). About Euclidean Codes in Rings. *British Journal of Mathematics and Computer Science*, 4(10), 1356-1364. https://doi.org/10.9734/BJMCS/2014/8887

[37] Huber, K. (1994). Codes over Gaussian Integers. *IEEE Transactions on Information Theory, 40(1)*, 207-216. https://doi.org/10.1109/18.272484

[38] Huber, K. (1994). Codes over Eisenstein-Jacobi Integers. *Contemporary Mathematics*, 168, 165-179. https://doi.org/10.1090/conm/168/01696

[39] Martinez, C., Moreto, M., Beivide, R. ve Gabidulin, E. (2006). A Generaliztion of Perfect Lee Codes Over Gaussian Integers. *2006 IEEE International Symposium on Information Theory*. https://doi.org/10.1109/ISIT.2006.261892

[40] Martinez, C., Stafford, E., Beivide, R. and Gabidulin, E. M. (2008). Modeling Hexagonal Constellations with Eisenstein-Jacobi Graphs. *Problems of Information Transmission*, 44, 1-11. https://doi.org/10.1134/S0032946008010018

[41] Martinez, C., Beivide, R. and Gabidulin, E. M. (2007). Perfect Codes from Metrics Induced by Circulant Graphs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 53(9), 3042-3052. https://doi.org/10.1109/TIT.2007.903126

[42] Freudenberger, J., Ghaboussi, F. and Shavgulidze, S. (2013). New Coding Techniques for Codes over Gaussian Integers. *IEEE Transactions on Communications*, 61(8), 3114-3124. https://doi.org/10.1109/TCOMM.2013.061913.120742

[43] Belfiore, J. C. and Rekaya, G. (2003). Quaternionic Lattices for Space-Time Coding. *Proceedings 2003 IEEE Information Theory Workshop (Cat. No.03EX674)*. https://doi.org/10.1109/ITW.2003.1216745

[44] Liu, J. and Calderbank, R. (2006). The Icosian Code and the $E8$ Lattice: A New $4x4$ Space-Time Code with Non-Vanishing Deteminant. *2006 IEEE International Symposium on Information Theory*. https://doi.org/10.1109/ISIT.2006.261879

[45] Martinez, C., Stafford, E., Beivide, R. and Gabidulin, E. M. (2007). Perfect Codes over Lipschitz Integers. *2007 IEEE International Symposium on Information Theory*. https://doi.org/10.1109/ISIT.2007.4557413

[46] Martinez, C., Beivide, R. and Gabidulin, E. M. (2009). Perfect Codes from Cayley Graphs over Lipschitz Integers. *IEEE Transactions on Information Theory*, 55(8), 3552-3562. https://doi.org/10.1109/TIT.2009.2023733

[47] Özen, M. and Güzeltepe, M. (2010). Codes over Quaternion Integers. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3(4), 670-677.

[48] Shah, T. and Rasool, S. S. (2013). On Codes over Quaternion Integers. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 24, 477-496. https://doi.org/10.1007/s00200-013-0203-2

[49] Güzeltepe, M. (2013). Codes over Hurwitz Integers. *Discrete Mathematics*, 313(5), 704-714. https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.10.020

[50] Freudenberger, J. and Shavgulidze, S. (2015). New Four-Dimensional Signal Constellations from Lipschitz Integers for Transmission over the Gaussian Channel. *IEEE Transactions on Communications*, 63(7), 2420-2427. https://doi.org/10.1109/TCOMM.2015.2441691

[51] Heden, O. and Güzeltepe, M. (2016). Perfect 1 −Error Correcting Lipschitz Weight Codes. *Mathematical Communications*, 21(1), 23-30

[52] Güzeltepe, M. (2018). On Some Perfect Codes over Hurwitz Integers. *Mathematical Advances in Pure and Applied Sciences*, 1(1), 39-45

[53] Duran, R. and Güzeltepe, M. (2023). An Algebraic Construction Technique for Codes over Hurwitz Integers. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 52(3), 652-672. https://doi.org/10.15672/hujms.1137425

[54] Güzeltepe, M., Eröz, M., Çetinel, G. ve Sazak, N. (2019). *Çeşitli Halkalar Üzerinde Klasik Kodların ve Stabilizer Kuantum Kodların Geliştirilmesi* (Proje No: 116F318). https://search.trdizin.gov.tr/tr/yayin/detay/620073/

[55] Rohweder, D., Stern, S., Fischer, R. F. H., Shavgulidze, S. and Freudenberger, J. (2021). Four-Dimensional Hurwitz Signal Constellations, Set Partitioning, Detection, and Multilevel Coding. *IEEE Transactions on Communications*, 69(8), 5079-5090. https://doi.org/10.1109/TCOMM.2021.3083323

[56] Duran, R. and Güzeltepe, M. (2023). Encoder Lipschitz Integers: the Lipschitz Integers that have the "Division with Small Remainder" Property. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, https://doi.org/10.1007/s12215-023-00996-z

[57] Duran, R. (2023). Encoder Hurwitz Integers: Hurwitz Integers that have the "Division with Small Remainder" Property. *Sakarya University Journal of Science*, 27(4), 792-812. https://doi.org/10.16984/saufenbilder.1248060

[58] InetDaemon (2018, 19 Mayıs). Signal Constellations. https://www.inetdaemon.com/tutorials/basic_concepts/communication/signals/constellation.shtml adresinden 8 Nisan 2024 tarihinde alınmıştır.

[59] Proakis, J. G. ve Salehi, M. *İletişim Sistemlerin Temelleri*. (Çev. H. Altun, E. Öztürk & Y. E. Yenice) Nobel Yayın (Mart 2010).

[60] Forney, G. D. and Wei, L. F. (1989). Multidimensional Constellations I. Introduction, Figures of Merit, and Generalized Cross Constellations. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 7(6), 877-892. https://doi.org/10.1109/49.29611

[61] Database of Sphere Packing (2019, 15 Ağustos). Sphere Packings of Dimensions 4. https://codes.se/packings/4.htm adresinden 24 Nisan 2024 tarihinde alınmıştır.

EKLER

EK A. Mathematica Kodları

EK B. Matlab Kodları

EK A

```
Needs["Quaternions`"] (*Kuaterniyonlar çalışma kodu*)
a1= ;a2= ;a3= ;a4= ; (*Hurwitz tamsayısının bileşenleri*)
e=Norm[Quaternion[a1,a2,a3,a4]];
n=e-1;
L1 = Table[ a1 ** (If[(a1 ** i/e) < 0, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e) +
1/2, Round[(a1 ** i/e)]], If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e) - 1/2,
Round[(a1 ** i/e)]]]) - a2 ** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -
(a2 ** i/e) + 1/2, Round[-(a2 ** i/e)]], If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e)
- 1/2, Round[-(a2 ** i/e)]]]) - a3 ** (If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] -
1/2, -(a3 ** i/e) + 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]], If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3
** i/e) - 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]]]) - a4 ** (If[-(a4 ** i/e) < 0, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 **
i/e)] - 1/2, -(a4 ** i/e) + 1/2, Round[-(a4 ** i/e)]], If[-(a4 ** i/e) ==  IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2,
-(a4 ** i/e) - 1/2,  Round[-(a4 ** i/e)]]]), {i, 0, n}];
L2 = Table[ a2 ** (If[(a1 ** i/e) < 0, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e) +
1/2, Round[(a1 ** i/e)]], If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e) - 1/2, Round[(a1
** i/e)]]]) + a1 ** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -(a2 ** i/e) +
1/2, Round[-(a2 ** i/e)]], If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e) - 1/2,
Round[-(a2 ** i/e)]]]) - a4 ** (If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, -
(a3 ** i/e) + 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]],  If[-(a3 ** i/e) ==  IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3 ** i/e)
- 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]]]) + a3 ** (If[-(a4 ** i/e) < 0,  If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] -
1/2, -(a4 ** i/e) + 1/2, Round[-(a4 ** i/e)]], If[-(a4 ** i/e) ==  IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, -(a4
** i/e) - 1/2, Round[-(a4 ** i/e)]]]), {i, 0, n}];
L3 = Table[a3 ** (If[(a1 ** i/e) < 0, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e) +
1/2, Round[(a1 ** i/e)]], If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e) - 1/2, Round[(a1
** i/e)]]]) + a4 ** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -(a2 ** i/e) +
1/2, Round[-(a2 ** i/e)]], If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e) - 1/2,
Round[-(a2 ** i/e)]]]) + a1 ** (If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, -
(a3 ** i/e) + 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]], If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3 ** i/e)
- 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]]]) -  a2 ** (If[-(a4 ** i/e) < 0, If[-(a4 ** i/e) ==  IntegerPart[-(a4 ** i/e)] -
1/2, -(a4 ** i/e) + 1/2, Round[-(a4 ** i/e)]], If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, -(a4
** i/e) - 1/2, Round[-(a4 ** i/e)]]]), {i, 0, n}];
L4 = Table[ a4 ** (If[(a1 ** i/e) < 0,  If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e) +
1/2, Round[(a1 ** i/e)]], If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e) - 1/2, Round[(a1
** i/e)]]]) - a3 ** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -(a2 ** i/e) +
1/2, Round[-(a2 ** i/e)]], If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e) - 1/2,
Round[-(a2 ** i/e)]]]) + a2 ** (If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, -
(a3 ** i/e) + 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]], If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3 ** i/e)
- 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]]]) + a1 ** (If[-(a4 ** i/e) < 0, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] -
1/2, -(a4 ** i/e) + 1/2, Round[-(a4 ** i/e)]], If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, -(a4
** i/e) - 1/2, Round[-(a4 ** i/e)]]]), {i, 0, n}];
H1 = Table[ a1 ** (If[(a1 ** i/e) < 0, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e),
If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)], IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] -
1/2]], If[(a1 ** i/e) == 0, 1/2, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e), If[(a1 **
i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)], IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2]]]]) - a2
** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -(a2 ** i/e), If[-(a2 ** i/e)
== IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a2
** i/e) == 0, 1/2, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e),  If[-(a2 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2]]]]) -  a3 **
(If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, -(a3 ** i/e), If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)], IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a3 **
i/e) == 0, 1/2, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3 ** i/e), If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)], IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2,  IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2]]]]) –
```

Şekil A.1. Her bir bileşeni tamsayı olan Hurwitz tamsayıları üzerinden Hurwitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için kullanılan Mathemtica kodları.

```
a4 ** (If[-(a4 ** i/e) < 0, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e)
== IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a4
** i/e) == 0, 1/2, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2]]]]),{i, 0, n}];
H2 = Table[ a1 ** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -(a2 ** i/e),
If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] -
1/2]], If[-(a2 ** i/e) == 0, 1/2, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e), If[-(a2
** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] +
1/2]]]]) + a2 ** (If[(a1 ** i/e) < 0, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e), If[(a1
** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)], IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2]],
If[(a1 ** i/e) == 0, 1/2, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e), If[(a1 ** i/e) ==
IntegerPart[(a1 ** i/e)], IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2]]]]) + a3 ** (If[-
(a4 ** i/e) < 0, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a4 **
i/e) == 0, 1/2, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2]]]]) - a4 **
(If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, -(a3 ** i/e),  If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)],  IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2,  IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a3 **
i/e) == 0, 1/2, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3 ** i/e), If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)], IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2]]]]),{i, 0, n}];
H3 = Table[ a4 ** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -(a2 ** i/e),
If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] -
1/2]], If[-(a2 ** i/e) == 0, 1/2, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e), If[-(a2
** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] +
1/2]]]]) + a3 ** (If[(a1 ** i/e) < 0, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e), If[(a1
** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)], IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2]],
If[(a1 ** i/e) == 0, 1/2, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e), If[(a1 ** i/e) ==
IntegerPart[(a1 ** i/e)], IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2]]]]) -  a2 ** (If[-
(a4 ** i/e) < 0, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a4 **
i/e) == 0, 1/2, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2]]]]) + a1 **
(If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, -(a3 ** i/e), If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)], IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a3 **
i/e) == 0, 1/2, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3 ** i/e), If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)], IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2]]]]),{i, 0, n}];
H4 = Table[ a4 ** (If[(a1 ** i/e) < 0, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e),
If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)], IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] -
1/2]], If[(a1 ** i/e) == 0, 1/2, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e), If[(a1 **
i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)], IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2]]]]) - a3
** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -(a2 ** i/e), If[-(a2 ** i/e)
== IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a2
** i/e) == 0, 1/2, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e), If[-(a2 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2]]]]) + a1 **
(If[-(a4 ** i/e) < 0, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a4 **
i/e) == 0, 1/2, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2]]]]) + a2 **
(If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, -(a3 ** i/e), If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)], IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a3 **
i/e) == 0, 1/2, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3 ** i/e), If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)], IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2]]]]),{i, 0, n}];
G = Table[0, {e}, 7]; Do[G[[i, 1]] = μ[i - 1]; G[[i, 2]] = (i - 1) - Quaternion[L1[[i]], L2[[i]], L3[[i]],
L4[[i]]]; G[[i, 3]] = Norm[G[[i, 2]]]; G[[i, 4]] = (i - 1) - Quaternion[H1[[i]], H2[[i]], H3[[i]],
H4[[i]]]; G[[i, 5]] = Norm[G[[i, 4]]]; G[[i, 6]] = If[G[[i, 5]] < G[[i, 3]], G[[i, 4]], G[[i, 2]]]; G[[i, 7]]
= Norm[G[[i, 6]]], {i, 1, e}];
```

Şekil A.1. (Devamı) Her bir bileşeni tamsayı olan Hurwitz tamsayıları üzerinden Hurwitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için kullanılan Mathemtica kodları.

```
Minn = Min[Table[Min[G[[i, 7]]], {i, 2, e}]]; Minnalt = Min[Table[Min[G[[i, 7]]], {i, 2, e}]];
Normtoplam = \!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(i = 1\), \(e\)]\(G[\([\)\(i,7\)\(]\)]\)\);
Enerji = N[Normtoplam/e];  EB = N[Enerji/Log2[e]]; CFM = N[(2 ** Minn/Enerji)]; SNR = -
N[10*Log10[CFM]]; BPSK = N[10*Log10[4 EB]]; Print["Hurwitz Kümesi =", G // MatrixForm];
Print["Hurwitz Kümesinin Minimum Normu= ", Minn]; Print["Norm Toplam =", Normtoplam];
Print["Enerji =", Enerji]; Print["Bit Başına Düşen Enerji =", EB]; Print["CFM =", CFM];
Print["SNR Kod Kazancı =", SNR]; Print["BPSK Kod Kazancı =", BPSK];
```

Şekil A.1. (Devamı) Her bir bileşeni tamsayı olan Hurwitz tamsayıları üzerinden Hurwitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için kullanılan Mathemtica kodları

```
Needs["Quaternions`"]
a1=3;a2=1;a3=1;a4=1;
e=Norm[Quaternion[a1/2,a2/2,a3/2,a4/2]];
n=e-1;
L1=Table[(a1/2)**(If[(a1**i/2**e)<0, If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)]-1/2, (a1**i/2**
e)+1/2, Round[(a1**i/2**e)]], If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)]+1/2, (a1**i/2**e)-1/2,
Round[(a1**i/2**e)]]])-(a2/2)**(If[-(a2**i/2**e)<0, If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)]-
1/2,-(a2**i/2**e)+1/2, Round[-(a2**i/2**e)]], If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)]+1/2,
-(a2**i/2**e)-1/2, Round[-(a2**i/2**e)]]])-(a3/2)**(If[-(a3**i/2**e)<0, If[-(a3**i/2**e) ==
IntegerPart[-(a3**i/2**e)]-1/2, -(a3**i/2**e)+1/2, Round[-(a3**i/2**e)]], If[-(a3**i/2**e) ==
IntegerPart[-(a3**i/2**e)]+1/2, -(a3**i/2**e)-1/2, Round[-(a3**i/2**e)]]]) - (a4/2)**(If[-
(a4**i/2**e)<0, If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2, -(a4**i/2**e) + 1/2, Round[-
(a4**i/2**e)]], If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2, -(a4**i/2**e)-1/2, Round[-
(a4**i/2**e)]]]),{i,0,n}];
L2=Table[(a2/2)**(If[(a1**i/2**e)<0, If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)]-1/2, (a1**i/2**
e)+1/2, Round[(a1**i/2**e)]], If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)]+1/2, (a1**i/2**e)-1/2,
Round[(a1**i/2**e)]]])+(a1/2)**(If[-(a2**i/2**e)<0, If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)]
-1/2, -(a2**i/2**e)+1/2, Round[-(a2**i/2**e)]], If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)] +1/2,
-(a2**i/2**e)-1/2, Round[-(a2**i/2**e)]]])-(a4/2)**(If[-(a3**i/2**e)<0, If[-(a3**i/2**e) ==
IntegerPart[-(a3**i/2**e)]-1/2, -(a3**i/2**e)+1/2, Round[-(a3**i/2**e)]], If[-(a3**i/2**e)==
IntegerPart[-(a3**i/2**e)]+1/2, -(a3**i/2**e)-1/2, Round[-(a3**i/2**e)]]])+(a3/2)**(If[-(a4**
i/2**e)<0, If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2, -(a4**i/2**e)+1/2, Round[-(a4**
i/2**e)]], If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2, -(a4**i/2**e)-1/2, Round[-(a4**i/2**
e)]]]),{i,0,n}];
L3=Table[(a3/2)**(If[(a1**i/2**e)<0, If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)]-1/2, (a1**i/2**
e)+1/2, Round[(a1**i/2**e)]], If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)]+1/2, (a1**i/2**e)-1/2,
Round[(a1**i/2**e)]]])+(a4/2)**(If[-(a2**i/2**e)<0, If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**
e)]-1/2, -(a2**i/2**e)+1/2, Round[-(a2**i/2**e)]], If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**
e)]+1/2, -(a2**i/2**e)-1/2, Round[-(a2**i/2**e)]]])+(a1/2)**(If[-(a3**i/2**e)<0, If[-(a3**i/2**
e)==IntegerPart[-(a3**i/2**e)]-1/2, -(a3**i/2**e)+1/2, Round[-(a3**i/2**e)]],If[-(a3**i/2**e) ==
IntegerPart[-(a3**i/2**e)]+1/2, -(a3**i/2**e)-1/2, Round[-(a3**i/2**e)]]])-(a2/2)**(If[-(a4**i/2**
e)<0, If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2, -(a4**i/2**e)+1/2,Round[-(a4**i/2** e)]],
If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2, -(a4**i/2**e)-1/2, Round[-(a4**i/2**e)]]]),
{i,0,n}];
L4=Table[(a4/2)**(If[(a1**i/2**e)<0, If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)]-1/2, (a1**i/2**
e)+1/2, Round[(a1**i/2**e)]], If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)]+1/2, (a1**i/2**e)-1/2,
Round[(a1**i/2**e)]]])-(a3/2)**(If[-(a2**i/2**e)<0, If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)]-
1/2, -(a2**i/2**e)+1/2, Round[-(a2**i/2**e)]], If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)]+1/2,
-(a2**i/2**e)-1/2, Round[-(a2**i/2**e)]]])+(a2/2)**(If[-(a3**i/2**e)<0, If[-(a3**i/2**
e)==IntegerPart[-(a3**i/2**e)]-1/2, -(a3**i/2**e)+1/2, Round[-(a3**i/2**e)]], If[-(a3**i/2**e) ==
IntegerPart[-(a3**i/2**e)]+1/2, -(a3**i/2**e)-1/2, Round[-(a3**i/2**e)]]])+(a1/2)**(If[-(a4** i/2
**e)<0, If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2, -(a4**i/2**e)+1/2, Round[-(a4**i/2**
e)]], If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2, -(a4**i/2**e)-1/2, Round[-(a4**i/2**e
)]]]),{i,0,n}];
```

Şekil A.2. Her bir bileşeni yarım-tamsayı olan Hurwitz tamsayıları üzerinden Hurwitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için kullanılan Mathematica kodları.

```
H1=Table[(a1/2)**(If[(a1**i/2**e)<0, If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)]-1/2, (a1**i/2**
e), If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)], IntegerPart[(a1**i/2**e)]+1/2, IntegerPart[(a1**
i/2**e)]-1/2]], If[(a1**i/2**e)==0,1/2, If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)]+1/2, (a1**i/2**
e), If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)], IntegerPart[(a1**i/2**e)]-1/2, IntegerPart[(a1**i/2
**e)]+1/2]]]])-(a2/2)**(If[-(a2**i/2**e)<0, If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)]-1/2,
-(a2**i/2**e), If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)], IntegerPart[-(a2**i/2**e)] +1/2,
IntegerPart[-(a2**i/2**e)]-1/2]], If[-(a2**i/2**e)==0,1/2, If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2** i/2
**e)]+1/2, -(a2**i/2**e), If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)], IntegerPart[-(a2**i/2**e)]-
1/2, IntegerPart[-(a2**i/2**e)]+1/2]]]])-(a3/2)**(If[-(a3**i/2**e)<0, If[-(a3**i/2**e)==
IntegerPart[-(a3**i/2**e)]-1/2, -(a3**i/2**e), If[-(a3**i/2**e)==IntegerPart[-(a3**i/2**e)],
IntegerPart[-(a3**i/2**e)]+1/2, IntegerPart[-(a3**i/2**e)]-1/2]], If[-(a3**i/2**e)==0,1/2,If[-(a3**
i/2**e)==IntegerPart[-(a3**i/2**e)]+1/2, -(a3**i/2**e), If[-(a3**i/2**e)==IntegerPart[-(a3**i/2
**e)], IntegerPart[-(a3**i/2**e)]-1/2, IntegerPart[-(a3**i/2**e)]+1/2]]]])-(a4/2)**(If[-(a4**i/2**
e)<0, If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2, -(a4**i/2**e), If[-(a4**i/2**e)==
IntegerPart[-(a4**i/2**e)], IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2, IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2]], If[-
(a4**i/2**e)==0,1/2, If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2, -(a4**i/2**e),If[-(a4**i/2
**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)], IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2, IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2
]]]]),{i,0,n}];
H2=Table[(a1/2)**(If[-(a2**i/2**e)<0, If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)]-1/2, -(a2**
i/2**e), If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)], IntegerPart[-(a2**i/2**e)]+1/2,IntegerPart[-
(a2**i/2**e)]-1/2]], If[-(a2**i/2**e)==0, 1/2, If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)]+1/2,
-(a2**i/2**e), If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)], IntegerPart[-(a2**i/2**e)]-1/2,
IntegerPart[-(a2**i/2**e)]+1/2]]]])+ (a2/2)**(If[(a1**i/2**e)<0, If[(a1**i/2**e) ==
IntegerPart[(a1**i/2**e)]-1/2,(a1**i/2**e), If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)],
IntegerPart[(a1**i/2**e)]+1/2, IntegerPart[(a1**i/2**e)]-1/2]], If[(a1**i/2**e)==0,1/2, If[(a1**
i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)]+1/2, (a1**i/2**e), If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)],
IntegerPart[(a1**i/2**e)]-1/2, IntegerPart[(a1**i/2**e)]+1/2]]]])+(a3/2)**(If[-(a4**i/2**e)<0, If[-
(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2, -(a4**i/2**e), If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-
(a4**i/2**e)], IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2, IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2]], If[-(a4**i/2**e)==
0, 1/2, If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2, -(a4**i/2**e), If[-(a4**i/2**e)==
IntegerPart[-(a4**i/2**e)], IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2, IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2]]]])-
(a4/2)**(If[-(a3**i/2**e)<0, If[-(a3**i/2**e)==IntegerPart[-(a3**i/2**e)]-1/2, -(a3**i/2**e), If[-
(a3**i/2**e)==IntegerPart[-(a3**i/2**e)], IntegerPart[-(a3**i/2**e)]+1/2, IntegerPart[-(a3**i/2
**e)]-1/2]], If[-(a3**i/2**e)==0,1/2, If[-(a3**i/2**e)==IntegerPart[-(a3**i/2**e)]+1/2,
-(a3**i/2**e), If[-(a3**i/2**e)==IntegerPart[-(a3**i/2**e)], IntegerPart[-(a3**i/2**e)]-1/2,
IntegerPart[-(a3**i/2**e)]+1/2]]]]),{i,0,n}];
H3=Table[(a4/2)**(If[-(a2**i/2**e)<0, If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)]-1/2, -(a2**
i/2**e), If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)], IntegerPart[-(a2**i/2**e)]+1/2, IntegerPart[-
(a2**i/2**e)]-1/2]], If[-(a2**i/2**e)==0, 1/2, If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)]+1/2,
-(a2**i/2**e), If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)], IntegerPart[-(a2**i/2**e)]-1/2,
IntegerPart[-(a2**i/2**e)]+1/2]]]])+(a3/2)**(If[(a1**i/2**e)<0, If[(a1**i/2**e)== IntegerPart[(a1
**i/2**e)]-1/2, (a1**i/2**e), If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)], IntegerPart[(a1**i/2**
e)]+1/2, IntegerPart[(a1**i/2**e)]-1/2]], If[(a1**i/2**e)==0, 1/2, If[(a1**i/2**e)==
IntegerPart[(a1**i/2**e)]+1/2, (a1**i/2**e), If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)],
IntegerPart[(a1**i/2**e)]-1/2, IntegerPart[(a1**i/2**e)]+1/2]]]])-(a2/2)**(If[-(a4**i/2**e)<0, If[-
(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2, -(a4**i/2**e), If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-
(a4**i/2**e)], IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2, IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2]], If[-(a4**i/2**e)
==0, 1/2, If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2, -(a4**i/2**e), If[-(a4**i/2**e)==
IntegerPart[-(a4**i/2**e)], IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2, IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2]]]]) +
(a1/2)**(If[-(a3**i/2**e)<0, If[-(a3**i/2**e)==IntegerPart[-(a3**i/2**e)]-1/2, -(a3**i/2**e), If[-
(a3**i/2**e)==IntegerPart[-(a3**i/2**e)],IntegerPart[-(a3**i/2**e)]+1/2,IntegerPart[-(a3**i/2**e
)]-1/2]], If[-(a3**i/2**e)==0, 1/2, If[-(a3**i/2**e)==IntegerPart[-(a3**i/2**e)]+1/2,-(a3**i/2**e),
If[-(a3**i/2**e)==IntegerPart[-(a3**i/2**e)], IntegerPart[-(a3**i/2**e)]-1/2, IntegerPart[-(a3**i/2
**e)]+1/2]]]]), {i,0,n}];
```

Şekil A.2. (Devamı) Her bir bileşeni yarım-tamsayı olan Hurwitz tamsayıları üzerinden Hurwitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için kullanılan Mathematica kodları.

```
H4=Table[(a4/2)**(If[(a1**i/2**e)<0,If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)]-1/2, (a1**i/2**
e), If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)], IntegerPart[(a1**i/2**e)]+1/2, IntegerPart[(a1**
i/2**e)]-1/2]], If[(a1**i/2**e)==0, 1/2, If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)]+1/2, (a1**i/2
**e), If[(a1**i/2**e)==IntegerPart[(a1**i/2**e)], IntegerPart[(a1**i/2**e)]-1/2, IntegerPart[(a1**
i/2**e)]+1/2]]]])-(a3/2)**(If[-(a2**i/2**e)<0, If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)]-1/2,
-(a2**i/2**e), If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)], IntegerPart[-(a2**i/2**e)]+1/2,
IntegerPart[-(a2**i/2**e)]-1/2]], If[-(a2**i/2**e)==0,1/2, If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2
**e)]+1/2, -(a2**i/2**e), If[-(a2**i/2**e)==IntegerPart[-(a2**i/2**e)], IntegerPart[-(a2**i/2**e)]-
1/2, IntegerPart[-(a2**i/2**e)]+1/2]]])+(a1/2)**(If[-(a4**i/2**e)<0, If[-(a4**i/2**e)==
IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2, -(a4**i/2**e), If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)],
IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2, IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2]], If[-(a4**i/2**e)==0,1/2, If[-(a4**
i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2, -(a4**i/2**e), If[-(a4**i/2**e)==IntegerPart[-(a4**i/2**
e)], IntegerPart[-(a4**i/2**e)]-1/2, IntegerPart[-(a4**i/2**e)]+1/2]]]])+(a2/2)**(If[-(a3**i/2**e)
<0, If[-(a3**i/2**e)==IntegerPart[-(a3**i/2**e)]-1/2, -(a3**i/2**e), If[-(a3**i/2**e)==
IntegerPart[-(a3**i/2**e)], IntegerPart[-(a3**i/2**e)]+1/2, IntegerPart[-(a3**i/2**e)]-1/2]], If[-
(a3**i/2**e)==0, 1/2, If[-(a3**i/2**e)==IntegerPart[-(a3**i/2**e)]+1/2, -(a3**i/2**e), If[-(a3**
i/2**e)==IntegerPart[-(a3**i/2**e)], IntegerPart[-(a3**i/2**e)]-1/2, IntegerPart[-(a3**i/2**e)]+
1/2]]]]),{i,0,n}];
G=Table[0,{e},7]; Do[G[[i,1]]=μ[i-1]; G[[i,2]]=(i-1)-Quaternion[L1[[i]],L2[[i]],L3[[i]],L4[[i]]];
G[[i,3]]=Norm[G[[i,2]]]; G[[i,4]]=(i-1)-Quaternion[H1[[i]],H2[[i]],H3[[i]],H4[[i]]]; G[[i,5]]=
Norm[G[[i,4]]]; G[[i,6]]=If[G[[i,3]]<G[[i,5]],G[[i,2]],If[G[[i,3]]==G[[i,5]],If[Mod[i-1,2]==0,
G[[i,4]],G[[i,2]]],G[[i,4]]]]; G[[i,7]]=Norm[G[[i,6]]], {i,1,e}];
Minn=Min[Table[Min[G[[i,7]]],{i,2,e}]];  Normtoplam = \!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(i
= 1\), \(e\)]\(G[\([\)\(i,7\)\(]\)]\)\); Enerji=N[Normtoplam/e]; EB=N[Enerji/Log2[e]]; CFM =
N[(2**Minn/Enerji)]; SNR=N[-10*Log[CFM]/Log[10]]; BPSK=N[10*Log[4**EB]/Log[10]];
Print["Lipschitz Kümesi =",G//MatrixForm]; Print["Hurwitz Kümesinin Minimum Normu=
",Minn]; Print["Norm Toplam =", Normtoplam]; Print["Enerji =", Enerji]; Print["Bit Başına Düşen
Enerji =", EB]; Print["CFM =", CFM]; Print["SNR Kod Kazancı =", SNR]; Print["BPSK Kod
Kazancı =", BPSK];
```

Şekil A.2. (Devamı) Her bir bileşeni yarım-tamsayı olan Hurwitz tamsayıları üzerinden Hurwitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için kullanılan Mathematica kodları.

```
Needs["Quaternions`"]
a1=4;a2=3;a3=2;a4=1; (*Genişletilmiş Hurwitz tamsayıların bileşenleri*)
e=Norm[Quaternion[a1,a2,a3,a4]]; n=e-1;
m=13;(*Alt kümelerin sayısı*)
k=(e/m)-1; (*Alt kümelerin eleman sayısı*)
L1 = Table[ a1 ** (If[(a1 ** i/e) < 0, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e) +
1/2, Round[(a1 ** i/e)]], If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e) - 1/2, Round[(a1
** i/e)]]]) - a2 ** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -(a2 ** i/e) +
1/2, Round[-(a2 ** i/e)]], If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e) - 1/2,
Round[-(a2 ** i/e)]]]) - a3 ** (If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, -
(a3 ** i/e) + 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]], If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3 ** i/e)
- 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]]]) - a4 ** (If[-(a4 ** i/e) < 0, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] -
1/2, -(a4 ** i/e) + 1/2, Round[-(a4 ** i/e)]], If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, -(a4
** i/e) - 1/2, Round[-(a4 ** i/e)]]]), {i, 0, n}];
L2 = Table[ a2 ** (If[(a1 ** i/e) < 0, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e) +
1/2, Round[(a1 ** i/e)]], If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e) - 1/2, Round[(a1
** i/e)]]]) + a1 ** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -(a2 ** i/e) +
1/2, Round[-(a2 ** i/e)]], If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e) - 1/2,
Round[-(a2 ** i/e)]]]) - a4 ** (If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, -
(a3 ** i/e) + 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]], If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3 ** i/e)
- 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]]])
```

Şekil A.3. Her bir bileşeni tamsayı olan genişletilmiş Hurwitz tamsayıları üzerinden Hurwitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için kullanılan Mathematica kodları.

```
+ a3 ** (If[-(a4 ** i/e) < 0, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, -(a4 ** i/e) + 1/2,
Round[-(a4 ** i/e)]], If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, -(a4 ** i/e) - 1/2, Round[-(a4
** i/e)]]]), {i, 0, n}];
L3 = Table[ a3 ** (If[(a1 ** i/e) < 0, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e) +
1/2, Round[(a1 ** i/e)]], If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e) - 1/2, Round[(a1
** i/e)]]]) + a4 ** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -(a2 ** i/e) +
1/2, Round[-(a2 ** i/e)]], If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e) - 1/2,
Round[-(a2 ** i/e)]]]) + a1 ** (If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, -
(a3 ** i/e) + 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]], If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3 ** i/e)
- 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]]]) - a2 ** (If[-(a4 ** i/e) < 0, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] -
1/2, -(a4 ** i/e) + 1/2, Round[-(a4 ** i/e)]], If[-(a4 ** i/e) ==  IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, -(a4
** i/e) - 1/2, Round[-(a4 ** i/e)]]]), {i, 0, n}];
L4 = Table[ a4 ** (If[(a1 ** i/e) < 0, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e) +
1/2, Round[(a1 ** i/e)]], If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e) - 1/2, Round[(a1
** i/e)]]]) - a3 ** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -(a2 ** i/e) +
1/2, Round[-(a2 ** i/e)]], If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e) - 1/2,
Round[-(a2 ** i/e)]]]) + a2 ** (If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, -
(a3 ** i/e) + 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]], If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3 ** i/e)
- 1/2, Round[-(a3 ** i/e)]]]) + a1 ** (If[-(a4 ** i/e) < 0, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] -
1/2, -(a4 ** i/e) + 1/2, Round[-(a4 ** i/e)]], If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, -(a4
** i/e) - 1/2, Round[-(a4 ** i/e)]]]), {i, 0, n}];
H1 = Table[ a1 ** (If[(a1 ** i/e) < 0, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e),
If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)], IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] -
1/2]], If[(a1 ** i/e) == 0, 1/2, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e), If[(a1 **
i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)], IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2]]]) - a2
** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -(a2 ** i/e), If[-(a2 ** i/e)
== IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a2
** i/e) == 0, 1/2, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e), If[-(a2 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2]]]) -  a3 **
(If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, -(a3 ** i/e), If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)], IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2]],  If[-(a3 **
i/e) == 0, 1/2, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3 ** i/e), If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)], IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2]]]) - a4 **
(If[-(a4 ** i/e) < 0, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a4 **
i/e) == 0, 1/2, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2]]]), {i, 0,
n}];
H2 = Table[ a1 ** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -(a2 ** i/e),
If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] -
1/2]], If[-(a2 ** i/e) == 0, 1/2, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e), If[-(a2
** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] +
1/2]]]) +a2 ** (If[(a1 ** i/e) < 0, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e), If[(a1
** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)], IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2]],
If[(a1 ** i/e) == 0, 1/2, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e),If[(a1 ** i/e) ==
IntegerPart[(a1 ** i/e)],  IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2]]]) + a3 **
(If[-(a4 ** i/e) < 0, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a4 **
i/e) == 0, 1/2, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2]]]) - a4 **
(If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, -(a3 ** i/e), If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)], IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a3 **
i/e) == 0, 1/2, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3 ** i/e), If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)], IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2]]]), {i, 0,
n}];
```

Şekil A.3. (Devamı) Her bir bileşeni tamsayı olan genişletilmiş Hurwitz tamsayıları üzerinden Hurwitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için kullanılan Mathematica kodları.

```
H3 = Table[ a4 ** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -(a2 ** i/e),
If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] -
1/2]], If[-(a2 ** i/e) == 0, 1/2, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e), If[-(a2
** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] +
1/2]]]]) +a3 ** (If[(a1 ** i/e) < 0, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e), If[(a1
** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)], IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2]],
If[(a1 ** i/e) == 0, 1/2, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e), If[(a1 ** i/e) ==
IntegerPart[(a1 ** i/e)], IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2]]]]) - a2 ** (If[-
(a4 ** i/e) < 0, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a4 **
i/e) == 0, 1/2, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2]]]]) + a1 **
(If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, -(a3 ** i/e), If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)], IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a3 **
i/e) == 0, 1/2, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3 ** i/e), If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)], IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2]]]]), {i, 0,
n}];
H4 = Table[ a4 ** (If[(a1 ** i/e) < 0, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, (a1 ** i/e),
If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)], IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] -
1/2]], If[(a1 ** i/e) == 0, 1/2, If[(a1 ** i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2, (a1 ** i/e), If[(a1 **
i/e) == IntegerPart[(a1 ** i/e)], IntegerPart[(a1 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[(a1 ** i/e)] + 1/2]]]]) - a3
** (If[-(a2 ** i/e) < 0, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, -(a2 ** i/e), If[-(a2 ** i/e)
== IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a2
** i/e) == 0, 1/2, If[-(a2 ** i/e) == IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2, -(a2 ** i/e), If[-(a2 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a2 ** i/e)], IntegerPart[-(a2 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a2 ** i/e)] + 1/2]]]]) + a1 **
(If[-(a4 ** i/e) < 0, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a4 **
i/e) == 0, 1/2, If[-(a4 ** i/e) == IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2, -(a4 ** i/e), If[-(a4 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/e)], IntegerPart[-(a4 ** i/e)] - 1/2,  IntegerPart[-(a4 ** i/e)] + 1/2]]]]) + a2 **
(If[-(a3 ** i/e) < 0, If[-(a3 ** i/e) == IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, -(a3 ** i/e), If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)], IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2]], If[-(a3 **
i/e) == 0, 1/2, If[-(a3 ** i/e) ==  IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2, -(a3 ** i/e), If[-(a3 ** i/e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/e)], IntegerPart[-(a3 ** i/e)] - 1/2, IntegerPart[-(a3 ** i/e)] + 1/2]]]]), {i, 0,
n}];
G = Table[0, {e}, 7]; Do[G[[i, 1]] = μ[i - 1]; G[[i, 2]] = (i - 1) - Quaternion[L1[[i]], L2[[i]], L3[[i]],
L4[[i]]]; G[[i, 3]] = Norm[G[[i, 2]]]; G[[i, 4]] = (i - 1) - Quaternion[H1[[i]], H2[[i]], H3[[i]],
H4[[i]]]; G[[i, 5]] = Norm[G[[i, 4]]]; G[[i, 6]] = If[G[[i, 5]] < G[[i, 3]], G[[i, 4]], G[[i, 2]]]; G[[i, 7]]
= Norm[G[[i, 6]]], {i, 1, e}];
Galt = Table[0, {k + 1}, 7]; Do[Galt[[i, 1]] = μ[m ** (i - 1)]; Galt[[i, 2]] = (m ** (i - 1)) –
Quaternion[L1[[m ** (i - 1) + 1]], L2[[m ** (i - 1) + 1]], L3[[m ** (i - 1) + 1]], L4[[m ** (i - 1) +
1]]]; Galt[[i, 3]] = Norm[Galt[[i, 2]]]; Galt[[i, 4]] = (m ** (i - 1)) - Quaternion[H1[[m ** (i - 1) +
1]], H2[[m ** (i - 1) + 1]], H3[[m ** (i - 1) + 1]], H4[[m ** (i - 1) + 1]]]; Galt[[i, 5]] =
Norm[Galt[[i, 4]]]; Galt[[i, 6]] = If[Galt[[i, 5]] < Galt[[i, 3]], Galt[[i, 4]], Galt[[i, 2]]]; Galt[[i, 7]] =
Norm[Galt[[i, 6]]], {i, 1, k + 1}];
Minn = Min[Table[Min[G[[i, 7]]], {i, 2, e}]]; Minnalt = Min[Table[Min[Galt[[i, 7]]], {i, 2, k +
1}]]; Normtoplam = \!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(i = 1\), \(e\)]\(G[\([\)\(i, 7\)\(]\)]\)\);
Normtoplamalt = \!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(i = 1\), \(k + 1\)]\(Galt[\([\)\(i, 7\)\(]\)]\)\);
Enerji = N[Normtoplam/e]; Enerjialt = N[Normtoplamalt/(k + 1)]; EB = N[Enerji/Log2[e]]; EBalt
= N[Enerjialt/Log2[k + 1]]; CFM = N[(2 ** Minn/Enerji)]; CFMalt = N[(2 ** Minnalt/Enerjialt)];
SNR = N[10 ** Log10[CFM]]; SNRalt = N[10 ** Log10[CFMalt]]; BPSK = N[10 ** Log10[4 **
EB]]; BPSKalt = N[10*Log10[4 ** EBalt]];
Print["----------Geniş Hurwitz Kümesi----------"];
Print["Hurwitz Kümesi =",G//MatrixForm];
Print["Hurwitz Kümesinin Minimum Normu= ", Minn];
Print["Hurwitz Kümesinin Normlarının Toplamı =", Normtoplam];
```

Şekil A.3. (Devamı) Her bir bileşeni tamsayı olan genişletilmiş Hurwitz tamsayıları üzerinden Hurwitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için kullanılan Mathematica kodları.

```
Print["Hurwitz Kümesinin Enerjisi =", Enerji];
Print["Hurwitz Kümesinin Bit Başına Düşen Enerjisi =", EB];
Print["Hurwitz Kümesinin CFM si =", CFM];
Print[" Hurwitz Kümesinin SNR Kod Kazancı =", SNR];
Print["Hurwitz Kümesinin BPSK Kod Kazancı =", BPSK];
Print["----------Geniş Hurwitz Kümesinin Alt Kümesi----------"];
Print["Hurwitz Alt Kümesi =", Galt // MatrixForm];
Print["Hurwitz Alt Kümesinin Minimum Normu= ", Minnalt];
Print["Hurwitz Alt Kümesinin Normlarının Toplamı =", Normtoplamalt];
Print["Hurwitz Alt Kümesinin Enerjisi =", Enerjialt];
Print["Hurwitz Alt Kümesinin Bit Başına Düşen Enerjisi =", EBalt];
Print["Hurwitz Alt Kümesinin CFM si =", CFMalt];
Print["Hurwitz Alt Kümesinin SNR Kod Kazancı =", SNRalt];
Print["Hurwitz Alt Kümesinin BPSK Kod Kazancı =", BPSKalt];
```

Şekil A.3. (Devamı) Her bir bileşeni tamsayı olan genişletilmiş Hurwitz tamsayıları üzerinden Hurwitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için kullanılan Mathematica kodları.

```
Needs["Quaternions`"]
a1=39;a2=25;a3=15;a4=3; (*Genişletilmiş Hurwitz tamsayıların bileşenleri*)
e=Norm[Quaternion[a1/2,a2/2,a3/2,a4/2]]; n=e-1;
m=7; (*Alt kümelerin sayısı*)
k=(e/m)-1; (*Alt kümelerin eleman sayısı*)
L1 = Table[(a1/2) ** (If[(a1 ** i/2 ** e) < 0, If[(a1 ** i/2 ** e) == IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] -
1/2, (a1 ** i/2 ** e) + 1/2, Round[(a1 ** i/2 ** e)]], If[(a1 ** i/2 ** e) == IntegerPart[(a1 ** i/2 **
e)] + 1/2, (a1 ** i/2 ** e) - 1/2, Round[(a1 ** i/2 ** e)]]]) - (a2/2) ** (If[-(a2 ** i/2 ** e) < 0, If[-
(a2 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] - 1/2, -(a2 ** i/2 ** e) + 1/2, Round[-(a2 ** i/2 **
e)]], If[-(a2 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] + 1/2, -(a2 ** i/2 ** e) - 1/2, Round[-(a2
** i/2 ** e)]]]) - (a3/2) ** (If[-(a3 ** i/2 ** e) < 0, If[-(a3 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a3 ** i/2 **
e)] - 1/2, -(a3 ** i/2 ** e) + 1/2, Round[-(a3 ** i/2 ** e)]], If[-(a3 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a3
** i/2 ** e)] + 1/2, -(a3 ** i/2 ** e) - 1/2, Round[-(a3 ** i/2 ** e)]]]) - (a4/2) ** (If[-(a4 ** i/2 **
e) < 0, If[-(a4 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] - 1/2, -(a4 ** i/2 ** e) + 1/2, Round[-(a4
** i/2 ** e)]], If[-(a4 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] + 1/2, -(a4 ** i/2 ** e) - 1/2,
Round[-(a4 ** i/2 ** e)]]]), {i, 0, n}];
L2 = Table[(a2/2) ** (If[(a1 ** i/2 ** e) < 0, If[(a1 ** i/2 ** e) == IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] -
1/2, (a1 ** i/2 ** e) + 1/2, Round[(a1 ** i/2 ** e)]], If[(a1 ** i/2 ** e) == IntegerPart[(a1 ** i/2 **
e)] + 1/2, (a1 ** i/2 ** e) - 1/2, Round[(a1 ** i/2 ** e)]]]) + (a1/2) ** (If[-(a2 ** i/2 ** e) < 0, If[-
(a2 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] - 1/2, -(a2 ** i/2 ** e) + 1/2, Round[-(a2 ** i/2 **
e)]], If[-(a2 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] + 1/2, -(a2 ** i/2 ** e) - 1/2, Round[-(a2
** i/2 ** e)]]]) - (a4/2) ** (If[-(a3 ** i/2 ** e) < 0, If[-(a3 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a3 ** i/2 **
e)] - 1/2, -(a3 ** i/2 ** e) + 1/2, Round[-(a3 ** i/2 ** e)]], If[-(a3 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a3
** i/2 ** e)] + 1/2, -(a3 ** i/2 ** e) - 1/2, Round[-(a3 ** i/2 ** e)]]]) + (a3/2) ** (If[-(a4 ** i/2 **
e) < 0, If[-(a4 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] - 1/2, -(a4 ** i/2 ** e) + 1/2, Round[-(a4
** i/2 ** e)]], If[-(a4 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] + 1/2, -(a4 ** i/2 ** e) - 1/2,
Round[-(a4 ** i/2 ** e)]]]), {i, 0, n}];
L3 = Table[(a3/2) ** (If[(a1 ** i/2 ** e) < 0, If[(a1 ** i/2 ** e) == IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] -
1/2, (a1 ** i/2 ** e) + 1/2, Round[(a1 ** i/2 ** e)]], If[(a1 ** i/2 ** e) == IntegerPart[(a1 ** i/2 **
e)] + 1/2, (a1 ** i/2 ** e) - 1/2, Round[(a1 ** i/2 ** e)]]]) + (a4/2) ** (If[-(a2 ** i/2 ** e) < 0, If[-
(a2 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] - 1/2, -(a2 ** i/2 ** e) + 1/2, Round[-(a2 ** i/2 **
e)]], If[-(a2 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] + 1/2, -(a2 ** i/2 ** e) - 1/2, Round[-(a2
** i/2 ** e)]]]) + (a1/2) ** (If[-(a3 ** i/2 ** e) < 0, If[-(a3 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a3 ** i/2 **
e)] - 1/2, -(a3 ** i/2 ** e) + 1/2, Round[-(a3 ** i/2 ** e)]], If[-(a3 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a3
** i/2 ** e)] + 1/2, -(a3 ** i/2 ** e) - 1/2, Round[-(a3 ** i/2 ** e)]]]) - (a2/2) ** (If[-(a4 ** i/2 **
e) < 0, If[-(a4 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] - 1/2, -(a4 ** i/2 ** e) + 1/2,
```

Şekil A.4. Her bir bileşeni yarım-tamsayı olan genişletilmiş Hurwitz tamsayıları üzerinden Hurwitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için kullanılan Mathematica kodları.

```
Round[-(a4 ** i/2 ** e)]], If[-(a4 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] + 1/2, -(a4 ** i/2 **
e) - 1/2, Round[-(a4 ** i/2 ** e)]]]), {i, 0, n}];
L4 = Table[(a4/2) ** (If[(a1 ** i/2 ** e) < 0, If[(a1 ** i/2 ** e) == IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] -
1/2, (a1 ** i/2 ** e) + 1/2, Round[(a1 ** i/2 ** e)]], If[(a1 ** i/2 ** e) == IntegerPart[(a1 ** i/2 **
e)] + 1/2, (a1 ** i/2 ** e) - 1/2, Round[(a1 ** i/2 ** e)]]]) - (a3/2) ** (If[-(a2 ** i/2 ** e) < 0, If[-
(a2 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] - 1/2, -(a2 ** i/2 ** e) + 1/2, Round[-(a2 ** i/2 **
e)]], If[-(a2 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] + 1/2, -(a2 ** i/2 ** e) - 1/2, Round[-(a2
** i/2 ** e)]]]) + (a2/2) ** (If[-(a3 ** i/2 ** e) < 0, If[-(a3 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a3 ** i/2 **
e)] - 1/2, -(a3 ** i/2 ** e) + 1/2, Round[-(a3 ** i/2 ** e)]], If[-(a3 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a3
** i/2 ** e)] + 1/2, -(a3 ** i/2 ** e) - 1/2, Round[-(a3 ** i/2 ** e)]]]) + (a1/2) ** (If[-(a4 ** i/2 **
e) < 0, If[-(a4 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] - 1/2, -(a4 ** i/2 ** e) + 1/2, Round[-(a4
** i/2 ** e)]], If[-(a4 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] + 1/2, -(a4 ** i/2 ** e) - 1/2,
Round[-(a4 ** i/2 ** e)]]]), {i, 0, n}];
H1 = Table[(a1/2) ** (If[(a1 ** i/2 ** e) < 0, If[(a1 ** i/2 ** e) == IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] -
1/2, (a1 ** i/2 ** e), IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] - 1/2], If[(a1 ** i/2 ** e) == IntegerPart[(a1 ** i/2
** e)] + 1/2, (a1 ** i/2 ** e), IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] + 1/2]]) - (a2/2) ** (If[-(a2 ** i/2 ** e) <
0, If[-(a2 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] - 1/2, -(a2 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a2 **
i/2 ** e)] - 1/2], If[-(a2 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] + 1/2, -(a2 ** i/2 ** e),
IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] + 1/2]]) - (a3/2) ** (If[-(a3 ** i/2 ** e) < 0, If[-(a3 ** i/2 ** e) ==
IntegerPart[-(a3 ** i/2 ** e)] - 1/2, -(a3 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a3 ** i/2 ** e)] - 1/2], If[-(a3 **
i/2 ** e) == IntegerPart[-(a3 ** i/2 ** e)] + 1/2, -(a3 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a3 ** i/2 ** e)] +
1/2]]) - (a4/2) ** (If[-(a4 ** i/2 ** e) < 0, If[-(a4 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] - 1/2,
-(a4 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] - 1/2], If[-(a4 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a4 ** i/2
** e)] + 1/2, -(a4 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] + 1/2]]), {i, 0, n}];
H2 = Table[(a1/2) ** (If[-(a2 ** i/2 ** e) < 0, If[-(a2 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] -
1/2, -(a2 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] - 1/2], If[-(a2 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a2 **
i/2 ** e)] + 1/2, -(a2 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] + 1/2]]) + (a2/2) ** (If[(a1 ** i/2 **
e) < 0, If[(a1 ** i/2 ** e) == IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] - 1/2, (a1 ** i/2 ** e), IntegerPart[(a1 **
i/2 ** e)] - 1/2], If[(a1 ** i/2 ** e) == IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] + 1/2, (a1 ** i/2 ** e),
IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] + 1/2]]) + (a3/2) ** (If[-(a4 ** i/2 ** e) < 0, If[-(a4 ** i/2 ** e) ==
IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] - 1/2, -(a4 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] - 1/2], If[-(a4 **
i/2 ** e) == IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] + 1/2, -(a4 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] +
1/2]]) - (a4/2) ** (If[-(a3 ** i/2 ** e) < 0, If[-(a3 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a3 ** i/2 ** e)] - 1/2,
-(a3 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a3 ** i/2 ** e)] - 1/2], If[-(a3 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a3 ** i/2
** e)] + 1/2, -(a3 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a3 ** i/2 ** e)] + 1/2]]), {i, 0, n}];
H3 = Table[(a1/2) ** (If[-(a3 ** i/2 ** e) < 0, If[-(a3 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a3 ** i/2 ** e)] -
1/2, -(a3 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a3 ** i/2 ** e)] - 1/2], If[-(a3 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a3 **
i/2 ** e)] + 1/2, -(a3 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a3 ** i/2 ** e)] + 1/2]]) - (a2/2) ** (If[-(a4 ** i/2 **
e) < 0, If[-(a4 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] - 1/2, -(a4 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a4
** i/2 ** e)] - 1/2], If[-(a4 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] + 1/2, -(a4 ** i/2 ** e),
IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] + 1/2]]) + (a3/2) ** (If[(a1 ** i/2 ** e) < 0, If[(a1 ** i/2 ** e) ==
IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] - 1/2, (a1 ** i/2 ** e), IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] - 1/2], If[(a1 ** i/2
** e) == IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] + 1/2, (a1 ** i/2 ** e), IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] + 1/2]]) +
(a4/2) ** (If[-(a2 ** i/2 ** e) < 0, If[-(a2 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] - 1/2, -(a2 **
i/2 ** e), IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] - 1/2], If[-(a2 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] +
1/2, -(a2 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] + 1/2]]), {i, 0, n}];
H4 = Table[(a1/2) ** (If[-(a4 ** i/2 ** e) < 0, If[-(a4 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] -
1/2, -(a4 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] - 1/2], If[-(a4 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a4 **
i/2 ** e)] + 1/2, -(a4 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a4 ** i/2 ** e)] + 1/2]]) + (a2/2) ** (If[-(a3 ** i/2
** e) < 0, If[-(a3 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a3 ** i/2 ** e)] - 1/2, -(a3 ** i/2 ** e), IntegerPart[-
(a3 ** i/2 ** e)] - 1/2], If[-(a3 ** i/2 ** e) == IntegerPart[-(a3 ** i/2 ** e)] + 1/2, -(a3 ** i/2 ** e),
IntegerPart[-(a3 ** i/2 ** e)] + 1/2]]) - (a3/2) ** (If[-(a2 ** i/2 ** e) < 0, If[-(a2 ** i/2 ** e) ==
IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] - 1/2, -(a2 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] - 1/2], If[-(a2 **
i/2 ** e) == IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] + 1/2, -(a2 ** i/2 ** e), IntegerPart[-(a2 ** i/2 ** e)] +
1/2]]) + (a4/2) ** (If[(a1 ** i/2 ** e) < 0, If[(a1 ** i/2 ** e) == IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] - 1/2,
(a1 ** i/2 ** e),
```

Şekil A.4. (Devamı) Her bir bileşeni yarım-tamsayı olan genişletilmiş Hurwitz tamsayıları üzerinden Hurwitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için kullanılan Mathematica kodları.

```
IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] - 1/2], If[(a1 ** i/2 ** e) == IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] + 1/2, (a1 **
i/2 ** e), IntegerPart[(a1 ** i/2 ** e)] + 1/2]]), {i, 0, n}];
G = Table[0, {e}, 7]; Do[G[[i, 1]] = μ[i - 1]; G[[i, 2]] = (i - 1) - Quaternion[L1[[i]], L2[[i]], L3[[i]],
L4[[i]]]; G[[i, 3]] = Norm[G[[i, 2]]]; G[[i, 4]] = (i - 1) - Quaternion[H1[[i]], H2[[i]], H3[[i]],
H4[[i]]]; G[[i, 5]] = Norm[G[[i, 4]]]; G[[i, 6]] =  If[G[[i, 3]] < G[[i, 5]], G[[i, 2]],  If[G[[i, 3]] ==
G[[i, 5]], If[Mod[i - 1, 2] == 0, G[[i, 4]], G[[i, 2]]], G[[i, 4]]]]; G[[i, 7]] = Norm[G[[i, 6]]],{i, 1, e}];
Galt = Table[0, {k + 1}, 7]; Do[Galt[[i, 1]] = μ[m ** (i - 1)]; Galt[[i, 2]] = (m ** (i - 1)) –
Quaternion[L1[[m ** (i - 1) + 1]], L2[[m ** (i - 1) + 1]], L3[[m ** (i - 1) + 1]], L4[[m ** (i - 1) +
1]]]; Galt[[i, 3]] = Norm[Galt[[i, 2]]]; Galt[[i, 4]] = (m ** (i - 1)) - Quaternion[H1[[m ** (i - 1) +
1]], H2[[m ** (i - 1) + 1]], H3[[m ** (i - 1) + 1]], H4[[m ** (i - 1) + 1]]]; Galt[[i, 5]] =
Norm[Galt[[i, 4]]]; Galt[[i, 6]] = If[Galt[[i, 3]] < Galt[[i, 5]], Galt[[i, 2]], If[Galt[[i, 3]] == Galt[[i,
5]], If[Mod[i - 1, 2] == 0, Galt[[i, 4]], Galt[[i, 2]]], Galt[[i, 4]]]]; Galt[[i, 7]] = Norm[Galt[[i, 6]]],
{i, 1, k + 1}];
Minn = Min[Table[Min[G[[i, 7]]], {i, 2, e}]]; Minnalt = Min[Table[Min[Galt[[i, 7]]], {i, 2, k +
1}]]; Normtoplam = \!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(i = 1\), \(e\)]\(G[\([\)\(i,7\)\(]\)]\)\);
Normtoplamalt = \!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(i = 1\), \(k + 1\)]\(Galt[\([\)\(i, 7\)\(]\)]\)\);
Enerji = N[Normtoplam/e]; Enerjialt = N[Normtoplamalt/(k + 1)]; EB = N[Enerji/Log2[e]]; EBalt
= N[Enerjialt/Log2[k + 1]]; CFM = N[(2 ** Minn/Enerji)]; CFMalt = N[(2 ** Minnalt/Enerjialt)];
SNR = N[10 ** Log10[CFM]]; SNRalt = N[10 ** Log10[CFMalt]]; BPSK = N[10 ** Log10[4 **
EB]]; BPSKalt = N[10*Log10[4 ** EBalt]];
Print["----------------------------------------Geniş Hurwitz Kümesi----------------------------------------"];
Print["Hurwitz Kümesi =",G//MatrixForm];
Print["Hurwitz Kümesinin Minimum Normu= ", Minn];
Print["Hurwitz Kümesinin Normlarının Toplamı =", Normtoplam];
Print["Hurwitz Kümesinin Enerjisi =", Enerji];
Print["Hurwitz Kümesinin Bit Başına Düşen Enerjisi =", EB];
Print["Hurwitz Kümesinin CFM si =", CFM];
Print[" Hurwitz Kümesinin SNR Kod Kazancı =", SNR];
Print["Hurwitz Kümesinin BPSK Kod Kazancı =", BPSK];
Print["----------------------------------------Geniş Hurwitz Kümesinin Alt Kümesi----------------------"];
Print["Hurwitz Alt Kümesi =", Galt // MatrixForm];
Print["Hurwitz Alt Kümesinin Minimum Normu= ", Minnalt];
Print["Hurwitz Alt Kümesinin Normlarının Toplamı =", Normtoplamalt];
Print["Hurwitz Alt Kümesinin Enerjisi =", Enerjialt];
Print["Hurwitz Alt Kümesinin Bit Başına Düşen Enerjisi =", EBalt];
Print["Hurwitz Alt Kümesinin CFM si =", CFMalt];
Print["Hurwitz Alt Kümesinin SNR Kod Kazancı =", SNRalt];
Print["Hurwitz Alt Kümesinin BPSK Kod Kazancı =", BPSKalt];
```

Şekil A.4. (Devamı) Her bir bileşeni yarım-tamsayı olan genişletilmiş Hurwitz tamsayıları üzerinden Hurwitz sinyal yıldızkümelerini elde etmek için kullanılan Mathematica kodları.

EK B

```
clc;clear all;
x=[0:2.5:20];
y=db2mag(x);
Es=2.1539;
Es1=4.3077;
Es2=1.8462;
Es3=2.0882;
for i=1:size(y,2);
No(i)=Es/y(i);EbNodb(i)=20*log10(Es/No(i));EbNo(i)=(Es/No(i));
No1(i)=Es1/y(i);EbNodb1(i)=20*log10(Es1/No1(i));EbNo1(i)=(Es1/No1(i));
No2(i)=Es2/y(i);EbNodb2(i)=20*log10(Es2/No2(i));EbNo2(i)=(Es2/No2(i));
No3(i)=Es3/y(i);EbNodb3(i)=20*log10(Es3/No3(i));EbNo3(i)=(Es3/No3(i));
end
for i=1:size(y,2)
Ps(i)=qfunc(sqrt(2*Es/No(i)));
Ps1(i)=qfunc(sqrt(2*Es1/No(i)));
Ps2(i)=qfunc(sqrt(2*Es2/No(i)));
Ps3(i)=qfunc(sqrt(2*Es3/No(i)));
end
semilogy(EbNodb,Ps,'--');
hold on; grid on
semilogy(EbNodb1,Ps1, ':');
semilogy(EbNodb2,Ps2);
semilogy(EbNodb3,Ps3);
legend('Gauss', 'Lipschitz', 'Hurwitz','c4-13');
xlabel('SGO');ylabel('SHO');
```

Şekil B.1.Şekil 5.12 için Matlab kodları.

```
clc;clear all;
x=[0:2.5:20];
y=db2mag(x);
Es=12.9231;
Es1=8.3077;
for i=1:size(y,2);
No(i)=Es/y(i);
EbNodb(i)=20*log10(Es/No(i));
EbNo(i)=(Es/No(i));
No1(i)=Es1/y(i);
EbNodb1(i)=20*log10(Es1/No1(i));
EbNo1(i)=(Es1/No1(i));
end
for i=1:size(y,2)
Ps(i)=qfunc(sqrt(2*Es/No(i)));
Ps1(i)=qfunc(sqrt(2*Es1/No(i)));
end
semilogy(EbNodb,Ps,'--');
hold on; grid on
semilogy(EbNodb1,Ps1, ':');
legend('Genişletilmiş Lipschitz', 'Genişletilmiş Hurwitz');
xlabel('SGO');ylabel('SHO');
```

Şekil B.2.Şekil 5.13 için Matlab kodları.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Ramazan DURAN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** **:** 2012, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik
- **Yüksek Lisans** **:** 2016, Sakarya Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- Nisan 2019'dan beri Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim dalında araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Duran, R. & Güzeltepe, M. (2023). An Algebraic Construction Technique for Codes over Hurwitz Integers. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* 52(3), 652-672. https://doi.org/10.15672/hujms.1137425.
- Duran, R. & Güzeltepe, M. (2023). Encoder Lipschitz Integers: The Lipschitz Integers that Have the "Division with Small Remainder" Property. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2,* https://doi.org/10.1007/s12215-023-00996-z.
- Duran, R. (2023). Encoder Hurwitz Integers: The Hurwitz Integers that Have the "Division with Small Remainder" Property. *Sakarya University Journal of Science,* 27(4), 792-812. https://doi.org/10.16984/saufenbilder.1248060.