



T.C.

**YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA YENİ AÇIK VE KAPALI
KÜME TANIMLARI**

SARE ÇAKIR KARTAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Doç. Dr. HÜRMET FULYA AKIZ

HAZİRAN – 2024

YOZGAT

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA YENİ AÇIK VE KAPALI
KÜME TANIMLARI

SARE ÇAKIR KARTAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Doç. Dr. HÜRMET FULYA AKIZ

HAZİRAN – 2024

YOZGAT



YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ONAY FORMU

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı öğrencisi Sare Çakır Kartal'nın hazırladığı “İdeal Topolojik Uzaylarda Yeni Açık ve Kapalı Küme Tanımları” başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince/...../..... günü saat’da yapılmış, tezin onayına oy birliği/oy çokluğu ile karar verilmiştir.

Başkan :.....

Jüri Üyesi :.....

(Danışman)

Jüri Üyesi :.....

Jüri Üyesi :.....

Jüri Üyesi :.....

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu’nun/...../..... tarih vesayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

...../...../.....

Prof. Dr.

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZBEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdığı yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğini beyan ederim.

İmza

Sare ÇAKIR KARTAL

...../...../.....

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, topolojik uzaylarda γ işlemi ile tanımlanmış genelleştirilmiş açık kümeler ve özellikleri, ideal topolojik uzaylara taşınarak incelenmiştir. Ayrıca γ işlemi ile ideal topolojik uzaylarda bazı süreklilik tanımlarına yer verilmiştir.

Bu çalışma Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Üyesi Doç. Dr. Hürmet Fulya Akız yönetiminde yapılarak Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmamı planlama ve oluşturma sürecinde bana her konuda rehberlik eden; desteğini, bilgilerini, değerli zamanını esirgemeyen kıymetli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Hürmet Fulya AKIZ (Yozgat Bozok Üniversitesi) 'a sonsuz teşekkürü borç bilirim.

Sevgi ve destekleriyle her başarımın arkasında olan, sevgili annem ve babam Reyhan-Erol ÇAKIR 'a, tez çalışma sürecinde hiçbir yardımını esirgemeyen ve bana güç veren sevgili eşim Mert KARTAL' a teşekkürlerimi sunarım.

İmza

Sare ÇAKIR KARTAL

...../...../.....

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA YENİ KÜME TANIMLARI

SARE ÇAKIR

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. HÜRMET FULYA AKIZ

Bu tezin ilk bölümü, topolojik uzaylar ve ideal topolojik uzaylardaki açık ve kapalı kümeler hakkında literatür bilgisini içeren giriş kısmından oluşmaktadır. İkinci bölümde, ideal topolojik uzaylar ve bazı genelleştirilmiş kümelerin tanımları ve özellikleri açıklanmıştır; bu bilgiler ileriki bölümlerde kullanılacaktır. Üçüncü bölümde, γ işlemiyle oluşturulan γ - β -açık ve γ - β -kapalı kümelerin özellikleri ve γ - β -süreklilik fonksiyonları ele alınmıştır. Dördüncü bölüm, γ işlemiyle tanımlanan γ - β -açık kümelerin ideal topolojik uzaylara aktarılmasını içeren özgün bir çalışmadır.

2024, xi +32 Sayfa

Anahtar Kelimeler: İdeal Topolojik Uzaylar, γ - β -I açık kümeler, γ - β -I süreklilik.

ABSTRACT

MASTER THESIS

NEW DEFINITIONS OF OPEN SETS IN IDEAL TOPOLOGICAL SPACES

SARE ÇAKIR

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL of GRADUATE STUDIES
MATHEMATICS DEPARTMENT

SUPERVISOR: ASSOC. PROF. HÜRMET FULYA AKIZ

The first chapter of this thesis consists of the introduction, which provides a review of the literature on open and closed sets in topological and ideal topological spaces. The second chapter presents the definitions and properties of ideal topological spaces and some generalized sets, which will be utilized in subsequent chapters. The third chapter discusses the properties of γ - β -open and γ - β -closed sets formed using the γ operation, as well as γ - β -continuous functions. The fourth chapter, which is original, transfers the γ - β -open sets defined by the γ operation to ideal topological spaces.

2024, xi + 32 Pages

Keywords: Ideal topological Spaces, γ - β -I open sets, γ - β -I continuity.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ ONAY SAYFASI	ii
TEZ BEYANI.....	iii
ÖN SÖZ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER.....	3
2.1.Topolojik Uzaylarda Temel Bilgiler.....	3
2.2.İdeal Topolojik Uzaylar, Bazı Açık Küme ve Süreklilik Çeşitleri	4
3. γ İŞLEMİ İLE VERİLEN KÜME VE FONKSİYON TANIMLARI.....	7
3.1. γ İşlemi ve Özellikleri.....	7
3.2. γ işlemi ve Kuratowski Kapanış İşlemi.....	10
4. İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA γ - β -I AÇIK KÜME VE FONKSİYON TANIMLARI.....	13
4.1. γ - β -I Kümeler ve Özellikleri.....	13
4.2. γ - β -I Sürekli Fonksiyonlar.....	22
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	27
6. KAYNAKLAR.....	28

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\forall$	: Her
$\in$	: Elemanı
$\notin$	: Elemanı değil
$\Rightarrow$	: Gerek şart
$\Leftarrow$	: Yeter şart
$\emptyset$	: Boş küme
X	: Evrensel Küme
$P(X)$	: Güç Kümesi
$S \cup R$	: R ve S kümelerinin birleşim kümesi
$S \cap R$	: R ve S kümelerinin kesişim kümesi
$S \subseteq R$	: R kümesi S kümesine kapsar ya da eşittir.
$S \not\subseteq R$	: R kümesi S kümesini kapsamaz.
S^c	: S kümesinin tümleyeni
$S - R$	: S fark R
I	: X kümesi üzerinde bir ideal
τ	: Topolojik Yapı
σ	: Topolojik yapı
(X, τ)	: X kümesi üzerinde bir topolojik uzay
$G_{(x)}$	: (X, τ) topolojik uzayında x in açık komşuluklarının ailesi
γ	: Gamma işlemi
$\Gamma(X)$	: X kümesi üzerinde γ işlemlerinin kümesi

(X, τ, I)	: X kümesi üzerinde ideal topolojik uzay
$int(S)$	: S kümesinin içi
$cl(S)$	: S kümesinin kapanışı
S^*	: S kümesinin lokal fonksiyonu
$cl^*(S)$	: S kümesinin Kuratowski kapanışı
S_γ	: S kümesinin γ işlemi altındaki görüntüsü
$cl_\gamma(S)$	: S kümesinin γ -kapanışı
$int_\gamma(S)$	: S kümesinin γ -içi
S_γ^*	: S kümesinin γ -lokal fonksiyonu
$\beta int_\gamma(S)$	: S kümesinin γ - β içi
$\beta cl_\gamma(S)$	: S kümesinin γ - β kapanışı
$\beta I int_\gamma(X)$	: S kümesinin γ - β - I içi
$\beta I cl_\gamma(X)$	: S kümesinin γ - β - I kapanışı
$\beta IO_\gamma(X)$	: (X, τ) topolojik uzayında γ - β - I açık kümelerin ailesi
$\beta IC_\gamma(X)$	: (X, τ) topolojik uzayında γ - β - I kapalı kümelerin ailesi

1.GİRİŞ

Levine (Levine, 1963) tarafından semi-açık kümeler kavramı tanımlanmıştır. Bu kavram, klasik topolojideki çeşitli tanımları genelleştirerek farklı anlamlarda genişletilmiş ve kullanılmıştır. Daha sonra topolojik uzaylarda pek çok yeni açık küme kavramı yapılmıştır. Örneğin (Abd El-Monsef vd,1983) β -açık küme kavramını tanıtmıştır. Daha sonra genelleştirilmiş β -açık kümeler (Tong, 2006) da verilmiştir. β -açık kümelerin tanımlanması, topolojik uzaylardaki bazı tanımların bu kavram yardımıyla yeniden incelenmesine yardımcı olmuştur (Tahiliani, 2011; Kannan vd, 2012; Akdağ vd, 2014).

Kasahara (Kasahara, 1979) tarafından τ kümesinden X 'in güç kümesine bir fonksiyon olarak tanımlanan $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi, her $V \in \tau$ için V 'nin $\gamma(V)$ içinde yer aldığı şeklinde tanımlanır. Burada $\gamma(V)$ V 'nin γ işlemindeki değerini ifade eder ve bu kümeler γ -açık kümeler olarak adlandırılır. Ayrıca, her $x \in V$ için, $x \in V$ ve $\gamma(U) \subseteq V$ koşulunu sağlayan bir açık küme U varsa, V bir γ -açık küme olarak adlandırılır. Bir kümenin γ -içi (Jankovic, 1983) de ve bir kümenin γ -kapalı hali (Ogata, 1991) de tanımlanmıştır. X ' in bir alt kümesi A için, $cl_\gamma(A) \subseteq A$ ise, A bir γ -kapalı küme olarak adlandırılır. Burada $cl_\gamma(A)$, A 'yı içeren en küçük γ -kapalı kümedir. γ -işleminin temel kavramları ve özellikleri (Rehman, 1992; Ahmad vd, 2003) da verilmiştir. γ -semi-açık kümeler (Hussain vd, 2010; Ahmad vd, 2005) de tanıtılmıştır. A 'nın içinde bulunan en büyük γ -semi-açık küme A 'nın γ -semi-içi olarak adlandırılır (Ahmed vd, 2005), (Hussain vd, 2007) da kapalı kümeler başka bir anlamda γ -s-kapalı kümeler olarak incelenmiştir. γ -pre-açık kümeler (Krishnan vd, 2006) da incelenmiş ve γ -b-açık kümeler (Hussain, 2018) de tanıtılmıştır. γ - β - açık kümeler ve özellikleri (Basu vd, 2009) da verilmiştir.

Diğer yandan, bir ideal, X 'in bir topolojik uzayı üzerinde, belirli koşullar altında X 'in alt kümelerinin boş olmayan bir koleksiyonudur ve (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay olarak adlandırılır. Bir A alt kümesi için,

$(.) *: P(X) \rightarrow P(X)$ şeklinde bir yerel fonksiyon (Vaidyanathaswamy,1945) de

$A^*(I, \tau) = \{x \in X : U \cap A \notin I, x \text{ in her } U \text{ komşuluğu için}\}$ olarak tanımlanmıştır.

Bir Kuratowski kapanış operatörü $cl^*(.)$ (Kuratowski, 1966; Hayashi, 1964) da A ve $S^*(I, \tau)$ nın birleşimi olarak tanımlanmıştır. I -açık kümelerin tanımı (Jankovic, 1992) de verilmiştir.

İdeal topolojik uzayları tanıttıktan sonra, topolojik uzaylardaki birçok kavram tanımlanmıştır. (Güler, vd, 2005; Akdağ vd, 2007) 'de b - I -açık kümeler, topolojik uzaylardaki b -açık kümelerle ilgili olarak tanımlanmıştır (Andrevic, 1996). Benzer şekilde β -açık kümeler de ideal topolojik uzaylarda çalışılmıştır (Bukhatwa, 2020). İdeal topolojik uzaylarda, pre- I -açık kümeler, semi- I -açık kümeler ve b -açık kümeler (Ekici, 2012) de verilmiştir. γ -işlemi kullanılarak, pre- γ - I -açık kümeler (İbrahim, 2013)'de tanımlanmıştır. Bir pre- γ - I -açık küme, $A \subseteq \text{int}_{\gamma}(\text{cl}^*(A))$ koşulunu sağlar. Dahası eğer $A \subseteq \text{cl}^*(\text{int}_{\gamma}(A))$ ise A semi- γ - I -açık küme olarak adlandırılır (İbrahim, 2013).

Son zamanlarda, matematikçiler ideal bitopolojik uzayları da incelemişlerdir. Örneğin, ideal bitopolojik uzaylarda γ_{ij} -pre- I -açık ve γ_{ij} - b - I -açık kümeler (Bukhatwa, 2020) de tanımlanmıştır. Ayrıca, ideal topolojik uzaylarda topolojik yapılar yeniden tanımlanmıştır. Bağlantılılık kavramı (Kılınç, 2022) de tanımlanmıştır. γ -işlemi kullanılarak bitopolojik uzaylarda yeni tür kümeler (İlkhani, 2018) de incelenmiştir. Son zamanlarda, ideal topolojik uzaylarda süreklilik tanımları üzerine çalışmalar yapılmıştır (İbrahim vd, 2016; Abd El-Monsef vd, 1992; Keskin vd;2004). Ayrıca, topolojik uzaylardaki yakınsama türleri (Mucuk vd , 2014, Akız vd, 2019) sağlananlar gibi, ideal topolojik uzaylara genelleştirilmiştir (Granados, 2020).

Bu tezde, (Basu, 2009) da verilen γ - β -açık kümeler ideal topolojik uzaylara taşınmıştır. Bu kümeler ile ilgili özellikler incelenmiştir. Daha sonra, süreklilik kavramı, ideal topolojik uzaylarda γ - β -açık kümeler yardımıyla yeniden çalışılmıştır.

2.TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1.Topolojik Uzaylarda Temel Bilgiler

Bu bölümdeki temel tanım ve teoremler Topoloji (Mucuk,2010) kaynağından alınmıştır.

Tanım 2.1.1 (X, τ) bir topolojik uzay , $S \subseteq X$ ve $m \in X$ olsun. Eğer $m \in R \subseteq S$ olacak şekilde bir $R \in \tau$ kümesi varsa, yani S kümesi m nin bir komşuluğu ise m elemanına S nin bir iç noktası denir. S nin tüm iç noktalarının kümesine S nin içi denir ve $int(S)$ ile gösterilir.

Burada dikkat edelim ki bir $S \subseteq X$ alt kümesi açıktır ancak ve ancak $S = int(S)$ dir.

Önerme 2.1.2 Bir (X, τ) topolojik uzayında bir $S \subseteq X$ alt kümesi için

$$int(S) = \bigcup \{R \subseteq S \mid R \in \tau\}$$

dir.

İspat 2.1.2 Eğer $x \in int(S)$ ise Tanım 2.1.1 den $x \in R \subseteq S$ olacak şekilde bir $R \in \tau$ vardır. O halde

$$x \in \bigcup \{R \subseteq S \mid R \in \tau\}$$

dir.

Diğer yandan eğer

$$x \in \bigcup \{R \subseteq S \mid R \in \tau\}$$

ise $x \in R \subseteq S$ olacak şekilde bir $R \in \tau$ bulunduğundan $x \in int(S)$ dir.

O halde $int(S)$, S nin kapsadığı en büyük açık kümedir.

Tanım 2.1.3 Bir (X, τ) topolojik uzayında bir $S \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Eğer S^c açık ise S ye kapalı bir küme denir. S kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye S nin kapanışı denir ve $cl(S)$ ile gösterilir.

Tanım2.1.4 (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere bir $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu ve bir $x_0 \in X$ noktası verilsin.

Eğer $f(x_0)$ ın her bir S açık komşuluğu için $f(M) \subseteq S$ olacak şekilde x_0 ın bir M açık komşuluğu varsa f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X ın her noktasında sürekli ise f ye bir sürekli fonksiyon denir.

Tanımın değili olarak f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında sürekli değildir ancak ve ancak x_0 ın her M açık komşuluğu için $f(M) \not\subseteq S$ olacak şekilde $f(x_0)$ ın bir S açık komşuluğu vardır.

Teorem 2.1.5 (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere bir $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak Y deki her açık kümenin ters görüntüsü de X de açıktır.

Örnek 2.1.5 (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere sabit olan bir $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu süreklidir. Gerçekten f fonksiyonu sabit ise her $x \in X$ için $f(x) = c$ olacak şekilde bir $c \in Y$ vardır.

Eğer S kümesi Y de açık bir küme ise

$$f^{-1}(S) = \begin{cases} X, & c \in S \\ \emptyset, & c \notin S \end{cases}$$

ters görüntüsü X de açıktır.

2.2.İdeal Topolojik Uzaylar, Bazı Açık Küme ve Süreklilik Çeşitleri

İdeal tanımından önce topolojik uzaylarda tanımlanmış bazı küme çeşitleri aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.2.1 (X, τ) topolojik uzayı ve $S \subseteq X$ olmak üzere S kümesi için;

1. $S \subset \text{int}(cl(\text{int}(S)))$ ise S kümesine α -açık küme (Njastad, 1965) denir.
2. $S \subset cl(\text{int}(S))$ ise S kümesine semi açık küme (Levine, 1963) denir.
3. $S \subset \text{int}(cl(S))$ ise S kümesine pre-açık küme (Mashhour vd., 1982) denir.
4. $S \subset cl(\text{int}(cl(S)))$ ise S kümesine β -açık küme (Abd El-Monsef vd., 1983) denir.
5. $S \subset \text{int}(cl(S)) \cup cl(\text{int}(S))$ ise S kümesine b-açık küme (Andrejevic, 1996) denir.

Tanım 2.2.2 $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü, X de β -açık küme ise f fonksiyonuna β -süreklilik fonksiyon (Tong, 1989) denir.

Tanım 2.2.3 X boştan farklı bir küme ve $P(X)$, X ın güç kümesi olmak üzere; boş olmayan bir $I \subset P(X)$ ailesi, eğer

a) $M \in I$ ve $N \subset M$ iken, $N \in I$ (kalıtımsallık özelliği)

b) $M, N \in I$ iken $M \cup N \in I$ (sonlu toplamsallık özelliği)

şartlarını sağlıyorsa; bu durumda I ailesine X kümesi üzerinde bir idealdir denir (Kuratowski,1933; Kuratowski, 1966)

Tanım 2.2.4 (X, τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde tanımlı I ideali verilsin. I ideali ile birlikte (X, τ) topolojik uzayına, ideal topolojik uzay (Jankovic ve Hamlett, 1993) denir ve (X, τ, I) şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.5 (X, τ) topolojik uzay, $S \subset X$ kümesi verilsin ve I ailesi, X kümesi üzerinde bir ideal olsun.

$S^*(I, \tau) = \{x \in X \mid \forall R \in G_{(x)} \text{ için, } (R \cap S) \notin I\}$ kümesine S kümesinin I ideali ve τ topolojisine bağlı lokal fonksiyonu denir (Jankovic ve Hamlett,1990).

Bu çalışmada kısaca $S^*(I, \tau)$ yerine S^* gösterimi kullanılacaktır.

Örnek 2.2.5 $X = \{1,2,3\}$ kümesi, $\tau = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{3\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$ ideali verilsin. $S = \{1,2\}$ kümesi için $S^* = \{1,2\}$ dir. Gerçekten 1 ve 2 nin tüm açık komşuluklarının S kümesiyle kesişimleri idealin elemanı değildir.

Önerme 2.2.6 (X, τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde tanımlı I ideali verilsin. $S, R \subset X$ kümeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır (Kuratowski,1933).

1. $S \subset R$ ise $S^* \subset R^*$
2. $(S^*)^* \subset S^*$
3. $(S \cup R)^* = S^* \cup R^*$
4. $(S \cap R)^* \subset S^* \cap R^*$
5. $S^* = cl(S^*) \subset cl(S)$

Tanım 2.2.7 (X, τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde tanımlı I ideali verilsin. $S \subset X$ kümesi için $cl^*(S) = S \cup S^*$ şeklinde tanımlanan $cl^*: P(X) \rightarrow P(X)$ operatörü

1. $cl^*(\emptyset) = \emptyset$
2. $S \in P(X) \Rightarrow S \subset cl^*(S)$
3. $S, R \in P(X) \Rightarrow cl^*(S \cup R) = cl^*(S) \cup cl^*(R)$

$$4. S \in P(X) \Rightarrow cl^*(cl^*(S)) = cl^*(S)$$

şartlarını sağlar ve cl^* işlemine Kuratowski kapanış işlemi denir(Kuratowski,1933).

S kümesinin $*$ –kapanışı $cl^*(S)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.8 (X, τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde tanımlı I ideali verilsin. Eğer S kümesi $S \subseteq int(S^*)$ şartını sağlıyorsa S kümesine I -açık küme denir(Abd El-Monsef,1992).

Örnek 2.2.8 $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi ve $\tau = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ topolojisi üzerinde tanımlı $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideali verilsin. Burada $\{b, c, d\}$ I -açık kümedir.

Tanım 2.2.9 (X, τ, I) ideal topolojik uzayının $S \subset X$ kümesi verilsin; $S \subset cl(int(cl^*(S)))$ ise β - I -açık kümedir (Hatir ve Noiri, 2002).

Örnek 2.2.9 $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi ve $\tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{b\}\}$ ideali ile birlikte (X, τ, I) ideal topolojik uzayı verilsin. $S = \{b\}$ kümesi bir β - I -açık kümedir.

Tanım 2.2.10 $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $S \in \sigma$ kümesi için $f^{-1}(S)$, I -açık oluyor ise f fonksiyonuna I -süreklili fonksiyon (Abd El-Monsef vd., 1992) denir.

Tanım 2.2.11 $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $S \in \sigma$ kümesi için $f^{-1}(S)$, β - I -açık oluyor ise f fonksiyonuna β - I -süreklili fonksiyon (Hatir ve Noiri, 2002) denir.

3. γ İŞLEMİ İLE VERİLEN KÜME VE FONKSİYON TANIMLARI

Bu bölümün ilk kısmında γ işlemi ve bu işlem üzerinde tanımlanmış küme ve fonksiyonlar tanıtılacaktır. İkinci bölümde ise γ işlemi ve Kuratowski kapanış işlemi ilişkilendirilecektir.

3.1. γ İşlemi ve Özellikleri

Tanım 3.1.1 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bir $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi, her $S \in \tau$ için $S \subseteq S_\gamma$ olacak şekilde τ topolojisinden X in güç kümesine bir işlemdir. Burada S_γ , S nin γ işlemi altındaki değerini gösterir. (Kasahara, 1979). X kümesi üzerinde bu işlemlerin kümesi $\Gamma(X)$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.1.2 (X, τ) bir topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $x \in X$ olsun. x in her bir açık R komşuluğu için $R_\gamma \cap S \neq \emptyset$ ise, x elemanına $S \subseteq X$ in bir γ -kapanış noktası denir. S nin γ -kapanış noktaları kümesi, S nin γ -kapanışı olarak adlandırılır ve $cl_\gamma(S)$ ile gösterilir. Eğer $cl_\gamma(S) \subseteq S$ ise, X in S alt kümesine γ -kapalı denir. Bu durumda $cl_\gamma(S)$, S nin her γ -kapalı alt kümesini kapsar (H.Ogata, 1991).

Tanım 3.1.3. (X, τ) bir topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve bir $x \in S \subseteq X$ olsun. $R_\gamma \subseteq S$ olacak şekilde x in açık bir R komşuluğu varsa, x noktasına S nin bir γ -iç noktası denir. S nin bütün γ -iç noktalarının kümesi $int_\gamma(S)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $int_\gamma(S) = \{x \in S \mid x \in R \in \tau, R_\gamma \subseteq S\}$ şeklinde ifade edebiliriz. Böylece $int_\gamma(S) \subseteq S$ dir.

i. S kümesi γ -açıktır ancak ve ancak $int_\gamma(S) = S$ dir.

ii. Eğer $S \subseteq P$ ise, $int_\gamma(S) \subseteq int_\gamma(P)$ ve $cl_\gamma(S) \subseteq cl_\gamma(P)$ dir (Rehman ve Ahmad, 1992).

Önerme 3.1.4 (X, τ) bir topolojik uzay ve $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun. $S, R \subseteq X$ için;

- i. $int_\gamma(int_\gamma(S)) = int_\gamma(S)$
- ii. $int_\gamma(S \cup R) \supseteq int_\gamma(S) \cup int_\gamma(R)$
- iii. $int_\gamma(S \cap R) \subseteq int_\gamma(S) \cap int_\gamma(R)$

özellikleri sağlanır (Rehman ve Ahmad, 1992).

Tanım 3.1.5 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S \subseteq X$ için her $x \in S$ için $x \in R$ ve $R_\gamma \subseteq S$ olacak şekilde bir R açık kümesi varsa S , γ -açık kümedir. S^c , bir γ -açık küme ise S , γ -kapalı kümedir (H.Ogata, 1991).

Tanım 3.1.6 (X, τ) bir topolojik uzay ve $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun. Eğer bir $x \in X$ için $x \in R_\gamma \subseteq S$ olacak şekilde bir γ -açık R kümesi varsa, S ye x in bir γ -komşuluğu ve x elemanına da S nin bir γ -iç noktası denir. Özel olarak S, γ -açık ise S ye x in bir γ -açık komşuluğu denir (Ahmad ve Hussain, 2005).

Tanım 3.1.7 (X, τ) bir topolojik uzay ve $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun. $S \subset X$ için $S \subset cl_\gamma(int_\gamma(cl_\gamma(S)))$ ise S bir γ - β -açık kümedir. S^c, γ - β -açık küme ise S ye γ - β -kapalı denir.

Eğer S, γ - β -kapalı bir küme ise $int_\gamma(cl_\gamma(int_\gamma(S))) \subseteq S$ dir. Ayrıca;

- i) β -açık küme kavramı ile γ - β -açık küme kavramları bağımsızdır.
- ii) γ -açık küme γ - β -açıktır ancak tersi doğru olmak zorunda değildir (C.K. Basu, B. M. U. Afsan and M. K. Ghosh,2009).

Örnek 3.1.7.i $X = \{1,2,3\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{1\}, \{2\}\}$ topolojisi verilsin.

Bir $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(S) = S_\gamma = \begin{cases} \{1\}, & S = \{1\} \\ S \cup \{3\}, & S \neq \{1\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. γ -açık kümeler $\emptyset, X, \{1\}$ dir.

γ -kapalı kümeler $\emptyset, X, \{2,3\}$ dir.

$R = \{2\}$ kümesi için $cl(int(cl(R))) = \{2,3\}$ dir ve R, β -açık kümedir. Diğer yandan,

$$cl_\gamma(int_\gamma(cl_\gamma(R))) = \emptyset \text{ olduğundan } R, \gamma\text{-}\beta\text{-açık küme değildir.}$$

Ayrıca örnekte $S_\gamma = cl_\gamma(S)$ seçilirse $P = \{3\}$ kümesi γ - β -açıktır fakat β -açık değildir.

Örnek 3.1.7.ii $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$ topolojisi verilsin.

$\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(S) = S_\gamma = \begin{cases} S, & S = \{a\}, \\ S \cup \{b\}, & S \neq \{a\}, \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. γ -açık kümeler $X, \emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}$ dir.

$R = \{b, c\}$ için $cl_\gamma \left(int_\gamma \left(cl_\gamma(R) \right) \right) = \{b, c, d\}$ dir ve R , γ - β -açıktır fakat γ -açık değildir.

Tanım 3.1.8 (X, τ) bir topolojik uzay ve $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun. $S \subset X$ için S nin içerdiği tüm γ - β -açık kümelerin birleşimine S nin γ - β -içi denir ve $\beta int_\gamma(S)$ ile gösterilir (C.K. Basu, B. M. U. Afsan and M. K. Ghosh,2009).

Tanım 3.1.9 (X, τ) bir topolojik uzay ve $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun. $S \subset X$ için S yi içeren tüm γ - β -kapalı kümelerin kesişimine S nin γ - β -kapanışı denir ve $\beta cl_\gamma(S)$ ile gösterilir (C.K. Basu, B. M. U. Afsan and M. K. Ghosh,2009).

Teorem 3.1.10 (X, τ) bir topolojik uzay ve $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun. $x \in \beta cl_\gamma(S)$ dir ancak ve ancak x in her γ - β -açık R komşuluğu için $S \cap R \neq \emptyset$ dir (C.K. Basu, B. M. U. Afsan and M. K. Ghosh,2009).

İspat 3.1.10 Kabul edelim ki $x \in \beta cl_\gamma(S)$ ve x in bir R γ - β -açık komşuluğu için $S \cap R = \emptyset$ olsun. R^c γ - β -kapalı bir kümedir ve $S \subset R^c$ dir. Böylece $\beta cl_\gamma(S) \subset R^c$ dir. Bu da $x \notin \beta cl_\gamma(S)$ demektir ki bu bir çelişkidir.

Diğer yandan $x \notin \beta cl_\gamma(S)$ olduğunu kabul edelim. O zaman öyle bir γ - β -kapalı P kümesi vardır ki $S \subset P$ ve $x \notin P$ dir. P^c , γ - β -açık bir kümedir ve x in bir komşuluğudur. Buradan $S \cap P^c = \emptyset$ elde edilir.

Tanım 3.1.11 (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $\gamma \in \Gamma(X)$ olmak üzere $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu eğer her $x \in X$ ve $f(x)$ in her S açık komşuluğu için $f(R) \subseteq S$ olacak şekilde x in en az bir γ -açık R komşuluğu varsa f fonksiyonuna γ -sürekli denir (C.K. Basu, B. M. U. Afsan and M. K. Ghosh,2009).

Tanım 3.1.12 (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $\gamma \in \Gamma(X)$ olmak üzere $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f(x)$ i içeren her açık S kümesi için $f(R) \subseteq S$ olacak şekilde x in en az bir γ - β -açık R komşuluğu varsa f fonksiyonuna γ - β -sürekli denir (C.K. Basu, B. M. U. Afsan and M. K. Ghosh,2009).

3.2. γ İşlemi ve Kuratowski Kapanış İşlemi

Bu bölümdeki tanım ve teoremler (Özcan,2022) kaynağından alınmıştır.

Tanım 3.2.1 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay , $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun. $S \subseteq X$ kümesinin γ fonksiyonu ve I idealine ilişkin γ -lokal fonksiyonu,

$$S_\gamma^*(I, \tau) := \{x \in X : R \cap S \notin I, x \text{ in her } \gamma - R \text{ açık komşuluğu için}\}$$

Bu lokal fonksiyon $S_\gamma^*(I, \tau)$ kısaca S_γ^* olarak ifade edilecektir. Ayrıca bu kapanış operatörü $cl_\gamma^*(.)$, $cl_\gamma^*(S) = S \cup S_\gamma^*$ olarak elde edilir.

Teorem 3.2.2 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay , $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun. $S \subseteq X$ kümesi için $cl_\gamma(S_\gamma^*) \subseteq cl_\gamma(S)$ dir.

İspat 3.2.2 Kabul edelim ki $x \in cl_\gamma(S_\gamma^*)$ olsun. Böylece x in her R γ -komşuluğu için $R \cap S_\gamma^* \neq \emptyset$ dir ve $m \in R \cap S_\gamma^*$ olacak şekilde bir nokta vardır. Yani $m \in S_\gamma^*$ ve m nin her R γ -komşuluğu için $R \cap S \notin I$ dir. $\emptyset \in I$ olduğundan $R \cap S \neq \emptyset$ dir ve $x \in cl_\gamma(S)$ dir. Buradan $cl_\gamma(S_\gamma^*) \subseteq cl_\gamma(S)$ elde edilir.

Teorem 3.2.3 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay , $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S \subseteq X$ olsun. Her γ -açık R kümesi için $R \cap S_\gamma^* \subseteq (R \cap S)_\gamma^*$ dir.

İspat 3.2.3 Kabul edelim ki $x \in R \cap S_\gamma^*$ olsun. Tanım 3.2.1 den x in her P γ -komşuluğu için $P \cap S \notin I$ dir. R bir γ -açık kümedir ve R, x in bir γ -komşuluğudur. Yani $P \cap R, x$ in bir γ -komşuluğudur. $x \in S_\gamma^*$ olduğundan $(P \cap R) \cap S \notin I$ dir. Buradan $x \in (R \cap S)_\gamma^*$ elde edilir. Sonuç olarak $R \cap S_\gamma^* \subseteq (R \cap S)_\gamma^*$ dir.

Teorem 3.2.4 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay , $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanır.

- i. $S \subseteq R \Rightarrow S_\gamma^* \subseteq R_\gamma^*$
- ii. $(S_\gamma^*)_\gamma^* = S_\gamma^*$
- iii. $(S \cup R)_\gamma^* = S_\gamma^* \cup R_\gamma^*$
- iv. $(S \cap R)_\gamma^* = S_\gamma^* \cap R_\gamma^*$

Bu koşulların ispatları Tanım 3.2.1 den elde edilir.

Teorem 3.2.5 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay , $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S, R \subseteq X$ olsun. Kuratowski kapanış operatörü $cl_\gamma^*(.)$ aşağıdaki koşulları sağlar.

- i. $cl_{\gamma}^*(\emptyset) = \emptyset$
- ii. $S \subseteq cl_{\gamma}^*(S)$
- iii. $cl_{\gamma}^*(S \cup R) = cl_{\gamma}^*(S) \cup cl_{\gamma}^*(R)$
- iv. $cl_{\gamma}^*(cl_{\gamma}^*(S)) = cl_{\gamma}^*(S)$

İspat 3.2.5

- i. Tanım 3.2.1 e göre, $cl_{\gamma}^*(\emptyset) = \emptyset \cup \emptyset_{\gamma}^* = \emptyset$.
- ii. Tanım 3.2.1 den direkt elde edilir.
- iii. Tanım 3.2.1 e göre,

$$cl_{\gamma}^*(S \cup R) = (S \cup R) \cup (S \cup R)_{\gamma}^* = (S \cup R) \cup (S_{\gamma}^* \cup R_{\gamma}^*) = (S \cup S_{\gamma}^*) \cup (R \cup R_{\gamma}^*) = cl_{\gamma}^*(S) \cup cl_{\gamma}^*(R)$$

- iv. Tanım 3.2.1 e göre, $cl_{\gamma}^*(S) = S \cup S_{\gamma}^*$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} cl_{\gamma}^*(cl_{\gamma}^*(S)) &= cl_{\gamma}^*(S \cup S_{\gamma}^*) \\ &= (S \cup S_{\gamma}^*) \cup (S \cup S_{\gamma}^*)_{\gamma}^* \\ &= (S \cup S_{\gamma}^*) \cup (S_{\gamma}^* \cup (S_{\gamma}^*)_{\gamma}^*) \\ &= (S \cup S_{\gamma}^*) \cup (S_{\gamma}^* \cup S_{\gamma}^*) \\ &= S \cup S_{\gamma}^* \\ &= cl_{\gamma}^*(S) \end{aligned}$$

Böylece $cl_{\gamma}^*(cl_{\gamma}^*(S)) = cl_{\gamma}^*(S)$ dir.

Tanım 3.2.6 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay , $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S \subseteq X$ olsun. Eğer $S \subseteq int_{\gamma}(S_{\gamma}^*)$ ise S bir γ -I-açık kümedir.

Tanım 3.2.7 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay , $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S \subseteq X$ olsun. Eğer S^c bir γ -I-açık küme ise S bir γ -I-kapalı kümedir.

Tanım 3.2.8 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay , $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S \subseteq X$ olsun.

- i. $R \supseteq S$ olacak şekilde en küçük γ -I-kapalı küme R, S nin γ -I-kapanışıdır. S nin γ -I-kapanışı şöyle de ifade edilir;

$$Icl_{\gamma}(S) := \bigcap \{R | S \subseteq R \text{ ve } R^c \text{ bir } \gamma - I - \text{açık kümedir}\}$$

- ii. $M \subseteq S$ olacak şekilde en büyük γ - I -açık küme M , S nin γ - I -içidir. S nin γ - I -içi şöyle de ifade edilir;

$$Int_{\gamma}(S) := \bigcup \{M | M \subseteq S \text{ ve } M \text{ bir } \gamma - I - \text{açık kümedir}\}$$

Teorem 3.2.9 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay , $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanır.

- i. $S \subseteq Icl_{\gamma}(S)$
- ii. $Int_{\gamma}(S) \subseteq S$
- iii. Eğer S , γ - I -kapalı bir küme ise $Icl_{\gamma}(S) = S$ dir.
- iv. Eğer S , γ - I -açık bir küme ise $Int_{\gamma}(S) = S$ dir.
- v. $Icl_{\gamma}(S^c) = (Int_{\gamma}(S))^c$
- vi. $(Icl_{\gamma}(S))^c = Int_{\gamma}(S^c)$

İspat 3.2.9

- i. İspat Tanım 3.2.8 den elde edilir.
- ii. İspat Tanım 3.2.8 den elde edilir.
- iii. $Icl_{\gamma}(S)$, S yi içeren en küçük γ - I -kapalı küme olduğundan $Icl_{\gamma}(S) = S$ dir.
- iv. $Int_{\gamma}(S)$, S nin içerdiği en büyük γ - I -açık küme olduğundan $Int_{\gamma}(S) = S$ dir.
- v. Teorem 3.2.9 (ii) den $Int_{\gamma}(S) \subseteq S$ dir böylece $S^c \subseteq (Int_{\gamma}(S))^c$ elde edilir. Ayrıca $Int_{\gamma}(S)$ γ - I -açık bir küme olduğundan $(Int_{\gamma}(S))^c$ γ - I -kapalı bir kümedir. Böylece $Icl_{\gamma}((Int_{\gamma}(S))^c) = (Int_{\gamma}(S))^c$ ve $Icl_{\gamma}(S^c) \subseteq (Int_{\gamma}(S))^c$ elde edilir. Diğer taraftan, Teorem 3.2.9 (i) den $S^c \subseteq Icl_{\gamma}(S^c)$ dir. Buradan $(Icl_{\gamma}(S^c))^c \subseteq S$ ve $(Icl_{\gamma}(S^c))^c$ bir $\gamma - I$ -açık kümedir. Böylece $Int_{\gamma}((Icl_{\gamma}(S^c))^c) = (Icl_{\gamma}(S^c))^c$ dir. Yani $(Icl_{\gamma}(S^c))^c \subseteq Int_{\gamma}(S)$ ve $(Int_{\gamma}(S))^c \subseteq Icl_{\gamma}(S^c)$ elde edilir.
- vi. vii. nin ispatına benzer şekilde yapılır.

4.İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA γ - β -I AÇIK KÜME VE FONKSİYON TANIMLARI

Bu bölümde γ fonksiyonu ile verilen bazı açık küme tanımları ve fonksiyon tanımları ideal topolojik uzaylara taşınmıştır. Daha sonra bu kümelerin özellikleri verilmiş ve süreklilik çeşitleri tanımlanmıştır.

4.1. γ - β -I Kümeler ve Özellikleri

Tanım 4.1.1 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay , $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S \subseteq X$ için $S \subseteq cl_\gamma(int_\gamma(cl_\gamma^*(S)))$ ise S kümesine γ - β -I açık kümedir denir. Bütün γ - β -I açık kümeler $\beta IO_\gamma(X)$ ile gösterilecektir.

Tanım 4.1.2 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S \subseteq X$ için $S \supseteq int_\gamma(cl_\gamma(int_\gamma^*(S)))$ ise S ye γ - β -I kapalı kümedir denir. Bütün γ - β -I kapalı kümeler $\beta IC_\gamma(X)$ ile gösterilecektir.

Önerme 4.1.3 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay , $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S \subseteq X$ verilsin. Eğer S, γ - β -I açık küme ise S^c kümesi γ - β -I kapalıdır.

İspat 4.1.3 Kabul edelim ki S, γ - β -I açık olsun. S^c nin γ - β -I kapalı küme olduğunu gösterelim.

S kümesi γ - β -I açık olduğundan $S \subseteq cl_\gamma(int_\gamma(cl_\gamma^*(S)))$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} S^c &\supseteq (cl_\gamma(int_\gamma(cl_\gamma^*(S))))^c = int_\gamma(int_\gamma(cl_\gamma^*(S)))^c = int_\gamma(cl_\gamma((cl_\gamma^*(S))^c)) \\ &= int_\gamma(cl_\gamma((int_\gamma^*(S^c))) \end{aligned}$$

Buradan S^c, γ - β -I kapalı kümedir.

Örnek 4.1.4 $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideali verilsin.

$b \in X$ için bir $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(S) = S_\gamma = \begin{cases} S, & b \in S \\ cl(S), & b \notin S \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. γ -açık kümeler $\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}, \{a, b\}$ dir.

γ -kapalı kümeler $\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}, \{c\}$ dir.

γ - β - I açık kümeler $\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}$ dir.

γ - β - I kapalı kümeler $\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}, \{c\}, \{a\}$ dir.

$S = \{b, c\}$ kümesi için $cl_\gamma(int_\gamma(cl_\gamma^*(S))) = X$ ve $S \subseteq X$ olduğundan S , γ - β - I açık kümedir.

$R = \{a\}$ kümesi için $cl_\gamma(int_\gamma(cl_\gamma^*(R))) = \emptyset$ ve $R \not\subseteq \emptyset$ olduğundan R , γ - β - I açık küme değildir.

Teorem 4.1.5 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ olsun, aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) γ - β - I açık kümelerin keyfi birleşimi de γ - β - I açıktır.

ii) γ - β - I kapalı kümelerin keyfi kesişimleri de γ - β - I kapalıdır.

İspat 4.1.5

(i). $\{S_i \mid i \in J\} \subseteq \beta IO_\gamma(X)$ olsun. Her S_i , γ - β - I açık olduğu için, $S_i \subseteq cl_\gamma(int_\gamma(cl_\gamma^*(S_i)))$ dir.

Buradan,

$$\bigcup_{i \in J} S_i \subseteq \bigcup_{i \in J} cl_\gamma \left(int_\gamma \left(cl_\gamma^*(S_i) \right) \right) = cl_\gamma \left(\bigcup_{i \in J} int_\gamma (cl_\gamma^*(S_i)) \right) \subseteq cl_\gamma \left(int_\gamma \left(\bigcup_{i \in J} (cl_\gamma^*(S_i)) \right) \right)$$

$$\bigcup_{i \in J} S_i \subseteq cl_\gamma \left(int_\gamma (cl_\gamma^* \left(\bigcup_{i \in J} S_i \right)) \right)$$

dir.

(ii). $\{S_i \mid i \in J\} \subseteq \beta IC_\gamma(X)$ olsun. Her S_i γ - β - I kapalı olduğu için,

$S_i \supseteq int_\gamma(cl_\gamma(int_\gamma^*(S_i)))$ dir.

$$\bigcap_{i \in J} S_i \supseteq \bigcap_{i \in J} int_\gamma \left(cl_\gamma \left(int_\gamma^*(S_i) \right) \right) = int_\gamma \left(\bigcap_{i \in J} cl_\gamma \left(int_\gamma^*(S_i) \right) \right) \supseteq int_\gamma \left(cl_\gamma \left(\bigcap_{i \in J} int_\gamma^*(S_i) \right) \right)$$

$$int_\gamma \left(cl_\gamma \left(\bigcap_{i \in J} int_\gamma^*(S_i) \right) \right) = int_\gamma \left(cl_\gamma \left(int_\gamma^* \left(\bigcap_{i \in J} S_i \right) \right) \right)$$

dir.

Teorem 4.1.6 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay , $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i. Eğer S , γ -açık ise γ - β - I açıktır.
- ii. Eğer S , γ - I -açık ise γ - β - I açıktır.
- iii. Eğer S , γ -pre- I -açık ise γ - β - I açıktır.
- iv. Her γ - β - I açık küme γ - β açıktır.

İspat 4.1.6

i. S , γ -açık ise $S \subseteq \text{int}_\gamma(S)$ dir.

$$S \subseteq \text{int}_\gamma(S) \subseteq \text{int}_\gamma(S^* \cup S) \subseteq \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(S^* \cup S)) = \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(S))).$$

Böylece S nin γ - β - I açık olduğu elde edilir.

Ayrıca S , γ - β - I açık ise γ -açık olmak zorunda değildir. Örnek 4.1.4 de görüldüğü üzere, $S = \{b, c\}$ kümesi γ - β - I açıktır ancak γ -açık bir küme değildir.

ii. S , γ - I -açık ise $S \subseteq \text{int}_\gamma(S^*)$ dir.

$$S \subseteq \text{int}_\gamma(S^*) \subseteq \text{int}_\gamma(S^* \cup S) \subseteq \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(S^* \cup S)) = \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(S)))$$

Böylece S nin γ - β - I açık olduğu elde edilir.

Ayrıca S , γ - β - I açık ise γ - I -açık olmak zorunda değildir. Örnek 4.1.4 de görüldüğü üzere, $R = \{a, c\}$ kümesi γ - β - I açıktır ancak γ - I -açık bir küme değildir.

iii. Eğer S , γ -pre- I -açık ise $S \subseteq \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(S))$ dir.

$$S \subseteq \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(S)) \subseteq \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(S))) \text{ dir.}$$

Böylece S nin γ - β - I açık olduğu elde edilir.

Ayrıca S , γ - β - I açık ise γ -pre- I -açık olmak zorunda değildir. Örnek 4.1.4 de görüldüğü üzere $P = \{b, c\}$ kümesi γ - β - I açıktır ancak γ -pre- I -açık bir küme değildir.

iv. Eğer S , γ - β - I açık ise $S \subseteq \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(S)))$ dir.

$$S \subseteq \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(S))) \subseteq \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(S^* \cup S)) \subseteq \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(S) \cup S)) \subseteq \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(S)))$$

dir.

$S \subseteq \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(S)))$ olduğundan S , γ - β açıktır.

Ayrıca S , γ - β açık ise γ - β - I açık olmak zorunda değildir. Örnek 4.1.4 de görüldüğü üzere $S = \{a\}$ kümesi,

$cl_\gamma(int_\gamma(cl_\gamma(S))) = \{a, c\}$ ve $\{a\} \subseteq \{a, c\}$ olduğundan γ - β açıktır. Fakat γ - β - I açık değildir.

Tanım 4.1.7 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S \subseteq X$ olsun. Bu durumda, S kümesinin γ - β - I kapanışı S i içeren tüm γ - β - I kapalı kümelerin kesişimi olarak tanımlanır ve $\beta Icl_\gamma(S) = \cap \{R \mid S \subseteq R \text{ ve } R^c \in \beta IO_\gamma(X)\}$ ile gösterilir.

S kümesinin γ - β - I içi S nin kapsadığı γ - β - I açık kümelerin birleşimidir ve

$\beta Int_\gamma(S) = \cup \{P \mid P \subseteq S, P \in \beta IO_\gamma(X)\}$ ile gösterilir.

Teorem 4.1.8 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i. $\beta Icl_\gamma(\emptyset) = \emptyset$ ve $\beta Int_\gamma(\emptyset) = \emptyset$ dir.
- ii. $\beta Icl_\gamma(S)$, X 'te γ - β - I kapalıdır.
- iii. $\beta Int_\gamma(S)$, X 'te γ - β - I açıktır.
- iv. $S \subseteq \beta Icl_\gamma(S)$.
- v. $\beta Int_\gamma(S) \subseteq S$
- vi. S , γ - β - I açıktır. $\Leftrightarrow S = \beta Int_\gamma(S)$ dir.
- vii. S , γ - β - I kapalıdır. $\Leftrightarrow S = \beta Icl_\gamma(S)$ dir.
- viii. $S \subseteq P$ ise $\beta Icl_\gamma(S) \subseteq \beta Icl_\gamma(P)$ dir.
- ix. $S \subseteq P$ ise $\beta Int_\gamma(S) \subseteq \beta Int_\gamma(P)$ dir.
- x. $\beta Icl_\gamma(\beta Icl_\gamma(S)) = \beta Icl_\gamma(S)$
- xi. $\beta Int_\gamma(\beta Int_\gamma(S)) = \beta Int_\gamma(S)$
- xii. $\beta Icl_\gamma(S) \cup \beta Icl_\gamma(R) \subseteq \beta Icl_\gamma(S \cup R)$
- xiii. $\beta Icl_\gamma(S \cap R) \subseteq \beta Icl_\gamma(S) \cap \beta Icl_\gamma(R)$

İspat 4.1.8

- i. $\emptyset \subseteq cl_\gamma(int_\gamma(cl_\gamma^*(\emptyset)))$ ve $\emptyset \supseteq int_\gamma(cl_\gamma(int_\gamma^*(\emptyset)))$ olduğundan ispat tamamlanır.
- ii. $\beta Icl_\gamma(S) = \cap \{R \mid S \subseteq R \text{ ve } R^c \in \beta IO_\gamma(X)\}$ sınıfı kapalı kümelerin kesişimi olduğundan $\beta Icl_\gamma(S)$, γ - β - I kapalıdır.

- iii. $\beta Int_{\gamma}(S) = \cup \{P \mid P \subseteq S, P \in \beta IO_{\gamma}(X)\}$ sınıfı açık kümelerin birleşimi olduğundan $\beta Int_{\gamma}(S)$, γ - β - I açıktır.
- iv. $\beta Icl_{\gamma}(S)$, S yi içeren tüm γ - β - I kapalı kümelerin kesişimi olarak tanımlanır. Dolayısıyla S yi kapsayan en küçük γ - β - I kapalı küme olduğundan ispat tamamlanır.
- v. $\beta Int_{\gamma}(S)$, S nin kapsadığı γ - β - I açık kümelerin birleşimi olarak tanımlanır. Dolayısıyla S nin içerdiği en büyük γ - β - I açık küme olduğundan ispat tamamlanır.
- vi. $\beta Int_{\gamma}(S) = \cup \{P \mid P \subseteq S, P \in \beta IO_{\gamma}(X)\}$ ve S , γ - β - I açık küme ise $S \in \beta IO_{\gamma}(X)$ ve $S \subseteq S$ olduğundan $S \subseteq \beta Int_{\gamma}(S)$ dir.

Tanımdan $S \supseteq \beta Int_{\gamma}(S)$ olduğu açıktır.

Böylece $S = \beta Int_{\gamma}(S)$ dir.

Diğer yandan $S = \beta Int_{\gamma}(S)$ ise $S \in \beta Int_{\gamma}(S)$ olduğundan S , γ - β - I açık kümedir.

- vii. $\beta Icl_{\gamma}(S) = \cap \{R \mid S \subseteq R \text{ ve } R^c \in \beta IO_{\gamma}(X)\}$ ve S , γ - β - I kapalı küme ise $S^c \in \beta IO_{\gamma}(X)$ ve $S \subseteq S$ olduğundan $S \subseteq \beta Icl_{\gamma}(S)$ dir.

Tanımdan $\beta Icl_{\gamma}(S) \subseteq S$ olduğu açıktır.

Böylece $S = \beta Icl_{\gamma}(S)$ dir.

Diğer yandan $S = \beta Icl_{\gamma}(S)$ ise $S^c \in \beta IO_{\gamma}(X)$ olduğundan S , γ - β - I kapalı kümedir.

- viii. $\beta Icl_{\gamma}(S) = \cap \{R \mid S \subseteq R \text{ ve } R^c \in \beta IO_{\gamma}(X)\}$ ve

$\beta Icl_{\gamma}(P) = \cap \{R \mid P \subseteq R \text{ ve } R^c \in \beta IO_{\gamma}(X)\}$ dir. $S \subseteq P$ ise

$$\bigcap_{R_S \subseteq S} R_S \subseteq \bigcap_{R_P \subseteq P} R_P$$

dir. Böylece $\beta Icl_{\gamma}(S) \subseteq \beta Icl_{\gamma}(P)$ dir.

- ix. $\beta Int_{\gamma}(S) = \cup \{R \mid R \subseteq S, R \in \beta IO_{\gamma}(X)\}$ ve

$$\beta Int_{\gamma}(P) = \cup \{R \mid R \subseteq P, R \in \beta IO_{\gamma}(X)\}$$

dir. $S \subseteq P$ ise $R \subseteq S \subseteq P$ olacak şekilde her R kümesi P 'nin alt kümesidir.

$$\bigcup_{R_S \subseteq S} R_S \subseteq \bigcup_{R_P \subseteq P} R_P$$

dir. Böylece $\beta Int_\gamma(S) \subseteq \beta Int_\gamma(P)$ dir.

x. $\beta Icl_\gamma(S)$ kapalı olduğundan (Teorem 4.1.8 (ii))

$$\beta Icl_\gamma(\beta Icl_\gamma(S)) = \beta Icl_\gamma(S) \text{ dir.}$$

xi. $\beta Int_\gamma(S)$ açık olduğundan (Teorem 4.1.8 (iii))

$$\beta Int_\gamma(\beta Int_\gamma(S)) = \beta Int_\gamma(S) \text{ dir.}$$

xii. $S \subseteq S \cup R$ ve $R \subseteq S \cup R$ olduğundan $\beta Icl_\gamma(S) \subseteq \beta Icl_\gamma(S \cup R)$

ve $\beta Icl_\gamma(R) \subseteq \beta Icl_\gamma(S \cup R)$ dir. Böylece,

$$\beta Icl_\gamma(S) \cup \beta Icl_\gamma(R) \subseteq \beta Icl_\gamma(S \cup R) \text{ elde edilir.}$$

Diğer yandan,

$X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideali verilsin.

$b \in X$ için bir $\gamma: \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(S) = S_\gamma = \begin{cases} S, & b \in S \\ cl(S), & b \notin S \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. γ -açık kümeler $\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}, \{a, b\}$ dir.

γ -kapalı kümeler $\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}, \{c\}$ dir.

γ - β - I açık kümeler $\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}$ dir.

γ - β - I kapalı kümeler $\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}, \{c\}, \{a\}$ dir. Bu örnekte $S = \{b\}$ ve $R = \{a\}$ kümeleri için,

$$\beta Icl_\gamma(S) = \{b\} \text{ ve } \beta Icl_\gamma(R) = \{a\} \text{ iken}$$

$$\beta Icl_\gamma(S \cup R) = \beta Icl_\gamma(\{a, b\}) = X \text{ olduğu görülmektedir.}$$

$$\beta Icl_\gamma(S) \cup \beta Icl_\gamma(R) = \{a, b\} \text{ ve}$$

$$\beta Icl_\gamma(S \cup R) = X \text{ olduğundan}$$

$$\beta Icl_\gamma(S) \cup \beta Icl_\gamma(R) \neq \beta Icl_\gamma(S \cup R) \text{ elde edilir.}$$

xiii. $S \cap R \subseteq S$ ve $S \cap R \subseteq R$ olduğundan $\beta Icl_\gamma(S \cap R) \subseteq \beta Icl_\gamma(S)$ ve

$\beta Icl_\gamma(S \cap R) \subseteq \beta Icl_\gamma(R)$ dir. Böylece,

$\beta Icl_\gamma(S \cap R) \subseteq \beta Icl_\gamma(S) \cap \beta Icl_\gamma(R)$ elde edilir.

Diğer yandan Teorem 4.1.8 (xii) de verilen örnekte, $S=\{a,c\}$ ve $R=\{b,c\}$ kümeleri için,

$\beta Icl_\gamma(S)=\{a,c\}$ ve $\beta Icl_\gamma(R)=X$ iken

$\beta Icl_\gamma(S \cap R) = \beta Icl_\gamma(\{a,c\}) = \{c\}$ olduğu görülmektedir.

$\beta Icl_\gamma(S) \cap \beta Icl_\gamma(R) = \{a,c\}$ ve

$\beta Icl_\gamma(S \cap R) = \{c\}$ olduğundan

$\beta Icl_\gamma(S \cap R) \not\subseteq \beta Icl_\gamma(S) \cap \beta Icl_\gamma(R)$ elde edilir.

Teorem 4.1.9 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i. $\beta Icl_\gamma(S^c) = \left(\beta Int_\gamma(S) \right)^c$

ii. $(\beta Icl_\gamma(S))^c = \beta Int_\gamma(S^c)$

İspat 4.1.9

i. $\beta Int_\gamma(S) \subseteq S$ olduğundan $S^c \subseteq (\beta Int_\gamma(S))^c$ dir.

$\beta Int_\gamma(S)$ γ - β - I açık bir küme olduğundan $(\beta Int_\gamma(S))^c$ kümesi γ - β - I kapalıdır. Böylece,

$\beta Icl_\gamma((\beta Int_\gamma(S))^c) = (\beta Int_\gamma(S))^c$ elde edilir.

$S^c \subseteq (\beta Int_\gamma(S))^c$ olduğundan $\beta Icl_\gamma(S^c) \subseteq (\beta Int_\gamma(S))^c$ dir.

Öte yandan, $S^c \subseteq \beta Icl_\gamma(S^c)$ ve $(\beta Icl_\gamma(S^c))^c \subseteq S$ dir.

$(\beta Icl_\gamma(S^c))^c$ γ - β - I açık bir küme olduğundan $\beta Int_\gamma\left(\left(\beta Icl_\gamma(S^c)\right)^c\right) = (\beta Icl_\gamma(S^c))^c$ dir.

$(\beta Icl_\gamma(S^c))^c \subseteq S$ ve $\beta Int_\gamma\left(\left(\beta Icl_\gamma(S^c)\right)^c\right) \subseteq \beta Int_\gamma(S)$ dir.

$(\beta Icl_\gamma(S^c))^c$ kümesi γ - β - I açık olduğundan $(\beta Icl_\gamma(S^c))^c \subseteq \beta Int_\gamma(S)$ ve

$(\beta Int_\gamma(S))^c \subseteq \beta Icl_\gamma(S^c)$ elde edilir.

Böylece $\beta Icl_\gamma(S^c) = \left(\beta Int_\gamma(S) \right)^c$ dir.

ii. $S \subseteq \beta Icl_\gamma(S)$ olduğundan $(\beta Icl_\gamma(S))^c \subseteq S^c$ dir. $\beta Int_\gamma((\beta Icl_\gamma(S))^c) \subseteq \beta Int_\gamma(S^c)$ dir. $(\beta Icl_\gamma(S))^c$ kümesi γ - β - I açık bir küme olduğundan $\beta Int_\gamma((\beta Icl_\gamma(S))^c) = (\beta Icl_\gamma(S))^c$ dir.

Böylece $(\beta Icl_\gamma(S))^c \subseteq \beta Int_\gamma(S^c)$ elde edilir.

Diğer yandan $\beta Int_\gamma(S^c) \subseteq S^c$ ve $S \subseteq (\beta Int_\gamma(S^c))^c$ dir.

$(\beta Int_\gamma(S^c))^c$ γ - β - I kapalı bir kümedir ve

$\beta Icl_\gamma((\beta Int_\gamma(S^c))^c) = (\beta Int_\gamma(S^c))^c$ dir.

$S \subseteq (\beta Int_\gamma(S^c))^c$ olduğundan $\beta Icl_\gamma(S) \subseteq (\beta Int_\gamma(S^c))^c$ ve

$(\beta Int_\gamma(S^c)) \subseteq (\beta Icl_\gamma(S))^c$ elde edilir. Böylece,

$(\beta Int_\gamma(S^c)) = (\beta Icl_\gamma(S))^c$ elde edilir.

Teorem 4.1.10 (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay , $\gamma \in \Gamma(X)$ ve $S \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i. $\beta Icl_\gamma(S) = S \cup \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(S)))$

ii. $\beta Int_\gamma(S) = S \cap \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(S)))$

İspat 4.1.10

i. $\beta Icl_\gamma(S)$ γ - β - I kapalı kümedir. O halde,

$\beta Icl_\gamma(S) \supseteq \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(\beta Icl_\gamma(S)))$ dir. Buradan

$S \cup \beta Icl_\gamma(S) \supseteq S \cup \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(\beta Icl_\gamma(S)))$ ve

$\beta Icl_\gamma(S) \supseteq S \cup \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(\beta Icl_\gamma(S)))$ yazılabilir.

$\beta Icl_\gamma(S) \supseteq S \cup \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(\beta Icl_\gamma(S))) \supseteq S \cup \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(S)))$ dir.

Diğer taraftan,

$\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(S))) \subseteq S \Leftrightarrow S, \gamma$ - β - I kapalı kümedir.

$S \cup \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(S)))$ nin γ - β - I kapalı küme olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
& \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(S \cup \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(S)))))) \\
& \subseteq \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma \left[\text{int}_\gamma^*(S) \cup \text{int}_\gamma^* \left(\text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma \left(\text{int}_\gamma^*(S) \right) \right) \right) \right]) \\
& \subseteq \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma \left[\text{int}_\gamma^*(S) \cup \text{cl}_\gamma \left(\text{int}_\gamma^*(S) \right) \right]) \subseteq \text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma \left(\text{int}_\gamma^*(S) \right) \right) \right) \\
& = \text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma \left(\text{int}_\gamma^*(S) \right) \right) \subseteq S \cup \text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma \left(\text{int}_\gamma^*(S) \right) \right)
\end{aligned}$$

Böylece, $S \cup \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(S)))$ γ - β - I kapalı kümedir ve

$$\beta I \text{cl}_\gamma(S \cup \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(S)))) = S \cup \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(S))) \text{ dir.}$$

$$\beta I \text{cl}_\gamma(S) \subseteq S \cup \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(S))) \text{ elde edilir.}$$

Sonuç olarak $\beta I \text{cl}_\gamma(S) = S \cup \text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma^*(S)))$ olduğu görülür.

ii. $\beta I \text{int}_\gamma(S)$ γ - β - I açık bir kümedir. O halde

$$\beta I \text{int}_\gamma(S) \subseteq \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(\beta I \text{int}_\gamma(S)))) \text{ ve } \beta I \text{int}_\gamma(S) \subseteq S \text{ olduğundan}$$

$$\beta I \text{int}_\gamma(S) \subseteq S \cap \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(\beta I \text{int}_\gamma(S)))) \subseteq S \cap \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(S))) \text{ dir.}$$

Diğer taraftan,

$\text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(S))) \supseteq S \Leftrightarrow S, \gamma$ - β - I açık kümedir. $S \cap \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(\beta I \text{int}_\gamma(S))))$ kümesinin γ - β - I açık bir küme olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
& \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(S \cap \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(\beta I \text{int}_\gamma(S)))))) \\
& \supseteq \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma \left[\text{cl}_\gamma^*(S) \cap \text{cl}_\gamma^* \left(\text{cl}_\gamma \left(\text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(S) \right) \right) \right) \right]) \\
& \supseteq \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma \left[\text{cl}_\gamma^*(S) \cap \left(\text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(S) \right) \right) \right]) \\
& = \text{cl}_\gamma \left(\text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(S) \right) \right) \supseteq S \cap \text{cl}_\gamma \left(\text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(S) \right) \right)
\end{aligned}$$

Böylece $S \cap \text{cl}_\gamma(\text{int}_\gamma(\text{cl}_\gamma^*(\beta I \text{int}_\gamma(S))))$ γ - β - I açık bir kümedir ve,

$$\beta I \text{int}_\gamma \left(S \cap \text{cl}_\gamma \left(\text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(S) \right) \right) \right) = S \cap \text{cl}_\gamma \left(\text{int}_\gamma \left(\text{cl}_\gamma^*(S) \right) \right) \text{ dir.}$$

$\beta Int_\gamma(S) \supseteq S \cap cl_\gamma \left(int_\gamma \left(cl_\gamma^*(S) \right) \right)$ elde edilir.

Sonuç olarak $\beta Int_\gamma(S) = S \cap cl_\gamma(int_\gamma(cl_\gamma^*(S)))$ olduğu görülür.

4.2. γ - β - I Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 4.2.1. $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için $\gamma : \tau \rightarrow P(X)$, $\theta : \sigma \rightarrow P(Y)$ sırasıyla τ ve σ üzerinde işlemler olsun. Eğer Y de ki her θ -açık K kümesi için $f^{-1}(K)$ X te γ - β - I açık ise f fonksiyonuna (γ, θ) - β - I sürekli fonksiyon denir.

Örnek 4.2.1 $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ ideali verilsin.

$b \in X$ için bir $\gamma : \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(S) = S_\gamma = \begin{cases} S, & b \in S \\ cl(S), & b \notin S \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$Y = \{d, e, f\}$ kümesi üzerinde $\sigma = \{\emptyset, Y, \{d\}, \{e\}, \{d, e\}, \{d, f\}\}$ topolojisi verilsin.

$e \in Y$ için bir $\theta : \sigma \rightarrow P(Y)$ işlemi

$$\theta(S) = S_\theta = \begin{cases} cl(S), & e \in S \\ S, & e \notin S \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, $f = \{(a, e), (b, f), (c, d)\}$ fonksiyonu tanımlansın.

X 'te γ -açık kümeler $\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}$

Y 'de θ -açık kümeler $\emptyset, Y, \{d\}, \{e\}, \{d, f\}$ dir.

Y 'de θ -açık kümelerin ters görüntülerinin $\{c\}, \{a\}, \{b, c\}$ γ - β - I açık olduğunu gösterelim.

$S = \{a\}$ için $int_\gamma(S) = \emptyset$, $S^* = \{a, b\}$ ve $cl_\gamma^*(S) = \{a, b\}$ ve $cl_\gamma \left(int_\gamma \left(cl_\gamma^*(S) \right) \right) = \{a, b\}$ bulunur.

Böylece, $S \subseteq cl_\gamma \left(int_\gamma \left(cl_\gamma^*(S) \right) \right)$ olduğundan S , γ - β - I açık bir kümedir.

$R = \{c\}$ için $int_{\gamma}(R) = \{c\}$, $R^* = \emptyset$ ve $cl_{\gamma}^*(R) = \{c\}$ ve $cl_{\gamma}\left(int_{\gamma}\left(cl_{\gamma}^*(R)\right)\right) = \{c\}$ bulunur. Böylece,

$R \subseteq cl_{\gamma}\left(int_{\gamma}\left(cl_{\gamma}^*(R)\right)\right)$ olduğundan R , γ - β - I açık bir kümedir.

$P = \{b, c\}$ için $int_{\gamma}(P) = \{c\}$, $P^* = \{a, b\}$ ve $cl_{\gamma}\left(int_{\gamma}\left(cl_{\gamma}^*(P)\right)\right) = X$ bulunur. Böylece, $P \subseteq cl_{\gamma}\left(int_{\gamma}\left(cl_{\gamma}^*(P)\right)\right)$ olduğundan P , γ - β - I açık bir kümedir.

Y 'de θ -açık kümelerin ters görüntüleri γ - β - I açık olduğundan f fonksiyonu (γ, θ) - β - I süreklidir.

Örnekteki ideal $I = \{\emptyset, \{b\}\}$ alındığında $P = \{b, c\}$ için $int_{\gamma}(P) = \{c\}$, $P^* = \{c\}$ ve $cl_{\gamma}\left(int_{\gamma}\left(cl_{\gamma}^*(P)\right)\right) = \emptyset$ bulunur. $P \not\subseteq cl_{\gamma}\left(int_{\gamma}\left(cl_{\gamma}^*(P)\right)\right)$ olduğundan P , γ - β - I açık bir küme değildir. Yani f fonksiyonu (γ, θ) - β - I sürekli değildir.

Teorem 4.2.2 $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için $\gamma : \tau \rightarrow P(X)$, $\theta : \sigma \rightarrow P(Y)$ sırasıyla τ ve σ üzerinde işlemler olsun. Y de ki her θ -kapalı K kümesi için $f^{-1}(K)$, X te γ - β - I kapalıdır ancak ve ancak f fonksiyonu (γ, θ) - β - I süreklidir.

İspat 4.2.2 ($\Leftarrow$): f fonksiyonu (γ, θ) - β - I sürekli olsun. S kümesi Y de θ -kapalı bir küme olsun. S^c , θ -açık bir küme olur. f fonksiyonu sürekli olduğundan $f^{-1}(S^c)$ γ - β - I açıktır. $f^{-1}(S^c) = (f^{-1}(S))^c$ olduğundan $(f^{-1}(S))^c$ γ - β - I açıktır ve $f^{-1}(S)$ X te γ - β - I kapalıdır.

($\Rightarrow$): R , θ -açık bir küme olsun. $f^{-1}(R)$ nin γ - β - I açık olduğunu gösterelim. R^c θ -kapalı bir küme olduğundan kabulden $f^{-1}(R^c)$ γ - β - I kapalıdır. $f^{-1}(R^c) = (f^{-1}(R))^c$ olduğundan $(f^{-1}(R))^c$ γ - β - I kapalıdır ve $f^{-1}(R)$ γ - β - I açıktır. O halde f fonksiyonu (γ, θ) - β - I süreklidir.

Teorem 4.2.3 $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. $\forall x \in X$ ve $f(x)$ in her S açık komşuluğu için $f(M_{\gamma}) \subseteq S_{\gamma}$ olacak şekilde x in en az bir γ - β - I açık M komşuluğu vardır ancak ve ancak f fonksiyonu (γ, θ) - β - I süreklidir.

İspat 4.2.3 ($\Rightarrow$): Bir $S \subseteq Y$ θ -açık kümesini alalım. $f^{-1}(S)$ nin γ - β - I açık olduğunu gösterelim. $x \in f^{-1}(S)$ olsun. $f(x) \in S$ dir. Kabulden $f(M_x) \subseteq S$ ve $x \in M_x$ olacak şekilde bir M_x γ - β - I açık küme vardır. Buradan $x \in M_x \subseteq f^{-1}(S)$ elde edilir.

$$f^{-1}(S) = \bigcup_{x \in f^{-1}(S)} M_x$$

dir. Teorem 4.1.5(i) den dolayı $f^{-1}(S)$ γ - β - I açıktır. Böylece f fonksiyonu (γ, θ) - β - I süreklidir.

($\Leftarrow$): f fonksiyonu (γ, θ) - β - I sürekli olsun. Kabul edelim ki S , θ -açık bir küme olsun. f sürekli olduğundan $f^{-1}(S)$ γ - β - I açıktır. $f(x)$ 'in bir θ -açık komşuluğu S olsun. $f(x) \in S$ ise $x \in f^{-1}(S)$ dir. Eğer $M = f^{-1}(S)$ seçersek $f(M) \subseteq S$ elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 4.2.4 $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma, J)$ fonksiyonu için $\gamma : \tau \rightarrow P(X)$, $\theta : \sigma \rightarrow P(Y)$ sırasıyla τ ve σ üzerinde işlemler olsun. Eğer Y de ki her θ - β - J açık K kümesi için $f^{-1}(K)$ X te γ - β - I açık ise f fonksiyonu (γ, θ) - β - (I, J) irresolute fonksiyondur.

Örnek 4.2.4 $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{b\}\}$ ideali verilsin.

$b \in X$ için bir $\gamma : \tau \rightarrow P(X)$ işlemi

$$\gamma(S) = S_\gamma = \begin{cases} S, & b \in S \\ \text{cl}(S), & b \notin S \end{cases} \text{ şeklinde tanımlansın.}$$

$Y = \{d, e, f\}$ kümesi üzerinde $\sigma = \{\emptyset, Y, \{d\}, \{e\}, \{d, e\}, \{d, f\}\}$ topolojisi ve $J = \{\emptyset, \{e\}\}$ ideali verilsin.

$e \in Y$ için bir $\theta : \sigma \rightarrow P(Y)$ işlemi

$$\theta(S) = S_\theta = \begin{cases} \text{cl}(S), & e \in S \\ S, & e \notin S \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma, J)$, $f = \{(a, d), (b, f), (c, e)\}$ fonksiyonu tanımlansın.

X 'te γ -açık kümeler $\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}$ ve

Y 'de θ -açık kümeler $\emptyset, Y, \{d\}, \{e\}, \{d, f\}$ dir.

Y 'de θ - β - J açık kümeler $\emptyset, Y, \{d\}, \{e\}, \{d, f\}, \{e, d\}$ dir.

Y 'de $\theta - \beta - J$ açık kümelerin ters görüntülerinin $\{c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}$ $\gamma - \beta - I$ açık olduğunu gösterelim. $\{c\}$ ve $\{a, b\}$ kümeleri γ -aşıktır dolayısıyla $\gamma - \beta - I$ açıktır.(Teorem 4.1.6 (i))

$S = \{a\}$ için $cl_\gamma^*(S) = \{a, b\}$ ve $cl_\gamma \left(int_\gamma \left(cl_\gamma^*(S) \right) \right) = \{a, b\}$ bulunur. Böylece,

$S \subseteq cl_\gamma \left(int_\gamma \left(cl_\gamma^*(S) \right) \right)$ olduğundan S , $\gamma - \beta - I$ açık bir kümedir.

$R = \{a, c\}$ için $cl_\gamma^*(R) = X$ ve $cl_\gamma \left(int_\gamma \left(cl_\gamma^*(R) \right) \right) = X$ bulunur. Böylece,

$R \subseteq cl_\gamma \left(int_\gamma \left(cl_\gamma^*(R) \right) \right)$ olduğundan R , $\gamma - \beta - I$ açık bir kümedir.

Sonuç olarak f fonksiyonu $(\gamma, \theta) - \beta - (I, J)$ irresolute fonksiyondur.

Teorem 4.2.5 $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma, J)$ fonksiyonu için $\gamma : \tau \rightarrow P(X), \theta : \sigma \rightarrow P(Y)$ sırasıyla τ ve σ üzerinde işlemler olsun. Y deki her $\theta - \beta - J$ kapalı K kümesi için $f^{-1}(K)$, X te $\gamma - \beta - I$ kapalı ise f fonksiyonu $(\gamma, \theta) - \beta - (I, J)$ irresolute fonksiyondur.

İspat 4.2.5 K, Y 'de $\theta - \beta - J$ kapalı bir küme olsun. K^c $\theta - \beta - J$ açık bir kümedir. $f^{-1}(K)$, X te $\gamma - \beta - I$ kapalı olduğundan $(f^{-1}(K))^c$ $\gamma - \beta - I$ açıktır. Böylece K^c $\theta - \beta - J$ açık bir küme iken $f^{-1}(K^c)$ $\gamma - \beta - I$ açıktır. Böylece f fonksiyonu $(\gamma, \theta) - \beta - (I, J)$ irresolute fonksiyondur.

Teorem 4.2.6 $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma, J)$ fonksiyonu için $\gamma : \tau \rightarrow P(X), \theta : \sigma \rightarrow P(Y)$ sırasıyla τ ve σ üzerinde işlemler olsun. f fonksiyonu $(\gamma, \theta) - \beta - (I, J)$ irresolute ise $(\gamma, \theta) - \beta - I$ süreklidir.

İspat 4.2.6 Kabul edelim ki f $(\gamma, \theta) - \beta - (I, J)$ irresolute fonksiyon olsun. Bir θ -açık S kümesi aynı zamanda $\theta - \beta - J$ -açıktır. f $(\gamma, \theta) - \beta - (I, J)$ irresolute olduğundan $f^{-1}(S)$ de $\gamma - \beta - I$ açıktır. O halde f fonksiyonu $(\gamma, \theta) - \beta - I$ süreklidir.

Tanım 4.2.7 Bir S kümesi $\gamma - \beta - I$ açık(kapalı) iken $f(S)$ de $\theta - \beta - J$ açık(kapalı) ise f fonksiyonuna $(\gamma, \theta) - \beta - (I, J)$ açık(kapalı) fonksiyon denir.

Örnek 4.2.7 Örnek 4.2.4 de $\{c\}, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}$ kümeleri X 'teki $\gamma - \beta - I$ açık kümelerdir. Bu kümelerin f fonksiyonu altındaki ters görüntüleri $\{d\}, \{e\}, \{d, e\}, \{d, f\}$ Y de $\theta - \beta - J$ açık kümeler olduğundan f $(\gamma, \theta) - \beta - (I, J)$ açık fonksiyondur.

Teorem 4.2.8 $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma, J)$ fonksiyonu için $\gamma : \tau \rightarrow P(X)$, $\theta : \sigma \rightarrow P(Y)$ sırasıyla τ ve σ üzerinde işlemler olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- i. f fonksiyonu $(\gamma, \theta) - \beta - (I, J)$ kapalıdır.
- ii. $S \subseteq X$ için $\beta Icl_\gamma(f(S)) \subseteq f(\beta Icl_\gamma(S))$ dir.

İspat 4.2.8 : $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki f fonksiyonu $(\gamma, \theta) - \beta - (I, J)$ kapalı olsun. $S \subseteq X$ için $\beta Icl_\gamma(f(S))$ $\gamma - \beta - I$ kapalı olduğundan $f(\beta Icl_\gamma(S))$ de $\theta - \beta - J$ kapalıdır. $f(S) \subseteq f(\beta Icl_\gamma(S))$ olduğundan $\beta Icl_\gamma(f(S)) \subseteq f(\beta Icl_\gamma(S))$ bulunur.

: $(\Leftarrow)$ Kabul edelim ki, bir $\gamma - \beta - I$ kapalı $S \subseteq X$ kümesi için ve $\beta Icl_\gamma(f(S)) \subseteq f(\beta Icl_\gamma(S))$ olsun. $f(S) \subseteq \beta Icl_\gamma(f(S)) \subseteq f(\beta Icl_\gamma(S)) = f(S)$

Bu durumda $\beta Icl_\gamma(f(S)) \subseteq f(S)$ dir.

$\beta Icl_\gamma(f(S)) = f(S)$ bulunur ki bu da $f(S)$ 'in $\theta - \beta - J$ kapalı olmasıdır.

Sonuç olarak f fonksiyonu $(\gamma, \theta) - \beta - (I, J)$ kapalıdır.

Teorem 4.2.9 X, Y, Z topolojik uzaylar ve $\gamma : \tau \rightarrow P(X)$, $\theta : \sigma \rightarrow P(Y)$, $\alpha : \rho \rightarrow P(Z)$ sırasıyla τ , σ , ρ üzerinde işlemler olsun. $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ fonksiyonları verilsin. $g \circ f : X \rightarrow Z$, $(\gamma, \alpha) - \beta - I$ kapalı fonksiyon olsun. g , birebir ve $(\theta, \alpha) - \beta - I$ irrelative fonksiyon ise f , $(\gamma, \theta) - \beta - I$ kapalıdır.

İspat 4.2.9 $S \subseteq X$ ve S kümesi γ -kapalı olsun. $g \circ f(S)$ de Z 'de $\alpha - \beta - I$ kapalıdır. Buradan

$g^{-1}(g \circ f(S)) = f(S)$ $\theta - \beta - I$ kapalıdır. Böylece g , birebir ve $(\theta, \alpha) - \beta - (I, J)$ irrelative fonksiyon olduğundan f , $(\gamma, \theta) - \beta - I$ kapalıdır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, γ işlemi kullanılarak topolojik uzaylarda tanımlanan genelleştirilmiş açık kümeler, ideal topolojik uzaylara uyarlanmıştır. Bu yeni kümeler, ideal topolojik uzaylarda $\gamma - \beta - I$ açık kümeler olarak adlandırılmıştır. Bu kümelerle, bir kümenin içi, kapanışı gibi kavramlar yeniden tanımlanmış ve bu kavramların özellikleri incelenmiştir. Ayrıca yeni bir süreklilik tanımı yapılmıştır. Bu incelemelerden yola çıkarak, topolojik uzaylardaki diğer kavramlar da ideal topolojik uzaylara uyarlanabilir.



6. KAYNAKLAR

- Abd El-Monsef, E., El-Deeb, S. N., & Mahmoud, R. A. (1981). β -open sets and β -continuous mappings. *Bull. Fac. Sci. Assiut Univ. A.*, 12(1), 77-90.
- Abd El-Monsef, M. E., Lashien, E. F., & Nasef, A. A. (1992). On I-open sets and I-continuous function. *Kyungpook Mathematical Journal*, 32(1), 21-30.
- Ahmad, B., & Hussain, S. (2003). Properties of γ -operations on topological spaces. *Aligarh Bulletin of Mathematics*, 22(1), 45-51.
- Ahmad, B., & Hussain, S. (2005). γ -convergence in topological space. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 29(1), 832-842.
- Ahmad, B., & Hussain, S. (2010). γ -semi-open sets in topological spaces II. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 34(5), 997-1008.
- Akdağ, M. (2007). On b-I-open sets and bI-continuous functions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2007, 13 pages.
- Akdag, M., & Ozkan, A. (2014). On soft β -open sets and soft β -continuous functions. *The Scientific World Journal*, 2014, 1-6.
- Akız, H. F., & Koçak, L. (2019). Sequentially Hausdorff and full sequentially Hausdorff spaces. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(2), 1724-1732.
- Al Shumrani, M. A., Özel, C., & Keskin Kaymakçı, A. (2017). On strong β -I-open sets and decompositions of continuity in ideal topological spaces. *Journal of Mathematical Analysis*, 8(1), 143-155.
- Andrijević, D. (1996). On b-open sets. *Mathematica*, 48(1), 59-64.
- Basu, C. K., Afsan, B. M. U., & Ghosh, M. K. (2009). A class of functions and separation axioms with respect to an operation. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 38(2), 103-118.
- Bukhatwa, I., & Demiralp, S. (2020). On generalized β -open sets in ideal bitopological space. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(2), 269-279.
- Ekici, E. (2012). On pre-I-open sets, semi-I-open sets and b-I-open sets in ideal topological spaces. *Acta Universitatis Apulensis*, 30(1), 293-303.

- Granados, C. (2020). A new notion of convergence on ideal topological spaces. *Sellecciones Matematicas, Universidad Nacional de Trujillo*, 7(2), 250-256.
- Guler, A. C., & Aslım, G. (2005). b -I-open sets and decomposition of continuity via idealisation. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, 22(1), 27-32.
- Hayashi, E. (1964). Topologies defined by local properties. *Mathematische Annalen*, 156(1), 205-215.
- Hussain, S., & Ahmad, B. (2007). On γ -s-closed spaces. *Sci. Magna Journal*, 3(4), 89-93.
- Hussain, S., & Ahmad, B. (2010). γ -semi-open sets in topological spaces. *Asian Europa Journal of Mathematics*, 3(3), 427-433.
- Hussain, S. (2018). On generalised open sets. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 47(6), 1438-1446.
- Ibrahim, H. Z. (2013). On pre- γ -I-open sets in ideal topological spaces. *Journal of University of Zakho*, 1(1), 349-353.
- Ibrahim, H. Z., & Mizyed, A. (2016). On semi- γ -I-open sets and a new mapping. *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, 6(1), 1-9.
- İlkhani, M., Akyiğit, M., & Kara, E. E. (2018). On new types of sets via γ -open sets in bitopological spaces. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1*, 67(1), 225-234.
- Jankovic, D. S. (1983). On functions with closed graphs. *Glasnik Matematicki*, 18(1), 141-148.
- Jankovic, D., & Hamlett, T. R. (1992). Compatible extensions of ideals. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 6(3), 453-465.
- Kannan, K., & Nagaveni, N. (2012). On β -generalized closed sets in topological spaces. *International Journal of Mathematical Analysis*, 6(57), 2819-2828.
- Kasahara, S. (1979). Operation-compact spaces. *Mathematica Japonica*, 24(1), 97-105.
- Keskin, A., Noiri, T., & Yuksel, S. (2004). Decompositions of I-continuity and continuity. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 53(1), 67-75.
- Kılınç, S. (2022). I-connectedness. *Journal of New Theory*, 39(1), 1-7.

- Krishnan, G. S. S., & Balachandran, K. (2006). On a class of γ -preopen sets in a topological space. *East Asian Math. J.*, 22(2), 131-149.
- Kuratowski, K. (1933). Topologie I. Warszawa.
- Kuratowski, K. (1966). Topology, Volume I. New York: Academic Press.
- Levine, N. (1963). Semi-open sets and semi continuity in topological spaces. *American Mathematical Monthly*, 70(1), 36-41.
- Mucuk, O. (2010). *Topoloji ve Kategori*. Ankara: Nobel Yayınları.
- Mucuk, O., & Şahan, T. (2014). On G-sequential continuity. *Filomat*, 28(1), 1181-1189.
- Ogata, H. (1991). Operations on topological spaces and associated topology. *Mathematica Japonica*, 36(1), 175-184.
- Özcan, M. (2022). İdeal topolojik uzaylarda açık ve kapalı kümelere bir yaklaşım. *Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi*.
- Rehman, F. U., & Ahmad, B. (1992). Operations on topological spaces I. *Math. Today*, 10(1), 29-36.
- Tahiliani, S. (2006). Generalised β -closed functions. *Bull. Cal. Math. Soc*, 98(4), 367-376.
- Tahiliani, S. (2011). Operation approach to β -open sets and applications. *Mathematical Communications*, 16(2), 577-591.
- Tong, M. (1971). On decomposition of continuity in topological spaces. *Acta Math. Hungar*, 54(1-2), 51-55.
- Vaidyanathaswamy, R. (1945). The localisation theory in set topology. *Proceedings of the Academy of Sciences*, 20(1), 51-61.



**T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

Sare ÇAKIR KARTAL

Yüksek Lisans Tezi

YOZGAT 2024