



T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA PROGRAMI

İKİ ARALIKLI STURM-LIOUVILLE DENKLEMLERİ
İÇİN SALINIM VE AYIRMA ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Sevda Nur ÖZTÜRK

Danışman:Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

İkinci Danışman:Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR

TOKAT-2025

ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU danışmanlığında hazırlamış olduğum "İki Aralıklı Sturm-Liouville Denklemleri İçin Salınım ve Ayırma Özellikleri" adlı Doktora tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

05/09/2025

Sevda Nur ÖZTÜRK

JÜRİ KABUL VE ONAY

Sevda Nur ÖZTÜRK, tarafından hazırlanan "**İki Aralıklı Sturm-Liouville Denklemleri İçin Salınım ve Ayırma Özellikleri**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 05/09/2025 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisanüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri (Unvanı, Adı Soyadı)

İmzası

Başkan: Prof. Dr. Hasan BULUT

Danışman : Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Üye: Prof. Dr. Ali YAKAR

Üye: Prof. Dr. Metin ORBAY

Üye : Prof. Dr. Serkan DEMİRİZ

ONAY

....../....../.....

Prof. Dr. Ercan ÇAÇAN
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖZET

İKİ ARALIKLI STURM-LIOUVILLE DENKLEMLERİ İÇİN SALINIM VE AYIRMA ÖZELLİKLERİ

Öztürk, Sevda Nur

Doktora, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Eylül 2025, vii+82 sayfa

Bu tez çalışmasında; iki aralıklı bir Sturm-Liouville denklemi için salınım ve ayırma özellikleri araştırılmıştır. Tez aşağıdaki biçimde düzenlenmiştir. Bölüm 1’de araştırılan problemin bilimsel önemi ve uygulama alanları hakkında kısa bilgiler verilmiştir. Bölüm 2’de tez konusu alanındaki literatürün özeti verilmiştir. Bölüm 3’te klasik Sturm-Liouville probleminin temel kavramları ve özellikleri verilmiştir. Tezimizin orijinal kısmı olan Bölüm 4’te iletişim noktasında tanımlı olan ek şartlar ile verilmiş (bu şartlar geçiş şartları olarak adlandırılmaktadır) Sturm Liouville denkleminin salınım ve ayırma özellikleri bulunmuştur. Sonuncu bölümde tezin sonuçlarından bahsedilmiş ve bazı önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: İki Aralıklı Sturm-Liouville Denklemi, Salınım ve Ayırma Özellikleri.

ABSTRACT

OSCILLATION AND SEPARATION PROPERTIES FOR TWO-INTERVAL STURM-LIOUVILLE EQUATIONS

Öztürk, Sevda Nur

PhD Thesis, Department of Mathematics

Thesis Advisor: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

September 2025, vii+82 pages

In this thesis, oscillation and separation properties for the two- interval Sturm Liouville equation were investigated. This study is organized as follows. Chapter 1 provides brief information on the scientific significance and fields of application of the problem under consideration. Chapter 2 provides an overview of the literature on the topic of the thesis. Chapter 3 presents the basic concepts and properties of classical Sturm-Liouville problem. In the main part of the thesis (Chapter 4) the oscillation and separation properties of the two-interval Sturm Liouville equation, together with additional transmission conditions at the communication point, (these conditions are called transmission conditions) are found.

Keywords: Two-Interval Sturm Liouville Equations, Oscillation and Separation Properties.

İÇİNDEKİLER

ETİK SÖZLEŞME	i
JÜRİ KABUL VE ONAY	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ÖNSÖZ	vi
SİMGELER LİSTESİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	4
3. GENEL BİLGİLER	10
3.1. İkinci Mertebeden Adi Lineer Diferansiyel Denklemlerin Temel Özellikleri	10
3.2. Sınır Değer Problemleri İçin Green Fonksiyonu	14
3.3. Homojen Olmayan Sınır Değer Probleminin Green Fonksiyonu Yardımı İle Çözümü	15
3.4. Sturm-Liouville Problemleri	21
3.4.1 Klasik Sturm-Liouville Problemi	21
3.5. Fourier Serileri, Fourier Katsayıları, Besssel Eşitsizliği ve Parseval Eşitliği	26
3.6. Salınım ve Ayırma Teorisi	32
3.6.1 Ayırma Teoremleri	35
3.6.2 Salınım Teoremleri	36
4. BULGULAR	41
4.1. İki Aralıklı Sturm-Liouville Denklemleri İçin Karşılaştırma ve Salınım Özellikleri	41
4.2. Karşılaştırma Teoremleri	52
4.3. İki Aralıklı Sturm-Liouville Denklemleri	62
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	73
5.1. Sonuç	73
5.2. Öneriler	74
KAYNAKLAR	75

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans, Doktora öğrenimim boyunca ve bu tez çalışması süresince bana hep destek olan, konunun seçilmesi, yürütülmesi ve sonuçlandırılması aşamalarında bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösteren, bilgisini, desteğini, kıymetli zamanını, değerli fikirlerini ve emeğini hiçbir zaman esirgemeyen, her daim ufkumu açan ve her türlü sıkıntıda daima yanımda olan çok kıymetli hocam sayın Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU' na bana kattığı her bir değer için, yolumu aydınlattığı; yaşama, matematiğe ve hayata olan bakış açımı değiştirebilmeme imkan sağladığı için en içten sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yöğun çalışma temposuna rağmen kıymetli zamanından ayırıp çalışmalarımıza katılarak bizi onurlandıran ve yol gösteren Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Rektör Yardımcısı Sayın Prof. Dr. Metin ORBAY'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Doktora öğrenimim ve tez izleme komitesi toplantıları boyunca değerli tavsiyeleri ve yol gösterici katkılarıyla destek olan; ikinci danışman hocam Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR'e ve Prof. Dr. Ali YAKAR'a teşekkürü bir borç bilirim. Doktora öğrenimim boyunca emeği geçen başta Doç. Dr. Hayati OLGAR olmak üzere tüm bölüm hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca ,TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB) 2211-A Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında doktora çalışmalarımı maddi olarak destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Sevda Nur ÖZTÜRK

Eylül 2025

SİMGELER LİSTESİ

Simgeler Açıklamalar

$L_2[a, b]$: $[a, b]$ aralığında tanımlı olan ve mutlak değerinin karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı.(Lebesgue Uzayı)

$C[a, b]$: $[a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı

$C^n[a, b]$: $[a, b]$ üzerinde n . mertebeden sürekli türevlenebilen fonksiyonların uzayı

$\|T\|$: Sınırlı lineer T operatörünün normu

$T^{\frac{1}{2}}$: T operatörünün pozitif karekökü

$\|x\|$: x ' in normu

$\langle x, y \rangle$: x ve y ' nin iç çarpımı

1. GİRİŞ

Adi diferansiyel denklemlerin nitel teorisinin en önemli konularından biri de çözüm fonksiyonlarının sıfır yerlerinin davranışlarıdır. Bu tür davranışların araştırılması diferansiyel denklemin karşılaştırma ve salınım teorisinin temel konusudur. Bu konu literatürde ilk defa 19. yüzyılın ortalarında Sturm ve Liouville tarafından araştırılmış ve en temel sonuçlar elde edilmiştir. Günümüze kadar bu konuda çok sayıda kitap ve makale yazılmasına rağmen, konu güncelliğini korumakla kalmamış, fizik ve diğer doğa bilimlerindeki gelişmelere paralel olarak güncelliği ve önemi daha da artmıştır. Çünkü fizik ve diğer doğa bilimlerinde ortaya çıkan yeni problemlerin çözümü için klasik karşılaştırma ve salınım teorisinin de geliştirilmesi ihtiyacı doğmaktadır. Bir çok fiziksel problemin matematiksel modeli iki ve çok-aralıklı Sturm-Liouville problemleri biçiminde ifade edilmektedir. Genel olarak farklı fiziksel ve kimyasal parametrelere sahip olan maddeler arasında gerçekleşen iletim problemleri çok-aralıklı Sturm-Liouville problemlerine (SLP) indirgenmektedir. Klasik Sturm-Liouville teoremindeki bir çok özellik çok-aralıklı Sturm-Liouville problemleri için sağlanmıyor. Bu nedenle çok-aralıklı SLP-lerin incelenmesi teorik ve uygulamalı matematik açısından çok önemlidir. Çok-aralıklı SLP-lerinde sınır şartları ile birlikte iletişim noktasında tanımlı olan geçiş şartları da mevcuttur. Bu tür sınır-değer-geçiş problemlerinin çözümlerinin (SDGP) salınım özelliklerinin incelenmesi son yıllarda daha fazla ilgi görmektedir.

Bir çok fiziksel süreç incelenirken çözüm fonksiyonlarının ardışık sıfırlar arasındaki mesafeyi, belirli bir aralıkta bulunan maksimum sıfır sayısını ve ayrıca bu tür fiziksel olayların modellenmesi sırasında ortaya çıkan diferansiyel denklemlerin bu özellikleri arasında bir bağlantı kurmak ihtiyacı ortaya çıkıyor. Bu nedenle Sturm karşılaştırma ve salınım teorisi giderek artan bir ilgi görmektedir. İki diferansiyel denklemin çözümlerinin salınım hızını karşılaştıran Sturm karşılaştırma teoremi, genellikle aşağıdaki gibi formüle edilir:

$$\frac{d}{dx} \left(p_1(x) \frac{du}{dx} \right) - q_1(x)u = 0 \quad (1.0.1)$$

$$\frac{d}{dx} \left(p_2(x) \frac{dv}{dx} \right) - q_2(x)v = 0 \quad (1.0.2)$$

diferansiyel denklemlerini ele alalım, burada $p_i(x)$, $q_i(x)$ ($i = 1, 2$) bir $[a, b]$ aralığında sürekli ve $p_i(x)$ ($i = 1, 2$), $[a, b]$ aralığında türevlenebilir fonksiyonlardır. Eğer $\forall x \in [a, b]$ için $p_1(x) \geq p_2(x) > 0$, $q_1(x) \geq q_2(x) > 0$ ve x_1, x_2 (1.0.1)'in bir $u = u(x)$ çözümünün ardışık iki sıfırı ise o halde (1.0.2)'nin her $v = v(x)$ çözümünün $[x_1, x_2]$ aralığında en az bir sıfırı vardır.

Belirtmeliyiz ki

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = \lambda r(x) \quad (1.0.3)$$

Sturm-Liouville denklemi doğa bilimlerinin bir çok dalının problemlerinde ortaya çıkan bir denklem sınıfının tipik bir örneğidir. Yukarıdaki Sturm karşılaştırma özelliği ile $|\lambda|$ 'daki bir artış çözümün daha hızlı salınımını sağlar. Bu karşılaştırma teoreminin bazı fiziksel yorumları vardır. Örneğin bir parçacık $\tau_1(t) = -\sigma_1(t)u$ kuvveti altında $u = 0$ 'a çekildiğini ve bu parçacığın serbestlik derecesinin bire eşit olduğunu kabul ettiğimiz durumda

$$u'' + \tau_1(t)u = 0 \quad (1.0.4)$$

şeklindeki Sturm-Liouville denklemi elde edilir. Burada t zaman değişkenidir. Eğer $\tau_2(t) \geq \tau_1(t)$, $\tau_2(t) \neq \tau_1(t)$ 'yi sağlayan diğer bir parçacık $\tau_2(t) = -\sigma_2(t)v$ kuvveti altında $v = 0$ 'a çekilirse, $v'' + \tau_2(t)v = 0$ denklemi elde edilir. Bu durumda ikinci parçacığın daha hızlı salınım yaptığı kuantum teorisinden bilinmektedir. Yani eğer birinci parçacık $u = 0$ 'dan t_1 ve t_2 ardışık zamanlarında geçerse, o zaman bu anlar arasında ikinci parçacık (daha büyük bir kuvvete sahip) en az bir kez geçmiş olacaktır.

Bilindiği gibi genel olarak Sturm-Liouville diferansiyel denklemlerinin tam (exact) çözümleri bilinen klasik yöntemler ile bulunamaz. Bu nedenle tam çözümleri bilinme-

yen diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel özelliklerini araştırmak gerekir. Salınım özellikleri en önemli niteliksel özelliklerden biridir. Günümüzde Sturm-Liouville denklemleri olarak adlandırılan ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin salınım özellikleri, ayrıca iki farklı denklemin çözümlerinin sıfır yerlerinin karşılaştırılması literatürde ilk olarak Sturm-Liouville tarafından incelenmiş ve çok önemli sonuçlar elde edilmiştir (Sturm ve Liouville,1837). Adi diferansiyel denklemler için klasik karşılaştırma ve salınım teorisi için Swanson (1968) ve kısmi diferansiyel denklemler için Yoshido (2008)'ya başvururuz. Ayrıca bu teoremin uygulamalarına dair büyük bir literatür vardır.

Bu çalışmada yeni tip problemler için bazı Sturm karşılaştırma ve salınım teoremlerini genişletecek ve genelleştireceğiz.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Matematiksel fiziğin bir çok probleminin incelenmesinde etkin bir rol oynayan Fourier yöntemi, genelleştirilmiş Fourier yöntemi, diferansiyel operatör denkleme indirgeme yöntemi, Green fonksiyonu yöntemi v.s gibi yöntemlerin esaslandırılması için uygun adi diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin spektral özelliklerinin araştırılması gerekir. Bu da diferansiyel operatörler teorisinin esas konusunu oluşturmaktadır. Ayrıca özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik ifadelerinin bulunması ve özfonksiyonlar sisteminin, bazlık (ortonormal, Abel v.s bazlığı gibi) özelliklerinin araştırılması gerekmektedir. Fiziğin ortaya koyduğu yeni problemlerin spektral yöntemlerle incelenebilmesi için diferansiyel operatörler teorisinin daha da genişletilmesi ve yeni araştırma yöntemlerinin geliştirilmesi ihtiyacı doğmuştur. Bu yönde önemli çalışmalar yapılmaktadır. Son yıllarda matematiksel fiziğin ortaya koyduğu bir çok yeni ve güncel problemlere uygun olarak tanımlanan spektral problemde özdeğer parametresi hem diferansiyel denklemde hem de sınır şartlarında bulunmaktadır. Bu nedenle diferansiyel operatörler teorisinin böyle problemleri de içerecek biçimde geliştirilmesi gerekmektedir. Bu yönde son yıllarda çok önemli çalışmalar yapılmış ve yapılmaktadır.(Fulton(1980), Hinton(1979), Scheinder(1974), Simon(2005), Yoshida(2008), Mukhtarov(1994), Mukhtarov ve Aydemir(2025))

18. yüzyılın ortalarından başlayarak, diferansiyel ve integral hesabı alanındaki gelişmeler fizikte de hızlı gelişmelere vesile olmuştur. İncelenen konular arasında termodinamik ve ışık, elektrik ve manyetizmanın problemleri de vardı. Bu ve bunlara benzer süreçlerin araştırılması ihtiyacı diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri alanını oluşturmuştur ve bu tarz problemlerin çözümü için farklı çözüm yolları geliştirilmiştir.

D’Alambert(1747), Fourier (1820) ve Poisson (1823)’un çalışmalarının diferansiyel operatörler teorisinin gelişiminde önemli etkileri olmuştur. Homojen olmayan ince bir teldeki titreşim problemini D’Alambert(1747) ve Euler (1764) çalışmışlardır. Fourier (1820), homojen ortamlarda ısı iletim problemlerini silindirik ve küresel koordinatları kullanarak araştırmıştır. 19. yüzyılın ortalarında Sturm ve Liouville’ nin yayımladıkları bir sıra makaleler matematik analizde tümü ile yeni bir teorisinin

ortaya çıkmasına vesile olmuştur. Daha sonra kendi adları ile anılacak bu teori, başlangıç itibari ile 2. mertebeden

$$(pu')' + q(x)u = \lambda\varphi(x)u, \quad x \in (a, b) \quad (2.0.5)$$

diferansiyel denklemini ve

$$\begin{aligned} (pu')(a) - hu(a) &= 0, \\ (pu')(b) - Hu(b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.0.6)$$

sınır şartları ile verilen sınır değer probleminin (SDP) λ özdeğer parametresine bağımlı özelliklerinin incelenmesi ile ilgili olmuştur; burada p, φ ve q x 'in verilmiş fonksiyonları, h ve H reel sabitlerdir. Sturm(1836a, 1836b, 1837) çalışmalarında (2.0.5)-(2.0.6) sınır değer probleminin bir çok nitel özelliklerini araştırmıştır. Bu çalışmalar diferansiyel operatörler teorisinin de temelini oluşturmıştır. Sturm'un bir diğer önemli çalışması ise spektral özellikler üzerine olmuştur. Bu çalışmasında kısmi diferansiyel denklemin bir parametreye bağlı olarak adi diferansiyel denkleme nasıl dönüştürülebileceği ve akabinde çözümün seri biçiminde kurulması detaylı olarak verilmiştir. Ardışık yaklaşımlar yöntemini uygulamak suretiyle bir diferansiyel denklemin çözümlerinin varlığını ilk kez Liouville ispatlamıştır. Sturm ve Liouville' nin çalışma yaptıkları yıllarda birçok matematikçi teorisinin gelişmesine önemli katkılarda bulunmuşlardır. 19. yüzyılın son çeyreğinde Kirchhoff(1880) ve diğerleri ince bir telin titreşim problemini araştırırken Sturm'un teoremlerinin benzerini yüksek mertebeden sınır-değer problemlerine uygulamışlardır. Başlangıçta verilen denklem için $p(x)$ 'in $[a, b]$ aralığında sıfır değerini alması halini Schlaflı(1876), daha genel biçimini Böchler(1898) ve başka matematikçiler çalışmışlardır. Klein (1877), adi diferansiyel denklemleri birden fazla parametreyi dikkate alarak incelemiştir ve diferansiyel denklemlerin polinom tipi çözümlerini sınır-değer kuramı ile birleştirmiştir. Matematik fizik problemlerinin çözümü için bir çok analitik, yarı-analitik ve sayısal yöntemler mevcuttur. En etkili analitik yöntemlerden biri de Fourier yöntemine dayanan spektral yöntemidir. Fourier yöntemi uygulandığında

genel olarak spektral parametre içeren SLP-ler elde edilir. Elde edilen SLP-nin sonsuz sayıda özdeğeri mevcut ise ve bu özdeğerlere uygun özfonksiyonlar sistemi baz oluşturuyorsa, o halde verilmiş matematiksel fizik probleminin çözümü bu özdeğer ve özfonksiyonlar aracılığı ile üretilmiş serinin toplamı biçiminde ifade edilebilir. Bazı durumlarda çözüm seri yerine çekirdeği Green fonksiyonu olan Fourier integrali biçiminde ifade edilir. Sturm(1836a, 1836b, 1837) ve Liouville (1836,1837)'nin yukarıda kısaca bahsettiğimiz çalışmalarından başlayarak günümüze kadar SDP-lerinin spektral teorisinde yüzlerce kitap, binlerce makale yazılmıştır. Özellikle 20. yüzyılın son çeyreğinde fizikte ortaya çıkan yeni tipten SDP'lerinin araştırılma ihtiyacı ile SDP'lerinin spektral teorisi yeni bir ivme kazanmıştır.

Walter (1973) çalışmasında özdeğer parametresi hem diferansiyel denklemde hem de sınır şartlarında bulunur. Bu probleme uygun olan diferansiyel operatör $L_2[a, b]$ Hilbert uzayında değil $L_2[a, b] \oplus C^k$ tipinde uzaylarda kurulmuştur. Bu diferansiyel operatörün özdeğerleri verilmiş SLP-nin özdeğeri ile çakışık, özvektörlerinin ilk bileşeni ise verilmiş SLP-nin özfonksiyonları ile çakışık. Walter bu operatörün kendine eşlenikliğini ispatlayarak, bu teoremin özdeğerlerinin reel olduğunu, her özdeğerin sonlu katlı olduğunu, sonlu aralıkta yığılma noktasının bulunmadığını kanıtlamış, ayrıca kendine eşlenik operatörlerin fonksiyonel analizden bilinen özelliklerinden yararlanarak özfonksiyonlar sisteminin baz oluşturduğunu ispatlamıştır.

Schneider(1974) çalışmasında, denkleminde ve sınır şartlarının sadece bir tanesinde özdeğer parametresi bulunduran ikinci mertebeden adi diferansiyel operatörler için S -hermityen yöntemini uygulayarak daha hassas sonuçlar elde etmiştir. Hem Walter'ın hem de Schneider'in izledikleri yöntem genel fonksiyonel analiz yöntemleri olduklarından uygun Hilbert uzayının bütün fonksiyonları için değil de sadece probleme uygun operatörün tanım bölgesindeki fonksiyonlar için açılım teoremleri ispatlanmıştır.

Günümüze kadar birçok çalışmaya esin kaynağı olmuş Fulton(1977)'un makalesinde, Schneider(1974)'in çalışmasındaki probleme benzer bir problem ele alınmış fakat bu problemi çözerken diğer araştırmacılardan farklı olarak sadece fonksiyonel analiz

yöntemlerinden değil, aynı zamanda Titchmarsh(1962)'ın klasik yöntemlerinden de yararlanmıştır. Bu çalışmada rezolvent operatörü ve Green fonksiyonu incelenmiş, açılım teoremleri ispatlanmış, Fourier serileri ile eşyakınsaklık teoremi verilmiş ve ayrıca özdeğerler ve uygun özfonksiyonlar için asimptotik formüller elde edilmiştir.

Daha önce Schneider(1974) ve Fulton(1977) tarafından geliştirilen operatör- teorik metodunu kullanarak Hinton(1979) fonksiyonların daha geniş bir sınıfı için özfonksiyon serisine açılım elde etmiştir ve bu açılım serisinin düzgün yakınsaklığı hakkında teorem ispatlamıştır.

Russakovskii(1975) çalışmasında ise bu çalışmalardan farklı olarak özdeğer parametresinin sınır şartlarında lineer olarak değil de polinomial olarak bulunduğu durumun operatör- teorik yorumunu vermiştir. Bu duruma uygun Hilbert uzayı olarak $L_2[a, b]$ yerine $L_2[a, b] \oplus \mathbb{C}^N$ şeklindeki uzay alınmıştır.

Shkalikov(1982) çalışmasında özdeğer parametresini, hem denkleminde hem de sınır şartlarında polinomial olarak içeren sınır değer problemleri için yeni bir yorum geliştirmiştir. Shkalikov'a göre böyle sınır değer problemlerini $L_2[a, b] \oplus \mathbb{C}^N$ tipindeki uzaylarda değil de Sobolev uzaylarında lineerleştirmek, araştırılan sınır değer probleminin tabiatına daha uygundur.

Ladyzhenskaia (1985) çalışmasında ise zayıf çözümler kavramı yardımıyla, özdeğer probleminin zayıf özfonksiyonları hakkında önemli sonuçlara yer vermiştir.

Benzer problemler Markus(1988) ve Rodman (1989) gibi yazarlar tarafından da çalışılmıştır ve polinomial operatörler demeti teorisinden yararlanılarak önemli sonuçlar elde edilmiştir. Kapustin ve Moiseev (1998)'in ortak çalışmalarında iki değişkenli spektral problemin özfonksiyonları ve kök fonksiyonlar sisteminin baz oluşturma özellikleri incelenmiştir. Belinsky ve Dauer (1997) çalışmalarında, özdeğer parametresini denkleminde ve sınır şartlarının birinde bulunduran regüler Sturm-Liouville probleminin zayıf özfonksiyonlarını incelemiş ve operatörler demeti teorisini uygulayarak zayıf özfonksiyonlar sisteminin Riesz bazı oluşturduğunu göstermişlerdir.

Yakubov(1994,1998)'un yayınlamış olduğu bir sıra çalışmalarında diferansiyel operatörler teorisindeki bazı tipten sınır değer problemlerinin genel teorisi kurulmuştur. Yakubov (1999,2000) çalışmalarında p - regülerlik olarak adlandırılan ve klasik Birkhoff(1908) anlamında regülerlikten farklı olan bir regülerlik kavramı tanımlanmış ve bu anlamda regüler olan sınır değer problemleri için uzay değişkenine göre izomorfluk, uzay değişkenine ve özdeğer parametresine göre koersitivlik, özfonksiyonlar ve kök fonsiyonlar sisteminin tamlığı, çok kat tamlığı, Abel bazlığı v.s gibi özellikler araştırılmıştır.

İkinci mertebeden bir diferansiyel operatörün özfonksiyonları ve kök fonskiyonlar sisteminin baz oluşturma özellikleri, kök fonksiyonlar sisteminin düzgün minimallığı ve baz oluşturma özellikleri ile ilgili önemli sonuçlara Kerimov(1996a, 1996b), Kerimov ve Mamedov(1998) v.s makalelerinde yer vermiştir.

Kerimov ve Allakhverdiev (1993a, 1993b) çalışmalarında; sayılabilir sayıda özdeğerlerin bulunduğu, bu özdeğerlerin reel ve alttan sınırlı olduğu ispatlanmış, özfonksiyonların salınım özellikleri incelenmiş, ayrıca özdeğerler için ve uygun özfonksiyonların sıfır yerleri için asimptotik formüller elde edilmiştir.

Kapustin (1999) yılında yayımlanmış çalışmasında sınır şartlarının bir tanesinde özdeğer parametresi bulunduran sınır-değer problemi incelenmiş olup bu problemin özdeğer ve özfonksiyonları için asimptotik eşitlikler bulunmuş, özfonksiyonların sıfır yerlerinin sayısı ve özfonksiyonlar sisteminin Riesz bazı oluşturmaları hakkında yeni teoremler ispatlanmıştır.

Ancak yukarıda bahsettiğimiz bütün çalışmalarda geçiş şartları içermeyen sınır-değer problemleri incelenmiştir. Bu tez çalışmasının danışmanı olan Oktay Muhtaroglu ve onun arkadaşları ile ortak çalışmalarında; örneğin, Mukhtarov ve Demir(1999) Akdoğan v.d (2005), Mukhtarov ve Yakubov (2002), Mukhtarov v.d (2004), Mukhtarov ve Kadakal (2005), Kadakal ve Mukhtarov (2006), Kandemir v.d (2009), Aydemir ve Mukhtarov (2013), Aydemir ve Mukhtarov (2014), Aydemir ve Mukhtarov (2015), Mukhtarov v.d (2015), Mukhtarov ve Aydemir (2014), Mukhtarov ve Aydemir (2015), Mukhtarov ve Aydemir (2016) çalışmalarında ise çok-aralıklı adi ve kısmi

türevli diferansiyel denklemler için sınır- değer- geçiş problemleri araştırılmıştır. Bu çalışmalarda farklı Sturm-Liouville sınır-değer-geçiş problemleri için temel çözüm sistemleri, karakteristik determinantlar, resolvent operatörü, Green fonksiyonu kurulmuş, temel çözümlerin, karakteristik fonksiyonların ve Green fonksiyonlarının asimptotik davranışları incelenmiş, özdeğer ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller bulunmuş, özfonksiyonların tamlığı, ortonormal baz oluşturması ve Abel bazı oluşturması hakkında önemli sonuçlar elde edilmiştir.



3. GENEL BİLGİLER

Bu kısımda tez çalışmamızda geçen temel kavram ve sonuçlar ile ilgili gerekli olan bilgilere yer verilmiştir.

3.1. İkinci Mertebeden Adi Lineer Diferansiyel Denklemlerin Temel Özellikleri

İkinci mertebeden adi lineer diferansiyel denklemler (ALDD)

$$p(x)u'' + q(x)u' + r(x)u = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.1.7)$$

biçiminde yazılabilir. Burada p, q, r katsayı fonksiyonlarının ve f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sürekli olduğunu ve $\forall x \in [a, b]$ için $p(x) \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz. $f(x) \equiv 0$ olduğu durumda (3.1.7) denklemine yani;

$$p(x)u''(x) + q(x)u'(x) + r(x)u(x) = 0 \quad (3.1.8)$$

denklemine homojen ALDD denir, $f(x) \neq 0$ olduğu durumda ise (3.1.7) denklemine homojen olmayan ALDD denir. (Hatırlatalım ki; eğer $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) = 0$ ise bu durum $f(x) \equiv 0$ biçiminde ifade edeceğiz ve eğer en az bir $x \in [a, b]$ için $f(x) \neq 0$ ise bu durum $f(x) \neq 0$ biçiminde ifade edilir.)

Teorem 3.1.1. Keyfi $x_0 \in [a, b]$ noktası ve keyfi y_0, y_1 reel sayıları verilsin. O halde (3.1.7) ALDD'nin

$$u(x_0) = y_0 \quad u'(x_0) = y_1 \quad (3.1.9)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü var ve bu çözüm tektir. (Kandemir, 2015)

Şimdi ALDD teorisinde önemli olan bir kavramı tanımlayacağız.

Tanım 3.1.2. Keyfi $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonları verilsin. O halde

$$W(x) := \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x).g'(x) - f'(x).g(x) \quad (3.1.10)$$

eşitliği ile tanımlı $W(x)$ fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının Wronskianı denir ve bu fonksiyon $W(f, g; x)$, $W(f(x), g(x))$, $W(f, g)|_x$ vs. biçimlerde gösterilir (Naimark, 1967). Şimdi Wronskian fonksiyonunun bazı önemli özelliklerini ifade edeceğiz (İspatlar için (Kandemir, 2015) kaynağına bakınız.)

Teorem 3.1.3. (3.1.7) ALDD'nin keyfi iki $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ çözümlerinin lineer bağımlı olması için en az bir $x_0 \in [a, b]$ için $W(u_1, u_2; x_0) = 0$ olması gerek ve yeter şarttır.

Teorem 3.1.4. $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları (3.1.8) ALDD'nin keyfi iki çözümü olmak üzere $W(x) := W(u, v; x)$ fonksiyonu için

$$p(x).W'(x) + q(x).W(x) = 0 \quad (3.1.11)$$

Şimdi (3.1.11) birinci mertebeden ALDD'ni çözerek aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

Sonuç 3.1.5. u ve v fonksiyonları (3.1.8) ALDD'nin keyfi çözümleri, x_0 ise $[a, b]$ aralığından alınmış keyfi bir nokta olmak üzere $W(x) := W(u, v; x)$ Wronskianı

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{q(s)}{p(s)} ds} \quad (3.1.12)$$

eşitliği ile ifade edilebilir.

Sonuç 3.1.6. u ve v fonksiyonları (3.1.8) ALDD'nin çözümleri ise, o halde $W(x) := W(u, v; x)$ Wronskianı ya tüm noktalarda sıfırdan farklıdır, ya da tüm noktalarda sıfıra eşittir.

Teorem (3.1.3)'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.7. (3.1.8) ALDD'nin iki $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ çözümlerinin lineer bağımsız olması için $W(u_1, u_2; x) \neq 0$ olması gerek ve yeter şarttır.

Sonuç (3.1.6) ve Sonuç(3.1.7) -den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.8. (3.1.7) ALDD'nin $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ çözümlerinin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart en az bir $x_0 \in [a, b]$ için

$$W(x_0) = W(u_1(x), u_2(x); x_0) \neq 0$$

olmasıdır.

Teorem 3.1.9. (3.1.8) ALDD'nin iki tane lineer bağımsız $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ çözümü mevcuttur ve bu denklemin her $u = u(x)$ çözümü

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) \quad (3.1.13)$$

biçiminde ifade edilebilir. (Bu ifadeye (3.1.8) denkleminin genel çözümü de denir) Burada c_1 ve c_2 sabit reel katsayılardır.

Teorem 3.1.10. $u_0(x)$ fonsiyonu homojen olmayan (3.1.7) ALDD'nin keyfi bir çözümü (yani keyfi bir özel çözümü) olsun $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonları ise (3.1.8) homojen ALDD'nin keyfi iki tane lineer bağımsız çözümleri olsun. O halde (3.1.7) homojen olmayan ALDD-nin her $u(x)$ çözümü

$$u(x) = u_0(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) \quad (3.1.14)$$

biçiminde ifade edilebilir; burada c_1 ve c_2 reel sayılardır.

Hatırlatalım ki (3.1.14) ifadesi (3.1.7) homojen olmayan ALDD-nin genel çözümü olarak adlandırılmaktadır.

Teorem 3.1.11. $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonları (3.1.8) homojen ALDD'nin keyfi iki lineer bağımsız çözümü olsun. O halde

$$\begin{aligned} u_0(x) &:= u_1(x) \int_a^x \frac{f(s)}{p(s)W(s)} u_2(s) ds - u_2(x) \int_a^x \frac{f(s)}{p(s)W(s)} u_1(s) ds \\ &= \int_a^x \frac{f(s)}{p(s)W(s)} (u_1(x)u_2(s) - u_2(x)u_1(s)) ds \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

eşitliği ile tanımlı $u_0(x)$ fonksiyonu homojen olmayan (3.1.7) ALDD'nin bir özel çözümü olur; burada $W(s)$ fonksiyonu ile $W(s) = W(u_1, u_2; s)$ Wronskianı gösterilmiştir.

Teorem (3.1.1)'den direkt olarak aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 3.1.12. Homojen (3.1.8) ALDD'nin her $u(x)$ çözümünün her sıfırı basittir yani $s \in [a, b]$ noktası $u(x)$ 'in bir sıfırı ise ($u(s) = 0$ ise) o halde $u'(s) \neq 0$ olur. (Kandemir, 2015)

Bu sonuçtan yararlanılarak aşağıdaki teorem elde edilir. (Kandemir, 2015)

Teorem 3.1.13. Homojen (3.1.8) ALDD'nin aşıkâr olmayan her $u(x)$ çözümünün (Yani $u(x) \not\equiv 0$ biçimindeki her $u(x)$ çözümünün) sonsuz sayıda sıfırı olamaz. (Yani sıfırları sonlu sayıdadır.)

İspat. Bu teorem olmayana ergi yöntemi ile ispat edilebilir. Kabul edelim ki, homojen (3.1.8) ALDD'nin en az bir $u_0(x)$ çözümünün sonsuz sayıda sıfırı vardır.

O halde Analizden iyi bilinen Bolzano-Weierstrass teoremi gereği bu sıfırların en az bir $s_0 \in [a, b]$ yığılma noktası vardır. Yığılma noktasının tanımı gereği $u_0(s_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots$ ve $s_n \rightarrow s_0$ olacak biçimde en az bir s_n dizisi mevcuttur. $u_0(x)$ çözümü sürekli olduğu için

$$u_0(s_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_0(s_n) = 0$$

eşitliği sağlanır. O halde

$$\begin{aligned} u_0'(s_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_0(s_n) - u_0(s_0)}{s_n - s_0} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 - 0}{s_n - s_0} = 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde;

$u_0(s_0) = 0$ ve $u_0'(s_0) = 0$ eşitlikleri sağlandığından Teorem (3.1.1) gereği $u_0(s) \equiv 0$ elde edilir. Çelişki elde ettik. İspat bitti.

3.2. Sınır Değer Problemleri İçin Green Fonksiyonu

Bilindiği gibi (3.1.7) genel biçimde verilmiş homojen olmayan ALDD, p, q, r, f fonksiyonları sürekli ve ayrıca $p(x)$ fonksiyonu sürekli diferansiyellenebilir ve de $\forall x \in [a, b]$ $p(x) \neq 0$ olduğu durumda

$$L[u] := -(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.2.1)$$

biçimine dönüştürülebilir.

(3.2.1) biçiminde yazılmış ALDD-lere kendine eşlenik biçimde yazılmış ALDD, $L[u]$ ifadesine ise kendine eşlenik diferansiyel ifade denir. $\forall x \in [a, b]$ için $p(x) \neq 0$ kabul ettiğimiz için ya $\forall x \in [a, b]$ için $p(x) > 0$ olacak ya da $\forall x \in [a, b]$ için $p(x) < 0$ olacak. Belirginlik için, genelliği azaltmadan, $\forall x \in [a, b]$ için $p(x) > 0$ kabul edebiliriz.

Şimdi

$$L[u] := -(p(x)u')' + q(x)u = 0 \quad (3.2.2)$$

homojen diferansiyel denkleminde ve

$$B_a(u) := \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \quad (3.2.3)$$

$$B_b(u) := \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \quad (3.2.4)$$

homojen sınır şartlarından oluşan sınır değer problemini gözönüne alalım; burada $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2)$ keyfi reel katsayılardır ve doğal olarak $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0 (i = 1, 2)$ şartını sağlıyorlar.

Tanım 3.2.1. $[a, b] \times [a, b]$ dikdörtgeninde tanımlı ve reel değerli $G(x, s)$ fonksiyonu verilsin. Eğer bu fonksiyon $\forall s \in [a, b]$ için x değişkenine göre

$$1) L[G(x, s)] = 0, x \neq s$$

$$2) B_a[G(\bullet, s)] = B_b[G(\bullet, s)] = 0$$

3) $\forall s \in [a, b]$ için $G(x, s)$ fonksiyonu x değişkenine göre $x = s$ noktasında süreklidir (yani $\forall s \in [a, b]$ için $\lim_{x \rightarrow s} G(x, s) = G(s, s)$ eşitliği sağlanır.)

4)

$$\frac{dG}{dx}\bigg|_{x=s^+} - \frac{dG}{dx}\bigg|_{x=s^-} = \frac{-1}{p(s)}$$

şartlarını sağlıyor ise o halde $G(x, s)$ fonksiyonuna (3.2.2)- (3.2.4) sınır değer problemi- nin (SDP) Green fonksiyonu denir.

Teorem 3.2.2. Eğer;

$$L[u] = 0, \quad x \in [a, b] \quad (3.2.5)$$

$$B_a(u) = B_b(u) = 0 \quad (3.2.6)$$

homojen SDP-nin sadece sıfır çözümü varsa, o halde (3.2.2)-(3.2.4) homojen olmayan SDP-nin Green fonksiyonu vardır ve tektir.(Naimark, 1967)

3.3. Homojen Olmayan Sınır Değer Probleminin Green Fonksiyonu Yardımı İle Çözümü

Bu kesimde

$$L[u] := -(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad a < x < b \quad (3.3.1)$$

homojen olmayan diferansiyel denkleminde ve homojen olmayan

$$B_a(u) := \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = f_1 \quad (3.3.2)$$

$$B_b(u) := \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = f_2 \quad (3.3.3)$$

sınır şartlarından oluşan sınır değer probleminin (SDP) çözümünün uygun homojen

$$L[u] = 0, \quad B_a(u) = B_b(u) = 0 \quad (3.3.4)$$

SDP'nin Green fonksiyonu yardımı ile ifadesi bulunacak. Her yerde $p \in C^1[a, b]$, $q, f \in C[a, b]$; $f_1, f_2 \in R$ olduğunu kabul edeceğiz.

Diferansiyel denklemler teorisinden iyi bilinmektedir ki; eğer $p(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli diferansiyellenebilir, q ve f fonksiyonları ise aynı aralıkta sürekli

ise (3.3.1) denkleminin

$$u(x_0) = c_1 \quad u'(x_0) = c_2 \quad (3.3.5)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü vardır ve tektir; burada $x_0 \in [a, b]$ keyfi noktadır, c_1, c_2 ise reel sayılardır.

Şimdi $L[u] = 0$ denkleminin iki tane lineer bağımsız $v(x)$ ve $w(x)$ çözümlerini tanımlayacağız.

$$L[u] = 0 \quad (3.3.6)$$

$$u(a) = \beta_1, \quad u'(a) = -\alpha_1 \quad (3.3.7)$$

başlangıç değer probleminin çözümü var ve tektir. Bu çözümü $v(x)$ ile gösterelim. (3.3.7) şartları gereği

$$B_a[v] = 0 \quad (3.3.8)$$

bulunur. Aynı diferansiyel denklemin

$$u(b) = \beta_2, \quad u'(b) = -\alpha_2 \quad (3.3.9)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü ise $w(x)$ ile gösterirsek

$$B_b[w] = 0 \quad (3.3.10)$$

eşitliğinin sağlandığı kolayca görülür.

Teorem 3.3.1. Eğer homojen (3.3.4) SDP'nin bir ve tek aşıkâr çözümü bulunuyorsa (yani bir tek $u = 0$ çözümü bulunursa), o halde $v(x)$ ve $w(x)$ çözümleri lineer bağımsızdır.

İspat. Aksini kabul edelim, yani kabul edelim ki, $v(x)$ ve $w(x)$ çözümleri lineer bağımlıdır. O halde $v(x) = c.w(x)$ olacak biçimde $c \neq 0$ sayısı bulunur. Bu durumda (3.3.10) gereği

$$B_b[v] = B_b[c.w] = c.B_b[w] = 0 \quad (3.3.11)$$

elde edilir. Böylece $v(x)$ fonksiyonu için

$$L[v] = 0, \quad B_a[v] = 0, \quad B_b[v] = 0 \quad (3.3.12)$$

eşitliklerinin sağlandığı elde edildi. Yani $v(x)$ fonksiyonu (3.3.4)'ün çözümüdür.

O halde teoremin şartı gereği $\forall x \in [a, b]$ için $v(x) = 0$ elde edilir.

Diğer taraftan $v(x)$ çözümünün tanımı gereği de

$$v(b) = \beta_2, \quad v'(b) = -\alpha_2 \quad (3.3.13)$$

eşitlikler sağlanır. $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$ olduğu için çelişki elde edildi. İspat bitti.

Teorem 3.3.2. Eğer (3.3.4) homojen SDP'nin bir tek $u = 0$ çözümü bulunuyorsa, o halde

$$L[u] = -f, \quad B_a[u] = f_1, \quad B_b[u] = f_2$$

homojen olmayan SDP'nin bir ve tek $u_0(x)$ çözümü bulunur ve bu çözüm için

$$u_0(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds + \frac{f_2}{B_b[v]} v(x) + \frac{f_1}{B_a[w]} w(x) \quad (3.3.14)$$

formülü geçerlidir. Burada $G(x, s)$ çekirdeği (3.3.1)-(3.3.4) homojen SDP-nin Green fonksiyonudur.

İspat.

$$\tilde{u}(x) := \int_a^b G(x, s) f(s) ds \quad (3.3.15)$$

fonksiyonunun (3.3.1) homojen olmayan diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olduğu bilinmektedir. Ayrıca

$$\tilde{\tilde{u}}(x) := c_1 v(x) + c_2 w(x) \quad (3.3.16)$$

fonksiyonlar ailesinin $L[v] = 0$ homojen diferansiyel denkleminin genel çözümü olduğunu biliyoruz. Burada c_1, c_2 keyfi reel sabitlerdir. O halde lineer diferansiyel denklemler teorisinden bilinmektedir ki, (Naimark, 1967)

$$u(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds + c_1 v(x) + c_2 w(x) \quad (3.3.17)$$

fonksiyonlar ailesi (3.3.1) homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümüdür.

(3.3.17) ifadesini (3.3.2) sınır şartlarında yerine yazarsak

$$\begin{aligned} f_1 &= B_a[u] = B_a[\tilde{u} + \tilde{\tilde{u}}] = B_a[\tilde{u}] + B_a[\tilde{\tilde{u}}] \\ &= 0 + B_a[\tilde{\tilde{u}}] = c_1 B_a[v] + c_2 B_a[w] \\ &= c_2 B_a[w] \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

eşitliği bulunur, (3.3.17) ifadesini (3.3.3) sınır şartlarında yerine yazarsak

$$f_2 = c_1 B_b[v] \quad (3.3.19)$$

eşitliği elde edilir. İlk önce $B_a[w] \neq 0$ olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim, yani kabul edelim ki

$$B_a[w] = 0 \quad (3.3.20)$$

olsun.

Bu durumda

$$B_a[v] = 0, \quad B_a[w] = 0 \quad (3.3.21)$$

eşitlikleri

$$\begin{cases} \alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) = 0 \\ \alpha_1 w(a) + \beta_1 w'(a) = 0 \end{cases} \quad (3.3.22)$$

denklem sistemi biçiminde yazılabilir.

$|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$ olduğu için (3.3.22) gereği

$$\begin{vmatrix} v(a) & v'(a) \\ w(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3.23)$$

elde edilir. Yani

$$W(v, w; a) = 0 \quad (3.3.24)$$

elde edilir.

(3.3.24) gereği $v(x)$ ve $w(x)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır. Böylece Teorem (3.3.1) ile çelişki elde ettik.

Bu nedenle $B_a[w] \neq 0$ sonucuna varılır. Benzer biçimde $B_b[v] \neq 0$ elde edilir. O halde (3.3.18) ve (3.3.19)- dan

$$c_1 = \frac{f_2}{B_b[v]}, \quad c_2 = \frac{f_1}{B_a[w]} \quad (3.3.25)$$

bulunur. Bunu (3.3.17)'de yerine yazarsak, talep edilen (3.3.14) formülü elde edilir. İspat bitti.

Green fonksiyonu ile ilgili en önemli özellik aşağıdaki iki teorem ile ifade edilir.

Teorem 3.3.3. Eğer (3.2.5)-(3.2.6) homojen SDP-nin ancak ve ancak aşikar çözümü (yani sıfır çözümü) bulunursa, o halde her $f : [a, b] \rightarrow R$ sürekli fonksiyonu için

$$L[u] = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.3.26)$$

$$B_a[u] = B_b[u] = 0 \quad (3.3.27)$$

homojen olmayan SDP'nin bir tek çözümü bulunur ve bu çözüm için

$$u(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds \quad (3.3.28)$$

formülü geçerlidir; burada $G(x, s)$ fonksiyonu (3.2.5)-(3.2.6) homojen SDP-nin Green fonksiyonudur.

Teorem 3.3.4. Eğer $u = u_0(x)$ fonksiyonu (3.2.5)-(3.2.6) homojen SDP-nin aşikar olmayan bir çözümü ise, o halde (3.3.26)-(3.3.27) homojen olmayan SDP-nin çözümünün mevcut olması için $f(x)$ fonksiyonunun $u_0(x)$ fonksiyonuna ortogonal olması, yani

$$\int_a^b f(x) u_0(x) dx = 0 \quad (3.3.29)$$

eşitliğinin sağlanması gerek ve yeter şarttır.

Şimdi 2.mertebeden ALDD için Green fonksiyonunun bulunması yöntemini bir örnekle açıklayalım.

Örnek 3.3.5. $f : [a, b] \rightarrow R$ sürekli fonksiyon olsun.

$$-u'' - 4u = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.3.30)$$

homojen olmayan ALDD-in

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (3.3.31)$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünü araştıralım. (3.3.30) homojen olmayan denkleme uygun olan

$$-u'' - 4u = 0 \quad (3.3.32)$$

homojen denkleminin iki tane lineer bağımsız çözümünü bulabiliriz. Örneğin $u_1(x) = \cos 2x$ ve $u_2(x) = \sin 2x$ fonksiyonları (3.3.32) homojen denkleminin iki tane lineer bağımsız çözümü olduğu açıktır. Teorem(3.1.11) gereği

$$u_0(x) = - \int_0^x \frac{f(s)}{p(s)W(s)} (\cos 2x \sin 2s - \sin 2x \cos 2s) ds \quad (3.3.33)$$

fonksiyonu (3.3.30) homojen olmayan denklemin bir özel çözümü olacak.

$$\begin{aligned} p(s) = 1, \quad W(s) &= \cos 2s(\sin 2s)' - (\cos 2s)' \sin 2s \\ &= 2 \cos^2 2s + 2 \sin^2 2s = 2 \end{aligned}$$

olduğu için (3.3.33) çözümü

$$u_0(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x \sin 2(x-s) f(s) ds \quad (3.3.34)$$

biçiminde yazabiliriz.

Bu durumda (3.3.30) homojen olmayan ALDD-nin genel çözümünü

$$u(x) = u_0(x) + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad (3.3.35)$$

biçiminde ifade edebiliriz. (3.3.35) ifadesini (3.3.31) sınır şartlarında yerine yazarsak (3.3.30)-(3.3.31) probleminin çözümünü

$$\begin{aligned} u(x) = & -\frac{1}{2} \int_0^x \sin 2(x-s) f(s) ds + \frac{\sin 2x}{2 \sin 2} \int_0^x \sin(2-2s) f(s) ds \\ & + \frac{\sin 2x}{2 \sin 2} \int_0^1 \sin(2-2s) f(s) ds \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

biçiminde buluruz. Eğer $G(x, s)$ fonksiyonunu

$$G(x, s) = \frac{1}{2 \sin 2} \begin{cases} \sin 2s \cdot \sin[2(1-x)], & \text{eğer } s \leq x \text{ ise} \\ \sin 2x \cdot \sin[2(1-s)], & \text{eğer } s \geq x \text{ ise} \end{cases} \quad (3.3.37)$$

eşitliği ile tanımlarsak (3.3.36) ifadesini

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds \quad (3.3.38)$$

biçiminde elde ederiz. Ayrıca (3.3.37) ile tanımlı $G(x, s)$ fonksiyonunun verilmiş probleme uygun homojen

$$-u'' - 4u = 0, \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (3.3.39)$$

SDP-nin Green fonksiyonu olduğunu kolayca gösterebiliriz.

3.4. Sturm-Liouville Problemleri

3.4.1 Klasik Sturm-Liouville Problemi

Bu kesimde Sturm-Liouville probleminin tanımı ve en temel özelliklerini ifade edeceğiz. $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks parametresi (bu parametreye özdeğer parametresi veya spektral parametre de denir) içeren

$$L[u] := -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda \varphi(x)u, \quad a < x < b \quad (3.4.1)$$

2. mertebeden homojen ALDD-inden ve

$$B_a[u] = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \quad (3.4.2)$$

$$B_b[u] = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \quad (3.4.3)$$

sınır şartlarından oluşan probleme klasik Sturm-Liouville problemi (SLP) denir. Burada $p(x)$, $q(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlardır ve $\forall x \in [a, b]$ için $p(x) > 0$ ve $\varphi(x) > 0$ olduğu kabul edilir; $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2)$ reel katsayılarıdır ve $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0$ ($i = 1, 2$) şartı sağlanır.

Eğer $\lambda = \lambda_0$ değeri için (3.4.1)-(3.4.3) SLP-nin aşıkâr olmayan $u_0 \neq 0$ çözümü varsa, λ_0 değerine özdeğer, $u_0(x)$ fonksiyonuna ise bu özdeğere uygun özfonksiyon denir.

Şimdi çok önemli bir özdeşliği elde edeceğiz. $L[u]$ diferansiyel operatörünün tanımı gereği

$$\begin{aligned} & uL[v] - vL[u] \\ &= u(-(pv')' + qv) - v(-(pu')' + qu) \\ &= -u(pv')' + v(pu')' \\ &= -u(p'v' + pv'') + v(p'u' + pu'') \\ &= -p(uv'' - u''v) - p'(uv' - u'v) \\ &= -p(uv' - u'v)' - p'(uv' - u'v) \\ &= -(p(x)W(u, v; x))' \end{aligned}$$

Böylece

$$uL[v] - vL[u] = -\frac{d}{dx}(p W(u, v)) \quad (3.4.4)$$

eşitliği elde edildi. Bu eşitliğe Lagrange özdeşliği de denir.

Teorem 3.4.1. (3.4.1)-(3.4.3) SLP'-nin tüm özdeğerleri reeldir.

İspat. $\lambda = \lambda_0$ özdeğer, $u_0(x)$ ise uygun özfonksiyon olsun. O halde

$$L[u_0] = \lambda_0 \varphi u_0, \quad B_a[u_0] = B_b[u_0] = 0 \quad (3.4.5)$$

eşitlikleri sağlanır. α_i, β_i ($i = 1, 2$) katsayılarının reel olduğunu dikkate alarak (3.4.5)-deki eşitliklerin kompleks eşleniğini alırsak

$$L[\overline{u_0}] = \overline{\lambda_0} \varphi \overline{u_0}, \quad B_a[\overline{u_0}] = B_b[\overline{u_0}] = 0 \quad (3.4.6)$$

elde edilir. Bu eşitlikler gereği λ_0 -ın kompleks eşleniği olan $\overline{\lambda_0}$ sayısı da (3.4.1)-(3.4.3) SLP-nin özdeğeridir ve bu özdeğere uygun özfonksiyon $\overline{u_0}$ fonksiyonudur. (3.4.5) ve (3.4.6)'dan kolayca

$$u_0 L[\overline{u_0}] - \overline{u_0} L[u_0] = (\lambda_0 - \overline{\lambda_0}) \varphi |u_0|^2 \quad (3.4.7)$$

elde edilir. (3.4.4) Lagrange özdeşliğini uygularsak,

$$(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}) \varphi |u_0|^2 = -\frac{d}{dx} (p W(u_0, \overline{u_0})) \quad (3.4.8)$$

bulunur. Her iki tarafı integrallersek

$$(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}) \int_a^b \varphi |u_0|^2 dx = p(a) W(u_0, \overline{u_0}; a) - p(b) W(u_0, \overline{u_0}; b) \quad (3.4.9)$$

eşitliğini elde ederiz.

Hem u_0 , hem de $\overline{u_0}$ fonksiyonlarının her ikisi de birinci sınır şartını sağladığı için, yani;

$$\alpha_1 u_0(a) + \beta_1 u_0'(a) = 0$$

$$\alpha_1 \overline{u_0}(a) + \beta_1 \overline{u_0}'(a) = 0$$

eşitlikleri sağlandığı için ve de bu lineer denklem sisteminin $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$ çözümü bulunduğu için bu sistemin determinantı sıfıra eşittir. Dolayısı ile $W(u_0, \overline{u_0}; a) = 0$ elde edildi. Benzer biçimde $W(u_0, \overline{u_0}; b) = 0$ olduğunu gösterebiliriz. Bu nedenle (3.4.9) eşitliğinin sağ tarafı sıfıra eşittir. O halde

$$(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}) \int_a^b \varphi |u_0|^2 dx = 0 \quad (3.4.10)$$

eşitliği elde edilir. $u_0 \neq 0$ olduğu için ve de $\varphi > 0$ olduğu için sonuncu eşitlikten $\lambda_0 - \overline{\lambda_0} = 0$ bulunur. Yani λ_0 özdeğerinin reel olduğu ispat olundu.

Teorem 3.4.2. (3.4.1)-(3.4.3) Sturm-Liouville probleminin iki farklı λ ve μ özdeğerlerine sırası ile karşılık gelen $u(x)$ ve $v(x)$ özfonksiyonları $\varphi(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır, yani;

$$\int_a^b u(x) \overline{v(x)} \varphi(x) dx = 0 \quad (3.4.11)$$

eşitliği sağlanır. (Titchmarsh, 1962)

Not 3.4.3. $L^2_\varphi[a, b]$ ile $[a, b]$ aralığında ölçülebilir olan ve

$$\int_a^b |u(x)|^2 \varphi(x) dx < \infty$$

şartını sağlayan tüm fonksiyonların sınıfını gösterelim. Bu lineer uzayda

$$\langle u, v \rangle_{L^2_\varphi[a, b]} := \int_a^b u(x) \overline{v(x)} \varphi(x) dx \quad (3.4.12)$$

eşitliğinin bir iç çarpım tanımladığı literatürden iyi bilinmektedir. Yani $L^2_\varphi[a, b]$ bir iç çarpım uzayıdır. O halde Teorem 3.4.2 gereği

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle u, v \rangle_{L^2_\varphi[a, b]} = 0$$

elde edilir.

Bu nedenle (3.4.11) eşitliğini sağlayan fonksiyonlara ortogonal (dik) fonksiyonlar denir. İster teorik matematikte isterse uygulamalarında ortogonalite kavramı çok önemli bir kavramdır.

Teorem 3.4.4. (3.4.1)-(3.4.3) SLP'-nin her özdeğerine karşılık en az bir reel değerli özfonksiyonu mevcuttur.

İspat. (3.4.1)-(3.4.3) SLP'-nin keyfi bir λ özdeğeri verilsin. $u(x) = v(x) + iw(x)$ fonksiyonu bu özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyon olsun; burada $v(x)$ ve $w(x)$

reel değerli fonksiyonlardır. $q(x)$, $p(x)$ fonksiyonları reel değerli oldukları için ve de α_i, β_i ($i = 1, 2$) katsayıları reel sayılar olduğu için $Lu = \lambda \varphi u$ eşitliğini

$$L(v + iw) = L(v) + iL(w) = \lambda v + i\lambda w$$

biçiminde de yazabiliriz. Burada λ özdeğerinin reel olduğunu dikkate alırsak sonuncu eşitlikten iki tane

$$L(v) = \lambda v \quad \text{ve} \quad L(w) = \lambda w \quad (3.4.13)$$

eşitliği elde edilir.

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$$

sınır şartını ise

$$\alpha_1 v(a) + i\alpha_1 w(a) + \beta_1 v'(a) + i\beta_1 w'(a) = 0$$

biçiminde yazarsak

$$(\alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a)) + i(\alpha_1 w(a) + \beta_1 w'(a)) = 0$$

eşitliğini buluruz. Buradan

$$\alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) = 0, \quad \alpha_1 w(a) + \beta_1 w'(a) = 0 \quad (3.4.14)$$

eşitlikleri elde edilir. Tamamen benzer biçimde

$$\alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0, \quad \alpha_2 w(b) + \beta_2 w'(b) = 0 \quad (3.4.15)$$

eşitlikleri elde edilir.

(3.4.13)-(3.4.15) eşitlikleri gereği $v(x)$ ve $w(x)$ reel değerli fonksiyonlarının her ikisi (3.4.1)-(3.4.3) SLP-nin çözümüdür. $u(x)$ özfonksiyonu sıfırdan farklı olduğu için v ve w fonksiyonlarından en az biri sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla λ özdeğerine uygun özfonksiyondur. İspat bitti.

Teorem 3.4.5. (3.4.1)-(3.4.3) SLP'-nin bütün özdeğerleri basit özdeğerlerdir, yani her bir özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonların maximal sayısı birdir. Yani her bir özdeğere uygun gelen tüm özfonksiyonlar bir-birinden sabit çarpan ile elde edilir.

İspat. Keyfi λ özdeğeri ve bu özdeğere uygun keyfi iki tane $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ özfonksiyonları verilsin. Bu durumda u_1 ve u_2 fonksiyonları (3.4.2) sınır şartlarını sağlar. Yani;

$$\alpha_1 u_1(a) + \beta_1 u_1'(a) = 0 \quad (3.4.16)$$

$$\alpha_1 u_2(a) + \beta_1 u_2'(a) = 0 \quad (3.4.17)$$

eşitlikleri sağlanır. (3.4.16)-(3.4.17) eşitliklerine α_1, β_1 değişkenlerine göre homojen lineer denklem sistemi gibi bakarsak, $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$ olduğu için bu sistemin determinantı sıfıra eşittir, yani

$$W(u_1, u_2; a) = 0 \quad (3.4.18)$$

Wronskian sıfıra eşit olduğu için (3.4.1) lineer diferansiyel denkleminin u_1 ve u_2 çözümleri lineer bağımlıdır. İspat bitti.

3.5. Fourier Serileri, Fourier Katsayıları, Besssel Eşitsizliği ve Parseval Eşitliği

Önceki kesimde $L^2_\varphi[a, b]$ iç çarpım uzayını tanımlamıştık. Bu iç çarpım uzayının bir Hilbert uzayı olduğu bilinmektedir (Griffel, D.H., 2002). Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{L^2_\varphi[a, b]} = \left(\int_a^b |u(x)|^2 \varphi(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.5.1)$$

eşitliği ile tanımlanıyor. Bu uzayda $(f_n(x))$ fonksiyon dizisi $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak ise, yani

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{L^2_\varphi[a, b]} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.5.2)$$

ise o halde (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna orta-kuadratik yakınsaktır denir. $L^2_\varphi[a, b]$ Hilbert uzayında $A := \{\psi_n\}^\infty$ ortogonal fonksiyonlar sistemi verilsin. Eğer

$$\varphi_n(x) := \frac{1}{\|\psi_n\|_{L^2_\varphi[a, b]}} \cdot \psi_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

gösterirsek $B = \{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ ortonormal fonksiyonlar sistemi elde edilir. Yani

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{L^2_\varphi[a, b]} = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \quad \text{ise} \quad (3.5.3)$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 3.5.1. $f \in L^2_\varphi[a, b]$ fonksiyonu verilsin.

$$c_k := \langle f, \varphi_k \rangle, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.5.4)$$

sayılarına f fonksiyonunun $\{\varphi_n\}^\infty$, ortonormal fonksiyonlar sistemine göre Fourier katsayıları denir.

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \quad (3.5.5)$$

serisine ise (ister yakınsak olsun, isterse de ıraksak olsun) f fonksiyonunun $\{\varphi_n\}^\infty$, ortonormal fonksiyonlar sistemine göre Fourier serisi denir.

$$E_n = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \quad (3.5.6)$$

gösterelim. Burada $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ ile $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ fonksiyonlarının (vektörlerinin) gerdiği lineer alt uzay gösterilmiştir.

$$E_n = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} = \{\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2, \dots, \alpha_n \varphi_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in C\}$$

Şimdi E_n lineer alt uzayında f elemanına (vektörüne, fonksiyonuna) en yakın elemanı bulmaya çalışalım, yani

$$\|f - \psi\|_{L^2_\varphi[a, b]} = \min_{w \in E_n} \|f - w\|_{L^2_\varphi[a, b]} \quad (3.5.7)$$

olacak biçimde elemanın mevcut olup olmadığını ve de mevcut ise hangi eleman olduğunu bulmaya çalışacağız.

$\forall w \in E_n$ alalım. O halde

$$w = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2, \dots, \alpha_n \varphi_n \quad (3.5.8)$$

olacak biçimde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sayıları mevcuttur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|f - w\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 &= \langle f - w, f - w \rangle_{L^2_\varphi[a,b]} \\ &= \langle f, f \rangle_{L^2_\varphi[a,b]} - \langle f, w \rangle_{L^2_\varphi[a,b]} - \langle w, f \rangle_{L^2_\varphi[a,b]} + \langle w, w \rangle_{L^2_\varphi[a,b]} \\ &= \|f\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 - \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} \langle f, \varphi_k \rangle - \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle \varphi_k, f \rangle + \|w\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 \\ &= \|f\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 - \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} \langle f, \varphi_k \rangle - \sum_{k=1}^n \alpha_k \overline{\langle f, \varphi_k \rangle} + \|w\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

eşitliği elde edilir.

$$c_k := \langle f, \varphi_k \rangle, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.5.10)$$

göstereyim.

Şimdi (3.5.9) eşitliğini

$$\|f - w\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 = \|f\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 - \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} c_k - \sum_{k=1}^n \alpha_k \overline{c_k} + \|w\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 \quad (3.5.11)$$

biçiminde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} |\alpha_k - c_k|^2 &= (\alpha_k - c_k) \overline{(\alpha_k - c_k)} \\ &= \alpha_k \overline{\alpha_k} - \alpha_k \overline{c_k} - \overline{\alpha_k} c_k + c_k \overline{c_k} \\ &= |\alpha_k|^2 - \alpha_k \overline{c_k} - \overline{\alpha_k} c_k + |c_k|^2 \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

eşitliğinden yararlanırsak

$$-\overline{\alpha_k} c_k - \alpha_k \overline{c_k} = |\alpha_k - c_k|^2 - |\alpha_k|^2 - |c_k|^2 \quad (3.5.13)$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca $\{\varphi_n\}$ ortonormal sistem olduğu için

$$\|w, w\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 = \langle w, w \rangle_{L^2_\varphi[a,b]} = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \|\varphi_k\|^2 = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \quad (3.5.14)$$

eşitliği sağlanır. (3.5.13) ve (3.5.14) eşitliklerini (3.5.11)-de dikkate alırsak

$$\|f - w\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 = \|f\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 + \sum_{k=1}^n |\alpha_k - c_k|^2 \quad (3.5.15)$$

eşitliği elde edilir. Sağ tarafın en küçük değeri $\alpha_k = c_k$, $k = 1, 2, \dots$ için elde edilir. Yani

$$\min_{w \in E_n} \|f - w\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \quad (3.5.16)$$

elde edilir. Yani

$$\min_{w \in E_n} \|f - w\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 \quad (3.5.17)$$

Böylece aşağıdaki teoremi elde ettik.

Teorem 3.5.2. $f \in L^2_\varphi[a, b]$ fonksiyonuna E_n lineer uzayında en yakın olan eleman

$$\sum_{k=1}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

elamandır. Yani

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\| = \min_{w \in E_n} \|f - w\| \quad (3.5.18)$$

eşitliği sağlanır.

Sonuç 3.5.3. $f \in L^2_\varphi[a, b]$ elemanına (fonksiyonuna) E_n -in en yakın elemanı f fonksiyonunun

$$f \sim \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

Fourier serisinin n-ci kısmi toplamıdır.

Sonuç 3.5.4. (3.5.15) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \min_{w \in E_n} \|f - w\|_{L^2_\varphi[a,b]} &= \|f\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 - \sum_{k=1}^n |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \\ &= \|f\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.5.5. (Bessel Eşitsizliği) Sayılabilir sayıda $B := \{\varphi_n(x)\}^\infty$, fonksiyonlar sistemi $L^2_\varphi[a, b]$ Hilbert uzayında keyfi bir ortonormal sistem ise, o halde $c_k := \langle f, \varphi_k \rangle$ $k = 1, 2, \dots$ Fourier katsayıları için $\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2$ serisi yakınsaktır ve de

$$\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 \leq \|f\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 \quad (3.5.20)$$

eşitsizliği sağlanır. (Bu eşitsizlik literatürde Bessel eşitsizliği olarak adlandırılır.)

İspat. (3.5.19) gereği her $n \in N$ için

$$\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \|f\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2$$

eşitsizliği sağlanır. $n \rightarrow \infty$ olmakla limite geçerse (3.5.20) eşitsizliği bulunur. İspat bitti.

Sonuç 3.5.6. $L^2_\varphi[a, b]$ Hilbert uzayında keyfi bir $\{\psi_n\}_n^\infty$ ortogonal sistemi verilsin. O halde $\forall f \in L^2_\varphi[a, b]$ için

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{|\langle f, \psi_k \rangle|^2}{\|\psi_k\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2} \quad (3.5.21)$$

serisi yakınsaktır ve de

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{|\langle f, \psi_k \rangle|^2}{\|\psi_k\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2} \leq \|f\|_{L^2_\varphi[a,b]}^2 \quad (3.5.22)$$

eşitsizliği sağlanır. (Bu eşitsizlik de Bessel eşitsizliği olarak adlandırılır.)

İspat.

$$\varphi_k(x) := \frac{\psi_k(x)}{\|\psi_k\|}, \quad k = 1, 2, \dots$$

gösterirsek $\{\varphi_k(x)\}$ fonksiyonlar sistemi $L^2_\varphi[a, b]$ bir ortonormal fonksiyonlar sistemi oluşturuyor. O halde (3.5.20) Bessel eşitsizliği gereği

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \leq \|f\|_{L^2_\varphi[a, b]}^2 \quad (3.5.23)$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\langle f, \varphi_k \rangle_{L^2_\varphi[a, b]} = \left\langle f, \frac{\psi_k}{\|\psi_k\|_{L^2_\varphi[a, b]}} \right\rangle_{L^2_\varphi[a, b]} = \frac{\langle f, \psi_k \rangle_{L^2_\varphi[a, b]}}{\|\psi_k\|_{L^2_\varphi[a, b]}} \quad (3.5.24)$$

eşitsizliği gereği (3.5.23)-den talep olunan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle f, \psi_k \rangle_{L^2_\varphi[a, b]}|^2}{\|\psi_k\|_{L^2_\varphi[a, b]}^2} \leq \|f\|_{L^2_\varphi[a, b]}^2$$

Bessel eşitsizliği elde edilir.

Tanım 3.5.7. Keyfi H ayrılabilir Hilbert uzayı ve bu Hilbert uzayında keyfi $\{e_n\}_1^\infty$ ortogonal sistemi ($i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle_H = 0$) verilsin.

Eğer $span(\{e_n\}_1^\infty) := \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k \mid \alpha_i \in C, k \in N\}$ lineer alt uzayı H Hilbert uzayında her yerde yoğun ise, yani

$$\overline{span(\{e_n\}_1^\infty)} = H \quad (3.5.25)$$

ise $\{e_n\}_1^\infty$ vektörler sistemi H -da tamdır denir.

Sonuç 3.5.8. $\{e_n\}_1^\infty$ vektörler sisteminin H ayrılabilir Hilbert uzayında tam olması için gerek ve yeter şart $\forall \epsilon > 0$ için $\exists p = p(\epsilon) \in N$ ve $\exists \alpha_i = \alpha_i(\epsilon) \in C, i = 1, 2, \dots$ sayılarının mevcut olmasıdır ki;

$$\left\| f - \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i \right\|_H < \epsilon \quad (3.5.26)$$

olsun.

Sonuç 3.5.9. H ayrılabilir Hilbert uzayında keyfi bir $\{e_n\}_1^\infty$ tam ortonormal sistemi verilmişse

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle_H|^2$$

serisi yakınsaktır ve

$$\|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle_H|^2 \quad (3.5.27)$$

eşitliği sağlanır. (Bu eşitliğe Parseval eşitliği denir.)

Sonuç 3.5.10. $L_\varphi^2[a, b]$ Hilbert uzayında keyfi $\{\psi_n\}_1^\infty$ ortogonal sistemi verilsin. Eğer bu sistem tam ise o halde

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle f, \psi_k \rangle_{L_\varphi^2[a, b]}|^2}{\|\psi_k\|_{L_\varphi^2[a, b]}^2} = \|f\|_{L_\varphi^2[a, b]}^2 \quad (3.5.28)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliğe $L_\varphi^2[a, b]$ de Parseval eşitliği denir.

Böylece aşağıdaki önemli teoremleri ispat ettik.

Teorem 3.5.11. $L_\varphi^2[a, b]$ Hilbert uzayında keyfi $\{\varphi_n\}$ tam ortonormal fonksiyonlar sistemi verilsin. O halde her $f \in L_\varphi^2[a, b]$ fonksiyonu için

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \quad c_k := \langle f, \varphi_k \rangle_{L_\varphi^2[a, b]}$$

Fourier serisi yakınsaktır ve

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle_{L_\varphi^2[a, b]} \cdot \varphi_k$$

eşitliği sağlanır, yani her $f \in L_\varphi^2[a, b]$ fonksiyonunun Fourier serisi yakınsaktır ve kendisine yakınsıyor.

3.6. Salınım ve Ayırma Teorisi

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (3.6.1)$$

diferansiyel denklemini göz önünde bulunduralım. Burada $\forall x \in [a, b]$ için $a_2(x) \neq 0$ ve $a_i(x) \in C[a, b]$ dir.(3.6.1) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden yazalım

$$y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Şimdi sonuncu denklemin her iki tarafını

$$k(x) = e^{\int_a^x p(s)ds}$$

fonksiyonu ile çarpalım. O halde bu denklem

$$\frac{d}{dx}(k(x)y') + k(x)q(x)y = 0$$

biçiminde yazılabilir. $g(x) = k(x).q(x)$ ile gösterirsek, sonuncu denklem kendine eşlenik olan

$$(ky')' + g(x)y = 0 \quad (3.6.2)$$

denklemini biçiminde yazılır.

$$\begin{aligned} L(y) &= (ky')' + g(x)y \\ M(y) &= a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

diferansiyel operatörlerini tanımlayalım. M diferansiyel operatörünün eşleniği

$$\overline{M} = (a_2 y)'' - (a_1 y)' + a_0 y$$

ile tanımlanır. Bu denklemde gerekli işlemlerin yapılmasının ardından

$$\overline{M} = a_2 y'' + (2a_2' - a_1)y' + (a_2'' - a_1' + a_0)y$$

elde edilir. Bu ifadeden yararlanarak kolayca

$$vM(u) - u\overline{M}(v) = [(a_1 - a_2')vu + a_2(vu' - uv')]'$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik Lagrange özdeşliği olarak adlandırılır ve

$$P(u, v) = (a_1 - a_2')vu + a_2(vu' - uv')$$

gösteriminden yararlanarak Lagrange özdeşliğini

$$vM(u) - u\overline{M}(v) = \frac{d}{dx}P(u, v)$$

şekilinde yazabiliriz. En son elde edilen bu denklemi integrallersek

$$\int_a^b [vM(u) - u\overline{M}(v)] dx = P(u, v)|_a^b$$

formülü bulunur. Bu formüle Green Formülü denir.

Eğer $\overline{M}(u) = M(u)$ ise $M(u) = 0$ denklemi kendine eşlenik olarak adlandırılır.

Böylece eğer $M(u) = 0$ kendine eşlenik ise

$$a_2' = a_1$$

elde edilir. Bu durumda Lagrange Özdeşliği

$$vM(u) - u\overline{M}(v) = [a_2(vu' - uv')] = [a_2(x)W(v, u)]'$$

denkleme dönüşür, M diferansiyel operatörü ise

$$M(u) = (a_2u')' + a_0u$$

biçiminde ifade edilir.

Açıktır ki (3.6.3) de tanımlanan L operatörü kendine eşleniktir ve (3.6.2)'den önceki tartışmalar gösteriyor ki her genel lineer denklem kendine eşlenik biçimde yazılabilir.

3.6..1 Ayırma Teoremleri

Teorem 3.6.1. (Sturm Ayırma Teoremi)

- 1) $M(y) = 0$ denkleminin aşıkâr olmayan her çözümünün $[a, b]$ aralığında en fazla sonlu sayıda sıfırı olabilir.
- 2) Her bir çözümün tüm sıfırları basittir.
- 3) Eğer $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonları $M(y) = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri ise, o halde $u_1(x)$ 'in herhangi iki sıfırı arasında $u_2(x)$ 'in kesin olarak bir sıfırı vardır. (yani bir tek sıfırı vardır.)

İspat.

- 1) Aksini kabul edelim yani $M(y) = 0$ denkleminin aşıkâr olmayan bir çözümünün $[a, b]$ aralığında sonsuz sayıda sıfırı olsun ve bu sıfırların oluşturduğu kümeyi $\{z_n\}$ dizisi ile gösterelim. Bolzano-Weierstrass teoremi gereği $\{z_n\}$ dizisinin $x_n \rightarrow \hat{x}$ olacak şekilde en az bir $\{x_n\}$ alt dizisi mevcuttur. O halde

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y(x_n) = y(\hat{x})$$

dir. Ayrıca

$$y'(\hat{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y(x_n) - y(\hat{x})}{x_n - \hat{x}} = 0$$

dır. Buradan varlık ve teklik teoremi gereği $y(x) \equiv 0$, yani çelişki elde edildi. İspat bitti.

- 2) Aksini kabul edelim yani $\tilde{x} \in [a, b]$ noktası $y(x)$ çözümünün basit olmayan sıfır yeri olsun. O halde

$$y(\tilde{x}) = 0, \quad y'(\tilde{x}) = 0$$

elde edilir. Varlık ve teklik teoremine göre bu şartı sağlayan çözüm vardır ve tektir. Sıfır fonksiyonu da (aşıkâr çözüm de) bu şartları sağladığı için $y(x) \equiv 0$ elde edilir. Çelişki elde ettik. İspat bitti.

- 3) x_0, x_1 'in $u_1(x)$ 'in aradışık iki sıfırı olduğunu varsayalım ve kabul edelim ki $x_0 < x_1$ olsun. O halde $u_2(x_0) \neq 0$ ve $u_2(x_1) \neq 0$ 'dır aksi halde $W(u_1, u_2)(x_i) = 0$, $i = 0, 1$ olur. Genelliği bozmadan $x \in (x_0, x_1)$ -de $u_1(x) > 0$, $u_2(x_0) > 0$ kabul edelim. u_1 ve

u_2 fonksiyonlarının x_0 ve x_1 noktalarındaki Wronskian'ları için

$$W(u_1, u_2)(x_0) = -u_1'(x_0)u_2(x_0)$$

$$W(u_1, u_2)(x_1) = -u_1'(x_1)u_2(x_1)$$

eşitlikleri sağlanır. $u_1'(x_0) > 0$ olduğunda $W(x_0) < 0$ 'dır. Bilinmektedir ki, u_1, u_2 fonksiyonlarının Wronskianı işaret değiştiremez bu yüzden $W(x_1) < 0$ 'dır. Fakat $u_1'(x_1) < 0$ 'dır, yani bu $u_2(x_1) < 0$ olmasını gerektirir. Böylece $u_2(x)$ 'in (x_0, x_1) de bir sıfırı olması gerekir.

Eğer bu argümanı u_1 ve u_2 'nin rollerini değiştirerek uygularsak, $u_2(x)$ 'nin ardışık iki sıfırı arasında $u_1(x)$ 'in bir sıfırı olması gerektiğini görürüz. Böylece u_1 ve u_2 nin sıfırları ardışıktır.

3.6..2 Salınım Teoremleri

Bu kesimde

$$L(y) = (ky')' + gy = 0 \quad a < x < b$$

şeklindeki denklemleri ele alacağız. Burada $k \in C^1[a, b]$, $g \in C[a, b]$ ve de $\forall x \in [a, b]$ için $k(x) > 0$ olduğunu kabul edeceğiz.

Teorem 3.6.2. $L_i(y) = (ky')' + g_i y = 0$ olsun. Burada $g_2 > g_1$ ve g_2 (a, b) 'nin herhangi bir alt aralığında özdeş olarak sıfır değildir. Eğer $L_1(u_1) = 0$ ve $L_2(u_2) = 0$ ise, o halde $u_1(x)$ 'in herhangi iki ardışık sıfırının arasında $u_2(x)$ 'in bir sıfırı vardır.

İspat. Varsayalım ki; $u_1(x_1) = u_1(x_2) = 0$ ve (x_1, x_2) 'da $u_2(x) \neq 0$ olsun. Genelliği bozmadan (x_1, x_2) 'da $u_1, u_2 > 0$ alalım. Lagrange özdeşliğinden

$$u_2 L_1(u_1) - u_1 L_2(u_2) = \frac{d}{dx} \left(k(x)(u_2 u_1' - u_1 u_2') \right)$$

yazılabilir. Ayrıca L_1 ve L_2 diferansiyel operatörlerin tanımı gereği

$$L_1(u_2) - L_2(u_2) = (g_1 - g_2)u_2$$

yazabiliriz.

Böylece

$$u_2 L_1(u_1) - u_1 [L_2(u_2) + (g_1 - g_2)u_2] = (k(x) (u_2 u_1' - u_1 u_2'))'$$

veya

$$k(x)(u_2 u_1' - u_1 u_2') \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (g_2 - g_1) u_1 u_2 dx > 0$$

elde edilir. $u_2(x_2) \geq 0$, $u_1'(x_2) < 0$ ve $u_2(x_1) \geq 0$, $u_1'(x_1) > 0$ olduğundan

$$k(x)(u_2 u_1' - u_1 u_2') \Big|_{x_1}^{x_2} \leq 0$$

elde edilir. Bu nedenle bir çelişki elde ettik.

Şimdi, $u_2(x_1) = 0$ olduğunu kabul edelim, o halde

$$k(x)(u_2 u_1' - u_1 u_2') \Big|_{x_1}^{x_2} = k(x_2) u_1'(x_2) u_2(x_2)$$

eşitliği elde edilir.

Eğer $u_2(x_2) \geq 0$ ise, o halde

$$k(x)(u_2 u_1' - u_1 u_2') \Big|_{x_1}^{x_2} \leq 0$$

bulunur yani bir çelişki elde ettik.

Teorem 3.6.3. $p, q \in C^0[a, b]$ ve $z(x)$ 'in

$$z'' + q(x)z = 0$$

diferansiyel denkleminin

$$z(a) = z(b) = 0$$

şartlarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü olduğunu varsayalım. Eğer

$$\int_a^b (p - q) z^2 dx \geq 0$$

ise o halde,

$$y'' + p(x)y = 0$$

$$y(a) = 0$$

probleminin aşikar olmayan bir çözümünün $(a, b]$ aralığında en az bir sıfırı vardır.

İspat. Aksini kabul edelim. Yani $(a, b]$ aralığında $y(x) \neq 0$ olduğunu varsayalım.

Aşağıda

$$z(z'' + qz) = 0$$

$$\frac{z^2}{y}(y'' + py) = 0$$

özdeşliklerinden yararlanacağız. Birinci ve ikinci eşitliği taraf tarafa çıkartarak

$$zz'' - z^2 \frac{y''}{y} = z^2(p - q)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği

$$\frac{z}{y}(yz' - zy')' = z^2(p - q)$$

şekilde yazabiliriz. Analizden iyi bilinen Hospital kuralı gereği $z'(a) \neq 0$, $y'(a) \neq 0$, $z', y' \in C[a, b]$ olduğunda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{z(x)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{z'(a)}{y'(a)}$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$\int_a^b \frac{z}{y}(yz' - zy')' dx = \int_a^b z^2(p - q) dx \geq 0$$

eşitsizliği elde edilir.

ilk intaegral ifadede kısmi integrasyon yaparak ve $z(b) = 0$, $y(b) \neq 0$, $z(a) = y(a) = 0$ olduğunu dikkate alarak

$$\frac{z}{y}(yz' - zy') \Big|_a^b - \int_a^b (yz' - zy') \left(\frac{z}{y} \right)' = \int_a^b z^2(p - q) dx \geq 0$$

elde edilir. Buradan

$$0 \geq \int_a^b \frac{(yz' - zy')^2}{y^2} dx$$

bulunur.

Eğer $y(x) = cz(x)$ ise sağ taraf özdeş olarak sıfırdır, dolayısıyla bu durum için teoremin ispatı açıktır. Eğer $y(x) \neq cz(x)$ ise sağ taraf pozitifdir ve bir çelişki elde ederiz. Böylece $y(x)$ -in $(a, b]$ 'de sıfırı mevcut olmalıdır.

Not 3.6.4. İspat gösteriyor ki eğer $p(x) \neq q(x)$ ise o halde

$$\int_a^b z^2(p - q)dx > 0$$

dır. Bu durumda $y(x)$ 'in (a, b) aralığında bir sıfırı vardır.

Aksini kabul ederek

$$\int_a^b \frac{(yz' - zy')^2}{y^2} dx < 0$$

elde ederiz. Bu bir çelişkidir.

Teorem 3.6.5. $k_i > 0$ olmak üzere $k_i \in C^1[a, b]$, $g_i \in C[a, b]$ olsun. Eğer z

$$(k_1 z)' + g_1 z = 0$$

$$z(a) = z(b) = 0$$

probleminin aşikar olmayan bir çözümü ve y

$$(k_2 y)' + g_2 y = 0$$

$$y(a) = 0$$

probleminin aşikar olmayan bir çözümü ve

$$\int_a^b (k_1 - k_2)(z')^2 + (g_2 - g_1)z^2 dx \geq 0$$

ise o halde $y(x)$ 'in $(a, b]$ aralığında en az bir sıfırı vardır. Eğer eşitsizlik mutlak ise (yani $>$ biçiminde ise), $y(x) - in(a, b)$ aralığında en az bir sıfırı bulunur.

İspat. İlk denklem z ile çarpılıp ikinci denklem de $\frac{z^2}{y}$ ile çarpılıp taraf-tarafa çıkarılırsa

$$\int_a^b (k_1 - k_2)(z')^2 + (g_2 - g_1)z^2 + \int_a^b k_1 \left(\frac{yz' - zy'}{y} \right)^2 dx = \frac{z}{y} (k_1 y z' - k_2 y' z) \Big|_a^b$$

formülü elde edilir. Bu formüle Picone formülü denir. (Swanson, 1975)

İspatın geriye kalan kısmı bir önceki teoremin ispatına tamamen benzerdir.

Teorem 3.6.6. [Sturm- Picone Teoremi]

Varsayalım ki

$$(k_1 z')' + g_1 z = 0$$

$$(k_2 y')' + g_2 y = 0$$

olsun. Ayrıca kabul edelim ki $g_2 \geq g_1$ ve $k_1 \geq k_2 > 0$ ve $[a, b]$ de $g_2 \neq g_1$, $k_1 \neq k_2$ ve

$$z(a) = z(b) = 0$$

dır. O halde $y(x)$ 'in (a, b) aralığında en az bir sıfırı vardır. (Zettl, 1968)

Not 3.6.7. Örneğin aşağıdaki şekilde verilen iki diferansiyel denklemi düşünersek;

$$y'' + y = 0 \quad y'' + 4y = 0$$

İkinci denklemin çözümleri birinciden daha hızlı salınım yapar. Daha genel olarak söyleyecek olursak Sturm karşılaştırma teoremleri farklı denklemlerin çözümlerinin salınımlarının oranını irdeler.

4. BULGULAR

4.1. İki Aralıklı Sturm-Liouville Denklemleri İçin Karşılaştırma ve Salınım Özellikleri

İlk önce $s = 0, 1, 2, \dots, m$ için $f^{(s)}(c \pm 0) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} f^{(s)}(x \pm \epsilon)$ sonlu limit değerleri ile her $[a, c)$ ve $(c, b]$ aralığında m . mertebeye kadar sürekli türevlenebilen tüm $f : [a, c) \cup (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarından oluşan yeni bir $C^m[a, c - 0] \oplus C^m[c + 0, b]$ fonksiyonel uzayını tanımlayalım. $k \in C^1[a, c - 0] \oplus C^1[c + 0, b]$, $\sigma \in C[a, c - 0] \oplus C[c + 0, b]$, $k(c \pm 0) \neq 0$, $\sigma(c \pm 0) \neq 0$ olduğunu varsayarak

$$-(k(x)y')' + \sigma(x)y = 0, \quad x \in [a, c) \cup (c, b] \quad (4.1.1)$$

iki aralıklı Sturm-Liouville denkleminden ve $x = c$ etkileşim noktasında verilen

$$y(c + 0) = \alpha_1 y(c - 0) + \beta_1 y'(c - 0) \quad (4.1.2)$$

$$y'(c + 0) = \alpha_2 y(c - 0) + \beta_2 y'(c - 0) \quad (4.1.3)$$

iletim koşullarından oluşan iki-aralıklı Sturm-Liouville denklemini ele alacağız.

Burada $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 'dır.

Not 4.1.1. Bundan sonra aksini özel olarak belirtmedğimiz durumlarda çözümlerden bahsederken, bu çözümlerin özdeşlik olarak sıfır olmayan çözümler olduğunu kabul edeceğiz.

Teorem 4.1.2. İki ayırık aralıkta tanımlı olan (4.1.1) Sturm-Liouville denklemlerinden ve (4.1.2), (4.1.3) iletim (geçiş) koşullarından oluşmuş problemin hiç bir çözümünün sonsuz sayıda sıfırı mevcut değildir (yani ya hiç bir sıfır yeri mevcut değil, ya da ancak sonlu sayıda sıfır yeri mevcuttur).

İspat. Teoremi olmayana ergi yöntemi ile ispat edeceğiz. Yani kabul edeceğiz ki, (4.1.2)- (4.1.3) iki aralıklı SLP-nin sonsuz sayıda sıfır yerine sahip olan en az bir $y(x)$ çözümü bulunur. Bu sıfır yerlerini $x_1, x_2, x_3, \dots$ ile gösterelim. (x_n) dizisi

sınırlı olduğu için Bolzano-Weierstrass teoremi (Bayraktar, 2017) gereği bu dizinin yakınsak olan en az bir (x_{n_k}) alt dizisi mevcuttur. Bu alt dizinin limitini w ile gösterelim. $w \in [a, c)$, $w \in (c, b]$ ve $w = c$ durumlarını ayrı-ayrılıkta inceleyeceğiz. İlk önce $w \in [a, c)$ durumunu inceleyelim. $y(x_{n_k}) = 0$ olduğu için ve $y(x)$ çözüm fonksiyonu $[a, c)$ aralığında sürekli olduğu için

$$y(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} y(x_{n_k}) = 0$$

dır. $y(x_{n_k}) = y(w) = 0$ olduğundan

$$y'(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y(x_{n_k}) - y(w)}{x_{n_k} - w} = 0$$

dır. Buradan sonuç olarak (4.1.1) denkleminin bir çözümü $y(w) = y'(w) = 0$ başlangıç koşullarını sağlayan (a, c) aralığı üzerindeki $y(x)$ fonksiyonudur. Bu nedenle lineer diferansiyel denklemler için başlangıç-değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği hakkında iyi bilinen teorem (Kandemir,2015) gereği $y(x)$ 'in $[a, c)$ aralığında özdeş olarak sifıra eşit olduğunu elde ettik. (4.1.2) ve (4.1.3) iletim koşullarını kullanarak

$$y(c+0) = \alpha_1 y(c-0) + \beta_1 y'(c-0) = 0$$

elde edilir. Şimdi $\tilde{y}(x) = \begin{cases} y(c+0) , & x = c \\ y(x) , & x \in (c, b] \end{cases}$ fonksiyonunu tanımlayalım.

O halde

$$\tilde{y}'(c) = \tilde{y}'(c+0) = y'(c+0) = \alpha_2 y(c-0) + \beta_2 y'(c-0) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\tilde{y}(c) = \tilde{y}'(c) = 0$ elde edildi ve böylece $\tilde{y}(x)$ 'in $(c, b]$ sağ aralığında da özdeş olarak sifıra eşit olduğu görülür. O halde $y(x)$ çözümü de $(c, b]$ aralığında özdeş olarak sifıra eşit olur. Böylece bir çelişki elde ederek $w \in [a, c)$ durumu için ispatı tamamladık.

İkinci olarak $w \in (c, b]$ durumunu araştıracağız. $x_{n_k} \rightarrow w$ ve $y(x_{n_k}) = 0$ olduğu için

yine de

$$y(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} y(x_{n_k}) = 0$$

elde edilir. Bu durumda bir önceki duruma benzer olarak $y'(w) = 0$ bulunur. Böylece bir $w \in (c, b]$ için $y(w) = y'(w) = 0$ başlangıç şartları sağlanmış olur. O halde $\forall x \in (c, b]$ için $y(x) = 0$ olur. Bu durumda $y(c+0) = y'(c+0) = 0$ eşitliğinin sağlanacağı apaçıktır. Geçiş şartlarından yararlanarak

$$\alpha_1 y(c-0) + \beta_1 y'(c-0) = 0$$

$$\alpha_2 y(c-0) + \beta_2 y'(c-0) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin ilkinin β_2 ile ikincisini ise β_1 çarptıktan sonra taraf tarafa çıkarırsak

$$(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) y(c-0) = 0$$

elde edilir benzer biçimde ilk eşitliği α_2 ile ikinci eşitliği ise α_1 ile çarparak taraf tarafa çıkarırsak

$$(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) y'(c-0) = 0$$

eşitliği bulunur. $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$ olduğu için sonuncu iki eşitlikten

$$y(c-0) = y'(c-0) = 0$$

elde edilir. Şimdi

$$\tilde{y} = \begin{cases} y(x), & x \in [a, c) \\ y(c-0), & x = c \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlarsak, bu fonksiyon (4.1.1) denkleminin $\tilde{y}(c) = \tilde{y}'(c) = 0$ başlangıç şartını sağlayan çözümü olur ve varlık ve teklik teoremi gereği $\forall x \in [a, c)$ için $\tilde{y} = 0$ yani $\forall x \in [a, c)$ için $y(x) = 0$ olur. Böylece $y(x)$ fonksiyonu tüm $[a, c) \cup (c, b]$ de sifıra eşit olur. Çelişki elde ettik. Bu durum için de ispat tamamlandı. Şimdi de $w = c$ durumunu göz önünde bulunduralım. Bu durumda bir $(x_{n_{k_s}})$ alt dizisi seçebiliriz öyleki; $x_{n_{k_s}} \uparrow c$ veya $x_{n_{k_s}} \downarrow c$ olsun. İlk önce $x_{n_{k_s}} \uparrow c$ durumunu

araştıralım.

$$y(c-0) = \lim_{s \rightarrow \infty} y(x_{n_{k_s}}) = 0$$

eşitliğini elde ederiz.

Şimdi $y'(c-0) = 0$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} y(x), & x \in [a, c) \\ y(c-0), & x = c \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlıyoruz. Ortalama değer teoremini kullanarak her $s = 1, 2, \dots$ için $0 \leq \alpha_s \leq 1$ olacak şekilde bir α_s reel sayısı vardır öyle ki;

$$\tilde{y}(x_{n_{k_s}}) = \tilde{y}(c) + \tilde{y}'(\alpha_s x_{n_{k_s}} + (1 - \alpha_s)c)(x_{n_{k_s}} - c)$$

dir. Sonuç olarak $\tilde{y}'(\alpha_s x_{n_{k_s}} + (1 - \alpha_s)c) = 0$ 'dır (her $s = 1, 2, \dots$ için). $s \rightarrow \infty$ iken $x_{n_{k_s}} \uparrow c$ olduğunu dikkate alarak $\tilde{y}'(c) = 0$ elde edilir. O halde $y'(c-0) = \tilde{y}'(c-0) = \tilde{y}'(c) = 0$ buradan varlık teklik teoremine göre $\forall x \in [a, c)$ için $\tilde{y}(x) = 0$ bulunur. O halde $\forall x \in [a, c)$ için $y(x) = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. İspat $x_{n_{k_s}} \downarrow c$ durumunda tamamen benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.1.3. (4.1.1)-(4.1.3) probleminin katsayıları için

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} > 0$$

şartının sağlandığını kabul edelim. $u(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonları bu problemin iki tane lineer bağımsız çözümü ise, o halde bu çözümlerin sıfır yerleri iç-içe geçer, yani bu çözümlerin her birinin iki ardışık sıfır yeri arasında diğerrinin bir tek sıfır yeri bulunur.

İspat. $u(x)$ çözüm fonksiyonunun keyfi iki tane ardışık x_1 ve x_2 sıfır yerlerini gözönüne alalım. Bu noktaların her ikisinin aynı bir aralığa ait olması durumu ile farklı aralıklara ait olma durumlarını ayrı-ayrılıkta araştıracağız. İlk önce $x_1, x_2 \in [a, c)$ durumunu araştıralım. İspatı olmayana ergi yöntemi ile yapacağız. Yani kabul edeceğiz ki, $\varphi(x)$ çözümünün (x_1, x_2) aralığında hiç bir sıfır yeri yoktur. Bu durumda hem $u(x)$ hem de $\varphi(x)$ çözümleri (x_1, x_2) aralığında işaretlerini değışmezler. İlk

önce $u(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonlarının her ikisinin de (x_1, x_2) aralığında pozitif olduğu durumu araştıralım. $u(x_1) = 0$ ve $\forall x \in (x_1, x_2)$ için $u(x) > 0$ olduğundan

$$u'(x_1) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{u(x_1 + h) - u(x_1)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{u(x_1 + h)}{h} \geq 0 \quad (4.1.4)$$

$u(x_1) = 0$ ve $u(x)$ aşıkâr olmayan çözüm olduğu için $u'(x_1)$ sifira eşit olamaz, yani $u'(x_1) > 0$ 'dır. Benzer şekilde; $u(x_2) = 0$ ve $\forall x \in (x_1, x_2)$ için $u(x) > 0$ olduğundan

$$u'(x_2) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{u(x_2 + h) - u(x_2)}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{u(x_2 + h)}{h} \leq 0 \quad (4.1.5)$$

$u(x_2) = 0$ ve $u(x)$ aşıkâr olmayan çözüm olduğu için $u'(x_2)$ sifira eşit olamaz, yani $u'(x_2) < 0$ 'dır. Sonuç olarak

$$W(u, \varphi; x_1) := u(x_1)\varphi'(x_1) - u'(x_1)\varphi(x_1) = -u'(x_1)\varphi(x_1) \leq 0 \quad (4.1.6)$$

ve

$$W(u, \varphi; x_2) := u(x_2)\varphi'(x_2) - u'(x_2)\varphi(x_2) = -u'(x_2)\varphi(x_2) \geq 0 \quad (4.1.7)$$

elde edilir. Fakat $u(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonlarının Wronskianı işaret değiştiremez. Böylece (4.1.6) ve (4.1.7) çelişir. Buradan $x_1, x_2 \in [a, c]$ durumu için ispat tamamlanmıştır. Şimdi (x_1, x_2) aralığında $u(x)$ fonksiyonunun negatif, $\varphi(x)$ fonksiyonunun ise pozitif olduğu durumu araştıralım. Bu durumda $u(x_1) = 0$ ve $\forall x \in (x_1, x_2)$ için $u(x) < 0$ olduğu için

$$u'(x_1) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{u(x_1 + h) - u(x_1)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{u(x_1 + h)}{h} \leq 0 \quad (4.1.8)$$

elde edilir. Eğer $u'(x_1) = 0$ olursa, $u(x_1) = 0$ olduğu için $u(x)$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin $u(x_1) = u'(x_1) = 0$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümü olur. Fakat $u_0(x) \equiv 0$ fonksiyonu da aynı diferansiyel denklemin aynı başlangıç şartlarını sağlayan çözümüdür. Çözüm tek olduğu için $u(x)$ fonksiyonu özdeş olarak sıfır olur. Bu ise kabulümüz ile çelişmektedir. Dolayısı ile $u'(x_1) \neq 0$ ve $u'(x_1) \leq 0$ elde edilir, yani $u'(x_1) < 0$ elde edilir. Benzer biçimde $u'(x_2) > 0$ elde edilir. Bu durumda

$$W(u, \varphi; x_1) = u(x_1)\varphi'(x_1) - u'(x_1)\varphi(x_1) = -u'(x_1)\varphi(x_1) > 0 \quad (4.1.9)$$

ve

$$W(u, \varphi; x_2) = u(x_2)\varphi'(x_2) - u'(x_2)\varphi(x_2) = -u'(x_2)\varphi(x_2) < 0 \quad (4.1.10)$$

eşitlikleri bulunur. $W(u, \varphi; x)$ fonksiyonu $[x_1, x_2]$ aralığında sürekli ve bu aralığın uç noktalarında işaretleri ters olduğu için (sol uçta negatif, sağ uçta pozitif) $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$ mevcuttur ki $W(u, \varphi; x_0) = 0$ olur. Bu durumda u ve φ lineer bağımlı olur. Bu ise teoremin şartları ile çelişmektedir. Bu durum için de ispat tamamlanmış oldu.

İkinci olarak $x_1, x_2 \in (c, b]$ durumunu ele alalım. Aksini kabul edelim yani $\varphi(x)$ fonksiyonunun (x_1, x_2) aralığında sıfırı olmasın. İlk önce $u(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonlarının her ikisinin de (x_1, x_2) aralığında pozitif olduğunu kabul edelim. $u(x_1) = 0$ ve $\forall x \in (x_1, x_2)$ için $u(x) > 0$ olduğundan

$$u'(x_1) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{u(x_1 + h) - u(x_1)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{u(x_1 + h)}{h} \geq 0 \quad (4.1.11)$$

$u(x_1) = 0$ ve $u(x)$ aşıkâr olmayan çözüm olduğu için $u'(x_1)$ sıfıra eşit olamaz, yani $u'(x_1) > 0$ 'dır. Benzer şekilde; $u(x_2) = 0$ ve $\forall x \in (x_1, x_2)$ için $u(x) > 0$ olduğundan

$$u'(x_2) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{u(x_2 + h) - u(x_2)}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{u(x_2 + h)}{h} \leq 0 \quad (4.1.12)$$

$u(x_2) = 0$ ve $u(x)$ aşıkâr olmayan çözüm olduğu için $u'(x_2)$ sıfıra eşit olamaz, yani $u'(x_2) < 0$ 'dır. Sonuç olarak

$$W(u, \varphi; x_1) := u(x_1)\varphi'(x_1) - u'(x_1)\varphi(x_1) = -u'(x_1)\varphi(x_1) < 0 \quad (4.1.13)$$

ve

$$W(u, \varphi; x_2) := u(x_2)\varphi'(x_2) - u'(x_2)\varphi(x_2) = -u'(x_2)\varphi(x_2) > 0 \quad (4.1.14)$$

elde edilir. Fakat $u(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonlarının Wronskian değerleri işaret değiştiremez. Böylece (4.1.13) ve (4.1.14) çelişir. Buradan $x_1, x_2 \in (c, b]$ durumu için ispat tamamlanmıştır. Son olarak $a \leq x_1 < c < x_2 \leq b$ durumunu düşünelim. İlk önce $u(x), \varphi(x) > 0$ kabul edelim. Yani

1) $\forall x \in (x_1, c)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ ve $\forall x \in (c, x_2)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$

durumunu inceleyelim. $u(x_2) = 0$, $u'(x_2) \neq 0$ olduğundan

$$u'(x_2) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{u(x_2 + h) - u(x_2)}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{u(x_2 + h)}{h} \leq 0$$

dır. $u'(x_2) \neq 0$ olduğu için $u'(x_2) < 0$ elde edilir. Böylece

$$W(u, \varphi; x_2) = u(x_2)\varphi'(x_2) - u'(x_2)\varphi(x_2) = -u'(x_2)\varphi(x_2) > 0 \quad (4.1.15)$$

elde ederiz. $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 > 0$ koşulunu göz önünde bulundurarak ve (4.1.2)-(4.1.3) iletim koşullarını kullanarak

$$\begin{aligned} W(u, \varphi; x_2) &= W(u, \varphi; c + 0) = u(c + 0)\varphi'(c + 0) - u'(c + 0)\varphi(c + 0) \\ &= (\alpha_1 u(c - 0) + \beta_1 u'(c - 0))(\alpha_2 \varphi(c - 0) + \beta_2 \varphi'(c - 0)) \\ &\quad - (\alpha_2 u(c - 0) + \beta_2 u'(c - 0))(\alpha_1 \varphi(c - 0) + \beta_1 \varphi'(c - 0)) \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(u(c - 0)\varphi'(c - 0) - u'(c - 0)\varphi(c - 0)) \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)W(u, \varphi; c - 0) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)W(u, \varphi; x_1) \\ &= -(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)u'(x_1)\varphi(x_1) \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

elde edilir. $u(x_1) = 0$, $u'(x_1) \neq 0$ ve $\forall x \in (x_1, x_2)$ için $u(x) > 0$ olduğundan, $u(x)$ çözümü x_1 noktası civarında artmaktadır. Böylece $u'(x_1) > 0$ 'dır. Ayrıca $u(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonlarını $\forall x \in [a, c) \cup (c, b]$ 'de $u(x), \varphi(x) > 0$ olarak kabul ettiğimizden (4.1.16) ifadesinden

$$= -(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)u'(x_1)\varphi(x_1) < 0 \quad (4.1.17)$$

elde ederiz. Fakat (4.1.15) ve (4.1.17) çelişmektedir. Böylece bir çelişki elde ettik. Böylece $\forall x \in (x_1, c)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ ve $\forall x \in (c, x_2)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ durumu için ispat tamamlanmış oldu.

Şimdi $\forall x \in (x_1, c)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ ve $\forall x \in (c, x_2)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) < 0$ durumunu araştıralım. Bu durumda benzer biçimde $u'(x_1) > 0$, $u'(x_2) < 0$ ve

dolayısıyla

$$W(u, \varphi; x_1) = u(x_1)\varphi'(x_1) - u'(x_1)\varphi(x_1) = -u'(x_1)\varphi(x_1) \leq 0 \quad (4.1.18)$$

elde edilir. Ayrıca

$$W(u, \varphi; x_2) = u(x_2)\varphi'(x_2) - u'(x_2)\varphi(x_2) = -u'(x_2)\varphi(x_2) \leq 0$$

bulunur. Wronskian bir aralıkta işaret değiştiremediği için sonuncu eşitsizlikten

$$W(u, \varphi; c+0) \leq 0 \quad (4.1.19)$$

eşitsizliği elde edilir. Geçiş şartlarından yararlanarak

$$W(u, \varphi; c-0) = u(c-0)\varphi'(c-0) - u'(c-0)\varphi(c-0) = -u'(c-0)\varphi(c-0) \quad (4.1.20)$$

ifadesinin işaretini inceleyeceğiz. u ve φ çözümleri geçiş şartlarını sağladıkları için

$$u(c+0) = \alpha_1 u(c-0) + \beta_1 u'(c-0) \quad (4.1.21)$$

$$u'(c+0) = \alpha_2 u(c-0) + \beta_2 u'(c-0) \quad (4.1.22)$$

$$\varphi(c+0) = \alpha_1 \varphi(c-0) + \beta_1 \varphi'(c-0) \quad (4.1.23)$$

$$\varphi'(c+0) = \alpha_2 \varphi(c-0) + \beta_2 \varphi'(c-0) \quad (4.1.24)$$

eşitlikleri sağlanır. $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$ olduğu için

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \quad (4.1.25)$$

matrisinin tersi mevcuttur. Bu matrisin tersini

$$T^{-1} := \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix} \quad (4.1.26)$$

ile gösterelim. $\det T^{-1} = \frac{1}{\det T}$ olduğu için

$$\det T^{-1} = \frac{1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \neq 0$$

olacak. O halde (4.1.21) – (4.1.25) eşitliklerini

$$\begin{pmatrix} u(c+0) \\ u'(c+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(c-0) \\ u'(c-0) \end{pmatrix} \quad (4.1.27)$$

biçiminde yazarak her iki tarafa T^{-1} dönüşümü uygularsak

$$\begin{pmatrix} u(c-0) \\ u'(c-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(c+0) \\ u'(c+0) \end{pmatrix} \quad (4.1.28)$$

eşitliğini yani,

$$u(c-0) = \tilde{\alpha}_1 u(c+0) + \tilde{\beta}_1 u'(c+0) \quad (4.1.29)$$

$$u'(c-0) = \tilde{\alpha}_2 u(c+0) + \tilde{\beta}_2 u'(c+0) \quad (4.1.30)$$

elde edilir. Tamamen benzer biçimde

$$\varphi(c-0) = \tilde{\alpha}_1 \varphi(c+0) + \tilde{\beta}_1 \varphi'(c+0) \quad (4.1.31)$$

$$\varphi'(c-0) = \tilde{\alpha}_2 \varphi(c+0) + \tilde{\beta}_2 \varphi'(c+0) \quad (4.1.32)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden yararlanarak

$$\begin{aligned} W(u, \varphi; c-0) &= u(c-0)\varphi'(c-0) - u'(c-0)\varphi(c-0) \\ &= (\tilde{\alpha}_1 u(c+0) + \tilde{\beta}_1 u'(c+0))(\tilde{\alpha}_2 \varphi(c+0) + \tilde{\beta}_2 \varphi'(c+0)) \\ &\quad - (\tilde{\alpha}_2 u(c+0) + \tilde{\beta}_2 u'(c+0))(\tilde{\alpha}_1 \varphi(c+0) + \tilde{\beta}_1 \varphi'(c+0)) \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)W(u, \varphi; c+0) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.1.33)$$

elde edilir. Wronskian bir aralıkta işaret değiştirmeyeceği için (4.1.18) ve (4.1.33)-den $\forall x \in (x_1, c)$ için

$$W(u, \varphi; x) = 0 \quad (4.1.34)$$

elde edilir. Bu ise u ve φ cözmlerinin lineer bağımsız olduğu varsayımı ile çelişmektedir. Böylece $\forall x \in (x_1, c)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ ve $\forall x \in (c, x_2)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) < 0$ durumu için de ispat tamamlanmış oldu.

Diğer

- $\forall x \in (x_1, c)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ ve
 $\forall x \in (c, x_2)$ için $u(x) < 0$, $\varphi(x) > 0$
- $\forall x \in (x_1, c)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ ve
 $\forall x \in (c, x_2)$ için $u(x) < 0$, $\varphi(x) < 0$
- $\forall x \in (x_1, c)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) < 0$
 $\forall x \in (c, x_2)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$
- $\forall x \in (x_1, c)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) < 0$
 $\forall x \in (c, x_2)$ için $u(x) < 0$, $\varphi(x) > 0$
- $\forall x \in (x_1, c)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) < 0$
 $\forall x \in (c, x_2)$ iin $u(x) > 0$, $\varphi(x) < 0$
- $\forall x \in (x_1, c)$ iin $u(x) > 0$, $\varphi(x) < 0$
 $\forall x \in (c, x_2)$ iin $u(x) < 0$, $\varphi(x) < 0$
- $\forall x \in (x_1, c)$ iin $u(x) < 0$, $\varphi(x) > 0$
 $\forall x \in (c, x_2)$ iin $u(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$
- $\forall x \in (x_1, c)$ iin $u(x) < 0$, $\varphi(x) > 0$
 $\forall x \in (c, x_2)$ iin $u(x) < 0$, $\varphi(x) > 0$
- $\forall x \in (x_1, c)$ iin $u(x) < 0$, $\varphi(x) > 0$
 $\forall x \in (c, x_2)$ iin $u(x) > 0$, $\varphi(x) < 0$

- $\forall x \in (x_1, c)$ için $u(x) < 0$, $\varphi(x) > 0$
 $\forall x \in (c, x_2)$ için $u(x) < 0$, $\varphi(x) < 0$
- $\forall x \in (x_1, c)$ için $u(x) < 0$, $\varphi(x) < 0$
 $\forall x \in (c, x_2)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$
- $\forall x \in (x_1, c)$ için $u(x) < 0$, $\varphi(x) < 0$
 $\forall x \in (c, x_2)$ için $u(x) < 0$, $\varphi(x) > 0$
- $\forall x \in (x_1, c)$ için $u(x) < 0$, $\varphi(x) < 0$
 $\forall x \in (c, x_2)$ için $u(x) > 0$, $\varphi(x) < 0$
- $\forall x \in (x_1, c)$ için $u(x) < 0$, $\varphi(x) < 0$
 $\forall x \in (c, x_2)$ için $u(x) < 0$, $\varphi(x) < 0$

durumları için ispat benzer biçimde yapılır.

İspat tamamlandı.

Teorem 4.1.4. (4.1.2) ve (4.1.3) iletim koşullarını sağlayan iki aralıklı (4.1.1) diferansiyel denkleminin her aşık olmanın çözümünün tüm sıfırları basittir.

İspat. İspatı olmayana ergi yöntemi ile yapacağız. Kabul edelim ki (4.1.2) ve (4.1.3) probleminin öyle bir $\tilde{y}(x)$ çözümü ve öyle bir $x_0 \in [a, c) \cup (c, b]$ noktası mevcuttur ki

$$\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}'(x_0) = 0$$

eşitlikleri sağlanır. $x_0 \in [a, c)$ ve $x_0 \in (c, b]$ durumlarını ayrı-ayrılıkta ele alacağız. İlk önce $x_0 \in [a, c)$ durumunu ele alalım. $\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}'(x_0) = 0$ olduğu için literatürden iyi bilinen varlık ve teklik teoremi gereği $\forall x \in [a, c)$ için $\tilde{y}(x) = 0$ olur. O halde $\tilde{y}(c-0) = 0$ ve $\tilde{y}'(c-0) = 0$ elde edilir. $\tilde{y}(x)$ çözümü geçiş şartlarını sağladığı için

$$\tilde{y}(c+0) = \alpha_1 \tilde{y}(c-0) + \beta_1 \tilde{y}'(c-0) = 0$$

$$\tilde{y}'(c+0) = \alpha_2 \tilde{y}(c-0) + \beta_2 \tilde{y}'(c-0) = 0$$

elde edilir. Şimdi varlık ve teklik teoremini $(c, b]$ yarı açık aralığında uygularsak $\forall x \in (c, b]$ için $\tilde{y}(x) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $x_0 \in (c, b]$ alırsak, varlık ve teklik

teoremi gereği $\forall x \in (c, b]$ için $\tilde{y}(x) = 0$ elde edilir. Buradan $\tilde{y}(c+0) = \tilde{y}'(c+0) = 0$ elde edilir. $\tilde{y}(x)$ çözümü geçiş şartlarını sağladığı için

$$0 = \tilde{y}(c+0) = \alpha_1 \tilde{y}(c-0) + \beta_1 \tilde{y}'(c-0) \quad (4.1.35)$$

$$0 = \tilde{y}'(c+0) = \alpha_2 \tilde{y}(c-0) + \beta_2 \tilde{y}'(c-0) \quad (4.1.36)$$

eşitlikleri bulunur. Yani

$$\alpha_1 \tilde{y}(c-0) + \beta_1 \tilde{y}'(c-0) = 0 \quad (4.1.37)$$

$$\alpha_2 \tilde{y}(c-0) + \beta_2 \tilde{y}'(c-0) = 0 \quad (4.1.38)$$

eşitlikleri elde edilir. İlk eşitliği β_2 ile, ikinci eşitliği $-\beta_1$ ile çarparak taraf tarafa toplarsak

$$(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \tilde{y}(c-0) = 0$$

eşitliği bulunur. $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$ olduğu için $\tilde{y}(c-0) = 0$ elde edilir. Eğer (4.1.37) eşitliğini α_2 ile, (4.1.38) eşitliğini ise $-\alpha_1$ ile çarptıktan sonra taraf tarafa toplarsak

$$(\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) \tilde{y}'(c-0) = 0$$

ve $\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 \neq 0$ olduğu için $\tilde{y}'(c-0) = 0$ bulunur. Böylece $\tilde{y}(c-0) = \tilde{y}'(c-0) = 0$ elde edilir. O halde varlık ve teklik teoremi gereği $\forall x \in [a, c)$ için $\tilde{y}(x) = 0$ elde edilir. Yani bu durumda da $\forall x \in [a, c) \cup (c, b]$ için $\tilde{y}(x) = 0$ elde edildi. İspat bitti.

4.2. Karşılaştırma Teoremleri

Aşağıda $[a, c) \cup (c, b]$ iki aralığında sürekli ve $f(c \pm 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(c \pm |\epsilon|)$ sonlu limit değerlerine sahip olan tüm reel değerli $f : [a, c) \cup (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonların uzayını $C[a, c-0] \oplus C[c+0, b]$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.2.1. $q \in C[a, c-0] \oplus C[c+0, b]$ ve $\alpha_1\beta_2 = 1$ ve $\beta_1 = 0$ olduğunu varsayalım. Ayrıca $z \in C^{(2)}[a, c-0] \oplus C^{(2)}[c+0, b]$, $z(c \pm 0) \neq 0$ fonksiyonun

$$z''(x) + q(x)z(x) = 0, \quad x \in [a, c) \cup (c, b] \quad (4.2.1)$$

iki aralıklı diferansiyel deklemin

$$z(a) = z(b) = 0$$

sınır koşullarını ve $x = c$ noktasında (etkileşim noktasında)

$$\begin{aligned} z(c+) &= \alpha_1 z(c-) \\ z'(c+) &= \alpha_2 z(c-) + \beta_2 z'(c-) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

iletim koşullarını sağlayan bir çözümü olduğunu kabul edelim.

Ayrıca $y \in C^{(2)}[a, c-0] \oplus C^{(2)}[c+0, b]$, $y(c \pm 0) \neq 0$ fonksiyonun

$$y''(x) + p(x)y(x) = 0, \quad x \in [a, c) \cup (c, b] \quad (4.2.3)$$

$$y(a) = 0 \quad (4.2.4)$$

iki aralıklı (4.2.3) diferansiyel denkleminin, (4.2.4) sınır koşulunu ve $x = c$ noktasında (etkileşim noktasında)

$$\begin{aligned} y(c+) &= \alpha_1 y(c-) \\ y'(c+) &= \alpha_2 y(c-) + \beta_2 y'(c-) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

iletim koşullarını sağlayan bir çözümü olduğunu kabul edelim.

Eğer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} (p-q)z^2 dx + \int_{c+\varepsilon}^b (p-q)z^2 dx \right) \geq 0 \quad (4.2.6)$$

ise, o halde;

(4.2.3)-(4.2.5) sınır değeri iletim probleminin aşıkâr olmayan her bir $y \in C^{(2)}[a, c - 0] \oplus C^{(2)}[c + 0, b]$, $y(c \pm 0) \neq 0$ çözümü $(a, c) \cup (c, b]$ iki aralığında en az bir sıfıra sahiptir.

İspat. $y(x)$, (4.2.3)-(4.2.5) probleminin herhangi bir aşıkâr olmayan çözümü olsun. Eğer $y(x)$ ve $z(x)$ lineer bağımlı ise öyle $c \neq 0$ mevcut olur ki $\forall x \in [a, c) \cup (c, b]$ için $y(x) = cz(x)$ olur. Bu durumda

$$y(b) = cz(b) = 0$$

olur. Dolayısıyla $y(x)$ çözümünün $(a, c) \cup (c, b]$ -de en az bir sıfırı mevcut olur.

Bu yüzden, $y(x)$ ve $z(x)$ 'in lineer bağımsız fonksiyonlar olduğunu varsayarak devam edeceğiz. Aksini kabul edelim ki $\forall x \in (a, c) \cup (c, b]$ için $y(x) \neq 0$ olsun. $\forall x \in (a, c) \cup (c, b]$ için $y(x) \neq 0$ olduğubu kabul ettiğimiz için (4.2.1) ve (4.2.3) denklemlerini kullanarak $z(z'' + qz) = 0$ ve $\frac{z^2}{y}(y'' + py) = 0$ elde ederiz. Bu denklemlerden birini diğerinden çıkartarak

$$zz'' - \frac{z^2 y''}{y} + qz^2 - pz^2 = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten

$$zz'' - \frac{z^2 y''}{y} = z^2(p(x) - q(x))$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$\frac{z}{y}(yz'' - zy'') = z^2(p(x) - q(x))$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikteki $yz'' - zy''$ ifadesini integralleyerek

$$\begin{aligned}
\int (yz'' - zy'') dx &= \int yz'' dx - \int zy'' dx \\
&= \int yd(z') - \int zd(y') \\
&= yz' - \int z'd(y) - zy' + \int y'd(z) \\
&= yz' - \int z'y'dx - zy' + \int y'z'dx \\
&= yz' - zy' = W(y, z)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\frac{z(x)}{y(x)} \frac{d}{dx} W(y, z; x) = z^2(x)(p(x) - q(x)) \quad (4.2.7)$$

denklemini elde ederiz.

$y(a) = z(a) = 0$ olduğundan $y'(a) \neq 0$ $z'(a) \neq 0$ 'dır. Aksi halde iyi bilinen varlık ve teklik teoreminden $y(x)$ ve $z(x)$ çözümlerinin her birinin özdeş olarak sifıra eşit olduğunu elde ederdik. Böylece

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{z(x)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{z(x) - z(a)}{y(x) - y(a)} = \frac{z'(a)}{y'(a)} \neq 0 \quad (4.2.8)$$

bulunur. (4.2.8) kullanarak ve $y, z \in C[a, c-0] \oplus C[c+0, b]$ olduğunu hesaba katarak (4.2.7)'nin sol tarafının $[a, c]$ ve $(c, b]$ aralıklarında integrallenebilir olduğunu görürüz. Şimdi (4.2.7) eşitliğini $[a, c]$ ve $(c, b]$ aralıklarında parça parça integrallersek ve (4.2.8) ifadesini de göz önünde bulundurarak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{z(x)}{y(x)} W(y, z; x) \Big|_{c+\varepsilon}^{c-\varepsilon} - \frac{z(b)}{y(b)} W(y, z; b) - \frac{z(a+\varepsilon)}{y(a+\varepsilon)} W(y, z; a+\varepsilon) \right) \\
&- \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \left(\frac{z(x)}{y(x)} \right)' W(y, z; x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b \left(\frac{z(x)}{y(x)} \right)' W(y, z; x) dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} (p(x) - q(x)) z^2(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b (p(x) - q(x)) z^2(x) dx \right) \quad (4.2.9)
\end{aligned}$$

Böylece

$$\lim_{\varepsilon \downarrow a} \frac{z(a + \varepsilon)}{y(a + \varepsilon)} W(y, z; a + \varepsilon) = \frac{z'(a)}{y'(a)} W(y, z; a) \quad (4.2.10)$$

elde edilir. $z(a) = z(b) = 0$ olduğundan (4.2.9) eşitliği aşağıdaki formda yazılır.

$$\begin{aligned} & \frac{z(x)}{y(x)} W(y, z; x) \Big|_{c+0}^{c-0} - \int_a^{c-0} \left(\frac{W(y, z; x)}{y(x)} \right)^2 dx - \int_{c+0}^b \left(\frac{W(y, z; x)}{y(x)} \right)^2 dx \\ &= \int_a^{c-0} (p(x) - q(x)) z^2(x) dx + \int_{c+0}^b (p(x) - q(x)) z^2(x) dx \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

(4.2.2) ve (4.2.5) iletim koşullarını ve $\beta_1 = 0$ olduğunu kullanarak

$$\frac{z(c+0)}{y(c+0)} = \frac{\alpha_1 z(c-0)}{\alpha_1 y(c-0)} = \frac{z(c-0)}{y(c-0)} \quad (4.2.12)$$

elde ederiz ve ayrıca

$$\begin{aligned} & W(y, z; c+0) = y(c+0) z'(c+0) - y'(c+0) z(c+0) \\ &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) y(c-0) z'(c-0) - (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) y z'(c-0)(c-0) \\ &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) W(y, z; c-0) = W(y, z; c+0) \\ &= W(y, z; c-0) = W(y, z; c+0) \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

eşitliğini elde ederiz. (4.2.11), (4.2.12) ve (4.2.13)'den

$$\begin{aligned} & - \int_a^{c-0} \left(\frac{W(y, z; x)}{y(x)} \right)^2 dx - \int_{c+0}^b \left(\frac{W(y, z; x)}{y(x)} \right)^2 dx \\ &= \int_a^{c-0} (p(x) - q(x)) z^2(x) dx + \int_{c+0}^b (p(x) - q(x)) z^2(x) dx \geq 0 \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

denklemini yazılır. $y(x)$ ve $z(x)$ lineer bağımsız olduğundan, sol taraf negatiftir ve buradan bir çelişki elde ettik. Böylece $y(x)$ -in $(a, c) \cup (c, b]$ aralığında en az bir sıfırı olmalıdır. İspat tamamlandı.

Not 4.2.2. Teorem (4.2.1)'in (4.2.6) koşulu daha güçlü tutulursa yani;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} (p - q) z^2 dx + \int_{c+\varepsilon}^b (p - q) z^2 dx \right) > 0 \quad (4.2.15)$$

olursa, o halde $y(x)$ çözümünün $(a, c) \cup (c, b)$ kümesinde en az bir sıfır yeri olduğunu gösterebiliriz. Bunu olmayana ergi yöntemi ile kanıtlayacağız. Yani (4.2.15) şartı sağlandığı durumda $\forall x \in (a, c) \cup (c, b)$ için $y(x) \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz. Bir önceki teorem gereği $y(x)$ çözümünün $(a, c) \cup (c, b]$ -de en az bir sıfır yeri mevcuttur. $y(x)$ çözümü özdeşlik olarak sıfır olmadığı için lineer diferansiyel denklemler için başlangıç-değer probleminin çözümlerinin varlığı ve tekliği hakkında teorem gereği $y'(b) \neq 0$ olur. Şimdi limitler için Hospital kuralından yararlanarak

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{z(b)}{y(b)} = \frac{z'(b)}{y'(b)}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu durumda (4.2.14) eşitliği ile çelişki elde edilir. İspat bitti.

Teorem 4.2.3.

$$(K_1(x)z')' + \sigma_1(x)z = 0 \quad x \in [a, c) \cup (c, b] \quad (4.2.16)$$

$$(K_2(x)y')' + \sigma_2(x)y = 0 \quad x \in [a, c) \cup (c, b] \quad (4.2.17)$$

şeklinde verilen iki tane iki aralıklı diferansiyel denklemlerde; $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ ve K_1, K_2 ; $[a, c)$ ve $(c, b]$ aralıklarında sürekli diferansiyellenebilir ve $K_1(c \pm 0) \neq 0$, $K_1'(c \pm 0)$, $K_2(c \pm 0) \neq 0$, $K_2'(c \pm 0)$ sonlu limit değerlerine sahip fonksiyonlar olsun ve σ_1, σ_2 ; $\sigma_1(c \pm 0)$, $\sigma_2(c \pm 0)$ sonlu limit değerlerine sahip, her $[a, c)$ ve $(c, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca $z = z(x) \in C^{(2)}[a, c - 0] \oplus C^{(2)}[c + 0, b]$, verilen ilk denklem (4.2.16)'nın $z(c \pm 0) \neq 0$, $z'(c \pm 0)$ sonlu limit değerlerine sahip,

$$\begin{aligned} z(c + 0) &= \alpha_1 z(c - 0) \\ K_1(c + 0)z'(c + 0) &= \alpha_2 z(c - 0) + \frac{K_1(c - 0)}{\alpha_1} z'(c - 0) \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

iletim koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü olsun.

Ayrıca $y = y(x) \in C^{(2)}[a, c - 0] \oplus C^{(2)}[c + 0, b]$, $y(c \pm 0) \neq 0$, $y'(c \pm 0)$ sonlu limit değerlerine sahip ikinci denklem (4.2.17)'nin aşikar olmayan bir çözümü olsun ve,

$$\begin{aligned} y(c + 0) &= \alpha_1 y(c - 0) \\ K_2(c + 0)y'(c + 0) &= \alpha_2 y(c - 0) + \frac{K_2(c - 0)}{\alpha_1} y'(c - 0) \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

iletim koşullarını sağlasın. Ayrıca varsayalım ki $z(a) = z(b) = 0$, $y(a) = 0$ ve

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} (K_1(x) - K_2(x))(z'(x))^2 dx + \int_{c+\varepsilon}^b (K_1(x) - K_2(x))(z'(x))^2 dx \right] \\ & \geq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} (\sigma_1(x) - \sigma_2(x))z^2(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b (\sigma_1(x) - \sigma_2(x))z^2(x) dx \right] \quad (4.2.20) \end{aligned}$$

olsun. O halde $y(x)$ 'in $(a, c) \cup (c, b]$ 'de en az bir sıfırı vardır.

İspat. $y(x)$ ve $z(x)$ çözümlerinin lineer bağımlı olduğu durumda sonuç aşikar olarak doğrudur. Bu yüzden sadece $y(x)$ ve $z(x)$ 'in lineer bağımsız olduğu durumu göz önünde bulunduracağız. Aksini kabul edelim ki $y(x)$ 'in $(a, c) \cup (c, b]$ de sıfırı olmasın. Sonra ilk denklem (4.2.16)'yı $z(x)$ ve ikinci denklem (4.2.17)'yi $\frac{z^2(x)}{y(x)}$ ile çarpıp bir denklemi diğerinden çıkartarak daha sonra da parça parça integralleyerek aşağıdaki Picone tipindeki formülü elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} (K_1(x) - K_2(x))(z'(x))^2 dx + \int_{c+\varepsilon}^b (K_1(x) - K_2(x))(z'(x))^2 dx \right) \\ & - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} (\sigma_1(x) - \sigma_2(x))z^2(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b (\sigma_1(x) - \sigma_2(x))z^2(x) dx \right) \\ & = - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} K_2 \left(\frac{W(y, z)}{y} \right)^2 dx + \int_{c+\varepsilon}^b K_2 \left(\frac{W(y, z)}{y} \right)^2 dx \right) \\ & + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{z}{y} (K_1 y z' - K_2 y' z) \right) \Big|_{a+\varepsilon}^b - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{z}{y} (K_1 y z' - K_2 y' z) \right) \Big|_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \quad (4.2.21) \end{aligned}$$

$y(a) = 0$ ve $z(a) = 0$ olduğundan, diferansiyel denklemler teorisinden iyi bilinen varlık ve teklik teoreminden $y'(a) \neq 0$ ve $z'(a) \neq 0$ elde ederiz. Şimdi iyi bilinen Hospital kuralını kullanarak

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{z}{y} (K_1 y z' - K_2 y' z) \right) \Big|_{a+\varepsilon}^b = \frac{z(b)}{y(b)} (K_1(b)y(b)z'(b) - K_2(b)y'(b)z(b)) \\ & - \frac{z'(a)}{y'(a)} (K_1(a)y(a)z'(a) - K_2(a)y'(a)z(a)) = 0 \quad (4.2.22) \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca (4.2.18)ve (4.2.19) iletim koşullarını kullanarak

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{z}{y} (K_1 y z' - K_2 y' z) \right) \Big|_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} = \left(\frac{z}{y} (K_1 y z' - K_2 y' z) \right) \Big|_{c-0}^{c+0} = 0 \quad (4.2.23)$$

yazabiliriz. O halde (4.2.21) Picone formülünün aşağıdaki genelleştirilmiş formunu elde ederiz.

$$\int_a^{c-0} K_2 \left(\frac{W(y, z)}{y} \right)^2 dx + \int_{c+0}^b K_2 \left(\frac{W(y, z)}{y} \right)^2 dx \leq 0 \quad (4.2.24)$$

Tüm $(a, c) \cup (c, b]$ 'de $K_2(x) > 0$ ve $W(y, z; x) \neq 0$ olduğundan (4.2.24)'ün sol tarafı kesinlikle pozitifdir. Böylece bir çelişki elde ettik ve ispat tamamlandı.

Teorem 4.2.4. Kabul edelim ki Teorem (4.2.3)'de verilen (4.2.20) şartı hariç tüm şartları sağlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} & \int_a^{c-0} (K_1(x) - K_2(x))(z'(x))^2 dx + \int_{c+0}^b (K_1(x) - K_2(x))(z'(x))^2 dx \\ & > \int_a^{c-0} (\sigma_1(x) - \sigma_2(x))z^2(x) dx + \int_{c+0}^b (\sigma_1(x) - \sigma_2(x))z^2(x) dx \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

şartını sağladığını kabul edelim. O halde $y(x)$ çözümünün $(a, c) \cup (c, b)$ açık iki-aralığında en az bir sıfırı mevcuttur.

İspat. İlk önce y ve z çözümlerinin lineer bağımsız olduğu durumu inceleyelim. Teorem (4.2.3)-ün ispatında elde edilen (4.2.21), (4.2.22) ve (4.2.23) formüllerinin bu teoremin şartları altında da geçerli olduğu açıktır. O halde (4.2.21), (4.2.22) ve (4.2.23) formüllerinden ve (4.2.24) şartından

$$\int_a^{c-0} K_2 \left(\frac{W(y, z)}{y} \right)^2 dx + \int_{c+0}^b K_2 \left(\frac{W(y, z)}{y} \right)^2 dx \leq 0 \quad (4.2.26)$$

eşitsizliği elde edilir. $\forall x \in (a, c) \cup (c, b)$ için $K_2(x) > 0$ ve ayrıca y ve z lineer bağımsız çözümler olduğu için ve $\forall x \in (a, c) \cup (c, b)$ $y(x) \neq 0$ ve $z(x) \neq 0$ olduğu için $\forall x \in (a, c) \cup (c, b)$ için

$$\left(\frac{W(y, z)}{y} \right)^2 > 0$$

olacak. Bu durumda

$$\int_a^{c-0} K_2 \left(\frac{W(y, z)}{y} \right)^2 dx + \int_{c+0}^b K_2 \left(\frac{W(y, z)}{y} \right)^2 dx > 0 \quad (4.2.27)$$

Fakat (4.2.27) eşitsizliği (4.2.26) eşitsizliği ile çelişmektedir. Böylece $y(x)$ ve $z(x)$ çözümlerinin lineer bağımsız olduğu durum için ispat tamamlanmış oldu. Şimdi ise $y(x)$ ve $z(x)$ çözümlerinin lineer bağımlı olduğu durumu inceleyelim. Bu durumda her x için

$$W(y, z; x) = 0$$

olacağından

$$\int_a^{c-0} K_2 \left(\frac{W(y, z)}{y} \right)^2 dx + \int_{c+0}^b K_2 \left(\frac{W(y, z)}{y} \right)^2 dx = 0 \quad (4.2.28)$$

elde edilir. O halde (4.2.21), (4.2.22) ve (4.2.23) ve (4.2.28)-den

$$\begin{aligned} & \int_a^{c-0} (K_1(x) - K_2(x))(z'(x))^2 dx + \int_{c+0}^b (K_1(x) - K_2(x))(z'(x))^2 dx \\ & - \int_a^{c-0} (\sigma_1(x) - \sigma_2(x))z^2(x) dx + \int_{c+0}^b (\sigma_1(x) - \sigma_2(x))z^2(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

elde edilir. Bu ise teoremin (4.2.25) şartı ile çelişiyor. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış oldu.

Teorem 4.2.5. $z \in C^{(2)}[a, c-0] \oplus C^{(2)}[c+0, b]$, $z(c \pm 0) \neq 0$ fonksiyonu

$$(K_1(x)u'(x))'(x) + \sigma_1(x)u = 0 \quad x \in [a, c) \cup (c, b] \quad (4.2.30)$$

iki aralıklı diferansiyel denkleminin

$$\begin{aligned} u(c+0) &= \alpha_1 u(c-0) \\ K_1(c+0)u'(c+0) &= \alpha_2 u(c-0) + \frac{K_1(c-0)}{\alpha_1} u'(c-0) \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

iletim koşullarını sağlayan bir çözümü olduğunu varsayalım ve $y \in C^{(2)}[a, c-0] \oplus C^{(2)}[c+0, b]$, $y(c \pm 0) \neq 0$ fonksiyonu

$$(K_2(x)u'(x))'(x) + \sigma_2(x)u = 0 \quad (4.2.32)$$

denkleminin $[a, c) \cup (c, b]$ üzerinde aynı (4.2.31) iletim koşullarını sağlayan bir reel çözümü olsun. Burada K_i , $(i = 1, 2)$ $[a, c) \cup (c, b]$ 'de sürekli diferansiyellenebilir $K_i(c \pm 0) \neq 0$, $K_i'(c \pm 0)$ sonlu limit değerlerine sahip fonksiyonlardır ve σ_i $[a, c) \cup (c, b]$ 'de sürekli $\sigma_i(c \pm 0) \neq 0$ sonlu limit değerlerine sahip fonksiyonlardır ($i=1,2$). $[a, c) \cup (c, b]$ aralığında $K_1(x) \geq K_2(x) > 0$, $\sigma_1(x) \leq \sigma_2(x)$, $\sigma_1(x) \neq \sigma_2(x)$, $K_1(x) \neq K_2(x)$ ve $z(a) = z(b) = 0$, $z(c \pm 0) \neq 0$ olsun. O halde $y(x)$ 'in $(a, c) \cup (c, b)$ iki açık aralığında en az bir sıfırı vardır.

İspat. Aksini kabul edelim ki $y(x)$ 'in $(a, c) \cup (c, b)$ açık iki aralığında sıfırı olmasın. O halde Teorem (4.2.3)'den

$$\begin{aligned} & \int_a^{c-} [(K_1 - K_2)(z'(x))^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)z^2(x)] dx \\ & + \int_{c+}^b [(K_1 - K_2)(z'(x))^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)z^2(x)] dx \\ & + \int_a^{c-} K_2 \left(\frac{y(x)z'(x) - y'(x)z(x)}{y(x)} \right)^2 dx + \int_{c+}^b K_2 \left(\frac{y(x)z'(x) - y'(x)z(x)}{y(x)} \right)^2 dx \\ & = \frac{z(x)}{y(x)} [K_1 y(x) z'(x) - K_2 y'(x) z(x)] \Big|_a^{c-} + \frac{z(x)}{y(x)} [K_1 y(x) z'(x) - K_2 y'(x) z(x)] \Big|_{c+}^b \end{aligned}$$

elde ederiz. $\sigma_2 \geq \sigma_1$, $K_1(x) \geq K_2(x) > 0$ koşullarını ve (4.2.22)-(4.2.23) eşitliklerini kullanarak

$$\int_a^{c-} K_2 \left(\frac{y(x)z'(x) - y'(x)z(x)}{y(x)} \right)^2 dx + \int_{c+}^b K_2 \left(\frac{y(x)z'(x) - y'(x)z(x)}{y(x)} \right)^2 dx \leq 0$$

elde ederiz. Bu bir çelişkidir. Böylece $y(x)$ $(a, c) \cup (c, b)$ açık iki aralığında sıfır olmalıdır.

4.3. İki Aralıklı Sturm-Liouville Denklemleri

Bu kesimde İki ayrık $[a, c)$ ve $(c, b]$ aralıklarında tanımlı olan

$$Ly := \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = 0, \quad x \in [a, c) \cup (c, b] \quad (4.3.1)$$

Sturm-Liouville diferansiyel denklemini inceleyeceğiz. Bu denklemin $[a, c)$ -de tanımlı olan çözümüne sol çözüm $(c, b]$ aralığında tanımlı olan çözümüne ise denklemin sağ çözümü diyeceğiz. Ayrıca $x = c$ geçiş noktasında bu çözümleri birbirine "bağlayan" ilave ek şartlar tanımlayacağız (aksi durumda (4.3.1) diferansiyel denklemini birbirinden bağımsız olan iki ayrı diferansiyel denkleme ayrıştırılmış olur). Tez çalışmasında (4.3.1) diferansiyel denkleminin

$$y(c+0) = \alpha y(c-0), \quad y'(c+0) = \beta y'(c-0) \quad (4.3.2)$$

geçiş şartlarını sağlayan çözümlerini inceleyeceğiz.

Tanım 4.3.1. (4.3.1) Sturm-Liouville denkleminin ve (4.3.2) geçiş şartlarının oluşturduğu probleme iki aralıklı Sturm-Liouville denklemini diyeceğiz (kısaca 2A-SLD ile göstereceğiz). 2A-SLD'nin çözümlerini aşağıdaki yeni fonksiyon uzaylarını tanımlayacağız.

$$\begin{aligned} C^{(0)}[a, c-0] &= \{f : [a, c) \rightarrow R \mid f \text{ fonksiyonu her } x \in [a, c) \text{ noktasında sürekli ve} \\ &\quad f(c-0) := \lim_{h \rightarrow 0} f(c-|h|) \text{ sonlu limiti mevcuttur. (yani } f \text{ fonksiyonu} \\ &\quad [a, c) \text{ yarı açık aralığından } [a, c] \text{ kapalı aralığına sürekli olarak devam} \\ &\quad \text{ettirilebilir.)}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{(0)}[c+0, b] &= \{f : (c, b] \rightarrow R \mid f \text{ fonksiyonu her } x \in (c, b] \text{ noktasında sürekli ve} \\ &\quad f(c+0) := \lim_{h \rightarrow 0} f(c+|h|) \text{ sonlu limiti mevcuttur. (yani } f \text{ fonksiyonu} \\ &\quad [c, b) \text{ yarı açık aralığından } [c, b] \text{ kapalı aralığına sürekli olarak devam} \\ &\quad \text{ettirilebilir.)}\} \end{aligned}$$

$$C^{(0)}[a, c-0] \oplus C^{(0)}[c+0, b]$$

$$:= \left\{ f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in (c, b] \text{ ise} \\ f_2(x), & x \in [a, c) \text{ ise} \end{cases} \mid f_1 \in C[a, c-0], f_2 \in C[c+0, b] \right\}$$

$$C^{(k)}[a, c-0] = \{f : [a, c) \rightarrow R \mid f, f', \dots, f^{(k)} \in C[a, c-0]\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$C^{(k)}[c+0, b] = \{f : (c, b] \rightarrow R \mid f, f', \dots, f^{(k)} \in C[c+0, b]\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$C^{(k)}[a, c-0] \oplus C^{(k)}[c+0, b]$$

$$:= \left\{ f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in (c, b] \text{ ise} \\ f_2(x), & x \in [a, c) \text{ ise} \end{cases} \mid f_1 \in C^k[a, c-0], f_2 \in C^k[c+0, b] \right\}$$

$$C^{(0)}[a+0, c-0] = \{f : (a, c) \rightarrow R \mid f \text{ fonksiyonu } \forall x \in (a, c) \text{ noktasında sürekli ve}$$

$$f(a+0) \text{ ve } f(c-0) \text{ sonlu limitleri mevcuttur}\}$$

$$C^{(0)}[c+0, b-0] = \{f : (c, b) \rightarrow R \mid f \text{ fonksiyonu } \forall x \in (c, b) \text{ noktasında sürekli ve}$$

$$f(c+0) \text{ ve } f(b-0) \text{ sonlu limitleri mevcuttur}\}$$

$$C^{(0)}[a+0, c-0] \oplus C^{(0)}[c+0, b-0]$$

$$:= \left\{ f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in (c, b] \text{ ise} \\ f_2(x), & x \in [a, c) \text{ ise} \end{cases} \mid f_1 \in C^0[a+0, c-0], f_2 \in C^0[c+0, b-0] \right\}$$

$$C^{(k)}[a+0, c-0] = \{f : (a, c) \rightarrow R \mid f, f', f'', \dots, f^{(k)} \in C^{(0)}[a+0, c-0]\}$$

$$C^{(k)}[c+0, b-0] = \{f : (c, b) \rightarrow R \mid f, f', f'', \dots, f^{(k)} \in C^{(0)}[c+0, b-0]\}$$

$$C^{(k)}[a+0, c-0] \oplus C^{(k)}[c+0, b-0]$$

$$:= \left\{ f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, c] \text{ise} \\ f_2(x), & x \in (c, b] \text{ise} \end{cases} \mid f_1 \in C^{(k)}[a+0, c-0], f_2 \in C^{(k)}[c+0, b-0] \right\}$$

$$C^{(k)}(a, c) \oplus C^{(k)}(c, b)$$

$$:= \left\{ f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in (c, b] \text{ise} \\ f_2(x), & x \in [a, c] \text{ise} \end{cases} \mid f_1 \in C^{(k)}(a, c), f_2 \in C^{(k)}(c, b) \right\}$$

Burada

$$C^{(0)}(d_1, d_2) = \{f : (d_1, d_2) \rightarrow R \mid f \text{ fonksiyonu } \forall x \in (d_1, d_2) \text{ noktasında süreklidir.}\}$$

$$C^{(k)}(d_1, d_2) = \{f : (d_1, d_2) \rightarrow R \mid f, f', \dots, f^k \in C^{(0)}(d_1, d_2)\} \quad k = 1, 2, \dots$$

gösterimlerinden yararlanılmıştır.

(4.3.1)-(4.3.2) 2A-SLD'nin katsayılarının aşağıdaki şartları sağladığını kabul edeceğiz.

1. $p \in C^{(0)}[a, c-0] \oplus C^{(0)}[c+0, b]$
2. $\forall x \in [a, c) \cup (c, b]$ için $p(x) > 0$
3. $p(c-0) > 0, p(c+0) > 0$
4. $q \in C^{(0)}[a, c-0] \oplus C^{(0)}[c+0, b]$
5. $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

(4.3.3)

Tanım 4.3.2.

$$D(\tilde{L}) := \{f : [a, c) \cup (c, b] \rightarrow R \mid f \in C^{(1)}[a, c-0] \oplus C^{(1)}[c+0, b],$$

$$pf' \in C^{(1)}(a, c) \oplus C^{(1)}(c, b)\} \quad (4.3.4)$$

kümesinde

$$\tilde{L}f := \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y \quad (4.3.5)$$

eşitliği ile tanımlı $\tilde{L} : C^{(0)}[a, c - 0] \oplus C^{(0)}[c + 0, b] \rightarrow C^{(0)}[a, c - 0] \oplus C^{(0)}[c + 0, b]$ operatörüne (4.3.1)-(4.3.2) 2A-SLD'nin ürettiği diferansiyel operatör diyeceğiz.

Not 4.3.3. $\tilde{L}$ operatörünün lineer operatör olduğu apaçıktır.

Tanım 4.3.4. Tanım (4.3.2)-de tanımlı olan $\tilde{L}$ operatörü verilsin

$$\tilde{L}y = 0, \quad y(c + 0) = \alpha y(c - 0), \quad y'(c + 0) = \beta y'(c - 0) \quad (4.3.6)$$

eşitliklerini sağlayan her $y \in D(\tilde{L})$ fonksiyonuna (4.3.1)-(4.3.2) 2A-SLD'nin çözümü diyeceğiz.

Not 4.3.5. $\forall x \in [a, c) \cup (c, b]$ için $y(x) = 0$ şartını sağlayan $y(x)$ fonksiyonunun (4.3.1)-(4.3.2) 2A-SLD'nin bir çözümü olduğu açıktır. Bu çözüme aşık çözüm denir. İleride aksini özel olarak belirtmediğimiz sürece (4.3.1)-(4.3.2) 2A-SLD'nin çözümünden bahsederken bu çözümün aşık olmayan çözüm olduğu varsayılacak.

Tek aralıklı Sturm-Liouville denklemi ve bu denklemin çözümü kavramlarını aşağıdaki gibi tanımlayacağız. Kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığında

$$Mu := \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{du}{dx} \right) + s(x)u = 0 \quad x \in [a, b] \quad (4.3.7)$$

biçiminde kendine eşlenik Sturm-Liouville diferansiyel denklemi verilsin. Aşağıdaki şartları sağladığını kabul edeceğiz.

$$\begin{aligned} 1) \quad & r, s \in C^{(0)}[a + 0, b - 0] \\ 2) \quad & \forall x \in (a, b) \text{ için } r(x) > 0 \\ 3) \quad & r(a + 0) > 0, \quad r(b - 0) > 0 \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Tanım 4.3.6.

$$D(\tilde{M}) := \{u \mid u \in C^1[a, b], \quad ru' \in C^1(a, b)\} \quad (4.3.9)$$

kümesinde

$$Mu := \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{du}{dx} \right) + s(x)u \quad x \in [a, b] \quad (4.3.10)$$

eşitliği ile tanımlı

$$\widetilde{M} : C^0[a+0, b-0] \rightarrow C^0[a+0, b-0]$$

lineer operatörüne (4.3.7) tek aralıklı Sturm-Liouville denkleminin ürettiği diferansiyel operatör denir.

Not 4.3.7. $\widetilde{M}$ operatörünün lineer operatör olduğu apaçıktır.

Tanım 4.3.8. $\widetilde{M}(u) = 0$ eşitliğini sağlayan $u \in D(\widetilde{M})$ fonksiyonuna (4.3.7) Sturm-Liouville denkleminin çözümü denir.

Not 4.3.9. Aksini özel olarak belirtmediğimiz durumlarda (4.3.7) Sturm-Liouville denkleminin $y \in D(\widetilde{M})$ çözümünden bahsederken $u \neq 0$ olduğunu, yani u -nun aşıkâr çözüm olmadığını kabul edeceğiz.

Teorem 4.3.10.

$$\begin{cases} Ly := \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = 0, & x \in [a, c) \cup (c, b] \\ y(c+0) = \alpha y(c-0), & y'(c+0) = \beta y'(c-0) \end{cases} \quad (4.3.11)$$

2A-SLD'i ve

$$My := \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{du}{dx} \right) + s(x)u = 0, \quad x \in [a, b] \quad (4.3.12)$$

tek aralıklı Sturm-Liouville denklemi (1A-SLD) verilsin. (4.3.3) ve (4.3.8) şartlarının sağladığını ve $y(x)$ fonksiyonun (4.3.11) 2A-SLD'nin aşıkâr olmayan keyfi bir çözümü olduğunu kabul edelim. Ayrıca $x_1 \in [a, c)$ ve $x_2 \in (c, b]$ noktalarının bu çözümünün iki ardışık sıfırı olduğunu ve

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{c-0} \left((p(x) - r(x)) \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^2 - (q(x) - s(x))(y(x))^2 \right) dx \\ & + \int_{c+0}^{x_2} \left((p(x) - r(x)) \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^2 - (q(x) - s(x))(y(x))^2 \right) dx \geq 0 \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

$$y(c \mp 0) \neq 0 \quad (4.3.14)$$

$$\alpha = 1, \quad p(c+0) = \frac{1}{\beta} p(c-0) \quad (4.3.15)$$

şartlarının sağlandığını kabul edelim. O halde (4.3.12) SLD'inin $u(x_1) = 0$ şartını sağlayan her aşık olmayan $u(x)$ çözümünün $[x_1, c) \cup (c, x_2]$ kümesinde en az bir sıfırı mevcuttur.

İspat. Teoremi olmayana ergi yöntemi ile ispat edeceğiz. $\Omega_1 = [a, c)$, $\Omega_2 = (c, b]$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ gösterimlerinden yararlanacağız. Kabul edelim ki (4.3.12) SLD'inin $u(x_1) = 0$ ve $\forall x \in (x_1, x_2] \cap \Omega$ için $u(x) \neq 0$ olacak biçimde en az bir $u(x)$ çözümü mevcuttur. $\forall x \in (x_1, x_2) \cap \Omega$ için $y(x) > 0$ ve $u(x) > 0$ olduğu durumu inceleyelim. Bu durumda

$$y(x)(Ly)(x) - \frac{y(x)}{u(x)}(Mu)(x) = 0 \quad (4.3.16)$$

özdeşliğinden ve iyi bilinen Picone formülünden (bak, (Swanson, 1968)) yararlanırsak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \int_{x_1+0}^{c-0} \left((p-r) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - (q-s)y^2 + ru^2 \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{u} \right) \right)^2 \right) dx \\ &= \left(\frac{y}{u} (py'u - ryu') \right) \Big|_{x_1+0}^{c-0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{c+0}^{x_2-0} \left((p-r) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (q-s)y^2 + ru^2 \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{u} \right) \right)^2 \right) dx \\ &= \left(\frac{y}{u} (py'u - ryu') \right) \Big|_{c+0}^{x_2-0} \end{aligned}$$

Bu eşitlikleri taraf-tarafa toplarsak ve

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{u} \right) = \frac{W(y, u)}{u^2}$$

özdeşliğinden yararlanırsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \int_{x_1+0}^{c-0} \left((p-r) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - (q-s)y^2 + r \left(\frac{W(y, u)}{u} \right)^2 \right) dx \\ &+ \int_{c+0}^{x_2-0} \left((p-r) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - (q-s)y^2 + r \left(\frac{W(y, u)}{u} \right)^2 \right) dx \\ &= \left(\frac{y}{u} (py'u - ryu') \right) \Big|_{x_1+0}^{x_2-0} - \left(\frac{y}{u} (py'u - ryu') \right) \Big|_{c-0}^{c+0} \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Burada $W(y, u)$ ile $y(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarının Wronskianı gösterilmiştir, yani

$$W(y, u; x) = y(x)u'(x) - y'(x)u(x) \quad (4.3.18)$$

$y(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olduğu durumda öyle $l \neq 0$ sabiti mevcuttur ki, $\forall x \in \Omega$ için $u(x) = ly(x)$ eşitliği sağlanır. Bu durumda $u(x_2) = ly(x_2) = 0$ olur. Bu nedenle $u(x)$ -in $(x_1, x_2) \cap \Omega$ kümesinde en az bir sıfırı mevcut olmuş olur. Yani y ve u fonksiyonları lineer bağımlı olduğu durumda teorem geçerli olur. Şimdi bu fonksiyonların lineer bağımsız olduğu durumu inceleyeceğiz. Bu fonksiyonların lineer bağımsız olduğunu ve $\forall x \in (x_1, x_2] \cap \Omega$ için $u(x) > 0$ olduğunu kabul ettiğimiz için

$$\frac{d\left(\frac{y}{u}\right)}{dx}\Big|_{x=x_0} \neq 0 \quad (4.3.19)$$

olacak biçimde en az bir $x_0 \in (x_1, x_2] \cap \Omega$ noktası mevcuttur.

Çünkü eğer $\forall x \in (x_1, x_2] \cap \Omega$ için

$$\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{u}\right)\right)(x) = 0$$

olsaydı, $(x_1, x_2] \cap \Omega$ aralığında $\frac{y}{u}$ fonksiyonu sabit fonksiyon olurdu ve dolayısıyla y ve u fonksiyonları lineer bağımlı olurdu. Fakat bu fonksiyonların lineer bağımsız olduğunu kabul etmiştik. $\frac{d\left(\frac{y}{u}\right)}{dx} \in C^{(0)}[a, c-0] \oplus C^{(0)}[c+0, b]$ olduğu için $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (x_1, x_2] \cap \Omega$ için

$$\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{u}\right)\right)(x) \neq 0 \quad (4.3.20)$$

olacak biçimde en az bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur. Bunu aksini kabul yöntemi ile gösterebiliriz. Aksini kabul edelim, yani kabul edelim ki $\forall \delta > 0$ için $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (x_1, x_2] \cap \Omega$ kümesinde

$$\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{u}\right)\right)(x_\delta) = 0$$

olacak biçimde bir x_δ noktası mevcut olsun $\delta = \frac{1}{n}$, $x_\delta = x_n$ gösterirsek $x_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} x_0$ ve

$$\left(\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) \right) (x_n) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

eşitlikleri elde edilir. Sonuncu eşitlikte $n \rightarrow \infty$ olarak limite geçerse

$$\left(\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) \right) (x_0) = 0$$

elde edilir ki, bu da (4.3.20) ile çelişki oluşturuyor. Ayrıca $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (x_1, x_2] \cap \Omega$ için

$$W(y, u; x) \neq 0 \quad (4.3.21)$$

sağlanır. O halde teoremin şartlarını da göz önüne alırsak (4.3.17)-nın sol tarafının sıfırdan büyük bir reel sayıya eşit olduğunu elde ederiz. Eğer $u(x_2) = 0$ ise teoremin ispatı açıktır. Bu nedenle sadece $u(x_2) \neq 0$ durumunu incelememiz yeterlidir. Bu durumda

$$\lim_{x \uparrow x_2} \left(\frac{y}{u} (py'u - ryu') \right) (x) = 0 \quad (4.3.22)$$

eşitliği elde edilir. 2A-SLD'inin çözümünün tanımı gereği $\lim_{x \downarrow x_1} (py'u - ryu') (x)$ limiti mevcuttur. Ayrıca teoremin şartlarından yararlanırsak

$$\lim_{x \downarrow x_1} (py'u - ryu') (x) = 0 \quad (4.3.23)$$

eşitliğini elde ederiz. Öte yandan $y(x_1) = u(x_1) = 0$ olduğundan ve $y(x)$, $u(x)$ çözümleri aşık olmayaın çözümler olduğundan lineer diferansiyel denklemler teorisinden iyi bilinen varlık ve teklik teoremi (Naimark, 1967) gereği $y'(x_1 + 0) \neq 0$ ve $u'(x_1 + 0) \neq 0$ eşitsizlikleri elde edilir. Analizden iyi bilinen L'Hospital kuralı (Bayraktar, 2010) gereği

$$\lim_{x \downarrow x_1} \frac{y(x)}{u(x)} = \frac{y'(x_1 + 0)}{u'(x_1 + 0)} \quad (4.3.24)$$

eşitliği sağlanır. (4.3.22) ve (4.3.23) eşitliklerinden

$$\left(\frac{y}{u} (py'u - ryu') \right) (x_1 + 0) = \frac{y'(x_1 + 0)}{u'(x_1 + 0)} (py'u - ryu')(x_1 + 0) = 0 \quad (4.3.25)$$

eşitliği bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
\lim_{x \downarrow c} \left(\frac{y}{u} (py'u - ryu') \right) (x) &= \frac{y(c+0)}{u(c)} (p(c+0)y'(c+0)u(c) - r(c)y(c+0)u'(c)) \\
&= \frac{y(c-0)}{u(c)} \left(\frac{1}{\beta} p(c-0)\beta y'(c-0)u(c) - r(c)y(c-0)u'(c) \right) \\
&= \frac{y(c-0)}{u(c)} (p(c-0)y'(c-0)u(c) - r(c)y(c-0)u'(c))
\end{aligned} \tag{4.3.26}$$

eşitliklerini elde ederiz. (4.3.21) , (4.3.22) ve (4.3.25) eşitlikleri gereği (4.3.26) eşitliğinin sağ tarafı sıfıra eşittir. Sonuç olarak (4.3.17) eşitliğinin sol tarafının sıfırdan büyük, sağ tarafının ise sıfıra eşit olduğu çelişkisi elde edildi. Aksini kabul ederek çelişki elde ettik. Böylece $\forall x \in (x_1, x_2) \cap \Omega$ için $y(x) > 0$ ve $u(x) > 0$ olduğu durum için teoremin ispatı tamamlanmış oldu.

$$i) \quad \forall x \in (x_1, x_2) \cap \Omega \text{ için } y(x) > 0, u(x) < 0$$

$$ii) \quad \forall x \in (x_1, x_2) \cap \Omega \text{ için } y(x) < 0, u(x) > 0$$

ve

$$iii) \quad \forall x \in (x_1, x_2) \cap \Omega \text{ için } y(x) < 0, u(x) < 0$$

durumları için ispat benzer biçimde yapılabilir.

Teorem 4.3.11.

$$\begin{cases} Ly := \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = 0, & x \in [a, c) \cup (c, b] \\ y(c+0) = \alpha y(c-0), \quad y'(c+0) = \beta y'(c-0) \end{cases} \tag{4.3.27}$$

2A-SLD'i ve

$$My := \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{du}{dx} \right) + s(x)u = 0, \quad x \in [a, b] \tag{4.3.28}$$

tek aralıklı Sturm-Liouville denklemi (1A-SLD) verilsin. (4.3.3) ve (4.3.8) şartlarının sağladığını ve $y(x)$ fonksiyonun (4.3.27) 2A-SLD'nin aşıkâr olmayan keyfî bir çözümü olduğunu kabul edelim. Ayrıca $x_1 \in [a, c)$ ve $x_2 \in (c, b]$ noktalarının bu çözümünün

iki ardışık sıfırı olduğunu ve

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{c-0} \left((p(x) - r(x)) \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^2 - (q(x) - s(x))(y(x))^2 \right) dx \\ & + \int_{c+0}^{x_2} \left((p(x) - r(x)) \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^2 - (q(x) - s(x))(y(x))^2 \right) dx > 0 \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

$$y(c \mp 0) \neq 0 \quad (4.3.30)$$

$$\alpha = 1, \quad p(c+0) = \frac{1}{\beta} p(c-0) \quad (4.3.31)$$

şartlarının sağlandığını kabul edelim. O halde (4.3.28) SLD'nin $u(x_1) = 0$ şartını sağlayan her $u(x)$ çözümünün $(x_1, x_2) \cap \Omega$ açık kümesinde en az bir sıfırı mevcuttur.

İspat. Bu teoremi de aksini kabul ederek çelişki elde etme yöntemi ile ispat edeceğiz. Kabul edelim ki (4.3.12) 1A- SLD'nin $u(x_1) = 0$ ve $\forall x \in (x_1, x_2) \cap \Omega$ için $u(x) \neq 0$ olacak biçimde en az bir $u(x)$ çözümü mevcuttur. Yine $\forall x \in (x_1, x_2) \cap \Omega$ için $y(x) > 0$ ve $u(x) > 0$ olduğu durumum için ispat yapacağız. $y(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarının lineer bağımlı ve lineer bağımsız oldukları durumları ayrı ayrılıkta araştıracağız.

Durum 1. İlk önce $y(x)$ ve $u(x)$ -in lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda öyle $l \neq 0$ sayısı bulunur ki $\forall x \in \Omega$ için $u(x) = ly(x)$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla $u(x_1) = ly(x_1) = 0$ ve $u(x_2) = ly(x_2) = 0$ elde edilir yani, $u(x_1) = u(x_2) = 0$ olur. Ayrıca $\forall x \in (x_1, c) \cup (c, x_2)$ için

$$W(y, u; x) = 0$$

olacak. Bu durumda teoremin şartı gereği (4.3.26)-nın sol tarafı sıfırdan büyük olan bir reel sayıya eşit olacak. Ayrıca $\lim_{x \downarrow x_1} (py'u - ryu')(x)$ limitinin mevcut olduğu ve

$$(py'u - ryu')(x_2 - 0) = 0$$

olduğu açıktır. *Teorem*(4.3.8)'in ispatına tamamen benzer biçimde (4.3.26)-nın sağ tarafının sıfıra eşit olduğu ispat olunur. Böylece $y(x)$ ve $u(x)$ -in lineer bağımlı olduğu durum için çelişki elde ettik. Dolayısı ile bu durum için ispat tamamlanmış oldu.

Durum 2. $y(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğunu kabul edelim. Bu

durumda $u(x_2) = 0$ ve $u(x_2) \neq 0$ alt durumlarını ayrı-ayrılıkta incelememiz gerekir. $u(x_2) \neq 0$ durumu *Teorem(4.3.8)*'in ispatına tamamen benzerdir. $u(x_2) = 0$ olduğu durumu inceleyelim. Bu durumda teoremin şartı gereği (4.3.26) eşitliğinin sol tarafı sıfırdan büyük, sağ tarafı ise sıfıra eşit olur. Çelişki elde edildi. İspat tamamlanmış oldu.

Sonuç 4.3.12. Kabul edelim ki, *Teorem(4.3.8)*'un (4.3.13) şartı dışında tüm şartları sağlanır. Eğer $\forall x \in (x_1, x_2) \cap \Omega$ için

$$p(x) \geq r(x) , \quad q(x) \leq s(x) \quad (4.3.32)$$

şartları sağlanırsa o halde $u(x)$ çözümünün $(x_1, x_2] \cap \Omega$ -da en az bir sıfırı mevcuttur.

Sonuç 4.3.13. Kabul edelim ki, *Teorem(4.3.8)*'in tüm şartları sağlanır ve en az bir $x_0 \in (x_1, x_2) \cap \Omega$ için

$$|p(x_0) - r(x_0)| + |q(x_0) - s(x_0)| > 0 \quad (4.3.33)$$

eşitsizliği sağlansın. O halde (4.3.12) tek-aralıklı SLD-nin $u(x_1) = 0$ şartını sağlayan her aşık olmayan $u(x)$ çözümünün $(x_1, x_2) \cap \Omega$ kümesinde en az bir sıfırı mevcuttur.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. Sonuç

Bu tez çalışmasında Klasik Sturm-Liouville denklemlerinden farklı olan bir diferansiyel denklemin çözümleri için salınım ve ayırma özellikleri araştırılmıştır. Araştırdığımız Sturm-Liouville denklemi ortak uç noktası (bu noktaya iletim noktası da denir) olan iki ayrık yarı açık $[a, c)$ ve $(c, b]$ aralıklarında tanımlıdır. $x = c$ ortak uç noktasında ise çözümler üzerine geçiş şartları olarak adlandırılan iki tane ek şart konulmuştur. Aslında iki farklı aralıkta tanımlı olan iki farklı diferansiyel denklem araştırılmaktadır; ancak bu denklemler bir-birinden bağımsız değildir, onların çözümleri geçiş şartları aracılığı ile bir-birine bağımlı hale getirilmiştir. Bu tür diferansiyel denklemler literatürde Mukhtarov ve Aydemir (2025), çok-aralıklı diferansiyel denklemler olarak adlandırılmaktadır. Tez çalışmamızda iki-aralıklı Sturm-Liouville denklemlerin çözümlerinin sıfırlarının davranışları incelenmiştir. Bu kapsamda hem aynı bir iki-aralıklı Sturm-Liouville denkleminin iki lineer bağımsız çözümünün sıfır yerleri karşılaştırılmıştır hem de iki tane farklı iki-aralıklı Sturm-Liouville denklemlerinin çözümlerinin sıfır yerleri karşılaştırılmıştır. Ayrıca Literatürde ilk defa olarak bu tez çalışmamızda iki-aralıklı Sturm-Liouville denkleminin çözümlerinin sıfırları Klasik (yani tek-aralıklı) Sturm-Liouville denkleminin çözümlerinin sıfırları ile karşılaştırılarak yeni sonuçlar elde edilmiştir. Tezde elde edilen tüm sonuçlar yenidir. Çok özel bir durumunda benzer klasik sonuçlar ile çakışmaktadır. Bu nedenle tez çalışmamızda elde edilen sonuçlar bilinen klasik sonuçları genelleştirmektedir. Ayrıca yeni tür problemler araştırıldığı için tez sonuçları Klasik Sturm-Liouville teorisini ve bu teorinin yöntemlerini daha da geliştirmektedir.

5.2. Öneriler

Bu çalışmamızda sadece iki-aralıklı Sturm-Liouville denklemleri araştırılmıştır. Benzer yöntemler ile üç-aralıklı ve genel olarak n -aralıklı ($n > 2, n \in \mathbb{N}$) Sturm-Liouville denklemleri için de salınım ve ayırma özellikleri araştırılabilir. Tez çalışmamızda katsayı fonksiyonları özdeğer parametresinden bağımsızdır. Katsayı fonksiyonlarının özdeğer parametresine bağımlı olan çok-aralıklı Sturm-Liouville denklemleri için de benzer sonuçlar elde edilebilir.



KAYNAKLAR

- Akbarfam, I., Jodayree, A., 2014. Resolvent Operator and Self-Adjointness of Sturm-Liouville Operators with a Finite Number of Transmission Conditions, *Mediterranean Journal Of Mathematics*, 11(2), 447-462.
- Akdoğan, Z., Demirci, M. and Mukhtrov, O. Sh., 2005. Sturm-Liouville Problem with eigenparameter-Dependent Boundary and Transmission conditions, *Acta applanicae mathematicae* 86, 329 - 344.
- Allahverdiev, B. P., Bairamov, E., Ugurlu, E. (2013). Eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems in boundary conditions with transmission conditions. *J. Math. Anal. Appl.* 401(1), 388-396.
- Allahverdiev, B.P., Tuna, H. (2020a). Eigenfunction expansion for singular Sturm-Liouville problems with transmission conditions. *Electron. J. Differ. Equ.* 3, 4286-4302.
- Allahverdiev, B. P., Tuna, H., 2019. Eigenfunction Expansion for Singular Sturm-Liouville Problems with Transmission Conditions, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2019(03), 1-10.
- Allahverdiev, B. P., Tuna, H., 2018. Titchmarsh-Weyl Theory for Dirac Systems with Transmission Conditions, *Mediterranean Journal of Mathematics* 15(4), 1-12.
- Ao, J., Sun, J., 2014. Matrix representations of Sturm-Liouville problems with coupled eigenparameter-dependent boundary conditions, *Applied Mathematics and Computation*, 244, 142-148.
- Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh., 2013. Green's Function Method for Self Adjoint Realization of Boundary Value Problems with Interior Singularities, *Abstract and Applied Analysis*.
- Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh., 2014. Completeness of one two-interval boundary value problem with transmission conditions, *Miskolc Mathematical Notes*, 15(2), 293 - 303.
- Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh., 2015. Second order differential operators with interior singularity, *Advances in Difference Equations*
- Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh., 2016., Qualitative analysis of eigenvalues and eigenfunctions of one boundary value-transmission problem, *Boundary Value Problems*, 1-16.
- Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh. 2017. Generalized Fourier Series as Green's Function Expansion for Multi-interval Sturm Liouville Systems, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14(3), 1-17.
- Bairamov, E., Aygar, Y. ve Ozgur, G. B. (2019). Scattering properties of eigenparameter dependent impulsive Sturm-Liouville Equations. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 4, 2769-2781.
- Bairamov, E. and Ugurlu, E., 2012. On the characteristic values of the real component of a dissipative boundary value transmission problem, *Appl. Math. and Comp.* 218, 9657-9663.

- Bayraktar, M., 1987. Fonksiyonel Analiz, Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Erzurum.
- Bayraktar, M., 2010. Analiz, Nobel Yayın Dğıtım. Ankara.
- Belinskiy, B. P., Hiestand, J. W. ve Matthews, J. V. 2015. Piecewise Uniform Optimal Design of a Bar with An Attached Mass. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015(206), 1-17.
- Belinsky, B. P. and Dauer, J. P., 1997. On a Regular Sturm-Liouville Problem on a Finite Interval with the Eigenvalue Parameter Appearing Linearly in the Boundary Conditions, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 191, Spectral Theory and Computational Methods of Sturm-Liouville Problems, 183 - 196.
- Binding, P. A., Browne, P. J., Watson, B. A. 2000. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions. *J. London Math. Soc.* 62, 161-182.
- Binding, P. A., Browne, P. J. and Watson, B. A., 2002. Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter II, *J. Comput. Appl. Math.* 148, 147 - 169.
- Birkhoff, G. D., 1908a. On the Asymptotic Character of the Solution of the Certain Linear Differential Equations Containing Parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 9, 219-231.
- Birkhoff, G.D., 1908b. Boundary Value and Expansion Problems of Ordinary Linear Differential Equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 373-399.
- Boyce, W. E., DiPrima, R. C. , Meade, D. B., 2021. Elementary differential equations and boundary value problems. John Wiley and Sons.
- Chanane, B., 2007. Eigenvalues of Sturm-Liouville problems with discontinuity conditions inside a finite interval, *Appl. Math. Comput.* 188, 1725 - 1732.
- Conway, J. B., 1985. A course in Functional Analysis, Springer-Verlag, New York.
- Çakar, Ö., 2007. Fonksiyonel Analize Giriş I, A.Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:13, Ankara.
- Çavuşoğlu, S., Mukhtarov, O. and Olgar, H. 2021. Finite Difference Method for Approximate Solution of a Boundary Value Problem with Interior Singular Point. *Konuralp Journal of Mathematics (KJM)*, 9(1), 40-48.
- Dunford, N. and Schwartz, J. T., 1963. Linear operators II, Spectral Theory, Interscience, New York.
- Dzurina, J., 2018. Oscillation of the second order advanced differential equations, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* No. 20, 1-9.
- Freiling, G. and Yurko, V. A. 2001. Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications, Nova Science, New york.
- Fulton, C. T., 1977. Two point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, *Proc. Roy. Soc. Edinburg*, 77A, 293 - 308.
- Fulton, C. T., 1980. Singular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, *Proc. Roy. Soc. Edinburg*, 87A, 1.
- Gasymov, M. G. and Levitan, B. M. (1966). The Inverse Problem for the Dirac System. *Dokl. Akad. Nauk SSR*, 167, 967-970.

- Gohberg, I. C. and Krein, M. G., 1969. Introduction to the Theory of Linear Non-selfadjoint Operators, Translation of Mathematical Monographs, vol. 18, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. 1990.
- Griffel, D. H., 2002. *Applied Functional Analysis*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York.
- Guliyev, Namig J., 2019. Schrödinger operators with distributional potentials and boundary conditions dependent on the eigenvalue parameter. *J. Math. Phys.* 60(6).
- Güldü, Y., Amirov, R. Kh. and Topsakal, N., 2013. On impulsive Sturm-Liouville operators with singularity and spectral parameter in boundary conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 64, No. 12, (Ukrainian Original Vol. 64, No. 12, December, 2012), 1816-1838.
- Gwak, S., Kim, J., Rey, S. J., 2016. Massless and massive higher spins from anti-de Sitter space waveguide. *Journal of High Energy Physics*, volume 2016, Article number: 24.
- Hinton, D. B., 1979. An Expansion Theorem for an Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, *Quart J. Math. Oxford* (2), 33 - 42.
- Hinton, D. B. and Shaw, J. K., 1987. Spectrum of a Hamiltonian System with Spectral Parameter in a Boundary Condition, *Canad. Math. Soc. Proc.* 8, 171 - 186.
- Hinton, D. B. and Shaw, J. K., 1990. Differential Operators with Spectral Parameter in Completely in the Boundary Conditions, *Funkcial. Ekvac.* 33, 363.
- Kadakal, M., 1996. Lineer diferensiyel operatörlerin bazı temel özellikleri, Ondokuz Mayıs Üniversitesi.
- Kadakal, M., Muhtaroglu, O., 2006. Discontinuous Sturm Liouville problems containing eigenparameter in the boundary conditions, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, vol. 22, no. 5, pp. 1519- 1528.
- Kandemir, M., 2015. *Diferensiyel Denklemler*, Pegem Akademi, Ankara.
- Kandemir, M., Mukhtarov, O., Yakubov, Y., 2009. Irregular boundary value problems with discontinuous coefficients and the eigenvalue parameter, *Mediterr. J. Math.* 6, 317 - 338.
- Kandemir, M., Mukhtarov, O. Sh., 2017. Nonlocal Sturm-Liouville problems with integral terms in the boundary conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2017, No. 11, pp. 112.
- Kaoullas, G. ve Georgiou, G. C., 2015. Start-up and cessation Newtonian Poiseuille and Couette flows with dynamic wall slip. *Meccanica*, 50:1747-1760.
- Kapustin, N. Yu., and Moiseev, E. I., 1998. The Square Laplace Operator for the Spectral Problem with the Spectral Parameter in the Boundary Condition, *Diff. Uravn.*, V.34, N.5, 662 - 667.
- Kapustin, N. Yu., 1999. Oscillation properties of solutions to a non selfadjoint spectral problem with spectral parameter in the boundary condition, *Diferentsial' nye Uravneniya*, 35, No. 8, 1024 - 1027.
- Kato, T., 1966. *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag , New -York Inc.

- Keldys, M. V., 1951. On the eigenvalues and eigenfunctions of certain classes of non-self-adjoint equations. Dokl Akad. Nauk SSSR (in Russian) 77, 11-14; English transl. in this volume.
- Keldys, M. V., 1951. On the Characteristic Values and Characteristic Functions of Certain Classes of Non-selfadjoint Equations", Dokl. Akad. Nauk. SSR (in Russian) 77, 11.
- Kerimov N.B., 1996a. On the basis property of systems eigen and associated functions of a second order differential operator. (Russian). Dokl. Akad. Nauk 346, no 5, pp.596 - 597.
- Kerimov N. B. (1996b). On the basis property and uniform minimality of system of root functions of differential operators. I. (Russian) Differentsialnye Uravneniya, 32(3), 317-322.
- Kerimov, N. B. and Allakhverdiev, T. I., 1993a. On a boundary value problem I, (Russian), Differential nye Uravneniya 29, no 1, pp. 54 - 60.
- Kerimov, N. B. and Allakhverdiev, T. I., 1993b. On a boundary value problem II, (Russian), Differential nye Uravneniya 29, no 6, pp. 814 - 821.
- Kerimov N. B., Mamedov Kh. R., 1998. On the Riesz basis property of root functions of some regular boundary value problems (Russian). Mat. Zametki, 64(4), 558-563.
- Kerimov, N. B. and Mamedov, Kh. R., 1999. On a boundary value problem with Spectral parameter in the boundary conditions (Russian). Sibirsk. Mat. Zh. 40(2), 325-335.
- Kerimov N.B., Mirzoyev V.S., 2003. On the basis properties of one spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition. (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. 44(2003), no.5, pp.1041 - 1045.
- Kostyuchenko, A. G. and Shkalikov, A. A., 1983. Self-adjoint Quadratic Operator Pencils and Elliptic Problems", Functional Anal. Appl. 17, 109.
- Kreith, K., 1973. Oscillation Theory, Lecture Notes in Mathematics, vol. 324. Springer, Berlin.
- Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Application, New-York.
- Ladyzhenskaia, O. A., 1985. The Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Springer - Verlag, New York.
- Lang, S, 1983. Real Analysis (Second Edition), Addison-Wesley, Reading Mass.
- Levitan and Sargsyan, 1988. Sturm-Liouville and Dirac Operators [in Russian], Nauka, Moscow.
- Li, K., Sun, J., Hao, X., 2017. Eigenvalues of regular fourth order Sturm-Liouville problems with transmission conditions. Math. Methods Appl. Sci. 40, 3538-3551.
- Likov, A. V. and Mikhailov, Y. A., 1963. The theory of heat and mass transfer (Russian), Qosenergoizdat.
- Liouville, J. and Sturm, J. C. F., 1837. Extrait d'une mémoire sur le développement des fonctions en serie (in French), J. Math. Pures et Appl. de Liouville, vol. 11, pp. 220-223.
- Lutzen, J., 1984. Sturm and Liouville's Work on Ordinary Linear Differential Equations The Emergence of Sturm-Liouville Theory, Archive for History of Exact Sciences, 29(4), 309-376.

- Markus, A. S. and V. I. Matsayev, V. I., 1984. Comparison theorems for spectra of linear Operators and spectral asymptotics, Tr. Mosk. Mat. Obshch., (1982), vol.45, pp. 133- 181; English transl., Trans. Moscow Math. Soc., vol. 1, pp. 139 - 188.
- Mukhtarov, O., 1994. Discontinuous Boundary Value Problem with Spectral Parameter in Boundary Condition. Tr. J. of Mathematics, 18, 183-192.
- Mukhtarov, O., Aydemir, K., 2025. Picone Type Comparison Theorems for Two-Interval Sturm-Liouville Equations with Transmission Conditions, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 48(15), 174 - 182.
- Mukhtarov, O., Olğar, H., Aydemir, K., 2014. Transmission problems for the Sturm-Liouville equation involving an abstract linear operator, AIP Conf. Proc. 1611, p.325.
- Mukhtarov, O., Aydemir, K., 2015. Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point, Acta Mathematica Scientia, 35B(3):639 - 649.
- Mukhtarov, O., Olğar, H., Aydemir, K. Jabbarov I., 2018. Operator-Pencil Realization Of One Sturm-Liouville Problem With Transmission Conditions. Applied And Computational Mathematics, 17(2), 284-294.
- Mukhtarov, O., Çavuşoğlu, S. and Olğar, H. (2019). Numerical Solution of One Boundary Value Problem Using Finite Difference Method. Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 11, 85-89.
- Mukhtarov, O., Yücel, M., Aydemir, K. (2020). Treatment a new approximation method and its justification for Sturm-Liouville problems. Complexity 5, 2020.
- Mukhtarov, O., Aydemir, K. (2020). Discontinuous Sturm-Liouville Problems Involving an Abstract Linear Operator. Journal of Applied Analysis and Computation, 10(4), 1545-1560.
- Mukhtarov, O., Aydemir, K. (2021). Oscillation properties for non-classical Sturm-Liouville problems with additional transmission conditions. Mathematical Modelling and Analysis, 26(3), 432-443.
- Mukhtarov, O., Yücel, M., Aydemir, K. (2021). A New Generalization of the Differential Transform Method for Solving Boundary Value Problems. Journal of New Results in Science 10, 2, 49-58.
- Mukhtarov, O., Demir, H., 1999. Coerciveness of the discontinuous initial-boundary value problem for parabolic equations, Israel J. Math. 114, 239 - 252.
- Mukhtarov, O., Kadakal, M., 2005. Some spectral properties of one Sturm-Liouville type problem with discontinuous weight, Sib. Math. J., Vol. 46, 681 - 694.
- Mukhtarov, O., Kandemir, M., 2002. Asymptotic behaviour of eigenvalues for the discontinuous boundary- value problem with Functional-Transmissin conditions, Acta Mathematica Scientia vol 22 B(3), pp.335 - 345.
- Mukhtarov, O., Yakubov, S., 2002. Problems for ordinary differential equations with transmission conditions, Appl. Anal., Vol 81, 1033 - 1064.
- Naimark, M. A., 1967. Linear Differential Operators, Ungar, New York.
- Nie, Y. ve Linetsky, V. (2019). Sticky reflecting Ornstein-Uhlenbeck diffusions and the Vasicek interest rate model with the sticky zero lower bound. Stochastic Models, pages 1-19.

- Ozturk, S., Muhtaroglu, O., Aydemir, K., 2023. Geçiş Şartları İle Birleştirilmiş İki Aralıkli Sturm-Liouville Denklemleri İçin Karşılaştırma Kriterleri, Gaziosmanpasa Journal of Scientific Research.
- Panakhov, E. S., Gulsen, T. (2015). On discontinuous Dirac systems with eigenvalue dependent boundary conditions, AIP Conference Proceeding, 1648, 260003, 1-4.
- Rasulov, M. L., 1967. Methods of Contour Integration, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Rodman, L., 1989. An Introduction to Operator Polynomials, Birkhauser Verlag, Boston, Massachusetts.
- Parra Rodriguez, A., Rico, E., Solano, E. ve Egusguiza, I.L. (2018). Quantum Networks in Divergence-free Circuit QED. Quantum Sci. Technol. 3, no. 2, 024012, 46pp, arXiv:1711.108817.
- Qiu, J., 2012. Positive solutions for a nonlinear periodic boundary-value problem with a parameter, Electronic Journal of Differential Equations 133, 1- 10.
- Rudin, W., 1964. Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, New York.
- Russakovskii, E. M., 1975. Sınır şartları özdeğer parametresinden polinomial şekilde bağımlı olan sınır değer probleminin operator yorumu, Funk. Analiz. I eqo priloj, 9, no 4, sayfa 91 - 92.
- Russakovskii, E. M. (1993). Sturm-Liouville problem with parameter in the boundary conditions. Trudy Seminara imeni I. G. Petrovskogo, 18.
- Schneider, A. (1974). A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions. Math. Z. 136, 163-167. Sturm, J. C. F. (1836). Memoire sur les equations differentielles lineaires du second ordre (in French), J. Math. Pures et Appl. de Liouville, vol. I, pp. 106-186 (=Liouville Journal).
- Schur, I., 1909. Zur Theorie der linearen homogenen Integralgleichungen, Math. Ann. 67(1909), 306-339.
- Shkalikov, A. A., 1979. On the Basis Problem of the Eigenfunctions of an Ordinary Differential Operators, Uspekhi Mat. Nauk, 34:5 (209), 235 - 236.
- Shkalikov, A. A., 1982. Boundary-value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions, (Moscow State University.
- Simon, B., 2005. Sturm oscillation and comparison theorems Sturm-Liouville Theory: Past and Present, pp. 29-43.
- Swanson, C.A., 1968. Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, vol. 48. Academic Press, New York and London.
- Swanson, C.A., 1975. Picone's identity, Rendiconti di Matematica, 8(1975), pp. 373-397.
- Stakgold, I., 1971. Boundary Value Problems of Mathematical Physics, II, Macmillan Co., New York.
- Sturm, J. C. F., 1836. Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre (in French), J. Math. Pures et Appl. de Liouville, vol. I, pp. 106-186. (=Liouville Journal).
- Sturm, J. C. F., 1837. Memoire sur une classe d'équations differentielles partielles (in French), J. Math. Pures et Appl. de Liouville, vol. I, pp. 373-444.

- Şen, E., Açıkgöz, M. And Aracı, S. (2017). Spectral problem for Sturm-Liouville operator with retarded argument which contains a spectral parameter in the boundary condition. *Ukrainian Mathematical Journal* 68,8, 1263-1277.
- Şen, E., Stikonas, A. (2021). Asymptotic Distribution of Eigenvalues and Eigenfunctions of a Nonlocal Boundary Value Problem. *Mathematical Modelling and Analysis*, 26(2), 253-266.
- Şuhubi, E.S, 2001. Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul.
- Taşçı, D., 2001. Lineer Cebir, Sel-Ün Vakfı Yayınları, Konya.
- Tamarkin, J. D., 1917. About certain General Problems of Theory of Ordinary Linear Differential Equations and about Expansion of Derivative Functions into series, Petrograd.
- Tikhonov, A. N. and Samarskii, A. A., 1963. *Equations of Mathematical Physics*, Oxford and New York, Pergamon.
- Titchmars, E. C., 1962. *Eigenfunctions Expansion Associated with Second Order Differential Equations I*, Second Edn. Oxford Univ. press, London.
- Titeux, I. and Yakubov, Ya., 1997. Completeness of root functions for thermal conduction in a strip with piecewise continuous coefficients, *Math. Models Methods Appl. Sc.*, 7(7), 1035 - 1050.
- Triebel, H., 1978. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam.
- Uğurlu, E., Bairamov, E. (2014). Spectral analysis of eigenparameter dependent boundary value transmission problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 413 (1), 482-494.
- Uğurlu, E., Taş, K. (2018). A new method for dissipative dynamic operator with transmission conditions. *Compl Anal Oper. Theory* 12, 4, 1027-1055.
- Ugurlu, E., 2020. On the characteristic values of the real component of a dissipative boundary value transmission problem, *Quaestiones Mathematicae* 43(4), 507-521.
- Voitovich, N. N., Katsenelbaum, B. Z. and Sivov, A. N., 1997. *Generalized Method of Eigen-vibration in the theory of Diffraction*, Nakua, Mockow,(Russian).
- Walter, J., 1973. Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions", *Math. Z.*, 133, 301 - 312.
- Wang, A., Sun, J. and Gao, P., 2009. Completeness eigenfunctions of Sturm-Liouville problems with transmission conditions, *Methods Appl. Anal.* 16, 299 - 312.
- Woldegebriel, A. W., 2011. *The Sturm-Liouville Boundary Value Problems and Their Applications*, First Edition, LAP LAMPERT Academic Publishing, Saarbrücken, Germany.
- Yakubov, S. Y., 1994. *Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators*", Longman, Scientific and Technical.
- Yakubov, S. Y. and Yakubov, Y. Y., 1999. Abel Basis of Root functions of Regular Boundary Value Problems, *Math. Nachr.* 197, p. 157 - 187.
- Yakubov, S. Y. and Yakubov, Y. Y., 2000. *Differential Operators Equations. Ordinary and Partial Differential Equations*, Chapman and Hall / CRC, Boca Raton.
- Yoshida, N., 2008. *Oscillation theory of partial differential equations*, World Scientific.

- Zettl, A., 1968. Adjoint and self-adjoint boundary value problems with interface conditions, *Siam J. Appl. Math.*, 16, 851 - 859.
- Zettl, A. (2005). *Sturm-Liouville Theory*. Mathematical Surveys and Monographs, Volume 121, American Mathematical Society, Providence.
- Zhang, M. Z. and Wang, Y. C. (2015). Dependence of eigenvalues of Sturm-Liouville problems with interface conditions. *Appl. Math. Comput.* 265, 31-39.

