

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**İKİ BOYUTLU RIEMANN PROBLEMİ İÇİN ÜÇ PARÇALI
BAŞLANGIÇ FONKSİYONLU CAUCHY PROBLEMİNİN
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:
Bilge Gülsüm ARICI KARA

İSTANBUL, 2016

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**İKİ BOYUTLU RIEMANN PROBLEMİ İÇİN ÜÇ PARÇALI
BAŞLANGIÇ FONKSİYONLU CAUCHY PROBLEMİNİN
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Bilge Gülsüm ARICI KARA

Öğrenci No:

140860005

Danışman:

Prof. Dr. Mahir RASULOV

İSTANBUL, 2016

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “İki Boyutlu Riemann Problemi İçin Üç Parçalı Başlangıç Fonksiyonlu Cauchy Probleminin Sayısal Çözümü” başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım.
15/07/2016

Bilge Gülsüm ARICI KARA



T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 140860005 no'lu Bilge Gülsüm ARICI KARA'nın 15/08/2016 tarihinde yapılan tez savunma sınavı¹ sonucunda...50 dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında² oybirliği / oyçokluğu ile, kabul... kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

Anabilim Dalı :Matematik Bilgisayar
Programı :Uygulamalı Matematik
Tez Başlığı³ :İki Boyutlu Riemann Problemi İçin Üç Parçalı Başlangıç Fonksiyonlu Cauchy Probleminin Sayısal Çözümü

<u>Tez Sınav Jürisi</u>	<u>Öğretim Üyesi</u>
Danışman	: Prof. Dr. Mahir RESULOV
Üye	: Prof. Dr. İhsan ÜNVER
Üye	: Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

İmza

¹ Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak aday tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

² Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında "kabul", "düzeltme" veya "red" kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

³ İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

ÖNSÖZ

Bu tez konusunu bana öneren, tezimin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, yüksek lisans öğrenimim boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım tez danışmanım kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RASULOV’a tüm desteğinden dolayı en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Eğitim hayatım boyunca benden maddi manevi desteğini esirgemeyen aileme minnettarlığımı bir borç bilirim.

İstanbul, 2016

Bilge Gülsüm ARICI KARA

Adı ve Soyadı : Bilge Gülsüm ARICI KARA
Danışmanı : Prof. Dr. Mahir RASULOV
Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans, 2016
Alanı : Uygulamalı Matematik
Anahtar Kelimeler : Riemann problemi, Üç parçalı fonksiyon, Süreksiz fonksiyonlar sınıfında nümerik çözüm.

ÖZ

İKİ BOYUTLU RIEMANN PROBLEMİ İÇİN ÜÇ PARÇALI BAŞLANGIÇ FONKSİYONLU CAUCHY PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu tez, iki boyutlu uzayda skaler koruma kanunu için Riemann türünden başlangıç değer problemlerinin çözümünün incelenmesine adanmıştır. Spesifik örnekleri kullanarak hiperbolik korum kanunlarının çözümlerinde oluşan yeni fenomenler incelenmiştir. Literatürde viskozite yöntemine dayanan çok boyutlu skaler korum kurallarının çözümü için iyi varlık ve teklik teorileri bulunmaktadır, fakat bu yöntem süreksiz çözümlerin kalite yapısı hakkında az bilgi vermektedir. Bir boyutlu uzayda, meydana gelen nitel darbe olgusu Oleinik, Lax, Kruzkov, Volpert, Smoller, Gelfand ve Ballou tarafından açıklanmıştır ve sonuçlar regulerlik kuramları çerçevesine uyum sağlamaktadır. Olayın fiziksel özelliklerini düzgün ifade edebilen sayısal çözüm algoritmaları önerilmiş ve önerilen algoritmalar yardımıyla bir sıra bilgisayar testleri yapılmıştır. Burada çözülen örnekler, iki boyutlu uzaydaki denklemlerin çözümünde meydana gelen serpilme ve sıçrayış olayının yeni tipleri göstermektedir.

Name and Surname : Bilge Gülsüm ARICI KARA
Consultant : Prof. Dr. Mahir RASULOV
Type / Date : Post Graduate (Master), 2016
Field : Applied Mathematics
Keywords : Riemann problem, Three-piece function, Numerical solution in a class of discontinuous function.

ABSTRACT

THE NUMERICAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR TWO-DIMENSIONAL RIEMANN PROBLEM WITH THREE-PIECE INITIAL FUNCTION

This is a note about the solution of Riemann-type initial value problems for a single conservation law in two space dimensions. By using specific examples we exhibit new phenomena in the qualitative structure of solutions of hyperbolic conservation laws. There are good existence and uniqueness theories for the solution of a single conservation law in several spacedimensions based upon the viscosity method , but the method gives one little insight into the qualitative structure of the discontinuity set of solutions. In one space dimation , the qualitative shock phenomena which occur have been described by Gelfand and Ballou and fit into the framework of regularity theorems . The examples which we calculate here display new kinds of “rarefaction” phenomena which occur in the solution of equations in two space dimentions.

İÇİNDEKİLER

ÖZ	i
ABSTRACT	ii
GİRİŞ	1
1. HİPERBOLİK TÜR DENKLEMLER İÇİN KARAKTERİSTİKLER YÖNTEMİ.....	3
1.1 Riemann Problemi	3
1.2 Süreksizliğin Mevcut Olma Koşulu	7
1.3 Suni Viskozite Yöntemi	9
2. İKİ BOYUTLU KORUNUM KURALLARI İÇİN RIEMANN PROBLEMİ.....	27
2.1 Entropi Koşulu	27
2.2 Üç Parçalı Sabit Riemann Çözümleri	30
3. NÜMERİK ALGORİTMA ve BİLGİSAYAR TESTLERİ.....	33
3.1 Adapte Olunabilen Ağ ve Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Farklar	33
3.2 Bilgisayar Deneyleri	36
4. SONUÇLAR	41
5. KAYNAKLAR	42
6. ÖZGEÇMİŞ	44

GİRİŞ

$R^3(x, y, t) = \{(x, y, t), (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, \infty)\}$ uzayını gösterelim ve $R^3(x, y, t)$ de aşağıdaki şekilde yazılmış korunum kuralı denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1(u)) + \frac{\partial}{\partial x_2}(f_2(u)) = 0 \quad (1.1)$$

göz önüne alalım. Burada, $f = (f_1, f_2): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 'nın bazı özelliklere (bu özellikler daha sonra açıklanacaktır) sahip doğrusal olmayan fonksiyondur. Bu fonksiyona tezin sonraki kısımlarında akış veya durum fonksiyonu diyeceğiz. (1.1) cinsinden olan denklemler hidrodinamik, mekanik, geometrik vs. gibi bilim dallarında sıkça kullanılmaktadır. Sonuncu on yıllarda söz konusu denklem bilgi teknolojilerinde ve android telefonların işleme mekanizmlerinde genişçe kullanılmaktadır. (1.1) denklemi $f = (f_1): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^1$ olduğu durumunda literatürde hidrodinamiğin model denklemi olarak anılmıştır. Sadelik için $f_1 = f_2 = \frac{u^2}{2}$ olan durum incelenecektir.

Konservatif kanunların hiperbolik sistemleri, bir kural olarak nonlinear denklemlerden oluştuğundan onların gerçek (analitik) çözümlerini elde etmek zor olmakta ve çoğu zaman da mümkün olmamaktadır. Bilindiği gibi hiperbolik tür denklemlerle ifade edilebilen problemlerde nonlinearlik çok değerlilik, "blow-up" (ıraksama) vb. özellikler oluşturmaktadır. Çözümde oluşan çok değerlilik fiziksel açıdan anlamsız olduğundan bu tür çözümleri, zayıf çözüm kavramları içermekle sürekli çok değerli çözümün yerine süreksiz fakat tek değerli çözüm haline getirmek mümkün olur. Bu işlem ise, süreksizlik noktalarını ne zaman ve nerede dahil etmek ve onun zaman evrimini incelemek gibi ek sorunlar yaratmaktadır. Bu tür özellikler, yani çözümde yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarının varlığı sayısal çözümlerin bulunması için de geleneksel klasik yöntemlerin direkt uygulanmasında zorluklar çıkarır.

Bu nedenle de olayın fiziksel özelliklerini düzgün ifade edebilen çözümlerinin bulunması için hassas nümerik yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Süreksiz fonksiyonlarla çalışma zorunluluğu ve ayrıca problemin fiziksel özelliklerini tam olarak ifade edebilen çözümleri elde etme ihtiyacı, problemin doğasından oluşan özellikleri düzgün yansıtabilen ve çözümün doğal pürüzsüzlük derecesini de dikkate alabilen genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfında yeni ve daha hassas çözüm yöntemlerinin üretilmesine neden olmuştur.

(1.1) denklemi için yazılmış başlangıç değer probleminin çözümünde çok önemli sonuçlar kronolojik olarak O. A. Oleinik, A. N. Tikhonov, A.A. Samarskii, P. Lax, O. A. Ladyjenskaya, I. M. Gelfand vs. tarafından elde edilmiştir.

Bu bölümde kısaca olarak önce birinci mertebeden bir boyutlu denklem için mevcut olan teorik bilgiler hatırlatılacaktır. Çünkü iki boyutlu denklem için oluşturulmuş teoriler bir boyutta olanların genelleşmesi olmaktadır.

Kolaylık adına önce literatürden bazı (bir boyutlu denklem için) kavramları inceleyelim.



1. HİPERBOLİK TÜR DENKLEMLER İÇİN KARAKTERİSTİKLER YÖNTEMİ

1.1. Riemann Problemi

Aşağıdaki dalga denklemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

denklemine

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (1.3)$$

başlangıç koşulunu ekleyelim. Burada $u_0(x)$ tanım bölgesinde ölçülebilen sınırlı bilinen fonksiyon olmaktadır.

Adi diferansiyel denklemler teorisinden belli olduğu üzere (1.2) denklemi

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{du}{dt} = 0 \quad (1.4)$$

denklemler sistemine denktir [14]. Karakteristikler yöntemini kullanarak (1.2), (1.3) probleminin çözümünü

$$u(x, t) = u_0(x - ut) \quad (1.5)$$

şeklinde elde ederiz. (1.5) türünden olan çözümlere yumuşak çözüm denir. Kolayca gösterilebilir ki, (1.5) kapalı fonksiyonu (1.2), (1.3) probleminin çözümüdür fakat klasik çözümü değildir.

(1.2), (1.3) probleminin çözümünü dinamiğini incelemek için iki durumu göz önüne alalım:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1, & x < 0 \\ u_2, & x > 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Görüldüğü gibi (1.6) başlangıç profili hem negatif, hem de pozitif eğime sahiptir.

Genelde, dalgaların karakteristik özelliği herhangi bir sinyalin herhangi bir ortamda sonlu hızla dağılmasıdır. Hiperbolik tür denklemlerle ifade edilen dalgalarda bu olay karakteristikler ile bağlı olmaktadır. (x, t) düzleminde her bir karakteristik x uzayında bir dalgayı ifade eder ve çözümün karakteristik üzerindeki değişmesi ise dalganın fiziksel dağılmasına karşılık gelir. Bu anlamda, (1.4) in birinci denklemi, şöyle yorumlanabilir: u nun çeşitli değerleri u hızı ile "dağılmaktadır". Dolayısıyla, problemin çözümünün grafiği herhangi bir t için başlangıç profilinin, yani $u_0(x)$ eğrisinin herhangi bir noktasının ut kadar sağa kaydırılması ile elde edilmektedir öyle ki, bu mesafeler çeşitli " u " lar için farklı olmaktadır. $u > 0$ olduğu durumda u nun büyük değerleri, u nun küçük değerlerine oranla daha hızlı dağılmaktadır. Bu da çözümün profilinde bir bozulmaya neden olur. $u < 0$ olduğu durumda ise u 'nun büyük değerleri küçük değerlerine oranla daha zayıf, şeklinde dağılmaktadır. Bu ise çözümün ox ekseninin negatif yönünde bozulmasına neden olur. Böylelikle dalganın x 'e göre azalan fonksiyon olduğu bölgelerde kırılması kaçınılmazdır ve çözümde çok değerlilik ortaya çıkar. Kırılma (breaking) dalganın profilinde ilk kez dik teğetin olduğu $t = T_0$ anında meydana çıkar.

Klasik çözüm kavramını genişletmekle sürekli çok değerli çözümün yerine bir değerli fakat sıçrayışa sahip çözüm içermekle bu durumu kurtarmak mümkündür. Matematiksel genelleştirme S. L. Sobolev tarafından önerilmiş genelleştirilmiş veya zayıf çözüm yardımı ile gerçekleştirilir.

Tanım 1.1. (1.3) koşulunu koruyan, (x, t) uzayının üst yarı kısmında her iki değişkene göre diferansiyellenebilen ve $t + |x|$ 'nin büyük değerlerinde sıfır olan herhangi bir $\varphi(x, t)$ temel fonksiyonları için,

$$\iint_D \left\{ \varphi_t(x, t)u(x, t) + \varphi_x(x, t) \frac{u^2(x, t)}{2} \right\} dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)\varphi(x, 0)dx = 0 \quad (1.8)$$

integral eşitliğini sağlayan $u(x, t)$ fonksiyonuna (1.2), (1.3) probleminin zayıf çözümü denir.

$u(x, t)$ ve $\frac{u^2(x, t)}{2}$ fonksiyonları sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar olduğunda (1.2), (1.3) ile (1.8) denklemleri denk olmaktadır. Genelde ise, (1.8) denklemini koruyan fonksiyonlar sınıfı (1.2), denklemini koruyan fonksiyonlar sınıfından daha geniş sınıf oluşturmaktadır. (1.8) denklemini koruyan fonksiyonlar süreksiz de olabilirler ve hatta onların diferansiyellenebilir olmaları istenmeyebilir. (1.8) denklemini koruyan çözümlere (1.2), (1.3) probleminin genelleştirilmiş çözümü de denir.

(1.8) anlamında herhangi bir zayıf çözümün sürekli olduğu noktalarda (1.2) korunum kanununu korur. Dolayısıyla $(u, F(u) = \frac{u^2}{2})$ vektör alanının $u(x, t)$ fonksiyonunun sürekli olduğu bölgeyi sınırlayan herhangi bir (x, t) düzlem eğrisinden geçmekte olan akışı sıfıra eşit olmaktadır. Söz konusu eğri $u(x, t)$ fonksiyonunun süreksizlik eğrilerini de içerisine aldığı takdirde, genelde bu tür korunum kanunu geçerli olamaz. Fakat (1.2) denkleminin herhangi bir parçalı sürekli ve parçalı pürüzsüz zayıf çözümleri için (1.8) anlamında integral eşitlik korunmaktadır. Zira (1.8) anlamında zayıf çözümün herhangi bir süreklilik eğrisi üzerinde Rankine-Hugoniot koşulu korunmaktadır ve bu da (1.8) denkleminin herhangi bir parçalı sürekli çözümünün (1.2) nin de korunması için hem gerek hem de yeter koşul oluşturmaktadır.

$u(x, t)$ fonksiyonu (1.2) denkleminin $D \in R^2$ bölgesinde koruyan herhangi bir parçalı sürekli çözümü olsun. Daha net olarak söylersek Γ eğrisi D bölgesini iki alt bölgeye böler ve her iki bölgede $u(x, t)$ fonksiyonunun Γ eğrisi üzerinden geçtiğinde u_- ve u_+ sol ve sağ limitleri mevcut olmaktadır. Bu tür süreksizliğe 1. tür süreksizlik denir.

$u(x, t)$ fonksiyonu D_1 ve D_2 de pürüzsüz zayıf çözüm olduğundan bu bölgelerde (1.2) denklemini de korumaktadır yani klasik çözüm olmaktadır. $u(x, t)$ fonksiyonunun Γ eğrisi üzerinde hangi koşulu koruduğunu belirleyelim.

Zayıf çözümün tanımına göre herhangi bir $(x, t) \in G_x, \bar{G} \in D$ noktaları için $\varphi(x, t) = 0$ olan ve herhangi bir $\varphi(x, t) \in C_0^\infty(D)$ test fonksiyonu için

$$0 = \iint_D \left\{ u\varphi_t + \frac{u^2}{2}\varphi_x \right\} dxdt = \iint_{D_1 \cap G} \left\{ u\varphi_t + \frac{u^2}{2}\varphi_x \right\} dxdt \\ + \iint_{D_2 \cap G} \left\{ u\varphi_t + \frac{u^2}{2}\varphi_x \right\} dxdt$$

olmaktadır. $u(x, t), \frac{u^2}{2}$ ve $\varphi(x, t)$ fonksiyonları $D_1 \cap G$ ve $D_2 \cap G$ bölgelerinde sürekli olduklarından yukarıdaki integrallerin her ikisine de kısmi integrasyon formülünü uygulayabiliriz. Söz konusu bölgelerin sınırları ∂D ve Γ , ayrıca $\varphi(x, t)$ fonksiyonu $(x, t) \in \partial G$ sıfıra eşit olduğundan ∂D üzere integraller de sıfıra eşit olmaktadır. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
0 &= - \iint_{D_1 \cap G} \{u_t \varphi + F_x(u)\} dx dt - \iint_{D_2 \cap G} \{u_t \varphi + F_x(u) \varphi\} dx dt \\
&\quad + \int_{\Gamma \cap G} \{u_- \cos(\vec{n}, \vec{t}) + F(u_-) \cos(\vec{n}, \vec{x})\} \varphi dS \\
&\quad + \int_{\Gamma \cap G} \{u_+ \cos(-\vec{n}, \vec{t}) + F(u_+) \cos(-\vec{n}, \vec{x})\} \varphi dS \\
&= \int_{D_1} \{(u_t + F_x(u)) \varphi\} dx dt - \int_{D_2} \{u_t + F_x(u)\} \varphi dx dt \\
&\quad - \int_{\Gamma} \{(u_+ - u_-) \cos(\vec{n}, \vec{t}) + (F(u_+) - F(u_-)) \cos(\vec{n}, \vec{x})\} \varphi dS
\end{aligned}$$

olur. $u(x, t)$ fonksiyonunun her iki D_1 ve D_2 bölgesinde klasik çözüm olduğundan sonuncu ifade,

$$\int_{\Gamma} \{[u] \cos(\vec{n}, \vec{t}) + [F(u)] \cos(\vec{n}, \vec{x})\} \varphi dS = 0 \quad (1.9)$$

şeklini alır. Burada $\vec{n} = (\cos(\vec{n}, \vec{t}), \cos(\vec{n}, \vec{x}))$ olmaktadır.

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{\cos(\vec{n}, \vec{t})}{\cos(\vec{n}, \vec{x})}$$

ve Γ keyfi olduğunu dikkate alırsak sonuncu eşitlikten,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[F(u)]}{[u]} = \frac{F(u_+) - F(u_-)}{u_+ - u_-} \quad (1.10)$$

elde ederiz. Bu eşitliğe Rankine-Hugoniot koşulu denir.

Görüldüğü gibi Rankine-Hugoniot koşulu darbe dalgalarının $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ hareket hızını $f(u)$ durum fonksiyonunun limit değerleri olan u_- ve u_+ ile ilişkilendirmektedir.

(1.10) koşulunda $u_{\pm} \rightarrow u$ olduğunda $\Gamma = \{(x, t) | x = x(t)\}$ zayıf süreksizlik eğrisi üzerinde limit alırsak,

$$\frac{dx}{dt} = F'(u(x, t)) \quad (1.11)$$

elde ederiz yani zayıf süreksizlik karakteristik üzerinde dağılmaktadır.

Görüldüğü gibi başlangıç fonksiyonu sürekli olduğu halde bile çözümde yeri önceden bilinmeyen sıçrayış mevcut olur. Başlangıç profilinde sıçrayışın olduğu durumda çözümün dağılım dinamiği nasıl olacak. Bu soruyu cevaplamak için aşağıdaki durumu inceleyelim, yani (1.2) denklemini (1.7) koşulu çerçevesinde çözelim.

(1.2), (1.7) problemine Riemann problemi denir. Burada iki durum olabilir:

$$(i) u_1 < u_2,$$

$$(ii) u_1 > u_2$$

Bilindiği üzere (1.2), (1.3) probleminin birden fazla da çözümü olabilir. Fiziksel gerçek çözümü bulmak için ek koşulun bulunması gerekmektedir. Böyle koşula entropi koşulu denir.

1.2 Süreksizliğin Mevcut Olma Koşulu

(1.2) denklemini,

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} h(x), & |x| < d \\ 0, & |x| > d \end{cases}$$

başlangıç koşulu çerçevesinde inceleyelim. Varsayalım ki,

$$F''(u) > 0, \quad F(u) \in C_{loc}^3 \quad \text{ve} \quad u_0(x) \in C^2$$

olsun. Şimdi sırf matematiksel düşüncelere dayanarak (1.2) denkleminin $t < T$ değerleri için sürekli olan çözümünün özelliklerini araştıralım ve bu çözümün hangi $t = T$ kritik değerlerinde bozulduğunu bulalım.

$z = u_x(t, x)$ olsun ve (1.2) denklemini x 'e göre diferansiyelleyelim

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + F''(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + F'(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$z = u_x$ olduğunu dikkate alırsak,

$$\frac{\partial z}{\partial t} + F''(u)z^2 + F'(u)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

veya

$$0 \geq \frac{\partial z}{\partial t} + F'(u)\frac{\partial z}{\partial x}$$

buluruz. $x = x(t)$ karakteristikleri üzerinde $\frac{dx}{dt} = F'(u)$ olduğundan,

$$0 \geq \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial z}{\partial x} \equiv \frac{dz}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} \leq 0$$

dır. Yani $z = (t, x)$ karakteristikler üzerinde artmayan fonksiyondur. Böylelikle herhangi bir $(t, x) \in D_T$ için,

$$z(t, x) = u_x(t, x) \leq \sup u'_0(x) = K_0 \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.12)$$

olur. $u_x(t, x)$ fonksiyonunun $t = T$ değerleri için x 'in tüm değerlerinde tanımlı olmadığı durumda (1.12) ifadesini,

$$\frac{u(t, x_2) - u(t, x_1)}{x_2 - x_1} \leq K_0, \quad \forall \quad x_1, x_2 \quad (1.13)$$

şeklinde yazalım. (1.13) denklemi $x_1 < x_2$ olan durumlar için ,

$u(t, x_2) - u(t, x_1) \leq K_0(x_2 - x_1)$ ve $x_2 \rightarrow x^* + 0$, $x_1 \rightarrow x^* - 0$ olmak üzere limite geçerse (burada $x^*, u(x, T)$ fonksiyonu için süreksizlik noktasıdır) $u = u(t, x)$ fonksiyonunun,

$$u_+ = u(t, x^* + 0) < u(t, x^* - 0) = u_- \quad (1.14)$$

parçalı sürekli fonksiyon olduğunu görebiliriz. (1.14) türünden olan eşitsizliğe sıçrayışın mevcut olma koşulu veya Oleinik koşulu denir, [12].

$F''(u) < 0$ olduğu durumda $u = -v$ değişken dönüşümü ile (3) denklemini $v_t + (\tilde{F}(v))_x = 0$ şeklinde yazabiliriz. Burada $\tilde{F}(v) \equiv -F(-v)$ dir. Ayrıca $F''(v) = -F''(-v) > 0$ dir. Bu durumda süreksizliğin mevcut olma koşulu $u_+ > u_-$ olur.

Sonuç olarak $F(u)$ bükey fonksiyonu için çözümde sıçrayışın mevcut olma koşulu aşağıdaki gibi olmaktadır:

1. $F(u)$ fonksiyonu aşağı bükey (konkav) ise (örneğin ; $F(u) = \frac{u^2}{2}, e^u, \dots$) (1.2) denkleminin çözümünde $u_- > u_+$ olduğunda u_- den u_+ ya doğru sıçrayış mevcut olur.

2. $F(u)$ yukarı bükey (konveks) fonksiyon ise (örneğin $F(u) = -u^2, \ln u, \dots$) sıçrayış $u_- < u_+$ olduğunda u_- den u_+ ya doğru mevcut olur.

Durum fonksiyonu konveks olmadığı durumunda aşağıdaki yöntem kullanılır.

1.3 Suni Viskozite Yöntemi

Bu tartışmalar doğrultusunda söz konusu bilgileri bükeyliği olmayan fonksiyonlar için geliştirebiliriz. Bu olayı detaylı bir şekilde inceleyebilmek için ideal ve reel gazların özelliklerine dayanarak fiziksel (daha doğrusu hidrodinamik) kavramlardan yararlanalım.

Eğer $x = x(t)$ herhangi bir boruda hareket eden parçacığın yörüngesi $u(t, x)$ fonksiyonu ise t zamanda x noktasındaki parçacığın hızı olduğu takdirde

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = u(t, x(t))$$

veya

$$\ddot{x}(t) = \frac{du}{dt}$$

olmaktadır. Eğer sabit hızlı akışları incelersek $\frac{du}{dt} = 0$ olur. Buradan Hopf denklemini elde ederiz.

İdeal gaz teorik olarak mevcut olmaktadır. Yani reel gazlarda viskozite dikkate alınmazsa bu gaza bir ideal gaz gibi bakabiliriz. ε ile reel gazın genleşme katsayısını gösterelim. Bu durumda viskozitedeki sürtünme kuvvetini, birim kütlede bulunan $x(t)$ noktasında ki parçacığı etkileyen (belirli koşullar çerçevesinde) $\varepsilon u_{xx}(t, x)$ olarak alabiliriz. Bu durumda,

$$\ddot{x}(t) = \frac{du}{dt} = \varepsilon u_{xx}$$

olur ve buradan Burgers denklemi olarak adlandırılan,

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx} \quad (1.15)$$

denklemini elde ederiz.

Hopf denkleminin kabul gören tüm zayıf çözümleri $u_\varepsilon(t, x)$ çözümünün $\varepsilon \rightarrow 0$ iken limit durumu olmaktadır.

Önce Burgers denkleminin lineerleştirilmesi için bir yöntemi hatırlayalım. (1.15) denklemini,

$$u_t = \left(\varepsilon u_x - \frac{u^2}{2} \right)_x$$

olarak gösterebiliriz. $U(t, x)$ ile aşağıdaki şekilde tanımlanan,

$$U(t, x) = \int_{(0,0)}^{(t,x)} u dx + \left(\varepsilon u_x - \frac{u^2}{2} \right) dt$$

potansiyel fonksiyonunu gösterelim. Kolayca gösterilebilir ki, $U(t, x)$ potansiyel fonksiyonu,

$$U_t + \frac{1}{2} U_x^2 = \varepsilon U_{xx} \quad (1.15)$$

denklemini korur ve burada $u = U_x$ olmaktadır. (1.15) denkleminde $U = -2\varepsilon \ln z$ değişken dönüşümü uygularsak,

$$U_t = -2\varepsilon \frac{1}{z} z_t \quad U_x = -2\varepsilon \frac{1}{z} z_x \quad U_{xx} = -2\varepsilon \left(\frac{z_x}{z} \right)_x = -2 \left(\frac{zz_{xx} - z_x^2}{z^2} \right)$$

buluruz. Bu ifadeler (1.15) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} -2\varepsilon \frac{z_t}{z} + \frac{1}{2} \left(-2\varepsilon \frac{z_x}{z} \right)^2 &= -2\varepsilon^2 \frac{zz_{xx}}{z^2} + 2\varepsilon^2 \frac{z_x^2}{z^2} \\ -2\varepsilon \frac{z_t}{z} + 2\varepsilon^2 \frac{z_x^2}{z^2} &= -2\varepsilon^2 \frac{zz_{xx}}{z^2} + 2\varepsilon^2 \frac{z_x^2}{z^2} \end{aligned}$$

olur ve buradan,

$$z_t = \varepsilon z_{xx} \quad (1.16)$$

elde edilir. (1.16) denklemi $z(t, x)$ fonksiyonuna göre lineer ısı dağılım denklemi olmaktadır. Buradan $u = U_x = -2\varepsilon \frac{z_x}{z}$ olduğu görülür. Şimdi

$$u(t, x) = u_+ - \frac{u_+ - u_-}{2} [1 + \operatorname{sgn}(x - wt)] = \begin{cases} u_+ & , \quad x < wt \\ u_- & , \quad x > wt \end{cases} \quad (1.17)$$

fonksiyonunun (1.2) denkleminin zayıf çözümü olduğunu varsayalım, burada w -sabit $t > 0$ olmaktadır. Bunun için gerek ve yeter koşul $x(t) = wt$ sıçrayış eğrisi üzerinde Rankine-Hugoniot,

$$w = \frac{dx}{dt} = \frac{F(u_+) - F(u_-)}{u_+ - u_-}$$

koşulunun korunmasıdır.

Şimdi (1.2) denkleminin çözümünün yapısını inceleyelim. Bunun için varsayalım ki, $u^\varepsilon(t, x)$,

$$u_t^\varepsilon + (F(u^\varepsilon))_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon \quad (1.18)$$

denkleminin $x \neq wt$ olmak üzere noktasal çözümü olsun. (1.18) denkleminin $u^\varepsilon(t, x)$ çözümünü

$$u^\varepsilon(t, x) = v(\xi), \quad \xi = \frac{x - wt}{\varepsilon} \quad (1.19)$$

koşan dalga şeklinde arayacağız. (1.19) ifadesi (1.18) de yerine konursa ve

$$u_t^\varepsilon = v'(\xi) \xi_t = v'(\xi) \left(-\frac{w}{\varepsilon} \right),$$

$$u_x^\varepsilon = v'(\xi) \frac{1}{\varepsilon}$$

$$u_{xx}^\varepsilon = v''(\xi) \frac{1}{\varepsilon^2}$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$v'(\xi) \left(-\frac{w}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} (f(v))' = \varepsilon v'' \frac{1}{\varepsilon^2}$$

veya

$$-wv'(\xi) + (f(v))' = v'' \quad (1.20)$$

sonucu elde edilir.

Diğer taraftan da $u^\varepsilon = v\left(\frac{x-wt}{\varepsilon}\right)$ nun (1.18) eşitliğiyle tanımlanan çözüme noktasal olarak ($x \neq wt$ olmak üzere) yaklaşabilmesi yalnız ve yalnız v fonksiyonunun aşağıdaki koşulları

$$v(-\infty) = u_- , v(+\infty) = u_+ \quad (1.21)$$

sağladığı takdirde gerçekleşebilir. (1.20) yı integrallersek;

$$-wt + F(v) = v' + C$$

veya

$$v' = \wp(v) + C \quad (1.22)$$

olarak elde ederiz. Burada,

$$\wp(v) = -wv + F(v)$$

ve C herhangi bir sabit olmaktadır.

(1.22) otonom denkleminin (1.21) koşulunu koruması için gerekli ve yeterli koşul aşağıda verilmiştir:

1. u_- ve u_+ özel noktalarında (1.22) dekleminin sağ tarafı sıfıra dönüşür, yani

$$\wp(u_-) + C = \wp(u_+) + C = 0$$

olur. Böylece $\wp(u_-) = \wp(u_+)$ koşulu

$$F(u_-) - wu_- = F(u_+) - wu_+$$

olup bu ifade Rankine-Hugoniot koşuluyla çakışır.

2. u_- ve u_+ arasında başka özel nokta yoksa , söz konusu aralıkta

$$\wp(v) - \wp(u_-) = \wp(v) - \wp(u_+)$$

ifadesi,

a) $u_- < u_+$ olursa pozitifdir. Bu durumda $v(\xi)$ artar yani

$$\wp(v) - \wp(u_-) > 0 \quad \forall v \in (u_-, u_+), \quad u_- < u_+ \quad (1.23)$$

b) $u_- > u_+$ olduğunda negatiftir. Bu durumda $v(\xi)$ azalır yani

$$\wp(v) - \wp(u_-) < 0 \quad \forall v \in (u_-, u_+), \quad u_- > u_+ \quad (1.24)$$

Bu koşullar korunduğu takdirde bizi ilgilendiren çözüm,

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{\wp(v) - \wp(u_-)} = \xi - \xi_0$$

şeklinde yazılır ve burada $v_0 = \frac{u_+ - u_-}{2}$ olmaktadır. (1.23) ve (1.24) koşulları sıçrayışın varlık koşullarının analitik yazılım formudur.

Şimdi bu koşulların geometrik anlamını verelim. Bunun için,

$\wp(v) = F(v) - wt$ ifadesini (1.23) ve (1.24) de yerine yazarsak

$$\wp(v) - \wp(u_-) = F(v) - wt - (F(u_-) - wu_-) > 0, \quad v \in (u_-, u_+)$$

yani, $u_- < u_+$ olduğu takdirde

$$F(v) - F(u_-) > w(v - u_-), \quad \forall v \in (u_-, u_+)$$

elde ederiz. $u_- > u_+$ olduğu durumda ise

$$F(v) - F(u_+) > w(v - u_+), \quad \forall v \in (u_+, u_-)$$

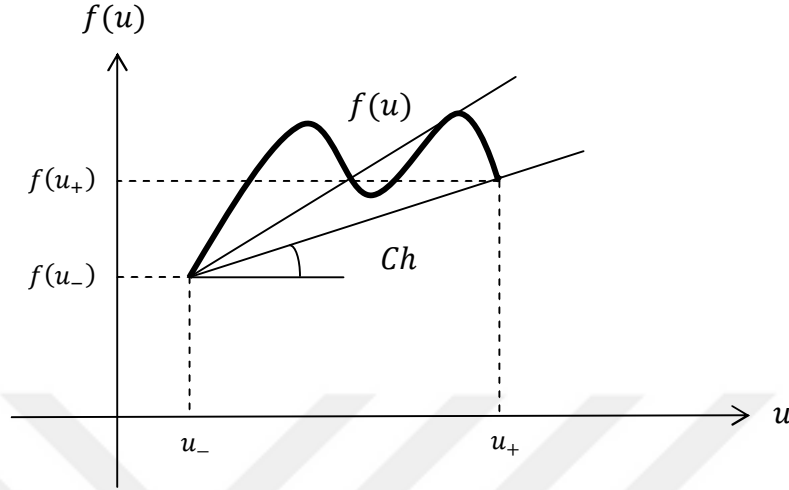
alırız. Rankine-Hugoniot koşulunu dikkate alırsak, $u_1 < u_+$ olduğuda,

$$\frac{F(u) - F(u_-)}{u - u_-} > w = \frac{F(u_+) - F(u_-)}{u_+ - u_-}, \quad \forall u \in (u_-, u_+) \quad (1.25)$$

olur veya $u_1 > u_+$

$$\frac{F(u) - F(u_+)}{u - u_+} < w = \frac{F(u_+) - F(u_-)}{u_+ - u_-}, \quad \forall u \in (u_+, u_-)$$

buluruz. Rankine-Hugoniot koşulunun geometrik anlamını gösterebilmemiz için $F(u)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.



Şekil 1

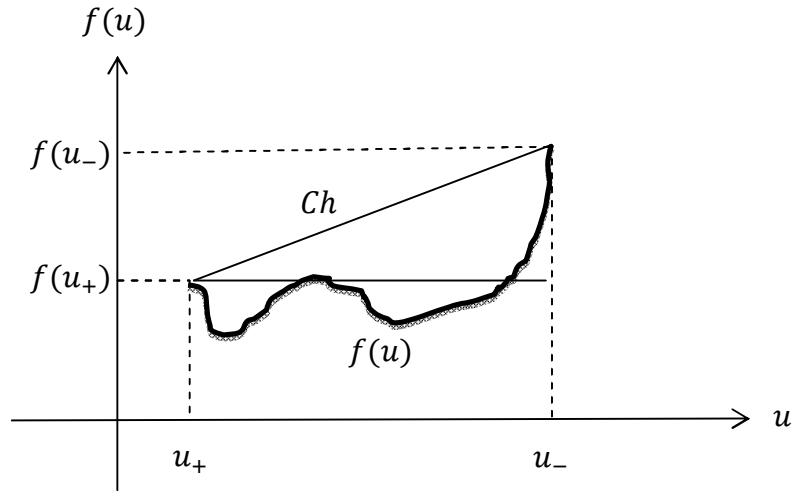
(1.25) koşulunun anlamı şudur: Ch kirişinin eğim açısı $(u_-, F(u_-))$ ve $(u_+, F(u_+))$ noktalarını birleştiren doğrunun eğim açısından küçük olmaktadır. Böylelikle $F(u)$ fonksiyonunun (u_-, u_+) aralığındaki grafiği Ch kirişinin üzerinde olmaktadır, Şekil 1.

Benzer şekilde (1.26) koşulunun anlamı da $F(u)$ fonksiyonunun (u_+, u_-) aralığındaki grafiği Ch kirişinin altında olmasıdır, Şekil 2.

Sonuç olarak, (1.2) denkleminin $u(t, x)$ çözümünde u_- den u_+ ya doğru sıçrayışın olması için (x 'in artan tarafında), aşağıdaki sıçrayışın mevcut olma koşullarını elde ederiz.

a) $u_- < u_+$ olduğunda $F(u)$ fonksiyonunun $[u_-, u_+]$ aralığındaki grafiği $(u_-, F(u_-))$ ve $(u_+, F(u_+))$ noktalarını birleştiren kirişin üstünde yerleşmesi gerekmektedir.

b) $u_- > u_+$ olduğunda ise $F(u)$ fonksiyonunun $[u_+, u_-]$ aralığındaki grafiği $(u_+, F(u_+))$ ve $(u_-, F(u_-))$ noktalarını birleştiren kirişin altında yerleşmesi gerekmektedir.



Şekil 2

Örnek 1. Kolayca gösterilebilir ki,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

örneğin,

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t, \\ 1, & x > t \end{cases}$$

çözümü için entropi koşulu bozulur çünkü $F'(u_-) = 0$, $U = \frac{1}{2}$ ve $F'(u_+) = 1$ olduğundan (1.25) koşulu korunmamaktadır. Fakat,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

örneğindeki problemde $F'(u_-) = 1$, $U = \frac{1}{2}$ ve $F'(u_+) = 0$ olduğundan entropi koşulu sağlanmaktadır.

Yukarıda (1.25) ve (1.26) koşuluna neden entropinin artma koşulu denmektedir. Bilindiği gibi nonlinear denklemlerle ifade edilebilen fiziksel süreçler zaman bakımından geriye dönemezler.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Hopf denklemi herhangi bir hortumda akan gazın hareketini ifade edebilen en basit bir model olmaktadır. Daha detaylı modellerde basınç fonksiyonu, gazın sıkıştırılabilirliği varsayımında ise yoğunluk fonksiyonları da yer almaktadır. Gazın durumunu ifade edebilen bu büyüklükler yardımıyla S entropi fonksiyonu oluşturulur ki, söz konusu fonksiyon darbe dalgasından geçtiğinde zamana göre azalmamaktadır yani;

$$S_+ = S(x, t + 0) \geq S_- = S(x, t - 0) \quad (E)$$

dır. Tersinmezliği ifade edebilen bu eşitsizliklere “Entropinin artma eşitsizliği” denir.

Örneğin Hopf denklemiyle ifade edilebilen hidrodinamik modellerde entropi fonksiyonu olarak kinetik enerji,

$$S(x, t) = \frac{1}{2} u^2(x, t)$$

kabul edilebilir.

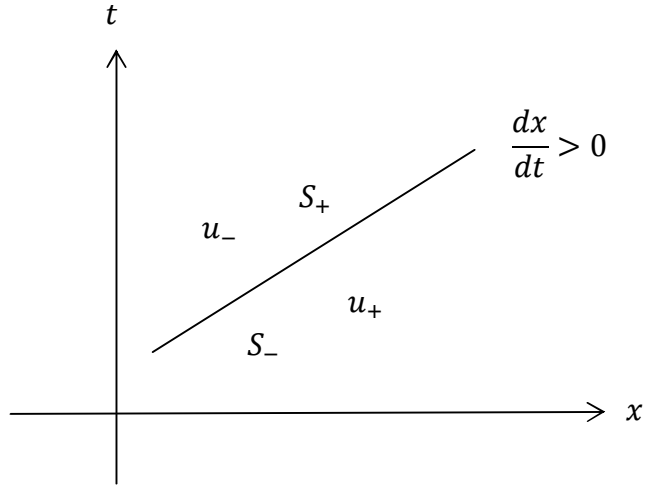
Gösterelim ki, gerçekten de darbe dalgasından geçtiğinde (E) koşulu korunmaktadır

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

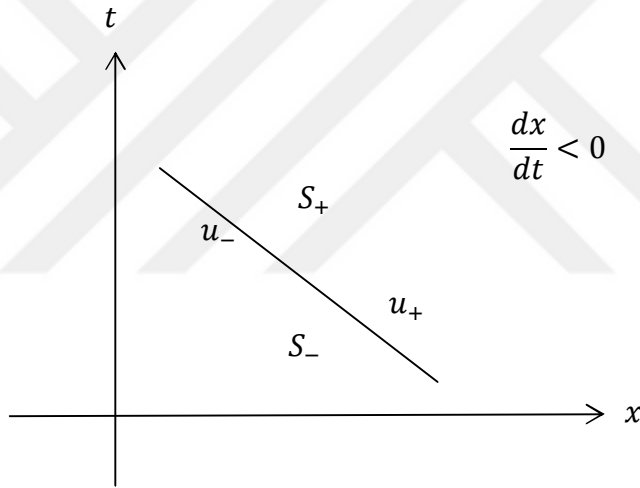
denklemini için Rankine-Hugoniot koşulu

$$\frac{u_- - u_+}{2} = \frac{dx}{dt}$$

olur.



Şekil 3



Şekil 4

aşağı bükey hal fonksiyonları için ise sıçrayışın mevcut olma koşulu,

$$u_- - u_+ > 0$$

olmaktadır.

$\frac{dx}{dt} > 0$ olduğu takdirde $S_- = \frac{u_+^2}{2}$ ve $S_+ = \frac{u_-^2}{2}$ oluyor. Sonuncu eşitsizliği $\frac{u_- - u_+}{2}$ ile çarparsak,

$\frac{u_-^2 - u_+^2}{2} > 0$ veya $S_- < S_+$ olduğunu elde ederiz. Benzer yolla $\frac{dx}{dt} < 0$ olduğunda ise

$$S_- = \frac{u_-^2}{2} < \frac{u_+^2}{2} = S_+$$

olduğunu görebiliriz.

$$u_t + F_x(u) = 0 \quad (1.27)$$

denkleminin geriye dönmezliğini gösterebilen diğer bir fonksiyon da fiziksel sistemin toplam kinetik enerjisi,

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^2(x, t) dx$$

olabilir.

Yukarıda ispatlandığı gibi (1.27) denkleminin pürüzsüz başlangıç verileri çerçevesinde (örneğin sonlu taşıyıcıya sahip olan) $[0, T_0)$ zaman aralığında klasik ve herhangi bir $t \leq T_0$ ler içinse sonlu taşıyıcıya sahip $u(x, t)$ çözümü mevcut olmaktadır. (1.27) denklemini u ile çarparsak,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{u(x,t)} \eta F'(\eta) d\eta \right) = 0$$

elde ederiz. Sonuncu denklemin $x \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere integrallersek,

$$\frac{dE}{dt} = - \left(\left(\int_0^{u(x,t)} \eta F'(\eta) d\eta \right) \right) \Bigg|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0$$

alırız. Dolayısıyla $t \leq T_0$ olduğu sürece $E(t) = \text{sabit} = E(0)$ olur, yani çözümde hiçbir özellik oluşmadığı sürece toplam kinetik enerji sıfıra eşit olur.

Şimdi varsayalım ki $t > T_0$ olsun ve (1.27) nin zayıf çözümünü

$$u_t^\varepsilon + (F(u^\varepsilon))_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon$$

denkleminin (1.2) başlangıç koşulu çerçevesinde $L_2(R)$ anlamında $\varepsilon \rightarrow 0$ limit olarak düşünelim. Sonuncu denklemi u^ε ile çarparak ve $t \in [0, T)$ aralığında u^ε , u_x^ε , u_{xx}^ε fonksiyonlarının $x \rightarrow \pm\infty$ olduğunda düzgün sıfıra yaklaştığı varsayımı çerçevesinde integrallersek,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u^\varepsilon)^2}{2} dx &= - \left(\int_0^{u^\varepsilon(x,t)} \eta F'(\eta) d\eta \right) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \\ \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} ((u^\varepsilon)^2)_{xx} - (u_x^\varepsilon)^2 \right] dx &\leq - \left(\int_0^{u^\varepsilon(x,t)} \eta F'(\eta) d\eta \right) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \\ \frac{\varepsilon}{2} (u^\varepsilon)_x^2 \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Nihayet $\varepsilon \rightarrow 0$ için limit alırsak,

$$\frac{dE}{dt} \leq 0$$

olduğunu elde ederiz.

Dolayısıyla darbe dalgalarının mevcut olduğu durumda toplam kinetik enerji ciddi olarak negatif olur, yani kinetik enerji disipatif etkisini gösterir (kinetik enerji darbe dalgası üzerinde kısmen ısı enerjisine dönüşür) Bundan dolayı da bu tür fiziksel olaylarda geriyedönmezlik (tersinmezlik) söz konusu olmaz.

Entropi koşulu tanımlamanın ikinci yolu biraz daha zor olmaktadır, çünkü bu yaklaşım korunum kanunları ve fiziksel sistemin çözümleri ile ilişkili iki tane entropi fonksiyonu seçilmesiyle bağlı olmaktadır. Söz konusu çifti sırasıyla $S = S(u)$ entropi fonksiyonu ve $\Phi = \Phi(u)$ entropi akış fonksiyonu olarak gösterelim. Amacımız (1.27) denklemini koruyan pürüzsüz $u(x, t)$ fonksiyonu için,

$$\frac{\partial S(u)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} = 0 \quad (1.28)$$

denklemini koruyan $S = S(u)$ ve $\Phi = \Phi(u)$ fonksiyonlarının bulunmasıdır. Varsayalım ki, $S'' \geq 0$ Bu yaklaşımın dahil edilmesi ve gereklilikliği sonra daha iyi anlaşılacaktır. Böylelikle eklenen korunum kanununun da entropinin korunması koşulunu sağlayacağını göreceğiz.

(1.28) denklemini konservatif olmayan

$$S'(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \Phi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.29)$$

şeklinde yazalım. (1.28) denkleminin pürüzsüz çözümü de ;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

denklemini korumaktadır. Sonuncu denklemi $S'(u)$ ile çarparsak ;

$$S'(u) \frac{\partial u}{\partial t} + S'(u)F'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.30)$$

elde ederiz. (1.29) ve (1.30) denklemlerinden $S = S(u)$ ve $\Phi = \Phi(u)$ fonksiyonlarının aşağıdaki

$$\Phi'(u) = S'(u)F'(u) \quad (1.31)$$

eşitliğini sağladığı görülmektedir. Skaler korunum kanunları için (1.31) denkleminin birden fazla çözümü olmaktadır.

Not 1. $H(u)$ (1.27) denkleminin $F(u)$ durum fonksiyonu ile $F(u) = H'(u)$ şeklinde bağlı olan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde entropi fonksiyonları olarak $S_1(u) = \frac{1}{2}|u^2|$ ve $\Phi_1(u) = uF(u) - H(u)$ alabiliriz. Böylelikle (1.27) korunum kanunu $S_1(u)$ entropi fonksiyonu ve $\Phi_1(u)$ entropi akış fonksiyonlarını oluşturmaktadır. Sade hesaplama yolu ile

$$\Phi'(u) = S'(u)F'(u)$$

olduğu da görülmektedir. Örneğin,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Hopf denklemi için $H(u) = \frac{u^3}{6}$ olduğundan entropi akış fonksiyonu $\Phi_1(u) = \frac{u^3}{3}$ olur. Amacımız entropi ve entropi akış fonksiyonlarını incelediğimiz başlangıç değer probleminin doğru çözümünün seçilebilmesi için kullanmaktır.

Teorem 1. Varsayalım ki (1.27) korunum kuralı $S \geq 0$ ve S konveksi ile ilgili herhangi bir entropinin korunum kuralına sahiptir. Eğer u modifiye olunmuş (1.18) denkleminin $\varepsilon \rightarrow 0$ olduğundaki limit fonksiyonu ise sözkonusu u ,

$$\frac{\partial S(u)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} \leq 0 \quad (1.32)$$

eşitsizliğini sağlamaktadır.

İspat. (1.32) eşitsizliğini ispatlamak için yalnız pozitif test fonksiyonlarını kullanacağız. Bu nedenle $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ olmak üzere herhangi bir

$$\varphi(x, t) \in \{C_{0,+}^1 = C_0^1 \cup \{\varphi: \varphi(x, t) \geq 0\}\}$$

fonksiyonu için aşağıdaki

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \{S(u(x, t))\varphi_t(x, t) + \Phi(u(x, t))\Phi_x(x, t)\} dx dt + \int_{-\infty}^\infty S(u(x, 0))\varphi(x, 0) dx \geq 0 \quad (1.33)$$

eşitsizliğin korunmasını isteyelim. (1.18) denklemini $S'(u^\varepsilon)$ ile çarparsak,

$$S'(u^\varepsilon)u_t^\varepsilon + S'(u^\varepsilon)(F(u^\varepsilon))_x - S'(u^\varepsilon)\varepsilon u_{xx}^\varepsilon = 0$$

veya

$$S_t(u^\varepsilon) + S'(u^\varepsilon)F'(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon - \varepsilon S'(u^\varepsilon)u_{xx}^\varepsilon = 0 \quad (1.34)$$

elde ederiz. S ve Φ fonksiyonları için $\Phi'(u^\varepsilon) = S'(u^\varepsilon)F'(u^\varepsilon)$ ve $\Phi'(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon = \Phi_x(u^\varepsilon)$ olduğundan (1.34) denklemini,

$$S_t(u^\varepsilon) + \Phi_x(u^\varepsilon) - \varepsilon S'(u^\varepsilon)u_{xx}^\varepsilon = 0 \quad (1.35)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$S'(u^\varepsilon)u_{xx}^\varepsilon = (S'(u^\varepsilon)_x)_x - S''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2 \quad (1.36)$$

olarak yazabiliriz.

Şimdi (1.36) denklemini $\varphi(x, t) \in C_{0,+}^1$ ile çarpıp $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ bölgesi üzerinde integrallersek,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \varphi(x, t)[S(u^\varepsilon)_t + \Phi(u^\varepsilon)_x] dx dt = \\ & \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \varepsilon \varphi(x, t) \left[(S'(u^\varepsilon)_x)_x - S''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2 \right] dx dt \end{aligned}$$

elde ederiz. $\varphi(x, t)$ fonksiyonu kompakt taşıyıcıya sahip olduğundan yukarıdaki ifadeyi

$$\int_{-a}^a \int_0^T \varphi(x, t)[S(u^\varepsilon)_t + \Phi(u^\varepsilon)_x] dx dt =$$

$$\int_{-a}^a \int_0^T \varepsilon \varphi(x, t) [(S'(u^\varepsilon)_x)_x - S''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2] dx dt$$

şeklinde yazabiliriz. Sol taraftaki integrallerden birincisine t ye göre , ikincisine ise x e göre kısmi integrasyon formülünü uygularsak,

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \varphi(x, 0) S(u^\varepsilon(x, 0)) dx - \int_{-a}^a \int_0^T \varphi_t(x, t) S(u^\varepsilon) dx dt - \\ & \int_{-a}^a \int_0^T \varphi_x(x, t) \Phi(u^\varepsilon) dx dt = \varepsilon \int_{-a}^a \int_0^T \varphi_{xx}(x, t) S(u^\varepsilon) dx dt - \\ & \varepsilon \int_{-a}^a \int_0^T \varphi(x, t) S''(u^\varepsilon) (u_x^\varepsilon)^2 dx dt \end{aligned}$$

buluruz.

$$-\varepsilon \int_{-a}^a \int_0^T \varphi(x, t) S''(u^\varepsilon) (u_x^\varepsilon)^2 dx dt \leq 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi entropi çözümü için ikinci tanımı verelim.

Tanım 2.

$$\iint_D \left\{ \varphi_t(x, t) u(x, t) + \varphi_x(x, t) \frac{u^2(x, t)}{2} \right\} dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx = 0$$

integral eşitliğini ve herhangi bir S entropi ve Φ entropi akış fonksiyonu için (1.32) denklemini klasik anlamda ((1.33) ise zayıf anlamda) koruyan $u(x, t)$ çözümüne 2. entropi koşulunu koruyan çözüm denir.

Bu tanımı kullanarak yukarıda incelediğimiz korunum kanunu için yazılmış başlangıç değer probleminin fiziksel yararlı çözümünün elde edilmesi için entropi ve entropi akış fonksiyonlarının nasıl şekilleneceğini gösterelim.

Durum fonksiyonu $F(u)$ konveks ve çözümünde zayıf sıçrayış olan (1.2) denklemini gözönüne alalım.

Teorem 2. S entropi fonksiyonunun ciddi konveks ve $u(x, t)$ çözümünün 2. entropi koşulunu koruduğunu varsayalım. Bu takdirde $u(x, t)$ fonksiyonu (1.2) denkleminin 2.

entropi koşulunu koruyan tek bir çözümü olmaktadır ve bu çözüm kaybolan suni viskoziteye sahip çözüm olmaktadır.

Entropi $S_1(u) = \frac{1}{2}|u^2|$ ve entropi akış fonksiyonları $\Phi_1(u) = \frac{u^3}{3}$ olmak üzere;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

denklemini,

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

başlangıç koşulu çerçevesinde gözönüne alalım. Yukarıda gösterildiği üzere bu problemin çözümü,

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \frac{x}{t} < U, \\ 0, & \frac{x}{t} > U \end{cases} \quad (1.37)$$

formülü ile tanımlanan $u(x, t)$ fonksiyonunun 2. entropi koşulunu koruyan çözümü olduğunu gösterebilmek için aşağıdaki ifadeyi gözönüne alalım.

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi_t(x, t) S_1(u) dx dt + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi_x \Phi_1(u) dx dt + \int_{-\infty}^\infty \varphi(x, 0) S_1(u(x, 0)) dx$$

$\varphi(x, t)$ nin sonlu taşıyıcıya sahip fonksiyon olduğunu dikkate alırsak sonuncu ifadeyi

$$\int_0^T \int_{-a}^a \varphi_t(x, t) \frac{|u|^2}{2} dx dt + \int_0^T \int_{-a}^a \varphi_x \frac{u^3}{6} dx dt + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \varphi(x, 0) u_0^2 dx$$

şeklinde yazabiliriz. (1.37) formülü ile tanımlanan $u(x, t)$ nin ifadesi sonucu eşitlikte yerine konursa,

$$\int_0^T \int_{-a}^{\frac{1}{2}} \varphi_t(x, t) \frac{1}{2} dx dt + \int_0^T \int_{-a}^{\frac{1}{2}} \varphi_x \frac{1}{6} dx dt + \frac{1}{2} \int_{-a}^0 \varphi(x, 0) dx$$

elde edilir. Elde edilen ifadede 1. integrali,

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{-a}^0 \varphi_t(x, t) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_t dx dt$$

şeklinde yazıp , integralleme sırasını değiştirir ve integralleme işlemlerini gerçekleştirirsek,

$$\left(\frac{1}{2} \int_{-a}^0 \varphi(x, t) \Big|_{t=0}^{t=T} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} \varphi(x, t) \Big|_{t=2x}^{t=T} dx + \frac{1}{6} \int_0^T \varphi(x, t) \Big|_{x=-a}^{x=\frac{1}{2}} dt + \right)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-a}^0 \varphi(x, 0) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^0 \varphi(x, T) dx - \frac{1}{2} \int_{-a}^0 \varphi(x, 0) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} \varphi(x, T) dx -$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} \varphi(x, 2x) dx + \frac{1}{6} \int_0^T \varphi\left(\frac{t}{2}, t\right) dt - \frac{1}{6} \int_0^T \varphi(-a, t) dt + \int_{-a}^0 \varphi(x, 0) dx =$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-a}^0 \varphi(x, 0) dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} \varphi(x, 2x) dx + \frac{1}{6} \int_0^T \varphi\left(\frac{t}{2}, t\right) dt +$$

$$\frac{1}{2} \int_{-a}^0 \varphi(x, 0) dx = \frac{1}{12} \int_0^T \varphi\left(\frac{t}{2}, t\right) dt$$

elde ederiz.

Yukarıda gösterildiği gibi $u(x, t)$ problemin zayıf çözümü olmaktadır ve $f(x, t)$ lerin pozitif olduğu durumlarda sonucu ifadenin sağ tarafı da pozitif olmaktadır. Dolayısıyla teorem ispatlanmış olur. Şimdi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

denkleminin,

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

başlangıç şartını sağlayan,

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{t}{2}, \\ 1, & x < \frac{t}{2} \end{cases}$$

çözümünün 2. entropi koşulunu koruyup korumadığını kontrol edelim. Bu durum için de entropi ve entropi akış fonksiyonlarını sırasıyla $S_1(u) = \frac{1}{2}|u^2|$ ve $\Phi_1(u) = \frac{u^3}{3}$ olsun ve aşağıdaki,

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi_t(x, t) S_1(u) dx dt + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi_x \Phi_1(u) dx dt + \int_{-\infty}^\infty \varphi(x, 0) S_1(u(x, 0)) dx$$

ifadesini gözönüne alalım.

$\varphi(x, t)$ nin sonlu taşıyıcıya sahip olduğunu ve $u(x, t)$ ' nin ifadesini dikkate alırsak sonuncu ifadeyi,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{-a}^a \varphi_t(x, t) \frac{|u(x, t)|^2}{2} dx dt + \int_0^T \int_{-a}^a \varphi_x(x, t) \frac{u^3(x, t)}{3} dx dt + \\ & \frac{1}{2} \int_{-a}^a \varphi(x, 0) u_0^2 dx \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. $u(x, t)$ nin ifadesi yerine konulursa,

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\frac{t}{2}}^a \varphi_t(x, t) dx dt + \frac{1}{3} \int_0^T \int_{\frac{t}{2}}^a \varphi_x dx dt + \frac{1}{2} \int_0^a \varphi(x, 0) dx$$

elde edilir. Birinci integrali iki integrale ayıralım.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi_t(x, t) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\frac{T}{2}}^a \varphi_t dx dt + \\ & \frac{1}{3} \int_0^T \int_{\frac{t}{2}}^a \varphi_x(x, t) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^a \varphi(x, 0) dx \end{aligned}$$

1. integralde integralleme sınırlarının yerini değiştirirsek,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} \int_0^{2x} \varphi_t(x, t) dx dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{T}{2}}^T \int_0^T \varphi_t dx dt + \frac{1}{3} \int_0^T \int_{\frac{t}{2}}^a \varphi_x(x, t) dx dt + \\ & \frac{1}{2} \int_0^a \varphi(x, 0) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} \varphi(x, t) \Big|_{t=0}^{t=2x} dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{T}{2}}^0 \varphi(x, t) \Big|_{t=0}^{t=T} dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} \int_0^T \varphi(x, t) \Big|_{x=\frac{t}{2}}^{x=a} dt + \frac{1}{2} \int_0^a \varphi(x, 0) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} [\varphi(x, 2x) - \varphi(x, 0)] dx + \\
& \frac{1}{2} \int_{\frac{T}{2}}^0 [\varphi(x, T) - \varphi(x, 0)] dx + \frac{1}{3} \int_0^T \left[\varphi(a, t) - \varphi\left(\frac{t}{2}, t\right) \right] dt + \frac{1}{2} \int_0^a \varphi(x, 0) dx = \\
& \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} \varphi(x, 2x) dx - \frac{1}{3} \int_0^T \varphi\left(\frac{t}{2}, t\right) dt = -\frac{1}{6} \int_0^T \varphi(x, 2x) dx
\end{aligned}$$

olur. Görüldüğü gibi bu durumda teorem geçerli olmamaktadır.

$F(u)$ fonksiyonunun konveks olduğu durumda,

$$u_+ = u(t, x^* + 0) < u(t, x^* - 0) = u_-$$

sıçrayışın mevcut olma koşulu,

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} \leq \frac{E}{t}, \quad a > 0, \quad t > 0 \quad (1.38)$$

koşuluna denk olmaktadır. Burada E, x, t, a ya bağlı olmayan bir büyüklük olmaktadır.

Gerçekten de $u'_0(x) \geq 0$ olduğunda

$$u_x = \frac{u'_0}{1 + u'_0 F'' t}, F''(u) \leq 0$$

olduğu takdirde $u'(x) \leq 0$ ve $F''(u) > 0$ ise

$$u_x \leq \frac{u'_0}{u'_0 F'' t} = \frac{1}{F'' t} \leq \frac{E}{t}$$

olmaktadır. Burada $E = \frac{1}{\inf F''}$ dir.

2. İKİ BOYUTLU KORUNUM KURALLARI İÇİN RIEMANN PROBLEMİ

2.1 Entropi Koşulu

Bu bölüm bir boyutlu problemde olduğu gibi bazı kavramlar içerir. Bir boyutlu Burgers denkleminde olduğu gibi (1.1) denklemini,

$$u_t + f_x(u) + g_y(u) = \varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) \quad (2.1)$$

şeklinde yazalım. $\varepsilon \rightarrow 0 +$ Altını çizelim ki bizim amacımız (2.1) denklemini çözmek değil onun genel özelliklerini incelemektir.

$\varphi(u)$ herhangi bir fonksiyon olsun ve (2.1) denklemini $\varphi'(u)$ ile çarpalım.

$$\varphi'(u)u_t + \varphi'(u)f_x(u) + \varphi'(u)g_y(u) = \varepsilon\varphi'(u)(u_{xx} + u_{yy})$$

$$\varphi'(u)u_t = \frac{\partial\varphi(u)}{\partial t}$$

olduğundan,

$$\frac{\partial\varphi(u)}{\partial t} + \varphi'(u)f'(u)u_x + \varphi'(u)g'(u)u_y = \varepsilon\varphi'(u)u_{xx} + \varepsilon\varphi'(u)u_{yy} \quad (2.2)$$

$$F(u) = \int \varphi'(u).f'(u).du$$

$$G(u) = \int \varphi'(u)g'(u)du$$

işaret edelim.

$$(\varphi'(u)u_x)_x = \varphi'_x u_x + \varphi'(u)u_{xx}$$

ifadesini dikkate alarak,

$$\varphi'(u)u_{xx} = (\varphi'(u)u_x)_x - \varphi''(u)u_x^2$$

$$\varphi'(u)u_{yy} = (\varphi'(u)u_y)_y - \varphi''(u)u_y^2$$

olur. Buradan,

$$\frac{\partial\varphi(u)}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} + \frac{\partial G(u)}{\partial y} = \varepsilon(\varphi'(u)u_x)_x - \varphi''(u)u_x^2 + \varepsilon(\varphi'(u)u_y)_y - \varphi''(u)u_y^2$$

veya

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} + \frac{\partial G(u)}{\partial y} = -\varepsilon \varphi''(u)(u_x^2 + u_y^2) + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \quad (2.3)$$

olur. Şimdi (2.3) denklemini $\pi(x, y, t) \in C^{01}((0, \infty) \times R^2)$ fonksiyonu ile çarpıp integrallersek,

$$\begin{aligned} \int \pi \left(\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} + \frac{\partial G(u)}{\partial y} \right) dx dy dt &= \varepsilon \int \pi \varphi''(u_x^2 + u_y^2) dx dy dt - \\ &\varepsilon \int \varphi(u)(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) dx dy dt \end{aligned}$$

alırız.

$u^\varepsilon(x, t)$ (2.1) denkleminin çözümleri ise ve L^1 de $u(x, t)$ limitine sahipse herhangi bir konveks π fonksiyonu için sonuncu eşitlikten $\varepsilon \rightarrow 0 +$ ya limit alırsak,

$$\left(\int \varphi(u) \pi_t + F(u) \pi_x + G(u) \pi_y \right) \geq 0$$

olur.

Süreksizlik yüzeyinin denkleminin $S(\xi, \eta) = 0$ olduğunu varsayarsak,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\xi S_\xi - \eta S_\eta, S_\xi, S_\eta)$$

olur.

$$H(v) = S_\xi f(v) + S_\eta g(v)$$

dahil edelim. Bu durumda entropi koşulu,

$$\alpha(k - u^-, f(k) - f(u^-), g(k) - g(u^-)) \geq 0$$

$$(-\xi S_\xi - \eta S_\eta)(k - u^-) + S_\xi(f(k) - f(u^-)) + S_\eta(g(k) - g(u^-)) =$$

$$(-\xi S_\xi - \eta S_\eta)(k - u^-) + S_\xi f(k) + S_\eta g(k) - S_\xi f(u^-) - S_\eta g(u^-) =$$

$$= (-\xi S_\xi - \eta S_\eta)(k - u^-) + H(k) - H(u^-) > 0$$

$$\frac{H(k) - H(u^-)}{(k - u^-)} \geq \xi S_\xi + \eta S_\eta = \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta,$$

$$\frac{H(u^+) - H(u^-)}{u^+ - u^-},$$

$$(-\xi S_\xi - \eta S_\eta)(u^- - u^+) + S_\xi(f(u^-) - f(u^+)) + S_\eta(g(u^-) - g(u^+)) = 0,$$

$$-(\xi S_\xi + \eta S_\eta)(u^- - u^+) + H(u^-) - H(u^+) = 0,$$

$$\frac{H(u^-) - H(u^+)}{(u^- - u^+)} = \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta,$$

$$\frac{H(k) - H(u^-)}{k - u^-} \geq \frac{H(u^-) - H(u^+)}{(u^- - u^+)}$$

olur. Bu koşula sıçrayış koşulu denir.

$S(\xi, \eta) = 0$ yüzeyinin denklemi (ξ, η) düzleminde $\xi = \frac{x}{t}$ $\eta = \frac{y}{t}$ olursa $S\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) = 0$

olur. (x,y,t) düzleminde grad alırsak (S_t, S_x, S_y) normal vektör olur.

$$S_t = \frac{\partial S}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x}{t^2} S_\xi - \frac{y}{t^2} S_\eta = -\frac{1}{t} (\xi S_\xi + \eta S_\eta)$$

$$S_x = \frac{1}{t} S_\xi, \quad S_y = \frac{1}{t} S_\eta, \quad \frac{1}{t} (-\xi S_\xi - \eta S_\eta, S_\xi, S_\eta)$$

Bulduğumuz normal vektörü kullanarak Rankine-Hugoniot koşulunu,

$$\alpha(u^+ - u^-, f(u^+) - f(u^-), g(u^+) - g(u^-)),$$

$$(-\xi S_\xi - \eta S_\eta)(u^+ - u^- + S_\xi[f] + S_\eta[g] - \xi S_\xi[u] - \eta S_\eta[u] + S_\xi[f] + S_\eta[g]) = 0$$

veya

$$S_\xi([f] - \xi[u]) + S_\eta([g] - \eta[u]) = 0$$

şeklinde buluruz. Buradan,

$$\frac{\partial S([f] - \xi[u])}{d\xi} = -\frac{\partial S([g] - \eta[u])}{d\xi},$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{[g] - \eta[u]}{[f] - \xi[u]} = \frac{\left(\frac{[g]}{[u]} - \eta\right)[u]}{\left(\frac{[f]}{[u]} - \xi\right)[u]}$$

veya

$$\frac{g'_{+-} - \eta}{f'_{+-} - \xi} = \frac{\eta - g'_{+-}}{\xi - f'_{+-}}$$

olur.

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta - g'_{+-}}{\xi - f'_{+-}} \quad (2.4)$$

Burada,

$$g'_{+-} = \frac{g(u^+) - g(u^-)}{u^+ - u^-} \quad (2.5)$$

$$f'_{+-} = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} \quad (2.6)$$

olmaktadır.

2.2 Üç Parçalı Sabit Riemann Çözümleri

Aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$u_t + f_x(u) + g_y(u) = 0 \quad (2.7)$$

Başlangıç koşulu,

$$u_0(x, y) = \begin{cases} u_1, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + a \\ u_2, & \frac{\pi}{2} + a < \theta \leq \frac{3\pi}{2} \\ u_3, & \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (2.8)$$

olsun. Burada u_1, u_2, u_3 sırasıyla (1,2,3) değerlerini alır ve $0 < a < \frac{\pi}{2}$ herhangi bir açıdır. (2.7) türünden olan denklemlerin gerçek çözümlerinin bulunması [2], [5], [6], [18], [19] gibi kaynaklarda incelenmiştir. Problemin çözümünün varlık ve tekliği [3], [4], [7], [17], [9] ve [10]'da incelenmiştir.

Söz konusu problemlerin sayısal çözümlerinin bulunması için [3], [9] vs. gibi kaynaklarda sonlu farklar yöntemi incelenmiştir. Bilindiği üzere hatta bir boyutlu Riemann probleminin başlangıç fonksiyonu yeteri kadar pürüzsüz olduğu takdirde bile problemin çözümü yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarına sahip olur. Yer değişkenlerinin sayısının iki olduğu durumda sıçrayış noktalarının sayısı sonsuz sayıda olabilir. Bu

sıçrayışlardan hangisinin fiziksel anlamlı olduğunu bilmek için özel araştırmalar yapmak gerekir. Böylelikle çözümde süreksizlik noktaları olan problemleri direkt sonlu farklara ayırklaştırmak çözümdeki sıçrayışın bir kaç noktaya dağılmasına neden olabilir. Fakat, sıçrayış çözümün bir noktadaki ani değişimi olmaktadır.

Süreksiz fonksiyonlarla çalışma zorunluluğu ve olayın fiziksel özelliklerini düzgün ifade edebilen nümerik çözümün bulunması için makalede orijinal bir yöntem önerilmiştir. Bu amaçla esas problemin çözümünde bulunmayan avantajlara sahip ve esas problemle bilinen anlamda denk olan yardımcı problemin sayısal çözümünün bulunması için literatürde iyi bilinen yöntemlerin uygulanmasında hiç bir sorun çıkmamaktadır. Yardımcı problemin nümerik çözümü kullanılarak esas problemin de nümerik çözümü kolaylıkla elde edilebilir.

Yukarıda söylediğimiz gibi, (2.7), (2.8) probleminin sürekli ve tüm bağımsız değişkenlere göre diferansiyellene bilen klasik çözümü mevcut olmayabilir. Bu durumda zayıf çözümü aşağıdaki şekilde tanımlanlalalım.

Tanım 3. $R^2 \times R^+ \rightarrow R$ de tanımlı, (2.7) koşulunu sağlayan ve C^∞ dan olan herhangi bir $\varphi: R^2 \times R^+ \rightarrow R$ test fonksiyonu için,

$$\int_{R^2 \times R^+} \left\{ u(x, y, t) \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial t} + \frac{u^2(x, y, t)}{2} \left(\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} \right) \right\} dx dy + \int_{R^2} \varphi(x, y, 0) u(x, y, 0) dx dy = 0 \quad (2.9)$$

integral eşitliğini koruyan $u(x, y, t)$ fonksiyonuna (2.7), (2.8) probleminin zayıf çözümü denir.

Zayıf çözümü elde etmek için [13] - [16] takip edilerek (2.7) denklemini,

$$D_{xy} = \{-\infty < \xi < x, -\infty < \eta < y\} \subset R^2$$

bölgesi üzerinde integrallersek,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^y u^2(x, \eta, t) d\eta + \int_{-\infty}^x u^2(\xi, y, t) d\xi \right) \\ & = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^y u^2(-\infty, \eta, t) d\eta + \int_{-\infty}^x u^2(\xi, -\infty, t) d\xi \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde ederiz. Aşağıdaki fonksiyonu dahil edelim,

$$w(x, y, t) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \quad (2.11)$$

Kolayca gösterebiliriz ki,

$$Mw(x, y, t) = u(x, y, t) \quad (2.12)$$

eşitliği korunur. Burada $M(.) = \frac{\partial^2(.)}{\partial x \partial y}$ şeklinde diferansiyel operatördür. (2.11) ve (2.12) notasyonunda (2.1) denklemini,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^y u^2(x, \eta, t) d\eta + \int_{-\infty}^x u^2(\xi, y, t) d\xi \right) = \\ \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^y u^2(-\infty, \eta, t) d\eta + \int_{-\infty}^x u^2(\xi, -\infty, t) d\xi \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

şeklinde yazabiliriz. (2.13) denklemi için başlangıç koşulu,

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y) \quad (2.14)$$

olur. Burada $w_0(x, y)$ fonksiyonu,

$$Mw_0(x, y) = u_0(x, y) \quad (2.15)$$

denkleminin sürekli diferansiyellenebilen herhangi bir çözümü olarak tanımlanır. (2.13), (2.14) problemine yardımcı problem diyeceğiz.

Yardımcı problemin aşağıdaki avantajları vardır:

- (2.13) denkleminin çözümü olan $w(x, y, t)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilme özelliği $u(x, y, t)$ fonksiyonunkinden fazladır.
- $u(x, y, t)$ nin bulunması için onun hiç bir değişkene göre türevi kullanılmamaktadır, zaten söz konusu türevler mevcut da değildir.

Ayrıca, (2.13) denklemi kullanılarak t ye göre yüksek dereceden sonlu farklar şeması (örneğin, Runge-Kutta yöntemi) yazılabilir.

Şimdi, (2.13), (2.14) probleminin nümerik çözümünü bulmak için sonlu farklar algoritmasını üretelim. Bu amaçla D_{xy} bölgesinin üzerine aşağıdaki gibi bir ağ kuralım.

3. NÜMERİK ALGORİTMA ve BİLGİSAYAR TESTLERİ

Yukarıda üretilmiş algoritma kullanılarak aşağıdaki bilgisayar testleri yapılmıştır.

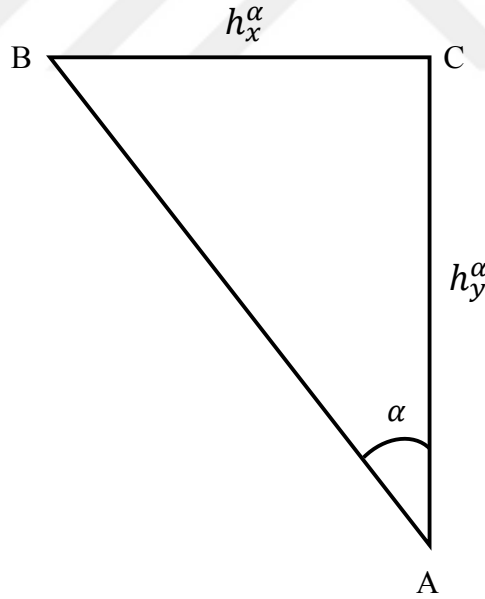
3.1 Adapte Olunabilen Ağ ve Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Farklar

Problem (2.7), (2.8)'in nümerik çözümlerini bulmak için şimdi sonlu farklar yöntemini düzenleyelim. Bu amaçla D_{xy} domaini üzerinde bir ağ yaratalım.

L herhangi pozitif yeterince büyük bir sayı olmak şartıyla, $D_{(-L,L)}$ domaini üzerinde uyarlanmış ağ oluştururuz. Bunun için öncelikle oy ekseninde $[-\ell, \ell]$ segmenti üzerindeki ağı belirleyelim.

$$\omega_{h_y} = \left\{ y_j \mid y_j = -\ell + j h_y, h_y = \frac{2\ell}{m}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m \right\}$$

Ondan sonra aşağıdaki gibi başlangıç fonksiyonuyla ox ekseninde boğum noktası uyarlayalım.



Şekil 5

OAB dik üçgeninden $h_x^{(\alpha)} = h_y \tan \alpha$ alabiliriz. Şimdi $h_x^{(\alpha)}$ 'yı eşit aralıklarla $[-\ell, \ell]$ arasını n alt aralıklara bölelim.

$$\omega_{h_x^{(\alpha)}} = \left\{ x_i \mid x_i = -\ell + j h_x^{(\alpha)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \right\}$$

$$\omega_{h_x^{(\alpha)} h_y} = \left\{ (x_i, y_j) \mid x_i \in \omega_{h_x^{(\alpha)}}, \quad y_j \in \omega_{h_y} \right\}$$

Şimdi biz sırasıyla p ve q eşit dilimlerinin içinde $[x_i, x_{i+1}]$ ve $[y_i, y_{i+1}]$ bölümlerine ayıralım.

Yukarıda belirtilen hususlarda bahsedilen noktaların şeması

$$\Omega_{(h_\xi, h_\eta)}^{(x_i, x_{i+1})} = \{ \xi_v = x_i + v h_\xi, \quad \eta_\mu = y_j + \mu h_\eta; \quad v = 0, 1, 2, \dots, np, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, mq \}$$

dır. Burada,

$$x_v = \xi_v p, \quad y_\mu = \eta_\mu q \quad h_\xi = \frac{h_x^{(\alpha)}}{p}, \quad h_\eta = \frac{h_y}{q},$$

$$\bigcup_{i,j} \Omega_{(h_\xi, h_\eta)}^{(x_i, y_j)} = \Omega_{(h_x, h_y)}^{(-\ell, \ell)}$$

olmaktadır.

Önce yardımcı problemin nümerik çözümünü bulalım. Bunun için önce (2.10) eşitliğine dahil integraller aşağıdaki gibi dörtlü formülle yazılmış olabilir.

$$\int_{-\ell}^{x_i} g(u(\xi, y, t)) d\xi \approx h_\xi \sum_{v=0}^{p.i} g(U(\xi_v, y_j, t_k)),$$

$$\int_{-\ell}^{y_i} f(u(x, \eta, t)) d\eta \approx h_\eta \sum_{\mu=0}^{q.i} f(U(x_i, \eta_\mu, t_k)),$$

$$\int_{-\ell}^{x_i} \int_{-\ell}^{y_j} u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \equiv h_x^{(\alpha)} h_y \sum_{v=0}^i \sum_{\mu=0}^j U(x_v, y_\mu, t_k)$$

(2.10) eşitliğindeki bu ifadeler yerine yazılır, eşitliğin sonlu farklar sistemini aşağıdaki gibi alırız.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau} h_x^{(\alpha)} h_y \sum_{v=1}^i \sum_{\mu=1}^j [U(x_v, y_\mu, t_{k+1}) - U(x_i, y_j, t_k)] + \\
& \tau h_\eta \sum_{\mu=1}^{q.j} f(U(x_i, \eta_\mu, t_k)) + h_\xi \sum_{v=1}^{p.i} g(U(\xi_v, y_j, t_k)) - h_\eta \sum_{\mu=1}^{q.j} f(U(-\infty, \eta_\mu, t_k)) - \\
& h_\xi \sum_{v=1}^{p.i} g(U(\xi_v, -\infty, t_k)) = 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Sistemdeki son eşitlikten şunu alırız,

$$\begin{aligned}
& \sum_{v=1}^i \sum_{\mu=1}^j U(x_v, y_\mu, t_{k+1}) \\
& = \sum_{v=1}^i \sum_{\mu=1}^j U(x_v, y_\mu, t_k) - g_1 \sum_{\mu=1}^{q.j} f(U(x_i, \eta_\mu, t_k)) - g_2 \sum_{v=1}^{p.i} g(U(\xi_v, y_j, t_k)) \\
& + g_1 \sum_{\mu=1}^{q.j} f(U(-\infty, \eta_\mu, t_k)) + g_2 \sum_{v=1}^{p.i} g(U(\xi_v, -\infty, t_k))
\end{aligned}$$

Burada,

$$g_1 = \frac{\tau h_\eta}{h_x^{(\alpha)} h_y}, \quad g_2 = \frac{\tau h_\xi}{h_x^{(\alpha)} h_y}$$

Herhangi bir a_{ij} sayıları için,

$$\sum_{v=1}^i \sum_{\mu=1}^j a_{ij} = a_{ij} + \sum_{v=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^{j-1} a_{v\mu} + \sum_{v=1}^{i-1} a_{vj} + \sum_{\mu=1}^{j-1} a_{i\mu}$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliği kullanırsak,

$$\begin{aligned}
U_{i,j,k+1} & = - \sum_{v=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^{j-1} U(x_v, y_\mu, t_{k+1}) - \sum_{v=1}^{i-1} U(x_v, y_j, t_k) \\
& - \sum_{\mu=1}^{j-1} U(x_i, y_\mu, t_k) + \sum_{v=1}^i \sum_{\mu=1}^j U(x_v, y_\mu, t_k) - g_1 \sum_{\mu=1}^{q.i} f(U(x_i, \eta_\mu, t_k))
\end{aligned}$$

$$-g_2 \sum_{v=1}^{p.i} g(U(\xi_v, y_j, t_k)) + g_1 \sum_{\mu=1}^{q.j} f(U(-\infty, \eta_\mu, t_k)) + g_2 \sum_{v=1}^{p.i} g(U(\xi_v, -\infty, t_k)) \quad (3.2)$$

elde ederiz.

Görülüyor ki, (3.2) açık bir şemadır. Sayısal şemanın sabitliği için ,

$$\left| \max f'(u) \frac{\tau}{h_x^{(\alpha)}} + \max g'(u) \frac{\tau}{h_y} \right| < 1$$

ifadesini sağlamalıdır.

3.2 Bilgisayar Deneyleri

1. Başlangıç olarak aşağıdaki durumu ele alacağız.

$$f(u) = g(u) = \frac{u^2}{2} \text{ ve } u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$$

Bu durumda algoritma (3.2),

$$\begin{aligned} U_{i,j,k+1} = & - \sum_{v=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^{j-1} U(x_v, y_\mu, t_{k+1}) - \sum_{v=1}^{i-1} U(x_v, y_j, t_k) \\ & - \sum_{\mu=1}^{j-1} U(x_i, y_\mu, t_k) + \sum_{v=1}^i \sum_{\mu=1}^j U(x_v, y_\mu, t_k) - \frac{g_1}{2} \sum_{\mu=1}^{q.i} f(U^2(x_i, \eta_\mu, t_k)) \\ & - \frac{g_2}{2} \sum_{v=1}^{p.i} g(U^2(\xi_v, y_j, t_k)) + \frac{g_1}{2} \sum_{\mu=1}^{q.j} f(U(-\infty, \eta_\mu, t_k)) \\ & + \frac{g_2}{2} \sum_{v=1}^{p.i} g(U^2(\xi_v, -\infty, t_k)), \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (3.3)$$

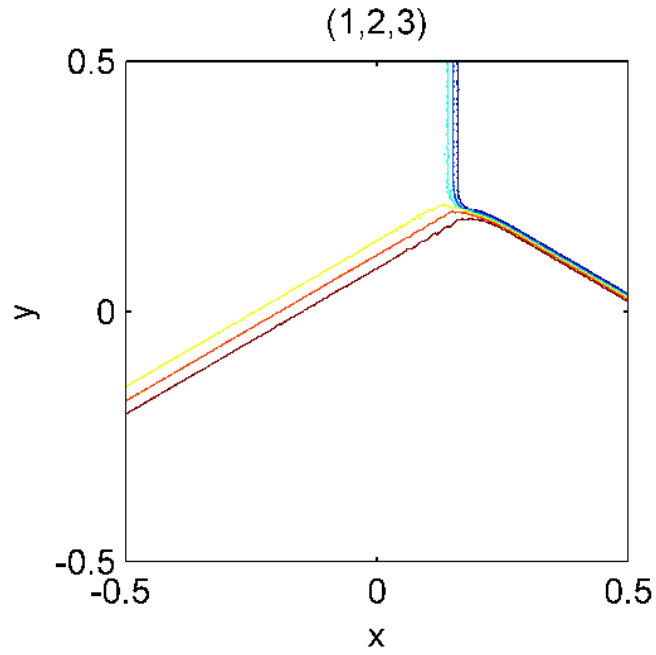
şeklini alır. (3.3) için başlangıç koşulları,

$$U(\xi_v, \eta_\mu, \theta) = u_1(\xi_v, \eta_\mu) (v = 1, 2, \dots, np; \mu = 1, 2, \dots, mq) \quad (3.4)$$

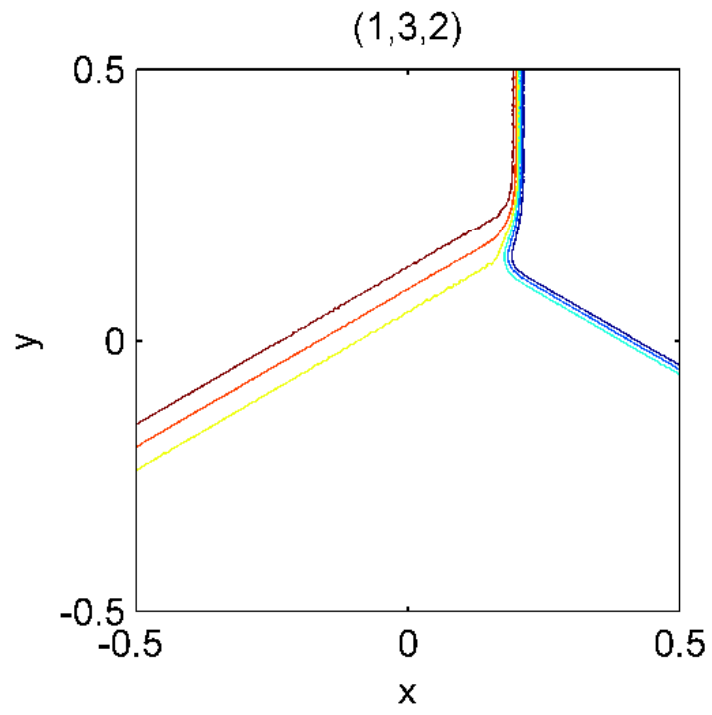
olur. Burada,

$$u_1(x, y) = \begin{cases} u_1 & 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}, \\ u_2 & \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3}, \\ u_3 & \frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

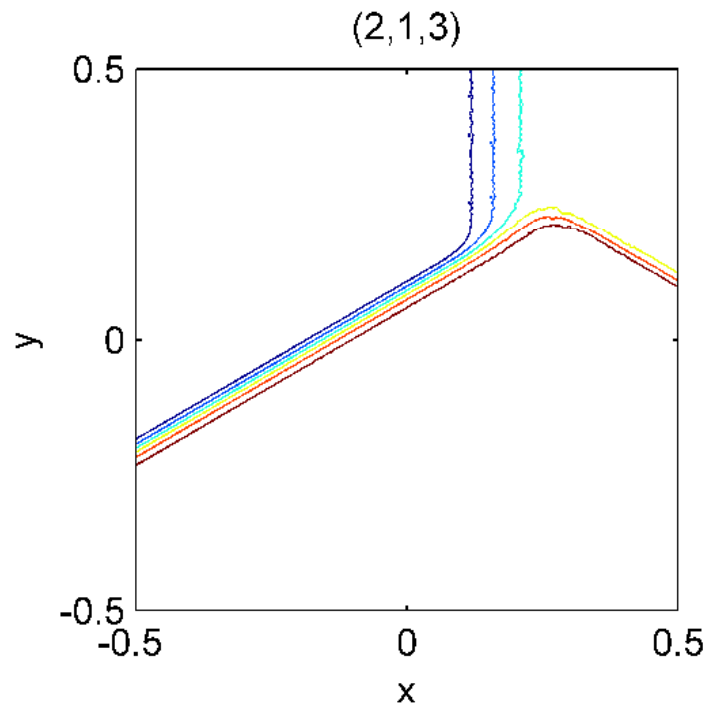
Böylece dikkat edilmesi gereken 6 durum vardır. Şekil 6 da verilmiş olan (3.3) ve (3.4) probleminin çözümlerinin grafikleri elde edilmiştir.



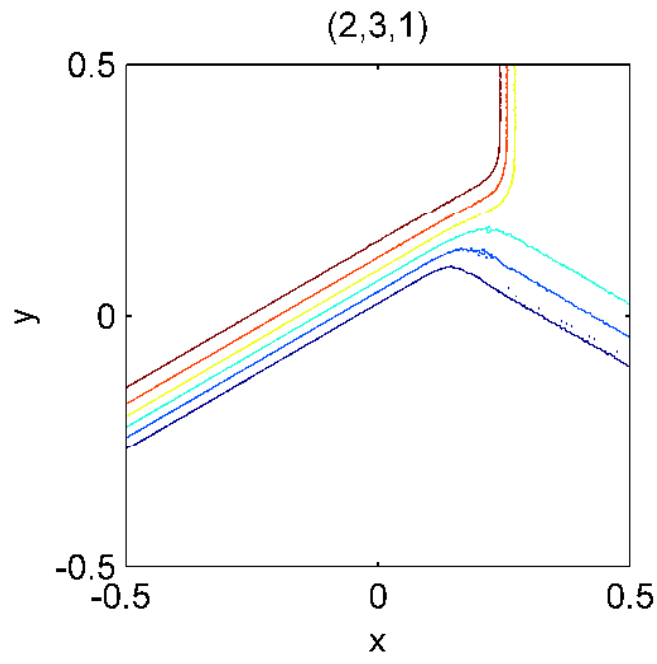
Şekil 6 (a)



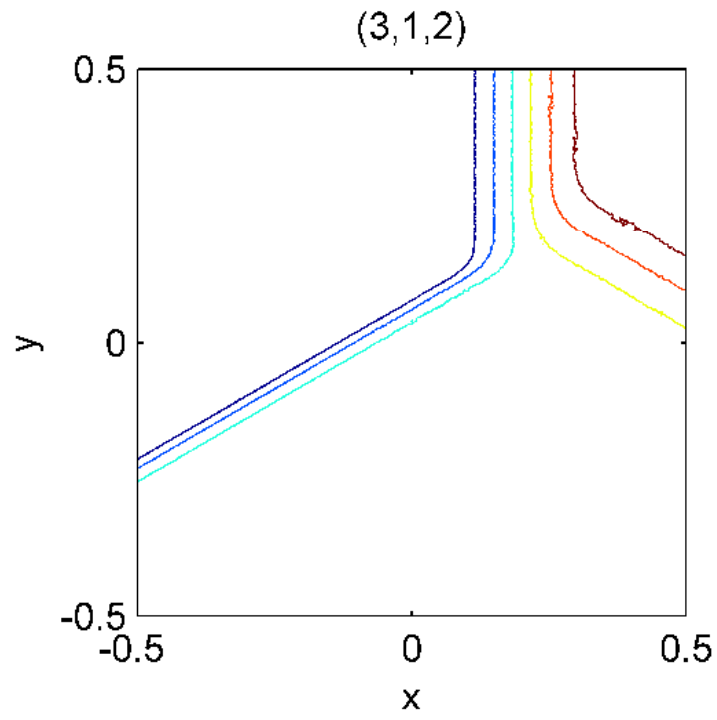
Şekil 6 (b)



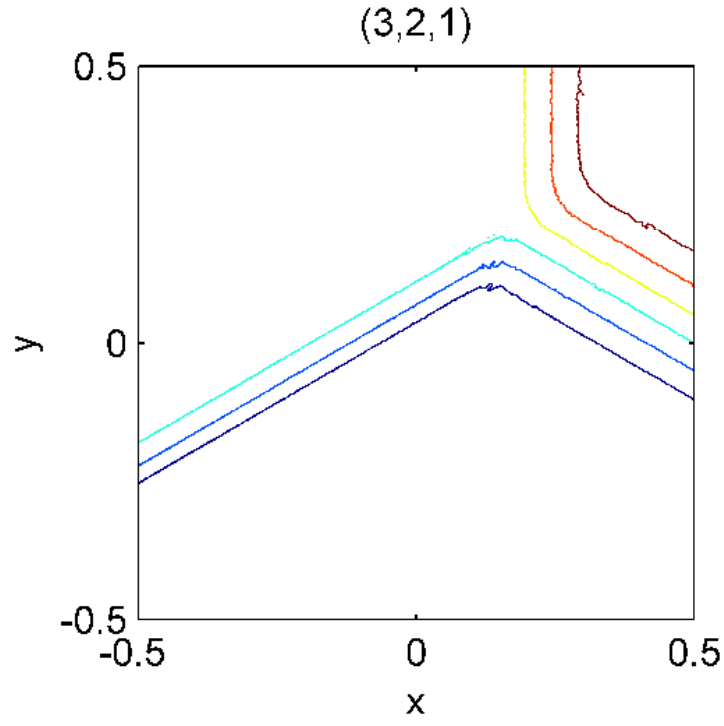
Şekil 6 (c)



Şekil 6 (d)



Şekil 6 (e)



Şekil 6 (f)

- a) $t = 1$ deki $(1,2,3)$ başlangıç koşulları ile iki şok bir seyrelti
- b) $t = 1$ deki $(1,3,2)$ başlangıç koşulları ile 3 şok
- c) $t = 1$ deki $(2,1,3)$ başlangıç koşulları ile bir şok iki seyrelti
- d) $t = 1$ deki $(2,3,1)$ başlangıç koşulları ile iki şok bir seyrelti
- e) $t = 1$ deki $(3,1,2)$ başlangıç koşulları ile üç seyrelti
- f) $t = 1$ deki $(3,1,2)$ başlangıç koşulları ile bir şok iki seyrelti

4. SONUÇLAR

1. Birinci basamaktan kuazi lineer denklem için yazılmış Cauchy probleminin tek çözümünün varlığı için sıçrayışın mevcut olma ve entropi koşulları incelenmiştir.
2. Entropi ve Rankino-Hugoniot koşulu iki boyutlu korunum kuralları denklemi için de elde edilmiştir.
3. Skaler korunum kuralları için yazılmış kuazi lineer denklemin sayısal çözümünün bulunması için süreksiz fonksiyonlar sınıfında orijinal algoritma üretilmiştir.
4. Önerilmiş algoritmayı kullanarak bilgisayar deneyleri de yapılmıştır.



5. KAYNAKLAR

- [1] Ballau, D.P., Solutions to nonlinear hyperbolic Cauchy problems without convexity conditions. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 152, 441-460, 1970.
- [2] Chen, G-Q., Li, D., Tan, D., Structure of Riemann Problem for 2-Dimensional Scaler Conservation Laws, Journal of Differential Equations, 127, 124-147, 1996.
- [3] Conway, E., Smoller, J., Global Solutions of the Cauchy Problem for Quasi-Linear First-Order Equationa in Several Space Variables, Comm. On Pure and Applied Mathematics, vol. XIX, 95-105, 1966.
- [4] Gelfand, I., M., Some Problems in the Theory of Quasilinear Equations. Usp Math. Nauk, 14, 87-158 (1959), Amer. Math. soc Transl. (2) 29, 295-38, 1963.
- [5] Guckenheimer, J., Shocks and Rarefactions in Two Space Dimensions, Arch. Rational Mech. Anal. 59 No. 3, 281-291, 1975.
- [6] Jennings, G., Piecewise smooth solutions of a single nonlinear conservation law are of second category, mimeographed, 1973.
- [7] Kruzkov, S.N., First Order Quasilinear Equation in Several Independent Variables, Math. Sbornik, 81, p. 217-243, 1970.
- [8] Lax , P.D., Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves. Conf. Board Math. Sci. Regional Conf. Series in Appl. Math. 11, SIAM, Philadelphia, 1972.
- [9] Levy, D., Puppo, G., Russo, G., A third order Weno Scheme for 2D conservation Laws, Applied Numerical Mathematics, 33, 415-421, 2000.
- [10] Lindquist, W.B., Construction of Solutions for Two- Dimensional Riemann Problems, Comput. Math. Appl. 12A, 615-630, 1986.
- [11] Lindquist, W.B., The Scalar Riemann Problem in two Spatial Dimensions: Piecewise Smoothness of Solutions and Its Breakdown, SIAM J. Math. Anal., 17, 1178-1197, 1986.
- [12] Oleinik, O.A., Discontinuous Solutions of Nonlinear Differential Equations, Usp.Math. Nauk, 12, 1957.
- [13] Rasulov, M.A., Coskun, E., Sinsoysal, B., Finite Differences Method for a Two-Dimensional Nonlinear Hyperbolic Equations in a Class of Discontinuous Functions, App.Mathematics and Computation, Vol.140, Issue 1, August, pp.279-295. 2003, USA.

- [14] Rasulov, M.A., Identification of the Saturation Jump in the Process of Oil Displacement by Water in a 2D Domain, Dokl RAN, Vol. 319, No.4, pp. 943-947, 1991
- [15] Rasulov, M.A., Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Korunum Kuralları, Seçkin, 2011
- [16] Rasulov, M.A., Sinsoysal, B., Bal, H., Numerical Investigation of Shock and Rarefaction Waves for 2D Conservation Law in a Class of Discontinuous Functions, Baku State University Department of Computational Mathematics International Conference Devoted to the 85th Anniversary of Professor Yahya Mamedov, 10-12 December 2015, Baku, Azerbaijan.
- [17] Volpert, A.I., The spaces BV and quasilinear equations. Math. USSR-Sbornik 2, 225-267, 1967.
- [18] Yoon, D., Hwang, W., Two-Dimensional Riemann Problems for Burger's Equation, Bull. Korean Math. Soc. 45, No.1, pp 191-205, 2008.
- [19] Zhang, P., Generalized Characteristic Analysis and Guckenheimer Structure, Journal of Differential Equations, 152, 409-430, 1999.

ÖZGEÇMİŞ

Bilge Gülsüm ARICI KARA, 09.09.1977 tarihinde İzmit’de doğmuş. 1988 yılında Ulugazi İlkokulu’ndan, 1991 yılında İzmit Ortaokulu’ndan, 1994 yılında İzmit Lisesi’nden, 2000 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun olmuştur. 2015 yılında başladığı Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde yüksek lisans programına devam etmektedir.

Bilge Gülsüm ARICI KARA

