

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN ALTERNATING DIRECTION
IMPLICIT (ADI) YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Gonca ÇELİKTEN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2016

Tezin Başlığı : İKİ BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN ALTERNATING
DIRECTION IMPLICIT (ADI) YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ
Tezi Hazırlayan : Gonca ÇELİKTEN
Sınav Tarihi : 05.12.2016

Yukarıda adı geen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında
Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez	Do.Dr.E. Nesligöl AKSAN	_____
Danışmanı:	İnönü Üniversitesi	
	Prof.Dr. Gabil YAGUB	_____
	Kafkas Üniversitesi	
	Prof.Dr. Ali ÖZDEŞ	_____
	İnönü Üniversitesi	
	Do.Dr. Hasan BULUT	_____
	Fırat Üniversitesi	
	Do.Dr. M. Kemal ÖZDEMİR	_____
	İnönü Üniversitesi	

Prof.Dr. H. İbrahim ADIGÜZEL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum “İki Boyutlu Burgers Denkleminin Alternating Direction Implicit (ADI) Yöntemi ile Çözümü” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Gonca ÇELİKTEN

ÖZET

Doktora Tezi

İKİ BOYUTLU BURGERS DENKLEMİNİN ALTERNATING DIRECTION IMPLICIT (ADI) YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Gonca ÇELİKTEN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

101+xii sayfa

2016

Danışman : Doç.Dr.E. Nesligül AKSAN

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Alternating Direction Implicit (ADI) metodunun tarihçesi hakkında kısa bir bilgi verildi.

İkinci bölümde türevlere sonlu fark yaklaşımları, sonlu fark yöntemleri ve von Neumann kararlılık yöntemi verildi.

Üçüncü bölümde tezde ele alınan 7 model problem ve bu problemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için literatürde kullanılan yöntemler verildi.

Dördüncü bölümde Burgers denklem sistemi ile Hopf-Cole dönüşümü arasındaki ilişki göz önüne alınarak denklem sisteminin tam çözümleri verildi.

Beşinci ve altıncı bölümler bu tezin orijinal kısımlarıdır. Beşinci bölümde iki boyutlu ısı denklemi, iki boyutlu Burgers denklemi ve iki boyutlu Burgers denklem sistemi için Alternating Direction Implicit (ADI) yaklaşımları verildi. Ayrıca verilen yaklaşımların kararlılığı von Neumann kararlılık analizi yöntemi ile incelendi.

Altıncı bölümde ADI metodu kullanılarak model problemlerin nümerik çözümleri elde edildi. Elde edilen nümerik çözümler tam çözümler ve literatürdeki diğer

alışmalarda elde edilen nümerik özümlele tablolar ve grafikler verilerek karşılaştırıldı.

Yedinci bölüm ise sonuç ve tartışma kısmıdır.



ANAHTAR KELİMELELER: Alternating Direction Implicit (ADI) Metodu, İki Boyutlu Burgers Denklem Sistemi, Von Neumann Kararlılık Analizi.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SOLUTION OF TWO DIMENSIONAL BURGERS EQUATION BY ALTERNATING DIRECTION IMPLICIT (ADI) METHOD

Gonca ÇELİKTEN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

101+xii pages

2016

Supervisor : Assoc.Prof.Dr.E. Nesligül AKSAN

This thesis consists of seven chapters.

In the first chapter, short history of the Alternating Direction Implicit (ADI) method is presented.

In the second chapter, finite difference approaches to derivatives, finite difference methods and von Neumann stability analysis method are presented.

In the third chapter, seven model problems which are considered in this thesis and the methods which are used to obtain the numerical solutions of this model problems are presented.

In the fourth chapter, by considering the relation between the system of two dimensional Burgers equations and Hopf-Cole transformation the exact solutions of the system of two dimensional Burgers equations are given.

Chapter 5 and chapter 6 are the original part of this thesis. In the fifth chapter, Alternating Direction Implicit (ADI) approximations of two dimensional heat equation, two dimensional Burgers equation and the system of two dimensional Burgers equations are given. Also stability analysis of given approximations are investigated with von Neumann stability analysis method.

In the sixth chapter, numerical solutions of model problems are obtained by using ADI method. Obtained numerical solutions are compared with exact solutions and numerical solutions that were obtained in other studies in the literature by presenting tables and graphs.

Chapter 7 is the part of conclusion and discussion.



KEY WORDS: Alternating Direction Implicit (ADI) Metodu, System of Two Dimensional Burgers Equations, Von Neumann Stability Analysis.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması aşamasında bana yardımcı olan, değerli katkılarıyla beni yönlendiren, bilgi ve ilgisini esirgemeyen saygıdeğer hocalarım Sayın Doç. Dr. E. Nesligül AKSAN ve Sayın Prof. Dr. Ali ÖZDEŞ' e, doktora süresince her türlü imkanı sağlayan bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e ve öğretim elemanı olarak çalıştığım Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB' a, tezin yazımı süresince yardımını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Alaattin ESEN, Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR, Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR, Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK ve sevgili arkadaşım Arş. Gör. Dr. Berat KARAAĞAÇ' a, sabır ve desteğiyle her zaman yanımda olan sevgili eşim Arş. Gör. Hakan ÇELİKTEN' e, hiçbir zaman emeklerini ödeyemeyeceğim anneme, babama ve kardeşlerime, ayrıca doktora eğitimim boyunca sağladığı burs katkısından dolayı TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
TABLOLAR DİZİNİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımları	4
2.2. Sonlu Fark Yöntemleri	8
2.2.1. Açık Sonlu Fark Yöntemi.....	9
2.2.2. Kapalı Sonlu Fark Yöntemi.....	10
2.2.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi	10
2.3. Von Neumann (Fourier Seri) Yöntemiyle Kararlılık Analizi	11
3. MODEL PROBLEMLER.....	14
3.1. Problem 1	14
3.2. Problem 2	14
3.3. Problem 3	15
3.4. Problem 4	17
3.5. Problem 5	18
3.6. Problem 6	20
3.7. Problem 7	21
4. İKİ BOYUTLU BURGERS DENKLEM SİSTEMİNİN TAM ÇÖZÜMÜ	23
4.1. İki Boyutlu Burgers Denklem Sistemi ve Hopf-Cole Dönüşümü	23
4.2. İki Boyutlu Burgers Denklem Sisteminin Tam Çözümü	27

5.	ALTERNATING DIRECTION IMPLICIT (ADI) METODU	30
5.1.	İki Boyutlu Isı Denklemi İçin ADI Metodu	30
5.1.1.	İki Boyutlu Isı Denklemi İçin ADI Metodunun Kararlılık Analizi	35
5.2.	İki Boyutlu Burgers Denklemi İçin ADI Metodu	36
5.2.1.	İki Boyutlu Burgers Denklemi İçin ADI Metodunun Kararlılık Analizi	39
5.3.	İki Boyutlu Burgers Denklem Sistemi İçin ADI Metodu	40
5.3.1.	İki Boyutlu Burgers Denklem Sistemi İçin ADI Metodunun Kararlılık Analizi	43
6.	MODEL PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	46
6.1.	Problem 1	46
6.2.	Problem 2	51
6.3.	Problem 3	54
6.4.	Problem 4	58
6.5.	Problem 5	78
6.6.	Problem 6	84
6.7.	Problem 7	90
7.	SONUÇ VE TARTIŞMA	94
	KAYNAKLAR	96
	ÖZGEÇMİŞ	101

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 6.1	Problem 1' in $k = 0.00001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında nümerik çözümü ve tam çözümleri	50
Şekil 6.2	Problem 1' in $k = 0.00001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.01$ ve $t = 0.1$ zamanlarında elde edilen mutlak hataları	50
Şekil 6.3	Problem 2' nin $k = 0.05$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 1$ zamanında nümerik çözümü ve tam çözümü	54
Şekil 6.4	Problem 3' ün $\varepsilon = 0.05$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.1$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında nümerik çözümü ve tam çözümü	56
Şekil 6.5	Problem 3' ün $\varepsilon = 0.05$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.1$ değerleri için $t = 2$ zamanında nümerik çözümü ve tam çözümü	56
Şekil 6.6	Problem 3' ün $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.1$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında nümerik çözümü ve tam çözümü	57
Şekil 6.7	Problem 3' ün $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.1$ değerleri için $t = 2$ zamanında nümerik çözümü ve tam çözümü	57
Şekil 6.8	Problem 3' ün $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.1$ değerleri için $t = 0.01$ ve $t = 0.1$ zamanlarında elde edilen mutlak hataları	58
Şekil 6.9	Problem 4 için $Re = 100$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü ..	73
Şekil 6.10	Problem 4 için $Re = 100$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $v(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü...	73
Şekil 6.11	Problem 4' ün $Re = 100$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen mutlak hatalar	74

Şekil 6.12	Problem 4 için $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü . .	75
Şekil 6.13	Problem 4 için $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $v(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü . .	75
Şekil 6.14	Problem 4' ün $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen mutlak hatalar	76
Şekil 6.15	Problem 4' ün $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması	77
Şekil 6.16	Problem 4' ün $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ ve $y = 0.5$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen mutlak hatalar	77
Şekil 6.17	Problem 5' in $Re = 50$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında $u(x, y, t)$ nümerik çözümü	82
Şekil 6.18	Problem 5' in $Re = 50$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında $v(x, y, t)$ nümerik çözümü	83
Şekil 6.19	Problem 5' in $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında $u(x, y, t)$ nümerik çözümü	83
Şekil 6.20	Problem 5' in $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında $v(x, y, t)$ nümerik çözümü	84
Şekil 6.21	Problem 6' nın $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında $u(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü .	89
Şekil 6.22	Problem 6' nın $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında $v(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü .	89
Şekil 6.23	Problem 7' nin $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.1$ zamanında $u(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü	93
Şekil 6.24	Problem 7' nin $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.1$ zamanında $v(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü	93

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 6.1	Problem 1 için $k = 0.00001$ ve $t = 0.01$ için nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması	47
Tablo 6.2	Problem 1 için $k = 0.00001$ ve $t = 0.05$ için nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması	48
Tablo 6.3	Problem 1 için $k = 0.00001$ ve $t = 0.1$ için nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması	49
Tablo 6.4	Problem 2 için $k = 0.05$, $h_x = h_y = h = 0.25$ ve $t = 1$ için nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması	52
Tablo 6.5	Problem 2 için $k = 0.05$, $h_x = h_y = h = 0.125$ ve $t = 1$ için nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması	53
Tablo 6.6	Problem 3 için $k = 0.0001$, $t = 2$, $h_x = h_y = h = 0.025$ ve farklı ε değerleri için nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması	55
Tablo 6.7	Problem 4 için $Re = 80$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ için $u(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin ADM [45] ve tam çözümlerle karşılaştırılması	59
Tablo 6.8	Problem 4 için $Re = 80$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ için $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin ADM [45] ve tam çözümlerle karşılaştırılması	60
Tablo 6.9	Problem 4' ün $Re = 100$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin tam çözümler ve literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılması	61
Tablo 6.10	Problem 4' ün $Re = 100$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında elde edilen $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin tam çözümler ve literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılması	62
Tablo 6.11	Problem 4' ün $Re = 100$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 2$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin tam çözümler ve literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılması	63
Tablo 6.12	Problem 4' ün $Re = 100$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 2$ zamanında elde edilen $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin tam çözümler ve literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılması	64

Tablo 6.13	Problem 4' ün $Re = 100$, $k = 0.01$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ ve $t = 2$ zamanlarında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ çözümleri için elde edilen mutlak hataların LBM [34] ile elde edilen hatalarla karşılaştırılması	65
Tablo 6.14	Problem 4 için $Re = 100$, $k = 0.0001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 1$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ nümerik çözümleri için L_2 ve L_∞ hata normlarının Expo-FDM [38] ile karşılaştırılması	66
Tablo 6.15	Problem 4 için $Re = 100$, $k = 0.0001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 1$ zamanında elde edilen $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için L_2 ve L_∞ hata normlarının Expo-FDM [38] ile karşılaştırılması	66
Tablo 6.16	Problem 4' ün $Re = 200$, $k = 0.0001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırılması	67
Tablo 6.17	Problem 4' ün $Re = 200$, $k = 0.0001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında elde edilen $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırılması	68
Tablo 6.18	Problem 4' ün $Re = 500$, $k = 0.01$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ ve $t = 2$ zamanlarında $u(x, y, t)$ çözümlerinin CNS [36], LINEAR [37] yöntemleriyle elde edilen çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırılması	69
Tablo 6.19	Problem 4' ün $Re = 500$, $k = 0.01$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ ve $t = 2$ zamanlarında $v(x, y, t)$ çözümlerinin CNS [36], LINEAR [37] yöntemleriyle elde edilen çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırılması	70
Tablo 6.20	Problem 4' ün $Re = 500$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ ve $t = 2$ zamanlarında $u(x, y, t)$ çözümlerinin CNS [36] yöntemiyle elde edilen çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırılması	71
Tablo 6.21	Problem 4' ün $Re = 500$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ ve $t = 2$ zamanlarında $v(x, y, t)$ çözümlerinin CNS [36] yöntemiyle elde edilen çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırılması	72
Tablo 6.22	Problem 5' in $Re = 50$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılması	79
Tablo 6.23	Problem 5' in $Re = 50$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında elde edilen $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılması	79

Tablo 6.24	Problem 5' in $Re = 500$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılması	80
Tablo 6.25	Problem 5' in $Re = 500$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında elde edilen $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılması	81
Tablo 6.26	Problem 5' in $Re = 1000$, $k = 0.001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ çözümleri	81
Tablo 6.27	Problem 5' in $Re = 1200$, $k = 0.001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ çözümleri	82
Tablo 6.28	Problem 6' nın $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.0001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırılması	86
Tablo 6.29	Problem 6' nın $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.0001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında elde edilen $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırılması	87
Tablo 6.30	Problem 6' nın $\varepsilon = 0.001$ iken farklı k ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $u(x, y, t)$ nümerik çözümleri için $t = 0.1$ zamanında elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları	88
Tablo 6.31	Problem 6' nın $\varepsilon = 0.001$ iken farklı k ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için $t = 0.1$ zamanında elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları	88
Tablo 6.32	Problem 7' nin $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.1$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen mutlak hataların ADM[45] ile karşılaştırılması	91
Tablo 6.33	Problem 7' nin $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.4$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen mutlak hataların ADM [45] ile karşılaştırılması	92

SİMGELER VE KISALTMALAR

ADI	: Alternating Direction Implicit Metodu
CNS	: Crank Nicolson Metodu
LINEAR	: Lineer Metod
Expo-FDM	: Üstel Sonlu Fark Metodu
I-LFDM	: Kapalı Logaritmik Sonlu Fark Metodu
MCB-DQM	: Modifiye Edilmiş Kübik B-Spline Differential Quadrature Metodu
LBM	: Lattice Boltzmann Metodu
ADM	: Adomian Decomposition (Ayrıştırma) Metodu

1. GİRİŞ

Matematiksel fizik, elastikiyet teorisi, hidrodinamik gibi birçok alanda ortaya çıkan problemlerin matematiksel modeli kurulduğunda genellikle kısmi türevli diferansiyel denklemler ya da nadiren adi diferansiyel denklemler karşımıza çıkar. Genellikle lineer diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek daha kolayken özellikle non-lineer ve karmaşık sınır değerlerine sahip diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek zor veya imkânsızdır. Bu nedenle bu tür problemlerin çözümlerinde nümerik yöntemler daha yaygın olarak kullanılır.

Lineer ve non-lineer kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için sonlu eleman yöntemleri, sonlu fark yöntemleri ve varyasyonel yöntemler gibi çeşitli nümerik yöntemler vardır ancak bunlardan sonlu fark yöntemleri uygulaması kolay olduğundan daha çok tercih edilmektedir. En yaygın kullanılan sonlu fark yöntemleri açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleridir. Bu üç yöntem klasik sonlu fark yöntemleri olarak bilinmektedir. Her ne kadar kısmi türevli denklemleri içeren problemlerin sonlu fark yöntemleri ile çözümü kolay olsa da ele alınan probleme en uygun sonlu fark yönteminin belirlenmesi aşaması biraz zaman alabilmektedir. Ayrıca genellikle problemin boyutu arttıkça sonlu fark şemalarını anlamak, kurmak ve uygulamak daha zor bir hâl almaktadır [1]. Bu nedenle yüksek boyutlu problemlerin nümerik çözümleri için Fractional Step, LOD (locally one-dimensional) ve Alternating Direction Implicit (ADI) metodları gibi farklı yöntemler geliştirilmiştir. Bu tezde bu yöntemlerden ADI metodu ele alınmıştır. Öncüleri Douglas, Rachford, Peaceman,

Gunn vd. olup ABD’ de geliştirilen metodun birçok avantajı vardır [1]. İlk olarak, açık sonlu fark yaklaşımları zayıf kararlılığa sahip olduklarından başlangıç sınır değer problemlerini çözmek için nadiren kullanılır [1]. Kapalı sonlu fark yaklaşımları üstün kararlılığa sahiptir ancak iki veya daha yüksek boyutlu problemleri çözmek için uygun değildir [1]. Bu nedenle ADI metodu yüksek boyutlu problemler için tridiagonal denklem sistemlerini çözerek programlanabildiğinden nispeten kolay bir yöntemdir [1].

ADI metodu geliştirildiği dönemde Yanenko, Marchuk, Samarskii ve D’Yakanov’ unda aralarında bulunduğu birçok Sovyet bilim adamı iki ve üç boyutlu zamana bağlı kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için ADI metodunun özel durumları olan ve Fractional Step yöntemleri veya LOD (locally one-dimensional) yöntemleri olarak bilinen ayrışım metodlarını geliştirmişlerdir [1].

Genel olarak ADI metodu bir başlangıç sınır değer probleminin çözümüne daha basit problemlerin bir dizisiyle yaklaşan bir yöntemdir [1]. Yöntem Duffy [1], Chung [2] ve Davis [3]’ in kitaplarında kapsamlı bir şekilde anlatılmıştır. ADI metodlarını kullanarak çeşitli yüksek boyutlu problemlerin nümerik çözümlerinin elde edildiği geniş bir literatür vardır [4]-[23]. Bunlardan Witelski [4] yüksek mertebeden non-lineer difüzyon denklemlerini çözmek için ADI şemalarını kullanmıştır. Sapagovas ve Stikoniene [5] bir koordinat yönünde integral sınır şartıyla verilen iki boyutlu non-lineer Poisson denklemini çözmek için ADI metodunu kullanmışlardır. Yöntem Qin [10, 11] tarafından dalga denklemlerini ve üç boyutlu parabolik denklemleri çözmek için kullanılmıştır. Douglas ve Rachford [14] iki ve üç boyutlu ısı iletim denklemlerini çözmek için yine ADI metodunu kullanmışlardır. Craig ve Sneyd [18] karışık türevli parabolik denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için yöntemi

kullanılmışlardır. Bu tezde,

2-Boyutlu Isı:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

2-Boyutlu Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

2-Boyutlu Burgers denklem sistemi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

denklemlerinin nümerik çözümleri Alternating Direction Implicit (ADI) metodu kullanılarak elde edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımları

U , x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olsun. $\Delta x (\equiv h)$, x yönünde konum adım uzunluğu ve $\Delta t (\equiv k)$, t yönünde zaman adım uzunluğu olmak üzere $[0, \ell] \times [0, \infty)$ yarı-açık bölgesi üzerinde, (x_m, t_n) ile ifade edilen bir düğüm noktası

$$\begin{aligned} x_m &= m\Delta x = mh, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \quad \ell = Mh \\ t_n &= n\Delta t = nk, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

olarak gösterilir. Yani $(x_m, t_n) = (mh, nk)$ dır [43].

Temsili bir $P(mh, nk)$ düğüm noktası üzerinde U fonksiyonunun noktasal değeri U_P ile gösterilsin. Burada U_P

$$U_P = U(x, t) = U(m\Delta x, n\Delta t) = U(mh, nk) = U_m^n = U_{m,n}$$

dir [43]. Taylor seri açılımından yararlanılarak U fonksiyonunun birinci mertebeden türevlerine sonlu fark yaklaşımları

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{h} + O(h) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_m^n - U_{m-1}^n}{h} + O(h) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} + O(h^2) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^n - U_m^{n-1}}{k} + O(k) \quad (2.5)$$

ve ikinci mertebeden türevlerine sonlu fark yaklaşımları ise

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_m^n - 2U_{m+1}^n + U_{m+2}^n}{h^2} + O(h^2) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + U_m^n}{h^2} + O(h^2) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} + O(h^2) \quad (2.8)$$

olarak bulunur. Burada ' O ' sonsuz terimli bir eşitliğin sonlu bir terimde kesildiğini, $O(h)$ terimi hatanın $h \rightarrow 0$ iken h ile orantılı olduğunu gösterir ve $O(h)$ terimine kesme hatası denir. $O(k)$ ise hatanın k mertebesinde olduğunu ve böylece k ile orantılı olarak azalacağını göstermektedir. (2.1), (2.2) ve (2.3) ile verilen x' e göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla iki-nokta ileri, geri ve merkezi fark formülleri denir. Benzer şekilde (2.4) ve (2.5) ile verilen t' ye göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarında sırasıyla ileri ve geri fark formülleri denir. (2.6), (2.7) ve (2.8) ile verilen x' e göre ikinci mertebeden türev yaklaşımlarına ise sırasıyla üç-nokta ileri, geri ve merkezi fark formülleri denir [43].

Benzer şekilde U , x , y ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olsun. $\Delta x (\equiv h_x)$ ve $\Delta y (\equiv h_y)$ sırasıyla x ve y yönündeki konum adım uzunlukları ve $\Delta t (\equiv k)$, t yönünde zaman adım uzunluğu olmak üzere $[0, \ell] \times [0, \infty)$ yarı-açık bölgesi

üzerinde, (x_p, y_q, t_n) ile ifade edilen bir düğüm noktası

$$\begin{aligned} x_p &= p\Delta x = ph_x, & p &= 0, 1, 2, \dots, M, & \ell &= Mh_x \\ y_q &= q\Delta y = qh_y, & q &= 0, 1, 2, \dots, N, & \ell &= Nh_y \\ t_n &= n\Delta t = nk, & n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

olarak gösterilir. Yani $(x_p, y_q, t_n) = (ph_x, qh_y, nk)$ dır.

Temsili bir $P(ph_x, qh_y, nk)$ düğüm noktası üzerinde U fonksiyonunun noktasal değeri U_P ile gösterilsin. Burada U_P

$$U_P = U(x, y, t) = U(p\Delta x, q\Delta y, n\Delta t) = U(ph_x, qh_y, nk) = U_{p,q}^n = U_{p,q,n}$$

dir. Taylor seri açılımından yararlanılarak U fonksiyonunun birinci mertebeden türevlerine sonlu fark yaklaşımları

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{p+1,q}^n - U_{p,q}^n}{h_x} + O(h_x) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{p,q}^n - U_{p-1,q}^n}{h_x} + O(h_x) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{p+1,q}^n - U_{p-1,q}^n}{2h_x} + O(h_x^2) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_{p,q+1}^n - U_{p,q}^n}{h_y} + O(h_y) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_{p,q}^n - U_{p,q-1}^n}{h_y} + O(h_y) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_{p,q+1}^n - U_{p,q-1}^n}{2h_y} + O(h_y^2) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{p,q}^{n+1} - U_{p,q}^n}{k} + O(k) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{p,q}^n - U_{p,q}^{n-1}}{k} + O(k) \quad (2.16)$$

ve ikinci mertebeden türevlerine sonlu fark yaklaşımları ise

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{p,q}^n - 2U_{p+1,q}^n + U_{p+2,q}^n}{h_x^2} + O(h_x^2) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{p-2,q}^n - 2U_{p-1,q}^n + U_{p,q}^n}{h_x^2} + O(h_x^2) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{p-1,q}^n - 2U_{p,q}^n + U_{p+1,q}^n}{h_x^2} + O(h_x^2) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U_{p,q}^n - 2U_{p,q+1}^n + U_{p,q+2}^n}{h_y^2} + O(h_y^2) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U_{p,q-2}^n - 2U_{p,q-1}^n + U_{p,q}^n}{h_y^2} + O(h_y^2) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U_{p,q-1}^n - 2U_{p,q}^n + U_{p,q+1}^n}{h_y^2} + O(h_y^2) \quad (2.22)$$

olarak bulunur. Burada ' O ' sonsuz terimli bir eşitliğin sonlu bir terimde kesildiğini, $O(h_x)$ ve $O(h_y)$ terimleri hatanın $h_x, h_y \rightarrow 0$ iken h_x ve h_y ile orantılı olduğunu gösterir ve $O(h_x)$ ve $O(h_y)$ terimlerine kesme hatası denir. $O(k)$ ise hatanın k mertebesinde olduğunu ve böylece k ile orantılı olarak azalacağını göstermektedir. (2.9), (2.10), (2.11) ve (2.12), (2.13), (2.14) ile verilen sırasıyla x' e ve y' ye göre

birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla iki-nokta ileri, geri ve merkezi fark formülleri denir. Benzer şekilde (2.15) ve (2.16) ile verilen t' ye göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarınada sırasıyla ileri ve geri fark formülleri denir. (2.17), (2.18), (2.19) ve (2.20), (2.21), (2.22) ile verilen sırasıyla x' e ve y' ye göre ikinci mertebeden türev yaklaşımlarına ise sırasıyla üç-nokta ileri, geri ve merkezi fark formülleri denir.

2.2 Sonlu Fark Yöntemleri

Kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri genellikle uygulaması kolay olduğundan sonlu fark yöntemleri kullanılarak elde edilir. Genel olarak bir sonlu fark yönteminin bir kısmi diferansiyel denkleme uygulanmasında aşağıdaki yol izlenir:

- Önce problemin çözüm bölgesi geometrik şekiller içeren kafeslere bölünür ve problemin yaklaşık çözümü her bir kafesin düğüm (mesh, grid) noktaları üzerinde hesaplanır.
- Sonra kısmi diferansiyel denklemdeki türevler yerine Taylor serisi yardımıyla elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece diferansiyel denklemin çözümü problemi fark denklemlerinden oluşan bir cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenmiş olur.
- Daha sonra fark denkleminde ortaya çıkabilecek çözüm bölgesi içine düşmeyen hayali değerleri yok etmek için problemin verilen sınır şartları yerine uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır, böylece elde edilen cebirsel denklem sistemi direkt veya iteratif yöntemlerden biri yardımıyla kolayca çözülür[50].

En çok kullanılan sonlu fark yöntemleri klasik sonlu fark yöntemleri olarak bilinen açık(explicit), kapalı(implicit) ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleridir.

Klasik sonlu fark yöntemlerini açıklamak için $U = U(x, t)$ sıcaklığı göstermek üzere

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2.23)$$

ile verilen ısı denklemini göz önüne alalım. Burada x konum değişkeni olup genellikle sonludur, $x \in [a, b]$, t ise zamanı gösterip genellikle yarı sonsuzdur, yani $t \geq 0$ dır [43].

2.2.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi

(2.23) ile verilen bir boyutlu ısı denkleminde $\frac{\partial U}{\partial t}$ türevi yerine (2.4) ileri fark formülü ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevi yerine (2.8) merkezi fark formülünün hatalar ihmal edilerek yazılması ile (2.23) denkleminin açık sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2}$$

olur. Bu yaklaşım basit bir düzenlemeyle

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (2.24)$$

şeklinde elde edilir, burada $r = \frac{k}{h^2}$ olup kararlılık parametresi olarak adlandırılır. $n = 1$ ($t_1 = k$) için ilk zaman adımında U_m^1 bilinmeyen değerleri $t_0 = 0$ boyunca bilinen başlangıç ve sınır değerleri kullanılarak hesaplanır. Daha sonra ikinci zaman adımında bilinmeyen U_m^2 değerleri ilk adımda hesaplanan değerler kullanılarak hesaplanır ve böyle devam edilerek t_n zaman adımındaki U_m^n değerleri kullanılarak t_{n+1} zaman adımındaki U_m^{n+1} değerleri (2.24) denkleminde kolayca bulunur [43].

2.2.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi

(2.23) ile verilen bir boyutlu ısı denkleminde $\frac{\partial U}{\partial t}$ türevi yerine (2.4) ileri fark formülü ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevi yerine $(n+1)$ -inci zaman adımındaki

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + O(h^2)$$

merkezi fark formülünün hatalar ihmal edilerek yazılması ile (2.23) denkleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2}$$

olarak elde edilir. Bu denklemin düzenlenmesi ile

$$U_m^n = -rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1}$$

elde edilir, burada $r = \frac{k}{h^2}$ dir [43].

2.2.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

(2.23) ile verilen bir boyutlu ısı denkleminde $\frac{\partial U}{\partial t}$ türevi yerine (2.4) ileri fark formülü ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevi yerine n -inci ve $(n+1)$ -inci zaman adımlarındaki merkezi fark yaklaşımlarının ortalaması olan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right] + O(h^2)$$

fark formülünün hatalar ihmal edilerek yazılması ile (2.23) denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{1}{2} \left[\frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right]$$

şeklinde elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa denklem

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n$$

olarak yazılır, burada $r = \frac{k}{h^2}$ dir [43].

2.3 Von Neumann (Fourier Seri) Yöntemiyle Kararlılık Analizi

Nümerik şemaların kararlılığını çalışanlar için yaygın olarak kullanılan metod von Neumann metodudur.

Bu kısımda T sonlu olmak üzere $\Delta x = h \rightarrow 0$ ve $\Delta t = k \rightarrow 0$ olduğunda ($J \rightarrow \infty$) $0 \leq t \leq T = Jk$ zaman aralığında $u(x, t)$ nin bir lineer fark denkleminin kararlılığı incelenecektir.

Von Neumann (Fourier Seri) yöntemi, $t = 0$ boyunca düğüm noktalarındaki başlangıç değerlerini bir sonlu Fourier serisine göre ifade eder ve kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için yaygın olarak kullanılabenzer olarak “değişkenlere ayırma” yöntemi ile $t = 0$ için bu Fourier serisine indirgenen bir fonksiyonu göz önüne alır [43].

Fourier serileri sinüs ve kosinüs cinsinden ifade edilebilir ancak kompleks üstel formun kullanılması cebirsel olarak daha uygundur. Yani

$$\sum a_n \cos(n\pi x/l) \text{ veya } \sum b_n \sin(n\pi x/l)$$

ifadeleri yerine bu ifadelere denk olan

$$\sum A_n e^{in\pi x/l}$$

ifadesi kullanılabilir, burada $i = \sqrt{-1}$ ve l , fonksiyonun tanımlı olduğu x aralığının uzunluğudur.

$$u_{p,q} = u(ph, qk)$$

olup

$$A_n e^{in\pi x/l} = A_n e^{in\pi ph/Nh} = A_n e^{i\beta_n ph}$$

yazılabilir, burada $\beta_n = n\pi/Nh$ ve $Nh = l$ dir.

$t = 0$ boyunca düğüm noktalarındaki başlangıç değerlerini $u_{p,0} = u(ph, 0)$, $p = 0(1)N$ ile gösterelim. Bu durumda

$$u_{p,0} = \sum_{n=0}^N A_n e^{i\beta_n ph}, \quad p = 0, 1, \dots, N$$

şeklindeki $N + 1$ tane denklem $A_0, A_1, \dots, A_N$ bilinmeyenlerini tek türlü belirlemek için yeterlidir. Lineer fark denklemlerinin kararlılığı göz önüne alındığından $e^{i\beta ph}$ gibi bir tek başlangıç değerini incelemek yeterlidir çünkü lineer fark denklemlerinin lineer bağımsız çözümleri lineer birleşimli olarak ifade edilebilir. A_n katsayısı bir sabittir ve ihmal edilebilir.

t değeri artarken bu terimin dağılımını incelemek için

$$u_{p,q} = e^{i\beta x} e^{\alpha t} = e^{i\beta ph} e^{\alpha qk} = e^{i\beta ph} \varepsilon^q$$

ifadesi ele alınır, burada $\varepsilon = e^{\alpha k}$ ve α , genellikle bir kompleks sabittir. ε ise güçlendirme faktörü (amplification factor) olarak adlandırılır [43].

Lax-Richtmyer tanımına göre $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ iken $q \leq N$ için ve başlangıç şartlarını sağlayan bütün β değerleri için $|u_{p,q}|$ kalanları sınırlı ise sonlu fark denklemleri kararlıdır [43].

Diferansiyel denklemlerin tam çözümleri zamana bağlı üstel olarak artmıyorsa bu durumda kararlılık için gerek ve yeter şart

$$|\varepsilon| \leq 1$$

yani

$$-1 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (2.25)$$

olmasıdır. Ancak $u_{p,q}$ zamana bağı olarak artıyorsa bu durumda kararlılık için gerek ve yeter şart

$$|\varepsilon| \leq 1 + Kk = 1 + O(k) \quad (2.26)$$

olmasıdır, burada K , h , k ve β değerlerinden bağımsız pozitif bir sayıdır [43].

Burada belirtelim ki bu yöntem sadece sabit katsayılı lineer denklemlere uygulanabilir. Üç veya daha fazla değişken içeren fark denklemleri için (2.25) ve (2.26) von Neumann şartları her zaman gereklidir fakat yeterli olmayabilirler. Teorik olarak yöntem iyi sonuçlar verir [43].

3. MODEL PROBLEMLER

3.1 Problem 1

$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ bölgesi üzerinde

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.1)$$

şeklindeki iki boyutlu ısı denklemi

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(2\pi y), \quad (x, y) \in D,$$

başlangıç şartı ve

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

sınır şartları altında göz önüne alınacaktır.

Denklemin tam çözümü

$$u(x, y, t) = \sin(\pi x) \sin(2\pi y) \exp(-5\pi^2 t)$$

şeklindedir [24].

3.2 Problem 2

$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ bölgesi üzerinde

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.2)$$

şeklindeki iki boyutlu ısı denklemi

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (x, y) \in D,$$

başlangıç şartı ve

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

sınır şartları altında göz önüne alınacaktır. Burada v difüzyon katsayısı olup problemin nümerik çözümleri hesaplanırken $v = 10^{-6}$ alınacaktır.

Denklemin tam çözümü

$$u(x, y, t) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \exp(-2v\pi^2 t)$$

şeklindedir [49].

Problemin ayrıştırılamayan (non-separable) çözümleri Moon vd. [49] tarafından kübik B-Spline galerkin metodu kullanılarak elde edilmiştir.

3.3 Problem 3

$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ bölgesi üzerinde

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.3)$$

şeklinde verilen iki boyutlu Burgers denklemi

$$u(x, y, 0) = \frac{1}{1 + e^{(x+y)/2\varepsilon}}, \quad (x, y) \in D,$$

başlangıç şartı ve

$$u(0, y, t) = \frac{1}{1 + e^{(y-t)/2\varepsilon}}, \quad t \geq 0,$$

$$u(2, y, t) = \frac{1}{1 + e^{(2+y-t)/2\varepsilon}}, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = \frac{1}{1 + e^{(x-t)/2\varepsilon}}, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 2, t) = \frac{1}{1 + e^{(x+2-t)/2\varepsilon}}, \quad t \geq 0,$$

sınır şartları ile birlikte göz önüne alınacaktır. Burada Re Reynolds sayısı olmak üzere $\varepsilon = \frac{1}{Re}$ dir.

Problemin tam çözümü

$$u(x, y, t) = \frac{1}{1 + e^{(x+y-t)/2\varepsilon}}$$

dir [41].

Problemin nümerik çözümlerini elde etmek için Liao [41] denkleme Hopf-Cole dönüşümünü uygulamış, elde edilen iki boyutlu ısı denklemini çözmek için de dördüncü mertebeden sonlu fark yöntemini kullanmıştır. Yine Zhao vd. [35] Hopf-Cole dönüşümünü kullanarak denklemi iki boyutlu ısı denklemine dönüştürmüş ve daha sonra bu denklemi lokal süreksiz Galerkin sonlu eleman yöntemini kullanarak çözmüşlerdir.

3.4 Problem 4

$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ bölgesi üzerinde

$$u_t + uu_x + vu_y = \frac{1}{Re} (u_{xx} + u_{yy}) \quad (3.4)$$

$$v_t + uv_x + vv_y = \frac{1}{Re} (v_{xx} + v_{yy}) \quad (3.5)$$

iki boyutlu Burgers denklem sistemi göz önüne alınacaktır. Burada Re Reynolds sayısıdır. Bu denklem sisteminin tam çözümü Hopf-Cole dönüşümü kullanılarak Fletcher [25] tarafından

$$u(x, y, t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp((-4x + 4y - t)Re/32))},$$
$$v(x, y, t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp((-4x + 4y - t)Re/32))},$$

olarak verilmiştir. Başlangıç ve sınır şartları tam çözümde elde edilir.

Bu denklem sisteminin nümerik çözümlerini elde etmek için kullanılan yöntemlere ait oldukça geniş bir literatür vardır: Denklem sistemi Bahadır [30] tarafından tamamen-kapalı sonlu fark yöntemi, El-Sayed ve Kaya [31] tarafından decomposition (ayrıştırma) metodu, Abdou ve Soliman [32] tarafından varyasyonel iterasyon metodu, Mittal ve Jiwarı [33] tarafından differential quadrature metodu, Liu ve Weiping [34] tarafından lattice Boltzmann metodu kullanılarak nümerik çözümleri elde edilmiştir. Fletcher [27] denklem sisteminin nümerik çözümlerini elde etmek için sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemlerini kullanmıştır. Zhao vd. [35] denklem sistemine Hopf-Cole dönüşümünü uygulamış ve daha sonra elde edilen iki boyutlu ısı denklemini çözmek için lokal süreksiz Galerkin sonlu eleman yöntemini kullanmışlardır. Ancak bu metodla denklem sisteminin nümerik çözümlerini $Re = 20$ den daha büyük Reynolds (Re)

sayıları için elde edememişlerdir. Srivastava vd. [36] denklem sistemini çözmek için Crank-Nicolson sonlu fark yöntemini kullanmışlardır. Yine Srivastava vd. [38, 39] kapalı üstel ve kapalı logaritmik sonlu fark yöntemlerini kullanarak denklem sisteminin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Wani ve Thakar [37] ikinci mertebeden terimlere Crank-Nicolson ve nonlinear terimlere merkezi fark yaklaşımı kullanarak yaklaştıkları bir lineer sonlu fark yaklaşımı ile denklem sisteminin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Shukla vd. [40] denklem sisteminin nümerik çözümlerini elde etmek için modifiye edilmiş kübik B-Spline differential quadrature metodunu kullanmışlardır. Zhua vd. [45] de denklem sisteminin nümerik çözümlerini elde etmek için discrete (ayrık) Adomian decomposition metodunu kullanmışlardır.

3.5 Problem 5

$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 0.5, 0 \leq y \leq 0.5\}$ bölgesi üzerinde (3.4)-(3.5) iki boyutlu Burgers denklem sistemi

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) + \cos(\pi y), \quad (x, y) \in D,$$

$$v(x, y, 0) = x + y, \quad (x, y) \in D,$$

başlangıç şartları ve

$$u(0, y, t) = \cos(\pi y), \quad t \geq 0,$$

$$u(0.5, y, t) = 1 + \cos(\pi y), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = 1 + \sin(\pi x), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0.5, t) = \sin(\pi x), \quad t \geq 0,$$

$$v(0, y, t) = y, \quad t \geq 0,$$

$$v(0.5, y, t) = 0.5 + y, \quad t \geq 0,$$

$$v(x, 0, t) = x, \quad t \geq 0,$$

$$v(x, 0.5, t) = 0.5 + x, \quad t \geq 0,$$

sınır şartları ile birlikte göz önüne alınacaktır.

Bu problemin tam çözümü olmamakla beraber elde ettiğimiz sonuçları karşılaştırmak için literatürde probleme uygulanan diğer nümerik metodlarla elde edilen sonuçlar kullanılacaktır.

Bu problemin de nümerik çözümleri birçok araştırmacı tarafından çeşitli metodlar kullanılarak elde edilmiştir. Denklem sistemi Bahadır [30] tarafından tamamen-kapalı sonlu fark yöntemi, Mittal ve Jiwari [33] tarafından differential quadrature metodu, Srivastava vd. [36] tarafından Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi, yine Srivastava vd. [38, 39] tarafından kapalı üstel ve kapalı logaritmik sonlu fark yöntemleri, Wani ve Thakar [37] tarafından ikinci mertebeden terimlere Crank Nicolson ve nonlinear terimlere merkezi fark yaklaşımları ile yaklaştıkları bir lineer sonlu fark yaklaşımı ve Shukla vd. [40] tarafından modifiye edilmiş kübik B-Spline differential quadrature metodu kullanılarak nümerik olarak çözülmüştür. Goyon [29] denklem sistemine önce bazı ayırıklaştırma teknikleri uygulamış daha sonra da ADI yaklaşımlarını kullanarak

denklem sisteminin nümerik çözümlerini elde etmiştir.

3.6 Problem 6

$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ bölgesi üzerinde $\varepsilon = \frac{1}{Re}$ olmak üzere (3.4)-(3.5) denklemleriyle verilen iki boyutlu Burgers denklem sistemi

$$u(x, y, 0) = \frac{-4\varepsilon\pi \cos(2\pi x) \sin(\pi y)}{2 + \sin(2\pi x) \sin(\pi y)}, \quad (x, y) \in D,$$

$$v(x, y, 0) = \frac{-2\varepsilon\pi \sin(2\pi x) \cos(\pi y)}{2 + \sin(2\pi x) \sin(\pi y)}, \quad (x, y) \in D,$$

başlangıç şartları ve

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= -2\varepsilon\pi \exp(-5\pi^2 \varepsilon t) \sin(\pi y), & t \geq 0, \\ u(1, y, t) &= -2\varepsilon\pi \exp(-5\pi^2 \varepsilon t) \sin(\pi y), & t \geq 0, \\ u(x, 0, t) &= 0, & t \geq 0, \\ u(x, 1, t) &= 0, & t \geq 0, \\ v(0, y, t) &= 0, & t \geq 0, \\ v(1, y, t) &= 0, & t \geq 0, \\ v(x, 0, t) &= -\varepsilon\pi \exp(-5\pi^2 \varepsilon t) \sin(2\pi x), & t \geq 0, \\ v(x, 1, t) &= \varepsilon\pi \exp(-5\pi^2 \varepsilon t) \sin(2\pi x), & t \geq 0, \end{aligned}$$

sınır şartları ile göz önüne alınacaktır.

Denklem sisteminin tam çözümü

$$u(x, y, t) = -2\varepsilon \frac{2\pi \exp(-5\pi^2 \varepsilon t) \cos(2\pi x) \sin(\pi y)}{2 + \exp(-5\pi^2 \varepsilon t) \sin(2\pi x) \sin(\pi y)},$$

$$v(x, y, t) = -2\varepsilon \frac{\pi \exp(-5\pi^2 \varepsilon t) \sin(2\pi x) \cos(\pi y)}{2 + \exp(-5\pi^2 \varepsilon t) \sin(2\pi x) \sin(\pi y)},$$

şeklindedir [41].

Bu problemin nümerik çözümlerini elde etmek için Liao [41] denkleme Hopf-Cole dönüşümünü uygulamış ve daha sonra elde edilen iki boyutlu ısı denklemini çözmek için dördüncü mertebeden sonlu fark yöntemini kullanmıştır. Zhao vd. [35] de önce Hopf-Cole dönüşümünü kullanarak denklemi iki boyutlu ısı denklemine dönüştürmüş, elde ettikleri denklemi lokal süreksiz Galerkin sonlu eleman yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Shukla vd. [40] denklem sisteminin nümerik çözümlerini elde etmek için modifiye edilmiş kübik B-Spline differential quadrature metodunu kullanmışlardır.

3.7 Problem 7

$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 0.5, 0 \leq y \leq 0.5\}$ bölgesi üzerinde (3.4)-(3.5) iki boyutlu Burgers' denklem sistemi $Re = 1$ alınarak

$$u(x, y, 0) = x + y, \quad (x, y) \in D,$$

$$v(x, y, 0) = x - y, \quad (x, y) \in D,$$

başlangıç şartları ve

$$u(0, y, t) = \frac{y}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

$$u(0.5, y, t) = \frac{0.5 + y - t}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = \frac{x - 2xt}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0.5, t) = \frac{x + 0.5 - 2xt}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

$$v(0, y, t) = \frac{-y - 2yt}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

$$v(0.5, y, t) = \frac{0.5 - y - 2yt}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

$$v(x, 0, t) = \frac{x}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

$$v(x, 0.5, t) = \frac{x - 0.5 - t}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

sınır şartları ile birlikte göz önüne alınacaktır.

Problemin tam çözümü

$$u(x, y, t) = \frac{x + y - 2xt}{1 - 2t^2}$$

$$v(x, y, t) = \frac{x + y - 2yt}{1 - 2t^2}$$

dir [44].

Bu problemin tam çözümü Biazar ve Aminikhah [44] tarafından varyasyonel iterasyon metodu kullanılarak elde edilmiştir. Zhua vd. [45] de denklem sisteminin nümerik çözümlerini elde etmek için discrete (ayrık) Adomian decomposition metodunu kullanmışlardır.

4. İKİ BOYUTLU BURGERS DENKLEM SİSTEMİNİN TAM ÇÖZÜMÜ

İki boyutlu Burgers denklem sistemi non-lineer bir kısmi diferansiyel denklem sistemi olduğundan sistemin analitik çözümünün bilinen yöntemlerle bulunması oldukça zordur. Ancak, Cole [47] ve Ames [48], birbirlerinden bağımsız olarak 1950 yılında Hopf [46] ve 1951 yılında Cole [47] tarafından tanımlanan Hopf-Cole dönüşümünü “çok boyutlu dönüşüm” biçiminde kullanarak iki boyutlu Burgers denklem sisteminin tam çözümlerinin genelleştirilebileceğini belirtmişlerdir.

Bu bölümde, iki boyutlu Burgers denklem sistemi ve Hopf-Cole dönüşümü arasındaki ilişki verilerek bu dönüşüm yardımıyla denklem sisteminin tam çözümü elde edilecektir.

4.1 İki Boyutlu Burgers Denklem Sistemi ve Hopf-Cole Dönüşümü

(3.4)-(3.5) denklemleri ile verilen iki boyutlu Burgers denklem sistemini göz önüne alalım. Literatürde Hopf-Cole dönüşümü olarak bilinen

$$u(x, y, t) = -\frac{2}{Re} \frac{\varphi_x}{\varphi}, \quad v(x, y, t) = -\frac{2}{Re} \frac{\varphi_y}{\varphi} \quad (4.1)$$

dönüşümü yardımı ile $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ çözümleri ve $\varphi(x, y, t)$ fonksiyonu arasında bir ilişki kurulur. (4.1) ile verilen dönüşümlerin kullanılması ile

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{2}{Re} \frac{\varphi_{xt}\varphi - \varphi_x\varphi_t}{\varphi^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{2}{Re} \frac{\varphi_{yt}\varphi - \varphi_y\varphi_t}{\varphi^2} \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{2}{Re} \frac{\varphi_{xx}\varphi - \varphi_x^2}{\varphi^2} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{2}{Re} \frac{\varphi_{xy}\varphi - \varphi_x\varphi_y}{\varphi^2} \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{2}{Re} \frac{\varphi_{xy}\varphi - \varphi_x\varphi_y}{\varphi^2} \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{2}{Re} \frac{\varphi_{yy}\varphi - \varphi_y^2}{\varphi^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{2}{Re} \left(\frac{\varphi_{xxx}\varphi - \varphi_{xx}\varphi_x}{\varphi^2} - \frac{2\varphi_x\varphi_{xx}\varphi^2 - 2\varphi\varphi_x^3}{\varphi^4} \right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{2}{Re} \left(\frac{\varphi_{yyy}\varphi - \varphi_{yy}\varphi_y}{\varphi^2} - \frac{\varphi_y\varphi_{xy}\varphi^2 + \varphi_x\varphi_{yy}\varphi^2 - 2\varphi\varphi_x\varphi_y^2}{\varphi^4} \right) \\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -\frac{2}{Re} \left(\frac{\varphi_{xxy}\varphi - \varphi_{xy}\varphi_x}{\varphi^2} - \frac{\varphi_y\varphi_{xx}\varphi^2 + \varphi_x\varphi_{xy}\varphi^2 - 2\varphi\varphi_y\varphi_x^2}{\varphi^4} \right) \\
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -\frac{2}{Re} \left(\frac{\varphi_{yyy}\varphi - \varphi_{yy}\varphi_y}{\varphi^2} - \frac{2\varphi_y\varphi_{yy}\varphi^2 - 2\varphi\varphi_y^3}{\varphi^4} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. u , v , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ eşitliklerinin iki boyutlu Burgers denklem sisteminin ilk denkleminde yerine yazılması ile

$$\varphi_{xt}\varphi - \varphi_x\varphi_t = \frac{1}{Re} (\varphi\varphi_{xxx} - \varphi_x\varphi_{xx}) + \frac{1}{Re} (\varphi\varphi_{xyy} - \varphi_x\varphi_{yy}) \quad (4.2)$$

elde edilir. (4.2) eşitliği φ^2 ye bölünürse

$$\left(\frac{\varphi_t}{\varphi} \right)_x = \frac{1}{Re} \left[\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} \right)_x + \left(\frac{\varphi_{yy}}{\varphi} \right)_x \right]$$

bulunur [41]. Eşitliğin x -e göre integrali alınırsa

$$\varphi_t = \frac{1}{Re} (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + \alpha_1(y, t) \varphi \quad (4.3)$$

elde edilir, burada $\alpha_1(y, t)$ keyfi bir fonksiyondur.

Benzer şekilde u , v , $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ eşitliklerinin iki boyutlu Burgers denklem sisteminin ikinci denkleminde yerine yazılması ile

$$\varphi_{yt}\varphi - \varphi_y\varphi_t = \frac{1}{Re} (\varphi\varphi_{xxy} - \varphi_y\varphi_{xx}) + \frac{1}{Re} (\varphi\varphi_{yyy} - \varphi_y\varphi_{yy})$$

elde edilir. Bu eşitliğin φ^2 ye bölünmesi ile

$$\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_y = \frac{1}{Re} \left[\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\right)_y + \left(\frac{\varphi_{yy}}{\varphi}\right)_y \right]$$

bulunur. Elde edilen son eşitliğinde y -ye göre integrali alınırsa

$$\varphi_t = \frac{1}{Re} (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + \alpha_2(x, t) \varphi \quad (4.4)$$

bulunur, burada $\alpha_2(x, t)$ keyfi bir fonksiyondur. (4.3) ve (4.4) eşitliklerinden $\varphi(x, y, t)$ fonksiyonunun

$$\varphi_t = \frac{1}{Re} (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + \alpha(t) \varphi \quad (4.5)$$

şeklindeki iki boyutlu ısı denklemini sağladığı görülür, burada $\alpha(t)$ keyfi bir fonksiyondur.

(4.5) denklemindeki $\alpha(t)$ fonksiyonu tek türlü belirlenemediğinden iki boyutlu denklem sistemi için Hopf-Cole dönüşümü tek değildir. Ancak, aşağıdaki teorem gereğince $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ çözümleri $\alpha(t)$ fonksiyonunun seçiminden bağımsızdır [41].

Teorem [41]: $\varphi(x, y, t)$ fonksiyonu (4.5) denkleminin bir çözümü ve

$$u(x, y, t) = -\frac{2}{Re} \frac{\varphi_x}{\varphi}, v(x, y, t) = -\frac{2}{Re} \frac{\varphi_y}{\varphi}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu durumda $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ çözümleri $\alpha(t)$ fonksiyonunun seçiminden bağımsızdır.

İspat [41]: $\beta(t) = \int \alpha(t)dt$ olsun. Bu durumda $\beta'(t) = \alpha(t)$ olur. (4.5) denkleminin her iki tarafı $e^{-\beta(t)}$ ile çarpılırsa

$$e^{-\beta(t)}\varphi_t - \alpha(t)e^{-\beta(t)}\varphi = \frac{1}{Re}e^{-\beta(t)}(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})$$

bulunur. Buradan basit bir düzenleme ile

$$(e^{-\beta(t)}\varphi)_t = \frac{1}{Re}(e^{-\beta(t)}\varphi_{xx} + e^{-\beta(t)}\varphi_{yy})$$

elde edilir. Şimdi

$$\psi(x, y, t) = e^{-\beta(t)}\varphi(x, y, t)$$

olsun. Bu durumda $\psi(x, y, t)$

$$\psi_t = \frac{1}{Re}(\psi_{xx} + \psi_{yy}) \quad (4.6)$$

homojen ısı denklemini sağlar. Görüldüğü gibi (4.5) ve (4.6) denklemlerinin çözümleri arasındaki fark $e^{-\beta(t)}$ çarpanıdır. Böylece Hopf-Cole dönüşümü bu çarpanla çarpılıp bölünürse

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= -\frac{2}{Re} \frac{\varphi_x}{\varphi} = -\frac{2}{Re} \frac{e^{-\beta(t)}\varphi_x}{e^{-\beta(t)}\varphi} = -\frac{2}{Re} \frac{\psi_x}{\psi} \\ v(x, y, t) &= -\frac{2}{Re} \frac{\varphi_y}{\varphi} = -\frac{2}{Re} \frac{e^{-\beta(t)}\varphi_y}{e^{-\beta(t)}\varphi} = -\frac{2}{Re} \frac{\psi_y}{\psi} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu durumda $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ çözümlerinin $\alpha(t)$ fonksiyonunun seçiminden bağımsız olduğu açıktır.

O halde işlemlerde kolaylık olması açısından (4.5) denkleminde $\alpha(t) = 0$ seçilebilir. Böylece $\varphi(x, y, t)$ fonksiyonu

$$\varphi_t = \frac{1}{Re}(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})$$

iki boyutlu ısı denkleminin bir çözümü olmak üzere (3.4)-(3.5) denklem sisteminin $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ çözümleri

$$u(x, y, t) = -\frac{2}{Re} \frac{\varphi_x}{\varphi}, \quad v(x, y, t) = -\frac{2}{Re} \frac{\varphi_y}{\varphi}$$

şeklinde elde edilir [41].

4.2 İki Boyutlu Burgers Denklem Sisteminin Tam Çözümü

(3.4)-(3.5) denklemleri ile verilen iki boyutlu Burgers denklem sistemini göz önüne alalım. Denklem sistemine Hopf-Cole dönüşümü uygulanırsa

$$\varphi_t = \frac{1}{Re} (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) \quad (4.7)$$

iki boyutlu ısı denklemi elde edilir. Bu iki boyutlu ısı denkleminin genel çözümü

$$\varphi(x, y, t) = a + bx + cy + dxy + X(x)Y(y)T(t) \quad (4.8)$$

formunda arayalım, burada $a + bx + cy + dxy$ bilineer (iki değişkene göre lineer) çözüm ve $X(x)Y(y)T(t)$ değişkenlerine ayrılabilir çözümdür. Bilineer çözüm $\varphi_1(x, y)$ ve değişkenlerine ayrılabilir çözüm $\varphi_2(x, y, t)$ ile gösterilsin [42].

Bu durumda

$$\varphi_2(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) = W(x, y)T(t) \quad (4.9)$$

biçiminde olup, buradan çözüm elde edildikten sonra $\varphi_1(x, y)$ çözümünün de eklenmesiyle sonuca ulaşılır. (4.9) ifadesinin (4.7) denkleminde yerine yazılması ile

$$WT' = \frac{1}{Re} (W_{xx}T + W_{yy}T) \quad (4.10)$$

elde edilir. Kolaylık olması açısından (4.10) denklemi

$$Re(WT') = (\Delta W)T \quad (4.11)$$

şeklinde yazılabilir, burada Δ Laplace operatörüdür. (4.11) eşitliğinin her iki tarafı TW ifadesine bölünürse

$$Re \frac{T'}{T} = \frac{\Delta W}{W} = -\alpha^2$$

olur. Burada α^2 bir ayırma sabitidir. Böylece değişkenlerine ayrılmış denklemler

$$T' + \frac{\alpha^2}{Re}T = 0 \quad (4.12)$$

$$\Delta W + \alpha^2 W = 0 \quad (4.13)$$

şeklinde elde edilir. (4.12) denklemi çözülürse $T(t)$;

$$T(t) = Ae^{-\frac{\alpha^2}{Re}t}$$

olarak elde edilir [42]. Şimdi (4.13) denklemini göz önüne alalım. Yine $W(x, y)$,

$$W(x, y) = X(x)Y(y)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir formda yazılırsa (4.13) denklemi

$$X''Y + XY'' + \alpha^2 XY = 0$$

veya eşitliğin XY ifadesine bölünmesi ile

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \alpha^2 = -\beta^2 \quad (4.14)$$

şeklinde yazılabilir, burada β^2 bir ayırma sabitidir. (4.14) eşitliğinden

$$X'' + \beta^2 X = 0 \quad (4.15)$$

$$Y'' + (\alpha^2 - \beta^2) Y = 0 \quad (4.16)$$

şeklinde iki diferansiyel denklem elde edilir. (4.15) ve (4.16) denklemlerinin genel çözümleri ise $\gamma = \alpha^2 - \beta^2$ olmak üzere

$$X(x) = B \sin(\beta x) + C \cos(\beta x)$$

$$Y(y) = D \sin(\gamma y) + E \cos(\gamma y)$$

dir [42]. Böylece

$$\varphi_2(x, y, t) = (B \sin(\beta x) + C \cos(\beta x)) (D \sin(\gamma y) + E \cos(\gamma y)) A e^{-\frac{\alpha^2}{Re} t}$$

olur. $\varphi_1(x, y)$ ve $\varphi_2(x, y, t)$ çözümlerinin (4.8) genel çözümünde yerine yazılması ile (4.7) iki boyutlu ısı denkleminin genel çözümü

$$\varphi(x, y, t) = a + bx + cy + dxy + (B \sin(\beta x) + C \cos(\beta x)) (D \sin(\gamma y) + E \cos(\gamma y)) A e^{-\frac{\alpha^2}{Re} t}$$

olarak bulunur [42].

Hopf-Cole dönüşümünün kullanılmasıyla (3.4)-(3.5) iki boyutlu Burgers denklem sisteminin tam çözümü

$$u(x, y, t) = \frac{-2 \left(b + dy + \beta (B \cos(\beta x) - C \sin(\beta x)) (D \sin(\gamma y) + E \cos(\gamma y)) A e^{-\frac{\alpha^2}{Re} t} \right)}{Re \left(a + bx + cy + dxy + (B \sin(\beta x) + C \cos(\beta x)) (D \sin(\gamma y) + E \cos(\gamma y)) A e^{-\frac{\alpha^2}{Re} t} \right)}$$

$$v(x, y, t) = \frac{-2 \left(c + dx + \gamma (B \sin(\beta x) + C \cos(\beta x)) (D \cos(\gamma y) - E \sin(\gamma y)) A e^{-\frac{\alpha^2}{Re} t} \right)}{Re \left(a + bx + cy + dxy + (B \sin(\beta x) + C \cos(\beta x)) (D \sin(\gamma y) + E \cos(\gamma y)) A e^{-\frac{\alpha^2}{Re} t} \right)}$$

olarak elde edilir [42].

5. ALTERNATING DIRECTION IMPLICIT (ADI) METODU

5.1 İki Boyutlu Isı Denklemi İçin ADI Metodu

Problemın çözümüne geçmeden önce açık, kapalı ve karışık fark yaklaşımlarının hangisinin daha avantajlı olduğunu belirlemek için bu yaklaşımların von Neumann yöntemiyle kararlılık analizini yapalım.

(3.2) denklemi ile verilen iki boyutlu ısı denklemini göz önüne alalım. (ih_x, jh_y, nk) düğüm noktasında $u(x, y, t)$ nin yaklaşımı $u_{i,j}^n$ ile gösterilsin. Burada N_x , N_y ve n sırasıyla x , y konumlarına ve t zamanına göre bölüntü sayısı olup $i = 0, 1, 2, \dots, N_x$; $j = 0, 1, 2, \dots, N_y$; $n = 0, 1, 2, \dots$ dır. Ayrıca h_x ve h_y sırasıyla x ve y doğrultusundaki bölüntü uzunluğu ve k zaman adımıdır. Problemın açık sonlu fark yaklaşımı için $\frac{\partial u}{\partial t}$ türevi yerine

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{k} + O(k)$$

ileri fark yaklaşımı, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ türevleri yerine de sırasıyla

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h_x^2} + O(h_x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2} + O(h_y^2)$$

merkezi fark yaklaşımlarının kullanılması ile; (3.2) denkleminin açık sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{k} = v \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2} \right)$$

şeklinde olur. Şimdi bu yaklaşıma von Neumann kararlılık yöntemini uygulayalım. Kararlılık yönteminin uygulanmasına geçmeden önce bir takım karışıklıkları engellemek adına i, j indisleri yerine p, q indislerinin kullanılması ile

$$u_{i,j}^n = u_{p,q}^n = \gamma^n e^{i\alpha p h_x} e^{i\beta q h_y}, \quad i = \sqrt{-1}$$

eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitlik açık sonlu fark yaklaşımında yerine yazılır ve $d_x = \frac{vk}{h_x^2}$, $d_y = \frac{vk}{h_y^2}$ gösterimleri kullanılmak üzere gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\gamma = -4 \left(\sin^2 \frac{\alpha h_x}{2} d_x + \sin^2 \frac{\beta h_y}{2} d_y \right) + 1$$

elde edilir. Yöntemin kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\gamma| \leq 1$ olmasıdır. O halde

$$\left| -4 \left(\sin^2 \frac{\alpha h_x}{2} d_x + \sin^2 \frac{\beta h_y}{2} d_y \right) + 1 \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq -4 \left(\sin^2 \frac{\alpha h_x}{2} d_x + \sin^2 \frac{\beta h_y}{2} d_y \right) + 1 \leq 1$$

$$\Rightarrow -2 \leq -4 \left(\sin^2 \frac{\alpha h_x}{2} d_x + \sin^2 \frac{\beta h_y}{2} d_y \right) \leq 0$$

$$\Rightarrow 2 \geq 4 \left(\sin^2 \frac{\alpha h_x}{2} d_x + \sin^2 \frac{\beta h_y}{2} d_y \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{\alpha h_x}{2} d_x + \sin^2 \frac{\beta h_y}{2} d_y \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d_x + d_y \leq \frac{1}{2}$$

olur. Yani yöntem $d_x + d_y \leq \frac{1}{2}$ için kararlıdır. Kolaylık olması için $h_x = h_y = h$ alırsak ve $d_x = d_y = d$ olarak gösterirsek kararlılık şartı $d \leq \frac{1}{4}$ olur, ki bu da daha sınırlayıcı bir şarttır [2].

Şimdi (3.2) ile verilen denklemin kapalı sonlu fark yaklaşımının kararlılığını inceleyeyim: $\frac{\partial u}{\partial t}$ türevi yerine

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{k} + O(k)$$

ileri fark yaklaşımı, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ türevleri yerine de sırasıyla

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + O(h_x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} + O(h_y^2)$$

merkezi fark yaklaşımlarının kullanılması ile (3.2) denkleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{k} = v \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} \right)$$

ya da $d_x = \frac{vk}{h_x^2}$ ve $d_y = \frac{vk}{h_y^2}$ olarak gösterilmek üzere

$$d_x u_{i+1,j}^{n+1} + d_x u_{i-1,j}^{n+1} - (2d_x + 2d_y + 1) u_{i,j}^{n+1} + d_y u_{i,j+1}^{n+1} + d_y u_{i,j-1}^{n+1} = -u_{i,j}^n$$

şeklinde dir. Burada çözümde karşımıza beşli bant matris yapısına sahip bir sistem çıkar [1, 2]. Şimdi bu yaklaşıma von Neumann kararlılık yöntemini uygulayalım. Bunun için kapalı sonlu fark yaklaşımında $u_{i,j}^n$ yerine

$$u_{i,j}^n = u_{p,q}^n = \gamma^n e^{i\alpha p h_x} e^{i\beta q h_y}, \quad i = \sqrt{-1}$$

yazılır ve $d_x = \frac{vk}{h_x^2}$, $d_y = \frac{vk}{h_y^2}$ gösterimleri kullanılmak üzere gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\gamma = \frac{1}{1 + 4 \left(\sin^2 \frac{\alpha h_x}{2} d_x + \sin^2 \frac{\beta h_y}{2} d_y \right)}$$

elde edilir. Yöntemin kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\gamma| \leq 1$ olması olup yukarıdaki eşitlik için $|\gamma| \leq 1$ olduğu açıktır. Böylece kapalı sonlu fark yaklaşımı şartsız kararlıdır. Ancak kapalı sonlu fark yaklaşımı her bir zaman adımında geniş bir denklem sistemi çözmeyi gerektirir. Bu ise bir dezavantajdır [2].

Şimdi de (3.2) denkleminde $\frac{\partial u}{\partial t}$ türevi yerine

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{k} + O(k)$$

ileri fark yaklaşımı, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ türevi yerine $(n+1)$. zaman adımındaki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + O(h_x^2)$$

merkezi fark yaklaşımı ve $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ türevi yerine ise n . zaman adımındaki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2} + O(h_y^2)$$

merkezi fark yaklaşımı yazılırsa (3.2) denkleminin karışık sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{k} = v \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2} \right)$$

ya da $d_x = \frac{vk}{h_x^2}$, $d_y = \frac{vk}{h_y^2}$ olarak gösterilmek üzere

$$-d_x u_{i-1,j}^{n+1} + (1 + 2d_x) u_{i,j}^{n+1} - d_x u_{i+1,j}^{n+1} = d_y u_{i,j-1}^n + (1 - 2d_y) u_{i,j}^n + d_y u_{i,j+1}^n \quad (5.1)$$

olur [1]. Bu durumda (5.1) yaklaşımı, LU ayrışım metodları kullanılarak çözülebilecek olan üçlü bant matris yapısına sahip olduğundan kolaylıkla çözülebilir. Ancak yöntemin kararlı olup olmadığını belirlemeliyiz. Bunun için yaklaşıma von Neumann kararlılık yöntemini uygulayalım. Kolaylık olması için $h_x = h_y = h$ alalım. $u_{i,j}^n$ yerine

$$u_{i,j}^n = u_{p,q}^n = \gamma^n e^{i\alpha p h} e^{i\beta q h}, \quad i = \sqrt{-1}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $d = \frac{vk}{h^2}$ olarak gösterilmek üzere

$$\gamma = \frac{1 - 4d \sin^2 \frac{\alpha h}{2}}{1 + 4d \sin^2 \frac{\beta h}{2}}$$

elde edilir. Yöntemin kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\gamma| \leq 1$ olmasıdır. O halde

$$\begin{aligned}
|\gamma| &= \left| \frac{1-4d \sin^2 \frac{\alpha h}{2}}{1+4d \sin^2 \frac{\beta h}{2}} \right| \leq 1 \\
\Rightarrow |1 - 4d \sin^2 \frac{\alpha h}{2}| &\leq 1 \\
\Rightarrow -1 \leq 1 - 4d \sin^2 \frac{\alpha h}{2} &\leq 1 \\
\Rightarrow 2 \geq 4d \sin^2 \frac{\alpha h}{2} &\geq 0 \\
\Rightarrow d \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

olur, bu durumda (5.1) yaklaşımı sadece şartlı kararlıdır.

Bu üç durumun birbirine göre avantaj ve dezavantajları vardır. “Acaba bu yaklaşımlar dışında hepsinden daha avantajlı olan bir yaklaşım var mıdır? ” diye araştıralım:

Bunun için zaman adımlarının uzunluğunu yarıya indirip ilk yarısında x doğrultusunda kapalı ve y doğrultusunda açık, ikinci yarısında ise x doğrultusunda açık ve y doğrultusunda kapalı olacak şekilde yeni bir yaklaşımı göz önüne alalım [1]. Yeni yaklaşımda n zaman adımından $n + \frac{1}{2}$ ‘hayali’ zaman adımına ve $n + \frac{1}{2}$ ‘hayali’ zaman adımından $n + 1$ zaman adımına ilerlenir [1]. Bu yaklaşım

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{k/2} &= v \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2} \right) \\
\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{k/2} &= v \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada $d_x^* = \frac{vk}{2h_x^2}$ ve $d_y^* = \frac{vk}{2h_y^2}$ olarak gösterilmek üzere yaklaşım

$$-d_x^* u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2d_x^*) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - d_x^* u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = d_y^* u_{i,j-1}^n + (1 - 2d_y^*) u_{i,j}^n + d_y^* u_{i,j+1}^n \quad (5.2)$$

$$-d_y^* u_{i,j-1}^{n+1} + (1 + 2d_y^*) u_{i,j}^{n+1} - d_y^* u_{i,j+1}^{n+1} = d_x^* u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - 2d_x^*) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + d_x^* u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (5.3)$$

şeklinde elde edilir [1]. Burada eşitlikler sırasıyla çözülürse her iki eşitliğin sol tarafındaki değerler bilinmeyenler, sağ tarafındaki değerler ise bilinen değerlerdir. Bu yaklaşım literatürde Alternating Direction Implicit (ADI) metodu olarak bilinir [1].

5.1.1 İki Boyutlu Isı Denklemi İçin ADI Metodunun Kararlılık Analizi

Metodun kararlılığını incelemek için (5.2)-(5.3) yaklaşımlarına von Neumann kararlılık yöntemini uygulayalım. Kolaylık olması için $h_x = h_y = h$ olarak alalım. $u_{i,j}^n$ yerine

$$u_{i,j}^n = u_{p,q}^n = \gamma^n e^{i\alpha p h} e^{i\beta q h}, \quad i = \sqrt{-1}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $d^* = \frac{vk}{2h^2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \gamma^{n+\frac{1}{2}} \left(1 + 4d^* \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \right) &= \gamma^n \left(1 - 4d^* \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right) \\ \gamma^{n+1} \left(1 + 4d^* \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right) &= \gamma^{n+\frac{1}{2}} \left(1 - 4d^* \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $\alpha_1 = 4d^* \sin^2 \frac{\beta h}{2}$ ve $\alpha_2 = 4d^* \sin^2 \frac{\alpha h}{2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^{n+\frac{1}{2}}}{\gamma^n} &= \frac{1 - \alpha_1}{1 + \alpha_2} \\ \frac{\gamma^{n+1}}{\gamma^{n+\frac{1}{2}}} &= \frac{1 - \alpha_2}{1 + \alpha_1} \end{aligned}$$

olur. Yaklaşımın kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\gamma| \leq 1$ olmasıdır. O halde

$$\gamma = \frac{\gamma^{n+1}}{\gamma^n} = \left(\frac{1 - \alpha_2}{1 + \alpha_1} \right) \left(\frac{1 - \alpha_1}{1 + \alpha_2} \right)$$

olup $|\gamma| \leq 1$ olduğu açıktır [1]. Bu durumda (5.2)-(5.3) yaklaşımları şartsız kararlıdır [1, 2].

5.2 İki Boyutlu Burgers Denklemi İçin ADI Metodu

$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ bölgesi üzerinde (3.3) denklemi ile verilen iki boyutlu Burgers denklemini

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (5.4)$$

başlangıç şartı ve

$$u(x, y, t) = \phi(x, y, t), \quad x, y \in \partial D, \quad t > 0, \quad (5.5)$$

sınır şartlarıyla göz önüne alalım. (ih_x, jh_y, nk) düğüm noktasında $u(x, y, t)$ nin yaklaşımı $u_{i,j}^n$ ile gösterilsin. Burada N_x , N_y ve n sırasıyla x , y konumlarına ve t zamanına göre bölüntü sayısı olup $i = 0, 1, 2, \dots, N_x$; $j = 0, 1, 2, \dots, N_y$; $n = 0, 1, 2, \dots$ dır. Ayrıca h_x ve h_y sırasıyla x ve y doğrultusundaki bölüntü uzunluğu ve k zaman adımıdır.

Bu denklem için Alternating Direction Implicit (ADI) yaklaşımı

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{k/2} + u_{i,j}^n \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} + \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h_y} \right) \\ = \varepsilon \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2} \right) \\ \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{k/2} + u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \right) \\ = \varepsilon \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} \right) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Kolaylık açısından $h_x = h_y = h$ ve $r_1 = \frac{k}{4h}$, $r_2 = \frac{k\varepsilon}{2h^2}$ olarak alınırsa ADI yaklaşımı

$$\begin{aligned} & \left(-r_1 (u_{i,j}^n) - r_2 \right) u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2r_2) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left(r_1 (u_{i,j}^n) - r_2 \right) u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \left(r_1 (u_{i,j}^n) + r_2 \right) u_{i,j-1}^n + (1 - 2r_2) u_{i,j}^n + \left(-r_1 (u_{i,j}^n) + r_2 \right) u_{i,j+1}^n \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} & \left(-r_1 \left(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) - r_2 \right) u_{i,j-1}^{n+1} + (1 + 2r_2) u_{i,j}^{n+1} + \left(r_1 \left(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) - r_2 \right) u_{i,j+1}^{n+1} \\ &= \left(r_1 \left(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) + r_2 \right) u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - 2r_2) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left(-r_1 \left(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) + r_2 \right) u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

şeklinde elde edilir. Herhangi bir n , $(n + \frac{1}{2})$ ve $(n + 1)$. zaman adımlarındaki $u_{0,j}$, $u_{N_x,j}$, $u_{i,0}$, u_{i,N_y} değerleri (5.5) sınır şartlarından bilinen değerler olduğundan (3.3) ile verilen iki boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümleri $i = 1, 2, \dots, N_x - 1$, $j = 1, 2, \dots, N_y - 1$ ve $n = 0, 1, 2, \dots$ için sırasıyla (5.6) ve (5.7) sistemlerinin çözülmesi ile elde edilir.

(5.6) ve (5.7) sistemlerinin matris formunda ifadeleri sırasıyla

$$\begin{aligned} a_i &= -r_1 (u_{i,j}^n) - r_2, \quad b_i = 1 + 2r_2, \quad c_i = r_1 (u_{i,j}^n) - r_2, \\ a_i^* &= r_1 (u_{i,j}^n) + r_2, \quad b_i^* = 1 - 2r_2, \quad c_i^* = -r_1 (u_{i,j}^n) + r_2 \end{aligned}$$

olmak üzere $j = 1, 2, \dots, N_y - 1$ ve $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{N_x-2} & b_{N_x-2} & c_{N_x-2} \\ & & & a_{N_x-1} & b_{N_x-1} & \\ & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ u_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ u_{N_x-2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ u_{N_x-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} -a_1 u_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} + a_1^* u_{1,j-1}^n + b_1^* u_{1,j}^n + c_1^* u_{1,j+1}^n \\ a_2^* u_{2,j-1}^n + b_2^* u_{2,j}^n + c_2^* u_{2,j+1}^n \\ \vdots \\ a_{N_x-2}^* u_{N_x-2,j-1}^n + b_{N_x-2}^* u_{N_x-2,j}^n + c_{N_x-2}^* u_{N_x-2,j+1}^n \\ -c_{N_x-1} u_{N_x,j}^{n+\frac{1}{2}} + a_{N_x-1}^* u_{N_x-1,j-1}^n + b_{N_x-1}^* u_{N_x-1,j}^n + c_{N_x-1}^* u_{N_x-1,j+1}^n \end{bmatrix}$$

ve

$$d_j = -r_1 \left(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) - r_2, \quad e_j = 1 + 2r_2, \quad f_j = r_1 \left(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) - r_2,$$

$$d_j^* = r_1 \left(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) + r_2, \quad e_j^* = 1 - 2r_2, \quad f_j^* = -r_1 \left(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) + r_2$$

olmak üzere $i = 1, 2, \dots, N_x - 1$ ve $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\begin{bmatrix} e_1 & f_1 & & & \\ d_2 & e_2 & f_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_{N_y-2} & e_{N_y-2} & f_{N_y-2} \\ & & & d_{N_y-1} & e_{N_y-1} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{i,1}^{n+1} \\ u_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{i,N_y-2}^{n+1} \\ u_{i,N_y-1}^{n+1} \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} -d_1 u_{i,0}^{n+1} + d_1^* u_{i-1,1}^{n+\frac{1}{2}} + e_1^* u_{i,1}^{n+\frac{1}{2}} + f_1^* u_{i+1,1}^{n+\frac{1}{2}} \\ d_2^* u_{i-1,2}^{n+\frac{1}{2}} + e_2^* u_{i,2}^{n+\frac{1}{2}} + f_2^* u_{i+1,2}^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ d_{N_y-2}^* u_{i-1,N_y-2}^{n+\frac{1}{2}} + e_{N_y-2}^* u_{i,N_y-2}^{n+\frac{1}{2}} + f_{N_y-2}^* u_{i+1,N_y-2}^{n+\frac{1}{2}} \\ -e_{N_y-1} u_{i,N_y}^{n+1} + d_{N_y-1}^* u_{i-1,N_y-1}^{n+\frac{1}{2}} + e_{N_y-1}^* u_{i,N_y-1}^{n+\frac{1}{2}} + f_{N_y-1}^* u_{i+1,N_y-1}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

5.2.1 İki Boyutlu Burgers Denklemi İçin ADI Metodunun Kararlılık Analizi

Bu kısımda, von Neumann kararlılık yöntemi kullanılarak (5.6)-(5.7) yaklaşımlarının kararlılığı incelenecektir.

Daha öncede belirtildiği gibi von Neumann yöntemi sadece lineer fark denklemlerine uygulandığından (5.6)-(5.7) yaklaşımlarının kararlılığını incelemek için (3.3) ile verilen iki boyutlu Burgers denkleminde u değişkeni sabitmiş gibi kabul edilerek uu_x ve uu_y non-linear terimleri lineerleştirilir. Böylece (3.3) denklemindeki uu_x ve uu_y non-linear terimlerini $\hat{U}u_x$ ve $\hat{U}u_y$ şeklinde gösterirsek (3.3) denklemi

$$u_t + \hat{U}u_x + \hat{U}u_y = \frac{1}{Re}(u_{xx} + u_{yy})$$

denklemine dönüşür. Bu lineerleştirilmiş denkleme ADI metodu uygulanırsa yeni sonlu fark yaklaşımları

$$\begin{aligned} & \left(-r_1\hat{U} - r_2 \right) u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2r_2) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left(r_1\hat{U} - r_2 \right) u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \left(r_1\hat{U} + r_2 \right) u_{i,j-1}^n + (1 - 2r_2) u_{i,j}^n + \left(-r_1\hat{U} + r_2 \right) u_{i,j+1}^n \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} & \left(-r_1\hat{U} - r_2 \right) u_{i,j-1}^{n+1} + (1 + 2r_2) u_{i,j}^{n+1} + \left(r_1\hat{U} - r_2 \right) u_{i,j+1}^{n+1} \\ &= \left(r_1\hat{U} + r_2 \right) u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - 2r_2) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left(-r_1\hat{U} + r_2 \right) u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

şeklinde elde edilir. Bu yaklaşımlara von Neumann kararlılık yöntemini uygulayalım. Kolaylık olması için $h_x = h_y = h$ olarak alalım. Yeni (5.8)-(5.9) yaklaşımlarında $u_{i,j}^n$ yerine

$$u_{i,j}^n = u_{p,q}^n = \gamma^n e^{i\alpha p h} e^{i\beta q h}, \quad i = \sqrt{-1}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa güçlendirme faktörleri

$$\frac{\gamma^{n+\frac{1}{2}}}{\gamma^n} = \frac{1 - \alpha_1}{1 + \alpha_2}$$

ve

$$\frac{\gamma^{n+1}}{\gamma^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1 - \alpha_2}{1 + \alpha_1}$$

olarak elde edilir, burada

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 4r_2 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} + i \left(2r_1 \hat{U} \sin \alpha h \right) \\ \alpha_2 &= 4r_2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + i \left(2r_1 \hat{U} \sin \beta h \right)\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\gamma = \frac{\gamma^{n+1}}{\gamma^n} = \left(\frac{1 - \alpha_2}{1 + \alpha_1} \right) \left(\frac{1 - \alpha_1}{1 + \alpha_2} \right)$$

olarak bulunur. Yaklaşımın kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\gamma| \leq 1$ olmasıdır.

$a_1 = 4r_2 \sin^2 \frac{\alpha h}{2}$, $b_1 = 2r_1 \hat{U} \sin \alpha h$, $a_2 = 4r_2 \sin^2 \frac{\beta h}{2}$ ve $b_2 = 2r_1 \hat{U} \sin \beta h$ biçiminde gösterilirse

$$|\gamma| = \sqrt{\frac{1 + a_1^2 - 2a_1 + b_1^2}{1 + a_1^2 + 2a_1 + b_1^2}} \sqrt{\frac{1 + a_2^2 - 2a_2 + b_2^2}{1 + a_2^2 + 2a_2 + b_2^2}}$$

olarak elde edilir. Burada $a_1, a_2 \geq 0$ olduğundan $|\gamma| \leq 1$ olduğu açıktır. Sonuç olarak (5.6)-(5.7) yaklaşımları şartsız kararlıdır.

5.3 İki Boyutlu Burgers Denklem Sistemi İçin ADI Metodu

$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ bölgesi üzerinde (3.4)-(3.5) denklemleri ile verilen iki boyutlu Burgers denklem sistemini

$$\begin{aligned}u(x, y, 0) &= f(x, y), \quad (x, y) \in D, \\ v(x, y, 0) &= g(x, y), \quad (x, y) \in D,\end{aligned}\tag{5.10}$$

başlangıç şartları ve

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \phi(x, y, t), \quad x, y \in \partial D, \quad t > 0, \\ v(x, y, t) &= \psi(x, y, t), \quad x, y \in \partial D, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

sınır şartlarıyla göz önüne alalım. (ih_x, jh_y, nk) düğüm noktasında $u(x, y, t)$ nin yaklaşımı $u_{i,j}^n$ ile gösterilsin. Burada N_x , N_y ve n sırasıyla x , y konumlarına ve t zamanına göre bölüntü sayısı olup $i = 0, 1, 2, \dots, N_x$; $j = 0, 1, 2, \dots, N_y$; $n = 0, 1, 2, \dots$ dır. Ayrıca h_x ve h_y sırasıyla x ve y doğrultusundaki bölüntü uzunluğu ve k zaman adımdır.

(3.4) denklemi için ADI yaklaşımı

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{k/2} + u_{i,j}^n \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} \right) + v_{i,j}^n \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h_y} \right) \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2} \right) \\ \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{k/2} + u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} \right) + v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \right) \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} \right) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Kolaylık açısından $h_x = h_y = h$ ve $r_1 = \frac{k}{4h}$, $r_2 = \frac{k}{2\text{Re}h^2}$ olarak alınırsa ADI yaklaşımı

$$\begin{aligned} (-r_1 (u_{i,j}^n) - r_2) u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2r_2) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + (r_1 (u_{i,j}^n) - r_2) u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ = (r_1 (v_{i,j}^n) + r_2) u_{i,j-1}^n + (1 - 2r_2) u_{i,j}^n + (-r_1 (v_{i,j}^n) + r_2) u_{i,j+1}^n \quad (5.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-r_1 \left(v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) - r_2 \right) u_{i,j-1}^{n+1} + (1 + 2r_2) u_{i,j}^{n+1} + \left(r_1 \left(v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) - r_2 \right) u_{i,j+1}^{n+1} \\
& = \left(r_1 \left(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) + r_2 \right) u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - 2r_2) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left(-r_1 \left(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) + r_2 \right) u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (5.13)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde (3.5) denklemini için ADI yaklaşımı

$$\begin{aligned}
& \frac{v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i,j}^n}{k/2} + u_{i,j}^n \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} \right) + v_{i,j}^n \left(\frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2h_y} \right) \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{h_y^2} \right) \\
& \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{k/2} + u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_x} \right) + v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \right) \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Yine $h_x = h_y = h$ ve $r_1 = \frac{k}{4h}$, $r_2 = \frac{k}{2Reh^2}$ olarak alınırsa ADI yaklaşımı

$$\begin{aligned}
& \left(-r_1 \left(u_{i,j}^n \right) - r_2 \right) v_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2r_2) v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left(r_1 \left(u_{i,j}^n \right) - r_2 \right) v_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
& = \left(r_1 \left(v_{i,j}^n \right) + r_2 \right) v_{i,j-1}^n + (1 - 2r_2) v_{i,j}^n + \left(-r_1 \left(v_{i,j}^n \right) + r_2 \right) v_{i,j+1}^n \quad (5.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-r_1 \left(v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) - r_2 \right) v_{i,j-1}^{n+1} + (1 + 2r_2) v_{i,j}^{n+1} + \left(r_1 \left(v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) - r_2 \right) v_{i,j+1}^{n+1} \\
& = \left(r_1 \left(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) + r_2 \right) v_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - 2r_2) v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left(-r_1 \left(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) + r_2 \right) v_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (5.15)
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Herhangi bir n , $(n + \frac{1}{2})$ ve $(n + 1)$. zaman adımlarındaki $u_{0,j}$, $u_{N_x,j}$, $u_{i,0}$, u_{i,N_y} , $v_{0,j}$, $v_{N_x,j}$, $v_{i,0}$, v_{i,N_y} değerleri (5.11) sınır şartlarından bilinen değerler olduğundan (3.4)-(3.5) ile verilen iki boyutlu Burgers denklem sisteminin nümerik çözümleri $i = 1, 2, \dots, N_x - 1$, $j = 1, 2, \dots, N_y - 1$ ve $n = 0, 1, 2, \dots$ için (5.12), (5.13), (5.14) ve (5.15) sistemlerinin çözülmesiyle elde edilir. Burada öncelikle (5.12) ve (5.14) sistemleri çözülür ve daha sonra elde edilen sonuçlar kullanılarak (5.13) ve (5.15) sistemleri çözülür.

5.3.1 İki Boyutlu Burgers Denklem Sistemi İçin ADI Metodunun Kararlılık Analizi

Bu kısımda, von Neumann kararlılık analizi kullanılarak (5.12)-(5.13) ve (5.14)-(5.15) yaklaşımlarının kararlılığı incelenecektir.

(5.12)-(5.13) yaklaşımlarının kararlılığını incelemek için (3.4) ile verilen iki boyutlu Burgers denkleminde u ve v değişkenleri sabit kabul edilerek uu_x ve vu_y non-lineer terimleri lineerleştirilir. Böylece (3.4) denklemindeki uu_x ve vu_y non-lineer terimlerini $\hat{U}u_x$ ve $\hat{V}u_y$ şeklinde gösterirsek (3.4) denklemi

$$u_t + \hat{U}u_x + \hat{V}u_y = \frac{1}{Re} (u_{xx} + u_{yy})$$

denkleme dönüşür. Bu lineerleştirilmiş denkleme ADI metodu uygulanırsa yeni sonlu fark yaklaşımları

$$\begin{aligned} & \left(-r_1\hat{U} - r_2 \right) u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2r_2) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left(r_1\hat{U} - r_2 \right) u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ & = \left(r_1\hat{V} + r_2 \right) u_{i,j-1}^n + (1 - 2r_2) u_{i,j}^n + \left(-r_1\hat{V} + r_2 \right) u_{i,j+1}^n \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}
& \left(-r_1 \hat{V} - r_2 \right) u_{i,j-1}^{n+1} + (1 + 2r_2) u_{i,j}^{n+1} + \left(r_1 \hat{V} - r_2 \right) u_{i,j+1}^{n+1} \\
& = \left(r_1 \hat{U} + r_2 \right) u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - 2r_2) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left(-r_1 \hat{U} + r_2 \right) u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (5.17)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu yaklaşımlara von Neumann kararlılık yöntemini uygulayalım.

Kolaylık olması için $h_x = h_y = h$ olarak alalım. Yeni (5.8)-(5.9) yaklaşımlarında $u_{i,j}^n$ yerine

$$u_{i,j}^n = u_{p,q}^n = \gamma^n e^{i\alpha p h} e^{i\beta q h}, \quad i = \sqrt{-1}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa güçlendirme faktörleri

$$\frac{\gamma^{n+\frac{1}{2}}}{\gamma^n} = \frac{1 - \alpha_1}{1 + \alpha_2}$$

ve

$$\frac{\gamma^{n+1}}{\gamma^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1 - \alpha_2}{1 + \alpha_1}$$

olarak elde edilir, burada

$$\alpha_1 = 4r_2 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} + i \left(2r_1 \hat{U} \sin \alpha h \right)$$

$$\alpha_2 = 4r_2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + i \left(2r_1 \hat{V} \sin \beta h \right)$$

dir. Böylece

$$\gamma = \frac{\gamma^{n+1}}{\gamma^n} = \left(\frac{1 - \alpha_2}{1 + \alpha_1} \right) \left(\frac{1 - \alpha_1}{1 + \alpha_2} \right)$$

olarak bulunur. Yaklaşımın kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\gamma| \leq 1$ olmasıdır.

$a_1 = 4r_2 \sin^2 \frac{\alpha h}{2}$, $b_1 = 2r_1 \hat{U} \sin \alpha h$, $a_2 = 4r_2 \sin^2 \frac{\beta h}{2}$ ve $b_2 = 2r_1 \hat{V} \sin \beta h$ biçiminde gösterilirse

$$|\gamma| = \sqrt{\frac{1 + a_1^2 - 2a_1 + b_1^2}{1 + a_1^2 + 2a_1 + b_1^2}} \sqrt{\frac{1 + a_2^2 - 2a_2 + b_2^2}{1 + a_2^2 + 2a_2 + b_2^2}}$$

olarak elde edilir. Burada $a_1, a_2 \geq 0$ olduğundan $|\gamma| \leq 1$ olduğu açıktır. Sonuç olarak (5.12)-(5.13) yaklaşımları şartsız kararlıdır.

Benzer işlemlerin (5.14)-(5.15) yaklaşımlarına uygulanmasıyla bu yaklaşımlarında şartsız kararlı olduğu görülür.



6. MODEL PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde ele alınan yedi model problemin Alternating Direction Implicit (ADI) metodu kullanılarak elde edilen nümerik çözümlerinin tam çözümler ve literatürdeki diğer çalışmalarda elde edilen nümerik çözümlerle uyumu tablolar ve grafikler ile sunulmuştur. Elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere ne kadar yakın olduğunu göstermek için

$$L_2 = \|U - u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} |U_{i,j} - u_{i,j}|^2}$$
$$L_\infty = \|U - u\|_\infty = \max_{i,j} |U_{i,j} - u_{i,j}|$$

hata normları kullanıldı.

6.1 Problem 1

Burada $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ bölgesi üzerinde (3.1) iki boyutlu ısı denklemi

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(2\pi y), \quad (x, y) \in D,$$

başlangıç şartı ve

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

sınır şartları ile birlikte göz önüne alındı.

Tablo 6.1-Tablo 6.3' de $k = 0.00001$ ve $h_x = h_y = h$ olmak üzere h ' nın farklı değerleri için sırasıyla $t = 0.01, 0.05, 0.1$ zamanlarında elde edilen nümerik çözümler tam çözümlerle karşılaştırıldı. Tablolardan bölüntü uzunluğunun azalmasıyla elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere giderek yaklaştığı, L_2 ve L_∞ hata normlarının giderek küçüldüğü görülmektedir.

Tablo 6.1: Problem 1 için $k = 0.00001$ ve $t = 0.01$ için nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması

(x, y)	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
(0.1, 0.1)	0.11241	0.11127	0.11098	0.11091	0.11089
(0.5, 0.1)	0.36377	0.36008	0.35915	0.35892	0.35884
(0.9, 0.1)	0.11241	0.11127	0.11098	0.11091	0.11089
(0.3, 0.3)	0.47617	0.47135	0.47013	0.46983	0.46973
(0.8, 0.3)	0.34596	0.34245	0.34157	0.34135	0.34128
(0.2, 0.4)	0.21382	0.21165	0.21110	0.21097	0.21092
(0.4, 0.4)	0.34596	0.34245	0.34157	0.34135	0.34128
(0.9, 0.4)	0.11241	0.11127	0.11098	0.11091	0.11089
(0.3, 0.7)	-0.47617	-0.47135	-0.47013	-0.46983	-0.46973
(0.5, 0.7)	-0.58858	-0.58262	-0.58112	-0.58074	-0.58062
(0.1, 0.9)	-0.11241	-0.11127	-0.11098	-0.11091	-0.11089
(0.5, 0.9)	-0.36377	-0.36008	-0.35915	-0.35892	-0.35884
(0.9, 0.9)	-0.11241	-0.11127	-0.11098	-0.11091	-0.11089
$L_2 \times 10^3$	40.39730	18.03047	4.50872	6.77974	
$L_\infty \times 10^3$	7.68403	1.80304	0.22543	0.16950	

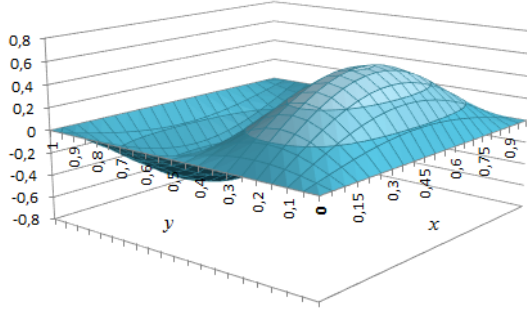
Tablo 6.2: Problem 1 için $k = 0.00001$ ve $t = 0.05$ için nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması

(x, y)	Nümerik Çözüm				Tam
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Çözüm
(0.1, 0.1)	0.01649	0.01567	0.01547	0.01542	0.01540
(0.5, 0.1)	0.05336	0.05071	0.05006	0.04990	0.04985
(0.9, 0.1)	0.01649	0.01567	0.01547	0.01542	0.01540
(0.3, 0.3)	0.06985	0.06638	0.06553	0.06532	0.06525
(0.8, 0.3)	0.05075	0.04823	0.04761	0.04746	0.04741
(0.2, 0.4)	0.03137	0.02981	0.02943	0.02933	0.02930
(0.4, 0.4)	0.05075	0.04823	0.04761	0.04746	0.04741
(0.9, 0.4)	0.01649	0.01567	0.01547	0.01542	0.01540
(0.3, 0.7)	-0.06985	-0.06638	-0.06553	-0.06532	-0.06525
(0.5, 0.7)	-0.08634	-0.08205	-0.08100	-0.08074	-0.08065
(0.1, 0.9)	-0.01649	-0.01567	-0.01547	-0.01542	-0.01540
(0.5, 0.9)	-0.05336	-0.05071	-0.05006	-0.04990	-0.04985
(0.9, 0.9)	-0.01649	-0.01567	-0.01547	-0.01542	-0.01540
$L_2 \times 10^3$	29.68078	14.28610	6.48563	1.98434	
$L_\infty \times 10^3$	5.64562	1.42861	0.32429	0.04961	

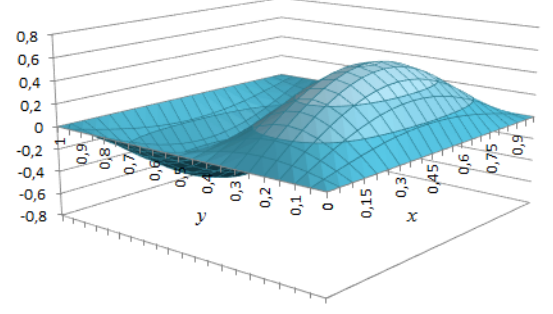
Tablo 6.3: Problem 1 için $k = 0.00001$ ve $t = 0.1$ için nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması

(x, y)	Nümerik Çözüm				Tam
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Çözüm
(0.1, 0.1)	0.00150	0.00135	0.00132	0.00131	0.00131
(0.5, 0.1)	0.00484	0.00438	0.00426	0.00424	0.00423
(0.9, 0.1)	0.00150	0.00135	0.00132	0.00131	0.00131
(0.3, 0.3)	0.00634	0.00573	0.00558	0.00555	0.00553
(0.8, 0.3)	0.00461	0.00416	0.00406	0.00403	0.00402
(0.2, 0.4)	0.00285	0.00257	0.00251	0.00249	0.00248
(0.4, 0.4)	0.00461	0.00416	0.00406	0.00403	0.00402
(0.9, 0.4)	0.00150	0.00135	0.00132	0.00131	0.00131
(0.3, 0.7)	-0.00634	-0.00573	-0.00558	-0.00555	-0.00553
(0.5, 0.7)	-0.00784	-0.00708	-0.00690	-0.00685	-0.00684
(0.1, 0.9)	-0.00150	-0.00135	-0.00132	-0.00131	-0.00131
(0.5, 0.9)	-0.00484	-0.00438	-0.00426	-0.00424	-0.00423
(0.9, 0.9)	-0.00150	-0.00135	-0.00132	-0.00131	-0.00131
$L_2 \times 10^3$	5.23010	2.47992	1.17355	0.47876	
$L_\infty \times 10^3$	0.99483	0.24799	0.05868	0.01197	

Şekil 6.1' de $k = 0.00001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ için $t = 0.01$ zamanında problemin nümerik çözümü ile tam çözümünün grafikleri verildi. Nümerik çözümler ile tam çözümler oldukça uyumlu olduğundan grafikleri de çok benzerdir.



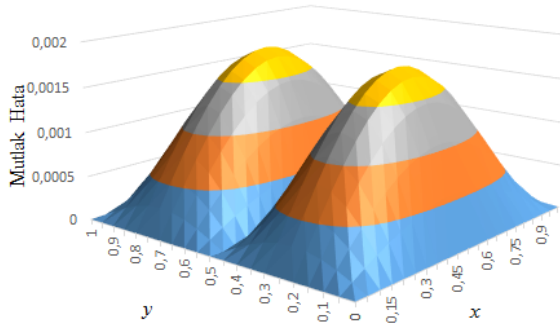
(a) Nümerik Çözüm



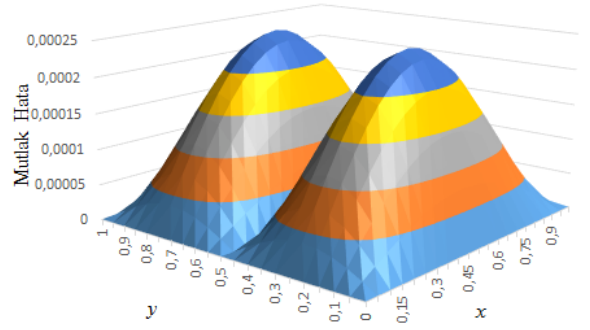
(b) Tam Çözüm

Şekil 6.1: Problem 1' in $k = 0.00001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında nümerik çözümü ve tam çözümleri

Şekil 6.2' de $k = 0.00001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.01$ ve $t = 0.1$ zamanlarında elde edilen mutlak hataların grafikleri verildi.



(a) $t = 0.01$



(b) $t = 0.1$

Şekil 6.2: Problem 1' in $k = 0.00001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.01$ ve $t = 0.1$ zamanlarında elde edilen mutlak hataları

6.2 Problem 2

Burada $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ bölgesi üzerinde (3.2) ile verilen iki boyutlu ısı denklemi

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (x, y) \in D,$$

başlangıç şartı ve

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

sınır şartları ile birlikte göz önüne alındı. Problemin nümerik çözümleri hesaplanırken $v = 10^{-6}$ alındı.

Tablo 6.4 ve Tablo 6.5' de $k = 0.05$ ve $h_x = h_y = h$ olmak üzere $h = 0.25$ ve $h = 0.125$ değerleri için $t = 1$ zamanında elde edilen nümerik çözümler tam çözümlerle karşılaştırıldı. Tablolardan oldukça küçük bölüntü sayılarıyla bile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu, L_2 ve L_∞ hata normlarının da oldukça küçük olduğu açıkça görülmektedir.

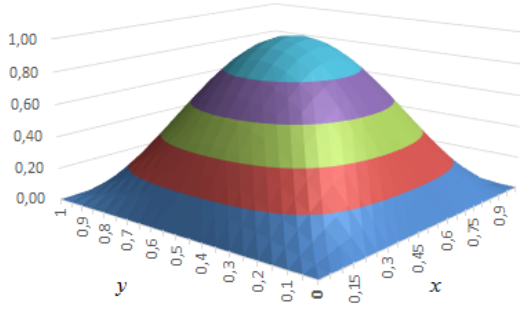
Tablo 6.4: Problem 2 için $k = 0.05$, $h_x = h_y = h = 0.25$ ve $t = 1$ için nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması

(x, y)	Nümerik çözüm	Tam Çözüm
$(0.25, 0.25)$	0.499991	0.499990
$(0.25, 0.50)$	0.707094	0.707093
$(0.25, 0.75)$	0.499991	0.499990
$(0.50, 0.25)$	0.707094	0.707093
$(0.50, 0.50)$	0.999981	0.999980
$(0.50, 0.75)$	0.707094	0.707093
$(0.75, 0.25)$	0.499991	0.499990
$(0.75, 0.50)$	0.707094	0.707093
$(0.75, 0.75)$	0.499991	0.499990
$L_2 \times 10^3$	0.00199	
$L_\infty \times 10^3$	0.00099	

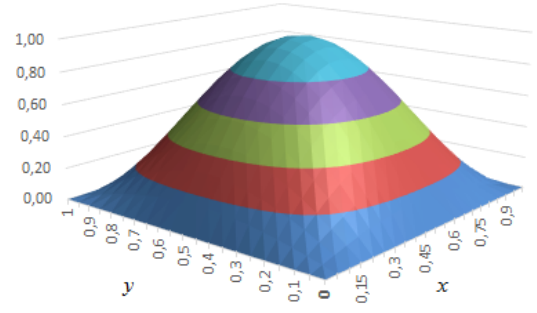
Tablo 6.5: Problem 2 için $k = 0.05$, $h_x = h_y = h = 0.125$ ve $t = 1$ için nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması

(x, y)	Nümerik çözüm	Tam Çözüm
$(0.25, 0.25)$	0.499990	0.499990
$(0.25, 0.50)$	0.707093	0.707093
$(0.25, 0.75)$	0.499990	0.499990
$(0.50, 0.25)$	0.707093	0.707093
$(0.50, 0.50)$	0.999981	0.999980
$(0.50, 0.75)$	0.707093	0.707093
$(0.75, 0.25)$	0.499990	0.499990
$(0.75, 0.50)$	0.707093	0.707093
$(0.75, 0.75)$	0.499990	0.499990
$L_2 \times 10^3$	0.00101	
$L_\infty \times 10^3$	0.00025	

Şekil 6.3' de $k = 0.05$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ için $t = 1$ zamanında problemin çözümü ile tam çözümünün grafikleri verildi. Elde edilen nümerik çözümler tam çözümlere oldukça yakın olup grafikleri de ayırt edilemeyecek kadar benzerdir.



(a) Nümerik Çözüm



(b) Tam Çözüm

Şekil 6.3: Problem 2' nin $k = 0.05$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 1$ zamanında nümerik çözümü ve tam çözümü

6.3 Problem 3

Burada $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ bölgesi üzerinde (3.3) ile verilen iki boyutlu Burgers denklemi

$$u(x, y, 0) = \frac{1}{1 + e^{(x+y)/2\varepsilon}}, \quad (x, y) \in D,$$

başlangıç şartı ve

$$u(0, y, t) = \frac{1}{1 + e^{(y-t)/2\varepsilon}}, \quad t \geq 0,$$

$$u(2, y, t) = \frac{1}{1 + e^{(2+y-t)/2\varepsilon}}, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = \frac{1}{1 + e^{(x-t)/2\varepsilon}}, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 2, t) = \frac{1}{1 + e^{(x+2-t)/2\varepsilon}}, \quad t \geq 0,$$

sınır şartları ile birlikte göz önüne alındı.

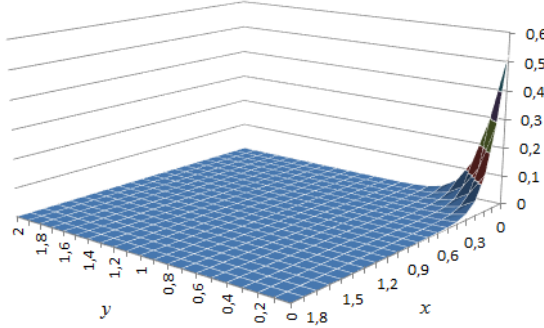
Tablo 6.6’ da $\varepsilon = 0.05, 0.1, 1$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında elde edilen nümerik çözümlerle tam çözümler karşılaştırıldı ve nümerik çözümlerin tam çözümlere yakınlığı L_2 ve L_∞ hata normlarıyla verildi. ε ’nin küçülmesiyle L_2 ve L_∞ hatalarının büyümesi tablodan açıkça görülmektedir.

Tablo 6.6: Problem 3 için $k = 0.0001$, $t = 2$, $h_x = h_y = h = 0.025$ ve farklı ε değerleri için nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması

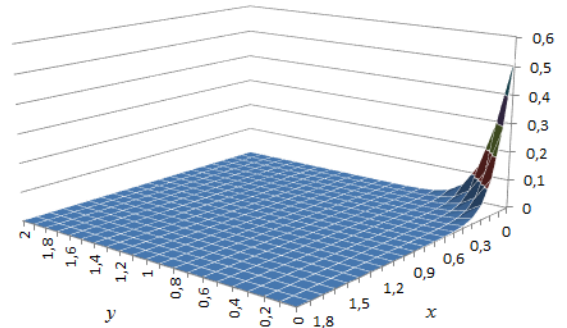
(x, y)	$\varepsilon = 1$		$\varepsilon = 0.1$		$\varepsilon = 0.05$	
	ADI	Tam Çözüm	ADI	Tam Çözüm	ADI	Tam Çözüm
(0.5, 0.5)	0.62247	0.62246	0.99336	0.99331	0.99996	0.99995
(0.5, 1.0)	0.56219	0.56218	0.92434	0.92414	0.99363	0.99331
(0.5, 1.5)	0.50001	0.50000	0.49957	0.50000	0.49751	0.50000
(1.0, 0.5)	0.56219	0.56218	0.92434	0.92414	0.99363	0.99331
(1.0, 1.0)	0.50001	0.50000	0.49948	0.50000	0.49733	0.50000
(1.0, 1.5)	0.43784	0.43782	0.07578	0.07586	0.00671	0.00669
(1.5, 0.5)	0.50001	0.50000	0.49957	0.50000	0.49751	0.50000
(1.5, 1.0)	0.43784	0.43782	0.07578	0.07586	0.00671	0.00669
(1.5, 1.5)	0.37755	0.37754	0.00671	0.00669	0.00005	0.00005
$L_2 \times 10^3$	0.94716130		14.96482000		62.42341000	
$L_\infty \times 10^3$	0.01249367		0.57325500		2.93705300	

Şekil 6.4 ve Şekil 6.5’ de $\varepsilon = 0.05$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.1$ için sırasıyla $t = 0.01, 2$ zamanlarında problemin nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin

grafikleri verildi. Grafikler ayırt edilemeyecek kadar benzer olup nümerik çözümlerle tam çözümlerin uyumu grafiklerden açıkça görülmektedir.

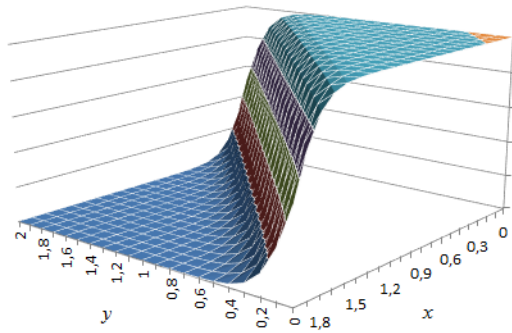


(a) Nümerik Çözüm

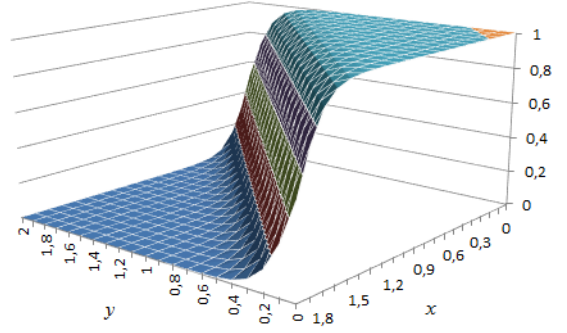


(b) Tam Çözüm

Şekil 6.4: Problem 3' ün $\varepsilon = 0.05$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.1$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında nümerik çözümü ve tam çözümü



(a) Nümerik Çözüm

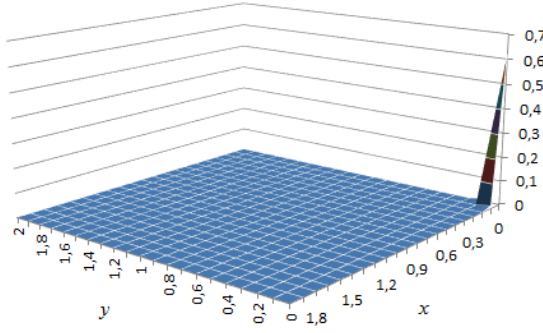


(b) Tam Çözüm

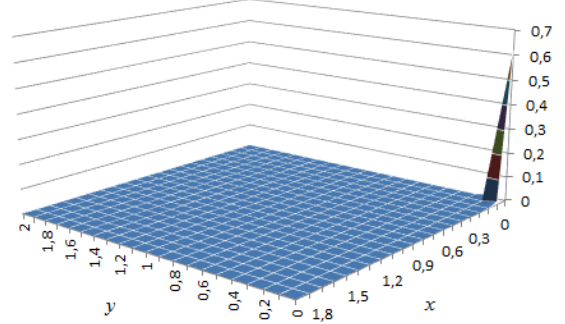
Şekil 6.5: Problem 3' ün $\varepsilon = 0.05$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.1$ değerleri için $t = 2$ zamanında nümerik çözümü ve tam çözümü

Şekil 6.6 ve Şekil 6.7' de $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.1$ için

sırasıyla $t = 0.01, 2$ zamanlarında problemin nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin grafikleri verildi. $t = 0.01$ zamanında grafikler ayırt edilemeyecek kadar benzer iken $t = 2$ zamanında nümerik çözümlerin grafiğinde bozulmalar olduğu görülmektedir.

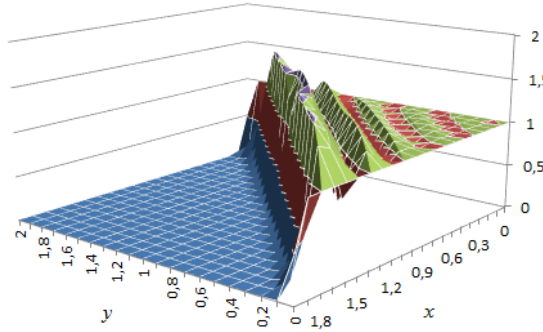


(a) Nümerik Çözüm

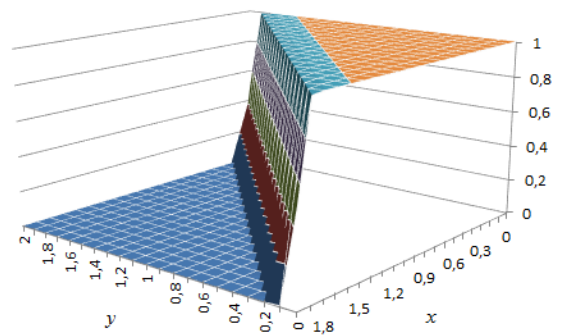


(b) Tam Çözüm

Şekil 6.6: Problem 3' ün $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.1$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında nümerik çözümü ve tam çözümü



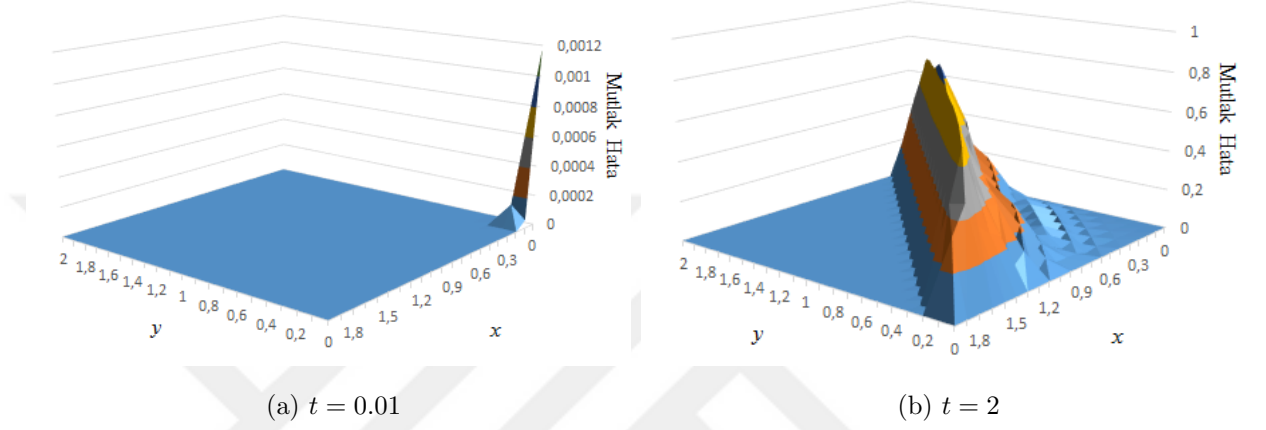
(a) Nümerik Çözüm



(b) Tam Çözüm

Şekil 6.7: Problem 3' ün $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.1$ değerleri için $t = 2$ zamanında nümerik çözümü ve tam çözümü

Şekil 6.8’ de $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.1$ değerleri için $t = 0.01$ ve $t = 2$ zamanlarında elde edilen mutlak hataların grafikleri verildi. Grafiklerden t değerinin artmasıyla mutlak hataların arttığı açıkça görülmektedir.



Şekil 6.8: Problem 3’ ün $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.1$ değerleri için $t = 0.01$ ve $t = 0.1$ zamanlarında elde edilen mutlak hataları

6.4 Problem 4

Burada $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ bölgesi üzerinde, tam çözümü Hopf-Cole dönüşümü kullanılarak Fletcher [25] tarafından

$$u(x, y, t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp((-4x + 4y - t)Re/32))},$$

$$v(x, y, t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp((-4x + 4y - t)Re/32))},$$

olarak verilen (3.4)-(3.5) iki boyutlu Burgers denklem sistemi göz önüne alındı.

Tablo 6.7 ve Tablo 6.8’ de $Re = 80$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ için farklı zamanlarda elde edilen $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin ADM [45] ile elde

edilen nümerik çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırılması sunuldu. Tablolardan görüldüğü üzere ADI metodu ile elde edilen çözümler ve ADM [45] metodu ile elde edilen nümerik çözümler oldukça uyumlu ve tam çözümlere oldukça yakındır.

Tablo 6.7: Problem 4 için $Re = 80$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ için $u(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin ADM [45] ve tam çözümlerle karşılaştırılması

(x, y)	$t = 0.05$			$t = 0.2$			$t = 0.5$		
	ADI	ADM	Tam	ADI	ADM	Tam	ADI	ADM	Tam
		[45]	Çözüm		[45]	Çözüm		[45]	Çözüm
(0.1, 0.1)	0.61731	0.61733	0.61720	0.59455	0.59465	0.59439	0.55558	0.55601	0.55568
(0.9, 0.2)	0.50020	0.50020	0.50020	0.50013	0.50013	0.50014	0.50006	0.50004	0.50007
(0.8, 0.3)	0.50147	0.50147	0.50148	0.50099	0.50098	0.50102	0.50046	0.50029	0.50048
(0.7, 0.4)	0.51046	0.51046	0.51052	0.50715	0.50714	0.50733	0.50331	0.50277	0.50352
(0.9, 0.5)	0.50395	0.50395	0.50398	0.50267	0.50266	0.50275	0.50121	0.50086	0.50131
(0.1, 0.6)	0.74810	0.74810	0.74811	0.74724	0.74723	0.74725	0.74422	0.74435	0.74426
(0.8, 0.6)	0.52657	0.52658	0.52667	0.51865	0.51867	0.51896	0.50887	0.50922	0.50933
(0.3, 0.7)	0.74491	0.74491	0.74492	0.74263	0.74264	0.74267	0.73496	0.73527	0.73498
(0.4, 0.7)	0.73663	0.73663	0.73665	0.73101	0.73102	0.73104	0.71327	0.71370	0.71299
(0.2, 0.8)	0.74930	0.74930	0.74930	0.74897	0.74897	0.74898	0.74783	0.74789	0.74786
(0.6, 0.8)	0.71676	0.71677	0.71676	0.70457	0.70457	0.70439	0.67067	0.67009	0.66979
(0.1, 0.9)	0.74990	0.74990	0.74991	0.74986	0.74986	0.74986	0.74970	0.74971	0.74971
(0.9, 0.9)	0.61732	0.61733	0.61720	0.59464	0.59465	0.59439	0.55535	0.55601	0.55568

Tablo 6.8: Problem 4 için $Re = 80$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ için $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin ADM [45] ve tam çözümlerle karşılaştırılması

(x, y)	$t = 0.05$			$t = 0.2$			$t = 0.5$		
	ADI	ADM [45]	Tam Çözüm	ADI	ADM [45]	Tam Çözüm	ADI	ADM [45]	Tam Çözüm
(0.1, 0.1)	0.88269	0.88267	0.88280	0.90545	0.90534	0.90561	0.94442	0.94399	0.94432
(0.9, 0.2)	0.99980	0.99980	0.99980	0.99987	0.99987	0.99986	0.99994	0.99996	0.99993
(0.8, 0.3)	0.99853	0.99853	0.99852	0.99901	0.99902	0.99898	0.99954	0.99971	0.99952
(0.7, 0.4)	0.98954	0.98954	0.98948	0.99285	0.99286	0.99267	0.99669	0.99722	0.99648
(0.9, 0.5)	0.99605	0.99605	0.99602	0.99733	0.99734	0.99725	0.99879	0.99913	0.99869
(0.1, 0.6)	0.75190	0.75190	0.75189	0.75276	0.75277	0.75275	0.75578	0.75565	0.75574
(0.8, 0.6)	0.97343	0.97342	0.97333	0.98135	0.98133	0.98104	0.99113	0.99078	0.99067
(0.3, 0.7)	0.75509	0.75509	0.75508	0.75737	0.75736	0.75733	0.76504	0.76473	0.76502
(0.4, 0.7)	0.76337	0.76336	0.76335	0.76899	0.76898	0.76896	0.78673	0.78630	0.78701
(0.2, 0.8)	0.75070	0.75070	0.75070	0.75103	0.75103	0.75102	0.75217	0.75211	0.75214
(0.6, 0.8)	0.78324	0.78323	0.78324	0.79543	0.79543	0.79561	0.82933	0.82991	0.83021
(0.1, 0.9)	0.75010	0.75009	0.75009	0.75014	0.75014	0.75014	0.75030	0.75029	0.75029
(0.9, 0.9)	0.88268	0.88267	0.88280	0.90536	0.90534	0.90561	0.94465	0.94399	0.94432

Tablo 6.9 ve Tablo 6.10’ da $Re = 100$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin literatürdeki diğer yöntemlerle elde edilen nümerik çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırması sunuldu. Tablolardan ADI metodu ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu, [36, 38, 39, 40] kaynaklarında verilen nümerik çözümlerle oldukça uyumlu olduğu ve tam çözümlere [30] kaynağında verilen nümerik çözümlerden ise daha yakın olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 6.9: Problem 4' ün $Re = 100$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri iin $t = 0.5$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ nümerik özümünün tam özüm ve literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılması

(x, y)	ADI	Tam Çözüm	Bahadır [30]	I-LFDM [39]	Expo-FDM [38]	CNS [36]	MCB-DQM [40]
(0.1, 0.1)	0.54299	0.54332	0.54235	0.54300	0.54300	0.54300	0.54412
(0.5, 0.1)	0.50034	0.50035	0.49964	0.50034	0.50034	0.50034	0.50037
(0.9, 0.1)	0.50000	0.50000	0.49931	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000
(0.3, 0.3)	0.54268	0.54332	0.54207	0.54269	0.54270	0.54269	0.54388
(0.7, 0.3)	0.50032	0.50035	0.49961	0.50032	0.50032	0.50032	0.50037
(0.1, 0.5)	0.74215	0.74221	0.74130	0.74215	0.74215	0.74215	0.74196
(0.5, 0.5)	0.54249	0.54332	0.54222	0.54251	0.54252	0.54250	0.54347
(0.9, 0.5)	0.50030	0.50035	0.49997	0.50030	0.50030	0.50030	0.50035
(0.3, 0.7)	0.74211	0.74221	0.74146	0.74211	0.74212	0.74212	0.74211
(0.7, 0.7)	0.54245	0.54332	0.54243	0.54246	0.54247	0.54246	0.54327
(0.1, 0.9)	0.74994	0.74995	0.74913	0.74994	0.74994	0.74995	0.74994
(0.5, 0.9)	0.74210	0.74221	0.74201	0.74210	0.74210	0.74213	0.74219
(0.9, 0.9)	0.54227	0.54332	0.54232	0.54228	0.54229	0.54640	0.54333

Tablo 6.10: Problem 4' ün $Re = 100$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında elde edilen $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin tam çözümler ve literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılması

(x, y)	ADI	Tam Çözüm	Bahadır [30]	I-LFDM [39]	Expo-FDM [38]	CNS [36]	MCB-DQM [40]
(0.1, 0.1)	0.95701	0.95668	0.95577	0.95700	0.95700	0.95700	0.95589
(0.5, 0.1)	0.99966	0.99965	0.99827	0.99966	0.99966	0.99966	0.99963
(0.9, 0.1)	1.00000	1.00000	0.99861	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
(0.3, 0.3)	0.95732	0.95668	0.95596	0.95731	0.95731	0.95731	0.95612
(0.7, 0.3)	0.99968	0.99965	0.99827	0.99968	0.99968	0.99968	0.99964
(0.1, 0.5)	0.75785	0.75779	0.75699	0.75785	0.75785	0.75785	0.75804
(0.5, 0.5)	0.95751	0.95668	0.95685	0.95749	0.95749	0.95750	0.95654
(0.9, 0.5)	0.99970	0.99965	0.99903	0.99970	0.99970	0.99970	0.99965
(0.3, 0.7)	0.75789	0.75779	0.75723	0.75789	0.75789	0.75789	0.75789
(0.7, 0.7)	0.95755	0.95668	0.95746	0.95754	0.95754	0.95754	0.95673
(0.1, 0.9)	0.75006	0.75005	0.74924	0.75006	0.75006	0.75006	0.75006
(0.5, 0.9)	0.75790	0.75779	0.75781	0.75790	0.75790	0.75787	0.75781
(0.9, 0.9)	0.95773	0.95668	0.95777	0.95772	0.95772	0.95360	0.95667

Tablo 6.11 ve Tablo 6.12' de $Re = 100$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 2$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin literatürdeki diğer yöntemlerle elde edilen nümerik çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırılması sunuldu. Tablolardan ADI metodu ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu, [36, 38, 39, 40] kaynaklarında verilen nümerik çözümlerle oldukça uyumlu olduğu ve tam çözümlere [30] kaynağında verilen nümerik çözümlerden ise daha yakın olduğu açıkça görölmektedir.

Tablo 6.11: Problem 4' ün $Re = 100$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 2$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin tam çözümler ve literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılması

(x, y)	ADI	Tam Çözüm	Bahadır [30]	I-LFDM [39]	Expo-FDM [38]	CNS [36]	MCB-DQM [40]
(0.1, 0.1)	0.50047	0.50048	0.49983	0.50047	0.50047	0.50047	0.50050
(0.5, 0.1)	0.50000	0.50000	0.49930	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000
(0.9, 0.1)	0.50000	0.50000	0.49930	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000
(0.3, 0.3)	0.50044	0.50048	0.49977	0.50044	0.50044	0.50044	0.50050
(0.7, 0.3)	0.50000	0.50000	0.49930	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000
(0.1, 0.5)	0.55514	0.55568	0.55461	0.55515	0.55516	0.55515	0.55632
(0.5, 0.5)	0.50041	0.50048	0.49973	0.50041	0.50041	0.50042	0.50050
(0.9, 0.5)	0.50000	0.50000	0.49931	0.50000	0.50000	0.50001	0.50001
(0.3, 0.7)	0.55480	0.55568	0.55429	0.55482	0.55482	0.55481	0.55597
(0.7, 0.7)	0.50038	0.50048	0.49970	0.50038	0.50038	0.50068	0.50054
(0.1, 0.9)	0.74419	0.74426	0.74340	0.74420	0.74420	0.74422	0.74406
(0.5, 0.9)	0.55448	0.55568	0.55413	0.55450	0.55451	0.55980	0.55575
(0.9, 0.9)	0.50052	0.50048	0.50001	0.50053	0.50053	0.51341	0.50052

Tablo 6.12: Problem 4' ün $Re = 100$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 2$ zamanında elde edilen $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin tam çözümler ve literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılması

(x, y)	ADI	Tam Çözüm	Bahadır [30]	I-LFDM [39]	Expo-FDM [38]	CNS [36]	MCB-DQM [40]
(0.1, 0.1)	0.99953	0.99952	0.99826	0.99953	0.99953	0.99953	0.99950
(0.5, 0.1)	1.00000	1.00000	0.99860	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
(0.9, 0.1)	1.00000	1.00000	0.99861	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
(0.3, 0.3)	0.99956	0.99952	0.99820	0.99956	0.99956	0.99956	0.99950
(0.7, 0.3)	1.00000	1.00000	0.99860	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
(0.1, 0.5)	0.94486	0.94432	0.94393	0.94485	0.94485	0.94485	0.94368
(0.5, 0.5)	0.99959	0.99952	0.99821	0.99959	0.99959	0.99959	0.99950
(0.9, 0.5)	1.00000	1.00000	0.99862	1.00000	1.00000	0.99999	0.99999
(0.3, 0.7)	0.94520	0.94432	0.94409	0.94518	0.94518	0.94519	0.94403
(0.7, 0.7)	0.99962	0.99952	0.99823	0.99962	0.99962	0.99932	0.99946
(0.1, 0.9)	0.75581	0.75574	0.75500	0.75580	0.75580	0.75579	0.75595
(0.5, 0.9)	0.94552	0.94432	0.94441	0.94550	0.94550	0.94020	0.94425
(0.9, 0.9)	0.99948	0.99952	0.99846	0.99948	0.99948	0.98659	0.99948

Tablo 6.13' de $Re = 100$, $k = 0.01$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ ve $t = 2$ zamanlarında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ çözümleri için elde edilen mutlak hatalar LBM [34] ile elde edilen hatalarla karşılaştırıldı. Tablodan düğüm noktalarının çoğu için ADI metodu ile elde edilen mutlak hataların LBM [34] ile elde edilen hatalardan daha küçük olduğu görülmektedir.

Tablo 6.13: Problem 4' ün $Re = 100$, $k = 0.01$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ ve $t = 2$ zamanlarında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ çözümleri için elde edilen mutlak hataların LBM [34] ile elde edilen hatalarla karşılaştırılması

(x, y)	$u(x, y, t)$				$v(x, y, t)$			
	$t = 0.5$		$t = 2$		$t = 0.5$		$t = 2$	
	ADI	LBM[34]	ADI	LBM[34]	ADI	LBM[34]	ADI	LBM[34]
(0.1, 0.1)	$1.41E-3$	$2.20E-3$	$2.65E-5$	$1.08E-5$	$1.41E-3$	$1.72E-3$	$2.65E-5$	$6.88E-5$
(0.5, 0.1)	$2.20E-5$	$2.91E-5$	$2.10E-7$	$2.67E-7$	$2.20E-5$	$1.59E-4$	$2.10E-7$	$2.96E-6$
(0.9, 0.1)	$1.60E-7$	$5.67E-7$	—	$6.68E-8$	$1.60E-7$	$2.63E-6$	—	$2.18E-8$
(0.3, 0.3)	$1.67E-3$	$8.29E-4$	$5.46E-5$	$1.40E-4$	$1.67E-3$	$2.20E-4$	$5.46E-5$	$2.97E-4$
(0.7, 0.3)	$4.59E-5$	$1.30E-4$	$4.10E-7$	$2.78E-6$	$4.59E-5$	$2.44E-4$	$4.10E-7$	$3.52E-6$
(0.1, 0.5)	$3.11E-4$	$2.02E-3$	$1.83E-3$	$2.34E-3$	$3.11E-4$	$5.31E-4$	$1.83E-3$	$6.42E-4$
(0.5, 0.5)	$1.81E-3$	$5.19E-4$	$8.14E-5$	$2.91E-4$	$1.81E-3$	$5.62E-4$	$8.14E-5$	$4.48E-4$
(0.9, 0.5)	$6.01E-5$	$1.86E-4$	$7.40E-7$	$2.87E-6$	$6.01E-5$	$2.39E-4$	$7.40E-7$	$8.60E-6$
(0.3, 0.7)	$3.38E-4$	$2.93E-3$	$2.07E-3$	$7.52E-4$	$3.38E-4$	$2.05E-3$	$2.07E-3$	$2.11E-3$
(0.7, 0.7)	$1.86E-3$	$7.85E-4$	$1.14E-4$	$3.72E-4$	$1.86E-3$	$6.06E-4$	$1.14E-4$	$6.14E-4$
(0.1, 0.9)	$2.73E-6$	$2.30E-5$	$2.45E-4$	$1.61E-3$	$2.73E-6$	$3.04E-5$	$2.45E-4$	$5.01E-4$
(0.5, 0.9)	$3.48E-4$	$2.86E-3$	$2.32E-3$	$4.80E-4$	$3.48E-4$	$2.49E-3$	$2.32E-3$	$3.73E-3$
(0.9, 0.9)	$2.08E-3$	$1.05E-3$	$2.58E-5$	$4.63E-4$	$2.08E-3$	$1.21E-3$	$2.58E-5$	$6.81E-4$

Tablo 6.14 ve Tablo 6.15' de $Re = 100$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 1$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları Expo-FDM [38] ile verilen hata normları ile karşılaştırıldı. Tablolardan bölüntü uzunluğu azaldıkça L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı ve Expo-FDM [38] ile verilen hatalardan daha az kaldığı açıkça görülmektedir.

Tablo 6.14: Problem 4 için $Re = 100$, $k = 0.0001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 1$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ nümerik çözümleri için L_2 ve L_∞ hata normlarının Expo-FDM [38] ile karşılaştırılması

h	L_2		L_∞	
	ADI	Expo-FDM [38]	ADI	Expo-FDM [38]
0.25	$8.5713E - 002$	$8.5708E - 002$	$5.7656E - 002$	$9.7046E - 002$
0.125	$4.9436E - 002$	$4.9429E - 002$	$1.6663E - 002$	$4.6886E - 002$
0.0625	$1.9187E - 002$	$1.9192E - 002$	$4.6044E - 003$	$2.0467E - 002$
0.03125	$8.6638E - 003$	$8.6812E - 003$	$1.0383E - 003$	$9.0744E - 003$

Tablo 6.15: Problem 4 için $Re = 100$, $k = 0.0001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 1$ zamanında elde edilen $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için L_2 ve L_∞ hata normlarının Expo-FDM [38] ile karşılaştırılması

h	L_2		L_∞	
	ADI	Expo-FDM [38]	ADI	Expo-FDM [38]
0.25	$8.5713E - 002$	$8.5708E - 002$	$5.7656E - 002$	$9.7046E - 002$
0.125	$4.9436E - 002$	$4.9431E - 002$	$1.6663E - 002$	$4.6887E - 002$
0.0625	$1.9187E - 002$	$1.9196E - 002$	$4.6044E - 003$	$2.0471E - 002$
0.03125	$8.6638E - 003$	$8.6878E - 003$	$1.0383E - 003$	$9.0813E - 003$

Tablo 6.16 ve Tablo 6.17’ de $Re = 200$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h$ olmak üzere farklı h değerleri için $t = 0.01$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri tam çözümlerle karşılaştırıldı. Elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablolardan bölüntü uzunluğunun azalmasıyla nümerik çözümlerin tam çözümlere giderek yaklaştığı, L_2 ve L_∞ hata normlarının giderek azaldığı açıkça görülmektedir.

Tablo 6.16: Problem 4' ün $Re = 200$, $k = 0.0001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırılması

(x, y)	Nümerik Çözüm				Tam çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
(0.1, 0.1)	0.6223220	0.6214807	0.6211715	0.6210857	0.6210950
(0.5, 0.1)	0.5000093	0.5000104	0.5000106	0.5000106	0.5000107
(0.9, 0.1)	0.5000000	0.5000000	0.5000000	0.5000000	0.5000000
(0.3, 0.3)	0.6223001	0.6214801	0.6211715	0.6210857	0.6210950
(0.7, 0.3)	0.5000093	0.5000104	0.5000106	0.5000106	0.5000107
(0.1, 0.5)	0.7499874	0.7499878	0.7499879	0.7499879	0.7499879
(0.5, 0.5)	0.6223001	0.6214801	0.6211715	0.6210857	0.6210950
(0.9, 0.5)	0.5000093	0.5000104	0.5000106	0.5000106	0.5000107
(0.3, 0.7)	0.7499874	0.7499878	0.7499879	0.7499879	0.7499879
(0.7, 0.7)	0.6223001	0.6214801	0.6211715	0.6210857	0.6210950
(0.1, 0.9)	0.7500000	0.7500000	0.7500000	0.7500000	0.7500000
(0.5, 0.9)	0.7499874	0.7499878	0.7499879	0.7499879	0.7499879
(0.9, 0.9)	0.6222881	0.6214802	0.6211715	0.6210857	0.6210950
$L_2 \times 10^3$	4.44794800	2.38718700	1.19049200	0.90704090	
$L_\infty \times 10^3$	1.22702600	0.39000440	0.09405204	0.03902393	

Tablo 6.17: Problem 4' ün $Re = 200$, $k = 0.0001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında elde edilen $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırılması

(x, y)	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
(0.1, 0.1)	0.8776780	0.8785193	0.8788285	0.8789143	0.8789050
(0.5, 0.1)	0.9999907	0.9999896	0.9999894	0.9999894	0.9999893
(0.9, 0.1)	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
(0.3, 0.3)	0.8776999	0.8785199	0.8788285	0.8789143	0.8789050
(0.7, 0.3)	0.9999907	0.9999896	0.9999894	0.9999894	0.9999893
(0.1, 0.5)	0.7500126	0.7500122	0.7500121	0.7500121	0.7500121
(0.5, 0.5)	0.8776999	0.8785199	0.8788285	0.8789143	0.8789050
(0.9, 0.5)	0.9999907	0.9999896	0.9999894	0.9999894	0.9999893
(0.3, 0.7)	0.7500126	0.7500122	0.7500121	0.7500121	0.7500121
(0.7, 0.7)	0.8776999	0.8785199	0.8788285	0.8789143	0.8789050
(0.1, 0.9)	0.7500000	0.7500000	0.7500000	0.7500000	0.7500000
(0.5, 0.9)	0.7500126	0.7500122	0.7500121	0.7500121	0.7500121
(0.9, 0.9)	0.8777119	0.8785198	0.8788285	0.8789143	0.8789050
$L_2 \times 10^3$	4.44794800	2.38718700	1.19049200	0.90704090	
$L_\infty \times 10^3$	1.22702600	0.39000440	0.09405204	0.03902393	

Tablo 6.18 ve Tablo 6.19' da $Re = 500$, $k = 0.01$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ ve $t = 2$ zamanlarında elde edilen $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri CNS [36] ve LINEAR [37] yöntemleriyle elde edilen nümerik çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırıldı. Tablolardan ADI metoduyla elde edilen nümerik çözümlerin diğer yöntemlerle elde edilen nümerik çözümler ve tam çözümlerle uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 6.18: Problem 4' ün $Re = 500$, $k = 0.01$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ ve $t = 2$ zamanlarında $u(x, y, t)$ çözümlerinin CNS [36], LINEAR [37] yöntemleriyle elde edilen çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırılması

(x, y)	$t = 0.5$				$t = 2$			
	ADI	CNS [36]	LINEAR [37]	Tam Çözüm	ADI	CNS [36]	LINEAR [37]	Tam Çözüm
(0.1, 0.1)	0.491276	0.48714	0.487239	0.500101	0.497165	0.49729	0.497244	0.500000
(0.5, 0.1)	0.500017	0.50002	0.500150	0.500000	0.500276	0.50024	0.500267	0.500000
(0.9, 0.1)	0.500000	0.50000	0.500000	0.500000	0.500480	0.49934	0.500152	0.500000
(0.3, 0.3)	0.496673	0.49519	0.495246	0.500101	0.506367	0.50690	0.507083	0.500000
(0.7, 0.3)	0.500013	0.50001	0.500012	0.500000	0.499514	0.49928	0.499877	0.500000
(0.1, 0.5)	0.749878	0.74990	0.749900	0.750000	0.443144	0.43939	0.439812	0.500482
(0.5, 0.5)	0.495982	0.49429	0.494354	0.500101	0.499845	0.49951	0.499728	0.500000
(0.9, 0.5)	0.500029	0.49978	0.493344	0.500000	0.500927	0.51355	0.501296	0.500000
(0.3, 0.7)	0.750010	0.75001	0.750008	0.750000	0.420240	0.41647	0.415613	0.500482
(0.7, 0.7)	0.496104	0.49325	0.494264	0.500101	0.487824	0.51008	0.503158	0.500000
(0.1, 0.9)	0.750000	0.75000	0.750000	0.750000	0.750024	0.75004	0.749420	0.750000
(0.5, 0.9)	0.750004	0.75001	0.750002	0.750000	0.436290	0.42909	0.422900	0.500482
(0.9, 0.9)	0.467956	0.47275	0.493344	0.500101	0.506521	0.56275	0.507666	0.500000

Tablo 6.19: Problem 4' ün $Re = 500$, $k = 0.01$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ ve $t = 2$ zamanlarında $v(x, y, t)$ çözümlerinin CNS [36], LINEAR [37] yöntemleriyle elde edilen çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırılması

(x, y)	$t = 0.5$				$t = 2$			
	ADI	CNS [36]	LINEAR [37]	Tam Çözüm	ADI	CNS [36]	LINEAR [37]	Tam Çözüm
(0.1, 0.1)	1.008724	1.01286	1.012760	0.999899	1.002835	1.00271	1.002760	1.000000
(0.5, 0.1)	0.999983	0.99999	0.999985	1.000000	0.999724	0.99976	0.999733	1.000000
(0.9, 0.1)	1.000000	1.00000	1.000000	1.000000	0.999520	1.00066	0.999848	1.000000
(0.3, 0.3)	1.003327	1.00481	1.004750	0.999899	0.993633	0.99310	0.992917	1.000000
(0.7, 0.3)	0.999987	0.99999	0.999988	1.000000	1.000486	1.00072	1.000120	1.000000
(0.1, 0.5)	0.750122	0.75010	0.750100	0.750000	1.056856	1.06061	1.060190	0.999518
(0.5, 0.5)	1.004018	1.00571	1.005650	0.999899	1.000155	1.00049	1.000270	1.000000
(0.9, 0.5)	0.999971	1.00022	1.000020	1.000000	0.999073	0.98646	0.998704	1.000000
(0.3, 0.7)	0.749990	0.74999	0.749992	0.750000	1.079760	1.08353	1.084390	0.999518
(0.7, 0.7)	1.003896	1.00676	1.005740	0.999899	1.012176	0.98992	0.996842	1.000000
(0.1, 0.9)	0.750000	0.75000	0.750000	0.750000	0.749976	0.74996	0.750580	0.750000
(0.5, 0.9)	0.749996	0.74999	0.749998	0.750000	1.063710	1.07091	1.077100	0.999518
(0.9, 0.9)	1.032044	1.02725	1.006660	0.999899	0.993479	0.93725	0.992334	1.000000

Tablo 6.20 ve Tablo 6.21' de $Re = 500$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ ve $t = 2$ zamanlarında elde edilen $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri CNS [36] yöntemi ile elde edilen nümerik çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırıldı. Tablolardan görüldüğü üzere ADI metoduyla elde edilen nümerik çözümler CNS [36] yöntemiyle elde edilen nümerik çözümler ve tam çözümlerle oldukça uyumlu olup düğüm noktalarının çoğunda ADI metoduyla elde edilen nümerik çözümler tam çözümlere daha yakındır.

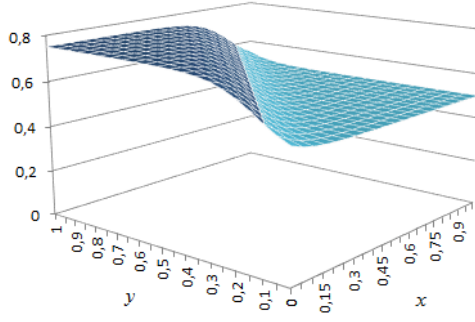
Tablo 6.20: Problem 4' ün $Re = 500$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ ve $t = 2$ zamanlarında $u(x, y, t)$ çözümlerinin CNS [36] yöntemiyle elde edilen çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırılması

(x, y)	$t = 0.5$			$t = 2$		
	ADI	CNS	Tam	ADI	CNS	Tam
		[36]	Çözüm		[36]	Çözüm
(0.1, 0.1)	0.48737	0.48732	0.50010	0.49717	0.49725	0.50000
(0.5, 0.1)	0.50001	0.50002	0.50000	0.50023	0.50024	0.50000
(0.9, 0.1)	0.50000	0.50000	0.50000	0.50037	0.49932	0.50000
(0.3, 0.3)	0.49533	0.49531	0.50010	0.50686	0.50687	0.50000
(0.7, 0.3)	0.50001	0.50001	0.50000	0.49953	0.49929	0.50000
(0.1, 0.5)	0.74990	0.74990	0.75000	0.43962	0.43945	0.50048
(0.5, 0.5)	0.49441	0.49438	0.50010	0.49963	0.49958	0.50000
(0.9, 0.5)	0.50001	0.49977	0.50000	0.50252	0.51378	0.50000
(0.3, 0.7)	0.75001	0.75001	0.75000	0.41711	0.41654	0.50048
(0.7, 0.7)	0.49447	0.49323	0.50010	0.49103	0.51054	0.50000
(0.1, 0.9)	0.75000	0.75000	0.75000	0.75005	0.75003	0.75000
(0.5, 0.9)	0.75000	0.75001	0.75000	0.43668	0.42895	0.50048
(0.9, 0.9)	0.46957	0.47390	0.50010	0.50640	0.56293	0.50000

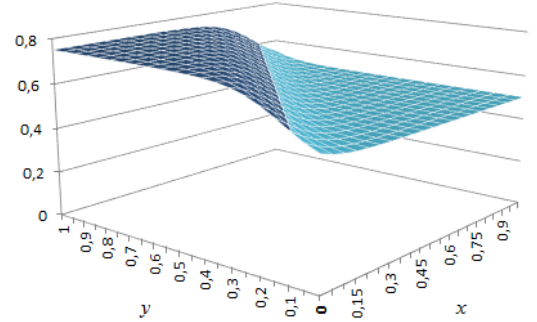
Tablo 6.21: Problem 4' ün $Re = 500$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ ve $t = 2$ zamanlarında $v(x, y, t)$ çözümlerinin CNS [36] yöntemiyle elde edilen çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırılması

(x, y)	$t = 0.5$			$t = 2$		
	ADI	CNS	Tam	ADI	CNS	Tam
		[36]	Çözüm		[36]	Çözüm
(0.1, 0.1)	1.01263	1.01268	0.99990	1.00283	1.00276	1.00000
(0.5, 0.1)	0.99999	0.99999	1.00000	0.99977	0.99975	1.00000
(0.9, 0.1)	1.00000	1.00000	1.00000	0.99963	1.00068	1.00000
(0.3, 0.3)	1.00467	1.00469	0.99990	0.99314	0.99313	1.00000
(0.7, 0.3)	0.99999	0.99999	1.00000	1.00047	1.00072	1.00000
(0.1, 0.5)	0.75010	0.75010	0.75000	1.06038	1.06055	0.99952
(0.5, 0.5)	1.00559	1.00562	0.99990	1.00037	1.00041	1.00000
(0.9, 0.5)	0.99999	1.00023	1.00000	0.99748	0.98622	1.00000
(0.3, 0.7)	0.74999	0.74999	0.75000	1.08289	1.08346	0.99952
(0.7, 0.7)	1.00553	1.00677	0.99990	1.00897	0.98946	1.00000
(0.1, 0.9)	0.75000	0.75000	0.75000	0.74995	0.74997	0.75000
(0.5, 0.9)	0.75000	0.74999	0.75000	1.06332	1.07105	0.99952
(0.9, 0.9)	1.03043	1.02610	0.99990	0.99360	0.93707	1.00000

Şekil 6.9 ve Şekil 6.10' de $Re = 100$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında problemin $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin grafikleri verildi. Grafikler ayırt edilemeyecek kadar benzer olup nümerik çözümlerle tam çözümlerin uyumu grafiklerden açıkça görülmektedir.

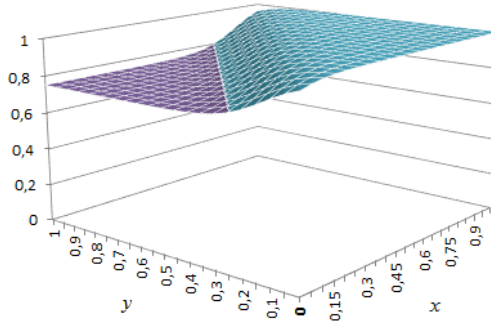


(a) Nümerik Çözüm

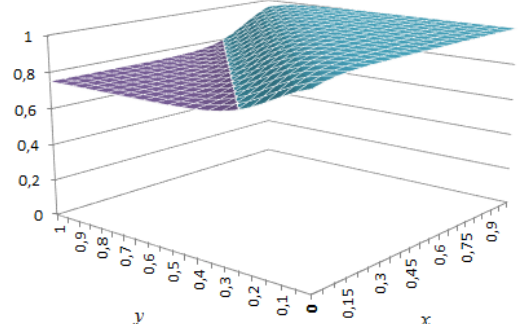


(b) Tam Çözüm

Şekil 6.9: Problem 4 için $Re = 100$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü



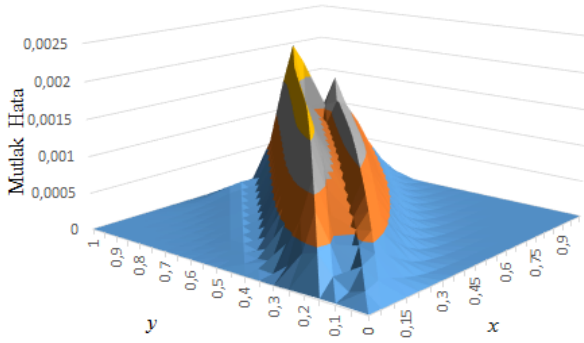
(a) Nümerik Çözüm



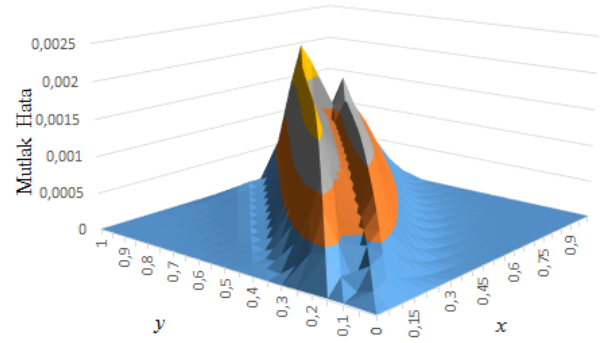
(b) Tam Çözüm

Şekil 6.10: Problem 4 için $Re = 100$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $v(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü

Şekil 6.11' de $Re = 100$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen mutlak hataların grafikleri verildi.



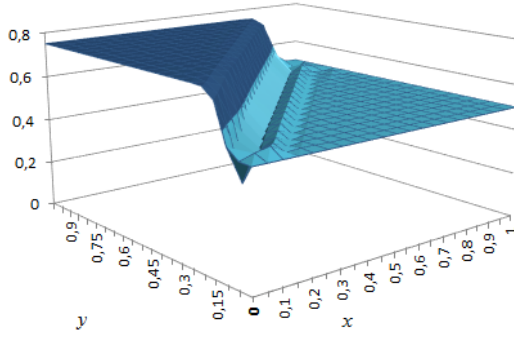
(a) $u(x, y, t)$



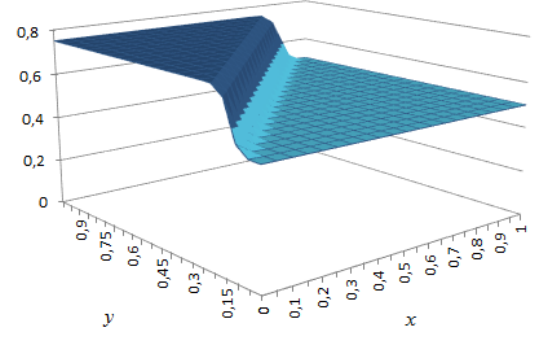
(b) $v(x, y, t)$

Şekil 6.11: Problem 4' ün $Re = 100$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen mutlak hatalar

Şekil 6.12 ve Şekil 6.13' de $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında problemin $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin grafikleri verildi. Beklenildiği üzere Re ' nin artan değerinde nümerik çözümlerin grafiklerinde bozulmalar meydana geldiği görüldü.

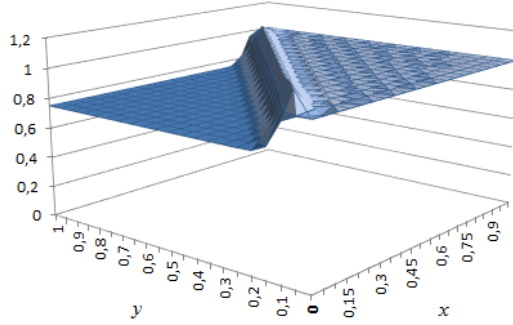


(a) Nümerik Çözüm

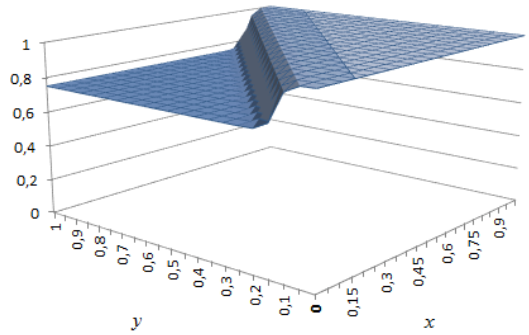


(b) Tam Çözüm

Şekil 6.12: Problem 4 için $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü



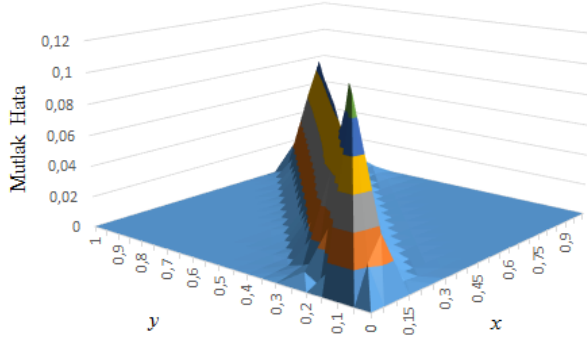
(a) Nümerik Çözüm



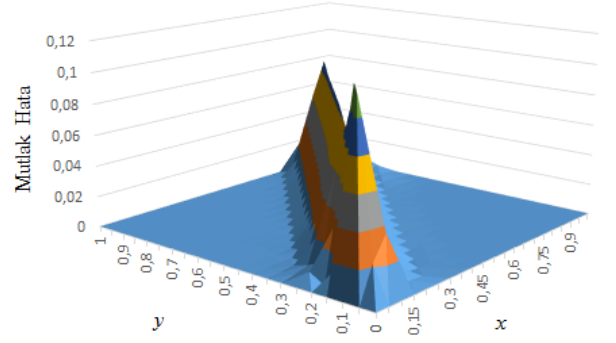
(b) Tam Çözüm

Şekil 6.13: Problem 4 için $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $v(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü

Şekil 6.14' de $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen mutlak hataların grafikleri verildi.



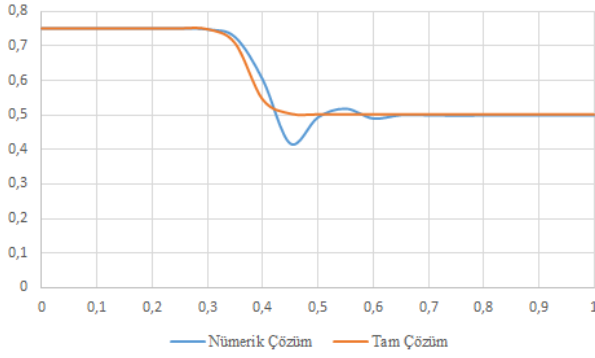
(a) $u(x, y, t)$



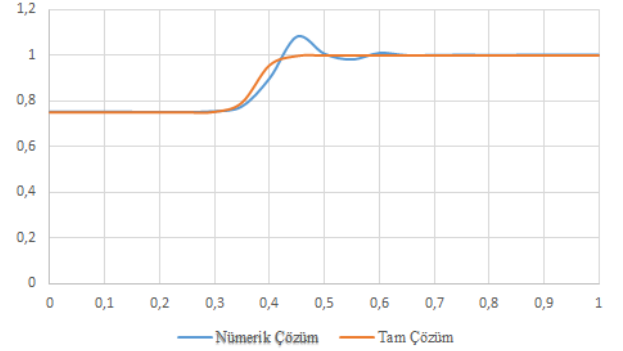
(b) $v(x, y, t)$

Şekil 6.14: Problem 4' ün $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen mutlak hatalar

Şekil 6.15' de $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ ve $y = 0.5$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması verildi. Ayrıca şekil 6.16' da $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ ve $y = 0.5$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen mutlak hataların grafikleri verildi. Grafiklerden genel anlamda nümerik çözümler ile tam çözümlerin uyumlu olduğu görülmektedir.

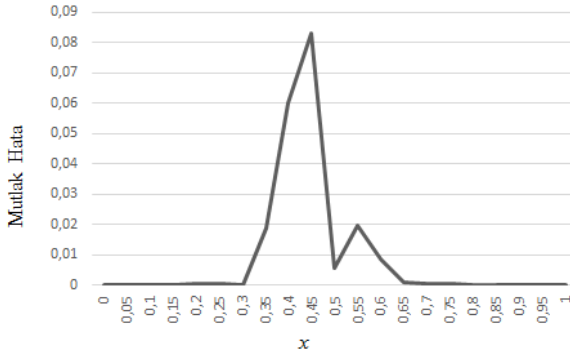


(a) $u(x, y, t)$

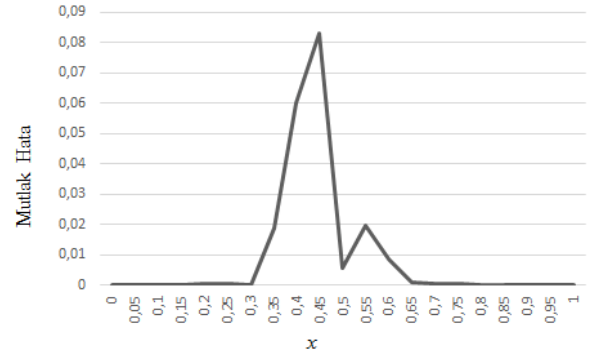


(b) $v(x, y, t)$

Şekil 6.15: Problem 4' ün $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması



(a) $u(x, y, t)$



(b) $v(x, y, t)$

Şekil 6.16: Problem 4' ün $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ ve $y = 0.5$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen mutlak hatalar

6.5 Problem 5

Burada $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 0.5, 0 \leq y \leq 0.5\}$ bölgesi üzerinde (3.4)-(3.5) denklemleri ile verilen iki boyutlu Burgers denklem sistemi

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) + \cos(\pi y), \quad (x, y) \in D,$$

$$v(x, y, 0) = x + y, \quad (x, y) \in D,$$

başlangıç şartları ve

$$u(0, y, t) = \cos(\pi y), \quad t \geq 0,$$

$$u(0.5, y, t) = 1 + \cos(\pi y), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = 1 + \sin(\pi x), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0.5, t) = \sin(\pi x), \quad t \geq 0,$$

$$v(0, y, t) = y, \quad t \geq 0,$$

$$v(0.5, y, t) = 0.5 + y, \quad t \geq 0,$$

$$v(x, 0, t) = x, \quad t \geq 0,$$

$$v(x, 0.5, t) = 0.5 + x, \quad t \geq 0,$$

sınır şartları ile birlikte göz önüne alındı.

Bu problemin tam çözümü olmadığı için literatürdeki nümerik çözümlerin elde edilmesi için kullanılan Re , k , $h_x = h_y = h$ ve t değerleri için nümerik çözümler elde edildi ve literatürde elde edilen çözümlerle karşılaştırıldı.

Tablo 6.22 ve Tablo 6.23' de $Re = 50$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri literatürdeki diğer yöntemlerle [26, 30, 36, 37, 38, 39, 40] elde edilen nümerik çözümlerle karşılaştırıldı. Tablolardan görüldüğü üzere ADI metoduyla elde edilen

nümerik çözümler literatürdeki diğer yöntemlerle elde edilen nümerik çözümlerle oldukça uyumludur.

Tablo 6.22: Problem 5' in $Re = 50$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılması

(x, y)	ADI	Bahadır [30]	Jain and Holla [26]	I-LFDM [38]	Expo- FDM [39]	CNS [36]	MCB- DQM [40]	LINEAR [37]
(0.1, 0.1)	0.97146	0.96688	0.97258	0.97146	0.97146	0.97146	0.97056	0.971461
(0.3, 0.1)	1.15282	1.14827	1.16214	1.15280	1.15280	1.15280	1.15152	1.152820
(0.2, 0.2)	0.87310	0.85911	0.86281	0.86308	0.86308	0.86307	0.86244	0.863072
(0.4, 0.2)	0.97980	0.97637	0.96483	0.97985	0.97985	0.97981	0.98078	0.979813
(0.1, 0.3)	0.66316	0.66019	0.66318	0.66316	0.66316	0.66316	0.66336	0.663157
(0.3, 0.3)	0.77229	0.76932	0.77030	0.77233	0.77233	0.77230	0.77226	0.772297
(0.2, 0.4)	0.60488	0.57966	0.58070	0.58181	0.58181	0.58180	0.58273	0.581799
(0.4, 0.4)	0.75853	0.75678	0.74435	0.75862	0.75862	0.75856	0.76179	0.758558

Tablo 6.23: Problem 5' in $Re = 50$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında elde edilen $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılması

(x, y)	ADI	Bahadır [30]	Jain and Holla [26]	I-LFDM [38]	Expo- FDM [39]	CNS [36]	MCB- DQM [40]	LINEAR [37]
(0.1, 0.1)	0.09869	0.09824	0.09773	0.09869	0.09869	0.09869	0.09842	0.098688
(0.3, 0.1)	0.14158	0.14112	0.14039	0.14158	0.14158	0.14158	0.14107	0.141582
(0.2, 0.2)	0.16754	0.16681	0.16660	0.16754	0.16754	0.16754	0.16732	0.167542
(0.4, 0.2)	0.17109	0.17065	0.17397	0.17111	0.17111	0.17110	0.17223	0.171095
(0.1, 0.3)	0.26378	0.26261	0.26294	0.26378	0.26378	0.26378	0.26380	0.263781
(0.3, 0.3)	0.22654	0.22576	0.22463	0.22655	0.22655	0.22654	0.22653	0.226539
(0.2, 0.4)	0.32851	0.32745	0.32402	0.32851	0.32851	0.32851	0.32935	0.328508
(0.4, 0.4)	0.32499	0.32441	0.31822	0.32502	0.32502	0.32500	0.32884	0.324997

Tablo 6.24 ve Tablo 6.25’ de $Re = 500$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri iin $t = 0.625$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik özümleeri literatürdeki diğer yöntemlerle [26, 30, 36, 37] elde edilen nümerik özümleeri karşılaştıırıldı. Tablolardan görüldüğü üzere ADI metoduyla elde edilen nümerik özümleeri literatürdeki diğer yöntemlerle elde edilen nümerik özümleeri oldukça uyumludur.

Tablo 6.24: Problem 5’ in $Re = 500$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri iin $t = 0.625$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ nümerik özümleerinin literatürdeki diğer yöntemleeri karşılaştıırılması

(x, y)	ADI	Bahadır [30]	Jain and Holla [26]	CNS [36]	LINEAR [37]
(0.15, 0.1)	0.96870	0.96650	0.95691	0.96870	0.968969
(0.3, 0.1)	1.03202	1.02970	0.95616	1.03200	1.032020
(0.1, 0.2)	0.84619	0.84449	0.84257	0.86178	0.846187
(0.2, 0.2)	0.87814	0.87631	0.86399	0.87814	0.878141
(0.1, 0.3)	0.67920	0.67809	0.67667	0.67920	0.679202
(0.3, 0.3)	0.79947	0.79792	0.76876	0.79947	0.799471
(0.15, 0.4)	0.54674	0.54601	0.54408	0.66036	0.546743
(0.2, 0.4)	0.58959	0.58874	0.58778	0.58959	0.589589

Tablo 6.25: Problem 5' in $Re = 500$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında elde edilen $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılması

(x, y)	ADI	Bahadır [30]	Jain and Holla [26]	CNS [36]	LINEAR [37]
(0.15, 0.1)	0.09043	0.09020	0.10177	0.09043	0.092303
(0.3, 0.1)	0.10728	0.10690	0.13287	0.10728	0.107275
(0.1, 0.2)	0.18010	0.17972	0.18503	0.17295	0.180103
(0.2, 0.2)	0.16816	0.16777	0.18169	0.16816	0.168157
(0.1, 0.3)	0.26268	0.26222	0.26560	0.26268	0.262677
(0.3, 0.3)	0.23550	0.23497	0.25142	0.23550	0.235501
(0.15, 0.4)	0.31799	0.31753	0.32084	0.29019	0.317991
(0.2, 0.4)	0.30419	0.30371	0.30927	0.30419	0.304187

Tablo 6.26 ve Tablo 6.27' de $Re = 1000$ ve $Re = 1200$ için $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h$ olmak üzere farklı h değerleri için $t = 0.625$ zamanında elde edilen nümerik çözümler sunuldu.

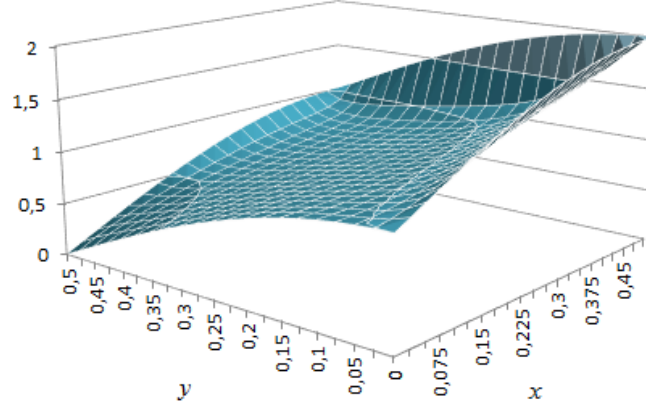
Tablo 6.26: Problem 5' in $Re = 1000$, $k = 0.001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ çözümleri

(x, y)	$u(x, y, t)$			$v(x, y, t)$		
	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$
(0.15, 0.1)	1.02526	0.96209	0.96201	0.11841	0.08657	0.08652
(0.3, 0.1)	1.18658	0.97314	0.96922	0.18502	0.07829	0.07638
(0.3, 0.3)	0.89847	0.77688	0.77576	0.31069	0.21728	0.21635
(0.15, 0.4)	0.56352	0.54859	0.54892	0.34827	0.31472	0.31458
(0.2, 0.4)	0.62311	0.58890	0.58913	0.35309	0.29904	0.29891

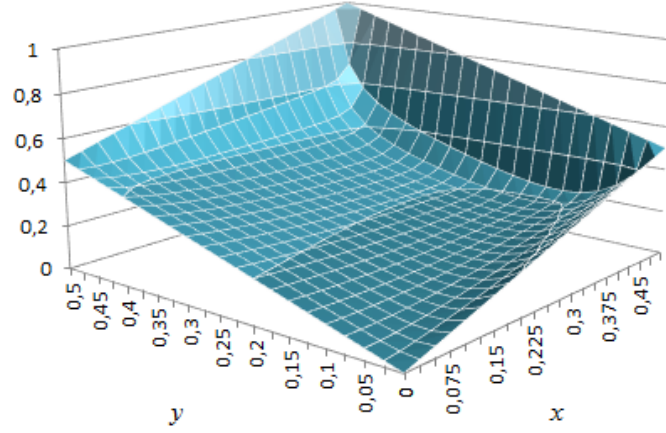
Tablo 6.27: Problem 5' in $Re = 1200$, $k = 0.001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ çözümleri

(x, y)	$u(x, y, t)$			$v(x, y, t)$		
	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$
(0.15, 0.1)	1.05327	0.96257	0.96222	0.13234	0.08671	0.08652
(0.3, 0.1)	1.24775	0.97834	0.96952	0.21535	0.08077	0.07637
(0.3, 0.3)	0.93716	0.77936	0.77605	0.34114	0.21894	0.21637
(0.15, 0.4)	0.57450	0.54886	0.54919	0.36607	0.31484	0.31455
(0.2, 0.4)	0.64228	0.58927	0.58939	0.37999	0.29928	0.29890

Şekil 6.17 ve Şekil 6.18' de $Re = 50$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında problemin $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin grafikleri verildi.

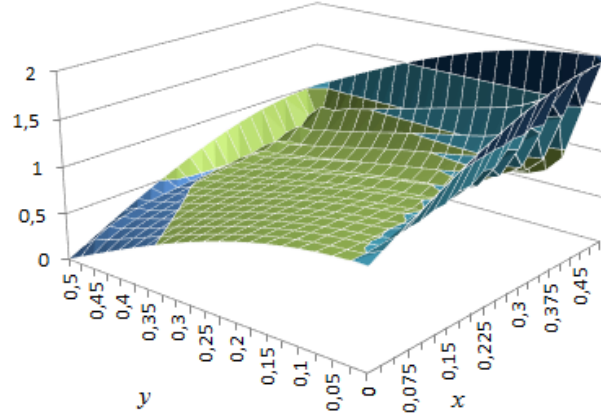


Şekil 6.17: Problem 5' in $Re = 50$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında $u(x, y, t)$ nümerik çözümü

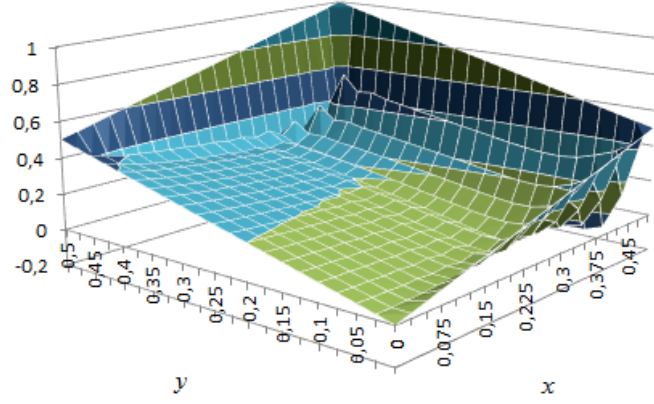


Şekil 6.18: Problem 5' in $Re = 50$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında $v(x, y, t)$ nümerik çözümü

Şekil 6.19 ve Şekil 6.20' de $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında problemin $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin grafikleri verildi.



Şekil 6.19: Problem 5' in $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında $u(x, y, t)$ nümerik çözümü



Şekil 6.20: Problem 5' in $Re = 500$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.625$ zamanında $v(x, y, t)$ nümerik çözümü

6.6 Problem 6

Burada $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ bölgesi üzerinde $\varepsilon = \frac{1}{Re}$ olmak üzere (3.4)-(3.5) denklemleri ile verilen iki boyutlu Burgers denklem sistemi

$$u(x, y, 0) = \frac{-4\varepsilon\pi \cos(2\pi x) \sin(\pi y)}{2 + \sin(2\pi x) \sin(\pi y)}, \quad (x, y) \in D,$$

$$v(x, y, 0) = \frac{-2\varepsilon\pi \sin(2\pi x) \cos(\pi y)}{2 + \sin(2\pi x) \sin(\pi y)}, \quad (x, y) \in D,$$

başlangıç şartları ve

$$u(0, y, t) = -2\varepsilon\pi \exp(-5\pi^2\varepsilon t) \sin(\pi y), \quad t \geq 0,$$

$$u(1, y, t) = -2\varepsilon\pi \exp(-5\pi^2\varepsilon t) \sin(\pi y), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 1, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$v(0, y, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$v(1, y, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$v(x, 0, t) = -\varepsilon\pi \exp(-5\pi^2\varepsilon t) \sin(2\pi x), \quad t \geq 0,$$

$$v(x, 1, t) = \varepsilon\pi \exp(-5\pi^2\varepsilon t) \sin(2\pi x), \quad t \geq 0,$$

sınır şartları ile birlikte göz önüne alındı.

Tablo 6.28 ve Tablo 6.29' da $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h$ olmak üzere farklı h değerleri için $t = 0.01$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri tam çözümlerle karşılaştırıldı. Elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablolardan bölüntü uzunluğunun azalmasıyla nümerik çözümlerin tam çözümlere giderek yaklaştığı, L_2 ve L_∞ hata normlarının giderek azaldığı açıkça görülmektedir.

Tablo 6.28: Problem 6' nın $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.0001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında elde edilen $u(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırılması

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	
(0.1, 0.1)	-0.0143352	-0.0143347	-0.0143346	-0.0143352
(0.6, 0.1)	0.0171868	0.0171837	0.0171829	0.0171835
(0.9, 0.1)	-0.0171868	-0.0171837	-0.0171829	-0.0171835
(0.3, 0.3)	0.0113020	0.0113028	0.0113030	0.0113035
(0.8, 0.3)	-0.0253628	-0.0253350	-0.0253267	-0.0253258
(0.2, 0.4)	-0.0126705	-0.0126714	-0.0126716	-0.0126721
(0.4, 0.4)	0.0376331	0.0376356	0.0376362	0.0376378
(0.9, 0.4)	-0.0666866	-0.0666493	-0.0666399	-0.0666413
(0.3, 0.7)	0.0113020	0.0113028	0.0113030	0.0113035
(0.6, 0.7)	0.0536336	0.0536089	0.0536026	0.0536039
(0.1, 0.9)	-0.0143352	-0.0143347	-0.0143345	-0.0143352
(0.6, 0.9)	0.0171868	0.0171837	0.0171829	0.0171835
(0.9, 0.9)	-0.0171868	-0.0171837	-0.0171829	-0.0171835
$L_2 \times 10^3$	0.24568220	0.11555990	0.05709778	
$L_\infty \times 10^3$	0.08880873	0.02432608	0.00385588	

Tablo 6.29: Problem 6' nın $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.0001$ ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında elde edilen $v(x, y, t)$ nümerik çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırılması

(x, y)	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	
(0.1, 0.1)	-0.0160283	-0.0160269	-0.0160266	-0.0160273
(0.6, 0.1)	0.0192129	0.0192112	0.0192109	0.0192117
(0.9, 0.1)	0.0192129	0.0192112	0.0192108	0.0192117
(0.3, 0.3)	-0.0126364	-0.0126370	-0.0126372	-0.0126378
(0.8, 0.3)	0.0283373	0.0283193	0.0283145	0.0283142
(0.2, 0.4)	-0.0063353	-0.0063357	-0.0063358	-0.0063362
(0.4, 0.4)	-0.0044425	-0.0044424	-0.0044424	-0.0044426
(0.9, 0.4)	0.0078630	0.0078646	0.0078652	0.0078658
(0.3, 0.7)	0.0126364	0.0126370	0.0126372	0.0126378
(0.6, 0.7)	-0.0141450	-0.0141461	-0.0141467	-0.0141476
(0.1, 0.9)	0.0160283	0.0160269	0.0160266	0.0160273
(0.6, 0.9)	-0.0192129	-0.0192112	-0.0192109	-0.0192117
(0.9, 0.9)	-0.0192129	-0.0192112	-0.0192108	-0.0192117
$L_2 \times 10^3$	0.07129949	0.03414322	0.02709782	
$L_\infty \times 10^3$	0.02309415	0.00796205	0.00154337	

Tablo 6.30 ve Tablo 6.31' de $\varepsilon = 0.001$ iken farklı k ve $h_x = h_y = h$ olmak üzere farklı h değerleri için $t = 0.1$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu. Tablolardan k değerinin azalmasıyla hatalarda ciddi bir küçülme olmazken h değerlerinin azalmasıyla hatalarda kayda değer bir küçülme olduğu açıkça görülmektedir.

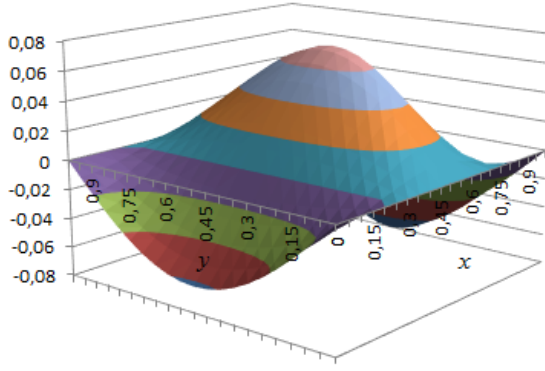
Tablo 6.30: Problem 6' nın $\varepsilon = 0.001$ iken farklı k ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $u(x, y, t)$ nümerik çözümleri için $t = 0.1$ zamanında elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları

h	$L_2 \times 10^3$		$L_\infty \times 10^3$	
	$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.001$	$k = 0.0001$
0.1	0.02580299	0.02567474	0.00913492	0.00910921
0.05	0.01408867	0.01380112	0.00274943	0.00271731
0.025	0.00725520	0.00668057	0.00079589	0.00075097
0.0125	0.00366064	0.00268936	0.00020127	0.00015796

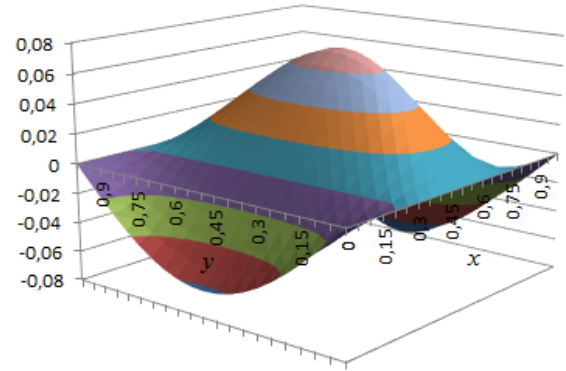
Tablo 6.31: Problem 6' nın $\varepsilon = 0.001$ iken farklı k ve farklı $h_x = h_y = h$ değerleri için $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için $t = 0.1$ zamanında elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları

h	$L_2 \times 10^3$		$L_\infty \times 10^3$	
	$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.001$	$k = 0.0001$
0.1	0.00753448	0.00749049	0.00242529	0.00241369
0.05	0.00409982	0.00400350	0.00091310	0.00090135
0.025	0.00209374	0.00190834	0.00023639	0.00022280
0.0125	0.00105311	0.00083131	0.00005974	0.00004671

Şekil 6.21 ve Şekil 6.22' de $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında problemin $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin grafikleri verildi. Grafikler ayırt edilemeyecek kadar benzer olup nümerik çözümlerle tam çözümlerin uyumu grafiklerden açıkça görülmektedir.

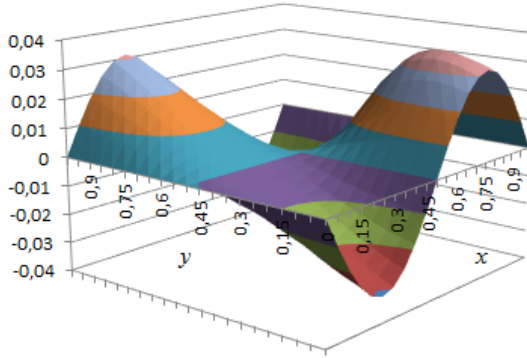


(a) Nümerik Çözüm

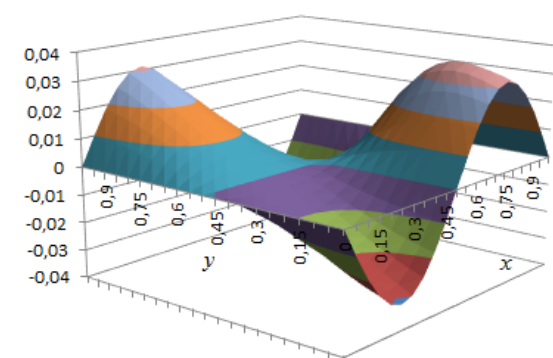


(b) Tam Çözüm

Şekil 6.21: Problem 6' nın $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında $u(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü



(a) Nümerik Çözüm



(b) Tam Çözüm

Şekil 6.22: Problem 6' nın $\varepsilon = 0.01$, $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.01$ zamanında $v(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü

6.7 Problem 7

Burada $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 0.5, 0 \leq y \leq 0.5\}$ bölgesi üzerinde (3.4)-(3.5) denklemleri ile verilen iki boyutlu Burgers' denklem sistemi $Re = 1$ alınarak

$$u(x, y, 0) = x + y, \quad (x, y) \in D,$$

$$v(x, y, 0) = x - y, \quad (x, y) \in D,$$

başlangıç şartları ve

$$u(0, y, t) = \frac{y}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

$$u(0.5, y, t) = \frac{0.5 + y - t}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = \frac{x - 2xt}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0.5, t) = \frac{x + 0.5 - 2xt}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

$$v(0, y, t) = \frac{-y - 2yt}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

$$v(0.5, y, t) = \frac{0.5 - y - 2yt}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

$$v(x, 0, t) = \frac{x}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

$$v(x, 0.5, t) = \frac{x - 0.5 - t}{1 - 2t^2}, \quad t \geq 0,$$

sınır şartları ile birlikte göz önüne alındı.

Tablo 6.32 ve Tablo 6.33’ de $k = 0.0001$ ve $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için sırasıyla $t = 0.1$ ve 0.4 zamanlarında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen mutlak hataların ADM [45] ile elde edilen mutlak hatalarla karşılaştırılması sunuldu. Tablolardan $t = 0.1$ zamanında ADM [45] ile elde edilen hatalar daha küçükken $t = 0.4$ zamanında ADI metodu ile elde edilen hataların daha küçük kaldığı açıkça görülmektedir.

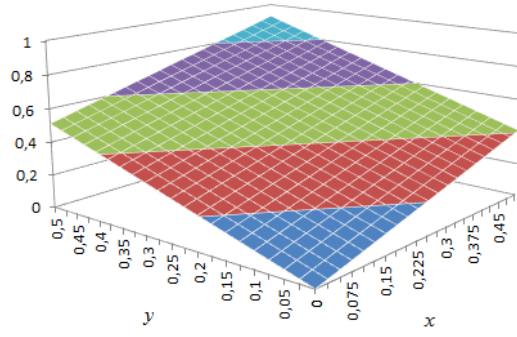
Tablo 6.32: Problem 7’ nin $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.1$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen mutlak hataların ADM[45] ile karşılaştırılması

(x, y)	E_u		E_v	
	ADM[45]	ADI	ADM [45]	ADI
(0.1, 0.1)	3.30750E-6	1.302E-5	1.05384E-6	2.120E-5
(0.3, 0.1)	5.56160E-6	4.726E-5	3.30770E-6	1.291E-5
(0.2, 0.2)	6.61520E-6	2.613E-5	2.10766E-6	4.237E-5
(0.4, 0.2)	8.86940E-6	6.022E-5	2.25400E-6	3.414E-5
(0.1, 0.3)	7.66930E-6	4.81E-6	7.52340E-6	7.189E-5
(0.3, 0.3)	9.92330E-6	3.911E-5	3.16150E-6	6.358E-5
(0.2, 0.4)	1.09769E-5	1.776E-5	8.57700E-6	9.312E-5
(0.3, 0.4)	1.21040E-5	3.486E-5	6.39600E-6	8.898E-5
(0.5, 0.5)	1.65386E-5	6.454E-5	5.26920E-6	1.0621E-4

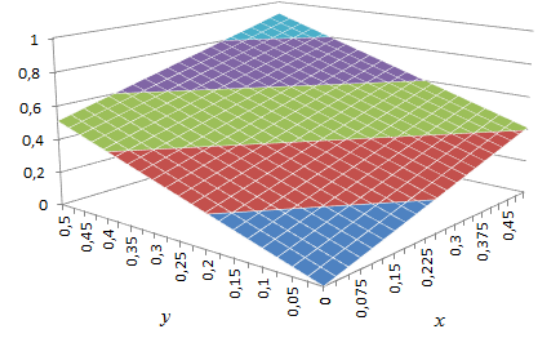
Tablo 6.33: Problem 7' nin $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.05$ değerleri için $t = 0.4$ zamanında $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri için elde edilen mutlak hataların ADM [45] ile karşılaştırılması

(x, y)	E_u		E_v	
	ADM[45]	ADI	ADM[45]	ADI
(0.1, 0.1)	1.01945E-4	1.185E-5	3.54833E-4	5.654E-5
(0.3, 0.1)	5.58724E-4	3.313E-5	1.01946E-4	1.256E-5
(0.2, 0.2)	2.03891E-4	2.351E-5	7.09666E-4	1.1271E-4
(0.4, 0.2)	6.60670E-4	2.113E-5	4.56779E-4	4.430E-5
(0.1, 0.3)	1.50942E-4	8.058E-5	1.31739E-3	2.3886E-4
(0.3, 0.3)	3.05837E-4	3.546E-5	1.06450E-3	1.6945E-4
(0.2, 0.4)	4.89953E-5	9.260E-5	1.67222E-3	2.9574E-4
(0.3, 0.4)	1.79393E-4	7.016E-5	1.54578E-3	2.6131E-4
(0.5, 0.5)	5.09728E-4	6.059E-5	1.77417E-3	2.8551E-4

Şekil 6.23 ve Şekil 6.24' de $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.1$ zamanında problemin $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin grafikleri verildi. Grafikler ayırt edilemeyecek kadar benzer olup nümerik çözümlerle tam çözümlerin uyumu grafiklerden açıkça görölmektedir.

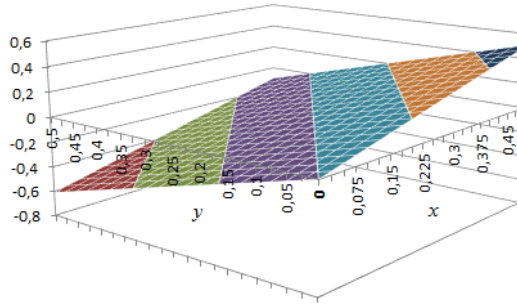


(a) Nümerik Çözüm

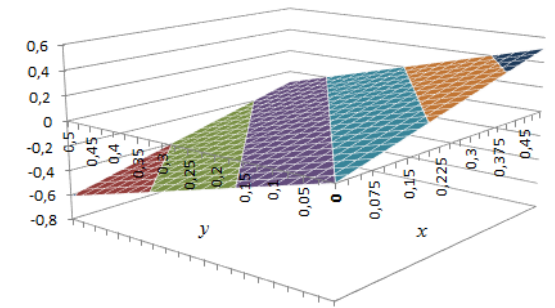


(b) Tam Çözüm

Şekil 6.23: Problem 7' nin $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.1$ zamanında $u(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü



(a) Nümerik Çözüm



(b) Tam Çözüm

Şekil 6.24: Problem 7' nin $k = 0.0001$, $h_x = h_y = h = 0.025$ değerleri için $t = 0.1$ zamanında $v(x, y, t)$ nümerik çözümü ve tam çözümü

7. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tezde, iki boyutlu ısı denklemi, iki boyutlu Burgers denklemi ve iki boyutlu Burgers denklem sistemi farklı başlangıç ve sınır şartları ile birlikte göz önüne alındı. Tek boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için kullanılan sonlu fark yaklaşımları iki boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için de oldukça sık başvurulan yaklaşımlardır. Model problemlerin çözümü için hangi sonlu fark yaklaşımlarının daha avantajlı olacağını belirlemek adına iki boyutlu ısı denklemine açık, kapalı ve karışık sonlu fark yaklaşımları uygulandı ve bu yaklaşımların kararlılık analizleri yapıldı. Beklenildiği gibi açık ve karışık sonlu fark yaklaşımlarının her birinde bir kararlılık kısıtlaması bulunurken kapalı yaklaşım şartsız kararlı olarak bulundu. Burada model problemleri çözmek için kapalı yaklaşım en uygun yaklaşım gibi görünmesine rağmen problemlerin boyutları arttığından çözümlerde karşılaşılabilecek cebirsel denklem sisteminin katsayılar matrisi beşli bant matris yapısında olduğundan “Acaba daha uygun bir nümerik yaklaşım bulunabilir mi?” sorusuna cevap arandı.

Bunun için zaman adımlarının uzunluğu yarıya indirilip ilk yarısında x doğrultusunda kapalı ve y doğrultusunda açık, ikinci yarısında ise x doğrultusunda açık ve y doğrultusunda kapalı olacak şekilde yeni bir yaklaşım göz önüne alındı. Bu yaklaşımın kararlılık analizi yapıldı ve yaklaşımın şartsız kararlı olduğu görüldü. Ayrıca model problemlerin çözümlerinde karşımıza çıkacak olan cebirsel denklem sistemlerinin katsayılar matrisi üçlü bant matris yapısında olup, yaklaşım şartsız

kararlı olduğundan tezde model problemlerin çözümü için kullanılması en uygun yaklaşımın son yaklaşım olduğuna karar verildi. Literatürde bu yaklaşım Alternating Direction Implicit (ADI) metodu olarak bilinir.

Herbir problem ADI metodu ile çözülerek nümerik çözümler elde edildi. Problemler için elde edilen nümerik çözümler tam çözümler ve literatürde bulunan başka metodlar ile elde edilen nümerik çözümler ile karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normları verildi.

Tam çözümün bulunduğu Problem 1-4 ve Problem 6-7 de tam çözümlere oldukça yakın sonuçlar elde edilirken, tam çözümün bulunmadığı Problem 5 de ise literatürde bulunan nümerik çözümlerle oldukça uyumlu nümerik çözümler elde edildi.

Sonuç olarak iki boyutlu lineer veya yaklaşımın içinde lineerleştirilmiş (non-lineer terimler yerine bir önceki adımda elde edilen nümerik çözümler kullanılarak) non-lineer denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için kullanılan Alternating Direction Implicit (ADI) metodu ile tam çözümlere oldukça yakın nümerik çözümler elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] D.J. Duffy, *Finite Difference Methods;in Financial Engineering a Partial Differential Equation Approach*, John Wiley and Sons, Ltd. , 2006.
- [2] T.J. Chung, *Computational Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2002.
- [3] M.E. Davis, *Numerical Methods and Modeling for Chemical Engineers*, John Wiley and Sons, Ltd., 2001.
- [4] T.P. Witelski, M. Bowen, *ADI schemes for higher-order nonlinear diffusion equations*, **Applied Numerical Mathematics**, 45 (2003) 331–351.
- [5] [5] M. Sapagovas, O. Stikonienė, *Alternating-direction method for a mildly nonlinear elliptic equation with nonlocal integral conditions*, **Nonlinear Analysis: Modelling and Control**, 2011, Vol. 16, No. 2, 220–230.
- [6] W.C. Tay, E.L. Tan, *Pentadiagonal alternating-direction-implicit finite-difference time-domain method for two-dimensional Schrödinger equation*, **Computer Physics Communications**, 185 (2014) 1886–1892.
- [7] A. Araujo, C. Neves, E. Sousa, *An alternating direction implicit method for a second-order hyperbolic diffusion equation with convection*, **Applied Mathematics and Computation**, 239 (2014) 17–28.
- [8] V.S. Manoranjan, M.O. Gomez, *Alternating Direction Implicit method with exponential upwinding*, **Computers Math. Applic.**, Vol. 30, No. 11(1995) 47-58.
- [9] G. Gao, Z. Sun, *Two alternating direction implicit difference schemes with the extrapolation method for the two-dimensional distributed-order differential equations*, **Computers and Mathematics with Applications**, 69 (2015) 926–948.
- [10] J Qin, *The new alternating direction implicit difference methods for the wave equations*, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 230 (2009) 213–223.

- [11] J. Qin, *The new alternating direction implicit difference methods for solving three-dimensional parabolic equations*, **Applied Mathematical Modelling**, 34 (2010) 890–897.
- [12] Y. Zhang, Z. Sun, *Alternating direction implicit schemes for the two-dimensional fractional sub-diffusion equation*, **Journal of Computational Physics**, 230 (2011) 8713–8728.
- [13] D.M. Young, *Iterative solution of large linear systems*, Academic Press, New York, NY, 1971.
- [14] J. Jr. Douglas and H.H. Rachford, *On the numerical solution of heat conduction equations in two and three dimensions*, **Trans. Am. Math. Assoc.**, 82 (1955), 421-439.
- [15] D. Peacemann, *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*, Elsevier, Amsterdam(1977).
- [16] A.A. Samarski, *Introduction to the Theory of Difference Schemes*, Nauka, Moscow(1971).
- [17] G. Fairweather, A.R. Mitchell, *A new computational procedure for ADI methods*, **SIAM JI numer. Analysis**, 4 (1967), pp. 163–170.
- [18] I.J.D. Craig, A.D. Sneyd, *An alternating-direction implicit scheme for parabolic equations with mixed derivatives*, **Computers and Mathematics with Applications**, 16 (1988) 341-350.
- [19] N.N. Yanenko, *The Method of Fractional Steps*, Springer-Verlag, 1971, Berlin.
- [20] E.G. D'yakonov, *Difference schemes with split operators for unsteady equations(Russian)*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 144, 1962, 29-32.
- [21] E.G. D'yakonov, *Difference schemes for solving the boundary problems*, **USSR Comp. Math.**, 3,1963, 55-77.
- [22] E.G. D'yakonov, *Difference schemes with split operators for multidimensional unsteady problems*, **USSR Comp. Math.**, 3,1963, 581-607.
- [23] E.G. D'yakonov, *Difference schemes with split operators for general parabolic equations of second order with variable coefficients*, **USSR Comp. Math.**, 4, 1964, 91-110.

- [24] S. Salıman, *Diferansiyel Dönüşüm Metodunun Kullanılarak Isı İletimi Modellemesi*, MSc. Thesis, Pamukkale University, Turkey, 2008.
- [25] C.A.J. Fletcher, *Generating exact solutions of the two dimensional Burgers' equation*, **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, 3 (1983) 213–216.
- [26] P.C. Jain, D.N. Holla, *Numerical solution of coupled Burgers equations*, **Int. J. Numer. Meth. Eng.**, 12 (1978) 213–222.
- [27] C.A.J. Fletcher, *A comparison of finite element and finite difference of the one- and two-dimensional Burgers' equations*, **J. Comput. Phys.**, Vol., 51, (1983), 159–188.
- [28] F.W. Wubs, E.D. Goede, *An explicit–implicit method for a class of time-dependent partial differential equations*, **Appl. Numer. Math.**, 9 (1992) 157–181.
- [29] O. Goyon, *Multilevel schemes for solving unsteady equations*, **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, 22(1996) 937–959.
- [30] A.R. Bahadır *A fully implicit finite-difference scheme for two dimensional Burgers' equation*, *Appl Math Comput* 2003; 137:131-137.
- [31] S.M. El-Sayed, D. Kaya, *On the numerical solution of the system of two-dimensional Burgers' equations by the decomposition method*, **Appl. Math. Comput.**, 2004; 158:101-109.
- [32] M.A. Abdou, A.A. Soliman, *Variational iteration method for solving Burgers' and coupled Burgers' equations*, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 181 (2005) 245-251.
- [33] R.C. Mittal, R. Jiware, *Differential quadrature method for two-dimensional Burgers' equations*, **Int. J. of Comp. Meth. in Eng. Sci. and Mech.**, 2009;10:450-459.
- [34] F. Liu, S. Weiping, *Numerical solutions of two-dimensional Burgers' equations by lattice Boltzmann method*, **Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.**, 2011; 16: 150–157.
- [35] G. Zhao, X. Yu, R. Zhang, *The new numerical method for solving the system of two-dimensional Burgers' equations*, **Computers and Mathematics with Applications**, 2011;62 3279–3291.

- [36] V.K. Srivastava, M. Tamsir, U. Bhardwaj, Y. Sanyasiraju, *Crank-Nicolson scheme for numerical solutions of two dimensional coupled Burgers' equations*, **IJSER**, 2011; 2(5), 44.
- [37] S.S. Wani, S. Thakar, *Linear method for two dimensional Burgers' equation*, **Ultra Scientist**, 2013; Vol. 25(1)A, 156-168.
- [38] V.K. Srivastava, S. Singh, M. K. Awasthi, *Numerical solutions of coupled Burgers' equations by an implicit finite-difference scheme*, **AIP ADVANCES**, 3, 082131 (2013).
- [39] V.K. Srivastava, M. K. Awasthi, S. Singh, *An implicit logarithm finite difference technique for two dimensional coupled viscous Burgers' equation*, **AIP Advances**, 3, 122105 (2013).
- [40] H.S. Shukla, M. Tamsir, V. K. Srivastava, J. Kumar, *Numerical Solution of two dimensional coupled viscous Burgers' Equation using the Modified Cubic B-Spline Differential Quadrature Method*, **AIP Advances**, 4, 117134 (2014).
- [41] W. Liao, *A fourth-order finite difference method for solving the system of two-dimensional Burgers' equations*, **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, 2010; 64: 565-590.
- [42] M. C. Kweyu, W. A. Manyonge, A. Koross and V. Ssemaganda, *Numerical Solutions of the Burgers' System in Two Dimensions under Varied Initial and Boundary Conditions*, **Applied Mathematical Sciences**, Vol. 6, 2012; 113, 5603-5615
- [43] G.D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, 3rd ed., Clarendon Press, Oxford, 1987.
- [44] J. Biazar, H. Aminikhah, *Exact and numerical solutions for non-linear Burger's equation by VIM*, **Math. Comput. Modelling**, 49 (2009) 1394-1400.
- [45] H. Zhua, H. Shub, M. Ding, *Numerical solutions of two-dimensional Burgers' equations by discrete Adomian decomposition method*, **Computers and Mathematics with Applications**, 60 (2010) 840-848.
- [46] E. Hopf, *The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$* , **Comm. Pure. Appl. Math.**, 3 (1950) 201-230.
- [47] J. D. Cole, *On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics*, **Quart. Appl. Math.**, 9 (1951) 225-236.

- [48] W. F. Ames, *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*, Academic Press, New York, 1965.
- [49] B. S. Moon, D. S. Yoo, Y.H. Lee, I.S. Oh, J.W. Lee, D.Y. Lee and K.C. Kwon, *A non-separable solution of the diffusion equation based on the Galerkin's method using cubic splines*, **Appl. Math. and Comput.**, 217 (2010) 1831-1837.
- [50] S. Kutluay, Sonlu Fark Yöntemi Ders Notları, İnönü Üniversitesi, 2016.



ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Gonca ÇELİKTEN
Doğum Yeri ve Tarihi : Malatya / 1986
Adres : Kafkas Üniversitesi FEF Matematik Bölümü
E-posta : gnc.cnbk@gmail.com
Lisans : İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Böl.
Yüksek Lisans : İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik
Mesleki Deneyim : 2010- 2012 Harran Üniversitesi (Araştırma Görevlisi)
2012- — Kafkas Üniversitesi (Araştırma Görevlisi)