



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**İKİ BOYUTLU NAVIER-STOKES DENKLEMİNİN SONLU
ELEMENLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ VE KAPAKLA
SÜRÜLEN KAVİTE AKIŞ PROBLEMİ ÜZERİNE
UYGULAMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dalshad Sedeeq HAMAD AMEEN

**DANIŞMAN
Doç. Dr. Halis BİLGİL**

AKSARAY, 2018

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342630 numaralı yüksek lisans öğrencisi Dalshad Sedeeq HAMAD AMEEN ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “İki Boyutlu Navier-Stokes Denkleminin Sonlu Elemanlar Metodu ile Çözümü ve Kapakla Sürülen Kavite Akış Problemi Üzerine Uygulaması” başlıklı tezini, aşağıda imzaları bulunan jüri önünde başarı ile savunmuştur.

Tez Danışmanı:

Doç. Dr. Halis BİLGİL
Aksaray Üniversitesi



Jüri Üyeleri:

Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ
Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi



Jüri Üyeleri:

Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN
Aksaray Üniversitesi



Teslim Tarihi: 19.12.2017

Savunma Tarihi: 12.01.2018

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın hazırladığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserlerden yapılan her alıntının metin içerisinde gösterildiğini doğrularım.

Tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, enstitü tarafından belirtilen hiçbir şarta bağlı olmaksızın ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.



Dalshad Sedeeq HAMA AMEEN

TEŞEKKÜR

Türkiye’de eğitim alma fırsatını bana sundukları için Aksaray Üniversitesi yetkililerine ve eğitim süresi boyunca bana her konuda yardım eden Matematik Bölümü personeline en derin şükranlarımı sunarım. Tez çalışmam boyunca maddi manevi desteğini esirgemeyen kıymetli anneme teşekkürü borç bilirim.



Dalshad Sedeeq HAMA AMEEN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1 Navier-Stokes Denklemi	1
1.2 Literatür Taraması	2
1.3 Tezin Amaçları ve Ana Hatları	3
2. SONLU ELEMENLAR METODU	5
2.1 Deneme Çözüm Metodları	5
2.1.1 Örnek problem için bir deneme çözüm fonksiyonu oluşturma	9
2.1.2 Ağırlıklı kalanlar metodu kullanılarak yaklaşım çözümünün bulunması	14
2.2 Dört Çözümün Karşılaştırılması	21
2.3 Yaklaşık Çözümlerin Bir Serisinin Yakınsaklığı	22
2.4 Galerkin Metodu'nun Tercih Nedeni	22
2.5 Genel Bir 12-Adım Deneme Çözüm Prosedürü	22
2.5.1 Oniki adım prosedürünün şeması	22
3. SONLU ELEMENLAR METODUNUN BİR ÖRNEK PROBLEM	
 ÜZERİNDE UYGULAMASI	28
3.1 Sınır Koşulları	48
4.ELEMENT KAVRAMI	54
4.1 Giriş	54
4.2 Bir Örnek Problem	55
4.3 İki Element Çözümü: Element Denklemlerinin Birleştirilmesi	64
4.3.1 Elementler Açısından Problemin Eşdeğer Formulasyonu	64
4.3.2 Adım 1-6: Her bir element için teorik gelişim	68
4.3.3 Adım 7-12: Nümerik hesaplama, ayrı element denkl. birleştirilmesi	71
4.4 Dört Element Çözümü	81
4.5 Bir 8 Element Çözümü	94
5. İKİ BOYUTLU SINIR DEĞER PROBLEMİ	102
5.1 Problemin Tanımı	102
5.1.1 Denge denklemi	104
5.1.2 Bir fiziksel ilke	104
5.1.3 Eşyönsüz materyaller	106
5.2 Element Denklemlerinin Elde Edilmesi (Adım 1-3)	108
5.3 Üçgen Elementler ile Teorik Gelişme (Adım 4-6)	112
5.3.1 C0-Lineer üçgen	113
5.3.1.1 Sertlik integralleri	116

5.3.1.2 Yükleme integralleri	118
5.3.1.3 Bir harici kenar boyunca sınır akı integralleri.....	120
5.4 C0-İkinci Dereceden İzoparametrik Üçgen.....	128
6. İKİ BOYUTLU N-S DENKLEMİNİN SONLU ELEMANLAR METODU	
İLE ÇÖZÜMÜ.....	148
6.1 Giriş.....	148
6.2 Boyutsuz Navier-Stokes Denkleminin Sonlu elemanlar Metodu ile Çözümü.	148
6.3 C0- Kuadratik İzoparametrik Üçgen Elemente Geçiş	153
6.3.1 Matrislerdeki iki katlı integrallerin hesaplanması.....	153
6.3.2 Gauss kareleme kuralı	153
7. KAPAKLA SÜRÜLEN İKİ BOYUTLU DİKDÖRTGENSEL BÖLGEDE	
AKIŞ YAPILARI	163
7.1. Tek Kapakla Sürülen Dikdörtgensel Kavitede Akış Yapıları	165
7.2 Ters Yönde ve Eşit Hızda Hareket Eden İki Kapakla Sürülen Dikdörtgensel	
Kavitede Akış Yapıları.....	168
7.3 Aynı Yönde ve Eşit Hızda Hareket Eden İki Kapakla Sürülen Dikdörtgensel	
Kavitede Akış Yapıları.....	172
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	174
KAYNAKLAR	176
ÖZGEÇMİŞ.....	180

ÖZET

İKİ BOYUTLU NAVIER-STOKES DENKLEMİNİN SONLU ELEMANLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ VE KAPAKLA SÜRÜLEN KAVİTE AKIŞ PROBLEMİ ÜZERİNE UYGULAMASI

Bu tez çalışmasında iki boyutlu Sonlu Elemanlar Metodu hakkında temel bilgiler verildi. Akışkanlar mekaniğinin temel denklemlerinden olan iki boyutlu kararlı Navier-Stokes denklem sisteminin sayısal çözüm mekanizması bu metod ile oluşturuldu. İki boyutlu ve sınırlarının bir kısmı hareketli olan bir akış bölgesi (kapakla sürülen kavite) için sayısal çözümler elde edildi. Kavite içerisindeki akış yapıları ve çatallanmalar incelendi. Kavite görünüm oranının, Reynolds sayısının ve hareketli kapakların hızları oranlarının akış yapıları üzerine etkileri gösterildi.

Anahtar Kelimeler : Sonlu Elemanlar Yöntemi, Akışkanlar Mekaniği, Navier-Stokes Denklemi, Kavite, Çatallanma, Reynolds Sayısı

ABSTRACT

SOLUTION OF 2-D NAVIER STOKES EQUATIONS BY USING FINITE ELEMENT METHOD AND APPLICATIONS ON A LID-DRIVEN CAVITY FLOW PROBLEM

In this thesis, basic information about two dimensional finite element method is given. The numerical solution mechanism of the Navier-Stokes equation system, which is one of the fundamental equations of fluid mechanics, was created by this method. Numerical solutions have been obtained for a two-dimensional rectangular flow region (lid-driven cavity) which have moving boundaries. Flow structures and bifurcations in the cavity were investigated. The effects of the aspect ratio, Reynolds number and speed ratios of moving lids on flow structures are presented.

Keywords : Finite element method, Fluid mechanics, Navier-Stokes equations, Cavity, Bifurcation, Reynolds number

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 3.1: Yakşalık çözüm	46
Şekil 4.1: Önerilen yaklaşık çözüm.	56
Şekil 4.2: Deneme fonksiyonu.	57
Şekil 4.3: Deneme fonksiyonu ve deneme çözümü.....	58
Şekil 4.4: 1 ve 2 element çözümleri.	78
Şekil 4.5: Birleştirilmiş deneme çözümleri.	80
Şekil 4.6: Dört element deneme çözümü	83
Şekil 4.7: Sekiz element için ağ.	96
Şekil 5.1: Sınırlar için akı ve normal vektörleri.	103
Şekil 5.2: Sınır elementleri ve uygulanan akı	119
Şekil 5.3: Elementler arası integraller için notasyon.	124
Şekil 5.4: Elementler arası integraller için integral yolu.	126
Şekil 5.5: İki boyutlu bölgede kullanılan 4.mertebeden üçgen elementler	129
Şekil 5.6: a) İsoparametrik üçgen, b) Reel element	133
Şekil 5.7: Bir kenarı sınırdaki olan element için sınır integrallerinin oluşturması	141
Şekil 6.1: Altı düğüm noktalı üçgen element.	150
Şekil 6.2: Farklı görünüşlerdeki üç ağ yapısı	153
Şekil 6.3: Gauss noktalarının yeri	161
Şekil 7.1: Dikdörtgensel kavite ve sınır koşulları.	165
Şekil 7.2: $S = 0$, $Re = 0$ ve $A = 1$ için akış yapısı	166
Şekil 7.3: $S = 0$, $Re = 100$ ve $A = 1$ için akış yapısı	166
Şekil 7.4: $A = 1$, $Re = 350$ ve $S = 0$ için akış yapısı	167
Şekil 7.5: $A = 1$, $Re = 450$ ve $S = 0$ için akış yapısı	167
Şekil 7.6: $A = 2$, $Re = 0$ ve $S = -1$ için akış yapısı.....	168
Şekil 7.7: $A = 2$, $Re = 50$ ve $S = -1$ için akış yapısı	169
Şekil 7.8: $A = 2$, $Re = 100$ ve $S = -1$ için akış yapısı	169
Şekil 7.9: $A = 2$, $Re = 150$ ve $S = -1$ için akış yapısı	170
Şekil 7.10: $A = 2$, $Re = 200$ ve $S = -1$ için akış yapısı	170
Şekil 7.11: $A = 2$, $Re = 250$ ve $S = -1$ için akış yapısı	171
Şekil 7.12: $A = 2$, $Re = 300$ ve $S = -1$ için akış yapısı	171
Şekil 7.13: $S = 1$ için akış yapıları a) $Re = 50$, $A = 3$ b) $Re = 123$, $A = 3$ c) $Re = 50$, $A = 3$ d) $Re = 123$, $A = 3$	172

SİMGELER DİZİNİ

Re	Reynolds Sayısı
$\frac{\partial}{\partial x}$	x e göre kısmi türev
$\frac{\partial}{\partial y}$	y ye göre kısmi türev
ρ	Yoğunluk
μ	Viskozite
ϑ	Kinematik viskozite
$\tilde{U}$	U yaklaşık çözümü
$\oint$	Eğrisel integral
$\iint$	Bölge üzerinde iki katlı integral
τ	Akı

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1: Birleşim için bağlantı çizelgesi..	83
Çizelge 6.1: Gauss kareleme kuralı için noktalar ve ağırlıkları.....	161



1. GİRİŞ

Mühendislik, endüstri ve sağlık gibi bir çok alanda üretim, araştırma ve geliştirme aşamalarında akışkanlarla karşılaşılır. Akışkanların bulundukları bölge içerisindeki hareketleri uzun yıllardan beri ilgi duyulan bir çalışma alanı olmaya devam etmektedir. Çünkü akışkanların hızı, akış yapısı ve diğer bazı özellikleri, ortaya çıktıkları problemin karakterize edilebilmesi için önem taşımaktadır. Bir bölge içerisindeki akış problemleri, ya deneysel yollarla ya da olayı yöneten denklemlerin sayısal ya da analitik çözümlerinin elde edilmesiyle incelenebilir. Elbette teorik yöntemlerle elde edilen sonuçlar, hem deneysel yöntemlerle elde edilenlerden daha kesin hem de daha az masraf ve zaman gerektirdiğinden dolayı tercih edilmektedir.

Akışkanlar mekaniğinin önemli denklemlerinden olan Navier-Stokes (N-S) denklemleri bir çok akış problemi için yönetici denklem olarak alınır. Dolayısıyla bu denklemin uygun sınır koşullarına göre çözümleri uygulamalı matematiğin önemli problemlerinden biri olmuştur. Lineer olmayan bir denklem sisteminden oluşan N-S denklemlerinin genel çözümü bildiğimiz kadarıyla henüz bulunabilmiş değildir. Bu nedenle uygulamalarda N-S denkleminin sayısal çözüm yöntemleri ile yaklaşık çözümleri bulunabilmektedir. Diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri için bir çok sayısal yöntem bulunmaktadır. Bunlardan en etkili olanı sonlu elemanlar metodu (SEM) olarak bilinmektedir. Sonlu elemanlar metodu kullanılarak N-S denklemlerinin sayısal çözümleri bir çok araştırmacı tarafından elde edildi [1-6].

Bu tez çalışmasında iki boyutlu sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak, dikdörtgensel bir bölgedeki akış probleminin sayısal çözümleri ve sonuçları ele alındı.

1.1 Navier-Stokes Denklemi

Navier-Stokes denklemleri ismini Claude-Louis Navier ve George Gabriel Stokes'tan almış olan, sıvılar ve gazlar gibi akışkanların hareketini tanımlamaya yarayan denklem sisteminden oluşmaktadır. Akışkanın sürekli olduğu yani akışkanın tamamen aynı özellikte olduğu, içinde farklı biçimlerin bulunmadığı varsayılır [7-8].

Bu denklemler; akışkan içerisindeki birim kütleye etki eden momentum değişimlerinin, basınç değişimleri ve sürtünme kayıplarına neden olan viskoz kuvvetlerin (sürtünmeye benzer) toplamına eşit olduğunun doğruluğunu ortaya koymaktadır. Bu viskoz kuvvetler moleküller arası etkileşimlerden meydana gelmekte ve akışkanın akmaya ne kadar dirençli (viskoz) olduğunu göstermektedir. Böylece, Navier-Stokes denklemlerinin, verilen akışkanın herhangi bir bölgesindeki kuvvetler dengesinin dinamik ifadesi olduğu söylenebilir. Yani Newton'un ikinci hareket yasasının akışkanlar üzerine uygulanmış halidir.

N-S denklemleri ve süreklilik denkleminin boyutsuz şekli aşağıdaki gibidir:

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

ve süreklilik denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

şeklindedir.

Burada Re Reynolds sayısı olup $Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu}$ şeklindedir. ρ yoğunluğu, V akış hızını, μ viskoziteyi, L akış bölgesindeki etkin uzunluğu ve ν kinematik viskoziteyi ifade eder. Reynolds Sayısı akışı karakterize eden önemli bir sabit olup 1880'li yıllarda Osborne Reynolds tarafından tespit edilmiştir. Reynolds sayısının küçük olduğu akışlar laminar olarak tanımlanan ve akış yapılarının düzgün olduğu akışlardır. Reynolds sayısı büyüdükçe akışkan bal kıvamından su kıvamına olduğu gibi giderek daha kırılgan olacak ve akış yapıları oldukça karmaşık hale gelecek ve hatta kaos diye nitelendirilen düzensizlikler ortaya çıkacaktır [9].

1.2 Literatür Taraması

Akışkanlar mekaniğinin temel konularından biri olan kavite tipi akışlara, 1900'lu yıllardan itibaren ilgi duyulmaktadır. Uygulama alanı oldukça geniş olan kavite akış problemlerinde esas mesele akışkanın hangi akış yapısıyla hareket ettiği ve yapıyı

etkileyen faktörlerin neler olduğudur. Akış olayının gerçekleştiği bölgelerde (kavite) bir çok girdap (eddy, vortex) oluşabilmektedir. Bu girdapların sayısı ve şekli uygulama alanlarına özel anlamlar ifade etmekle beraber bazı uygulamalarda hiç olmaması ya da çok sayıda olması önem kazanmaktadır. Girdapların oluşması genelde akışkanın hızı, bölgenin geometrisi ve akışkanın yapısı gibi temel belirleyici parametrelere bağlıdır. Bu parametrelerin her birinin akış yapısı üzerine nasıl bir etkisi olacağının bulunması ise önem arz etmektedir. Elde edilen sonuçlar endüstrinin bir çok alanında teknolojiye dönüştürülmektedir [10-16].

Farklı geometrilere sahip kavitelerde, birbirlerinden farklı akış yapıları ve çatalanmalar görülmektedir. Her bir problemin çözümü ise problemin geometrisine bağlı olarak farklılıklar göstermektedir. Düzgün geometriye sahip bölgelerde Stokes akış ($Re \approx 0$) problemleri analitik olarak çözülebilir. Ancak Reynolds sayısının etkisinin ihmal edilemeyecek olduğu durumlarda ise ancak sayısal çözümler elde edilmiştir.

McQuain vd. [17], kare, üçgen ve yamuk şeklindeki akış bölgelerinde kararlı viskoz akış problemlerini ele alarak bölgenin geometrisi ile Reynolds sayısının akış yapıları üzerine etkilerini gösterdiler.

Jyotsna ve Vanka [18] tek kapakla sürülen eşkenar üçgen şeklindeki bölge içerisindeki akış yapılarını ele aldılar ve bu problemi sonlu farklar yöntemini kullanarak çözdüler. Hareketli kapağın karşısındaki köşede giderek cansızlaşan ve iç içe görünümde olan Moffat [19] girdaplarını gördüler.

Liu ve Joseph [20] kenarlarından bir ısı kaynağıyla ısıtılan daire dilimi şeklindeki bir kavitede Stokes akış problemini çözmek için değişkenlerine ayırma yöntemine bağlı bir metot geliştirdiler. Geliştirdikleri bu metodla bir çok Stokes akış ($Re \approx 0$) problemi incelendi ve bazı parametrelerin akış yapıları üzerine olan etkileri gösterildi [21-26].

1.3 Tezin Amaçları ve Ana Hatları

Bu tez çalışmasında ilk olarak sonlu elemanlar metodunun temel prensipleri verilecektir. Bu temel prensipler sonlu elemanlar yönteminin bilinen özellikleri olup ilk kısımda sıklıkla literatürde yer almış olan kitaplardan faydalanıldı [6, 27]. Daha

sonra bu sayısal yöntemin bir uygulaması olarak akışkanla doldurulmuş ve kapakla sürülen bir dikdörtgensel bölgede (kavite), bölgenin sınır koşulları gereği akışkanın hareketleri, akış yapısı ve çatallanmalar (bifurcations) gözlenecektir. Kavitenin görünüm oranının ve hareketli kapakların hızları oranlarının akış yapılarına etkileri ortaya konacaktır.

Tezin birinci bölümünde tezin amacı ve önemi hakkında temel bilgiler verildi. İkinci bölümde ise bir boyutlu sonlu elemanlar metodu detaylıca verildi. Tezin üçüncü bölümünde bir boyutlu sonlu elemanlar metodunun örnek bir problem üzerine uygulanışı gösterildi. Dördüncü bölümde ise element kavramı tanıtıldı. İki boyutlu problemler için sonlu elemanlar metodunun işleyişi beşinci bölümde gösterildi. Tezin altıncı bölümünde Navier-Stokes denklem sisteminin dikdörtgensel bölge üzerinde sonlu elemanlar metodu ile çözümü elde edildi. Yedinci bölümde ise sonlu elemanlar metodunun iki boyutlu reel bir problem üzerinde uygulaması olarak, dikdörtgensel bölgedeki akış yapıları ve kavite görünüm ve hız oranlarının akış yapıları üzerine etkileri gösterildi. Tezin sekizinci ve son bölümünde ise temel sonuçlar ve sonraki çalışmalar için öneriler verildi.

2. SONLU ELEMENLAR METODU

Başta mühendislik olmak üzere temel bilimlerin çoğunda karşılaşılan en önemli problemlerden biri de problemi yöneten denklemin analitik çözümlerinin elde edilememesidir. Böyle durumlarda devreye sayısal yöntemler girmektedir. Günümüzde özellikle bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte bir çok sayısal yöntem kolaylıkla kullanılmaktadır. Sayısal yöntemler genellikle yaklaşık sonuçlar üretmekte olup, hangi yöntemin diğerine göre daha kuvvetli olduğu da ortaya çıkan hatanın büyüklüğüne göre belirlenir.

Diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan sayısal yöntemlerin en etkililerinden biri de sonlu elemanlar yöntemidir (SEM). Bu yöntem uygulanması zor fakat elde edilen sonuçların kesinliği açısından bilinen en etkin ve sık kullanılan yöntemlerin başında gelmektedir. Sonlu elemanlar yönteminin temel prensibi, çözümü aranan yapıyı, bölgeyi veya cismi çok sayıda küçük sonlu elemanlara bölerek, her bir eleman üzerinde çözümler elde edip en sonda da bu çözümleri birleştirerek problemin çözümüne ulaşmaktır. Yani parçadan bütüne gitme prensibine dayanır. Bir, iki veya üç boyutlu olabilen bu elemanlar düğüm ya da düğüm noktası adı verilen noktalarda birbirlerine bağlanmaktadır. Aslında elde edilen çözümler, bu düğüm noktalarındaki probleme ait sayısal çözümlerdir.

2.1 Deneme Çözüm Metodları

Çözmeye çalıştığımız diferansiyel denklemin tam çözümü U ve yaklaşık çözümü $\tilde{U}$ olsun. Çözüm basamakları 3 adımdan oluşur [27].

- i. $\tilde{U}$ için bir deneme fonksiyon oluşturulur.
- ii. $\tilde{U}$ için bir optimizasyon kriteri uygulanır.
- iii. $\tilde{U}$ nın kesinliği değerlendirilir yada ölçülür.

- i) $\tilde{U}(x; a)$ deneme çözümü sonlu sayıda fonksiyonların toplamından oluşur.

$$\tilde{U}(x; a) = \phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots + a_N\phi_N(x) \quad (2.1)$$

Burada x , problemdeki bağımsız değişkenleri, $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_N(x)$ fonksiyonları bilinen deneme fonksiyonları, $a_1, a_2, \dots, a_N$ 'ler ise bulunacak parametreleri (serbestlik derecesi) gösterir.

$\tilde{U}(x; a)$ içindeki a sembolü tüm $a_1, a_2, \dots, a_N$ parametrelerini simgeler. Böylece $\tilde{U}$ fonksiyonunun x ve $a_1, a_2, \dots, a_N$ in fonksiyonu olduğu anlaşılır. $\phi_0(x)$ deneme fonksiyonu herhangi parametre ile çarpılmaz. Onun görevi bazı yada tüm sınır şartlarını sağlamaktır.

Deneme fonksiyonların seçimi özel olup, cebirsel olarak kolay çalışabilmek adına, genellikle polinomal yada trigonometrik olarak tercih edilir.

ii) Optimizasyon kriterinde amacımız $a_1, a_2, \dots, a_N$ parametreleri için özel nümerik değerler belirtmektir. Her bir a_i değeri sonsuz değer alabilir ($-\infty < a_i < \infty$). Amaç tam çözüme mümkün olabildiğince yakın bir çözüm sağlayacak a_i değerlerini bulmaktır.

Sonlu elemanlar metodunda tarihsel olarak baskın rol oynayan iki tip optimizasyon kriteri vardır.

- 1) Ağırlıklı kalanlar metodu (Methods of Weighed Residuals, MWR), yönetici denklemin diferansiyel denklemler olduğunda uygulanır.
- 2) Ritz varyasyonel yaklaşım metodu (Ritz Variational Methodu, RVM), yönetici denklemler integral (değişim) denklemleri olduğunda uygulanır.

MWR kriteri diferansiyel denklemi minimum hata ile sağlayan yaklaşık çözümü bulmak için kullanılır. MWR kriterinin en popüler alt metodları,

- | | |
|----------------------------|---------------------|
| a) Kollokasyon Metodu | b) Subdomain Metodu |
| c) En Küçük Kareler Metodu | d) Galerkin Metodu |

olarak bilinir.

Şimdi $\tilde{U}(x; a)$ deneme çözümümüz için en iyi sonuç veren (en az hatayla), a_i katsayılarını bulmaya çalışalım. Sonuçta uygun bir $\tilde{U}(x)$ yaklaşık çözümü elde edeceğiz. Bu çözüm, a_i argümentlerini içermez. Çünkü a_i argümentleri nümerik olarak bulunacaktır. Dolayısıyla $\tilde{U}(x)$ sadece x e bağlı bir çözümdür. $\tilde{U}(x)$ bir yaklaşım olduğu için doğal olarak kesinliği ile ilgili sorular karşımıza çıkacaktır. Biz en iyi çözümden değil, iyi çözümlerden bahsedeceğiz. Çünkü farklı optimizasyon kriterleri genellikle farklı ideal çözümler verirler.

iii) $\tilde{U}(x)$ yaklaşık çözümünün $U(x)$ tam çözümüne yakınsadığını göstermek yapılan çalışmanın hassasiyetini ve doğruluğunu belirler. Bu yakınlık hata olarak ifade edilir. $E(x)$ ile gösterilir (rezidü anlamında $R(x)$ ile de gösterilir). $U(x)$ ve $\tilde{U}(x)$ arasındaki fark olarak ele alınabilir.

$$E(x) = U(x) - \tilde{U}(x) \quad (2.2)$$

Bu eşitlik noktasal hata olarak da adlandırılır. Çünkü bu ifade bölge içindeki her bir noktadaki hatayı verir.

İki fonksiyonun birbirine olan yakınsaklığını ya da hatayı ölçen başka teorik metotlarda vardır. Çalışmalarda genellikle araştırmacı bir çözümle ve dolayısıyla onun hatası ile ilgilenir. Bu işi bölgenin içinde küçük bir alanda yapar. Böylece noktasal hata, kesinliğin doğal ve anlamlı bir ölçütü olur.

Aslında (2.2) denklemi $E(x)$ hatasını bulmak için pek kullanılmaz. Çünkü $U(x)$ tam çözümünü içermektedir ve o ise her zaman bilinemez. $E(x)$ 'i değerlendirmenin farklı temel yöntemleri vardır. Bu yöntemler hata analizi konusuna girmekte olup bu çalışmada çok detayına girilmeyecektir. Bu tez çalışmasında ele alacağımız problemin bilinen sınır şartlarının ne derecede sağlandığını inceleyerek, elde edilen yaklaşık çözümün doğruluğu ya da kesinliği hakkında fikir edineceğiz.

Eğer hata değerlendirmesi sonucunda hata oranı kabul edilemeyecek kadar fazla ise hatayı azaltmanın bir yolu, ilk işleme dönmek ve farklı bir deneme çözüm oluşturmak olabilir. İlkinden daha fazla parametre (a_i) içerecektir. Bunu yapmanın bir yolu öncekilere yeni deneme fonksiyonlar (böylece yeni parametreler) eklemektir. Daha sonra aynı işlemler tekrarlanır. Elde edilen hata yine kabul

edilemeyecek kadar büyük ise daha çok sayıda deneme (trial) fonksiyon ekleyerek, hata kabul edilebilir ölçüye ulaşana kadar devam edilir.

Görülüyor ki “deneme çözüm” terminolojisi tamamen uygun gelmektedir. Çünkü istediğimiz kadar az hata ile sonuç veren çözümü deneme yoluyla arıyoruz.

Tüm deneme çözüm metodları (Kollokasyon, Subdomain, En küçük kareler, Galerkin, Ritz) sadece optimizasyon kriterlerinde farklılık gösterirler. Yine hepsinde bulunan hata aynı şekilde değerlendirilir [27].

Örnek 2.1: 1-D sınır-değer problemi (denge problemi) düşünelim. Bir adi diferansiyel denklem yönetici denklemdir. ($1 \leq x \leq 2$)

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dU(x)}{dx} \right) = \frac{2}{x^2}, \quad U(1) = 2, \quad \left(-x \frac{dU(x)}{dx} \right)_{x=2} = \frac{1}{2} \quad (2.3)$$

$$x \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \frac{dU(x)}{dx} = \frac{2}{x^2} \quad (2.4)$$

Bu ise aşağıda verilen genel ikinci merteben adi diferansiyel denklemin özel bir halidir.

$$c_2(x) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + c_1(x) \frac{dU(x)}{dx} + c_0(x) U(x) = f(x) \quad (2.5)$$

Burada $c_2(x) = x$, $c_1(x) = 1$, $c_0(x) = 0$, $f(x) = \frac{2}{x^2}$ olup $c_2(x)$ ve $c_1(x)$ katsayıları

$$c_1(x) = \frac{dc_2(x)}{dx} \quad (2.6)$$

şartını sağlar. (2.5) denklemi

$$\frac{d}{dx} \left[c_2(x) \frac{dU(x)}{dx} \right] + c_0(x) U(x) = f(x) \quad (2.7)$$

olur ki (2.3) formunu alır.

Bu örnek problemin çözüm bölgesi $1 \leq x \leq 2$ aralığı olsun. Bölgenin sınırlarının iki uç noktası $x = 1$ ve $x = 2$ dir. Sınır şartları her bir noktada,

$$U(1) = 2 \quad (2.8a)$$

$$\left(-x \frac{dU}{dx}\right)_{x=2} = \frac{1}{2} \quad \text{ya da} \quad \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=2} = -\frac{1}{4} \quad (2.8b)$$

dir.

$$\tau(x) = -x \frac{dU}{dx}$$

akı (akı) adını alır. Böylece (2.8) denklemleri

$$U(1) = 2 \quad (2.9)$$

$$\tau(2) = \frac{1}{2} \quad (2.10)$$

olarak gösterilir. Biz $U(x)$ ve $\tau(x)$ için yaklaşık çözümler bulmaya çalışacağız.

2.1.1 Örnek problem için bir deneme çözüm fonksiyonu oluşturma

$\phi_i(x)$ deneme fonksiyonunun seçimi önemli bir aşamadır. Bunları seçerken kolay çalışabileceğimiz tipte seçmek uygun olur. Çünkü sık sık türev ve integrallerin alınması ile uğraşacağız. Polinom şeklinde seçilmeleri bu işlemler için en kolay seçimdir. Böylece bir polinomun yada kuvvet serisinin ilk birkaç terimini seçmek uygundur.

$$\tilde{U}(x; a) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_Nx^{N-1}. \quad (2.11)$$

Sınır şartları göz önüne alınacaktır. Bir sınır-değer probleminin çözümü (tamamen ya da yaklaşık olarak) iki şartı sağlamalıdır. Bunlardan ilki, bölgenin iç kısmında yönetici denklemi sağlaması gerektiği, diğeri ise bölgenin sınırları üzerinde sınır şartlarını sağlaması gereğidir.

Optimizasyon kriteri birinci şart için uygundur. Yani o bölgenin içinde yönetici denklemi ya da varyasyon denklemini sağlamayı hedefler. $\tilde{U}(x, a)$ 'nın sınır koşullarını sağlaması için farklı bir operasyon gerekir. Bu operasyona “sınır şartlarını zorlamak” diyeceğiz. Bunu sağlamanın iki temel yöntemi vardır. Teorik metot ve nümerik metottur.

Teorik Metot : Sınır şartlarını (ya da onların bazılarını) doğrudan deneme fonksiyona uygulamaktır. Bu işlem en başta yapılır ki sınır şartlarını sağlayan deneme çözüm ön plana çıksın.

Nümerik Metot: Sonraki aşamada ağırlıklı kalan (rezidü) yöntemi uygulanır. Her iki metotla da aynı sonuca ulaşılır. Çünkü ikisi de farklı sırada ama aynı operasyonlardır. Bunların seçimi şöyle yapılır.

Bilgisayar kullanmanın yaygınlaşmasından önce genellikle teorik metot kullanılıyordu. Çünkü teorik metot, sayısal hesaplama gereksinimlerini önemli bir şekilde azaltır. Buna rağmen karmaşık problemlerde deneme fonksiyonlarının seçimi çok zor ya da imkânsız hale gelebilir. Sonuç olarak bu metot sadece çok basit problemler için sınırlı kalır (şimdi üzerinde durduğumuz problem gibi.) Ama özel durumlarda avantajlı olabileceği için kullanılabilir.

Nümerik metot avantajlara ve dezavantajlara sahiptir. Deneme fonksiyonlar kolayca oluşturulabilir fakat daha sonra sınır koşullarının uygulanması nümerik olarak çok karışık olabilir. Buna rağmen bu karmaşıklık bilgisayarlar sayesinde sorun olmaktan çıkmıştır. Günümüz bilgisayarlarının gücü çok karmaşık problemleri çözmeye yetmektedir. SEM’de de nümerik metot bilgisayar sayesinde genellikle tercih edilir. Örneğimiz için, sınır şartlarını uygulamak için teorik metodu kullanacağız. Çünkü

- i) Öncelikle, çok sayıda işlemlere girmeden deneme çözüm prosedürü yapısına girmek istiyoruz.
- ii) Problem teorik metot ile çözülebilecek kadar basit.
- iii) Teorik metodu anlamak, nümerik metodu anlamaya yardımcı olacaktır. İleriki kısımlarda nümerik metotlarda ele alınacaktır.

Teorik metot aşağıdaki kural ile tarif edilebilir [27]:

Deneme çözümü olan $\tilde{U}(x; a)$ deki deneme fonksiyonlar, a_i lerin tüm değerleri için sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilecektir. Bu kurala göre, deneme fonksiyonları aşağıdaki kurala göre seçeceğiz.

(2.8) deki ilk sınır şartını düşünelim. ($U(1) = 2$). Bu (2.1) deki genel deneme çözüme uygulanırsa,

$$\tilde{U}(1; a) = \phi_0(1) + a_1\phi_1(1) + a_2\phi_2(1) + \cdots + a_N\phi_N(1) = 2 \quad (2.12)$$

elde edilir. Sınır şartının sağlanması için,

$$\left. \begin{aligned} \phi_0(1) &= 2 \\ \phi_i(1) &= 0, \quad i = \overline{1, N} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

olmalıdır. Buradaki strateji, bir parametre ile çarpılan tüm deneme fonksiyonları $x = 1$ de yok etmektir. $\tilde{U}$, $x = 1$ de a_i lerin tümünden bağımsız olacaktır. O sadece $\phi_0(1)$ e eşit olacaktır. Bu yüzden biz $\phi_0(1)$ 'in sınır şartlarının sağlanması istenir.

Benzer düşünce ile (2.8) deki ikinci sınır koşulu, $\tilde{U}(x; a)$ ya uygulanırsa,

$$\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=2} = \left(-x \frac{d\phi_0}{dx}\right)_{x=2} + a_1 \left(-x \frac{d\phi_1}{dx}\right)_{x=2} + \dots + a_N \left(-x \frac{d\phi_N}{dx}\right)_{x=2} = \frac{1}{2} \quad (2.14)$$

olur. İstedığımız şartın sağlanması için,

$$\left. \begin{aligned} -x \left(\frac{d\phi_0}{dx}\right)_{x=2} &= \frac{1}{2} \\ -x \left(\frac{d\phi_i}{dx}\right)_{x=2} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

olur. (2.13) ve (2.15) eşitliklerini sağlayan deneme fonksiyonlar bulunabilirse $\tilde{U}(x; a)$ her iki sınır koşulunda (a_i nin tüm değerleri için) sağlar. Sınır koşullarını sağlayacak şekilde, a_i katsayılarının ne olması gerektiği optimizasyon kriteri ile belirlenecektir. Deneme çözümün, sınır koşullarını sağlamaya zorlanması, deneme çözüm metodunun en göze çarpan özelliğidir [27].

Genellikle bir parametre ile çarpılmayan $\phi_0(x)$ deneme fonksiyonunun sınır koşullarını sağlaması ve parametrelerle çarpım halinde olan diğer deneme fonksiyonların tamamının da sınır koşullarını sağlaması beklenir. Daha sonraki kısımda ortogonal diferansiyel denkleme nasıl bir dönüşüm yapılarak $\tilde{U}(x; a)$ 'in bazı sınır koşullarını sağlamaya (hepsini değil) zorlanacağı gösterilecektir.

Şimdi bazı deneme fonksiyonlar oluşturalım ki (2.13) ve (2.15) denklemlerini sağlasın. Öncelikle polinom şeklinde ele alalım ve (2.11) denklemini $N = 4$ için (keyfi olarak) ele alalım. Böylece kübik bir polinom,

$$\tilde{U}(x; a) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (2.16)$$

olur. (2.16) daki $\tilde{U}(x; a)$ deneme çözüme sınır koşullarını uygulayalım.

$$\tilde{U}(1; a) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2 \quad (2.17)$$

$$\left[-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]_{x=2} = -2a_2 - 8a_3 - 24a_4 = \frac{1}{2}$$

olur. Düzenlenerek,

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 2 \\ a_2 + 4a_3 + 12a_4 &= -\frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

yazılabilir. (2.18) denklemlerine zorlama yada kısıtlama denklemi ya da lineer zorlama denklemleri denir. Çünkü tüm a_i ler birinci derecedendir. a_i lerin her biri birbirinden bağımsız olmaya zorlanıyor. Zorlama denklemlerinin sayısı, (2.16) eşitliğindeki bağımsız a_i lerden daha az sayıdadır. Böylece (2.16) denkleminde dört a_i var ve 2 zorlama denkleminiz olduğu için sadece iki bağımsız a_i ($4 - 2 = 2$) bırakılır. Bu nedenle (2.16) daki a_i lerin ikisini elimine etmeliyiz.

Bağımlı a_i yi elde etmenin bir yolu (2.18)'i, (2.16) da yerine yazmaktır. Genellikle elimine etmek için a_i lerin herhangi ikisini seçeriz. En kolay seçim, kısıtlayıcı (zorlayıcı) denklemlerden sadece birinde olanından başlamaktır. (2.18) deki a_1 gibi. Böylece (2.18)'in ilkinden a_1 çekilirse,

$$a_1 = 2 - a_2 - a_3 - a_4 \quad (2.19)$$

olur. Bunu (2.16) da yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x; a) &= (2 - a_2 - a_3 - a_4) + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \\ &= 2 + a_2(x - 1) + a_3(x^2 - 1) + a_4(x^3 - 1) \end{aligned} \quad (2.20)$$

elde edilir. Şimdi (2.18) in ikinci denkleminde, kalan a_i lerden herhangi birini (a_2 olsun) çekersek,

$$a_2 = -\frac{1}{4} - 4a_3 - 12a_4 \quad (2.21)$$

olur. Bunu (2.20) de yerine yazarsak,

$$\tilde{U}(x; a) = 2 - \frac{1}{4}(x - 1) + a_3(x - 1)(x - 3) + a_4(x - 1)(x^2 - x - 11) \quad (2.22)$$

elde edilir. Bu, deneme çözümünün istenen formudur. Eğer (2.18) denklem sisteminin her iki denklemini de tüm a_i leri içerseydi, a_1 diğer zorlayıcı denklemlerle, deneme

çözümünden elimine edilmeliydi. Aksi taktirde ikinci zorlayıcı denklem uygulandığı zaman, a_1 , deneme çözümde yine görünecekti.

(2.22) denklemi genel formda yazılırsa,

$$\tilde{U}(x; a) = \phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) \quad (2.23)$$

bulunur. Burada,

$$\phi_0(x) = 2 - \frac{1}{4}(x - 1),$$

$$\phi_1(x) = (x - 1)(x - 3),$$

$$\phi_2(x) = (x - 1)(x^2 - x - 11)$$

dir. a_3 ve a_4 notasyonu sırası ile a_1 ve a_2 ile değiştirildi. Çünkü sol tarafta sadece iki parametre kaldı ve 1 ve 2 numaraları onlar için uygun oldu. Deneme çözüm için (2.9) daki akı (flux) ifadesi (2.23) e göre,

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(x; a) &= -x \frac{d\tilde{U}(x; a)}{dx} \\ &= \left(-x \frac{d\phi_0(x)}{dx} \right) + a_1 \left(-x \frac{d\phi_1(x)}{dx} \right) + a_2 \left(-x \frac{d\phi_2(x)}{dx} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

olur. Burada

$$-x \frac{d\phi_0(x)}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x - 2),$$

$$-x \frac{d\phi_1(x)}{dx} = -2x(x - 2),$$

$$-x \frac{d\phi_2(x)}{dx} = -3x(x - 2)(x + 2)$$

olur.

Görülüyor ki teorik metot, sınır koşullarının sağlanması dâhil çok karışık olmadı. Ancak deneme fonksiyonların sayısı daha fazla olduğu takdirde bir karışıklık çıkacağı açıktır. Ayrıca bu örnek sadece bir boyutlu problemdi ve sınırları sadece iki noktadan oluştuğu için sadece iki sınır koşulu vardı. İki boyutlu problemlerde sınırlar bir eğri olacağından, eğri boyunca çok sayıda sınır koşulu olabilir. Sonuç olarak, (2.18)'e benzer birçok zorlayıcı denklem elde edilir. Açıktır ki sınır koşullarını teorik

olarak sağlatmak oldukça zor bir durumdur. Böylece ileriki bölümlerde nümerik metodun daha pratik olduğu belirtilecektir.

şimdi ikinci operasyona geçilecek ve optimizasyon kriterleri uygulanarak en iyi nümerik a_1 ve a_2 katsayıları bulunmaya çalışılacaktır. (2.23) deneme çözüm için biliyoruz ki birçok yaklaşım kriteri popüler olarak mevcuttur. Genellikle hepsinden de oldukça yaklaşık bir çözüm elde edilir [27-28].

2.1.2 Ağırlıklı kalanlar metodu kullanılarak yaklaşım çözümünün bulunması

Öncelikle kalan (rezidü) miktarını belirlemeliyiz. (2.3) denklemindeki tüm terimleri sol tarafa atarız. Böylece sağ taraf sıfıra eşit olur.

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dU(x)}{dx} \right) - \frac{2}{x^2} = 0 \quad (2.25)$$

Açıktır ki $U(x)$ tam çözümü (2.25) eşitliğinin sol tarafında yerine yazılırsa, eşitliğin sağ tarafı sıfır olacaktır. Eğer herhangi bir fonksiyon, mesela $\tilde{U}(x; a)$ deneme zm, $U(x)$ yerine konulursa, (2.25) denkleminin sağ tarafının sıfırdan farklı olacağı açıktır. Bu sıfırdan farklı değer ‘‘kalan’’ ya da ‘‘rezidü’’ adını alır ve $R(x; a)$ olarak gösterilir.

$$R(x; a) = \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\tilde{U}(x; a)}{dx} \right) - \frac{2}{x^2} \neq 0 \quad (2.26)$$

Böylece (2.23) eşitliği (2.26) da yerine yazılırsa,

$$R(x; a) = -\frac{1}{4} + 4(x - 1)a_1 + 3(3x^2 - 4)a_2 - \frac{2}{x^2} \quad (2.27)$$

elde edilir (buna rezidü denir). Ağırlıklı kalanlar metodu kriterinin temel fikri şudur:

(2.27) denklemi için öyle a_1 ve a_2 nümerik değerleri bulacağız ki tüm bölge boyunca bütün x değerleri için $R(x; a)$ olabildiğince sıfıra yakın olsun.

Tam zm sınırlar üzerindeki sınır koşullarını ve tüm bölge üzerinde diferansiyel denklemi sağlayan bir fonksiyondur. Bölge üzerinde diferansiyel denklemi sağlayan her fonksiyon ayrıca rezidy sıfır yapmalıdır (tüm bölgede). Eğer bulacağımız $\tilde{U}$, bölge içerisindeki her yerde $R(x; a) = 0$ yapıyorsa ve sınırı koşullarını sağlıyorsa, $\tilde{U}$

tam çözüm olan U dur. “İyi tanımlı (well-posed)” problemler için tam çözüm sadece bir tanedir [27].

Eğer $\tilde{U}$, $R(x; a)$ yı sıfırdan çok az farklı kılıyorsa, $\tilde{U}$ deneme çözümü U ya oldukça yakındır. Burada yakınlığı iki farklı şekilde ele almalıyız. Bir yandan rezidünün sıfıra ne kadar yakınlığı ile ilgilenirken diğer yandan $\tilde{U}$ nın U ya yakınlığı ile ilgileneceğiz. Bunu $E(x)$ ile gösterirsek,

$$E(x) = U(x) - \tilde{U}$$

dir. Biz rezidüsel hatayı minimize etmeye çalışacağız. Bu durumda $E(x)$ çözüm hatası da aynı zamanda minimize olacaktır.

Bir ağırlıklı kalanlar metodu kriterinin uygulanması (herhangi bir sınır değer problemi için) bir cebirsel denklemlerin setini oluşturur. Onların çözümü a_i ler için en iyi nümerik değerleri verir. Her bir farklı ağırlıklı kalanlar metodu kriteri yaklaşık çözüm tipinin seçimine bağlı olarak, genelde farklı değerler seti (bazen iki set aynı olabilir) verecektir. Deneme fonksiyonların seçimine bağlı olarak, farklı çözümler bir diğerine ve tam çözüme yakın olabilir. Pratikte araştırmacı sadece bir kriteri kullanmaya ihtiyaç duyar.

Şimdi dört farklı ağırlıklı kalanlar metodu kriterini problemimiz için uygulayalım. Rezidü olarak (2.27) denklemi kullanılır.

a) Kollokasyon Metodu

Her bir bilinmeyen a_i parametresi için, bölge içinde bir x_i noktası seçilir. Her x_i noktasında rezidü sıfır olmaya zorlanır.

$$\begin{aligned} R(x_1; a) &= 0, \\ R(x_2; a) &= 0, \\ &\vdots \\ R(x_N; a) &= 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Bir deneme çözüm N parametrelili olduğu için, N rezidü denkleminde bir sistem oluşturacağız. x_i noktaları kollokasyon noktaları olarak adlandırılır. Bu noktalar bölgenin sınırları üzerinde ya da bölgenin içinde herhangi bir yerde olabilir.

Şu andaki problem iki parametreye sahip olduğu için iki kollokasyon noktası seçmeleyiz. Mesela $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{5}{3}$ alalım.

Bu noktaları (2.27) de yerine yazarsak

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3}a_1 + 4a_2 &= \frac{11}{8} \\ \frac{8}{3}a_1 + 13a_2 &= \frac{97}{100} \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

olur. Bu çözülürse,

$$a_1 = 2,0993, a_2 = -0,3560 \quad (2.30)$$

bulunur. (2.30) eşitliklerini (2.23) ve (2.24) de yerine konursa problemimiz için yaklaşık çözüm bulunur.

$$\tilde{U}_c(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + 2,0993(x-1)(x-3) - 0,3560(x-1)(x^2+x-11) \quad (2.31)$$

$$\tau_c(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(x-2) - 4,1,1986x(x-2) + 1,0680x(x-2)(x+2)$$

Burada c alt simgesi bunun kollokasyon çözümü olduğunu tarif eder. Açıkça görülüyor ki deneme çözümümüz sınır şartlarını sağlamaya zorlandığı için sınır şartlarını tam olarak sağlıyor. Kollokasyon noktalarında $\tilde{U}_c$ ve τ_c lerdeki hata sıfır değildir. Bu çözümdeki hata değil kollokasyon noktalarındaki hatadır [27].

b) Subdomain Metodu

Bilinmeyen her bir a_i parametresi için bir Δx_i aralığı seçilir (bölgenin içinde). Bu durumda her bir aralıkta ki kalanın sıfır olmasına zorlanacaktır.

$$\frac{1}{\Delta x_1} \int_{\Delta x_1} R(x; a) dx = 0$$

$$\frac{1}{\Delta x_2} \int_{\Delta x_2} R(x; a) = 0$$

.

.

.

(2.32)

$$\frac{1}{\Delta x_N} \int_{\Delta x_N} R(x; a) = 0$$

Bir deneme çözüm N parametreye sahip olduğu için, N tane kalan denklemden oluşan bir sisteme sahip oluruz. Δx_i aralıklarına subdomainler (alt bölgeler) denir. Herhangi bir şekilde seçilebilirler.

Bizim problem için iki alt bölge seçmeliyiz. Uygun bir seçim bölgeyi iki eşit parçaya bölmektedir. $\Delta x_1 = 1 < x < 1.5$ ve $\Delta x_2 = 1.5 < x < 2$ şeklindedir. (2.27) denklemini (2.32) de yerine yazarsak,

$$\int_1^{1.5} \left(-\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) dx = 0$$

(2.33)

$$\int_{1.5}^2 \left(-\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) dx = 0$$

Her bir integralin önündeki $\frac{1}{\Delta_i}$ sabitleri sadeleştirildi integraller hesaplanırsa iki cebirsel denklem elde edilir.

$$\frac{1}{2}a_1 + \frac{9}{8}a_2 = \frac{19}{24}$$

(2.34)

$$\frac{3}{2}a_1 + \frac{63}{8}a_2 = \frac{11}{24}$$

olup ,

$$a_1 = 2,5417$$

$$a_2 = -0.4259$$

(2.35)

elde edilir. (2.35)'i (2.23) ve (2.24) de yerine yazılırsa,

$$\tilde{u}_s(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + 2,5417(x-1)(x-3) - 0,4259(x-1)(x^2+x+1) \quad (2.36)$$

$$\tilde{T}_s(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-1) - 5,0834x(x-2) + 1,2777x(x-2)(x+2)$$

olarak bulunur. Sınır koşullarının sağlandığı açıkça görülür.

c) En Küçük Kareler Metodu

Bu kısımda her bir a_i için, kalıntının karesinin tüm bölge üzerindeki integralini minimize yapmaya çalışacağız. Kalanın karesinin integrasyonu a_i 'lerin bir fonksiyonudur. Minimizasyon her bir a_i 'ye göre kısmi türevin sıfıra eşitlenmesi ile yapılır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1} \int_1^2 R^2(x; a) dx &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial a_2} \int_1^2 R^2(x; a) dx &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial a_N} \int_1^2 R^2(x; a) dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

olup türevleri integralin içine atarsak,

$$\int_1^2 R(x; a) \frac{\partial R(x; a)}{\partial a_1} dx = 0, \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 R(x; a) \frac{\partial R(x; a)}{\partial a_2} dx &= 0, \\ &\vdots \\ \int_1^2 R(x; a) \frac{\partial R(x; a)}{\partial a_N} dx &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. İşlem sonunda N tane rezidü denkleminin bir sistemi ile N parametrelili bir deneme çözüm elde edilir. (2.27)'den,

$$\frac{\partial R(x; a)}{\partial a_1} = 4(x - 1) \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial R(x; a)}{\partial a_2} = 3(3x^2 - 4)$$

olur. Böylece iki rezidü denklemi,

$$\int_1^2 \left[-\frac{1}{4} + 4(x - 1)a_1 + 3(3x^2 - 4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right] 4(x - 1)dx = 0, \quad (2.40)$$

$$\int_1^2 \left[-\frac{1}{4} + 4(x - 1)a_1 + 3(3x^2 - 4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right] 3(3x^2 - 4)dx = 0$$

Bu integraller hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \frac{16}{3}a_1 + 27a_2 &= 8 \ln 2 - \frac{7}{2}, \\ 27a_1 + \frac{711}{5}a_2 &= \frac{33}{4} \end{aligned} \quad (2.41)$$

elde edilir. Buradan,

$$a_1 = 2,3155, \quad (2.42)$$

$$a_2 = -0,3816$$

bulunur. (2.42)'yi (2.23) ve (2.24) de yerlerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_E(x) &= 2 - \frac{1}{4}(x - 1) + 2.3155(x - 1)(x - 3) - 0.3816(x - 1)(x^2 + x + 1) \\ \widetilde{T}_E(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x - 1) - 4.6310(x - 2) + 1.1448x(x - 2)(x + 2) \end{aligned} \quad (2.43)$$

olarak elde edilir.

d) Galerkin Metodu

Her bir a_i parametresi için tüm bölge üzerinde $R(x; a)$ nın bir ağırlıklı ortalamasını istiyoruz. Ağırlık fonksiyonları her bir a_i ile çarpım halinde olan ϕ_i 'lerdir.

$$\int_1^2 R(x; a) \phi_1(x) dx = 0,$$

(2.44)

$$\begin{aligned} \int_1^2 R(x_i a) \phi_2(x) dx &= 0, \\ \vdots \\ \int_1^2 R(x_i a) \phi_N(x) dx &= 0. \end{aligned}$$

Yine N parametrelili deneme fonksiyonlar N tane rezidü denkleminin bir sisteminden türetilir. (2.23) ve (2.27) den yararlanarak,

$$\int_1^2 \left[-\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right] (x-1)(x-3) dx = 0 \quad (2.45)$$

$$\int_1^2 \left[-\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right] (x-1)(x^2+x-11) dx = 0$$

integral işlemleri sonucunda,

$$-\frac{5}{3}a_1 - \frac{41}{5}a_2 = \frac{29}{6} - 8 \ln 2 \quad (2.46)$$

$$-\frac{41}{5}a_1 - \frac{81}{2}a_2 = \frac{211}{16} - 24 \ln 2$$

olup,

$$a_1 = 2,1378, a_2 = -0,3477 \quad (2.47)$$

elde edilir. (2.47) yi (2.23) ve (2.24) de yerine koyarsak,

$$\widetilde{U}_g(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + 2,1378(x-1)(x-3) - 0,3477(x-1)(x^2+x-11) \quad (2.48)$$

$$\widetilde{T}_g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2) - 4,2756x(x-2) + 1,0431x(x-2)(x+2)$$

olarak bulunur.

Yukarıdaki tüm kriterler aşağıdaki genel forma sahiptir:

$$\int_D R(x; a) W_1(x) dx = 0 \quad (2.49)$$

$$\int_D R(x; a) W_2(x) dx = 0$$

$$\vdots$$

$$\int_D R(x; a) W_N(x) dx = 0$$

Burada $R(x;a)$ rezidü ; $W_1(x), W_2(x), \dots, W_N(x)$ fonksiyonları N farklı ağırlık fonksiyonu ve integral problemin D bölgesi üzerindedir. Deneme çözümdeki N tane a_i parametrelerini belirlemek için her biri farklı N tane W_i nin kullanıldığı N denklem olmalıdır.

Geriye dönüp 4 deneme çözüm metoduna baktığımızda gördük ki her biri ortogonal diferansiyel denklem yaklaşık olarak cebirsel denklemlerin bir sistemine dönüştürüyor. Bu yüzden, söyleyebiliriz ki, deneme çözüm prosedürü bilinmeyen $U(x)$ fonksiyonundan bilinmeyen a_i parametrelerinin çözümüne geçiş prosedürüdür. Buradan da matematiksel hesap (türev ya da integral denklemleri gibi) işlemleri cebirsel formüller için kullanılır.

Lineer cebirsel denklemler sistemini çözebilen geliştirilmiş bir çok klasik metotlar vardır. Bunlar iki kategoride toplanırlar. İlki doğrudan, ikincisi de yinelemeli (iteratif) şeklindedir. Bütün doğrudan metotların ortak noktası, her bir denklemden parametreleri başarılı bir şekilde elimine etme tekniği olmalarıdır. Tüm bunların içerisinde en temel olanı Gauss eliminasyon yöntemidir [27].

2.2 Dört Çözümün Karşılaştırılması

Örnek problemimiz için dört yaklaşık çözüm elde edildi. Genellikle tam çözümü bilmediğimiz için bu yaklaşık çözümlerin hangisi daha uygundur sorusu açığa çıkar. Bulunan dört çözüm bölge içerisindeki her bir noktada $\tilde{U}(x)$ için $\% \pm 5$ oranında birbirlerinden farklılık gösterirler. Yine bölge içerisindeki her bir noktada $\tilde{T}(x)$ için $\% \pm 10$ kadar farklılık gösterirler. Söyleyebiliriz ki bir fonksiyonun türevi genellikle fonksiyonun kendisinden daha az kesinlik gösterir. Problemimiz için sadece bir tam çözüm olduğundan, farklı yaklaşık çözümlerin her birinin diğerine yakın olması bizi doğru yolda olduğumuz konusunda cesaretlendirir. Eğer her bir çözümün eğrileri birbirinden farklı şekilde olsaydı, bunlardan sadece birisinin tam çözüme yakın olduğunu düşünürdük (ya da hiçbirinin). Fakat hangisinin

tam çözüme yakın olduğunu söyleyecek bir yol yoktur. Bu yüzden olmasını istediğimiz şey, her bir yaklaşık çözümün birbirine yakın olmasıdır. Bu eğrilerin tamamı yanlış bir fonksiyona (tam çözüm olmayan) yakın olması da elbette bir ihtimaldir. Böylece farklı yaklaşık çözümlerin eğrilerinin birbirine yakın olması, onların tam çözüme yakın olması anlamına gelmez. Bu durumda “yaklaşık çözümlerin bir serisinin yakınsaklığı” düşüncesi doğar [5,6,27].

2.3 Yaklaşık Çözümlerin Bir Serisinin Yakınsaklığı

Aslında bu konu oldukça çok matematiksel bilgi isteyen bir konudur. Bu zorlu işleyişlerin bir çoğu fonksiyonel analiz alanındandır. Aşağıdaki işleyiş mümkün olduğunca matematiksel formülasyondan kaçınılarak konuyu basitleştirerek anlatmak olacaktır.

Yakınsaklık kavramını kabaca anlayabilmek için sadece bir optimizasyon kriterini ele aldık. İki ya da daha fazla deneme çözümler türetmeliyiz. Amacımız yaklaşık çözümlerin aşağıdaki gibi bir serisini oluşturmaktır.

$$\widetilde{U}_1(x), \widetilde{U}_2(x), \widetilde{U}_3(x), \dots$$

Böyle bir seriyi oluşturmak için dönüşümler ardarda uygulanmalıdır. Her seferinde daha iyi bir deneme çözüm elde edilir. Birinci deneme çözümü oluşturalım;

$$\widetilde{U}_1(x; a) = \phi_0(x) + \sum_{j=1}^L a_j \phi_j(x) \quad (2.61)$$

olur. Daha sonra ikinci bir deneme çözüm olan $\widetilde{U}_2(x; a)$ yi üretelim. Bu ikinci deneme çözüm ilkinden daha fazla sayıda sabit a_i katsayısı içerir. Bunu yapmanın kolay bir yolu (tek yol değildir) , $\widetilde{U}_1(x; a)$ ya bir ya da daha fazla deneme fonksiyonlar eklemektir. Örneğin;

$$\widetilde{U}_2(x; a) = \widetilde{U}_1(x; a) + \sum_{j=L+1}^M a_j \phi_j(x) \quad (2.62)$$

Böylece ikinci yaklaşık çözüm olan $\widetilde{U}_3(x; a)$ yi üretmek için yine $\widetilde{U}_2(x; a)$ ye deneme fonksiyonlar ekleyelim.

$$\widetilde{U}_3(x; a) = \widetilde{U}_2(x; a) + \sum_{j=M+1}^N a_j \phi_j(x) \quad (2.63)$$

Böylece üçüncü deneme çözüm üretildi. Bu işlemler devam ettirilerek istenildiği kadar deneme çözüm elde edilebilir. Pratik olarak iki ya da üç çözüm genelde yeterlidir. Devam ettiğimiz taktirde deneme çözüme daha fazla sabit a_i ekleyeceğimiz aşikardır. Böylece umuyoruz ki tam çözüme gittikçe daha çok

yaklaşıyoruz. Yani yaklaşık çözümler serisine devam edildiğinde, sabit a_i sayısı sonsuza yaklaşırken, deneme çözümde tam çözüme yakınsar.

$$|U(x) - \widetilde{U}_n(x)| \rightarrow 0 \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad , \quad 1 \leq x \leq 2 \quad (2.64)$$

Burada $\widetilde{U}_n(x)$, $\widetilde{U}_{n-1}(x)$ den daha çok fazla sayıda sabit katsayı içerir. (2.64) denklemi noktasal yakınsaklığın bir ifadesidir. Yaklaşık çözümün bölgenin içindeki her noktada sabit a_i sayısının artmasıyla birlikte tam çözüme yakınsadığını gösteriyor. Sonlu elemanlar analizi, bölge içindeki noktalarda $\widetilde{U}(x)$ ve $\widetilde{T}(x)$ için çok kesin sonuçlar verir. Bu nedenle özellikle $\widetilde{U}(x)$ ve $\widetilde{T}(x)$ in noktasal yakınsaklığı ile ilgileneceğiz.

Elimizde yaklaşık çözümlerin bir serisi mevcut ve öyle ki bunlar (2.64) denkleminde göre noktasal yakınsaklığa sahiptir. Bu durumda seri içindeki iki farklı yaklaşık çözüm birbirine yakın olmalıdır. Yani

$$|\widetilde{U}_m(x) - \widetilde{U}_n(x)| \rightarrow 0 \quad , \quad m, n \rightarrow \infty \quad , \quad 1 \leq x \leq 2 \quad (2.65)$$

olmalı. (2.64) ün gerçekleşmesi (2.65) in doğruluğunu gösterir. Fakat tersi doğru değildir. Yani (2.65) in gerçekleşmesi (2.64) için yeterli değildir. (2.65) in doğruluğu (2.64) denkleminde çıkar.

$$|U - \widetilde{U}_n| + |\widetilde{U} - U_m| \geq |(U - \widetilde{U}_n) - (U - \widetilde{U}_m)| = |\widetilde{U}_m - \widetilde{U}_n|$$

olduğu aşıkardır. Ek olarak belirtelim ki (2.65) denkleminde tam çözümden bağımsızdır ancak (2.64) bağımlıdır. Bu nedenlerle bizim kesinliğe karar vermemiz için, (2.65) denkleminde bulmamız pratik bir yol olacaktır. Başka bir ifadeyle, kesinliğe karar vermek için iki ya da daha fazla yaklaşık çözümden oluşan bir seri oluşturacağız ve ardışık çözümler arasındaki farklılığı inceleyeceğiz.

Şimdi bu fikirleri örnek problemimiz üzerinde uygulayalım. Yakınsaklık görüşü bir optimizasyon kriteri için uygulanır. Daha önce bulduğumuz çözümlerden sadece bir tanesini alacağız. Galerkin çözümünü alalım.

Şimdi üçüncü çözümü oluşturalım. Bunu yapmak için (2.23) denkleminde üç sabit katsayı ekler ve benzer şekilde çözersek,

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_3(x; a) = & 2 - \frac{1}{4}(x - 1) + a_1(x - 1)(x - 3) + a_3(x - 1)(x^2 + x - 11) \\ & + a_3(x - 1)(x^3 + x^2 + x - 31) \end{aligned} \quad (2.67)$$

bulunur.

Bu durumda aynı prosedür ile,

$$\phi_3(x) = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 31), \quad (2.68)$$

$$-\frac{d\phi_3(x)}{dx} = -4x(x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

bulunur. (2.68) denklemleri (2.13) ve (2.15) sınır koşullarını sağlar.

$$\phi_3(1) = 0, \quad \left[\frac{d\phi_3}{dx} \right]_{x=2} = 0. \quad (2.69)$$

Daha önceki gibi hesaplamaları yaparak, $\widetilde{U}_1(x; a)$ yı kullanalım ve yeni çözümler elde edelim. Böylece üç çözümden oluşan bir seri elde edeceğiz.

$$\widetilde{U}_1(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + 0,4271(x-1)(x-3), \quad (2.70)$$

$$\widetilde{U}_2(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + 2,1378(x-1)(x-3) - 0,3477(x-1)(x^2 + x - 11),$$

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_3(x) = & 2 - \frac{1}{4}(x-1) + 3,3725(x-1)(x-3) - 0,8881(x-1)(x^2 + x - 11) \\ & + 0,0864(x-1)(x^3 + x^2 + x - 31) \end{aligned}$$

ve

$$\widetilde{T}_1(x) = \frac{x}{4} - 0,8542x(x-2),$$

$$\widetilde{T}_2(x) = \frac{x}{4} - 4,2756x(x-2) + 1,043x(x-2)(x+2),$$

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_3(x) = & \frac{x}{4} - 6,7450x(x-2) + 2,6643x(x-2)(x+2) \\ & - 0,3456x(x-2)(x^2 + 2x + 4) \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki görüşlere göre her bir yeni yaklaşık çözüm, tam çözüme yaklaşıp. Yakınsama teoremine göre deneme fonksiyonlar belirli şartları sağlıyorsa yaklaşık çözümler serisi tam çözüme yakınsar.

Yakınsaklık teoremleri, deneme fonksiyonların iki şartı da sağlamasını isterler. Bu şartlar tamlık ve süreklilik şartlarıdır. Tamlık şartı temel ve geniş bir konu olarak gösterilirken, süreklilik tamlığı tanımlamak için gerekli bir özelliktir. Tamlık şartı yaklaşık çözüm serisinin tam çözüme istenildiği kadar yaklaşabileceği fikrine dayanır. Bu şart gerektirir ki deneme fonksiyonlar bazı fonksiyonların bir sonsuz serisine aittir. Bu bazı fonksiyonlar dediğimiz fonksiyonlar, tam çözüme

istenildiği kadar yaklaşabilen fonksiyonların keyfi büyüklükte fakat sonlu sayıdaki bir lineer kombinasyonudur. Bu yakınlık enerji hatası olarak ölçülür. Noktasal hatanın bir fonksiyonun tüm bölge üzerindeki integrali (global ortalama) olarak tanımlanır [27].

$$\text{Enerji hatası} = \left[\int_D E(x).A.[E(x)]dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

burada

$$E(x) = U(x) - \tilde{U}(x)$$

ve A , yönetici denklem için diferansiyel operatördür. Burada,

$$A = \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right)$$

dir. Fiziksel uygulamalarda $E(x).A.[E(x)]$ ya da benzer olarak $U(x).A.[U(x)]$ ifadesi enerji yoğunluğu olarak bilinir.

Yukarıdaki özelliklere sahip fonksiyonların bir sonsuz serisi, enerjideki tamlık olarak ifade edilebilir. Deneme fonksiyonlar böyle bir seriye aitse, deneme çözümler tam çözüme yakınsayacaktır (Enerjiye bağlı olarak ya da enerji hatası sıfıra istenildiği kadar yakın yapılarak).

(2.71) denklemi A operatörü içerisindeki türevler mevcut ise anlamlıdır. Bu ise deneme fonksiyonların ve belki de onların bir ya da daha yüksek türevlerinin sürekliliğini gerektirir. Bu süreklilik şartının kaynağıdır. İlerleyen bölümlerde görülecek ki kısmi integrasyon ile rezidü denklemlerindeki integrallerdeki türevlerinin mertebeleri daha az olacaktır. Bu da daha az süreklilik gerektirecektir. Ancak henüz elementlerin kullanımına geçmediğimiz için burada verilmedi.

Örnek problemimizde kolayca gözlenir ki (2.11) deki polinomal deneme fonksiyonlar x 'in kuvvetlerinden (x^N , $N = 0,1,2, \dots$) dolayı $N \rightarrow \infty$ için enerjideki yakınsamaya uygundur. Çünkü x^N ler süreklidir. Yakınsaklık teoremleri enerjideki ortalama yakınsaklığı garanti eder ancak noktasal yakınsaklığı garanti edemez [27]. $\tilde{U}_3$ ve $\tilde{T}_3$ deki noktasal hata yaklaşık olarak sırayla %1 ve %5 civarındadır. Yakınsaklıkla alakalı çok sayıda teorem ve çalışma literatürde yer almaktadır ancak bu tez çalışmasında bu kısma detaylı olarak girilmedi.

2.4 Galerkin Metodu'nun Tercih Nedeni

Birçok farklı optimizasyon kriteri mevcuttur. Bunlardan en sık kullanılanları Galerkin residual ve Ritz varyasyonel metotlarıdır [27-30]. Galerkin metodunun uygulama alanları Ritz metoduna göre daha geniştir. Varyasyonel metot bir varyasyonel prensibe sahip denklemlere ve denklem sistemi lineer ve self-adjoint olması durumunda uygulanabilmektedir. Galerkin metodu bir çok problemde diğerlerinden genellikle daha iyi sonuçlar vermektedir [6, 27, 29, 31].

2.5 Genel Bir 12-Adım Deneme Çözüm Prosedürü

Bu kısımda element kavramı olmaksızın deneme çözümler ile sınır-değer problemleri, özdeğer problemler ve karışık sınır-değer, başlangıç-değer problemlerini çözmek için oniki adımdan oluşan bir prosedür tanıtıldı. Önceki bölümdeki prosedür detaylı olarak ele alındı ve her bir adım, örnek problem üzerinde uygulanarak netleştirildi. Algoritmalar hazırlanabilmek için iki önemli hesaplamalar yapılmalıdır.

i) Kalıntı denklemleri parçalanarak integre edilmelidir.

ii) Sınır koşullarını uygulamak için teorik yerine nümerik metod kullanılmalıdır. Sadece element kavramı eksik olacaktır. Buna rağmen SEM'in bir çok matematiksel yapısı verilecektir.

2.5.1 Oniki adım prosedürünün şeması

Aşağıda tüm problemleri çözmek için kullanılacak 12 adımdan oluşan prosedür verilecek olup bu prosedür orijinal yönetici denklemi nümerik çözüme taşıyacaktır. Bu prosedür element kavramı olsa da olmasa da kullanılabilir.

Prosedür iki kısma bölündü. İlk altı adımdan oluşan bölüm kağıt ve kalem kullanılarak çalışmacının çabaları ile oluşturulur. Sonraki altı adım ise nümerik hesaplamalardan oluşur ki bilgisayarlar yardımı ile çalışır (sabit katsayı sayısının az olduğu durumlarda hesap makinesi yeterlidir). Burada deneme çözüm (2.1) de tanımlandığı gibi

$$\tilde{U}(x; a) = \phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_N\phi_N(x) \quad (2.72)$$

şeklinde tanımlanacaktır [27].

Teorik Gelişim

Adım 1: Galerkin rezidü denkleminin yazılması

Adım 2: Kısmi integral hesabı

Adım 3: Deneme çözümün genel formunun rezidü denklemlerindeki integrallerde yerine yazılması

Adım 4: Deneme çözümler için özel ifadeleri geliştirilmesi

Adım 5: Deneme fonksiyonları sistem denklemlerinin içine koy ve integralleri nümerik değerlendirme için uygun bir forma dönüştürülmesi

Adım 6: Deneme fonksiyonları kullanarak akış için ifadeleri hazırlanması

Nümerik Hesaplama

Adım 7: Problem için nümerik verilerin belirtilmesi

Adım 8: Sistem denklemlerindeki dahili terimleri değerlendirilmesi

Adım 9: Sistem denklemlerine sınır koşullarının uygulanması

Adım 10: Sistem denklemlerini çözülmesi

Adım 11: Akışın değerlendirilmesi

Adım 12: Çözümün gösterilmesi ve kesinliğin ölçülmesi

Üçüncü adımın sonunda elde edilecek denklemler formuna sistem denklemleri denilmektedir. Onlar $\phi_j(x)$ deneme fonksiyonlarını içeren çeşitli integrallerden oluşur. 4. adımla birlikte $\phi_j(x)$ lerin gelişimi başlar. Kullanılarak N sayısına karar verilir. 4. ve 6. adımlar boyunca ayrıntılı teorik çalışmaların çoğu yapılır. Nümerik hesaplamalar 7. ve 12. adımlar arasında yer alacaktır. Şimdilik el ile hesaplar yapılabilecek ve tipik bir SE programının temel yapısı tarif edilecektir. İleriki bölümlerde ise bilgisayar programları hesaplamalar için kaçınılmaz olacaktır.

3. SONLU ELEMENLAR METODUNUN BİR ÖRNEK PROBLEM ÜZERİNDE UYGULAMASI

Önceki bölümde verilen örnek problemi tekrar ifade edelim. Diferansiyel denklem ve bölge;

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dU(x)}{dx} \right) = \frac{2}{x^2} \quad , \quad 1 < x < 2 \quad (3.1)$$

sınır koşullarını

$$U(1) = 2 \quad (3.2)$$

$$\left(-x \frac{dU(x)}{dx} \right)_{x=2} = \frac{1}{2}$$

dir [27]. Oniki adım prosedürünü uygulamadan önce küçük bir düzenleme yapalım. Bölge $1 < x < 2$ aralığında tanımlanıyor. Biz bu özel problem için bir yaklaşık çözüm elde edeceğiz. İlk altı adımda aralıkları genel olarak alacağız. Yani $x_a < x < x_b$ şeklinde olacaktır. Daha sonra 7. adımda normal olarak $x_a = 1$, $x_b = 2$ değerlerini yerlerine yazacağız.

Adım 1: Her bir bilinmeyen a_i parametrelerine göre Galerkin kalan (kalıntı) denklemini yazalım. (3.1) yönetici denklemini için rezidü (kalıntı),

$$R(x; a) = \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) - \frac{2}{x^2} \quad (3.3)$$

ve (2.44) deki n- Galerkin rezidü denklemleri

$$\int_{x_a}^{x_b} R(x; a) \phi_i dx = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

şeklindeydi. (3.3) denklemini yerine yazarsak,

$$\int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{d}{dx} \left(x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) - \frac{2}{x^2} \right] \phi_i dx = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

olur.

Adım 2: Rezidü denklemleri en yüksek türevli terime göre parçalanarak integral alınır.

Bu adımda ikinci mertebeden türevi içeren (3.5) deki integral için bir dönüşüm yapılacaktır. $f(x)$ ve $g(x)$ gibi iki fonksiyonun çarpımının diferansiyeli için zincir kuralı uygulanır.

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g) = \frac{df}{dx}g + f \frac{dg}{dx} \quad (3.6)$$

her iki yanı aynı aralıkta integre edersek;

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{d}{dx}(f \cdot g) dx = \int_{x_a}^{x_b} \frac{df}{dx}g dx + \int_{x_a}^{x_b} f \frac{dg}{dx} dx \quad (3.7)$$

olur. Sol taraf bir tam diferansiyel olmak üzere,

$$\text{Sol taraf} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{d}{dx}(f \cdot g) dx = \int_{x_a}^{x_b} d(f \cdot g) dx = [f \cdot g]_{x_a}^{x_b} \quad (3.8)$$

olur. Burada

$$[f \cdot g]_{x_a}^{x_b} = [f \cdot g]_{x-x_b} - [f \cdot g]_{x-x_a}$$

dır. (3.7) düzenlenirse

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{df}{dx}g dx = [f \cdot g]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} f \frac{dg}{dx} dx \quad (3.9)$$

olur. Bu kısmi integrasyonun istenen formudur. Belirtelim ki (3.6) denklemindeki f ve g lerin her ikisinde sürekli fonksiyonlardır. Bu yüzden (3.9) dan da $f(x)$ ve $g(x)$ in $x_a < x < x_b$ aralığında sürekli olması gerekir.

Şimdi (3.9) denklemini (3.5) denkleminin en yüksek türevi içeren terimine uygulayalım:

$$\int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{d}{dx} \left(x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \right] \phi_i(x) dx \quad (3.10)$$

Bu (3.9) un sol kısmı için aynı formdadır. Burada $f(x)$ yerine $x \frac{d\tilde{U}(x)}{dx}$, $g(x)$ yerine $\phi_i(x)$ düşünülür. Bu nedenle (3.10) denklemi

$$\int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{d}{dx} \left(x \frac{d\tilde{U}(x)}{dx} \right) \right] \phi_i(x) dx = - \left[\left(-x \frac{d\tilde{U}(x)}{dx} \right) \phi_i \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} x \frac{d\tilde{U}}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx \quad (3.11)$$

olur. İşlemlerde bir akış sağlayacağı için (-) işaretini eklendi. Şimdi (3.11) i (3.5) de yerine koyarsak,

$$\int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{d}{dx} \left(x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) - \frac{2}{x^2} \right] \phi_i dx = 0,$$

$$\int_{x_a}^{x_b} x \frac{d\tilde{U}}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} dx - \left[\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \phi_i \right]_{x_a}^{x_b}, \quad i = 1.2 \dots N \quad (3.12)$$

olur. (3.12) deki sağ taraftaki terimler yükleme terimleri adını alırlar.

Adım 3: Deneme çözümün genel formunu rezidü denklemindeki integralde yerine yazalım. (3.1) den

$$\frac{d\tilde{U}}{dx} = \frac{d\phi_0}{dx} + \sum_{j=1}^N a_j \frac{d\phi_j}{dx} \quad (3.13)$$

olup (3.12) nin sol tarafında yerine yazalım.

$$\begin{aligned} (3.12)'nin \text{ sol tarafı} &= \int_{x_a}^{x_b} x \frac{d\tilde{U}}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx \\ &= \int_{x_a}^{x_b} x \left(\frac{d\phi_0}{dx} + \sum_{j=1}^N a_j \frac{d\phi_j}{dx} \right) \frac{d\phi_i}{dx} dx \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_j}{dx} dx \right) a_j + \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx} dx \end{aligned} \quad (3.14)$$

bulunur. (3.14) ü (3.12) de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left(\int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_j}{dx} dx \right) a_j &= \\ &= - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_i dx - \left[\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \phi_i \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx} dx \end{aligned} \quad (3.15)$$

olur. Yukarıda eşitliğin sağ tarafı sabit sayılardır yani sabitleri bir tarafa topladık.

Böylece ilk üç adım tamamlandı. (3.15) denklemleri tam olarak şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} &\left[\int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_1}{dx} dx \right] a_1 + \left[\int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_2}{dx} dx \right] a_2 + \dots + \left[\int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_N}{dx} dx \right] a_N \\ &= - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_1 dx - \left[\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \phi_1 \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx} dx \\ &\left[\int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_1}{dx} dx \right] a_1 + \left[\int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_2}{dx} dx \right] a_2 + \dots + \left[\int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_N}{dx} dx \right] a_N \\ &= - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_2 dx - \left[\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \phi_2 \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx} dx \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \left[\int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_N}{dx} x \frac{d\Phi_1}{dx} dx \right] a_1 + \left[\int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_N}{dx} x \frac{d\Phi_2}{dx} dx \right] a_2 + \dots + \left[\int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_N}{dx} x \frac{d\Phi_N}{dx} dx \right] a_N \\ &= - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \Phi_N dx - \left[\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \Phi_N \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_N}{dx} x \frac{d\Phi_0}{dx} dx \end{aligned}$$

olur. Bu ifadeler matris formunda,

$$\begin{bmatrix} \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_1}{dx} x \frac{d\Phi_1}{dx} dx & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_1}{dx} x \frac{d\Phi_2}{dx} dx & \dots & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_1}{dx} x \frac{d\Phi_N}{dx} dx \\ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_2}{dx} x \frac{d\Phi_1}{dx} dx & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_2}{dx} x \frac{d\Phi_2}{dx} dx & \dots & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_2}{dx} x \frac{d\Phi_N}{dx} dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_N}{dx} x \frac{d\Phi_1}{dx} dx & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_N}{dx} x \frac{d\Phi_2}{dx} dx & \dots & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_N}{dx} x \frac{d\Phi_N}{dx} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$= \begin{bmatrix} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \Phi_1 dx - \left[\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \Phi_1 \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_1}{dx} x \frac{d\Phi_0}{dx} dx \\ - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \Phi_2 dx - \left[\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \Phi_2 \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_2}{dx} x \frac{d\Phi_0}{dx} dx \\ \vdots \\ - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \Phi_N dx - \left[\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \Phi_N \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_N}{dx} x \frac{d\Phi_0}{dx} dx \end{bmatrix}$$

$$k_{ij} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_i}{dx} x \frac{d\Phi_j}{dx} dx$$

$$F_i = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \Phi_i dx - \left[\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \Phi_i \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Phi_i}{dx} x \frac{d\Phi_0}{dx} dx$$

gösterimi ile (3.17) denklemleri,

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{31} & k_{32} & \dots & k_{3N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

halini alır. Ya da matris notasyonunu kısaltırsak

$$[K]\{a\} = \{F\} \quad (3.20)$$

olur. (3.15), (3.16), (3.17), (3.19) ve (3.20) ler N tane denklem sisteminin farklı beş gösterim şeklidir. Sonlu elemanlar analizinde geleneksel gösterim olan üstteki ifadede k katsayılarının bir matrisi tanımlanır. Bu matrise genelde sertlik matrisi denir. Sağ taraftaki yüklenen terimlerin vektörüne yükleme vektörü ya da zorlama vektörü denir. Bu ifade mühendiste $Kx = F$ olarak bilinir. Bir F kuvveti tarafından K katı cisminin basit lineer esnekliğini gösterir. Burada serbestliğin katsayı derecesi olarak sonlu elemanlar denklemleri statik denge için her zaman matris formunda yazılır.

$$[K]\{x\} = \{F\}.$$

Burada K 'nın elementleri $\{x\}$ ve $\{F\}$ sertlik, kuvvet, yer değiştirme açısından aynı fiziksel özelliktedir. Bu N denklem sistemine “sistem denklemleri” denir [27]. Kısmi integrasyon sonucu olarak üç yararlı şey elde edilir.

(i) Sistem denklemlerinde görülen deneme fonksiyonlar ya da deneme çözümün en yüksek mertebeden türevleri ikiden bire indirgendi. Eğer kısmi integrasyon uygulamasaydık, deneme fonksiyonlardan biri ikinci türevli olarak karşımıza çıkardı ve diğeri ayırt edilemeyecekti.

Tüm bölge üzerinde bir tek fonksiyon olarak tanımlanan deneme fonksiyonlar kullanıldığında genellikle en düşük mertebeden türevleri önemli değildir. Çünkü bu fonksiyonlar genelde süreklidir ve her mertebeden sürekli türevlere sahiptirler. Buna rağmen ileriki kısımda görüleceği gibi sonlu elemanlar deneme fonksiyonları kullanılacağı zaman bunun önemi çoktur. Çünkü böyle fonksiyonlar süreksizliğe sahip olup onların türevleri de süreksiz olabilir.

(ii) Sertlik matrisi simetriktir. Yani $k_{ij} = k_{ji}$ dir. Bu (3.18) den açık olarak görülür. Burada her iki deneme fonksiyon birinci türevli olarak görülmektedir (birinci türev yerine ikinci ya da başka olsa yine aynı durum olur). Simetrik olanlar hesaplama açısından avantajlıdır. Çünkü bir çok karışık integral işlemlerinin yarısını hesaplamak yeterli olacaktır. Bu simetrikliğin elde edilmesi muhtemel bir durumdur. Çünkü (3.20) yönetici diferansiyel denklem simetriye sahipse sistem denklemleri de simetriye sahiptir. Gerçekten gerek kısmi integrasyon uygulanmasın, gerekse iki kez uygulansın durum değişmez.

(iii) Bir sınır terimi oluşturuldu.

$$\left[\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \Phi_i \right]_{x_a}^{x_b}$$

bu ifade $T(flux) = -x \frac{d\tilde{U}}{dx}$ 'i içerir ki (3.2b) deki ikinci sınır koşulunu içermektedir. Bu bize ikinci sınır koşulunu kolayca uygulayabilmeyi mümkün kılar. Sadece bu terimi (3.2b) deki değerinde yerine koyacağız. Ayrıca ilk sınır koşulunu sağlamak böyle kolay olmayacaktır.

Burada ilk üç adım genel olarak ve diğer adımlara nispeten daha sadedir. Bunlar sadece yönetici diferansiyel denklemi ve (3.1) deki deneme çözüm için formal ifadeyi içermektedir. Önümüzdeki üç adım ise daha özeldir. Deneme fonksiyonların ifadesi için özel bir seçimi içerir ve sertlik matrisi ile yükleme vektöründeki integrallerin tümünü hesaplamayı gerektirir.

4. Adım: $\phi_i(x)$ deneme fonksiyonları için özel ifadeler geliştirilecektir. Önceki bölümden hatırlayalım ki deneme çözüm için bir polinomal form ele almıştık. Yani,

$$\tilde{U}(x; a) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots + a_Nx^{N-1} \quad (3.21)$$

Bu polinom formu (3.18) deki K_{ij} ve F_i ifadelerindeki türev ve integrallerin hesaplanması adına kolaylık sağlayacaktır. Önceki bölümde deneme fonksiyonları öyle modifiye ettik ki deneme çözüm a_i nin tüm değerleri için sınır koşullarını sağlar. Buna rağmen burada ve ileriki kesimlerde sınır koşullarını tam olarak önemsemeyeceğiz. Çünkü onlar daha sonra nümerik metod kullanırken uygulanacaktır.

Şimdi iş (3.21) deki N terim sayısını belirlemeye geldi. Biz $N = 3$ seçeceğiz. Çünkü çözümün anlaşılması açısından yeterince terim içerir ve analizde karışıklık oluşturmaz. Böylece bizim deneme çözümümüz,

$$\tilde{U}(x; a) = a_1 + a_2x + a_3x^2 = \sum_{j=1}^3 a_j \phi_j(x) \quad (3.22)$$

olacaktır. Deneme fonksiyonlar,

$$\phi_1(x) = 1, \phi_2(x) = x, \phi_3(x) = x^2 \quad (3.23)$$

Belirtelim ki $\phi_0(x)$ terimi bu adımda gerekli değildir. Çünkü sınır koşulları dokuzuncu adıma kadar uygulanmayacaktır. $\phi_0(x)$ terimi de uygulanabilirdi fakat pratik olarak nümerik metod tarafından sınır koşulları uygulandığında nadiren yapılır. Özel durumlarda, çalışmacı tam çözüme yakın bir fonksiyon biliyorsa

$\phi_0(x)$ 'i bu bildiği fonksiyon olarak alabilir. Geri kalan deneme fonksiyonlarda sadece bilinen bu fonksiyon ile tam çözüm arasındaki farkı minimize etmeye yarar.

5. Adım: Deneme fonksiyonları sistem denklemlerinin içindeki sertlik ve yükleme terimlerinin içine koyup integralleri sekizinci adımdaki nümerik değerlendirme için uygun bir forma dönüştüreceğiz.

İlk önce, (3.18) deki K_{ij} terimlerini düşünelim:

$$K_{ij} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} \cdot x \frac{d\phi_j}{dx} dx$$

(3.23) den deneme fonksiyonların türevleri bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dx} &= 0, \\ \frac{d\phi_2}{dx} &= 1, \\ \frac{d\phi_3}{dx} &= 2x. \end{aligned} \tag{3.24}$$

K_{ij} simetrik olduğundan ($K_{ij} = K_{ji}$) sadece $j \geq i$ terimleri üzerinde çalışabiliriz.

$$\begin{aligned} i = 1 \text{ için} \quad & \begin{aligned} K_{11} &= 0 \\ K_{12} &= 0 \\ K_{13} &= 0 \end{aligned} \quad \left(\text{çünkü } \frac{d\phi_1}{dx} = 0 \right) \end{aligned} \tag{3.25a}$$

$$\begin{aligned} i = 2 \text{ için} \quad & \begin{aligned} K_{22} &= \int_{x_a}^{x_b} 1 \cdot x \cdot 1 dx = \frac{1}{2} (x_b^2 - x_a^2) \\ K_{23} &= \int_{x_a}^{x_b} 1 \cdot x \cdot 2x dx = \frac{2}{3} (x_b^3 - x_a^3) \end{aligned} \end{aligned} \tag{3.25b}$$

$$i = 3 \text{ için} \quad K_{23} = \int_{x_a}^{x_b} 2x \cdot x \cdot 2x dx = (x_b^4 - x_a^4). \tag{3.25c}$$

Şimdide (3.18) deki F_i terimlerini düşünelim.

$$F_i = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_i dx - \left[\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \phi_i \right]_{x_a}^{x_b}.$$

Bu ifade iç bölgenin yükü FI_i ile sınır terimi olan FB_i nin toplamıdır.

$$FI_i = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \Phi_i dx \quad (3.26)$$

$$FB_i = - \left[\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \Phi_i \right]_{x_a}^{x_b}$$

şeklinde iç bölge üzerinde bir integral ve bir sınır terimi olarak ayıralım.

Birinci iç integrali:

$$\begin{aligned} i = 1 \quad \text{için} \quad FI_1 &= - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \cdot 1 dx = 2 \left(\frac{1}{x_b} - \frac{1}{x_a} \right) \\ i = 2 \quad \text{için} \quad FI_2 &= - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \cdot x dx = -2 \ln \frac{x_b}{x_a} \\ i = 3 \quad \text{için} \quad FI_3 &= - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \cdot x^2 dx = -2(x_b - x_a) \end{aligned} \quad (3.27)$$

İkinci sınır terim:

$$FB_i = \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x_a} \text{ ve } \Phi_i(x_a) - \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x_b} \Phi_i(x_b) \quad (3.28a)$$

olur. (3.28a) denklemi akı terimlerini içerir. Yani $\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)$ terimini içerir ki sınır noktalarındaki değerleridir. Akı ifadesi dokuzuncu adıma kadar ertelenir. Dokuzuncu adımda sınır koşullarının nümerik uygulaması ile ele alınacaktır. $\Phi_i(x_a)$ ve $\Phi_i(x_b)$ terimleri (3.23) den yararlanarak yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} i = 1 \quad \text{için} \quad FB_1 &= \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x_a} - \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x_b} \\ i = 2 \quad \text{için} \quad FB_2 &= \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x_a} x_a - \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x_b} x_b \end{aligned} \quad (3.28b)$$

$$i = 3 \quad \text{için} \quad FB_3 = \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x_a} x_a^2 - \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x_b} x_b^2$$

elde edilir.

Adım 6: Deneme fonksiyonları kullanarak akı için ifadeleri hazırlayalım.

$$\tilde{\tau} = flux = -x \frac{d\tilde{U}}{dx} = -x \sum_{j=1}^3 a_j \frac{d\phi_j}{dx} = -a_2 x - 2a_3 x^2 \quad (3.29)$$

olur.

Birçok problemde akı, $U(x)$ kadar önem taşır. Bazen başka fiziksel niceliklerde önem arz eder. Genellikle akı (ya da diğer nicelikler) a_i parametresi bakımından cebirsel ya da hesaplamaya yönelik operasyonlar gerektirir. Onuncu adımda sistem denklemleri çözüldüğünde (a_i ler için), bulunan nümerik değerler (3.29) da yerine yazılır.

Böylece birinci adımdan altıncı adıma kadar olan ilk aşama tamamlandı. Bütün gerekli denklemlerin teorik olarak hesaplanması gösterildi. Şu anda üç lineer cebirsel denklem sistemine sahibiz. Şimdi (3.25), (3.27) ve (3.28b) yi (3.19) da yerine yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(x_b^2 - x_a^2) & \frac{2}{3}(x_b^3 - x_a^3) \\ 0 & \frac{2}{3}(x_b^3 - x_a^3) & (x_b^4 - x_a^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\left(\frac{1}{x_b} - \frac{1}{x_a}\right) \\ -2 \ln \frac{x_b}{x_a} \\ -2(x_b - x_a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x_a} - \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x_b} \\ \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x_a} x_a - \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x_b} x_b \\ \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x_a} x_a^2 - \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x_b} x_b^2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Adım 7: Problem için spesifik tam nümerik dataları elde edilecektir.

1) Geometrik data: Sınırları belirten belirli koordinatlardır. 1 boyutlu bir problem için bu basit bir adımdır. Çünkü sadece iki özel noktaya ihtiyaç vardır. Şimdiki problemimiz için (3.2a) dan

$$a_1 = 1, a_2 = 2 \quad (3.31)$$

dir. 2-D problemler için sınırlar bir eğri, 3-D problemler için bir yüzeydir.

2) Fiziksel özellikler ve uygulama yükleri: Şimdiki problemimiz için bunlar zaten tanımlanmıştır. (3.2a) daki yönetici denklemin sol tarafındaki x katsayısı bir fiziksel özelliğe tekabül eder. Sağ taraftaki $\frac{2}{x^2}$ terimi ise bir iç yük belirtir. (3.2b) deki sınır şartları özel sınır yükleridir.

Burada aşağıdaki hatırlatma işe yarar olabilir.

1-D sınır-değer (denge) problemi için yönetici denklem,

$$-\frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{dU(x)}{dx}\right) + \beta(x)U(x) = f(x) \quad (*)$$

şeklindedir. Burada x bağımsız değişkeni $U(x)$ ise bilinmeyen fonksiyondur. $\alpha(x)$, $\beta(x)$ ve $f(x)$ bilinen fonksiyonlardır. Bölge x eksenini üzerindeki sonlu yada sonsuz $x_a < x < x_b$ aralığıdır.

$\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları genellikle sistemin materyal yada fiziksel özellikleridir. $F(x)$ fonksiyonuna bir iç yük diyeceğiz çünkü o, bölgenin iç kısmı için yükleme uygulamasıdır.

Bölgenin sınırları $x = x_a$, $x = x_b$ noktalarıdır. x_a ve x_b deki sınır koşulları,

$$x = x_a, \quad U(x_a) = U_a \quad \text{ya da} \quad \left(-\alpha(x)\frac{dU(x)}{dx}\right)_{x_a} = \tau_a$$

$$x = x_b, \quad U(x_b) = U_b \quad \text{ya da} \quad \left(-\alpha(x)\frac{dU(x)}{dx}\right)_{x_b} = \tau_b$$

dır. Burada U_a , U_b , τ_a ve τ_b bilinen değerlerdir. Bunlara sınır yükleri denir. Çünkü onlar sistemin sınırları üzerinde yükleniyor. $-\alpha\frac{dU}{dx}$ ifadesi τ sembolü ile tanımlanır. (*) denkleminin farklı her uygulamasında bir fiziksel anlam tanımlar. Tüm uygulamalar için genel ismi “akı”dır. Çünkü o, sıklıkla bazı niceliklerin bir akışını tanımlar. Buna rağmen (*) denklemini bazı problemlerde bir kuvveti tanımlayabilir ve mekanik, ısı sistemi, elekrastatik, hidrodinamik,..., v.s. gibi farklı uygulamalarda karşılaşılabılır.

Adım 8: Sistem denklemlerindeki tüm dahili terimlerin nümerik değerleri (yani sınır koşulu terimleri dışındaki tüm terimler) elde edilecektir.

Dahili terimler sertlik integrallerini (K_{ij} terimleri) ve dahili yük integrallerini (FI_i terimleri) içerir. Ayrıca sınır koşulu terimlerinin katsayılarını değerlendirebiliriz. İleriki bölümlerde görülecek ki element kavramı düşünüldüğünde sınır koşulu terimleri katsayılara tabi olmayacaktır. Bu yüzden normal bir sonlu elemanlar analizinde, sekizinci adım sadece dahili terimleri yada sertlik ve dahili yük integrallerini içerecektir. (3.31) değerleri (3.30) da kullanılırsa,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{14}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \ln 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1} & -\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=2} \\ \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1} & -2\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=2} \\ \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1} & -4\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=2} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Şimdi sistem denklemleri çözmek için hazırlandı. Yalnızca sınır koşulları belirlenmemiş olarak kaldı.

Adım 9: Sistem denklemleri için sınır koşullarının uygulanması gereklidir.

(3.26) denklemleri her iki sınır noktası için bir sınır koşulu olup,

$$U(1) = 2$$

$$Ak_1 = \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=2} = \frac{1}{2}$$

şeklindeydi. Bu sınır koşulları açıkça farklı iki yol ile sistem denklemlerinde uygulanır. İlki zorlayarak, ikincisinde serbest olacaktır.

Şimdi $\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=2} = \frac{1}{2}$ sınır koşulunu uygulayalım. İlk olarak bu sınır koşulunu ele alacağız. Çünkü onun uygulanması oldukça basittir. $\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=2}$ terimi (3.32) denkleminin sağ tarafında açıkça görülüyor. Bu nedenle $\frac{1}{2}$ değerini burada doğrudan yerine koyacağız.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{14}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \ln 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1} - \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1} - \frac{1}{2} \\ \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1} - 2 \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1} - 1 \\ \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1} - 4 \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1} - 2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Aslında (3.2b) deki sınır koşulu, tam çözüm olan U fonksiyonunu içeriyor. Oysa (3.32) denkleminde $\tilde{U}$ yaklaşık çözüm vardır. Bu önemsiz bir durumdur. Biz sadece bir tam değer belirtiyor ve yaklaşık çözüm elde etmek istiyoruz.

(3.33) denklemi hâlâ $\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1}$ terimini içeriyor. Bu ise $x = 1$ deki bir akı sınır koşuluna tekabül eder. Buna rağmen bu terim için belirli bir değere sahip değiliz. Çünkü diğer sınır koşulu $x = 1$ de U yu belirler (akıyı değil). Bu da önemli bir sorun değildir. Çünkü göreceğiz ki öteki sınır koşulunu uyguladığımız zaman bu bilinmeyen terim yok olacaktır.

Onikinci adımda görülecek ki bu problemin çözümü sadece yaklaşık olarak akı sınır koşulunu $\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=2} = \frac{1}{2}$ sağlayacaktır. Deneme çözüm ve sonuçlanan yaklaşık çözüm akı sınır koşulunu sağlamaya zorlamaz. Bu sınır koşulunu serbest, zorlanmamış olarak adlandıracağız.

Şimdi de $U(1) = 2$ sınır koşulunu uygulayalım. Bu sınır koşulunun uygulanması önceki akı sınır koşulunun uygulanmasından daha karmaşıktır. Bu nedenle daha fazla açıklama yapmak gereklidir. Bu karışıklığın sebebi öncelikle, deneme fonksiyonların problemin tüm bölgesi üzerinde tanımlamasıdır. Element deneme fonksiyonları kullanılacağı zaman (onlar sadece bölgenin küçük bir bölümünde tanımlıdır) bu sınır koşullarının uygulanması prosedürü buradakine göre basit bir hal alacaktır.

(3.33) denkleminde, uygulamaya çalıştığımız sınır koşulundaki 2 değerini yerine yazabileceğimiz bir terim mevcut değil. Bu yüzden diğer alternatif yola yani: sınır koşulunu doğrudan deneme çözümün kendisine uygulamaya başvuracağız. Böylece $U(1) = 2$ yi uygulamak için (3.22) den

$$\tilde{U}(x; a) = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

olup

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2 \quad (3.34)$$

elde edilir. Bu kısıtlayıcı bir denklemdir. a_i leri içerir ki böylece artık onlar bağımsız değildir. Bu durumda (3.34) deki a_i lerden sadece iki tanesi bağımsız olabilir. Üçüncüsüne ise (3.34) den karar verilir.

Bir önceki bölümden hatırlarsak, deneme çözüm için üretilen (3.18) zorlama denklemine sınır koşullarına doğrudan uygulanmıştır. Bu zorlama denklemleri doğrudan deneme çözümün içine konulur. Bu prosedür problemin başında uygulandı. Şimdi dördüncü adım kullanılır.

(3.34) denklemini (3.33) de yerine koyarak sistem denklemlerini modifiye etmek istiyoruz. Bu yaklaşım nümerik metod olarak adlandırılır. Bu işlem bilgisayar yardımı ile yapılarak daha pratik hale getirilebilir. (3.33) sistem denklemleri a_1, a_2 ve a_3 ün bağımsız olduklarını farzediyor. Fakat (3.34) zorlama denklemi bu üç parametreden sadece ikisinin bağımsız olduğuna karar veriyor. Bu yüzden (3.33) deki a_i lerden birisini elimine edeceğiz. Böylece sadece iki bilinmeyenli iki denklem olacak. Bu iki denklem sırasıyla çözüldüğünde, bulunacak iki a_i değeri (3.34) de yerine konularak üçüncü a_i parametresi bulunur.

(3.33) denklemi biraz değiştirilerek a_i 'lerden birisi elimine edilir. Bu bir üç adım prosedür gerektirir. Bunu açıklamak için kısa bir konu dışına çıkma durumunda kalacağız. Bu üç adım, üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan genel bir sisteme uygulanarak açıklanacaktır.

$$\begin{aligned} K_{11}a_1 + K_{12}a_2 + K_{13}a_3 &= F_1 \\ K_{21}a_1 + K_{22}a_2 + K_{23}a_3 &= F_2 \\ K_{31}a_1 + K_{32}a_2 + K_{33}a_3 &= F_3 \end{aligned} \quad (3.35a)$$

yada matris notasyonu ile;

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (3.35b)$$

yazılır. Bu üç denklem genel bir lineer zorlama denklemi yardımıyla düzenlenirse;

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = d \quad (3.36)$$

olur.

Adım1: (3.36) denkleminde a_i lerden birinin diğeri cinsinden çözelim. Genelde hangi a_i nin kullanıldığı fark etmez. Tabiki katsayı olan c_i sıfır olmadığı sürece. Nümerik olarak kararlılık için iyi bir seçim en büyük katsayılı a_i için olur. Bu yüzden tercihimiz a_3 olacaktır. Bu durumda ;

$$a_3 = \frac{d}{c_3} - \frac{c_1}{c_3} a_1 - \frac{c_2}{c_3} a_2 \quad (3.37)$$

olur. 3. katsayı olan (sabit katsayı) a_3 , (3.35) sistem denklemlerinden elimine edilebilir.

Adım 2: Seçilen sabit katsayı (burada a_3), sistem denklemlerinden elimine edilir. (3.37) denklemi (3.35) de kullanılırsa,

$$\begin{aligned} K_{11}a_1 + K_{12}a_2 + K_{13}\left(\frac{d}{c_3} - \frac{c_1}{c_3}a_1 - \frac{c_2}{c_3}a_2\right) &= F_1, \\ K_{21}a_1 + K_{22}a_2 + K_{23}\left(\frac{d}{c_3} - \frac{c_1}{c_3}a_1 - \frac{c_2}{c_3}a_2\right) &= F_2, \\ K_{31}a_1 + K_{32}a_2 + K_{33}\left(\frac{d}{c_3} - \frac{c_1}{c_3}a_1 - \frac{c_2}{c_3}a_2\right) &= F_3 \end{aligned}$$

olup a_1 ve a_2 nin katsayıları birleştirilip sabit terimler sağ tarafa taşınırsa,

$$\begin{aligned} \left(K_{11} - \frac{c_1}{c_3}K_{13}\right)a_1 + \left(K_{12} - \frac{c_2}{c_3}K_{13}\right)a_2 &= F_1 - \frac{d}{c_3}K_{13} \\ \left(K_{21} - \frac{c_1}{c_3}K_{23}\right)a_1 + \left(K_{22} - \frac{c_2}{c_3}K_{23}\right)a_2 &= F_2 - \frac{d}{c_3}K_{23} \\ \left(K_{31} - \frac{c_1}{c_3}K_{33}\right)a_1 + \left(K_{32} - \frac{c_2}{c_3}K_{33}\right)a_2 &= F_3 - \frac{d}{c_3}K_{33} \end{aligned} \quad (3.39a)$$

yada matris notasyonu ile ,

$$\begin{bmatrix} K_{11} - \frac{c_1}{c_3}K_{13} & K_{12} - \frac{c_2}{c_3}K_{13} \\ K_{21} - \frac{c_1}{c_3}K_{23} & K_{22} - \frac{c_2}{c_3}K_{23} \\ K_{31} - \frac{c_1}{c_3}K_{33} & K_{32} - \frac{c_2}{c_3}K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - \frac{d}{c_3}K_{13} \\ F_2 - \frac{d}{c_3}K_{23} \\ F_3 - \frac{d}{c_3}K_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.39b)$$

Bu işlemi (3.35b) denklemindeki K_{i3} sertlik terimlerinden oluşan üçüncü sütunun

diğer sütununa eklenmesi yada çıkarılması ile elde edilen bir kolon operasyonu olarak düşünebiliriz. Çarpanlar (3.37) zorlama denkleminin sabit terimi ve a_i lerin katsayılarıdır. Böylece (3.39b) denklemi (3.35b) denkleminde aşağıdaki işlemlerin yapılması ile oluşturulabilir:

- K_{i3} sertlik terimlerinden oluşan üçüncü sütun $-\frac{c_1}{c_3}$ ile çarpılarak, sertlik terimlerinin ilk sütununa eklenir.
- K_{i3} sertlik terimlerinden oluşan üçüncü sütun $-\frac{c_2}{c_3}$ ile çarpılır ve sertlik terimlerinin ikinci sütununa eklenir.
- K_{i3} sertlik terimlerinden oluşan üçüncü sütun $\frac{d}{c_3}$ ile çarpılır ve sonuç sağ taraftaki terimlerinden çıkartılır.
- Son olarak K_{i3} sertlik terimlerinden oluşan üçüncü sütun silinir ve bu yüzden a_3 de silinir.

Adım 3: Seçilen sabit katsayıya karşılık gelen denklem elimine edilir. Burada üçüncü denklemdir.

Bu adım satır operasyonlarının bir serisi olarak düşünülebilir. Doğrudan ikinci adımdaki kalan işlemlerine paraleldir. Bu işlem (3.39b) denkleminde aşağıdaki gibi uygulanır:

(3.39b) deki üçüncü satır (yada (3.39a) daki 3.denklem) $-\frac{c_1}{c_3}$ ile çarpılıp ilk satıra eklenir.

- Üçüncü satır $-\frac{c_2}{c_3}$ ile çarpılıp ikinci satıra eklenir.
- Son olarak üçüncü satır silinir.

Böylece aşağıdaki iki denklem elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \left(K_{11} - \frac{c_1}{c_3} K_{13} \right) - \frac{c_1}{c_3} \left(K_{31} - \frac{c_1}{c_3} K_{33} \right) & \left(K_{12} - \frac{c_2}{c_3} K_{13} \right) - \frac{c_1}{c_3} \left(K_{32} - \frac{c_2}{c_3} K_{33} \right) \\ \left(K_{21} - \frac{c_1}{c_3} K_{23} \right) - \frac{c_2}{c_3} \left(K_{31} - \frac{c_1}{c_3} K_{33} \right) & \left(K_{22} - \frac{c_2}{c_3} K_{23} \right) - \frac{c_2}{c_3} \left(K_{32} - \frac{c_2}{c_3} K_{33} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(F_1 - \frac{d}{c_3} K_{13}\right) - \frac{c_1}{c_3} \left(F_3 - \frac{d}{c_3} K_{33}\right) \\ \left(F_2 - \frac{d}{c_3} K_{23}\right) - \frac{c_2}{c_3} \left(K_{32} - \frac{c_2}{c_3} K_{33}\right) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

olur.

Bu sistem denklemlerinin iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan istenilen formudur. Belirtelim ki (3.35b) sistem matrisi simetrik ise (3.40) da hâlâ simetriktir. Satır işlemleri için gerekçeler sütun işlemlerinin ki kadar açık değildir. Yine de kolayca görülür ki ;

- Kolon operasyonları deneme fonksiyonları modifiye etmek için uygundur. Böylece deneme çözüm a_i lerin tüm değerleri için kısıtlanan sınır koşullarını tam olarak sağlayacaktır.
- Satır operasyonları kalıntı denklemlerindeki ağırlık fonksiyonlarını madifiye etmek için uygundur. Böylece onlar Galerkin metodunda istenildiği gibi modifiye edilmiş deneme fonksiyonlarla aynı olacaktır.

Böylece sınır koşullarının uygulanmasındaki teorik ve nümerik metodların ikisi de aynı sonucu verir. Çünkü her ikisinde de deneme fonksiyonlar ve ağırlık fonksiyonları üzerine benzer düzenlemeler uygulanıyor. Farklılık ise teorik metodun, yapılan düzenlemeyi analizin başında açık bir şekilde yapması iken, nümerik metodun bu işlemleri analizin sonlarında daha kapı bir şekilde yapmasıdır. Şimdi (3.34) zorlama yada kısıtlama denklemini (3.33) sistem denklemlerinde uygulayalım.

Adım 1: (3.34) kısıtlayıcı denkleminde, a_i ’lerden birini diğerinin cinsinden çözelim. Biz a_1, a_2 yada a_3 ’ü seçebiliriz. Bu özel problemimiz için kullanım açısından en kolayı a_1 ’i seçmek olacaktır. Çünkü (3.33)’deki sertlik matrisinin birinci satırı ve birinci sütunu tamamen sıfırdır. Bu ise hesaplama açısından bir çok işlemi ortadan kaldırır. Ancak bu hesaplamaları görmek daha öğretici olacağı için bir başka a_i katsayısını seçilsin. Mesela a_3 alınsın.

$$a_3 = 2 - a_1 - a_2 \quad (3.41)$$

olur.

Adım 2: (3.33) denkleminde a_3 ’ü elimine edelim. (3.41) ve (3.37) benzeşmekte olup, görülür ki:

$$\frac{c_1}{c_3} = 1, \quad \frac{c_2}{c_3} = 1, \quad \frac{d}{c_3} = 2$$

dir. Böylece (3.33) denklemi üzerindeki sütun operasyonları, üçüncü kolonun birinci ve ikinci kolondan çıkartılması, daha sonra üçüncü kolonun iki katı sağ taraftan çıkartılmasıdır. Son olarak üçüncü kolon ve a_3 silinir. Yani ;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{14}{3} & \frac{3}{2} - \frac{14}{3} \\ -15 & \frac{14}{3} - 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1} - \frac{3}{2} \\ \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1} - 2 \ln 2 - 1 - \frac{14}{3} \cdot 2 \\ \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1} - 4 - 15 \cdot 2 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

yada daha sade bir şekilde,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{14}{3} & -\frac{19}{6} \\ -15 & -\frac{31}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1} - \frac{3}{2} \\ \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1} - 2 \ln 2 - \frac{31}{3} \\ \left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1} - 34 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

elde edilir.

Adım 3: (3.43) den üçüncü denklemi elimine edelim. $\frac{c_1}{c_3} = 1$ ve $\frac{c_2}{c_3} = 1$ tekrar kullanılarak, satır operasyonu için (3.43)'de üçüncü satır, birinci ve ikinci satırdan çıkartılır. Sonrasında üçüncü satır silinirse,

$$\begin{bmatrix} 15 & \frac{31}{3} \\ 15 - \frac{14}{3} & \frac{31}{3} - \frac{19}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 - \frac{3}{2} \\ 34 - 2 \ln 2 - \frac{31}{3} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

yada daha basitce,

$$\begin{bmatrix} 15 & \frac{31}{3} \\ \frac{31}{3} & \frac{43}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{65}{2} \\ \frac{71}{3} - 2 \ln 2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

elde edilir. (3.45) denklemi her iki sınır koşulunu da uygulandıktan sonra sistem denklemlerinin son halidir. (3.33) simetrik olduğundan (3.45)'de hâlâ simetrikliğini koruyor.

Üç adım prosedürünün en açık özelliği (3.43)'deki $\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx}\right)_{x=1}$ sınır terimleri (ki sınır koşullarında verilmedi) satır operasyonlarında iptal edildi. Bu durum bu özel problem için bir tesadüf değildir. Bu zorlama denklemleri yardımıyla sınır koşullarının uygulanması (teorik yada nümerik) metodu için doğal ve beklenen durumdur. Bu hesaba katmama durumunun nedeni önceki elde edilen, deneme fonksiyonları (ve ağırlık fonksiyonlarını) modifiye etmek için satır ve sütun operasyonlarının etkisi ile ilgilidir [27].

12. adımda görülecektir ki, bu problemin çözümü $U(1) = 2$ sınır koşulunu tam olarak sağlar. Bu beklenen bir durumdur. Çünkü bu sınır koşulu bir zorlama denklemine uygulanıyor ki bu zorlama denklemi etkili bir şekilde a_i 'lerin tüm değerleri için sınır koşullarını deneme çözümün sağlamasına zorlar. Bu nedenle sınır koşulları zorlama olarak söylenir.

Adım 10: Sistem denklemlerinin çözümü yapılacaktır. (3.45) denklemi çözersek,

$$a_1 = 3,719 \quad (3.46a)$$

$$a_2 = -2,254$$

elde edilir. (3.34) den,

$$a_3 = 0,535 \quad (3.46b)$$

elde edilir (a_1 ve a_2 silinmiş sistem denkleminde yerine konmalıdır. Çünkü bu zorlama denklemi yer değiştirdi).

Sonuç olarak yaklaşık çözüm,

$$\tilde{U}(x) = 3.919 - 2,254x + 0535x^2 \quad (3.47)$$

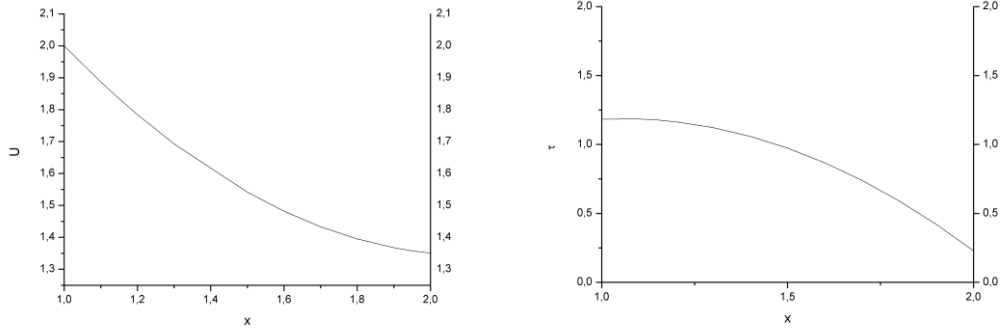
olarak bulunur.

Adım 11: Akı ifadesinde (daha genel olarak, deneme çözüm ile ilgili bütün nicelikler) a_i değerlerini yerlerine yazalım. a_2 ve a_3 (3.29) da yerlerine yazılırsa,

$$\tilde{\tau}(x) = 2.254 - 1.07x^2 \quad (3.48)$$

elde edilir.

Adım 12: Çözüm grafiğini çizerek kesinliği ölçelim. En önemli kaygımız $\tilde{U}(x)$ ve $\tilde{\tau}(x)$ in kesinliğidir.



Şekil 3.1: Yaklaşık çözüm.

Görülür ki $\tilde{U}(x)$, $x = 1$ deki sınır koşulunu tam olarak sağlar. Fakat $\tilde{\tau}(x)$ akıyı, $x = 2$ deki serbest sınır koşulunu yaklaşık olarak sağlar. Birisi tam olarak diğeri ise yaklaşık olmak üzere sınır koşullarının sağlanmasındaki iki farklı davranış adım 9 da imâ edildi ve bir sonraki başlık altında açıklanacaktır.

Sınır noktasında akının alacağı değeri $\frac{1}{2}$ olarak biliniyordu. Dolayısıyla bu noktada akı'un verdiği hata yaklaşık olarak %54 kadardır. Bu ise bölgenin diğer bir iç noktasındaki hatayı belirtmekte çok fazla yardımcı olmaz fakat bu sınır noktasına yakın, küçük bir bölge içerisindeki hata da %54'e yakındır. Şimdiki problemimiz için, bu hata hesaplaması, ileride inceleyeceğimiz yaklaşık çözümler serisi kadar kullanışlı değildir. Sonraki bölümlerde, bölge elementlere bölündüğü zaman, yaklaşık çözüm için zorlanmış “elementler arası” şartları tüm element sınırları arasında olacaktır. Böylelikle akı için hata değerlendirmesi interelement sınırlarında olacaktır.

$\tilde{U}(x)$ fonksiyonunun kesinliğini belirlemek için (hem de $\tilde{\tau}(x)$ için), iki yada üç yaklaşık çözümden oluşan bir seri oluşturacağız (her birinde daha fazla yada daha az deneme fonksiyon kullanılarak) ve onlar arasındaki farklılıkları karşılaştıracacağız.

Bunu yapmak için iki tane daha çözüme sahip olacağız. Bunlardan birisi, önceki deneme çözümden bir terim çıkartılarak, öteki ise önceki deneme çözüme ekstra bir terim ekleyerek elde edilecektir. Bu ekstra çözümler muhtemelen sırasıyla daha az ve daha çok kesinlik göstereceklerdir. Aslında bir çözümün daha az kesinlik göstermesi önemli değildir. Amacımız bu kesinliği ölçmek olup bunun için sadece iki yada daha fazla çözümden oluşan bir seriye ihtiyacımız vardır. Çözümlerin derecesi önemli değildir [27].

Bizim şuanki çözümümüz, çözüm serisinin ikinci elemanı olup deneme çözümlerin serisi aşağıda oluşturuldu:

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_1(x; a) &= a_1 + a_2x, \\ \widetilde{U}_2(x; a) &= a_1 + a_2x + a_3x^2, \\ \widetilde{U}_3(x; a) &= a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3.\end{aligned}\tag{3.49}$$

Bir lineer polinom olarak en düşük dereceli polinom kullanılabilir. Ancak bir sabit terim kullanılırsa, mesela $\widetilde{U}_0(x; a) = a$ gibi, (3.18) deki sertlik matrisinin K_{ij} elemanları yok olurdu. Çünkü herbir integral deneme fonksiyonların birinci türevini içeriyor. Bu durumda sistem denklemi oluşturulamazdı.

Şimdi 1 – 11 adımları arasındaki adımları $\widetilde{U}_1(x; a)$ ve $\widetilde{U}_2(x; a)$ için tekrarlırsak, yaklaşık çözümler için aşağıdaki sonuçlar bulunur.

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_1(x) &= 2,591 - 0,591x, \\ \widetilde{U}_2(x) &= 3,719 - 2,254x + 0,535x^2, \\ \widetilde{U}_3(x) &= 4,963 - 4,908x + 2,340x^2 - 0,3953x^3.\end{aligned}\tag{3.50a}$$

Bunlara karşılık gelen akılar,

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}_1(x) &= 0,591x, \\ \widetilde{\tau}_2(x) &= 2,254x + 1,070x^2, \\ \widetilde{\tau}_3(x) &= 4,908x - 4,680x^2 + 1,185x^3\end{aligned}\tag{3.50b}$$

olarak bulundu.

Yakınsaklık teoremleri bize garanti ediyor ki; çözüm, enerji hatası ile ilgili olarak bir ortalama manâda yakınsak olmalıdır (hesaplama hatasının olmadığı farz edilirse).

Deneyimler gösterir ki, çözüm yüksek ihtimalle noktasal yakınsaktır [27]. $\tilde{U}(x)$ ve $\tilde{\tau}(x)$ in her ikisi de x noktalarının tüm değerlerinde yakınsıyor (her ne kadar $\tilde{\tau}(x)$ daha yavaş yakınsada). Görsel bir değerlendirmeye göre $\tilde{U}_3(x)$ için hata, x 'in tüm değerlerinde %5 den daha azdır. Fakat $\tilde{\tau}_3(x)$ için %30 kadardır. Bu değerlendirme hakkında, $\tilde{\tau}_3(x)$ ' için bir adım ileri deneme fonksiyon deneyeceğiz. Bu ise bir terim ekleme ile olacaktır ve böylece umuyoruz ki daha kesin bir çözüm olan

$$\tilde{U}_4(x; a) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 \quad (3.51)$$

elde edilir. Buna göre yaklaşık çözümü türetirsek,

$$\begin{aligned} \tilde{U}_4(x; a) &= 6,25 - 8,557x + 6,123x^2 - 2,091x^3 + 0,281x^4 \\ \tilde{\tau}_4(x; a) &= 8,557x - 12,246x^2 + 6,290x^3 - 1,123x^4 \end{aligned} \quad (3.52)$$

olur. Ardışık çözümler gittikçe birbirlerine daha yakın olurlar. $\tilde{U}_3$ için ölçülen % 4.9 luk ve $\tilde{\tau}_3$ için ölçülen %29'luk hata oranlarına karşın, $\tilde{U}_4$ için %1.2, $\tilde{\tau}_4$ için %10 kadar bir hata gözlemlendi.

Böylece 12-adım prosedürü tamamlandı. İleriki bölümde aynı prosedür element kavramı katılarak ele alınacaktır.

3.1 Sınır Koşulları

Bu ve önceki bölümlerde, sınır koşullarının uygulanmasında birkaç farklı yol ile karşılaşıldı. $2m$ mertebeli bir diferansiyel denklem tarafından yönetilen bir sınır-değer problemini düşünölsün. Burada m bir tamsayıdır.

$$a_{2m}(x) \frac{d^{2m}U(x)}{dx^{2m}} + a_{2m-1} \frac{d^{2m-1}U(x)}{dx^{2m-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dU(x)}{dx} + a_0(x)U(x) = f(x) \quad (3.53)$$

En yüksek mertebeden türev çift sayıdır. Sadece en yüksek türevin mertebesinin çift olması düşünölecektir. Nerdeyse bütün mühendislik uygulamalarında $2m$. mertebeden denklemler yönetici denklem olur (katı ve akışkanlar mekaniği, akustik, ısı transferi, elektromagnetizm bu alanlardan bazılarıdır).

2. mertebeden bir sınır-değer problemi, sınırların her bir noktasında belirtilen m adet sınır koşuluna gereksinim duyuyor. Bir sınır koşulu, sınırlar üzerindeki noktalarda, U

ve/yada U 'nun 1. mertebeden $(2m - 1)$. mertebeye kadar olan bazı türevlerinin değerinin veren bir denklemdir (2 yada daha fazla boyutlara sahip problemler için, sadece türevlere gereksinim vardır ki onlar sınır için normal dir). Genel olarak sınır koşulları iki tipe ayrılırlar:

1. Temel (gerekli) Sınır Koşulları: Bir denklem sınırlar üzerindeki noktalarda U ve U 'nun $(m - 1)$. mertebeye kadar türevleri ile ilişkilidir.

2. Doğal Sınır Koşulları: Bir denklem sınırlar üzerindeki noktalarda U 'nun m 'den $2m - 1$ 'e kadar türevleri ile ilişkilidir.

Bu sınıflandırma türevleri hiyerarşik olarak ikiye böler. Bunlar en yüksek m türev (m den $2m - 1$ 'e kadar) ve en düşük m türev (0 dan $m - 1$ 'e kadar. Burada 0, fonksiyonun kendisidir) şeklindedir.

Esas sınır koşulları düşük mertebeden türevleri içerir. Onlar bazen Dirichlet, kinematik, yer değiştirme yada geometrik sınır koşulları olarak adlandırılır. Katı mekaniğinde onlar genellikle yer değiştirme, bazen de eğim; ısı transferinde sıcaklık gibi kavramlara karşılık gelir [6].

Doğal sınır koşulları yüksek mertebeden türevleri içerir. Onlar bazen Neumann, dinamik, kuvvet yada gerilme sınır koşullarıdır. Katıhal mekaniğinde kuvvet, gerilme ve momentlere, ısı transferi için ısı akışı ve diğer uygulamalar için bir potansiyeli tanımlar.

“Esas” kelimesi sınır koşullarının en azından bir kaçının esas sınır koşulu olması yani problemin tek bir çözüme sahip olmasını sağlayacak bir koşul olmasını gerektirir. Doğal kelimesi aslında varyasyonel formülasyonu katedebilir. Doğal sınır koşulu terimleri yönetici diferansiyel denklemde sadece bir tane vardır [27].

$m = 1$ ve $m = 2$ olmasıyla oluşan iki durum, neredeyse bütün pratik uygulamaları kapsar. Örnek problemimiz için $m = 1$ dir. Böylece sınır koşulları aşağıdaki sınıftandır:

$$U(1) = 2 \quad \text{esas sınır koşulu}$$

$$\left(-x \frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{doğal sınır koşulu}$$

Sınır koşullarının esas yada doğal olarak sınıflandırılması yönetici diferansiyel denklem tarafından kolayca karar verilir. Bu tamamen, diferansiyel denklemin çözümü için kullanılan metodlardan bağımsızdır. Bu durum aslında oldukça yararlıdır. Bir çok farklı deneme çözüm metodları ele alındığı zaman, sınır koşullarının bir farklı sınıflandırılmasını tanıtmak için kullanıma hazır bir sınıflandırılmanın nasıl yapılacağını gösterir. Bu amaç için sınır koşulları “zorlanmış” ve “zorlanmamış (serbest)” olarak sınıflandırılır. Bu terminoloji adım 9 da tanıtıldı. Bu terimleri tanımlamadan önce, zorlanmış ve zorlanmamış kavramlarının deneme çözüm uygulamalarında nasıl olduğun kısaca aşağıda belirtildi.

Deneme çözüm prosedürü iki etkenden oluşur; bir deneme çözüm (etken 1) ve bir optimizasyon kriteri (etken 2). Daha sonra bir denklemler sistemi üretiliyor. Yaklaşık çözümün bir sınır koşulunu sağlaması için, sadece iki yol vardır. Sınır koşulunu deneme çözümün kendisine uygulayarak (doğrudan adım 4 deki teorik metod yoluyla yada dolaylı olarak adım 9 daki nümerik metod yoluyla) yada sistem denklemlerinde görünen bir terim için sınır koşulu değeri yerine yazmaktadır. Örneğin, bu problemde sistem denklemleri akı için bir sınır terimi içerdi. Böylece akı sınır koşulu kolayca bir sayıyı yerine yazarak uygulandı. Bu deneme çözümün kendisine zorlanmadı. Bu nedenle sonuç çözüm sadece akı sınır koşulunu yaklaşık olarak sağladı. Bir başka deyişle, fonksiyon için hiç sınır terimi yoktu. Böylece sınır koşulu deneme çözüm yerine kullanıldı. Bu bir zorlama denklemi oluşturdu ve sonuç çözüm sınır koşulunu tam olarak sağlamayıcı zorlandı.

Akı için sınır terimi oluşturulması mekânizması kısmi integrasyon ile integre edildi. Bu integrasyon bir sınır koşulunun zorlanıp zorlanmayacağına karar verir. Böylece (3.11) denklemi hatırlanırsa, en yüksek türevi içeren integral kısmi olarak integrallenerek

$$\int_{xa}^{xb} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \phi_i dx = - \left[\left(-x \frac{d\tilde{U}}{dx} \phi_i \right) \right] - \int_{xa}^{xb} x \frac{d\tilde{U}}{dx} \cdot \frac{d\phi_i}{dx} \cdot dx$$

elde edildi. Belirtelim ki bu, akı için bir sınır koşulu oluşturdu. Hemde yeni bir integral (3.11)’in sağ tarafı bu bölümdeki analizlerde kullanıldı.

Eğer istersek ki, (3.11)'in sağ tarafındaki yeni integralde kısmi integralle hesaplanabilir.

$$\int_{xa}^{xb} x \frac{d\tilde{u}}{dx} \cdot \frac{d\phi_i}{dx} \cdot dx = \left[x\tilde{u} \frac{d\phi_i}{dx} \right]_{xb}^{xa} - \int_{xa}^{xb} \tilde{u} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\phi_i}{dx} \right) dx \quad (3.55)$$

olup (3.55)'i (3.11)'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \int_{xa}^{xb} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\tilde{u}}{dx} \right) \phi_i \cdot dx \\ = - \left[\left(-x \frac{d\tilde{u}}{dx} \right) \phi_i \right] - \left[x\tilde{u} \frac{d\phi_i}{dx} \right] + \int_{xa}^{xb} \tilde{u} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\phi_i}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (3.56)$$

olur. Ardışık kısmi integrasyon bize iki şey kazandırdı:

1. $\tilde{U}$ nun türevinin mertebesi bir düşürülerek bir başka sınır terimi oluşturuldu.
2. İntegralimiz $\tilde{U}$ nun türevinin mertebesinin bir düşük fakat ϕ_i nin türevinin mertebesinin bir artması ilk oluşan yeni bir integrale dönüştü.

(3.11) denkleminin sol tarafındaki orijinal integral $\tilde{U}$ ' nun iki defa ve ϕ_i 'nin sıfır defa türevini içerdiği için, iki kere kısmi integrasyon işlemi, integral içindeki ikinci türevi $\tilde{U}$ dan ϕ_i ye aktardı. (3.56) 'daki integral kısmi integrasyon ile iki kez daha integrallenirse türev tekrar ϕ_i den $\tilde{U}$ ya dönüş yapar ve (3.11) denkleminin sol kısmına dönmüş olur.

$2m$ mertebeli yönetici diferansiyel denklemin bir genel sınır değer problemi için, residü denklemindeki $2m$ mertebeli türevi içeren integral

$$\int_{xa}^{xb} \frac{d^{2m}\tilde{U}}{dx^{2m}} \phi_i dx \quad (3.57)$$

şeklindedir. Bu 1 'den $2m$ 'ye kadar herhangi bir sayıdaki kısmi olarak integrallenebilir. Örneğin, m defa kısmi integrasyon sonucunda,

$$\int_{xa}^{xb} \frac{d^{2m}\phi}{dx^{2m}} \phi_i dx = (-1)^m \int_{xa}^{xb} \frac{d^m\tilde{U}}{dx^m} \frac{d^m\phi_i}{dx^m} dx + (2m-1), (2m-2), \dots, (m) \quad (3.58)$$

şeklindeki (doğal sınır koşulları ile ilgili) mertebeye sahip $\tilde{U}$ 'nun türevini içeren m sınır terimleri elde edilir

$2m$ defa kısmi integrasyon sonucunda,

$$\int_{xa}^{xb} \frac{d^{2m}\tilde{u}}{dx^{2m}} \phi dx = \int_{xa}^{xb} \tilde{u} \frac{d^{2m}\phi}{dx^{2m}} dx + (2m-1), (2m-2), \dots, 1, 0 \quad (3.59)$$

(doğal ve esas sınır koşullarının her ikisine de bağlı olarak) mertebeden $\tilde{u}$ nun türevlerini içeren $2m$ tane sınır terimleri elde edilir.

Sistem denklemlerinde sınır terimlerinin olması yada olmaması, ki buna ilgili sınır koşullarının zorlanıp zorlanmaması ile karar verilir. Açık olarak kaç defa kısmi integrasyonun yazılacağıının sonucudur.

Tüm bu elde edilenler aşağıdaki tanımlarda özetlendi.

1. Serbest sınır koşulu: Sistem denklemlerinde görülen bir uygun sınır terimi için sınır koşuludur. Bu terim rezidü denklemlerin kısmi integrasyonu sonucunda görülür. Bu sınır koşulu, sınır terimine kolayca uygulanır. Sonuç olarak yaklaşık çözüm, zorlanmamış sınır koşulunu sadece yaklaşık olarak sağlar.
2. Zorunlu sınır koşulu: Bir sınır koşuludur ki, sistem denklemlerinde uygun bir sınır terimi yoktur. Bu sınır koşulu bir zorlama denklemi tarafından uygulanır. Bunun için yaklaşık metod yada nümerik metod kullanılır.

Sonuç olarak; yaklaşık çözüm, zorlanmış sınır koşulunu tam olarak sağlar.

Esas ve doğal sınır koşulları, zorlanmış yada zorlanmamış olabilir. Bu kaç kez kısmi integrasyon ile integral alındığına bağlıdır. Örneğin, hiç kısmi integrasyon alınmazsa, o zaman sistem denklemlerinde hiç sınır terimi olmaz. Bu durumda esas ve doğal sınır koşulları zorlanmış olacaktır.

Bir başka seçim ise m defa kısmi integrasyon uygulamak olur ki (3.58) de yapıldı. Tüm doğal sınır koşulları zorlanmadı ve tüm esas sınır koşulları zorlandı. Bu durum bu bölümde kullanıldı. Böylece bir defa kısmi integrasyon uyguladık. Böylece doğal sınır koşullarının zorlanmasına müsaade edildi, fakat yine de esas sınır koşulları zorlandı. Sistem denklemlerinde bir sınır teriminin olması bu sınır koşulununun

zorlanmamasına izin verir fakat bu zorunlu yada gerekli değildir. Eğer istenirse, onlar zorlanabilir. Esas sınır koşulunu uygulamak için nümerik metod seçildi.

Yinede bir diğer seçimde $2m$ kez kısmi integrasyon olmaktadır ki (3.59) da yapıldı. Böylece doğal ve esas sınır koşullarının tamamı serbest yani zorlanmamış olur. Bu kısımdaki örnek problem için (3.56) daki gibi iki kez kısmi integrasyon gerekir. Buda esas ve doğal sınır koşullarının her ikisinin zorlanmamasına imkan verir.

1990'lı yıllarının ortalarında, görüldü ki, bütün mesleki SEM algoritmaları sadece bir yol takip edilerek sürdürüldü: m defa kısmi integral almak ve tüm esas sınır koşullarını zorlayıp, tüm doğal sınır koşullarını zorlamamak şeklinde oldu. Yakınsaklık teoremlerinin çoğu (yada tümü) ki bunlar SEM'de kullanıldı, başlangıç olarak klasik varyasyon ilkesi için geliştirildi. Bu ilkeler tamamen Galerkin metodu ve m defa kısmi integral almak yolu ile bir biçime alındı. Bu nedenle bu ilkeler esas sınır koşulları için zorlanmayı müsaade edilen doğal sınır koşulları için zorlanmamayı ister. Böylece, diğer yaklaşımlar ya çok küçük yada hiçbir şekilde yakınsaklık teoremlerini karşılamaz [27]. Bu nedenle aksi teoremler geliştirilmediği sürece bahsedilen yolun izlenmesi fikri ağır basar. Sonuç olarak bu, 2. mertebeden bütün diferansiyel denklemlerde sadece bir kez kısmi integral alındığını gösterir. Böylece esas sınır koşullarının zorlanması ve doğal sınır koşullarının zorlanmaması istenir [5, 6, 27, 35].

4.ELEMENT KAVRAMI

4.1 Giriş

Bu bölümde önceki bölümlerde ele alınan örnek problem için daha fazla sayıda çözüm türetilenektir. Temel fark, problemin bölgesi birkaç parçaya bölünmesidir ki bu parçalara element ya da eleman denir. Ayrıca deneme fonksiyon her bir element üzerinde tanımlanacaktır. 12 adım prosedürü modifiye edilerek, her bir elementin analiz edilmesi için kullanılacaktır.

Bölüm içerisindeki başlıklar, element sayısına göre “bir, iki, daha çok” olarak düzenlenecektir.

Önceki bölümdeki 1-element çözümde, bölge bölünmeyecek ve bölgenin tümü bir element olarak düşünülecektir. 1-element çözümünü incelememizin nedeni, bunun bizi bir elementi karakterize eden iki önemli özelliğe odaklamamıza mümkün kılmasıdır. İlk özellik, deneme fonksiyonların inşasını içerir. Öncelikle bir polinom tipli deneme fonksiyon kullanacağız. Fakat terimleri, deneme fonksiyonların sonuçlarının element üzerindeki özel sınır özelliklerine sahip olacak şekilde yeniden düzenleyeceğiz. Bu özellikler iki yada daha fazla element ele alındığında önemli hesaplama kolaylıkları sağlayacaktır. İkinci özellik ise, bir element için sistem denklemlerinin (element denklemleri de denir) sonuçlarının daha sonra çoklu element çözümlerinde kullanılması olacaktır. Element denklemleri kavramı SEM’de merkezi rol üstlenir [27].

Sonraki bölümde, bölge iki elemente bölünecek, daha sonra bölünmüş problem için bir tam formülasyon oluşturulacaktır. Bu formülasyon bölünmemiş problem için orijinal formülasyona tam olarak karşılık gelecektir. Yani iki problem için tam çözüm aynı olmalıdır. Herbir element ayrı ayrı analiz edilecektir. Her bir element için bulunan element denklemleri cebirsel olarak aynı ve 1-element problemi için elde edilen element denklemleriyle aynı olacaktır. Böylece sistemin herbir parçasının özellikleri tüm sistemin özelliklerine benzer. Odaklanma noktamız, daha sonra

parçalardan bir bütün oluşturmaya yönelmek olacaktır. Element denklemlerinin elde edilen iki kümesi birlikte, tüm problem için nasıl sistem denklemleri halini alacağı ele alınacaktır. Sonraki bölümde ise element sayısı artırılarak benzer mekanizma uygulanacaktır.

4.2 Bir Örnek Problem

Önceki bölümlerle süreklilik arzetmesi açısından aynı örnek problemi ele alındı [27].

Diferansiyel denklem ve bölge,

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{du(x)}{dx} \right) = \frac{2}{x^2}, \quad 1 < x < 2 \quad (4.1a)$$

ve sınır koşulları,

$$U(1) = 2 \quad \text{Esas sınır koşulu (zorlama)} \quad (4.1b)$$

$$\left(-x \frac{du}{dx} \right) = \frac{1}{2}, \quad x = 2 \quad \text{Doğal sınır koşulu}$$

şeklindedir.

Bu kısımda tüm bölge bir element olarak düşünülür. Daha sonra bu bölge elementlere bölünecektir. Her bir element için deneme fonksiyonlar oluşturulacaktır. Bir element kullanılacağı için şimdilik tüm sonuçlar önceki bölümlerdekilerle aynı olacaktır.

1-element çözümünü sunmak için, biz yine bir polinomal deneme çözüm kullanacağız fakat terimleri özel bir formda tekrar düzenlenecektir. Bölüm 3 de tanıtılan 12 adım prosedürüne başlayalım:

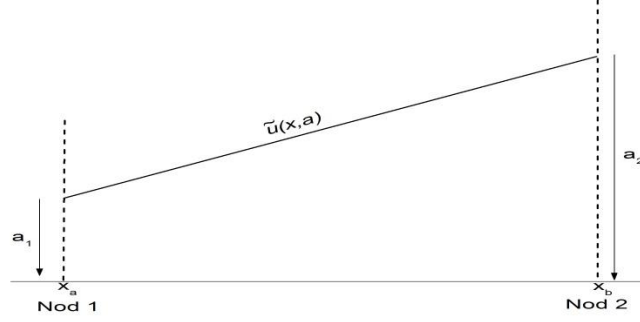
Adım 1-3: İlk üç adım bölüm 3 ile aynıdır. (3.15) - (3.20) de hesaplamalar yapılmıştı. İki sınır noktasının koordinatlarını x_a ve x_b olarak yedinci adımda $x_a = 1$ $x_b = 2$ yerlerine yazılır.

Adım 4 : $\phi_i(x)$ deneme fonksiyonları için özel ifadelerin geliştirilmesi yapılacaktır.

Bir lineer polinom düşünelim ve bir kuvvet serisi formunda yazalım.

$$\tilde{u}(x_i) = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (4.2)$$

Bu en düşük dereceden lineer bir polinomdur.



Şekil 4.1: Önerilen yaklaşık çözüm.

Her bir a_i parametresi elementin özel bir noktasında deneme çözümün değerini tanımlasın. Her bir nokta bir “nod” yada “düğüm noktası” olarak isimlendirilir.

Şekil 4.1 de iki nod gösterir. Her biri elementin sınırlarındadır. 1 ve 2 olarak numaralandırılmış ve bir parametre her bir node ile birleştiriliyor, sırasıyla a_1 ve a_2 olarak etiketlenmiştir. Şekilden açıkça görülüyor ki a_1 ve a_2 parametreleri aşağıdaki prensipleri sağlayacak şekilde tanımlanıyor.

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x_a, \alpha) &= a_1, \\ \tilde{u}(x_b, \alpha) &= a_2.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Böylece a_1 , nod 1 de $\tilde{u}$ değeri ($x = x_a$ da) ve a_2 ise nod 2 de ($x = x_b$ de) $\tilde{u}$ nun değeridir. (4.2) deki deneme çözüm ifadesini α_1 ve α_2 yerine a_1 ve a_2 terimleri cinsinden yazalım.

(4.3)’ü (4.2)’de yerine yazarak,

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 x_a &= a_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_b &= a_2\end{aligned}\tag{4.4}$$

α_1 ve α_2 değerleri a_1 ve a_2 ‘ye göre çözümlürse,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{x_b a_1 - x_a a_2}{x_b - x_a} \\ \alpha_2 &= \frac{a_2 - a_1}{x_b - x_a}\end{aligned}\tag{4.5}$$

elde edilir. (4.5) eşitliğini (4.2)’de yerine yazarsak,

$$\tilde{u}(x; a) = \left(\frac{x_b a_1 - x_a a_2}{x_b - x_a} \right) + \left(\frac{a_2 - a_1}{x_b - x_a} \right) x \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.4) eşitliği matris şeklinde,

$$\begin{bmatrix} 1 & x_a \\ 1 & x_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

yazarak matrisin katsayılar determinanı $\begin{vmatrix} 1 & x_a \\ 1 & x_b \end{vmatrix}$ olur. Bu determinant bir Vandermande determinanı olarak isimlendirilir.

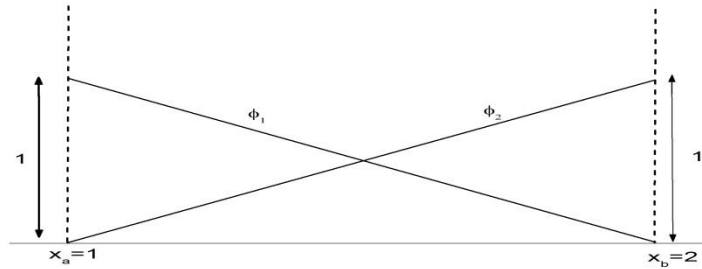
(4.6)'dan,

$$\tilde{u}(x; a) = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) \quad (4.7a)$$

olup $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$ deneme fonksiyonlardır ve,

$$\phi_1(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_a}, \quad \phi_2(x) = \frac{x - x_a}{x_b - x_a} \quad (4.7b)$$

elde edilir. (4.7) denklemlerindeki $\tilde{u}(x; a)$ lineer polinomal deneme çözümümüz için istenen formdur. O hâlâ lineer bir polinomdur çünkü $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$ deneme fonksiyonları lineer polinomlardır. $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$ elementin sınır noktalarında aşağıdaki önemli sınır özelliklerin sağlar.



Şekil 4.2 Denklem (4.7b) deki deneme fonksiyonu.

$$\phi_1(x_a) = 1, \quad (4.8a)$$

$$\phi_1(x_b) = 0$$

ve

şeklindedir. (4.10) denklemi (4.8) denklemlerine eşittir. İnterpolasyon özelliği olarak adlandırılır. İkinci mertebeden diferansiyel denklemler için kullanılan SE deneme fonksiyonlarının tamamında tanımlanan genel bir özelliktir.

(4.7b) deki deneme fonksiyonları, doğrudan interpolasyon özelliğine bağlı olarak da türetebilir ki bu pratikte sıkça kullanılan bir yaklaşımdır. Adım 4'ün başına dönülürse, lineer polinom şeklinde bi deneme çözümü genel formda

$$\tilde{u}(x; a) = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) \quad (4.12)$$

şeklinde yazılır. Burada $\phi_0(x)$ terimine ihtiyaç yoktur çünkü zorlanmış sınır koşulu uygulamak için dokuzuncu adımda nümerik metodu kullanılacaktır. Ayrıca her bir deneme fonksiyonun da bir lineer polinom şeklinde olması istenir.

Yani,

$$\phi_1(x) = \beta_1 + \beta_2 x \quad (4.13)$$

$$\phi_2(x) = \gamma_1 + \gamma_2 x$$

olsun. $\beta_1, \beta_2, \gamma_1$ ve γ_2 katsayıları interpolasyon özelliğinden belirlenir. Örneğin (4.8a) 'yı $\phi_1(x)$ 'e uygulanırsa,

$$\beta_1 + \beta_2 x_a = 1 \quad (4.14)$$

$$\beta_1 + \beta_2 x_b = 0$$

olup,

$$\beta_1 = \frac{x_b}{x_b - x_a} \quad (4.15)$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{x_b - x_a}$$

dir.

(4.15)'i (4.13)'de yerine yazılırsa,

$$\phi_1(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_a} \quad (4.16)$$

bulunur. (4.7b)'nin ilk denklemine uyar. $\phi_2(x)$ 'de benzer olarak oluşturulur.

Adım 5: Deneme fonksiyonları sertlik ve yükleme terimlerinin içine yazılır.

Deneme çözüm iki deneme fonksiyon içerdiği için, adım 3 'deki sistem denklemleri (4.18) ve (4.19) ' dan $N = 2$ için,

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (4.17a)$$

burada

$$K_{ij} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_j}{dx} dx, \quad i=1,2$$

$$\begin{aligned} F_i &= FI_i + FB_i \\ &= - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_i dx - \left[\left(-x \frac{d\tilde{u}}{dx} \right) \phi_i \right]_{x_a}^{x_b} \end{aligned} \quad (4.17b)$$

dır.

Deneme fonksiyonların türevi (4.76)'dan elde edilir.

$$\frac{d\phi_1}{dx} = - \frac{1}{x_b - x_a} \quad (4.18)$$

$$\frac{d\phi_1}{dx} = \frac{1}{x_b - x_a}$$

Böylece sertlik terimleri,

$$\begin{aligned} K_{11} &= \int_{x_a}^{x_b} \left(-\frac{1}{x_b - x_a} \right) x \left(-\frac{1}{x_b - x_a} \right) dx = \frac{1}{2} \frac{x_b + x_a}{x_b - x_a} \\ K_{12} &= K_{21} = -K_{11} \\ K_{22} &= K_{11} \end{aligned} \quad (4.19)$$

iç yükleme terimleri,

$$FI_1 = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \frac{x_b - x}{x_b - x_a} dx = \frac{-2}{x_0} + \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a} \quad (4.20)$$

$$FI_2 = \frac{2}{x_b} - \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a}$$

olur. Sınır yükleme terimleride

$$FB_1 = - \left(-x \frac{d\tilde{u}}{dx} \right)_{x_b} \Phi_1(x_b) + \left(-x \frac{d\tilde{u}}{dx} \right)_{x_a} \Phi_1(x_a) = \left(-x \frac{d\tilde{u}}{dx} \right)_{x_a} \quad (4.21)$$

$$FB_2 = - \left(-x \frac{d\tilde{u}}{dx} \right)_{x_b}$$

olur. Belirtelim ki deneme fonksiyonların interpolasyon özellikleri, onların sınır terimleri içindeki görümlerini yok eder. Herbir sınırdaki sadece doğal sınır koşulu ifadesi (akı) terkedilir.. FI ve FB sırasıyla iç ve dış yüklerdir. FI daki integral x_a dan x_b ye tanımlı yani tüm iç bölgedeki noktaları kapsıyor. FB ise sınırlardaki yani x_a ve x_b deki yüküdür.

Adım 6: Akı için deneme fonksiyonları kullanarak ifadeleri hazırlarsak,

$$\tau(x) = akı = -x \frac{d\tilde{u}}{dx} \quad (4.22)$$

$$= -x \left(a_1 \frac{d\Phi_1}{dx} + a_2 \frac{d\Phi_2}{dx} \right) = \frac{x}{x_b - x_a} (a_1 - a_2)$$

Böylece adım 1-6 tamamlanmış olur. Son olarak (4.19) dan (4.21)'e kadar olan gerekli denklemler (4.6a) da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{x_b + x_a}{x_b - x_a} & -\frac{1}{2} \frac{x_b + x_a}{x_b - x_a} \\ -\frac{1}{2} \frac{x_b + x_a}{x_b - x_a} & \frac{1}{2} \frac{x_b + x_a}{x_b - x_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ &= \left\{ -\frac{2}{x_a} + \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a} \right\} + \left\{ \left(-x \frac{d\tilde{u}}{dx} \right)_{x_a} \right\} \\ & \quad \left\{ \frac{2}{x_b} - \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a} \right\} - \left\{ \left(-x \frac{d\tilde{u}}{dx} \right)_{x_b} \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

olur. (4.23) denklemlerine ayrıca element denklemleri de denir. Çünkü onlar bir tek element için rezidü denklemleridir. Önceki bölümdeki sistem denklemleri ile bu denklem uyuşur. Çünkü tüm bölge bir element olarak alındı.

Adım 7: Problem için nümerik datalar oluşturulur.

- i) Geometrik Data: Bir element analizi için sadece geometrik data olarak iki sınır koordinatları

$$x_a = 1, \quad (4.24)$$

$$x_b = 2$$

vardır.

- ii) Fiziksel Özellikler ve Uygulama Yükleri : Bunlar zaten örnek problem için tanımlandı.

Adım 8: Element denklemlerindeki bütün iç terimleri (sınırlar değil) nümerik olarak hesaplanır. (4.24)'ü (4.23)'de yerine yazarsak

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 + 2\ln 2 \\ 1 - 2\ln 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}}{dx}\right)_{x=1} \\ -\left(-x \frac{d\tilde{u}}{dx}\right)_{x=2} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

Adım 9: Sınır şartlarını uygulayalım. Önce zorlanmış (doğal) sınır şartlarını uygulayalım. Denklem (4.16) 'dan

$\left(-x \frac{d\tilde{u}}{dx}\right)_{x=2}$ yerine $\frac{1}{2}$ yazabiliriz. Böylece (4.25)'in sağ tarafı,

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 + 2\ln 2 \\ 1 - 2\ln 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}}{dx}\right)_{x=1} \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

olur. Esas sınır koşulu, $u(1) = 2$ bir zorlama sınır koşuludur çünkü denklemler içerisinde u için 2 değerini yazabileceğimiz bir terim yoktur. Bu nedenle biz tiral çözümünün kendisinin esas sınır koşulunu sağlamaya zorlayamayız. Böylece esas sınır koşulu (4.16)'dan (4.7a)'ya uygulanırsa,

$$\tilde{u}(1; a) = a_1 + \phi_1 + a_2 + \phi_2 \quad (4.27)$$

olur. İnterpolasyon özelliğinden dolayı $\phi_1(1) = 1$ ve $\phi_2(1) = 0$ 'dır. Böylece (4.27) denklemi

$$a_1 = 2 \quad (4.28)$$

olarak kısaltılır. (4.28) denklemi bir zorlama denklemidir ki (4.26) ya uygulanabilir. Bu satır/sütun operasyonu ile yapılır ki daha önce de bahsedilmişti. Bu zorlama denklemi muhtemel en basit formdur. Böylece satır/sütun operasyonları iki basit işleme indirgenir.

1. [K] matrisinde birinci kolon 2 ile çarpılır ve sonuç sağ taraf yükleme teriminden çıkartılır. Daha sonra birinci kolon silinir (ve böylece a_1 de silinir).
2. [K] matrisinde birinci satır ve yükleme vektör silinir. Her zaman esas sınır koşulu şu genel formda olacaktır:

$$a_i = d \quad (4.29)$$

Yani yalnızca bir parametre esas sınır koşulunun değerini belirler. (4.29) zorlama denklemi uygulanırken aşağıdaki iki işlem gerçekleştirilir.

1. [K] matrisindeki i kolunu d ile çarpılır ve sonuç sağ taraf olan yükleme vektöründen çıkartılır. Daha sonra i kolunu silinir (ve böylece a_i de)
2. [K] matrisinde i satırı ve yükleme vektörü silinir.

(4.28) zorlama denklemi (4.26) ya uygulanırken yukarıdaki mantığa göre iki denklemden ilki elimine edilir ve ikinci denklemden

$$\frac{3}{2}a_2 = \frac{7}{2} - 2\ln 2 \quad (4.30)$$

elde edilir. Bu bizim sistem denklemimizdir.

Adım 10: Sistem denklemlerini çözelim. (4.30) dan,

$$a_2 = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}\ln 2 = 1.409 \quad (4.31)$$

olur. a_1 parametresi zaten esas sınır koşulu sayesinde (4.28) deki gibi bulunmuştur. (4.28) ve (4.31), (4.7) de yerine yazılırsa yaklaşık çözüm,

$$\tilde{u}(x) = 2(2 - x) + 1.409(x - 1) = 2591 - 0.591x \quad (4.32)$$

olur.

Adım 11: Akı'nın belirlenmesi gereklidir. (4.22) den

$$\tilde{\tau}(x) = x(a_1 - a_2) = 0.591x \quad (4.33)$$

elde edilir.

Adım 12: Çözüm çizilir ve kesinliği ölçülür.

Önceki bölümdeki (3.50) denklemlerindeki $\tilde{u}_1(x)$ ve $\tilde{\tau}_1(x)$ çözümleri ile aynı çözümler bulundu. Zorlanmış sınır koşulu, $x = 1$ 'de tam olarak sağlanmış olmasına rağmen $x = 2$ deki zorlanmamış (doğal) sınır koşulu yaklaşık olarak sağlanır. Kesinlik hakkında tek ipucumuz, $x = 2$ deki zorlanmamış sınır koşulundaki $\tilde{\tau}(x)$ 'in hatasıdır. Hesaplanan değer $\tilde{\tau}(2) = 1.182$ dir. Oysa tam değer $\tilde{\tau}(2) = \frac{1}{2}$ ve hata oldukça fazladır. $\tilde{\tau}$ 'nın kesinliği ölçmek için bölgenin içinde başka bir yer ve $\tilde{u}$ 'nuucn kesinliği için ise başka bir yaklaşık çözüm üretmeliyiz. Bu önümüzdeki kısımda bölge iki elemente bölünerek yapılacaktır

4.3 İki Element Çözümü: Element Denklemlerinin Birleştirilmesi

Problemin bölgesi $x_a < x < x_c$, $x_c < x < x_b$ dır. Her bir bölge bir element olarak isimlendirilir. Elementler arasında bir boşluk yada çakışma yoktur. Yani problemin bölgesi elementlerin birleşiminden oluşur. Elementlerin boyu eşit olmayabilir. Yani x_c ; x_a ile x_b 'nın arasında herhangi bir yere yerleşebilir.

Her bir elementteki analizi takip etmek ve hesaplamaları birleştirmek için, her bir elementi etiketlendirmek uygun olacaktır. Bu (1), (2), (3), ... v.s. numaraları ile yapılabilir. Bu etiketlendirme parantez yada indislede yapılabilir. Örneğin iki element deneme çözümleri $\tilde{u}^1(x, a)$ ve $\tilde{u}^2(x, a)$ olarak sırayla etiketlendirilebilir.

4.3.1 Elementler Açısından Problemin Eşdeğer Formülasyonu

(4.1) de ifade edilen orijinal problem farklı fakat aslını kaybetmeyen bir formda yazılabilir.

Problem iki element için düşünöldüğü için, doğal olarak elementler arasındaki sınır noktası olan x_c ’ de çözümün sürekliliğı meselesi doğar. Aşağıdaki notasyona ihtiyacımız olacaktır.

Bir fonksiyon ve onun ilk n türevleri bir bölgede sürekli ise o fonksiyon o bölge için C^n sınıfındadır denir. Örneğin, bir sürekli fonksiyon C^0 sınıfından olsun. Eğer onun birinci türevide sürekli ise bu fonksiyon C^1 sınıfındadır. İkinci türevi de sürekli ise fonksiyon C^2 sınıfındadır, ... v.s. Bir fonksiyon C^n sınıfından ise ayrıca $C^{n-1}, C^{n-2}, \dots, C^0$ sınıfındandır fakat $C^{n+1}, C^{n+2}, \dots$ v.s. sınıfından olmayabilir.

Türevin basit tanımından (farkların oranının limiti olarak), eğer bir fonksiyon diferansiyellenirse birinci türevi C^{n-1} sınıfından, ikinci türevi C^{n-2} sınıfındandır. Tersine, bir integralin basit tanımından (bir toplamın limiti olarak) C^{n-2} sınıfından bir fonksiyonun integrali C^{n-1} sınıfından bir fonksiyon verir. C^{n-1} sınıfından bir fonksiyonun integrali C^n sınıfındandır. Yani türevleme sürekliliğın mertebesini düşürür, integral ise artırır. Bu özellik aşağıda kullanılır.

Şimdi problemi bölünmüş bölge için formüle edelim $u^{(1)}(x)$, (1) elementindeki tam çözüm, $u^{(2)}(x)$ de (2) elementindeki tam çözüm olsun. Her bir element içerisindeki yönetici diferansiyel denklem aşağıdaki gibi yazılır.

Element (1)

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{du^{(1)}}{dx} \right) = \frac{2}{x^2} \quad x_a < x < x_c \quad (4.34a)$$

Element (2)

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{du^{(2)}}{dx} \right) = \frac{2}{x^2} \quad x_c < x < x_b \quad (4.34b)$$

olur. (4.34) denklemleri tam olarak (4.1a) ile eşittir. ($x_a < x < x_b$ bölgesinde). Sadece x_c noktası hariç. Şimdi x_c noktasında $u^{(1)}(x)$ ve $u^{(2)}(x)$ arasında bir süreklilik ifadesine ihtiyacımız vardır. Şimdiki örnek problemimiz için bu oldukça basittir. Çünkü (4.1a) orijinal diferansiyel denklemdeki terimler oldukça düzgündür. $x_a < x < x_b$ bölgesi içindeki herhangi bir nokta hakkında aşağıdaki açıklama

gereklidir (x_c noktası hariç). (4.1a) denkleminin sağ tarafı $\frac{2}{x^2}$ terimidir. Bu terim $x_a < x < x_b$ üzerinde süreklidir. Böylece onun tüm türevleri de süreklidir. Yani $\frac{2}{x^2} \in C^\infty$ dır. Sol taraf, sağ tarafa eşit olduğu için soldaki de C^∞ sınıfından olmalıdır. Denklemin sol kısmının tekrar tekrar integralenmesi sürekli fonksiyonlar türetecektir (sonsuz kadar).

Örneğin (4.1a) denkleminin her iki yanını bölge içindeki herhangi bir x_p noktasını içeren sonsuz küçük bir aralık üzerinde integralleyelim.

$x_p - \varepsilon$ den $x_p + \varepsilon$ a,

$$\int_{x_p - \varepsilon}^{x_p + \varepsilon} \frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) dx = \int_{x_p - \varepsilon}^{x_p + \varepsilon} \frac{2}{x^2} dx \quad (4.35)$$

olup

$$\left[\left(x \frac{du}{dx} \right) \right]_{x_p - \varepsilon}^{x_p + \varepsilon} = \left[-\frac{2}{x} \right]_{x_p - \varepsilon}^{x_p + \varepsilon} \quad (4.36)$$

yada

$$\left(x \frac{du}{dx} \right)_{x_p + \varepsilon} - \left(x \frac{du}{dx} \right)_{x_p - \varepsilon} = -\frac{2}{x_p + \varepsilon} + \frac{2}{x_p - \varepsilon} \quad (4.37)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ için Sağ taraf $\rightarrow 0$ dır.

$$\left(x \frac{du}{dx} \right)_{x_p^+} = \left(x \frac{du}{dx} \right)_{x_p^-} \quad (4.38)$$

olur. (4.38) denklemini x_p noktasında $x \frac{du}{dx}$, in sürekliliğinin bir ifadesidir. Bu, bölge içerisinde herhangi bir nokta için uygulandığından, $x \frac{du}{dx}$ bütün bölgede süreklidir. x her yerde sürekli olduğundan, $\frac{du}{dx}$ süreklidir. Benzer bir integrasyonla u 'nun herhangi bir x_p noktasında sürekli olduğu gösterilir.

$$u(x_p^+) = u(x_p^-) \quad (4.39)$$

Özel x_c noktası için, sol taraftaki herhangi bir nokta için $u^{(1)}$, sağ taraftaki herhangi bir nokta için $u^{(2)}$ yazabiliriz. Böylece (4.38) ve (4.39) süreklilik şartları bu nokta için şu formda yazılabilir:

$$\left(-x \frac{du^{(1)}}{dx}\right)_{x_c} = \left(-x \frac{du^{(2)}}{dx}\right)_{x_c} \quad (4.40a)$$

$$u^{(1)}(x_c) = u^{(2)}(x_c) \quad (4.40b)$$

Böylece formülasyon tamamlanır. (4.40a) denkleminin her iki yanına (-) işareti koyduk. Böylece bu terimler akıyı simgeler (negatif akıyı simgelemesi yerine). Elementler arası sınır koşulu

$$\left(-x \frac{du^{(1)}}{dx}\right)_{x_c} = \left(-x \frac{du^{(2)}}{dx}\right)_{x_c}$$

olarak yazılır.

(4.40) denklemleri elementler arası sınır koşulu IBC_s olarak adlandırılır. Böylece IBC_s elementler arası sınırlarda tam çözüm tarafından sağlanan şartlardır. Oysa BC_s koşulları tam çözüm tarafından bölgenin sınırlarında sağlanan şartlardır. Her ikisinde tam çözümün gerekli özellikleridir. (4.40a) denklemi bir doğal sınır koşuluna benzer. Çünkü o akı üzerine yerleşen bir koşuldur. Buna rağmen akıyı belirli bir değere eşitlemek yerine bitişik elementteki akıya eşitledik. Benzer bir şekilde (4.40b) denklemi bir esas sınır koşuluna benzer. Çünkü fonksiyon üzerine yerleşen bir şarttır. Fonksiyonu belirli bir değere eşitlemek yerine bitişik elementteki fonksiyona eşitledik. Ek olarak, gelecek kısımda gösterilecek ki, IBC_s uygulandığı zaman, (4.40a) zorlanmama, (4.40b) ise zorlama olacaktır. Bu yine doğal ve esas sınır koşulu durumuna tamamen paralel bir şekilde yapılacaktır. Bu nedenlerle (4.40a) denkleminde bir doğal IBC ve (4.30b) ye bir esas IBC denilecektir.

Asıl problemi sanki iki ayrı problem gibi ele alınır. Önceki bölümlerdeki 12-adım prosedürünü her bir element için uygulanır. Ek olarak, esas IBC, her bir element için türetilen denklemleri birleştirmekte kullanılacaktır [27].

4.3.2 Adım 1-6: Her bir element için teorik gelişim

Önce element (1) için denklemleri oluşturacağız. Kısım 4.2 deki sonuçlar kullanılır. Daha sonra benzer düşünce element (2) için yapılacaktır.

Element (1)

Deneme fonksiyonlar, (4.7) denkleminde,

$$\tilde{u}^{(1)}(x; a) = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) \quad (4.41a)$$

olarak verilir. Burada

$$\phi_1(x) = \frac{x_c - x}{x_c - x_a}, \quad \phi_2(x) = \frac{x - x_a}{x_c - x_a} \quad (4.41b)$$

dir.

$\tilde{u}^1(x; a)$, element (1) için element deneme çözüm olarak adlandırılır.

Denklem (4.41)'e bakarsak, 1-element problemi ile benzer bir tablo ile karşı karşıyayız. Sadece aşağıdaki farklar vardır.

1. Notasyon u ve $\tilde{u}$ sırasıyla $u^{(1)}$ ve $\tilde{u}^{(1)}$ olarak değiştirildi. x_b ' de x_c oldu.
2. Elementler arası(interelement) sınır koşulları x_b deki sınır koşulu (şimdi x_c) iki IBC_s olarak değişti.

IBC_s nümerik hesaplamalara kadar henüz analize girmeyecektir (adım 7-12). Bu nedenle element denklemleri (4.23) denkleminde kopyalanabilir. Doğal olarak $\tilde{u}$ yerine $\tilde{u}^{(1)}$ ve x_b yerine x_c yazılır.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} & -\frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} \\ -\frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} & \frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{x_a} + \frac{2}{x_c - x_a} \ln \frac{x_c}{x_a} \\ \frac{2}{x_c} - \frac{2}{x_c - x_a} \ln \frac{x_c}{x_a} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx} \right)_{x_a} \\ -\left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx} \right)_{x_c} \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

(4.42) denklemleri element (1) için element denklemleridir. (4.6a) denklemi element (1) için uygulanırsa, (4.42) sembolik olarak,

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

olur. Üst simge olan (1), element (1)'e ait serlik ve yükleme terimlerini tanımlayan üst simgeler element (1) deki terimleri element (2) dekilerle ayırt etmek için yararlıdır. a_i parametreleri için bir üst simgeye gerek yoktur.

Genel bir kural olarak üst simgeler elementleri ve alt simgeler node'leri kasteder. Örneğin $K_{12}^{(1)}$ element (1)'e aittir. Bu parametreler nod 1 ve nod 2 ile ortak bağlantılıdır (yani a_1 ve a_2 ile). Benzer olarak $F_1^{(1)}$ element (1)'e aittir ve nod 1 ile ilgilidir. Fiziksel uygulamalarda bu ifadeler daha yararlıdır.

(4.42) denklem adım-5'i tamamlar. Adım-6 için, akıya ait (element (1) için) genel ifadeyi yazalım.

$$\tilde{\tau}^{(1)}(x; a) = -x \frac{d\tilde{u}^{(1)}(x; a)}{dx} = -x \left(a_1 \frac{d\phi_1(x)}{dx} + a_2 \frac{d\phi_2(x)}{dx} \right)$$

olup (4.41b) den,

$$\tilde{\tau}^{(1)}(x; a) = \frac{a_1 - a_2}{x_c - x_a} x \quad (4.44)$$

bulunur.

Element (2)

Element (2) için deneme çözüm ve deneme fonksiyonlar x_c 'deki nod element (1) deki ile aynıdır. SE analizinde her node tek bir node numarası ile isimlendirilir. Ancak daha anlaşılır olması açısından element (2) için bu noda farklı bir numara verdik. Yani node 3 olarak belirledik. Çünkü bu nod için element (1) ve element (2) deki yerleştirilen formulasyonlar tamamen birbirinden bağımsızdır. Bu sadece geçici bir durumdur. Çünkü ileride iki element birleştirilecektir. Bu ise gereksiz notasyonları çıkarması ve geleneksel SEM notasyonu kullanmayı mümkün kılacaktır.

Yine (4.7) denklemleri yeniden yazılırsa,

$$\tilde{u}^{(2)}(x; a) = a_3 \phi_3(x) + \phi_4(x) \quad (4.45a)$$

burada

$$\phi_3(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_c}, \quad \phi_4(x) = \frac{x - x_c}{x_b - x_c} \quad (4.45b)$$

dir. $\tilde{u}^{(2)}(x; a)$ element (2) için element tiral çözümüdür.

Yine (4.23) deki element denklemleri $\tilde{u}$ dan $\tilde{u}^{(1)}$ ye ve x_a dan x_c ye notasyon değişimleri ile yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} & -\frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} \\ -\frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} & \frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{x_c} + \frac{2}{x_b - x_c} \ln \frac{x_b}{x_c} \\ \frac{2}{x_b} - \frac{2}{x_b - x_c} \ln \frac{x_b}{x_c} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx} \right)_{x_c} \\ -\left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx} \right)_{x_b} \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

elde edilir. (4.46) denklemini element (2) için element denklemleridir. Sembolik olarak,

$$\begin{bmatrix} K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

şeklinde yazılır. Element (2) deki akı için (4.45) den,

$$\tilde{\tau}^2(x; a) = -x \frac{d\tilde{u}^{(2)}(x; a)}{dx} = -x \left(a_3 \frac{d\phi_3}{dx} + a_4 \frac{d\phi_4}{dx} \right) = \frac{a_3 - a_4}{x_b - x_c} x \quad (4.48)$$

yazılır.

Analizin bu noktalarında tam olarak birbirinden ayrılmış iki problemle karşı karşıya kalındı. Yani herbiri kendi a_i parametrelerini içeren iki çift element denklemine sahibiz. Bu 4 denklem matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} & -\frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} & \frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} & -\frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} & \frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{x_a} + \frac{2}{x_c - x_a} \ln \frac{x_c}{x_a} \\ \frac{2}{x_c} - \frac{2}{x_a - x_a} \ln \frac{x_c}{x_a} \\ -\frac{2}{x_c} + \frac{2}{x_b - x_c} \ln \frac{x_b}{x_c} \\ \frac{2}{x_b} - \frac{2}{x_b - x_c} \ln \frac{x_b}{x_c} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx} \right)_{x_a} \\ -\left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx} \right)_{x_c} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx} \right)_{x_c} \\ -\left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx} \right)_{x_b} \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

ve sembolik formda,

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \\ F_4^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

olur. Element (1)'in sertlik terimleri element (2) nin herhangi bir sertlik terimi ile çakışmazlar. Bu ise iki çiftten oluşan element denklemlerinin ayrılmamış olmasının sonucudur [6, 27].

(4.50) denklemlerine tüm problem için sistem denklemleri denir. Terminoloji olarak, sistem denklemleri bütün element denklemlerinin koleksiyonudur. 1-element problemleri için sistem denklemleri element denklemleridir.

4.3.3 Adım 7-12: Nümerik hesaplama, ayrı element denklemlerinin birleştirilmesi

Adım 7: Problem için özel nümerik veriler,

1. Geometrik veri:

$$x_a = 1, \quad x_b = 2 \quad (4.51)$$

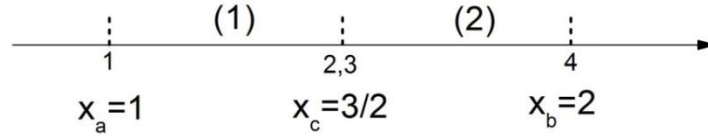
Genellikle elementleri eşit uzunlukta alınır.

$$x_c = \frac{3}{2} \quad (4.52)$$

Düğüm noktalarının (nod) yerleştirilmesiyle,

$$\begin{aligned} x_a &= 1 \text{ de nod 1} \\ x_c &= \frac{3}{2} \text{ de nod 2 ve nod 3} \\ x_b &= 2 \text{ de nod 4} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Bu nod ve elementler bir mesh (şebeke yada ağ) olarak tanımlanır. Elementlerin uzunluğunu ve yerini tanıtmak, nodların yerini tanımlamak, her bir nodun ve elementin numarasını işaretlemek işlerine mesh oluşturmak denir.



Adım 8: Her iki element denklemlerindeki bütün iç terimleri nümerik olarak değerlendirelim. Daha sonra her iki element denklemleri bir araya gelir.

(4.51) ve (4.52) yi (4.49) da yerine yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 + \ln \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3} - 4 \ln \frac{3}{2} \\ -\frac{4}{3} + 4 \ln \frac{4}{3} \\ 1 - 4 \ln \frac{4}{3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx} \right)_{x=1} \\ - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx} \right)_{x=\frac{3}{2}} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx} \right)_{x=\frac{3}{2}} \\ - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx} \right)_{x=2} \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

elde edilir. Şimdi interelement sınır koşullarının (IBCs) birini yani esas sınır koulu olan (4.40b) uygulamak istiyoruz. Bu oldukçabasit bir hesap gerektirir.

(4.40b) denklemi ve $x_c = \frac{3}{2}$ değerini kullanılırsa,

$$\tilde{u}^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right) = \tilde{u}^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right) \quad (4.55)$$

olur. Bu elementler arası sınır boyunca $u(x)$ in sürekliliğini ifade eder. (4.55) için bu prosedürün uygulanması bölüm 4 deki esas sınır koşullarının uygulanmasına benzer. Böylece elde ederiz ki (4.54) denkleminde (4.51)'i yerine koyarsak bilinmedik hiçbir terim kalmaz. Bu şartlı sağlamak için tek yol, deneme fonksiyonları kendilerine zorlamaktır.

Böylece isteriz ki,

$$\tilde{u}^{(1)}\left(\frac{3}{2}; a\right) = \tilde{u}^{(2)}\left(\frac{3}{2}; a\right) \quad (4.56)$$

olup (4.41) ve (4.45) den

$$a_2 = a_3 \quad (4.57)$$

olur ki sabit bir denklemdir. Şimdi (4.54) için önceki kısımlardaki adım-9 da tarif edilene benzer bir yol izlenir. (4.57) den, serlik matrisinin 2. ve 3. kolonları birleştirilir. Böylece (4.54) denklemi,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} + \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 + 4\ln \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\ln \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + 4\ln \frac{4}{3} \\ 1 - 4\ln \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx}\right)_{x=\frac{3}{2}} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx}\right)_{x=\frac{3}{2}} \\ -\left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx}\right)_{x=2} \end{Bmatrix} \quad (4.58) \end{aligned}$$

yada daha sade olarak,

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 6 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 + 4\ln \frac{3}{2} \\ 4\ln \frac{8}{9} \\ 1 - 4\ln \frac{4}{3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx}\right)_{x=\frac{3}{2}} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx}\right)_{x=\frac{3}{2}} \\ -\left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx}\right)_{x=2} \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

olur. (4.59) sistem denklemlerinin birleştirilmesidir.

Bu esas IBC uygulama işlemini ($u(x)$ 'in sürekliliği), element denklemleri için birleştirme adını alır. Birleştirme, element deneme çözümleri arasındaki sürekliliğin uygulamasıdır. Element deneme fonksiyonları kullanırken, esas IBCs her zaman bir sabit denkleme kısaltır. Genel formu,

$$a_i = a_j \quad (4.60)$$

dir. i. satır j. satır toplanır (yükleme vektöründe).

Adım-12 de görülecek ki, sonuç çözüm interelement sınırında sürekli olacaktır. Birleştirme prosedürü genel matris notasyonu ile sembolize edilir. Böylece (4.50) denklemini üzerindeki biraraya getirme operasyonunu aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ 0 & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

Açıkça görülüyor ki, birleştirme işlemi sadece element denklemlerinin bir çiftinin bazı terimlerin, diğer element denklemlerinin çalışmasının, sırasıyla, 4x4 tipinde bir

sertlik matrisi oluşturarak (4.54), daha sonra satır/sütun işlemleri ile onu 3x3 tipinde bir matrise (4.59) dönüştürmeye yarayan ortanca adımı uygulamasına ihtiyaç yoktur. Onun yerine, biz doğrudan, denklemlerin iki ayrı çiftinden, basitçe denklemlerin ikinci çiftini ilk çifte ekleyerek bir 3x3 sisteme ulaşılabilir.

Bu prosedürü örneklemek için 1.elementle başlayalım. (4.43)'den,

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

Daha sonra ikinci element için (4.47)'den,

$$\begin{bmatrix} K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \end{Bmatrix}$$

olur.

(4.43) ve (4.47)'yi (4.50) şeklinde yazmak yerine (4.61)'deki gibi birlikte yazılabilir. Bu ise (4.57) deki zorlama denklemi sayesinde olur. (4.47) de a_3 yerine a_2 yazılabilir.

Adım 9: Sınır koşulları ve doğal IBC (birleştirilmiş) sistem denklemlerinde uygulanır.

Doğal IBC (Interelement Sınır Koşulu):

(4.40a) eşitliğini hatırlayalım $x_c = \frac{3}{2}$ olup,

$$\left(-x \frac{du^{(1)}}{dx} \right)_{x=\frac{3}{2}} = \left(-x \frac{du^{(2)}}{dx} \right)_{x=\frac{3}{2}} \quad (4.62)$$

şeklindedir ve elementler arası sınırda akının sürekliliğini ifade eder. (4.62) eşitliğini uygulama prosedürü daha önce kullanılan bir doğal sınır koşulu ile benzerdir. Böylece (4.62) tekrar yazılırsa,

$$\left(-x \frac{du^{(1)}}{dx} \right)_{x=\frac{3}{2}} - \left(-x \frac{du^{(2)}}{dx} \right)_{x=\frac{3}{2}} = 0 \quad (4.63)$$

olup (4.63) eşitliği (4.59) denkleminin sağtarafı üzerindeki bir terim olarak karşımıza çıkar. Böylece bu değeri sıfır olarak yerine yazarsak, (4.59) dan,

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 6 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 + 4\ln \frac{3}{2} \\ 4\ln \frac{8}{9} \\ 1 - 4\ln \frac{4}{3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1} \\ 0 \\ -\left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx}\right)_{x=2} \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

olur.

Doğal Sınır Koşulları:

(4.16) deki doğal sınır koşulu,

$$\left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx}\right)_{x=2} = \frac{1}{2} \quad (4.65)$$

şeklinde yazılabilir. (4.64) de yerine yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 6 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 + 4\ln \frac{3}{2} \\ 4\ln \frac{8}{9} \\ 1 - 4\ln \frac{4}{3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \quad (4.66)$$

olur.

Esas Sınır Koşulları:

Esas sınır $x = 1$ için uygulanır. $x = 1$ noktasıda element (1) dedir. O zaman bu sınır koşulu (4.41a) daki $u^{(1)}(x; a)$ deneme çözümü için uygulansın.

$$\tilde{U}^{(1)}(x; a) = a_1 \phi_1(1) + a_2 \phi_2(1) = 2 \quad (4.67)$$

olur. İnterpolasyon özelliğinden, $\phi_1(1) = 1$ ve $\phi_2(1) = 0$ olup (4.67) eşitliği

$$a_1 = 2$$

halinir alır. Zorlama denkleminin bu tipi, aşağıdaki satır/sütun operasyonları ile uygulanır.

1. Sertlik matrisinin 1. kolonunu 2 ile çarpıp, sağ taraftaki yükleme vektöründen çıkartılır ve daha sonra 1. kolonu silinir.
2. Sertlik matrisi ve yükleme vektöründeki 1. satırı silinir.

Belirtelim ki, bilinmeyen sınır terimi $\left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1}$, otomatik olarak sistem denklemlerinden düşer. Bu esas sınır koşulu uygulandığında gerçekleşir. Bu operasyonu (4.66) denkleminde uygularsak,

$$\begin{bmatrix} 6 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4\ln\frac{8}{9} + 5 \\ 1 - 4\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \quad (4.69)$$

olup (4.69) denklemleri sistem denklemlerinin final formudur ve çözüme hazırdır.

Adım 10: Sistem denklemlerinin çözelmesi gerekir.

(4.69)'un çözümünden

$$a_2 = 1.551 \quad (4.70a)$$

$$a_4 = 1.365$$

(4.57) ve (4.58)'den

$$a_1 = 2 \quad (4.70b)$$

$$a_3 = 1.551$$

olur.

(4.70) denklemleri (4.41) ve (4.42) de yazılırsa,

$$\tilde{u}^{(1)}(x) = 2\phi_1(x) + 1.551\phi_2(x) = 2\left(\frac{1.5-x}{0.5}\right) + 1.551\left(\frac{x-1}{0.5}\right) \quad (4.71a)$$

$$\tilde{u}^{(2)}(x) = 1.551\phi_3(x) + 1.365\phi_4(x) = 1.551\left(\frac{2-x}{0.5}\right) + 1.365\left(\frac{x-1.5}{0.5}\right) \quad (4.71b)$$

bulunur.

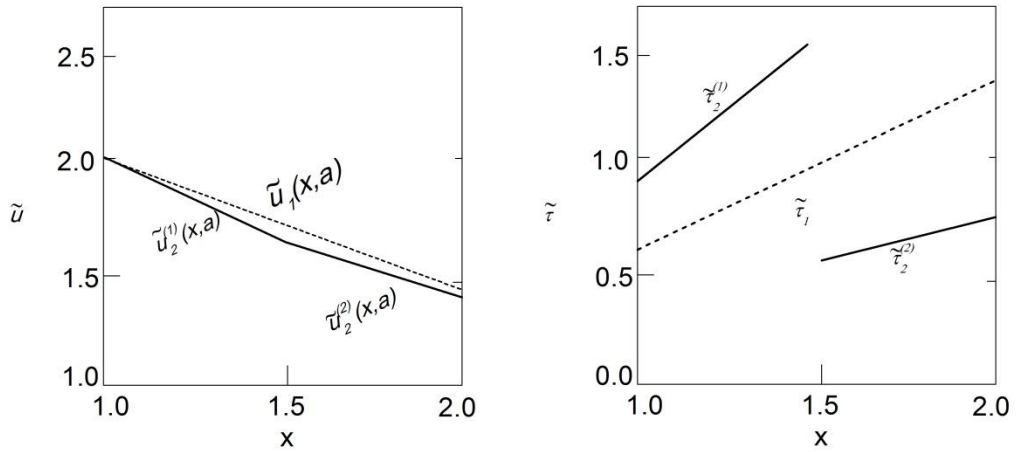
Adım 11: Akının değerlendirilmesi gerekir. (4.70)'i (4.44) ve (4.48) de yerine yazılırsa,

$$\tilde{\tau}^{(1)}(x) = 0.898x \quad (4.72)$$

$$\tilde{\tau}^{(2)}(x) = 0.372x$$

olarak bulunur.

Adım 12: Çözüm grafiğinin çizdirilmesi ve kesinliğin ölçülmesi



Şekil 4.4: 1 ve 2 - element çözümleri.

Şekil 4.4, (4.71) ve (4.72) denklemlerindeki $\tilde{u}(x)$ ve $\tilde{\tau}(x)$ 'in bir grafiğidir. Belirtelim ki $x = 1$ deki esas sınır koşulu zorlanıyor, böylece $\tilde{u}(x)$ bu koşula tam olarak sağlar. Benzer düşünceyle, esas IBC, $x = \frac{3}{2}$ 'de ($\tilde{u}$ nun sürekliliği) ayrıca zorlanıyor. Bu yüzden $\tilde{u}(x)$ bu şartı tam olarak sağlar. $x = 2$ deki doğal sınır koşulu, ne kadar da olsa serbest (zorlanmayan) bir şart olup $\tilde{\tau}(x)$ bu şartı yaklaşık olarak sağlar. $x = \frac{3}{2}$ deki doğal IBC (akının sürekliliği), ayrıca zorlanıyor. Bu nedenle $\tilde{\tau}(x)$ bu şartı yaklaşık olarak sağlar.

$x = \frac{3}{2}$ de $\tilde{\tau}$ 'nın uyuşmaması oldukça yüksek bir ölçüdedir. Bu durum oldukça kaba bir ağ yani az sayıda element kullanılması nedeniyle karşımıza çıktı. Daha çok elementle devam edersek bu benzeşmeme istenildiği kadar küçük hale gelir [27].

Hatayı ölçmek için, akı ile ilgili bir ilk ipucunu, serbest sınır koşulu ve IBC koşullarının uygulandığı noktaları incelemekle elde ederiz. $x = 2$ de $\tilde{\tau}(2) = 0.774$ olup tam değere göre %49 kadar bir hataya sahiptir. $x = \frac{3}{2}$ de, süreksizlik olup (1.347 ye karşın 0.558) $\% \pm 41$ oranında bir değişim vardır.

Bölgenin bütün noktalarında $\tilde{u}(x)$ ve $\tilde{\tau}(x)$ 'in ikisi için hatayı değerlendirmek amacıyla, 1-element çözümü ile 2-element çözümünü birleştirmeliyiz. Şekil 4.14 1-element ve 2-element çözümlerini birleşik olarak gösteriyor. $\tilde{u}^{(1)}(x)$, $\tilde{\tau}^{(1)}(x)$ ve $\tilde{u}^{(2)}(x)$, $\tilde{\tau}^{(2)}(x)$ sırasıyla birinci ve ikinci yaklaşık çözümlerini simgeler.

$\tilde{u}_1(x)$ ve $\tilde{u}_2(x)$ arasındaki noktasal hata tüm bölgede %10 dan az yani,

$$\left| \frac{\tilde{u}_2(x) - \tilde{u}_1(x)}{\tilde{u}_2(x)} \right| < 0,1, \quad 1 < x < 2 \quad (4.73)$$

olur.

Tüm bölge üzerinde $\tilde{\tau}_1(x)$ ve $\tilde{\tau}_2(x)$ arasındaki noktasal hata %60 dan azdır. Yani,

$$\left| \frac{\tilde{\tau}_2(x) - \tilde{\tau}_1(x)}{\tilde{\tau}_2(x)} \right| < 0,6, \quad 1 < x < 2 \quad (4.74)$$

olur

(4.14) 'e dayanarak, $\tilde{u}_2(x)$ deki hata %10'un komşuluğunda ve $\tilde{\tau}_2(x)$ deki hata ise %50-%60 civarındadır. Bu büyüklükteki hatalar böylesine kaba bir parçalanma için uygundur. Sadece iki element ve her bir element için düz çizgiden oluşan yaklaşım vardır. Daha sık bir parçalanma ile (daha fazla element kullanarak) hata oranı %1 lere kadar düşürülebilir.

Birleştirme: Orijinal deneme fonksiyonları düzenlemek için zorlama denklemlerinin uygulanışının etkisi kısım 4.4 de verildi. Grafiksel olarak göstermek için, (4.57)' deki zorlama denklemi esas IBC 'nin sonucudur ($a_2 = a_3$ çıkmıştı).

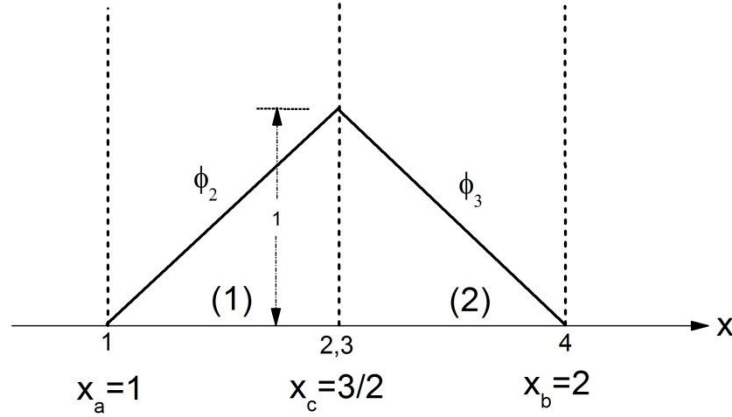
(4.57), $\tilde{u}^{(1)}$ ve $\tilde{u}^{(2)}$ arasındaki sürekliliği (x_c nodunda) zorla yaptırır. (4.57) denklemini doğruca (4.45a) daki $\tilde{u}^{(2)}(x; a)$ deneme çözümüne yerine koyulursa

$$\tilde{u}^{(2)}(x; a) = a_2 \phi_3(x) + a_4 \phi_4(x) \quad (4.75a)$$

elde edilir. (4.41a) dan $\tilde{u}^{(1)}(x; a)$ ' yı yazılırsa,

$$\tilde{u}^{(1)}(x; a) = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) \quad (4.75b)$$

elde edilir.



Şekil 4.5: Birleştirilmiş deneme fonksiyonları.

x_c nodunda a_2 ve a_3 olarak iki parametre belirlendi. (4.57) eşitliğinin sonucu olarak bu parametrelerin birisi (a_2 'yi) kullanıldı. $\phi_2(x)$ ve $\phi_3(x)$ 'in ikisinde x_c noktasında sürekli olan yeni bir deneme fonksiyon olarak birleşir. Şekilde görülen ters V şeklindeki fonksiyon şapka fonksiyonu olarak da adlandırılır. Bu grafik orijinal deneme fonksiyonların (4.57) eşitliği yardımıyla nasıl modifiye edildiğini gösteriyor.

Görülür ki $\tilde{u}$ üzerindeki süreklilik şartı (esas IBC), bitişik elementler içindeki deneme fonksiyonları onların ortak sınırları üzerindeki paylaşılan (ortak), düğüm noktasına sahip olmaya zorlar. Sonuç olarak her bir parametrede tek düğüm noktası bulunur.

Deneme çözümler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tilde{u}^{(1)}(x; a) = a_1 \phi_1^{(1)}(x) + a_2 \phi_2^{(1)}(x) \quad (4.76)$$

$$\tilde{u}^{(2)}(x; a) = a_2 \phi_2^{(2)}(x) + a_3 \phi_3^{(2)}(x)$$

(1) ve (2) üst indisler deneme fonksiyonların hangi elemente ait olduklarını belirlemek için yazıldı. Alt indisler ise deneme fonksiyonun değerinin, 1 olduğu nodu gösteriyor. Örneğin $\phi_3^{(2)}(x)$, (2) elementi içinde bir deneme fonksiyon olup node 3 de 1 değerine sahiptir. Nodlar gelenek olarak tam sayılarla etiketlenir. 1 ile başlarlar. Bu numaralandırma hesaplama açısından kolaylık sağlar ama mecburi değildir. Notasyonun avantajını göstermek için (4.43) ve (4.47) denklemleri içindeki her bir element için element denklemlerinin yeni formunu yazarsak:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} \text{ (önceki ile aynı) element(1)} \quad (4.77a)$$

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix} \text{ (öncekinden farklı form) element(2)} \quad (4.77b)$$

ve birleşim denklemleri,

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (4.78)$$

olur. Bu açıkça (4.61) den daha anlamlıdır. Bu yeni notasyonun belki de en büyük avantajı, her bir element için element denklemleri benzer aynı notasyonu verecektir (sadece alt ve üst indislerin nümerik değerleri hariç). Bu ise bilgisayar kodlaması anlamında kolaylık sağlar.

4.4 Dört Element Çözümü

4.4.1 Adım 1-6: Tipik bir element için teorik gelişim

Şimdi 4-element çözümünü oluşturacağız. Düğüm noktaları ve ilgili parametreler soldan sağa doğru sırasıyla numaralandırıldı. Elementlerde benzer şekilde

numaralandırıldı. Ayrıca her bir element içindeki deneme fonksiyon ve deneme çözümler gösterildi. Aslında her bir element için notasyonlar benzerdir. Tek fark alt indis ve üst indislerin nümerik değerleridir. Bu benzerlikten dolayı her bir element için, element denklemlerini türetmeye ihtiyaç yoktur (adım 1-6 ile ilgilenilmez). Gerçekten de onlar elementlerden bir tanesi için gereklidir sadece. Diğer geri kalan elementler için sadece alt ve üst indislerin nümerik değerleri değiştirilir. Benzer deneme çözüm ve deneme fonksiyonlar kullanılır. Yani,

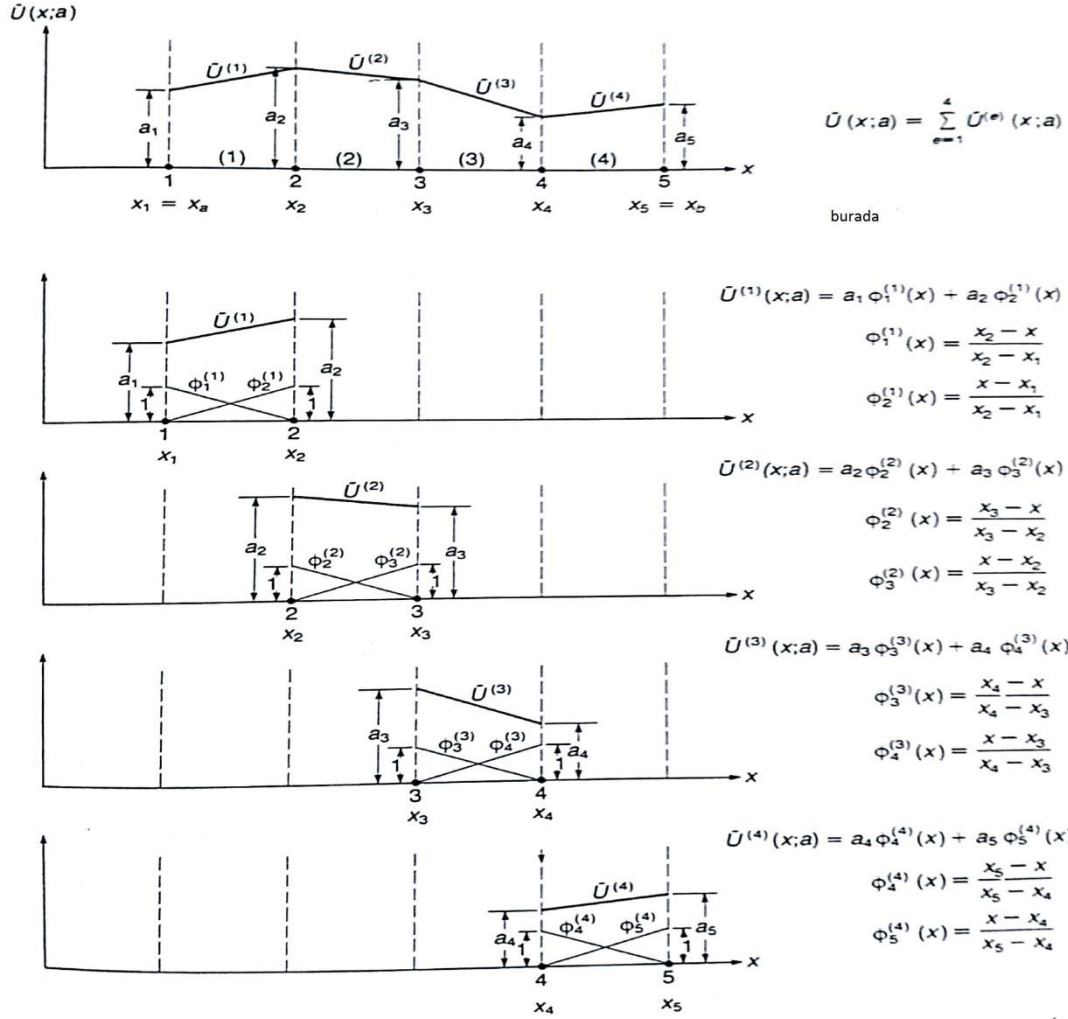
$$\tilde{u}^{(e)}(x; a) = a_1 \phi_1^{(e)}(x) + a_2 \phi_2^{(e)}(x) \quad (4.79a)$$

$$\phi_1^{(e)}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \phi_2^{(e)}(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (4.79b)$$

şeklindedir. Tipik element bir standart notasyon kullanır ki bilgisayar ile yapılacak hesaplamalar için oldukça kullanışlıdır. Nod'lar $1, 2, \dots, n$ olarak numaralandırılır. n element içindeki nodların sayısıdır. Bunlar popüler olarak lokal düğüm noktası numaraları olarak bilinirler. Benzer olarak koordinatlar $x_1, x_2, \dots, x_n$ olarak etiketlenir ve parametreler ise $a_1, a_2, \dots, a_n$ olarak etiketlenir.

(4.79) ifadeleri, Şekil 4.6 deki 4 setin her birini belirlemek için kullanılabilir. Sadece alt indis (nod numarası) ve üst indir (element numarası) aşağıdaki bağlantı çizelgesindeki numaralar ile yer değiştirilerek yapılır.

Bu çizelge, Şekil 4.6 nin en üstündeki birleşimdeki element numaraları ve nod numaralarının bir görsel incelemesinden kolayca oluşturulur (Bu prosedür bir bilgisayar programı ile kolayca otomatikleştirilir). Çizelgenin amacı hangi nodların hangi elementler ile ilgili olduğunu göstermektir



Şekil 4.6: Dört element deneme çözümü.

Çizelge 4.1: Birleşim için bağlantı çizelgesi.

Element	Lokal nod 1 dönüşümü	Local nod 2 dönüşümü
(1)	(1)	2
(2)	(2)	3
(3)	(3)	4
(4)	(4)	5

Şimdi tipik elementten, dört elementin her birine ulaşacak bir yol göstericiye sahibiz. Tipik element için element denklemlerine ihtiyacımız var. Bunlar zaten türetildi. Onlar ya 1-element problemindeki (4.23) denkleminde ya da 2- element problemindeki (4.42), (4.46) denkleminde kopyalanır. Fakat tipik element notasyonu

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} & -\frac{1}{2} \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} \\ -\frac{1}{2} \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} & \frac{1}{2} \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-2}{x_1} + \frac{2}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2}{x_1} \\ \frac{2}{x_2} - \frac{2}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2}{x_1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(e)}}{dx} \right)_{x_1} \\ - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(e)}}{dx} \right)_{x_2} \end{Bmatrix} \quad (4.80)$$

yada genel matris notasyonu,

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(e)} \\ F_2^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (4.81)$$

dir. Benzer olarak, element akı için ifadeyi ya 1-element problemindeki (4.22) denkleminde ya da 2-element probleminde (4.44) ya da (4.48) den kopyalarız ve tipik element notasyonu ile,

$$\tilde{\tau}^{(e)}(x; a) = \frac{a_1 - a_2}{x_2 - x_1} x \quad (4.82)$$

elde edilir.

Böylece adım-1 den adım-6 ya kadar olan teorik gelişim tamamlandı. Çünkü tipik element için element akı ve element denklemlerine sahibiz. Nümerik hesaplama arasında bu denklemler kullanılacaktır.

4.4.2 Adım 7-12: Nümerik hesaplama

Adım 7: Problem için nümerik datalar:

1. Geometrik data :

- a) Nod Tanımı: 2-element probleminde elementlerin boyları aynı alınmıştır. Burada nodlar Şekil 4.6 deki gibi yerleşmiş olup koordinatları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}x_1 &= 1.00 \\x_2 &= 1.25 \\x_3 &= 1.50 \\x_4 &= 1.75 \\x_5 &= 2.00\end{aligned}\tag{4.83}$$

- b) Element tanımı: Özel nod numaraları arasındaki bölgeler birer elementi verir. Nod ve element numaraları Şekil 4.6 deki şekildedir. Bir nümerik kodlamada bu numaralar bu adımda bilgisayara girilir ve bir bağlantı sıralaması yapılır

2. Fiziksel özellikler ve uygulama yükleri:

Bunlar zaten bu örnek problem için önceki kısımda adım 7 de tanımlanmıştı.

Adım 8: Her element için element denklemlerindeki bütün iç terimler (sınır değil) nümerik olarak değerlendirilir. Daha sonra element denklemleri sistem denklemleri için bir araya getirilir. Her seferinde bir elementi alınacaktır.

Element (1): Element (1) için (4.80) element denklemlerinde lokal düğüm noktası 1 için 1 numaralı düğüm noktası, lokal düğüm noktası 2 için 2 numaralı düğüm noktası yerine yazılabilir. Daha sonra (4.83)'den $x_1 = 1$ ve $x_2 = 1.25$ değerleri (4.80) de kullanılabilir. Böylece,

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 + 8 \ln \frac{5}{4} \\ \frac{8}{5} - 8 \ln \frac{5}{4} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx} \right)_{x=1} \\ - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx} \right)_{x=1.25} \end{Bmatrix}\tag{4.84}$$

yada genel matris notasyonu ile,

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix}\tag{4.85}$$

olur. 2.-element için aynı işlemler tekrarlanır.

Element (2): Element (2) için (4.80) de lokal düğüm noktası 1 için 2 nolu düğüm noktası, lokal düğüm noktası 2 için 3 nolu düğüm noktası kullanılırsa,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{x_3 + x_2}{x_3 - x_2} & -\frac{1}{2} \frac{x_3 + x_2}{x_3 - x_2} \\ \frac{1}{2} \frac{x_3 + x_2}{x_3 - x_2} & \frac{1}{2} \frac{x_3 + x_2}{x_3 - x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{x_2} + \frac{2}{x_3 - x_2} \ln \frac{x_3}{x_2} \\ \frac{2}{x_3} - \frac{2}{x_3 - x_2} \ln \frac{x_3}{x_2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx} \right)_{x_2} \\ - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx} \right)_{x_3} \end{Bmatrix} \quad (4.86)$$

(4.83)'den $x_2 = 1.25$ ve $x_3 = 1.5$ olup (4.86)'dan,

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{8}{3} + 8 \ln \frac{6}{5} \\ \frac{4}{3} - 8 \ln \frac{6}{5} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^2}{dx} \right)_{x=1.25} \\ - \left(-x \frac{d\tilde{u}^2}{dx} \right)_{x=1.5} \end{Bmatrix} \quad (4.87)$$

olur. Genel matris notasyonu ile

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (4.88)$$

(4.84) ve (4.87) element denklemlerinin birleştirilmesi kısım 4.3.3 de verildi.

Böylece,

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & 0 \\ -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} + \frac{11}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 + 8 \ln \frac{5}{4} \\ \frac{8}{5} - 8 \ln \frac{5}{4} - \frac{8}{5} + 8 \ln \frac{6}{5} \\ \frac{4}{3} - 8 \ln \frac{6}{5} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^1}{dx} \right)_{x=1} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^2}{dx} \right)_{x=1.25} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^1}{dx} \right)_{x=1.25} \\ - \left(-x \frac{d\tilde{u}^2}{dx} \right)_{x=1.5} \end{Bmatrix} \quad (4.89)$$

ya da genel matris notasyonu ile,

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (4.90)$$

olur. Her bir elementin katkısı renklerle gösterildi.

Element (3): Element (3) için , (4.80) denkleminde lokal düğüm noktası 1 için düğüm noktası 3 ve lokal düğüm noktası 2 için düğüm noktası 4 yerine yazılırsa:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{x_4 + x_3}{x_4 - x_3} & -\frac{1}{2} \frac{x_4 + x_3}{x_4 - x_3} \\ \frac{1}{2} \frac{x_4 + x_3}{x_4 - x_3} & \frac{1}{2} \frac{x_4 + x_3}{x_4 - x_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{x_3} + \frac{2}{x_4 - x_3} \ln \frac{x_4}{x_3} \\ \frac{2}{x_4} - \frac{2}{x_4 - x_3} \ln \frac{x_4}{x_3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(3)}}{dx} \right)_{x_3} \\ - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(3)}}{dx} \right)_{x_4} \end{Bmatrix} \quad (4.91)$$

olur. (4.83)' den $x_3 = 1.5$, $x_4 = 1.75$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \frac{13}{2} & -\frac{13}{2} \\ -\frac{13}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{3} + 8 \ln \frac{7}{6} \\ \frac{8}{7} - 8 \ln \frac{7}{6} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(3)}}{dx} \right)_{x=1.5} \\ - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(3)}}{dx} \right)_{x=1.75} \end{Bmatrix} \quad (4.92)$$

ya da genel matris notasyonu ile,

$$\begin{bmatrix} K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3^{(3)} \\ F_4^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (4.93)$$

olur. Element (3) ve element (2) benzer düşünceyle birleştirilirse ve (4.92) denklemini (4.89)'a eklenirse,

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} + \frac{11}{2} & -\frac{11}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{11}{2} + \frac{13}{2} & -\frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 + 8\ln \frac{3}{4} \\ \frac{8}{5} - 8\ln \frac{5}{4} - \frac{8}{5} + 8\ln \frac{6}{5} \\ \frac{4}{3} - 8\ln \frac{6}{5} - \frac{4}{3} + 8\ln \frac{7}{6} \\ \frac{8}{7} - 8\ln \frac{7}{6} \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx} \right)_{x=1} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx} \right)_{x=1.25} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx} \right)_{x=1.25} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(3)}}{dx} \right)_{x=1.5} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx} \right)_{x=1.5} \\ - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(3)}}{dx} \right)_{x=1.75} \end{Bmatrix} \quad (4.94)$$

olur. Yada matris notasyonu ile; (4.94) denklemi,

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & 0 \\ 0 & K_{32}^2 & K_{33}^2 + K_{33}^3 & K_{34}^3 \\ 0 & 0 & K_{43}^3 & K_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 + F_2^2 \\ F_3^2 + F_3^3 \\ F_4^3 \end{Bmatrix} \quad (4.95)$$

olur.

Element (4): Çizelge 4.1 den, lokal düğüm noktası 1 için düğüm numarası 4 ve lokal düğüm noktası için 5 numaralı düğüm noktası kullanılırsa,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{x_5 + x_4}{x_4 - x_4} & -\frac{1}{2} \frac{x_5 + x_4}{x_5 - x_4} \\ -\frac{1}{2} \frac{x_5 + x_4}{x_5 - x_4} & \frac{1}{2} \frac{x_5 + x_4}{x_5 - x_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{x_4} + \frac{2}{x_5 - x_4} \ln \frac{x_5}{x_4} \\ \frac{2}{x_5} - \frac{2}{x_5 - x_4} \ln \frac{x_5}{x_4} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(4)}}{dx} \right)_{x_4} \\ -\left(-x \frac{d\tilde{u}^{(4)}}{dx} \right)_{x_5} \end{Bmatrix} \quad (4.96)$$

olur. (4.83)'den $x_4 = 1.75$ ve $x_5 = 2$ değerlerini yerlerine yazılır. Böylece,

$$\begin{bmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \\ -\frac{15}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{8}{7} + 8 \ln \frac{8}{7} \\ 1 - 8 \ln \frac{8}{7} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^4}{dx} \right)_{x=1.75} \\ -\left(-x \frac{d\tilde{u}^4}{dx} \right)_{x=2} \end{Bmatrix} \quad (4.97)$$

ya da genel matris notasyonu ile

$$\begin{bmatrix} K_{44}^{(4)} & K_{45}^{(4)} \\ K_{54}^{(4)} & K_{55}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4^{(4)} \\ F_5^{(4)} \end{Bmatrix} \quad (4.98)$$

Son olarak (4.97) ile (4.94) birleştirilirse,

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{-9}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-9}{2} & \frac{9}{2} + \frac{11}{2} & \frac{-11}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -11 & \frac{11}{2} + \frac{13}{2} & \frac{-13}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-13}{2} & \frac{13}{2} + \frac{15}{2} & \frac{-15}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-15}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 + 8\ln \frac{5}{4} \\ \frac{8}{5} - 8\ln \frac{5}{4} - \frac{8}{5} + 8\ln \frac{6}{5} \\ \frac{4}{3} - 8\ln \frac{6}{5} - \frac{4}{3} + 8\ln \frac{7}{6} \\ \frac{8}{7} - 8\ln \frac{7}{6} - \frac{8}{7} + 8\ln \frac{8}{7} \\ 1 - 8\ln \frac{8}{7} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^1}{dx}\right)_{x=1} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^2}{dx}\right)_{x=1.25} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^1}{dx}\right)_{x=1.25} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^3}{dx}\right)_{x=1.5} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^2}{dx}\right)_{x=1.5} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^4}{dx}\right)_{x=1.75} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^3}{dx}\right)_{x=1.75} \\ - \left(-x \frac{d\tilde{u}^4}{dx}\right)_{x=2} \end{Bmatrix} \quad (4.99)$$

olur. Genel matris notasyonu ile

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} + K_{44}^{(4)} & K_{45}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{54}^{(4)} & K_{55}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 + F_2^2 \\ F_3^2 + F_3^3 \\ F_4^3 + F_4^4 \\ F_5^4 \end{Bmatrix} \quad (4.100)$$

elde edilir. Böylece element denklemlerinin 4 seti için nümerik değerlendirme tamamlandı ve sistem denklemleri (4.99) da birleştirildi. (4.99) aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{-9}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-9}{2} & 10 & \frac{-11}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-11}{2} & 12 & \frac{-13}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-13}{2} & 14 & \frac{-15}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-15}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 + 8\ln\frac{5}{4} \\ 8\ln\frac{24}{25} \\ 8\ln\frac{35}{36} \\ 8\ln\frac{48}{49} \\ 1 - 8\ln\frac{8}{7} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^1}{dx}\right)_{x=1} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^2}{dx}\right)_{x=1.25} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^1}{dx}\right)_{x=1.25} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^3}{dx}\right)_{x=1.5} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^2}{dx}\right)_{x=1.5} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^4}{dx}\right)_{x=1.75} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^3}{dx}\right)_{x=1.75} \\ - \left(-x \frac{d\tilde{u}^4}{dx}\right)_{x=2} \end{Bmatrix} \quad (4.101)$$

Yukarıdaki şekilde (4.101) denklem sistemi ile ilgili tamamlanmış deneme çözümü gösterilmektedir. Ayrıca bir araya getirilmiş deneme fonksiyonlar bir a_i parametresi ile çarpım halinde olup, interelement sınırlarında süreklidirler. Bir bilgisayar programında (4.80) teki element denklemleri sadece bir kez kodlanacaktır. Alt ve üst indisler her bir element için değişecektir.

Adım 9: Sınır koşulları ve doğal interelement sınır koşullarını (IBCs) uygulanır. Doğal sınır koşulu olarak (4.1b) den,

$$\left(-x \frac{du^{(4)}}{dx}\right)_{x=2} = \frac{1}{2}$$

yazılır. (4.1b) deki u yerine $u^{(4)}$ yazıldı. Çünkü $u^{(4)}$ tam çözümün $x = 2$ deki noda temas eden bölümündedir.

Doğal sınır koşulları (4.40a) denklemini elementler arası nodların herbirisi için uygulayarak elde edilirler.

$$\begin{aligned} \left(-x \frac{du^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.25} - \left(-x \frac{du^{(1)}}{dx}\right)_{x=1.25} &= 0 \\ \left(-x \frac{du^{(3)}}{dx}\right)_{x=1.50} - \left(-x \frac{du^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.50} &= 0 \\ \left(-x \frac{du^{(4)}}{dx}\right)_{x=1.75} - \left(-x \frac{du^{(3)}}{dx}\right)_{x=1.75} &= 0 \end{aligned} \quad (4.103)$$

Burada $u^{(4)}$, $u^{(4)}$, $u^{(4)}$ ve $u^{(4)}$ her bir elementteki tüm çözümdür. (4.103) deki her bir denklem elementler arasındaki akı'un sürekliliğini ifade eder. Böylece süreklilik tam çözümün bir özelliği olup her bir interelement sınır noktasında sağlanır. Buna rağmen böyle türetmeler gerekli değildir [27, 35]. (4.102) ve (4.103) den,

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{-9}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-9}{2} & 10 & \frac{-11}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-11}{2} & 12 & \frac{-13}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-13}{2} & 14 & \frac{-15}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-15}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 8\ln \frac{5}{4} \\ 8\ln \frac{24}{25} \\ 8\ln \frac{35}{36} \\ 8\ln \frac{48}{49} \\ 1 - 8\ln \frac{8}{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

Esas sınır koşulları : 1-element ve 2-element problemleri ile aynı mantığa dayanarak $u(1) = 2$ bir zorlama sınır koşulu olarak uygulanır. Şekil 4.6 den de görüleceği üzere, $\tilde{u}^{(1)}$ deneme çözüm kullanarak $a_1 = 2$ zorlama denklemi elde edilir. Böylece (4.104) sistem denklemleri için, sertlik matrisinin 1. Kolonu 2 ile çarpılıp, sağ taraf yükleme vektöründen çıkartılır. Sonra ilk kolon ve ilk denklem (sattır) silinir. Sonuç,

$$\begin{bmatrix} 10 & \frac{-11}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-11}{2} & 12 & \frac{-13}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-13}{2} & 14 & \frac{-15}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-15}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 + 8\ln \frac{24}{25} \\ 8\ln \frac{35}{36} \\ 8\ln \frac{48}{49} \\ \frac{1}{2} - 8\ln \frac{8}{7} \end{Bmatrix} \quad (4.105)$$

sınır koşulları uygulandıktan sonraki sistem denklemlerinin son halidir.

Adım 10 : Sistem denklemlerini çözelim.

(4.105) sistem denklemleri el ya da bilgisayar yardımı ile Gauss-eleminasyon metodu ile çözülebilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} a_2 &= 1,714 & a_4 &= 1,427 \\ a_3 &= 1,540 & a_5 &= 1,352 \end{aligned} \quad (4.106a)$$

ve esas sınır koşulu için zorlama denkleminde,

$$a_1 = 2 \quad (4.106b)$$

olarak bulunur. (4.106) eşitliklerini Şekil (4.6) deki her bir deneme çözüm ifadesinde yerine koyarsak ve nodal koordinatlar (4.83) den kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{(1)}(x) &= 2.0 \left(\frac{1.25-x}{0.25} \right) + 1.714 \left(\frac{x-1.0}{0.25} \right) \\ \tilde{U}^{(2)}(x) &= 1.714 \left(\frac{1.5-x}{0.25} \right) + 1.54 \left(\frac{x-1.25}{0.25} \right) \\ \tilde{U}^{(3)}(x) &= 1.54 \left(\frac{1.75-x}{0.25} \right) + 1.427 \left(\frac{x-1.5}{0.25} \right) \\ \tilde{U}^{(4)}(x) &= 1.427 \left(\frac{2.0-x}{0.25} \right) + 1.352 \left(\frac{x-1.75}{0.25} \right) \end{aligned} \quad (4.107)$$

olur.

Adım 11: Akış değerlendirilir. (4.82) eşitliğinden, her bir element için akış ifadeleri,

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(1)}(x) &= \frac{a_1 - a_2}{x_2 - x_1} x \\ \tilde{u}^{(2)}(x) &= \frac{a_2 - a_3}{x_3 - x_2} x \\ \tilde{u}^{(3)}(x) &= \frac{a_3 - a_4}{x_4 - x_3} x \\ \tilde{u}^{(4)}(x) &= \frac{a_4 - a_5}{x_5 - x_4} x \end{aligned} \quad (4.108)$$

olur. (4.106) ve (4.83), (4.108) de yerine konulursa,

$$\begin{aligned}\tilde{u}^{(1)}(x) &= 1.144x \\ \tilde{u}^{(2)}(x) &= 0.696x \\ \tilde{u}^{(3)}(x) &= 0.452x \\ \tilde{u}^{(4)}(x) &= 0.300x\end{aligned}\tag{4.109}$$

elde edilir.

Adım 12: Çözüm grafiklerinin çizilmesi ve çözümün kesinliğinin ölçülmesi denklem (4.107) ve (4.109) daki $\tilde{U}(x)$ ile $\tilde{\tau}(x)$ in grafiğidir. Yine görülür ki esas sınır koşulu ve esas elementler arası sınır koşulu (ki onlar zorlandı) tam olarak sağlanır. Böylece $\tilde{U}(x)$, bütün interelement sınırlarında süreklidir. Doğal sınır koşulları ve doğal elementler arası sınır koşulları zorlanmadı. Böylece onlar yaklaşık olarak sağlandı. Böylece $\tilde{\tau}(x)$, tüm elementler arası sınırlarda süreksizdir.

$x = 2$ de $\tilde{\tau}(x) = 0.60$ olup tam çözüme göre %20 lik bir hata vardır. x_2, x_3 ve x_4 interelement noktasında süreksizlik olup, sırasıyla %±24, %±21 ve %±20 kadar hata mevcuttur [27].

Bölge boyunca tüm noktalarda $\tilde{U}(x)$ ve $\tilde{\tau}(x)$ ın hatalarını ölçmek için, 4-element çözümünü, 2-element çözümü ile birleştirmeliyiz. $\tilde{U}_2(x)$ ve $\tilde{U}_3(x)$ arasındaki noktasal hata %3.6 dan daha azdır (tüm bölgede). Yani,

$$\left| \frac{\tilde{U}_3(x) - \tilde{U}_2(x)}{\tilde{U}_3(x)} \right| < 0.036, \quad 1 < x < 2 \tag{4.110}$$

dir. Tüm bölgedeki $\tilde{\tau}_2(x)$ ve $\tilde{\tau}_3(x)$ arasındaki hata %29 dan azdır.

Yani,

$$\left| \frac{\tilde{\tau}_3(x) - \tilde{\tau}_2(x)}{\tilde{\tau}_3(x)} \right| < 0.29, \quad 1 < x < 2 \tag{4.111}$$

dir.

4.5 Bir 8-Element Çözümü

Tipik bir element için, element denklemleri (4.80) de verildi. Böylece şimdi herhangi sayıda elementin bir araya gelmesiyle çözümü elde etmek kolaydır. İlk 6 adımı tekrar

uygulamaya gerek yoktur. 4-element çözümündeki işleyiş benzer şekilde burada yapılacaktır. Bu ise sonlu elemanlar metodunun pratik ve etkili bir analiz olmasının temel özelliklerinden biridir. Bu SEM için aslında en temel özelliktir. Çalışması tüm bölge üzerinde teorik işlemleri yapmak yerine bir elementte bu işlemleri yapar ki bu önemli bir kazançtır. 7-12 adımları da 4-element problemindeki ile benzerdir.

Adım 7: Problem için özel nümerik datalar

1.Geometrik data: Şekil 4.7 de görüldüğü gibi, sekiz elementin bir araya getirilmesini tanımlayacağız.

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1.00 & x_4 = 1.375 & x_7 = 1.750 \\ x_2 = 1.125 & x_5 = 1.500 & x_8 = 1.875 \\ x_3 = 1.250 & x_6 = 1.625 & x_9 = 2.000 \end{array} \quad (4.112)$$

Önceki adımlardaki hesaplamalar benzer şekilde yapılarak denklem (4.113), (4.114) ve (4.115) elde edilir. Denklem (4.115) in önemli bir özelliği, sertlik matrisinin terimlerinin bir çoğunun sıfır olmasıdır. Bunun gibi bir matrise “seyrek” denir. Bu sıfır olma durumu, deneme fonksiyonların sadece bir ya da iki element üzerinde sıfırdan farklı, diğer tüm elementlerde sıfır olmasındandır. Sertlik matrisinin bu seyreklik özelliği SEM için çok önemli karakteristik bir özellik olup hesaplamalar açısından oldukça kolaylık sağlar. 4-element çözümünde olduğu gibi benzer matrisler oluşturulur. Bu matrisler oldukça büyük olduğu için burada yazılmadı.

Adım 8 : Element denklemlerinin nümerik birleştirilmesi yapılır.

Sertlik matrisinin önemli bir özelliği de band şeklinde olmasıdır. Band iki kine ile tanımlanır. Bunlar birbirine paraleldir. Sıfırdan farklı tüm terimleri kapsarlar. Band genişliği, bandın bir yanından öteki yanına olan terim sayısıdır. Yarı band genişliği bir yandan ana köşegene olan terim sayısıdır. Yarı band genişliği b , bant genişliği $2b-1$ ile gösterilir. sekiz element için sertlik matrisi için $b = 2$ dir. Sıfırdan farklı terimler sadece ana köşegen üzerinde olabilir.

Bu durumda,

$$\begin{bmatrix}
\frac{17}{2} & -\frac{17}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{17}{2} & \frac{17}{2} + \frac{19}{2} & -\frac{19}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{19}{2} & \frac{19}{2} + \frac{21}{2} & -\frac{21}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{21}{2} & \frac{21}{2} + \frac{23}{2} & -\frac{23}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{23}{2} & \frac{23}{2} + \frac{25}{2} & -\frac{25}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{2} & \frac{25}{2} + \frac{27}{2} & -\frac{27}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{27}{2} & \frac{27}{2} + \frac{29}{2} & -\frac{29}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{29}{2} & \frac{29}{2} + \frac{31}{2} & -\frac{31}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{2} & \frac{31}{2}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
a_1 \\
a_2 \\
a_3 \\
a_4 \\
a_5 \\
a_6 \\
a_7 \\
a_8 \\
a_9
\end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix}
-2 + 16 \ln \frac{9}{8} \\
\frac{16}{9} - 16 \ln \frac{9}{8} - \frac{16}{9} + 16 \ln \frac{10}{9} \\
\frac{16}{10} - 16 \ln \frac{10}{9} - \frac{16}{10} + 16 \ln \frac{11}{10} \\
\frac{16}{11} - 16 \ln \frac{11}{10} - \frac{16}{11} + 16 \ln \frac{12}{11} \\
\frac{16}{12} - 16 \ln \frac{12}{11} - \frac{16}{12} + 16 \ln \frac{13}{12} \\
\frac{16}{13} - 16 \ln \frac{13}{12} - \frac{16}{13} + 16 \ln \frac{14}{13} \\
\frac{16}{14} - 16 \ln \frac{14}{13} - \frac{16}{14} + 16 \ln \frac{15}{14} \\
\frac{16}{15} - 16 \ln \frac{15}{14} - \frac{16}{15} + 16 \ln \frac{16}{15} \\
1 - 16 \ln \frac{16}{15}
\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}
\left(-x \frac{d\tilde{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1} \\
\left(-x \frac{d\tilde{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.125} - \left(-x \frac{d\tilde{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1.125} \\
\left(-x \frac{d\tilde{U}^{(3)}}{dx}\right)_{x=1.250} - \left(-x \frac{d\tilde{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.250} \\
\left(-x \frac{d\tilde{U}^{(4)}}{dx}\right)_{x=1.375} - \left(-x \frac{d\tilde{U}^{(3)}}{dx}\right)_{x=1.375} \\
\left(-x \frac{d\tilde{U}^{(5)}}{dx}\right)_{x=1.500} - \left(-x \frac{d\tilde{U}^{(4)}}{dx}\right)_{x=1.500} \\
\left(-x \frac{d\tilde{U}^{(6)}}{dx}\right)_{x=1.625} - \left(-x \frac{d\tilde{U}^{(5)}}{dx}\right)_{x=1.625} \\
\left(-x \frac{d\tilde{U}^{(7)}}{dx}\right)_{x=1.750} - \left(-x \frac{d\tilde{U}^{(6)}}{dx}\right)_{x=1.750} \\
\left(-x \frac{d\tilde{U}^{(8)}}{dx}\right)_{x=1.875} - \left(-x \frac{d\tilde{U}^{(7)}}{dx}\right)_{x=1.875} \\
-\left(-x \frac{d\tilde{U}^{(8)}}{dx}\right)_{x=2}
\end{Bmatrix} \quad (4.113)$$

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} & K_{44}^{(4)} & K_{45}^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & K_{54}^{(4)} & K_{55}^{(4)} & K_{55}^{(5)} & K_{56}^{(5)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{65}^{(5)} & K_{66}^{(5)} & K_{66}^{(6)} & K_{67}^{(6)} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{76}^{(6)} & K_{77}^{(6)} & K_{77}^{(7)} & K_{78}^{(7)} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{87}^{(7)} & K_{88}^{(7)} & K_{88}^{(8)} & K_{89}^{(8)} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{98}^{(8)} & K_{99}^{(8)} & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 F_1^{(1)} \\
 F_2^{(1)} & F_2^{(2)} \\
 F_3^{(2)} & F_3^{(3)} \\
 F_4^{(3)} & F_4^{(4)} \\
 F_5^{(4)} & F_5^{(5)} \\
 F_6^{(5)} & F_6^{(6)} \\
 F_7^{(6)} & F_7^{(7)} \\
 F_8^{(7)} & F_8^{(8)} \\
 F_9^{(8)}
 \end{Bmatrix}
 \quad (4.114)$$

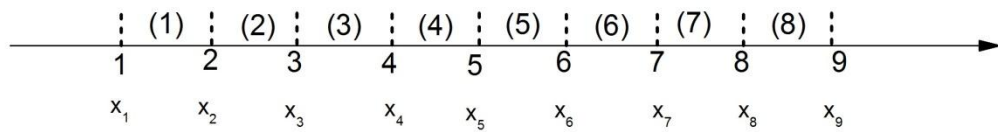
Burada

$$K_{ii}\alpha_i = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

ve çözüm,

$$\alpha_i = \frac{F_i}{k_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

olur. Şekil 4.7 deki gibi sırasıyla numaralandırma yapmasaydık bant genişliği büyük olacaktı.



Şekil 4.7: 8-element için ağ.

$$\begin{bmatrix} \frac{17}{2} & -\frac{17}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{17}{2} & 18 & -\frac{19}{2} & -\frac{21}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{19}{2} & \frac{20}{2} & \frac{22}{2} & -\frac{23}{2} & \frac{25}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{21}{2} & \frac{23}{2} & \frac{24}{2} & -\frac{25}{2} & \frac{27}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{2} & \frac{26}{2} & -\frac{27}{2} & -\frac{29}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{27}{2} & \frac{28}{2} & -\frac{29}{2} & -\frac{31}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{29}{2} & \frac{30}{2} & -\frac{31}{2} & \frac{31}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{2} & \frac{31}{2} & \frac{31}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{2} & \frac{31}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 + 16 \ln\left(\frac{9}{8}\right) \\ 16 \ln\left(\frac{80}{81}\right) \\ 16 \ln\left(\frac{99}{100}\right) \\ 16 \ln\left(\frac{120}{121}\right) \\ 16 \ln\left(\frac{143}{144}\right) \\ 16 \ln\left(\frac{168}{169}\right) \\ 16 \ln\left(\frac{196}{197}\right) \\ 16 \ln\left(\frac{224}{225}\right) \\ -2 + 16 \ln\left(\frac{9}{8}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.125} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1.125} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(3)}}{dx}\right)_{x=1.25} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.25} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(4)}}{dx}\right)_{x=1.375} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(3)}}{dx}\right)_{x=1.375} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(5)}}{dx}\right)_{x=1.5} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(4)}}{dx}\right)_{x=1.5} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(6)}}{dx}\right)_{x=1.625} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(5)}}{dx}\right)_{x=1.625} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(7)}}{dx}\right)_{x=1.75} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(6)}}{dx}\right)_{x=1.75} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(8)}}{dx}\right)_{x=1.875} - \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(7)}}{dx}\right)_{x=1.875} \\ \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(8)}}{dx}\right)_{x=2} \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

Adım 9 : Sınır koşullarının uygulanması.

(4.40) ve (4.103) deki gibi,

$$\begin{aligned} \left(-x \frac{du^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.125} - \left(-x \frac{du^{(1)}}{dx}\right)_{x=1.125} &= 0 \\ \left(-x \frac{du^{(3)}}{dx}\right)_{x=1.125} - \left(-x \frac{du^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.125} &= 0 \\ &\vdots \\ \left(-x \frac{du^{(8)}}{dx}\right)_{x=1.875} - \left(-x \frac{du^{(7)}}{dx}\right)_{x=1.875} &= 0 \end{aligned} \quad (4.116)$$

olur. $x = 2$ deki sınır koşulundan, element (8)

$$\left(-x \frac{du^{(8)}}{dx}\right)_{x=2} = \frac{1}{2} \quad (4.117)$$

olur. (4.116) ve (4.117) eşitlikleri (4.115) de yerine yazılırsa (4.118) elde edilir.

$u(1) = 2$ olduğundan $\alpha_1 = 2$ dir. Bazı satır ve sütun işlemleri ile (4.119) elde edilir ki 2-element, 4-element çözümlerinde uygulandı.

$$\begin{bmatrix} \frac{17}{2} & -\frac{17}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{17}{2} & 18 & -\frac{19}{2} & -\frac{21}{2} & \frac{23}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{19}{2} & \frac{20}{2} & \frac{22}{2} & -\frac{25}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{21}{2} & \frac{23}{2} & \frac{24}{2} & -\frac{27}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{2} & \frac{26}{2} & -\frac{27}{2} & -\frac{29}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{27}{2} & \frac{28}{2} & -\frac{29}{2} & -\frac{31}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{29}{2} & \frac{30}{2} & -\frac{31}{2} & \frac{31}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{2} & \frac{31}{2} & \frac{31}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{2} & \frac{31}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 + 16 \ln\left(\frac{9}{8}\right) \\ 16 \ln\left(\frac{80}{81}\right) \\ 16 \ln\left(\frac{99}{100}\right) \\ 16 \ln\left(\frac{120}{121}\right) \\ 16 \ln\left(\frac{143}{144}\right) \\ 16 \ln\left(\frac{168}{169}\right) \\ 16 \ln\left(\frac{196}{196}\right) \\ 16 \ln\left(\frac{224}{225}\right) \\ -2 + 16 \ln\left(\frac{9}{8}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(-x \frac{d\tilde{u}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

$$\begin{bmatrix} 18 & -19/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -19/2 & 20 & -21/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -21/2 & 22/1 & -23/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -23/2 & -24 & -25/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -25/2 & 26 & -27/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -27/2 & 28 & -29/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -29/2 & 30 & -29/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -31/2 & 30 \\ & & & & & & & -31/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 + 16 \ln(80/81) \\ 16 \ln(99/100) \\ 16 \ln(120/121) \\ 16 \ln(143/144) \\ 16 \ln(168/169) \\ 16 \ln(196/196) \\ 16 \ln(224/225) \\ 1/2 - 16 \ln(16/15) \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

Adım 10: Sistem denklemlerinin çözümü $\alpha_1 = 2$ için

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2.000 & \alpha_6 &= 1.475 \\ \alpha_2 &= 1.837 & \alpha_7 &= 1.424 \\ \alpha_3 &= 1.712 & \alpha_8 &= 1.382 \\ \alpha_4 &= 1.615 & \alpha_9 &= 1.348 \\ \alpha_5 &= 1.537 \end{aligned} \quad (4.120)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, her bir element içindeki yaklaşım çözüm ifadeleri,

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(1)}(x) &= 2.0 \left(1.125 - \frac{x}{0.125} \right) + 1.837 \left(x - \frac{1.0}{0.125} \right) \\ \tilde{u}^{(2)}(x) &= 1.837 \left(1.250 - \frac{x}{0.125} \right) + 1.712 \left(x - \frac{1.125}{0.125} \right) \\ &\vdots \\ \tilde{u}^{(8)}(x) &= 1.382 \left(2.0 - \frac{x}{0.125} \right) + 1.348 \left(x - \frac{1.875}{0.125} \right) \end{aligned} \quad (4.121)$$

Adım 11: Her bir element için akı ifadesi, denklem (4.82) den ve bağlantı çizelgesinden yararlanarak olur. Son ifadeler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}^{(1)}(x) &= 1.304x \\
\tilde{\tau}^{(2)}(x) &= 1.00x \\
&\vdots \\
\tilde{\tau}^{(8)}(x) &= 0.272x
\end{aligned} \tag{4.122}$$

Adım 12: Çözümün kesinliği incelenir (grafik olarak de çizilebilir).

Elementler arası sürekliliği ($\tilde{u}(x)$ için) ve interelement süreksizliği ($\tilde{\tau}(x)$ için), görülüyor. $x = 1$ deki esas sınır koşulu tam sağlanırken, $x = 2$ deki doğal sınır koşulu yaklaşık olarak sağlanır.

$x = 2$ de, $\tilde{\tau}(2) = 0.544$ olup % 8.8 hatalıdır. $x_2, x_3, \dots, x_8$ interelement noktalarında süreksizlik anlamındaki hata $\pm 13.2, \pm 12.6, \pm 10.9, \pm 11.4, \pm 9.7$ ve ± 10.5 % dır sırasıyla. $\tilde{u}_3(x)$ ve $\tilde{u}_4(x)$ arasındaki noktasal hata yaklaşık % 1.1 den azdır. Tam bölge üzerinde, yani

$$\left| \frac{\tilde{u}_4(x) - \tilde{u}_3(x)}{\tilde{u}_4(x)} \right| < 0.0111, \quad 1 < x < 2 \tag{4.123}$$

dir. $\tilde{\tau}_3(x)$ ve $\tilde{\tau}_4(x)$ arasındaki noktasal hata ise tüm bölge üzerinde yaklaşık %14.4 den azdır, yani,

$$\left| \frac{\tilde{\tau}_4(x) - \tilde{\tau}_3(x)}{\tilde{\tau}_4(x)} \right| < 0.144, \quad 1 < x < 2 \tag{4.124}$$

olur.

5. İKİ BOYUTLU SINIR DEĞER PROBLEMİ

5.1 Problemin Tanımı

Bu bölümde iki boyutlu sınır-değer problemlerini ele alacağız. Genel yönetici diferensiyel denklem aşağıdaki formdadır:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_x(x,y)\frac{dU(x,y)}{dx}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_y(x,y)\frac{dU(x,y)}{dy}\right) + \beta(x,y)U(x,y) = f(x,y) \quad (5.1)$$

Burada $U(x,y)$ bilinmeyen fonksiyon; $\alpha_x(x,y)$, $\alpha_y(x,y)$ ve $\beta(x,y)$ bilinen fiziksel özellikler; $f(x,y)$ de bir bilinen iç yüküdür. Bölge özel sonlu ve kapalı bir bölgedir ($x - y$ düzleminde). $\{n\}$ vektörü sınır için dış birim normal olup,

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Burada n_x ve n_y ler vektörün yön kosinüsleridir. Eğrisel bir sınır için, n_x ve n_y değerleri sınır boyunca değişir. Genel olarak $n_x = n_x(s)$ ve $n_y = n_y(s)$ olarak alınır. Burada s , sınır boyunca bir koordinat ölçüsü pozisyonundadır. Sınır koşullarının alışılmış iki tipi düşünüldü [27].

Esas sınır koşulu: Sınırın tümü ya da bir kısmını ilgilendiren özel $u(s)$ fonksiyonudur.

Doğal sınır koşulu: $\tau_n(s)$ olarak gösterilir. Sınırın tamamı veya bir kısmı boyunca, sınır için akı normalinin özel bileşenidir (aslında 3. tip bir sınır koşulunda karma sınır koşuludur. Öyle ki bu koşul yukarıdakilerin birleşimi olarak tanımlanır. Ancak, bu tez çalışmasında ayrı bir sınır koşulu olarak ele alınmadı).

Akı vektörü $\{\tau\}$, τ_x ve τ_y bileşenlerine sahiptir.

$$\{\tau\} = \begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

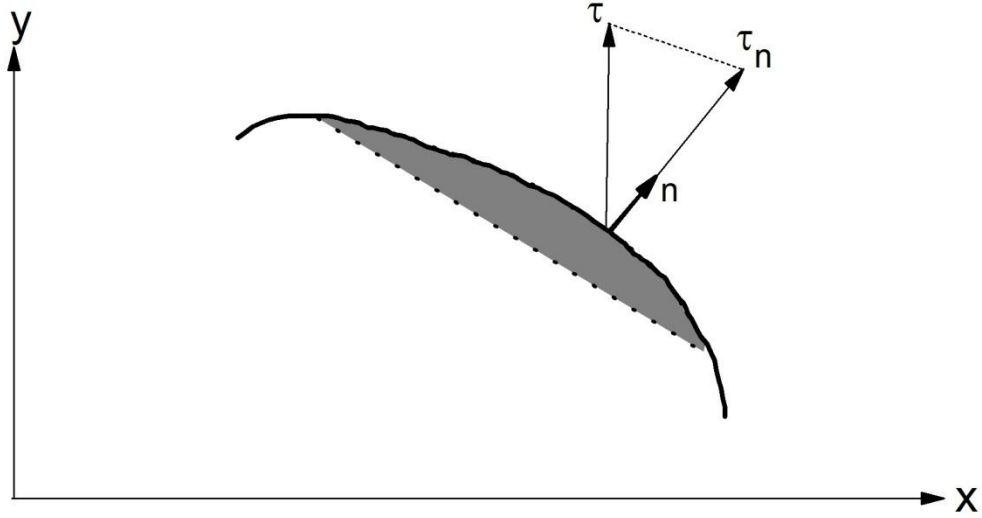
τ_n normal bileşeni, $\{\tau\}$ nun dış birim vektör yönündeki izdüşümüdür (Şekil. 5.1). Bu iz düşüm $\{\tau\}^T \{n\}$ iç çarpımı ile ifade edilir.

$$\tau_n = \{\tau\}^T \{n\} = \{\tau_x, \tau_y\} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \tau_x n_x + \tau_y n_y \quad (5.5)$$

Yukarıda ki gösterimde x ve y yönlerindeki bileşenleri için i ve j birim vektörleri kullanılabilir, yani,

$$\tau = \tau_x i + \tau_y j, \quad n = n_x i + n_y j$$

gibi. Ancak bilgisayar programı hazırlama aşamasında ilk gösterim daha uygundur.



Şekil 5.1: Sınırlar için akı ve normal vektörleri.

Bir diferensiyel denklemin mertebesi $2m$ ise her bir sınır noktasında m tane sınır koşulu belirlenmelidir. Daha genel olarak, eğer n tane yönetici denklem varsa ve hepsinin mertebesi $2m$ ise, $n \times m$ tane sınır koşulu her bir sınır noktasında belirlenmelidir. (5.1) denklemi 2. mertebeden ($m = 1$) olup sınırın her bir noktası için 1 tane sınır koşulu (bir esas ya da doğal ya da karma) belirlenmelidir. Sınır koşulunun tipi, noktadan noktaya değişebilir. Böylece eğer $\beta(x) = 0$ ise, sınır boyunca en az bir noktada bir esas sınır koşulu belirlenmelidir. Bunun nedeni, eğer sadece esas sınır koşulları tüm sınır boyunca belirtilirse, o zaman tüm problem formasyonları (diferensiyel denklem ve sınır koşulları) U 'nun sadece türevini içerir. Bu durumda çözüme keyfi sabitler ekleyerek yeni çözümler elde edilir. Yani bir tek çözüm olmaz. Eğer $\beta(x) \neq 0$ ise bu yeganelik problemi ortaya çıkarmaz. Böylece sınır koşullarının her karışımına izin verilebilir (karma sınır koşulu). (5.1) denklemi, iki ayrı denklemin birleşiminin sonucudur [27].

5.1.1 Denge denklemi

$$\{\nabla\}^T \{\tau(x, y)\} + \beta(x, y)U(x, y) = f(x, y) \quad (5.6)$$

burada $\{\nabla\}$ “del” olarak söylenen gradient operatör:

$$\{\nabla\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

ve iç çarpım $\{\nabla\}^T \{\tau\}$, akının diverjansıdır.

$$\{\nabla\}^T \{\tau\} = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \quad (5.8)$$

veya

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)i + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)j$, $\{\nabla\}^T \{\tau\} = \nabla \cdot \tau$ olarak gösterilir. (5.8) i (5.6) da yerine yazarsak,

$$\frac{\partial \tau_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y(x, y)}{\partial y} + \beta(x, y)U(x, y) = f(x, y) \quad (5.9)$$

olur.

5.1.2 Bir fiziksel ilke

Akı ile ilgili,

$$\{\tau(x, y)\} = -[\alpha(x, y)] \{\nabla U(x, y)\} \quad (5.10)$$

ilkesi geçerlidir [27]. Burada $[\alpha]$, materyalin ya da fiziksel özelliklerin bir matrisidir.

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_x & \alpha_{xy} \\ \alpha_{xy} & \alpha_y \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

ve $\{\nabla u\}$, u 'nun gradienti

$$\{\nabla u\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

olur.

$[\alpha]$ matrisi simetriktir. Bu, gradient ve akı arasında elde edilen karışıklığın göstergesidir.

Bu karşılıklılık (5.15)'i self-adjoint yapacaktır. Bir diferensiyel denklemin simetrik olmasına self-adjoint denir. Şimdi (5.4), (5.11) ve (5.12) kullanılarak (5.10) denklemini aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}\tau_x &= -\alpha_x \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_y &= -\alpha_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_y \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\quad (5.13)$$

(5.10)'u da (5.6) da yerine yazarsak

$$-\{\nabla\}^T([\alpha]\{\nabla_u\}) + \beta u = f \quad (5.14)$$

ya da vektör notasyonu ile

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla_u) + \beta u = f$$

olur. Matris çarpımı ile (5.14) den (ya da (5.13)'ü (5.9) da yerine yazarak),

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_x \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha_y \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \beta u = f \quad (5.15)$$

(5.14) denklemini ya da genişletilmiş (5.15), yarı harmonik denklem olarak bilinir. Bu denklemin birkaç özel formu vardır:

(1) $[\alpha]$ bir köşegen matrisi ise, $\alpha_{xy}(x, y) = 0$,

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 \\ 0 & \alpha_y \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

olup

$$\tau_x = -\alpha_x \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \tau_y = -\alpha_y \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.17)$$

elde edilir. Belirtelim ki iki taraflar birleştirilemez. Böylece x yönündeki bir gradient sadece x yönünde bir akı üretir. Benzer olarak y yönündeki bir gradient sadece y yönünde bir akı gösterir. Bu durumda (5.15) denklemini

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_x \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha_y \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \beta u = f \quad (5.18)$$

olarak yazılır.

Bu bizim orjinal (5.1) denklelimizdir.

(2) $[\alpha]$ bir (sıfırdan farklı) sabit zaman özdeşlik matrisi olabilir. Bu demektir ki $\alpha_{xy}(x, y) = 0$ ve $\alpha_x(x, y) = \alpha_y(x, y) = \alpha$ yani,

$$[\alpha] = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

dir. Böylece (5.15) denklemi,

$$-\alpha \nabla^2 u + \beta u = f \quad (5.20)$$

olur. Burada $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ dir. $\nabla^2 = \{\nabla\}^T \{\nabla\} = \frac{\partial}{\partial^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ Laplace operatörüdür.

3) İkinci durumla aynı ve ek olarak $\beta(x, y) = 0$ ise (5.20) den,

$$\nabla^2 u = -\frac{f}{\alpha} \quad (5.21)$$

olur. Poisson denklemi denir.

4) Üçüncü duruma ek olarak, $f(x, y) = 0$ ise (5.21) den

$$\nabla^2 u = 0 \quad (5.22)$$

olur. Laplace denklemi denir.

5.1.3 Eşyönsüz materyaller

Eşyönsüzlük bir materyal özelliğinin yönü ile ilgili bir kavramdır. Bir materyalin fiziksel özelliği, oluşturan denklemin yapısını etkiler. Denge denklemini etkilemez. Özel olarak $[\alpha]$ matrisindeki terimlerin büyüklüğüne karar verir. Örneğin (5.13) de eğer $\alpha_{xy} = 0$ ve $\alpha_x > \alpha_y$ ise ve her iki yönde eşit bir eğim varsa (divergence) yani $\partial u / \partial x = \partial u / \partial y$ ise, x yönündeki akı daha büyük olacaktır. Yani sabit gradient büyüklüğü, farklı yönlerde farklı tepkileri ortaya koyar. Aksine bir materyal ki tüm özellikleri yönden bağımsız ise (yani 2. durum $\alpha_{xy} = 0$ ve $\alpha_x = \alpha_y$) eşyönlü adını alır [27].

Bir eşyönsüz material için, α katsayılarının kümesinin esas denklemi (5.13), x, y –eksenlerinden farklı yönlere sahip eksenler cinsinden yazıldığında farklı değerler alacağı farzedilir. Bunu görebilmek için bir x', y' eksenler rotasyonunu

düşünelim. $x - y$ eksenlerini θ açısı kadar döndürelim. Keyfi bir vektör $\{v\}$ her bir eksen sisteminde farklı bileşenlere sahip olacaktır. Bu durumda trigonometrik dönme bağıntısı ile,

$$\begin{Bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

ya da,

$$\{V'\} = [R]\{V\}$$

olur. $[R]$ rotasyon matrisidir. Şimdi temel denklemi x', y' eksenler sistemine göre yazalım. (5.13)'ü yeni değişkenlere göre yazacağız.

$$\begin{aligned} \tau_{x'} &= -\alpha_{x'} \frac{\partial u}{\partial x'} - \alpha_{x'y'} \frac{\partial u}{\partial y'} \\ \tau_{y'} &= -\alpha_{x'y'} \frac{\partial u}{\partial x'} - \alpha_{y'} \frac{\partial u}{\partial y'} \end{aligned} \quad (5.24)$$

ya da $\{\tau'\} = -[\alpha'] \{\nabla' u\}$ olur. Buradan (5.23)'ün sonucu,

$$\begin{aligned} \{\tau'\} &= [R]\{\tau\} \\ \{\nabla' u\} &= [R]\{\nabla u\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

olduğu kolayca görülür. Son olarak [5.25]'i [5.24] de yerine yazarsak,

$$[R]\{\tau\} = -[\alpha'] [R]\{\nabla u\} \quad (5.26)$$

olup her taraf $[R]^\tau$ ile işleme sokulursa,

$$\{\tau\} = -[R]^\tau [\alpha'] [R]\{\nabla u\} \quad (5.27)$$

elde edilir. (5.27) ve (5.10) karşılaştırılarak,

$$[\alpha] = [R]^\tau [\alpha'] [R] \quad (5.28)$$

bağıntısı kurulur. Yukarıda $[R]$ nin ortogonallığı yani $[R]^\tau = [R]^{-1}$ olduğu kullanıldı. Böylece $[R]^\tau [R] = [I]$ dır.

(5.28) denklemi α katsayıları x - y eksenleri ve $x' - y'$ eksenlerine göre bağlantısını gösterir. Denklemin sağ tarafını matris çarpımı ile,

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_{x'} \cos \theta^2 - \alpha_{x'y'} \sin 2\theta + \alpha_{y'} \sin \theta^2 \\ \alpha_y &= \alpha_{y'} \cos \theta^2 - \alpha_{x'y'} \sin 2\theta + \alpha_{x'} \sin \theta^2 \\ \alpha_{xy} &= \alpha_{x'} \cos 2\theta + \frac{1}{2}(\alpha_{x'} - \alpha_{y'}) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (5.29)$$

dönüşüm denklemi elde edilir.

$[\alpha]$ bir reel simetrik matris olduğu için, (5.4) diagonal matris ile ilgili karşılıklı iki dik eksenlerin en az bir seti vardır. Bu eksenler esas eksenler adını alır ve onlar bir inceltme işareti ($\sim$) ile gösterilirler. İlgili katsayılar esas katsayılardır. Böylece,

$$[\tilde{\alpha}] = \begin{bmatrix} \alpha_{\tilde{x}} & 0 \\ 0 & \alpha_{\tilde{y}} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

olup burada $\alpha_{\tilde{x}\tilde{y}} = 0$ dır.

Eğer problemde bir eşyönsüz material kullanılırsa ve eğer esas eksenler bölgenin içinde her yerde aynı yönlendirmeye sahipse o zaman tanımlanan global $x - y$ eksenleri esas eksenlere paralel olacaktır. Diğer yönlendirmeler boşuna hesaplamaları beraberinde getirecektir. Çünkü (5.31) de olmayan α_{xy} terimleri gelecektir. Problem materyalleri iki ya da daha fazla farklı yönde eksen çiftleri ile ifade edilirse, bu durumda global eksenlerle diğerlerini aynı düzene sokmak imkansız olur. bu durumda (5.15) denklemini çözmekte zorlanırsınız. $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}$ katsayıları her bir materyal için (5.29) dan hesaplanır. (5.29) sadeleştirilirse,

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_{\tilde{x}} \cos^2 \theta + \alpha_{\tilde{y}} \sin^2 \theta \\ \alpha_y &= \alpha_{\tilde{y}} \cos^2 \theta + \alpha_{\tilde{x}} \sin^2 \theta \\ \alpha_{xy} &= \frac{1}{2} (\alpha_{\tilde{x}} - \alpha_{\tilde{y}}) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (5.31)$$

olur. Eşyönlü materyallerin kullanılması ile denklemler daha kolay çözülür. Bir isotropic materyal için esas katsayılar benzer şekilde $\alpha_{\tilde{x}} = \alpha_{\tilde{y}}$ dır. Böylece $[\tilde{\alpha}]$ aynı matrisin bir sabitle çarpımıdır.

$$[\tilde{\alpha}] = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$[\tilde{\alpha}]$ için (5.32) denklemi (5.25) ya da (5.29) de yerine yazılırsa $[\alpha] = \alpha[I]$ elde edilir. Böylece $[\alpha]$, tüm yönlendirmelerde aynı köşegen matris formuna sahiptir.

5.2 Element Denklemlerinin Elde Edilmesi (Adım 1-3)

(5.1) denklemi için 12-adım prosedürünü uygulayacağız. Element deneme çözümü için genel form,

$$\tilde{U}^{(c)}(x, y; a) = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j^{(c)}(x, y) \quad (5.48)$$

şeklindedir. Burada n , element içerisindeki a_i sayısını ve $\phi_j^{(c)}(x, y)$ 'ler biçim fonksiyonlarıdır. 4.adımdan itibaren n değerine karar verilecek ve her bir biçim fonksiyonu belirlenecektir.

Adım 1: Bir tipik element için Galerkin rezidü denkleminin yazılması (5.1) denklemi için rezidü,

$$R(x, y; a) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x(x, y) \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}(x, y; a)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_y(x, y) \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}(x, y; a)}{\partial y} \right) = \beta(x, y) \cdot \tilde{U}^{(c)}(x, y; a) - f(x, y) \quad (5.49)$$

şeklindedir.

(5.48) denklemindeki her bir a_i için bir ağırlıklı rezidü denklemine ihtiyacımız vardır. Öyle ki;

$$\iint^{(c)} R(x, y; a) \phi_i^{(c)}(x, y) dx dy = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.50)$$

olur. burada $\iint^{(c)} dx dy$ iki katlı integral, (c) elementin alanı boyunca integrali anlamındadır.

(5.49)'u (5.50)'de yerine yazarsak,

$$\iint^{(c)} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x(x, y) \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}(x, y; a)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_y(x, y) \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}(x, y; a)}{\partial y} \right) + \beta(x, y) \cdot \tilde{U}^{(c)}(x, y; a) - f(x, y) \right] \phi_i^{(c)}(x, y) dx dy = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.51)$$

Adım 2: Kısmi integrasyon hesabı yapılır.

İlk olarak (iki fonksiyonun çarpımının diferansiyeli için) zincir kuralını (5.51) denklemindeki türevli terimlerin her biri için uygulamalıyız.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial x} \right) \phi_i^{(c)} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial x} \phi_i^{(c)} \right) - \left(\alpha_x \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_i^{(c)}}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_y \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial y} \right) \phi_i^{(c)} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_y \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial y} \phi_i^{(c)} \right) - \left(\alpha_y \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial y} \right) \frac{\partial \phi_i^{(c)}}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.52)$$

olur. (5.52)' yi (5.51)' de yerine yazarsak;

$$\begin{aligned}
& - \iint^{(c)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial x} \phi_i^{(c)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_y \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial y} \phi_i^{(c)} \right) \right] dx dy + \\
& \iint^{(c)} \left[\left(\alpha_x \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_i^{(c)}}{\partial x} + \left(\alpha_y \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial y} \right) \frac{\partial \phi_i^{(c)}}{\partial y} + \beta \tilde{U}^{(c)} \phi_i^{(c)} - f \cdot \phi_i^{(c)} \right] dx dy = 0
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Burada 2-D divergence teoremi bazı interalleri sınır integrallerine dönüştürebilir ve bu sayede sınır koşullarının uygulanmasını sağlayabilir.

Bu teorem ifade eder ki; eğer $F(x,y)$ ve $G(x,y)$, $x - y$ düzleminde bir bölge içerisinde tanımlı iki fonksiyon ise (farzedelim ki (c).element içerisinde) o zaman

$$\iint^{(c)} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy = \oint^{(c)} (F n_x^{(c)} + G n_y^{(c)}) ds \tag{5.54}$$

olur. Burada $\oint^{(c)} ds$, elementlerin sınırları boyunca bir line integrali gösterir.

F ve G , bir v vektörünün sırasıyla x ve y bileşenleri olsunlar. Yani $v = F_i + G_j$ olsun. (5.54) denklemi vektör notasyonunda

$$\iint^{(c)} \nabla v dx dy = \oint^{(c)} v n ds$$

şeklinde gösterilebilir. İntegrasyon tüm sınır üzerinde ve saat yönünün tersi yönündedir (yani pozitif x 'den pozitif y ' ye).

(5.54) de $n_x^{(c)}$ ve $n_y^{(c)}$ ler yön kosinüsleri yani element sınırları için dış birim normal vektörün x ve y bileşenleridir. s ise sınır boyunca bir koordinattır.

(5.54) kullanılarak (5.53) deki ilk integral,

$$- \oint^{(c)} \left(\alpha_x \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial x} \phi_i^{(c)} n_x^{(c)} + \alpha_y \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial y} \phi_i^{(c)} n_y^{(c)} \right) ds \tag{5.55}$$

olur. Bunu daha da sade bir şekilde yazmak için (5.17) deki x ve y akı bileşenlerini kullanırsak,

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_x^{(c)} &= -\alpha_x \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial x}, \\ \tilde{\tau}_y^{(c)} &= -\alpha_y \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial y}\end{aligned}\quad (5.56)$$

olup (5.5) deki akının dış normal bileşini için verilen bağıntıdan,

$$\tilde{\tau}_n^{(c)} = \tilde{\tau}_x^{(c)} n_x^{(c)} + \tilde{\tau}_y^{(c)} n_y^{(c)} \quad (5.57)$$

olup (5.56) ve (5.57)' yi (5.55) de yerine yazarsak,

$$\oint \tilde{\tau}_n^{(c)} \phi_i^{(c)} ds \quad (5.58)$$

şeklinde sade bir yazılış ile gösteririz. (5.53) deki ilk integral ile (5.58) yer değiştirilirse,

$$\begin{aligned}\iint^{(c)} \left[\left(\alpha_x \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_i^{(c)}}{\partial x} + \left(\alpha_y \frac{\partial \tilde{U}^{(c)}}{\partial y} \right) \frac{\partial \phi_i^{(c)}}{\partial y} + \beta \tilde{U}^{(c)} \phi_i^{(c)} \right] dxdy \\ = \iint^{(c)} f \phi_i^{(c)} dxdy - \oint \tilde{\tau}_n^{(c)} \phi_i^{(c)} ds, \quad i = 1, 2, \dots, n\end{aligned}\quad (5.59)$$

elde edilir. Alışılmış olarak, tüm yük terimleri sağ tarafa yerleştirdik. Yani sağ taraf, iç yükleri ve sınır akılarını içerir.

Adım 3: Element deneme çözümünün genel formunu rezidü denklemlerindeki iç integrallerde yerine koyalım.

(5.48)' i, (5.59)' un sol tarafına koyarsak,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \left(\iint^{(e)} \frac{\partial \phi_i^{(c)}}{\partial x} \alpha_x \frac{\partial \phi_j^{(c)}}{\partial x} dxdy + \iint^{(e)} \frac{\partial \phi_i^{(c)}}{\partial y} \alpha_y \frac{\partial \phi_j^{(c)}}{\partial y} dxdy + \iint^{(e)} \phi_i^{(c)} \beta \phi_j^{(c)} dxdy \right) a_j \\ = \iint^{(e)} f \phi_i^{(c)} dxdy + \oint \tilde{\tau}_n^{(e)} \phi_i^{(c)} ds, \quad i = 1, 2, \dots, n\end{aligned}\quad (5.60)$$

Tipik element için element denklemlerini matris formunda yazalım.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} & \dots & K_{1n}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} & \dots & K_{2n}^{(e)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1}^{(e)} & K_{n2}^{(e)} & \dots & K_{nn}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(e)} \\ F_2^{(e)} \\ \vdots \\ F_n^{(e)} \end{bmatrix} \quad (5.61a)$$

Burada sertlik ve yükleme terimleri için ifadeler sırasıyla şöyledir:

$$K_{ij}^{(e)} = \iint \frac{\partial \phi_i^{(c)}}{\partial x} \alpha_x \frac{\partial \phi_j^{(c)}}{\partial x} dx dy + \iint \frac{\partial \phi_i^{(c)}}{\partial y} \alpha_y \frac{\partial \phi_j^{(c)}}{\partial y} dx dy + \iint \phi_i^{(c)} \beta \phi_j^{(c)} dx dy$$

$$F_i^{(e)} = \iint f \phi_i^{(e)} dx dy + \oint \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_i^{(c)} ds \quad (5.61b)$$

yukarıda integralin içerisindeki (-) yi (+) ya da ve dolasıyla ilgili notasyonda $\tilde{\tau}_n^{(e)}$ 'yi $\tilde{\tau}_{-n}^{(e)}$ 'e dönüştürdük. Alt indisdeki $(-n)$, iç birim normali gösterir.

$$\tilde{\tau}_{-n}^{(e)} = -\tilde{\tau}_n^{(e)} \quad (5.62)$$

dir. $\tilde{\tau}_{-n}^{(e)}$, akının iç-normal bileşeni olup sisteme eklenen enerjiyi ifade eder.

5.3 Üçgen Elementler ile Teorik Gelişme (Adım 4-6)

Dört tipteki element için yakınsaklık şartları aynı olacaktır. Bu şartlar element denklemlerinin şekline göre belirlenecektir. (5.1) yönetici diferansiyel denklem ikinci mertebeden olduğundan ($2m = 2$), (5.59) daki $\tilde{U}^{(e)}$ nin en yüksek mertebeden türevi $m = 1$ dir. Böylece uygun bir element için, element deneme çözümü $\tilde{U}^{(e)}(x, y; a)$, bir polinom şeklinde tanımlanır. Öyle ki bu polinom i) en az birinci dereceden yani lineer olmalıdır. Tamlık için ii) interelement sınırları boyunca c^0 -sürekli olmalıdır.

Adım 2 nin sonunda, element denklemlerinin içerisindeki integrallerde element deneme çözümü $\tilde{U}^{(e)}$ nin en yüksek mertebeden türevi m ise bu integraller aşağıdaki şartları sağlarlar. Bu şartlar tamlık ve süreklilik şartları olur tamlık şartı bir elementin içi ile ilgili olup süreklilik şartı ise elementler arasındaki sınırlarla ilgilidir. Buradaki şartlar şöyledir:

Tamlık şartı : Element deneme çözümü $\tilde{U}^{(e)}$ ve integraller içerisinde görülen m . mertebeye kadar türevlerinden her biri, elementin boyutu (limit içerisinde) sıfıra doğru azaldığı zaman, bir elementin içerisindeki herhangi bir sabit değer olarak kabul edilebilir.

Süreklilik şartı : Elementler arası sınırlarda element deneme çözümü c^{m-1} sürekli olmalıdır. Yani $\tilde{U}^{(e)}$ ve onun $m - 1$. mertebeye kadar türevleri sürekli olmalıdır.

2-D elementler sonsuz farklı şekilde olabilir. Mesela çokgen, elips, çember, ... vs. Buna rağmen tüm bu değişik muhtemel geometriler içerisinde sadece üç ve dört kenarlı çokgenler uygundur. SEM programlarında bu tipler uygulanabilir. Diğer şekillerin kullanımında mümkün olabilir ancak çok çok zor ya da imkansız durumlar karşımıza çıkabilir. Burada ki zorluk bölgenin bu farklı geometrik şekiller yardımı ile alt bölgelere bölünebilmesindeki zorluklardan kaynaklanır.

5.3.1 C^0 -Lineer üçgen

Adım 4: Biçim fonksiyonları için özel ifadelerin geliştirilmesi.

Tüm elementler içerisinde en basit olanı bir düz kenarlı üçgen biçimindeki element için c^0 -lineer 2-D polinom şeklinde olanıdır.

İlk olarak tamlik şartını inceleyelim. Bir 2-D polinomun genel formu (kuvvet serisi formu),

$$\underbrace{a}_{\text{sabit}} + \underbrace{bx + cy}_{\text{lineer terimler}} + \underbrace{dx^2 + exy + fy^2}_{\text{quadratic terimler}} + \dots \quad (5.63)$$

Pascal üçgenindeki her terim $x^r y^s$ formundadır. Burada $r, s = 0, 1, 2, 3, \dots$ dir. $r + s = p$ ise o terimin derecesi p dir denir. Pascal üçgenindeki her satır verilen bir derecedeki tüm terimleri içerir. 2.satır bütün 1.dereceden terimleri içerir. 3.satır tüm 2.dereceden terimleri (quadratic terim) içerir, ... vs. Bir 2-D polinomun p dereceden tam olması için yukarıdaki tüm terimleri içermesi gerekir.

Bu nedenle, bir tam linner polinom en az üç terim olan $1, x, y$ 'yi içermelidir. Bu nedenle deneme çözümümüz için en basit form olarak

$$\tilde{U}^{(e)} = a + bx + cy \quad (5.64)$$

alabiliriz. Süreklilik için 1-D problemlerde karşılaşılmayan özel bir durum olacaktır. 1-D elementler için, interelement sürekliliği, interpolasyon polinomları kullanılarak ve iki sınır noktasının her birinde interpolasyon nodu yazılarak kolayca sağlanır. Bu düğüm noktalarında sürekliliği garantiler ve böylece, sınırlar sadece iki noktadan oluştuğundan, tüm bölge boyunca sürekliliğide garantiler. Bir başka deyişle, düğüm noktaları sınırları tamamen kaplar.

İki ve daha yüksek boyutlu elementler için, elementler arası sürekliliği interpolasyon polinomları ve sınırlara interpolasyon düğüm noktaları konularak etkili bir şekilde sağlanır. Şimdi sınırlarımız bir doğru oldu ve sonlu sayıda düğüm noktaları kaplanamaz hale geldi. Böylece tüm sınırı boyunca düğüm noktaları arasında bir elementler arası süreklilik problemi ile karşılaşılır. Bu problemler, biçim fonksiyonlarının standart türetilmesi ile kolayca çözülür. Aşağıda tüm elementler için kabul edilebilecek, genel bir yöntem verilecek ve böylece bu biçim fonksiyonları istenilen sürekliliği mümkün kılacaktır.

Bu işleme (5.64) deki üç a_i bulunduran element deneme çözümü ele alarak başlanır. 3 tane sabit katsayı içermesinin nedeni bir tam 2-D lineer polinom olması ve 3 terime sahip olmasıdır. 1-D elementlerde olduğu gibi, bu polinomu bir interpolasyon polinomu formunda yazılır. Bu 3 interpolasyon noktasına (ya da düğüm noktaları) ihtiyaç duyar. Düz kenarlı üçgenin her bir köşesine bir düğüm noktası yerleştirilir. Bu seçim interelement sürekliliği için en uygundur. Düğüm noktaları saat ekserinin ters yönünde numaralandırılır ki bu saat yönünün tersi yönündeki sınır integralleri için kolaylık sağlar. Aslında sadece tipik bir element içindeki lokal düğüm noktaları saat yönünün tersi yönde numaralandırılmalıdır. Lokal düğüm noktası numaraları 1, 2, 3 tür. Yine önceki kısımlarda olduğu gibi,

$$\tilde{U}^{(e)}(x_i, y_i, a) = a_i \quad (5.65)$$

dir. Oluşumun kalan kısmı önceki kısımlarda yapılanlarla tamamen paraleldir. Daha önce olduğu gibi (5.64) deki $\tilde{U}^{(e)}$ ifadesini a,b ve c parametreleri yerine a_1, a_2 ve a_3 parametreleri cinsinden göstermek istiyoruz. (5.65) ve (5.64) yardımı ile,

$$\begin{aligned} a + bx_1 + cy_1 &= a_1 \\ a + bx_2 + cy_2 &= a_2 \\ a + bx_3 + cy_3 &= a_3 \end{aligned} \quad (5.66)$$

olup bu sistem a, b ve c için çözülüp bulunan sonuç (5.64) de kullanılıp yeniden düzenlenirse,

$$\tilde{U}^{(e)}(x_i, y_i, a) = \sum_{j=1}^3 a_j \phi_j^{(e)}(x, y) \quad (5.67)$$

elde edilir. Burada

$$\phi_j^{(e)}(x, y) = \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2\Delta}, \quad j = 1, 2, 3$$

ve

$$a_j = x_k y_l - x_l y_k$$

$$b_j = y_k - y_l$$

$$c_j = x_l - x_k$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_2 y_1 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)]$$

= elementin alanı

Alt indis j, k, l değerleri $\phi_1^{(e)}(x, y)$ için 1, 2, 3 değerlerine sahiptirler ve $\phi_2^{(e)}(x, y)$, $\phi_3^{(e)}(x, y)$ için periyodik olarak değişirler. $\phi_j^{(e)}(x, y)$ fonksiyonları biçim fonksiyonlarıdır ve (5.67) den kolayca görülür ki onlar interpolasyon özelliğine sahip olmayı gerektirirler:

$$\phi_j^{(e)}(x_i, y_i) = \delta_{ji}$$

Biçim fonksiyonlarını türetmenin alternatif bir yolu daha vardır. (5.64) deki gibi, biçim fonksiyonlarının her biri 2-D lineer bir polinom şeklinde yazılır ve (5.68) deki gibi interpolasyon özelliğini her bir düğüm noktasında uygulanır.

Bir element herhangi bir kenarı boyunca interelement sürekliliğini kurmak için, q tane nodları kenar boyunca yerleştirilir. Burada q nodların sayısıdır. Böylece kenar boyunca element deneme çözümü belirlenir ve q nun değerine polinomun derecesine göre karar verilir. Bu polinom, element sınırı üzerinde element deneme çözümü tanıtan polinomdur. Şimdiki örnek problemimizde elementin içerisindeki her yerde polinom lineer yani derecesi 1 dir. 3 tane serbestlik katsayısı olduğundan ve böylece 3 nod olduğu için, her üç köşeye bir nod yerleştirirsek her kenardaki iki nod için süreklilik şartı sağlanır.

Adım 5: Biçim fonksiyonlarını element denklemlerine yerine konulur ve integraller nümerik oluşum için uygun forma dönüştürülür. (5.67) deki $\phi_j^{(e)}(x, y)$ 'ler (5.61b) sertlik ve yükleme integrallerinde yerlerine yazılmalıdır.

5.3.1.1 Sertlik integralleri

$\alpha_x(x, y)$, $\alpha_y(x, y)$ ve $\beta(x, y)$ fonksiyonları bir boyutlu elementlerdeki düşüncelerle aynı fiziksel özelliklere sahiplerdir. Biz bu özellikleri parçalı-kuadratik 2-D polinom ile tanımlayalım.

$$\begin{aligned}\alpha_x(x, y) &= \alpha_{x_0} + \alpha_{x_1}x + \alpha_{x_2}y + \alpha_{x_3}x^2 + \alpha_{x_4}xy + \alpha_{x_5}y^2 \\ \alpha_y(x, y) &= \alpha_{y_0} + \alpha_{y_1}x + \alpha_{y_2}y + \alpha_{y_3}x^2 + \alpha_{y_4}xy + \alpha_{y_5}y^2 \\ \beta(x, y) &= \beta_0 + \beta_1x + \beta_2y + \beta_3x^2 + \beta_4xy + \beta_5y^2\end{aligned}\quad (5.69)$$

Her bir set çalışma alanının (tanım kümesinin) farklı bir bölgesi için uygulanabilir. Eğer α_x , α_y ya da β ki bunlar (5.1) orjinal problemin ifadeleri ise, yukarıdaki gibi bir parçalı kuadratik ile tam olarak tanımlanır.

Her bir elementin içinde bu özellikler yaklaşık olarak bir sabit ile verilebilir. Bu sabit ağırlık noktası olmak üzere,

$$\begin{aligned}\alpha_x^{(e)} &= \alpha_x(x_c, y_c) \\ \alpha_y^{(e)} &= \alpha_y(x_c, y_c) \\ \beta^{(e)} &= \beta(x_c, y_c)\end{aligned}\quad (5.70)$$

burada

$$x_c = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y_c = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) \quad (5.71)$$

ve x_i, y_i , $i = 1, 2, 3$ nodların koordinatlarıdır. Yani elementin içerisinde alınacak en uygun nokta elementin merkezidir.

Ayrıklaştırma hatsından doğan global enerjinin yakınsaklık oranını korumak için sertlik ve yükleme integralleri bir kareleme kuralı birleştirilir (integrali alınır). Bu kural $O(h^{2(p-m+1)})$ 'in bir kesinliğine sahiptir. Problemimiz için, c^0 -lineer elemente göre, $m = 1$ ve $p = 1$ olup $O(h^2)$ nin bir kesinliği için integrate edilmelidir.

İlk olarak α_x ve α_y integrallerini düşünelim. (5.67) den,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_j^{(e)}(x, y)}{\partial x} &= \frac{b_s}{2\Delta} \\ \frac{\partial \phi_j^{(e)}(x, y)}{\partial y} &= \frac{c_j}{2\Delta}\end{aligned}\quad (5.72)$$

olur ki bunlar sabitlerdir. Böylece (5.61b) den,

$$\begin{aligned}
K\alpha_{ij}^{(e)} &= \iint \frac{\partial \phi_i^{(e)}(x,y)}{\partial x} \alpha_x(x,y) \frac{\partial \phi_j^{(e)}(x,y)}{\partial x} dxdy \\
&+ \iint \frac{\partial \phi_i^{(e)}(x,y)}{\partial y} \alpha_y(x,y) \frac{\partial \phi_j^{(e)}(x,y)}{\partial y} dxdy \\
&\cong \frac{b_i}{2\Delta} \alpha_x^{(e)} \frac{b_j}{2\Delta} \iint dxdy + \frac{c_i}{2\Delta} \alpha_y^{(e)} \frac{c_j}{2\Delta} \iint dxdy \\
&= \frac{\alpha_x^{(e)}}{4\Delta} b_i b_j + \frac{\alpha_y^{(e)}}{4\Delta} c_i c_j
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Şimdi β integralini ele alırsak,

$$\begin{aligned}
KB_{ij}^{(e)} &= \iint \phi_i^{(e)}(x,y) \beta(x,y) \phi_j^{(e)}(x,y) dxdy \\
&= B^{(e)} \phi_i^{(e)}(x,y) \phi_j^{(e)}(x,y) dxdy
\end{aligned} \tag{5.74}$$

olup bu integral aşağıdaki üçgen integrasyon formülü yardımıyla ölçülebilir:

$$\iint \xi_1^L \xi_2^m \xi_3^n dxdy = \frac{L! m! n!}{(L+m+n+2)!} 2\Delta \tag{5.75}$$

Burada integrand, üç alan koordinatı ξ_1, ξ_2, ξ_3 in çarpımıdır. L, m, n sırasıyla kuvvetleridir. İntegrasyon ise üçgen elementin alanıdır. Δ üçgenin alanıdır.

Alan koordinatları üçgenin geometrik koordinatlarıdır. Her bir koordinat bir kenar üzerinde 0 değerinden 1 değerine lineer olarak değişir. Geometrik olarak ξ_i , bir küçük parçalanma alanı Δ_i/Δ dır. Alan koordinatları bağımsız değildir. Şu bağıntıyı sağlarlar:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \tag{5.76}$$

(5.75) denklemini (5.74) deki β integraline uygulayabiliriz. Bunun için dikkat edilmeli ki, biçim fonksiyonları ($c^0 - \text{lineer üçgen element için}$) alan koordinatları ile aynıdır.

$$\phi_i^{(e)}(x,y) = \xi_i, \quad i = 1,2,3 \text{ (} c^0\text{-lineer üçgen için)} \quad (5.77)$$

Böylece, (5.77) yi (5.74) de yerine yazarsak ve (5.75) kullanılırsa,

$$K\beta_{ij}^{(e)} = \beta^{(e)} \iint^{(e)} \xi_i \xi_j dx dy = \begin{cases} \frac{\beta^{(e)}\Delta}{6}, & i = j \\ \frac{\beta^{(e)}\Delta}{12}, & i \neq j \end{cases} \quad (5.78)$$

5.3.1.2 Yükleme integralleri

Önce iç yükleme integrali ele alınır. 1-D element için önceki bölümlerde verilen mantıkla aynıdır. Yaklaşık olarak yükleme $f(x,y)$ yi her bir element üzerinde bir sabit $f^{(e)}$ olarak düzenlenebilir. Bunun değeri merkezdeki yüklemenin değeridir.

$$f^{(e)} = f(x_c, y_c) \quad (5.79)$$

Bu, lineer elementimiz için uygun $O(h^2)$ kesinliği sağlar. Çünkü bir $O(h^2)$ üçgen kareleştirme kuralı için, integrantı ağırlık merkezinde örneklemek ya da seçmek için uygundur. Böylece $f^{(e)}$ yi integralin dışına alınırsa,

$$Ff_i^{(e)} \cong f^{(e)} \iint^{(e)} \phi_i^{(e)}(x,y) dx dy \quad (5.80)$$

olur. Kalan bu integral tam olarak hesaplanabilir. Burada (5.75) formülü kullanılabilir. $L, m, n = 1,0,0$ ya da $0,0,1$ ki $\Delta/3$ ü verir. (5.80) integrali birim yükseklikteki bir piramidin hacmidir. Bu hacim ise

$$v = \frac{1}{3} \cdot \text{taban alanı} \cdot \text{yükseklik}$$

dir. Böylece,

$$Ff_i^{(e)} = \frac{f^{(e)}\Delta}{3} \quad (5.81)$$

bulunur. 2-D fiziksel uygulamalarda $f^{(e)}$ birim alandaki yüküdür. Dolayısıyla $f^{(e)} \cdot \Delta$ element üzerindeki toplam yüküdür. (5.81) denklemi üç nodun her biri için toplam yükün üçte biridir.

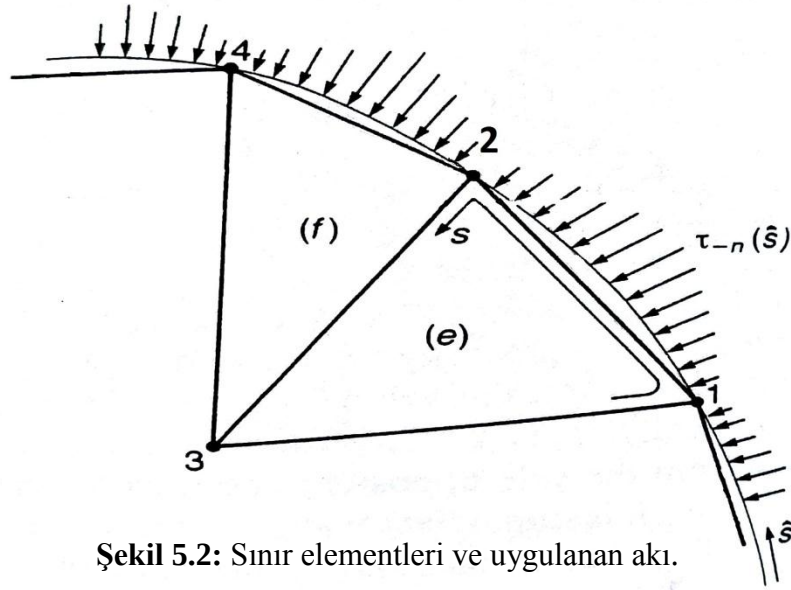
Sınır akı integrali ele alırsak;

$$Ff_i^{(e)} = \oint \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_i^{(e)} ds \quad (5.82)$$

olur. Şekil 5.2 iki bitişik elementler olan (e) ve (f) i gösterir. Bu elementler bölgenin sınırladığı tarafındadır. Uygulanan akı'un iç-normal bileşeni $\tau_{-n}(s)$ nin bölge sınırına etkisi görülmektedir. Onun büyüklüğü pozisyona göre değişebilir. Burada s sınır boyunca bir koordinattır. Elementin sınırından birazcık farklı yöndedir. Eğer bölgenin sınırları eğri ise düzgün kenarlı bir element yalnızca yaklaşık olarak sınırlar için uygundur. Doğal sınır koşulları için $\tau_{-n}(s)$ yı şöyle tayin edilir:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} &= \tau_{-n}(s) \\ \tilde{\tau}_{-n}^{(f)} &= \tau_{-n}(s) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.83)$$

diğer elementler için benzer şekildedir.



Şekil 5.2: Sınır elementleri ve uygulanan akı.

Bir elementin dahili ve harici kenarları arasında şu farklılıklar vardır.

- Bir harici kenar ki bölgenin sınırındadır ve sadece bir elemente aittir. Yani başka bir elementle ortak kenar değildir. Şekil 5.2 deki $\overline{12}$ ve $\overline{24}$ kenarları buna örnektir.
- Bir dahili kenar ki bölgenin içindedir, iki elementin ortak kenarıdır (Şekil 5.2 deki $\overline{31}$, $\overline{32}$ ve $\overline{34}$ kenarları gibi).

Her element kenarı ya dahili ya da harici kenardır. (5.82) deki integral bir elementin tüm çevresi boyuncadır. Böylece üç integralin toplamıdır. İntegrallerin her biri bir kenar boyuncadır. Böylece, (e) elementi için (Şekil 5.2)

$$\oint^{(e)} = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^1 \quad (5.84)$$

burada $\int_i^J$, i nodundan J noduna kadar integral anlamında sınır akı vektörüdür.

Böylece bir genişletilmiş formda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\{F_j\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \int_1^2 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_1^{(e)} ds + \int_2^3 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_1^{(e)} ds + \int_3^1 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_1^{(e)} ds \\ \int_1^2 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_2^{(e)} ds + \int_2^3 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_2^{(e)} ds + \int_3^1 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_2^{(e)} ds \\ \int_1^2 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_3^{(e)} ds + \int_2^3 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_3^{(e)} ds + \int_3^1 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_3^{(e)} ds \end{Bmatrix} \quad (5.85)$$

Karşı kenardaki nod için biçim fonksiyonu 0 olduğundan, yukarıdaki eşitlik sadeleştirilir:

$$\{F_j\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \int_1^2 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_1^{(e)} ds & + \int_3^1 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_1^{(e)} ds \\ \int_1^2 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_2^{(e)} ds & + \int_2^3 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_2^{(e)} ds \\ \int_2^3 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_3^{(e)} ds & + \int_3^1 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_3^{(e)} ds \end{Bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow Nod1 \\ \leftarrow Nod2 \\ \leftarrow Nod3 \end{matrix} \quad (5.86)$$

Öncelikle harici integraller irdelenecektir.

5.3.1.3 Bir harici kenar boyunca sınır akı integralleri

Denklem (5.86) ya göre temel iki integral söz konusudur,

$$\int_1^2 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_1^{(e)} ds \quad (5.87)$$

$$\int_1^2 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_2^{(e)} ds$$

(5.83) den doğal sınır koşullarını yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_1^{(e)} ds &\cong \int_1^2 \tau_{-n}(s) \phi_1^{(e)} ds \\ \int_1^2 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_2^{(e)} ds &\cong \int_1^2 \tau_{-n}(s) \phi_2^{(e)} ds \end{aligned} \quad (5.88)$$

elde edilir. Burada yaklaşık işaretinin kullanılması, elementin harici kenarı ile bölgenin sınırının muhtemelen tam olarak aynı olmamışındandır. Onlar arasında ince bir dilim kalacaktır ve buna bir modelleme hatası denir. Pratik uygulamalarda bu dilim yeterince ince yapılarak, verilen akı'un elementin kenarı için kolayca uygulanabilir hale getirilmesi amaçlanır [27].

Önceki integrallerde olduğu gibi, sadece $O(h^2)$ kesinliğe ihtiyaç duyulur. Bunun için $\tau_{-n}(s)$ 'i yaklaşık olarak $\tilde{\tau}^{(e)}$ ile göstereceğimiz bir sabit olarak alınır. Bu sabit kenarın orta noktasının ölçüsüdür:

$$\tau^{(e)} = \tau_{-n}(x_m, y_m) \quad (5.89)$$

burada,

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \\ y_m &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

dir. Orta noktayı seçmemizdeki amaç bu örneklemede bir $O(h^2)$ için uygun sonuç vermesidir.

Böylece $\tau^{(e)}$ integrallerinin dışına çıkartılır.

$$\begin{aligned} \tau^{(e)} \int_1^2 \phi_1^{(e)} ds, \\ \tau^{(e)} \int_1^2 \phi_2^{(e)} ds \end{aligned} \quad (5.90)$$

Kalan integral bir diğer üçgen integrasyon formülü ile hesaplanabilir. Üçgenin bir kenarı için,

$$\int_i^j \xi_i^L \xi_j^m ds = \frac{L! m!}{(L + m + 1)!} L_{ij} \quad (5.91)$$

burada $L_{ij} = \int_i^j ds$ olup i ve j nodları arasındaki uzaklıktır.

(5.91)'i (5.90) da uygularsak, her bir integralde $\frac{L_{12}}{2}$ gelir. (5.90) daki her bir integral birim yükseklikte ve L_{12} tabanında bir üçgenin alanıdır. Bu nedenle $\frac{L_{12}}{2}$ terimi geldi. Böylece harici sınır akı integralleri,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_1^{(e)} ds &= \frac{\tau^{(e)} L_{12}}{2}, \\ \int_1^2 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_2^{(e)} ds &= \frac{\tau^{(e)} L_{12}}{2} \end{aligned} \quad (5.92)$$

2-D fiziksel uygulamalarda $\tau^{(e)}$ birim uzunlukta bir yükür. Bu nedenle $\tau^{(e)} L_{12}$ denklemi her iki nod için toplam yüklemenin bir buçuk katını gösterir.

Şekil 5.2 de, sınırın belirgin bir uzunluğu boyunca uygulanan $\tau_n(s)$ akı dağılımı görülür. Bazen $\tau_{-n}(s)$ çok küçük bir bölgede yoğunlaşabilir. Bu durumda bir seçim yapılır. Eğer yoğunlaşmış akının yakın civarında detaylı bir çözüm elde etmek istersek, (5.92)'yi kullanmalı ve yoğunluk civarında birkaç ince elementle çalışılmalıdır. Bunun yerine yoğunlaşmış akının bir nokta akı modelleştirilmesi için daha etkili bir yaklaşım olacaktır. O zaman büyük elementler kullanılır ve nodların biri için nokta akı uygulanır (matematiksel olarak $\tau_{-n}(s)$ ifadesini bir Dirac delta fonksiyonu ile ifade edilebilir). Yoğunlaştırılmış farzettığımız nod 1 de (e elementi üzerinde),

$$\tau_{-n}(\hat{s}) = \tau_1 \delta(\hat{s} - \hat{s}_1) \quad (5.93)$$

dir.

Burada $\hat{s}_1$, nod 1 deki koordinat değerini, τ_1 ise noktasal akının değerini gösterir. τ_1 'in değeri aslında $\tau_{-n}(s)$ nın altında kalan alandır. Yani,

$$\tau_1 = \int \tau_{-n}(s) ds$$

dır. $\tau_{-n}(s)$ birim uzunlukta bir yükleme olduğundan τ_1 sadece bir yüküdür. Dirac delta fonksiyonu $x = a$ hariç her yerde sıfırdır.

$$\delta(x - a) = \begin{cases} \infty, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$$

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} g(x) \delta(x - a) dx = g(a)$$

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} c \delta(x - a) dx = c$$

2-boyutta

$$\delta^2(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$$

Problemimize dönelim. (5.93)'ü (5.88) de kullanırsak

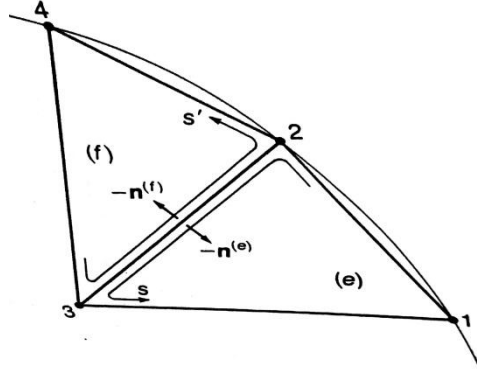
$$\begin{aligned} \int_1^2 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_1^{(e)} ds &= \tau_1 \\ \int_1^2 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_2^{(e)} ds &= 0 \end{aligned} \tag{5.94}$$

olur. Böylece nod 1 de bütün akı belirlenir.

Bir dahili kenar boyunca sınır akış integralleri:

Şimdi (5.86) ifadesindeki dahili integralleri ele alınsın. $\overline{13}$ ve $\overline{23}$ kenarları boyunca iki integral aynı mantıkla ele alınır. Bu nedenle onlardan sadece birisinin incelenmesi yeterlidir. Şekil 5.2 deki $\overline{23}$ kenarını düşünelim. Bu kenar (f) elementi tarafından paylaşılıyor. Böylece bu element için sınır akı vektör [(5.95)] bu kenar boyunca bir

integrale katkıda bulunacaktır. f elementi içerisindeki sınır koordinatı s' Şekil 5.3 de gösterildi.



Şekil 5.3: Elementler arası sınır integralleri için notasyon [27].

(e) ve (f) elementleri birleştiğinde, nod 2 ve nod 3 ile ilgili terimler birbirine eklenir. Böylece (5.86) ve (5.95) den, birleştirilmiş sınır akı (akı) vektör (5.96) da ifade edilir.

$$\{F_\tau\}^{(f)} = \begin{bmatrix} \int_2^4 \tilde{\tau}_{-n}^{(f)} \phi_2^{(f)} ds & + \int_3^2 \tilde{\tau}_{-n}^{(f)} \phi_2^{(f)} ds \\ \int_2^4 \tilde{\tau}_{-n}^{(f)} \phi_3^{(f)} ds & + \int_3^2 \tilde{\tau}_{-n}^{(f)} \phi_3^{(f)} ds \\ \int_2^4 \tilde{\tau}_{-n}^{(f)} \phi_4^{(f)} ds & + \int_4^3 \tilde{\tau}_{-n}^{(f)} \phi_4^{(f)} ds \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow Nod1 \\ \leftarrow Nod2 \\ \leftarrow Nod3 \end{matrix} \quad (5.95)$$

$$\{F_\tau\}^{(e)+(f)} = \begin{bmatrix} \int_1^2 \tilde{\tau}_{-n^{(e)}}^{(e)} \phi_1^{(e)} ds + \int_3^1 \tilde{\tau}_{-n^{(e)}}^{(e)} \phi_1^{(e)} ds & \\ \int_1^2 \tilde{\tau}_{-n^{(e)}}^{(e)} \phi_2^{(e)} ds + \int_2^3 \tilde{\tau}_{-n^{(e)}}^{(e)} \phi_2^{(e)} ds + \int_3^2 \tilde{\tau}_{-n^{(f)}}^{(f)} \phi_2^{(f)} ds + \int_2^4 \tilde{\tau}_{-n^{(f)}}^{(f)} \phi_2^{(f)} ds & \\ \int_1^3 \tilde{\tau}_{-n^{(e)}}^{(e)} \phi_3^{(e)} ds + \int_2^3 \tilde{\tau}_{-n^{(e)}}^{(e)} \phi_3^{(e)} ds + \int_3^2 \tilde{\tau}_{-n^{(f)}}^{(f)} \phi_3^{(f)} ds + \int_2^4 \tilde{\tau}_{-n^{(f)}}^{(f)} \phi_3^{(f)} ds & \\ \int_2^4 \tilde{\tau}_{-n^{(f)}}^{(f)} \phi_4^{(f)} ds + \int_4^3 \tilde{\tau}_{-n^{(f)}}^{(f)} \phi_4^{(f)} ds & \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow Nod1 \\ \leftarrow Nod2 \\ \leftarrow Nod3 \\ \leftarrow Nod4 \end{matrix} \quad (5.96)$$

(e) ve (f) üst indislerini normal vektörler olan $n^{(e)}$ ve $n^{(f)}$ yi ayırt etmek için kullanıldı. (5.96) daki kırmızı olarak gösterilen iki terim $\overline{23}$ kenarı boyunca tam sınır akı terimleridir. Her ikisi de aynı düşünce ile elde edilmiş olup yalnızca bir tanesini incelemek yeterli olacaktır (öteki kalan terimler $\int_1^2$ ve $\int_2^4$ gibi ya harici integrallerdir (ki inceledik zaten) ya da $\int_3^1$ ve $\int_4^3$ gibi başka kenarlar ile benzer birleşimi yapan dahili integrallerdir).

Nod 2 ile birleşen terimler çiftini düşünelim:

$$\int_2^3 \tilde{\tau}_{-n^{(e)}}^{(e)} \phi_2^{(e)} ds + \int_3^2 \tilde{\tau}_{-n^{(e)}}^{(f)} \phi_2^{(f)} ds \quad (5.97)$$

yukarıdaki ifadeyi aşağıdaki bağıntılar yardımı ile daha sade yazılabilir.

$$\begin{aligned} ds &= -ds' \\ n^{(e)} &= -n^{(f)} \\ \tilde{\tau}_{-n^{(f)}}^{(f)} &= -\tilde{\tau}_{-n^{(e)}}^{(f)} \end{aligned} \quad (5.98)$$

3. bağıntı, (5.62) den ve 2. bağıntıdan çıkartıldı. Onun yerine

$$\tilde{\tau}_{-n^{(e)}}^{(e)} = -\tilde{\tau}_{-n^{(f)}}^{(e)}$$

yazılabilir [27].

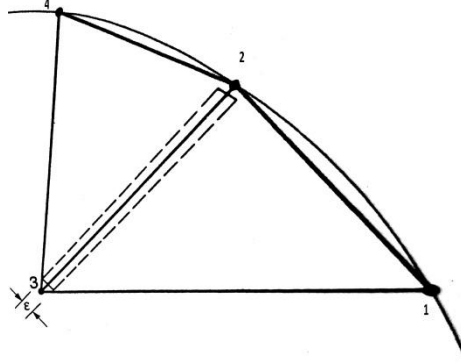
Ek olarak,

$$\phi_2^{(e)}(\text{kenar } \overline{23}) = \phi_2^{(f)}(\text{kenar } \overline{23}) \quad (5.99)$$

dir. Bu c^0 -süreklilik şartıdır. (5.98) ve (5.99)'u (5.97) de kullanırsak, bu integral çifti,

$$\int_2^3 \left(\tilde{\tau}_{-n^{(e)}}^{(e)} - \tilde{\tau}_{-n^{(f)}}^{(e)} \right) \phi_2^{(e)} ds \quad (5.100)$$

elde edilir. (5.100) integralini değerlendirmek için $\tilde{\tau}_{-n^{(e)}}^{(e)} - \tilde{\tau}_{-n^{(f)}}^{(e)}$ farkını belirlemek gerekir. 1-D yaklaşıma benzetmek için, orijinal yönetici denklem (5.1)'i Şekil 5.4 deki dikdörtgen boyunca integre edilmelidir. Burada $\varepsilon \rightarrow 0$ dır.



Şekil 5.4: Elementler arası sınır integralleri için integral yolu [27].

Eğer iç yük $f(x, y)$, $\overline{23}$ kenarı boyunca sonlu ise (mesela sürekli ya da bir sıçrama süreksizliğine sahipse) o zaman, $\tilde{\tau}_{-n(e)}^{(e)} - \tilde{\tau}_{-n(f)}^{(e)} = 0$ ($f(x, y)$ interelement sınırı boyunca) (5.101) yani tam çözüm için akı, kenar $\overline{23}$ boyunca sürekli olmalıdır. Bu interelement sınırları boyunca olağan bir şarttır. Eğer iç yük $\overline{23}$ kenarı boyunca bir yoğunlaşmış dağılıma sahipse (bir Dirac delta fonksiyonu bir doğru boyunca) ise,

$$\tilde{\tau}_{-n(e)}^{(e)} - \tilde{\tau}_{-n(f)}^{(e)} = \tau_{23}(f, \text{interelement sınırı boyunca yoğunlaşmış}) \quad (5.102)$$

olur. Burada τ_{23} yoğunlaşmış iç yükü line integralidir ve böylece akı gibi aynı fiziksel ölçü birimine sahiptir. Fiziksel uygulamalarda τ_{23} , problem için verilen yük datasının bir bölümü olacaktır.

(5.101) ve (5.102) denklemlerine 2-D doğal interelement sınır koşulları denir. İçerdeki doğal interelement sınır koşulları, sınır üzerindeki doğal sınır koşulları ile benzer davranışadur. Örneğin özel olarak iç element kenarlar boyunca dağıtılmış akılar ve iç nodlarda ki yoğunlaşmış nokta akılarını belirleyebiliriz. Biraz daha açacak olursak, (5.102) deki τ_{23} , $\overline{23}$ kenarı boyunca değişebilir. $\tau_{23}(s)$, (5.100) de yerine yazılırsa (5.87) deki harici sınır integralleri ile aynı formda bir integral elde edilir. Aynı mantıkla ya (5.92) ya da (5.94) elde edilir. Belirtelim ki noktasal akılar matematiksel olarak ya yoğunlaşmış sınır akıları ya da şüpheli yoğunlaşmış iç yükler olarak tarif edilebilir.

(5.101) deki doğal interelement sınır koşulları, fiziksel problemler için alışılmış şarttır. Bu nedenle, dahili sınır akı integralleri data elde etmek için bir program yazımında önemsizdir. Çünkü değeri sıfırdır. Sadece (5.102) deki gibi sıfır olmayan terimlerin girilmesi önemlidir. Sonuç olarak yaklaşık çözüm bulunacağı için bu çözüm doğal interelement sınır koşullarını sadece yaklaşık olarak sağlar [6, 27]. Özet olarak, (5.61b) deki sınır akı integrali, özelleştirilebilir iki muhtemel akı tipleri şeklinde indirgendi: her element kenarı boyunca dağıtılmış bir akı (5.92) ya da (5.102) [ile (5.100)] ya da her bir nod'da bir nodal akı ((5.94) deki gibi) şeklindedir.

Adım 6: Akı için ifadelerin hazırlanması. (5.17) denkleminde,

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_x^{(e)}(x, y) &= -\alpha_x(x, y) \frac{\partial \tilde{U}^{(e)}(x, y; a)}{\partial x} \\ \tilde{\tau}_y^{(e)}(x, y) &= -\alpha_y(x, y) \frac{\partial \tilde{U}^{(e)}(x, y; a)}{\partial y}\end{aligned}\tag{5.104}$$

olur. böylece,

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_x^{(e)}(x, y) &= -\alpha_x(x, y) \sum_{j=1}^3 a_j \cdot \frac{b_j}{2\Delta} \\ \tilde{\tau}_y^{(e)}(x, y) &= -\alpha_y(x, y) \sum_{j=1}^3 a_j \frac{c_j}{2\Delta}\end{aligned}\tag{5.105}$$

elde edilir.

Bu c^0 -linear üçgen element için bir optimal (en uygun) akı örnekleme noktası vardır. Bu nokta merkezdedir. Bu kesinlik $O(h^2)$ dır. Diğer noktalarda kesinlik sadece $O(h)$ dır. Ayrıca belirtelim ki biçim fonksiyonları yalnızca, modellenen bir bölgenin bilinen bir noktayı çevrelediği zaman kullanışlıdır. Bu noktada tam çözüm singüler davranışın aynı tipine sahiptir.

Böylece optimal akı değerleri,

$$\tilde{\tau}_x^{(e)}(x, y) = -\alpha_x(x_c, y_c) \sum_{j=1}^3 a_j \cdot \frac{b_j}{2\Delta}\tag{5.106}$$

$$\tilde{\tau}_y^{(e)}(x, y) = -\alpha_y(x_c, y_c) \sum_{j=1}^3 a_j \frac{c_j}{2\Delta}$$

olur. Burada x_c, y_c ler merkezin (orta noktanın) koordinatlarıdır ki (5.71) de verildi.

Ayrıca nodal akıların hesaplanması gerekir. Bunlar genellikle optimal akılarla çalışmaktan daha kolaydır. Çünkü nodların yerini saptamak, optimal noktaların yerini saptamaktan daha kolaydır (özellikle yüksek mertebeli eğri elementler için). Ayrıca nodal değerleri kullanarak akı figürleri oluşturmak daha kolaydır. Nodal akılar bir düzleştirme ve ortalama alma prosedürü kullanarak hesaplanabilir. Bu yüzden, ilk olarak akının her bileşeni için her element içerisinde bir düzleştirme fonksiyonu oluşturulur. Akının bileşenleri olarak $\tilde{\tau}_x^{(e)}(x, y)$ ve $\tilde{\tau}_y^{(e)}(x, y)$ kastedilir. 1-D için bu fonksiyonlar eğriler iken 2-D için yüzeydir. Bu fonksiyonlar genelde polinomaldır ve onlar ya interpolasyon ya da birkaç veya tüm optimal akılar için sonlu kareler yöntemleri ile belirlenir. Bu seçim sırasıyla polinomdaki katsayıların sayısının seçilen akıların sayısına eşit ya da daha az olmasına göre yapılır.

Kullanılan c^0 -lineer element için, her bir akı bileşeni sadece bir optimal akıya sahiptir (merkezde). Bu yüzden her bir elementteki düzleştirme fonksiyonları sadece bir sabit olabilir. Bu sabit $\tilde{\tau}_x^{(e)}$ ve $\tilde{\tau}_y^{(e)}$ optimal değerlerine eşittir. Böylece nodların her birinde element nodal akılar x -bileşeni için $\tilde{\tau}^{(e)}$ ve y -bileşeni için $\tilde{\tau}_y^{(e)}$ olmalıdır.

5.4 C^0 -İkinci Dereceden İzoparametrik Üçgen

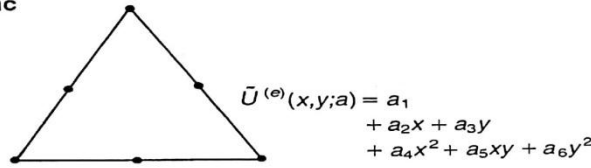
Bu özel element yüksek mertebeden c^0 elementlerin sonsuz hiyerarşisinden biridir. Önceki kısımdaki 3 nodlu c^0 -lineer elementini hatırlarsak ki o 2-D elementler için en basitidir. Pascal üçgenindeki ilk üç terim kullanılır (Şekil 5.5).

Pascal üçgeninden, tam 2-D polinomların 3,6,10,15,21,... vb. terim içerdiği görülür. Önceki 3-nod lineer element bu serinin ilkidir. Şekil 5.5 bu serinin ileriki dört elementini gösterir. Her bir deneme çözüm, p derecesi için (quadratic için $p = 2$, kübik için $p = 3$,...vs.) bir tam polinomdur. Böylece her deneme çözüm Pascal üçgeninin ilk $p+1$ satırındaki tüm terimleri kullanır.

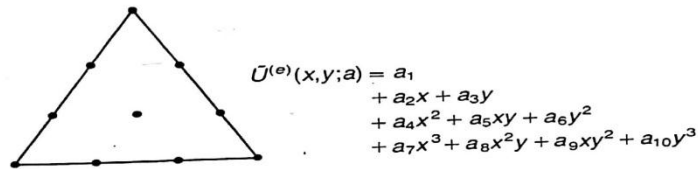
Dikkat edersek, her bir elementteki nodların yerleri, geometrik olarak üçgen oluşturacak şekilde dizilirler. Bu sıralanış pascal üçgenindeki sıralanış gibidir.

Örneğin kübik element 10 katsayıya sahiptir ve böylece 10 nod'u vardır. Bu nodlar öyle yerleşir ki her köşede birer tane, kenarlarda ikişer tane ve iç bölgede birer tanedir. Bu pascal üçgeninde ki ilk 10 terimin diziliş sırasına uyar. Bu benzerlik tüm örneklerde mevcuttur. Şekil 5.5 deki üçgenlerden görüldüğü gibi hepsi de düzgün kenarlı, kenar uzunlukları yaklaşık olarak aynı ve nodlar benzer bir mesafe ile yerleştirilmiştir. Bu gösterim sadece diyagramları birleştirmek içindir. Pratikte, kenarlar eğri ve farklı uzunlukta olabilir. Nodlar benzer şekilde yerleştirilmemiş olabilir. Düzenli biçimdeki elementler daha sonra görüleceği gibi, nümerik problemlere neden olabilirler. Tam üçgen elementlerin iki önemli özelliğini elde edilir. Bunlardan birincisi, deneme çözümlerin geometrik ispatı (eş yönlülük) özelliğine sahip olmasıdır. Yani onlar x ve y bağımsız değişkenlerine göre dengelenmiştir. Bu yüzden her bir $x^r y^s$ terimi için $x^s y^r$ terimi de vardır. Böylece x ve y yer değiştirirse de deneme çözümde bir değişiklik olmaz. Bu özellik her deneme çözüm üzerine kolayca uygulanmış olmasına rağmen aslında tam polinom için otomatik olarak sağlanır.

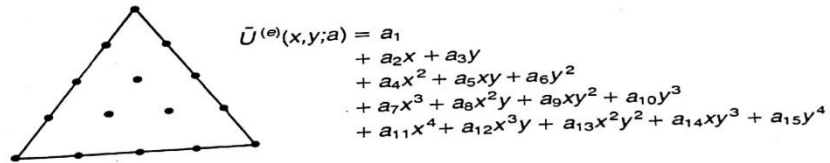
C⁰-quadratic



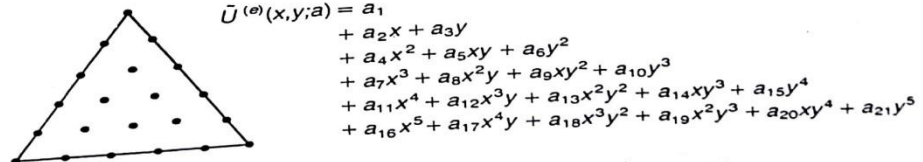
C⁰-cubic



C⁰-quartic



C⁰-quintic



Şekil 5.5: İki boyutlu bölgede kullanılan ilk 4. mertebeden üçgen elementler [27].

Geometrik isotopry yakınsaklık için gerekli değildir fakat yine de istenilen bir özelliktir. Isotopry'nin olmaması bir değişkenin değerinden daha etkili olduğu anlamına gelir ki elementin performansı diğer elementle birleşmede önemli bir şekilde değişir ancak bu pek istenen bir durum değildir [27, 35].

İkinci önemli özellik ise, elementin her kenarının aynı sayıda noda sahip olmasıdır. Bu yaklaşık olarak her kenarda aynı düzeni sağlar ve böylece elementin performansı ya da uygulanabilirliği, onun yönünden bağımsız olur. Bu özellik çok sayıda elementin bir ağ biçiminde birleştirilmesini oldukça kolay hale getirir. Böylece verilen bir elementin herhangi bir kenarı, başka bir elementin herhangi bir kenarı ile uyumlu haldedir.

Tam polinom olmayan üçgenlerde her kenarda farklı sayıda nod vardır. Böylece bu tür üçgenlerin birleştirilmesi oldukça zordur. 3-nodlu lineer üçgen ve 6-nodlu quadratic üçgen genellikle üçgen element seçiminde en kullanışlılardır [28, 32].

Adım 4 : Biçim fonksiyonlar için özel ifadelerin geliştirilmesi.

Elementi ya doğrudan yaklaşımla ya da parametrik eşleştirmeyle geliştirebiliriz. Doğrudan yaklaşımda biçim fonksiyonları x, y uzayındaki reel elementler üzerinde oluşturulur. Oysa parametrik eşleme biçim fonksiyonlarını bir temel element üzerinden kurar. Daha sonra onları (reel elementler için) eşleştirir [5, 27].

2-D elementler için düz kenarlı elementlerde doğrudan yaklaşımlar sınırlıdır. Çünkü standart birleştirme kuralını kullanarak eğri kenarları üzerinde interelement sürekliliğini sağlamak mümkün görünmemektedir. Çünkü eğri kenar boyunca deneme çözüm sadece bu kenar üzerindeki katsayılar tarafından belirlenmez. Böylece komşu iki elementin nodlarda birleştirilmesi onların deneme çözümlerinin tüm kenar üzerinde aynı olmasını gerektirmez.

Eğri kenarlı elementler modelin sınırları eğri ise daha uygundur. Bundan dolayı, yukarıdaki özellikler parametrik eşlemeyi direk yaklaşımdan daha uygun kılar.

Şekil 5.6 (a), ξ, η uzayında temel elementi gösterir. Şekil 5.6 (b) ise x, y uzayında bir eğri kenarlı reel element üzerine yerleştirilmiş temel elementi gösterir. İlk olarak temel elementi inceleyelim. O zaman biçim fonksiyonlarını ana (temel) element

üzerinde geliştireceğiz. Son olarak temel elementin eşleşmesini reel element üzerinde geliştireceğiz. Sonra elbette, temel biçim fonksiyonlardaki sonuçlar reel element üzerindeki biçim fonksiyonlarına eşlenir. Bu prosedürdeki amaç bu eşleştirmedir.

Temel elementin kenarları düz olmalıdır. Oysa reel elementler eğri olabilir. Bunun nedeni elementler arası sürekliliği sağlaması içindir. Temel elementin reel elemente eşlenmesi sadece bir koordinat dönüşümü gerektirir (ξ, η dan x, y ye). Biçim fonksiyonlarının değerinde bir değişiklik olmaz. Böylece eğer temel biçim fonksiyonlar interelement sürekliliğini sağlıyorsa, o zaman eşleşmiş biçim fonksiyonları bu sürekliliği korur. Düz kenarların cebirsel basitliği (eğri kenarlara kıyasla) aslında az bir öneme sahiptir.

Temel element herhangi bir üçgen biçimine sahip olabilir. Buna rağmen düzenli bir takım biçimler (benzer uzunlukta kenarlar ve benzer açılar) istenir. Çünkü, temel biçimden çokça çarpıtılmış reel elementler nümerik problemlere sebep olurlar. Düzenli biçimdeki reel elementler genellikle daha kullanışlıdır. Bir dik ya da eşkenar üçgen iyi birer adaylardır. Bu tez çalışmasında dik üçgen seçildi. Çünkü kenarlarının ikisi kartezyen ξ, η eksenleri ile düzene kolayca sokulabilir. Bu seçimle cebirsel işlemler oldukça basitleşir. Ek olarak 45° ve 90° açılarının her ikisi de hesaplamalarda sadece 60° kullanmaktan daha çok yönlüdür.

ξ, η eksenleri boyunca temel elementin iki kenarında birim uzunluktadır. ξ koordinatı kenar $\overline{361}$ boyunca sıfır değerindedir ve o lineer olarak nod 2 deki birim değere kadar değişir. Benzer şekilde η koordinatı kenar $\overline{142}$ boyunca sıfırdır ve nod 3 deki birim değere kadar doğrusal olarak değişir. Böylece ξ ve η alan koordinatlarıdır. Bir üçüncü alan koordinatı (ζ), kenar $\overline{253}$ boyunca sıfır olacaktır ve orjinde birim değerdedir. Bu koordinatı tanıtmaya ihtiyaç yoktur. Çünkü o, diğer ikisine bağlıdır. $\zeta + \eta + \xi = 1$. Böylece her zaman sadece ξ, η ile çalışacağız. Göreceğiz ki birim dik üçgenin kullanılması (ξ, η eksenleri ile) hesaplama avantajları sağlayacaktır. Elementin biçimi quadratic, cubic, quartic...vs. gibi ne şekilde alınıralsa alınsın bu kolaylık oldukça kullanışlıdır.

Şimdi interpolasyon özelliği olan

$$\phi_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij}$$

kullanarak temel biçim fonksiyonlarını geliştirelim. Temel elementler açısından deneme çözüm bir tam 2-D polinomal olduğundan, her biçim fonksiyon bir tam 2-D polinom içerisindeki terimlerin hepsini içermelidir. Böylece nod1 için,

$$\phi_1(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 \quad (5.107)$$

olur. interpolasyon özelliği gösterir ki,

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi_1, \eta_1) &= 1 \\ \phi_1(\xi_j, \eta_j) &= 0 \quad , \quad j = 2,3,4,5,6 \end{aligned} \quad (5.108)$$

(5.108)'i (5.107) de uygularsak 6 denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_6 &= 0 \\ \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{1}{4}\alpha_4 + \frac{1}{4}\alpha_5 + \frac{1}{4}\alpha_6 &= 0 \\ \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{1}{4}\alpha_6 &= 0 \end{aligned} \quad (5.109)$$

olur. (5.109) çözülürse,

$$\phi_1(\xi, \eta) = [1 - (\xi + \eta)][1 - 2(\xi + \eta)] \quad (5.110a)$$

benzer şekilde diğerleri de bulunur

$$\phi_2(\xi, \eta) = \xi(2\xi - 1)$$

$$\phi_3(\xi, \eta) = \eta(2\eta - 1)$$

$$\phi_4(\xi, \eta) = 4\xi[1 - (\xi + \eta)] \quad (5.110b)$$

$$\phi_5(\xi, \eta) = 4\xi\eta$$

$$\phi_6(\xi, \eta) = 4\eta[1 - (\xi + \eta)].$$

Koordinat dönüşümü,

$$x = x^{(e)}(\xi)$$

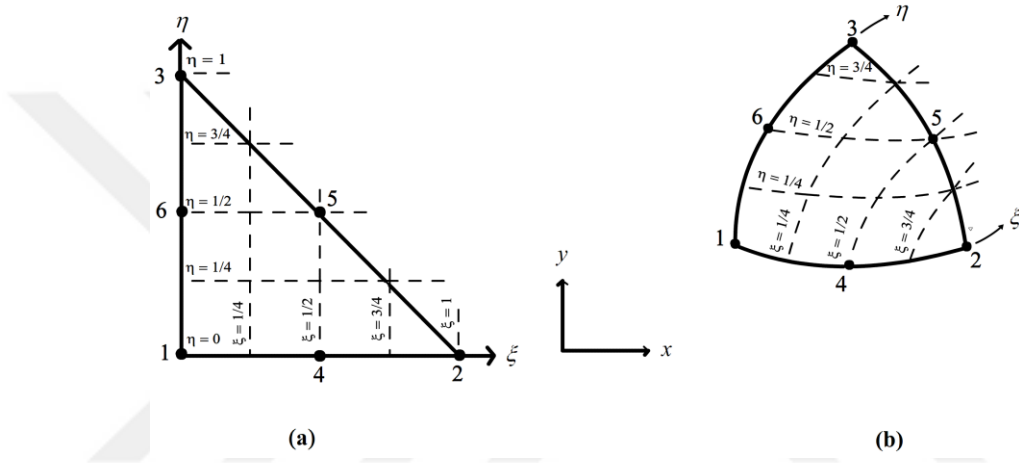
$$y = y^{(e)}(\eta)$$

olarak tanımlanır. İsoparametric yaklaşımda,

$$x = \sum_{k=1}^l x_k^{(e)} \phi_k(\xi, \eta)$$

$$y = \sum_{k=1}^l y_k^{(e)} \phi_k(\xi, \eta)$$

olur. burada $x_k^{(e)}$ ve $y_k^{(e)}$ ler $k = 1, 2, \dots, 6$ için (e) elementteki 1 nodlarının koordinatlarıdır. $\phi_k(\xi, \eta)$ temel biçim fonksiyonlarıdır.



Şekil 5.6: a) İsoparametrik üçgen b) Reel element [27]

Üzerinde çalışılan örnek problem için,

$$x = \sum_{k=1}^6 x_k^{(e)} \phi_k(\xi, \eta)$$

$$y = \sum_{k=1}^6 y_k^{(e)} \phi_k(\xi, \eta)$$
(5.111)

dir. Burada $x_k^{(e)}, y_k^{(e)}, k = 1, 2, \dots, 6$ (e), reel elementteki 6 nodun koordinatlarıdır. (5.111) eşitliği temel elementin reel nodlar üzerine eşleşmesini gösterir. Örneğin,

$$\begin{aligned} \text{Node 1 : } \xi = 0, \eta = 0 &\rightarrow x_1^{(e)}, y_1^{(e)} \\ \text{Node 2 : } \xi = 1, \eta = 0 &\rightarrow x_2^{(e)}, y_2^{(e)} \\ &\vdots \end{aligned}$$
(5.112)

$$\text{Node 6 : } \xi = 0, \eta = \frac{1}{2} \rightarrow x_6^{(e)}, y_6^{(e)}$$

şeklindedir.

(5.111) denklemlerindeki temel elementin ξ, η koordinatlarının her bir reel elemente eşleşmesi yapılır. Bir elementin diğerinden farkı sadece $x_k^{(e)}, y_k^{(e)}$ için nümerik değerlerdir. Temel biçim fonksiyonları reel elementlerin her biri için bu koordinat dönüşümleri ile taşınır.

Sonuçta oluşan biçim fonksiyonları her bir reel element üzerinde tanımlanır. Elementler arası sınırlar boyunca C^0 – süreklilik, sınıra paralel tüm türevlerin sürekliliğini gerektirir. Buna rağmen, sınır için normal türev genellikle yaklaşık SE çözüm için süresiz olabilmektedir. (5.101) denkleminde hatırlanırsa tam çözüm için akının normal bileşeni interelement sınırı boyunca süreklidir. Böylece, tam çözümün normal türevi, ayrıca sınır boyunca süreklidir. Bu doğal interelement sınır koşulu ve daha önce bahsedildiği gibi SEM çözümü tarafından sadece yaklaşık olarak sağlanır.

Bir isoparametrik element ancak ve ancak onun temel elementten eşleşmesi birebir ise kabul edilebilir. Yani temel elementte ki her bir nokta , reel elementte bir noktaya eşlenmelidir. 1-D elementte ki bazı kavramları özetlersek;

Bir eşleşmenin kabul edilebilmesi için bir analitik test vardır. Bu test temel elementin bir sonsuz küçük çizgi parçası $d\xi$ nın ilgili reel elementin dx segmentine eşleşmesi üzerine kurulur. Onların oranı $\frac{dx}{d\xi}$ olup eşleşmenin türevidir. Eşleşmeden oluşan koordinatların lokal genişlemesi ya da daralması miktarı anlamına gelir. Bir koordinat dönüşümü yapıldığında bu türeve bir Jakobian denir ve $j^{(e)}(\xi)$ ile sembolize edilir. Aslında 1-D dönüşümlerde normal bir şekilde kullanılır. Fakat 2-D dönüşümlerde $\frac{dx}{d\xi}$ bir matris belirtir ki Jakobian matris denir. Jakobian matrisin determinantına da Jakobian denir.

1-D ‘ da , bu matris ve onun determinantı skaler $\frac{dx}{d\xi}$ dir (Jakobian denir) .

$$j^{(e)}(\xi) = \frac{dx}{d\xi} \quad (5.112a)$$

olarak gösterilen Jakobian SE analizinde önemli bir yere sahiptir. Eşleşmenin kabul edilebilmesi için ,

$$j^{(e)}(\xi) > 0 , \quad a \leq \xi \leq b \quad (5.112b)$$

olması gerekir. Yani Jakobian elementin içinde ve sınırı üzerinde pozitif olmalıdır. a ve b sabitleri ξ' un sınır noktalarıdır.

Bu kısa özeti 2-D problemimiz için uygularsak elementin her noktasında,

$$|j^{(e)}(\xi, \eta)| > 0 \quad (5.113)$$

olmalıdır. Burada $|j^{(e)}(\xi, \eta)|$ Jakobiandır ve Jakobian matrisinin determinantıdır.

$$j^{(e)}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11}^{(e)}(\xi, \eta) & j_{12}^{(e)}(\xi, \eta) \\ j_{21}^{(e)}(\xi, \eta) & j_{22}^{(e)}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (5.114)$$

Böylece,

$$|j^{(e)}(\xi, \eta)| = \frac{dx}{d\xi} \frac{dy}{d\eta} - \frac{dx}{d\eta} \frac{dy}{d\xi} \quad (5.115)$$

Koordinat dönüşümlerinin türevleri (5.111) den elde edilir.

$$\begin{aligned} j_{11}^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{dx}{d\xi} = \sum_{k=1}^6 x_k^{(e)} \frac{d\phi_k(\xi, \eta)}{d\xi} \\ j_{12}^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{dy}{d\xi} = \sum_{k=1}^6 y_k^{(e)} \frac{d\phi_k(\xi, \eta)}{d\xi} \\ j_{21}^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{dx}{d\eta} = \sum_{k=1}^6 x_k^{(e)} \frac{d\phi_k(\xi, \eta)}{d\eta} \\ j_{22}^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{dy}{d\eta} = \sum_{k=1}^6 y_k^{(e)} \frac{d\phi_k(\xi, \eta)}{d\eta} \end{aligned} \quad (5.116)$$

ve biçim fonksiyonlarının türevleri de (5.110) dan ,

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_1(\xi, \eta)}{d\varepsilon} &= -3 + 4\xi + 4\eta & \frac{d\phi_1(\xi, \eta)}{d\eta} &= -3 + 4\xi + 4\eta \\
\frac{d\phi_2(\xi, \eta)}{d\varepsilon} &= -1 + 4\varepsilon & \frac{d\phi_2(\xi, \eta)}{d\eta} &= 0 \\
\frac{d\phi_3(\xi, \eta)}{d\varepsilon} &= 0 & \frac{d\phi_3(\xi, \eta)}{d\eta} &= -1 + 4\eta \\
\frac{d\phi_4(\xi, \eta)}{d\varepsilon} &= 4(-1 - 2\xi - \eta) & \frac{d\phi_4(\xi, \eta)}{d\eta} &= -4\xi \\
\frac{d\phi_5(\xi, \eta)}{d\varepsilon} &= 4\eta & \frac{d\phi_5(\xi, \eta)}{d\eta} &= 4\varepsilon \\
\frac{d\phi_6(\xi, \eta)}{d\xi} &= -4\eta & \frac{d\phi_6(\xi, \eta)}{d\eta} &= 4(1 - \xi - 2\eta)
\end{aligned} \tag{5.117}$$

Temel elementte ki sonsuz küçük bir alanın ilgili reel elementteki sonsuz küçük alana oranı;

$$\frac{dxdy}{d\xi d\eta} = |j^{(e)}(\xi, \eta)|$$

ya da ;

$$dxdy = |j^{(e)}(\xi, \eta)| d\xi d\eta \tag{5.118}$$

olur.

$|j^{(e)}(\xi, \eta)|$ değeri, eşleşmeden oluşan koordinatların lokal genişlemesinin ya da daralmasının miktarının gösterir. Örneğin eğer $|j^{(e)}(\xi, \eta)| = 0$ ise temel elementin içerisinde ki (ε, η) noktasının komşuluğunda ki sıfırdan farklı bir alan $d_\varepsilon d_\eta$, reel element içerisinde bir sıfır alana eşlenir. Sonuç olarak reel biçim fonksiyonları sonsuz eğimde olurlar. Bu kabul edilmez bir elementtir.

2-D elementler için biçim ve nod örneklerinin çeşitliliği oldukça fazladır. Fakat birçok deneyimler ve pratik uygulamalar sonucunda en sık kullanılan biçim düz kenarlar ile kenar orta nodların olduğu biçimdir. Yani;

$$x_4^{(e)} = \frac{1}{2} (x_1^{(e)} + x_2^{(e)})$$

$$x_5^{(e)} = \frac{1}{2} (x_2^{(e)} + x_3^{(e)}) \quad (5.119)$$

$$x_6^{(e)} = \frac{1}{2} (x_3^{(e)} + x_1^{(e)})$$

dir. (5.110) ve (5.119) ' u (5.111) ' de yerlerine konulursa ,

$$x = x_1^{(e)} + (x_2^{(e)} - x_1^{(e)})\xi + (x_3^{(e)} - x_1^{(e)})\eta \quad (5.120)$$

$$y = y_1^{(e)} + (y_2^{(e)} - y_1^{(e)})\xi + (y_3^{(e)} - y_1^{(e)})\eta$$

olur ki bir lineer eşleşmedir. (5.120)' yi (5.115) de kullanırsak ,

$$|j^{(e)}(\xi, \eta)| = (x_2^{(e)} - x_1^{(e)})(y_3^{(e)} - y_1^{(e)}) - (x_3^{(e)} - x_1^{(e)})(y_2^{(e)} - y_1^{(e)}) = 2\Delta \quad (5.121)$$

olur. Burada Δ üçgenin alanıdır. Jakobian tüm element üzerinde bir sabittir ve bozulmamayı gösterir. Yani reel biçim fonksiyonları kuadratik polinomlardır ve temel biçim fonksiyonlarıyla aynı formdadırlar.

Herhangi bir genel biçim için, her köşede iç açı , ne 0° ne de 180° olmamalıdır. Düz kenarlı üçgenler için bu açıktır. Çünkü o zaman üçgenin alanı sıfır olacaktır.

Ayrıca açıktır ki böyle köşeler civarında ξ ve η koordinat çizgileri paralel olacaktır ki bu 2-D koordinat sisteminin çökmesi demektir.

Özetle, kullanacağımız element tipi kenarları düz ya da bir dereceye kadar eğilmiş, köşe açıları temel açılara benzer (0 veya 180° değil) , orta kenar nodları kenarların merkezinde ya da yakınında olmalıdır. Her bir durumda potansiyel olarak kötü bir şekilde düzensiz element seçiminden kaçınmak için birkaç noktada Jakobian'ı hesaplayacak bir kod yazılımı yapılabilir.

Adım 5 : Biçim fonksiyonları element denklemlerinin içine konulur ve integraller nümerik hesaplama için uygun bir forma dönüştürülür.

Reel biçim fonksiyonları muhtemelen düzensiz çarpık olduğu için, kapalı formda ki integralleri kullanamayız. Onun yerine nümerik integrasyonu (kareleyerek alan hesabı) kullanmalıyız. Öncelikle reel element integralleri temel element üzerinde

integrallere dönüştürülmelidir. (5.118) kullanılarak (5.116) da ki sertlik ve yük integralleri aşağıdaki temel element üzerindeki integrallere dönüşür:

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{(e)} = & \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \frac{d\Phi_i^{(e)}}{dx} \alpha_x \frac{d\Phi_j^{(e)}}{dx} |j^{(e)}| d\xi d\eta \\
 & + \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \frac{d\Phi_i^{(e)}}{dy} \alpha_y \frac{d\Phi_j^{(e)}}{dy} |j^{(e)}| d\xi d\eta \\
 & + \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \Phi_i^{(e)} \beta \Phi_j^{(e)} |j^{(e)}| d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{5.122a}$$

ve

$$F_i^{(e)} = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} f \Phi_i^{(e)} |j^{(e)}| d\xi d\eta + \oint \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \Phi_i^{(e)} ds \tag{5.122b}$$

kareleme formülleri çeşitli quadrature noktalarda integraller hesaplamayı gerektirecek ve bu (5.122) deki bazı terimlerin ustalıkla kullanılmasını gerektirecektir.

İlk önce K_α integrallerini düşünelim. $\alpha_x(x, y)$ ve $\alpha_y(x, y)$ nin fiziksel özellikleri bir (ξ_1, η_1) noktasında değerlendirilebilir. Bunu ε_1 ve η_1 'yi (5.111) deki koordinat dönüşümlerinin içine koyarak yaparız. Bunu yapmakta ki amacımız , ilgili x ve y ' yi belirlemektir ki onlar sırayla $\alpha_x(x, y)$ ve $\alpha_y(x, y)$ değerlerini elde etmekte kullanılırlar. $|j^{(e)}|$ Jakobian, (5.115) den (5.117) ye kadar denklemlerin kullanılmasıyla hesaplanabilir.

$\frac{d\Phi_i^{(e)}}{dx}$ ve $\frac{d\Phi_i^{(e)}}{dy}$ türevleri diferensiyelde ki zincir kuralını uygulayarak elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi_i}{d\xi} &= \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{dx}{d\xi} + \frac{d\Phi_i}{dy} \frac{dy}{d\xi} \\
 \frac{d\Phi_i}{d\eta} &= \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{dx}{d\eta} + \frac{d\Phi_i}{dy} \frac{dy}{d\eta}
 \end{aligned} \quad i=1,2, \dots, 6 \tag{5.123}$$

dir. Aslında zincir kuralının genel formu ,

$$\frac{d\phi_i}{dx} = \frac{d\phi_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\phi_i}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \quad \left(\frac{d\phi_i}{dy} \text{ içinde benzer formdadır} \right)$$

dir. $\frac{d\phi_i}{dx}$ bilinmeyen nicelik değerleri cinsinden açıkça yazılır. Bu gösterim aslında (5.123) deki dolaylı gösterimden daha iyi görünüyor. Fakat bu yaklaşımda $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\eta}{dx}$, ... , v.b. türevleri (5.111) ' i kullanarak hesaplanmalıdır. Bu nedenle onların ters çevrilmiş formları $\frac{dx}{d\xi}$, $\frac{dx}{d\eta}$, ... , v.b. alınır. Bu ise (5.123) de gösterildi.

Denklem (5.123) matris formunda yazılır. Sağ taraf Jacobian matrisi içerir ,

$$\begin{Bmatrix} \frac{d\phi_i}{d\xi} \\ \frac{d\phi_i}{d\eta} \end{Bmatrix} = [j^{(e)}] \begin{Bmatrix} \frac{d\phi_i}{dx} \\ \frac{d\phi_i}{dy} \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (5.124)$$

olup,

$$\begin{Bmatrix} \frac{d\phi_i}{dx} \\ \frac{d\phi_i}{dy} \end{Bmatrix} = [j^{(e)}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{d\phi_i}{d\xi} \\ \frac{d\phi_i}{d\eta} \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (5.125)$$

elde edilir. Burada ,

$$[j^{(e)}]^{-1} = \frac{1}{|j^{(e)}|} \begin{bmatrix} \frac{dy}{d\eta} & -\frac{dy}{d\xi} \\ -\frac{dx}{d\eta} & \frac{dx}{d\xi} \end{bmatrix} \quad (5.127)$$

olur. Böylece ,

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i}{dx} &= (j_{11})^{-1} \frac{d\phi_i}{d\xi} + (j_{12})^{-1} \frac{d\phi_i}{d\eta} \\ \frac{d\phi_i}{dy} &= (j_{21})^{-1} \frac{d\phi_i}{d\xi} + (j_{22})^{-1} \frac{d\phi_i}{d\eta} \end{aligned} \quad i=1, 2, \dots, 6 \quad (5.127a)$$

Burada ,

$$\begin{aligned}
(j_{11})^{-1} &= \frac{1}{|j^{(e)}|} \frac{dy}{d\eta} & (j_{12})^{-1} &= \frac{1}{|j^{(e)}|} \frac{dy}{d\xi} \\
(j_{21})^{-1} &= \frac{1}{|j^{(e)}|} \frac{dx}{d\eta} & (j_{22})^{-1} &= \frac{1}{|j^{(e)}|} \frac{dx}{d\xi}
\end{aligned} \tag{5.127b}$$

dir. (5.127) denklemleri, (5.115) den (5.117) ye kadar kullanılan, ξ ve η nın bilinen fonksiyonlarında ki tüm terimler için istenen ifadelerdir.

$K\beta$ integrali de benzer şekilde ele alınır. Böylece $\beta(x, y)$, (5.111) kullanılarak, ξ ve η nın bir fonksiyonu olan biçim fonksiyonları ve Jacobian için sırasıyla (5.110) ve (5.115)-(5.117) den faydalanılır.

İç yükleme integrali Ff , $K\beta$ integralinde ki aynı mantıkla işleminden geçirilir.

Ek olarak her bir element için $f^{(e)}$ bir sabit tutularak, $f(x, y)$ bir fortran programında tanımlanabilir. Böylece $f^{(e)}$ integralin dışında bir çarpan olarak yazılabilir.

- a) Sınır üzerindeki integralleri incelemeden önce, ilk olarak uygun kareleme formülleri geliştirilerek 2-D alan integrallerinin nümerik integrasyonu tamamlanır.
- b) Kesinliğin seviyesini artırma formülleri için Gauss nokta ve ağırlıklarının gösteren çizelgeler kullanılır.

(5.122) deki sertlik ve iç yükleme integralleri şimdi quadrature formülleri yardımıyla yazılabilir :

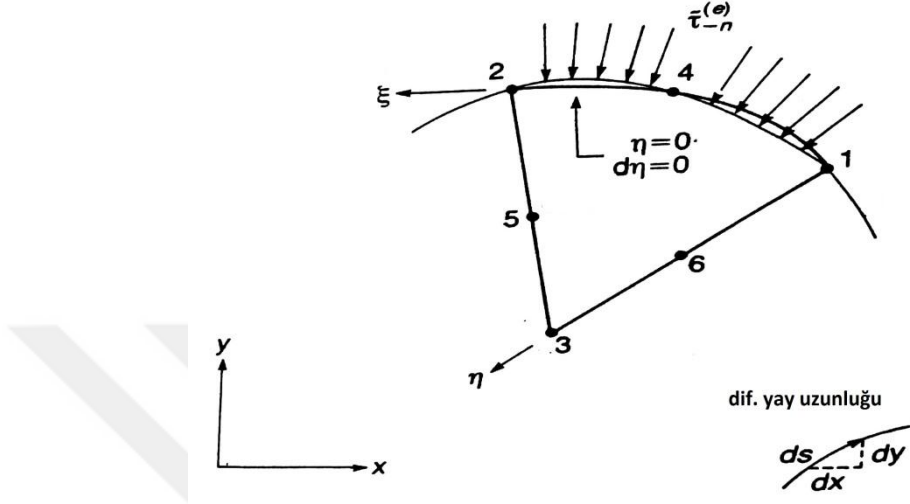
$$\begin{aligned}
K_{ij}^{(e)} &= \frac{1}{2} \sum_{L=1}^n W_{nL} \left[\left(\frac{d\phi_i^{(e)}}{dx} \alpha_x \frac{d\phi_j^{(e)}}{dx} + \frac{d\phi_i^{(e)}}{dy} \alpha_y \frac{d\phi_j^{(e)}}{dy} + \phi_i^{(e)} \beta \phi_j^{(e)} \right) |j^{(e)}| \right]_{(\xi_{nL}, \eta_{nL})} \\
Ff_i^{(e)} &= \frac{1}{2} \sum_{L=1}^n W_{nL} \left[f \phi_i^{(e)} |j^{(e)}| \right]_{(\xi_{nL}, \eta_{nL})}
\end{aligned} \tag{5.128}$$

Burada köşeli parantezler, önceden geliştirilen ifadeleri kullanarak hesaplanabilir. Şimdi sınır akı integralini inceleyelim,

$$F_{\tau_i}^{(e)} = \oint \hat{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_i^{(e)} ds \tag{5.129}$$

dir. Önceki kısımlarda, adım 5 de açıklandığı gibi denklem (5.84) - (5.85) - (5.86) ve (5.96) ya bakılırsa, (5.129) denklemin üç integralin toplamı olarak yazılabilir.

Bunlardan her biri üçgenin bir kenarı üzerindedir. Eğer bir kenar bölge için dahili kenarsa , bir komşu elementten benzer bir integralle eşleşir. Bu interelement sınır akı integrallerinin sonucudur ki onlar bölgenin sınırı üzerinde ki gibi aynı mantıkla hesaplanır. Böylece, sadece bölgenin sınırı üzerinde uzanan bir kenar için (5.129) hesaplanır.



Şekil 5.7: Bir kenarı bölgenin sınırında olan element için sınır integralinin oluşturulması.

Şekil 5.7, r bölge sınırı üzerindeki $\overline{142}$ kenarıyla böyle bir elementi gösterir. Genellikle bu kenar bükülebilir. Kenar orta nod merkezde olmayabilir. İzleyen oluşum $\overline{142}$ kenarı üzerindedir. Buna rağmen , biçim fonksiyonlarının interpolasyon özelliğinden ve onların üçgen simetrilüğünden dolayı, son ifade (aşağıda türetildi) , kenar $\overline{142}$ için olup ayrıca kenar $\overline{253}$ ve kenar $\overline{361}$ içinde uygulanabilir. Basitçe değişim sırasıyla 1,4,2 den 2,5,3 ve 3,6,1 şeklindedir. Kenar $\overline{142}$ üzerinde (5.129) daki sınır integralinin bahsedilen kısmı ,

$$F_{\tau_i}^{(e)}(r) = \int_{\overline{142}} \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_i(\xi, 0) ds, \quad i=1, 4, 2 \quad (5.130)$$

dır. Burada kenar $\overline{142}$ üzerinde $\eta=0$ gerçeğini kullandık, Böylece (5.130) daki biçim fonksiyonları,

$$\phi_1(\xi, 0) = (1 - \xi)(1 - 2\xi)$$

$$\phi_2(\xi, 0) = \xi(2\xi - 1)$$

$$\phi_3(\xi, 0) = 0$$

$$\phi_4(\xi, 0) = 4\xi(1 - \xi) \quad (5.131)$$

$$\phi_5(\xi, 0) = 0$$

$$\phi_6(\xi, 0) = 0$$

olur. Böylece (5.130) daki i indeksi 1, 4 ve 2 değerleri için sınırlanır. Çünkü,

$$F_{\tau_3}^{(e)}(\mathbf{r}) = F_{\tau_5}^{(e)}(\mathbf{r}) = F_{\tau_6}^{(e)}(\mathbf{r}) = 0$$

ve biliyoruz ki sıfır değerli doğal sınır koşulu ihmal edilebilir.

Gelecek adım, ξ, η koordinat sisteminde diferensiyel yay uzunluğu ds ifade edilir. Şekil 5.7 de gösterilen temel Pisagor'a ait dx ve dy ile ilgili bağıntıdan, (5.111) deki koordinat dönüşümünden ve (5.116) daki Jacobian bileşenlerinin tanımından, ξ, η , $d\xi$ ve $d\eta$ açısından ds açısından ds için genel ifade şöyledir :

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi} d\xi + \frac{dx}{d\eta} d\eta\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} d\xi + \frac{dy}{d\eta} d\eta\right)^2} \\ &= \sqrt{(j_{11}^{(e)}(\xi, \eta)d\xi + j_{21}^{(e)}(\xi, \eta)d\eta)^2 + (j_{12}^{(e)}(\xi, \eta)d\xi + j_{22}^{(e)}(\xi, \eta)d\eta)^2} \end{aligned} \quad (5.132)$$

Kenar $\overline{142}$ üzerinde $\eta = 0$ ve $d\eta = 0$ dır. Böylece (5.132) denklemi ,

$$ds = j_r^{(e)}(\xi, 0)d\xi \quad (5.133a)$$

olarak sadeleşir. Burada ,

$$j_r^{(e)}(\xi, 0)d\xi = \sqrt{(j_{11}^{(e)}(\xi, 0))^2 + (j_{12}^{(e)}(\xi, 0))^2} \quad (5.133b)$$

dır. $j_r^{(e)}$, bir sınır Jacobianı olarak adlandırılır. Çünkü bu, iki koordinat sistemindeki diferensiyel yay uzunluklarının oranıdır. (5.130) daki sınır integrali ,

$$F_{\tau_i}^{(e)}(\mathbf{r}) \simeq \int_0^1 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_i(\xi, 0) j_r^{(e)}(\xi, 0) d\xi, \quad i=1,4,2 \quad (5.134)$$

olur. Sınır Jacobian (5.116) ve (5.131) kullanılarak elde edilir :

$$\begin{aligned}
j_{11}^{(e)}(\xi, 0) &= \frac{dx}{d\xi}(\xi, 0) = \sum_{k=1,4,2} x_k^{(e)} \frac{d\phi_k(\xi, 0)}{d\xi} \\
&= (4\varepsilon - 3)x_1^{(e)} - (8\varepsilon - 4)x_4^{(e)} + (4\varepsilon - 1)x_2^{(e)} \\
j_{12}^{(e)}(\xi, 0) &= \frac{dy}{d\xi}(\xi, 0) = \sum_{k=1,4,2} y_k^{(e)} \frac{d\phi_k(\xi, 0)}{d\xi} \\
&= (4\xi - 3)y_1^{(e)} - (8\xi - 4)y_4^{(e)} + (4\xi - 1)y_2^{(e)}
\end{aligned} \tag{5.135}$$

(5.134) deki integrantta bulunan tüm terimler artık ξ un bilinen fonksiyonlarıdır. Böylece $\tau_{-n}^{(e)}$, x ve y 'nin belirlenmiş fonksiyonu iken artık tam olarak ξ 'un bir fonksiyonudur ((5.111) ise (5.111) den). $\phi_i(\xi, 0)$ ise (5.131)'den tanımlanır. $j_r^{(e)}$ ise (5.133b) ve (5.135) denklemleri tarafından tanımlanır.

Eğer $\tau_{-n}^{(e)}$ sabit ise (ya da algoritma için sabit kabul edilirse), (5.134) denklemi kapalı formda integrallenebilir. En basit çözüm , nümerik integrasyon kullanmaktadır.

1-D Gauss-Legendre kuralını kullanmak için, integrasyon aralığı (5.134) deki $0 \leq \xi \leq 1$, iki birim olarak $-1 \leq \xi' \leq 1$ şeklinde değiştirilmelidir. Bu aşağıdaki dönüşüm ile yapılır :

$$\xi = \frac{1}{2}(\xi' + 1)$$

Böylece (5.131) ve (5.135), biçim fonksiyonları ve Jacobian bileşenleri değişir:

$$\begin{aligned}
\phi_1(\xi', 0) &= -\frac{1}{2} \xi' (1 - \xi') \\
\phi_2(\xi', 0) &= \frac{1}{2} \xi' (1 + \xi') \\
\phi_4(\xi', 0) &= (1 + \xi')(1 - \xi') \\
j_{11}^{(e)}(\xi', 0) &= (2\xi' - 1)x_1^{(e)} - 4\xi'x_4^{(e)} + (2\xi' + 1)x_2^{(e)} \\
j_{12}^{(e)}(\xi', 0) &= (2\xi' - 1)y_1^{(e)} - 4\xi'y_4^{(e)} + (2\xi' + 1)y_2^{(e)}
\end{aligned} \tag{5.137}$$

olur. Burada ,

$$j_r^{(e)}(\xi', 0) = \sqrt{(j_{11}^{(e)}(\xi', 0))^2 + (j_{12}^{(e)}(\xi', 0))^2}$$

dır. (5.134) ,

$$F_{\tau_i}^{(e)}(r) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_i(\xi', 0) j_r^{(e)}(\xi', 0) d\xi', \quad i=1,4,2 \quad (5.138)$$

olur. 1-D Gauss – Legendre kareleme formülü kullanılarak (5.138) denklemi ,

$$F_{\tau_i}^{(e)}(r) = \frac{1}{2} \sum_{L=1}^n W_{nL} \left[\tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \phi_i(\xi', 0) j_r^{(e)}(\xi', 0) \right]_{\xi'_{nL}}, \quad i=1,4,2 \quad (5.139)$$

Bilgisayar programında data girişini basitleştirmek için, her bir element boyunca $\tau_{-n}^{(e)}$ bir sabit olsun. Bu, tüm sınır boyunca $\tau_{-n}^{(e)}$ in bir parçalı-sabit yaklaşımını sağlayacaktır. Bu ise muhtemelen bir modelleme hatası meydana getirecektir ki bir ağ düzenlemesiyle minimuma indirgenir.

$F_{\tau_i}^{(e)}(r)$ için aynı dereceden kesinlik, element denklemlerindeki diğer tüm integraller için de kullanılabilir. Böylece indirgenen integraller $O(h^4)$ kesinliği gerektirir ki bu 1-D iki nokta kuralıdır. Yüksek mertebeden integraller en az $O(h^3)$ kesinliği gerektirir ki bu 1-D üç nokta kuralı ile gerçekleşir.

Bu oluşumun başında ileri sürüldü ki, son integrasyon ifadeleri (5.137) ve (5.139), elementin diğer iki kenarı için de uygulanabilir. Basit bir sırayla 1,4,2 den 2,5,3 ve 3,6,1 e indis değişimi ile yapılır. Böylece , eğer kenar $\overline{3,6,1}$ sınır üzerinde olsaydı , o zaman $\xi = 0$ olurdu ve (5.110) denklemi;

$$\phi_1(0, \eta) = (1 - \eta)(1 - 2\eta)$$

$$\phi_2(0, \eta) = 0$$

$$\phi_3(0, \eta) = \eta(2\eta - 1)$$

$$\phi_4(0, \eta) = 0$$

$$\phi_5(0, \eta) = 0$$

$$\phi_6(0, \eta) = 4\eta(1 - \eta)$$

olurdu. Ek olarak, $d\xi = 0$ dır. Böylece sınır Jacobian (5.132) ve (5.133) hatırlanırsa,

$$(j_r^{(e)}(0, \eta)) = \sqrt{((j_{21}^{(e)}(0, \eta))^2 + (j_{22}^{(e)}(0, \eta))^2}$$

olur. Saat yönünün tersi yönündeki istegrasyon yolu, η nın, 1 den 0' a integrallendiği (0 dan 1 ' e değil) anlamına gelir. Bu nedenle, $-1 \leq \xi' \leq 1$ çift birim aralıkta yerleştirmek için (5.136) dan farklı bir dönüşüme ihtiyaç duyulur. Bu kolayca bulunabilir. (5.137) ve (5.139) benzer şekilde elde edilir. Tek fark $\overline{1,4,2}$ indisleri yerine $\overline{3,6,1}$ gelir. Benzer sonuçlar kenar $\overline{2,5,3}$ e de aittir.

Sınır üzerindeki element kenarı düz ve kenar-orta nodu onun tam merkezinde olması durumu mevcuttur.

$$x_4^{(e)} = \frac{1}{2} (x_1^{(e)} + x_2^{(e)})$$

$$y_4^{(e)} = \frac{1}{2} (y_1^{(e)} + y_2^{(e)})$$

(5.140)' ı (5.137) de yerine yazılırsa;

$$j_{11}^{(e)}(\xi, 0) = x_2^{(e)} - x_1^{(e)}$$

$$j_{12}^{(e)}(\xi, 0) = y_2^{(e)} - y_1^{(e)}$$

olur ve böylece ,

$$j_r^{(e)} = L \quad (\text{kenarın uzunluğu})$$

dir.

$$F_{\tau_i}^{(e)}(\Gamma) = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \Phi_i(\xi', 0) d\xi' \quad i = 1, 4, 2 \quad (5.141)$$

olur. Eğer $\tau_{-n}^{(e)}$ sabit ise (ya da algoritma için sabit kabul edilirse), (5.141) integrali tam olarak hesaplanabilir.

$$F_{\tau_1}^{(e)}(\Gamma) = \frac{1}{6} L \tilde{\tau}_{-n}^{(e)}$$

$$F_{\tau_4}^{(e)}(\Gamma) = \frac{4}{6} L \tilde{\tau}_{-n}^{(e)} \quad (5.142)$$

$$F_{\tau_2}^{(e)}(\Gamma) = \frac{1}{6} L \tilde{\tau}_{-n}^{(e)}$$

olur.

(5.142) denklemleri SE literatüründe yaygın olarak görülür.

Yukarıdaki oluşum sadece şu üç kabul altında geçerlidir:

- (1) Elementin sınır kenarı düzgün
- (2) Kenar orta nod merkezde
- (3) Elementin belirli kenarı boyunca belirlenmiş sınır akı sabit.

Eğer bunlardan birini sağlanmazsa , quadrature formülü olarak bunun yerine (5.139) kullanılır.

Adım 6 : Akı için ifadelerin hazırlanması

Akıyı hesaplamak için noktaların iki setine sahibiz. İlki, optimal (uygun) akı örnekleme noktaları (Gauss noktaları) ; ikincisi düzleştirme ve ortalama almakta kullanılan nodlardır.

Biçim fonksiyonları açısından akının bileşenleri için genel ifadeler doğrudan (5.17) deki temel akı formülü ve (5.48) deki element deneme çözümünden $n = 6$ alarak ,

$$\tilde{\tau}_x^{(e)}(x, y) = -\alpha_x(x, y) \sum_{j=1}^6 a_j \frac{d\phi_j^{(e)}(x, y)}{dx} \quad (5.143)$$

$$\tilde{\tau}_y^{(e)}(x, y) = -\alpha_y(x, y) \sum_{j=1}^6 a_j \frac{d\phi_j^{(e)}(x, y)}{dy}$$

dir. (5.143) ifadeleri herhangi (ξ, η) noktalarında (5.111) ve (5.127) kullanılarak hesaplanabilir. Ek olarak (5.110) ve (5.115) – (5.117) de kullanılır.

Uygun akı örnekleme noktasına sonlu kareler tekniği ile karar verilebilir. Böylece lineer olmayan denklemlerin bir sistemi elde edilir ki ξ ve η için sadece kompleks değerli köklere sahiptir. Bu kökler 0.178 ve 0.645 reel değerlerine sahiptir.

4 – nokta kuralı için Gauss noktaları bu element için akı - örnekleme noktaları için genellikle kullanılır. Bunlar, sonraki düzleştirme analizi için kullanılması amacıyla vektörel olarak yazılırsa ;

$$\begin{aligned} \{\tilde{\tau}_x^{(e)}\}_{opt}^{(e)} &= \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_x^{(e)}(\xi_l, \eta_l) \\ \tilde{\tau}_x^{(e)}(\xi_u, \eta_u) \\ \tilde{\tau}_x^{(e)}(\xi_{uu}, \eta_{uu}) \\ \tilde{\tau}_x^{(e)}(\xi_{lv}, \eta_{lv}) \end{pmatrix} \\ \{\tilde{\tau}_y^{(e)}\}_{opt}^{(e)} &= \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_y^{(e)}(\xi_l, \eta_l) \\ \tilde{\tau}_y^{(e)}(\xi_u, \eta_u) \\ \tilde{\tau}_y^{(e)}(\xi_{uu}, \eta_{uu}) \\ \tilde{\tau}_y^{(e)}(\xi_{lv}, \eta_{lv}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.144)$$

Burada örneğin , $\tilde{\tau}_x^{(e)}(\xi_l, \eta_l)$, $\tilde{\tau}_x^{(e)} = [x(\xi_l, \eta_l), y(\xi_l, \eta_l)]$ için kısaltmadır.

İleri de akının her bileşeni için bir düzleştirme fonksiyonu oluşturulur (yani $\tilde{\tau}_x^{(e)}(x, y)$ ve $\tilde{\tau}_y^{(e)}(x, y)$ için) . Bu fonksiyonlar ya sonlu kareler ya da interpolasyon ile belirlenir.

6. İKİ BOYUTLU NAVIER STOKES DENKLEMİNİN SONLU ELEMANLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ

6.1 Giriş

Bu bölümde akışkanlar mekaniğinde sıkça kullanılan ve akış yapılarının belirlenmesinde etkin rol oynayan, birinci bölüm de bahsedilen Navier-Stokes denkleminin sonlu elemanlar metodu ile sayısal çözümleri ele alınacaktır.

Problem iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, sonlu elemanlar metodunun teorik gelişimi bu denklem üzerinde uygulanacaktır. İkinci kısımda ise, elde edilen denklemlere uygun bilgisayar kodu yazılacak ve hesaplamalar sonucu istenilen sınır koşullarına sahip kaviteleredeki akış problemi için datalar elde edilebilecektir. Navier Stokes denkleminin boyutsuz hali ele alınmış ve sonlu elemanlar metodu prosedürü uygulanmıştır.

6.2 Boyutsuz Navier-Stokes Denkleminin Sonlu Elemanlar Metodu ile Çözümü

$$\frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (6.2)$$

ve süreklilik denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.3)$$

şeklindedir.

Kavitedeki akış bu üç denklem tarafından yönetilir. u, v ve p bulunması gereken bilinmeyenlerdir. Bunlar için deneme çözümler sırasıyla,

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{j=1}^6 u_j \phi_j(x, y) \\
v &= \sum_{j=1}^6 v_j \phi_j(x, y) \\
p &= \sum_{j=1}^3 p_j \psi_j(x, y)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

şeklindedir. Elementimiz C^0 –quadratic üçgen element olup 6 tane düğüm noktası bulundurur. u ve v nin indislerinin 6 olması buradan kaynaklanır. p ise bu elementin yalnızca köşelerindeki nodları üzerinde hesaplanır. Buradaki indisin 3 olması bu nedenledir.

(6.1) denklemi için Galerkin rezidü denklemini yazalım.

$$\iint_e \left\{ \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \phi_i - \left[u_n \frac{\partial u}{\partial x} + v_n \frac{\partial u}{\partial y} \right] \phi_i - \frac{\partial p}{\partial x} \phi_i \right\} dx dy = 0 \tag{6.5}$$

olur. u_n ve v_n Stokes denkleminden çözülecek u ve v bilinen sabitleridir. İterasyon yaparak en uygun u, v çifti bulunacaktır.

(6.5) denkleminde kısmi integrasyon uygularsak,

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \phi_i = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \phi_i \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x}$
- $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \phi_i = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \phi_i \right) - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y}$
- $\frac{\partial p}{\partial x} \phi_i = \frac{\partial}{\partial x} (p \phi_i) - p \frac{\partial \phi_i}{\partial x}$

olduğundan bunlar (6.5) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\iint_e \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x} \phi_i}^F \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\overbrace{\frac{\partial v}{\partial y} \phi_i}^G \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right] dx dy \\
&- \iint_e \left[\left(u_n \frac{\partial u}{\partial x} + v_n \frac{\partial u}{\partial y} \right) \phi_i + \frac{\partial}{\partial x} \left(\overbrace{p \phi_i}^F \right) - p \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right] dx dy = 0
\end{aligned} \tag{6.6}$$

olur. 2-D divergence teoremi,

$$\iint_e \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dxdy = \oint (F_{nx} + G_{ny}) ds$$

olduğundan (6.6) da kullanılırsa ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} \oint_e \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \Phi_i \right) n_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Phi_i \right) n_y \right] ds - \iint_e \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right] dxdy \\ & - \iint_e \left(u_n \frac{\partial u}{\partial x} + v_n \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Phi_i dxdy + \iint_e p \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} dA - \oint_e (p \Phi_i) n_x ds = 0 \end{aligned}$$

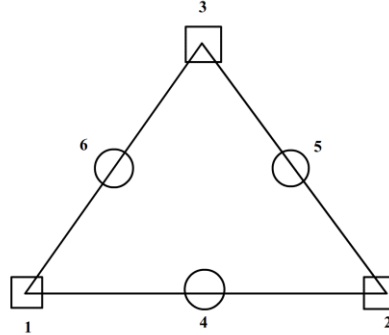
elde edilir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y = \frac{\partial u}{\partial n}$$

olduğuna göre yukarıdaki denklem düzenlenirse, ayrıca (6.4) eşitlikleri kullanılırsa (i=1,2,...,6 için);

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^6 \iint_e \left\{ \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right] + \left[u_n \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \Phi_i + v_n \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \Phi_i \right] \right\} u_j dxdy \\ & \sum_{j=1}^3 \iint_e \left(\psi_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right) p_j dxdy = \sum \oint \left(\frac{1}{Re} \frac{du}{dn} - p \right) n_x \Phi_i ds \end{aligned} \quad (6.7)$$

elde edilir. Bu denklem bir element içindir. Şekildeki gibi ;



□ Hız ve basınç düğüm noktaları

○ Sadece hız düğüm noktaları

Şekil 6.1: Altı düğüm noktalı üçgen element.

bir elementin üzerindeki nodların koordinatları olan (x,y) ler için bu integral denklemleri hesaplanır.

Bir elementin herhangi bir kenarı başka bir elemente de aitse dahili kenar denir. Böyle bir kenarda normal vektör diğeri (komşu) ile zıt işaretlidir. Bu durumda (6.7) denkleminin sağ tarafı birleştirme yapılırken yok olur. Bu durumda o kenar üzerinde eğrisel integrali hesaplamaya gerek yoktur. Bir başka önemli durum daha söz konusudur. Bir kenar dahili kenar değilse (yani harici kenar ise) o kenar üzerinde çalışılan bölgenin sınırındadır. Yani sadece bir elemente aittir. Bu kenar üzerinde eğrisel integral hesap edilecektir (ancak $\frac{du}{dn}$ akısı biliniyorsa). Akılar bilinmiyorsa çözüm aşamasında pratik bir düşünce ile bu integrallerden kurtulunabilir. Zaten bu eğrisel integraller sınırlar üzerinde alınacak ve o sınırları üzerinde u_i değerleri bellidir. Örneğin yapılan ağda, u_2 biliniyor olsun. Aşağıdaki özellik kullanılırsa,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$u_2 = d$ olsun.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

yazılır. Yani bilinen u_2 değerinin karşılığına, u_2 nin değeri yazıldı. Bizim problemde sağ tarafta eğrisel integral (ya da integralleri) mevcut olup bu integraller sadece harici kenarlar üzerinde ele alınacağı için herhangi bir hesaplama yapmaya dahi gerek kalmayacaktır. Çünkü zaten harici kenarlarda u_i nodlarının değerleri sınır koşullarından bilindiği için yukarıdaki matris de f_2 nin yok edilip yerine d yazıldığı gibi bu line integralleri hesaplanmaz, yerlerine u_i lerin bilinen sayısal değerleri yazılır. Yani line integrallerini hesaplamak ile ilgilenmeyeceğiz.

Benzer şekilde (6.2) denklemi için işlemler yapılırsa ,

$$\sum_{j=1}^6 \iint_e \left\{ \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right] + \left[u_n \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \Phi_i + v_n \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \Phi_i \right] \right\} v_j dx dy \quad (6.8)$$

$$\sum_{j=1}^3 \iint_e \left(\psi_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right) p_j dx dy = \sum \oint \left(\frac{1}{Re} \frac{dv}{dn} - p \right) n_y \Phi_i ds$$

elde edilir.

(6.3) deki süreklilik denkleminde de ($i = 1, 2, 3$ için),

$$\sum_{j=1}^6 \iint \left[\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \psi_i \right) u_j + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \psi_i \right) v_j \right] dx dy = 0 \quad (6.9)$$

olarak bulunur (Süreklilik denklemi için taban fonksiyonu p nin biçim fonksiyonu olarak alınır). (6.7) – (6.9) denklemleri yardımıyla bir katsayılar matrisi oluşturulur.

Bu matris, (bir element için),

$$[K^{(e)}]_{15 \times 15} = \begin{bmatrix} [K1]_{6 \times 6} & [0]_{6 \times 6} & [K2]_{6 \times 3} \\ [0]_{6 \times 6} & [K1]_{6 \times 6} & [K1]_{6 \times 3} \\ [K1]_{3 \times 6} & [K1]_{3 \times 6} & [0]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$\vec{\Phi}_{15 \times 1} = \{ u_1, u_2, \dots, u_6, v_1, v_2, \dots, v_6, p_1, p_2, p_3 \}^T$$

$$\vec{V} = \{ f_1, f_2, \dots, f_6, f_7, f_8, \dots, f_{12}, 0, 0, 0 \}^T$$

olmak üzere,

$$[K] \Phi = V$$

şeklindedir [28].

Burada ,

$$K1_{ij} = \iint_e \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right] + \left[u_n \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \Phi_i + v_n \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \Phi_i \right] dx dy$$

$$K2_{ij} = \iint_e \left(\psi_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right) dx dy$$

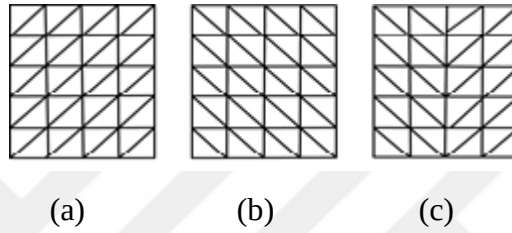
$$K3_{ij} = - \iint_e \left(\psi_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right) dx dy$$

$$f_i = \oint \left(\frac{1}{Re} \frac{du}{dn} - p \right) n_x \Phi_i ds, \quad i = 1, 6$$

$$f_i = \oint \left(\frac{1}{Re} \frac{dv}{dn} - p \right) n_y \phi_i ds \quad , \quad i = 7, 12$$

(ancak f_i ler bizim problemde sıfırdır) olur. (6.10) katsayılar matrisi Gauss eliminasyon ya da frontal çözüm gibi tekniklerle çözülür. Ayrıca mesh yaparken aşağıdaki durumlar da göz önüne alınmalıdır.

Sonlu elemanlar metodunda oluşturulan ağ yapısı, analiz sonuçlarını doğrudan etkilemektedir. Geometriyi olabildiğince temsil edebilecek bir ağ yapısının seçilmesi sonuçları iyi anlamda etkiler. Şekil 6.2 de farklı görünümde olan fakat düğüm noktası ve element sayısı eşit olan bazı ağ yapıları gösterildi.



Şekil 6.2: Farklı görünümdeki üç ağ yapısı.

Bu üç ağ yapısından en iyisi (a), sonra (c) , en zayıfı (b) olduğu yapılan çalışmalardan çıkan bir sonuçtur.

6.3 C⁰- Kuadratik İsoparametrik Üçgen Elemente Geçiş

Element değişik yapılarda üçgenlerden oluşabilirler. Bu hesaplamalarda zorluklara sebep olur. Tüm elementleri bir dik üçgene dönüştüreceğiz. $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_6$ bulunmalıdır.

$$\phi_1(\varepsilon, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \varepsilon^2 + \alpha_5 \varepsilon \eta + \alpha_6 \eta^2 \quad (6.11)$$

şeklindedir. Deneme fonksiyonunun ikinci dereceden seçilmesinin iki temel mantığı vardır. Bunlardan ilki, çözümü yapılacak diferensiyel denklem ikinci mertebeden türevleri içermekte olup, daha düşük dereceden fonksiyon seçimi yapılamaz çünkü türevleri sıfıra eşit olur. Diğer düşünce ise altı nod bulunduran element üzerinde çalışacağımız için deneme fonksiyonunda da altı tane bilinmeyen bulunmalıdır ki bilinmeyen ve denklem sayıları eşit olsun. İnterpolasyon özelliği gereğince,

$$\phi_1(\varepsilon_1, \eta_1) = 1 \quad (6.12)$$

$$\Phi_1(\varepsilon_j, \eta_j) = 0 \quad (j=2,3, \dots, 6)$$

olmalıdır.

Açıkça görülüyor ki ,

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1, \eta_1) &= (0,0) & (\varepsilon_4, \eta_4) &= (1/2, 0) \\ (\varepsilon_2, \eta_2) &= (1,0) & (\varepsilon_5, \eta_5) &= (1/2, 1/2) \\ (\varepsilon_3, \eta_3) &= (0,1) & (\varepsilon_6, \eta_6) &= (0, 1/2) \end{aligned} \quad (6.13)$$

(6.11), (6.12) ve (6.13) den, $\Phi_1(\varepsilon, \eta)$ için

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_6 &= 0 \\ \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_4}{2} &= 0 \\ \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{2} + \frac{\alpha_4}{4} + \frac{\alpha_5}{4} + \frac{\alpha_6}{4} &= 0 \\ \alpha_1 + \frac{\alpha_3}{2} + \frac{\alpha_4}{6} &= 0 \end{aligned}$$

olup $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ çözülür. (6.11) de yerine yazılırsa ,

$$\Phi_1(\varepsilon, \eta) = [1 - (\varepsilon + \eta)] [1 - 2(\varepsilon + \eta)]$$

bulunur. Diğerleri de benzer şekilde ,

$$\begin{aligned} \Phi_2(\varepsilon, \eta) &= \varepsilon (2\varepsilon - 1) \\ \Phi_3(\varepsilon, \eta) &= \eta (2\eta - 1) \\ \Phi_4(\varepsilon, \eta) &= 4\varepsilon [1 - (\varepsilon + \eta)] \\ \Phi_5(\varepsilon, \eta) &= 4\varepsilon\eta \\ \Phi_6(\varepsilon, \eta) &= 4\eta [1 - \varepsilon - \eta] \end{aligned} \quad (6.14)$$

olur.

Her bir reel elementin , temel element üzerine eşleştirilmesi bir koordinat dönüşümü ile yapılır. Bir isoparametrik dönüşüm ,

$$x = \sum_{k=1}^6 x_k^{(e)} \Phi_k(\varepsilon, \eta)$$

$$y = \sum_{k=1}^6 y_k^{(e)} \Phi_k(\varepsilon, \eta) \quad (6.15)$$

$$1 = \sum_{k=1}^6 \Phi_k(\varepsilon, \eta)$$

ile oluşturulur. Burada $x_k^{(e)}, y_k^{(e)}, k = 1, \dots, 6$, e. elementde ki 6 nodun koordinatlarıdır. Bizim eşleşmemizde açıkça ,

$$\text{Nod1} : \varepsilon = 0, \eta = 0 \rightarrow x_1^{(e)}, y_1^{(e)}$$

$$\text{Nod2} : \varepsilon = 1, \eta = 0 \rightarrow x_2^{(e)}, y_2^{(e)}$$

$$\dots \dots \dots \quad (6.16)$$

$$\text{Nod6} : \varepsilon = 0, \eta = 1/2 \rightarrow x_6^{(e)}, y_6^{(e)}$$

olduğu açıktır. Bu eşleşmenin olabilmesi için ,

$$|j^{(e)}(\varepsilon, \eta)| > 0 \quad (\text{her element için})$$

olmalıdır. Bu Jacobian matrisinin determinantıdır.

$$j^{(e)}(\varepsilon, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\varepsilon} & \frac{dy}{d\varepsilon} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11}^{(e)}(\varepsilon, \eta) & j_{12}^{(e)}(\varepsilon, \eta) \\ j_{21}^{(e)}(\varepsilon, \eta) & j_{22}^{(e)}(\varepsilon, \eta) \end{bmatrix}$$

Böylece ,

$$|j^{(e)}(\varepsilon, \eta)| = \frac{dx}{d\varepsilon} \frac{dy}{d\eta} - \frac{dx}{d\eta} \frac{dy}{d\varepsilon} \quad (6.17)$$

dir.

Bu türevler (6.15) den elde edilir.

$$\begin{aligned} j_{11}^{(e)}(\varepsilon, \eta) &= \frac{dx}{d\varepsilon} = \sum_{j=1}^6 x_k^{(e)} \frac{d\Phi_k(\varepsilon, \eta)}{d\varepsilon} \\ j_{21}^{(e)}(\varepsilon, \eta) &= \frac{dx}{d\eta} = \sum_{j=1}^6 x_k^{(e)} \frac{d\Phi_k(\varepsilon, \eta)}{d\eta} \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$j_{12}^{(e)}(\varepsilon, \eta) = \frac{dy}{d\varepsilon} = \sum_{j=1}^6 y_k^{(e)} \frac{d\phi_k(\varepsilon, \eta)}{d\varepsilon}$$

$$j_{22}^{(e)}(\varepsilon, \eta) = \frac{dy}{d\eta} = \sum_{j=1}^6 y_k^{(e)} \frac{d\phi_k(\varepsilon, \eta)}{d\eta}$$

olur. (6.14) den de ,

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1(\varepsilon, \eta)}{d\varepsilon} &= -3 + 4\varepsilon + 4\eta & \frac{d\phi_1(\varepsilon, \eta)}{d\eta} &= -3 + 4\varepsilon + 4\eta \\ \frac{d\phi_2(\varepsilon, \eta)}{d\varepsilon} &= -1 + 4\varepsilon & \frac{d\phi_2(\varepsilon, \eta)}{d\eta} &= 0 \\ \frac{d\phi_3(\varepsilon, \eta)}{d\varepsilon} &= 0 & \frac{d\phi_3(\varepsilon, \eta)}{d\eta} &= -1 + 4\eta \\ \frac{d\phi_4(\varepsilon, \eta)}{d\varepsilon} &= 4(1 - 2\varepsilon - \eta) & \frac{d\phi_4(\varepsilon, \eta)}{d\eta} &= -4\varepsilon \\ \frac{d\phi_5(\varepsilon, \eta)}{d\varepsilon} &= 4\eta & \frac{d\phi_5(\varepsilon, \eta)}{d\eta} &= 4\varepsilon \\ \frac{d\phi_6(\varepsilon, \eta)}{d\varepsilon} &= -4\eta & \frac{d\phi_6(\varepsilon, \eta)}{d\eta} &= 4(1 - \varepsilon - 2\eta) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Jacobian, reel ve temel elementler için sonsuz küçüklükteki alanların oranıdır.

$$d_x d_y = |j^{(e)}(\varepsilon, \eta)| d_\varepsilon d_\eta$$

dır.

$x_4^{(e)}$, $x_5^{(e)}$ ve $x_6^{(e)}$ tam orta nokta olduğunda,

$$x_4^{(e)} = \frac{1}{2} (x_1^{(e)} + x_2^{(e)})$$

$$x_5^{(e)} = \frac{1}{2} (x_2^{(e)} + x_3^{(e)})$$

$$x_6^{(e)} = \frac{1}{2} (x_3^{(e)} + x_1^{(e)})$$

olup (6.14) ve (6.15) den ,

$$x = x_1^{(e)}(x_2^{(e)} - x_1^{(e)}) + (\varepsilon + (x_3^{(e)} - x_1^{(e)}) \eta$$

$$y = y_1^{(e)} + (y_2^{(e)} - y_1^{(e)}) \varepsilon + (y_3^{(e)} - y_1^{(e)}) \eta$$

bir lineer eşleşmedir. (6.17) den,

$$|j^{(e)}(\varepsilon, \eta)| = (x_2^{(e)} - x_1^{(e)})(y_3^{(e)} - y_1^{(e)}) - (x_3^{(e)} - x_1^{(e)})(y_2^{(e)} - y_1^{(e)}) = 2\Delta$$

olur. Δ üçgenin alanıdır. Jakobian her bir element için sabittir.

Şimdi ψ_j lerin bulunmasına bakalım. Basınç için lineer deneme çözüm yeterli sonuç verir. Sadece elementin köşe noktalarında basınç hesaplanır. Bu nodlar için ψ_1, ψ_2, ψ_3 biçim fonksiyonlarını bulalım.

$$P = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

(x_k, y_k) lar üçgenin köşe noktalarının koordinatlarıdır. Bu noktalarda p nin değeri p_k dır. Buradan matrisin tersi hesaplanırsa ,

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_1^0 & 2A_2^0 & 2A_3^0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

$$a_i = x_k - x_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad 2A_i^0 = x_j y_k - x_k y_j$$

$$2A = b_1 a_2 - b_2 a_1, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 2, 3, 1, \quad k = 3, 1, 2$$

burada A elementin alanıdır. Buradan;

$$p = \frac{1}{2\Delta} (\psi_1 p_1 + \psi_2 p_2 + \psi_3 p_3)$$

yani,

$$\psi_i^{(e)}(x, y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta}$$

bulunur.

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j$$

$$b_i = y_j - y_m$$

$$c_i = x_m - x_j$$

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2 \text{ (element alanı)}$$

olur. i, j ve m alt indisleri ϕ_1 için 1, 2, 3 değerindedir. ϕ_2 ve ϕ_3 için bir çember permütasyonundadır.

$$x_1 = 0 \quad y_1 = 0 \quad 2\Delta = 1$$

$$x_2 = 1 \quad y_2 = 0$$

$$x_3 = 0 \quad y_3 = 1$$

Şimdi,

$$\psi_1 = \frac{a_1 + b_1x + c_1y}{2\Delta}$$

ifadesini hesaplarsak;

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 = 1 \\ b_1 &= y_2 - y_3 = -1 \\ c_1 &= x_3 - x_2 = -1 \end{aligned} \right\}$$

olacağından,

$$\psi_1 = 1 - \varepsilon - \eta$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde,

$$\psi_2 = \frac{a_2 + b_2x + c_2y}{2\Delta}$$

için,

$$\alpha_2 = x_3y_1 - x_1y_3 = 0$$

$$b_2 = y_3 - y_1 = 1$$

$$c_2 = x_1 - x_3 = 0$$

olup

$$\Psi_2 = \varepsilon$$

olarak bulunur.

$$\Psi_3 = \frac{a_3 + b_3x + c_3y}{2\Delta}$$

için ise

$$\alpha_3 = x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

$$b_3 = y_1 - y_2 = 0$$

$$c_3 = x_2 - x_1 = 1$$

olup

$$\Psi_3 = \eta$$

elde edilir.

Bunları $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_6$ gibi de bulabilirdik.

6.3.1 Matrislerdeki iki katlı integrallerin hesaplanması

İntegrallerdeki $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$ kısmi türevleri hesaplanmalıdır.

$$dxdy = |j^{(e)}(\varepsilon, \eta)| d_\varepsilon d_\eta$$

olduğunu bulmuştuk.

$$K_{ij}^{(e)} = \iint \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right] + \left[u_n \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i + v_n \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \phi_i \right] |j^{(e)}(\varepsilon, \eta)| d_\varepsilon d_\eta |d_\varepsilon d_\eta$$

olup,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \tag{6.21}$$

olup,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{ve} \quad [J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

ise,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

elde edilir. Burada,

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix}$$

dir.

Böylece $i = 1, 2, \dots, 6$ olmak üzere;

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = (J_{11})^{-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varepsilon} + (J_{12})^{-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = (J_{21})^{-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varepsilon} + (J_{22})^{-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta}$$

olup yine burada,

$$(J_{11})^{-1} = \frac{1}{\det[j]} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad , \quad (J_{12})^{-1} = -\frac{1}{\det[j]} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}$$

$$(J_{21})^{-1} = -\frac{1}{\det[j]} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad , \quad (J_{22})^{-1} = \frac{1}{\det[j]} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}$$

şeklindedir. Benzer şekilde $i = 1, 2, 3$ için;

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = (J_{11})^{-1} \frac{\partial \psi_i}{\partial \varepsilon} + (J_{12})^{-1} \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta}$$

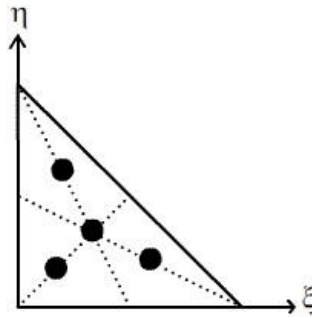
$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y} = (J_{21})^{-1} \frac{\partial \psi_i}{\partial \varepsilon} + (J_{22})^{-1} \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta}$$

dir. Bunlar K_1, K_2, K_3, K_4 ve K_6 da yerlerine yazılırlar.

6.3.2 Gauss kareleme kuralı

Sonlu elemanlar medonun uygulanması prosedüründe üçgensel bölge üzerinde, birçok iki katlı integrallerin hesaplanması gerekmektedir. Bir sonlu elemanlar algoritması hazırlamak için bu integrallerin nümerik çözümlerinin algoritması oluşturulmalıdır.. Bu tür integralleri hesaplamada kullanılan sayısal metotların en kesin sonuçlar verenlerinden bir tanesi Gauss kareleme yöntemidir. Bu yöntemle göre integral hesaplamaları, bölgenin içerisinde alınan 1, 3, 4 yada daha fazla sayıda nokta (Gauss noktaları) yardımıyla elde edilir. Alınan Gauss nokta sayısına bağlı olarak, elde edilen yaklaşık sonuçların kesinliği de değişir. Bu çalışmada, yeterince yakınsak sonuçlar verdiğinden, 4 nokta Gauss kareleme metodu kullanarak integraller sayısal olarak hesapladı.

Önceki kısımda isoparametrik bir dönüşümle elementleri birer ikizkenar dik üçgene dönüştürdük. Bu dönüşümün bir faydası olarak da bu integrallerin hesaplanabilmesi söylenebilir. Böyle bir üçgen için Gauss noktaları (4 nokta) ve ağırlıkları Şekil 6.3’de gösterildi. Bu noktaların sayısal değerleri ise Çizelge 6.1’de verildi.



Şekil 6.3: Gauss noktalarının yerleri.

Çizelge 6.1: Gauss kareleme kuralı için noktalar ve ağırlıkları.

Kareleme kesinliği	Gauss noktası (ε_{ij})	Gauss noktası (η_{ij})	Ağırlık (W_{ij})
$O(h^4)$	$\varepsilon_{41} = 1/3$	$\eta_{41} = 1/3$	$W_{41} = -27/48$
	$\varepsilon_{42} = 1/5$	$\eta_{42} = 1/5$	$W_{42} = 25/48$
	$\varepsilon_{43} = 3/5$	$\eta_{43} = 1/5$	$W_{43} = 25/48$
	$\varepsilon_{44} = 1/5$	$\eta_{44} = 3/5$	$W_{44} = 25/48$

Gauss kareleme yöntemine göre üçgensel bölge üzerindeki iki katlı integraller aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} f(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n W_{ns} F(\varepsilon_{nj}, \eta_{nj}) \quad (6.23)$$

burada $\frac{1}{2}$ üçgenin alanıdır. $n = 4$ alınırsa;

$$\varepsilon_{41} = \frac{1}{3} \quad \eta_{41} = \frac{1}{3} \quad W_{41} = \frac{-27}{48}$$

$$\varepsilon_{42} = \frac{1}{5} \quad \eta_{42} = \frac{1}{5} \quad W_{42} = \frac{25}{48}$$

$$\varepsilon_{43} = \frac{3}{5} \quad \eta_{43} = \frac{1}{5} \quad W_{43} = \frac{25}{48}$$

$$\varepsilon_{44} = \frac{1}{5} \quad \eta_{44} = \frac{3}{5} \quad W_{44} = \frac{25}{48}$$

şeklindedir.

$$K1_{ij}^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 W_{4s} \left\{ \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right] + \left[u_n \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i + v_n \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \phi_i \right] \right\} |j^{(e)}|$$

olup $K2, K3, \dots, K5$ için de benzer formülasyon geçerlidir. Sadece $f(\varepsilon, \eta)$ fonksiyonları değişir.

7. KAPAKLA SÜRÜLEN İKİ BOYUTLU DİKDÖRTGENSEL BÖLGEDE AKIŞ YAPILARI

Bu bölümde akışkanla doldurulmuş ve tek yada karşılıklı iki kapağı hareketli, diğer iki yan duvarları serbest yüzey (free surface) olan iki boyutlu dikdörtgensel bölge içerisinde akış yapıları incelendi. Olayı yöneten denklem Navier-Stokes Denklemi olup bu denklem bir önceki bölümde verilen sonlu elemanlar metodu ile çözüldü. Sonlu elemanlar metoduna ait FORTRAN programlama diline ait kodlar yazılarak akış problemi için sayısal datalar elde edildi. Bu datalar ORIGINPRO grafik çizim programında çizdirilerek kavite içerisindeki akış yapıları elde edildi.

Ele alınan problemde kavitenin yüksekliği ile genişliğinin oranını ifade eden A parametresi, kapakların hızlarının oranını ifade eden S parametresi ve Navier-Stokes denkleminin içerisinde yer alan Re (Reynolds sayısı) parametrele olarak ele alınmıştır.

Reynold sayısı akışkanın karakterini belirleyen özel bir sabit olup,

$$Re = \frac{\rho v l}{\mu} = \frac{\text{eylemsizlik kuvvetleri}}{\text{viskozite kuvvetleri}}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada ρ yoğunluk, v kinematik viskozite, l uzunluk ve μ mutlak viskozitedir. Reynolds sayısının küçük olduğu durumda (mutlak viskozitenin büyük olmasından kaynaklı) akışkanın bal kıvamında iken Reynolds sayısının büyük olduğu durumlarda ise akışkanın su kıvamında olduğu gibi bir benzetme özel sayının etkisini ifade edecektir. Re sayısının küçük olması durumunda akışa ait akış çizgileri daha az kırılğan bir yapıya sahip olacağından, böyle bir akış için akış yapıları daha düzgün olurken Re sayısının büyük olması durumunda akışkanın kırılğanlığı artacak ve daha karmaşık bir yapıda akış yapısı ile karşılaşılacaktır. Re sayısının çok büyük değerlerinde belli bir akış yapısı gözlenemeyecek olup bir 'kaos' durumu ile karşılaşılır.

Akış bölgesi $\{(x, y): -L \leq x \leq L, -H \leq y \leq H\}$ şeklinde dikdörtgensel bir kavite ve kavite görünüm oranı $A = \frac{H}{L}$ olarak alındı. Kapakların hız oranı ise $S = \frac{V_{alt}}{V_{üst}}$ şeklinde tanımlandı.

İki boyutlu serbest yüzeyli dikdörtgensel kavitelerdeki Stokes akış problemi (Gürçan ve Gasskel) tarafından analitik olarak çözüldü [24]. Ancak analitik çözümü elde edilemeyen Navier-Stokes denklemi yerine bazı terimlerin ihmal edilerek elde edildiği biharmonik denklemi yönetici denklem olarak aldılar.

Biharmonik denklem;

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad (7.1)$$

ve sınır koşulları ($L = 1$ alınarak),

$$\psi(1, y) = \psi(-1, y) = 0 \quad (7.2)$$

$$\psi(x, A) = \psi(x, -A) = 0 \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, A) = S \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, -A) = 1 \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (x = \pm 1) \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (x = \pm 1) \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (x = \pm 1) \quad (7.8)$$

şeklindedir. Burada ψ akış fonksiyonu olup akış yapısı bu fonksiyonun elde edilip çizdirilmesiyle gözlenir. Ayrıca, $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ve $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ sırasıyla x ve y yönündeki hız bileşenleridir.

(7.1) denkleminin ayrılabilir çözümü,

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (y - A)(A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y}) - \left(\frac{A(A_n e^{-2\lambda_n A} + B_n)}{\sinh 2\lambda_n A} \right) (e^{\lambda_n y})(1 - e^{2\lambda_n(A-y)}) \right\} \cos \lambda_n x \quad (7.9)$$

şeklinde elde edildi. Buradaki A_n ve B_n katsayıları ise ilgili kaynaklarda mevcuttur [33].

Bu bölümde (7.1)-(7.2) denklemleri,

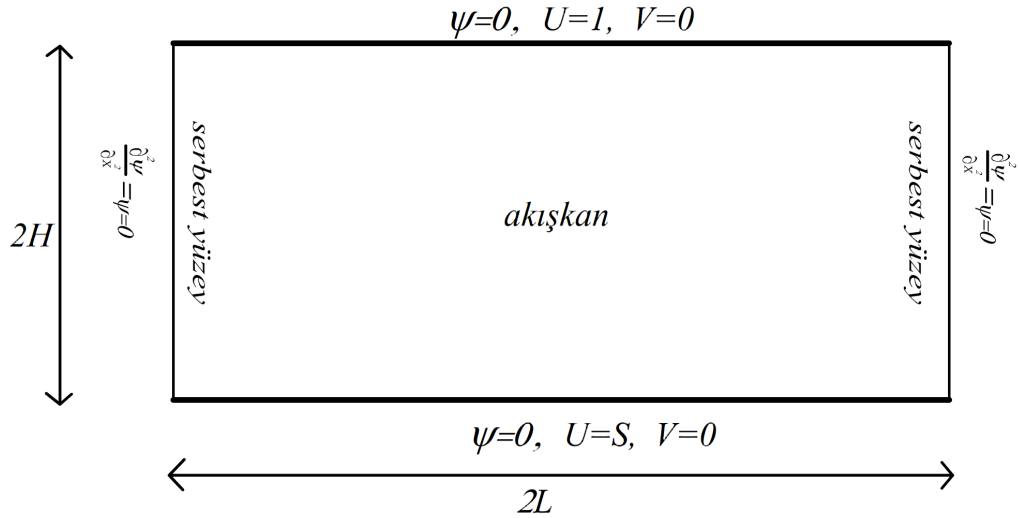
$$\frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \left[u_n \frac{\partial u}{\partial x} + v_n \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (7.10)$$

$$\frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \left[u_n \frac{\partial v}{\partial x} + v_n \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (7.11)$$

şeklinde sonlu elemanlar metodu ile çözülmüş olup, denklemlerdeki nonlineer terimler u_n ve v_n şeklinde alınıp bunlar analitik çözümden elde edilen, her bir noktadaki hız vektörleridir. Böyle lineer olmayan terimlerin iş yükünden kurtulundu.

7.1. Tek Kapakla Sürülen Dikdörtgensel Kavitede Akış Yapıları

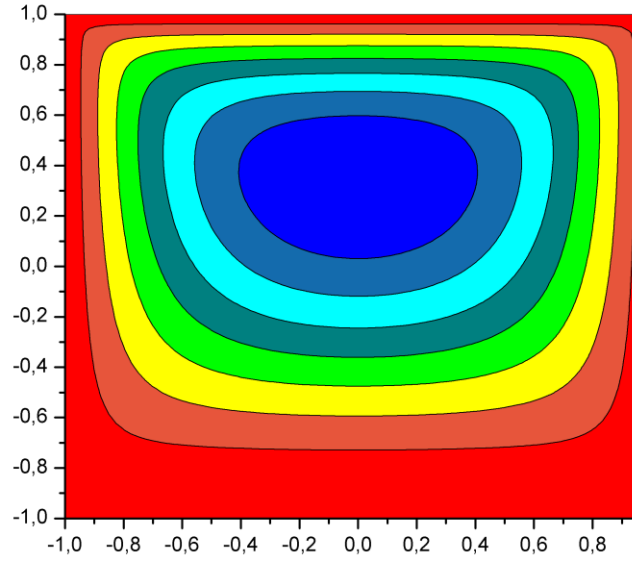
Bu kısımda tek kapakla sürülen dikdörtgensel kavitede akış yapıları incelendi. Kavite görünüm oranı $A = 1$ ve $S = 0$ olarak ele alındı.



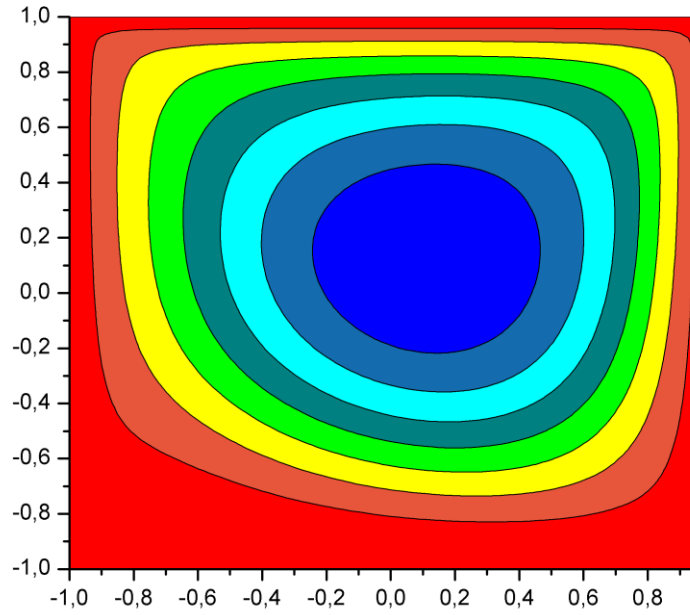
Şekil 7.1: Dikdörtgensel kavite ve sınır koşulları.

Önceki bölümde anlatılan sonlu elemanlar prosedürü uygulanarak sadece üst kapağın hareketli olduğu durum için akış yapıları çeşitli Reynolds sayıları için elde edildi (Şekil 7.2-7.5). Görüldüğü gibi $Re = 0$ için kavite içerisinde bir merkez kritik nokta (y eksenı üzerinde) ve bu noktayı merkeş kabul eden iç içe girdaplar olduğu ortaya

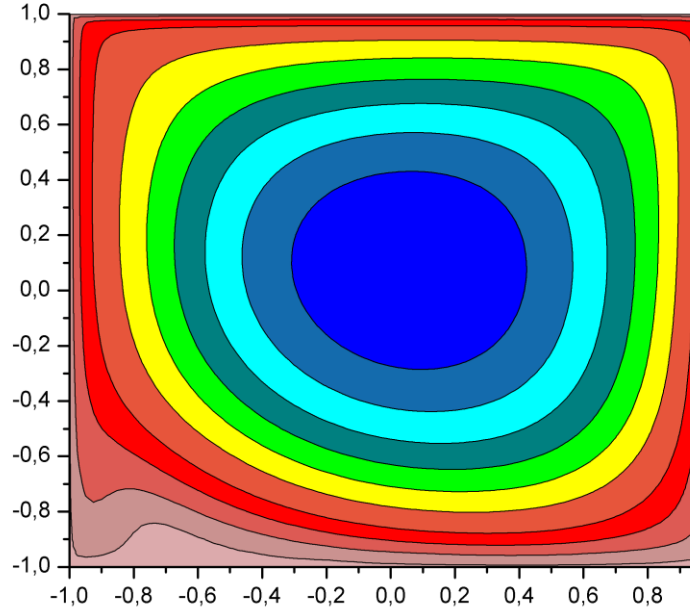
ıkartıldı. Reynolds sayısı artırıldıa kavite içerisindeki simetrik girdap yapılarının bozularak (girdap sayısı atmadan) antisimetrik bir akış yapısı olduğu gözlendi.



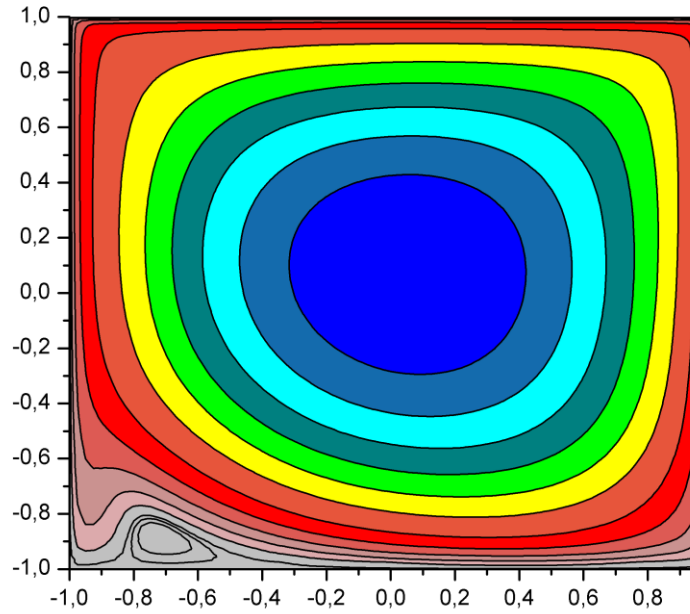
şekil 7.2: $A = 1$, $Re = 0$ ve $S = 0$ için akış yapısı.



şekil 7.3: $A = 1$, $Re = 100$, ve $S = 0$ için akış yapısı.



Şekil 7.4: $A = 1$, $Re = 350$, ve $S = 0$ için akış yapısı.

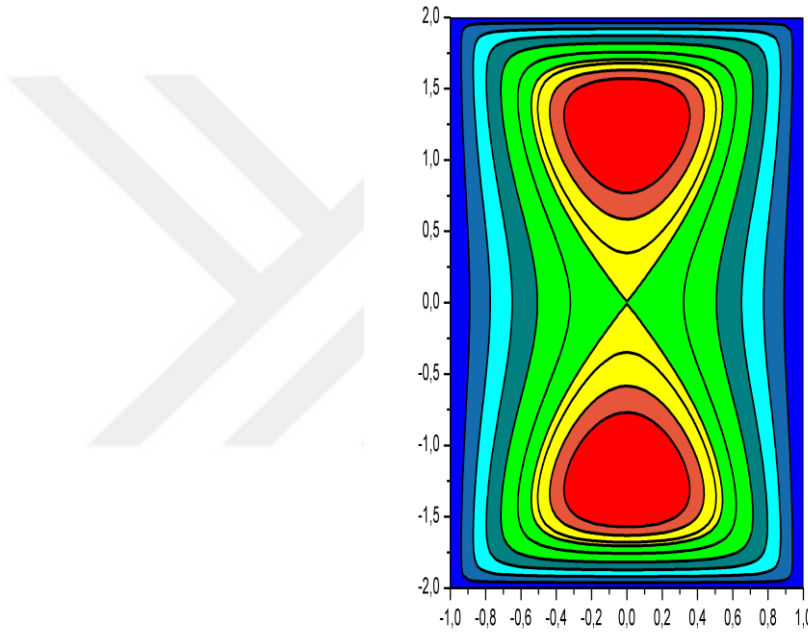


Şekil 7.5: $A = 1$, $Re = 450$, ve $S = 0$ için akış yapısı.

Reynolds sayısının artırılmasıyla kavitenin sol alt köşesinde yeni bir girdap oluştuğu görüldü. Muhtemelen Re sayısı daha da arttırıldıkça bu yeni girdap büyüyecek ve kavite içerisinde farklı akış yapıları ortaya çıkartacaktır.

7.2 Ters Yönde ve Eşit Hızda Hareket Eden İki Kapakla Sürülen Dikdörtgensel Kavitede Akış Yapıları

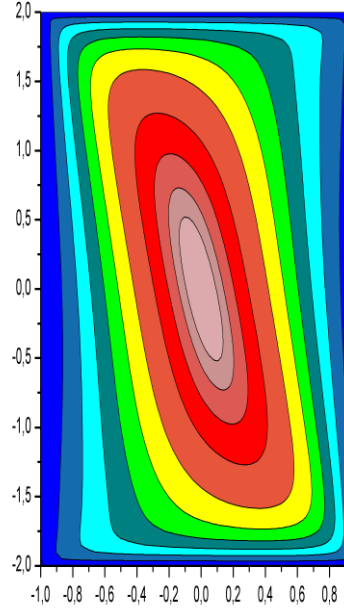
Bu kısımda kavite görünüm oranını $A = 2$ seçerek karşılıklı kapakların ters yönde fakat eşit hızla sürülmesi durumunu ($S = -1$) ele aldık. $Re = 0$ için her iki eksene göre simetrik bir akış yapısı elde edildi (Şekil 7.6). Bu durumda biri kavitenin üst, diğeri alt bölgesinde olmak üzere, birer merkez kritik noktalarına sahip iki girdap ile bu girdapların birleştiği ve yapısına eyer noktası (saddle) denilen üçüncü bir kritik nokta olduğu görüldü. Bu eyer noktası kavitenin tam merkezine yerleşmiş durumdadır.



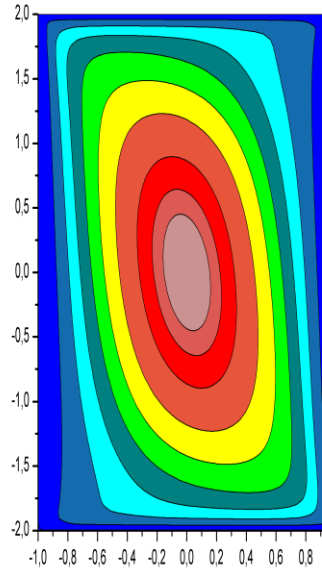
Şekil 7.6: $A = 2$, $Re = 0$, ve $S = -1$ için akış yapısı.

Reynolds sayısı 0 dan 50 ye çıkartıldığında ise kavite içerisindeki iki merkez kritik noktanın, ortadaki eyer noktasına yaklaşarak bir çatallanma (bifurcation) gerçekleştirerek kayboldukları ve aynı anda eyer noktasının merkez noktaya dönüştürge görüldü (Şekil 7.7).

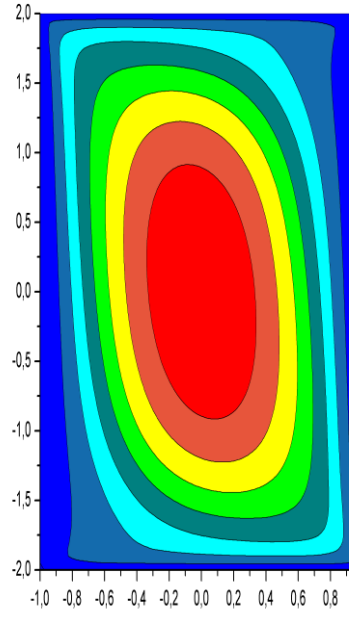
Reynolds sayısının daha da arttırılmasıyla kavite içerisindeki yapının giderek simetrisinin bozulduğu ve belli bir değerden sonra sağ alt ve sol üst köşe bölgelerinde kıvrılmanın artarak yeni girdapların oluşumuna yaklaşıldığı gözlemlendi.



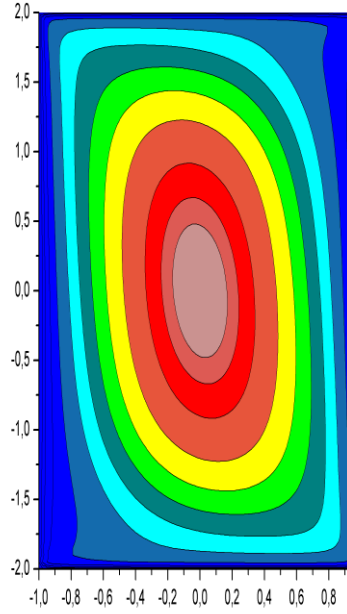
Şekil 7.7: $A = 2$, $Re = 50$, ve $S = -1$ için akış yapısı.



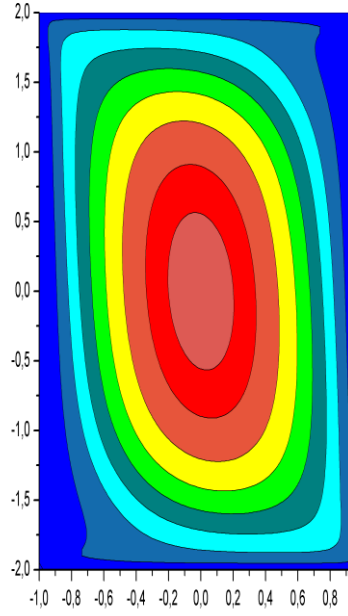
Şekil 7.8: $A = 2$, $Re = 100$, ve $S = -1$ için akış yapısı.



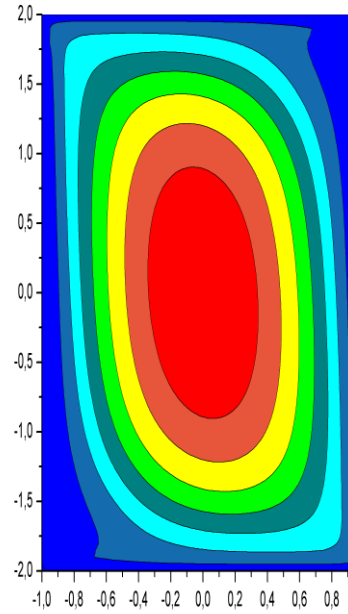
Şekil 7.9: $A = 2$, $Re = 150$, ve $S = -1$ için akış yapısı.



Şekil 7.10: $A = 2$, $Re = 200$, ve $S = -1$ için akış yapısı.



Şekil 7.11: $A = 2$, $Re = 250$, ve $S = -1$ için akış yapısı.

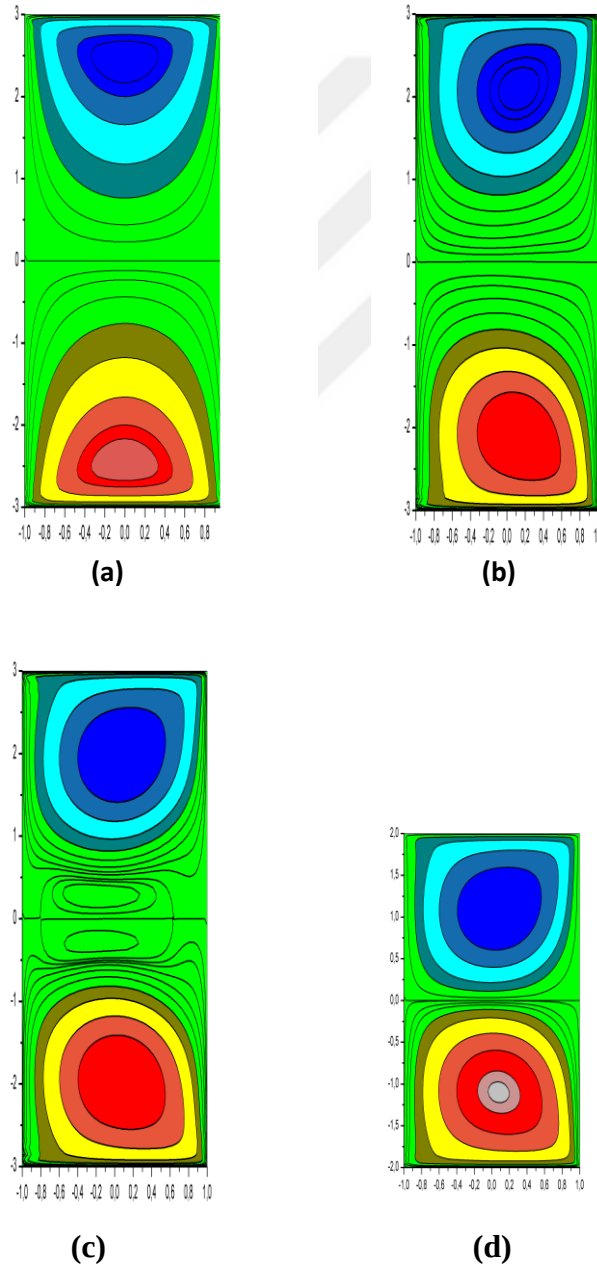


Şekil 7.12: $A = 2$, $Re = 300$, ve $S = -1$ için akış yapısı.

Açıkça anlaşıyor ki Re sayısının daha da artırılması durumunda kavite içerisinde yeni girdap yapıları oluşacak ve kritik noktaların da sayısı artacaktır.

7.3 Aynı Yönde ve Eşit Hızda Hareket Eden İki Kapakla Sürülen Dikdörtgensel Kavitede Akış Yapıları

Bu kısımda kavitenin alt ve üst kapalarının aynı yönde ve özel olarak eşit hızda olması durumunu ele aldık ($S = 1$). $Re = 0$ için akış yapısının Şekil 7.13a da görüldüğü gibi, kavitenin tam orta noktasından kaviteyi alt ve üst olmak üzere iki kısma ayıran bir ayırma çizgisinin olduğu görüldü. Üst ve alt kavitede ise ayırma çizgisine simetrik olarak tek merkez noktasına sahip birer girdap oluştuğu ortaya çıktı.



Şekil 7.13: $S = 1$ için akış yapıları a) $Re = 0, A = 3$ b) $Re = 123, A = 3$
c) $Re = 250, A = 3$ d) $Re = 180, A = 2$

Görünüm oranı sabit tutulmak üzere Reynolds sayısı $Re = 123$ değerine çıkartıldığında kavite içerisindeki eksenlere göre simetrik akış yapısının bozulduğu ancak $y = 0$ ayırma çizgisine göre alt ve üst girdap yapılarının simetrisinin korunduğu görüldü (Şekil 7.13b). Şekil 7.13c de görüldüğü gibi, Re sayısı 250 ye artırıldığında ise kavite içinde çatallanmalar gerçekleşerek ayırma çizgisi üzerinde yine birbirine simetrik iki girdap oluştuğu görüldü. Re sayısı daha da arttırıldığında bu yeni girdapların gelişerek kavite içerisinde yeni yapılar oluşturacağı aşıkardır. Kavite görünüm oranı $A = 2$ olması durumunda $Re = 180$ için akış yapısı Şekil 7.13d'deki lde edildi ve bize önemli bir bilgiyi doğruladı. Dikkat edilirse $A = 3$ ve $Re = 123$ için kavite içerisindeki akış yapısında $A = 2$ ve $Re = 180$ 'e göre daha fazla simetri kayması ya da çarpıklaşma tespit edildi. Bu da demek oluyor ki, Reynolds sayısının arttırılması, akış yapıları üzerinde A nın arttırılmasıyla benzer sonuçlar doğurmaktadır.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması iki temel amaç üzerine hazırlandı. Bunlardan ilki fen ve mühendislik alanlarında yaygın olarak kullanılan ve bilinen en etkili nümerik çözüm teknikleri arasında yer alan sonlu elemanlar metodu detaylı olarak anlatıldı. Hem bir hem de iki boyutlu bölgeler için sonlu elemanlar metodunun işleyiş mekanizması verildi. İkinci amaç olarak sonlu elemanlar metodunun iki boyutlu bir problem üzerine uygulaması ele alındı. Bunun için akışkanla doldurulmuş dikdörtgensel bir kavitedeki akış problemi ele alındı. Akış olayını yöneten Navier-Stokes denklemi bu metot ile çözüldü. Bu çözüm için kapsamlı bir bilgisayar kodu hazırlandı. Bu kod hazırlama işi Fortran programlama dili ile yapıldı. Hazırlanan kod ile elde edilen sayısal veriler OriginPro9 çizim programı ile grafiklere döküldü ve elde edilen sonuçlar görselleştirildi.

Ele alınan kavitedeki akış problemi için çeşitli akış yapıları ve sonuçlara ulaşıldı. Literatürde dikdörtgensel kaviterle ilgili çok sayıda çalışma bulunmakta olup bunların bir kısmı Stokes akış bir kısmı da Navier-Stokes akış yapılarıyla ilgilidir [1,3,4,9,11]. Elde edilen sonuçlar literatürdeki bu çalışmalarla örtüşmekte olup beklenmedik akış yapılarıyla karşılaşmadı. Bu tez çalışmasında Reynolds sayısı belirli değerlere kadar yükseltilerek akış yapılarına etkileri gösterildi. Daha büyük Reynolds sayıları için ne gibi akış yapılarının oluşacağı, önceki çalışmalar da gözönüne alınarak öngörüldü [23].

Dikdörtgensel kaviterlerde karşılıklı kapakların hareket etmesi (ya da tek kapağın hareketli olması) durumları incelendi. Tek kapakla sürülen kaviterlerde hareketli kapağa uzak kısımlarda Reynolds sayısının artırılmasıyla birlikte çeşitli yeni girdap oluşumları gözlemlendi. İki kapakla sürülen kaviterlerde ise aynı anda birden çok yeni girdapların oluşumu göze çarptı. Ayrıca tek kapakla sürülen kavitelere göre daha kompleks akış yapıları elde edildi. Özellikle $S = 1$ için kavite içerisinde simetrik iki kısımda aynı akış yapılarının gerçekleşmesi ilginç akış yapıları ortaya çıkardı.

Endüstri ve mühendisliğin bir çok alanında karşılaşılan kavite tipi akışlar genellikle dikdörtgensel yapıda olup bu konu üzerinde yapılacak çalışmalar için bu tez iyi bir kaynak niteliğindedir. Özellikle Navier-Stokes denklemi üzerine sonlu elemanlar metodunun uygulanma prosedürü sonraki araştırmacılar için yararlı olacağı kanaatindeyiz.

Bu tez çalışmasında her ne kadar belirli A , S ve Re değerleri için sonuçlar gösterilmiş olsa da, hazırlanan algoritma ve sonlu elemanlar metodunun işleyiş mekanizması kullanılarak istenilen A , S ve Re değerleri için akış yapıları elde edilebilir. Bu çalışmada sonlu elemanlar metodunun detaylı olarak verilen ileyişi daha farklı kavite tipleri için de elbette çalışacaktır. Bu kısım sonraki araştırmacılar için yapılabilecek ve ilgi çekici sonuçlar elde edilebilecek bir çalışma olarak bırakıldı.

KAYNAKLAR

- [1] Bilgil, H. ve Gürçan F., 2016. Effect of the Reynolds number on flow bifurcations and eddy genesis in a lid-driven sectorial cavity, Japan Journal of Indusdeneme and Applied Mathematics, 33, 343.
- [2] Camaño, J., Gatica, G. N., Oyarzúa, R., ve Tierra, G., 2016. An Augmented Mixed Finite Element Method for the Navier--Stokes Equations with Variable Viscosity, SIAM J. Numer. Anal., 54 (2), 1069–1092.
- [3] Taylor, C. ve Hood, P., 1973. A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique, Computers & Fluids, 1, 1, 73-100.
- [4] Kim, S. D., Lee, Y. H. ve Shin, B. C., 2006. Newton's method for the Navier-Stokes equations with finite-element initial guess of stokes equations, Computers & Mathematics with Applications, 51, 5, 805-816.
- [5] Hutton, D. V., 2004. Funtamentals of Finite Element Analysis, First Edition, McGraw-Hill, United States.
- [6] Rao, S., 2004. The Finite Element Method in Engineering 4th Edition, Elsevier Science & Technology Books, Butterworth-Heinemann, United Kingdom.
- [7] Navier, C. L. M. H., 1822. Memoire sur les lois du mouvement des fluides, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, 6, 389 - 440.
- [8] Stokes, G. G., 1845. On the theories of the internal friction of fluids in motion. Trans. Cambridge Philos. Soc., Vol. 8.
- [9] Bilgil, H, 2010. Sektörel Kaviterlerdeki 2-D Navier-Stokes Denkleminin Çözüm Hareketlerinin Çatallanmaları, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.

- [10]** Gaskell, P. H., Savage, M.D., Summers, J.L. ve Thompson, H.M., 1995. Modeling and Analysis of Meniscus Roll Coating , J. Fluid Mech., 298, 113-137.
- [11]** Aidun, C. K., Triantafillopoulos, N. G. ve Benson, J. D., 1991. Global Stability of A Lid-Driven Cavity With Throughflow: Flow Visualization Studies. Physics of Fluids A3, Pp. 2081—2090.
- [12]** Higgins, B. G., 1982. Dynamics of Coating, Adhension and Wetting, Status Report Project 3328, The Institute of Paper Chem.
- [13]** Bruneau, C. H. ve Saad, M., 2006. The 2D Lid-Driven Cavity Problem Revisited Computers and Fluids 35, 2006, 326—348.
- [14]** Gaskell, P. H., Lau, A.K.C. ve Wright, N.G., 1988. Comparasion of Two Slolution Strategies For Use With Higger-Order Discritization Schemes In Fluid Flow Simulation, Int. J. Numer. Meth. ing., 8, 12003-1215.
- [15]** Shankar, P. N. ve Despande, M. D., 2000. Fluid Mechanics In The Driven Cavity, Ann. Rev. Fluid Mech. 136, 93-136.
- [16]** Oztop, H. F. ve Dagtekin, I., 2004. Mixed Convection in Two-Sided Lid-Driven Differentially Heated Square Cavity, Int. J. Heat Mass Transfer 47, 1761--1769.
- [17]** Mcquain, W. D., Ribbens, C. J., Wang, C. Y. ve Watson, L. T., 1994. Steady Viscos Flow in a Trapeziodal Cavity, Comput. Fluids, 23, 613-626.
- [18]** Jyotsna, R. ve Vanka, S.P., 1995. Multigrid Calculation of Steady,Viscous Flow in a Triangular Cavity, Journal of Computational.Physics, 122, 107-117.
- [19]** Moffat, H. K., 1964. Viscous and Resistive Eddies Near a Sharp Corner, J. Fluid Mech., 18, 1-18.

- [20] Liu, C. H. ve Joseph, D. D., 1977. Stokes Flow in Wedge-Shaped Trenches, J. Fluid Mech., 80, 443-463.
- [21] Gurcan, F., 1996. Flow Bifurcations in Rectangular, Lid-Driven, Cavity Flows, Phd Thesis, University of Leeds, United Kingdom.
- [22] Gaskell, P.H., Savage, M.D., Summers, J.L. ve Thompson, H.M., 1996. Creeping Flow Analysis of Free Surface Cavity Flows, Theo. Comp. Fluids Dynam., 8, 415.
- [23] Ozalp, C., Pinarbasi A., ve Sahin, B., 2010. Experimental Measurement of Flow Past Cavities of Different Shapes, Experimental Thermal and Fluid Science 34, 505-515.
- [24] Gurcan, F., Gaskell, P.H., Savage, M.D. ve Wilson, M., 2003. Eddy Genesis and Transformation of Stokes Flow in a Double-Lid-Driven Cavity, Proc. of The Instn. Mech. Eng. Part-C: Journal of Mechanical Engineering Science, 217, 3, 353-364.
- [25] Bilgil, H. ve Dolek Z., 2015. Effect of The Cavity Angle on Flow Structures in an Annular Wedge Cavity, Konuralp Journal of Mathematics, 3, 2, 1-16.
- [26] Gürcan, F. ve Bilgil, H. 2013. Bifurcations and eddy genesis of Stokes flow within a sectorial cavity, European Journal of Mechanics-B/Fluids 39, 42-51.
- [27] Burnett, D., 1987. Finite Element Analysis: From Concepts to Applications, Addison Wesley Publishing Company, ISBN: 0201108062, USA.
- [28] Bilgil, H. ve Gürcan, F., 2016. Effect of the Reynolds number on flow bifurcations and eddy genesis in a lid-driven sectorial cavity. Japan Journal of Indusdeneme and Applied Mathematics 33 (2), 343-360.

- [29] F. Bassi ve S. Rebay, 1997. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations, In Journal of Computational Physics, 131, 2, 267-279.
- [30] Frank, F., Liu, C., Alpak, F. O., Araya-Polo, M. ve Riviere, B., 2017. A Discontinuous Galerkin Finite Element Framework for the Direct Numerical Simulation of Flow on High-Resolution Pore-Scale Images. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/182607-MS
- [31] Ladubec, C. ve Gracie, R., 2017. Stabilized finite element methods for vertically averaged multiphase flow for carbon sequestration, Numerical Methods in Engineering, 111, 8, 724-752.
- [32] Martin J. Gander ve Gerhard Wanner, 2012. From Euler, Ritz, and Galerkin to Modern Computing, SIAM Rev., 54, 4, 627–666.
- [33] Gürcan, F., 1997. Flow bifurcations in rectangular, lid-driven, cavity flows. PhD Thesis, University of Leeds.
- [34] Demir, B., 2017. Navier Stokes zaman rahatlatma modeli ve sonlu elemanlar çözümü üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi.
- [35] K.J. Bathe, 2007. Finite Element Procedures, Prentice Hall, ISBN: 013301458-4, USA.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Dalshad Sedeeq HAMAD AMEEN

Doğum Tarihi ve Yeri : 26.04.1986 / MOSUL

E-posta adresi : dlshadmath@gmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Duhok Üniversitesi Matematik Bölümü, 2010

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı, 2018