



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İKİ AYRIK ARALIKTA TANIMLI OLAN PERİYODİK
STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN SPEKTRUMU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MİNEL DEMİRBİLEK

HAZİRAN 2023

MİNEL DEMİRBİLEK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2023

**İKİ AYRIK ARALIKTA TANIMLI OLAN PERİYODİK
STURM-LİOUVILLE PROBLEMLERİNİN SPEKTRUMU**

Minel DEMİRBİLEK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2023

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Minel DEMİRBİLEK

09/06/2023

İKİ AYRIK ARALIKTA TANIMLI OLAN PERİYODİK STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN SPEKTRUMU

(Yüksek Lisans Tezi)

Minel DEMİRBİLEK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
HAZİRAN -2023

ÖZET

Bu tez çalışmasında iki ayrik aralıkta tanımlı olan periyodik Sturm-Liouville probleminin bazı spektral özellikleri araştırılmıştır. Çalışma beş kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, Sturm-Liouville teorisinin hangi alanlarda kullanıldığı incelenmiştir. İkinci kısımda, fiziksel problemlerin Sturm-Liouville problemine dönüştürülmesi araştırılmıştır. Üçüncü kısımda, Sturm-Liouville problemleriyle alakalı gerekli tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü kısımda, problemimizle ilgili başlangıç-değer problemleri incelenip, bazı integral denklemler ve asimptotik formüller ile karakteristik denklem tanımlanmıştır. Son kısımda ise bu çalışmada elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Sayfa Adedi
Anahtar Kelimeler

: 62
: Periyodik Sturm - Liouville problemi, eşdeğer integral denklemler, karakteristik denklem, asimptotik formüller, geçiş şartları, özdeğer, özfonksiyon.

Danışman

: Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR

SPECTRUM OF PERIODIC STURM-LIOUVILLE PROBLEM DEFINED IN TWO DISJOINT INTERVALS

(M. Sc. Thesis)

Minel DEMİRBİLEK

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June-2023

ABSTRACT

In this thesis, some spectral properties of the periodic Sturm-Liouville problem defined in two disjoint intervals were investigated. The thesis consists of five parts. In the first part, the fields in which the Sturm-Liouville theory is used are examined. In the second part, the transformation of the physical problems into the Sturm-Liouville problems was investigated. In the third part, the necessary definitions and theorems related to the Sturm-Liouville problems, are given. In the fourth part, initial-value problems related to our problem are examined, some integral equations, asymptotic formulas and characteristic equations are defined. In the last part, the results obtained in this thesis are given.

Page Number

: 62

Keywords

: Periodic Sturm-Liouville problem, equivalent integral equations, characteristic equation, asymptotic formulas, transition conditions, eigenvalue, eigenfunction.

Supervisor

: Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın planlanması, araştırılması ve oluşturulmasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım ve bu süre zarfında desteğini esirgemeyen çok kıymetli sayın Prof. Dr. Kadriye Aydemir hocama teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca maddi-manevi yanımda olup beni cesaretlendiren annem ve babam Emine-Ercan Çimen'e, eşim Behsat Demirbilek'e göstermiş oldukları sabırdan dolayı teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	2
3. GENEL BİLGİLER	6
3.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar	6
3.2. Sturm-Liouville Sınır Değer Problemleri	8
3.3. Sturm-Liouville Özdeğer Problemlerinin Genel Sınıflandırılması	10
4. BULGULAR	18
4.1. Sınır Değer Problemi, Özdeğerlerin Reelliği ile Özfonksiyonların Ortogonalliği	19
4.2. Periyodik Problemin Yardımcı Başlangıç-Değer Problemleri	23
4.3. Temel Çözümler ile Eşdeğer Olan İntegral Denklemler	30
4.4. Başlangıç-Değer Problemlerin Çözümlerinin Asimptotik Davranışları	35
4.5. Periyodik Sınır Değer Geçiş Problemi İle İlgili Karşılaştırma Teoremi	46
4.6. Karakteristik Fonksiyon	52
5. SONUÇ	59
KAYNAKLAR	60

ÖZGEÇMİŞ	62
--------------------	----



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Dikey olarak asılmış elastik çubuk	3



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$L_2[a, b]$	$[a, b]$ üzerinde ölçülebilir, 2. kuvvetten Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
L	Diferensiyel operatör anlamında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
L^*	L 'nin eşleneği
$\langle u_1, u_2 \rangle$	u_1 ve u_2 'nin iç çarpımı
$W(\varphi_i, \eta_i)$	Wronskian Determinantı
$\ u\ $	u vektörünün normu
$C^n[a, b]$	$[a, b]$ üzerinde tanımlı n . mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayı
$C[a, b]$	$[a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı

1. GİRİŞ

1836 yılında Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılan sınır-değer problemi literatürde yerini almıştır. Sturm-Liouville teorisi başlangıç olarak ısı iletimi problemlerinde uygulanmıştır. Birçok fiziksel problem Sturm-Liouville teorisiyle araştırılmaktadır. Sınır-değer problemleri matematik uygulamalarında önemli bir yere sahip olup özellikle fiziğin mekanik, elastik, kuantum mekaniği, akustik, yerin sismik hareketleri, sesin değişken yoğunluklu katmanlarda iletimi, atmosferde büyük ölçekli dalgaların hızı gibi daha birçok alanda yapılan hesaplamalarda kullanılmaktadır. Bu alanlardaki diferansiyel denklemler genellikle kısmi türevlidir. Sturm-Liouville problemi sözü edilen kısmi türevli diferansiyel denklemlerin değişkenlerine ayırma yöntemi veya buna benzer yöntemlerle adi türevli denklemlere dönüştürülmesiyle ortaya çıkmıştır. Doğal periyodik ve yarı periyodik yapılar eski zamanlardan beri insanlığın ilgisini çekmiştir. Günümüzde teknoloji dünyasında bilim adamları öncelikli malzeme bilimi alanında çalışanlar, sonlu periyodik yapıların ana bileşenler olduğu yapay örnekleri muazzam bir hızla ortaya çıkarmaktadır. Yıllar boyunca periyodiklikle ilgili zengin bir matematiksel alt yapı geliştirilmiştir. Yani periyodik potansiyellerin inşası ve bunların spesifik özelliklerinin analizi, modern teknolojik tasarıma rehberlik etmede yardımcı olmuştur.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Diferansiyel denklemler teorisi, uygulamalı matematiğin en önemli dalıdır. Bazı diferansiyel denklemler, her türlü önemli rezonans fenomeninin mekanik ve elektriksel titreşimlerinin incelenmesi için başlangıç noktasını oluşturur. Diferansiyel denklemleri çalışmanın iki temel yönünü görmek önemlidir. Bu yönlerden biri, bilim ve mühendislik alanındaki problemlerin matematiksel denklem formuna dönüştürülmesi ile ilgilidir. Diğer yönü ise ilgi çekici matematiksel denklemleri ortaya çıkarmaktır. Diferansiyel denklemler birçok fiziksel problemin çözümü için matematiksel araç haline gelmiştir. Adi ve kısmi diferansiyel denklemler, fiziksel olguların modellenmesi tarihinde uzun süredir önemli roller oynamıştır; gelecekteki araştırmalarda vazgeçilmez araçlar olarak hizmet etmeye devam edecektir. Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin teori ve uygulamalarında belirli koşulları sağlayan bir diferansiyel denklemin çözümünü bulmak ilgi çekici olabilir. Koşullar bağımsız değişkenin yalnızca bir noktasında verilirse başlangıç şartları, koşullar bağımsız değişkenin birden fazla noktasında verilirse sınır şartları olarak adlandırılır. n . mertebeden diferansiyel denklemin n tane başlangıç koşullarıyla birlikte çözümünün bulunmasına başlangıç değer problemi denir. n tane sınır koşulları dikkate alınarak çözümünün bulunmasına ise sınır değer problemi olarak tanımlanır. Sturm-Liouville sınır değer problemi; fizik, mühendislik ve yüzey ısı transferi gibi birçok fiziksel problemi çözmek, titreşen bir ipin titreşimleri, gerilmiş bir ipten enine yer değiştirmeler, dikey olarak asılı bir elastik çubuk, düzgün olmayan bir çubukta ısı akışı, dairesel simetrik ısı akışı ve benzeri birçok fiziksel problemlerin çözümünde kullanılmaktadır (Birkhoff, 1908), (Fulton, 1977), (Hinton & Shaw, 1990), (Langer, 1932). Aşağıdaki dikey olarak asılmış elastik çubuğun denklemi değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak bir Sturm-Liouville problemi haline getirildi. Gerilmemiş bir elastik çubuk veya ağır sarmal yay, boyunca yer değiştirmeleri önlemek için c uzunluğu boyunca sıkıştırılır ve daha sonra $x = 0$ ucundan asılır. $t = 0$ anında, mengene serbest bırakılır ve çubuk kendi ağırlığı nedeniyle uzunlamasına titreşir. $y(x, t)$, serbest bırakıldıktan sonra t anında çubuktaki uzunlamasına yer değiştirmeleri gösteriyorsa, o zaman $y(x, t)$ aşağıda belirtilen denklemi sağlar.

$$y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t) + g \quad (0 < x < c, \quad t > 0) \quad (2.1)$$

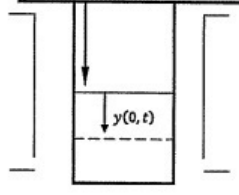
Burada g , dalga denkleminin yerçekimine bağlı ivmesidir. Çubuğun uçlarında belirtilen koşullar

$$y(0, t) = 0, \quad y_x(c, t) = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde yazılır. Başlangıç koşulları ise

$$y(x, 0) = 0, \quad y_t(x, 0) = 0 \quad (2.3)$$

biçiminde gösterilir. Bu sınır değer probleminin çözümünün



Şekil 2.1. Dikey olarak asılmış elastik çubuk

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin a_n x \quad (2.4)$$

serisi biçimde yazılabileceği gösterilebilir; burada

$$a_n = \frac{(2n-1)\pi}{2c}$$

şeklinde tanımlansın. Burada sinüs fonksiyonları Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonlarıdır. Değişkenlerine ayırma yöntemi aşağıdaki homojen dalg denkleminde

$$y_{xx}(x, t) = a^2 y_{tt}(x, t)$$

ve

$$y(0, t) = 0, \quad y_x(c, t)$$

sınır koşullarına uygulandığında

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

denklemini ve

$$X(0) = 0, \quad X'(c) = 0$$

sınır koşulları elde edilir. (2.4) serisi (2.1) denkleminde yerine yazıldığında ve

$$1 = \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x}{\alpha_n}, \quad 0 < x < c$$

ifadesi uygulandığında

$$\sum_{n=1}^{\infty} [B_n''(t) + (\alpha_n a)^2 B_n(t)] \sin \alpha_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2g}{c \alpha_n} \sin \alpha_n x$$

eşitliği elde edilir. Yani

$$B_n''(t) + (\alpha_n a)^2 B_n(t) = \frac{2g}{c\alpha_n}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

ifadesi yazılır. Ayrıca (2.3) ifadesinden

$$B_n(0) = 0, \quad B_n'(0) = 0 \quad (2.6)$$

elde edilir. Şimdi uygun

$$B_n''(t) + (\alpha_n a)^2 B_n(t) = 0$$

homojen denkleminin çözümü

$$B_n(t) = C_1 \cos \alpha_n a t + C_2 \sin \alpha_n a t$$

şeklinde yazılır. Burada C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir. (2.5) denkleminin bir özel çözümünün

$$B_n(t) = \frac{2g}{a^2 c \alpha_n^3}$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla (2.5) homojen olmayan denkleminin genel çözümü

$$B_n(t) = C_1 \cos \alpha_n a t + C_2 \sin \alpha_n a t + \frac{2g}{a^2 c \alpha_n^3} \quad (2.7)$$

şeklinde yazılır. C_1 ve C_2 sabitleri (2.7) ifadesinde (2.6) koşulları uygulanarak kolayca bulunur. Sonuç olarak (2.5), (2.6) probleminin çözümü

$$B_n(t) = \frac{2g}{a^2 c \alpha_n^3} (1 - \cos \alpha_n a t)$$

biçiminde elde edilir. Böylece problemin çözümü

$$y(x, t) = \frac{2g}{a^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x}{\alpha_n^3} (1 - \cos \alpha_n a t) \quad (2.8)$$

biçiminde elde edilir (Woldegerima, 2011). Bugüne kadar Periyodik Sturm-Liouville problemleri hakkında çok geniş literatür mevcuttur (Amiraliyev, 1988), (Amiraliyev & Duru, 2003), (Cai, 2010), (Cen, 2011), (Hermann, 1985), (Lin, 1987). Bizim çalışmamızda ise geçiş şartları içeren Periyodik Sturm-Liouville probleminin bazı özellikleri incelenmiştir. Geçiş şartlarını içeren problemlere (Akdogan & Mukhtarov, 2005), (Allahverdiev & Ugurlu, 2013), (Aydemir & Mukhtarov, 2016), (Aydemir & Mukhtarov, 2017), (Chanane, 2007), (Kandemir & Mukhtarov, 2016), (O. Mukhtarov, 1994), (M. Mukhtarov O. Sh. ve Kande-

mir, 2002), (O. H. v. A. K. Mukhtarov O. Sh., 2015), (S. Mukhtarov O. Sh. ve Yakubov, 2002), (Olgar, 2017), (Wang & Yao, 2009) alışmalarında rastlanmaktadır.



3. GENEL BİLGİLER

3.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Bir aralığın her iki uç noktasında sınır koşullarına tabi olan adi diferansiyel denklem çözme problemine adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemi denir. $[a, b]$ aralığında tanımlanan sınır değer problemi, aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$L[\phi] := a_0(x) \frac{d^n \phi}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} \phi}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d\phi}{dx} + a_n(x) \phi = f(x), a \leq x \leq b$$

$B_i[\phi] = \gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Burada L lineer doğrusal operatördür. $a \leq x \leq b$ aralığında a_{ij} , b_{ij} , γ_i reel sabitlerdir ve B_i ifadesi

$$B_i[\phi] := \sum_{j=1}^n a_{ij}[\phi]^{j-1}(a) + \sum_{j=1}^n b_{ij}[\phi]^{j-1}(b); i = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde tanımlanır. Buradan B_i ifadesi sınır operatörüdür. Sturm-Liouville özdeğer problemleri, sınır değer problemlerinin bir sınıfıdır. n . mertebeden bir lineer diferansiyel operatör

$$L_n := a_0(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + a_n(x)$$

biçiminde tanımlanır. I aralığında tanımlı olan ve n . mertebeden parçalı türevlenebilir fonksiyonların uzayını $C_p^n(I)$ ile gösterelim. $f, g \in C_p^n(I)$ için,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

olmak üzere

$$\langle L_n f, g \rangle = \langle f, L_n g \rangle$$

eşitliği sağlanırsa, L_n diferansiyel operatörü kendine eşleniktir denir. L nin eşleniği L^* ise tanım gereği ikinci mertebeden

$$L = p(x) \frac{d^2}{dx^2} + r(x) \frac{d}{dx} + q(x)$$

diferansiyel operatörü için aşağıdaki eşitlik elde edilebilir.

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^*g \rangle + [p(f'g - fg') + (r - p')fg]_a^b \quad (3.1)$$

Burada L^* eşlenik diferansiyel ifadesi

$$L^*g = (pg)'' - (rg)' + qg = pg'' + (2p' - r)g' + (p'' - r' + q)g$$

şeklinde tanımlıdır. Yani L^* operatörü formal olarak

$$L^* = p \frac{d^2}{dx^2} + (2p' - r) \frac{d}{dx} + (p'' - r' + q)$$

biçiminde yazılabilir. Bu operatöre L nin düzgün eşleniği denir. $L^* = L$ olduğu durumda L diferansiyel ifadesi kendine eşleniktir denir. Buradan L diferansiyel ifadesi kendine eşlenik ise

$$Lf = (pf')' + qf$$

biçiminde yazılabilir. L kendine eşlenik olduğunda bu ifadeyi formal olarak

$$L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q$$

şeklinde gösterebiliriz. Ayrıca

$$L_\lambda = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q + \lambda \rho = L + \lambda \rho$$

biçiminde yazılan diferansiyel ifadeye λ parametresine bağlı diferansiyel ifade denir. Burada ρ ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılan, sürekli pozitif fonksiyondur. Böylece ikinci mertebeden kendine eşlenik diferansiyel ifade için (3.1) eşitliği

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle + p(f'g - fg') \Big|_a^b \quad (3.2)$$

biçiminde yazılabilir. $\forall f, g \in C^2(a, b)$ için

$$p(f'g - fg') \Big|_a^b = 0 \quad (3.3)$$

eşitliği olduğunda L operatörü kendine eşlenik olur. Burada sınır koşullarını sağlayan diferansiyel denklem

$$L[\phi] + \lambda \rho \phi = 0$$

operatör denklemi şeklinde yazılır. L kendine eşlenik ise onun özdeğerlerinin tümü reeldir. Farklı özdeğerlerle ilişkili özfonksiyon çiftlerinin tümü $L^2(a, b)$ de ortogonaldir. İç çarpım $L^2(a, b)$ uzayında

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

biçiminde tanımlanır. Verilen iç çarpıma uygun norm

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

şeklinde tanımlanır. Ağırlıklı iç çarpımı

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx \quad (3.4)$$

biçiminde tanımlanır. O halde bu iç çarpımın ürettiği norm

$$\|f\|_\rho = \sqrt{\langle f, f \rangle_\rho} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır. $\rho(x) > 0$ olduğundan ve $[a, b]$ üzerinde sürekli olduğundan minimum değeri α , maksimum değeri β ile gösterilirse $\forall x \in [a, b]$ için

$$0 < \alpha \leq \rho(x) \leq \beta < \infty$$

eşitsizliği yazılır. Buradan

$$\sqrt{\alpha} \|f\| \leq \|f\|_\rho \leq \sqrt{\beta} \|f\| \quad (3.6)$$

elde edilir.

3.2. Sturm-Liouville Sınır Değer Problemleri

Matematikte ve uygulamasında iki Fransız matematikçi Charles Sturm ve Joseph Liouville ismi ile adlandırılan klasik bir Sturm-Liouville denklemi,

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\phi}{dx}\right) + q(x)\phi + \lambda\rho(x)\phi = 0 \quad (3.7)$$

biçiminde tanımlanır. Burada p, q ve ρ x 'in gerçekteğerli fonksiyonlarıdır ve $\forall x$ için $\rho(x) > 0$ dır, λ bir parametredir. ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir. Sonlu $[a, b]$ aralığında tanımlı (3.7) diferansiyel denklemden ve

$$\alpha_1\phi(a) + \alpha_2\phi'(a) = 0 \quad (3.8)$$

$$\beta_1\phi(b) + \beta_2\phi'(b) = 0 \quad (3.9)$$

sınır şartlarından oluşan Sturm-Liouville problemini ele alalım. Burada

$$(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0), (\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$$

ve α_1, α_2 ve β_1, β_2 reel sabitlerdir.

Bu problem

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\phi}{dx}\right) + q(x)\phi + \lambda\rho(x)\phi = 0$$

$$\alpha_1 \phi(a) + \alpha_2 \phi'(a) = 0$$

$$\beta_1 \phi(b) + \beta_2 \phi'(b) = 0$$

biçiminde yazılır. Şimdi daha genel biçimde sınır değer problemi

$$a_0(x)\phi'' + a_1(x)\phi' + a_2(x)\phi = \mu\phi \quad (3.10)$$

diferansiyel denklem

$$\alpha_1 \phi(a) + \alpha_2 \phi'(a) = 0$$

$$\beta_1 \phi(b) + \beta_2 \phi'(b) = 0$$

sınır şartlarından oluşmaktadır. Burada $a_i(x)$ ($i = 0, 1, 2$) lerin gerçek değerli sürekli fonksiyonlar olduğu ve $\forall x \in [a, b]$ için $a_0(x) > 0$ olduğunu kabul edelim. (3.10) denkleminde eşitliğin iki tarafı da a_0 a bölündüğünde denklem

$$\phi'' + \frac{a_1}{a_0}\phi' + \frac{a_2}{a_0}\phi = \frac{\mu}{a_0}\phi$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\int^x \frac{a_1}{a_0} \phi dt = h(x)$$

şeklinde gösterilirse, denklem

$$e^{h(x)}\phi'' + e^{h(x)}\frac{a_1}{a_0}\phi' + e^{h(x)}\frac{a_2}{a_0}\phi = e^{h(x)}\frac{\mu}{a_0}\phi \quad (3.11)$$

biçiminde yazılır.

$$h'(x) = \frac{a_1}{a_0}\phi$$

olduğu dikkate alınırsa, (3.11) denklemi

$$\frac{d}{dx}(e^{h(x)}\frac{d\phi}{dx}) + e^{h(x)}\frac{a_2}{a_0}\phi = \frac{\mu}{a_0}\phi$$

biçiminde yazılır, yani Sturm-Liouville denklemine dönüştürülür. Fonksiyonlar

$$p(x) = e^{h(x)}, \quad q(x) = \frac{a_2}{a_0}e^{h(x)}, \quad \rho(x) = \frac{1}{a_0}e^{h(x)}, \quad \lambda = \mu$$

şeklinde tanımlanmıştır. $[a, b]$ aralığı içindeki tüm x ler için p , q ve ρ fonksiyonları sürekli, $p(x) > 0$ ve $\rho(x) > 0$ kabul edilir. Dolayısıyla verilen sınır koşullarına sahip özdeğer

problemi;

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(p(x)\frac{d\phi}{dx}) + q(x)\phi + \lambda\rho(x)\phi &= 0 \\ \alpha_1\phi(a) + \alpha_2\phi'(a) &= 0 \\ \beta_1\phi(b) + \beta_2\phi'(b) &= 0\end{aligned}$$

şekinde gösterilir.

3.3. Sturm-Liouville Özdeğer Problemlerinin Genel Sınıflandırılması

3.1 Tanım (Regüler Sturm-Liouville) $I = [a, b]$ aralığında

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(p(x)\frac{d\phi}{dx}) + q(x)\phi + \lambda\rho(x)\phi &= 0, x \in I \\ \alpha_1\phi(a) + \alpha_2\phi'(a) &= 0 \\ \beta_1\phi(b) + \beta_2\phi'(b) &= 0\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilen Sturm-Liouville problemi aşağıdaki koşulları sağlandığında Regüler Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır.

1. p, q ve ρ fonksiyonları I üzerinde sürekli ve reel değerlidir.
2. $p \in C^1(I)$ ve $\phi \in C^2(I)$
3. $p(x) > 0$ ve $\rho(x) > 0$
4. $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ reel sayılardır ve $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ dır.
5. $\lambda \in \mathbb{C}$

3.2 Tanım (Periyodik Sturm-Liouville) Eğer $p(a) = p(b)$ ise

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(p(x)\frac{d\phi}{dx}) + q(x)\phi + \lambda\rho(x)\phi &= 0 \\ \phi(a) &= \phi(b) \\ \phi'(a) &= \phi'(b)\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilen Sturm-Liouville problemi Periyodik Sturm-Liouville sınır değer problemi olarak adlandırılır. Burada p, p', q ve ρ fonksiyonları regülerlik koşullarını sağlar.

3.3 Tanım (Singüler Sturm-Liouville) Regüler olmayan Sturm-Liouville problemleri tekil(Singüler) olarak adlandırılır. Singüler olma şartları şunlardır:

1. Sturm-Liouville denklemi yarı-sonsuz veya sonsuz aralıkta verilir.
2. p ve/veya ρ katsayıları uç noktalardan en az birinde sıfıra yakınsar.
3. $p(x)$, $q(x)$ veya $\rho(x)$ katsayılarından biri verilen aralıkta süreksiz olabilir.
4. Uç noktalarda süreksizlik veya uç noktalarda limit sonsuz olabilir.

Genel olarak, aşağıdakilerin tümü Singüler Sturm-Liouville denklemleridir;

1. Bessel Denklemi; $\frac{d}{dx}[x\frac{d\phi}{dx}] + [\frac{v^2}{x} + n^2x]\phi = 0$, $0 < x < \infty$
2. Legendre Denklemi; $\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{d\phi}{dx}] + n(n+1)\phi = 0$, $-1 \leq x \leq 1$
3. Hermite Denklemi; $\frac{d}{dx}(e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{d\phi}{dx}) + 2ne^{-\frac{x^2}{2}}\phi = 0$, $-\infty < x < \infty$
4. Laguerre Denklemi; $\frac{d}{dx}[xe^{-x}\frac{d\phi}{dx}] + ne^{-x}\phi = 0$, $0 < x < \infty$
5. Chebyshev Denklemi; $\frac{d}{dx}[\sqrt{1-x^2}]\frac{d\phi}{dx} + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}\phi = 0$, $-1 < x < 1$

3.4 Tanım E lineer uzayında $A : E \rightarrow E$ lineer operatör verilsin. Herhangi $\lambda = \lambda_0$ ve $u_0 \in H$ $u_0 \neq 0$ için $Au_0 = \lambda_0 u_0$ eşitliği sağlanırsa λ_0 sayısına A operatörünün özdeğeri, λ_0 özdeğerine karşılık gelen fonksiyona özfonksiyon denir.

3.1 Teorem L operatörü $[a, b]$ aralığı üzerinde

$$L := \frac{d}{dx}[p\frac{d}{dx}] + q$$

biçiminde tanımlansın. O halde

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx}[p(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx})] , \quad u, v \in C^2[a, b]$$

eşitliği sağlar. Bu eşitliğe Lagrange özdeşliği denir (Woldegerima, 2011).

Kanıt L nin tanımına göre

$$L[u] = \frac{d}{dx}[p\frac{du}{dx}] + qu$$

$$L[v] = \frac{d}{dx} \left[p \frac{dv}{dx} \right] + qv$$

eşitlikleri yazılabilir. Birinci eşitlik v ile ikinci eşitlik u ile çarpılıp taraf tarafa çıkartıldığında

$$uL[v] - vL[u] = u \frac{d}{dx} \left[p \frac{dv}{dx} \right] - v \frac{d}{dx} \left[p \frac{du}{dx} \right]$$

eşitliği elde edilir. Şimdi Leibnitz kuralından yararlanıldığında

$$u \frac{d}{dx} \left[p \frac{dv}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[u \left(p \frac{dv}{dx} \right) \right] - \left(p \frac{dv}{dx} \right) \frac{du}{dx}$$

$$v \frac{d}{dx} \left[p \frac{du}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[v \left(p \frac{du}{dx} \right) \right] - \left(p \frac{du}{dx} \right) \frac{dv}{dx}$$

eşitlikleri yazılır. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkartıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} u \frac{d}{dx} \left(p \frac{dv}{dx} \right) - v \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) &= \frac{d}{dx} \left[u \left(p \frac{dv}{dx} \right) \right] - \frac{d}{dx} \left[v \left(p \frac{du}{dx} \right) \right] \\ uL[v] - vL[u] &= \frac{d}{dx} \left[u \left(p \frac{dv}{dx} \right) \right] - \frac{d}{dx} \left[v \left(p \frac{du}{dx} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right] \end{aligned}$$

Böylece Lagrange formülü elde edilir. Lagrange formülünden kolayca

$$\langle u, L[v] \rangle - \langle L[u], v \rangle = \left[p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right]_a^b$$

ile

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u]) dx = \left[p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right]_a^b$$

eşitlikleri elde edilir. Son eşitlikler Green formülü olarak adlandırılır. □

3.5 Tanım Aynı homojen sınır şartlarını sağlayan u ve v nin iki fonksiyon olduğunu varsayalım. L doğrusal (linear) operatörünün kendine eşlenik olması için

$$\langle u, L[v] \rangle = \langle L[u], v \rangle$$

veya

$$\int_a^b (vL[u] - uL[v]) dx = 0$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. O halde

$$\int_a^b (vL[u] - uL[v])dx = p[u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}]_a^b$$

Green formülünden,

$$p[u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}]_a^b = 0$$

ifadesi yazılır. Buradan özel olarak

$$p(a) = p(b) \neq 0$$

$$u(a) = u(b), \quad v(a) = v(b)$$

$$u'(a) = u'(b), \quad v'(a) = v'(b)$$

şartları sağlanırsa, L operatörü kendine eşlenik olur.

3.2 Teorem Periyodik Sturm-Liouville probleminde özdeğerlerin tümü reeldir.

Kanıt λ bir özdeğer, ϕ ise uygun özfonksiyon olsun. Yani

$$L_\lambda[\phi] := L[\phi] + \lambda\rho\phi = 0$$

$$L[\phi] := \frac{d}{dx}[p\frac{d\phi}{dx}] + q\phi$$

denklemini ve

$$\phi(a) = \phi(b), \quad \phi'(a) = \phi'(b)$$

sınır koşulları olsun. p, q ve ρ katsayı fonksiyonlarının reel değerli olduğunu ve α_i, β_i ; ($i = 1, 2$) katsayılarının reel olduğunu ele alalım. Denklemin ve sınır koşullarının eşleniği alındığında

$$\overline{L_\lambda[\phi]} = \overline{L[\phi]} + \overline{\lambda\rho\phi} = 0$$

$$\overline{\phi}(a) = \overline{\phi}(b)$$

$$\overline{\phi'}(a) = \overline{\phi'}(b)$$

biçiminde yazılır. Özfonksiyonun eşleniği $\overline{\phi}$ ve özdeğerin eşleniği $\overline{\lambda}$ dır. Böylece (λ, ϕ) ve $(\overline{\lambda}, \overline{\phi})$ nin Periyodik Sturm-Liouville sınır değer problemi için özçiftler olduğu elde edilir. Özfonksiyonların ortogonalleştirme teoremine göre,

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b \phi(x) \overline{\phi(x)} \rho(x) dx = 0$$

yani

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b |\phi(x)|^2 \rho(x) dx = 0$$

eşitliği bulunur. $\rho(x) > 0$ olduğundan ϕ , $[a, b]$ üzerinde aşıkâr olmayan çözümdür. Bu durumda

$$\int_a^b |\phi(x)|^2 \rho(x) dx > 0$$

biçiminde yazılır. O halde

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b |\phi(x)|^2 \rho(x) dx = 0$$

eşitliğinden $\lambda - \bar{\lambda} = 0$ ise $\lambda = \bar{\lambda}$ elde edilir. Dolayısıyla λ reeldir. □

3.3 Teorem Periyodik Sturm-Liouville sınır değer problemi kendine eşleniktir.

Kanıt Periyodik Sturm-Liouville sınır değerli problemini ele alalım.

$$u(a) = u(b), \quad v(a) = v(b)$$

$$u'(a) = u'(b), \quad v'(a) = v'(b)$$

sınır şartları olmak üzere keyfi $u, v \in C^2[a, b]$ verilsin. O halde

$$L_\lambda[u] := \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u + \lambda \rho(x)u$$

$$L_\lambda[v] := \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dv}{dx} \right] + q(x)v + \lambda \rho(x)v$$

eşitlikleri yazılabilir. Birinci eşitlik v ile ikinci eşitlik u ile çarpılıp birbirinden çıkartıldığında

$$\begin{aligned} vL_\lambda[u] - uL_\lambda[v] &= v \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) - u \frac{d}{dx} \left(p \frac{dv}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{dx} [p(vu' - uv')] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $[a, b]$ aralığı üzerinde eşitliğin iki tarafının da integrali alındığında,

$$\begin{aligned} \int_a^b (vL_\lambda[u] - uL_\lambda[v]) dx &= p(vu' - uv') \Big|_a^b \\ &= p(b)[u'(b)v(b) - v'(b)u(b)] - p(a)[u'(a)v(a) - v'(a)u(a)] \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin sağ tarafı için

$$p(a) = p(b)$$

$$u(a) = u(b), \quad v(a) = v(b)$$

$$u'(a) = u'(b), \quad v'(a) = v'(b)$$

sınır şartları göz önüne alındığında

$$u(a)v'(a) - v(a)u'(a) = 0$$

ve buradan

$$[p(b) - p(a)](uv' - u'v)|_a^b = 0$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$\int_a^b (vL_\lambda[u] - uL_\lambda[v])dx = 0$$

eşitliği yazılır. İspat bitti. □

3.4 Teorem λ_n ve λ_m sayıları

$$L_\lambda[y] := \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$$

$$p(a) = p(b)$$

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b)$$

periyodik Sturm-Liouville probleminde iki farklı özdeğerler ise bu özdeğerlere karşılık ϕ_n ve ϕ_m özfonksiyonları, ρ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır.

Kanıt

$$\int_a^b \phi_n \phi_m \rho(x) dx = 0$$

ifadesi gösterildiğinde ispat biter. ϕ_n ve ϕ_m sırası ile λ_n ve λ_m , ($n \neq m$) özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar olduğundan

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\phi_n(x)\right] + q(x)\phi_n(x) + \lambda_n(x)\rho(x)\phi_n(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\phi_m(x)\right] + q(x)\phi_m(x) + \lambda_m(x)\rho(x)\phi_m(x) = 0$$

eşitlikleri sağlanır. $\phi_m(x)$ ile birinci denklem, $\phi_n(x)$ ile ikinci denklem çarpılıp çıkan sonuçlar birbirinden çıkartıldığında,

$$\phi_m(x) \frac{d}{dx} [p(x) \frac{d}{dx} \phi_n(x)] - \phi_n(x) \frac{d}{dx} [p(x) \frac{d}{dx} \phi_m(x)] + (\lambda_m - \lambda_n) \rho(x) \phi_m(x) \phi_n(x) = 0$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) \rho(x) \phi_m(x) \phi_n(x) &= \phi_m(x) \frac{d}{dx} [p(x) \frac{d}{dx} \phi_n(x)] - \phi_n(x) \frac{d}{dx} [p(x) \frac{d}{dx} \phi_m(x)] \\ &= \frac{d}{dx} [(p(x) \phi_n'(x)) \phi_m(x) - (p(x) \phi_m'(x)) \phi_n(x)] \\ &= \frac{d}{dx} [p(x) (\phi_n' \phi_m - \phi_m' \phi_n)] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Her iki tarafın integrali alındığında, Green formülü gereği

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b \rho(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = [p(b) - p(a)] (\phi_n' \phi_m - \phi_m' \phi_n) \Big|_a^b \quad (3.12)$$

elde edilir. $p(a) = p(b)$ olduğundan

$$[p(b) - p(a)] (\phi_n' \phi_m - \phi_m' \phi_n) \Big|_a^b = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b \rho(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0$$

elde edilir. $\lambda_m \neq \lambda_n$ için yani $\lambda_m - \lambda_n \neq 0$ olduğundan

$$\int_a^b \rho(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0$$

eşitsizliği elde edilir. İspat bitti. □

3.1 Sonuç Özfonksiyonların ortogonalliği

1. $p(a) = 0$ ve sınır değer koşulları
veya
2. $p(b) = 0$ ve sınır değer koşulları

sağlandığı durumlarda da geçerlidir.

Kanıt Eğer $p(a) = 0$ ise sınır koşulları sağlandığında

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b \rho(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = p(b) [\phi_n'(b) \phi_m(b) - \phi_m'(b) \phi_n(b)] \quad (3.13)$$

eşitliği bulunur. ϕ_n ve ϕ_m için $x = b$ deki

$$\phi_n(a) = \phi_n(b), \quad \phi_m(a) = \phi_m(b)$$

$$\phi_n'(a) = \phi_n'(b), \quad \phi_m'(a) = \phi_m'(b)$$

sınır koşulları sağlandığında

$$\phi_n'(b) \phi_m(b) - \phi_m'(b) \phi_n(b) = 0$$

yazılır. (3.13) denkleminde,

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b \rho(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0$$

eşitliği elde edilir. ($m \neq n$) ve $\lambda_n \neq \lambda_m$ olduğundan,

$$\int_a^b \rho(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0$$

elde edilir. Aynı şekilde; $p(b) = 0$ için de $x = a$ daki sınır koşulları sağlandığında aynı sonuç elde edilir. □

4. BULGULAR

Bu tez çalışmasında,

$$-u''(t) + q(t)u(t) = \mu^2 u(t) \quad , \quad t \in [-a, 0) \cup (0, a]$$

diferansiyel denklemi,

$$\begin{aligned} u(-a) &= u(a) \\ u'(-a) &= u'(a) \end{aligned}$$

periyodik sınır koşulları ve $t = 0$ süreksizlik noktasında tanımlanan,

$$\begin{aligned} u(0^+) &= \delta u(0^-) \\ u'(0^+) &= \gamma u'(0^-) \end{aligned}$$

geçiş şartları ile oluşturulan problem incelenmiştir. δ, γ reel sayılar ve $\lambda = \mu^2$ kompleks özdeğer parametresidir.

$$H := L_2[-a, 0) \oplus L_2(0, a]$$

H uzayında $u_1, u_2 \in H$ için

$$\langle u_1, u_2 \rangle_H := \int_{-a}^{0^-} u_1(t) \overline{u_2(t)} dt + \int_{0^+}^a u_1(t) \overline{u_2(t)} dt \quad (4.1)$$

eşitliğinin bir iç çarpım tanımladığını göstereceğiz. Ayrıca bu çalışmada $\delta\gamma = 1$ olarak kabul edelim.

4.1 Teorem H uzayında (4.1) eşitliği bir iç çarpım tanımlar.

Kanıt Öyle ki $u_1, u_2 \in H$ ve $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere (4.1) eşitliğinin iç çarpım şartlarını sağladığını aşağıda gösterelim.

$$i : \langle u_1, u_1 \rangle = \int_{-a}^{0^-} u_1 \overline{u_1} dt + \int_{0^+}^a u_1 \overline{u_1} dt = \int_{-a}^{0^-} |u_1|^2 dt + \int_{0^+}^a |u_1|^2 dt \geq 0$$

$$ii : \langle u_1, u_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-a}^{0^-} |u_1|^2 dt + \int_{0^+}^a |u_1|^2 dt = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
iii : \langle \alpha u_1 + \beta u_2, u_3 \rangle &= \int_{-a}^{0^-} (\alpha u_1 + \beta u_2) \overline{u_3} dt + \int_{0^+}^a (\alpha u_1 + \beta u_2) \overline{u_3} dt \\
&= \alpha \int_{-a}^{0^-} u_1 \overline{u_3} dt + \alpha \int_{0^+}^a u_1 \overline{u_3} dt + \beta \int_{-a}^{0^-} u_2 \overline{u_3} dt + \beta \int_{0^+}^a u_2 \overline{u_3} dt \\
&= \alpha \langle u_1, u_3 \rangle + \beta \langle u_2, u_3 \rangle \\
iv : \langle u_1, u_2 \rangle &= \int_{-a}^{0^-} u_1 \overline{u_2} dt + \int_{0^+}^a u_1 \overline{u_2} dt \\
&= \overline{\int_{-a}^{0^-} u_2 \overline{u_1} dt} + \overline{\int_{0^+}^a u_2 \overline{u_1} dt} \\
&= \overline{\langle u_2, u_1 \rangle}
\end{aligned}$$

□

4.1. Sınır Değer Problemi, Özdeğerlerin Reelliği ile Özfonksiyonların Ortogonalliği

Bu kesimde $L_2[-a, 0) \oplus L_2(0, a]$ Hilbert uzayında

$$Lu := -u''(t) + q(t)u(t) = \mu^2 u(t) \quad , \quad t \in [-a, 0) \cup (0, a] \quad (4.2)$$

biçiminde verilmiş iki aralıklı Sturm-Liouville denklemi

$$u(-a) - u(a) = 0 \quad (4.3)$$

$$u'(-a) - u'(a) = 0 \quad (4.4)$$

periyodik sınır şartları ve $t = 0$ süreksizlik noktasında tanımlanan

$$u(0^+) - \delta u(0^-) = 0 \quad (4.5)$$

$$u'(0^+) - \gamma u'(0^-) = 0 \quad (4.6)$$

geçiş şartlarının oluşturduğu problemin bazı spektral özellikler araştırılmıştır. δ ve γ reel sayılar, $\lambda = \mu^2$ kompleks özdeğer parametresidir.

4.2 Teorem (4.2)-(4.6) ifadeleri ile gösterilen sınır-değer-geçiş probleminde bütün özdeğerler reel olur.

Kanıt Burada μ^2 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu u olarak alalım. u fonksiyonunun eşleniği $\bar{u}$ ve μ^2 parametresinin eşleniği $\overline{\mu^2}$ olsun. Bu durumda

$$-\bar{u}''(t) + q(t)\bar{u}(t) = \overline{\mu^2} \bar{u}(t) \quad (4.7)$$

diferensiyel denklemi

$$\bar{u}(-a) = -\bar{u}(a) \quad (4.8)$$

$$\bar{u}'(-a) = -\bar{u}'(a) \quad (4.9)$$

periyodik sınır koşulları ile

$$\bar{u}(0^+) = \delta \bar{u}(0^-) \quad (4.10)$$

$$\bar{u}'(0^+) = \gamma \bar{u}'(0^-) \quad (4.11)$$

geçiş şartları yazılır. $\bar{u}$ ile (4.2) denklemi ve u ile (4.7) eşitliği çarpıldığında,

$$-u''\bar{u} + q(t)u\bar{u} = \mu^2 u\bar{u} \quad (4.12)$$

$$-u\bar{u}'' + q(t)u\bar{u} = \bar{\mu}^2 u\bar{u} \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.12) ve (4.13) ifadeleri birbirinden çıkartıldığında

$$u\bar{u}'' - u''\bar{u} = (\mu^2 - \bar{\mu}^2)u\bar{u} \quad (4.14)$$

eşitliği elde edilir. $u\bar{u}'' - u''\bar{u} = (u\bar{u}' - u'\bar{u})'$ olduğundan

$$(u\bar{u}' - u'\bar{u})' = (\mu^2 - \bar{\mu}^2)u\bar{u} \quad (4.15)$$

yazılır. Aynı eşitliğin $-a$ 'dan 0^- 'a integrali alındığında

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{0^-} (u\bar{u}' - u'\bar{u})' dt &= \int_{-a}^{0^-} (\mu^2 - \bar{\mu}^2)u\bar{u} dt \\ (u\bar{u}' - u'\bar{u})|_{-a}^{0^-} &= \int_{-a}^{0^-} (\mu^2 - \bar{\mu}^2)u\bar{u} dt \\ u(0^-)\bar{u}'(0^-) - u'(-a)\bar{u}(-a) &= u(-a)\bar{u}'(-a) + u'(-a)\bar{u}(-a) \\ &= \int_{-a}^{0^-} (\mu^2 - \bar{\mu}^2)u\bar{u} dt \end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.3)-(4.4) ve (4.8)-(4.9) eşitlikleri (4.16) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} u(0^-)\bar{u}'(0^-) - u'(-a)\bar{u}(-a) &= u(a)\bar{u}'(a) + u'(-a)\bar{u}(-a) \\ &= \int_{-a}^{0^-} (\mu^2 u\bar{u} - \bar{\mu}^2 u\bar{u}) dt \end{aligned} \quad (4.17)$$

ifadesi bulunur. Aynı şekilde (4.15) eşitliğin 0^+ 'dan a 'ya integrali alındığında

$$\begin{aligned}
 \int_{0^+}^a (u\bar{u}' - u'\bar{u})' dt &= \int_{0^+}^a (\mu^2 - \bar{\mu}^2) u\bar{u} dt \\
 (u\bar{u}' - u'\bar{u})|_{0^+}^a &= \int_{0^+}^a (\mu^2 - \bar{\mu}^2) u\bar{u} dt \\
 u(a)\bar{u}'(a) - u'(a)\bar{u}(a) &= u(0^+)\bar{u}'(0^+) + u'(0^+)\bar{u}(0^+) \\
 &= \int_{0^+}^a (\mu^2 u\bar{u} - \bar{\mu}^2 u\bar{u}) dt
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

bulunur. (4.5)-(4.6) ve (4.10)-(4.11) geçiş şartları kullanılarak

$$\begin{aligned}
 u(0^-) &= \frac{1}{\delta} u(0^+) \\
 u'(0^-) &= \frac{1}{\gamma} u'(0^+) \\
 \bar{u}(0^-) &= \frac{1}{\delta} \bar{u}(0^+) \\
 \bar{u}'(0^-) &= \frac{1}{\gamma} \bar{u}'(0^+)
 \end{aligned}$$

ifadeleri yazılır. Bu ifadeler (4.18) denkleminde kullanıldığında

$$\begin{aligned}
 u(a)\bar{u}'(a) - u'(a)\bar{u}(a) &= \frac{1}{\delta} u(0^-) \frac{1}{\gamma} \bar{u}'(0^-) + \frac{1}{\gamma} u'(0^-) \frac{1}{\delta} \bar{u}(0^-) \\
 &= \int_{0^+}^a (\mu^2 - \bar{\mu}^2) u\bar{u} dt
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.17) ifadesi ile (4.19) ifadesi taraf tarafa toplandığında ve $\delta\gamma = 1$ olduğu dikkate alındığında

$$0 = (\mu^2 - \bar{\mu}^2) \left[\left(\int_{-a}^{0^-} |u|^2 dt + \int_{0^+}^a |u|^2 dt \right) \right] \tag{4.20}$$

eşitliği elde edilir. u özfonksiyonu sıfırdan farklı olduğundan parantezin içi sıfırdan farklı olur. Bu şekilde sonuncu eşitlikten

$$\mu^2 = \bar{\mu}^2$$

elde edilir. İspat bitti. □

4.3 Teorem $H := L_2[-a, 0] \oplus L_2[0, a]$ olmak üzere (4.2)-(4.6) sınır-değer probleminin μ_m^2 ve μ_n^2 farklı özdeğerlerine karşılık gelen u_m ve u_n özfonksiyonları H uzayında ortogonaldır. Yani

$$\int_{-a}^{0^-} u_m(t)u_n(t)dt + \int_{0^+}^a u_m(t)u_n(t)dt = 0 \tag{4.21}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt μ_m^2 ve μ_n^2 özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar sırasıyla u_m ve u_n olup

$$-u_m'' + q(t)u_m = \mu_m^2 u_m \quad (4.22)$$

$$-u_n'' + q(t)u_n = \mu_n^2 u_n \quad (4.23)$$

denklemleri yazılır. (4.22) denklemi u_n fonksiyonu ile (4.23) denklemi u_m fonksiyonu ile çarpıldığında

$$-u_m'' u_n + q(t)u_m u_n = \mu_m^2 u_m u_n \quad (4.24)$$

$$-u_m u_n'' + q(t)u_m u_n = \mu_n^2 u_m u_n \quad (4.25)$$

elde edilir.(4.24) ve (4.25) ifadeleri taraf tarafa çıkartıldığında

$$u_m u_n'' - u_m'' u_n = (\mu_m^2 - \mu_n^2) u_m u_n \quad (4.26)$$

bulunur. (4.26) eşitliği $-a$ 'den 0^- 'a integrallendiğinde

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 (u_m u_n' - u_m' u_n)' &= (\mu_m^2 - \mu_n^2) \int_{-a}^0 u_m u_n dt \\ (u_m u_n' - u_m' u_n)|_{-a}^{0^-} &= (\mu_m^2 - \mu_n^2) \int_{-a}^0 u_m u_n dt \end{aligned}$$

ifadesi yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} u_m(0^-)u_n'(0^-) - u_m'(0^-)u_n(0^-) &= u_m(-a)u_n'(-a) + u_m'(-a)u_n(-a) \\ &= \int_{-a}^0 (\mu_m^2 - \mu_n^2) u_m u_n dt \end{aligned} \quad (4.27)$$

eşitliği bulunur. Verilen problemde (4.3)-(4.4) sınır şartlarının u_m ve u_n özfonksiyonları için sağlandığından

$$\begin{aligned} u_m(-a) &= u_m(a) \quad , \quad u_m'(-a) = u_m'(a) \\ u_n(-a) &= u_n(a) \quad , \quad u_n'(-a) = u_n'(a) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler (4.27) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} u_m(0^-)u_n'(0^-) - u_m'(0^-)u_n(0^-) &= u_m(a)u_n'(a) + u_m'(a)u_n(a) \\ &= \int_{-a}^0 (\mu_m^2 - \mu_n^2) u_m u_n dt \end{aligned} \quad (4.28)$$

bulunur. Aynı şekilde (4.26) ifadesinin 0^+ 'dan a 'ya integrali alındığında

$$(u_m u_n' - u_m' u_n)|_{0^+}^a = \int_{0^+}^a (\mu_m^2 - \mu_n^2) u_m u_n dt$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} u_m(a)u'_n(a) - u'_m(a)u_n(a) &= u_m(0^+)u'_n(0^+) + u'_m(0^+)u_n(0^+) \\ &= \int_{0^+}^a (\mu_m^2 - \mu_n^2)u_mu_ndt \end{aligned} \quad (4.29)$$

eşitliği bulunur. (4.5)-(4.6) geçiş şartları kullanıldığında

$$\begin{aligned} u_m(0^+) &= \delta u_m(0^-) \quad , \quad u'_m(0^+) = \gamma u'_m(0^-) \\ u_n(0^+) &= \delta u_n(0^-) \quad , \quad u'_n(0^+) = \gamma u'_n(0^-) \end{aligned}$$

bulunur ve (4.29) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} u_m(a)u'_n(a) - u'_m(a)u_n(a) &= \delta u_m(0^-)\gamma u'_n(0^-) + \gamma u'_m(0^-)\delta u_n(0^-) \\ &= \int_{0^+}^a (\mu_m^2 - \mu_n^2)u_mu_ndt \end{aligned} \quad (4.30)$$

elde edilir. $\delta\gamma = 1$ olduğunu dikkate alarak (4.28) ve (4.30) ifadeleri taraf tarafa toplandığında

$$0 = (\mu_m^2 - \mu_n^2) \left[\int_{-a}^{0^-} u_mu_ndt + \int_{0^+}^a u_mu_ndt \right] \quad (4.31)$$

olduğu görülür. $\mu_m^2 \neq \mu_n^2$ olduğundan

$$\int_{-a}^{0^-} u_mu_ndt + \int_{0^+}^a u_mu_ndt = 0$$

yazılır. O halde

$$\langle u_m, u_n \rangle = 0$$

olur. Yani farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların ortogonal olduğu bulunur. İspat bitti. $\square$

4.2. Periyodik Problemin Yardımcı Başlangıç-Değer Problemleri

Bu bölümde (4.2)-(4.6) sınır-değer-geçiş problemi ile ilgili olan $[-a, 0]$, $[0, a]$ aralıklarında verilen bazı yardımcı başlangıç-değer problemleri incelenmiştir.

4.4 Teorem Her $\mu^2 \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(t) + q(t)u(t) = \mu^2 u(t) \quad , \quad t \in [-a, 0] \quad (4.32)$$

$$u(-a) = \alpha^- \quad (4.33)$$

$$u'(-a) = \beta^- \quad (4.34)$$

başlangıç-değer probleminin bir tek $\varkappa_1(t, \mu^2)$ çözümü mevcuttur ve bu çözüm her bir $t \in [-a, 0)$ için μ^2 değişkenine göre bütün kompleks düzlemde analitiktir, yani $\forall t \in [-a, 0)$ için μ^2 parametresinin tam fonksiyonudur (Titchmarsh, 1962).

4.5 Teorem Her $\mu^2 \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(t) + q(t)u(t) = \mu^2 u(t) \quad , \quad t \in (0, a] \quad (4.35)$$

$$u(0^+, \mu^2) = \delta \varkappa_1(0^-, \mu^2) \quad (4.36)$$

$$u'(0^+, \mu^2) = \gamma \varkappa_1'(0^-, \mu^2) \quad (4.37)$$

başlangıç-değer probleminin bir tek $\varkappa_2(x, \mu^2)$ çözümü mevcuttur ve bu çözüm her bir $t \in (0, a]$ için μ^2 değişkenine göre bütün kompleks düzlemde analitiktir, yani $\forall t \in (0, a]$ için μ^2 parametresinin tam fonksiyonudur.

Kanıt

$$-u''(t) + q(t)u(t) = \mu^2 u(t)$$

diferansiyel denklemi

$$u''(t) = (q(t) - \mu^2)u(t)$$

biçiminde yazılıp iki defa integrali alındığında,

$$\frac{du}{dt} = \int_0^t (q(r)u(r) - \mu^2 u(r))dr + D_0(\mu^2) \quad , \quad t \in (0, a] \quad (4.38)$$

$$u(t) = \int_0^t ds \int_0^s (q(r)u(r) - \mu^2 u(r))dr + D_0(\mu^2)t + D_1(\mu^2) \quad , \quad t \in (0, a] \quad (4.39)$$

eşitliği bulunur. (4.39) denkleminde Cauchy integral formülü uygulanıp denklem düzenlendiğinde

$$u(t) = \int_0^t dr \int_r^t (q(r)u(r) - \mu^2 u(r))ds + D_0(\mu^2)t + D_1(\mu^2)$$

yani

$$u(t) = \int_0^t (t-r)(q(r)u(r) - \mu^2 u(r))dr + D_0(\mu^2)t + D_1(\mu^2) \quad (4.40)$$

denklemini bulunur. (4.36)-(4.37) başlangıç şartları, (4.38) ve (4.40) ifadelerinde yerine yazıldığında

$$u(0^+) = D_1(\mu^2) = \delta \varkappa_1(0^-, \mu^2)$$

$$u'(0^+) = D_0(\mu^2) = \gamma \varkappa_1'(0^-, \mu^2)$$

elde edilir ve (4.40) denkleminde yerine yazıldığında

$$u(t) = \int_0^t (t-r)(q(r)u(r) - \mu^2 u(r))dr + \delta \varkappa_1(0^-, \mu^2)t + \gamma \varkappa_1'(0^-, \mu^2) \quad (4.41)$$

integral denklemi bulunur. Burada (4.41) integral denklemi ile (4.35)-(4.37) başlangıç-değer probleminin eşdeğer olduğu görülür. (4.41) integral denkleminde ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulanıp $\forall t \in (0, a]$ için μ^2 parametresinin tam fonksiyon olduğu gösterilmelidir. Öncelikle

$$u_m(t, \mu^2) = \int_0^t (t-r)(q(r)u_{m-1}(r) - \mu^2 u_{m-1}(r))dr + u_0(t, \mu^2) \quad (4.42)$$

$$u_0(t, \mu^2) = \delta \varkappa_1(0^-, \mu^2)t + \gamma \varkappa_1'(0^-, \mu^2) \quad (4.43)$$

şeklinde tanımlı $u_m(t, \mu^2)$ dizisini ele alalım. Bu diziyi kullanarak

$$u_0(t, \mu^2) + (u_1(t, \mu^2) - u_0(t, \mu^2)) + (u_2(t, \mu^2) - u_1(t, \mu^2)) + \dots \quad (4.44)$$

serisini oluşturalım. $W > 0$ için $|\mu^2| \leq W$ olsun. $0 \leq t \leq a$ aralığında $q(t)$ ve $u(t)$ sürekli fonksiyonlardır. Sonlu $q(\mp 0)$ limit değerleri mevcuttur, bu nedenle $|q(t)| \leq Y$, $|u_0(t)| \leq Z$ olacak şekilde $Y > 0$ ve $Z > 0$ sayıları vardır. O halde $|u_m(t) - u_{m-1}(t)|$ ifadesi ele alındığında,

$m = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |u_1(t) - u_0(t)| &= \left| \int_0^t (t-r)(q(r)u_0(r) - \mu^2 u_0(r))dr \right| \\ &\leq \int_0^t |t-r||q(r)u_0(r) - \mu^2 u_0(r)|dr \\ &\leq \int_0^t |t-r|(|q(r)||u_0(r)| + |\mu^2||u_0(r)|)dr \\ &\leq \int_0^t (t-r)(Y+W)Zdr = (Y+W)Z \int_0^t (t-r)dr \\ &= (Y+W)Z \left[tr - \frac{r^2}{2} \right]_0^t = (Y+W)Z \left[t^2 - \frac{t^2}{2} \right] \\ |u_1(t) - u_0(t)| &\leq (Y+W)Z \frac{t^2}{2!} \end{aligned} \quad (4.45)$$

eşitliği yazılır.

$m = 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 |u_2(t) - u_1(t)| &= \left| \int_0^t (t-r)(q(r)u_1(r) - \mu^2 u_1(r))dr \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^t (t-r)(q(r)u_0(r) - \mu^2 u_0(r))dr \right| \\
 &\leq \int_0^t |t-r||q(r) - \mu^2||u_1(r) - u_0(r)|dr \\
 &\leq \int_0^t (t-r)(|q(r)| + |\mu^2|)(Y+W)Z\frac{r^2}{2!}dr \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_0^t (t-r)(Y+W)^2 Z(r)^2 dr \\
 &= \frac{(Y+W)^2 Z}{2} \int_0^t (r^2 t - r^3) dr \\
 &= \frac{(Y+W)^2 Z}{2} \left[\frac{t^4}{12} \right] \\
 |u_2(t) - u_1(t)| &\leq (Y+W)^2 Z \frac{t^4}{4!}
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

bulunur. Sonuç olarak $m > 2$ için tümevarım metodu uygulandığında,

$$|u_m(t) - u_{m-1}(t)| \leq (Y+W)^m Z \frac{t^{2m}}{(2m)!} \tag{4.47}$$

eşitsizlikleri yazılır. $0 \leq t \leq a$ olup $0 \leq t^{2m} \leq a^{2m}$ dir. Böylece

$$|u_m(t) - u_{m-1}(t)| \leq \frac{(Y+W)^m Z}{(2m)!} a^{2m} \tag{4.48}$$

olduğu görülür. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(Y+W)^m Z}{(2m)!} a^{2m}$ serisi yakınsak olduğundan (4.42)-(4.43) şeklinde belirtilen $u_m(t, \mu^2)$ fonksiyonlar dizisi ile oluşturulmuş

$$\varkappa_2(t, \mu^2) = u_0(t, \mu^2) + (u_1(t, \mu^2) - u_0(t, \mu^2)) + (u_2(t, \mu^2) - u_1(t, \mu^2)) + \dots \tag{4.49}$$

serisi $t \in (0, a]$ ve $W > 0$ ile $|\mu^2| < W$ koşulları dikkate alındığında serinin mutlak ve düzgün yakınsak olduğu görülür. $\{\mu^2 \in \mathbb{C} : |\mu^2| < W\}$ bölgesinde (4.44) serisinin terimleri analitik olduğundan $\varkappa_2(t, \mu^2)$ analitik olur. (4.42) ile tanımlanmış olan $u_m(t, \mu^2)$ fonksiyonlar dizisinin

$$\begin{aligned}
 u'_m(t) - u'_{m-1}(t) &= \int_{-1}^t (q(r) - \mu^2)[u_{m-1}(r) - u_{m-2}(r)]dr \\
 u''_m(t) - u''_{m-1}(t) &= (q(t) - \mu^2)[u_{m-1}(t) - u_{m-2}(t)]
 \end{aligned}$$

birinci ve ikinci türevleri mevcuttur.

(4.49) serisinde her terim t değişkenine göre diferansiyellenebilir ve

$$\begin{aligned}
 \varkappa_2''(t, \mu^2) &= \sum_{m=1}^{\infty} [u_m''(t) - u_{m-1}''(t)] \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} (q(t) - \mu^2) [u_{m-1}(t) - u_{m-2}(t)] \\
 &= (q(t) - \mu^2) \{u_0(t) + \sum_{m=2}^{\infty} [u_{m-1}(t) - u_{m-2}(t)]\} \\
 &= (q(t) - \mu^2) \varkappa_2(t, \mu^2)
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

denklemini sağlanmış olur. Yani $\varkappa_2(t, \mu^2)$ fonksiyonu (4.39) denkleminin bir çözümü olur. Bundan dolayı ispat tamamlanır. $\square$

4.6 Teorem Her $\mu^2 \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(t) + q(t)u(t) = \mu^2 u(t), \quad t \in (0, a] \tag{4.51}$$

$$u(a) = \alpha^+ \tag{4.52}$$

$$u'(a) = \beta^+ \tag{4.53}$$

başlangıç-değer probleminin bir tek $\eta_2(t, \mu^2)$ çözümü mevcuttur ve bu çözüm her bir $t \in (0, a]$ için μ^2 değişkenine göre bütün kompleks düzlemde analitiktir, yani $\forall t \in (0, a]$ için μ^2 parametresinin tam fonksiyonudur (Titchmarsh, 1962).

4.7 Teorem Her $\mu^2 \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(t) + q(t)u(t) = \mu^2 u(t), \quad t \in [-a, 0) \tag{4.54}$$

$$u(0^-, \mu^2) = \frac{1}{\delta} \eta_2(0^+, \mu^2) \tag{4.55}$$

$$u'(0^-, \mu^2) = \frac{1}{\gamma} \eta_2'(0^+, \mu^2) \tag{4.56}$$

başlangıç-değer probleminin bir tek $\eta_1(t, \mu^2)$ çözümü mevcuttur ve bu çözüm her bir $t \in [-a, 0)$ için μ^2 değişkenine göre bütün kompleks düzlemde analitiktir, yani $\forall t \in [-a, 0)$ için μ^2 parametresinin tam fonksiyonudur.

Kanıt

$$-u''(t) + q(t)u(t) = \mu^2 u(t)$$

diferansiyel denklemi

$$u''(t) = (q(t) - \mu^2)u(t)$$

biçiminde yazılıp iki defa integrali alındığında,

$$\frac{du}{dt} = \int_t^0 (q(r)u(r) - \mu^2 u(r))dr + D_0(\mu^2), \quad t \in [-a, 0) \quad (4.57)$$

$$u(t) = \int_t^0 ds \int_t^s (q(r)u(r) - \mu^2 u(r))dr + D_0(\mu^2)t + D_1(\mu^2), \quad t \in [-a, 0) \quad (4.58)$$

eşitliği yazılır. (4.58) ifadesine Cauchy integral formülü uygulanıp denklem düzenlendiğinde

$$u(t) = \int_t^0 dr \int_r^0 (q(r)u(r) - \mu^2 u(r))ds + D_0(\mu^2)t + D_1(\mu^2)$$

yani

$$u(t) = \int_t^0 (t-r)(q(r)u(r) - \mu^2 u(r))dr + D_0(\mu^2)t + D_1(\mu^2) \quad (4.59)$$

eşitliği yazılır. (4.55)-(4.56) başlangıç koşulları (4.57) ile (4.59) integral denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} u(0^-) &= D_1(\mu^2) = \frac{1}{\delta} \eta_2(0^+, \mu^2) \\ u'(0^-) &= D_0(\mu^2) = \frac{1}{\gamma} \eta_2'(0^+, \mu^2) \end{aligned}$$

elde edilir ve (4.59) denkleminde yerine yazıldığında

$$u(t) = \int_t^0 (t-r)(q(r)u(r) - \mu^2 u(r))dr + \frac{1}{\delta} \eta_2(0^+, \mu^2)t + \frac{1}{\gamma} \eta_2'(0^+, \mu^2) \quad (4.60)$$

integral denklemi bulunur. Burada (4.60) integral denklemi ile (4.54)-(4.56) başlangıç-değer probleminin eşdeğer olduğu görülür. (4.60) integral denkleminde ardışık yaklaşımlar metodu uygulanıp $\forall t \in [-a, 0)$ için μ^2 parametresinin tam fonksiyon olduğu gösterilmelidir. Bunun için önce

$$u_m(t, \mu^2) = \int_t^0 (t-r)(q(r)u_{m-1}(r) - \mu^2 u_{m-1}(r))dr + u_0(t, \mu^2) \quad (4.61)$$

$$u_0(t, \mu^2) = \frac{1}{\delta} \eta_2(0^+, \mu^2)t + \frac{1}{\gamma} \eta_2'(0^+, \mu^2) \quad (4.62)$$

şeklinde tanımlı $u_m(t, \mu^2)$ dizisini ele alalım. Bu diziyi kullanarak

$$u_0(t, \mu^2) + (u_1(t, \mu^2) - u_0(t, \mu^2)) + (u_2(t, \mu^2) - u_1(t, \mu^2)) + \dots \quad (4.63)$$

serisini oluşturalım. $W > 0$ için $|\mu^2| \leq W$ olsun. $-a \leq t \leq 0$ aralığında $q(t)$ ve $u(t)$ sürekli fonksiyonlardır. Sonlu $q(\mp 0)$ limit değerleri mevcuttur bu nedenle $|q(t)| \leq Y$, $|u_0(t)| \leq Z$ olacak şekilde $Y > 0$ ve $Z > 0$ sayıları vardır. O halde $|u_m(t) - u_{m-1}(t)|$ ifadesi ele alındığında,

$m = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|u_1(t) - u_0(t)| &= \left| \int_t^0 (t-r)(q(r)u_0(r) - \mu^2 u_0(r))dr \right| \\
&\leq \int_t^0 |t-r||q(r)u_0(r) - \mu^2 u_0(r)|dr \\
&\leq \int_t^0 |t-r|(|q(r)||u_0(r)| + |\mu^2||u_0(r)|)dr \\
&\leq \int_t^0 (t-r)(Y+W)Zdr = (Y+W)Z \int_t^0 (t-r)dr \\
&= (Y+W)Z \left[tr - \frac{r^2}{2} \right]_t^0 = (Y+W)Z \left[(-t^2) + \frac{t^2}{2} \right] \\
|u_1(t) - u_0(t)| &\leq (Y+W)Z \frac{(-t^2)}{2!}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

eşitliği yazılır.

$m = 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|u_2(t) - u_1(t)| &= \left| \int_t^0 (t-r)(q(r)u_1(r) - \mu^2 u_1(r))dr \right. \\
&\quad \left. - \int_t^0 (t-r)(q(r)u_0(r) - \mu^2 u_0(r))dr \right| \\
&\leq \int_t^0 |t-r||q(r) - \mu^2||u_1(r) - u_0(r)|dr \\
&\leq \int_t^0 (t-r)(|q(r)| + |\mu^2|)(Y+W)Z \frac{(-r^2)}{2!} dr \\
&\leq \frac{1}{2} \int_t^0 (t-r)(Y+W)^2 Z (-r^2) dt \\
&= \frac{(Y+W)^2 Z}{2} \int_t^0 (-r^2 t + r^3) dr \\
&= \frac{(Y+W)^2 Z}{2} \left[\frac{t^4}{12} \right] \\
|u_2(t) - u_1(t)| &\leq (Y+W)^2 Z \frac{t^4}{4!}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

elde edilir. Sonuç olarak $m \geq 2$ için tümevarım yöntemi uygulandığında

$$|u_m(t) - u_{m-1}(t)| \leq (Y+W)^m Z \frac{t^{2m}}{(2m)!} \tag{4.66}$$

eşitsizlikleri yazılır. $-a \leq t \leq 0$ olup $0 \leq t^{2n} \leq a^{2m}$ dir. Böylece

$$|u_m(t) - u_{m-1}(t)| \leq \frac{(Y+W)^m Z}{(2m)!} a^{2m} \tag{4.67}$$

olduğu görülür. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(Y+W)^m Z}{(2m)!} a^{2m}$ serisi yakınsak olduğundan (4.61)-(4.62) biçiminde tanımlanan $u_m(t, \mu^2)$ fonksiyonlar dizisi ile oluşturulmuş

$$\eta_1(t, \mu^2) = u_0(t, \mu^2) + (u_1(t, \mu^2) - u_0(t, \mu^2)) + (u_2(t, \mu^2) - u_1(t, \mu^2)) + \dots \quad (4.68)$$

serisinin $t \in [-a, 0)$ ve $W > 0$ için $|\mu^2| \leq W$ bölgesinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğu görülür. $\{\mu^2 \in \mathbb{C} : |\mu^2| \leq W\}$ bölgesinde (4.63) serisinin terimleri analitik olduğundan $\varkappa_2(t, \mu^2)$ analitik olacaktır. O halde (4.68) serisinin toplamı t 'ye göre düzgün yakınsaktır. (4.61) ile tanımlanmış olan $u_m(t, \mu^2)$ fonksiyonlar dizisinin

$$\begin{aligned} u'_m(t) - u'_{m-1}(t) &= \int_{-a}^t (q(r) - \mu^2)[u_{m-1}(r) - u_{m-2}(r)] dr \\ u''_m(t) - u''_{m-1}(t) &= (q(t) - \mu^2)[u_{m-1}(t) - u_{m-2}(t)] \end{aligned}$$

birinci ve ikinci türevleri vardır. (4.68) serisinde her terim t değişkenine göre diferansiyellenebilir ve

$$\begin{aligned} \eta''_1(t, \mu^2) &= \sum_{m=1}^{\infty} [u''_m(t) - u''_{m-1}(t)] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (q(t) - \mu^2)[u_{m-1}(t) - u_{m-2}(t)] \\ &= (q(t) - \mu^2) \left\{ u_0(t) + \sum_{m=2}^{\infty} [u_{m-1}(t) - u_{m-2}(t)] \right\} \\ &= (q(t) - \mu^2) \eta_1(t, \mu^2) \end{aligned} \quad (4.69)$$

denklemini sağlamış olur. Yani $\eta_1(t, \mu^2)$ fonksiyonu (4.54) denkleminin bir çözümü olur. Bundan dolayı ispat tamamlanır. $\square$

4.3. Temel Çözümler ile Eşdeğer Olan İntegral Denklemler

$\varkappa_i(t, \mu^2)$ ve $\eta_i(t, \mu^2)$ ($i = 1, 2$) fonksiyonlarının μ^2 parametresine göre tam fonksiyon oldukları ispatlandı. Bu bölümde yardımcı başlangıç problemleri ile eşdeğer olan integral denklemleri bulunup, problemin ilerleyen bölümlerinde $\lambda = \mu^2$ ifadesi kullanılmıştır.

4.8 Teorem (4.32)-(4.34) başlangıç değer problemi

$$\begin{aligned} \varkappa_1(t, \mu^2) &= \alpha^- \cos \mu(t+a) + \frac{1}{\mu} \beta^- \sin \mu(t+a) \\ &+ \frac{1}{\mu} \int_{-a}^t \sin \mu(t-y) \varkappa_1(y, \mu^2) q(y) dy \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1'(t, \mu^2) &= -\mu \alpha^- \sin \mu(t+a) + \beta^- \cos \mu(t+a) \\ &+ \int_{-a}^t \cos \mu(t-y) \mathcal{K}_1(y, \mu^2) q(y) dy\end{aligned}\quad (4.71)$$

integral denklemleri ile eşdeğerdir.

Kanıt (4.32) diferansiyel denklemi

$$u''(t) + \mu^2 u(t) = q(t)u(t) \quad (4.72)$$

biçiminde yazılabilir. Verilen eşitliği homojen lineer diferansiyel denklem gibi düşünüp,

$$u''(t) + \mu^2 u(t) = 0 \quad (4.73)$$

çözümlerini gözönüne alalım. Bu denklemin genel çözümü

$$u(t) = d_0(t) \cos \mu t + d_1(t) \sin \mu t \quad (4.74)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $d_0(t) = d_0(t, \mu^2)$ ve $d_1(t) = d_1(t, \mu^2)$ olarak ele alıp (4.72)-nin çözümünü,

$$u(t, \mu^2) = d_0(t, \mu^2) \cos \mu t + d_1(t, \mu^2) \sin \mu t \quad (4.75)$$

biçiminde arayalım. Verilen eşitlikte t e göre türev alındığında,

$$\begin{aligned}u'(t, \mu^2) &= d_0'(t, \mu^2) \cos \mu t - \mu d_0(t, \mu^2) \sin \mu t \\ &+ d_1'(t, \mu^2) \sin \mu t + \mu d_1(t, \mu^2) \cos \mu t\end{aligned}$$

bulunur. Burada $d_0(t, \mu^2)$ ve $d_1(t, \mu^2)$ fonksiyonları öyle seçilsin ki

$$d_0'(t, \mu^2) \cos \mu t + d_1'(t, \mu^2) \sin \mu t = 0 \quad (4.76)$$

olsun. Böylece

$$u'(t, \mu^2) = -\mu d_0(t, \mu^2) \sin \mu t + \mu d_1(t, \mu^2) \cos \mu t \quad (4.77)$$

bulunur. Tekrardan son eşitliğin t e göre türevi alındığında

$$\begin{aligned}u''(t, \mu^2) &= -\mu d_0'(t, \mu^2) \sin \mu t - \mu^2 d_0(t, \mu^2) \cos \mu t \\ &+ \mu d_1'(t, \mu^2) \cos \mu t - \mu^2 d_1(t, \mu^2) \sin \mu t\end{aligned}\quad (4.78)$$

elde edilir. (4.75)-(4.78) eşitlikleri (4.72) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$-\mu d'_0(t, \mu^2) \sin \mu t + \mu d'_1(t, \mu^2) \cos \mu t = q(t)u(t) \quad (4.79)$$

elde edilir. Şimdi (4.76) ve (4.79) eşitliklerini bir arada düşünüp bu eşitlikleri $d'_0(t)$ ve $d'_1(t)$ değişkenlerinin lineer denklem sistemi şeklinde çözüldüğünde $\mu \neq 0$ için,

$$d'_0(t, \mu^2) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin \mu t \\ q(t)u(t) & \mu \cos \mu t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \mu t & \sin \mu t \\ -\mu \sin \mu t & \mu \cos \mu t \end{vmatrix}} = \frac{-\sin \mu t q(t)u(t)}{\mu} \quad (4.80)$$

elde edilir. Bu eşitlik integrallendiğinde,

$$d_0(t, \mu^2) = \frac{-1}{\mu} \int_{-a}^t \sin \mu y q(y)u(y)dy + d_0(\mu^2) \quad (4.81)$$

eşitliği bulunur. Aynı şekilde,

$$d'_1(t, \mu^2) = \frac{\begin{vmatrix} \cos \mu t & 0 \\ -\mu \sin \mu t & q(t)u(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \mu t & \sin \mu t \\ -\mu \sin \mu t & \mu \cos \mu t \end{vmatrix}} = \frac{\cos \mu t q(t)u(t)}{\mu} \quad (4.82)$$

elde edilir. Bu eşitlik integrallendiğinde,

$$d_1(t, \mu^2) = \frac{1}{\mu} \int_{-a}^t \cos \mu y q(y)u(y)dy + d_1(\mu^2) \quad (4.83)$$

bulunur. (4.81) ve (4.83) eşitliklerini (4.75) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} u(t, \mu^2) &= \frac{-1}{\mu} \cos \mu t \int_{-a}^t \sin \mu y q(y)u(y)dy + d_0(\mu^2) \cos \mu t \\ &+ \frac{1}{\mu} \sin \mu t \int_{-a}^t \cos \mu y q(y)u(y)dy + d_1(\mu^2) \sin \mu t \end{aligned}$$

bulunur. Bulduğumuz eşitlik düzenlendiğinde

$$u(t, \mu^2) = \frac{1}{\mu} \int_{-a}^t \sin \mu(t-y) q(y)u(y)dy + d_0(\mu^2) \cos \mu t + d_1(\mu^2) \sin \mu t \quad (4.84)$$

yazılır. Aynı şekilde (4.81) ve (4.83) eşitlikleri (4.77) eşitliğinde yerine yazılıp düzenlendiğinde

$$u'(t, \mu^2) = \int_{-a}^t \cos \mu(t-y) q(y)u(y)dy - \mu d_0(\mu^2) \sin \mu t + d_1(\mu^2) \cos \mu t \quad (4.85)$$

bulunur. (4.84)ve (4.85) ifadeleri (4.33) ve (4.34) başlangıç şartlarını sağlar. Bu başlangıç şartları uygulandığında,

$$\begin{aligned} u(-a) &= d_0(\mu^2) \cos \mu a - d_1(\mu^2) \sin \mu a = \alpha^- \\ u'(-a) &= \mu d_0(\mu^2) \sin \mu a + \mu d_1(\mu^2) \cos \mu a = \beta^- \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini elde edilir. Sabitlerden $d_0(\mu^2)$ ve $d_1(\mu^2)$ ' yı bulmak için elde edilen denklem sistemine bakalım. O halde fonksiyonlardan $d'_0(t, \mu^2)$ ve $d'_1(t, \mu^2)$ ' nın çözümlerini bulmak için yaptığımız işlemler tekrarlandığında,

$$d_0(\mu^2) = \alpha^- \cos \mu a + \frac{1}{\mu} \beta^- \sin \mu a \quad (4.86)$$

$$d_1(\mu^2) = \frac{1}{\mu} \beta^- \cos \mu a - \alpha^- \sin \mu a \quad (4.87)$$

elde edilir. Bu $d_0(\mu^2)$ ve $d_1(\mu^2)$ değerleri (4.84) integral denkleminde yerine yazılıp ve gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned} u(t, \mu^2) &= \alpha^- \cos \mu(t+a) + \frac{1}{\mu} \beta^- \sin \mu(t+a) \\ &+ \frac{1}{\mu} \int_{-a}^t \sin \mu(t-y) q(y) u(y) dy \end{aligned} \quad (4.88)$$

eşitliği bulunur. O halde $\varkappa_1(t, \mu^2)$ çözümü için

$$\begin{aligned} \varkappa_1(t, \mu^2) &= \alpha^- \cos \mu(t+a) + \frac{1}{\mu} \beta^- \sin \mu(t+a) \\ &+ \frac{1}{\mu} \int_{-a}^t \sin \mu(t-y) q(y) \varkappa_1(y, \mu^2) dy \end{aligned} \quad (4.89)$$

eşitliği sağlanır. Buradan (4.32)-(4.34) başlangıç değer probleminin (4.89) integral denklemi ile eşdeğer olduğu görülür. Böylece (4.70) integral denklemi ispatlanmış olur. $d_0(\mu^2)$ ve $d_1(\mu^2)$ sabitleri (4.85) ifadesinde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned} u'(t, \mu^2) &= -\mu \alpha^- \sin \mu(t+a) + \beta^- \cos \mu(t+a) \\ &+ \int_{-a}^t \cos \mu(t-y) q(y) u(y) dy \end{aligned} \quad (4.90)$$

eşitliği bulunur. O halde $\varkappa'_1(t, \mu^2)$ çözümü için

$$\begin{aligned} \varkappa'_1(t, \mu^2) &= -\mu \alpha^- \sin \mu(t+a) + \beta^- \cos \mu(t+a) \\ &+ \int_{-a}^t \cos \mu(t-y) q(y) \varkappa_1(y, \mu^2) dy \end{aligned} \quad (4.91)$$

eşitliği sağlanır. Bu ise ispatı tamamlar. □

4.9 Teorem (4.51)-(4.53) başlangıç değer probleminin tanımlanan $\eta_2(t, \mu^2)$ çözümü

$$\begin{aligned}\eta_2(t, \mu^2) &= \alpha^+ \cos \mu(t-a) + \frac{1}{\mu} \beta^+ \sin \mu(t-a) \\ &+ \frac{1}{\mu} \int_t^a \sin \mu(t-y) q(y) \eta_2(y, \mu^2) dy\end{aligned}\quad (4.92)$$

$$\begin{aligned}\eta_2'(t, \mu^2) &= -\mu \alpha^+ \sin \mu(t-a) + \beta^+ \cos \mu(t-a) \\ &+ \int_t^a \cos \mu(t-y) q(y) \eta_2(y, \mu^2) dy\end{aligned}\quad (4.93)$$

integral denklemlerini sağlar.

4.10 Teorem (4.35)-(4.37) başlangıç değer probleminin tanımlanan $\varkappa_2(t, \mu^2)$ çözümü

$$\begin{aligned}\varkappa_2(t, \mu^2) &= \delta \varkappa_1(0^-, \mu^2) \cos \mu t + \frac{1}{\mu} \gamma \varkappa_1'(0^-, \mu^2) \sin \mu t \\ &+ \frac{1}{\mu} \int_0^t \sin \mu(t-y) q(y) \varkappa_2(y, \mu^2) dy\end{aligned}\quad (4.94)$$

$$\begin{aligned}\varkappa_2'(t, \mu^2) &= -\mu \delta \varkappa_1(0^-, \mu^2) \sin \mu t + \gamma \varkappa_1'(0^-, \mu^2) \cos \mu t \\ &+ \int_0^t \cos \mu(t-y) q(y) \varkappa_2(y, \mu^2) dy\end{aligned}\quad (4.95)$$

integral denklemlerini sağlar.

4.11 Teorem (4.54)-(4.56) başlangıç değer probleminin tanımlanan $\eta_1(t, \mu^2)$ çözümü

$$\begin{aligned}\eta_1(t, \mu^2) &= \frac{1}{\delta} \eta_2(0^+, \mu^2) \cos \mu t + \frac{1}{\mu \gamma} \eta_2'(0^+, \mu^2) \sin \mu t \\ &+ \frac{1}{\mu} \int_t^0 \sin \mu(t-y) q(y) \eta_1(y, \mu^2) dy\end{aligned}\quad (4.96)$$

$$\begin{aligned}\eta_1'(t, \mu^2) &= -\mu \frac{1}{\delta} \eta_2(0^+, \mu^2) \sin \mu t + \frac{1}{\gamma} \eta_2'(0^+, \mu^2) \cos \mu t \\ &+ \int_t^0 \cos \mu(t-y) q(y) \eta_1(y, \mu^2) dy\end{aligned}\quad (4.97)$$

integral denklemlerini sağlar.

4.4. Başlangıç-Değer Problemlerin Çözümlerinin Asimptotik Davranışları

Burada $\varkappa_i(t, \mu^2)$ ve $\eta_i(t, \mu^2)$ ($i = 1, 2$) temel çözümlerinin önceki bölümde eşdeğer olduğu integral denklemler aracılığıyla μ^2 değişkenine göre $|\mu^2| \rightarrow \infty$ olacak şekilde asimptotik davranışları incelenmiştir.

4.12 Teorem $\lambda = \mu^2$, $\mu = \sigma + ir$, $Im\mu = r$ olacak şekilde $\varkappa_1(t, \mu^2)$ fonksiyonu için $-a \leq t \leq 0$ aralığında

$$\varkappa_1(t, \mu^2) = O(e^{|r|(t+a)}), \quad |\mu^2| \rightarrow \infty \quad (4.98)$$

$$\varkappa_1'(t, \mu^2) = O(|\mu|e^{|r|(t+a)}), \quad |\mu^2| \rightarrow \infty \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \varkappa_1(t, \mu^2) &= \alpha^- \cos \mu(t+a) + \frac{1}{\mu} \beta^- \sin \mu(t+a) \\ &+ O\left(\frac{1}{|\mu|} e^{|r|(t+a)}\right), \quad |\mu^2| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} \varkappa_1'(t, \mu^2) &= -\mu \alpha^- \sin \mu(t+a) + \beta^- \cos \mu(t+a) \\ &+ O(e^{|r|(t+a)}), \quad |\mu^2| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.101)$$

asimptotik eşitlikler sağlanır (Titchmarsh, 1962).

4.13 Teorem $\lambda = \mu^2$, $\mu = \sigma + ir$, $Im\mu = r$ olmak üzere $\varkappa_2(t, \mu^2)$ fonksiyonu için $0 \leq t \leq a$ aralığında

$$\varkappa_2(t, \mu^2) = O(e^{|r|(t+a)}), \quad |\mu^2| \rightarrow \infty \quad (4.102)$$

$$\varkappa_2'(t, \mu^2) = O(|\mu|e^{|r|(t+a)}), \quad |\mu^2| \rightarrow \infty \quad (4.103)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

Kanıt

$$F(t, \mu^2) = e^{-|r|(t+a)} \varkappa_2(t, \mu^2) \quad (4.104)$$

ile gösterelim. $\varkappa_2(t, \mu^2)$ için integral ifadesi üstteki denklemde yerine yazıldığında.

$$\begin{aligned} F(t, \mu^2) &= e^{-|r|(t+a)} \left[\delta \varkappa_1(0^-, \mu^2) \cos \mu t + \frac{1}{\mu} \gamma \varkappa_1'(0^-, \mu^2) \sin \mu t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu} \int_0^t \sin \mu(t-y) q(y) \varkappa_2(y, \lambda) dy \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 F(t, \mu^2) &= \delta \varkappa_1(0^-, \mu^2) \cos \mu t e^{-|r|(t+a)} + \frac{1}{\mu} \gamma \varkappa_1'(0^-, \mu^2) \sin \mu t e^{-|r|(t+a)} \\
 &+ \frac{1}{\mu} \int_0^t \sin \mu(t-y) q(y) \varkappa_2(y, \mu^2) e^{-|r|(t+a)} dy
 \end{aligned} \tag{4.105}$$

eşitlikleri bulunur. (4.98)-(4.99) asimptotik ifadeler göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}
 \varkappa_1(0^-, \mu^2) &= O(e^{|r|a}) \implies |\varkappa_1(0^-, \mu^2)| \leq R_1 e^{|r|a} \\
 \varkappa_1'(0^-, \mu^2) &= O(|\mu| e^{|r|a}) \implies |\varkappa_1'(0^-, \mu^2)| \leq R_2 |\mu| e^{|r|a}
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu son iki eşitsizlikte bulunan değerler (4.105) denkleminde yerine yazılıp, $|\sin w| \leq e^{|Imw|}$ ve $|\cos w| \leq e^{|Imw|}$ ifadelerinden yararlanıldığında

$$\begin{aligned}
 |F(t, \mu^2)| &\leq R_1 \delta e^{|r|a} e^{|r|t} e^{-|r|(t+a)} + R_2 \gamma e^{|r|a} e^{|r|t} e^{-|r|(t+a)} \\
 &+ \frac{1}{|\mu|} \int_0^t |\sin[\mu(t-y)]| |q(y)| |F(y, \mu^2)| e^{|r|(y+a)} e^{-|r|(t+a)} dy \\
 &= \delta R_1 + \gamma R_2 + \frac{1}{|\mu|} \int_0^t e^{|r|(t-y)} |q(y)| |F(y, \mu^2)| e^{-|r|(t-y)} dy \\
 &= \delta R_1 + \gamma R_2 + \frac{1}{|\mu|} \int_0^t |q(y)| |F(y, \mu^2)| dy
 \end{aligned} \tag{4.106}$$

bulunur. F_1 ve q_1 ifadelerini

$$F_1 := \max_{t \in [0, a]} |F(t, \mu^2)|, \quad q_1 := \max_{t \in [0, a]} \int_0^a |q(y)| dy$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 |F(t, \mu^2)| &\leq \left[\delta R_1 + \gamma R_2 + \frac{1}{|\mu|} \int_0^t |q(y)| |F(y, \mu^2)| dy \right] \\
 &\leq \delta R_1 + \gamma R_2 + \frac{1}{|\mu|} F_1 q_1
 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$R := \delta R_1 + \gamma R_2 + \frac{1}{|\mu|} F_1 q_1$$

gösterirsek

$$\begin{aligned}
 |F(t, \mu^2)| \leq R &\implies |e^{-|r|(t+a)} \varkappa_2(t, \mu^2)| \leq R \\
 &\implies |\varkappa_2(t, \mu^2)| \leq R e^{|r|(t+a)}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\varkappa_2(t, \mu^2) = O(e^{|r|(t+a)}) , |\mu^2| \longrightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği bulunur. Şimdi (4.107) asimptotik eşitliğini ele alalım. Önceki bölümlerde

$$\begin{aligned} \varkappa_2' &= -\mu \delta \varkappa_1(0^-, \mu^2) \sin \mu t + \gamma \varkappa_1'(0^-, \mu^2) \cos \mu t \\ &+ \int_0^t \cos \mu(t-y) q(y) \varkappa_2(y, \mu^2) \end{aligned}$$

denklemini bulunmuştu. Şimdi bu denklem aracılığıyla asimptotik eşitliğin sağlandığını gösterebiliriz. Daha önceden belirttiğimiz

$$\begin{aligned} \varkappa_1(0^-, \mu^2) &= O(e^{|r|a}) \implies |\varkappa_1(0^-, \mu^2)| \leq R_1 e^{|r|a} \\ \varkappa_1'(0^-, \mu^2) &= O(|\mu| e^{|r|a}) \implies |\varkappa_1'(0^-, \mu^2)| \leq R_2 |\mu| e^{|r|a} \end{aligned}$$

eşitliklerden yola çıkarak

$$\begin{aligned} |-\mu \delta \varkappa_1(0^-, \mu^2) \sin \mu t| &\leq R_1 \delta |\mu| e^{|r|a} e^{|r|t} \\ -\mu \delta \varkappa_1(0^-, \mu^2) \sin \mu t &= O(|\mu| e^{|r|(t+a)}) \end{aligned} \quad (4.107)$$

asimptotik ifadesi elde edilir. Benzer şekilde,

$$|\gamma \varkappa_1'(0^-, \mu^2) \cos \mu t| \leq R_2 \gamma |\mu| e^{|r|a} e^{|r|t}$$

ifadesinden tanım gereği,

$$\gamma \varkappa_1'(0^-, \mu^2) \cos \mu t = O(|\mu| e^{|r|(t+a)}) \quad (4.108)$$

eşitliği yazılır. Buradan

$$\varkappa_2(t, \mu^2) = O(e^{|r|(t+a)}) , |\mu^2| \longrightarrow \infty$$

asimptotik ifadesi dikkate alındığında

$$q_1 : = \max_{t \in [0, a]} \int_0^a |q(y)| dy$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^t \cos \mu(t-y) q(y) \varkappa_2(y, \mu^2) dy \right| &\leq \int_0^t \cos \mu(t-y) q(y) \varkappa_2(y, \mu^2) dy \\
 &\leq \int_0^t e^{|r|(t-y)} |q(y)| R e^{|r|(y+a)} dy \\
 &\leq R e^{|r|(t+a)} \int_0^a |q(y)| dy
 \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan

$$\int_0^t \cos \mu(t-y) q(y) \varkappa_2(y, \lambda) dy = O(e^{|r|(t+a)}) \quad (4.109)$$

eşitliği elde edilir. (4.107)-(4.108) ifadeleri $\varkappa_2'(t, \mu^2)$ integral denkleminde yazıldığında,

$$\varkappa_2'(t, \mu^2) = O(|\mu| e^{|r|(t+a)})$$

asimptotik eşitlik bulunur. □

4.14 Teorem $\lambda = \mu^2$, $\mu = \sigma + ir$, $Im \mu = r$ olacak şekilde $\varkappa_2(t, \mu^2)$ fonksiyonu için $0 \leq t \leq a$ aralığında

$$\begin{aligned}
 \varkappa_2(t, \mu^2) &= \alpha^- \delta \cos \mu a \cos \mu t + \frac{1}{\mu} \beta^- \delta \sin \mu a \cos \mu t - \alpha^- \gamma \sin \mu a \sin \mu t \\
 &+ \frac{1}{\mu} \beta^- \gamma \cos \mu a \sin \mu t + O\left(\frac{1}{|\mu|} e^{|r|(t+a)}\right), \quad |\mu^2| \rightarrow \infty
 \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned}
 \varkappa_2'(t, \mu^2) &= -\mu \alpha^- \delta \cos \mu a \sin \mu t - \beta^- \delta \sin \mu a \sin \mu t - \mu \alpha^- \gamma \sin \mu a \cos \mu t \\
 &+ \beta^- \gamma \cos \mu a \cos \mu t + O(e^{|r|(t+a)}), \quad |\mu^2| \rightarrow \infty
 \end{aligned} \quad (4.111)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

Kanıt Önce (4.110) asimptotik eşitliğinin sağlandığını gösterelim. Bu ifadeyi ispatlamak için

$$\begin{aligned}
 \varkappa_2(t, \mu^2) &= \delta \varkappa_1(0^-, \mu^2) \cos \mu t + \frac{1}{\mu} \gamma \varkappa_1'(0^-, \mu^2) \sin \mu t \\
 &+ \frac{1}{\mu} \int_0^t \sin \mu(t-y) q(y) \varkappa_2(y, \mu^2) dy
 \end{aligned}$$

denkleminde eşitliğin sağ tarafındaki terimlerin asimptotik eşitleri incelenecektir. (4.100) ve

(4.101) ifadelerinden,

$$\begin{aligned}\varkappa_1(0, \mu^2) &= \alpha^- \cos \mu a + \frac{1}{\mu} \beta^- \sin \mu a + O\left(\frac{1}{|\mu|} e^{|r|a}\right), \quad |\mu^2| \rightarrow \infty \\ \varkappa_1'(0, \mu^2) &= -\mu \alpha^- \sin \mu a + \beta^- \cos \mu a + O(e^{|r|a}), \quad |\mu^2| \rightarrow \infty\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\varkappa_1(0^-, \mu^2) \cos \mu t &= \cos \mu t \left[\alpha^- \cos \mu a + \frac{1}{\mu} \beta^- \sin \mu a + O\left(\frac{1}{|\mu|} e^{|r|a}\right) \right] \\ &= \alpha^- \cos \mu a \cos \mu t + \frac{1}{\mu} \beta^- \sin \mu a \cos \mu t + O\left(\frac{1}{|\mu|} e^{|r|a}\right) O(e^{|r|t}) \\ &= \alpha^- \cos \mu a \cos \mu t + \frac{1}{\mu} \beta^- \sin \mu a \cos \mu t + O\left(\frac{1}{|\mu|} e^{|r|(t+a)}\right) \quad (4.112)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varkappa_1'(0^-, \mu^2) \sin \mu t &= \sin \mu t \left[-\mu \alpha^- \sin \mu a + \beta^- \cos \mu a + O(e^{|r|a}) \right] \\ &= -\mu \alpha^- \sin \mu a \sin \mu t + \beta^- \cos \mu a \sin \mu t + O(e^{|r|a}) O(e^{|r|t}) \\ &= -\mu \alpha^- \sin \mu a \sin \mu t + \beta^- \cos \mu a \sin \mu t + O(e^{|r|(t+a)}) \quad (4.113)\end{aligned}$$

ifadeleri yazılır. Şimdi $\varkappa_2(t, \mu^2)$ denklemdeki integral ifade değerlendirilecektir. $\varkappa_2(t, \mu^2)$ için daha önce elde edilen asimptotik eşitlik gereği

$$|\varkappa_2(t, \mu^2)| \leq R e^{|r|(t+a)}$$

olacak biçimde bir $R > 0$ sabiti vardır. O halde

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{\mu} \int_0^t \sin \mu(t-y) q(y) \varkappa_2(y, \mu^2) dy \right| &\leq \frac{1}{|\mu|} \int_0^t |\sin \mu(t-y)| |q(y)| |\varkappa_2(y, \mu^2)| dy \\ &\leq \frac{1}{|\mu|} \int_0^t e^{|r|(t-y)} |q(y)| R e^{|r|(y+a)} dy \\ &\leq R \frac{1}{|\mu|} e^{|r|(t+a)} \int_0^a |q(y)| dy\end{aligned}$$

yazılır. $q_1 := \max_{y \in [0, a]} \int_0^a |q(y)| dy$ ile tanımlandığında,

$$\left| \frac{1}{\mu} \int_0^t \sin \mu(t-y) q(y) \varkappa_2(y, \mu^2) dy \right| \leq R q_1 \frac{1}{|\mu|} e^{|r|(t+a)}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan

$$\frac{1}{\mu} \int_0^t \sin \mu(t-y) q(y) \varkappa_2(y, \mu^2) dy = O\left(\frac{1}{|\mu|} e^{|r|(t+a)}\right) \quad (4.114)$$

elde edilir. (4.112)-(4.114) asimptotik ifadeleri $\varkappa_2(t, \mu^2)$ denkleminde yazılıp düzenlemeler

yapıldığında,

$$\begin{aligned}
\kappa_2(t, \mu^2) &= \alpha^- \delta \cos \mu a \cos \mu t + \frac{1}{\mu} \beta^- \delta \sin \mu a \cos \mu t + \delta O\left(\frac{1}{|\mu|} e^{|r|(t+a)}\right) \\
&- \alpha^- \gamma \sin \mu a \sin \mu t + \frac{1}{\mu} \beta^- \gamma \cos \mu a \sin \mu t \\
&+ \frac{1}{\mu} \gamma O(e^{|r|(t+a)}) + O\left(\frac{1}{|\mu|} e^{|r|(t+a)}\right) \\
&= \alpha^- \delta \cos \mu a \cos \mu t + \frac{1}{\mu} \beta^- \delta \sin \mu a \cos \mu t - \alpha^- \gamma \sin \mu a \sin \mu t \\
&+ \frac{1}{\mu} \beta^- \gamma \cos \mu a \sin \mu t + O\left(\frac{1}{|\mu|} e^{|r|(t+a)}\right)
\end{aligned}$$

asimptotik eşitliği yazılır. Bu durumda (4.111) asimptotik eşitliği ispatlanmış oldu. Şimdi (4.112) asimptotik eşitliğini ispatlayalım. Öncelikle

$$\begin{aligned}
\kappa_2'(t, \mu^2) &= -\mu \delta \kappa_1(0^-, \mu^2) \sin \mu t + \gamma \kappa_1'(0^-, \mu^2) \cos \mu t \\
&+ \int_0^t \cos \mu(t-y) q(y) \kappa_2(y, \mu^2) dy
\end{aligned}$$

denkleminde eşitliğin sağ tarafındaki terimler aşağıda incelenmiştir.

$$\begin{aligned}
-\mu \kappa_1(0^-, \mu^2) \sin \mu t &= \sin \mu t \left[-\mu \alpha^- \cos \mu a - \beta^- \sin \mu a - \mu O\left(\frac{1}{|\mu|} e^{|r|a}\right) \right] \\
&\leq -\mu \alpha^- \cos \mu a \sin \mu t - \beta^- \sin \mu a \sin \mu t + O(e^{|r|a}) O(e^{|r|t}) \\
&= -\mu \alpha^- \cos \mu a \sin \mu t - \beta^- \sin \mu a \sin \mu t + O(e^{|r|(t+a)}) \quad (4.115)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_1'(0^-, \mu^2) \cos \mu t &= \cos \mu t \left[-\mu \alpha^- \sin \mu a + \beta^- \cos \mu a + O(e^{|r|a}) \right] \\
&\leq -\mu \alpha^- \sin \mu a \cos \mu t + \beta^- \cos \mu a \cos \mu t + O(e^{|r|a}) O(e^{|r|t}) \\
&= -\mu \alpha^- \sin \mu a \cos \mu t + \beta^- \cos \mu a \cos \mu t + O(e^{|r|(t+a)}) \quad (4.116)
\end{aligned}$$

$\kappa_2'(0^-, \mu^2)$ için integral denklemi incelendiğinde

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t \cos \mu(t-y) q(y) \kappa_2(y, \mu^2) dy \right| &\leq \int_0^t |\cos \mu(t-y)| |q(y)| |\kappa_2(y, \mu^2)| dy \\
&\leq \int_0^t e^{|r|(t-y)} |q(y)| R e^{|r|(y+a)} dy \\
&\leq R e^{|r|(t+a)} \int_0^a |q(y)| dy
\end{aligned}$$

bulunur. $q_1 := \max_{t \in [0, a]} \int_0^a |q(y)| dy$ şeklinde tanımlandığından,

$$\left| \int_0^t \cos \mu(t-y) q(y) \kappa_2(y, \mu^2) dy \right| \leq R q_1 e^{|r|(t+a)}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan

$$\int_0^t \cos \mu(t-y) q(y) \varkappa_2(y, \mu^2) dy = O(e^{|r|(t+a)}) \quad (4.117)$$

eşitliği bulunur. (4.115)-(4.117) asimptotik ifadeleri $\varkappa_2(t, \mu^2)$ integral denkleminde yazıldığında,

$$\begin{aligned} \varkappa_2'(t, \mu^2) &= -\mu \alpha^- \delta \cos \mu a \sin \mu t - \beta^- \delta \sin \mu a \sin \mu t + \delta O(e^{|r|(t+a)}) \\ &- \mu \alpha^- \gamma \sin \mu a \cos \mu t + \beta^- \gamma \sin \mu a \sin \mu t \\ &+ \gamma O(e^{|r|(t+a)}) + O(e^{|r|(t+a)}) \end{aligned}$$

bulunur. Son ifadede düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned} \varkappa_2'(t, \mu^2) &= -\mu \alpha^- \delta \cos \mu a \sin \mu t - \beta^- \delta \sin \mu a \sin \mu t \\ &- \mu \alpha^- \gamma \sin \mu a \cos \mu t + \beta^- \gamma \cos \mu a \cos \mu t + O(e^{|r|(t+a)}), |\mu^2| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

asimptotik eşitliği bulunur. Buradan (4.112) asimptotik eşitliğin sağlandığı gösterildi. Böylece $\varkappa_1(t, \mu^2)$ ve $\varkappa_2(t, \mu^2)$ fonksiyonlarının asimptotik formülleri bulundu. $\eta_1(t, \mu^2)$ ve $\eta_2(t, \mu^2)$ fonksiyonlarının da bulunacaktır. $\eta_1(t, \mu^2)$ fonksiyonu $\eta_2(t, \mu^2)$ fonksiyonu ile tanımlandığından bu formüller ilk olarak $\eta_2(t, \mu^2)$ fonksiyonu için bulunmalıdır. Fakat $\eta_2(t, \mu^2)$ fonksiyonunun asimptotik formüllerin ispatı [Titchmarsh] kaynağında bulunduğu için burada ispatsız ifade edilecektir. $\square$

4.15 Teorem $\lambda = \mu^2, \mu = \sigma + ir, Im\mu = r$ olacak şekilde $\eta_2(t, \mu^2)$ fonksiyonu için $0 \leq t \leq a$ aralığında

$$\eta_2(t, \mu^2) = O(e^{|r|(a-t)}), |\mu^2| \rightarrow \infty \quad (4.118)$$

$$\eta_2'(t, \mu^2) = O(|\mu| e^{|r|(t+a)}), |\mu^2| \rightarrow \infty \quad (4.119)$$

$$\eta_2(t, \mu^2) = \alpha^+ \cos \mu(t-a) + \frac{1}{\mu} \beta^+ \sin \mu(t-a) + O\left(\frac{1}{|\mu|} e^{|r|(t+a)}\right) \quad (4.120)$$

$$\eta_2'(t, \mu^2) = -\mu \alpha^+ \sin \mu(t-a) + \beta^+ \cos \mu(t-a) + O(e^{|r|(t+a)}) \quad (4.121)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır (Titchmarsh, 1962).

4.16 Teorem $\lambda = \mu^2, \mu = \sigma + ir, Im\mu = r$ olmak üzere $\eta_1(t, \mu^2)$ fonksiyonu için $-a \leq t \leq 0$ aralığında

$$\eta_1(t, \mu^2) = O(e^{|r|(a-t)}), |\mu^2| \rightarrow \infty \quad (4.122)$$

$$\eta_1'(t, \mu^2) = O(|\mu| e^{|r|(t+a)}), |\mu^2| \rightarrow \infty \quad (4.123)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

Kanıt (4.122)-(4.123) asimptotik eşitlikler ele alındığında,

$$\begin{aligned}\eta_2(t, \mu^2) &= O(e^{|r|(a-t)}) \implies |\eta_2(t, \mu^2)| \leq R_1 e^{|r|(a-t)} \\ \eta_2'(t, \mu^2) &= O(|\mu| e^{|r|(a-t)}) \implies |\eta_2'(t, \mu^2)| \leq R_2 |\mu| e^{|r|(a-t)}\end{aligned}$$

bulunur.

$$F(t, \mu^2) = \eta_1(t, \mu^2) e^{-|r|(a-t)} \quad (4.124)$$

ile gösterilsin. Bu durumda $F(t, \mu^2)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}F(t, \mu^2) &= e^{-|r|(a-t)} \left[\frac{1}{\delta} \eta_2(0^+, \mu^2) \cos \mu t + \frac{1}{\mu \gamma} \eta_2'(0^+, \mu^2) \sin \mu t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu} \int_t^0 \sin \mu(t-y) q(y) \eta_1(y, \mu^2) dy \right]\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. O halde verilen eşitlikte $|\sin w| \leq e^{|Imw|}$ ve $|\cos w| \leq e^{|Imw|}$ ifadelerinden yararlanıldığında,

$$\begin{aligned}|F(t, \mu^2)| &\leq \frac{1}{\delta} R_1 e^{|r|a} e^{-|r|t} e^{-|r|(a-t)} + \frac{1}{|\mu| \gamma} R_2 |\mu| e^{|r|a} e^{-|r|t} e^{-|r|(a-t)} \\ &\quad + \frac{1}{|\mu|} \int_t^0 e^{|r|(y-t)} |q(y)| e^{|r|(y-a)} |F(y, \mu^2)| e^{-|r|(a-t)} dy \\ &\leq \frac{1}{\delta} R_1 + \frac{1}{\gamma} R_2 + \frac{1}{|\mu|} \int_t^0 |q(y)| |F(y, \mu^2)| dy\end{aligned}$$

bulunur. F_1 ve q_1 ifadelerini

$$F_1(t, \mu^2) := \max_{t \in [-a, 0]} |F(t, \mu^2)| \quad q_1 := \max_{t \in [-a, 0]} \int_{-a}^0 |q(y)| dy$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}|F(t, \mu^2)| &\leq \left[\frac{1}{\delta} R_1 + \frac{1}{\gamma} R_2 + q_1 \frac{1}{|\mu|} |F_1(t, \mu^2)| \right] \\ &\leq R_0\end{aligned}$$

ifadesinden

$$|\eta_1(t, \mu^2)| e^{-|r|(a-t)} \leq R_0 \implies |\eta_1(t, \mu^2)| \leq R_0 e^{|r|(a-t)}$$

eşitsizliği bulunur. Böylece

$$\eta_1(t, \mu^2) = O(e^{|r|(a-t)})$$

asimptotik eşitliği yazılır. O halde (4.122) asimptotik eşitliği sağlandı. Şimdi ise (4.123) asimptotik eşitliğini ispatlayalım.

$$\begin{aligned}\eta_1'(t, \mu^2) &= -\mu \frac{1}{\delta} \eta_2(0^+, \mu^2) \sin \mu t + \frac{1}{\gamma} \eta_2'(0^+, \mu^2) \cos \mu t \\ &+ \int_t^0 \cos \mu(t-y) q(y) \eta_1(y, \mu^2) dy\end{aligned}$$

denklemini ele alalım.

$$\begin{aligned}\eta_2(t, \mu^2) &= O(e^{|r|(a-t)}) \\ \eta_2'(t, \mu^2) &= O(|\mu| e^{|r|(a-t)})\end{aligned}$$

asimptotik eşitlikler ele alındığında

$$\begin{aligned}|\mu \frac{1}{\delta} \eta_2(0^+, \mu^2) \sin \mu t| &\leq \frac{1}{\delta} R_1 |\mu| e^{|r|a} e^{-|r|t} \\ &\leq \frac{1}{\delta} R_1 |\mu| e^{|r|(a-t)}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$-\mu \frac{1}{\delta} \eta_2(0^+, \mu^2) \sin \mu t = O(|\mu| e^{|r|(a-t)}) \quad (4.125)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}|\frac{1}{\gamma} \eta_2'(0^+, \mu^2) \cos \mu t| &\leq \frac{1}{\gamma} R_2 |\mu| e^{|r|a} e^{-|r|t} \\ &= \frac{1}{\gamma} R_2 |\mu| e^{|r|(a-t)}\end{aligned}$$

ifadesinden

$$\frac{1}{\gamma} \eta_2'(0^+, \mu^2) \cos \mu t = O(|\mu| e^{|r|(a-t)}) \quad (4.126)$$

ifadesi bulunur. Daha sonra $\eta_1(t, \mu^2) = O(e^{|r|(a-t)})$ asimptotik eşitliği ve

$q_1 = \max_{t \in [-a, 0]} \int_{-a}^0 |q(y)| dy$ şeklinde tanımlanan ifade dikkate alındığında aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}|\int_t^0 \cos \mu(t-y) q(y) \eta_1(y, \mu^2) dy| &\leq \int_t^0 |\cos \mu(t-y)| |q(y)| |\eta_1(y, \mu^2)| dy \\ &\leq \int_t^0 e^{|r|(y-t)} |q(y)| R_0 e^{|t|(y-a)} dy \\ &\leq R_0 e^{|t|(a-t)} \int_{-a}^0 |q(y)| dy\end{aligned}$$

Buradan

$$\int_t^0 \cos \mu(t-y)q(y)\eta_1(y,\mu^2)dy = O(e^{|r|(a-t)}) \quad (4.127)$$

asimptotik eşitliği elde edilir. (4.125)-(4.127) asimptotik ifadeleri $\eta_1'(t,\mu^2)$ integral denkleminde yazıldığında

$$\eta_1'(t,\mu^2) = O(|\mu|e^{|r|(a-t)}) \quad (4.128)$$

eşitliği bulunur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

4.17 Teorem $\lambda = \mu^2$, $\mu = \sigma + ir$, $Im\mu = r$ olmak üzere $\eta_2(t,\mu^2)$ fonksiyonu için $-a \leq t \leq 0$ aralığında

$$\begin{aligned} \eta_1(t,\mu^2) &= \frac{1}{\delta}\alpha^+ \cos \mu a \cos \mu t + \frac{1}{\mu\delta}\beta^+ \sin \mu a \cos \mu t \\ &- \frac{1}{\gamma}\alpha^+ \sin \mu a \sin \mu t + \frac{1}{\mu\gamma}\beta^+ \cos \mu a \sin \mu t + O(e^{|r|(a-t)}) \end{aligned} \quad (4.129)$$

$$\begin{aligned} \eta_1'(t,\mu^2) &= -\frac{1}{\delta}\mu\alpha^+ \cos \mu a \sin \mu t - \frac{1}{\delta}\beta^+ \sin \mu a \sin \mu t \\ &- \frac{1}{\gamma}\mu\alpha^+ \sin \mu a \cos \mu t + \frac{1}{\gamma}\beta^+ \cos \mu a \cos \mu t + O(|\mu|e^{|r|(a-t)}) \end{aligned} \quad (4.130)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

Kanıt Bu eşitliklerin gösterilmesi için

$$\begin{aligned} \eta_1(t,\mu^2) &= \frac{1}{\delta}\eta_2(0^+,\mu^2)\cos \mu t + \frac{1}{\mu\gamma}\eta_2'(0^+,\mu^2)\sin \mu t \\ &+ \frac{1}{\mu}\int_t^0 \sin \mu(t-y)q(y)\eta_1(y,\mu^2)dy \end{aligned}$$

integral denkleminde eşitliğin sağ tarafı incelenecektir. Önce $\eta_2(t,\mu^2)$ asimptotik eşitliklerden,

$$\begin{aligned} \eta_2(0^+,\mu^2) &= \alpha^+ \cos \mu a + \frac{1}{\mu}\beta^+ \sin \mu a + O(e^{|r|a}) \\ \eta_2'(0^+,\mu^2) &= -\mu\alpha^+ \sin \mu a + \beta^+ \cos \mu a + O(|\mu|e^{|r|a}) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 \eta_2(0^+, \mu^2) \cos \mu t &= \cos \mu t \left[\alpha^+ \cos \mu a + \frac{1}{\mu} \beta^+ \sin \mu a + O(e^{|r|a}) \right] \\
 &= \alpha^+ \cos \mu a \cos \mu t + \frac{1}{\mu} \beta^+ \sin \mu a \cos \mu t + O(e^{|r|a}) O(e^{-|r|t}) \\
 &= \alpha^+ \cos \mu a \cos \mu t + \frac{1}{\mu} \beta^+ \sin \mu a \cos \mu t + O(e^{|r|(a-t)}) \quad (4.131)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\mu|} \eta_2'(0^+, \mu^2) \sin \mu t &= -\alpha^+ \sin \mu a \sin \mu t \\
 &+ \frac{1}{|\mu|} \beta^+ \cos \mu a \sin \mu t + \frac{1}{|\mu|} O(|\mu| e^{|r|a}) O(e^{-|r|t}) \\
 &= -\alpha^+ \sin \mu a \sin \mu t + \frac{1}{|\mu|} \beta^+ \cos \mu a \sin \mu t + O(e^{|r|(a-t)}) \quad (4.132)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Verilen denklemde integral ifadesi incelendiğinde $\eta_1(t, \mu^2)$ için teorem gereği, $|\eta_1(t, \mu^2)| \leq R_0 e^{|r|(a-t)}$ olmak üzere t ifadesinden ve μ^2 parametresinden bağımsız bir $R > 0$ sayısı mevcuttur. $q_1 = \max_{t \in [-a, 0]} \int_{-a}^0 |q(y)| dy$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{\mu} \int_t^0 \sin \mu(t-y) q(y) \eta_1(y, \mu^2) dy \right| &\leq \frac{1}{|\mu|} \int_t^0 |\sin \mu(t-y)| |q(y)| |\eta_1(y, \mu^2)| dy \\
 &\leq \frac{1}{|\mu|} \int_t^0 e^{|r|(y-t)} |q(y)| R_0 e^{|r|(y-a)} dy \\
 &\leq \frac{1}{|\mu|} R_0 q_1 e^{|r|(a-t)}
 \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Böylece

$$\frac{1}{\mu} \int_t^0 \sin \mu(t-y) q(y) \eta_1(y, \mu^2) dy = O\left(\frac{1}{|\mu|} e^{|r|(a-t)}\right) \quad (4.133)$$

olduğu görülür. (4.131)-(4.133) ifadeleri $\eta_1(t, \mu^2)$ denkleminde yazılıp düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
 \eta_1(t, \mu^2) &= \frac{1}{\delta} \alpha^+ \cos \mu a \cos \mu t + \frac{1}{\mu \delta} \beta^+ \sin \mu a \cos \mu t \\
 &- \frac{1}{\gamma} \alpha^+ \sin \mu a \sin \mu t + \frac{1}{\mu \gamma} \beta^+ \cos \mu a \sin \mu t + O(e^{|r|(a-t)}) \quad (4.134)
 \end{aligned}$$

asimptotik eşitliği yazılır. Bu durumda istenilen asimptotik eşitlik ispatlanmış oldu. Aynı yöntemle üstte yaptığımız işlemler $\eta_1'(t, \mu^2)$ integral denklemi için uygulandığında

$$\begin{aligned}\eta_1'(t, \mu^2) &= -\frac{1}{\delta}\mu\alpha^+ \cos \mu a \sin \mu t - \frac{1}{\mu\delta}\beta^+ \sin \mu a \sin \mu t \\ &- \frac{1}{\gamma}\mu\alpha^+ \sin \mu a \cos \mu t + \frac{1}{\mu\gamma}\beta^+ \cos \mu a \cos \mu x + O(|\mu|e^{r|a-t|}) \quad (4.135)\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. □

4.5. Periyodik Sınır Değer Geçiş Problemi İle İlgili Karşılaştırma Teoremi

4.18 Teorem (Karşılaştırma Teoremi)

$L_1 u = u'' + r(t)u = 0$ ve $L_2 u = u'' + s(t)u = 0$ denklemleri $t \in [-a, 0) \cup (0, a]$ aralığında $u(-a) = u(a)$, $u'(-a) = u'(a)$ sınır şartları ve $\delta\gamma = 1$ olacak şekilde $u(0^+) = \delta u(0^-)$, $u'(0^+) = \gamma u'(0^-)$ geçiş şartlarıyla verilsin. $r(t) < s(t)$ olmak üzere $L_1(u_1) = 0$ ve $L_2(u_2) = 0$ olsun. O halde $u_1(t)$ ' in ardışık iki sıfırı arasında $u_2(t)$ ' nin en az bir sıfırı mevcuttur.

Kanıt $u_1'' + r(t)u_1 = 0$ ve $u_2'' + s(t)u_2 = 0$

eşitlikleri sırasıyla u_2 ve u_1 fonksiyonlarıyla çarpıldığında,

$$u_1''u_2 + r(t)u_1u_2 = 0 \quad \text{ve} \quad u_2''u_1 + s(t)u_2u_1 = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Verilen eşitlikler birbirinden çıkartıldığında,

$$(u_1'u_2 - u_2'u_1)' = [s(t) - r(t)]u_1u_2 \quad (4.136)$$

elde edilir. $u_1(t)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı t_1 ve t_2 ile gösterilsin. (4.136) eşitliğinin t_1 ' den t_2 ' ye integrali alınır,

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} [s(t) - r(t)]u_1u_2 dt &= \int_{t_1}^{t_2} (u_1'u_2 - u_2'u_1)' dt \\ &= u_1'u_2 - u_2'u_1 \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= u_1'(t_2)u_2(t_2) - u_2'(t_2)u_1(t_2) - u_1'(t_1)u_2(t_1) + u_2'(t_1)u_1(t_1)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $u_1(t_1) = u_1(t_2) = 0$ olduğu ele alınır,

$$u_1'(t_2)u_2(t_2) - u_2'(t_1)u_1(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [s(t) - r(t)]u_1u_2 dt \quad (4.137)$$

şeklinde yazılır. Varsayalım ki $u_2(t)$ fonksiyonunun (t_1, t_2) aralığında sıfırı olmasın. O halde u_1 ve u_2 fonksiyonlarının negatif veya pozitif olma durumlarını araştıralım.

A) Varsayalım ki $(t_1, t_2) \subset [-a, 0)$ olsun.

a) $u_1(t) > 0$ ve $u_2(t) > 0$ için (4.137) eşitliği incelendiğinde, $r(t) < s(t)$, $u_1(t) > 0$ ve $u_2(t) > 0$ olmak üzere verilen eşitlikte sağ taraf pozitif olur. Öbür taraftan eşitlikte sol tarafın işaretini araştırabilmemiz için $u'_1(t_1)$ ve $u'_1(t_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bu yüzden,

$$u'_1(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_1 + \Delta t) - u_1(t_1)}{\Delta t} \quad u'_1(t_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_2 + \Delta t) - u_1(t_2)}{\Delta t}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $u_1(t) > 0$ ve $u_1(t)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı t_1 ve t_2 olacağından, $u_1(t)$ fonksiyonu t_1 noktasında artan fonksiyon, t_2 noktasında ise azalan fonksiyon olacaktır. O halde Δt ifadesinde negatif ve pozitif olma durumlarını araştıralım.

i) $\Delta t > 0$ için $u_1(t_1) = 0$, $u_1(t_1 + \Delta t) > 0$ olduğundan

$$u'_1(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_1 + \Delta t) - u_1(t_1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_1 + \Delta t)}{\Delta t} \geq 0$$

Fakat $u'_1(t_1) \neq 0$ olduğundan buradan $u'_1(t_1) > 0$ bulunur. Diğer taraftan $\Delta t > 0$ olmak üzere $u_1(t_2) = 0$, $u_1(t_2 - \Delta t) > 0$ olduğundan

$$u'_1(t_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_2 - \Delta t) - u_1(t_2)}{-\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_2 - \Delta t)}{-\Delta t} \leq 0$$

elde edilir. $u'_1(t_2) \neq 0$ olduğu için buradan $u'_1(t_2) < 0$ elde edilir.

O halde (t_1, t_2) aralığında $u_1(t) > 0$, $u_2(t) > 0$ ve $u'_1(t_1) > 0$, $u'_1(t_2) < 0$ elde edilir. (4.137) eşitliği bu şartlar dikkate alınıp incelendiğinde,

$$u'_1(t_2)u_2(t_2) - u'_1(t_1)u_2(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [s(t) - r(t)]u_1u_2dt$$

eşitlikte sağ tarafın pozitif olduğu, sol tarafın ise negatif olduğu görülmektedir. Bu ise bir çelişki oluşturacaktır. Bu durumda $u_2(t)$ fonksiyonunun (t_1, t_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

b) $u_1(t) < 0$ ve $u_2(t) < 0$ için (4.137) eşitliği incelendiğinde, $r(t) < s(t)$, $u_1(t) < 0$ ve $u_2(t) < 0$ olmak üzere verilen eşitlikte sağ taraf pozitif olur. Öbür taraftan eşitlikte sol tarafın işaretini araştırabilmemiz için $u'_1(t_1)$ ve $u'_1(t_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bu yüzden,

$$u'_1(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_1 + \Delta t) - u_1(t_1)}{\Delta t}, \quad u'_1(t_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_2 + \Delta t) - u_1(t_2)}{\Delta t}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $u_1(t) < 0$ ve t_1, t_2 $u_1(t)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olacağından, $u_1(t)$ fonksiyonu t_1 noktasında azalan fonksiyon, t_2 noktasında ise artan fonksiyon olduğunu göstereceğiz.

i) $\Delta t > 0$ olmak üzere, $u_1(t_1) = 0$, $u_1(t_1 + \Delta t) < 0$ olduğu için

$$u_1'(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_1 + \Delta t) - u_1(t_1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_1 + \Delta t)}{\Delta t} \leq 0$$

Fakat $u_1'(t_1) \neq 0$ olduğu için buradan $u_1'(t_1) < 0$ bulunur. Benzer biçimde

$$u_1'(t_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_2 - \Delta t) - u_1(t_2)}{-\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_2 - \Delta t)}{-\Delta t} \geq 0$$

elde edilir. $u_1(t_2) \neq 0$ olduğu için buradan $u_1(t_2) > 0$ bulunur.

O halde (t_1, t_2) aralığında $u_1(t) < 0$, $u_2(t) < 0$ ve $u_1'(t_1) < 0$, $u_1'(t_2) > 0$ elde edilir. (4.137) eşitliği bu şartlar dikkate alınıp incelendiğinde,

$$u_1'(t_2)u_2(t_2) - u_1'(t_1)u_2(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [s(t) - r(t)]u_1u_2dt$$

eşitliğinde sağ tarafın pozitif olduğu, sol tarafın ise negatif olduğu görülmektedir. Bu ise bir çelişki oluşturacaktır. Bu durumda $u_2(t)$ fonksiyonunun (t_1, t_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

c) $u_1(t) > 0$ ve $u_2(t) < 0$ için (4.137) eşitliği incelendiğinde, $r(t) < s(t)$, $u_1(t) > 0$ ve $u_2(t) < 0$ olmak üzere verilen eşitlikte sağ taraf negatif olur. Öbür taraftan eşitlikte sol tarafın işaretini araştırabilmemiz için $u_1'(t_1)$ ve $u_1'(t_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bu yüzden,

$$u_1'(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_1 + \Delta t) - u_1(t_1)}{\Delta t} \quad u_1'(t_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_2 + \Delta t) - u_1(t_2)}{\Delta t}$$

ifadelerini ele alalım.

i) $\Delta t > 0$ olduğu durumda $u_1(t_1 + \Delta t) > 0$ olacağından

$$u_1'(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_1 + \Delta t) - u_1(t_1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_1 + \Delta t)}{\Delta t} \geq 0$$

elde edilir. $u_1'(t_1) \neq 0$ olduğu için buradan $u_1'(t_1) > 0$ bulunur.

Diğer taraftan $\Delta t > 0$ olduğundan $u_1(t_2 - \Delta t) > 0$ olacağından

$$u_1'(t_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_2 - \Delta t) - u_1(t_2)}{-\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_2 - \Delta t)}{-\Delta t} \leq 0$$

elde edilir. $u_1'(t_2) \neq 0$ olduğu için buradan $u_1'(t_2) < 0$ bulunur.

O halde (t_1, t_2) aralığında $u_1(t) > 0$, $u_2(t) < 0$ ve $u_1'(t_1) > 0$, $u_1'(t_2) < 0$ elde edilir. (4.137) eşitliği bu şartlar dikkate alınıp incelendiğinde, eşitlikte sol tarafın pozitif olduğu, sağ tarafın ise negatif olduğu görülmektedir. Bu ise bir çelişki oluşturacaktır. Bu durumda $u_2(t)$ fonksiyonunun (t_1, t_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

d) $u_1(t) < 0$ ve $u_2(t) > 0$ için (4.137) eşitliği incelendiğinde, $r(t) < s(t)$, $u_1(t) < 0$ ve $u_2(t) > 0$ olmak üzere verilen eşitlikte sağ taraf negatif olur. Öbür taraftan eşitlikte sol tarafın işaretini araştırabilmemiz için $u_1'(t_1)$ ve $u_1'(t_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bu yüzden,

$$u_1'(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_1 + \Delta t) - u_1(t_1)}{\Delta t} \quad u_1'(t_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_2 + \Delta t) - u_1(t_2)}{\Delta t}$$

ifadelerini ele alalım. Bu durumda önceki durumlara tamamen benzer yöntem ile $u_1'(t_1) < 0$ ve $u_1'(t_2) > 0$ olduğunu gösterebiliriz. (4.137) bu şartlar dikkate alınıp incelendiğinde,

$$u_1'(t_2)u_2(t_2) - u_1'(t_1)u_2(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [s(t) - r(t)]u_1u_2 dt$$

eşitlikte sol tarafın pozitif olduğu, sağ tarafın ise negatif olduğu görülmektedir. Bu ise bir çelişki oluşturacaktır. Bu durumda $u_2(t)$ fonksiyonunun (t_1, t_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

B) Varsayalım $(t_1, t_2) \subset (0, a]$ olsun. Bu durum A) durumuna tamamen benzer biçimde incelenebilir.

C) Varsayalım $-a \leq t_1 < 0 < t_2 \leq a$ olsun.

$$(u_1' u_2 - u_2' u_1)' = [s(t) - r(t)]u_1 u_2$$

ile gösterilen (4.136) ifadesini ele aldığımızda t_1 ve t_2 , $u_1(t)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olacak şekilde, ifadenin iki tarafı t_1 ' den t_2 ' ye integrallenirse,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{0^-} [s(t) - r(t)]u_1u_2 dt + \int_{0^+}^{t_2} [s(t) - r(t)]u_1u_2 dt &= (u_1' u_2 - u_2' u_1) \Big|_{t_1}^{0^-} + (u_1' u_2 - u_2' u_1) \Big|_{0^+}^{t_2} \\ &= u_1'(0^-)u_2(0^-) - u_2'(0^-)u_1(0^-) - u_1'(t_1)u_2(t_1) \\ &\quad + u_2'(t_1)u_1(t_1) + u_1'(t_2)u_2(t_2) - u_2'(t_2)u_1(t_2) \\ &\quad - u_1'(0^+)u_2(0^+) + u_2'(0^+)u_1(0^+) \end{aligned}$$

$\delta\gamma = 1$ ve $u(0^+) = \delta u(0^-)$, $u'(0^+) = \gamma u'(0^-)$ geçiş şartları ile $u_1(t_1) = u_1(t_2) = 0$ dikkate

alınırsa,

$$\begin{aligned} u_1'(t_2)u_2(t_2) - u_1'(t_1)u_2(t_1) &= \int_{t_1}^{0^-} [s(t) - r(t)]u_1u_2dt \\ &+ \int_{0^+}^{t_2} [s(t) - r(t)]u_1u_2dt \end{aligned} \quad (4.138)$$

elde edilir. Varsayalım $u_2(t)$ fonksiyonunun (t_1, t_2) aralığında sıfırı olmasın. O halde u_1 ve u_2 fonksiyonlarının negatif veya pozitif olma durumlarını araştıralım.

a) $u_1(t) > 0$ ve $u_2(t) > 0$ için (4.137) eşitliği incelendiğinde,

$r(t) < s(t)$, $u_1(t) > 0$ ve $u_2(t) > 0$ olmak üzere eşitlikte sağ tarafın pozitif olduğu görülmektedir. Öbür taraftan eşitlikte sol tarafın işaretini araştırabilmemiz için $u_1'(t_1)$ ve $u_1'(t_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bu yüzden,

$$u_1'(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_1 + \Delta t) - u_1(t_1)}{\Delta t} \quad u_1'(t_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_2 + \Delta t) - u_1(t_2)}{\Delta t}$$

ifadelerini ele alalım.

i) $\Delta t > 0$ olduğu durumda

$t_1 < t_1 + \Delta t$ olacağından, $u_1(t_1 + \Delta t) > 0$ olacaktır. Bu durumda

$$u_1'(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_1 + \Delta t) - u_1(t_1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_1 + \Delta t)}{\Delta t} \geq 0$$

elde edilir. $u_1'(t_1) \neq 0$ olduğu için buradan $u_1'(t_1) > 0$ bulunur. Benzer biçimde $u_1'(t_2) < 0$ olduğu ispat edilebilir.

Bu durumda $u_1(t) > 0$, $u_2(t) > 0$ şartları için $u_1'(t_1) > 0$ ve $u_1'(t_2) < 0$ yazılabilmektedir. (4.138) eşitliğindeki koşullar dikkate alınıp incelendiğinde,

$$u_1'(t_2)u_2(t_2) - u_1'(t_1)u_2(t_1) = \int_{t_1}^{0^-} [s(t) - r(t)]u_1u_2dt + \int_{0^+}^{t_2} [s(t) - r(t)]u_1u_2dt$$

eşitlikte sağ tarafın pozitif olduğu, sol tarafın ise negatif olduğu görülmektedir. Bu ise bir çelişki oluşturacaktır. Bu durumda $u_2(t)$ fonksiyonunun (t_1, t_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

b) $u_1(t) < 0$ ve $u_2(t) < 0$ için (4.137) eşitliği incelendiğinde, $r(t) < s(t)$, $u_1(t) < 0$ ve $u_2(t) < 0$ olmak üzere verilen eşitlikte sağ taraf pozitif olur. Diğer taraftan eşitlikte sol tarafın işaretini araştırabilmemiz için $u_1'(t_1)$ ve $u_1'(t_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bu yüzden,

$$u'_1(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_1 + \Delta t) - u_1(t_1)}{\Delta t}, \quad u'_1(t_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_2 + \Delta t) - u_1(t_2)}{\Delta t}$$

ifadelerini ele alalım. Bu durumda da önceki durumlara tamamen benzer biçimde $u'_1(t_1) > 0$ ve $u'_1(t_2) < 0$ olduğu ispat edilebilir. (4.138) eşitliğindeki koşullar dikkate alınıp incelendiğinde,

$$u'_1(t_2)u_2(t_2) - u'_1(t_1)u_2(t_1) = \int_{t_1}^{0^-} [s(t) - r(t)]u_1u_2dt + \int_{0^+}^{t_2} [s(t) - r(t)]u_1u_2dt$$

eşitlikte sağ tarafın pozitif olduğu, sol tarafın ise negatif olduğu görülmektedir. Bu ise bir çelişki oluşturacaktır. Bu durumda $u_2(t)$ fonksiyonunun (t_1, t_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

c) $u_1(t) > 0$ ve $u_2(t) < 0$ için (4.137) eşitliği incelendiğinde, $r(t) < s(t)$, $u_1(t) > 0$ ve $u_2(t) < 0$ olmak üzere verilen eşitlikte sağ taraf negatif olur. Öbür taraftan eşitlikte sol tarafın işaretini araştırabilmemiz için $u'_1(t_1)$ ve $u'_1(t_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bu yüzden,

$$u'_1(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_1 + \Delta t) - u_1(t_1)}{\Delta t}, \quad u'_1(t_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_1(t_2 + \Delta t) - u_1(t_2)}{\Delta t}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $u_1(t) > 0$ ve $u_1(t)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı t_1 ve t_2 olacağından, $u_1(t_1) = u_1(t_2) = 0$ olur. (t_1, t_2) aralığında $u_1(t) > 0$ olduğu için önceki durumlara tamamen benzer biçimde $u'_1(t_1) > 0$ ve $u'_1(t_2) < 0$ olduğu ispat edilebilir.

Bu durumda $u_1(t) > 0$ ve $u_2(t) < 0$ şartları için $u'_1(t_1) > 0$ ve $u'_1(t_2) < 0$ yazılabilmektedir. (4.138) eşitliğindeki koşullar dikkate alınıp incelendiğinde,

$$u'_1(t_2)u_2(t_2) - u'_1(t_1)u_2(t_1) = \int_{t_1}^{0^-} [s(t) - r(t)]u_1u_2dt + \int_{0^+}^{t_2} [s(t) - r(t)]u_1u_2dt$$

eşitliğin sol tarafının pozitif, sağ tarafının negatif olduğu görülmektedir. Bu ise bir çelişki oluşturacaktır. Bu durumda $u_2(t)$ fonksiyonunun (t_1, t_2) aralığında en az bir sıfırı vardır. (t_1, t_2) aralığında $u_1(t) < 0$ ve $u_2(t) > 0$ durumu önceki durumlara tamamen benzer biçimde ispat edilebilir. Bu durumda $u_1(t) < 0$ ve $u_2(t) > 0$ şartları için $u'_1(t_1) < 0$ ve $u'_1(t_2) > 0$ olduğu yazılabilmektedir. (4.138) eşitliğindeki koşullar dikkate alınıp incelendiğinde,

$$u'_1(t_2)u_2(t_2) - u'_1(t_1)u_2(t_1) = \int_{t_1}^{0^-} [s(t) - r(t)]u_1u_2dt + \int_{0^+}^{t_2} [s(t) - r(t)]u_1u_2dt$$

eşitlikte sol tarafın pozitif olduğu, sağ tarafın negatif olduğu görülmektedir. Bu ise bir çelişki oluşturacaktır. Bu durumda $u_2(t)$ fonksiyonunun (t_1, t_2) aralığında en az bir sıfırı vardır. $\square$

4.6. Karakteristik Fonksiyon

Bu bölümde

$$Lu := -u''(t) + q(t)u(t) = \mu^2 u(t), \quad t \in [-a, 0) \cup (0, a] \quad (4.139)$$

$$L_1 u := u(-a) - u(a) = 0 \quad (4.140)$$

$$L_2 u := u'(-a) - u'(a) = 0 \quad (4.141)$$

$$L_3 u := u(0^+) - \delta u(0^-) = 0 \quad (4.142)$$

$$L_4 u := u'(0^+) - \gamma u'(0^-) = 0 \quad (4.143)$$

sınır-değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonları arasındaki ilişki araştırılacaktır. Diğer bölümlerde,

$$-u''(t) + q(t)u(t) = \mu^2 u(t), \quad t \in [-a, 0]$$

$$u(-a) = \alpha^-$$

$$u'(-a) = \beta^-$$

şartlarından oluşan başlangıç değer probleminin sadece $\varkappa_1(t, \mu^2)$ çözümünün olduğunu

$$-u''(t) + q(t)u(t) = \mu^2 u(t), \quad t \in [0, a]$$

denkleminin μ^2 parametresine bağlı

$$u(a) = \alpha^+$$

$$u'(a) = \beta^+$$

başlangıç şartını sağlayan sadece $\eta_2(t, \mu^2)$ çözümünün olduğunu ispatlamıştık. Ayrıca $\varkappa_1(t, \mu^2)$ ve $\eta_2(t, \mu^2)$ fonksiyonları ile alakalı olan

$$-u''(t) + q(t)u(t) = \mu^2 u(t), \quad t \in (0, a]$$

$$u(0^+, \mu^2) = \delta \varkappa_1(0^-, \mu^2)$$

$$u'(0^+, \mu^2) = \gamma \varkappa_1'(0^-, \mu^2)$$

başlangıç-değer probleminin sadece $\varkappa_2(t, \mu^2)$ çözümünün olduğunu ve aynı şekilde

$$-u''(t) + q(t)u(t) = \mu^2 u(t), \quad t \in [-a, 0]$$

$$u(0^-, \mu^2) = \frac{1}{\delta} \eta_2(0^+, \mu^2)$$

$$u'(0^-, \mu^2) = \frac{1}{\gamma} \eta_2'(0^+, \mu^2)$$

başlangıç-değer probleminin sadece $\eta_1(t, \mu^2)$ çözümünün olduğunu ve bu çözümlerin μ^2 değişkenine göre tam fonksiyon olduğunu ispat etmiştik. Bu durumda $\varkappa_1(t, \mu^2)$ ve $\eta_1(t, \mu^2)$ fonksiyonlarının $\forall t \in [-a, 0]$ için, $\varkappa_2(t, \mu^2)$ ve $\eta_2(t, \mu^2)$ fonksiyonlarının da $\forall t \in [0, a]$ için μ^2 parametresine göre tam fonksiyonu olduğunu göstermiştik. Verilen fonksiyonlar $[-a, a]$ aralığında sıfırla devamlarına uygun olmak üzere $\tilde{\varkappa}_i(t, \mu^2)$ ve $\tilde{\eta}_i(t, \mu^2)$ ile gösterelim. Öyle ki;

$$\tilde{\varkappa}_1 = \begin{cases} \varkappa_1, & t \in [-a, 0) \\ 0, & t \in (0, a] \end{cases}$$

$$\tilde{\varkappa}_2 = \begin{cases} 0, & t \in [-a, 0) \\ \varkappa_2, & t \in (0, a] \end{cases}$$

$$\tilde{\eta}_1 = \begin{cases} \eta_1, & t \in [-a, 0) \\ 0, & t \in (0, a] \end{cases}$$

$$\tilde{\eta}_2 = \begin{cases} 0, & t \in [-a, 0) \\ \eta_2, & t \in (0, a] \end{cases}$$

şeklinde yazılır. $\varkappa_i(t, \mu^2)$ ve $\eta_i(t, \mu^2)$ ($i = 1, 2$) olacak şekilde verilen çözüm fonksiyonlarının wronskiyeni

$$\omega_i(\mu^2) = W(\varkappa_i(t, \mu^2), \eta_i(t, \mu^2)) = \varkappa_i(t, \mu^2) \eta_i'(t, \mu^2) - \varkappa_i'(t, \mu^2) \eta_i(t, \mu^2)$$

şeklinde tanımlanır. $\varkappa_1(t, \mu^2)$ ve $\eta_1(t, \mu^2)$ fonksiyonlarının wronskiyeni $\omega_1(\mu^2)$ ile $\varkappa_2(t, \mu^2)$ ve $\eta_2(t, \mu^2)$ fonksiyonlarının wronskiyeni $\omega_2(\mu^2)$ ile gösterilsin. $W(\varkappa_1(t, \mu^2), \eta_1(t, \mu^2))$ ve $W(\varkappa_2(t, \mu^2), \eta_2(t, \mu^2))$ wronskiyenleri $[-a, 0]$ ve $[0, a]$ aralıklarının her birinde t-değişkeninden bağımsız olduklarından ve $\tilde{\varkappa}_i(t, \mu^2)$ ve $\tilde{\eta}_i(t, \mu^2)$ ($i = 1, 2$) μ^2 parametresinin tam fonksiyonu oldukları için

$$\omega_1(\mu^2) = W(\varkappa_1(t, \mu^2), \eta_1(t, \mu^2)) \quad (4.144)$$

$$\omega_2(\mu^2) = W(\varkappa_2(t, \mu^2), \eta_2(t, \mu^2)) \quad (4.145)$$

fonksiyonları μ^2 parametresinin tam fonksiyonları olur.

4.19 Yardımcı Teorem $\forall \mu^2 \in \mathbb{C}$ için

$$\omega_1(\mu^2) = \frac{1}{\delta\gamma} \omega_2(\mu^2) \quad (4.146)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt (4.144)-(4.145) eşitlikleri gereği

$$\begin{aligned} \omega_2(\mu^2) &= W(\varkappa_2(t, \mu^2), \eta_2(t, \mu^2)) \\ &= \varkappa_2(0^+, \mu^2) \eta_2'(0^+, \mu^2) - \varkappa_2'(0^+, \mu^2) \eta_2(0^+, \mu^2) \end{aligned} \quad (4.147)$$

elde edilir. Diğer yandan $\varkappa_i(t, \mu^2)$ ve $\eta_i(t, \mu^2)$ ($i = 1, 2$) temel çözümlerinin tanımı gereği

$$\begin{aligned} \varkappa_2(0^+, \mu^2) &= \delta \varkappa_1(0^-, \mu^2) \\ \varkappa_2'(0^+, \mu^2) &= \gamma \varkappa_1'(0^-, \mu^2) \\ \eta_2(0^+, \mu^2) &= \delta \eta_1(0^-, \mu^2) \\ \eta_2'(0^+, \mu^2) &= \gamma \eta_1'(0^-, \mu^2) \end{aligned}$$

yazılır. Verilen eşitlikler (4.147)'de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \omega_2(\mu^2) &= \delta \varkappa_1(0^-, \mu^2) \gamma \eta_1'(0^-, \mu^2) - \gamma \varkappa_1'(0^-, \mu^2) \delta \eta_1(0^-, \mu^2) \\ &= \delta \gamma (\varkappa_1(0^-, \mu^2) \eta_1'(0^-, \mu^2) - \varkappa_1'(0^-, \mu^2) \eta_1(0^-, \mu^2)) \\ &= \delta \gamma \omega_1(\mu^2) \end{aligned}$$

bulunur. □

4.1 *Sonuç* $\omega_1(\mu^2)$ ve $\omega_2(\mu^2)$ fonksiyonlarının sıfır yerlerinde çakışıklık vardır. $[-a, 0) \cup (0, a]$ 'de tanımlı $\varkappa(t, \mu^2)$ ile $\eta(t, \mu^2)$ fonksiyonlarını

$$\varkappa(t, \mu^2) = \begin{cases} \varkappa_1(t, \mu^2), & t \in [-a, 0) \\ \varkappa_2(t, \mu^2), & t \in (0, a] \end{cases}$$

$$\eta(t, \mu^2) = \begin{cases} \eta_1(t, \mu^2), & t \in [-a, 0) \\ \eta_2(t, \mu^2), & t \in (0, a] \end{cases}$$

eşitlikleri ile tanımlayalım. $\delta\gamma = 1$ olduğu için aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.2 *Sonuç* $\varkappa(t, \mu^2)$ ve $\eta(t, \mu^2)$ fonksiyonlarının wronskiyeni $[-a, 0) \cup (0, a]$ kümesinde t değişkeninden bağımsız olacaktır. Bu wronskiyenler $\forall t \in [-a, 0) \cup (0, a]$ değerinde, μ^2 pa-

rametresinin tam fonksiyonu olur. Varsayalım ki

$$\omega(\mu^2) = W(\varkappa(t, \mu^2), \eta(t, \mu^2))$$

yazılsın. Bu durumda

$$\omega(\mu^2) = W(\varkappa(t, \mu^2), \eta(t, \mu^2)) = \begin{cases} \omega_1(\mu^2), & t \in [-a, 0) \\ \omega_2(\mu^2), & t \in (0, a] \end{cases}$$

formülü yazılır. O halde

$$\omega(\mu^2) := \omega_1(\mu^2) = \frac{1}{\delta\gamma} \omega_2(\mu^2) = \omega_2(\mu^2) \quad (4.148)$$

eşitliği elde edilir. Diğer bölümler de (4.148) eşitliğinden yararlanılacaktır.

4.20 Teorem (4.139)-(4.143) sınır-değer probleminde özdeğerler $\omega(\mu^2)$ fonksiyonun sıfır yerlerinden oluşmaktadır.

Kanıt Varsayalım ki $\omega(\mu_0^2) = 0$ olsun. O halde μ_0^2 sayısının özdeğer olduğunu gösterelim. (4.148) eşitliğinden,

$$W(\mu_0^2) = \eta_{\mu_0^2}(t) \varkappa'_{\mu_0^2}(t) - \eta'_{\mu_0^2}(t) \varkappa_{\mu_0^2}(t) = 0$$

elde edilir. Böylece $\varkappa_{\mu_0^2}(t)$ ve $\eta_{\mu_0^2}(t)$ fonksiyonları diferansiyel denklemler teorisinde bilinen $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ fonksiyonları n . mertebeden diferansiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri ise bu fonksiyonların Wronskian determinantı bütün noktalarda sıfırdan farklıdır." teoremi gereği lineer bağımlıdırlar. Yani

$$\eta_{\mu_0^2}(t) = K \varkappa_{\mu_0^2}(t) \quad (4.149)$$

olmak üzere $K \neq 0$ sayısı vardır.

Buradan $\eta_{\mu_0^2}(t)$ fonksiyonunun (4.139) denklemini ve (4.140) sınır koşulunu, $\varkappa_{\mu_0^2}(t)$ fonksiyonunun ise (4.139) denklemini ve (4.141) sağladığı görülür. (4.149) eşitliğinden verilen fonksiyonların her biri sınır şartlarını sağlar. Bu durumda (4.139)-(4.141) sınır değer probleminin çözümü bu fonksiyonlar olur. Böylece μ_0^2 sayısının özdeğer olduğu gösterilmiş oldu. Varsayalım ki μ_0^2 verilen problemin özdeğeri olsun. O halde $W(\mu_0^2) = 0$ eşitliğini ispatlayalım. μ_0^2 özdeğeri için $W(\mu_0^2) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\eta_{\mu_0^2}(t)$ ve $\varkappa_{\mu_0^2}(t)$ fonksiyonları lineer bağımsız olur. Genel çözüm;

$$u(t, \mu^2) = K_1 \tilde{\varkappa}_1(t, \mu^2) + K_2 \tilde{\eta}_1(t, \mu^2) + K_3 \tilde{\varkappa}_2(t, \mu^2) + K_4 \tilde{\eta}_2(t, \mu^2)$$

yazılacaktır. Bu yüzden μ_0^2 özdeğerine karşılık gelen her $u_0(t)$ fonksiyonu

$$u(t, \mu_0^2) = K_1 \tilde{\varkappa}_1(t, \mu_0^2) + K_2 \tilde{\eta}_1(t, \mu_0^2) + K_3 \tilde{\varkappa}_2(t, \mu_0^2) + K_4 \tilde{\eta}_2(t, \mu_0^2)$$

biçiminde yazılır. Bu durumda $d_1 := \tilde{\varkappa}_1(t, \mu_0^2)$, $d_2 := \tilde{\eta}_1(t, \mu_0^2)$, $d_3 := \tilde{\varkappa}_2(t, \mu_0^2)$, $d_4 := \tilde{\eta}_2(t, \mu_0^2)$ ile gösterilirse genel çözüm K_1, K_2, K_3, K_4 sabit sayılar olacak şekilde

$$u = K_1 d_1 + K_2 d_2 + K_3 d_3 + K_4 d_4 \quad (4.150)$$

$$= \sum_{r=1}^4 K_r d_r \quad (4.151)$$

şeklinde yazılır. Problemin özdeğerleri

$$L_i u = 0, \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (4.152)$$

denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümlerini verir. Bu denklem sistemi

$$L_i u = L_i \left(\sum_{r=1}^4 K_r d_r \right) = 0, \quad i, r = 1, \dots, 4 \quad (4.153)$$

şeklinde yazılır. Bu sistem açık bir şekilde yazıldığında,

$$K_1 L_1 d_1 + K_2 L_1 d_2 + K_3 L_1 d_3 + K_4 L_1 d_4 = 0$$

$$K_1 L_2 d_1 + K_2 L_2 d_2 + K_3 L_2 d_3 + K_4 L_2 d_4 = 0$$

$$K_1 L_3 d_1 + K_2 L_3 d_2 + K_3 L_3 d_3 + K_4 L_3 d_4 = 0$$

$$K_1 L_4 d_1 + K_2 L_4 d_2 + K_3 L_4 d_3 + K_4 L_4 d_4 = 0$$

elde edilir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantı

$$K(\mu^2) := \begin{vmatrix} L_1 d_1 & L_1 d_2 & L_1 d_3 & L_1 d_4 \\ L_2 d_1 & L_2 d_2 & L_2 d_3 & L_2 d_4 \\ L_3 d_1 & L_3 d_2 & L_3 d_3 & L_3 d_4 \\ L_4 d_1 & L_4 d_2 & L_4 d_3 & L_4 d_4 \end{vmatrix} = 0$$

dır. Verilen elemanların değerleri tek tek hesaplandığında,

$$\begin{aligned}
 L_1 d_1 = L_1(\tilde{\varkappa}_1(t)) &= \tilde{\varkappa}_1(-a) - \tilde{\varkappa}_1(a) = \varkappa_1(-a) - \varkappa_1(a) = \alpha^- \\
 L_1 d_2 = L_1(\tilde{\eta}_1(t)) &= \tilde{\eta}_1(-a) - \tilde{\eta}_1(a) = \eta_1(-a) - \eta_1(a) = \eta_1(-a) \\
 L_1 d_3 = L_1(\tilde{\varkappa}_2(t)) &= \tilde{\varkappa}_2(-a) - \tilde{\varkappa}_2(a) = \varkappa_2(-a) - \varkappa_2(a) = -\varkappa_2(a) \\
 L_1 d_4 = L_1(\tilde{\eta}_2(t)) &= \tilde{\eta}_2(-a) - \tilde{\eta}_2(a) = \eta_2(-a) - \eta_2(a) = -\alpha^+
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_2 d_1 = L_2(\tilde{\varkappa}_1(t)) &= \tilde{\varkappa}'_1(-a) - \tilde{\varkappa}'_1(a) \\
 &= \varkappa'_1(-a) - \varkappa'_1(a) \\
 &= \beta^- - 0 \\
 &= \beta^- \\
 L_2 d_2 = L_2(\tilde{\eta}_1(t)) &= \tilde{\eta}'_1(-a) - \tilde{\eta}'_1(a) \\
 &= \eta'_1(-a) - \eta'_1(a) = \eta'_1(-a) \\
 L_2 d_3 = L_2(\tilde{\varkappa}_2(t)) &= \tilde{\varkappa}'_2(-a) - \tilde{\varkappa}'_2(a) \\
 &= \varkappa'_2(-a) - \varkappa'_2(a) = -\varkappa'_2(a) \\
 L_2 d_4 = L_2(\tilde{\eta}_2(t)) &= \tilde{\eta}'_2(-a) - \tilde{\eta}'_2(a) \\
 &= \eta'_2(-a) - \eta'_2(a) \\
 &= 0 - \beta^+ \\
 &= -\beta^+
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_3 d_1 = L_3(\tilde{\varkappa}_1(t)) &= \varkappa_1(0^+) - \delta \varkappa_1(0^-) \\
 &= -\delta \varkappa_1(0^-) \\
 L_3 d_2 = L_3(\tilde{\eta}_1(t)) &= \tilde{\eta}_1(0^+) - \delta \tilde{\eta}_1(0^-) \\
 &= \eta_1(0^+) - \delta \eta_1(0^-) \\
 &= -\delta \eta_1(0^-) \\
 L_3 d_3 = L_3(\tilde{\varkappa}_2(t)) &= \varkappa_2(0^+) - \delta \varkappa_2(0^-) \\
 &= \varkappa_2(0^+) \\
 L_3 d_4 = L_3(\tilde{\eta}_2(t)) &= \eta_2(0^+) - \delta \eta_2(0^-) \\
 &= \eta_2(0^+)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_4 d_1 = L_4(\tilde{x}_1(t)) &= \varkappa'_1(0^+) - \gamma \varkappa'_1(0^-) \\
&= -\gamma \varkappa'_1(0^-) \\
L_4 d_2 = L_4(\tilde{\eta}_1(t)) &= \eta'_1(0^+) - \gamma \eta'_1(0^-) \\
&= -\gamma \eta'_1(0^-) \\
L_4 d_3 = L_4(\tilde{x}_2(t)) &= \varkappa'_2(0^+) - \gamma \varkappa'_2(0^-) \\
&= \varkappa'_2(0^+) \\
L_4 d_4 = L_4(\tilde{\eta}_2(t)) &= \eta'_2(0^+) - \gamma \eta'_2(0^-) \\
&= \eta'_2(0^+)
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan eşitlikler verilen determinanтта yerine yazıldığında

$$K(\mu^2) := \begin{vmatrix} \alpha^- & \eta_1(-a) & -\varkappa_2(a) & -\alpha^+ \\ \beta^- & \eta'_1(-a) & -\varkappa'_2(a) & -\beta^+ \\ -\delta \varkappa_1(0^-) & -\delta \eta_1(0^-) & \varkappa_2(0^+) & \eta_2(0^+) \\ -\gamma \varkappa'_1(0^-) & -\gamma \eta'_1(0^-) & \varkappa'_2(0^+) & \eta'_2(0^+) \end{vmatrix}$$

elde edilir. Sınır şartları yerine yazılıp determinant hesaplandığında,

$$\begin{aligned}
K(\mu^2) &= W_{\mu^2}(\varkappa_2, \eta_2; 0^+) [\alpha^- (\eta'_1(-a) - \beta^+) + \beta^+ (\alpha^+ - \eta_1(-a)) \\
&\quad + \varkappa_2(a) (\beta^+ - \eta'_1(-a)) + \varkappa'_2(a) (\eta_1(-a) - \alpha^+)]
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. □

4.1 Tanım $K(\mu^2)$ ile tanımlanan

$$\begin{aligned}
K(\mu^2) &= W_{\mu^2}(\varkappa_2, \eta_2; 0^+) [\alpha^- (\eta'_1(-a) - \beta^+) + \beta^+ (\alpha^+ - \eta_1(-a)) \\
&\quad + \varkappa_2(a) (\beta^+ - \eta'_1(-a)) + \varkappa'_2(a) (\eta_1(-a) - \alpha^+)] \tag{4.154}
\end{aligned}$$

fonksiyonuna (4.2) - (4.6) sınır-değer-geçiş probleminin karakteristik fonksiyonu adı verilir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında,

$$-u''(t) + q(t)u(t) = \mu^2 u(t) \quad , \quad t \in [-a, 0) \cup (0, a]$$

diferansiyel denklemi,

$$\begin{aligned} u(-a) &= u(a) \\ u'(-a) &= u'(a) \end{aligned}$$

periyodik sınır koşulları ve $t = 0$ süreksizlik noktasında tanımlanan,

$$\begin{aligned} u(0^+) &= \delta u(0^-) \\ u'(0^+) &= \gamma u'(0^-) \end{aligned}$$

geçiş şartları ile oluşturulan problem araştırılmıştır.

$$H := L_2[-a, 0) \oplus L_2(0, a]$$

$u_1, u_2 \in H$ olmak üzere iç çarpımı

$$\langle u_1, u_2 \rangle_H := \int_{-a}^{0^-} u_1(t) \overline{u_2(t)} dt + \int_{0^+}^a u_1(t) \overline{u_2(t)} dt$$

biçiminde tanımlanmıştır. Yani bu çalışmada yeni tip bir periyodik Sturm-Liouville probleminin spektral özellikleri ele alındı. Çalışma içinde önem verilen özelliklerden biri de tanımlanan aralıkta bir süreksizlik noktasının olması ve bu nokta da geçiş şartı verilip araştırılmasıdır. Çalışmadaki yöntemlerle yeni sınır-değer-geçiş koşulları tanımlanarak farklı sınır-değer problemlerinin araştırılması yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Akdogan, D. M., Z., & Mukhtrov, O. S. (2005). Sturm-liouville problem with eigenparameter-dependent boundary and transmission conditions. *Acta Appliancandae Mathematicae*, 86(329-344).
- Allahverdiev, B. E., B. P., & Ugurlu, E. (2013). Eigenparameter dependent sturm-liouville problems in boudary conditions with transmission conditions,. *J. Math. Anal. Appl.*, 401(388-396).
- Amiraliyev, G. (1988). Towards the numerical solition of the periodical on time problem for pseudo-parabolic equation. *Numerical Methods of Analysis BAKU State University*(3-8).
- Amiraliyev, G., & Duru, H. (2003). A uniformly convergent difference method for the periodical boundary value problem. *Comput. Math. Appl.*, 46(695-703).
- Aydemir, K., & Mukhtarov, O. S. (2016). Variational principles for spectral analysis of one sturm-liouville problem with transmission conditions. *Advances in Difference Equations*, 76.
- Aydemir, K., & Mukhtarov, O. S. (2017). On the zeros of eigen functions of discontinuous sturm-liouville problems. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 23(417-423).
- Birkhoff, G. D. (1908). Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations. *Trans. Am. Math. Soc.*, 9(373-395).
- Cai, X. (2010). An effective computational method for periodical model with small parametre. *2nd IEEE International Conference on Advanced Computer Control Conference*, 3(414-417).
- Cen, Z. (2011). Uniformly convergent second- order difference scheme for a singularly periodical boundary value problem. *International Journal of Computer Mathematics*, 88(1)(196-206).
- Chanane, B. (2007). Eigenvalues of sturm-liouville problems with discontinuity conditions inside a finite interval. *Applied Mathematics and computation*, 188(1725-1732).
- Fulton, C. T. (1977). Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions. *Roy. Soc. Edinburg*, 77(989-1002).
- Hermann, L. (1985). Periodic solitions to a one-dimentional strongly none linear wave equation with strong dissipation. *Czechosl. Math. J. V*, 110(278-293).
- Hinton, D. B., & Shaw, J. K. (1990). Differential operators with spectral parameter in completely in the boundary conditions. *Funkcial. Ekvac.*.
- Kandemir, M., & Mukhtarov, O. S. (2016). Nonlocal sturm-liouville problems with integral terms in the boundary conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, 11(1-

12).

- Langer, R. E. (1932). A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with a fluid. *Japan. Tohoku Math. J.*, 35(360-375).
- Lin, J. B., P. (1987). A singular perturbation problem for periodic boundary differential equations. *Appl. Math. And Mech.*, 8(10)(929-937).
- Mukhtarov, M., O. Sh. ve Kandemir. (2002). Asymptotic behaviour of eigenvalues for the discontinuous boundary-value problem with functional-transmission conditions. *Acta Mathematica Scientia*, 22(335-345).
- Mukhtarov, O. (1994). Discontinuous boundary value problem with spectral parameter in boundary condition. *Tr. J. of Mathematics*, 18(183-192).
- Mukhtarov, O. H. v. A. K., O. Sh. (2015). Resolvent operator and spectrum of new type boundary value problems. *Filomat*, 29(7)(1671-1680).
- Mukhtarov, S., O. Sh. ve Yakubov. (2002). Problems for ordinary differential equations with transmission conditions. *Applicable Analysis*, 81(1033-1064).
- Olgar, M. O. S., H. (2017). Weak eigenfunctions of two-interval sturm-liouville problems together with interaction conditions. *Journal of Mathematical Physics*, 58(042201).
- Titchmarsh, E. C. (1962). *Eigenfunction expansions associated with second order differential equations i*. London: Oxford Univ.
- Wang, S. J. H. X., A., & Yao, S. (2009). Completeness of eigenfunctions of sturm - liouville problems with transmission conditions. *Methods and Application of Analysis*, 16(3)(299-312).
- Woldegerima, W. A. (2011). *The sturm-liouville boundary value problems and their applications: First edition*. Lap Lambert Academic Publishing.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Minel DEMİRBİLEK

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
-----------------	--------------	----------------

Lisans	Ordu Üniversitesi/ Matematik	2015
--------	------------------------------	------

İş Deneyimi/Yıl	Çalıştığı Yer	Görevi
-----------------	---------------	--------

2020	Amasya Açı Anadolu Lisesi	Öğretmen
------	---------------------------	----------

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

Yayınlar buraya maddeler halinde APA6 formatında yazılabilir.