

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİ BOYUTLU LORENTZ BENZERLİK GEOMETRİSİNDE NOKTALARIN İNVARİYANTLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kader ÖZBEKTAŞ

**TEMMUZ 2022
TRABZON**



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**İKİ BOYUTLU LORENTZ BENZERLİK GEOMETRİSİNDE NOKTALARIN
İNVARYANTLARI**

Kader ÖZBEKTAŞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 07 / 07 / 2022

Tezin Savunma Tarihi : 28 / 07 / 2022

Tez Danışmanı : Doç. Dr. İdris ÖREN

Trabzon 2022

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında “Yüksek Lisans Tezi” olarak hazırlanmıştır.

Konunun belirlenmesinde ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. İdris ÖREN’e en içten duygularıyla teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Çalışmalarım boyunca beni yalnız bırakmayan aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu tez çalışması tez danışmanım Doç. Dr. İdris ÖREN’in proje yürütücüsü olduğu TÜBİTAK ve Özbekistan Cumhuriyeti Yenilikçi Kalkınma Bakanlığı İkili İşbirliği Programı çerçevesinde desteklenen TÜBİTAK 119N643 ve MID Uzbekistan UT-OT-2020-2 numaralı projelerdeki bilimsel fikirler doğrultusunda hazırlanmıştır. İlgili kurumlara teşekkür ederiz.

KADER ÖZBEKTAŞ

TRABZON 2022

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum ‘İki Boyutlu Lorentz Benzerlik Geometrisinde Noktaların İnvaryantları’ başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. İdris ÖREN’in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 28/07/2022

Kader ÖZBEKTAŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ	VIII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.2. Hiperbolik Sayılar Cebiri	3
1.3. İki Boyutlu Minkowski Uzayı ile Hiperbolik Sayılar Cebiri Arasındaki Bağlantılar ...	4
1.4. Lineer Pseudo-Benzerlik Grupları.....	6
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	11
2.1. İki Boyutlu Lorentz Uzayında T-Şekil Kavramı.....	11
2.2. Genelleştirilmiş Lineer Pseudo-Benzerlik Grupları.....	12
2.3. Genelleştirilmiş Lineer Pseudo-Benzerlik Grupları İçin Benzerlik Problemleri	14
2.4. Pseudo-Benzerlik ve Genelleştirilmiş Pseudo-Benzerlik Grupları.....	29
3. BULGULAR	43
4. İRDELEME.....	52
5. SONUÇLAR	53
6. ÖNERİLER	55
7. KAYNAKLAR.....	56
ÖZGEÇMİŞ	

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

İKİ BOYUTLU LORENTZ BENZERLİK GEOMETRİSİNDE NOKTALARIN
İNVARYANTLARI

Kader ÖZBEKTAŞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İdris ÖREN

2022, 58 Sayfa

Bu tezde, iki boyutlu Lorentz benzerlik geometrisinde genelleştirilmiş lineer pseudo-benzerlik grupları, genelleştirilmiş pseudo-benzerlik hareket grupları ve pseudo-benzerlik hareket grupları anlatıldı. Bu grupların elemanlarının hiperbolik sayılarla ilişkileri verildi. Bu gruplar için iki boyutlu Lorentz benzerlik geometrisinde m -tane noktanın invaryantları bulundu. İki tane m -noktadan oluşan sistemin bu gruplar altında denklik(veya pseudo-benzerlik) şartları, bu noktaların invaryantları cinsinden verildi. Buna ek olarak, verilen iki tane m -noktadan oluşan sistemin denklik şartları sağlandığında, bir nokta sistemini diğerine dönüştüren pseudo-benzerlik dönüşümlerinin görüntüsü bu iki sistemdeki noktaların ortak invaryantları cinsinden elde edildi.

Anahtar Kelimeler: İnvaryant, pseudo-benzerlik dönüşümleri, hiperbolik sayılar, Lorentz benzerlik geometrisi

Thesis Master

SUMMARY

INVARIANTS OF POINTS IN THE TWO DIMENSIONAL LORENTZIAN
SIMILARITY GEOMETRY

Kader ÖZBEKTAŞ

Karadeniz Technical University

The Graduate School of Natural and Applied Sciences

Mathematics Graduate Program

Supervisor: Doç. Dr. İdris ÖREN

2022, 58 Pages

In this thesis, the generalized linear pseudo-similarity groups, the generalized pseudo-similarity motion groups and pseudo-similarity motion groups in two-dimensional Lorentzian similarity geometry are introduced. Relations between the elements of these groups and hyperbolic numbers are given. Invariants of m -points in two dimensional Lorentzian similarity geometry are found for these groups. The equivalence (or pseudo-similarity) conditions of the two systems consisting of m -points for these groups are given in terms of the invariants of these points. Moreover, for the given two systems consisting of m -points satisfying the equivalence conditions, the evident forms of pseudo-similarity transformations are obtained in the terms of common invariants of these systems.

Key Words: Invariant, pseudo-similarity transformations, hyperbolic numbers, Lorentzian similarity geometry

KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ

E_1^2	: 2-Boyutlu Minkowski Uzay-Zamanı
$GLPSim(E_1^2)$	: Genelleştirilmiş Lineer Pseudo-Benzerlik Grubu
$GLPSim^+(E_1^2)$	: Yönlendirmeyi Koruyan Genelleştirilmiş Lineer Pseudo-Benzerlik Grubu
$GPSim(E_1^2)$	: Genelleştirilmiş Pseudo-Benzerlik Hareket Grubu
$GPSim^+(E_1^2)$	: Yönlendirmeyi Koruyan Genelleştirilmiş Pseudo-Benzerlik Hareket Grubu
$\mathbb{H}$	: Hiperbolik Sayılar Kümesi
$\mathbb{H}^*$	$:= \{x = x_1 + jx_2 \in \mathbb{H} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \langle x, x \rangle \neq 0\}$
$\mathbb{H}_+^*$	$:= \{x = x_1 + jx_2 \in \mathbb{H} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \langle x, x \rangle > 0\}$
$LPSim(E_1^2)$	: Lineer Pseudo-Benzerlik Grubu
$LPSim^+(E_1^2)$	: Yönlendirmeyi Koruyan Lineer Pseudo-Benzerlik Grubu
$PSim(E_1^2)$	: Pseudo-Benzerlik Hareket Grubu
$PSim^+(E_1^2)$	: Yönlendirmeyi Koruyan Pseudo-Benzerlik Hareket Grubu
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^2$	: 2-Boyutlu Reel Vektör Uzayı
$S(\mathbb{H}_+^*)$	$:= \{x \in \mathbb{H}, \langle x, x \rangle = 1\}$

1. GENEL BİLGİLER

1.1. GİRİŞ

1872 yılında Felix Klein'in Erlangen Programında “geometri” yi, “ A bir küme, G 'de A kümesini kendisine dönüştüren dönüşümlerden meydana gelen bir grup olmak üzere, A kümesinin G 'nin elemanları olan dönüşümler altında değişmez(invaryant) kalan özelliklerinin incelenmesi olarak tanımlamıştır. Bu tanım, geometriyi cebirsel bir kavram olan dönüşümler grubuyla birleştirmek zorunda kalmıştır [10].

F.Klein, dönüşümleri kullanarak geometrik özellikleri incelemiştir. Bu yaklaşımda bir A kümesinden bir B kümesine yapılan bir dönüşümde, A kümesindeki elemanların bazı geometrik özellikleri ile B kümesindeki görüntülerinin özellikleri aynı ise bu dönüşüm bu iki küme arasındaki bazı özellikleri korumaktadır. Bu korunan özelliklere invaryant özellikler; bu özellikleri koruyan dönüşümlere invaryant dönüşümler denilmektedir [5].

Bu bakış açısıyla, Öklid geometrisindeki özellikler; dönmeler, yansımalar ve ötelemelerin Öklid grubu altında invaryanttır. Benzer şekilde, projektif geometrideki özellikler, projektif dönüşümlerin grubu altında invaryanttır [22].

Geometrinin bu tanımı ve invaryant teori ile birleştirilmesi çok önemlidir. Bu yaklaşımla örneğin, n -boyutlu Öklid geometrisinde iki tane noktanın invaryantını incelemek, Öklid grubu altında bu iki noktanın invaryantını bulmakla eşdeğerdir ve Öklid geometrisinde bu iki noktanın invaryantı, bu noktalar arasındaki uzaklıktır.

Öklid geometrisinde, açıların ve uzaklıkların oranlarını koruyan dönüşümlere benzerlik dönüşümleri denir. Bu dönüşüm, şekilleri benzer şekillere dönüştürmektedir. Bir benzerlik dönüşümü, bir dönme, bir yansıma, bir öteleme ve belirli oranda ölçekleme (büyütme veya küçültme)den ibarettir[4,23]. Benzerlik dönüşümleri altında değişmeyen geometrik özelliklere benzerlik geometrisi adı verilmekte ve benzerlik geometrisindeki invaryant özellikler benzerlik grupları altında incelenmektedir [7,8].

İnvaryant teorideki temel problemlerden biri noktalardan oluşan bir sistemin invaryantlarının bulunmasıdır. Bu problemin; bilgisayar grafikleri, nesne tanıma

problemleri, robot hareketleri gibi alanlarda uygulamaları vardır. Bu uygulamaların amacı, nesnelerin otomatik belirlenmesidir. Bu belirlemeyi yapmak için verilen iki tane m noktadan oluşan sistemler arasındaki invaryant ilişkilerin ve bir nokta kümesini diğerine dönüştüren dönüşümün bulunması önemlidir. Bu problem matematik literatüründe, denklik problemi olarak bilinmektedir. Öklid uzayındaki benzerlik geometrisi için bu problemin çözümü [7,8]'de verilmiştir.

Benzer düşünceyle, n -boyutlu Minkowski uzayında pseudo-benzerlik dönüşümleri tanımlanmış ve bu dönüşümlere karşılık gelen pseudo-benzerlik grupları altında eğriler, manifoldların bazı özellikleri incelenmiştir [9,23].

İki boyutlu indeksi 1 olan pseudo-Öklid uzayında iki tane lineer pseudo-benzerlik grubu için m -tane noktanın benzerlik problemleri, bu noktaların invaryantları yardımıyla çözülmüş ve Bezier eğrilerinin denklik problemlerine uygulamaları verilmiştir [27].

İki boyutlu Minkowski uzayındaki benzerlik geometrisinde tüm pseudo-benzerlik grupları tanımlanmış ve parametrik eğrilerin pseudo-benzerlik problemleri çözülmüştür [20].

Bu tez çalışmasında [13]'de verilen T -şekil kavramı açısından Lorentz benzerlik geometrisinde m -tane noktanın invaryantları yardımıyla, verilen iki m -tane noktadan oluşan sistemin benzerlik problemlerinin çözümleri verilecektir.

Bu tezde, iki boyutlu Lorentz benzerlik geometrisinde, geliştirilmiş lineer pseudo-benzerlik dönüşümleri altındaki geliştirilmiş lineer pseudo-benzerlik grupları ile bu dönüşümlere ötelemelerin eklenmesiye oluşan geliştirilmiş pseudo-benzerlik grupları için m -tane noktanın invaryantları elde edilmiştir. Bu invaryantlar yardımıyla benzerlik problemleri çözülmüştür. Dahası, [27]'de önerilen problemlerden birincisinin tam çözümü verilmiştir. Ayrıca çözümü verilmeyen lineer pseudo-benzerlik dönüşümlerine öteleme dönüşümlerinin eklenmesiyle elde edilen pseudo-benzerlik grupları için de benzerlik problemleri çözülmüştür.

Bu problemlerin çözümünde, pseudo-benzerlik gruplarındaki dönüşümler hiperbolik sayılar cebiri ile ilişkilendirilmiş ve hiperbolik sayılar cebirindeki özellikler kullanılarak problemlerin çözümü verilmiştir.

1.2. Hiperbolik Sayılar Cebiri

Bu bölümde hiperbolik sayılarla ilgili kavramlara yer verilecektir. Bu kavramlar ve detaylı bilgiler için [3, 6, 11, 21] çalışmaları incelenebilir.

Tanım 1.2.1. $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$a \oplus b = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ şeklinde tanımlanan işleme $\mathbb{R}^2$ 'de toplama işlemi denir.

Tanım 1.2.2. $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$a \odot b = (a_1, a_2) \odot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$ şeklinde tanımlanan işleme $\mathbb{R}^2$ 'de çarpma işlemi denir.

Tanım 1.2.3. $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ de

$\oplus: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ve $\odot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ işlemleri verilsin.

Bu takdirde $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ kümesine Hiperbolik sayılar kümesi denir ve $\mathbb{H}$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.1. $\mathbb{H}$ kümesi birimli, değişmeli, birleşmeli bir cebirdir.

$\mathbb{H}$ cebirine; hiperbolik sayıların cebiri denir.

Tanım 1.2.4. $(0,1) \in \mathbb{H}$ sayısına hiperbolik birim denir ve 'j' ile gösterilir.

Önerme 1.2.1. $j = (0,1), j^2 = 1 = e$ ve keyfi $x = (a_1, a_2) \in \mathbb{H}$, $x = a_1 e + a_2 j$ şeklinde yazılır.

$\mathbb{H}$ 'nin bir alt kümesi $\mathbb{R}' = \{ae | a \in \mathbb{R}\}$ ve $\mathbb{R}$ izomorftur.

$\mathbb{R}'$ alt kümesini $\mathbb{R}$ ile tanımlarsak; $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{H}$ 'nin elemanları $x = a_1 + a_2 j$ şeklindedir. Hiperbolik sayılardaki çarpma,

$$(a_1 + a_2 j)(b_1 + b_2 j) = (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)j \text{ şeklinde olur.}$$

$x = a_1 + a_2 j, y = b_1 + b_2 j$ vektörleri için $\langle x, y \rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2$ şeklindedir. O zaman $\langle x, y \rangle, \mathbb{H}$ üzerinde bilinear formdur ve $\langle x, x \rangle = a_1^2 - a_2^2, \mathbb{H}$ üzerinde kuadratik formdur. Kolaylık için $Q(x) = \langle x, x \rangle$ ile göstereceğiz.

Hiperbolik sayıların matris gösterimini açıklayalım.

$x = a + bj \in \mathbb{H}$ olsun. $M_x = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ ile gösterelim. Bu şekildeki tüm matrislerin kümesini $M_H = \{M_x | x = a + jb \in \mathbb{H}\}$ ile gösterelim. M_H kümesi üzerinde, standart matris işlemleri olan matrislerde toplama, iki matrisi çarpma ve bir skalarla bir matrisi çarpma işlemlerini alalım. O zaman M_H birimli, değişmeli ve birleşme özelliği olan bir cebirdir. M_H ile $\mathbb{H}$ cebirleri izomorftur.

Önerme 1.2.2.

$$(1) M: H \rightarrow M_H$$

$x \rightarrow M_x$ dönüşümü H ve M_H cebirlerinin izomorfizmidir.

$$(2) \forall x, y \in H \text{ için } Q(x) = \det(M_x) \text{ ve } Q(xy) = Q(x)Q(y) \text{ 'dir.}$$

Bir H vektör uzayının φ endomorfizmi, $\varphi: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \forall x, y \in H$ için $\varphi(\varphi(x)) = x$ ve $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ ise H cebirinin involüsyonu olarak adlandırılır. Herhangi $x = a_1 + a_2j \in H$ elemanı için $W(x) = a_1 - a_2j$ olarak gösterelim.

Önerme 1.2.3. $W: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ cebirinin bir involüsyonudur. $\forall x = a_1 + a_2j \in \mathbb{H}$ için $x + W(x) = 2a_1, \langle x, x \rangle = xW(x), xW(x) = a_1^2 - a_2^2 \in \mathbb{R}$ 'dir.

Önerme 1.2.4. $Q(x)$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$(1) \forall x \in \mathbb{H}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ için } Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x).$$

$$(2) e \in \mathbb{H}, \text{ için birim elemanı için } Q(e) = 1.$$

$$(3) \forall x \in \mathbb{H}, \text{ için } Q(x) = Q(W(x)) = xW(x) = W(x)x.$$

$$(4) \forall x, y \in \mathbb{H}, \text{ için } \langle x, y \rangle = \langle W(x), W(y) \rangle.$$

Önerme 1.2.5. $x \in \mathbb{H}$ olmak üzere $x^{-1} \in \mathbb{H}$ mevcuttur $\Leftrightarrow Q(x) \neq 0$ 'dır.

Bu durumda $x^{-1} = \frac{W(x)}{Q(x)}$ ve $Q(x^{-1}) = \frac{1}{Q(x)}$ 'dir.

1.3. İki Boyutlu Minkowski Uzayı ile Hiperbolik Sayılar Cebiri Arasındaki

Bağlantılar

Bu kısımdaki bilgiler [3, 11, 16] nolu çalışmadan alınmıştır.

$\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olsun.

Tanım 1.3.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V , $\mathbb{R}$ üzerinde $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı olmak üzere, $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

(i) $a, b \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V$ için

$$g(ax_1 + bx_2, y) = ag(x_1, y) + bg(x_2, y) \text{ ve } g(x, ay_1 + by_2) = ag(x, y_1) + bg(x, y_2).$$

(ii) $\forall x, y \in V$ için $g(x, y) = g(y, x)$.

(iii) $\forall y \in V$ için $g(x, y) = 0$ olduğunda $x = 0$ özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme genelleştirilmiş iç (skaler) çarpım denir. Bu iç çarpım $\forall x, y \in V$ için $g(x, y)$ veya $\langle x, y \rangle$ ile gösterilir.

Dahası, $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne (i) durumunda bilineer dönüşüm, (ii) durumunda simetrik dönüşüm ve (iii) durumunda ise bozulmamış (nondegenerate) dönüşüm denir.

Tanım 1.3.2. 2-boyutlu $\mathbb{R}^2$ reel vektör uzayında tanımlı indeksi 1, bilineer, simetrik ve bozulmamış özelliklerine sahip olan $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ genelleştirilmiş iç çarpıma Lorentz iç çarpımı denir.

$\mathbb{R}^2$ de Lorentz iç çarpımlı uzaya iki boyutlu Lorentz uzayı (veya iki boyutlu Minkowski uzayı) denir. Bu uzay kısaca E_1^2 ile gösterilecektir. Literatürde bu uzay M ile de gösterilir ve indeksi 1 olan pseudo-öklid uzayı olarak da adlandırılır.

Tanım 1.3.3.

(i) $0 \neq x \in E_1^2$ için $\langle x, x \rangle = 0$ ise x 'e ışıksal (null veya lightlike) vektör denir.

(ii) $x \in E_1^2$ için $\langle x, x \rangle < 0$ ise x 'e zamansal (timelike) vektör denir.

(iii) $x \in E_1^2$ için $\langle x, x \rangle > 0$ veya $\langle x, x \rangle = 0$ ise x 'e uzaysal (spacelike) vektör denir.

Örnek 1.3.1.

1) $x = (5, 5) \in E_1^2$ olmak üzere, $\langle x, x \rangle = 25 - 25 = 0$ olduğundan x ışıksal vektördür.

2) $x = (2, 6) \in E_1^2$ olmak üzere, $\langle x, x \rangle = 4 - 36 = -32 < 0$ olduğundan x zamansal vektördür.

3) $x = (3, 2) \in E_1^2$ olmak üzere, $\langle x, x \rangle = 9 - 4 = 5 > 0$ olduğundan x uzaysal vektördür.

4) $x = (4, 4) \in E_1^2$ olmak üzere, $\langle x, x \rangle = 0$ olduğundan x uzaysal vektördür.

Teorem 1.3.1. E_1^2 Lorentz uzayı ve $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1) \in E_1^2$ olmak üzere, $g(e_i, e_i) = \langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$ ve $g(e_i, e_j) = \langle e_i, e_j \rangle = 0, i \neq j$ olan $\{e_i, i = 1, 2\}$ şeklinde bir taban vardır. E_1^2 Lorentz uzayında $\{e_1, e_2\}$ ortogonal tabanı lineer bağımsızdır.

$O(1, 1)$ kümesini $\{F: E_1^2 \rightarrow E_1^2 | \langle Fx, Fy \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in E_1^2\}$ ile gösterelim.

$O(1,1)$ 'in bir elemanını $\{e_1, e_2\}$ ortonormal tabanına göre 2×2 tipinde matris olarak düşünebiliriz. W involüsyonunun matrisini $\{e_1, e_2\}$ tabanına göre W ile de gösteririz.

O zaman, $W = \|w_{is}\|_{i,s=1,2}$, burada $w_{11} = 1, w_{12} = w_{21} = 0, w_{22} = -1$ 'dir.

$x = a_1 + ja_2, y = b_1 + jb_2 \in \mathbb{H}$ olsun.

$\langle x, y \rangle = a_1b_1 - a_2b_2$ bilineer formunun matrisi W 'ye eşittir. $C = \|c_{is}\|_{i,s=1,2}$ olmak üzere C^T ile C 'nin transpozunu gösterelim.

Bu takdirde $O(1,1)$ 'deki $\forall x, y \in \mathbb{H}$ için $\langle Cx, Cy \rangle = \langle x, y \rangle$ eşitliği $C^TWC = W$ eşitliğine denktir. Bu durumda $O(1,1) = \{C = \|c_{is}\| \mid C^TWC = W\}$ şeklindedir.

Önerme 1.3.1. $C \in O(1,1)$ olsun. Bu takdirde, $\det(C) = 1$ veya $\det(C) = -1$ 'dir.

Şimdi $SO(1,1)$ ile $\{C \in O(1,1) \mid \det(C) = 1\}$ kümesini gösterelim.

Önerme 1.3.2.

(1) $O(1,1)$ bir grup ve $SO(1,1), O(1,1)$ 'in bir alt grubudur.

(2) $O(1,1) = SO(1,1) \cup \{CW \mid C \in SO(1,1)\}$.

$\det(C) \neq 0$ olacak şekilde tüm $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_H$ matrislerinin kümesini GM_H ve

$\{C \in GM_H \mid \det(C) = 1\}$ kümesini SM_H ile gösterelim.

Teorem 1.3.2. $SO(1,1) = SM_H$.

Şimdi $\mathbb{H}^* = \{z = a + jb \in \mathbb{H} \mid Q(z) \neq 0\}$ olsun. $x = a_1 + ja_2 \in \mathbb{H}^*, y = b_1 + jb_2 \in \mathbb{H}$,

$M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ olsun.

$$zy = \begin{pmatrix} ab_1 + bb_2 \\ bb_1 + ab_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = M_z y. \quad (1)$$

Buradan $M_{\mathbb{H}^*} = \left\{ C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid \det(C) \neq 0 \right\}$ tanımlayalım.

Önerme 1.3.3. $\mathbb{H}^*$ ve $M_{\mathbb{H}^*}$ izomorftur.

İspat: Önerme 1.2.2'den açıktır.

1.4. Lineer Pseudo-Benzerlik Grupları

Bu kısımda, $\mathbb{H}_+^*$ ve $S(\mathbb{H}_+^*)$ lineer pseudo-benzerlik gruplarının tanımları ve teoremleri [27] nolu çalışmadan derlenmiştir.

Hiperbolik sayılar kümesi $\mathbb{H} = \{z = a + jb \mid a, b \in \mathbb{R}, j^2 = 1, j \notin \mathbb{R}\}$ ve

$\mathbb{H}^* = \{x \in \mathbb{H} \mid Q(x) \neq 0\}$ kümesini alalım.

$\mathbb{H}_+^* = \{x \in \mathbb{H} \mid Q(x) > 0\}$ ve $S(\mathbb{H}_+^*) = \{x \in \mathbb{H} \mid Q(x) = 1\}$ kümelerini tanımlayalım.

Önerme 1.4.1. $\mathbb{H}_+^*$ ve $S(\mathbb{H}_+^*)$, $\mathbb{H}^*$ in alt gruplarıdır.

Not 1.4.1. $\mathbb{H}_+^* = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}, x \in S(\mathbb{H}_+^*)\}$ şeklinde ifade edilebilir.

$\left\{M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid z = a + jb \in \mathbb{H}_+^*\right\}$ kümesini düşünelim. Bu kümeyi $LPSim^+(E_1^2)$ ile gösterelim.

$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ve $x = a + jb \in \mathbb{H}^*$ olmak üzere, x ile W matrislerinin çarpma işlemi xW olsun. Bu durumda $\left\{M_z W \mid M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, z = a + jb \in \mathbb{H}_+^*\right\}$ kümesini alalım ve bu kümeyi $LPSim^-(E_1^2)$ ile gösterelim.

$LPSim^+(E_1^2) \cup LPSim^-(E_1^2)$ kümesini, $LPSim(E_1^2)$ ile gösterelim.

Önerme 1 4.2.

- (i) $LPSim(E_1^2)$ kümesi, matrislerde çarpma işlemine göre gruptur.
- (ii) $LPSim^+(E_1^2)$ kümesi, $LPSim(E_1^2)$ 'nin bir alt grubudur.
- (iii) $LPSim^+(E_1^2) \cap LPSim^-(E_1^2) = \emptyset$ 'dir.

Teorem 1.4.1.

- (i) $LPSim^+(E_1^2) = \{M_z: E_1^2 \rightarrow E_1^2 \mid z \in \mathbb{H}_+^*\} = \mathbb{H}_+^*$
- (ii) $LPSim^-(E_1^2) = \{M_z W: E_1^2 \rightarrow E_1^2 \mid z \in \mathbb{H}_+^*\} = \mathbb{H}_+^* W$
- (iii) $LPSim(E_1^2) = LPSim^+(E_1^2) \cup LPSim^-(E_1^2) = \mathbb{H}_+^* \cup \mathbb{H}_+^* W$

$G = LPSim(E_1^2)$ veya $G = LPSim^+(E_1^2)$ olsun.

Tanım 1.4.1. E_1^2 'de iki sistem $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ve $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ olmak üzere, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $y_i = gx_i$ eşitliğini sağlayan $g \in G$ mevcut ise X ve Y sistemlerine G -benzer(G -denk) denir ve $X \stackrel{G}{\sim} Y$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.2. G bir grup ve $x_1, x_2, \dots, x_m \in E_1^2$ olmak üzere, $\forall g \in G$ için

$F(gx_1, gx_2, \dots, gx_m) = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ise F' 'ye G -invariant fonksiyon denir.

Teorem 1.4.2. $x, y \in E_1^2$, $F: E_1^2 \times E_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

(i) $F(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{Q(x)}$ fonksiyonu $LPSim(E_1^2)$ -invarianttır.

(ii) $F(x, y) = \frac{[x \ y]}{Q(x)}$ fonksiyonu $LPSim^+(E_1^2)$ -invarianttır.

(iii) $F(x, y) = \left(\frac{[x \ y]}{Q(x)}\right)^2$ ve $F(x, y) = \text{sgn}\langle x, y \rangle$ fonksiyonları $LPSim(E_1^2)$ -invarianttır.

Not 1.4.2. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ve $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ iki sistem ve $x_1 \neq 0, y_1 = 0$ olsun. Bu durumda X ve Y sistemleri G -benzer değildir. $x_1 = 0, y_1 = 0$ durumunda, bu sistemlerin G -benzerlik problemleri $(m-1)$ tane noktadan oluşan $\{x_2, x_3, \dots, x_m\}, \{y_2, y_3, \dots, y_m\}$ sistemlerinin G -benzerlik problemlerine indirgenir. Bundan dolayı X ve Y sistemlerinin G -benzerlik problemlerini $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ durumunda incelemek gerekir.

Önerme 1.4.3. $x, y \in \mathbb{H}$ ve $\langle x, x \rangle \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $yx^{-1} \in \mathbb{H}$ mevcut ve

$$yx^{-1} = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} + j \frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle} \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda yx^{-1} elemanının matris formundaki görüntüsü

$$M_{yx^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} & \frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle} \\ \frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle} & \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \end{pmatrix} \quad (3)$$

şeklinde dir. Ayrıca, $\det M_{yx^{-1}} \neq 0 \Leftrightarrow \langle y, y \rangle \neq 0$ dir.

Tanım 1.4.3. $x_1, x_2, \dots, x_m \in E_1^2$ olmak üzere m -tane noktadan oluşan $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ sistemine E_1^2 'de m -tane noktadan oluşan sistem (m -sıralısı) denir.

Tanım 1.4.4. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ bir m -sıralısı olmak üzere $1 \leq s \leq m$ ve bazı $s \in \mathbb{N}$ için $Q(x_s) \neq 0$ ise bu m -sıralısına bozulmamış m -sıralı (m -tane noktadan oluşan sistem) denir. Aksi takdirde bozulmuş m -sıralı denir.

Örnek 1.4.1. (1) $m = 2$ için $X = \{x_1 = (1, 0), x_2 = (2, 0)\}$ sistemi bozulmamıştır.

(2) $m = 2$ için $X = \{x_1 = (1, 1), x_2 = (2, -2)\}$ sistemi bozulmuştur.

Not 1.4.3. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ sistemi m tane noktadan (hiperbolik sayıdan) oluşan bozulmamış bir sistem olsun. X sistemi bozulmamış olduğundan $\langle x_i, x_i \rangle = 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1$ ve $\langle x_k, x_k \rangle \neq 0, k = 1, 2, \dots, m$ olan $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $p(X) = k$ olarak gösterilecektir. Örneğin, $\langle x_1, x_1 \rangle \neq 0$ durumunda, $p(X) = 1$ dir. Dahası,

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ iki sistem olmak üzere, $X \stackrel{G}{\sim} Y$ ise $p(X) = p(Y)$ dir. Açıkça $p(X)$ fonksiyonu X in bir G -invariantıdır.

Teorem 1.4.3. $m \geq 1$ için $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ kümeleri E_1^2 de iki sistem ve $\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle \neq 0, \langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle \neq 0$ olsun. Bu takdirde

$$X \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} Y \Rightarrow \begin{cases} p(X) = p(Y) \\ sgn(\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle) = sgn(\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle) \\ \frac{\langle x_{p(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{\langle y_{p(Y)}, y_i \rangle}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \\ \frac{[x_{p(X)} x_i]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{[y_{p(Y)} y_i]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \end{cases} \quad (4)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$

Tersine, varsayalım (4) eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, $y_i = M_z x_i, i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ elemanının görüntüsü

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle x_{p(X)}, y_{p(X)} \rangle}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} & \frac{[x_{p(X)} y_{p(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} \\ \frac{[x_{p(X)} y_{p(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} & \frac{\langle x_{p(X)}, y_{p(X)} \rangle}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} \end{pmatrix} \quad (5)$$

şeklindedir.

Not 1.4.4. E_1^2 de $1 = (1, 0)$ elemanını düşünelim. Bu eleman matris biçiminde

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ yazılabilir. Bu takdirde, $I \in LPSim^+(E_1^2)$ ve $W \in LPSim(E_1^2)$ olmak üzere

$1 = I1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $1 = W1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dır. Bundan dolayı $y = M_z x$ eşitliğini

sağlayan $z \in LPSim(E_1^2)$ ' nin teklik özelliği $LPSim(E_1^2)$ grubu için doğru değildir.

E_1^2 de $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ bir m -sıralısı olsun. Bu sistemin rankı $r(X)$ ile gösterilecektir.

Açıkça $r(X)$, X in bir $LPSim(E_1^2)$ -invariantıdır.

Teorem 1.4.4. $m \geq 1$ için $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ kümeleri E_1^2 de iki m -sıralısı ve $\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle \neq 0, \langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle \neq 0, r(X) = r(Y) = 1$ olsun. Bu takdirde

$$X \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} Y \Rightarrow \begin{cases} p(X) = p(Y) \\ sgn(\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle) = sgn(\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle) \\ \frac{\langle x_{p(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{\langle y_{p(Y)}, y_i \rangle}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \end{cases} \quad (6)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$

Tersine, varsayalım (6) eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, $y_i = M_z x_i, i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $M_z \in LPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim(E_1^2)$ elemanının görüntüsü (5) ifadesinde verilmiştir.

Not 1.4.5. $m > 1$ durumunda E_1^2 de bir m -sıralısı $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ve $r(X) = 2$ olsun. Bu durumda $x_{p(X)}$ ile üretilen E_1^2 nin lineer alt uzayını $\{\lambda x_{p(X)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ile gösterelim. $1 \leq s \leq m$ olmak üzere $x_s \notin \{\lambda x_{p(X)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ olan s sayısının en küçük değerini $q(X)$ ile gösterelim. Açıkça $q(X)$ sayısı, X in bir $LPSim(E_1^2)$ -invariantıdır.

Teorem 1.4.5. $m \geq 1$ için $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ kümeleri E_1^2 de iki m -sıralısı ve $\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle \neq 0, \langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle \neq 0, r(X) = r(Y) = 2$ olsun. Bu takdirde

$$X \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} Y \Rightarrow \begin{cases} p(X) = p(Y) \\ q(X) = q(Y) \\ sgn(\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle) = sgn(\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle) \\ \left(\frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \right)^2 \\ \frac{\langle x_{p(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{\langle y_{p(Y)}, y_i \rangle}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \\ \frac{[x_{p(X)} x_k]}{[x_{p(X)} x_{q(X)}]} = \frac{[y_{p(Y)} y_k]}{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]} \end{cases} \quad (7)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$

Tersine, varsayalım (7) eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, $y_i = M_z x_i, i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $M_z \in LPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim(E_1^2)$ elemanının görüntüsü için aşağıdaki durumlar mevcuttur

(i) $\frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle}$ durumunda, $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ ve M_z elemanının görüntüsü (5) ifadesinde verilmiştir.

(ii) $\frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = -\frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle}$ durumunda, $M_z \in LPSim^-(E_1^2)$ ve M_z elemanının görüntüsü

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle \overline{x_{p(X)}}, y_{p(X)} \rangle}{\langle \overline{x_{p(X)}}, \overline{x_{p(X)}} \rangle} & -\frac{[\overline{x_{p(X)}} y_{p(X)}]}{\langle \overline{x_{p(X)}}, \overline{x_{p(X)}} \rangle} \\ \frac{[\overline{x_{p(X)}} y_{p(X)}]}{\langle \overline{x_{p(X)}}, \overline{x_{p(X)}} \rangle} & -\frac{\langle \overline{x_{p(X)}}, y_{p(X)} \rangle}{\langle \overline{x_{p(X)}}, \overline{x_{p(X)}} \rangle} \end{pmatrix} \quad (8)$$

şeklindedir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. İki Boyutlu Lorentz Uzayında T -Şekil Kavramı

T en az iki elemanlı bir küme ve E_1^2 iki boyutlu Lorentz uzayı olsun.

$\Omega(T, E_1^2)$ ile T kümesinden E_1^2 'e tüm dönüşümlerin kümesini gösterelim. Bu durumda

$\Omega(T, E_1^2) = \{u: T \rightarrow E_1^2 \mid T \text{ en az iki elemanlı bir küme}\}$ 'dir.

Tanım 2.1.1. $u \in \Omega(T, E_1^2)$ elemanına E_1^2 uzayında bir T -şekil denir.

Burada özel olarak T kümesini, $m \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 1$ olmak üzere $T = \{1, 2, \dots, m\}$ olarak alalım. Bu durumda $u \in \Omega(T, E_1^2)$ elemanının görüntüsü

$$u: T \rightarrow E^2,$$

$$t \rightarrow u(t) = u_t, u = \{u(1), u(2), \dots, u(m)\} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \text{ şeklindedir.}$$

Açıkça T kümesi m elemanlı sonlu bir küme ise $u \in \Omega(T, E_1^2)$ 'e bir m tane noktadan oluşan sistem veya m -sıralı denir.

Tanım 2.1.2. G bir grup ve $T = \{1, 2, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ olsun. $u, v \in \Omega(T, E_1^2)$ iki T -şekil (m -sıralı) olmak üzere $gu = v$ eşitliğini sağlayan $g \in G$ mevcutsa u ve v T -şekillerine G -denk denir. Bu durum $u \stackrel{G}{\sim} v$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ve $v = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ olduğundan bu tanım, iki tane m -sıralının G -denklik tanımını vermektedir.

Aşağıdaki bölümlerde Lorentz benzerlik geometrisindeki gruplar ve bu geometrideki iki

T -şeklin (m -sıralının) invaryantları ve benzerlik problemlerinin çözümü verilmiştir.

2.2. Genelleştirilmiş Lineer Pseudo-Benzerlik Grupları

Hiperbolik sayılar cebiri ve lineer pseudo-benzerlik grupları önceki bölümde verilmiştir. Bu kısımda, Genelleştirilmiş Lineer Pseudo-Benzerlik Gruplarına ait yapılan çalışmalar verilecektir.

Önerme 2.2.1. $\mathbb{H}^*$, $\mathbb{H}$ 'deki çarpma işlemine göre bir gruptur.

İspat: $u, v, w \in \mathbb{H}^*$ keyfi $u = u_1 + ju_2$, $v = v_1 + jv_2$, $w = w_1 + jw_2$ olsun. Bu takdirde tanım gereği $\langle u, u \rangle \neq 0$, $\langle v, v \rangle \neq 0$, $\langle w, w \rangle \neq 0$ 'dır.

(i) $\langle uv, uv \rangle = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \neq 0$ olduğundan $uv \in \mathbb{H}^*$ olup kapalılık özelliği sağlanır.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad u(vw) &= (u_1 + ju_2)[(v_1 + jv_2)(w_1 + jw_2)] = (u_1 + ju_2)[(v_1w_1 - v_2w_2) + \\ &j(v_2w_1 + v_1w_2)] = u_1v_1w_1 - u_1v_2w_2 - u_2v_2w_1 - u_2v_1w_2 + ju_1v_2w_1 + ju_1v_1w_2 + \\ &ju_2v_1w_1 + ju_2v_2w_2 = w_1[(u_1v_1 - u_2v_2) + j(u_1v_2 - u_2v_1)] + w_2[(-u_1v_2 - u_2v_1) + \\ &j(u_1v_1 - u_2v_2)] = [(u_1v_1 - u_2v_2) + j(u_2v_1 + u_1v_2)](w_1 + jw_2) = [(u_1 + ju_2)(v_1 + \\ &jv_2)](w_1 + jw_2) = (uv)w \end{aligned}$$

olup birleşme özelliği sağlanır.

(iii) $e = 1 + j0 \in \mathbb{H}^*$ dir.

(iv) $u = u_1 + ju_2 \in \mathbb{H}^*$, $a = a_1 + ja_2 \in \mathbb{H}$ için $(u_1 + ju_2)(a_1 + ja_2) = 1 + j0$ olsun.

$u_1a_1 + ju_1a_2 + ju_2a_1 + u_2a_2 = 1 + j0$ denkleminde $\left. \begin{array}{l} u_1a_1 + u_2a_2 = 1 \\ u_2a_1 + u_1a_2 = 0 \end{array} \right\}$ lineer sistemi

elde edilir. Bu sistemin çözümünden

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_2 \\ 0 & u_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_1 \end{vmatrix}} = \frac{u_1}{u_1^2 - u_2^2}, \quad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & 1 \\ u_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_1 \end{vmatrix}} = \frac{-u_2}{u_1^2 - u_2^2} \text{ elde edilir.}$$

Buradan $a = a_1 + ia_2 = \frac{u_1 - ju_2}{u_1^2 - u_2^2} = \frac{\bar{u}}{\langle u, u \rangle} = \frac{\bar{u}}{Q(u)}$ ve $\langle u, u \rangle \neq 0$ olduğundan $u \in H^*$ elemanının tersi vardır ve $a = \frac{\bar{u}}{Q(u)}$ ile ifade edilir.

(i), (ii), (iii) ve (iv)'den $\mathbb{H}^*$, $\mathbb{H}$ 'deki çarpma işlemine göre bir gruptur.

Şimdi $\left\{M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid z = a + jb \in \mathbb{H}^*\right\}$ kümesini düşünelim. Bu kümeyi $GLPSim^+(E_1^2)$ ile gösterelim.

$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ olmak üzere, (2) denkleminde $z = a + jb \in \mathbb{H}^*$ olmak üzere, z ile W matrislerinin çarpma işlemi zW olsun. Bu durumda

$\left\{M_z W \mid M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, z = a + jb \in \mathbb{H}^*\right\}$ kümesini alalım ve bu kümeyi $GLPSim^-(E_1^2)$ ile gösterelim.

$GLPSim^+(E_1^2) \cup GLPSim^-(E_1^2)$ kümesini, $GLPSim(E_1^2)$ ile gösterelim.

Önerme 2.2.2.

- (i) $GLPSim(E_1^2)$ kümesi matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur.
- (ii) $GLPSim^+(E_1^2)$ kümesi, matrislerde çarpma işlemine göre $GLPSim(E_1^2)$ 'nin bir alt grubudur.
- (iii) $GLPSim^+(E_1^2) \cap GLPSim^-(E_1^2) = \emptyset$ 'dir.

İspat: Önerme 2.2.1'den kolayca görülür.

Tanım 2.2.1. $GLPSim^+(E_1^2)$ grubuna E_1^2 nin yönlendirmeyi koruyan genelleştirilmiş lineer pseudo-benzerlikler grubu denir [20].

Tanım 2.2.2. $GLPSim(E_1^2)$ grubuna E_1^2 nin genelleştirilmiş lineer pseudo-benzerlikler grubu denir [20].

Yukarıdaki bilgiler doğrultusunda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2. 2. 1.

- (i) $GLPSim^+(E_1^2) = \{M_z: E_1^2 \rightarrow E_1^2 \mid z \in \mathbb{H}^*\} = \mathbb{H}^*$
- (ii) $GLPSim^-(E_1^2) = \{M_z W: E_1^2 \rightarrow E_1^2 \mid z \in \mathbb{H}^*\} = \mathbb{H}^* W$
- (iii) $GLPSim(E_1^2) = GLPSim^+(E_1^2) \cup GLPSim^-(E_1^2) = \mathbb{H}^* \cup \mathbb{H}^* W$

2.3. Genelleştirilmiş Lineer Pseudo-Benzerlik Grupları İçin Benzerlik

Problemleri

$u_i, v_i \in E_1^2$, $i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ kümeleri m tane hiperbolik sayıdan (noktadan) oluşan iki sistem olsun.

$H = GLPSim^+(E_1^2)$ veya $H = GLPSim(E_1^2)$ olsun.

Tanım 2.3.1. E_1^2 de iki sistem $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ olmak üzere $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $v_i = gu_i$ eşitliğini sağlayan $g \in H$ mevcut U ve V sistemlerine H -benzer denir ve $U \stackrel{H}{\sim} V$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.2. H bir grup ve $u_1, u_2, \dots, u_m \in E_1^2$ olmak üzere, $\forall g \in H$ için $F(gu_1, gu_2, \dots, gu_m) = F(u_1, u_2, \dots, u_m)$ ise $F: \underbrace{E_1^2 \times E_1^2 \times \dots \times E_1^2}_{m-tane} \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye H -invariant fonksiyon denir.

Teorem 2. 3. 1. $u, v \in E_1^2$, $F: E_1^2 \times E_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

(i) $F(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle}$ fonksiyonu $GLPSim(E_1^2)$ -invarianttır.

(ii) $F(u, v) = \frac{[u \ v]}{\langle u, u \rangle}$ fonksiyonu $GLPSim^+(E_1^2)$ -invarianttır.

(iii) $F(u, v) = \left(\frac{[u \ v]}{\langle u, u \rangle} \right)^2$ fonksiyonu $GLPSim(E_1^2)$ -invarianttır.

İspat:

(i) $F(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle}$ fonksiyonu $GLPSim(E_1^2)$ -invariant olduğunu göstermek için

$\forall g \in GLPSim(E_1^2)$ için $F(gu, gv) = F(u, v)$ olduğunu gösterelim.

Öncelikle $F(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle}$ fonksiyonunun $GLPSim^+(E_1^2)$ -invariant olduğunu gösterelim.

$g \in GLPSim^+(E_1^2)$ olsun. Bu takdirde, $z = a + jb \in \mathbb{H}^*$ için $g = M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ şeklindedir.

Buradan

$$M_z u = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 + bu_2 \\ bu_1 + au_2 \end{pmatrix} \text{ ve } M_z v = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ bv_1 + av_2 \end{pmatrix} \text{ elde edilir.}$$

O halde,

$$\begin{aligned} F(gu, gv) &= \frac{\langle gu, gv \rangle}{\langle gu, gu \rangle} = \frac{\langle M_z u, M_z v \rangle}{\langle M_z u, M_z u \rangle} = \frac{\langle (au_1 + bu_2, bu_1 + au_2), (av_1 + bv_2, bv_1 + av_2) \rangle}{\langle (au_1 + bu_2, bu_1 + au_2), (au_1 + bu_2, bu_1 + au_2) \rangle} \\ &= \frac{a^2 u_1 v_1 + abu_1 v_2 + abu_2 v_1 + b^2 u_2 v_2 - b^2 u_1 v_1 - abu_1 v_2 - abu_2 v_1 - a^2 u_2 v_2}{a^2 u_1 u_1 + abu_1 u_2 + abu_2 u_1 + b^2 u_2 u_2 - b^2 u_1 u_1 - abu_1 u_2 - abu_2 u_1 - a^2 u_2 u_2} \\ &= \frac{u_1 v_1 (a^2 - b^2) + u_2 v_2 (b^2 - a^2)}{u_1 u_1 (a^2 - b^2) + u_2 u_2 (b^2 - a^2)} = \frac{(a^2 - b^2)(u_1 v_1 - u_2 v_2)}{(a^2 - b^2)(u_1 u_1 - u_2 u_2)} = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} = F(u, v) \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla $F(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle}$ fonksiyonu $GLPSim^+(E_1^2)$ -invarianttır.

Şimdi $F(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle}$ fonksiyonunun $GLPSim^-(E_1^2)$ -invariant olduğunu gösterelim.

$g \in GLPSim^-(E_1^2)$ olsun. Teorem 2.2.1'den $g = M_z W$ 'dır.

$$M_z W = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}, \det M_z \neq 0 \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

$$M_z W u = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 - bu_2 \\ bu_1 - au_2 \end{pmatrix}, M_z W v = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 - bv_2 \\ bv_1 - av_2 \end{pmatrix} \text{ şeklindedir.}$$

$$\begin{aligned} F(gu, gv) &= \frac{\langle gu, gv \rangle}{\langle gu, gu \rangle} = \frac{(au_1 - bu_2)(av_1 - bv_2) - (bu_1 - au_2)(bv_1 - av_2)}{(au_1 - bu_2)^2 - (bu_1 - au_2)^2} \\ &= \frac{a^2 u_1 v_1 - abu_1 v_2 - abu_2 v_1 + b^2 u_2 v_2 - b^2 u_1 v_1 + abu_1 v_2 + abu_2 v_1 - a^2 u_2 v_2}{a^2 u_1^2 + b^2 u_2^2 - 2abu_1 u_1 - b^2 u_1^2 - a^2 u_2^2 + 2abu_1 u_2} \\ &= \frac{u_1 v_1 (a^2 - b^2) - u_2 v_2 (a^2 - b^2)}{u_1^2 (a^2 - b^2) - u_2^2 (b^2 - a^2)} = \frac{(a^2 - b^2)(u_1 v_1 - u_2 v_2)}{(a^2 - b^2)(u_1^2 - u_2^2)} = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} = F(u, v) \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla $F(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle}$ fonksiyonunun $GLPSim^-(E_1^2)$ -invarianttır.

$F(u, v)$ fonksiyonu $GLPSim^+(E_1^2)$ -invariant ve $GLPSim^-(E_1^2)$ -invariant olduğundan

$F(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle}$ fonksiyonu $GLPSim(E_1^2)$ -invarianttır.

(ii) $F(u, v) = \frac{[u, v]}{\langle u, u \rangle}$ fonksiyonu $GLPSim^+(E_1^2)$ -invariant olduğunu göstermek için

$\forall g \in GLPSim^+(E_1^2)$ için $F(gu, gv) = F(u, v)$ olduğunu gösterelim.

$g \in GLPSim^+(E_1^2)$ olsun. Bu takdirde, $z = a + jb \in \mathbb{H}^*$ elemanı $g = M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ şeklindedir. Bu durumda,

$$M_z u = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 + bu_2 \\ bu_1 + au_2 \end{pmatrix}, \text{ ve } M_z v = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ bv_1 + av_2 \end{pmatrix} \text{ elde edilir.}$$

O halde,

$$\begin{aligned} F(gu, gv) &= \frac{[gu \ gv]}{\langle gu, gu \rangle} = \frac{(au_1 + bu_2)(bv_1 + av_2) - (bu_1 + au_2)(av_1 + bv_2)}{(au_1 + bu_2)^2 - (bu_1 + au_2)^2} \\ &= \frac{abu_1v_1 + a^2u_1v_2 + b^2u_2v_1 + abu_2v_2 - abu_1v_1 - b^2u_1v_2 - a^2u_2v_1 - abu_2v_2}{a^2u_1u_1 + abu_1u_2 + abu_2u_1 + b^2u_2u_2 - b^2u_1u_1 - abu_1u_2 - abu_2u_1 - a^2u_2u_2} \\ &= \frac{u_1v_2(a^2 - b^2) - u_2v_1(a^2 - b^2)}{u_1u_1(a^2 - b^2) - u_2u_2(a^2 - b^2)} = \frac{(a^2 - b^2)(u_1v_2 - u_2v_1)}{(a^2 - b^2)(u_1^2 - u_2^2)} = \frac{[u \ v]}{\langle u, u \rangle} = F(u, v) \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

Böylece $F(u, v)$ fonksiyonu $GLPSim^+(E_1^2)$ -invarianttır.

(iii) $F(u, v) = \left(\frac{[u \ v]}{\langle u, u \rangle} \right)^2$ fonksiyonu $GLPSim(E_1^2)$ -invariant olduğunu göstermek için $\forall g \in GLPSim(E_1^2)$ için $F(gu, gv) = F(u, v)$ olduğunu gösterelim.

Öncelikle $F(u, v) = \left(\frac{[u \ v]}{\langle u, u \rangle} \right)^2$ fonksiyonunun $GLPSim^+(E_1^2)$ -invariant olduğunu gösterelim.

$g = a + jb \in GLPSim^+(E_1^2)$ olsun. Bu takdirde g elemanı $M_g = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$,

$\det M_g \neq 0$ şeklinde yazılabilir. $M_g u = \begin{pmatrix} au_1 + bu_2 \\ bu_1 + au_2 \end{pmatrix}$, $M_g v = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ bv_1 + av_2 \end{pmatrix}$ şeklindedir.

$$\begin{aligned} F(gu, gv) &= \left(\frac{[gu \ gv]}{\langle gu, gu \rangle} \right)^2 = \left(\frac{(au_1 + bu_2)(bv_1 + av_2) - (bu_1 + au_2)(av_1 + bv_2)}{(au_1 + bu_2)^2 - (bu_1 + au_2)^2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{abu_1v_1 + a^2u_1v_2 + b^2u_2v_1 + abu_2v_2 - abu_1v_1 - b^2u_1v_2 - a^2u_2v_1 - abu_2v_2}{a^2u_1u_1 + abu_1u_2 + abu_2u_1 + b^2u_2u_2 - b^2u_1u_1 - abu_1u_2 - abu_2u_1 - a^2u_2u_2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{u_1v_2(a^2 - b^2) - u_2v_1(a^2 - b^2)}{u_1u_1(a^2 - b^2) - u_2u_2(a^2 - b^2)} \right)^2 = \left(\frac{(a^2 - b^2)(u_1v_2 - u_2v_1)}{(a^2 - b^2)(u_1^2 - u_2^2)} \right)^2 = \left(\frac{[u \ v]}{\langle u, u \rangle} \right)^2 = F(u, v), \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $F(u, v)$ fonksiyonu $GLPSim^+(E_1^2)$ -invarianttır.

Şimdi $F(u, v) = \left(\frac{[u \ v]}{\langle u, u \rangle} \right)^2$ fonksiyonunun $GLPSim^-(E_1^2)$ -invariant olduğunu gösterelim.

$M_g \in GLPSim^-(E_1^2)$ olsun. Bu takdirde $g_1 = a + jb \in \mathbb{H}^*$ mevcuttur öyle ki $g = g_1 W$ dir.

$$M_g u = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 - bu_2 \\ bu_1 - au_2 \end{pmatrix}, \quad M_g v = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 - bv_2 \\ bv_1 - av_2 \end{pmatrix} \quad \text{şeklindedir.}$$

$$\begin{aligned} F(gu, gv) &= \left(\frac{[gu \ gv]}{\langle gu, gu \rangle} \right)^2 = \left(\frac{(au_1 - bu_2)(bv_1 - av_2) - (bu_1 - au_2)(av_1 - bv_2)}{(au_1 - bu_2)^2 - (bu_1 - au_2)^2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{abu_1v_1 - a^2u_1v_2 - b^2u_2v_1 + abu_2v_2 - abu_1v_1 + b^2u_1v_2 + a^2u_2v_1 - abu_2v_2}{a^2u_1u_1 - abu_1u_2 - abu_2u_1 + b^2u_2u_2 - b^2u_1u_1 + abu_1u_2 + abu_2u_1 - a^2u_2u_2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{u_2v_1(a^2 - b^2) - u_1v_2(a^2 - b^2)}{u_1u_1(a^2 - b^2) - u_2u_2(a^2 - b^2)} \right)^2 = \left(\frac{(a^2 - b^2)(u_1v_2 - u_2v_1)}{(a^2 - b^2)(u_1^2 - u_2^2)} \right)^2 = \left(\frac{[u \ v]}{\langle u, u \rangle} \right)^2 = F(u, v), \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $F(u, v)$ fonksiyonu $GLPSim^-(E_1^2)$ -invarianttır.

$F(u, v) = \left(\frac{[u \ v]}{\langle u, u \rangle} \right)^2$ fonksiyonu $GLPSim^+(E_1^2)$ -invariant ve $GLPSim^-(E_1^2)$ -invariant olduğundan $F(u, v) = \left(\frac{[u \ v]}{\langle u, u \rangle} \right)^2$ fonksiyonu $GLPSim(E_1^2)$ -invarianttır. ■

$u = u_1 + iu_2, v = v_1 + iv_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ matrisinin determinantını $[u \ v]$ ile gösterelim. Bu takdirde $[u \ v] = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ dir.

Teorem 2.3.2. $u, v \in \mathbb{H}^*$ olsun. Bu takdirde $v = M_z u$ olacak şekilde bir tek $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur ve M_z elemanının görüntüsü,

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle u, v \rangle}{Q(u)} & \frac{[u \ v]}{Q(u)} \\ \frac{[u \ v]}{Q(u)} & \frac{\langle u, v \rangle}{Q(u)} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$\det M_z \neq 0$ şeklindedir. Bu durumda $u \stackrel{GLPSim^+(E_1^2)}{\sim} v$ dir.

İspat: $v = M_z u$ olacak şekilde $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ 'nin mevcut olduğunu gösterelim. $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ 'nin elemanları $z = a + jb \in \mathbb{H}^*$ için $M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a^2 - b^2 \neq 0$ şeklindedir. Bu takdirde, öncelikle $z = a + jb \in \mathbb{H}^*$ için

$M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in GLPSim^+(E_1^2)$ ve $\det M_z \neq 0$ olan $a, b \in \mathbb{R}$ 'nin mevcut olduğunu gösterelim.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ olsun.}$$

$$v = M_z u \text{ eşitliğinden } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ ise } \begin{cases} v_1 = au_1 + bu_2 \\ v_2 = au_2 + bu_1 \end{cases} \text{ sistemi elde edilir.}$$

Bu sistemin çözümünden

$$a = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & u_2 \\ v_2 & u_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_1 \end{vmatrix}} = \frac{u_1 v_1 - u_2 v_2}{u_1^2 - u_2^2}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_1 \end{vmatrix}} = \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{u_1^2 - u_2^2} \text{ elde edilir. Ancak } Q(u) \neq 0 \text{ olduğundan}$$

$a, b \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Diğer taraftan,

$$a^2 - b^2 = \frac{(u_1 v_1 - u_2 v_2)^2 - (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2}{(u_1^2 - u_2^2)^2} = \frac{u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2 - u_1^2 v_2^2 - u_2^2 v_1^2 + 2u_1 v_1 u_2 v_2}{(u_1^2 - u_2^2)^2}$$

$$= \frac{u_1^2(v_1^2 - v_2^2) - u_2^2(v_1^2 - v_2^2)}{(u_1^2 - u_2^2)^2} = \frac{(u_1^2 - u_2^2)(v_1^2 - v_2^2)}{(u_1^2 - u_2^2)^2} = \frac{\langle v, v \rangle}{\langle u, u \rangle} = \frac{Q(v)}{Q(u)}, \text{ dir.}$$

$u, v \in \mathbb{H}^*$ olduğundan $Q(v) \neq 0$ ve $Q(u) \neq 0$ 'dır. Böylece $a^2 - b^2 \neq 0$ 'dır. Dolayısıyla $v = M_z u$ olan $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur.

$$v = M_z u \text{ eşitliğinden } M_z = vu^{-1} = \frac{\langle u, v \rangle}{Q(u)} + j \frac{[u, v]}{Q(u)} \text{ dan (9) eşitliği elde edilir.}$$

Şimdi $v = zu = M_z u$ eşitliğini sağlayan $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ 'nin tekliğini gösterelim. Varsayalım ki $v = M_z u$ eşitliğini sağlayan $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ mevcut olsun. Bu takdirde,

$$v = M_z u \text{ ve (1) eşitliğinden } M_z = vu^{-1} \text{ dir.} \quad (10)$$

Varsayalım, $v = M_w u$ olacak şekilde $w \neq z$ olan M_w mevcut olsun.

$$v = M_w u \text{ ve (1) eşitliğinden } M_w = vu^{-1} \text{ dir.} \quad (11)$$

(10), (11)'den $M_z = M_w$ 'dir. Bu durumda $z = w$ 'dir. Yani, varsayımla çelişir. Bu takdirde

$v = M_z u$ olan bir tek $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur.

Örnek 2.3.1. $u = (1, 2), v = (-2, 5) \in \mathbb{H}^*$ ve $M_z = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \in GLPSim^+(E_1^2)$ olsun. Açıkça $Q(u) = -3 \neq 0$ ve $Q(v) = -21 \neq 0$ 'dır. Buradan $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ olduğundan $u \stackrel{GLPSim^+(E_1^2)}{\sim} v$ 'dir.

Teorem 2.3.3. $u, v \in \mathbb{H}^*$ olsun. Bu takdirde $v = gu$ veya $v = hu$ olacak şekilde $g, h \in GLPSim(E_1^2)$ mevcuttur. Bu durumda, $g = M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ ve $h = M_z W \in GLPSim^-(E_1^2)$ 'dir. Burada g 'nin görüntüsü (3) deki gibi ve h 'nin görüntüsü ise

$$h = \begin{pmatrix} \frac{\langle \bar{u}, v \rangle}{Q(u)} & -\frac{[\bar{u} \ v]}{Q(u)} \\ \frac{[\bar{u} \ v]}{Q(u)} & -\frac{\langle \bar{u}, v \rangle}{Q(u)} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$deth \neq 0$ şeklindedir. Bu durumda $u \stackrel{GLPSim(E_1^2)}{\sim} v$ dir.

İspat: Öncelikle $v = gu$ olacak şekilde $g = M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ 'nin mevcut olduğu Teorem 2.3.2'de gösterilmiştir. Şimdi, $v = hu$ olacak şekilde $h \in GLPSim^-(E_1^2)$ 'nin mevcut olduğunu gösterelim. $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ 'nin elemanları

$$z = a + jb \in \mathbb{H}^* \text{ için } M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a^2 - b^2 \neq 0 \text{ olduğundan}$$

$h = M_z W = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} W \in GLPSim^-(E_1^2)$ ve $\det M_z W \neq 0$ olan $a, b \in \mathbb{R}$ 'nin mevcut olduğunu gösterelim. $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ olsun.

$$v = M_z W u \text{ eşitliğinden } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ şeklinde olur. Buradan}$$

$v_1 = au_1 - bu_2, v_2 = -au_2 + bu_1$ sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden,

$$a = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & -u_2 \\ v_2 & u_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & -u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{vmatrix}} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{u_1^2 - u_2^2}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ -u_2 & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & -u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{vmatrix}} = \frac{u_1 v_2 + u_2 v_1}{u_1^2 - u_2^2} \text{ elde edilir. Ancak } Q(u) \neq 0$$

olduğundan $a, b \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Diğer taraftan,

$$a^2 - b^2 = \frac{(u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 - (u_1 v_2 + u_2 v_1)^2}{(u_1^2 - u_2^2)^2} = \frac{u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + 2u_1 v_1 u_2 v_2 - u_1^2 v_2^2 - u_2^2 v_1^2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2}{(u_1^2 - u_2^2)^2} = \frac{u_1^2(v_1^2 - v_2^2) - u_2^2(v_1^2 - v_2^2)}{(u_1^2 - u_2^2)^2} = \frac{(u_1^2 - u_2^2)(v_1^2 - v_2^2)}{(u_1^2 - u_2^2)^2} = \frac{\langle v, v \rangle}{\langle u, u \rangle} = \frac{Q(v)}{Q(u)}, \text{ dir.}$$

$Q(u) \neq 0$ ve $Q(v) \neq 0$ olduğundan $a^2 - b^2 \neq 0$ 'dır. Dolayısıyla

$$v = M_z W u \in GLPSim^-(E_1^2) \text{ mevcuttur.}$$

$v = hu$ eşitliğinden $v = M_z W u = M_z \bar{u}$ dir. Buradan

$$h = M_z W = \begin{pmatrix} \frac{\langle \bar{u}, v \rangle}{Q(u)} & -\frac{[\bar{u} \ v]}{Q(u)} \\ \frac{[\bar{u} \ v]}{Q(u)} & -\frac{\langle \bar{u}, v \rangle}{Q(u)} \end{pmatrix}, \text{ dir.}$$

Not 2.3.1. $m \geq 1$, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ sistemi m -tane noktadan (hiperbolik sayıdan) oluşan bozulmamış bir sistem olsun. Not 1.4.3'den $p(U)$ ile bu bozulmamış sistemdeki iç çarpımı sıfırdan farklı olan ilk elemanın indisidir.

Önerme 2.3.1. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ bozulmamış bir sistem ve $H = GLPSim(E_1^2)$ olmak üzere $p(U)$ fonksiyonu H -invarianttır.

İspat:

(i) $H = GLPSim^+(E_1^2)$ olsun. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ bozulmamış bir sistem

olduğundan $\langle u_i, u_i \rangle = 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, k-1$, $\langle u_k, u_k \rangle \neq 0$, $\forall k = 1, 2, \dots, m$ olan

$k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $p(U) = k$ olsun. $\forall M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ için $p(M_z U) = p(U)$ olduğunu gösterelim.

$M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ olduğundan, $M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\det M_z \neq 0$ 'dır. Bu durumda $M_z U$ sistemi de bozulmamıştır. Gerçekten U bozulmamış olduğundan, $\exists u_s \in U$, $1 \leq s \leq m$,

$\langle u_s, u_s \rangle \neq 0$ 'dır. $M_z U$ 'yu alalım. Bu takdirde $M_z U = \{M_z u_1, M_z u_2, \dots, M_z u_m\}$ 'dir.

$\langle M_z u_s, M_z u_s \rangle = \det M_z \langle u_s, u_s \rangle \neq 0$ olduğundan $M_z u_s$ bozulmamıştır. $p(U) = k$ olduğundan tanımdan $\langle u_k, u_k \rangle \neq 0$ ve $\langle M_z u_k, M_z u_k \rangle \neq 0$ olup $p(M_z u_k) = k$ 'dir.

(ii) $H = GLPSim^-(E_1^2)$ olsun. Bu durumda ispat (i)'deki gibi yapılır.

Sonuç: Önerme 2.3.1'den $p(U)$ fonksiyonu, $GLPSim^+(E_1^2)$ -invarianttır.

Teorem 2. 3. 4. $m > 1$ için $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, E_1^2 de iki sistem ve $\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle \neq 0$, $\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle \neq 0$ olsun.

Bu takdirde

$$U \stackrel{GLPSim^+(E_1^2)}{\sim} V \Rightarrow \begin{cases} p(U) = p(V) \\ \frac{\langle u_{p(U)}, u_i \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{\langle v_{p(V)}, v_i \rangle}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \\ \frac{[u_{p(U)} u_i]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(V)} v_i]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \end{cases} \quad (13)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, p(U) - 1, p(U) + 1, \dots, m$

Tersine, varsayalım (13) eşitlikleri sağlansın. Bu durumda $v_i = M_z u_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ elemanının görüntüsü

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_{p(U)}, v_{p(U)} \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} & \frac{[u_{p(U)} v_{p(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} \\ \frac{[u_{p(U)} v_{p(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} & \frac{\langle u_{p(U)}, v_{p(U)} \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$\det M_z \neq 0$ 'dır.

İspat: $U \stackrel{GLPSim^+(M)}{\sim} V$ olsun. Bu takdirde $v_i = z u_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $z \in GLPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur. Teorem 2.3.1'den $\forall i = 1, 2, \dots, p(U) - 1, p(U) + 1, \dots, m$ için $\frac{\langle u_{p(U)}, u_i \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle}, \frac{[u_{p(U)} u_i]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle}$ ve $p(U)$ fonksiyonları $GLPSim^+(E_1^2)$ -invariant olduğundan (13)'teki eşitlikler sağlanır.

Tersine varsayalım ki (13)'teki eşitlikler sağlansın. $\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle \neq 0$ olduğundan Önerme 1.2.5'e göre $u_{p(U)}^{-1} \in \mathbb{H}^*$ mevcut olup $\forall i = 1, 2, \dots, p(U) - 1, p(U) + 1, \dots, m$ için

$$u_i u_{p(U)}^{-1} = \frac{\langle u_{p(U)}, u_i \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} + j \frac{[u_{p(U)} u_i]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle}, \text{dir.} \quad (15)$$

$\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle \neq 0$ olduğundan Önerme 1.2.5'e göre $v_{p(V)}^{-1} \in \mathbb{H}^*$ mevcut olup

$\forall i = 1, 2, \dots, p(U) - 1, p(U) + 1, \dots, m$ için

$$v_i v_{p(V)}^{-1} = \frac{\langle v_{p(V)}, v_i \rangle}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} + j \frac{[v_{p(V)} v_i]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle}, \text{dir.} \quad (16)$$

(13) eşitlikleri, (15) ve (16) eşitliklerinden

$$u_i u_{p(U)}^{-1} = v_i v_{p(V)}^{-1} \text{ elde edilir.} \quad (17)$$

Şimdi $z = v_{p(V)} u_{p(U)}^{-1} \in \mathbb{H}^*$ elemanını alalım.

$v_{p(V)} = v_{p(V)} (u_{p(U)}^{-1} u_{p(U)}) = (v_{p(V)} u_{p(U)}^{-1}) u_{p(U)}$ ve $p(U) = p(V)$ olduğundan

$v_{p(U)} = z u_{p(U)}$ 'dir.

(17) eşitliğinden $\forall i = 1, 2, \dots, p(U) - 1, p(U) + 1, \dots, m$ için

$v_{p(U)}(u_i u_{p(U)}^{-1}) = v_{p(U)}(v_i v_{p(V)}^{-1})$ elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak

$\forall i = 1, 2, \dots, p(U) - 1, p(U) + 1, \dots, m$ için

$$\begin{aligned} v_i &= (v_{p(U)} v_{p(U)}^{-1}) v_i = v_{p(U)} (v_{p(U)}^{-1} v_i) = v_{p(U)} (u_{p(U)}^{-1} u_i) = (v_{p(U)} u_{p(U)}^{-1}) u_i \\ &= z u_i \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\forall i = 1, 2, \dots, p(U) - 1, p(U) + 1, \dots, m$ ve $z = v_{p(U)} u_{p(U)}^{-1} \in \mathbb{H}^*$ için $v_i = z u_i$ elde edilmiş olur. (2) eşitliğinden $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $v_i = M_z u_i$ 'dir.

Önerme 1.2.5, Teorem 2.2.1, Önerme 2.2.1 ve $p(U) = p(V)$ eşitliğinden

$\det M_z = \frac{\langle v_{p(U)}, v_{p(U)} \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle}$ elde edilir. $\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle \neq 0$, $\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle \neq 0$ olduğundan

$\det M_z \neq 0$ ve Teorem 2.2.1 ile $M_z \in GLPSim^+(M)$ 'dir. Böylece $U \stackrel{GLPSim^+(E_1^2)}{\sim} V$ 'dir.

Şimdi, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $v_i = M_z u_i$ eşitliğini sağlayan $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ 'nin tekliğini ispatlayalım. Varsayalım $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $v_i = z u_i$ eşitliğini sağlayan

$M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ mevcut olsun. Bu takdirde (2) eşitliği ve Teorem 2.2.1'den $M_z = M_w$

olan bir tek $w \in \mathbb{H}^*$ mevcuttur. Buradan $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $v_i = M_w u_i$ elde edilir. (2)

eşitliğinden $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $v_i = w u_i$ elde edilir. $\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle \neq 0$ olduğundan

$v_{p(U)} = w u_{p(U)}$ eşitliğinden $w = v_{p(U)} u_{p(U)}^{-1} = z \in \mathbb{H}^*$ dır. Böylece teklik ispatlanmış olur.

Şimdi $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ 'nin görüntüsünü elde edelim. Önerme 1.4.3'den

$z = v_{p(U)} u_{p(U)}^{-1} = \frac{\langle u_{p(U)}, v_{p(U)} \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} + j \frac{[u_{p(U)} v_{p(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle}$ olduğundan M_z matrisi (5)'deki gibidir.

Örnek 2.3.2. $U = \{u_1 = (2, 2), u_2 = (1, -1), u_3 = (3, 7)\}$

$V = \{v_1 = (2, 2), v_2 = (3, -3), v_3 = (-1, 11)\}$ sistemlerini ve

$M_z = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in GLPSim^+(E_1^2)$ alalım. Gerçekten $M_z = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in GLPSim^+(E_1^2)$

için $\forall i = 1, 2, 3$ için $v_i = M_z u_i$ olduğundan $U \stackrel{GLPSim^+(E_1^2)}{\sim} V$ 'dir.

Örnek 2.3.3. $U = \{u_1 = (2, 2), u_2 = (1, -1), u_3 = (3, 7)\}$,

$V = \{v_1 = (2,2), v_2 = (3,-3), v_3 = (-1,11)\}$ sistemlerini alalım ve $U \stackrel{GLPSim^+(E_1^2)}{\sim} V$ olduğunu gösterelim. Bu sistemde $p(U) = p(V) = 3$ olduğundan

$\langle u_3, u_3 \rangle \neq 0$ ve $\langle v_3, v_3 \rangle \neq 0$ 'dır. (13)'den

$$p(U) = p(V) = 3,$$

$$\frac{\langle u_3, u_1 \rangle}{\langle u_3, u_3 \rangle} = \frac{\langle v_3, v_1 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} = \frac{1}{5}, \frac{[u_3 \ u_1]}{\langle u_3, u_3 \rangle} = \frac{[v_3 \ v_1]}{\langle v_3, v_3 \rangle} = \frac{1}{5},$$

$$\frac{\langle u_3, u_2 \rangle}{\langle u_3, u_3 \rangle} = \frac{\langle v_3, v_2 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} = \frac{-1}{4}, \frac{[u_3 \ u_2]}{\langle u_3, u_3 \rangle} = \frac{[v_3 \ v_2]}{\langle v_3, v_3 \rangle} = \frac{1}{4}$$

eşitlikleri sağlandığından $U \stackrel{GLPSim^+(E_1^2)}{\sim} V$ 'dir. (13) eşitliklerinin sağlandığı durumda, $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ elemanının görüntüsü (14) eşitliğinden elde edilir. Yani,

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_3, v_3 \rangle}{\langle u_3, u_3 \rangle} & \frac{[u_3 \ v_3]}{\langle u_3, u_3 \rangle} \\ \frac{[u_3 \ v_3]}{\langle u_3, u_3 \rangle} & \frac{\langle u_3, v_3 \rangle}{\langle u_3, u_3 \rangle} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } \det M_z = 5 \neq 0 \text{ 'dır.}$$

Not 2.3.2. E_1^2 de $1 = (1,0)$ elemanını düşünelim. Bu eleman matris biçiminde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ biçiminde yazılabilir. Bu takdirde $I \in GLPSim^+(E_1^2)$ ve $W \in GLPSim^-(E_1^2)$ olmak üzere,

$$1 = I.1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } 1 = W.1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{dir.}$$

Bundan dolayı $V = M_z U$ eşitliğini sağlayan $z \in GLPSim^+(E_1^2)$ 'nin teklik özelliği $GLPSim(E_1^2)$ için doğru değildir.

E_1^2 de $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ m -tane noktadan oluşan bir sistem olsun. Bu sistemin rankını $r(U)$ ile gösterelim. Açıkça $r(U)$, U 'nun bir $GLPSim(E_1^2)$ -invariantıdır.

Önerme 2.3.2. $r(U)$, $GLPSim(E_1^2)$ -invarianttır.

İspat: $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $m \geq 1$, $u_i \in E_1^2$ olsun.

$r(U)$ 'nin $GLPSim(E_1^2)$ -invariant olduğunu göstermek için $\forall F \in GLPSim(E_1^2)$ için $r(FU) = r(U)$ olduğunu gösterelim. $r(U) = k$ ve $0 \leq k \leq 2$ olsun. Bu takdirde U 'da k tane lineer bağımsız vektör vardır. Bunları $u_1, u_2, \dots, u_k$ ile gösterelim.

Bu durumda $\det Gr(u_1, u_2, \dots, u_k) = \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \langle u_1, u_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_k, u_1 \rangle & \dots & \langle u_k, u_k \rangle \end{vmatrix} \neq 0$ 'dır.

Şimdi $\forall F \in GLPSim(E_1^2)$ için $FU = \{Fu_1, Fu_2, \dots, Fu_m\}$ 'yi düşünelim.

$$\begin{aligned} \det Gr(Fu_1, Fu_2, \dots, Fu_k) &= \begin{vmatrix} \langle Fu_1, Fu_1 \rangle & \dots & \langle Fu_1, Fu_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Fu_k, Fu_1 \rangle & \dots & \langle Fu_k, Fu_k \rangle \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \det F \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \det F \langle u_1, u_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \det F \langle u_k, u_1 \rangle & \dots & \det F \langle u_k, u_k \rangle \end{vmatrix} = (\det F)^k \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \langle u_1, u_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_k, u_1 \rangle & \dots & \langle u_k, u_k \rangle \end{vmatrix} \\ &= (\det F)^k \det Gr(u_1, u_2, \dots, u_k) \neq 0 \text{ 'dır.} \end{aligned}$$

Yani FU 'da en az k tane lineer bağımsız vektör vardır. Yani $k \leq r(FU)$ 'dur.

Ancak $k < r(FU) = l$ ise $\det Gr(Fu_1, Fu_2, \dots, Fu_l) = (\det F)^l \det Gr(u_1, u_2, \dots, u_l) = 0$ 'dır. Bu durumda $r(U) = k < l$ olduğundan $\det Gr(u_1, u_2, \dots, u_l) = 0$ 'dır. Bu ise bir çelişkidir. Yani $r(FU) = k$ 'dır. Böylece $r(FU) = r(U)$ 'dur.

Teorem 2.3.5. $m > 1$ için $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ kümeleri E_1^2 de iki sistem, $\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle \neq 0, \langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle \neq 0$ ve $r(U) = r(V) = 1$ olsun. Bu takdirde

$$U \stackrel{GLPSim(E_1^2)}{\sim} V \Rightarrow \begin{cases} p(U) = p(V) \\ \frac{\langle u_{p(U)}, u_i \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{\langle v_{p(V)}, v_i \rangle}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \end{cases} \quad (18)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, p(U) - 1, p(U) + 1, \dots, m$$

Tersine, varsayalım (18) eşitlikleri sağlanırsın. Bu durumda $v_i = M_z u_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $M_z \in GLPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in GLPSim(E_1^2)$ elemanının görüntüsü (14) ifadesinde verilmiştir.

İspat: $U \stackrel{GLPSim(E_1^2)}{\sim} V$ olsun. Bu takdirde $v_i = M_z u_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $M_z \in GLPSim(E_1^2)$ mevcuttur. Teorem 2.3.1'den $\forall i = 1, 2, \dots, p(U) - 1, p(U) + 1, \dots, m$ için $\frac{\langle u_{p(U)}, u_i \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle}$ ve $p(U)$ fonksiyonları $GLPSim(E_1^2)$ -invariant olduğundan (18)'deki eşitlikler sağlanır.

Tersine, varsayalım ki (18)'deki eşitlikler sağlansın. $r(U) = r(V) = 1$ olduğundan

$$\forall i = 1, 2, \dots, p(U) - 1, p(U) + 1, \dots, m \text{ için } \frac{[u_{p(U)} u_i]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(U)} v_i]}{\langle v_{p(U)}, v_{p(U)} \rangle} = 0 \text{ dir.}$$

Bu durumda Teorem 2.3.4'deki (13) eşitlikleri sağlanır. Bu takdirde Teorem 2.3.4'den

$v_i = M_z u_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur. Ancak

$$M_z \in GLPSim^+(E_1^2) \subset GLPSim(E_1^2) \text{ olduğundan } U \stackrel{GLPSim(E_1^2)}{\sim} V \text{ elde edilir.}$$

$\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle \neq 0$ olduğundan Önerme 1.2.5'e göre $u_{p(U)}^{-1} \in \mathbb{H}$ mevcut olup

$$\forall i = 1, 2, \dots, p(U) - 1, p(U) + 1, \dots, m \text{ için } u_i u_{p(U)}^{-1} \in \mathbb{H}^* \text{ dir.}$$

Şimdi $z = v_{p(U)} u_{p(U)}^{-1} \in \mathbb{H}^*$ elemanını alalım. (2) eşitliğinden $V = zU = M_z U$ dir.

Teorem 2.3.4'den M_z 'nin görüntüsü (5)'deki gibidir.

Örnek 2.3.4. $U = \{u_1 = (1, -2), u_2 = (-2, 4)\}$

$$V = \{v_1 = (-4, -1), v_2 = (8, 2)\} \text{ iki sistem ve}$$

$$r(U) = r(V) = 1 \text{ olsun. Bu takdirde } U \stackrel{GLPSim(E_1^2)}{\sim} V \text{ olduğunu gösterelim.}$$

Bu sistemlerde,

$$p(U) = 1 \text{ olduğundan } \langle u_1, u_1 \rangle \neq 0, p(V) = 1 \text{ olduğundan } \langle v_1, v_1 \rangle \neq 0 \text{ dir. Buradan}$$

$$p(U) = p(V) = 1, \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = -2 \text{ olup } U \stackrel{GLPSim(E_1^2)}{\sim} V \text{ dir.}$$

Tersine, $p(U) = p(V) = 1, \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = -2$ ve $r(U) = r(V) = 1$ olsun. Bu

$$\text{durumda, } M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_1, v_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} & \frac{[u_1 v_1]}{\langle u_1, u_1 \rangle} \\ \frac{[u_1 v_1]}{\langle u_1, u_1 \rangle} & \frac{\langle u_1, v_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

Not 2.3.3. $m > 1$ durumunda E_1^2 de m tane noktadan oluşan bir sistem ve

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ olsun. Varsayalım $r(U) = 2$ olsun. Önceki bölümden Not 1.4.5'den $q(U)$ 'yu alalım.

Önerme 2.3.3. $q(U)$ sayısı U 'nun bir $GLPSim(E_1^2)$ -invariantıdır.

İspat: $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, m > 1$ için $r(U) = 2$ olsun. Bu takdirde U bozulmamış olduğundan $p(U) = k$ dir. Özel olarak $k = 1$ olsun.

Bu takdirde $\langle u_1, u_1 \rangle \neq 0$ olup u_1 lineer bağımsızdır. $r(U) = 2$ olduğundan U 'da u_l ,

$2 \leq l \leq m$ olan u_1 ile lineer bağımsız olan bir vektör mevcuttur. Bu durumda $q(U)$ 'nin tanımından $q(U) = l$ 'dir.

$F \in GLPSim(E_1^2)$ için $FU = \{Fu_1, Fu_2, \dots, Fu_m\}$ 'yi alalım. Önerme 2.3.1'den

$p(U) = p(FU)$ olduğundan FU 'da Fu_1 vektörü mevcut ve lineer bağımsızdır. Diğer taraftan $\det Gr(Fu_1, Fu_l) = (\det F)^2 \det Gr(u_1, u_l) \neq 0$ olduğundan Fu_1, Fu_l lineer bağımsızdır. Bu durumda $q(F(U)) = l$ olup $q(U) = q(FU)$ 'dir.

Teorem 2.3.6. $m > 1$ için $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ kümeleri E_1^2 de iki sistem $\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle \neq 0$, $\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle \neq 0$ ve $r(U) = r(V) = 2$ olsun.

Bu takdirde

$$U \stackrel{GLPSim(E_1^2)}{\sim} V \Rightarrow \begin{cases} p(U)=p(V) \\ q(U)=q(V) \\ \left(\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \right)^2 \\ \frac{\langle u_{p(U)}, u_i \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{\langle v_{p(V)}, v_i \rangle}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \\ \frac{[u_{p(U)} u_k]}{\langle u_{p(U)}, u_{q(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(V)} v_k]}{\langle v_{p(V)}, v_{q(V)} \rangle} \end{cases} \quad (19)$$

$\forall i, k = 1, 2, \dots, m; i \neq p(U), k \neq p(U), k \neq q(U)$ 'dir.

Tersine, varsayalım (19) eşitlikleri sağlansın. Bu durumda $v_i = M_z u_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $M_z \in GLPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in GLPSim(E_1^2)$ elemanın görüntüsü için aşağıdaki durumlar mevcuttur.

(i) $\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle}$ durumunda $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ ve M_z elemanının görüntüsü (14) ifadesinde verilmiştir.

(ii) $\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = -\frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle}$ durumunda $M_z \in GLPSim^-(E_1^2)$ ve M_z elemanının görüntüsü,

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle \overline{u_{p(U)}}, v_{p(U)} \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} & -\frac{[\overline{u_{p(U)}} v_{p(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} \\ \frac{[\overline{u_{p(U)}} v_{p(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} & -\frac{\langle \overline{u_{p(U)}}, v_{p(U)} \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} \end{pmatrix} \quad (20)$$

şeklindedir.

İspat: $U \stackrel{GLPSim(E_1^2)}{\sim} V$ olsun. Bu takdirde $v_i = M_z u_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $M_z \in GLPSim(E_1^2)$ mevcuttur.

Teorem 2.3.1'den $\forall i, k = 1, 2, \dots, m; k \neq p(U), k \neq q(U)$ için $p(U), q(U), \left(\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} \right)^2, \frac{\langle u_{p(U)}, u_i \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle}$ ve $\frac{[u_{p(U)} u_k]}{\langle u_{p(U)}, u_{q(U)} \rangle}$ fonksiyonları $GLPSim(E_1^2)$ -invariant olduğundan (19)'daki eşitlikler sağlanır.

Tersine, varsayalım ki (19)'daki eşitlikler sağlansın. $r(U) = r(V) = 2$ ve $p(U), q(U)$ sayılarının tanımı kullanılarak $[u_{p(U)} u_{q(U)}] \neq 0$ ve $[v_{p(V)} v_{q(V)}] \neq 0$ 'dir. Dahası

$\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle \neq 0, \langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle \neq 0$ olduğundan $\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} \neq 0$ ve

$\frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \neq 0$ 'dir. Buradan $\left(\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \right)^2$ eşitliğinden

$\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle}$ veya $\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = -\frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle}$ elde edilir.

(i) $\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle}$ durumunu ele alalım. Bu takdirde

$p(U) = p(V)$ ve $q(U) = q(V)$ eşitliklerinden $\forall i, k = 1, 2, \dots, m; k \neq p(U), k \neq q(U)$ için

$\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle}, \frac{\langle u_{p(U)}, u_i \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{\langle v_{p(V)}, v_i \rangle}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle}$ ve $\frac{[u_{p(U)} u_k]}{\langle u_{p(U)}, u_{q(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(V)} v_k]}{\langle v_{p(V)}, v_{q(V)} \rangle}$

eşitlikleri sağlanır.

$\forall k = 1, 2, \dots, m; k \neq p(U), k \neq q(U)$ için

$\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle}$ ve $\frac{[u_{p(U)} u_k]}{\langle u_{p(U)}, u_{q(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(V)} v_k]}{\langle v_{p(V)}, v_{q(V)} \rangle}$ eşitliklerinden

$\frac{[u_{p(U)} u_k]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(U)} v_k]}{\langle v_{p(U)}, v_{p(U)} \rangle} \forall k = 1, 2, \dots, m; k \neq p(U)$ elde edilir.

Böylece Teorem 2.3.4'deki (13) eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla Teorem 2.3.4'e göre

$v_i = M_z u_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$ olan bir tek $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur ve M_z 'nin görüntüsü (5) şeklindedir.

(ii) $\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = -\frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle}$ durumunu ele alalım. Bu takdirde

$p(U) = p(V)$ ve $q(U) = q(V)$ eşitliklerinden $\forall i, k = 1, 2, \dots, m; k \neq p(U), k \neq q(U)$ için

$$\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = -\frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \text{ ve } \frac{[u_{p(U)} u_k]}{\langle u_{p(U)}, u_{q(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(V)} v_k]}{\langle v_{p(V)}, v_{q(V)} \rangle} \text{ eşitliklerinden}$$

$$\frac{[u_{p(U)} u_k]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = -\frac{[v_{p(V)} v_k]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \text{ elde edilir.}$$

Bu son eşitlik $\frac{[v_{p(V)} v_k]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} = -\frac{[u_{p(U)} u_k]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{[Wu_{p(U)} Wu_k]}{\langle Wu_{p(U)}, Wu_{p(U)} \rangle}$ şeklinde yazılabilir. Ancak

$Wu_{p(U)} = \overline{u_{p(U)}}$ olduğundan $\frac{[v_{p(V)} v_k]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} = \frac{[Wu_{p(U)} Wu_k]}{\langle Wu_{p(U)}, Wu_{p(U)} \rangle}$ olarak yazılabilir. Bu durumda

teoremin ispatı (i) durumunun koşullarını sağlayan $WU = \{Wu_1, Wu_2, \dots, Wu_m\}$ ile

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistemlerinin benzerlik problemine dönüşür. Bu takdirde (i) durumundaki gibi $v_i = K_Z(Wu_i) = (K_Z W)u_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde

$K_Z \in GLPSim^+(E_1^2)$ matrisi vardır ve $M_Z = K_Z W$ matrisinin görüntüsü (20) şeklindeki gibi elde edilir. ■

Örnek 2.3.5. $U = \{u_1 = (3,1), u_2 = (1,3), u_3 = (-2, -10)\}$

$V = \{v_1 = (4,0), v_2 = (0, -4), v_3 = (2,14)\}$ iki sistem ve

$$r(U) = r(V) = 2 \text{ olsun. } M_Z = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \in GLPSim(E_1^2) \text{ alalım. Bu durumda}$$

$\forall i = 1, 2, 3$ için $v_i = M_Z u_i$ olduğundan $U \stackrel{GLPSim(E_1^2)}{\sim} V$ 'dir.

Örnek 2.3.6. $U = \{u_1 = (3,1), u_2 = (1,3), u_3 = (-2, -10)\}$

$V = \{v_1 = (4,0), v_2 = (0, -4), v_3 = (2,14)\}$ iki sistem ve

$r(U) = r(V) = 2$ olsun. Bu takdirde $U \stackrel{GLPSim(E_1^2)}{\sim} V$ olduğunu gösterelim.

Bu sistemlerde $p(U) = p(V) = 1$ olduğundan $\langle u_1, u_1 \rangle \neq 0$ ve $\langle v_1, v_1 \rangle \neq 0$ 'dir.

$q(U)$ 'nin tanımından $q(U) = 2$, $q(V)$ 'nin tanımından $q(V) = 2$ 'dir. Buradan

$q(U) = q(V) = 2$ 'dir. Teorem 2.3.6'daki (19) eşitlikleri

$$\left(\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \right)^2 = 1,$$

$$\frac{\langle u_{p(U)}, u_2 \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{\langle v_{p(V)}, v_2 \rangle}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} = 0,$$

$$\frac{\langle u_{p(U)}, u_3 \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{q(U)} \rangle} = \frac{\langle v_{p(V)}, v_3 \rangle}{\langle v_{p(V)}, v_{q(V)} \rangle} = \frac{-7}{2},$$

$$\frac{\langle u_{p(U)}, u_3 \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{\langle v_{p(V)}, v_3 \rangle}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} = \frac{1}{2} \text{ sağlanır. Teorem 2.3.6'daki (ii) eşitliği}$$

$$\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = - \frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \text{ sağlandığından } M_z \in GLPSim(E_1^2) \text{ elemanının görüntüsü}$$

$$(20) \text{ eşitliğinden elde edilir. Yani } M_z = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

2.4. Pseudo-Benzerlik ve Genelleştirilmiş Pseudo-Benzerlik Hareket Grupları

$G = LPSim^+(E_1^2), LPSim(E_1^2), GLPSim^+(E_1^2), GLPSim(E_1^2)$ olsun. $G \times Tr(2)$ ile E_1^2 nin tüm ötelemeleri ve G 'nin elemanlarıyla üretilen E_1^2 nin tüm dönüşümleri grubunu gösterelim.

$LPSim^+(E_1^2) \times Tr(2)$ grubunu $PSim^+(E_1^2)$ ile gösterelim.

$$PSim^+(E_1^2) = \{F: E_1^2 \rightarrow E_1^2 | Fx = gx + b, g \in LPSim^+(E_1^2), \forall x \in E_1^2, b \in E_1^2\} \text{ dir.}$$

$LPSim(E_1^2) \times Tr(2)$ grubunu $PSim(E_1^2)$ ile gösterelim.

$$PSim(E_1^2) = \{F: E_1^2 \rightarrow E_1^2 | Fx = gx + b, g \in LPSim(E_1^2), \forall x \in E_1^2, b \in E_1^2\} \text{ dir.}$$

$GLPSim^+(E_1^2) \times Tr(2)$ grubunu $GPSim^+(E_1^2)$ ile gösterelim.

$$GPSim^+(E_1^2) = \{F: E_1^2 \rightarrow E_1^2 | Fx = gx + b, g \in GLPSim^+(E_1^2), \forall x \in E_1^2, b \in E_1^2\} \text{ dir.}$$

$GLPSim(E_1^2) \times Tr(2)$ grubunu $GPSim(E_1^2)$ ile gösterelim.

$$GPSim(E_1^2) = \{F: E_1^2 \rightarrow E_1^2 | Fx = gx + b, g \in GLPSim(E_1^2), \forall x \in E_1^2, b \in E_1^2\} \text{ dir.}$$

Önerme 2.4.1. $u_1, v_1 \in \mathbb{H}$ olmak üzere $v_1 = Fu_1$ olacak şekilde $F \in G \times Tr(2)$ mevcuttur.

İspat: Açıktır.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}_m = \{1, 2, \dots, m\}$ 'dir. $z \in \mathbb{H}$ olsun. $\forall j \in \mathbb{N}_m$ için $y_j = z$ olan $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ sıralısını $z1_m$ ile gösterelim. Yani, $z1_m = \underbrace{\{z, z, \dots, z\}}_{m-tane}$ 'dir.

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \in E_1^2$ olsun. Bu durumda

$U - u_m 1_m = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} - \{u_m, u_m, \dots, u_m\} = \{u_1 - u_m, u_2 - u_m, \dots, u_{m-1} - u_m, 0\}$ 'dir.

Önerme 2.4.2. $G = LPSim^+(E_1^2), LPSim(E_1^2), GLPSim^+(E_1^2), GLPSim(E_1^2)$ olsun.

$m > 1$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \in E_1^2$ olmak üzere,

$U \stackrel{G \times Tr(2)}{\sim} V \Leftrightarrow U - u_m 1_m \stackrel{G}{\sim} V - v_m 1_m$ 'dir.

İspat: $\Rightarrow$: Varsayalım ki $U \stackrel{G \times Tr(2)}{\sim} V$ olsun. Bu takdirde $\forall i \in \mathbb{N}_m$ için $v_i = gu_i + b$ olacak şekilde $g \in G$ ve $b \in E_1^2$ mevcuttur. Özel olarak $i = m$ için $v_m = gu_m + b$ olduğundan $b = v_m - gu_m$ 'dir. Bu durumda, $v_i = gu_i + b$ eşitliğinden

$v_i = gu_i + b = gu_i + (v_m - gu_m), \forall i \in \mathbb{N}_m$ 'dir. Bu eşitlikten

$v_i - v_m = gu_i - gu_m = g(u_i - u_m), \forall i \in \mathbb{N}_m$ 'dir. Yani

$\{u_1 - u_m, u_2 - u_m, \dots, u_{m-1} - u_m, 0\} \stackrel{G}{\sim} \{v_1 - v_m, v_2 - v_m, \dots, v_{m-1} - v_m, 0\}$ olur.

Bu da $U - u_m 1_m \stackrel{G}{\sim} V - v_m 1_m$ demektir.

$\Leftarrow$: Varsayalım $U - u_m 1_m \stackrel{G}{\sim} V - v_m 1_m$ olsun. Bu takdirde

$\{u_1 - u_m, u_2 - u_m, \dots, u_{m-1} - u_m, 0\} \stackrel{G}{\sim} \{v_1 - v_m, v_2 - v_m, \dots, v_{m-1} - v_m, 0\}$ 'dir.

Bu takdirde $v_i - v_m = g(u_i - u_m), \forall i \in \mathbb{N}_m$ olacak şekilde $g \in G$ mevcuttur.

$b = v_m - gu_m$ olsun. Bu eşitlikten $v_m = gu_m + b$ 'dır. O zaman $v_i - v_m = g(u_i - u_m)$ ve $v_m = gu_m + b$ eşitliklerinden $v_i = gu_i + b, \forall i \in \mathbb{N}_m$ elde edilir. Böylece $U \stackrel{G \times Tr(2)}{\sim} V$ olur.

Sonuç 2.4.1. $G = LPSim^+(E_1^2), LPSim(E_1^2), GLPSim^+(E_1^2), GLPSim(E_1^2)$ olsun.

$m > 1$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \in E_1^2$ olmak üzere,

$U \stackrel{G \times Tr(2)}{\sim} V \Leftrightarrow \{u_1 - u_m, u_2 - u_m, \dots, u_{m-1} - u_m\} \stackrel{G}{\sim} \{v_1 - v_m, v_2 - v_m, \dots, v_{m-1} - v_m\}$
dir.

Teorem 2.4.1. $m > 1$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistemleri E_1^2 de iki tane m -sıralısı ve $Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m) \neq 0, Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$U \stackrel{PSim^+(E_1^2)}{\sim} V \Rightarrow \begin{cases} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ sgn(Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)) = sgn(Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)) \\ \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, u_i - u_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{\langle v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m, v_i - v_m \rangle}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_i - u_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_i - v_m]}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \end{cases} \quad (21)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, p(U - u_m 1_m) - 1, p(U - u_m 1_m) + 1, \dots, m - 1$

Tersine, (21)'deki eşitlikler sağlansın. Bu durumda, $v_i = gu_i + b, \forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $g \in LPSim^+(E_1^2)$ ve bir tek $b \in E_1^2$ mevcuttur. Dahası $g \in LPSim^+(E_1^2)$ ve $b \in E_1^2$ nin görüntüleri

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$b = v_m - gu_m$ şeklindedir.

İspat: Önerme 2.4.2 ve Teorem 1.4.3'den elde edilir.

Örnek 2.4.1. $m = 3$ için

$U = \{u_1 = (1,2), u_2 = (2,3), u_3 = (4,4)\}$ ve

$V = \{v_1 = (1,3), v_2 = (2,4), v_3 = (5,4)\}$ olsun. Bu takdirde

$U - u_3 1_3 = \{u_1 - u_3 = (-3, -2), u_2 - u_3 = (-2, -1)\}$ ve

$V - v_3 1_3 = \{v_1 - v_3 = (-4, -1), v_2 - v_3 = (-3, 0)\}$ olup

$Q(u_1 - u_3) \neq 0$ ve $Q(v_1 - v_3) \neq 0$ 'dir.

$U \stackrel{PSim^+(E_1^2)}{\sim} V$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır. Gerçekten $U \stackrel{PSim^+(E_1^2)}{\sim} V$ olsun.

Bu takdirde

$$p(U - u_3 1_3) = p(V - v_3 1_3) = 1,$$

$$\text{sgn}(Q(u_1 - u_3)) = \text{sgn}(Q(v_1 - v_3)) = 1,$$

$$\frac{\langle u_1 - u_3, u_2 - u_3 \rangle}{Q(u_1 - u_3)} = \frac{\langle v_1 - v_3, v_2 - v_3 \rangle}{Q(u_1 - u_3)} = \frac{4}{5},$$

$$\frac{[u_1 - u_3 \ u_2 - u_3]}{Q(u_1 - u_3)} = \frac{[v_1 - v_3 \ v_2 - v_3]}{Q(u_1 - u_3)} = \frac{-1}{5}, \text{dir.}$$

Tersine, $U - u_3 1_3 = \{u_1 - u_3 = (-3, -2), u_2 - u_3 = (-2, -1)\}$ ve

$V - v_3 1_3 = \{v_1 - v_3 = (-4, -1), v_2 - v_3 = (-3, 0)\}$ alalım. Bu takdirde

$Q(u_1 - u_3) \neq 0$, $Q(v_1 - v_3) \neq 0$ ve (21) eşitlikleri sağlandığından

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_1 - u_3, v_1 - v_3 \rangle}{Q(u_1 - u_3)} & \frac{[u_1 - u_3 \ v_1 - v_3]}{Q(u_1 - u_3)} \\ \frac{[u_1 - u_3 \ v_1 - v_3]}{Q(u_1 - u_3)} & \frac{\langle u_1 - u_3, v_1 - v_3 \rangle}{Q(u_1 - u_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } b = v_3 - g u_3 \text{ 'den}$$

$b = (1, 0)$ elde edilir. Dolayısıyla $U \stackrel{PSim^+(E_1^2)}{\sim} V$ 'dir.

Teorem 2. 4. 2. $m > 1$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistemleri E_1^2 de iki tane m -sıralısı $Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m) \neq 0$, $Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m) \neq 0$ ve

$\text{rank}(U - u_m 1_m) = \text{rank}(V - v_m 1_m) = 1$ olsun. Bu durumda

$$U \stackrel{PSim(E_1^2)}{\sim} V \Rightarrow \begin{cases} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ \text{sgn}(Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)) = \text{sgn}(Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)) \\ \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, u_i - u_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{\langle v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m, v_i - v_m \rangle}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \end{cases} \quad (22)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, p(U - u_m 1_m) - 1, p(U - u_m 1_m) + 1, \dots, m - 1$$

Tersine, (22)'deki eşitlikler sağlansın. Bu durumda, $v_i = g u_i + b$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $g \in LPSim(E_1^2)$ ve bir tek $b \in E_1^2$ mevcuttur. Dahası $g \in LPSim(E_1^2)$ ve

$b \in E_1^2$ nin görüntüsü

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \ v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \ v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$b = v_m - gu_m$ şeklindedir.

İspat : Önerme 2.4.2 ve Teorem 1.4.4'den elde edilir.

Örnek 2. 4. 2. $m = 4$ için

$U = \{u_1 = (2, -1), u_2 = (0, 5), u_3 = (-1, 8), u_4 = (1, 2)\}$ ve

$V = \{v_1 = (7, 0), v_2 = (7, 16), v_3 = (7, 24), v_4 = (7, 8)\}$ olsun. Bu takdirde

$U - u_4 1_4 = \{u_1 - u_4 = (1, -3), u_2 - u_4 = (-1, 3), u_3 - u_4 = (-2, 6)\}$ ve

$V - v_4 1_4 = \{v_1 - v_4 = (0, -8), v_2 - v_4 = (0, 8), v_3 - v_4 = (0, 16)\}$ olup

$Q(u_1 - u_4) \neq 0$ ve $Q(v_1 - v_4) \neq 0$ ve $rank(U - u_4 1_4) = rank(V - v_4 1_4) = 1$ 'dir.

$U \stackrel{PSim(E_1^2)}{\sim} V$ ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır. Gerçekten $U \stackrel{PSim(E_1^2)}{\sim} V$ olsun. Bu takdirde

$$p(U - u_4 1_4) = p(V - v_4 1_4) = 1,$$

$$sgn(Q(u_1 - u_4)) = sgn(Q(v_1 - v_4)) = -1,$$

$$\frac{\langle u_1 - u_4, u_2 - u_4 \rangle}{Q(u_1 - u_4)} = \frac{\langle v_1 - v_4, v_2 - v_4 \rangle}{Q(v_1 - v_4)} = 0,$$

$$\frac{\langle u_1 - u_4, u_3 - u_4 \rangle}{Q(u_1 - u_4)} = \frac{\langle v_1 - v_4, v_3 - v_4 \rangle}{Q(v_1 - v_4)} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{\langle u_1 - u_4, u_1 - u_4 \rangle}{Q(u_1 - u_4)} = \frac{\langle v_1 - v_4, v_1 - v_4 \rangle}{Q(v_1 - v_4)} = 1 \text{ 'dir.}$$

Tersine, $U - u_4 1_4 = \{u_1 - u_4 = (1, -3), u_2 - u_4 = (-1, 3), u_3 - u_4 = (-2, 6)\}$ ve

$V - v_4 1_4 = \{v_1 - v_4 = (0, -8), v_2 - v_4 = (0, 8), v_3 - v_4 = (0, 16)\}$ olsun. Bu takdirde $Q(u_1 - u_4) \neq 0$, $Q(v_1 - v_4) \neq 0$ ve (22) eşitlikleri sağlandığından

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_1 - u_4, v_1 - v_4 \rangle}{Q(u_1 - u_4)} & \frac{[u_1 - u_4 \ v_1 - v_4]}{Q(u_1 - u_4)} \\ \frac{[u_1 - u_4 \ v_1 - v_4]}{Q(u_1 - u_4)} & \frac{\langle u_1 - u_4, v_1 - v_4 \rangle}{Q(u_1 - u_4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ ve } b = v_4 - gu_4 \text{ 'den}$$

$b = (2, 1)$ elde edilir. Dolayısıyla $U \stackrel{PSim(E_1^2)}{\sim} V$ 'dir.

Teorem 2.4.3. $m > 1$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistemleri E_1^2 de iki tane m -sıralısı $Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m) \neq 0$, $Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m) \neq 0$ ve

$rank(U - u_m 1_m) = rank(V - v_m 1_m) = 2$ olsun. Bu durumda

$U \stackrel{PSim(E_1^2)}{\sim} V$ ise

$$\left\{ \begin{array}{l} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ q(U - u_m 1_m) = q(V - v_m 1_m) \\ sgn(Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)) = sgn(Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)) \\ \left(\frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_{q(U-u_m 1_m)} - u_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \right)^2 = \left(\frac{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_{q(V-v_m 1_m)} - v_m]}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \right)^2 \\ \frac{< u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, u_i - u_m >}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{< v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m, v_i - v_m >}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_k - u_m]}{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_{q(U-u_m 1_m)} - u_m]} = \frac{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_k - v_m]}{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_{q(V-v_m 1_m)} - v_m]} \end{array} \right. \quad (23)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, p(U - u_m 1_m) - 1, p(U - u_m 1_m) + 1, \dots, m - 1, \forall k = 1, 2, \dots, m - 1,$

$k \neq p(U - u_m 1_m), k \neq q(U - u_m 1_m).$

Tersine, (23) eşitlikleri sağlansın. Bu takdirde $v_i = M_1 u_i + b_1$ ve $v_i = M_2 u_i + b_2$ olacak şekilde $M_1, M_2 \in LPSim(E_1^2)$ ve $b_1, b_2 \in E_1^2$ mevcut ve

$$(i) \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_{q(U-u_m 1_m)} - u_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_{q(V-v_m 1_m)} - v_m]}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \text{ durumunda } M_1 \in$$

$LPSim^+(E_1^2)$ ve M_1 'in görüntüsü Teorem 2.4.1'deki gibidir. $b_1 \in E_1^2$ nin görüntüsü de Teorem 2.4.1'deki gibidir.

$$(ii) \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_{q(U-u_m 1_m)} - u_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = - \frac{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_{q(V-v_m 1_m)} - v_m]}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \text{ durumunda ise}$$

$M_2 = M_1 \cdot W \in LPSim^-(E_1^2)$ ve $b \in E_1^2$ nin görüntüleri

$$M_2 = \left(\begin{array}{cc} \frac{< u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m >}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & - \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & - \frac{< u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m >}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \end{array} \right) \text{ ve}$$

$b_2 = v_m - M_2 u_m$ şeklindedir.

İspat: Önerme 2.4.2 ve Teorem 1.4.5'den elde edilir.

Örnek 2.4.3. $m = 3$ için

$U = \{u_1 = (3, 2), u_2 = (1, 3), u_3 = (2, -1)\}$ ve

$V = \{v_1 = (9,6), v_2 = (6,6), v_3 = (4, -1)\}$ olsun. Bu takdirde

$U - u_3 1_3 = \{u_1 - u_3 = (1,3), u_2 - u_3 = (-1,4)\}$ ve

$V - v_3 1_3 = \{v_1 - v_3 = (5,7), v_2 - v_3 = (2,7)\}$ olup

$Q(u_1 - u_3) \neq 0, Q(v_1 - v_3) \neq 0$ ve $rank(U - u_3 1_3) = rank(V - v_3 1_3) = 2$ 'dir.

$U \stackrel{PSim(E_1^2)}{\sim} V$ ise teoremdaki koşullar sağlanır. Gerçekten,

$$p(U - u_3 1_3) = p(V - v_3 1_3) = 1,$$

$$q(U - u_3 1_3) = q(V - v_3 1_3) = 2,$$

$$sgn(Q(u_1 - u_3)) = sgn(Q(v_1 - v_3)) = -1,$$

$$\left(\frac{[u_1 - u_3 \quad u_2 - u_3]}{Q(u_1 - u_3)} \right)^2 = \left(\frac{[v_1 - v_3 \quad v_2 - v_3]}{Q(v_1 - v_3)} \right)^2 = \frac{49}{64},$$

$$\frac{\langle u_1 - u_3, u_2 - u_3 \rangle}{Q(u_1 - u_3)} = \frac{\langle v_1 - v_3, v_2 - v_3 \rangle}{Q(v_1 - v_3)} = \frac{13}{8},$$

$$\frac{[u_1 - u_3 \quad u_2 - u_3]}{[u_1 - u_3 \quad u_2 - u_3]} = \frac{[v_1 - v_3 \quad v_2 - v_3]}{[v_1 - v_3 \quad v_2 - v_3]} = 1 \text{ 'dir.}$$

Tersine, $U - u_3 1_3 = \{u_1 - u_3 = (1,3), u_2 - u_3 = (-1,4)\}$ ve

$V - v_3 1_3 = \{v_1 - v_3 = (5,7), v_2 - v_3 = (2,7)\}$ alalım. Bu takdirde

$Q(u_1 - u_3) \neq 0, Q(v_1 - v_3) \neq 0$ ve (23) eşitlikleri sağlandığından Teorem 2.4.3'e göre

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_1 - u_3, v_1 - v_3 \rangle}{Q(u_1 - u_3)} & \frac{[u_1 - u_3 \quad v_1 - v_3]}{Q(u_1 - u_3)} \\ \frac{[u_1 - u_3 \quad v_1 - v_3]}{Q(u_1 - u_3)} & \frac{\langle u_1 - u_3, v_1 - v_3 \rangle}{Q(u_1 - u_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } b_1 = v_3 - gu_3 = (1, -1) \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyla $U \stackrel{PSim(E_1^2)}{\sim} V$ 'dir.

Örnek 2.4.4. $m = 3$ için

$U = \{u_1 = (3,2), u_2 = (1,3), u_3 = (2, -1)\}$ ve

$V = \{v_1 = (6, -2), v_2 = (1, -6), v_3 = (7,3)\}$ olsun. Bu takdirde

$U - u_3 1_3 = \{u_1 - u_3 = (1,3), u_2 - u_3 = (-1,4)\}$ ve

$V - v_3 1_3 = \{v_1 - v_3 = (-1, -5), v_2 - v_3 = (-6, -9)\}$ olup

$Q(u_1 - u_3) \neq 0$, $Q(v_1 - v_3) \neq 0$ ve $\text{rank}(U - u_3 1_3) = \text{rank}(V - v_3 1_3) = 2$ 'dir.

$U \stackrel{PSim(E_1^2)}{\sim} V$ ise Teorem 2.4.3'deki koşullar sağlanır. Gerçekten

$$p(U - u_3 1_3) = p(V - v_3 1_3) = 1,$$

$$q(U - u_3 1_3) = q(V - v_3 1_3) = 2,$$

$$\text{sgn}(Q(u_1 - u_3)) = \text{sgn}(Q(v_1 - v_3)) = -1,$$

$$\left(\frac{[u_1 - u_3 \quad u_2 - u_3]}{Q(u_1 - u_3)} \right)^2 = \left(\frac{[v_1 - v_3 \quad v_2 - v_3]}{Q(v_1 - v_3)} \right)^2 = \left(\frac{-7}{8} \right)^2 = \left(\frac{7}{8} \right)^2 = \frac{49}{64},$$

$$\frac{\langle u_1 - u_3, u_2 - u_3 \rangle}{Q(u_1 - u_3)} = \frac{\langle v_1 - v_3, v_2 - v_3 \rangle}{Q(v_1 - v_3)} = \frac{13}{8},$$

$$\frac{[u_1 - u_3 \quad u_2 - u_3]}{[u_1 - u_3 \quad u_2 - u_3]} = \frac{[v_1 - v_3 \quad v_2 - v_3]}{[v_1 - v_3 \quad v_2 - v_3]} = 1 \text{ 'dir.}$$

Tersine, $U - u_3 1_3 = \{u_1 - u_3 = (1, 3), u_2 - u_3 = (-1, 4)\}$ ve

$V - v_3 1_3 = \{v_1 - v_3 = (-1, -5), v_2 - v_3 = (-6, -9)\}$ alalım. Bu takdirde

$Q(u_1 - u_3) \neq 0$, $Q(v_1 - v_3) \neq 0$ ve (23) eşitlikleri sağlandığından

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{\langle \overline{u_1 - u_3}, v_1 - v_3 \rangle}{Q(u_1 - u_3)} & -\frac{[\overline{u_1 - u_3} \quad v_1 - v_3]}{Q(u_1 - u_3)} \\ \frac{\langle \overline{u_1 - u_3}, v_1 - v_3 \rangle}{Q(u_1 - u_3)} & -\frac{[\overline{u_1 - u_3} \quad v_1 - v_3]}{Q(u_1 - u_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ ve } b_2 = v_3 - M_2 u_3 = (2, -1) \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyla $U \stackrel{PSim(E_1^2)}{\sim} V$ 'dir.

Teorem 2.4.4. $m > 1$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistemleri E_1^2 de iki tane m -sıralısı ve $Q(u_{p(U - u_m 1_m)} - u_m) \neq 0$, $Q(v_{p(V - v_m 1_m)} - v_m) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$U \stackrel{GPSim^+(E_1^2)}{\sim} V \Rightarrow \begin{cases} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ \frac{\langle u_{p(U - u_m 1_m)} - u_m, u_i - u_m \rangle}{Q(u_{p(U - u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{\langle v_{p(V - v_m 1_m)} - v_m, v_i - v_m \rangle}{Q(v_{p(V - v_m 1_m)} - v_m)} \\ \frac{[u_{p(U - u_m 1_m)} - u_m \quad u_i - u_m]}{Q(u_{p(U - u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{[v_{p(V - v_m 1_m)} - v_m \quad v_i - v_m]}{Q(v_{p(V - v_m 1_m)} - v_m)} \end{cases} \quad (24)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, p(U - u_m 1_m) - 1, p(U - u_m 1_m) + 1, \dots, m - 1$

Tersine, (24)'deki eşitlikler sağlansın. Bu durumda, $v_i = gu_i + b$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $g \in GLPSim^+(E_1^2)$ ve bir tek $b \in E_1^2$ mevcuttur. Dahası $g \in GLPSim^+(E_1^2)$ ve $b \in E_1^2$ nin görüntüleri

$$g = \left(\begin{array}{cc} \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \end{array} \right) \text{ ve}$$

$b = v_m - gu_m$ şeklindedir.

İspat: Önerme 2.4.2. ve Teorem 2.3.4'den elde edilir.

Örnek 2.4.5. $m = 4$ için

$U = \{u_1 = (2, -1), u_2 = (1, 3), u_3 = (-2, 0), u_4 = (2, 3)\}$ ve

$V = \{v_1 = (7, 0), v_2 = (8, 11), v_3 = (-4, -1), v_4 = (11, 12)\}$ olsun. Bu takdirde

$U - u_4 1_4 = \{u_1 - u_4 = (0, -4), u_2 - u_4 = (-1, 0), u_3 - u_4 = (-4, -3)\}$ ve

$V - v_4 1_4 = \{v_1 - v_4 = (-4, -12), v_2 - v_4 = (-3, -1), v_3 - v_4 = (-15, -13)\}$ olup

$Q(u_1 - u_4) \neq 0$ ve $Q(v_1 - v_4) \neq 0$ 'dir.

$U \stackrel{GLPSim^+(E_1^2)}{\sim} V$ ise Teorem 2.4.4'deki koşullar sağlanır. Gerçekten,

$$p(U - u_4 1_4) = p(V - v_4 1_4) = 1,$$

$$\frac{\langle u_1 - u_4, u_2 - u_4 \rangle}{Q(u_1 - u_4)} = \frac{\langle v_1 - v_4, v_2 - v_4 \rangle}{Q(v_1 - v_4)} = 0,$$

$$\frac{\langle u_1 - u_4, u_3 - u_4 \rangle}{Q(u_1 - u_4)} = \frac{\langle v_1 - v_4, v_3 - v_4 \rangle}{Q(v_1 - v_4)} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{\langle u_1 - u_4, u_1 - u_4 \rangle}{Q(u_1 - u_4)} = \frac{\langle v_1 - v_4, v_1 - v_4 \rangle}{Q(v_1 - v_4)} = 1,$$

$$\frac{[u_1 - u_4 \quad u_2 - u_4]}{Q(u_1 - u_4)} = \frac{[v_1 - v_4 \quad v_2 - v_4]}{Q(v_1 - v_4)} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{[u_1 - u_4 \quad u_3 - u_4]}{Q(u_1 - u_4)} = \frac{[v_1 - v_4 \quad v_3 - v_4]}{Q(v_1 - v_4)} = -1,$$

$$\frac{[u_1 - u_4 \quad u_1 - u_4]}{Q(u_1 - u_4)} = \frac{[v_1 - v_4 \quad v_1 - v_4]}{Q(v_1 - v_4)} = 0 \text{ 'dir.}$$

Tersine, $U - u_4 1_4 = \{u_1 - u_4 = (0, -4), u_2 - u_4 = (-1, 0), u_3 - u_4 = (-4, -3)\}$ ve

$$V - v_4 1_4 = \{v_1 - v_4 = (-4, -12), v_2 - v_4 = (-3, -1), v_3 - v_4 = (-15, -13)\}$$

alalım. Bu takdirde $Q(u_1 - u_4) \neq 0$, $Q(v_1 - v_4) \neq 0$ ve (24) eşitlikleri sağlandığından

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_1 - u_4, v_1 - v_4 \rangle}{Q(u_1 - u_4)} & \frac{[u_1 - u_4 \ v_1 - v_4]}{Q(u_1 - u_4)} \\ \frac{[u_1 - u_4 \ v_1 - v_4]}{Q(u_1 - u_4)} & \frac{\langle u_1 - u_4, v_1 - v_4 \rangle}{Q(u_1 - u_4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ ve } b = v_4 - gu_4 = (2, 1) \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyla $U \stackrel{GPSim^+(E_1^2)}{\sim} V$ 'dir.

Teorem 2.4.5. $m > 1$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistemleri E_1^2 de iki tane m -sıralısı $Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m) \neq 0$, $Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m) \neq 0$ ve $rank(U - u_m 1_m) = rank(V - v_m 1_m) = 1$ olsun. Bu durumda

$$U \stackrel{GPSim(E_1^2)}{\sim} V \Rightarrow \begin{cases} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, u_i - u_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{\langle v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m, v_i - v_m \rangle}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \end{cases} \quad (25)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, p(U - u_m 1_m) - 1, p(U - u_m 1_m) + 1, \dots, m - 1$$

Tersine, (25)'deki eşitlikler sağlansın. Bu durumda, $v_i = gu_i + b$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $g \in GLPSim(E_1^2)$ ve bir tek $b \in E_1^2$ mevcuttur. Dahası $g \in GLPSim(E_1^2)$ ve $b \in E_1^2$ nin görüntüleri

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \ v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \ v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$b = v_m - gu_m$ şeklindedir.

İspat: Önerme 2.4.2. ve Teorem 2.3.5'den elde edilir.

Örnek 2.4.6. $m = 3$ için

$$U = \{u_1 = (1, 0), u_2 = (-3, 6), u_3 = (-1, 3)\} \text{ ve}$$

$$V = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (-1, 9), v_3 = (0, 5)\} \text{ olsun. Bu takdirde}$$

$$U - u_3 1_3 = \{u_1 - u_3 = (2, -3), u_2 - u_3 = (-2, 3)\} \text{ ve}$$

$$V - v_3 1_3 = \{v_1 - v_3 = (1, -4), v_2 - v_3 = (-1, 4)\} \text{ olup}$$

$Q(u_1 - u_3) \neq 0, Q(v_1 - v_3) \neq 0$ ve $rank(U - u_3 1_3) = rank(V - v_3 1_3) = 1$ 'dir.

$U \stackrel{GPSim(E_1^2)}{\sim} V$ ise Teorem 2.4.5'deki şartlar sağlanır. Gerçekten,

$$p(U - u_3 1_3) = p(V - v_3 1_3) = 1,$$

$$\frac{\langle u_1 - u_3, u_2 - u_3 \rangle}{Q(u_1 - u_3)} = \frac{\langle v_1 - v_3, v_2 - v_3 \rangle}{Q(u_1 - u_3)} = -1 \text{ 'dir.}$$

Tersine, $U - u_3 1_3 = \{u_1 - u_3 = (2, -3), u_2 - u_3 = (-2, 3)\}$ ve

$V - v_3 1_3 = \{v_1 - v_3 = (1, -4), v_2 - v_3 = (-1, 4)\}$ alalım. Bu takdirde

$Q(u_1 - u_3) \neq 0, Q(v_1 - v_3) \neq 0$ ve (25) eşitlikleri sağlandığından

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_1 - u_3, v_1 - v_3 \rangle}{Q(u_1 - u_3)} & \frac{[u_1 - u_3 \ v_1 - v_3]}{Q(u_1 - u_3)} \\ \frac{[u_1 - u_3 \ v_1 - v_3]}{Q(u_1 - u_3)} & \frac{\langle u_1 - u_3, v_1 - v_3 \rangle}{Q(u_1 - u_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } b = v_3 - gu_3 = (-1, 0) \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyla $U \stackrel{GPSim(E_1^2)}{\sim} V$ 'dir.

Teorem 2.4.6. $m > 1$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistemleri E_1^2 de iki tane m -sıralısı $Q(u_{p(U - u_m 1_m)} - u_m) \neq 0, Q(v_{p(V - v_m 1_m)} - v_m) \neq 0$ ve $rank(U - u_m 1_m) = rank(V - v_m 1_m) = 2$ olsun. Bu durumda

$U \stackrel{GPSim(E_1^2)}{\sim} V$ ise

$$\left\{ \begin{array}{l} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ q(U - u_m 1_m) = q(V - v_m 1_m) \\ \left(\frac{[u_{p(U - u_m 1_m)} - u_m \ u_{q(U - u_m 1_m)} - u_m]}{Q(u_{p(U - u_m 1_m)} - u_m)} \right)^2 = \left(\frac{[v_{p(V - v_m 1_m)} - v_m \ v_{q(V - v_m 1_m)} - v_m]}{Q(v_{p(V - v_m 1_m)} - v_m)} \right)^2 \\ \frac{\langle u_{p(U - u_m 1_m)} - u_m, u_i - u_m \rangle}{Q(u_{p(U - u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{\langle v_{p(V - v_m 1_m)} - v_m, v_i - v_m \rangle}{Q(v_{p(V - v_m 1_m)} - v_m)} \\ \frac{[u_{p(U - u_m 1_m)} - u_m \ u_k - u_m]}{[u_{p(U - u_m 1_m)} - u_m \ u_{q(U - u_m 1_m)} - u_m]} = \frac{[v_{p(V - v_m 1_m)} - v_m \ v_k - v_m]}{[v_{p(V - v_m 1_m)} - v_m \ v_{q(V - v_m 1_m)} - v_m]} \end{array} \right. \quad (26)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, p(U - u_m 1_m) - 1, p(U - u_m 1_m) + 1, \dots, m - 1,$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, m - 1, k \neq p(U - u_m 1_m), k \neq q(U - u_m 1_m).$$

Tersine (26)'daki eşitlikler sağlansın. Bu takdirde $v_i = M_1 u_i + b_1$ ve $v_i = M_2 u_i + b_2$ olacak şekilde $M_1, M_2 \in LPSim(E_1^2)$ ve $b_1, b_2 \in E_1^2$ mevcut ve

(i) $\frac{[u_{p(U-u_m1_m)}-u_m \quad u_{q(U-u_m1_m)}-u_m]}{Q(u_{p(U-u_m1_m)}-u_m)} = \frac{[v_{p(V-v_m1_m)}-v_m \quad v_{q(V-v_m1_m)}-v_m]}{Q(v_{p(V-v_m1_m)}-v_m)}$ durumunda $M_1 \in GLPSim^+(E_1^2)$ olup M_1 'in görüntüsü Teorem 2.4.3'deki gibi ve $b_1 \in E_1^2$ nin görüntüsü de Teorem 2.4.3'deki gibidir.

(ii) $\frac{[u_{p(U-u_m1_m)}-u_m \quad u_{q(U-u_m1_m)}-u_m]}{Q(u_{p(U-u_m1_m)}-u_m)} = -\frac{[v_{p(V-v_m1_m)}-v_m \quad v_{q(V-v_m1_m)}-v_m]}{Q(v_{p(V-v_m1_m)}-v_m)}$ durumunda ise $M_2 = M_1 \cdot W \in GLPSim^-(E_1^2)$ olup M_2 'nin görüntüsü,

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{\langle \overline{u_{p(U-u_m1_m)}-u_m}, v_{p(U-u_m1_m)}-v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m1_m)}-u_m)} & -\frac{[\overline{u_{p(U-u_m1_m)}-u_m} \quad v_{p(U-u_m1_m)}-v_m]}{Q(u_{p(U-u_m1_m)}-u_m)} \\ \frac{[\overline{u_{p(U-u_m1_m)}-u_m} \quad v_{p(U-u_m1_m)}-v_m]}{Q(u_{p(U-u_m1_m)}-u_m)} & -\frac{\langle \overline{u_{p(U-u_m1_m)}-u_m}, v_{p(U-u_m1_m)}-v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m1_m)}-u_m)} \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$b_2 \in E_1^2$ nin görüntüsü ise $b_2 = v_m - M_2 u_m$ 'dir.

İspat: Önerme 2.4.2 ve Teorem 2.3.6'dan elde edilir.

Örnek 2.4.7. $m = 4$ için

$$U = \{u_1 = (1,3), u_2 = (-5,0), u_3 = (2,3), u_4 = (-1,2)\}$$

$$V = \{v_1 = (4,7), v_2 = (-7,-14), v_3 = (9,10), v_4 = (3,0)\}$$

$$U - u_4 1_4 = \{u_1 - u_4 = (2,1), u_2 - u_4 = (-4,-2), u_3 - u_4 = (3,1)\}$$

$$V - v_4 1_4 = \{v_1 - v_4 = (5,7), v_2 - v_4 = (-10,-14), v_3 - v_4 = (6,10)\}$$

$Q(u_1 - u_4) \neq 0$, $Q(v_1 - v_4) \neq 0$ ve $rank(U - u_4 1_4) = rank(V - v_4 1_4) = 2$ 'dir.

$U \stackrel{GLPSim(E_1^2)}{\sim} V$ ise Teorem 2.4.6'daki şartlar sağlanır. Gerçekten,

$$p(U - u_4 1_4) = p(V - v_4 1_4) = 1,$$

$$q(U - u_4 1_4) = q(V - v_4 1_4) = 3,$$

$$\left(\frac{[u_1 - u_4 \quad u_3 - u_4]}{Q(u_1 - u_4)} \right)^2 = \left(\frac{[v_1 - v_4 \quad v_3 - v_4]}{Q(v_1 - v_4)} \right)^2 = \left(\frac{-1}{3} \right)^2 = \left(\frac{-1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\frac{\langle u_1 - u_4, u_1 - u_4 \rangle}{Q(u_1 - u_4)} = \frac{\langle v_1 - v_4, v_1 - v_4 \rangle}{Q(v_1 - v_4)} = 1,$$

$$\frac{\langle u_1 - u_4, u_2 - u_4 \rangle}{Q(u_1 - u_4)} = \frac{\langle v_1 - v_4, v_2 - v_4 \rangle}{Q(v_1 - v_4)} = -2,$$

$$\frac{[u_1-u_4 \ u_2-u_4]}{[u_1-u_4 \ u_3-u_4]} = \frac{[v_1-v_4 \ v_2-v_4]}{[v_1-v_4 \ v_3-v_4]} = 0 \text{ dir.}$$

Tersine, $U - u_4 1_4 = \{u_1 - u_4 = (2,1), u_2 - u_4 = (-4, -2), u_3 - u_4 = (3,1)\}$

$V - v_4 1_4 = \{v_1 - v_4 = (5,7), v_2 - v_4 = (-10, -14), v_3 - v_4 = (6,10)\}$ için

$Q(u_1 - u_4) \neq 0$, $Q(v_1 - v_4) \neq 0$ ve (26) eşitlikleri sağlandığından

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_1-u_4, v_1-v_4 \rangle}{Q(u_1-u_4)} & \frac{[u_1-u_4 \ v_1-v_4]}{Q(u_1-u_4)} \\ \frac{[u_1-u_4 \ v_1-v_4]}{Q(u_1-u_4)} & \frac{\langle u_1-u_4, v_1-v_4 \rangle}{Q(u_1-u_4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } b_1 = v_4 - gu_4 = (-2,1)$$

elde edilir. Dolayısıyla $U \stackrel{GPSim(E_1^2)}{\sim} V$ dir.

Örnek 2.4.8. $m = 4$ için

$$U = \{u_1 = (1,3), u_2 = (-5,0), u_3 = (2,3), u_4 = (-1,2)\}$$

$$V = \{v_1 = (-10,1), v_2 = (-7, -14), v_3 = (-9,4), v_4 = (-9, -4)\}$$

$$U - u_4 1_4 = \{u_1 - u_4 = (2,1), u_2 - u_4 = (-4, -2), u_3 - u_4 = (3,1)\}$$

$$V - v_4 1_4 = \{v_1 - v_4 = (-1,5), v_2 - v_4 = (2, -10), v_3 - v_4 = (0,8)\}$$

$Q(u_1 - u_4) \neq 0$, $Q(v_1 - v_4) \neq 0$ ve $rank(U - u_4 1_4) = rank(V - v_4 1_4) = 2$ dir.

$U \stackrel{GPSim(E_1^2)}{\sim} V$ ise Teorem 2.4.6'daki şartlar sağlanır. Gerçekten,

$$p(U - u_4 1_4) = p(V - v_4 1_4) = 1,$$

$$q(U - u_4 1_4) = q(V - v_4 1_4) = 3,$$

$$\left(\frac{[u_1-u_4 \ u_3-u_4]}{Q(u_1-u_4)} \right)^2 = \left(\frac{[v_1-v_4 \ v_3-v_4]}{Q(v_1-v_4)} \right)^2 = \left(\frac{-1}{3} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\frac{\langle u_1-u_4, u_1-u_4 \rangle}{Q(u_1-u_4)} = \frac{\langle v_1-v_4, v_1-v_4 \rangle}{Q(v_1-v_4)} = 1,$$

$$\frac{\langle u_1-u_4, u_2-u_4 \rangle}{Q(u_1-u_4)} = \frac{\langle v_1-v_4, v_2-v_4 \rangle}{Q(v_1-v_4)} = -2,$$

$$\frac{[u_1-u_4 \ u_2-u_4]}{[u_1-u_4 \ u_3-u_4]} = \frac{[v_1-v_4 \ v_2-v_4]}{[v_1-v_4 \ v_3-v_4]} = 0 \text{ dir.}$$

Tersine, $U - u_4 1_4 = \{u_1 - u_4 = (2,1), u_2 - u_4 = (-4, -2), u_3 - u_4 = (3,1)\}$

$V - v_4 1_4 = \{v_1 - v_4 = (-1, 5), v_2 - v_4 = (2, -10), v_3 - v_4 = (0, 8)\}$ için

$Q(u_1 - u_4) \neq 0$, $Q(v_1 - v_4) \neq 0$ ve (26) eşitlikleri sağlandığından

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{\langle \overline{u_1 - u_4}, v_1 - v_4 \rangle}{Q(u_1 - u_4)} & -\frac{[\overline{u_1 - u_4} \quad v_1 - v_4]}{Q(u_1 - u_4)} \\ \frac{\langle \overline{u_1 - u_4}, v_1 - v_4 \rangle}{Q(u_1 - u_4)} & -\frac{[\overline{u_1 - u_4} \quad v_1 - v_4]}{Q(u_1 - u_4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ ve } b_2 = v_4 - M_2 u_4 = (-2, 1)$$

elde edilir. Dolayısıyla $U \stackrel{GPSim(E_1^2)}{\sim} V$ 'dir.



3. BULGULAR

Tezde elde edilen bulguları şu şekilde sıralayabiliriz.

1. $u, v \in E_1^2, F: E_1^2 \times E_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

(i) $F(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle}$ fonksiyonu $GLPSim(E_1^2)$ -invarianttır.

(ii) $F(u, v) = \frac{[u \ v]}{\langle u, u \rangle}$ fonksiyonu $GLPSim^+(E_1^2)$ -invarianttır.

(iii) $F(u, v) = \left(\frac{[u \ v]}{\langle u, u \rangle} \right)^2$ fonksiyonu $GLPSim(E_1^2)$ -invarianttır.

Teorem 2.3.1’de gösterilmiştir.

2. $u, v \in \mathbb{H}^*$ olsun. Bu takdirde $v = M_z u$ olacak şekilde bir tek $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$

mevcuttur ve M_z elemanının görüntüsü

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle u, v \rangle}{Q(u)} & \frac{[u \ v]}{Q(u)} \\ \frac{[u \ v]}{Q(u)} & \frac{\langle u, v \rangle}{Q(u)} \end{pmatrix}, \text{dir.}$$

$u \stackrel{GLPSim^+(E_1^2)}{\sim} v$ ’dır. Teorem 2.3.2’de gösterilmiştir.

3. $u, v \in \mathbb{H}^*$ olsun. Bu takdirde $v = gu$ veya $v = hu$ olacak şekilde $g, h \in GLPSim(E_1^2)$ mevcuttur. Bu durumda, $g = M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ ve $h = M_z W \in$

$GLPSim^-(E_1^2)$ dir . Burada, g ’nin görüntüsü $g = \begin{pmatrix} \frac{\langle u, v \rangle}{Q(u)} & \frac{[u \ v]}{Q(u)} \\ \frac{[u \ v]}{Q(u)} & \frac{\langle u, v \rangle}{Q(u)} \end{pmatrix}$ ve h ’nin görüntüsü

$h = \begin{pmatrix} \frac{\langle \bar{u}, v \rangle}{Q(u)} & -\frac{[\bar{u} \ v]}{Q(u)} \\ \frac{[\bar{u} \ v]}{Q(u)} & -\frac{\langle \bar{u}, v \rangle}{Q(u)} \end{pmatrix}$, dir. $u \stackrel{GLPSim(E_1^2)}{\sim} v$ ‘dır. Teorem 2.3.3’de gösterilmiştir.

4. $m > 1$ için $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} E_1^2$ de iki sistem ve

$\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle \neq 0, \langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle \neq 0$ olsun.

Bu takdirde

$$U \stackrel{GLPSim^+(E_1^2)}{\sim} V \Rightarrow \begin{cases} p(U) = p(V) \\ \frac{\langle u_{p(U)}, u_i \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{\langle v_{p(V)}, v_i \rangle}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \\ \frac{[u_{p(U)} u_i]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(V)} v_i]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \end{cases}$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, p(U) - 1, p(U) + 1, \dots, m$$

$$\text{Tersine, } \begin{cases} p(U) = p(V) \\ \frac{\langle u_{p(U)}, u_i \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{\langle v_{p(V)}, v_i \rangle}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \\ \frac{[u_{p(U)} u_i]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(V)} v_i]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \end{cases} \text{ eşitlikleri sağlansın. Bu durumda}$$

$v_i = M_z u_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur ve

$M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ elemanının görüntüsü

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_{p(U)}, v_{p(U)} \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} & \frac{[u_{p(U)} v_{p(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} \\ \frac{[u_{p(U)} v_{p(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} & \frac{\langle u_{p(U)}, v_{p(U)} \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} \end{pmatrix}$$

şeklinde dir. Teorem 2.3.4'de gösterilmiştir.

5. $m > 1$ için $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ kümeleri E_1^2 de iki sistem,

$\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle \neq 0, \langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle \neq 0$ ve $r(U) = r(V) = 1$ olsun. Bu takdirde

$$U \stackrel{GLPSim(E_1^2)}{\sim} V \Rightarrow \begin{cases} p(U) = p(V) \\ \frac{\langle u_{p(U)}, u_i \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{\langle v_{p(V)}, v_i \rangle}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \end{cases}$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, p(U) - 1, p(U) + 1, \dots, m$$

$$\text{Tersine, } \begin{cases} p(U) = p(V) \\ \frac{\langle u_{p(U)}, u_i \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{\langle v_{p(V)}, v_i \rangle}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \end{cases} \text{ eşitlikleri sağlansın. Bu durumda}$$

$v_i = M_z u_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $M_z \in GLPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve

$M_z \in GLPSim(E_1^2)$ elemanının görüntüsü

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_{p(U)}, v_{p(U)} \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} & \frac{[u_{p(U)} v_{p(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} \\ \frac{[u_{p(U)} v_{p(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} & \frac{\langle u_{p(U)}, v_{p(U)} \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Teorem 2.3.5’de gösterilmiştir.

6. $m > 1$ için $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ kümeleri E_1^2 de iki sistem $\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle \neq 0$, $\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle \neq 0$ ve $r(U) = r(V) = 2$ olsun. Bu takdirde

$$U \stackrel{GLPSim(E_1^2)}{\sim} V \Rightarrow \begin{cases} p(U)=p(V) \\ q(U)=q(V) \\ \left(\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \right)^2 \\ \frac{\langle u_{p(U)}, u_i \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{\langle v_{p(V)}, v_i \rangle}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \\ \frac{[u_{p(U)} u_k]}{\langle u_{p(U)}, u_{q(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(V)} v_k]}{\langle v_{p(V)}, v_{q(V)} \rangle} \end{cases}$$

$\forall i, k = 1, 2, \dots, m; k \neq p(U), k \neq q(U)$ ’dır.

$$\text{Tersine, } \begin{cases} p(U)=p(V) \\ q(U)=q(V) \\ \left(\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \right)^2 \\ \frac{\langle u_{p(U)}, u_i \rangle}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{\langle v_{p(V)}, v_i \rangle}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle} \\ \frac{[u_{p(U)} u_k]}{\langle u_{p(U)}, u_{q(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(V)} v_k]}{\langle v_{p(V)}, v_{q(V)} \rangle} \end{cases} \text{ eşitlikleri sağlansın. Bu durumda}$$

$v_i = M_z u_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $M_z \in GLPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve

$M_z \in GLPSim(E_1^2)$ elemanın görüntüsü için aşağıdaki durumlar mevcuttur.

(i) $\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = \frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle}$ durumunda $M_z \in GLPSim^+(E_1^2)$ ve M_z elemanın görüntüsü

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle u, v \rangle}{Q(u)} & \frac{[u \ v]}{Q(u)} \\ \frac{[u \ v]}{Q(u)} & \frac{\langle u, v \rangle}{Q(u)} \end{pmatrix}, \text{dir.}$$

(ii) $\frac{[u_{p(U)} u_{q(U)}]}{\langle u_{p(U)}, u_{p(U)} \rangle} = -\frac{[v_{p(V)} v_{q(V)}]}{\langle v_{p(V)}, v_{p(V)} \rangle}$ durumunda $M_z \in GLPSim^-(E_1^2)$ ve M_z elemanın görüntüsü

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle \overline{u_{p(U)}} v_{p(U)} \rangle}{\langle \overline{u_{p(U)}}, \overline{u_{p(U)}} \rangle} & -\frac{[\overline{u_{p(U)}} v_{p(U)}]}{\langle \overline{u_{p(U)}}, \overline{u_{p(U)}} \rangle} \\ \frac{[\overline{u_{p(U)}} v_{p(U)}]}{\langle \overline{u_{p(U)}}, \overline{u_{p(U)}} \rangle} & -\frac{\langle \overline{u_{p(U)}} v_{p(U)} \rangle}{\langle \overline{u_{p(U)}}, \overline{u_{p(U)}} \rangle} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Teorem 2.3.6’da gösterilmiştir.

7. $G = LPSim^+(E_1^2), LPSim(E_1^2), GLPSim^+(E_1^2), GLPSim(E_1^2)$ olsun.

$m > 1$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \in E_1^2$ olmak üzere,

$U \stackrel{G \times Tr(2)}{\sim} V \Leftrightarrow U - u_m 1_m \stackrel{G}{\sim} V - v_m 1_m$ Önerme 2.4.2'de gösterilmiştir.

8. $m > 1$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistemleri E_1^2 de iki tane m -sıralısı ve $Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m) \neq 0, Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$U \stackrel{PSim^+(E_1^2)}{\sim} V \Rightarrow \begin{cases} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ sgn(Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)) = sgn(Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)) \\ \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, u_i - u_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{\langle v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m, v_i - v_m \rangle}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_i - u_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_i - v_m]}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \end{cases}$$

$\forall i = 1, 2, \dots, p(U - u_m 1_m) - 1, p(U - u_m 1_m) + 1, \dots, m - 1$

$$\text{Tersine, } \begin{cases} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ sgn(Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)) = sgn(Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)) \\ \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, u_i - u_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{\langle v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m, v_i - v_m \rangle}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_i - u_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_i - v_m]}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \end{cases}$$

eşitlikleri sağlansın. Bu durumda $v_i = gu_i + b, \forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $g \in LPSim^+(E_1^2)$ ve bir tek $b \in E_1^2$ mevcuttur. Dahası $g \in LPSim^+(E_1^2)$ ve $b \in E_1^2$ nin görüntüleri

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$b = v_m - gu_m$ şeklindedir. Teorem 2.4.1'de gösterilmiştir.

9. $m > 1$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistemleri E_1^2 de iki tane m -sıralısı $Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m) \neq 0, Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m) \neq 0$ ve

$rank(U - u_m 1_m) = rank(V - v_m 1_m) = 1$ olsun. Bu durumda

$$U \stackrel{PSim(E_1^2)}{\sim} V \Rightarrow \begin{cases} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ sgn(Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)) = sgn(Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)) \\ \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, u_i - u_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{\langle v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m, v_i - v_m \rangle}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \end{cases}$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, p(U - u_m 1_m) - 1, p(U - u_m 1_m) + 1, \dots, m - 1$$

$$\text{Tersine, } \begin{cases} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ sgn(Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)) = sgn(Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)) \\ \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, u_i - u_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{\langle v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m, v_i - v_m \rangle}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \end{cases}$$

eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, $v_i = gu_i + b$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $g \in LPSim(E_1^2)$ ve bir tek $b \in E_1^2$ mevcuttur. Dahası $g \in LPSim(E_1^2)$ ve $b \in E_1^2$ nin görüntüsü

$$g = \left(\begin{array}{cc} \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \end{array} \right) \text{ ve}$$

$b = v_m - gu_m$ şeklindedir. Teorem 2.4.2'de gösterilmiştir.

10. $m > 1$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistemleri E_1^2 de iki tane

m -sıralısı $Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m) \neq 0$, $Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m) \neq 0$ ve

$rank(U - u_m 1_m) = rank(V - v_m 1_m) = 2$ olsun. Bu durumda

$$U \stackrel{PSim(E_1^2)}{\sim} V \Rightarrow \begin{cases} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ q(U - u_m 1_m) = q(V - v_m 1_m) \\ sgn(Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)) = sgn(Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)) \\ \left(\frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_{q(U-u_m 1_m)} - u_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \right)^2 = \left(\frac{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_{q(V-v_m 1_m)} - v_m]}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \right)^2 \\ \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, u_i - u_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{\langle v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m, v_i - v_m \rangle}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_k - u_m]}{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_{q(U-u_m 1_m)} - u_m]} = \frac{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_k - v_m]}{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_{q(V-v_m 1_m)} - v_m]} \end{cases}$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, p(U - u_m 1_m) - 1, p(U - u_m 1_m) + 1, \dots, m - 1,$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, m-1, k \neq p(U - u_m 1_m), k \neq q(U - u_m 1_m)$$

$v_i = M_1 u_i + b_1$ ve $v_i = M_2 u_i + b_2$ olacak şekilde $M_1, M_2 \in LPSim(E_1^2)$ ve $b_1, b_2 \in E_1^2$ mevcuttur. Bu durumda

$$(i) \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)-u_m} \ u_{q(U-u_m 1_m)-u_m}]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} = \frac{[v_{p(V-v_m 1_m)-v_m} \ v_{q(V-v_m 1_m)-v_m}]}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)-v_m})} \text{ durumunda}$$

$M_1 \in LPSim^+(E_1^2)$ olup M_1 'in görüntüsü

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)-u_m}, v_{p(U-u_m 1_m)-v_m} \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} & \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)-u_m} \ v_{p(U-u_m 1_m)-v_m}]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)-u_m} \ v_{p(U-u_m 1_m)-v_m}]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} & \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)-u_m}, v_{p(U-u_m 1_m)-v_m} \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} \end{pmatrix}$$

olup $b_1 \in E_1^2$ nin görüntüsü ise $b_1 = v_m - M_1 u_m$ şeklindedir. Teorem 2.4.3'de gösterilmiştir.

$$(ii) \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)-u_m} \ u_{q(U-u_m 1_m)-u_m}]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} = - \frac{[v_{p(V-v_m 1_m)-v_m} \ v_{q(V-v_m 1_m)-v_m}]}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)-v_m})} \text{ durumunda}$$

$M_2 = M_1 \cdot W \in LPSim^-(E_1^2)$ olup M_2 'nin görüntüsü

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{\langle \bar{u}_{p(U-u_m 1_m)-u_m}, v_{p(U-u_m 1_m)-v_m} \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} & - \frac{[\bar{u}_{p(U-u_m 1_m)-u_m} \ v_{p(U-u_m 1_m)-v_m}]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} \\ \frac{[\bar{u}_{p(U-u_m 1_m)-u_m} \ v_{p(U-u_m 1_m)-v_m}]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} & - \frac{\langle \bar{u}_{p(U-u_m 1_m)-u_m}, v_{p(U-u_m 1_m)-v_m} \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} \end{pmatrix}$$

olup $b_2 \in E_1^2$ nin görüntüsü ise $b_2 = v_m - M_2 u_m$ şeklindedir Teorem 2.4.3'de gösterilmiştir.

11. $m > 1$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistemleri E_1^2 de iki tane

m -sıralısı ve $Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m) \neq 0, Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$U \stackrel{GPSim^+(E_1^2)}{\sim} V \Rightarrow \begin{cases} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)-u_m}, u_i - u_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} = \frac{\langle v_{p(V-v_m 1_m)-v_m}, v_i - v_m \rangle}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)-v_m})} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)-u_m} \ u_i - u_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} = \frac{[v_{p(V-v_m 1_m)-v_m} \ v_i - v_m]}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)-v_m})} \end{cases}$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, p(U - u_m 1_m) - 1, p(U - u_m 1_m) + 1, \dots, m - 1$$

$$\text{Tersine, } \begin{cases} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)-u_m}, u_i - u_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} = \frac{\langle v_{p(V-v_m 1_m)-v_m}, v_i - v_m \rangle}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)-v_m})} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)-u_m} \ u_i - u_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} = \frac{[v_{p(V-v_m 1_m)-v_m} \ v_i - v_m]}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)-v_m})} \end{cases} \text{ eşitlikleri sağlansın.}$$

Bu durumda, $v_i = gu_i + b$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $g \in GLPSim^+(E_1^2)$ ve bir tek $b \in E_1^2$ mevcuttur. Dahası $g \in GLPSim^+(E_1^2)$ ve $b \in E_1^2$ nin görüntüleri

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)-u_m}, v_{p(U-u_m 1_m)-v_m} \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} & \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)-u_m} \ v_{p(U-u_m 1_m)-v_m}]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)-u_m} \ v_{p(U-u_m 1_m)-v_m}]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} & \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)-u_m}, v_{p(U-u_m 1_m)-v_m} \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$b = v_m - gu_m$ şeklindedir. Teorem 2.4.4'de gösterilmiştir.

12. $m > 1$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistemleri E_1^2 de iki tane m -sıralısı $Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m) \neq 0$, $Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m) \neq 0$ ve $rank(U - u_m 1_m) = rank(V - v_m 1_m) = 1$ olsun. Bu durumda

$$U \stackrel{GLPSim(E_1^2)}{\sim} V \Rightarrow \begin{cases} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)-u_m}, u_i - u_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} = \frac{\langle v_{p(V-v_m 1_m)-v_m}, v_i - v_m \rangle}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)-v_m})} \end{cases}$$

$\forall i = 1, 2, \dots, p(U - u_m 1_m) - 1, p(U - u_m 1_m) + 1, \dots, m - 1$

$$\text{Tersine, } \begin{cases} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)-u_m}, u_i - u_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} = \frac{\langle v_{p(V-v_m 1_m)-v_m}, v_i - v_m \rangle}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)-v_m})} \end{cases}$$

eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, $v_i = gu_i + b$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek

$g \in GLPSim(E_1^2)$ ve bir tek $b \in E_1^2$ mevcuttur. Dahası $g \in GLPSim(E_1^2)$ ve $b \in E_1^2$ nin görüntüsü

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)-u_m}, v_{p(U-u_m 1_m)-v_m} \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} & \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)-u_m} \ v_{p(U-u_m 1_m)-v_m}]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)-u_m} \ v_{p(U-u_m 1_m)-v_m}]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} & \frac{\langle u_{p(U-u_m 1_m)-u_m}, v_{p(U-u_m 1_m)-v_m} \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)-u_m})} \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$b = v_m - gu_m$ şeklindedir. Teorem 2.4.5’de gösterilmiştir.

13. $m > 1$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistemleri E_1^2 de iki tane

m -sıralısı $Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m) \neq 0$, $Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m) \neq 0$ ve

$rank(U - u_m 1_m) = rank(V - v_m 1_m) = 2$ olsun. Bu durumda

$U \stackrel{GPSim(E_1^2)}{\sim} V$ ise

$$\left\{ \begin{array}{l} p(U - u_m 1_m) = p(V - v_m 1_m) \\ q(U - u_m 1_m) = q(V - v_m 1_m) \\ \left(\frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_{q(U-u_m 1_m)} - u_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \right)^2 = \left(\frac{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_{q(V-v_m 1_m)} - v_m]}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \right)^2 \\ \frac{< u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, u_i - u_m >}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{< v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m, v_i - v_m >}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_k - u_m]}{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_{q(U-u_m 1_m)} - u_m]} = \frac{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_k - v_m]}{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_{q(V-v_m 1_m)} - v_m]} \end{array} \right.$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, p(U - u_m 1_m) - 1, p(U - u_m 1_m) + 1, \dots, m - 1, \forall k = 1, 2, \dots, m - 1,$$

$$k \neq p(U - u_m 1_m), k \neq q(U - u_m 1_m).$$

Tersine eşitlikler sağlansın. Bu takdirde $v_i = M_1 u_i + b_1$ ve $v_i = M_2 u_i + b_2$ olacak şekilde $M_1, M_2 \in LPSim(E_1^2)$ ve $b_1, b_2 \in E_1^2$ mevcut ve

$$(i) \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_{q(U-u_m 1_m)} - u_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = \frac{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_{q(V-v_m 1_m)} - v_m]}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \text{ durumunda } M_1 \in$$

$GLPSim^+(E_1^2)$ olup M_1 ’in görüntüsü

$$M_1 = \left(\begin{array}{cc} \frac{< u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m >}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \\ \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & \frac{< u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m >}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \end{array} \right) \text{ ve}$$

$b_1 \in E_1^2$ nin görüntüsü $b_1 = v_m - M_1 u_m$ şeklindedir. Teorem 2.4.6’da gösterilmiştir

$$(ii) \frac{[u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m \quad u_{q(U-u_m 1_m)} - u_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} = - \frac{[v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m \quad v_{q(V-v_m 1_m)} - v_m]}{Q(v_{p(V-v_m 1_m)} - v_m)} \text{ durumunda}$$

$M_2 = M_1 \cdot W \in GLPSim^-(E_1^2)$ olup M_2 ’nin görüntüsü

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{\langle \overline{u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m}, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & - \frac{[\overline{u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m} \quad v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \\ \frac{[\overline{u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m} \quad v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m]}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} & - \frac{\langle \overline{u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m}, v_{p(U-u_m 1_m)} - v_m \rangle}{Q(u_{p(U-u_m 1_m)} - u_m)} \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$b_2 \in E_1^2$ nin görüntüsü $b_2 = v_m - M_2 u_m$ şeklindedir. Teorem 2.4.6’da gösterilmiştir.

4. İRDELEME

Bu tezin amacı, [20]'de verilen genelleştirilmiş lineer pseudo-benzerlik grupları ve bu gruplara ötelemelerin eklenmesiyle oluşan hareket grupları ile [27] de açık problem olarak önerilen hareket grupları için iki boyutlu Lorentz benzerlik geometrisinde m -tane noktanın, Lorentz benzerlik grupları altında invaryant fonksiyonlarını bulmaktır. Bu fonksiyonlar yardımıyla, m -tane noktadan oluşan iki farklı sistem için, bir sistemi diğer sisteme dönüştüren Lorentz benzerlik dönüşümünün görüntüsünü bu nokta sistemlerinin invaryant fonksiyonları yardımıyla elde etmek olarak belirlenmiştir.

Öklid uzayında benzerlik geometrisine ait pek çok çalışma mevcuttur [1, 2, 4, 8, 19]. Ancak Lorentz benzerlik geometrisi yeni geliştirilen bir alandır. Bu uzayda eğriler teorisine ve manifoldlara ait bazı çalışmalar yapılmıştır [9, 12, 17, 18, 23, 24, 25]. Bu iki boyutlu Lorentz benzerlik geometrisinde elde edilen gruplar [9, 18] çalışmalarında incelenen gruplardan daha geniştir.

Yaptığımız literatür araştırmasında, bu geometride noktalardan oluşan sistemlerin invaryant teori açısından denklik problemlerinin çözümüne [27] hariç başka çalışmalarda rastlanılmamıştır. Bu problemlerin n boyutlu Lorentz benzerlik geometrisinde geliştirilmesi ve Bézier eğrilerine uygulamaları yapılabilir. Ancak, bu tezde hiperbolik sayılar cebirinin özellikleri de kullanılmıştır. n -boyutlu Lorentz benzerlik geometrisinde farklı bir yöntemin geliştirilmesi gerekmektedir.

Dahası, benzerlik geometrisinin bilgisayar grafikleri, nesne tanıma problemleri ve Newton mekaniğinde uygulamaları vardır [14, 15, 26]. Bu Lorentz benzerlik geometrisinin de Einstein'ın özel görelilik teorisi alanındaki uygulamaları incelenebilir.

5. SONUÇLAR

1. $GLPSim^+(E_1^2)$ ve $GLPSim(E_1^2)$ grupları için invaryant fonksiyonlar Teorem 2.3.1’de gösterildi.
2. Bir nokta için $GLPSim^+(E_1^2)$ benzerlik şartının olmadığı ve bir noktayı diğer noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.3.2’de gösterildi.
3. Bir nokta için $GLPSim(E_1^2)$ benzerlik şartı ve bir noktayı diğer noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.3.3’de gösterildi.
4. $m > 1$ tane noktadan oluşan sistemin m -tane noktası için $GLPSim^+(E_1^2)$ benzerlik şartları ve m -tane noktayı diğer m -tane noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.3.4’de verilmiştir.
5. $m > 1$ tane noktadan oluşan sistemin rankının 1 olduğu durumda, m -tane nokta için $GLPSim(E_1^2)$ benzerlik şartları ve m -tane noktayı diğer m -tane noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.3.5’de verilmiştir.
6. $m > 1$ tane noktadan oluşan sistemin rankının 2 olduğu durumda, m -tane nokta için $GLPSim(E_1^2)$ benzerlik şartları ve m -tane noktayı diğer m -tane noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.3.6’da verilmiştir.
7. $G = LPSim^+(E_1^2)$, $LPSim(E_1^2)$, $GLPSim^+(E_1^2)$, $GLPSim(E_1^2)$ grupları için $G \times Tr(2)$ ’de m -sıralının denklik problemi, G ’de $(m - 1)$ -sıralının denklik problemine dönüşümü Önerme 2.4.2’de verilmiştir.
8. m -tane nokta için $PSim^+(E_1^2)$ benzerlik şartları ve m -tane noktayı diğer m tane noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.4.1’de verilmiştir.
9. $m > 1$ tane noktadan oluşan sistemin rankının 1 olduğu durumda, m -tane nokta için

$PSim(E_1^2)$ benzerlik şartları ve m -tane noktayı diğer m -tane noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.4.2’de verilmiştir.

10. $m > 1$ tane noktadan oluşan sistemin rankının 2 olduğu durumda, m -tane nokta için $PSim(E_1^2)$ benzerlik şartları ve m -tane noktayı diğer m -tane noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.4.3’de verilmiştir.

11. m -tane nokta için $GPSim^+(E_1^2)$ benzerlik şartları ve m -tane noktayı diğer m -tane noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.4.4’de verilmiştir.

12. $m > 1$ tane noktadan oluşan sistemin rankının 1 olduğu durumda, m -tane nokta için $GPSim(E_1^2)$ benzerlik şartları ve m -tane noktayı diğer m -tane noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.4.5’de verilmiştir.

13. $m > 1$ tane noktadan oluşan sistemin rankının 2 olduğu durumda, m -tane nokta için $GPSim(E_1^2)$ benzerlik şartları ve m -tane noktayı diğer m -tane noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.4.6’da verilmiştir.

6. ÖNERİLER

Bu tez çalışmasındaki sonuçların yardımıyla ve n -boyutlu Lorentz benzerlik geometrisinde aşağıdaki problemlerin araştırılması önerilmektedir.

1. n -boyutlu Lorentz benzerlik geometrisinde m -tane noktanın denklik probleminin çözümünün araştırılması;
2. n -boyutlu Lorentz benzerlik geometrisinde Bézier eğrilerinin ve yüzeylerinin denklik problemlerinin çözümünün, bu eğrilerin ve yüzeylerin kontrol noktaları yardımıyla çözümünün incelenmesi;
3. Lorentz benzerlik geometrisindeki özel görelilik teorisinde kullanılan grupların belirlenmesi ve uygulama problemlerinin çözümünün araştırılması;
4. Mimarlık alanında, Lorentz benzerlik geometrisinin kullanım alanlarının araştırılması ve bu alandaki etkilerinin geliştirilmesi.

7. KAYNAKLAR

1. Alcázar, J., G., Hermoso, C. ve Muntingh, G., Detecting Similarity of Rational Plane Curves, Journal of Computational and Applied Mathematics, 269 (2014) 1-13.
2. Ateş, F., Kaya, S., Yaylı, Y. ve Ekmekci, F.N., Generalized Similar Frenet Curves, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 5,2 (2017) 26-35.
3. Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V. ve Zampetti, P., Geometry of Minkowski Space-Time, Springer, Heidelberg Dordrecht London New York, 2011.
4. Encheva, R.G. ve Georgiev, G.H., Similar Frenet Curves, Result.Math 55 (2009) 359-372.
5. Gans, D., Transformations and Geometries, (Çev. H. Hilmi Hacısalıhoğlu), Meredith Corporation, Milli Eğitim Basınevi, İstanbul, 1975.
6. Göksal, Y., Hiperbolik Sayılar ve Hiperbolik Sayıların 2-Boyutlu Hiperbolik Geometriye Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.
7. İncesu, M., Benzerlik Geometrisinde Noktaların İnvaryantlarının Tam Sistemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2008.
8. İncesu, M. ve Gürsoy, O., On Similarity Invariant Rational Functions for k Vektor Variables and Their Generator in $\mathbb{R}^2$, Modelling & Application & Theory, 1,1 (2016) 37-53.
9. Kamishima, Y., Lorentzian Similarity Manifolds, Central European Journal of Mathematics, 10,5 (2012) 1771-1788.
10. Kaya, R., Projektif Geometri, Anadolu Üniversitesi Yayınları, Eskişehir, 1992.
11. Khadjiev, D. ve Göksal, Y., Applications of Hyperbolic Numbers to The Invariant Theory in Two-Dimensional Pseudo-Euclidean Space, Adv. Appl. Clifford Algebras, 26,2 (2016) 645-668.
12. Khadjiev, D., Ören, İ. ve Pekşen, Ö., Global Invariants of Paths and Curves for The Group of All Linear Similarities in the Two-dimensional Euclidean Space, International Journal of Geometry Methods in Modern Physics, 15 (2018) 1-28.
13. Khadiyev, D., Ayupov, Sh. ve Beshimov, G., Affine İnvaryants of a Parametric Figure for Fundamental Groups of N-Dimensional Affine Space, Uzbek. Mathematical Journal, 65, 4 (2021) 27-47.
14. Kunes, J., Similarity and Modeling in Science and Engineering, Cambridge International Science Publishing, 2012.

15. Marsh, D., Applied Geometry for Computer Graphics and CAD, Second Edition, Springer, 140-151, 2004.
16. Ören, İ., Minkowski Uzayzaman Geometrisinde Noktaların İnvaryantları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2004.
17. Ören, İ. ve İncesu, M., Detecting Similarities of Bézier Curves for the Groups $LSim(E_2)$, $LSim^+(E_2)$, Conference Proceeding Science and Technology, 2,2 (2019) 129-133.
18. Ören, İ., Khadjiev, D. ve Pekşen, Ö., Identifications of Paths and Curves Under The Plane Similarity Transformations and Their Applications to Mechanics, Journal of Geometry and Physics, 151 (2020) 1-35.
19. Ören, İ. ve Khadjiev, D., Recognition of Paths and Curves in the Two-dimensional Euclidean Geometry, International Electronic Journal of Geometry, 1 (2020) 1-20.
20. Ören, İ. ve Khadjiev, D., Recognition of Plane Paths and Plane Curves Under Linear Pseudo-Similarity Transformations, Journal of Geometry, 111,3 (2020) 1-24.
21. Sobczyk, G., The Hyperbolic Number Plane, The College Mathematics Journal, 4 (1995) 268-280.
22. Sturmfels, B., Algorithms in Invariant Theory, Second Edition, Springer Wien New York, 1993.
23. Şimşek, H. ve Özdemir, M., Similar and Self-Similar Curves in Minkowski n-Space, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 6 (2015) 2071-2093.
24. Şimşek, H. ve Özdemir, M., Shape Curvatures of the Lorentzian Plane Curves, Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Series A1,66 (2017) 276-288.
25. Şimşek, H. ve Özdemir, M., Some Results on p-Shape Curvatures of Non-Lightlike Space Curves, International Electronic Journal of Geometry, 2,11 (2018) 61-70.
26. Ulrych, U., Relativistic Quantum Physics With Hyperbolic Number, Physics Letters B, 625 (2005) 313-323.
27. Yıldırım, E., Lineer Pseudo-Benzerlik Dönüşümleri Altında Düzlemsel Bézier Eğrilerinin Belirlenmesi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2020.

ÖZGEÇMİŞ

İlköğrenim ve Ortaöğrenimini Trabzon'da tamamladı. 2011 yılında O.M.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2015 yılında bu bölümden mezun oldu. 2016-2019 yılları arasında özel kurumlarda çalıştı. 2019 yılında K.T.Ü de yüksek lisansa başladı. Halen yüksek lisans eğitimini sürdürmektedir.

