



**T.C.
GAZİANTEP İSLAM BİLİM VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM
DALI**

**İKİ BİLEŞENLİ FERMİYON SİSTEMLERİN ÖRGÜ
HESAPLAMALARI**

Yüksek Lisans Tezi

Engin ÖLMEZ

Danışman
Doç. Dr. Serdar ELHATISARI

GAZİANTEP

2024

T.C.
GAZİANTEP İSLAM BİLİM VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM
DALI

İKİ BİLEŞENLİ FERMİYON SİSTEMLERİN ÖRGÜ
HESAPLAMALARI

Yüksek Lisans Tezi

Engin ÖLMEZ

Danışman
Doç. Dr. Serdar ELHATISARI

GAZİANTEP

2024

TEZ KABUL ve ONAYI

Engin ÖLMEZ tarafından, Doç. Dr. Serdar ELHATISARI danışmanlığında hazırlanan “İki Bileşenli Fermiyon Sistemlerin Örgü Hesaplamaları” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 23/02/2024 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Unvanı, Adı/Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	İmza	Sonuç
Başkan		☐ Kabul
Doç. Dr. Serdar ELHATISARI		☐ Ret
Gaziantep İslam Bilim ve Teknoloji Üniversitesi		
Elektrik-Elektronik Mühendisliği		
Üye		☐ Kabul
Doç. Dr. Mehmet Emin KORMAZ		☐ Ret
Karamanoğlu Mehmet Bey Üniversitesi		
Fizik		
Üye		☐ Kabul
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ARICI		☐ Ret
Gaziantep İslam Bilim ve Teknoloji Üniversitesi		
Elektrik-Elektronik Mühendisliği		

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY

... / ... / ...

Dr. Öğr. Üyesi Adnan AKALIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım yüksek lisans/doktora/sanatta yeterlik tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Engin ÖLMEZ

İmza

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı: **İki Bileşenli Fermiyon Sistemlerin Örgü Hesaplamaları**

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 23.02.2024 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : %17

Tek kaynak oranı : %8 çıkmıştır.

Doç. Dr. Serdar ELHATISARI

İmza

ÖZET

İKİ BİLEŞENLİ FERMİYON SİSTEMLERİN ÖRGÜ HESAPLAMALARI

Engin ÖLMEZ

Gaziantep İslam Bilim ve

Teknoloji Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Serdar ELHATISARI

Bu tez çalışmasında, eşit olmayan kütlelere sahip ve kısa menzilli çekici potansiyelle etkileşen iki bileşenli fermiyon sistemlerini araştırdık. Bu çalışmada, özellikle, söz konusu iki-fermiyonun saçılma uzunluğunun çok büyük değerler aldığı ve çok küçük bağlanma enerjili dimerler oluşturduğu durumları göz önünde bulundurduk. Bu bağlamda üç fermiyondan ve dört fermiyondan oluşan sistemlerin evrenselliği, iki fermiyon saçılma uzunluğu ve iki bileşenli fermiyonların kütlelerinin oranı $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ ile tanımlanmaktadır

Örgün nükleer efektif alan alan teorisini kullanarak, bir-boyutta ve üç-boyutta fermiyon-dimer sisteminin ve bir-boyutta dimer-dimer sistemlerinin kapsamlı bir analizi yapılmıştır. Bu çalışmadaki temel konu, evrensel fermiyon-dimer ve dimer-dimer saçılma uzunluklarının farklı $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ kütle oranları için hesaplanmasıdır. Çalışmada elde edilen sonuçlarımız, $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ kütle oranı değiştikçe bu evrensel saçılma uzunluklarında logaritmik bir artış olduğunu ortaya koyuyor.

Anahtar Kelimeler: Nükleer örgün efektif alan teorisi, saçılma teorisi, evrensellik, iki-bileşenli fermiyonlar.

ABSTRACT

LATTICE CALCULATIONS FOR TWO-COMPONENT FERMION SYSTEMS

Engin ÖLMEZ

Gaziantep Islam Science
and Technology University

Institute of Graduate Studies

Department of Electrical and Electronic Engineering

Master of Science Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Serdar ELHATISARI

In this study, we investigate systems of two-component fermions characterized by unequal masses and subjected to a short-range attractive potential. Specifically, we explore scenarios where these fermions form shallow dimers with a considerable scattering length. The universality of three-fermion and four-fermion systems in this context is determined by the two-fermion scattering length and the ratio of the mass of spin- $\uparrow$ fermions to spin- $\downarrow$ fermions, denoted as $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$.

Utilizing Nuclear Lattice Effective Field Theory (NLEFT), we conduct a comprehensive analysis of fermion-dimer system in one-dimension and three-dimension, and dimer-dimer systems in one-dimension. Our focus lies in the calculation of universal fermion-dimer and dimer-dimer scattering lengths across a range of mass ratio values, $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$. Intriguingly, our findings reveal a logarithmic increase in these universal scattering lengths as the mass ratio $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ varies.

Keywords: Nuclear Lattice Effective Field Theory, scattering theory, universality, two-component fermions.



Bu çalışma Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından desteklenmiştir. Proje no: 120F341.

Dedicated to my family.



TEŞEKKÜR

Çalışma konusunu belirlemede ve çalışma süresince bilgilerini benimle paylaşan, tecrübelerini aktaran ve de tez yazımında her zaman desteğini sunan danışmanım Doç. Dr. Serdar ELHATISARI'ya en içten duygularla teşekkür ederim. Ayrıca, tez yazım sürecinde değerli yorumları ve düzeltmelerde desteğini sunan Doç. Dr. Mehmet Emin KORKMAZ'a teşekkür ederim. Eğitim hayatım boyunca her basamakta desteklerini aldığım tüm aileme teşekkür ederim.

Engin ÖLMEZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
SİMGE LİSTESİ	x
KISALTMA LİSTESİ	xi
ŞEKİL LİSTESİ	xii
TABLO	
LİSTESİ	xi
v	
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Araştırması	1
1.1.1 Nükleer Kuvvetler	1
1.1.2 Kiral Efektif Alan Teorisi	2
1.1.3 Pion-suz () Efektif Alan Teorisi	6
1.1.4 Düşük Enerjili Sistemler ve Evrensellik	8
2 MATERİYAL ve YÖNTEM	10
2.1 Saçılma Teorisi	10
2.1.1 Bir Boyutta Saçılma Teorisi	10
2.1.2 Üç Boyutta Saçılma Teorisi	13
2.1.3 Lüscher'in Sonlu Hacim Yöntemi	15
2.2 Örgü Formalizmi	17
2.3 Hesaplamala Araçları	19
3 BULGULAR ve TARTIŞMA	20
3.1 Bir Boyutta İki Bileşenli Fermiyonlar	20
3.1.1 Bir Boyutta Fermiyon-Fermiyon Saçılımı	20

3.1.2	Bir Boyutta Fermion-Dimer Saçılımı	22
3.1.3	Bir Boyutta Dimer-Dimer Saçılımı.....	28
3.2	Üç Boyutta İki Bileşenli Fermiyonlar	34
3.2.1	Üç Boyutta Fermiyon-Fermiyon Saçılımı	34
3.2.2	Üç Boyutta Fermion-Dimer Saçılımı.....	36
4	SONUÇLAR ve TARTIŞMA	41
	KAYNAKÇA	43
A	EK BÖLÜM	47
A.1	Born–Oppenheimer Yaklaşımı	47
A.1.1	Fermiyon-dimer	47
A.1.2	Dimer-dimer.....	48
B	EK BÖLÜM	51
B.1	Bir Boyutta Fermiyon-Fermiyon Hesaplamaları İçin MATLAB Kodları.....	51

SİMGE LİSTESİ

MeV	Mega-electron volt
GeV	Giga-electron volt
fm	Femtometre
μ	Bağıl kütle
H	Hamiltoniyen
V	Potansiyel
ψ	Dalga fonksiyonu
δ	Saçılma faz kayması
B	Bağlanma enerjisi
κ	Bağlanma momentumu
C_0	Bağlanma sabiti
L	Örgü boyu
a	Örgü aralığı
a_{ff}	Fermiyon-fermiyon saçılma uzunluğu
a_{df}	Dimer-fermiyon saçılma uzunluğu
a_{dd}	Dimer-Dimer saçılma uzunluğu

KISALTMA LİSTESİ

KRD	Kuantum Renk Dinamiği
QCD	Quantum Chromodynamics
ÖKRD	Örgü Kuantum Renk Dinamiği
LQCD	Lattice Quantum Chromodynamics
EAT	Efektif Alan Teorisi
EFT	Effective Field Theory

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1.	Bağlanma sabitinin $a_s(\mu)$ enerjinin fonksiyonu olarak değişimi.....	1
Şekil 1.2.	Nükleon-nükleon etkileşmelerin gösteren üç Feynman diyagramı	4
Şekil 1.3.	Weinberg'in kuvvet-sayım yöntemine göre 2-nükleon, 3-nükleon ve 4-nükleon kuvvellerinin nükleer potansiyele katkıları	5
Şekil 1.4.	Nükleer kuvvetlerde ölçeklerine ayırma ve değişen enerji seviyesine göre uygulanabilecek efektif alan teorilerinin şematik gösterimi	7
Şekil 2.1.	Schrödinger denklemi Denk. (2.1)'nin bir basamak potansiyeli için çözümü	13
Şekil 3.1.	Örgü hesaplamalarından elde edilen fermiyon-fermion saçılma uzunluğunun analitik çözümlere oranı.....	21
Şekil 3.2.	Efektif menzil açılımı $a_{ff} p \tan \delta(p)$ 'nin $(a_{ff} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütlesine oranı 0.09'dur	24
Şekil 3.3.	Efektif menzil açılımı $a_{ff} p \tan \delta(p)$ 'nin $(a_{ff} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütlesine oranı 0.20'dur	25
Şekil 3.4.	Efektif menzil açılımı $a_{ff} p \tan \delta(p)$ 'nin $(a_{ff} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütlesine oranı 1.00'dur	25
Şekil 3.5.	Fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğunun a/a_{ff} 'nin fonksiyonu olarak gösterimi. Burada verilen sonuçlar, a_{fd}/a_{ff} 'nin $a/a_{ff} \rightarrow 0$ limitindeki sonuçlarını göstermektedir. Sonuçlar farklı, $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ kütle oranları için sunulmuştur.....	26
Şekil 3.6.	Fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğunun kütle oranı $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ 'nin fonksiyonu olarak gösterimi. Kırmızı kare noktalar örgü sonuçlarını ve siyah yuvarlak noktalar ise Born-Oppenheimer ile elde edilen sonuçları göstermektedir .	27

Şekil 3.7.	Efektif menzil açılımı $a_{ff} p \tan \delta(p)$ 'nin $(a_{ff} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütesine oranı 1.0'dur	30
Şekil 3.8.	Efektif menzil açılımı $a_{ff} p \tan \delta(p)$ 'nin $(a_{ff} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütesine oranı 5.0'dur	31
Şekil 3.9.	Efektif menzil açılımı $a_{ff} p \tan \delta(p)$ 'nin $(a_{ff} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütesine oranı 11.0'dur	31
Şekil 3.10.	Dimer-dimer evrensel saçılma uzunluğunun a/a_{ff} 'nin fonksiyonu olarak gösterimi. Burada verilen sonuçlar, a_{dd}/a_{ff} 'nin $a/a_{ff} \rightarrow 0$ limitindeki sonuçlarını göstermektedir. Sonuçlar farklı, $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ kütle oranları için sunulmuştur.....	32
Şekil 3.11.	Dimer-dimer evrensel saçılma uzunluğunun kütle oranı $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ 'nin fonksiyonu olarak gösterimi. Kırmızı kare noktalar örgü sonuçlarını ve siyah yuvarlak noktalar ise Born-Oppenheimer ile elde edilen sonuçları göstermektedir .	33
Şekil 3.12.	Dimer-dimer evrensel saçılma uzunluğunun kütle oranı $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ 'nin fonksiyonu olarak gösterimi. Kırmızı kare noktalar örgü sonuçlarını ve siyah yuvarlak noktalar ise Born-Oppenheimer ile elde edilen sonuçları göstermektedir .	35
Şekil 3.13.	Efektif menzil açılımı $a_{ff} p \tan \delta(p)$ 'nin $(a_{ff} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütesine oranı 0.6'dur	38
Şekil 3.14.	Efektif menzil açılımı $a_{ff} p \tan \delta(p)$ 'nin $(a_{ff} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütesine oranı 1.0'dur	38
Şekil 3.15.	Efektif menzil açılımı $a_{ff} p \tan \delta(p)$ 'nin $(a_{ff} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütesine oranı 7.0'dur	39
Şekil 3.16.	Fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğunun a/a_{ff} 'nin fonksiyonu olarak gösterimi. Burada verilen sonuçlar, a_{fd}/a_{ff} 'nin $a/a_{ff} \rightarrow 0$ limitindeki sonuçlarını göstermektedir. Sonuçlar farklı, $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ kütle oranları için sunulmuştur.....	39
Şekil 3.17.	Fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğunun kütle oranı $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ 'nin fonksiyonu olarak gösterimi. Kırmızı kare noktalar örgü sonuçlarını, siyah düz çizgi D.S.Petrov(2003) tarafından elde edilen sonuçları ve kesikli-noktadaki siyah	40

çizgi Born-Oppenheimer yaklaşımı ile elde edilen sonuçları göstermektedir.

TABLO LİSTESİ

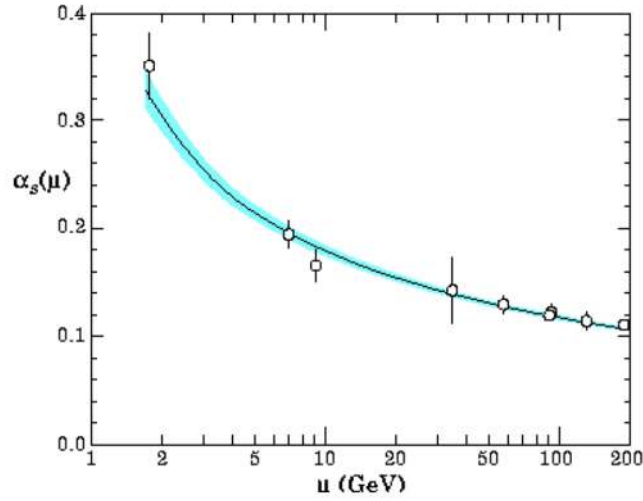
Tablo 1.1.	Şekil 1.2.'de gösterilen Feynman diagramlarına ait ve Denklem (1.3)'teki parametrelerin kuvvet-sayma yöntemine göre belirlenen değerleri	4
Tablo 1.2.	Efektif alan teorisi ile çeşitli mertebelerde proton-nötron saçılımından elde edilen sonuçlar ve deneysel verilerle karşılaştırılması E. Epelbaum, Krebs, U. G. Meißner (2015). Burada B_d döteriyonun bağlı durum enerjisidir, A_s S-durum asimtotik normalizasyon katsayısıdır, h asimtotik D-durum normalizasyon katsayısının S- durum asimtotik normalizasyon katsayısına oranıdır, r_d yarıçapı temsil eder, Q kuadrupol momenttir, ve P_D D-durum olasılığını göstermektedir	6

1 GİRİŞ

1.1 Literatür Araştırması

1.1.1 Nükleer Kuvvetler

Kuantum Renk Dinamiği (KRD) nükleer fizikte kuvvetli etkileşmeleri başarılı bir şekilde tanımlayan ve Standart Model kapsamında da yer edinmiş temel teoridir. Yüksek enerji düzeylerinde birçok nükleer fizik problemi KRD ile çözümlenmiştir. Fakat teori düşük enerji seviyelerince ciddi zorluklarla karşı karşıya kalmaktadır ki bu zorlukların temelinde Şekil 1.1'de gösterildiği gibi güçlü etkileşmeler bağlanma katsayısının $\alpha_s(\mu)$ enerjinin bir fonksiyonu olarak değişmesidir.



Şekil 1.1. Bağlanma sabitinin $\alpha_s(\mu)$ enerjinin fonksiyonu olarak değişimi.

Bu durum literatürde asimptotik serbestlik (asymptotik freedom) olarak bilinmektedir. Bağlanma katsayısının bu özelliği düşük enerji düzeylerinde $\alpha_s(\mu)$ katsayısı üzerinden herhangi bir pertürbatif yaklaşımın başarısız olmasına yol açmakta ve teorinin bu enerji düzeylerinde renormalize edilememesine neden olmaktadır.

KRD'nin düşük enerji düzeylerinde karşılaştığı bu zorlukların üstesinden ancak bilgisayar teknolojilerindeki büyük gelişmeler sayesinde uygulanması mümkün hale gelen nümerik yaklaşımlarla gelinmektedir. Bu doğrultuda düşük enerji düzeylerinde güçlü etkileşmelerin temel teorisi Örgü Kuantum Renk Dinamiğidir (ÖKRD). Örgü kuantum renk dinamiğinde sistemler diskritize edilmiş uzay - zamanda tanımlanırlar ve bu sayede teorinin renormalizasyonu ve regülerizasyonu direkt olarak gerçekleşmiş olur. ÖKRD'nin serbestlik dereceleri ve temel parçacıkları Standart

Model’inde temel parçacıkları olan kuarklardan ve kuvvet taşıyıcı gluonlardan oluşmaktadır. Günümüzde ÖKRD ile tekil (yalıtılmış) haldeki bir çok hadronun karakteristik özellikleri belirlenmekte ve hem mezon-mezon saçılımı hem de baryon-baryon saçılımı gibi düşük enerjili hadronik etkileşimler hesaplanmaktadır (Durr et al. 2008; S. R. Beane et al. 2011; Kurth et al. 2014; Sinya Aoki 2013; Inoue et al. 2015; Borsanyi et al. 2015; Silas R. Beane et al. 2015; Orginos et al. 2015; S. Aoki et al. 2016).

İlk olarak 1974’te (Wilson 1974) tarafından temeli atılan ÖKRD yaklaşık son 50 yılda önemli bir biçimde gelişmesine ve başarılarına rağmen iki-nükleonlu sistemlerin ötesinde ciddi nümerik zorluklarla karşılaşmaktadır. Başlıca zorluklar arasında simülasyonların pion’un kütlesinin fiziksel kütlesine çok yakın değerlerle gerçekleştirme gerekliliği ve örgü boyutlarının sisteme eklenen parçacıkların boyutlarından bir kaç kat kadar büyük olması gerekliliği gibi temel problemler sıralanabilir. Bir diğer sorun ise en önemli nümerik problem olan ve çok sayıda kuarklardan oluşan sistemlerin simülasyonlarında üstesinden gelinmesi gereken üstel olarak çok küçük sinyal-gürültü oranıdır. Dolayısıyla düşük enerjili nükleer fizikte daha fazla mesafe kaydedebilmek için hadronik serbestlik derecelerini temel alan yaklaşımlar kullanmak gerekir. Serbestlik dereceleri hadronlardan oluşan ve düşük enerji düzeylerinde nötron ile proton etkileşmelerini başarılı bir biçimde tanımlayan birçok yöntem vardır. Örneğin, yarı-analitik Faddeev-Yakubovsky integral denklemi ile çeşitli yaygın potansiyel modelleri kullanılarak dört yada daha az nükleonlardan oluşan sistemler için hesaplamalar mümkündür (Stoks, Klomp, Terheggen, et al. 1994; Machleidt, Sammarruca, Song 1996; Robert B. Wiringa, Stoks, Schiavilla 1995). Fakat günümüze kadar en gerçekçi ve başarılı nükleer kuvvetler efektif alan teorisiyle türetilmiştir (Weinberg 1979; Weinberg 1990; Weinberg 1991; Ordonez, Ray, Kolck 1994; Kolck 1994; E. Epelbaum, Nogga, et al. 2002; E. Epelbaum 2006).

1.1.2 Kiral Efektif Alan Teorisi

Efektif Alan Teorisi(EAT) 1979 yılında Weinberg tarafından önerilen özgün bir çalışma ile başlayarak günümüzde güçlü nükleer etkileşmeleri betimleyen en başarılı ve gelecek için de umut vaat eden teoridir. Teori hem göreliliği hemde göreliliği olmayan nükleer etkileşmeler için başarılı bir biçimde çözümler sağlamakta, fakat burada sunduğumuz özet sadece göreliliği olmayan etkileşmelerle sınırlı olacaktır.

Yine Kay. (Weinberg 1990; Weinberg 1991)'daki çalışmalarında önerdiği kiral efektif alan teorisi nükleer sistemlerin tüm doğal simetrilerine riayet eden en genel lagranjdan yola çıkarak iki temel üzerine inşa edilmektedir. Teori serbestlik derecesi olarak hadronları ve mezonları temel parçacıklar olarak kabul eder ve nükleer potansiyelleri pionun kütlesi veya hadronların bağıl momentumu gibi sistemin parametreleri cinsinden seri açılımı şeklinde tanımlar,

$$V = V_{LO} + V_{NLO} + V_{N2LO} + V_{N3LO} + \dots \quad (1.1)$$

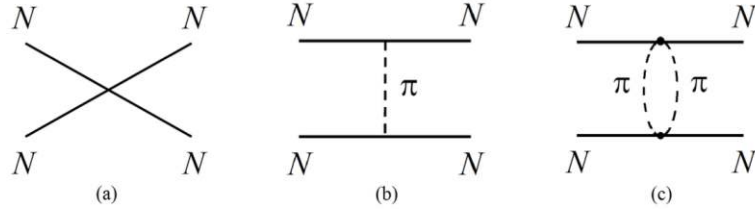
Denk. (1.1) protonlar ile nötronlar arasındaki nükleer potansiyel Q/Λ 'nın kuvvet açılımı biçiminde yazılmaktadır. Burada Q , pion kütlesi m_π ya da nükleonların bağıl momentumu $\vec{p}$ olarak ifade edilirken, Λ ise teoninin üst sınırını temsil eden maksimum enerji değeridir. Ayrıca Denk. (1.1)'deki V_{LO} terim baş-terim (leading-order), V_{NLO} terim ise baştan-bir sonraki-terim (next-to-leading-order) vb. biçimde adlandırılır. Denk. (1.1) 'deki her bir terimin içerdiği etkileşimler Weinberg'in özgün çalışmalarında (Weinberg 1990; Weinberg 1991) önerdiği "kuvvet-sayma" (power counting) yöntemi ile belirlenir. Bu yöntem, nükleonlar arasındaki etkileşmeleri betimleyen Feynman diyagramlarını sistemin lagranjından Q/Λ kuvvetlerine bağıl boyut analizlerine göre belirler. Feynman diyagramlarını belirleyen Q/Λ kuvvetleri Denk. (1.3)'de verilen topoloji ile tanımlanır ve bu topolojik ilişki nükleonlar arasındaki etkileşmeleri $(Q/\Lambda)^\nu$ biçiminde nükleer kuvvetteki katkılarına göre hiyerarşik olarak sıralar,

$$\nu = -4 + 2N + 2L + \sum_i V_i \left(d_i + \frac{1}{2} n_i - 2 \right) . \quad (1.2)$$

Burada L döngü (loop) sayısını, N etkileşmeye giren nükleon sayısını, V_i parametresi etkileşme sürecindeki tepe noktalarını temsil eder. i tepesine giren nükleon alan operatörü sayısı n_i ve i tepesindeki türev terim yada pion kütlesi sayısı ise d_i ile gösterilmektedir. Şekil 1.2' de nükleon-nükleon kuvvetine katkıda bulunan üç önemli Feynman diyagramı gösterilmiştir ve bu diagramların nükleer kuvvetlere katkılarını belirleyen parametreler Tablo 1'de verilmiştir. (a) diyagramı iki nükleonun nokta-temas etkileşmesini temsil eder ve denklem (1.3)'e göre $\nu = 0$ olarak elde

edilir. (b) diyagramı iki nükleonun $1 - \pi$ değiş tokuşunu temsil eder ve denklem (1.3)'e göre $\nu = 0$ olur. (c) diyagramı iki nükleonun $2 - \pi$ değiş tokuşunu temsil eder ve denklem (1.3)'e göre $\nu = 2$ olarak elde edilir.

Weinberg'in kuvvet-sayım yöntemine göre nükleer potansiyele katkıda



Şekil 1.2. Nükleon-nükleon etkileşmelerin gösteren üç Feynman diyagramı

Tablo 1.1. Şekil 1.2.' de gösterilen Feynman diagramlarına ait ve Denklem (1.3)'teki parametrelerin kuvvet-sayma yöntemine göre belirlenen değerleri.

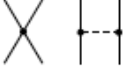
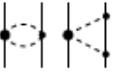
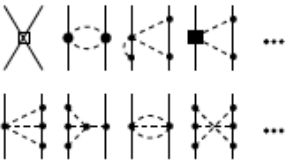
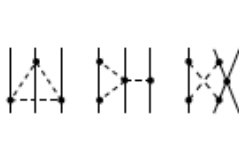
Diagram	N	L	d_i	n_i	ν
(a)	2	0	0	4	0
(b)	2	0	$d_1 = 1, d_2 = 1$	$n_1 = 2, n_2 = 2$	0
(c)	2	0	$d_1 = 2, d_2 = 2$	$n_1 = 2, n_2 = 2$	2

bulunan 2 nükleon, 3-nükleon ve 4-nükleon kuvveleri N^3LO terimine kadar hiyerarşik olarak Şekil 3'de gösterilmektedir (Ordóñez, Ray, Kolck 1994; Friar, Coon 1994; Kaiser, Brockmann, Weise 1997; Kaiser 2001; E. Epelbaum, Gloeckle, Meissner 1998; Evgeny Epelbaum, Meissner, Gloeckle 2003; E. Epelbaum 2006).

Daha önce vurgulandığı gibi Denklem (1.1)'deki terimler ile nükleonlar ve pionlardan oluşturulabilecek en genel lagranjdan elde edilir ve böylece olası tüm etkileşmeler hesaba katılmış olur. Tabiki oluşturulan bu lagranj çözümlenmeyi bekleyen düşük enerji katsayılarını içermektedir. Bu katsayıların sistemsal yapısı bu tezin kapsamı dışında olmasına rağmen, bütünlük sağlaması açısından sadece baş-terimin açık formu ile kısaca tartışacağız, yani nükleer potansiyelde sadece $(Q/\Lambda)^0$ mertebesindeki V_{LO} terimi göz önüne alacağız. Kuvvet-sayım yöntemine göre $(Q/\Lambda)^0$ mertebesinde nükleer potansiyel Şekil 1.2'deki kısa menzilli (noktasal-temas) potansiyeli (a) ve uzun-menzilli 1-pion değiş-tokuş potansiyeli (b) diyagramlarından oluşur ve açık biçimi aşağıdaki gibidir.

$$V = V_{LO} = C_S + C_T \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 - \frac{g_A^2}{4\pi f_\pi^2} \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q})}{\vec{q}^2 + m_\pi^2} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 . \quad (1.3)$$

Burada $f_\pi = 92.4$ MeV pion bozunma sabiti, g_A nükleon aksiyel bağlanma sabiti, σ_i Pauli spin matrisleri, τ_i Pauli izospin matrisleri, ve $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$ nükleon momentum transferini temsil eder. Ayrıca $\vec{p}$ reaksiyon öncesi nükleon momentumu (ilk momentum), ve $\vec{p}'$ reaksiyon sonrası nükleon momentumudur (son momentum). Görüldüğü üzere potansiyel V_{LO} , iki bilinmeyen düşük enerji katsayısı C_S ve C_t içermektedir. C_S ve C_t teorik sonuçlarla nükleonların saçılım deneylerinden elde edilen verilerle karşılaştırılması ile çözümlenir ve böylece nükleer potansiyelin $(Q/\Lambda)^0$ mertebesindeki kesin formu elde edilmiş olur. Nükleer potansiyel bir üst

	2N kuvvetleri	3N kuvvetleri	4N kuvvetleri
LO		—	—
NLO		—	—
N ² LO			—
N ³ LO			

Şekil 1.3. Weinberg'in kuvvet-sayım yöntemine göre 2-nükleon, 3-nükleon ve 4-nükleon kuvvelerinin nükleer potansiyele katkıları.

mertebeye genişletilerek V_{NLO} terimi ile yeniden düzenlenir ise, potansiyeldeki bilinmeyen düşük enerji katsayılarının sayısı artar. Fakat aynı metot tekrar edilerek tüm katsayılar eş zamanlı olarak çözümlenir ve nükleer potansiyelin $(Q/\Lambda)^2$ mertebesindeki kesin formu elde edilir. Yöntem daha yüksek mertebeler için benzer biçimde tekrarlanır. Bu yöntem ile kiral efektif alan teorisi bir efektif nükleer potansiyeli sistematik bir biçimde yapılandırır ve sonrasında ise bu efektif potansiyel

Lippmann-Schwinger denklemi veya Schrödinger denklemi ile çözümlenir. Bu işlemler sonucunda elde edilen nükleer potansiyel çok nükleonlardan oluşan sistemlerin çözümlerinde kullanılır.

Kiral efektif alan teorisi kullanılarak günümüze kadar en yüksek mertebede (N4LO) gerçekleştirilmiş proton-nötron saçılımından elde edilen sonuçlar Tablo 2’de verilmiştir (E. Epelbaum, Krebs, U. G. Meißner 2015). Tabloda görüldüğü gibi bu çalışmada döteryumun fiziksel özellikleri yüksek hassasiyetle hesaplamıştır. Ayrıca teorinin tutarlılığını göstermesi noktasında tabloda gözlenen en önemli sonuçlardan bir diğeri nükleer potansiyelde yüksek terimlere gidildikçe hesaplamaların fiziksel sonuçlara yakınsadığı gerçeğidir.

1.1.3 Pion-suz Efektif Alan Teorisi

Nükleonlar arasındaki etkileşimleri incelerken iki nükleonun sahip olduğu bağıl momentumun en hafif mezon olan pion'nun kütlesinden daha küçük olduğunu varsayarsak, nükleer kuvvetler sadece nükleonlar arasındaki direk etkileşme ile tanımlanabilirler (Kolck 1999; P. F. Bedaque, Kolck 2002; E. Epelbaum 2006). Bu yaklaşıma pion-suz efektif alan teorisi denir ve nükleonların sahip oldukları enerjinin

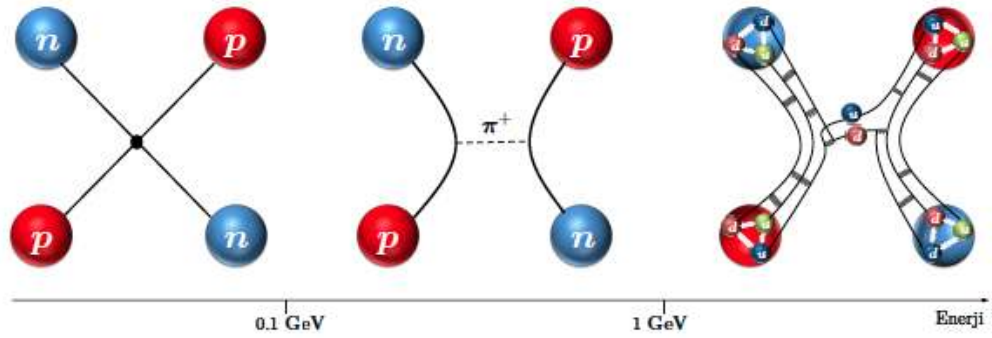
Tablo 1.2. Efektif alan teorisi ile çeşitli mertebelerde proton-nötron saçılımından elde edilen sonuçlar ve deneysel verilerle karşılaştırılması E. Epelbaum, Krebs, U. G. Meißner 2015. Burada B_d döteryonun bağı durum enerjisidir, A_s S-durum asimtotik normalizasyon katsayısıdır, η asimtotik D-durum normalizasyon katsayısının S-durum asimtotik normalizasyon katsayısına oranıdır, r_d yarıçapı temsil eder, Q kuadrupol momenttir, ve P_d D-durum olasılığını göstermektedir.

	LO	NLO	N2LO	N3LO	N4LO	Deney
B_d	2.0235	2.1987	2.2311	2.2246	2.2246	2.224575(9)
A_s	0.8333	0.8772	0.8865	0.8845	0.8844	0.8846(9)
η	0.0212	0.0256	0.0256	0.0255	0.0255	0.0256(4)
r_d	1.990	1.968	1.966	1.972	1.972	1.97535(85)
Q	0.230	0.273	0.270	0.271	0.271	0.2859
P_d	2.54	4.73	4.50	4.19	4.29	

kuvvet taşıyıcı parçacık olan pion üretimine yeterli olmadığı gerçeğine

dayanır. Dolayısıyla, pion-suz efektif alan teorisinde serbestlik derecesi sistemdeki nükleonlar ile belirlenir.

Pion-suz efektif alan teorisinde nükleer kuvvet tanımlanırken pion-değiştokuş potansiyelleri ihmal edilir ve Denk. (1.3) ile tanımlanan kuvvet-sayma topoloji denklemi ile Şekil 3'de tanımlanan kuvvetlerin mertebelerinde yeniden düzenlemeler



Şekil 1.4. Nükleer kuvvetlerde ölçeklerine ayırma ve değişen enerji seviyesine göre uygulanabilecek efektif alan teorilerinin şematik gösterimi.

yapılması gerekir. Pion-suz efektif alan teorisi ile ilgili detaylı bir incelemeye Kay. (Kolck 1999; P. F. Bedaque, Kolck 2002; E. Epelbaum 2006) çalışmalarından ulaşılabilir.

Nükleer kuvvetlerin tanımlanması için formüle edilen bu efektif alan teorileri, bir çok fizik alanındaki problemlerin çözülmesinde başvurulacak temel bir yaklaşım olan *ölçeklerine ayırma* yöntemine dayanmaktadır. Bu yöntem, bir fizik probleminin çözümünde etkisiz olan fiziksel nicelikleri ekarta eder ve gözönünde bulundurulması gereken serbestlik derecesinin belirler. Bu yöntemin uygulanmasıyla, ilgilenilen sistemin gereksiz detaylarından arındırılmış ve gerçek dinamiğini betimleyen bir teori elde edilir. Şekil 4'de nükleer kuvvetlerin ölçeklerine ayırımı ve değişen enerji seviyesine göre uygulanabilecek efektif alan teorisinin bir şematik gösterimi verilmiştir. Görüldüğü gibi, sistemin enerjisi $Q \geq 1 \text{ GeV}$ ve üzerinde olması durumunda, serbestlik derecesi kuarklar ve glüonlardan oluşur ve Standard Model'e göre güçlü nükleer kuvvetlerin temel teorisi olan kuantum renk dinamiği sistemi betimler. Sistemin enerjisinin $1 \text{ GeV} \geq Q \geq m_\pi$ olması durumunda, sistemin ölçek uzunluğu (de Broglie dalga boyu) yaklaşık olarak nükleonların boyutları ile aynı büyüklükte ($\sim 1 \text{ fm}$) olur ve bu durumda nükleonların yapı taşları olan kuark ve glüonlar ile ilgili detaylar yararsız hale gelir. Böylece, bu enerji seviyelerinde kiral efektif alan teorisi

sistemin dinamiğini başarılı bir şekilde tanımlar. Sistemin enerjisinin $m_\pi \geq Q$ olması durumunda ise, pion parçacığına ait detaylar ilgili problemin çözümü için gereksiz hale gelmektedir ve dolayısıyla pion-suz efektif alan teorisi başarılı bir yaklaşım olarak kullanılabilir (H.-W. Hammer, König, Kolck 2020).

1.1.4 Düşük Enerjili Sistemler ve Evrensellik

Bir sistemde, parçacıklar arasındaki etkileşmenin menzilin çok kısa olması ve saçılma parametrelerinin (saçılma uzunluğunun) büyük olması durumunda, sistemin evrensel düşük-enerji özelliklerine sahip olduğu gözlemlenmektedir. Diğer bir deyişle bu tür sistemler, sistemlerin uzunluk ölçeklerinden, sistemdeki parçacıkların yapı detaylarından ve parçacıklar arasında potansiyelin çok kısa mesafelerdeki davranışlarından bağımsız parametreler ile tanımlanırlar. Konu ile ilgili kapsamlı bir inceleme için Kay. (E. Braaten, H.-W. Hammer 2006)'ye bakınız.

Düşük-enerji evrenselliği farklı ölçeklerdeki fizik alanları arasında bağlantı kurabilmemizi sağlaması açısından oldukça önemli ve özel bir özelliktir. Konu ile ilgili nükleer fizikten verilebilecek en temel örnek nükleon-nükleon saçılımlarıdır. Nötron-nötron saçılımda düşük-enerji uzunluk ölçeği, yani iki nötron arasındaki etkileşmenin menzili, pion parçacığının kütlesi ile belirlenir ve $m_\pi^{-1} \approx 1.4$ fm'dir. Diğer taraftan, nötron-nötron saçılımının S-durum saçılma uzunluğu $a_0 = -18.5$ fm'dir (Stoks, Klomp, Rentmeester, et al. 1993). Diğer bir nükleer fizik örneği ise nötron-proton saçılımıdır. Benzer şekilde, nötron-proton saçılımında düşük-enerji uzunluk ölçeği $m_\pi^{-1} \approx 1.4$ fm ve nötron-proton S-durum spin-tekli ve spin-üçlü saçılma uzunlukları, sırasıyla, $a_{0,s} = -23.76$ fm ve $a_{0,t} = 5.42$ fm (Stoks, Klomp, Rentmeester, et al. 1993). Aynı zamanda, bir nötron ile bir protonun bağlı durumu olan döteriyumun bağlanma enerjisi $B_d = 2.2246$ MeV'nin bu bağlı durumun doğal düşük-enerji ölçütü olan $m_\pi^2/m_N = 21$ MeV'den çok daha düşük olduğu gerçeğinden, döteriyumun zayıf bağlı ve büyük saçılma uzunluğuna sahip evrensellik özelliği gösteren bir atom olduğu sonucuna ulaşırız. Düşük-enerji evrenselliğinin parçacık fiziğinden örneği, X(3872) olarak adlandırılan dört-kuark bağlı durumudur (Choi et al. 2003). Bu bağlı durumun kütesinin, $(D^0, \bar{D}^{*0})$ veya $(\bar{D}^0, D^{*0})$ tılsımlı-mezon moleküllerinin eşik enerjisine çok yakın olmasından dolayı, X(3872)'in tılsımlı-mezon moleküllerinin zayıf bağlı bir durumu olduğu önerilmektedir

(Tornqvist 1991; Guo et al. 2018). Bu molekülün bağlanma enerjisi 0.00(18) MeV (Patrignani et al. 2016), söz konusu molekülün bağlanma enerjisinin doğal ölçütü olan $m_\pi^2/(2\mu) = 10$ MeV değerinden çok daha küçük olmasından dolayı evrensellik özelliği gösterdiği sonucuna varılır (Eric Braaten, Kusunoki 2004).

Düşük-enerji evrenselliği, atom fiziğinde, diğer alanlarda olduğundan çok daha özel ve ilginç mekanizmalar ortaya çıkarmaktadır. Düşük-enerji seviyelerinde, alkali atomlar arasındaki van der Waals potansiyelinin kısa-menzilli bir potansiyel olduğu yaklaşımı mümkün olmaktadır. Bunun sonucunda, saçılma uzunlukları doğal uzunluk ölçütlerinden çok daha büyük olan ^3H , ^6Li , ^{40}K , ^{85}Rb ve ^{133}Cs gibi atomlarda düşük-enerji evrenselliği gözlemlenmektedir (Eric Braaten, Kusunoki 2004). Aşırı soğuk kuantum gaz halindeki atomlar arasındaki potansiyel, Feshbach rezonans (Feshbach 1962) olarak adlandırılan bir mekanizma ile kontrol edilebilmektedir. Diğer bir ifadeyle, sisteme bir manyetik alan uygulanması durumunda atomlar arasındaki saçılma uzunluğu bu manyetik alanın bir fonksiyonu olarak tanımlı olur ve bu sayede ilgilenilen sistemin doğal düşük-enerji ölçütünden çok daha büyük değere sahip saçılma uzunluğu elde edilerek düşük-enerji evrenselliğine ulaşılabilir. Konu ile ilgili örnekler ve kapsamlı bir inceleme için Kay. (E. Braaten, H.-W. Hammer 2006) 'ye bakınız.

Yukarıda sözü edilen ve düşük-enerji evrenselliğinin gözlemlendiği sistemlerde tüm fiziksel nicelikler tek bir parametrenin kuvvetlerini içeren boyutsuz ifadeler olarak gösterilebilirler. Örneğin, iki-bileşenli fermiyonlardan oluşan sistemlerde fiziksel nicelikler yalnızca iki fermiyonun saçılma uzunluğu cinsinden ifade edilirler. İki-bileşenli fermiyonlardan oluşan dimer-fermion sisteminin saçılma uzunluğu bir çok farklı yöntemler kullanılarak hesaplanmıştır (Paulo F. Bedaque, Kolck 1998; Paulo F. Bedaque, H. W. Hammer, Kolck 1998; Gabbiani, Paulo F. Bedaque, Griesshammer 2000; Paulo F. Bedaque, Rupak, et al. 2003; Elhatisari, Katterjohn, et al. 2017). Yine benzer şekilde, iki-bileşenli fermiyonlardan oluşan dimer-dimer sisteminin saçılma uzunluğu da farklı yöntemler kullanılarak hesaplanmıştır (D. S. Petrov, Salomon, Shlyapnikov 2004; D. S. Petrov, Salomon, Shlyapnikov 2005; D’Incao et al. 2009; Elhatisari, Katterjohn, et al. 2017). Elde edilen bu sonuçlardan, sistemlerin uzunluk ölçeklerinden, sistemdeki parçacıkların iç yapılarının detaylarından ve parçacıklar arasında potansiyelin çok kısa mesafelerdeki biçiminde tümüyle bağımsız olduğu bulunmuştur. Düşük-enerji evrenselliğinin

gözlemlendiği sisteme dahil olan parçacıkların farklı kütlelere sahip olduğu durumlarda incelenmiştir (D. S. Petrov 2003; Levinsen, Dmitry S Petrov 2011; Iskin 2010; Elhatisari 2018). Elde edilen sonuçlar, kütlelerin farklı olması durumunda sistemin bazı özelliklerinin değiştiği, fakat kütlelerin oranının, iki fermiyonun saçılma uzunluğu ile birlikte, yeni bir evrensel parametre olarak sistemlerde tüm fiziksel niceliklerini tanımladığı bulunmuştur.

2 MATERİYAL ve YÖNTEM

2.1 Saçılma Teorisi

Bu bölümde kuantum mekaniksel saçılma problemini bir-boyutta ve üç-boyutta olmak üzere inceleyeceğiz. Burada yapacağımız genel varsayımlar, parçacıklar arasındaki potansiyelin merkezci-simetrik olduğu ve sonlu bir menzile sahip olduğudur. Ayrıca burada, ifadeleri sadeleştirme adına $\hbar = 1$ olduğu birim sistemini kullanacağız.

Bu bölümde incelenen konuların içeriği oluşturulurken ve kullandığımız notasyon belirlenirken kullandığımız kaynaklar şunlardır; Elhatisari 2014; Griffiths 2017.

2.1.1 Bir Boyutta Saçılma Teorisi

Kütleleri m_1 ve m_2 olan ve $V(x)$ gibi merkezci-simetrik bir potansiyelle etkileşen iki parçacığın Schrödinger denklemi bağıl koordinatlarda şu şekilde yazılır,

$$H\psi(x) = E\psi(x) \rightarrow \left[-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = \frac{p^2}{2\mu} \psi(x) \quad (2.1)$$

burada $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ iki parçacık sisteminin indirgenmiş kütleleridir ve $V(x)$ merkezci-simetrik potansiyel $V(x) = V(-x)$ ve $V(|x| > R) = 0$ koşullarını sağlar. Buradaki simetrik potansiyel varsayımını matematiksel olarak sağlama adına parite operatörü P 'yi tanımlayalım,

$$P : V(x) \rightarrow V(-x) . \quad (2.2)$$

Potansiyel simetrik olduğundan dolayı, parite operatörü aynı zamanda Hamiltoniye'nin kömütatörüdür, $[P, H] = 0$, ve Hamiltoniye'nin özvektörleri aynı zamanda parite operatörünün özvektörleridir. Dolayısıyla, parite operatörünün hermitiyen operatör olduğu gerçeğini kullanarak özdeğerleri aşağıdaki gibi buluruz,

$$\left. \begin{aligned} P\psi(x) &= \lambda\psi(x) \\ P^2\psi(x) &= \lambda^2\psi(x) \end{aligned} \right\} \lambda = \pm 1 . \quad (2.3)$$

Burada, parite operatörünün özdeğerleri, Hamiltoniye'nin özvektörünün "tek" ve "çift" olmak üzere iki durumunun olduğunu ifade eder. Şimdi Denk. (2.1) için merkezci potansiyelden çok uzak noktalardaki en genel çözümünü yazalım,

$$\psi_\ell(x) = A[e^{-ipx} + e^{2i[\delta(p) - \ell\pi/2]} e^{ipx}] . \quad (2.4)$$

Burada A normalizasyon katsayısı, köşeli parantez içindeki birinci terim, e^{-ipx} potansiyele çarptıktan sonra yansıyan dalgayı, e^{ipx} potansiyele çarptıktan sonra ilerleyen dalgayı, $e^{2i\delta(k)}$ gelen dalga'nın potansiyele çarpmasından kaynaklanan faz gecikmesini temsil eder ve $e^{-i\ell\pi}$ parite operatörünü temsil eder. Denk. (2.4) aşağıdaki gibi yeniden yazarak,

$$\psi_\ell(x) = Ae^{i[\delta(p) - \ell\pi/2]}[e^{-ipx - i\delta(p) + i\ell\pi/2} + e^{ipx + i\delta(p) - i\ell\pi/2}] . \quad (2.5)$$

ve parantez dışındaki tüm ifadeleri normalizasyon katsayısının içine gömersek,

$$\psi_\ell(x) = A_\ell \cos[px + \delta(p) - \ell\pi/2] , \quad (2.6)$$

genel çözümünü elde ederiz. Bu tez kapsamında genellikle düşük-enerji limitleriyle ilgilendiğimizden dolayı, bu limitlerde yararlı nicelikler tanımlayabiliriz.

$$\psi_\ell(x) \underset{px \ll 1}{\sim} \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{x} - p \tan \delta(p) + \mathcal{O}(p^2) & \quad \ell = 0 \\ \frac{1}{x} + p \cot \delta(p) + \mathcal{O}(p^2) & \quad \ell = 1 \end{aligned} \right. . \quad (2.7)$$

Denk. (2.7)'de özvektörün, düşük-enerji liimitinde ($p \ll 1$) aldığı formları göstermektedir. Bu noktada, Denk. (2.7)'de dalga fonksiyonunu $\psi_\ell(x = a_\ell) = 0$ yapan a_ℓ niceliğini saçılma yarıçapı olarak tanımlarsak,

$$\begin{aligned} p \tan \delta(p) &= \frac{1}{a_\ell} + \mathcal{O}(p^2) & \ell = 0 \\ p \cot \delta(p) &= -\frac{1}{a_\ell} + \mathcal{O}(p^2) & \ell = 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

denklemlerini elde ederiz. Etkileşen iki parçacığın bağlı durumda kalması halinde $p = i\kappa$ ile Denk. (2.4)'i yeniden düzenleyerek

$$\begin{aligned} \psi_\ell(x) &\sim \cot[\delta(i\kappa) - \ell\pi/2] \cos(i\kappa x) - \sin(i\kappa x) \\ &\sim \cot[\delta(i\kappa) - \ell\pi/2] \left(\frac{e^{\kappa x} + e^{-\kappa x}}{2} \right) - \frac{ie^{\kappa x} - ie^{-\kappa x}}{2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

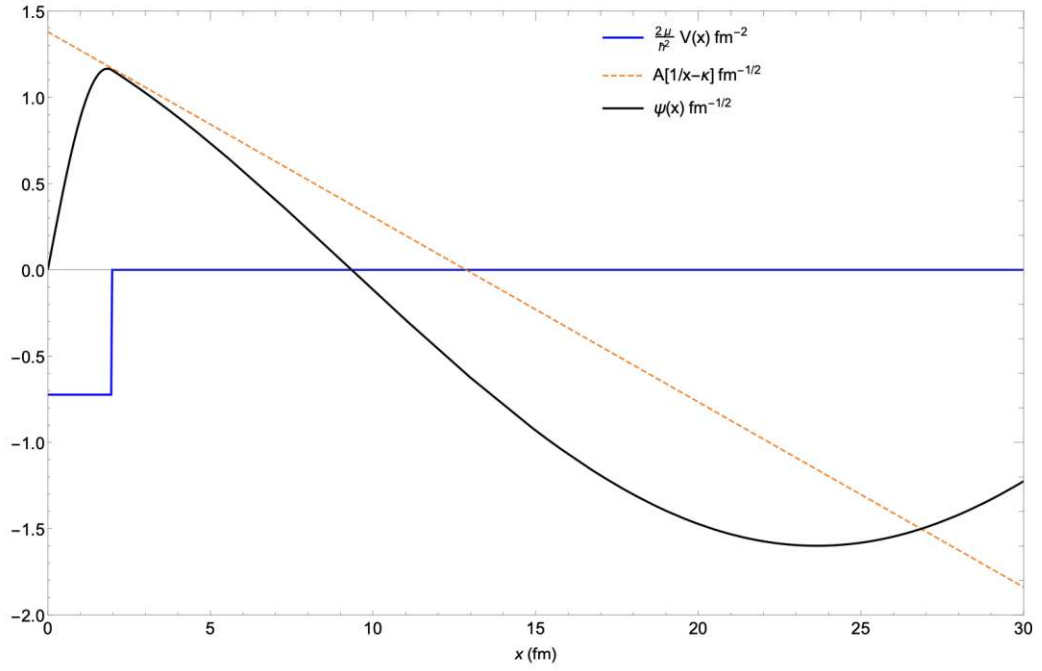
ifadesini elde ederiz. Burada κ bağlanma momentumudur. Denk. (2.9)'in bağlı durumları tanımlayan anlamlı bir çözüm olabilmesi için $e^{\kappa x}$ ifadelerin bir birini yok etmesi ve yalnızca $e^{-\kappa x}$ cinsinden bir çözüm elde edilmesi gerekir. Bunu sağlayan çözüm ise

$$\cot[\delta(i\kappa) - \ell\pi/2] = i \quad (2.10)$$

olur. Elde edilen bu sonuç Denk. (2.8) 'de kullanıldığında, düşük-enerji limitlerinde bağlanma momentumu κ ile saçılma uzunluğu a_ℓ arasında $\kappa = 1/a_\ell$ biçiminde birebir bağlatı elde ederiz ve bunun sonucu olarak bağlanma enerjisinin saçılma uzunluğu cinsinden tanımlanabileceği sonucuna ulaşırız,

$$B = \frac{\kappa^2}{2\mu} = \frac{1}{2\mu a_\ell^2} \quad (2.11)$$

Saçılma uzunluğunun fiziksel olarak anlamını netleştirme adına, Şekil 2.1'de basamak potansiyeki kullanarak elde ettiğimiz çözümler verilmiştir. Şekil 2.1'de mavi



Şekil 2.1. Schrödinger denklemi Denk. (2.1)'nin bir basamak potansiyeli için çözümü.

düz çizgi basamak potansiyeli $V(x)$ 'i, siyah düz çizgi Denk. (2.1)'nin çözümü olan dalga fonksiyonu $\psi(x)$ 'yi ve kesikli turuncu çizgi ise Denk. (2.7)'ile elde edilen ve saçılma yarıçapını veren bağıntıyı temsil etmektedir. Şekil 2.1'den, düşük-enerji limitlerinde ve saçılma uzunluğunun potansiyelim menziline çok büyük olduğu durumlarda, sistem yalnızca saçılma uzunluğu tarafından betimlenebilir.

Denk. (2.8), potansiyelin sonlu bir menzile sahip olması durumunda, Denk. (2.12) 'deki gibi p^2 'nin kuvvet serisi olarak yazılabilen analitik bir fonksiyondur (Bethe 1949; Barlette, Leite, Adhikari 2000),

$$\begin{aligned} p \tan \delta(p) &= \frac{1}{a_\ell} + \frac{1}{2} r_\ell p^2 + \mathcal{O}(p^4) & \ell = 0 \\ p \cot \delta(p) &= -\frac{1}{a_\ell} + \frac{1}{2} r_\ell p^2 + \mathcal{O}(p^4) & \ell = 1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Denk. (2.12) *efektif menzil açılımı* olarak adlandırılır ve ilk terim, saçılma uzunluğu olarak tanımlı, saçılmanın yarıçapı hakkında bilgi verir ve seri açılımda yüksek mertebelere gidildikçe potansiyelin biçimi hakkında bilgi elde edilir.

2.1.2 Üç Boyutta Saçılma Teorisi

Üç-boyutta ve iki parçaçıktan oluşan bir sistemde toplam dalga fonksiyonu

bağıl koordinatlarda şu şekilde yazılır,

$$\Psi^{(p)}(\vec{r}) = R_\ell^{(p)}(r) Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi) , \quad (2.13)$$

Burada $R_\ell^{(p)}(r)$ radyal kısım ve $Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi)$ ise küresel harmoniklerdir. Radyal kısım için,

$$U_\ell^{(p)}(r) = r \cdot R_\ell^{(p)}(r) . \quad (2.14)$$

biçiminde yeni bir tanımlama yaparsak, $U_\ell^{(p)}(r)$ dalga fonksiyonu için Schrödinger denklemi,

$$\left[-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{2\mu} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] U_\ell^{(p)}(r) - \int_0^\infty dr' W(r, r') U_\ell^{(p)}(r') = \frac{p^2}{2\mu} U_\ell^{(p)}(r) , \quad (2.15)$$

biçiminde olur. Burada, potansiyeli $W(r, r')$ biçiminde en genel formda gerçel bir operator olarak tanımlamaktayız. Potansiyel, R gibi sonlu bir menzile sahip olduğundan dolayı, $W(r, r')$ potansiyeli $r > R$ veya $r' > R$ durumlarında $W(r, r') = 0$ koşulunu sağlamaktadır. Dolayısıyla, $U_\ell^{(p)}(r)$ dalga fonksiyonu,

$$\left[-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{2\mu} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] U_\ell^{(p)}(r) - \int_0^R dr' W(r, r') U_\ell^{(p)}(r') = \frac{p^2}{2\mu} U_\ell^{(p)}(r) , \quad (2.16)$$

biçiminde Schrödinger denlemni sağlar ve $r', r > R$ bölgesinde bu denklemin çözümü

$$U_\ell^{(p)}(r) = \sqrt{\frac{2\mu p}{\pi}} \frac{i}{2} \left[h_\ell^{(-)}(pr) - e^{2i\delta_\ell(p)} h_\ell^{(+)}(pr) \right] , \quad (2.17)$$

olur. Burada $h_\ell^{(\pm)}$ fonksiyonları tanımlı Riccati Henkel fonksiyonlarıdır ve Riccati Bessel fonksiyonları cinsinden yazılabilirler,

$$h_\ell^{(\pm)} = \pm i S_\ell(pr) + C_\ell(pr) \quad (2.18)$$

Bu ilişki kullanılarak ifade yeniden yazılırsa,

$$U_\ell^{(p)}(r) = \sqrt{\frac{2\mu}{\pi}} p^\ell [\cot\delta_\ell(p) S_\ell(pr) + C_\ell(pr)] , \quad (2.19)$$

sırasıyla, birinci ve ikinci türden Riccati-Bessel fonsiyonları, $S_\ell(pr)$ $C_\ell(pr)$, cinsinden çözümü elde etmiş oluruz.

Bir-boyutaki analizlere benzer adımlar takip edilerek üç-boyutta efektif menzil açılımı aşağıdaki gibi elde edilebilir (Bethe 1949),

$$p^{2\ell+1} \cot\delta_\ell(p) = -\frac{1}{a_\ell} + \frac{1}{2} r_\ell p^2 + \mathcal{O}(p^4) . \quad (2.20)$$

2.1.3 Lüscher'in Sonlu Hacim Yöntemi

Örgü hesaplamalarından elde edilen en önemli bilgi sistemin enerji özdeğerleridir. Fakat, Lüscher tarafından türetilen çok önemli bağıntılar sayesinde (M. Lüscher 1986; Martin Lüscher 1991) periyodik ve sonlu hacime yerleştirilen iki cismin özdeğerlerinden sonsuz hacim ve süreklilik limitlerindeki saçılma parametrelerini elde etmek mümkündür. Bununla birlikte, iki-yapılı sistemlerin saçılma parametrelerini direkt olarak sistemin özdeğerleri ve özvektörlerinden elde eden farklı metotlarda geliştirilmiştir (Carlson, Pandharipande, R. B. Wiringa 1984; Borasoy et al. 2007). Bu çalışmada, saçılma parametrelerini Lüscher yöntemini kullanarak elde edeceğimiz için, bu bölümde yöntemi özetleyeceğiz.

Lüscher yönteminin türetilmesinin arkasındaki ana fikir, parçacıkların kısa menzilli potansiyellerle etkileşmesi durumunda sistemin özvektörlerinin asimptotik formunun tanımlı olması ve parçacıkların periyodik bir örgü içinde olmasıdır. Toplam momentumu sıfır, aralarındaki potansiyelin menzili X olan ve L boyutlu periyodik bir örgüde tanımlanan iki parçacıklı¹ bir sistemi göz önüne alalım. Söz konusu sistemin dalga fonksiyonu Denk. (2.6)'de tanımlanmıştır. $x > X$ olduğu mesafelerde sistemin dalga fonksiyonunun asimptotik formu aşağıdaki gibidir,

¹ Buradaki "ikili parçacıklı" sistem, hem noktasal parçacıkları hem de birden fazla parçacığın bağlı halde olduğu bir kompozit yapıyı temsil eder.

$$\psi(x) \sim \cos[px + \delta(p)] . \quad (2.21)$$

Bu dalga fonksiyonu periyodik örgüde tanımlı olduğundan dolayı, $\psi(L/2) = \psi(-L/2)$ ve $\partial_x \psi(x)|_{L/2} = \partial_x \psi(x)|_{-L/2}$ koşullarını sağlaması gerekir ve bu koşullardan aşağıdaki bağıntı elde edilir,

$$pL + 2\delta(p) = 2n\pi , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Bu bağıntı ile örgü uzunluğu L ve parçacıkların bağıl momentumu p kullanılarak, direkt olarak saçılma faz kayması $\delta(p)$ elde edilir.

Üç-boyutlu sistemlerde ise bağıntılar daha karmaşık bir forma dönüşmektedir. Üç-boyutta kartezyen koordinatlarda tanımlanan bir periyodik örgüde² dönüşsel simetriler yalnızca 90° ve katlarında tanımlıdır ve bu durum sürekli uzayda tanımlı olan rotasyonel (dönüşsel) değişmezliğin periyodik kübik örgüde kırıldığı anlamına gelmektedir. Lüscher tarafından üç-boyutlu sistemler için elde edilen bağıntı aşağıda verildiği gibidir (M. Lüscher 1986; Martin Lüscher 1991),

$$p \cot \delta_\ell(p) = \frac{1}{\pi} S(\eta) \quad \text{for } \ell = 0, 1 . \quad (2.23)$$

Burada $\eta = \left(\frac{Lp}{2\pi}\right)^2$ olarak tanımlanmakta ve $S(\eta)$ ise üç-boyutlu zeta fonksiyonudur,

$$S(\eta) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[\sum_{\vec{n}}^{\Lambda} \frac{\theta(\Lambda^2 - \vec{n}^2)}{\vec{n}^2 - \eta} - 4\pi \Lambda \right] . \quad (2.24)$$

Ayrıca, Denk. (2.24)'de tanımlı Lüscher bağıntısının bir alternatif formu ise şu biçimdedir (M. Lüscher 1986; Martin Lüscher 1991; Luu, Savage 2011),

$$S(\eta) = 2\pi^{3/2} e^\eta (2\eta - 1) + e^\eta \sum_{\vec{n}} \frac{e^{-|\vec{n}|^2}}{|\vec{n}|^2 - \eta} - \pi^{3/2} \int_0^1 d\lambda \frac{e^{\lambda\eta}}{\lambda^{3/2}} (4\lambda^2 \eta^2 - \sum_{\vec{n}} e^{-\pi^2 |\vec{n}|^2 / \lambda}) . \quad (2.25)$$

² Bu çalışma boyunca periyodik kübik örgü olarak adlandırılacaktır.

Denk. (2.23)–(2.25)'de verilen karmaşım bağıntılar şu şekilde özetlenebilir; periyodik ve L uzunluklu bir kübik örgüdeki iki-yapılı sistemin bağıl momentumunun bilinmesi durumunda, saçılma faz kaymaları bu denklemlerden direkt olarak elde edilebilir.

Peryodik ve L uzunluklu bir kübik örgüdeki iki-yapılı sistemlerin bağıl momentumu için yazılabilecek en genel ifade, $\ell = 0$ için aşağıdaki bağıntı ile verilir (Bour, Koenig, et al. 2011; Bour, H.-W. Hammer, et al. 2012),

$$E(p, L) = \frac{p^2}{2\mu} - B_1 - B_2 + \tau_1(\eta)\Delta E_1(L) + \tau_2(\eta)\Delta E_2(L) . \quad (2.26)$$

Burada μ bağıl kütle, B_i i 'inci yapının sonsuz hacim limitindeki bağlanma enerjisi $i = \{1, 2\}$, $E_i(L)$ i 'inci yapının L uzunluklu bir kübik örgüdeki bağlanma enerjisi $i = \{1, 2\}$, ve $\tau_i(\eta)$ ise i 'inci yapının enerjisinin topolojik düzeltme çarpanıdır,

$$\tau(\eta) = \frac{1}{\sum_{\vec{k}} (\vec{k}^2 - \eta)^{-2}} \sum_{\vec{k}} \frac{\sum_{i=1}^3 \cos(2\pi k_i \alpha)}{3(\vec{k}^2 - \eta)^2} . \quad (2.27)$$

(Elhatisari, Lee 2014) tarafından yapılan çalışma ile $\ell > 0$ durumunda, bu topolojik düzeltmenin örgünün boyu ile orantılı olarak baskılandığı bulunmuştur, $\tau(\eta) = 1 + \mathcal{O}(1/L)$, dolayısıyla, Denk. (2.26) $\ell > 0$ durumunda aşağıdaki formu alır,

$$E(p, L) = \frac{p^2}{2\mu} + E_1(L) + E_2(L) . \quad (2.28)$$

Son olarak, periyodik kübik örgüdeki iki ve daha fazla parçaçığın bir kompozit yapı oluşturmaları durumunda, örgünün kesikli yapısından dolayı, bu yapının kütlelerinin gerçek kütlelerinden genellikle saptığı görülür. Dolayısıyla, Lüscher yöntemi kullanılarak yapılan hesaplamalarda kompozit yapıların efektif kütleleri de göz önünde bulunularak hesaplamalar gerçekleştirilir.

2.2 Örgü Formalizmi

Bu bölümde, iki-bileşenli fermiyonları periyodik kübik örgüde tanımlayan

temel bağıntıları tanımlayacağız. Bu çalışmadaki tüm nicelikleri ve bağıntıları $\hbar = c = 1$ olarak tanımlandığı doğal birim sisteminde tanımlayacağız. Ayrıca, fermiyonların spinlerinin aynı doğrultuda polarize olduğunu varsayarak, bileşenlerini spin- $\uparrow$ ve spin- $\downarrow$, kütlelerini ise $m_{\uparrow}$ ve $m_{\downarrow}$ olarak tanımlayacağız. Burada incelediğimiz sistem için görelî-olmayan limitler geçerlidir ve Schrödinger denklemi ile tanımlanır. Dolayısıyla, sistemin D-boyuttaki Hamiltoniyen'i aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_s \frac{1}{2m_s} \int d^D r \nabla b_s^\dagger(r) \nabla b_s(r) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \int \int d^D r \, d^D r' \, b_{s'}^\dagger(r') b_{s'}(r') V_{ss'}(r - \\ & r') b_s^\dagger(r) b_s(r) . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Burada s parçacıkların türünü ($s = \{\uparrow, \downarrow\}$), b_s ($b_s^\dagger$) ise parçacık yaratma (yoketme) operatörüdür.

Bu çalışmadaki hesaplamalarımızda, a ile tanımlı bir örgü aralıklı periyodik kübik bir örgü kullanılacaktır. Schrödinger denklemindeki tüm fiziksel nicelikleri *örgü birimi* (l.u.) olarak adlandırdığımız birimde tanımlarız. Örgü birimi, fiziksel niceliklerin a ve a 'nın kuvvetleri ile çarpımıyla elde edilir. Örneğin, parçacıkların kütleleri, nükleer fizik sistemlerinin tanımlı olduğu, mega elektron volt (MeV) ölçüsünde verilirken, bu kütleleri a ile çarparak örgü birimine dönüştürürüz. Bu örnekten anlaşıldığı üzere, a 'nın birimi l.u./MeV'dir.

Yukarıdaki tanımlamalar ışığında, görelî-olmayan örgü Hamiltoniyen'i aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_s \frac{1}{2m_s} \sum_{\hat{l}=1}^{\hat{D}} \sum_n \left[\sum_{k=-N}^N c_{|k|}^{(N)} b_s^\dagger(n) b_s(n + k \hat{l}) \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \sum_n \sum_{n'} b_{s'}^\dagger(n') b_{s'}(n') V_{ss'}(n - \\ & n') b_s^\dagger(n) b_s(n) . \end{aligned} \quad (2.30)$$

Burada n örgü koordinat noktalarını temsil etmektedir, $c_k^{(N)}$ ise Laplace operatörünü örgüde $\mathcal{O}(a^{2N})$ yuvarlama hatasıyla tanımlayan katsayılarıdır (Lu et al. 2014; Stellin, Elhatisari, Ulf G. Meißner 2018),

$$c_k^{(N)} = \begin{cases} (-1)^{k+1} \frac{2 (N!)^2}{k^2 (N+k)! (N-k)!}, & k \neq 0 \\ -2 \sum_{k=1}^N c_k^{(N)}, & k = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

2.3 Hesaplamala Araçları

MATLAB, dünyamızda devrim yaratacak sistem ve teknolojilerin değerlendirilmesini ve tasarlanmasını kolaylaştırmak amacıyla bilim adamlarının ve mühendislerin kullanımına özel olarak geliştirilmiş bir programlama aracıdır. İngilizce “Matrix Laboratory” kelimelerinin baş harflerinin birleştirilmesi ile oluşmuş olan MATLAB, hesaplamalı matematiği ifade etmenin yollarını sunar. MATLAB zengin kütüphanesi sayesinde aynı zamanda iki ya da üç boyutlu veri görselleştirme, görüntü işleme, animasyon ve sunum grafikleri için grafik çizme ve simülasyon programıdır (The MathWorks 2017). MATLAB, matris işlemleri gibi matematik problemlerini çözmek için faydalı bir araçtır. Bu problemleri çözmek için iyi bilinen matris işlemlerinden biri de özdeğerler ve özvektörlerin hesaplanmasıdır. MATLAB'da `eigs()` fonksiyonunu kullanarak özdeğerler ve özvektörler bulunabilir. Hesaplamalarımızda MATLAB'ın bu fonksiyondan yararlanılmıştır (bkz.Appendix B). Hesaplamalarımızda kullandığımız bilgisayar sisteminin özelliği ise üzerinde iki adet Intel Xeon işlemcisi bulunan HP'nin Z8 modeli (G4) iş istasyonudur.

3 BULGULAR ve TARTIŞMA

Bir önceki bölümde ifade edildiği gibi, bu çalışmadaki parametrelerimizi nükleer fizik sistemlerinde gözlemlenen değerlere göre tanımlıyoruz. Fakat, bu çalışmada üç ve dört fermiyondan oluşan sistemler için elde edilen fiziksel niceliklere ait sonuçların, iki fermiyon sisteminin parametreleri cinsinden elde edilmesi amaçlanmaktadır. Diğer bir ifadeyle, bu çalışmada elde edilen sonuçlar, sistemi oluşturan parçacıkların niceliklerinden (kütle, bağlanma enerjisi vb.) bağımsız ve evrensel olacaktır. Bu bağlamda, spin- $\uparrow$ fermiyonun kütlesini $m_{\uparrow} = 1$ GeV olarak seçiyoruz ve spin- $\downarrow$ parçacığın kütlesi $m_{\downarrow}$ 'ni ise değişken bir parametre olarak belirliyoruz. Bu sayede, incelediğimiz sistemleri $m_{\uparrow} \rightarrow \infty$ ve $m_{\downarrow} \rightarrow \infty$ limitlerinde analiz edebiliriz. Dolayısıyla, bu limitlerde, iki-yapılı sistemin indirgenmiş kütlesi μ sabit ve hafif parçacığın kütlesine eşit olur. Ayrıca, nihai sonuçlarda kesikli örgüden kaynaklanan hata paylarını ortadan kaldırmak için, hesaplamalarımızı farklı saçılma uzunluğu a_{ff} 'lar için tekrar ederek, $a \rightarrow 0$ limitindeki sonuçları elde ederiz.

3.1 Bir Boyutta İki Bileşenli Fermiyonlar

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar deneysel veya farklı teorik yöntemler kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Fakat, bu çalışmada kullanılan yöntemlerin etkinliğini kıyaslamak adına, öncelikli olarak bir-boyutta hesaplamalar gerçekleştirilmiştir ve literatürde mevcut bulunan örgü hesaplamaları tekrarlanarak kıyaslamalar yapılmıştır. Bu bağlamda, Ref. Elhatisari 2018 çalışmasını takip ederek bir-boyutta örgü hesaplamaları gerçekleştirilmiştir.

3.1.1 Bir Boyutta Fermiyon-Fermiyon Saçılımı

Öncelikli olarak, bir spin- $\uparrow$ ve bir spin- $\downarrow$ türünde parçacıktan oluşan iki-

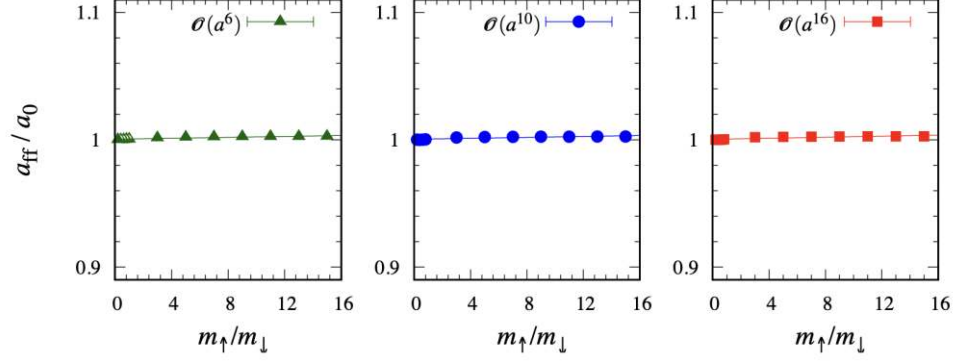
fermion sistemini inceleyerek hesaplamalarımızı gerçekleştireceğiz. Buradaki hesaplamalarımızda, parçacıkların delta-fonksiyon potansiyel ile etkileştiğini varsayıyoruz. Dolayısıyla, Denk. (2.30)'de tanımlanan potansiyel aşağıdaki formda olur:

$$\hat{V} = \frac{C_0}{2} \sum_n \left(b_{\uparrow}^{\dagger}(n) b_{\uparrow}(n) + b_{\downarrow}^{\dagger}(n) b_{\downarrow}(n) \right) \delta(n - n') \quad (3.1)$$

Burada C_0 etkileşimin gücünü tanımlar ve n bir boyutta örgü noktalarını temsil eder. Parçacıklar arası etkileşme bir delta-fonksiyon potansiyel olduğu durumda, Pauli dışarlama ilkesinden dolayı aynı spin bileşenine sahip olan parçacıklar arasında herhangi bir etkileşme olmaz. Dolayısıyla, Denk. (3.1)'de yazılan potansiyel, delta-fonksiyon potansiyel ile etkileşen ve iki-bileşenli fermiyonlardan oluşan tüm sistemlerde geçerlidir ve bu çalışmada analiz edilen tüm sistemlerde kullanılmaktadır.

Bu noktada, incelemek istediğimiz sistemleri tanımlayan denklemleri (2.30) ve (3.1) tanımlamış olduk. Bir sonraki adımda bu denklemleri MATLAB (The MathWorks 2017) programında uygulayarak ve MATLAB'ın dahili fonksiyonlarından `eigs()` kullanarak, Hamiltoniyenin özdeğer ve özvektörlerini elde ederiz.

Denk. (3.1)'de tanımlanan etkileşimin gücü C_0 'yi, dimer bağlanma enerjisi B_d elde edilecek şekilde belirleriz. Bu ayarlama yapılırken, sonlu örgü boyundan kaynaklanabilecek tüm hataları ortadan kaldırma adına örgünün boyu L için çok büyük değerler seçeriz. Bu işlem sonrasında belirlenen parametreleri kullanarak hesaplamalarımızı gerçekleştiririz. Farklı L değerleri için örgü Hamiltoniyenini tanımlar ve iki-fermion sisteminin düşük enerji seviyelerine karşılık gelen özdeğeri E 'yi hesaplarız. Ayrıca, Denk. (2.22)'deki formülde kullanılmak üzere, $p = \sqrt{2\mu E}$ bağıntısını kullanarak enerji özdeğerlerinden fermiyonlar arasındaki bağıl momentum elde edebiliriz. Şekil 6'de örgü hesaplamalarında elde edilen fermiyon-fermion saçılma uzunluğu sonuçları, a_{ff} , analitik çözümlerle, a_0 , karşılaştırmalı formda sunulmuştur.



Şekil 3.1. Örgü hesaplamalarından elde edilen fermiyon-fermiyon saçılma uzunluğunun analitik çözümlere oranı.

Örgüde fermiyon-fermiyon saçılma uzunluğu, örgü hesaplamalarında elde edilen momentum p ve saçılma faz kaymaları $\delta(p)$ 'yi Denk. (2.8) ile tanımlı efektif menzil açılımında kullanarak elde ederiz. Saçılma uzunluğunun analitik sonuçları ise, Denk. (2.11) kullanılarak elde edilmiştir. Şekil 6'de sunulan hesaplamalar 0.2 ile 15.0 aralığından değişen $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ oranları ve farklı örgü aralığı değerleri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Elhatisari 2018 çalışmada bu tezde amaçlanan hesaplamalara benzer hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Fakat bu çalışmada, örgü kinetik terimi tanımındaki Laplace operatörü, $\mathcal{O}(a^6)$ mertebeden sonlu farklar yöntemi kullanılarak tanımlanmıştır. Bu çalışmada ise, kullanılan sonlu farklar yöntemi mertebesinden kaynaklanabilecek olası sistematik hataları inceleme adına $\mathcal{O}(a^6)$, $\mathcal{O}(a^{10})$ ve $\mathcal{O}(a^{16})$ olmak üzere üç farklı mertebeden tanımlanan kinetik terimler ile hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Şekil 6'de görüldüğü gibi, $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ oranının çok büyük olduğu durumlarda örgü sonuçları ile analitik sonuçlar arasında çok küçük sapmalar olmasına rağmen, genel anlamda tutarlılık gözlenmektedir. Ayrıca bu sonuçlar, $\mathcal{O}(a^6)$ mertebeden sonlu farklar yönteminin, fermiyon-fermiyon saçılma hesaplamaları için makul olduğunu göstermektedir. Benzer biçimdeki karşılaştırma analizlerimizi ikiden fazla fermiyonların olduğu sistemler için de gerçekleştireceğiz.

3.1.2 Bir Boyutta Fermion-Dimer Saçılımı

Bu bölümde, iki spin- $\uparrow$ ve bir spin- $\downarrow$ türünde parçacıktan oluşan üç-fermiyon sistemini inceleyerek hesaplamalarımıza devam edeceğiz. Buradaki hesaplamalarımızda, önceki bölümde olduğu gibi, iki-parçacık arasındaki etkileşmenin delta-fonksiyon potansiyel ile tanımlandığını varsayıyoruz. Dolayısıyla,

Denk. (3.1)'de tanımlanan potansiyel buradaki hesaplamalarımızda da geçerli olmaktadır. Düşük enerji limitlerinde, iki bileşenli fermiyonlardan oluşan sistemlerde iki-parçacık etkileşmelerinin ötesindeki üç-parçacık veya dört-parçacık vb. etkileşmelerin hiçbiri katkı sağlamazlar (Elhatisari, Katterjohn, et al. 2017), bu nedenle fermiyon-dimer sisteminin tanımlayan potansiyel Denk. (3.1)'den ibaret olur.

Bir sonraki adımda, fermiyon-dimer sistemini tanımlayan Hamiltoniyeni MATLAB programında tanımlarız ve Lanczos özvektör yöntemini (Lanczos 1950) kullanarak farklı L örgü boyutları için sistemin özdeğerlerini hesaplarız ve hesaplanması amaçlanan fermiyon-dimer saçılma faz kaymalarını elde etmek için gerekli olan verileri elde etmiş oluruz. Bölüm 2.1.3'de detaylı olarak tartışıldığı gibi örgü hesaplamalarında L örgü boyutu ve buna karşılık gelen bağıl momentumu Lüscher yönteminde kullanılarak saçılma faz kaymalarını elde ederiz. Bölüm 3.1.1'de, fermiyon-fermiyon sistem enerjisini $p = \sqrt{2\mu E}$ bağıntısında kullanarak bağıl momentumları elde etmiştik. Fakat, dimer gibi iki parçacıktan oluşan bir kompozit yapı durumunda bağıl momentumun hesaplanması biraz daha dikkat gerektirmektedir. Örgü hesaplamalarının doğasındaki $a \neq 0$ örgü aralığından dolayı, dimer gibi kompozit yapıların kütlesi, kendisini oluşturan parçacıkların kütleleri toplamı $m_\uparrow + m_\downarrow$ 'dan farklıdır. Dolayısıyla, örgü hesaplamalarından elde edilen dimer dispersiyon bağıntısını Denk. (3.2)'ye uydurarak (fitting) dimer'ın etkin kütlesini elde ederiz:

$$D(p_d, m_d) = c_0 \frac{p_d^2}{2m_d} + c_1 p_d^4 + \dots \quad (3.2)$$

Burada c_i 'ler uydurma (fit) ile elde edilen parametreler, p örgüde hareket eden dimer'in momentumu ve m_d ise dimer'in gerçek kütlesidir. Birinci terim ötesindeki terimlerin ihmal edilmesi durumunda, dimer'in etkin kütlesi $m_d^* = m_d/c_0$ olur.

Bu noktada, fermiyon-dimer saçılma faz kaymalarını hesaplayabilmek için ihtiyacımız olan tüm parametre ve bağıntıları elde etmiş bulunmaktayız. Bağıl momentumun hesaplanması için tanımlanan Denk. (2.26), fermiyon-dimer sistemi için aşağıdaki formu alır:

$$E_{fd}^L = \frac{p^2}{2\mu_{fd}^*} - B_d - \Delta B_d^L \cos(p \cdot a \cdot L \cdot \alpha). \quad (3.3)$$

Burada E_{fd}^L L örgü boyutunda fermiyon-dimer enerjisi, $\Delta B_d = B_d^L - B_d$ dimer

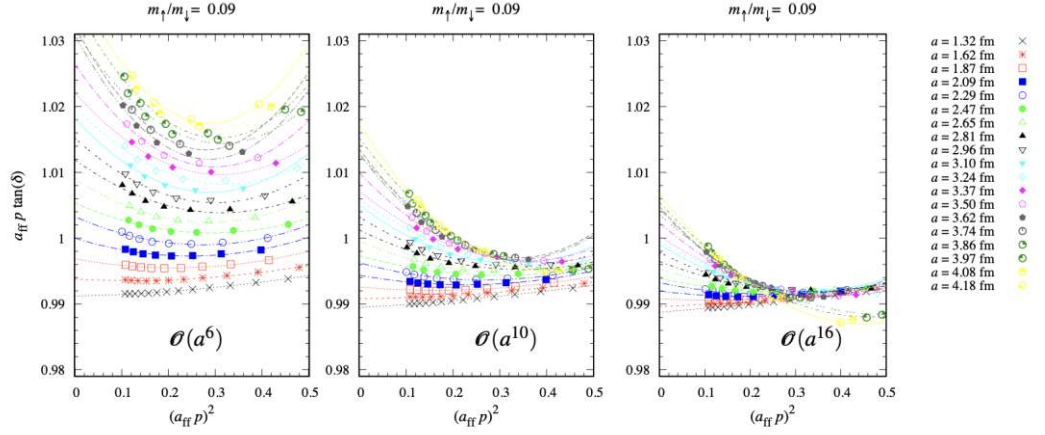
bağlanma enerjisinin L boyutlu sonlu örgü hacimdeki düzeltme terimi, $\alpha = m_\uparrow/(m_\uparrow + m_\downarrow)$, ve $\mu_{fd}^* = (1/m_d^* + 1/m_\uparrow)^{-1}$ fermiyon-dimer sisteminin indirgenmiş kütesidir. L , E_{fd}^L , B_d^L ve μ_{fd}^* niceliklerini örgü hesaplamalarından elde ederek Denk. (3.3)'de kullanırız ve bu denklemi bağıl momentum p için çözeriz. Buraya kadar ki hesaplamalar sonucunda, Bölüm 2.1.3'de tanımlanan Lüscher yöntemini kullanarak saçılma faz kaymalarını elde etmek için gerekli tüm nicelikleri (L ve p) elde etmiş oluruz.

Fermiyon-dimer hesaplamalarımızı 29 farklı $m_\uparrow/m_\downarrow = 0.06 - 15.0$ kütle oranları için gerçekleştiririz. Ayrıca örgü sistemlerinin kesikli aralıklı yapısından kaynaklanabilecek herhangi sistematik hatayı ortadan kaldırma adına, hesaplamalarımızı 19 farklı $a = 1.3 - 4.2$ fm örgü aralığı için gerçekleştirerek $a \rightarrow 0$ limitindeki değeri elde ederiz. Son olarak, örgü kinetik terimindeki Laplace operatörü tanımlamak için kullanılan sonlu farklar yöntemi mertebesinden kaynaklanabilecek olası sistematik hataları kontrol etmek için, hesaplamalarımızı 3 farklı mertebeden sonlu farklar yöntemi kullanarak gerçekleştiririz.

Fermiyon-dimer sistemi için Denk. (2.8)'de tanımlı saçılma parametrelerini elde etme adına, örgü hesaplamalarından elde ettiğimiz saçılma faz kaymalarını ve karşılık gelen bağıl momentumu aşağıdaki denklemde kullanarak fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğu a_{fd}/a_{ff} elde ederiz.

$$a_{ff} p \tan\delta(p) = \frac{1}{a_{fd}/a_{ff}} + \frac{1}{2} \left(r_{fd}/a_{ff} \right) \left(a_{ff} p \right)^2 + \dots \quad (3.4)$$

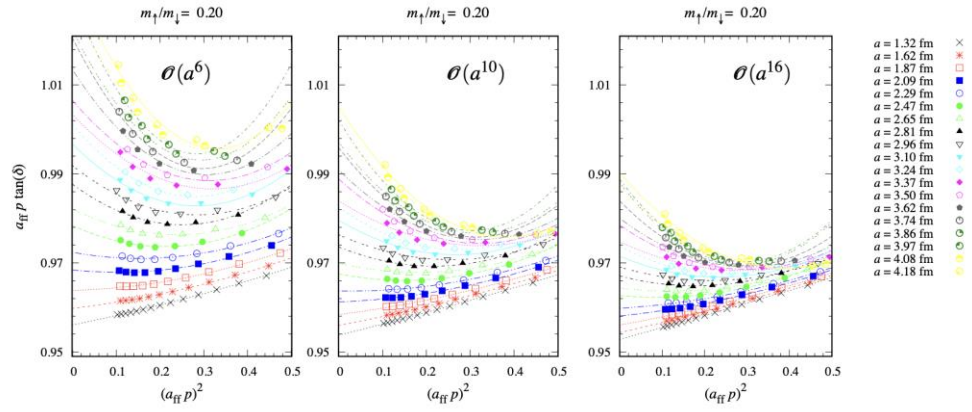
Burada a_{fd} ve r_{fd} fermiyon-dimer saçılma uzunluğu ve efektif menzildir.



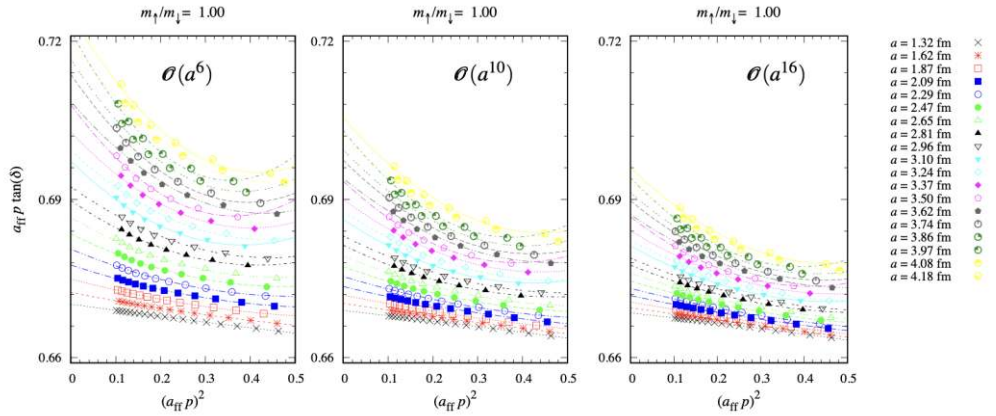
Şekil 3.2. Efektif menzil açılımı $a_{ff} p \tan \delta(p)$ 'nın $(a_{ff} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütlelerine oranı 0.09'dur.

Fermiyon-dimer hesaplamalarımızdan elde ettiğimiz sonuçların bir kısmı Şekil 3.2, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'te sunulmaktadır. Bu şekillerdeki noktalar, örgü hesaplamalarımızdan elde ettiğimiz veri temsil etmektedir. Diğer taraftan, bu şekillerdeki veri noktaları ile bağlantılı çizgiler ise, a_{fd}/a_{ff} ve (r_{fd}/a_{ff}) saçılma parameterlerinin elde edilmesi amacıyla noktalarla temsil edilen verilerin Denk. (3.4)'ye uydurulmasıyla (fitting) elde edilen sonuçları temsil etmektedir. Saçılma parametrelerini elde etmek için gerçekleştirdiğimiz bu uydurma (fitting) işleminden dolayı, Şekil 3.2, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'te sunulan sonuçlarımız, $a_{ff} p \tan \delta(p)$ niceliği formatında $(a_{ff} p)^2$ 'nin bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir.

Şekil 3.2, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 örgü sonuçlarımızı, $m_{\uparrow}/m_{\downarrow} = 0.09$, $m_{\uparrow}/m_{\downarrow} = 0.20$ ve $m_{\uparrow}/m_{\downarrow} = 1.00$ olmak üzere üç farklı kütle oranları, örgü aralığının 19 farklı değeri ve 3 farklı mertebeden sonlu farklar yöntemi için göstermektedir. Bu şekillerden görüldüğü gibi $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ oranının 1'e yakın olduğu değerler için kullanılan sonlu farklar yöntemlerinin çok büyük bir farklılık göstermemesine rağmen, $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ 1'den farklı



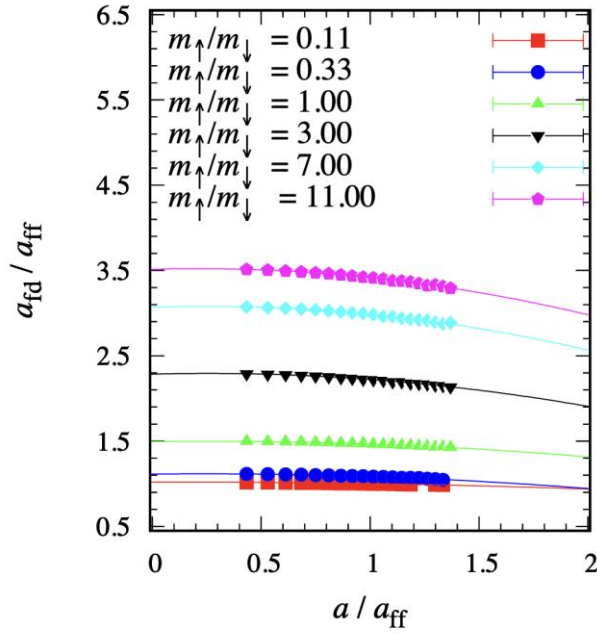
Şekil 3.3. Efektif menzil açılımı $a_{\text{eff}} p \tan \delta(p)$ 'nın $(a_{\text{eff}} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütlelerine oranı 0.20'dur.



Şekil 3.4. Efektif menzil açılımı $a_{\text{eff}} p \tan \delta(p)$ 'nın $(a_{\text{eff}} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütlelerine oranı 1.00'dur.

olduğu değerler için, özellikle örgü aralığı a 'nın büyük değerler aldığı durumlarda, benimsenen sonlu farklar yönteminin sonuçları etkileyebileceğini göstermektedir. Bu nedenle, aşağıda, yalnızca $\mathcal{O}(a^{16})$ mertebeden sonlu farklar yönteminin kullanıldığı hesaplamalara ait sonuçlar sunulacaktır.

Şekil 3.5, fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğu a_{fd}/a_{ff} 'nin bazı kütle oranları için elde ettiğimiz sonuçların detaylarını göstermektedir. Şekildeki eksenlerin birimlerini eşitleme adına, a_{fd}/a_{ff} niceliği a/a_{ff} 'nin bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir. Şekil 3.5'de görüldüğü gibi, a_{fd}/a_{ff} niceliği örgü aralığı a 'nın 1.3 – 4.2 fm aralığından farklı değerleri için gerçekleştirilmiş ve a_{fd}/a_{ff} niceliğinin $a \rightarrow 0$ limitindeki sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca, Şekil 3.5'deki sonuçlar, $a \neq 0$ örgü aralığından kaynaklanan sistematik hatalar, $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ oranının küçük olduğu durumlarda ihmal edilebilir olmasına rağmen, $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ oranının büyük olduğu durumlarda sonuçları etkileyebilecek ölçüdedir ve $a \rightarrow 0$ limitindeki değerlerin elde edilmesinin gerekliliğini göstermektedir.

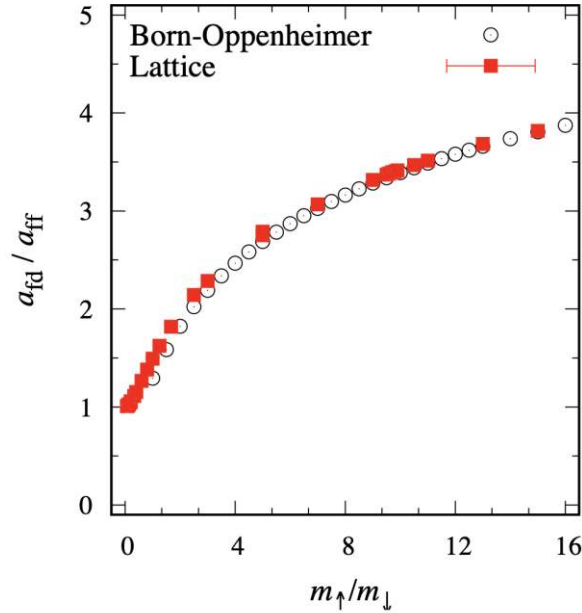


Şekil 3.5. Fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğunun a/a_{ff} 'nin fonksiyonu olarak gösterimi. Burada verilen sonuçlar, a_{fd}/a_{ff} 'nin $a/a_{ff} \rightarrow 0$ limitindeki sonuçlarını göstermektedir. Sonuçlar farklı $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ kütle oranları için sunulmuştur.

Son olarak, bu bölümün ana sonuçlarını Şekil 3.6'da Born-Oppenheimer yaklaşımı ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalı olarak sunmaktayız. Şekil 3.6'da, fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğu a_{fd}/a_{ff} 'nin $a \rightarrow 0$ limitindeki değerlerini kütle oranı $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ 'nin bir fonksiyonu olarak göstermektedir. Şekil 3.6'deki sonuçların fiziksel yorumu aşağıda detaylı olarak tartışılmaktadır.

$m_{\downarrow} \rightarrow \infty$ durumlarda, spin- $\downarrow$ parçacığı neredeyse hareketsiz halde

olacağından dolayı durgun bir parçacık olarak değerlendirilebilir. Spin- $\downarrow$ parçacığının bu özelliği nedeniyle koordinat merkezinde sabit bir parçacık olduğunu varsayarsak, bu durumda incelediğimiz fermiyon-dimer sistemi, koordinat merkezinde sabit bir çekici delta-fonksiyon potansiyeli bulunan bir uzayda iki spin- $\uparrow$ parçacığın hareketine indirgenir. Böyle bir sistemde, spin- $\uparrow$ parçacıklarından biri merkezdeki çekici potansiyel tarafından çekilerek dimer'ı oluşturur ve bu spin- $\uparrow$ parçacık bağlı-durum dalga fonksiyonu ile temsil edilir. Kuantum mekaniğinin temel prensiplerinden biri dalga fonksiyonları arasındaki ortogonallikten, yani sistemin dalga fonksiyonlarının birbirlerine dik olmasından dolayı, bu bağlı durum dalga fonksiyonun diğer tüm saçılma durum dalga fonksiyonlarına dik olur. Bunun sonucu olarak, ikinci spin- $\uparrow$ parçacığı, koordinat merkezindeki çekici delta-fonksiyon potansiyeline bağlı halde



Şekil 3.6. Fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğunun kütle oranı $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ 'nın fonksiyonu olarak gösterimi. Kırmızı kare noktalar örgü sonuçlarını ve siyah yuvarlak noktalar ise Born-Oppenheimer yaklaşımı ile elde edilen sonuçları göstermektedir.

bulunan diğer spin- $\uparrow$ parçacığının varlığından tamamen bağımsız bir biçimde koordinat merkezindeki delta-fonksiyon potansiyelinden saçılır. Sonuç olarak, $m_{\downarrow} \rightarrow \infty$ limitinde, fermiyon-dimer saçılma problemi, fermiyon-fermiyon saçılma problemine indirgenir ve fermiyon-dimer saçılma uzunluğu ise fermiyon-fermiyon saçılma uzunluğu eşit olur. Bu durum Şekil 3.6'de net olarak gözlenmektedir ve $m_{\downarrow} \rightarrow$

∞ imitinde $a_{fd}/a_{ff} \rightarrow 1$ olmaktadır.

$m_{\uparrow} \rightarrow \infty$ durumlarda, çok hafif olan spin- $\downarrow$ parçacığı iki ağır spin- $\uparrow$ parçacıkları arasında değiş-tokuş edilir ve kuvvet taşıyıcısı olarak görev alır. Bu durum spin- $\uparrow$ parçacıkları arasında $m_{\downarrow}^{-1}$ mezilli bir efektif kuvvetin ortaya çıkmasına neden olur. Bunun sonucu olarak, fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğu $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ kütle oranının bir fonksiyonu olarak artar.

$m_{\uparrow} \rightarrow \infty$ limitinde, Born–Oppenheimer yaklaşımı, fermiyon-dimer sisteminin çözümü için kullanılabilecek elverişli bir yöntem olur. Born–Oppenheimer yaklaşımının detayları Bölüm A.1'de detaylı olarak tartışılmaktadır. Bölüm A.1'de elde edilen çözümlerden görüldüğü gibi fermiyon ve dimer arasındaki kuvvet itici bir kuvvettir ve bunun sonucu olarak kütle oranının artmasıyla fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğunun büyüklüğü artmaktadır. Örgü sonuçlarını kıyaslama adına, Denk. (5.6) ile tanımlanan Born–Oppenheimer denklemi çözülerek fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğunu elde edilmiştir ve sonuçlar Şekil 3.6'de sunulmuştur. Görüldüğü gibi $m_{\uparrow} \rightarrow \infty$ limitlerinde örgü sonuçları ile Born–Oppenheimer sonuçları tamamen uyum içindedir.

Şekil 3.6'de vurgulanması gereken diğer bir nokta ise, $\mathcal{O}(a^{16})$ mertebeden sonlu farklar yöntemini kullanmamız neticesinde, bu çalışmada elde edilen sonuçların $\mathcal{O}(a^6)$ mertebeden sonlu farklar yöntemini kullanan Ref. Elhatisari 2018'da elde edilen sonuçlara kıyasla Born–Oppenheimer sonuçları ile daha iyi uyum içinde olmaktadır.

3.1.3 Bir Boyutta Dimer-Dimer Saçılımı

Bu bölümde iki spin- $\uparrow$ ve iki spin- $\downarrow$ parçacıklarından oluşan sistemi inceleyeceğiz. Önceki bölümlerde olduğu gibi, iki-parçacık arasındaki etkileşmenin çekici bir delta-fonksiyon potansiyel ile tanımlandığını varsayıyoruz. Dolayısıyla, tanımlı potansiyel Denk. (3.1)'de verildiği gibi olur. Bu çalışmada düşük enerji seviyeleriyle ilgilendiğimizden dolayı, iki bileşenli fermiyonlardan oluşan sistemler yalnızca iki-parçacık etkileşmeleriyle betimlenmektedir (Elhatisari, Katterjohn, et al. 2017). Diğer taraftan, Pauli dışarlama ilkesinden dolayı, aynı spin bileşene sahip fermiyonların aynı koordinat noktasında bulundukları durumlarda toplam dalga fonksiyonu sıfır olur ve bunun neticesinde aynı spin bileşenine sahip fermiyonlar delta-fonksiyon potansiyeli ile etkileşmezler. Sonuç olarak, burada tanımlı delta-

fonksiyon potansiyelin çekici bir potansiyel olduğunu varsaydığımızda, farklı spin bileşenli fermiyonlar birbirlerini çekerek bağlı duruma geçer ve dimer oluştururlar ve böyle bir sistemin taban enerji durumu dimer-dimer sistemine karşılık gelir.

Dimer-dimer saçılım parametreleri elde etmek için Denk. (2.30) ve Denk. (3.1) ile verilen Hamiltoniyeni farklı L örgü boyutları için tanımlarız. Buradaki programlamalarımız için MATLAB programını kullanırız ve Lanczos özvektör yöntemi (Lanczos 1950) ile dimer-dimer sisteminin özdeğer ve özvektörlerini hesaplarız.

Bir sonraki adımda, dimer-dimer sisteminin özdeğerlerinden bağlı momentumu elde ederiz. Bu işlem için gerekli olan dimer etkin kütlesi bir önceki bölümde fermiyon-dimer sistemi için hesaplandığından dolayı, bu nicelikler burada da direkt olarak kullanılacaktır. Bağlı momentumun hesaplanması için tanımlanan Denk. (2.26)'in dimer-dimer sistemi için formu şu şekilde olur:

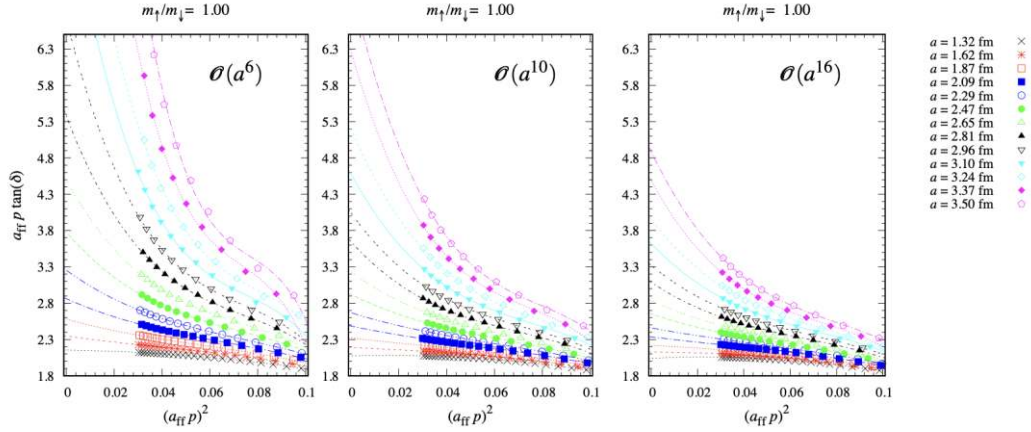
$$E_{dd}^L = \frac{p^2}{2\mu_{dd}^*} - 2 B_d - 2 \Delta B_d^L \cos(p a L \alpha). \quad (3.5)$$

Burada E_{dd}^L L örgü boyutunda dimer-dimer enerjisi, $\Delta B_d = B_d^L - B_d$ dimer bağlanma enerjisinin L boyutlu sonlu örgü hacimdeki düzeltme terimi, $\alpha = m_\uparrow/(m_\uparrow + m_\downarrow)$, ve $\mu_{dd}^* = (1/m_d^* + 1/m_d^*)^{-1}$ dimer-dimer sisteminin indirgenmiş kütlesidir. L , E_{dd}^L , B_d^L ve μ_{dd}^* niceliklerini örgü hesaplamalarından elde ederek Denk. (3.5)'de kullanırız ve bu denklemi bağlı momentum p için çözeriz. Bu işlemler sayesinde, Bölüm 2.1.3'de tanımlanan Lüscher yöntemini kullanarak saçılma faz kaymalarını elde etmek için gerekli olan L örgü boyu ve buna karşılık gelen p bağlı momentumu elde etmiş oluruz.

Fermiyon-dimer hesaplamalarında olduğu gibi, dimer-dimer hesaplamalarımızı da 8 farklı $m_\uparrow/m_\downarrow = 1.0 - 15.0$ kütle oranları, 19 farklı $a = 1.3 - 4.2$ fm örgü aralığı ve 3 farklı mertebeden sonlu farklar yöntemi kullanarak gerçekleştiririz. Bu hesaplamaların herbiri için elde ettiğimiz p bağlı momentumu ve $\delta(p)$ saçılma faz kaymasını aşağıdaki denklemde kullanarak dimer-dimer evrensel saçılma uzunluğu a_{dd}/a_{ff} elde ederiz.

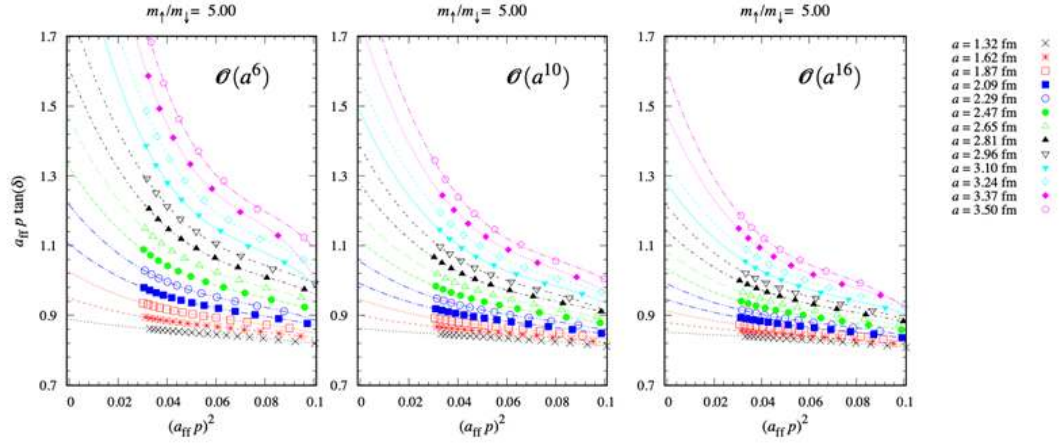
$$a_{ff} p \tan \delta(p) = \frac{1}{a_{dd}/a_{ff}} + \frac{1}{2} \left(r_{dd}/a_{ff} \right) (a_{ff} p)^2 + \dots, \quad (3.6)$$

Burada a_{dd} ve r_{dd} dimer-dimer saçılma uzunluğu ve efektif menzildir.

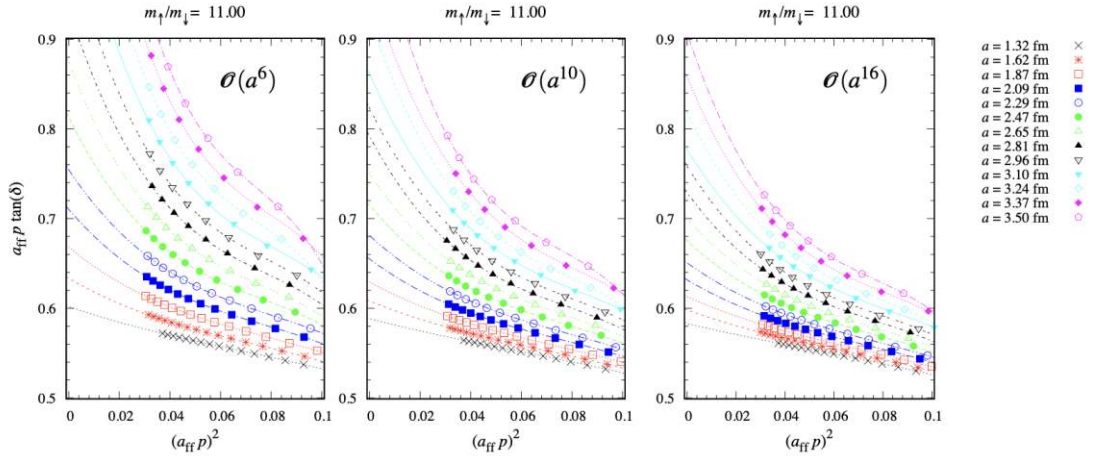


Şekil 3.7. Efektif menzil açılımı $a_{ff} p \tan \delta(p)$ 'nın $(a_{ff} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütlesine oranı 1.0'dur.

Dimer-dimer hesaplamalarımızdan elde ettiğimiz sonuçların bir kısmı Şekil 3.7, Şekil 3.8 ve Şekil 3.9'da sunulmaktadır. Bu şekillerdeki noktalar, örgü hesaplamalarımızdan elde ettiğimiz veri temsil etmektedir. Diğer taraftan, bu şekillerdeki veri noktaları ile bağlantılı çizgiler ise, a_{dd}/a_{ff} ve (r_{dd}/a_{ff}) saçılma parameterlerinin elde edilmesi amacıyla noktalarla temsil edilen verilerin Denk. (3.4)'ye uydurulmasıyla (fitting) elde edilen sonuçları temsil etmektedir. Saçılma parametrelerini elde etmek için



Şekil 3.8. Efektif menzıl açılımı $a_{\text{ff}} p \tan \delta(p)$ 'nın $(a_{\text{ff}} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütleline oranı 5.0'dur.

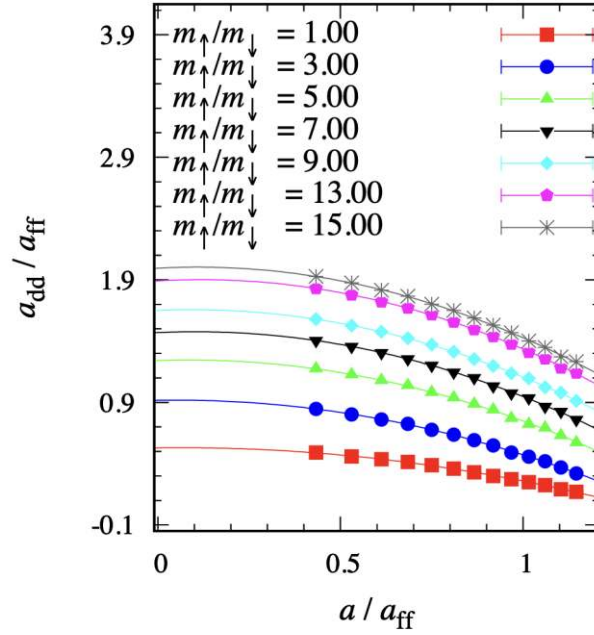


Şekil 3.9. Efektif menzıl açılımı $a_{\text{ff}} p \tan \delta(p)$ 'nın $(a_{\text{ff}} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütleline oranı 11.0'dur.

gerçekleştirdiğimiz bu uydurma (fitting) işleminden dolayı, Şekil 3.7, Şekil 3.8 ve Şekil 3.9'da sunulan sonuçlarımız, $a_{\text{ff}} p \tan \delta(p)$ niceliği formatında $(a_{\text{ff}} p)^2$ 'nin bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir.

Şekil 3.7, Şekil 3.8 ve Şekil 3.9 örgü sonuçlarımızı, $m_1/m_2 = 1.0$, $m_1/m_2 = 5.0$ ve $m_1/m_2 = 11.00$ olmak üzere üç farklı kütle oranları, örgü aralığının 13 farklı değeri ve 3 farklı mertebeden sonlu farklar yöntemi için göstermektedir. Bu şekillerden görüldüğü gibi tüm m_1/m_2 oranları için, $\mathcal{O}(a^6)$ mertebeden sonlu farklar

yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların $(a_{ff} p)^2 = 0$ noktasında örgü aralığına bağlı olarak çok daha geniş bir aralıkta sonuçlar verdiği anlaşılmaktadır. Bu sonuç, mertebeden sonlu farklar yöntemi ile elde edilen sonuçların örgü aralığına daha güçlü bir bağımlılık göstermesi olarak yorumlanabilir. Aşağıda, yalnızca $\mathcal{O}(a^{16})$ mertebeden sonlu farklar yönteminin kullanıldığı hesaplamalara ait sonuçlar sunulacaktır.



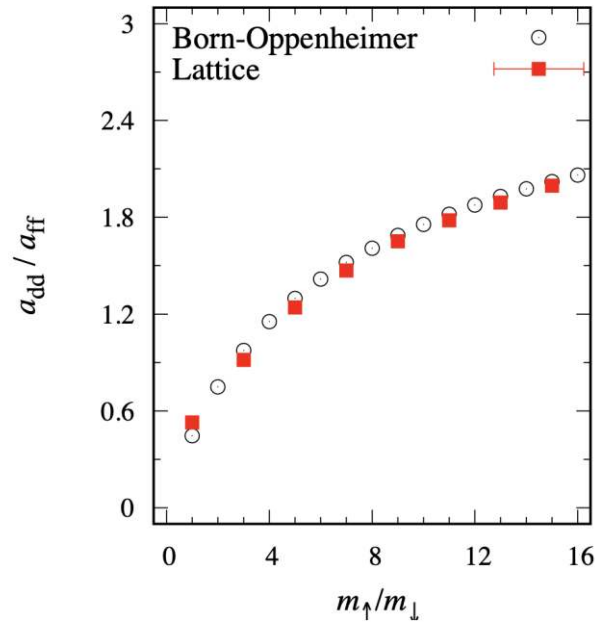
Şekil 3.10. Dimer-dimer evrensel saçılma uzunluğunun a/a_{ff} 'nin fonksiyonu olarak gösterimi. Burada verilen sonuçlar, a_{dd}/a_{ff} 'nin $a/a_{ff} \rightarrow 0$ limitindeki sonuçlarını göstermektedir. Sonuçlar farklı $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ kütle oranları için sunulmuştur.

Şekil 3.10, dimer-dimer evrensel saçılma uzunluğu a_{dd}/a_{ff} 'nin bazı kütle oranları için elde ettiğimiz sonuçların detaylarını göstermektedir. Şekildeki eksenlerin birimlerini eşitleme adına, a_{dd}/a_{ff} niceliği a/a_{ff} 'nin bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir. Şekil 3.10'da görüldüğü gibi, a_{dd}/a_{ff} niceliği örgü aralığı a 'nın 1.3 – 3.5 fm aralığından farklı değerleri için gerçekleştirilmiş ve a_{dd}/a_{ff} niceliğinin $a \rightarrow 0$ limitindeki sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca, Şekil 3.10'daki sonuçlar, $a \neq 0$ örgü aralığından kaynaklanan sistematik hatalar, $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ oranının büyük olduğu durumlarda önemli ölçüde olduğunu ve $a \rightarrow 0$ limitindeki değerlerin elde edilmesinin gerekliliğini göstermektedir.

Son olarak, bu bölümün ana sonuçlarını Şekil 3.11'de Born-Oppenheimer

yaklaşımı ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalı olarak sunmaktayız. Bu şekil, dimer-dimer evrensel saçılma uzunluğu a_{dd}/a_{ff} 'nın $a \rightarrow 0$ limitindeki değerlerini kütle oranı $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ 'nin bir fonksiyonu olarak göstermektedir. Şekil 3.11'deki sonuçların fiziksel yorumu aşağıda detaylı olarak tartışılmaktadır.

$m_{\uparrow} \rightarrow \infty$ durumlarda, göreceli olarak çok hafif olan spin- $\downarrow$ parçacıkları iki spin- $\uparrow$ parçacıkları arasında değiş-tokuş edilir ve kuvvet taşıyıcısı olarak görev alır. Bu durum spin- $\uparrow$ parçacıkları arasında $m_{\downarrow}^{-1}$ mezilli bir efektif kuvvetin ortaya çıkmasına neden olur. Bunun sonucu olarak, dimer-dimer evrensel saçılma uzunluğu $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ kütle oranının bir fonksiyonu olarak artar.



Şekil 3.11. Dimer-dimer evrensel saçılma uzunluğunun kütle oranı $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ 'nin fonksiyonu olarak gösterimi. Kırmızı kare noktalar örgü sonuçlarını ve siyah yuvarlak noktalar ise Born-Oppenheimer yaklaşımı ile elde edilen sonuçları göstermektedir.

$m_{\uparrow} \rightarrow \infty$ limitinde, Born–Oppenheimer yaklaşımı, fermiyon-dimer sisteminin çözümü için kullanılabilecek elverişli bir yöntem olmaktadır. Born–Oppenheimer yaklaşımının detayları Bölüm A.1'de detaylı olarak tartışılmaktadır. Bölüm A.1'de elde edilen çözümlerden görüldüğü gibi dimer ve dimer arasındaki kuvvet itici bir kuvvettir ve bunun sonucu olarak kütle oranının artmasıyla dimer-dimer evrensel saçılma uzunluğunun büyüklüğü artmaktadır. Örgü sonuçlarını kıyaslama adına,

Denk. (A.13) ile tanımlanan Born–Oppenheimer denklemi çözülerek dimer-dimer evrensel saçılma uzunluğunu elde edilmiştir ve sonuçlar Şekil 3.11'de sunulmuştur. Görüldüğü gibi $m_{\uparrow} \rightarrow \infty$ limitlerinde örgü sonuçları ile Born–Oppenheimer sonuçları tamamen uyum içindedir.

Şekil 3.11'de vurgulanması gereken diğer bir nokta ise, $\mathcal{O}(a^{16})$ mertebeden sonlu farklar yöntemini kullanmamız neticesinde, bu çalışmada elde edilen sonuçların $\mathcal{O}(a^6)$ mertebeden sonlu farklar yöntemini kullanan Ref. Elhatisari 2018'da elde edilen sonuçlara kıyasla Born–Oppenheimer sonuçları ile daha iyi uyum içinde olmaktadır.

3.2 Üç Boyutta İki Bileşenli Fermiyonlar

Bir önceki bölümde yapılan çalışmalarla, kullandığımız yöntem ve hesaplamaların güvenilirliğini sağladıktan sonra, bu bölümde hesaplamalarımızı literatürde daha önce gerçekleştirilmemiş örgü hesaplamalarına genişleteceğiz.

3.2.1 Üç Boyutta Fermiyon-Fermiyon Saçılımı

İlk olarak, bir spin- $\uparrow$ ve bir spin- $\downarrow$ türünde parçacıktan oluşan iki-fermiyon sistemini inceleyelim. Buradaki hesaplamalarımızda, parçacıkların üç-boyutlu delta-fonksiyon potansiyel ile etkileştiğini varsayıyoruz. Dolayısıyla, Denk. (2.30)'de tanımlanan potansiyel aşağıdaki formda olur:

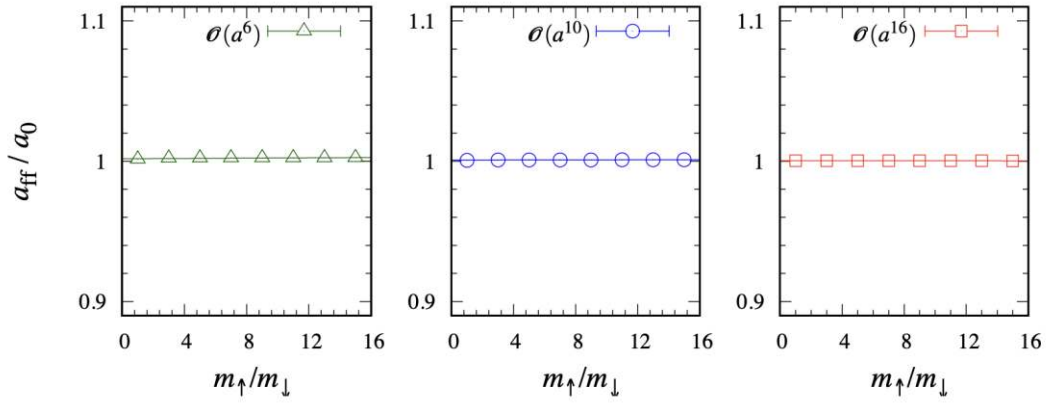
$$\hat{V} = \frac{C_0}{2} \sum_{\vec{n}} b_{\uparrow}^{\dagger}(\vec{n}) b_{\uparrow}(\vec{n}) b_{\downarrow}^{\dagger}(\vec{n}) b_{\downarrow}(\vec{n}) \delta(\vec{n} - \vec{n}') \quad (3.7)$$

Burada C_0 etkileşimin gücünü tanımlar ve $\vec{n}$ üç boyutta örgü noktalarını temsil eder. Daha önce bir-boyuttaki hesaplamalarda tartışıldığı gibi, Pauli dışarlama ilkesinden dolayı aynı spin bileşenine sahip olan parçacıklar delta-fonksiyon potansiyel ile etkileşmezler. Dolayısıyla, Denk. (3.7)'de yazılan potansiyel, delta-fonksiyon potansiyel ile etkileşen ve iki-bileşenli fermiyonlardan oluşan tüm sistemlerde geçerlidir ve bu çalışmada analiz edilen tüm sistemlerde kullanılmaktadır.

Bu noktada, incelemek istediğimiz sistemleri tanımlayan denklemleri (2.30) ve (3.7) tanımlamış olduk. Bir sonraki adımda bu denklemleri MATLAB programında

uygulayarak ve MATLAB'ın dahili fonksiyonlarından `eigs()` kullanarak, Hamiltoniye'nin özdeğer ve özvektörlerini elde ederiz.

Denk. (3.7)'de tanımlanan etkileşimin gücü C_0 'yi, dimer bağlanma enerjisi B_d elde edilecek şekilde belirleriz. Bu ayarlama yapılırken, sonlu örgü boyundan kaynaklanabilecek tüm hataları ortadan kaldırma adına örgünün boyu L için çok büyük değerler seçeriz. Bu işlem sonrasında belirlenen parametreleri kullanarak hesaplamalarımızı gerçekleştiririz. Farklı L değerleri için örgü Hamiltoniye'nini tanımlar ve iki-fermion sisteminin düşük enerji seviyelerine karşılık gelen özdeğeri E 'yi hesaplarız. Ayrıca, Denk. (2.23)–(2.25)'deki formülde kullanılmak üzere, $p = \sqrt{2\mu E}$ bağıntısını kullanarak enerji özdeğerlerinden fermiyonlar arasındaki bağıl momentum elde edebiliriz. Şekil 3.12'de örgü hesaplamalarında elde edilen fermiyon-fermion saçılma uzunluğu sonuçları, a_{ff} , analitik çözümlerle, a_0 , karşılaştırmalı formda sunulmuştur. Örgüde fermiyon-fermion saçılma uzunluğu, örgü hesaplamalarında elde edilen momentum p ve saçılma faz kaymaları $\delta(p)$ 'yi Denk. (2.20) ile tanımlı efektif menzil açılımında kullanarak elde ederiz. Saçılma uzunluğunun analitik sonuçları ise, üç-boyutta da geçerli olan Denk. (2.11) kullanılarak elde edilmiştir. Şekil 3.12'de sunulan hesaplamalar 1.0 ile 15.0 aralığından değişen $m_\uparrow/m_\downarrow$ oranları ve farklı örgü aralığı değerleri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bir boyuttaki analizlerimize benzer olarak, kullanılan sonlu farklar yöntemi mertebesinde kaynaklanabilecek olası sistematik hataları inceleme adına $\mathcal{O}(a^6)$, $\mathcal{O}(a^{10})$ ve $\mathcal{O}(a^{16})$ olmak üzere üç farklı mertebeden tanımlanan kinetik terimler ile hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Şekil 3.12'de görüldüğü gibi,



Şekil 3.12. Üç-boyutta örgü hesaplamalarından elde edilen fermiyon-fermion saçılma uzunluğunun analitik çözümlere oranı.

$m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ oranının çok büyük olduğu durumlarda örgü sonuçları ile analitik sonuçlar arasında çok küçük sapmalar olmasına rağmen, genel anlamda tutarlılık gözlenmektedir. Ayrıca, $\mathcal{O}(a^6)$ mertebeden sonlu farklar yönteminin kullanılması durumunda, yüksek mertebe ile yapılan hesaplamalara kıyasla gözle görülür sapmalar Şekil 3.12'de gözlenabilmektedir. Benzer biçimdeki karşılaştırma analizlerimizi ikiden fazla fermiyonların olduğu sistemler için de gerçekleştireceğiz.

3.2.2 Üç Boyutta Fermion-Dimer Saçılımı

Son bölümümüzde, iki spin- $\uparrow$ ve bir spin- $\downarrow$ türünde parçacıktan oluşan üç-fermion sistemini üç-boyutlu uzayda inceleyeceğiz. Buradaki hesaplamalarımızda, bir önceki bölümde olduğu gibi, parçacıkların delta-fonksiyon potansiyel gibi bir potansiyel ile etkileştiklerini varsayıyoruz. Dolayısıyla, Denk. (3.7)'de tanımlanan potansiyel buradaki hesaplamalarımızda da geçerli olmaktadır. Düşük enerji limitlerinde, iki bileşenli fermiyonlardan oluşan sistemlerde iki-parçacık etkileşmelerinin ötesindeki üç-, dört-parçacık vb. etkileşmelerin hiçbir katkısı sağlamazlar (Elhatisari, Katterjohn, et al. 2017), bu nedenle burada inceleyeceğimiz fermiyon-dimer sistemini tanımlayan potansiyel yalnızca Denk. (3.7) ile tanımlı olur.

Bir sonraki adımda, fermiyon-dimer sisteminin Hamiltoniyenini MATLAB programında yapılandırırız ve Lanczos özvektör yöntemini (Lanczos 1950) kullanarak farklı L örgü boyutları için sistemin özdeğerlerini hesaplarız. Bu hesaplamalar sonucunda arzu edilen fermiyon-dimer saçılma faz kaymalarını elde etmek için gerekli

ve yeterli verileri elde etmiş oluruz. Bölüm 2.1.3' detaylı olarak tartışıldığı gibi örgü hesaplamalarında L örgü boyutu ve buna karşılık gelen bağıl momentumu Lüscher yönteminde kullanılarak saçılma faz kaymalarını elde ederiz. Bölüm 3.2'de, fermiyon-fermion sistem enerjisini $p = \sqrt{2\mu E}$ bağıntısında kullanarak bağıl momentumları elde etmiştik. Fakat, Bölüm 3.1.2'de datyly olarak tartışıldığı gibi, dimer gibi bir kompozit yapının var olduğu durumunda bağıl momentumun hesaplanması biraz daha karmaşık hal almaktadır. Dolayısıyla, buradaki hesaplamalarımızda elde ettiğimiz dimer dispersiyon bağıntısını Denk. (3.2)'ye uydurarak (fitting) dimer'ın etkin kütlelerini elde ederiz.

Bu noktada, fermiyon-dimer saçılma faz kaymalarını hesaplayabilmek için ihtiyacımız olan tüm parametre ve bağıntıları elde etmiş bulunmaktayız. Örgü hesaplamalarından elde edilen verilen Denk. (3.3)'de kullanılarak bağıl momentum, p , elde edilir ve Bölüm 2.1.3'de tanımlanan Lüscher yöntemini kullanılarak saçılma faz kaymaları elde edilir.

Fermiyon-dimer hesaplamalarımızı 9 farklı $m_1/m_2 = 0.2 - 9.0$ kütle oranları için gerçekleştiririz. Ayrıca örgü sistemlerinin kesikli aralıklı yapısından kaynaklanabilecek herhangi sistematik hatayı ortadan kaldırma adına, hesaplamalarımızı 19 farklı $a = 1.3 - 4.2$ fm örgü aralığı için gerçekleştirerek $a \rightarrow 0$ limitindeki değeri elde ederiz. Son olarak, örgü kinetik terimindeki Laplace operatörü tanımlamak için kullanılan sonlu farklar yöntemi mertebesinden kaynaklanabilecek olası sistematik hataları kontrol etmek için, hesaplamalarımızı 3 farklı mertebeden sonlu farklar yöntemi kullanarak gerçekleştiririz.

Fermiyon-dimer sistemi için Denk. (2.20)'de tanımlı saçılma parametrelerini elde etme adına, örgü hesaplamalarından elde ettiğimiz saçılma faz kaymalarını ve karşılık gelen bağıl momentumu aşağıdaki denklemde kullanarak fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğu a_{fd}/a_{ff} elde ederiz.

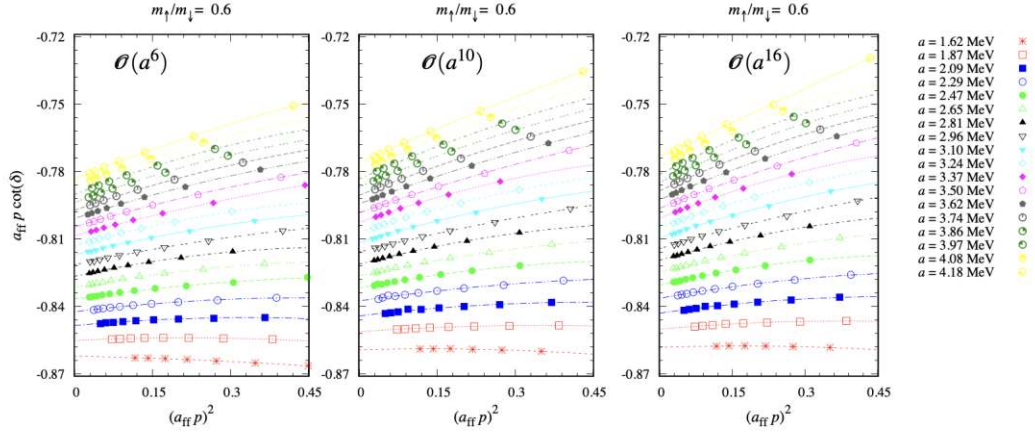
$$a_{ff} p \cot \delta_0(p) = \frac{-1}{a_{fd}/a_{ff}} + \frac{1}{2} \left(r_{fd}/a_{ff} \right) \left(a_{ff} p \right)^2 + \dots \quad (3.8)$$

Burada a_{fd} ve r_{fd} fermiyon-dimer saçılma uzunluğu ve efektif menzildir. Fermiyon-dimer hesaplamalarımızdan elde ettiğimiz sonuçların bir kısmı Şekil 18, Şekil 19 ve Şekil 20'te sunulmaktadır. Bu şekillerdeki noktalar, örgü

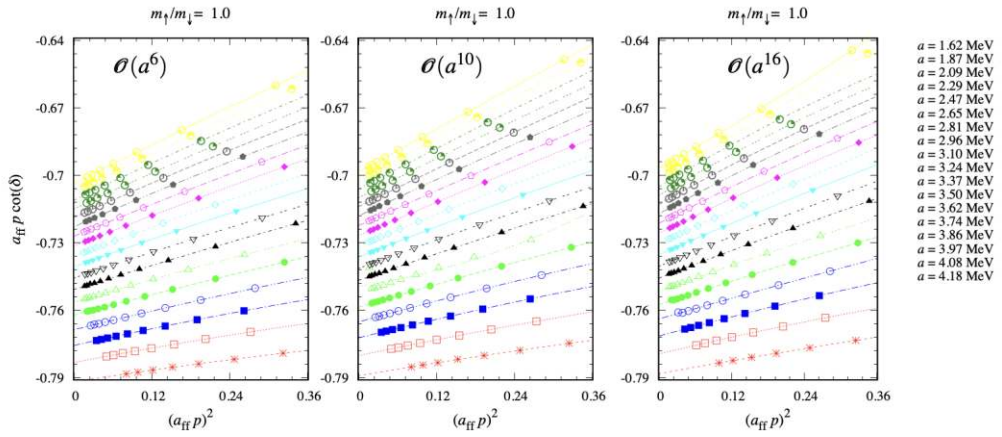
hesaplamalarımızdan elde ettiğimiz veri temsil etmektedir. Diğer taraftan, bu şekillerdeki veri noktaları ile bağlantılı çizgiler ise, a_{fd}/a_{ff} ve (r_{fd}/a_{ff}) saçılma parameterlerinin elde edilmesi amacıyla noktalarla temsil edilen verilerin Denk. (3.8)'ye uydurulmasıyla (fitting) elde edilen sonuçları temsil etmektedir. Saçılma parametrelerini elde etmek için gerçekleştirdiğimiz bu uydurma (fitting) işleminden dolayı, Şekil 3.13, Şekil 3.14 ve Şekil 3.15'te sunulan sonuçlarımız, $a_{ff} p \cot \delta(p)$ niceliği formatında $(a_{ff} p)^2$ 'nin bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir.

Şekil 3.13, Şekil 3.14 ve Şekil 3.15 örgü sonuçlarımızı, $m_{\uparrow}/m_{\downarrow} = 0.6$, $m_{\uparrow}/m_{\downarrow} = 1.0$ ve $m_{\uparrow}/m_{\downarrow} = 7.0$ olmak üzere üç farklı kütle oranları, örgü aralığının 19 farklı değeri ve 3 farklı mertebeden sonlu farklar yöntemi için göstermektedir.





Şekil 3.13. Efektif menzil açılımı $a_{ff} p \tan \delta(p)$ 'nın $(a_{ff} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütlesine oranı 0.6'dur.



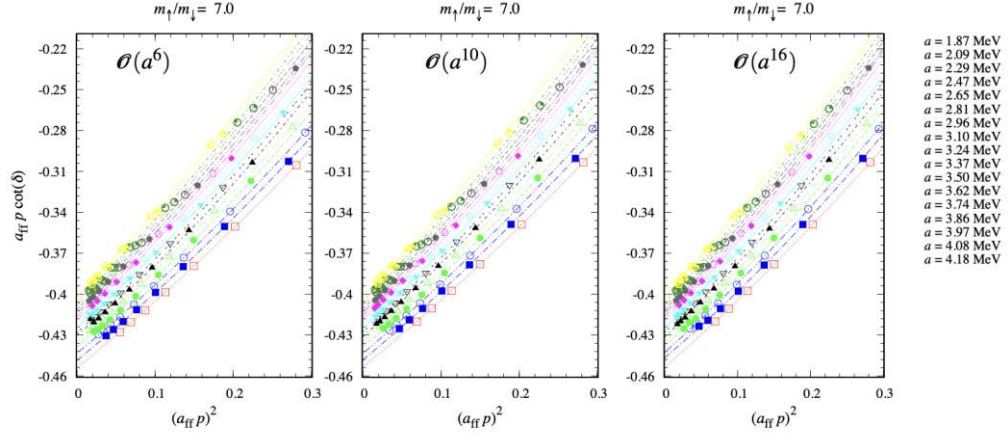
Şekil 3.14. Efektif menzil açılımı $a_{ff} p \tan \delta(p)$ 'nın $(a_{ff} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütlesine oranı 1.0'dur.

Bu şekillerden görüldüğü gibi kullanılan sonlu farklar yöntemleri, hem verilerin $(a_{ff} p)^2 = 0$ noktasındaki ile değerini, yani a_{fd} 'ni, hem de verilerin oluşturduğu eğrinin eğimini, yani r_{fd} 'ni, etkilemektedir. Bu nedenle, aşağıda, yalnızca $\mathcal{O}(a^{16})$ mertebeden sonlu farklar yönteminin kullanıldığı hesaplamalara ait sonuçlar sunulacaktır.

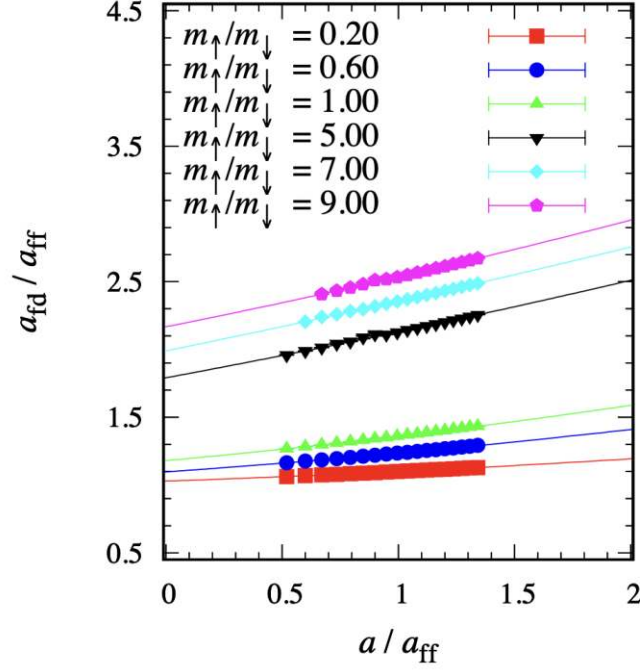
Şekil 3.16, fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğu a_{fd}/a_{ff} 'nin bazı kütle oranları için elde ettiğimiz sonuçların detaylarını göstermektedir. Şekildeki eksenlerin birimlerini eşitleme adına, a_{fd}/a_{ff} niceliği a/a_{ff} 'nın bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir. Şekil 3.16'da görüldüğü gibi, a_{fd}/a_{ff} niceliği örgü aralığı a 'nın 1.3 –

4.2 fm aralığında farklı değerleri için gerçekleştirilmiş ve a_{fd}/a_{ff} niceliğinin $a \rightarrow 0$ limitindeki sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca, Şekil 21'deki sonuçlar, $a \neq 0$ örgü aralığından kaynaklanan sistematik hatalar, $m_\uparrow/m_\downarrow$ oranının küçük olduğu





Şekil 3.15. Efektif menzil açılımı $a_{\text{ff}} p \tan \delta(p)$ 'nın $(a_{\text{ff}} p)^2$ 'nin fonksiyonu olarak grafiği. Buradaki hesaplamalarda spin- $\uparrow$ parçacığının spin- $\downarrow$ parçacığının kütesine oranı 7.0'dur.

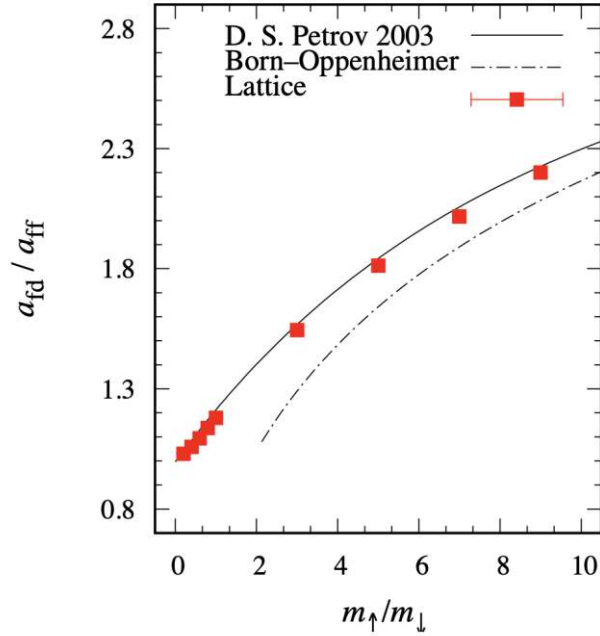


Şekil 3.16. Fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğunun a/a_{ff} 'nin fonksiyonu olarak gösterimi. Burada verilen sonuçlar, $a_{\text{fd}}/a_{\text{ff}}$ 'nin $a/a_{\text{ff}} \rightarrow 0$ limitindeki sonuçlarını göstermektedir. Sonuçlar farklı $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ kütle oranları için sunulmuştur.

durumlarda ihmal edilebilir olmasına rağmen, $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ oranının büyük olduğu durumlarda sonuçları etkileyebilecek ölçüdedir ve $a \rightarrow 0$ limitindeki değerlerin elde edilmesinin gerekliliğini göstermektedir.

Son olarak, bu bölümün ana sonuçlarını Şekil 3.17'de Born-Oppenheimer

yaklaşımı ve sürekli uzayda gerçekleştirilen hesaplamalar (D. S. Petrov 2003) ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalı olarak sunmaktayız. Bu şekil, fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğu a_{fd}/a_{ff} 'nin $a \rightarrow 0$ limitindeki değerlerini kütle oranı



Şekil 3.17. Fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğunun kütle oranı $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ 'nin fonksiyonu olarak gösterimi. Kırmızı kare noktalar örgü sonuçlarını, siyah düz çizgi D. S. Petrov 2003 tarafından elde edilen sonuçları ve kesikli-noktadaki siyah çizgi Born-Oppenheimer yaklaşımı ile elde edilen sonuçları göstermektedir.

$m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$ 'nin bir fonksiyonu olarak göstermektedir. Şekil 3.17'deki sonuçların fiziksel yorumu aşağıda detaylı olarak tartışılmaktadır.

$m_{\downarrow} \rightarrow \infty$ durumlarda, spin- $\downarrow$ parçacığı neredeyse hareketsiz bir parçacık olarak değerlendirilebilir ve bu özelliğinden dolayı, spin- $\downarrow$ parçacığının koordinat merkezinde sabit bir parçacık olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda, incelediğimiz fermiyon-dimer sistemi, koordinat merkezindeki sabit bir çekici delta-fonksiyon potansiyeli etkisinde hızlı hareket eden iki hafif spin- $\uparrow$ parçacığından oluşan bir sisteme indirgenir. Böyle bir sistemde, spin- $\uparrow$ parçacıklarından biri merkezdeki çekiçi potansiyel tarafından çekilerek kompozit bir dimer oluşturur ve bu spin- $\uparrow$ parçacık bağlı-durum dalga fonksiyonu ile temsil edilir. Kuantum mekaniğinin temel prensiplerinden biri dalga fonksiyonları arasındaki ortogonallikten, bu bağlı durum dalga fonksiyonun diğer tüm saçılma durum dalga fonksiyonlarına dik olduğunu biliyoruz. Bunun sonucu olarak, ikinci spin- $\uparrow$ parçacığı, koordinat merkezindeki

çekici delta-fonksiyon potansiyeline bağlı halde bulunan diğer spin- $\uparrow$ parçacığının varlığından tamamen bağımsız bir biçimde koordinat merkezindeki delta-fonksiyon potansiyelinden saçılır. Sonuç olarak, $m_\downarrow \rightarrow \infty$ limitinde, fermiyon-dimer saçılma problemi, fermiyon-fermion saçılma problemine indirgenir ve fermiyon-dimer saçılma uzunluğu ise fermiyon-fermion saçılma uzunluğu eşit olur. Bu durum Şekil 3.17'de net olarak gözlenmektedir ve $m_\downarrow \rightarrow \infty$ limitinde $a_{fd}/a_{ff} \rightarrow 1$ olmaktadır.

$m_\uparrow \rightarrow \infty$ durumlarda, bu çok ağır spin- $\uparrow$ fermiyonlar, çok hafif olan spin- $\downarrow$ parçacığının değiş-tokuşu sonucunda oluşan bir alanda çok yavaş hareket ederler. Bu durum spin- $\uparrow$ parçacıkları arasında $m_\downarrow^{-1}$ meziline sahip bir efektif kuvvetin ortaya çıkmasına neden olur. Bunun sonucu olarak, fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğu $m_\uparrow/m_\downarrow$ kütle oranının bir fonksiyonu olarak artar.

Örgü sonuçlarını kıyaslama adına, Denk. (A.6) ile tanımlanan Born–Oppenheimer denklemi üç boyutlu uzay durumuna genişletilerek çözülmüştür. Fermiyon-dimer sisteminin evrensel saçılma uzunluğunu Born–Oppenheimer yaklaşımı kullanılarak elde edilmiştir ve sonuçlar Şekil 3.17'de sunulmuştur. Ayrıca, ilgili problemin literatürde mevcut olan ve sürekli uzay limitinde gerçekleştirilen bir diğer hesaplama sonuçları da Şekil 3.17'de sunulmuştur. Görüldüğü gibi örgü sonuçları (D. S. Petrov 2003) sonuçları ile tamamen uyumlu olmaktadır. Ayrıca, bu hesaplamaların $m_\uparrow \rightarrow \infty$ limitlerinde ile Born–Oppenheimer sonuçları tamamen uyum içinde olduğu görülmektedir.

4 SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Düşük enerji limitinde veya parçacıklar arası mesafenin çok büyük olduğu durumlarda, iki bileşenli fermiyonlardan oluşan sistemler evrensel özelliklere sahiptirler. Evrensellik özelliği sayesinde, söz konusu sistemlere ait tüm özellikler, fermiyon-fermion saçılma uzunluğu a_{ff} cinsinden tanımlanır ve sistem a_{ff} ile ölçeklendirilir. Bu tez çalışmasında örgü efektif alan teorisini kullanarak, iki bileşenli fermiyonlardan oluşan sistemlerde sözü edilen evrensellik özelliği incelenmiştir. Bu çalışmada, delta-fonksiyon potansiyel ile etkileşen ve farklı kütlelere sahip iki bileşenli fermiyonlar ele alınmıştır. Fermiyon-fermion saçılma uzunluğu a_{ff} 'nin büyük değerler aldığı durumlar göz önünde bulundurularak evrensellik limitlerinde analizler gerçekleştirilmiştir. Bir-boyutta fermiyon-dimer saçılma uzunluğu, bir-

boyutta dimer-dimer saçılma uzunluğu ve üç-boyutta fermiyon-dimer saçılma uzunluğu söz konusu limitler hesaplanmıştır. Fermiyon-fermion saçılma uzunluğunun çeşitli değerlerini kullanarak hesaplamalar tekrarlanmış ve ardından kesikli örgü yapısından ortaya çıkabilecek hataları ortadan kaldırma adına örgü sonuçlarının süreklilik sınırı ekstrapolasyonları gerçekleştirilmiştir.

Farklı kütlelere sahip iki bileşenli fermiyonlarda kütle oranı buradaki evrensellik tanımında yeni bir parametre olarak değerlendirilir ve sistemin bazı özelliklerinde bu kütle oranlarına bağlı olarak değişiklikler gözlemlenir. Bu durumları inceleme adına, çeşitli kütle oranları için bir-boyutta fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğu, bir-boyutta dimer-dimer evrensel saçılma uzunluğu ve üç-boyutta fermiyon-dimer evrensel saçılma uzunluğu hesaplanmıştır. Bu çalışmada hesaplanan tüm evrensel saçılma uzunluklarının, iki bileşenli fermiyonların kütle oranına bağlı olarak logaritmik bir şekilde arttığını bulunmuştur. Kompozit sistemlerin saçılma özelliklerinin bilinmesi, çok cisim dinamiğinin anlaşılmasında büyük önem taşımaktadır. Bu amaçla fermiyon-dimer ve dimer-dimer sistemlerinin saçılma özelliklerini ve evrensel fermiyon-dimer ve evrensel dimer-dimer saçılma uzunluklarının kütle oranına bağımlılığını analiz edilmiştir.

Bu tez çalışmasında, öncelikle daha önce gerçekleştirilmiş ve literatürde mevcut olan bir-boyutta örgü hesaplamaları gerçekleştirilmiştir. Bir sonraki adımda ise üç-boyutta fermiyon-dimer hesaplamaları gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada gerçekleştirilen üç-boyutlu hesaplamalar, örgü etkin alan teorisinin kullanılarak gerçekleştirilmiş ilk çalışma özelliğini taşımaktadır.

KAYNAKLAR

- Aoki, S. et al. (2016). “Light meson electromagnetic form factors from three-flavor lattice QCD with exact chiral symmetry”. In: *Phys. Rev. D* 93.3, p. 034504.
- Aoki, Sinya (2013). “Nucleon-nucleon interactions via Lattice QCD: Methodology: HAL QCD approach to extract hadronic interactions in lattice QCD”. In: *Eu Phys J. A* 49, p. 81.
- Barlette, Vania E, Marcelo M Leite, Sadhan K Adhikari (Aug. 2000). “Quantum scattering in one dimension”. In: *European Journal of Physics* 21.5, pp. 435–440.
- Beane, S. R. et al. (2011). “Nuclear Physics from Lattice QCD”. In: *Prog. Part. Nucl. Phys.* 66, pp. 1–40.
- Beane, Silas R. et al. (2015). “Ab initio Calculation of the $np \rightarrow d\gamma$ Radiative Capture Process”. In: *Phys. Rev. Lett.* 115.13, p. 132001
- Bedaque, P. F., U. van Kolck (2002). “Effective field theory for few nucleon systems”. In: *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 52, pp. 339–396.
- Bedaque, Paulo F., H. W. Hammer, U. van Kolck (1998). “Effective theory for neutron deuteron scattering: Energy dependence”. In: *Phys. Rev. C* 58, R641–R644.
- Bedaque, Paulo F., U. van Kolck (1998). “Nucleon deuteron scattering from an effective field theory”. In: *Phys. Lett. B* 428, pp. 221–226.
- Bedaque, Paulo F., Gautam Rupak, et al. (2003). “Low-energy expansion in the three-body system to all orders and the triton channel”. In: *Nucl. Phys. A* 714, pp. 589–610.
- Bethe, H. A. (1949). “Theory of the Effective Range in Nuclear Scattering”. In: *Phys. Rev.* 76, pp. 38–50. doi: 10.1103/PhysRev.76.38.
- Borasoy, Bugra et al. (2007). “Two-particle scattering on the lattice: Phase shifts, spin-orbit coupling, and mixing angles”. In: *Eur. Phys. J. A* 34, pp. 185–196
- Borsanyi, Sz. et al. (2015). “Ab initio calculation of the neutron-proton mass difference”. In: *Science* 347, pp. 1452–1455.
- Bour, Shahin, H.-W. Hammer, et al. (2012). “Benchmark calculations for elastic fermion-dimer scattering”. In: *Phys. Rev. C* 86, p. 034003.
- Bour, Shahin, Sebastian Koenig, et al. (2011). “Topological phases for bound states moving in a finite volume”. In: *Phys. Rev. D* 84, p. 091503.
- Braaten, E., H.-W. Hammer (2006). “Universality in few-body systems with large scattering length”. In: *Phys. Rept.* 428, pp. 259–390.
- Braaten, Eric, Masaoki Kusunoki (2004). “Low-energy universality and the new charmonium resonance at 3870-MeV”. In: *Phys. Rev. D* 69, p. 074005.
- Carlson, J., V. R. Pandharipande, R. B. Wiringa (1984). “Variational calculations of resonant states in ^4He ”. In: *Nucl. Phys. A* 424, pp. 47–59.
- Choi, S. K. et al. (2003). “Observation of a narrow charmonium-like state in exclusive $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^- J/\psi$ decays”. In: *Phys. Rev. Lett.* 91, p. 262001.
- D’Incao, J. P. et al. (Mar. 2009). “Dimer-dimer collisions at finite energies in two-component Fermi gases”. In: *Phys. Rev. A* 79 (3), p. 030501.
- Durr, S. et al. (2008). “Ab-Initio Determination of Light Hadron Masses”. In: *Science* 322, pp. 1224–1227.
- Elhatisari, Serdar (2014). “Low Energy Continuum and Lattice Effective Field Theories.” PhD thesis. North Carolina State U.
- (2018). “Lattice calculations for two-component fermion systems with unequal

- masses: one dimension”. In: *Turk. J. Phys.* 42.6, pp. 631–640.
- Elhatisari, Serdar, Kris Katterjohn, et al. (2017). “Universal dimer–dimer scattering in lattice effective field theory”. In: *Phys. Lett. B* 768, pp. 337–344.
- Elhatisari, Serdar, Dean Lee (2014). “Fermion-dimer scattering using an impurity lattice Monte Carlo approach and the adiabatic projection method”. In: *Phys. Rev. C* 90.6, p. 064001.
- Epelbaum, E. (2006). “Few-nucleon forces and systems in chiral effective field theory”. In: *Prog. Part. Nucl. Phys.* 57, pp. 654–741.
- Epelbaum, E., Walter Gloeckle, Ulf-G. Meissner (1998). “Nuclear forces from chiral Lagrangians using the method of unitary transformation. 1. Formalism”. In: *Nucl. Phys. A* 637, pp. 107–134.
- Epelbaum, E., H. Krebs, U. G. Meißner (2015). “Precision nucleon-nucleon potential at fifth order in the chiral expansion”. In: *Phys. Rev. Lett.* 115.12, p. 122301.
- Epelbaum, E., A. Nogga, et al. (2002). “Three nucleon forces from chiral effective field theory”. In: *Phys. Rev. C* 66, p. 064001.
- Epelbaum, Evgeny, Ulf-G. Meissner, Walter Gloeckle (2003). “Nuclear forces in the chiral limit”. In: *Nucl. Phys. A* 714, pp. 535–574.
- Feshbach, Herman (1962). “A Unified theory of nuclear reactions. 2.” In: *Annals Phys.* 19, pp. 287–313.
- Friar, James Lewis, S. A. Coon (1994). “Non-adiabatic contributions to static two-pion-exchange nuclear potentials”. In: *Phys. Rev. C* 49, pp. 1272–1280.
- Gabbiani, Fabrizio, Paulo F. Bedaque, Harald W. Griesshammer (2000). “Higher partial waves in an effective field theory approach to nd scattering”. In: *Nucl. Phys. A* 675, pp. 601–620.
- Griffiths, D.J. (2017). *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press.
- Guo, Feng-Kun et al. (2018). “Hadronic molecules”. In: *Rev. Mod. Phys.* 90.1. [Erratum: *Rev. Mod. Phys.* 94, 029901 (2022)], p. 015004.
- Hammer, H.-W., S. König, U. van Kolck (2020). “Nuclear effective field theory: status and perspectives”. In: *Rev. Mod. Phys.* 92.2, p. 025004.
- Inoue, Takashi et al. (2015). “Medium-heavy nuclei from nucleon-nucleon interactions in lattice QCD”. In: *Phys. Rev. C* 91.1, p. 011001.
- Iskin, M (2010). “Dimer-atom scattering between two identical fermions and a third particle”. In: *Physical Review A* 81.4, p. 043634.
- Kaiser, Norbert (2001). “Chiral 2 pi exchange NN potentials: Two loop contributions”. In: *Phys. Rev. C* 64, p. 057001.
- Kaiser, Norbert, R. Brockmann, W. Weise (1997). “Peripheral nucleon-nucleon phase shifts and chiral symmetry”. In: *Nucl. Phys. A* 625, pp. 758–788.
- Kolck, U. van (1994). “Few nucleon forces from chiral Lagrangians”. In: *Phys. Rev. C* 49, pp. 2932–2941.
- (1999). “Effective field theory of short range forces”. In: *Nucl. Phys. A* 645, pp. 273–302.
- Kurth, Thorsten et al. (2014). “Phase shifts in $I = 2$ pp -scattering from two lattice approaches”. In: *PoS LATTICE2013*, p. 224.
- Lanczos, Cornelius (1950). “An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators”. In: *J. Res. Natl. Bur. Stand. B* 45, pp. 255–282.
- Levinsen, Jesper, Dmitry S Petrov (2011). “Atom-dimer and dimer-dimer scattering in

fermionic mixtures near a narrow Feshbach resonance”. In: *The European Physical Journal D* 65.1, pp. 67–82.

- Lu, Bing-Nan et al. (2014). “Breaking and restoration of rotational symmetry on the lattice for bound state multiplets”. In: *Phys. Rev. D* 90.3, p. 034507.
- Lüscher, M. (1986). “Volume dependence of the energy spectrum in massive quantum field theories”. English. In: *Commun. Math. Phys.* 105.2, pp. 153–188.
- Lüscher, Martin (1991). “Two-particle states on a torus and their relation to the scattering matrix”. In: *Nuc. Phys. B.* 354.2–3, pp. 531–578.
- Luu, Thomas, Martin J. Savage (June 2011). “Extracting scattering phase shifts in higher partial waves from lattice QCD calculations”. In: *Phys. Rev. D* 83 (11), p. 114508. eprint: [arXiv:1101.3347].
- Machleidt, R., F. Sammarruca, Y. Song (1996). “Nonlocal nature of the nuclear force and its impact on nuclear structure”. In: *Phys. Rev. C* 53.4, R1483–R1487.
- Ordonez, C., L. Ray, U. van Kolck (1994). “Nucleon-nucleon potential from an effective chiral Lagrangian”. In: *Phys. Rev. Lett.* 72, pp. 1982–1985.
- Orginos, Kostas et al. (2015). “Two nucleon systems at $mp \leftarrow 450$ MeV from lattice QCD”. In: *Phys. Rev. D* 92.11. [Erratum: *Phys.Rev.D* 102, 039903 (2020)], p. 114512.
- Patrignani, C. et al. (2016). “Review of Particle Physics”. In: *Chin. Phys. C* 40.10, p. 100001.
- Petrov, D. S. (Jan. 2003). “Three-body problem in Fermi gases with short-range interparticle interaction”. In: *Phys. Rev. A* 67 (1), p. 010703
- Petrov, D. S., C. Salomon, G. V. Shlyapnikov (2004). “Weakly Bound Dimers of Fermionic Atoms”. In: *Phys. Rev. Lett.* 93, p. 090404.
- (2005). “Scattering properties of weakly bound dimers of fermionic atoms”. In: *Phys. Rev. A* 71, p. 012708.
- Stellin, Gianluca, Serdar Elhatisari, Ulf G. Meißner (2018). “Breaking and restoration of rotational symmetry in the low-energy spectrum of light alpha-conjugate nuclei on the lattice I: ^8Be and ^{12}C ”. In: *Eur. Phys. J. A* 54.12, p. 232.
- Stoks, V. G. J., R. A. M. Klomp, M. C. M. Rentmeester, et al. (1993). “Partial wave analysis of all nucleon-nucleon scattering data below 350-MeV”. In: *Phys. Rev. C* 48, pp. 792–815.
- Stoks, V. G. J., R. A. M. Klomp, C. P. F. Terheggen, et al. (1994). “Construction of high quality NN potential models”. In: *Phys. Rev. C* 49, pp. 2950–2962.
- The MathWorks, Inc. (2017). *MATLAB version 9.3.0.713579 (R2017b)*. Natick, Massachusetts, United States. url: <https://www.mathworks.com>.
- Tornqvist, Nils A. (1991). “Possible large deuteron - like meson meson states bound by pions”. In: *Phys. Rev. Lett.* 67, pp. 556–559.
- Weinberg, Steven (1979). “Phenomenological Lagrangians”. In: *Physica A* 96.1-2. Ed. by S. Deser, pp. 327–340.
- (1990). “Nuclear forces from chiral Lagrangians”. In: *Phys. Lett. B* 251, pp. 288–292.
- (1991). “Effective chiral Lagrangians for nucleon - pion interactions and nuclear forces”. In: *Nucl. Phys. B* 363, pp. 3–18.
- Wilson, Kenneth G. (1974). “Confinement of Quarks”. In: *Phys. Rev. D* 10. Ed. by J. C. Taylor, pp. 2445–2459.
- Wiringa, Robert B., V. G. J. Stoks, R. Schiavilla (1995). “An Accurate nucleon-nucleon potential with charge independence breaking”. In: *Phys. Rev. C* 51, pp. 38–



A EK BÖLÜM

A.1 Born–Oppenheimer Yaklaşımı

Bu çalışmada, örgü hesaplamalarından elde edilen sonuçların doğruluğunu kıyaslamak için kullanılabilecek en uygun teorik yöntem Born–Oppenheimer yaklaşımıdır. Bu amaç doğrultusunda, Ref. Griffiths 2017 ve Elhatisari 2018'de sunulan yöntem ve çözümleri takip ederek iki-bileşenli ve farklı kütlelere sahip fermiyonlar için Born–Oppenheimer yaklaşımını çözümlerini elde edeceğiz.

A.1.1 Fermiyon-dimer

Öncelikle, iki adet spin- $\uparrow$ ve bir adet spin- $\downarrow$ parçacıklarından oluşan üç-parçacıklı bir sistemi inceleyeceğiz. Bu parçacıkların bir delta-fonksiyon potansiyel ile etkileştiğini varsayalım. Bu durumda sistemin Hamiltoniyeni:

$$H_{fd} = -\frac{1}{2m_1} \partial_{x_1}^2 - \frac{1}{2m_2} \partial_{x_2}^2 - \frac{1}{2m_3} \partial_{x_3}^2 + c_0[\delta(x_3 - x_1) + \delta(x_3 - x_2)] . \quad (A.1)$$

Burada $\partial_x^2 = \partial^2/\partial x^2$ olarak tanımlıdır; parçacıkların kütleleri m_1 , m_2 ve m_3 ; spin- $\uparrow$, spin- $\uparrow$ ve spin- $\downarrow$ parçacıklarının sırasıyla koordinatları x_1 , x_2 ve x_3 . Denk.(A.1)'i bağıl koordinatlarda yeniden düzenleyerek şu şekilde yazabiliriz:

$$H_{fd} = -\frac{1}{2\mu_2} \partial_x^2 - \frac{1}{2\mu_3} \partial_y^2 + c_0[\delta(y - x/2) + \delta(y + x/2)] . \quad (A.2)$$

Buradaki nicelikler şu şekilde tanımlıdır,

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = m_{\uparrow} , \\ m_3 &= m_{\downarrow} , \\ \mu_2 &= m_{\uparrow}/2 , \\ \mu_3 &= 2m_{\uparrow}m_{\downarrow}/(2m_{\uparrow} + m_{\downarrow}) , \\ x &= x_2 - x_1 , \\ y &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} - x_3 . \end{aligned} \quad (A.3)$$

Bu noktada spin- $\uparrow$ parçacığı için $m_{\uparrow} \rightarrow \infty$ limitini alırsak, Schrödinger denklemi şu şekilde yazılır:

$$-\frac{1}{2\mu_3} \partial_y^2 \phi(y; x) + c_0[\delta(y - x/2) + \delta(y + x/2)]\phi(y; x) = u(x)\phi(y; x) . \quad (A.4)$$

Burada $\phi(y; x)$ ifadesi sabit bir x için Denk. (A.4)'nin özvektörünü temsil eder. Benzer şekilde, $u(x)$ ise, sabit bir x için Denk. (A.4)'nin özdeğerini temsil eder. Denk. (A.4)'de, y 'in $\pm x/2$ değerlerini aldığı noktalarda dalga fonksiyonunun kendisinin sürekli olduğu ve birinci türevinin süreksiz olduğu sınır koşulları kullanılarak, sistemin özdeğerlerini x 'in bir fonksiyonu olarak şu şekilde elde ederiz:

$$u_\ell(x) = \frac{1}{2\mu_3} \left[-\beta + \frac{1}{x} W((-1)^{\ell+1} x \beta e^x \beta) \right]^2 . \quad (\text{A.5})$$

Burada $\beta = c_0 \mu_3$ ile tanımlıdır, $W(r)$ ise Lambert W fonksiyonu olarak bilinen tanımlı bir fonksiyondur ve $\ell = 0$ ($\ell = 1$) değeri ise sistemin simetrik (asimetrik) çözümlerini verir.

Şimdi, Denk. (A.4)'nin çözümü olan $u_\ell(x)$ özdeğerini Denk. (A.2)'de yerine yazarak, problemin çözümünü aşağıdaki Schrödinger denkleminin çözüme indirgemiş oluruz:

$$-\frac{1}{2\mu_2} \partial_x^2 \psi(x) + u_\ell(x) \psi(x) = E \psi(x) . \quad (\text{A.6})$$

Denk. (A.2)'nin çözümü ve fermiyon-dimer sisteminin toplam dalga fonksiyonu $\Psi(x, y) = \psi(x) \phi(y; x)$, $x_1 \leftrightarrow x_2$ değişimi altında Pauli dışarlama ilkesinden dolayı asimetrik özelliğe sahiptir. Dolayısıyla, Denk. (A.1)'nin Born–Oppenheimer yaklaşımı ile elde edilen çözümü, Denk. (A.6) ile tanımlı Schrödinger denkleminin $\ell = 1$ durumundaki çözümü olarak bulunur ve söz konusu yöntem çeşitli sayısal yöntemlerle kolaylıkla elde edilebilir.

A.1.2 Dimer-dimer

Şimdi ise iki adet spin- $\uparrow$ ve iki adet spin- $\downarrow$ fermiyonlardan oluşan bir sistemi inceleyeceğiz. Pauli ilkesinden dolayı aynı türden parçacıklar birbirleri ile etkileşmezler. Bu sistemde, farklı türden parçacıkların bir delta-fonksiyon potansiyel ile etkileştiğini varsayalım. Sistemin Hamiltoniyeni şu şekilde yazılır:

$$H_{dd} = -\frac{1}{2m_1} \partial_{x_1}^2 - \frac{1}{2m_2} \partial_{x_2}^2 - \frac{1}{2m_3} \partial_{x_3}^2 - \frac{1}{2m_4} \partial_{x_4}^2 + c_0[\delta(x_3 - x_1) + \delta(x_3 - x_2) + \delta(x_4 - x_1) + \delta(x_4 - x_2)] \quad . \quad (A.7)$$

Burada m_1, m_2, m_3 ve m_4 parçacıkların kütleleri temsil etmekte; spin- $\uparrow$, spin- $\uparrow$, spin- $\downarrow$, ve spin- $\downarrow$ parçacıkların koordinatları ise sırasıyla x_1, x_2, x_3 ve x_4 ile temsil edilmektedir. Denk. (A.7), bağıl koordinatlar cinsinden aşağıdaki formda yeniden yazılabilir:

$$H_{dd} = -\frac{1}{2\mu_2} \partial_x^2 - \frac{1}{2\mu_3} \partial_y^2 - \frac{1}{2\mu_4} \partial_z^2 + c_0[\delta(y - x/2) + \delta(y + x/2) + \delta(z - x/2 + \frac{m_\downarrow y}{2m_\uparrow + m_\downarrow}) + \delta(z + x/2 + \frac{m_\downarrow y}{2m_\uparrow + m_\downarrow})] \quad . \quad (A.8)$$

Burada

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = m_\uparrow \quad , \\ m_3 &= m_4 = m_\downarrow \quad , \\ \mu_2 &= m_\uparrow/2 \quad , \\ \mu_3 &= 2m_\uparrow m_\downarrow / (2m_\uparrow + m_\downarrow) \quad , \\ \mu_4 &= (2m_\uparrow + m_\downarrow) m_\downarrow / (2m_\uparrow + 2m_\downarrow) \quad , \\ x &= x_2 - x_1 \quad , \\ y &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} - x_3 \quad , \\ z &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} - x_4 \quad . \end{aligned} \quad (A.9)$$

Denk. (A.8)'de $m_\uparrow \rightarrow \infty$ limitini aldığımızda, Schrödinger denklemi aşağıdaki formu alır:

$$\begin{aligned} &\left[-\frac{1}{2\mu_3} \partial_y^2 + c_0 \delta(y - x/2) + c_0 \delta(y + x/2) - u_3(x) \right] \phi(y, z; x) \\ &+ \left[-\frac{1}{2\mu_4} \partial_z^2 + c_0 \delta(z - x/2) + c_0 \delta(z + x/2) - u_4(x) \right] \phi(y, z; x) = 0 \quad . \quad (A.10) \end{aligned}$$

Burada $\phi(y, z; x)$ ifadesi sabit bir x için Denk. (A.10)'nin özvektörünü temsil eder. Benzer şekilde, $u_3(x) + u_4(x)$ ise, sabit bir x için Denk. (A.10)'nin özdeğerini temsil eder. Denk. (5.10)'de, $y = \pm x/2$ ve $z = \pm x/2$ noktalarında dalga

fonksiyonunun kendisinin sürekli olduğu ve birinci türevinin süreksiz olduğu sınır koşulları kullanılarak, sistemin özdeğerlerini x 'in bir fonksiyonu olarak şu şekilde elde ederiz:

$$u_{3,\ell}(x) = \frac{1}{2\mu_3} \left[-\beta_3 + \frac{1}{x} W((-1)^{\ell+1} x \beta_3 e^x \beta_3) \right]^2, \quad (\text{A.11})$$

$$u_{4,\ell}(x) = \frac{1}{2\mu_4} \left[-\beta_4 + \frac{1}{x} W((-1)^{\ell+1} x \beta_4 e^x \beta_4) \right]^2. \quad (\text{A.12})$$

Burada $\beta_3 = c_0\mu_3$, $\beta_4 = c_0\mu_4$, $W(r)$ ise Lambert W olarak bilinen tanımlı bir fonksiyondur, ve $\ell = 0$ ($\ell = 1$) değeri sistemin simetrik (asimetrik) çözümünü verir.

Bu aşamada, elde ettiğimiz $u_{3,\ell}(x)$ ve $u_{4,\ell}(x)$ çözümlerini Denk. (A.8)'de yerine yazarak bizi çözüme ulaştıracak Schrödinger denklemini elde etmiş oluruz:

$$-\frac{1}{2\mu_2} \partial_x^2 \psi(x) + u_{3,\ell}(x)\psi(x) + u_{4,\ell}(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (\text{A.13})$$

Dimer-dimer sisteminde, Denk. (A.8)'nin çözümü olan $\Psi(x, y, z) = \psi(x)\phi(y, z; x)$ toplam dalga fonksiyonu $x_1 \leftrightarrow x_2$ değişimi altında asimetrik özelliğe sahiptir. Dolayısıyla, Denk. (A.7)'nin Born–Oppenheimer çözümü Denk. (A.13)'nin $[u_{3,1}(x) + u_{4,0}(x)]/2 + [u_{3,0}(x) + u_{4,1}(x)]/2$ potansiyeli için çözümü ile elde edilir.

B EK BÖLÜM

B.1 Bir Boyutta Fermiyon-Fermiyon Hesaplamaları İçin MATLAB

Kodları

```
clear all
format long
numeigs = 5;

iKine = 3;
hbarc = 197.3; % (MeV * fm)^-1
mass = 938.92; % MeV

c0 = -0.1;

a = 1/200; % MeV^-1

nA = 2; % particle number
mass_A = [mass mass]*a; % particle mass
mu = 1/(1/mass_A(1) + 1/mass_A(2)); % reduced mass
ndim = 1; % spatial dimension

nL = 0;
for L = 30:60; % l.u. (lattice units)
    nL = nL + 1;

    %===== Kinetic Term
    r = [0:L^(ndim*nA-ndim)-1];
    for nn = 0:nA-1
        for ndir = 1:ndim
            nr{nn+1,ndir} = mod(floor(r/L^(ndim*nn+ndir-1)),L);
        end
    end

    wN(1:iKine) = 0.0;
    wN0 = 0.0;
    for k = (min(1, iKine)):iKine
        wN(k) = (-1)^(k + 1) ...
            *2.0 ...
            *factorial(iKine)^2 ...
            /(k^2 * factorial(iKine + k) * factorial(iKine - k));
        wN0 = wN0 + wN(k);
    end

    for nn = 0:nA-1
        Hkin{nn+1} = sparse(L^(ndim*nA-ndim),L^(ndim*nA-ndim));
        for ndir = 1:ndim
            Hkin{nn+1} = Hkin{nn+1} + sparse(r+1,r+1,wN0*2.0/(2.0*mass_A(nn+1)));
        end
    end
end
```

```

for nn = 0:(nA-2)
for ndir = 1:ndim
for nK = 1:iKine
r_p = r - nr{nn+1,ndir}*L^(ndim*nn+ndir-1) ...
      + mod(nr{nn+1,ndir} + nK,L)*L^(ndim*nn+ndir-1);
r_m = r - nr{nn+1,ndir}*L^(ndim*nn+ndir-1) ...
      + mod(nr{nn+1,ndir} - nK,L)*L^(ndim*nn+ndir-1);
Hkin{nn+1} = Hkin{nn+1} ...
+ sparse(r+1,r_p+1,-wN(nK)/(2.0*mass_A(nn+1))) ...
+ sparse(r+1,r_m+1,-wN(nK)/(2.0*mass_A(nn+1)));
end
end
end

```

```

nn = nA-1;
for ndir = 1:ndim
for nK = 1:iKine
r_p = r;
r_m = r;
for ni = 0:(nA-2)
r_p = r_p - nr{ni+1,ndir}*L^(ndim*ni+ndir-1) ...
      + mod(nr{ni+1,ndir} - nK,L)*L^(ndim*ni+ndir-1);
r_m = r_m - nr{ni+1,ndir}*L^(ndim*ni+ndir-1) ...
end
+ mod(nr{ni+1,ndir} + nK,L)*L^(ndim*ni+ndir-1);
Hkin{nn+1} = Hkin{nn+1} ...
+ sparse(r+1,r_p+1,-wN(nK)/(2.0*mass_A(nn+1))) ...
+ sparse(r+1,r_m+1,-wN(nK)/(2.0*mass_A(nn+1)));
end
end

```

```

%===== Potential
for i = 1:nA
for j = i+1:nA
Vdelta = ones(1,L^(ndim*(nA-1)));
for ndir = 1:ndim
Vdelta = Vdelta.*(nr{i,ndir} == nr{j,ndir});
end
Vint{i,j} = c0*spdiags(Vdelta', 0, ...
end end
L^(ndim*nA-ndim),L^(ndim*nA-ndim));

```

```

%===== Hamiltonian
HH = sparse(L^(ndim*(nA-1)),L^(ndim*(nA-1)));
for i = 1:nA
HH = HH + Hkin{i};

```

```

for j = i+1:nA
HH = HH
+ Vint{i,j};
end
end

%===== Eigenvalues
opts.isreal = 0;
opts.issym = 1;
opts.maxiter = 3000;
[~,dd] = eigs(HH,numeigs,'sr',opts);
energ = real(diag(dd));
[~,ord] = sort(energ);
Energies = energ(ord)/a;
%=====
En = Energies(Energies>0)
p(nL) = sqrt(2*mu/a*En(1));
delta(nL) = -p(nL)*(L*a)/2;

end

B = abs(Energies(1));
aff = 1/sqrt(2*mu/a*B)*hbarc
Continuum states and momenta

f=fit((p'/hbarc).^2,(p'/hbarc).*tan(delta),'poly1')
plot(f,(p/hbarc).^2,(p/hbarc).*tan(delta),'ro')

coefficientValues = coeffvalues(f);
aff_latt = 1/coefficientValues(2)

```