

# **İKİ BOYUTLU SAYISAL FİLTRELER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Ayten GEÇMEZ**

**Anabilim Dalı: Elektrik-Elektronik Mühendisliği**

**Programı: Devreler ve Sistemler**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Melih Cevdet İNCE**

**EKİM -2014**

**T.C.**  
**FIRAT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# **İKİ BOYUTLU SAYISAL FİLTRELER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Ayten GEÇMEZ**

**08113106**

**Anabilim Dalı: Elektrik-Elektronik Mühendisliği**

**Programı: Devreler ve Sistemler**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Melih Cevdet İNCE**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:**

**EKİM-2014**

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## İKİ BOYUTLU SAYISAL FİLTRELER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aytan GEÇMEZ  
08113106

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 29.08.2014

Tezin Savunulduğu Tarih : 24.09.2014

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Melih Cevdet İNCE



Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Yakup DEMİR

:Yrd. Doç. Dr. Murat KARABATAK



AĞUSTOS-2014

## **TEŞEKKÜR**

Tez çalışmam süresince sağladığı destek ve sabrı dolayısıyla değerli danışmanım Sayın Doç. Dr. Melih Cevdet İNCE'ye, tezi hazırlamamda desteğini benden esirgemeyen sevgili eşim Mehmet Tacettin GEÇMEZ'e ve değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

**Ayten GEÇMEZ**

**ELAZIĞ-2014**

## İÇİNDEKİLER

|                                                                     | <u>Sayfa No</u> |
|---------------------------------------------------------------------|-----------------|
| TEŞEKKÜR.....                                                       | I               |
| İÇİNDEKİLER.....                                                    | II              |
| ÖZET .....                                                          | V               |
| ABSTRACT .....                                                      | VI              |
| ŞEKİLLER LİSTESİ.....                                               | VII             |
| TABLolar LİSTESİ.....                                               | X               |
| KISALTMALAR LİSTESİ .....                                           | XI              |
| SİMGELER LİSTESİ.....                                               | XI              |
| 1. GİRİŞ.....                                                       | 2               |
| 2. SAYISAL FİLTRELER.....                                           | 4               |
| 2.1. Sayısal Filtre Karakteristiklerinin Belirlenmesi.....          | 6               |
| 2.2. İdeal Sayısal Filtreler.....                                   | 7               |
| 2.2.1. İdeal Alçak Geçiren ve Yüksek Geçiren Sayısal Filtreler..... | 9               |
| 2.2.2. Fiziksel Olarak Gerçekleştirme.....                          | 10              |
| 2.3. İdeal Olmayan Sayısal Filtreler.....                           | 12              |
| 2.4. Geçici Durum Davranışı.....                                    | 13              |
| 3. 2-D SAYISAL FİLTRELER.....                                       | 15              |
| 3.1. Giriş.....                                                     | 15              |
| 3.2. 2-D Ayırık Zamanlı Sinyaller .....                             | 15              |
| 3.2.1. Destek Bölgesi .....                                         | 16              |
| 3.2.2. Kuantalama (Nicemleme).....                                  | 16              |
| 3.2.3. Periyodiklik.....                                            | 17              |
| 3.2.4. Ayrılabilirlik .....                                         | 18              |
| 3.3. Sistem Olarak 2-D Sayısal Sinyaller .....                      | 18              |
| 3.3.1. Lineerlik.....                                               | 19              |
| 3.3.2. Zamanla Değişmeyen Sistemler.....                            | 19              |
| 3.3.3. Nedensellik .....                                            | 19              |
| 3.4. Karakterizasyon .....                                          | 20              |
| 3.4.1. Tekrarsız Filtreler.....                                     | 20              |
| 3.4.2. Tekrarlı Filtreler .....                                     | 21              |

|           |                                                                              |           |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.5.      | 2-D Sayısal Filtrelerin Akış Diyagramları ve Ağlarıyla Temsil Edilmesi ..... | 21        |
| 3.6.      | Uzay Domeni Analizi .....                                                    | 25        |
| 3.6.1.    | Temel Sinyaller .....                                                        | 25        |
| 3.6.2.    | Konvolüsyon Toplamı .....                                                    | 30        |
| 3.7.      | Kararlılık .....                                                             | 33        |
| 3.8.      | 2-D Transfer Fonksiyonlarıyla İlişkili Simetri Türleri.....                  | 33        |
| 3.8.1.    | Öteleme Simetri .....                                                        | 33        |
| 3.8.2.    | Rotasyonel Simetri .....                                                     | 34        |
| 3.8.3.    | Merkezi Simetri.....                                                         | 34        |
| 3.8.4.    | Yansıma Simetri.....                                                         | 34        |
| 3.8.5.    | Çeyrek Daire (Quadrantal) Simetri .....                                      | 34        |
| 3.8.6.    | Köşegen Dört Katlı Yansıma Simetri.....                                      | 35        |
| 3.8.7.    | Sekizgen (Ortogonal) Simetri .....                                           | 35        |
| 3.8.8.    | Dairesel Simetri.....                                                        | 35        |
| 3.9.      | Gerçekleştirme .....                                                         | 36        |
| 3.9.1.    | Doğrudan Yapı.....                                                           | 36        |
| 3.9.2.    | Paralel Yapı.....                                                            | 36        |
| 3.9.3.    | Kaskad Yapı.....                                                             | 37        |
| 3.9.4.    | Ayrılabilir Yapı .....                                                       | 37        |
| 3.10.     | Çok Boyutlu Filtreler.....                                                   | 39        |
| <b>4.</b> | <b>2-D TEKRARSIZ FİLTRELER.....</b>                                          | <b>40</b> |
| 4.1.      | Giriş .....                                                                  | 40        |
| 4.2.      | 2-D Tekrarsız Filtrelerin Özellikleri .....                                  | 41        |
| 4.2.1.    | Lineer Faz Yanıtı.....                                                       | 41        |
| 4.3.      | Fourier Serisi ile 2-D Filtre Tasarımı .....                                 | 43        |
| 4.3.1.    | 1-D Filtrelerin Tasarımı .....                                               | 43        |
| 4.3.2.    | 2-D Filtrelerin Tasarımı .....                                               | 50        |
| 4.3.3.    | 2-D Pencere Fonksiyonları .....                                              | 50        |
| 4.4.      | 2-D Dairesel Simetrik Filtreler .....                                        | 52        |
| 4.4.1.    | Alçak Geçiren Filtreler .....                                                | 52        |
| 4.4.2.    | Yüksek Geçiren Filtreler .....                                               | 52        |
| 4.4.3.    | Bant- Geçiren Filtreler.....                                                 | 53        |
| 3.4.4.    | Bant- Durduran Filtreler .....                                               | 53        |

|           |                                                       |           |
|-----------|-------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5.</b> | <b>2-D TEKRARLI FİLTRELER.....</b>                    | <b>54</b> |
| 5.1.      | Giriş.....                                            | 54        |
| 5.2.      | Dönüşümler.....                                       | 54        |
| 5.2.1.    | Bilineer Dönüşüm .....                                | 54        |
| 5.2.2.    | Analog Filtre Dönüşümleri .....                       | 57        |
| 5.3.      | Tekrarlı Filtrelerde Kararlılık .....                 | 58        |
| <b>6.</b> | <b>UYGULAMALAR.....</b>                               | <b>59</b> |
| 6.1.      | 2-D Filtre Tasarımı Uygulamaları.....                 | 59        |
| 6.1.1.    | MATLAB Komutlarıyla 2-D Filtre Tasarlama .....        | 66        |
| 6.2.      | 2-D Filtrelerin Görüntü İyileştirme Uygulamaları..... | 78        |
| 6.2.1.    | Gürültü Kaldırma .....                                | 78        |
| 6.2.1.    | Ortalama (Average) Filtresi .....                     | 78        |
| 6.2.2.    | Gaussian Filtresi.....                                | 80        |
| 6.2.3.    | Medyan Filtresi .....                                 | 81        |
| 6.2.4.    | Wiener filtresi .....                                 | 82        |
| 6.3.      | Görüntünün Sınır Eğrisini (Kenar) Çıkarma İşlemi..... | 86        |
| 6.3.1.    | Sobel Filtresi .....                                  | 87        |
| 6.3.2.    | Roberts Filtresi.....                                 | 88        |
| 6.3.3.    | Prewitt Filtresi.....                                 | 89        |
| 6.3.4.    | Laplace Filtresi.....                                 | 89        |
| 6.3.5.    | Log Filtresi.....                                     | 89        |
| 6.3.6.    | Canny Filtresi.....                                   | 89        |
| <b>7.</b> | <b>SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....</b>                     | <b>91</b> |
|           | <b>KAYNAKLAR .....</b>                                | <b>92</b> |
|           | <b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>                                  | <b>94</b> |

## ÖZET

Bu tezde, bir boyutlu sayısal filtreler üzerinden bazı kavramlar kısaca açıklandıktan sonra iki boyutlu (2-D) sayısal filtreler tanıtılmıştır. Önce 2-D ayrık zamanlı sinyallerin özellikleri açıklanmıştır. Daha sonra bir sistem olarak ele alınan 2-D sayısal filtrelerin özellikleri açıklanmıştır. 2-D tekrarlı/tekrarsız sayısal filtrelerin özellikleri incelenmiş ve çeşitli tasarım yöntemleri araştırılmıştır.

Bundan başka, bir boyutlu analog filtreler tasarlanıp birleştirilerek 2-D sayısal filtreler oluşturuldu ve MATLAB ortamında genlik yanıtı ve eş yükselti eğrileri çizdirilmiştir. Daha sonra MATLAB ortamında farklı 2-D filtre tasarlama örnekleri verilerek genlik yanıtları karşılaştırılmıştır. Tasarlanan 2-D sayısal filtreler kenar çıkarma, gürültü giderme gibi bazı görüntü işleme uygulamalarına uygulandı ve elde edilen sonuçlar değerlendirildi

**Anahtar Kelimeler:** İki boyutlu sayısal filtre, 2-D pencere, tekrarlı filtre, tekrarsız filtre, kenar çıkarma, gürültü kaldırma, görüntü iyileştirme

## **ABSTRACT**

### **Two Dimensional Digital Filters**

In this thesis, some of the concepts are explained briefly through one-dimensional digital filters, and then 2-dimensional digital filters are introduced. First, the properties of the 2-D discrete time signal are explained. Then, the properties of the 2-D digital filter, which is considered as a system, are explained. The properties of the recursive and non-recursive 2-D digital filters are further examined and various design methods are investigated.

Moreover, one-dimensional analog filters are designed and combined to construct 2-D digital filters and their amplitude response and contour graphics are plotted in MATLAB environment. Then, various 2-D digital filters are designed and their amplitude responses are compared in MATLAB environment. The designed 2-D digital filters are then applied on several image processing applications such as edge detection, noise removal and the obtained results are evaluated.

**Key Words:** 2-D Digital filter, 2-D windows, recursive filter, non-recursive, edge detection, noise removal, image enhancement.

## ŞEKİLLER LİSTESİ

### Sayfa No

|                   |                                                                                                                                                                                                                         |    |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 2.1</b>  | Kesim frekansı $\Omega_c = \pi/2$ radyan olan sayısal filtrenin çeşitli biçimlerde frekans cevabının gösterilmesi.....                                                                                                  | 7  |
| <b>Şekil 2.2</b>  | İdeal sayısal filtre frekans karakteristikleri; a) İdeal Alçak geçiren b) İdeal Yüksek geçiren c) İdeal Bant-geçiren d) İdeal Bant-durduran .....                                                                       | 8  |
| <b>Şekil 2.3</b>  | İdeal alçak geçiren sayısal filtrenin genlik ve faz karakteristiği.....                                                                                                                                                 | 9  |
| <b>Şekil 2.4</b>  | İdeal alçak geçiren sayısal filtrenin impuls cevabı.....                                                                                                                                                                | 11 |
| <b>Şekil 2.5</b>  | AGF'nin frekans cevabı.....                                                                                                                                                                                             | 13 |
| <b>Şekil 2.6</b>  | BGF'nin frekans cevabı.....                                                                                                                                                                                             | 13 |
| <b>Şekil 2.7</b>  | Sayısal filtrelerde geçici durum davranışı a) geçici cevapta aşma b) aşmanın olmadığı geçici cevap .....                                                                                                                | 14 |
| <b>Şekil 3.1</b>  | Herhangi bir 2-D ayrık zamanlı sinyalin perspektif görünümü .....                                                                                                                                                       | 16 |
| <b>Şekil 3.2</b>  | a) Dikdörtgen periyotlu 2-D ayrık zamanlı sinyaller b) Dikdörtgen şeklinde olmayan bir periyotla periyodik 2-D ayrık zamanlı sinyaller .....                                                                            | 17 |
| <b>Şekil 3.3</b>  | Sistem olarak 2-D sayısal filtrenin blok gösterimi.....                                                                                                                                                                 | 18 |
| <b>Şekil 3.4</b>  | 2-D filtreler için temel elemanların sembolleri; a) Yatay kaydırıcı, b) Dikey kaydırıcı, c) Toplayıcı, d) Çarpıcı. ....                                                                                                 | 22 |
| <b>Şekil 3.5</b>  | a) 2-D sayısal filtre ağı (1) , b) 2-D sayısal filtre ağı (2) .....                                                                                                                                                     | 23 |
| <b>Şekil 3.6</b>  | 2-D sayısal filtrelerin sinyallerinin akış grafikleriyle temsil edilmesi .....                                                                                                                                          | 25 |
| <b>Şekil 3.7</b>  | Temel sinyaller: a) birim impuls, b) birim basamak.....                                                                                                                                                                 | 27 |
| <b>Şekil 3.8</b>  | Birim çizgi impulsı; a) $n_1$ eksenı boyunca birim çizgi impulsı, b) $n_2$ eksenı boyunca birim çizgi impulsı. ....                                                                                                     | 27 |
| <b>Şekil 3.9</b>  | Birim çizgi palsı; a) $k_2$ genişliğinde $n_1$ eksenı boyunca birim çizgi darbesi (palsı), b) $k_1$ genişliğinde $n_2$ eksenı boyunca birim çizgi palsı. ....                                                           | 29 |
| <b>Şekil 3.10</b> | $k_1 * k_2$ dikdörtgensel birim palsı .....                                                                                                                                                                             | 29 |
| <b>Şekil 3.11</b> | Konvolüsyon toplamı a) Giriş b) İmpuls yanıtı c) kaydırılmış İmpuls yanıtı d) toplanmış impuls yanıtı e) kaydırılmış toplanmış impuls yanıtı ile giriş değerlerinin çarpımı f) $n_1$ ve $n_2$ 'ye filtrenin cevabı..... | 32 |
| <b>Şekil 3.12</b> | Gerçekleştirme; (a) paralel yapı, (b) kaskad yapı , (c) ayrılabilir yapı.....                                                                                                                                           | 38 |
| <b>Şekil 3.13</b> | Kaskad bağlanan ayrılabilir impuls yanıtı filtrelerin paralel bağlanması ...                                                                                                                                            | 39 |

|                   |                                                                                                                |    |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 4.1</b>  | Fourier serisi yöntemi ile tasarlanan FIR filtrenin genlik yanıtı.....                                         | 44 |
| <b>Şekil 4.2</b>  | M=40 değeri için Hamming penceresi kullanılarak tasarlanan FIR filtrenin genlik yanıtı.....                    | 46 |
| <b>Şekil 4.3</b>  | Örnek 4.1 için tasarlanan FIR filtrenin frekans yanıtı.....                                                    | 49 |
| <b>Şekil 5.1</b>  | Bilineer dönüşüm; a) s düzlemi, b) z düzlemi.....                                                              | 56 |
| <b>Şekil 6.1</b>  | 4.dereceden 2-D sayısal butterworth AGF'nin genlik yanıtı( $k_1 = k_2 = a_1L = a_2L = 1$ alınmıştır.).....     | 61 |
| <b>Şekil 6.2</b>  | 4.dereceden 2-D sayısal butterworth AGF'nin eş yükselti eğrisi .....                                           | 62 |
| <b>Şekil 6.3</b>  | 4.dereceden 2-D sayısal Chebyshev AGF'nin genlik yanıtı( $k_1 = k_2 = a_1L = a_2L = 1$ alınmıştır.).....       | 64 |
| <b>Şekil 6.4</b>  | 4.dereceden 2-D sayısal Chebyshev AGF'nin eş yükselti eğrisi ( $k_1 = k_2 = a_1L = a_2L = 1$ alınmıştır.)..... | 65 |
| <b>Şekil 6.5.</b> | Uygulama 3 için frekans yanıtı .....                                                                           | 66 |
| <b>Şekil 6.6</b>  | 0.3 ve 0.6 arasındaki bir bandı geçiren yaklaşık dairesel simetrik 2-D BGF'nin frekans yanıtı(ideal) .....     | 67 |
| <b>Şekil 6.7</b>  | 0.3 ve 0.6 arasındaki bir bandı geçiren; yaklaşık dairesel simetrik 2-D BGF                                    | 68 |
| <b>Şekil 6.8</b>  | Kesim frekansı 0.5 olan yaklaşık dairesel simetrik 2-D YGF'nin frekans yanıtı (ideal) .....                    | 69 |
| <b>Şekil 6.9</b>  | Kesim frekansı 0.5 olan yaklaşık dairesel simetrik 2-D YGF'nin frekans yanıtı .....                            | 70 |
| <b>Şekil 6.10</b> | Kesim frekansı 0.7 olan 1-D AGF'nin frekans yanıtı .....                                                       | 71 |
| <b>Şekil 6.11</b> | Kesim frekansı 0.7 olan 2-D AGF'nin frekans yanıtı .....                                                       | 71 |
| <b>Şekil 6.12</b> | 2-D AGF'nin frekans yanıtı(ideal) .....                                                                        | 72 |
| <b>Şekil 6.13</b> | 2-D AGF'nin frekans yanıtı.....                                                                                | 73 |
| <b>Şekil 6.14</b> | 2-D AGF'nin frekans yanıtı(ideal) .....                                                                        | 74 |
| <b>Şekil 6.15</b> | 2-D AGF'nin frekans yanıtı .....                                                                               | 74 |
| <b>Şekil 6.16</b> | 0.1 ve 0.5 arasındaki bir bandı geçiren yaklaşık dairesel simetrik 2-D BGF'nin frekans yanıtı(ideal) .....     | 75 |
| <b>Şekil 6.17</b> | 0.1 ve 0.5 arasındaki bir bandı geçiren; yaklaşık dairesel simetrik 2-D BGF'nin frekans yanıtı .....           | 76 |
| <b>Şekil 6.18</b> | 0.1 ile 0.5 arasını geçiren 2-D AGF'nin frekans yanıtı .....                                                   | 77 |
| <b>Şekil 6.19</b> | Average filtresi uygulaması .....                                                                              | 79 |
| <b>Şekil 6.20</b> | Average filtresi uygulaması .....                                                                              | 80 |

|                    |                                                                                           |    |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 6.21</b>  | Gaussian filtresi uygulaması .....                                                        | 81 |
| <b>Şekil 6.22</b>  | Uyarlamalı filtre blok şeması.....                                                        | 83 |
| <b>Şekil 6.23</b>  | Medyan ve wiener filtresinin gürültülü bir resme uygulanması .....                        | 84 |
| <b>Şekil 6.24.</b> | Wiener filtresinin gaussian gürültülü bir resime uygulanması .....                        | 85 |
| <b>Şekil 6.25</b>  | Medyan ve wiener filtresi uygulaması.....                                                 | 86 |
| <b>Şekil 6.26</b>  | Sobel filtresi uygulaması .....                                                           | 88 |
| <b>Şekil 6.27</b>  | Log, Canny, Roberts, Prewitt, Sobel, Laplace filtrelerinin kenar çıkarma uygulaması ..... | 90 |

## TABLÖLAR LİSTESİ

### Sayfa No

|                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Tablo 3.1.</b> 2-D sayısal filtreler için temel elemanların karakteristikleri ..... | 22 |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|

## KISALTMALAR LİSTESİ

- 1-D** : Bir Boyutlu
- 2-D** : İki Boyutlu
- AGF** : Alçak Geçiren Filtre (Lowpass Filter)
- BGF** : Bant Geçiren Filtre (Bandpass Filter)
- BDF** : Bant Durduran Filtre (Bandstop Filter)
- FIR** : Sonlu İmpuls Cevabı (Finite Impulse Response )
- IIR** : Sonsuz İmpuls Cevabı (Infinite Impulse Response )
- YGF** : Yüksek Geçiren Filtre (Highpass Filter)

## SİMGELER LİSTESİ

- $\omega$  : Analog frekans
- $\Omega$  : Sayısal frekans

|                       |                                             |
|-----------------------|---------------------------------------------|
| $\Omega_p$            | : Geçirme bandı kenar frekansı              |
| $\Omega_s$            | : Durdurma bandı kenar frekansı             |
| $n_1, n_2$            | : Ayırık zamanlı bağımsız değişkenler       |
| $x(n_1, n_2)$         | : Ayırık zamanlı iki boyutlu filtre girişi  |
| $y(n_1, n_2)$         | : Ayırık zamanlı iki boyutlu filtre çıkışı  |
| $x(n_1 T_1, n_2 T_2)$ | : İki boyutlu ayırık zamanlı sinyal         |
| $h(n_1, n_2)$         | : İki boyutlu ayırık zamanlı impuls yanıtı  |
| $H(n_1, n_2)$         | : İki boyutlu ayırık zamanlı frekans yanıtı |



## 1. GİRİŞ

Son yıllarda, işaret işleme alanında büyük gelişmeler olmuş ve bu gelişmelerde sayısal filtreler önemli rol oynamıştır. Günümüzde tıbbi ve endüstriyel uygulamalar başta olmak üzere pek çok işaret işleme uygulamasında sayısal filtrelere gereksinim duyulmaktadır. Sayısal filtre, sayısallaştırılmış analog sinyaller üzerinde çalışan, giriş sinyalini istenen çıkış sinyaline dönüştüren yöntem ya da algoritmadır. Uygulama alanları çok geniş olan filtrelerin başlıca tasarım amaçları arasında, karışmış sinyalleri birbirinden ayırmak, sinyaldeki gürültüyü azaltarak sinyal kalitesini arttırmak ve bozulmuş sinyalin tekrar elde edilmesi sayılabilir. Bir başka ifadeyle; filtre, istenilen özellikleri sağlayacak yapının oluşturulması olarak tanımlanabilir. Sayısal işaret işleme ise; işaretin frekans spektrumu üzerinde istenilen işlemleri gerçekleştirme ve gerçekleştirilen işlemler neticesinde de istenilen özellikleri sağlayacak yapıyı oluşturmaktır. Böylece meydana getirilen bu yapıya, sayısal filtre adı verilmektedir. Sayısal filtreleme, düzgünleştirme yapma, gürültü azaltma, iletim ve depo problemlerini en aza indirme veya çözme, sayısal bir görüntüyü temsil eden çok sayıda bilginin azaltılmasını sağlayan bilgi sıkıştırma işlemlerinde önemli rol oynar.

İki boyutlu (2-D) sayısal sinyal işlemenin alanı son yıllarda hızla artmaktadır. Uydu fotoğrafları, radar ve deniz radarı haritaları, tıbbi X-Ray resimler, röntgen filmi, mikroskopik resim, sismik bilgiler ve manyetik kayıtlar 2-D sinyal işlemenin tipik örnekleridir.

2-D sayısal filtreler, 2-D ayırık zamanlı sinyalleri işlemede kullanılan ayırık zamanlı sistemler olarak tanımlanabilirler. Doğrusal veya doğrusal olmayan, zamanla değişen veya zamanla değişmeyen, nedensel veya nedensel olmayan, kararlı olan veya kararlı olmayan bir yapıya sahip olabilirler. 2-D sayısal filtreler; filtrenin çıkışının önceki çıkış değerlerine bağlı olup olmamasına göre tekrarlı veya tekrarsız olarak sınıflandırılabilirler. İmpuls yanıtının sonlu veya sonsuz olmasına göre sonlu impuls cevaplı filtreler (FIR) sonsuz impuls cevaplı filtreler (IIR) olarak sınıflandırılırlar. Bu 2-D sayısal filtre tipleri 1-D karıştırlarıyla benzer özelliklere sahiptirler.

2-D sayısal filtrelerin tasarımı; yaklaşım, gerçekleştirme, uygulama ve kuantalama hatasının belirlenmesi şeklinde dört adımda gerçekleştirilir. Filtre tasarımında temel amaç,

filtre transfer fonksiyonunu oluşturan pay ve payda katsayılarının hesaplanması işlemine dayanmaktadır.

Yapılan tez çalışması 7 ana bölümden oluşmaktadır. Bölüm 2' de sayısal filtre tasarımı hakkında bilgiler verilmiş, ideal filtrelerin genlik cevapları verilmiş, fiziksel olarak neden gerçekleştirilemedikleri anlatılmış ve gerçekleştirilebilmeleri için nelere ihtiyaç olduğundan bahsedilmiştir. Bölüm 3'de 2-D ayrık zamanlı sinyaller tanıtılarak bir sistem olarak 2-D sayısal filtrelerden (lineerlik, nedensellik vb.) bahsedilmiş ve 2-D sayısal filtrelerin karakteristiklerinden, akış grafikleri ve ağlarıyla temsil edilmesinden ve uzay-domein analizinden bahsedilmiştir [5]. Bölüm 4' de sayısal filtre çeşitlerinden tekrarsız sayısal filtreler hakkında bilgiler verilerek, bu tür filtrelerin hangi yöntemler kullanılarak gerçekleştirildikleri anlatılmıştır. Bölüm 5'de sayısal filtre çeşitlerinden bir diğeri olan tekrarlı sayısal filtreler anlatılmıştır. Bölüm 6'da 1-D analog filtrelerden 2-D sayısal filtreler tasarlanmış ve MATLAB ortamında genlik ve eş yükselti eğrileri çizdirilmiştir. Ayrıca hazır MATLAB komutlarıyla 2-D Filtre tasarlama örnekleri verilmiş ve görüntü üzerine filtreleme uygulamaları yapılmıştır. Son bölüm olan Bölüm 7'de bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

## **2. SAYISAL FİLTRELER**

Fiziksel bir durum hakkında bilgi taşıyan, o durum hakkında bizlere bilgi veren, bir veya daha fazla değişkeni içeren fonksiyonlara işaret denir. İstenilen özelliklerde işaret üreten veya girişine uygulanan işarete göre arzu edilen özelliklerde çıkış üreten düzeneklere ise sistem adı verilir. İşaret işleme ise; işaretlerin bilgisayarlar ya da özel olarak üretilmiş sayısal donanımlarda, bir sayısal dizi olarak gösterilmesi ve bu donanımlardaki işaret dizisi üzerinde, çeşitli işlemler yapıldıktan sonra çıkışında istenilen bir bilginin bu diziden elde edilmesi işlemidir [1].

Sayısal işaret işlemenin amaçlarından birisi, bir işaretin frekans spektrumu üzerinde belirli frekanslarda istenilen işlemleri yapan, yapılan bu işlemler neticesinde de istenilen özelliklerde sonuç alabilecek yapıyı oluşturmaktır. Oluşturulan bu yapıya, sayısal filtre adı verilir. Sayısal filtreler, yazılımla veya donanımla gerçekleştirilebilirler.

Sayısal filtreler impuls cevaplarına göre, FIR (sonlu impuls cevaplı) filtreler ve IIR (sonsuz impuls cevaplı) filtreler olarak ikiye ayrılırlar. Sayısal filtreler bir ayrık zamanlı sistem olarak incelenebilirler. Bu nedenle de ayrık zamanlı bir sistemin gerçekleştirilmesi sırasında izlenen adımlar, sayısal filtrenin hayata geçirilmesinde de uygulanabilir. Bir ayrık-zamanlı sistemin gerçekleştirilmesi aşağıda açıklanan üç ana safhadan meydana gelmektedir [2].

### **1- Sistem özelliklerinin belirlenmesi**

Tasarımın ilk aşaması olan bu safhada, sistemin yerine getirmesi gereken özellikler tanıtılır. Örneğin, üzerinde işlem yapılacak işaret için sistemin hangi frekans aralığını geçireceği, hangi frekans aralığını bastıracağı, ayrıca sistemin bu geçirme ve durdurma bantlarında ne kadarlık bir dalgalanmaya izin vereceği belirlenir.

### **2- Belirlenecek özellikleri yerine getirecek sistemin tasarımı**

Sistemden yerine getirilmesi istenen özellikler belirlendikten sonra, bu özellikleri sağlayacak sistemin tasarımı gerçekleştirilir. Ayrıca sistemin bu özellikleri yerine getirirken hangi tür sistem yapısına FIR veya IIR ihtiyaç olduğuna karar verilir. Tasarımda kullanılan sistem yapısına karar verildikten sonra, yapısı gerçekleştirecek olan sistemin

tasarım yöntemlerinden uygun olanı belirlenerek tasarım gerçekleştirilir. Ayrıca bu aşamada, sistemin fiziksel olarak gerçekleştirilmesi için gereken parametreler belirlenir.

### 3- Sistemin hayata geçirilmesi:

İstenen parametreler yerine getirildikten sonra sistem gerçekleştirilir. Sistemin transfer fonksiyonu göz önüne alınarak, sistem sabit katsayılı FIR veya IIR olarak gerçekleştirilir.

Sayısal filtreler sahip oldukları diğer özelliklere göre de;

- 1- Doğrusal,
- 2- Doğrusal olmayan,
- 3- Zamanla-değişen,
- 4- Zamanla-değişmeyen

sayısal filtreler olarak sınıflandırılırlar [2].

Bir ayrık-zamanlı sistemde sistemin özelliklerini taşıyan transfer fonksiyonu, fark denklemlerinden, durum denklemlerinden ve devre yapısından bulunabilir.

Filtrenin giriş çıkış ilişkisi

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^N b(k)y(n-k) \quad (2.1)$$

fark denklemi yardımıyla modellenenebilir, Bu denklemden z-dönüşümü yardımıyla sayısal filtrenin transfer fonksiyonu  $H(z)$  bulunabilir.

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (2.2)$$

Burada;

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b(k)z^{-k}} \quad (2.3)$$

(2.2)' de verilen denklemin zaman domenı karşılığı konvolüsyon toplamıdır.

$$y(n) = \sum_{l=0}^{\infty} h(l)x(n-l) \quad (2.4)$$

Bir sayısal filtreden istenilen özellikler genellikle frekans domenin de verilir. Böyle bir durumda filtrenin frekans cevabını bulabilmek için,  $z$  değişkeni yerine  $z = e^{j\Omega}$  konularak istenilen sonuca ulaşılabilir.

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M a(k)e^{-j\Omega k}}{1 + \sum_{k=1}^M b(k)e^{-j\Omega k}} \quad (2.5)$$

Sayısal filtrenin frekans domeni karakteristiğini temsil eden frekans cevabı,  $H(e^{j\Omega})$ ,  $\Omega$  frekansının karmaşık değerli bir fonksiyonudur. Burada radyan cinsinden ifade edilen  $\Omega$ , sayısal frekans olarak adlandırılır.  $H(e^{j\Omega})$ ' nin Ters Fourier dönüşümü alındığında elde edilen sonuç, filtrenin impuls cevabı olan  $h(n)$ ' i vermektedir.  $h(n)$ , sayısal filtrenin impuls cevabıdır. Bu impuls cevabı da filtrenin zaman domeni özelliklerini temsil etmektedir. Fakat bir sayısal filtrenin özellikleri verilirken zaman domeni yerine frekans domeni özellikleri verilmesi tercih edilir. Bu amaçla bir sayısal filtrede temel amaç, filtrenin giriş ve çıkışı arasındaki fark denkleminde elde edilen transfer fonksiyonundaki (denklem 2.3) katsayılar olan  $a(k)$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, M$  ve  $b(k)$ ,  $k=1, 2, \dots, N$  bulunmasıdır [6].

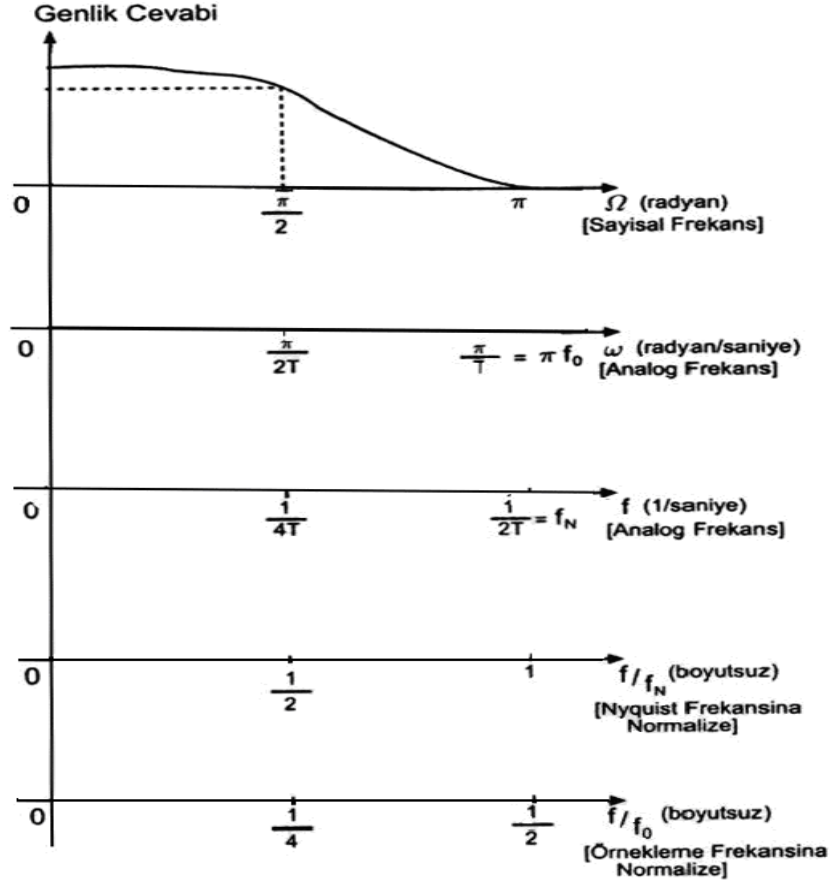
## 2.1. Sayısal Filtre Karakteristiklerinin Belirlenmesi

Sayısal filtre tasarımında, filtrenin frekans cevabı özelliklerinin belirlenmesinde, literatür de çeşitli yöntemler kullanılmaktadır [1,2]. Bazı kaynaklarda filtrenin frekans cevabı özellikleri sayısal frekans cinsinden verilirken, bazı kaynaklarda filtre özellikleri analog frekans cinsinden verilmektedir. Bazen de frekans cevabının Nyquist frekansı veya örnekleme frekansına normalize edilerek tanımlandığı görülmektedir. Bütün bu gösterimler birbirine eşit olup, birbirlerine karıştırılmadan kullanılabilmesi için, Şekil 2.1. dikkate alınmalıdır [1]. (2.5)' de verilen sayısal filtrenin frekans cevabı,  $H(e^{j\Omega})$ ' nin periyodu  $2\pi$ ' dir. Eğer filtreleme işlemi  $\Delta t = T$  örnekleme aralığı olan bir işarete uygulanacak olursa  $\Omega$  sayısal frekansına karşılık gelen analog frekans  $\omega$  veya  $f$  cinsinden ifade etmek mümkündür.

$$\text{Sayısal frekans } (\Omega) = \text{Analog frekans } (\omega) \times \text{Örnekleme aralığı } (T)$$

Nyquist frekansının  $f_N = 1/2T$  olduğu hatırlandığında, filtre karakteristiği  $f/f_N$  olarak ifade edilebilir. Eğer frekans, Nyquist frekansına göre ifade edilirse, temel periyot

$[-1, 1]$  arasındır [1]. Bazen, frekansın  $f_0 = 1/T$  örnekleme frekansına oranı da ( $f/f_0$  boyutsuz) kullanılır. Bu gösterimde ise temel periyot  $(-1/2, 1/2)$  aralığındadır. Analog bir filtre karakteristiği tanımlanırken kullanılan frekans aralığı  $(-\infty, \infty)$  aralığında iken sayısal filtrelerde kullanılan frekans aralığı  $(-f_N, f_N)$  dir. Literatürde sayısal frekans belirtmede farklı simgeler kullanılabilir.  $\Omega$  yerine  $\lambda$  veya  $\Theta$  gibi simgelerde kullanılır.



**Şekil 2.1** Kesim frekansı  $\Omega_c = \pi/2$  radyan olan sayısal filtrenin çeşitli biçimlerde frekans cevabının gösterilmesi

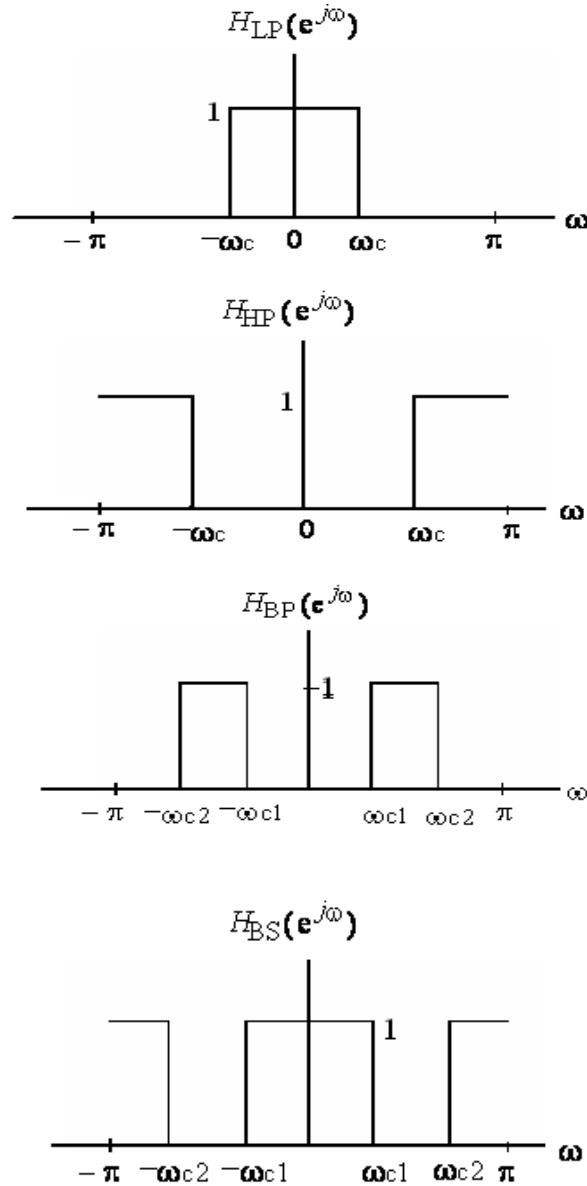
## 2.2. İdeal Sayısal Filtreler

Sayısal filtreler adlandırılırken, sahip oldukları frekans karakteristikleri dikkate alınır. Filtre karakteristiğinde, geçirme ve durdurma bantlarında göstermiş olduğu davranışa göre filtreler [2],

1. Alçak Geçiren Filtre (AGF)
2. Yüksek geçiren filtreler (YGF)
3. Bant geçiren filtreler (BGF)

#### 4. Bant durduran filtreler (BDF)

olarak isimlendirilirler. Bir ideal sayısal filtrenin frekans karakteristiğinin geçirme bandında, filtrenin girişine uygulanan işarete herhangi bir değişim uygulanmadan çıkışına aynen aktarılırken, durdurma bandında ise giriş işaretinin o frekans aralarındaki frekans bileşenleri tamamen bastırılarak çıkışına aktarılır. Şekil-2.2’de, bu türden ideal sayısal filtrelerin frekans karakteristikleri gösterilmiştir.



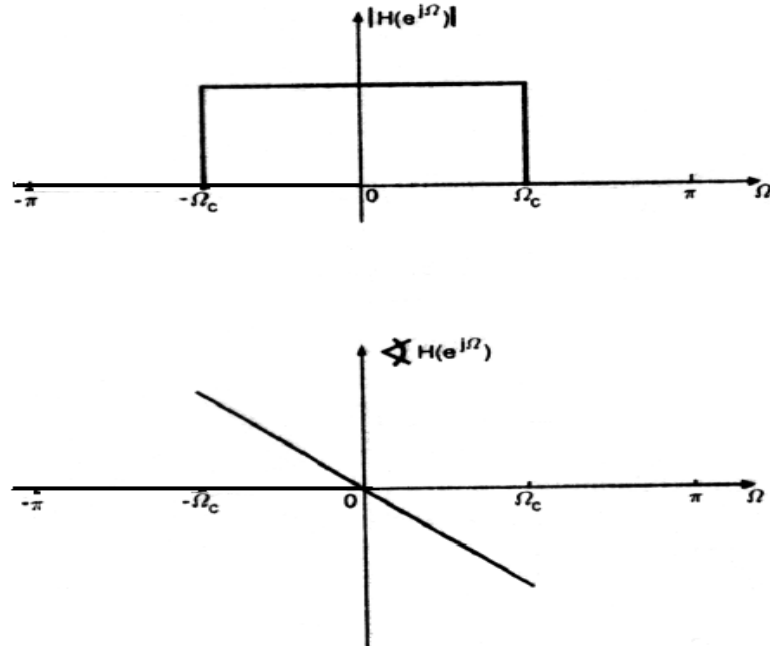
**Şekil 2.2** İdeal sayısal filtre frekans karakteristikleri; a) İdeal Alçak geçiren, b) İdeal Yüksek geçiren, c) İdeal Bant-geçiren, d) İdeal Bant-durduran

### 2.2.1. İdeal Alçak Geçiren ve Yüksek Geçiren Sayısal Filtreler

Genlik ve faz karakteristiği Şekil 2.3'deki gibi olan ideal alçak geçiren sayısal filtre göz önüne alındığında filtrenin transfer fonksiyonu [3];

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1.e^{-jn_0\Omega} & |\Omega| \leq \Omega_c \quad \text{için} \\ 0 & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \quad \text{için} \end{cases} \quad (2.6)$$

olarak verilir. Burada,  $n_0$  pozitif bir sayıdır. Şekil 2.3' de  $(0, \Omega_c)$  aralığı, filtrenin geçirme bandı olarak adlandırılır. Burada  $\Omega_c$ , ideal AGF'nin geçirme bandı kesim frekansıdır [1].



Şekil 2.3 İdeal alçak geçiren sayısal filtrenin genlik ve faz karakteristiği

İdeal AGF'ler, karakteristiklerinden de anlaşılacağı gibi geçirme bandı dışında kalan tüm frekans bileşenlerini bastırırken, geçirme bandı içerisindeki bütün işaretleri ise hiçbir bozulmaya uğratmadan sadece belirli bir gecikme ilave ederek çıkışa aktarmaktadırlar. Tasarlanan bir alçak geçiren sayısal filtrenin frekans karakteristiğinde, geçirme bandı içerisinde genliğinin sabit kalması, faz cevabının ise  $\omega$  'nın doğrusal değişen bir fonksiyon olması istenir.

İdeal yüksek geçiren sayısal filtrede ise, kesim frekansının  $\Omega_c$  olduğu ve filtre cevabının  $2\pi$  ile periyodik olduğu durumda, filtrenin transfer fonksiyonu,

$$H_{yg}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 0 & \Omega < \Omega_c \\ 1 & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir. İdeal yüksek geçiren sayısal filtrenin frekans cevabı,  $H(e^{j\Omega}) = 1 - H_{ag}(e^{j\Omega})$  şeklinde AGF'nin frekans cevabı ile ilişkilendirildiğinde, ideal yüksek geçiren sayısal filtrenin frekans cevabı,

$$h_{yg}[n] = \delta[n] - h_{ag}[n] = \delta[n] - \frac{\sin \Omega_c n}{\pi n} \quad (2.8)$$

olarak elde edilir.

### 2.2.2. Fiziksel Olarak Gerçekleştirme

(2.6)'daki gibi tanımlanan ideal alçak geçiren sayısal filtrenin fiziksel olarak gerçekleştirilebilmesi için filtrenin nedensel olması gerekmektedir [4]. Yani, filtrenin impals cevabı

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \quad \text{için} \quad (2.9)$$

şartını sağlaması gerekir.  $H(z)$ 'nin ters  $z$ -dönüşümü alındığında

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H(z) z^{n-1} dz \quad (2.10)$$

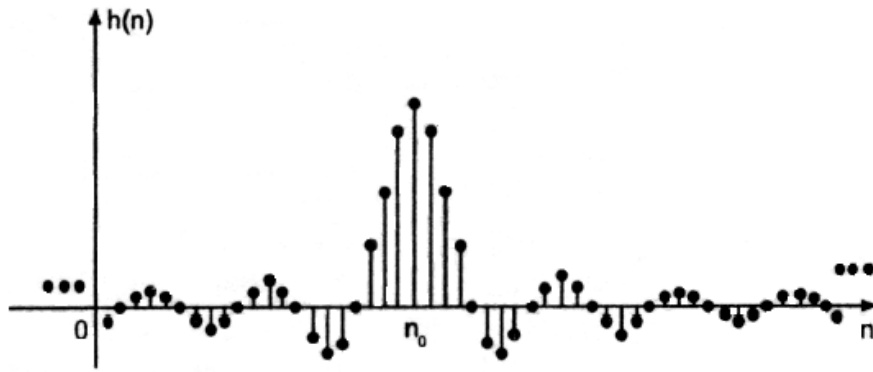
elde edilir. Burada  $C$ , kapalı konturu yakınsaklık bölgesi içerisindedir. Filtrenin fiziksel olarak gerçekleştirilebilmesi için kararlı olması gerektiğinden, yakınsaklık bölgesi  $|z| = 1$ 'i kapsar. Bu nedenle  $C$  konturu,  $z$ -düzleminde birim daire olarak seçilebilir.  $z = e^{j\Omega}$  değişimi uygulandığında (2.10) denklemi

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega \quad (2.11)$$

şeklinde yazılabilir. İdeal alçak geçiren sayısal filtrenin tanım denklemi olan (2.6), (2.11) de yerine yazıldığında

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\sin(n - n_0)\Omega_c}{(n - n_0)\pi} & n \neq n_0 \text{ için} \\ \frac{\Omega_c}{\pi} & n = n_0 \text{ için} \end{cases} \quad (2.12)$$

elde edilir. (2.12) incelendiğinde, filtrenin frekans cevabı olan  $h(n)$ ' in sağ taraflı bir dizi olmadığı görülür. Yani nedensellik şartı olan  $n < 0$  için,  $h(n) = 0$  'ı sağlamamaktadır. Bu durumda filtre, fiziksel olarak gerçekleştirilemez. Şekil 2.4' de, (2.12) tanımı ile verilen filtrenin impuls cevabı görülmektedir [4].



Şekil 2.4 İdeal alçak geçiren sayısal filtrenin impuls cevabı

Şekil 2.4' den görüldüğü gibi, filtrenin impuls cevabı  $[-\infty, \infty]$  aralığında,  $\infty$  değer almaktadır. Dolayısıyla da filtre fiziksel olarak gerçekleştirilemez.

Böyle bir durumda filtrenin fiziksel olarak gerçekleştirilebilmesi için genlik ve faz karakteristikleri nasıl seçilmelidir? Sorusu gündeme gelir.

Eğer bir filtrenin genlik ve faz karakteristikleri birbirinden bağımsız olarak seçilirse, elde edilecek filtre fiziksel olarak gerçekleştirilemez. Sadece filtrenin genlik karakteristiği verilir de, faz karakteristiği serbest bırakılırsa istenilen özelliklere sahip filtreye mümkün olduğunca yaklaşılr. Ancak, bu kez de istenilen özellikleri sağlayacak filtre çok yüksek dereceden olacaktır. Bu durum, tasarlanan filtrenin maliyetinin yüksek olmasına sebep olacaktır. Dolayısıyla, pratikte tasarımı gerçekleştirilen filtrenin nedensel olmasından başka birde basit rasyonel katsayılı olması istenir.

Filtrenin nedensellik, basitlik koşullarına ek olarak birde, kararlılık şartının eklenmesi gerekmektedir. Bu üç özelliğin de aynı anda gerçekleşmesi çok zordur. Bu

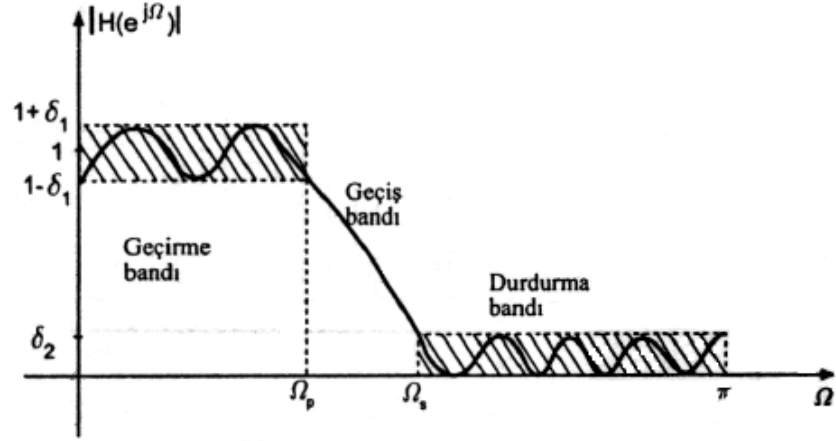
nedenle pratik filtre tasarlarlarken filtrenin frekans karakteristiğinin tam olarak değil de, bazı kabul edilebilir toleranslarla birlikte verilmesi gerekir [6].

### 2.3. İdeal Olmayan Sayısal Filtreler

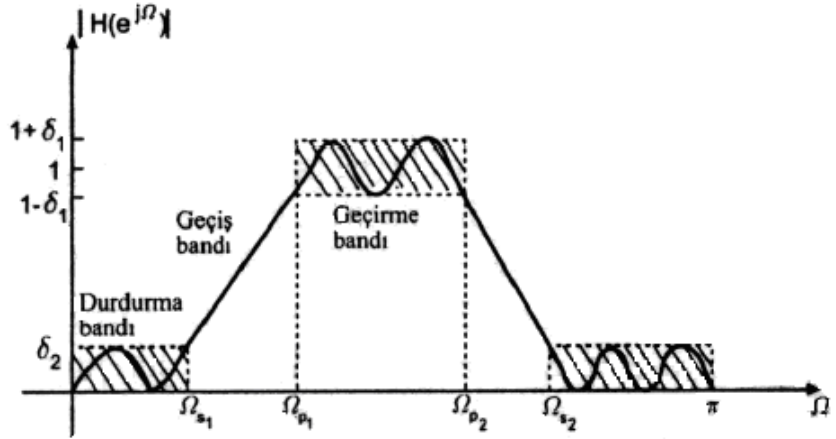
Pratik olarak tasarlanan filtreler, istenen özellikleri ancak yaklaşık olarak gerçekleştirirler. Ayrıca tasarlanan filtrelerin frekans karakteristiğinin ideal filtrelerin sahip olduğu frekans karakteristiği gibi olması istenmez. Bunun yerine, filtrenin geçirme ve durdurma bantlarında bazı esneklik olması istenir ve geçirme bandı ile durdurma bantları arasında ideal filtrelerde olduğu gibi keskin bir kesim yerine daha kademeli bir geçişin olması istenir. Bu nedenle, tasarlanan filtrelerde geçirme bandı ile durdurma bantları arasına birde geçiş bandı ilave edilir. O halde alçak geçiren bir filtre karakteristiği, Şekil 2.5'deki gibi taralı alan içerisinde kalmalıdır. Bu şekilde de görüleceği gibi, filtrenin geçirme bandında 1'e göre  $\pm \delta_1$  'lik bir dalgalanma ile durdurma bandı içerisinde 0'a göre  $\delta_2$  'lik bir dalgalanmaya izin verilir. Geçirme bandı içerisindeki birim genliğe göre olan bu dalgalanmaya geçirme bandı dalgalanması, durdurma bandındaki 0'a göre oluşan dalgalanmaya ise durdurma bandı dalgalanması adı verilir [2].

$\Omega_p$  ve  $\Omega_s$  frekansları sırasıyla, AGF'nin geçirme bandı ve durdurma bandı kenar frekanslarıdır.  $\Omega_p$  den  $\Omega_s$  e kadar olan mesafe ise geçirme bandı ile durdurma bantları arasındaki geçiş için bırakılmıştır. Filtrenin frekans karakteristiğinde bırakılan bu geçiş aralığına, geçiş bandı adı verilir.

Ayrıca  $\Omega=0$  ve  $\Omega=\pi$  frekansları dışındaki frekans aralığını geçiren ve bu frekanslar dışında kalan bütün frekansları bastıran filtreye ise bant-geçiren filtre adı verilmektedir.



Şekil 2.5 AGF'nin frekans cevabı



Şekil 2.6 BGF'nin frekans cevabı

#### 2.4. Geçici Durum Davranışı

Sayısal filtrelerin transfer fonksiyonu olan  $H(z)$ 'nin genlik ve faz özellikleri, sürekli-durum cevabıyla ilgilidir. Sistemin sürekli-duruma ulaşana kadar ki durum cevabına ise sistemin geçici-durum cevabı adı verilir. Sistem tasarımında elbette geçici durum davranışı önemlidir. Şekil 2.7 de sistemin geçici durum davranışı gösterilmektedir [6]. Bu şekilden de görüleceği gibi sistemin sürekli-duruma ulaşması için geçirdiği geçici-durumun belirlenmesinde yükselme zamanı, yerleşme zamanı ve aşma gibi kavramların hesaplanması gerekmektedir [1]. Bir sistemin geçici-durum davranışında;

$n_r$  : Sistemin yükselme zamanını;

$n_s$  : Sistemin yerleşme zamanını;

$y_{ss}$  : Sistemin sürekli durum cevabına karşılık gelmektedir.

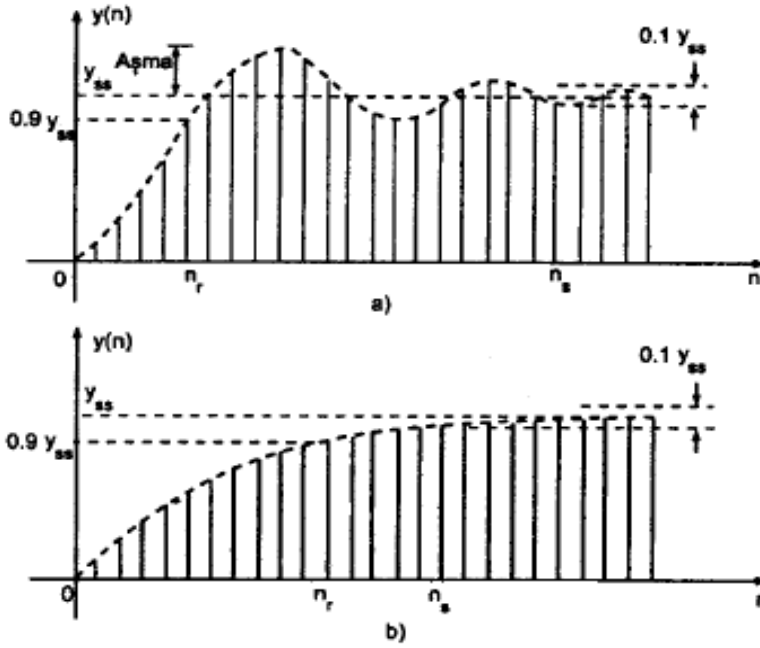
Eğer bir sistemin sürekli-durum cevabı,

$$y_{ss}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) \quad (2.13)$$

ise sistemin yükselme zamanı,

$$y(n_r) \geq 0.9y_{ss}(n) \quad (2.14)$$

şartını gerçekleştiren ilk  $n_r$  süresidir.



Şekil 2.7 Sayısal filtrelerde geçici durum davranışı a) geçici cevapta aşma b) aşmanın olmadığı geçici cevap

Sistemin yerleşme zamanı olan  $n_s$  ise;

$$|y(n) - y_{ss}| \leq 0.05y_{ss} \quad (2.15)$$

şartını sağlayan ilk zamandır. İyi tasarlanmış bir sistemde küçük yerleşme zamanı, küçük yükselme zamanı ve küçük miktar da aşma olması gerekir.

Bir sistemin tasarımı, hem sürekli-durum hem de geçici-durum davranışı birlikte düşünülerek gerçekleştirilir. Uygulamalarda filtrenin sadece istenilen genlik karakteristiği ve geçici-durum cevabı kontrol edilerek sonuca varılır. Eğer bu iki özellik arzu edilen değerlerde ise istenen tasarım gerçekleştirilmiştir. Aksi takdirde tasarım işlemi tekrarlanması gerekir [6].

### 3. 2-D SAYISAL FİLTRELER

#### 3.1. Giriş

2-D sayısal filtreler 2-D ayrık zamanlı sinyalleri işlemede kullanılan ayrık zamanlı sistemler olarak tanımlanabilirler. Bir boyutlu (1-D) filtreler gibi, doğrusal veya doğrusal olmayan, zamanla değişen veya zamanla değişmeyen, nedensel veya nedensel olmayan, kararlı veya kararsız bir yapı gösterebilirler. 2-D filtreler de, fark denklemi veya transfer fonksiyonu yardımıyla tanımlanabilir ve frekans ortamında analiz edilebilirler. 2-D sürekli ve ayrık zamanlı sinyaller 1-D sinyallerin genişletilmiş (uzantısı) olarak kullanılır [5].

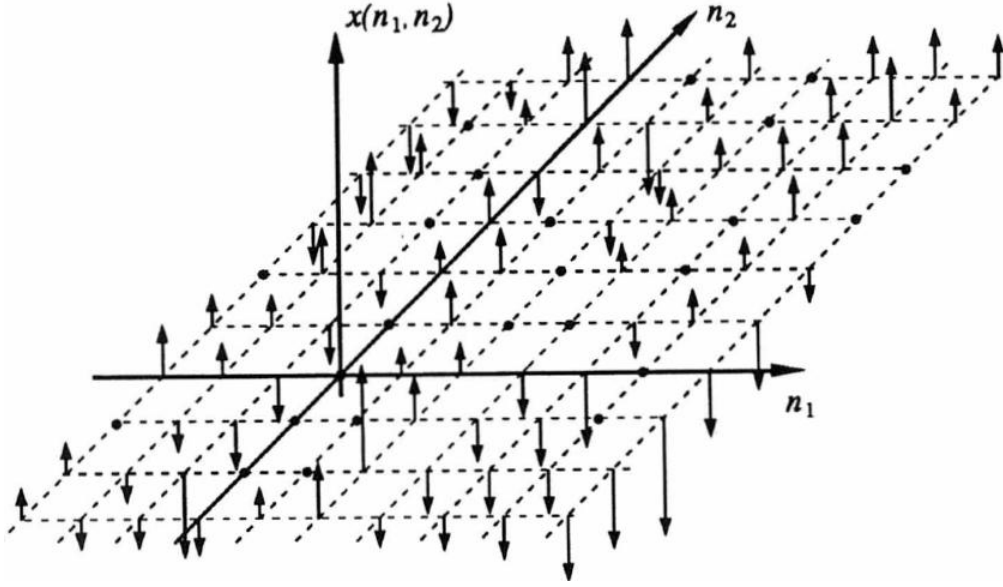
#### 3.2. 2-D Ayrık Zamanlı Sinyaller

Bir 2-D sürekli sinyal iki bağımsız sürekli değişken  $t_1$  ve  $t_2$ ' ye bağlı  $x(t_1, t_2)$  fonksiyonu ile ifade edilebilir. Burada  $t_1$  ve  $t_2$  değişkenlerinin her biri zaman, mesafe veya herhangi başka bir değişken olabilir.

Ayrıca, 2-D ayrık zamanlı sinyaller iki reel bağımsız tamsayı değişkenleri  $n_1$  ve  $n_2$ 'ye bağlı  $x(n_1T_1, n_2T_2)$  fonksiyonu ile ifade edilebilir. Burada  $T_1$  ve  $T_2$  sabitlerdir.  $n_1T_1$  veya  $n_2T_2$  zaman, mesafe vb.lerini temsil eder. Bu çalışmada, 2-D ayrık zamanlı sinyal  $x(n_1, n_2)$  olarak gösterilecektir. Her ne kadar  $x(n_1, n_2)$  karmaşık olsa da bu normalde gerçek(reel) ve Şekil 3.1'de çizildiği gibi 3-D çizimin terimlerinde ifade edilebilir. 2-D ayrık zamanlı sinyaller, genellikle sürekli zamanlı sinyallerin örneklenmesiyle elde edilirler.

Pek çok uygulamada, 2-D sinyallerin bir değişkene göre sürekli zamanlı iken diğer değişkene göre ayrık zamanlı olduğu ortaya çıkar. Böyle sinyaller karışık olarak ifade edilirler. 2-D karışık sinyale örnek olarak, bir patlamadan sonra oluşabilen akustik dalgalar dizisi verilebilir. Bu sinyalde; sürekli değişken zamandır, ayrık(kesikli) değişken mesafedir [5].

2-D ayrık zamanlı sinyalleri tanımlamak için bazı kavramlar açıklanmaktadır.



Şekil 3.1 Herhangi bir 2-D ayırık zamanlı sinyalin perspektif görünümü

### 3.2.1. Destek Bölgesi

Bir  $x(n_1, n_2)$  sinyalinde, tüm noktalarda  $x(n_1, n_2)$ 'nin 0 olduğu  $(n_1, n_2)$  düzlemine bağlı bir A bölgesi göz önüne alınsın.  $(n_1, n_2)$  düzlemine göre A'nın dışında kalan ve S bölgesi olarak ifade edilen bölge sinyalin destek bölgesi olarak ifade edilir. Eğer A, içindeki tüm noktalarda  $x(n_1, n_2)$ 'nin 0 olduğu  $(n_1, n_2)$  düzleminde en büyük bölge ise, A'nın dışında kalan S bölgesinin minimum destek bölgesi olduğu söylenir. Eğer bir 2-D sinyal ilk çeyrek haricinde her yerde sıfır ise, ilk çeyrek desteğine sahip olduğu söylenir. Eğer 2-D sinyalinin minimum destek bölgesi sonlu ise, bu sinyalin sonlu uzunluklu 2-D sinyali olduğu söylenir [5].

### 3.2.2. Kuantalama (Nicemleme)

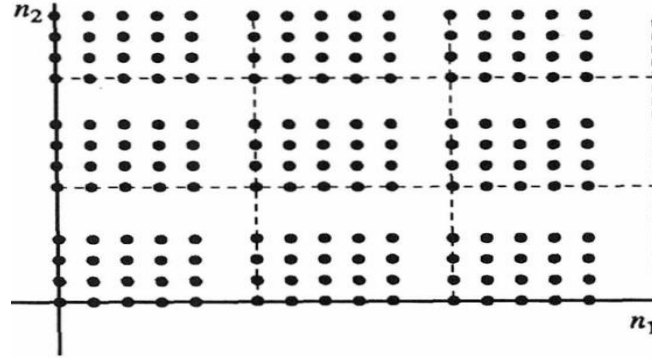
1-D'de olduğu gibi, 2-D ayırık zamanlı bir sinyalin genliği, bir sayısal hafızada sinyalin depolanmasını kolaylaştırmak için sonlu sayıda ve farklı düzeylerde ifade edilerek nicemlenebilir. Sinyal nicemleme, sabit ve sabit olmayan noktalarda sinyalin ifade edilmesi için kullanılan aritmetik tanıma bağlıdır. Sinyalin seviyelerini ifade eden değerler kısaltılarak veya yuvarlatılarak nicemleme yapılabilir [5].

### 3.2.3. Periyodiklik

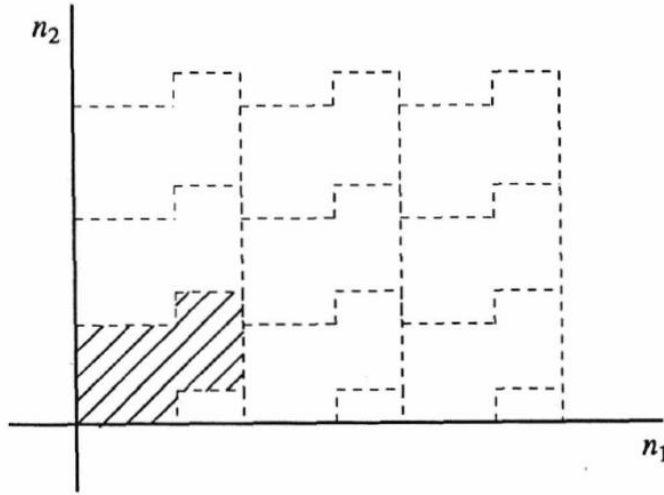
Bir 2-D ayrık zamanlı sinyal, uzay domeni değişkenleri  $n_1$  ve  $n_2$  'nin biri veya ikisine göre periyodik olabilir. Bir 2-D sinyal, herhangi bir  $k_1$  ve  $k_2$  tamsayı çifti için;

$$x(n_1 + k_1 N_1, n_2 + k_2 N_2) = x(n_1, n_2) \quad (3.1)$$

bağıntısı ile temsil edilirse, her iki uzay-domeni değişkenine göre periyodik olduğu söylenir.  $N_1$  ve  $N_2$  sabitleri, sinyalin iki yöndeki periyotlarıdır. Bir periyodik sinyal, Şekil 3.2a'da gösterilmiştir. Sinyalin 2-D periyodu, Şekil 3.2a'daki gibi genellikle dikdörtgen şeklinde ise de; Şekil 3.2b'deki gibi birçok geometrik şekilde de olabilir.



a)



b)

**Şekil 3.2** a) Dikdörtgen periyotlu 2-D ayrık zamanlı sinyaller, b) Dikdörtgen şeklinde olmayan bir periyotla periyodik 2-D ayrık zamanlı sinyaller

### 3.2.4. Ayrılabilirlik

Bir 2-D ayırık zamanlı sinyal, iki 1-D ayırık zamanlı sinyalin çarpımı şeklinde yazılabilirse ayrılabilir olduğu söylenir.

$$x(n_1, n_2) = x_1(n_1)x_2(n_2) \quad (3.2)$$

Bu durumda 2-D filtrenin tasarımı iki 1-D filtrenin tasarımına bölünebilir. 2-D sinyaller genellikle ayrılamaz olmasına rağmen, bazı durumlarda 1-D sinyallerin çarpımının lineer kombinasyonu ile bir 2-D sinyalini açıklamak mümkündür. Yani;  $i = N_L, \dots, N_H$  için  $\alpha_i$ 'nin sabit olduğu;

$$x(n_1, n_2) = \sum_{i=N_L}^{N_H} \alpha_i x_{1i}(n_1) x_{2i}(n_2) \quad (3.3)$$

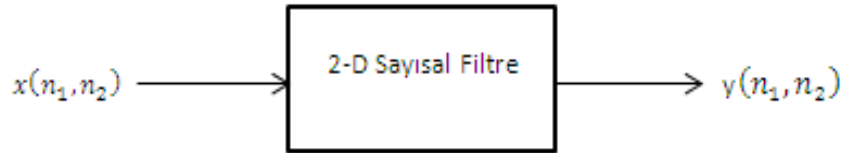
bağıntısıyla açıklanabilir. Bu durumda; 1-D filtreler basitçe tasarlanarak ve daha sonra 2-D sayısal filtre şeklinde birleştirilerek 2-D sayısal filtre tasarlamak mümkün olur. Eşitlik (3.3)'deki ayrışma, 2-D sinyalin sonlu değere sahip olduğu durumlarda mümkün olur [5, 13].

### 3.3. Sistem Olarak 2-D Sayısal Sinyaller

2-D sayısal filtre, Şekil 3.3'te gösterildiği gibi bir  $x(n_1, n_2)$  giriş sinyalini alarak  $y(n_1, n_2)$  çıkış sinyaline dönüştüren ayırık zamanlı bir sistemdir. Çıkış,

$$y(n_1, n_2) = \mathfrak{R}x(n_1, n_2) \quad (3.4)$$

şeklinde matematiksel olarak ifade edilir. Burada  $\mathfrak{R}$  bir operatördür. Bu bağıntı lineer, değişken ve nedensel olan 2-D sayısal filtre sisteminin esas özelliklerini tanımlamak için kullanılabilir [5].



Şekil 3.3 Sistem olarak 2-D sayısal filtrenin blok gösterimi

### 3.3.1. Lineerlik

Bir 2-D sayısal filtre  $x_1(n_1, n_2)$  ve  $x_2(n_1, n_2)$  giriş sinyalleri ve  $\alpha$ 'nın alabileceği tüm değerler için;

$$\Re[x_1(n_1, n_2) + x_2(n_1, n_2)] = \Re x_1(n_1, n_2) + \Re x_2(n_1, n_2) \quad (3.5)$$

$$\Re \alpha x(n_1, n_2) = \alpha \Re x(n_1, n_2) \quad (3.6)$$

bağıntıları ile verilen toplanabilirlik ve homojenlik koşullarını karşılıyorsa, **lineer** olduğu söylenir. Bu iki koşul;

$$\Re[\alpha_1 x_1(n_1, n_2) + \alpha_2 x_2(n_1, n_2)] = \alpha_1 \Re x_1(n_1, n_2) + \alpha_2 \Re x_2(n_1, n_2) \quad (3.7)$$

süperpozisyon teoremiyle açıklanabilir. Bazı orantı sabitleri ve bazı sinyaller için eşitlik (3.7)'teki koşul sağlanmazsa, 2-D sayısal filtrelerin lineer olmadığı söylenir.

### 3.3.2. Zamanla Değişmeyen Sistemler

Tüm  $n_1 < 0$  veya  $n_2 < 0$  değerleri için  $x(n_1, n_2) = 0$  ve  $y(n_1, n_2) = 0$  olduğu bir 2-D sayısal filtre  $k_1, k_2$ 'nin tüm değerleri ve  $x(n_1, n_2)$ 'nin tüm giriş sinyalleri için;

$$y(n_1 - k_1, n_2 - k_2) = \Re x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \quad (3.8)$$

şartını sağlıyorsa, zamanla değişmeyen bir filtredir.

### 3.3.3. Nedensellik

Bir 2-D sayısal filtrenin  $n_1 \leq k_1$  ve  $n_2 \leq k_2$  için çıkışı;  $n_1 > k_1$  veya  $n_2 > k_2$  değerlerinden bağımsız ise nedensel olduğu söylenir. 2-D sayısal filtre ancak ve ancak  $x_1(n_1, n_2)$  ve  $x_2(n_1, n_2)$ 'nin tüm sinyalleri için,

$$\Re x_1(n_1, n_2) = \Re x_2(n_1, n_2), \quad (n_1 \leq k_1 \text{ ve } n_2 \leq k_2) \quad (3.9)$$

olursa nedensel olur.

Eğer eşitlik (3.9)  $n_1 \leq k_1$  ve  $n_2 \leq k_2$  için,

$$x_1(n_1, n_2) = x_2(n_1, n_2) \quad (3.10a)$$

olursa ve  $n_1 > k_1$  ve  $n_2 > k_2$  için,

$$x_1(n_1, n_2) \neq x_2(n_1, n_2) \quad (3.10b)$$

olursa filtrenin nedensel olmadığı söylenir.

### 3.4. Karakterizasyon

2-D filtreler, 1-D'ler gibi tekrarlı ve tekrarsız olarak tanımlanabilir ve fark denklemleriyle karakterize edilebilirler.

#### 3.4.1. Tekrarsız Filtreler

Bir 2-D tekrarsız filtrede;  $y(n_1, n_2)$  çıkışı  $-\infty < i, j < +\infty$  için  $x(n_1 - i, n_2 - j)$ 'nin bir fonksiyonudur. Lineerlik ve zamanla değişmezlik varsayılarak; tekrarsız 2-D sayısal filtrede çıkış girişin alabileceği tüm değerlerin ağırlıklı toplamı olarak

$$y(n_1, n_2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{ij} x(n_1 - i, n_2 - j) \quad (3.11)$$

şeklinde açıklanabilir.

Nedensellik varsayılarak;  $n_1 \leq k_1$  ve  $n_2 \leq k_2$  için çıkış,  $k_1$  ve  $k_2$ 'nin olası tüm değerleri için girişten bağımsızdır ve bu yüzden;

$$a_{ij} = 0 \quad (-\infty \leq i \text{ veya } j < 0 \text{ için})$$

$$y(n_1, n_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x(n_1 - i, n_2 - j) \quad (3.12)$$

olur.

Eğer girişin çeyrek düzlem desteğine sahip olduğu farz edilirse; yani

$x(n_1, n_2) = 0$  ( $-\infty < n_1$  veya  $n_2 < 0$ ) ve  $a_{ij} = 0$  ( $N_1 < i < \infty$  veya  $N_2 < j < \infty$ ) olursa;

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) = & \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij} x(n_1 - i, n_2 - j) + \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij} x(n_1 - i, n_2 - j) \\ & + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=n_2+1}^{\infty} a_{ij} x(n_1 - i, n_2 - j) + \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \sum_{j=n_2+1}^{\infty} a_{ij} x(n_1 - i, n_2 - j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} a_{ij} x(n_1 - i, n_2 - j) + \sum_{i=N_1+1}^{n_1} \sum_{j=0}^{N_2} a_{ij} x(n_1 - i, n_2 - j) \\
&+ \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=N_2+1}^{n_2} a_{ij} x(n_1 - i, n_2 - j) + \sum_{i=N_1+1}^{n_1} \sum_{j=N_2+1}^{n_2} a_{ij} x(n_1 - i, n_2 - j) \\
&= \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} a_{ij} x(n_1 - i, n_2 - j) \tag{3.13}
\end{aligned}$$

olur. Bu bağıntıda görüldüğü gibi; 2-D lineer, zamanla değişmeyen, nedensel tekrarsız sayısal filtreler iki değişkenli lineer fark denklemleriyle gösterilebilirler.

### 3.4.2. Tekrarlı Filtreler

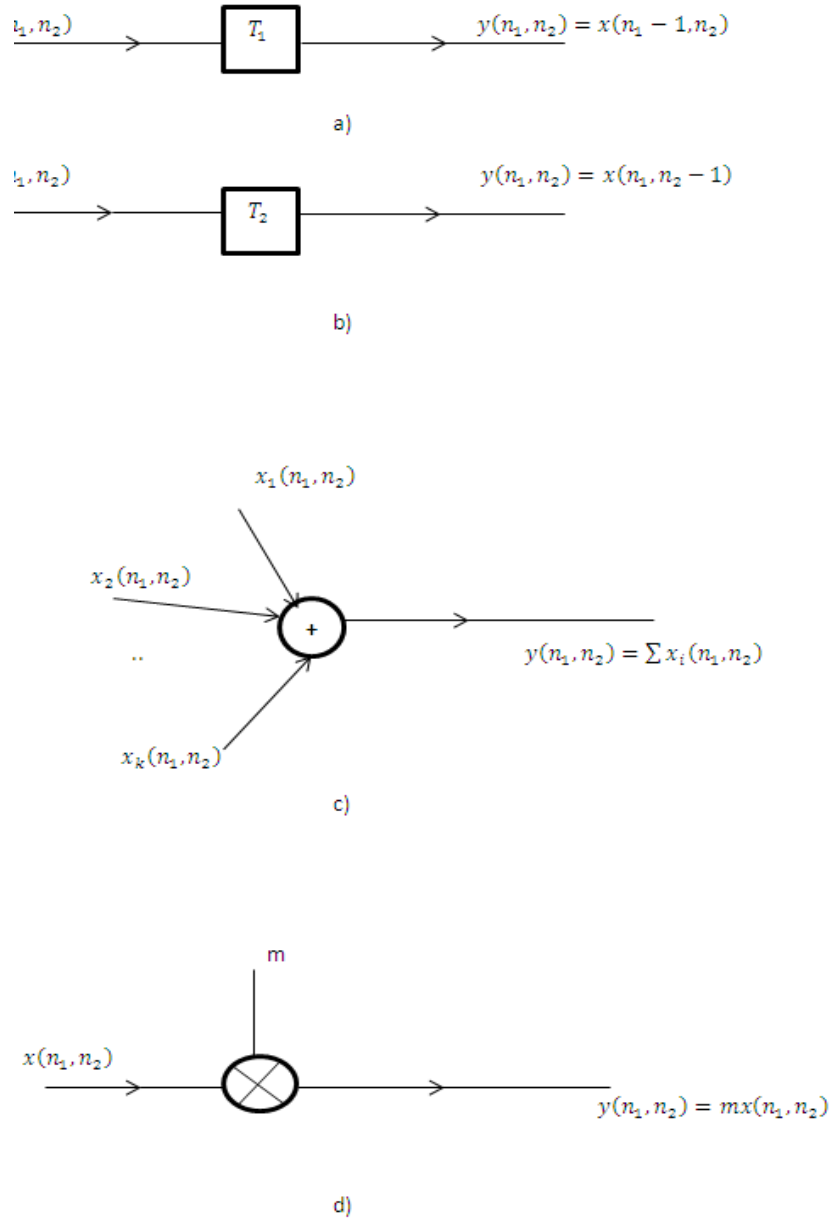
Bir 2-D tekrarlı sayısal filtre; çıkışın aynı zamanda girişin bir fonksiyonu olması nedeniyle tekrarsız bir filtreden farklıdır. Bir lineer, zamanla değişmeyen, nedensel tekrarlı filtreler  $b_{00}=0$  olduğunda;

$$y(n_1, n_2) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} a_{ij} x(n_1 - i, n_2 - j) - \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} b_{ij} y(n_1 - i, n_2 - j) \tag{3.14}$$

eşitliği ile tanımlanabilir.  $b_{ij} = 0$  olursa eşitlik (3.14), (3.13)'e indirgenir. Tekrarsız sayısal filtre, tekrarlı sayısal filtrenin özel bir durumudur.

### 3.5. 2-D Sayısal Filtrelerin Akış Diyagramları ve Ağlarıyla Temsil Edilmesi

2-D sayısal filtrenin karakteristiğindeki temel aritmetik işlemler, eşitlik (3.14)'te görüldüğü gibi toplama ve çarpımda iki bağımsız değişkenin her birine göre kaydırma işlemidir. 2-D sayısal filtreler genellikle sayısal donanım uygulamalarında kullanılmaktadır. Dolayısıyla bu filtrelerin ağlarla temsil edilmesi gerekir. Nedensel 2-D sayısal filtrelerin yapımı için ihtiyaç duyulan temel elemanlar çarpıcı, toplayıcı, yatay kaydırıcı ve dikey kaydırıcıdır. Bu elemanlar için semboller ve karakteristikler Şekil 3.4'te ve Tablo 3.1'de verilmiştir. Sayısal filtre ağlarının analizi aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi element eşitlikleri kullanılarak yapılabilir [5].

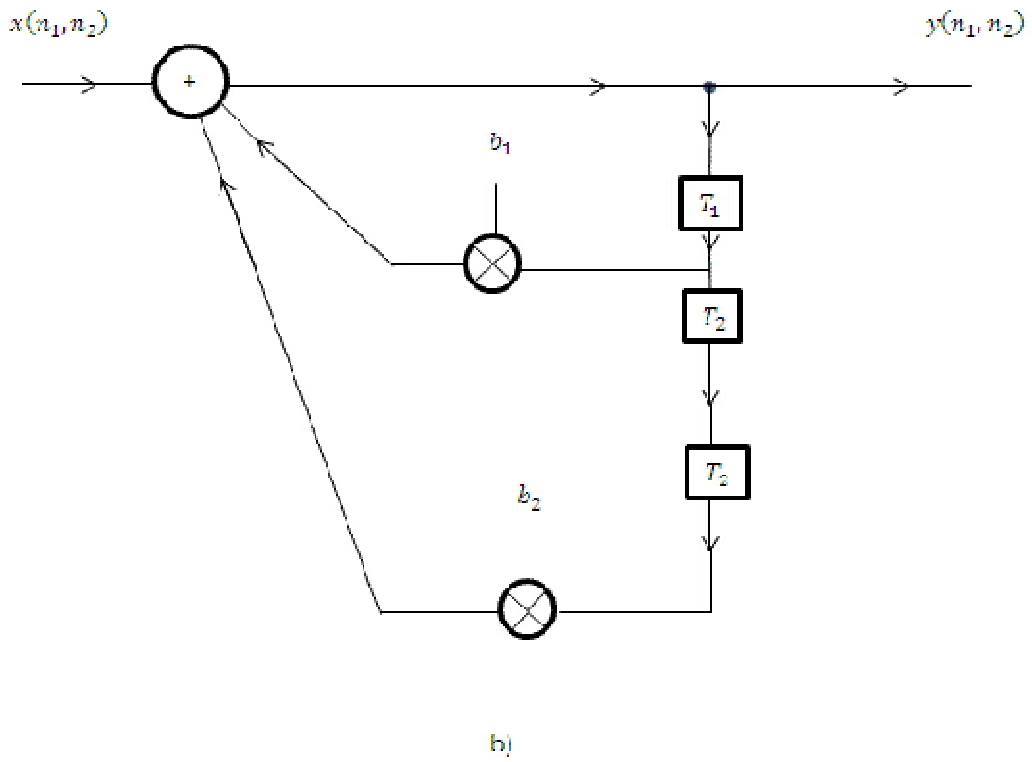
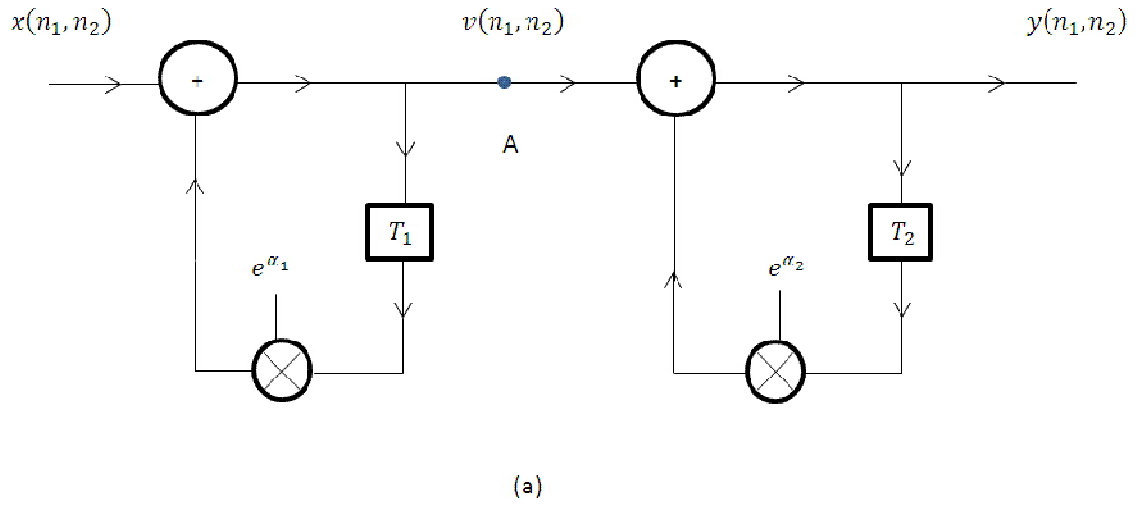


**Şekil 3.4** 2-D filtreler için temel elemanların sembolleri; a) Yatay kaydırıcı, b) Dikey kaydırıcı, c) Toplayıcı, d) Çarpıcı.

**Tablo 3.1.** 2-D sayısal filtreler için temel elemanların karakteristikleri

| ELEMAN          | KARAKTERİZASYON                            |
|-----------------|--------------------------------------------|
| Yatay kaydırıcı | $y(n_1, n_2) = x(n_1 - 1, n_2)$            |
| Dikey kaydırıcı | $y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2 - 1)$            |
| Toplayıcı       | $y(n_1, n_2) = \sum_{i=0}^k x_i(n_1, n_2)$ |
| Çarpıcı         | $y(n_1, n_2) = mx(n_1, n_2)$               |

**Örnek 3.1** Bu örnekte Şekil 3.5’te verilen 2-D sayısal filtre ağlarının analizi yapılacaktır.



Şekil 3.5 a) 2-D sayısal filtre ağı (1) , b) 2-D sayısal filtre ağı (2)

**Çözüm:** a) Şekil 3.5 a'daki A düğümü sinyalinin  $v(n_1, n_2)$  olduğu varsayılırsa,

$$\begin{aligned} v(n_1, n_2) &= x(n_1, n_2) + e^{\alpha_1} v(n_1 - 1, n_2) \\ &= x(n_1, n_2) + e^{\alpha_1} E_1^{-1} v(n_1, n_2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

ve

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= v(n_1, n_2) + e^{\alpha_2} y(n_1, n_2 - 1) \\ &= v(n_1, n_2) + e^{\alpha_2} E_2^{-1} y(n_1, n_2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$E_i$  ( $i=1,2,\dots$ ) sayısal analizin kaydırma operatörü olduğu formüller elde edilir.

$v(n_1, n_2)$  yok edilerek;

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= x(n_1, n_2) + e^{\alpha_1} y(n_1 - 1, n_2) \\ &\quad + e^{\alpha_2} y(n_1, n_2 - 1) - e^{\alpha_1 + \alpha_2} y(n_1 - 1, n_2 - 1) \end{aligned} \quad (3.17)$$

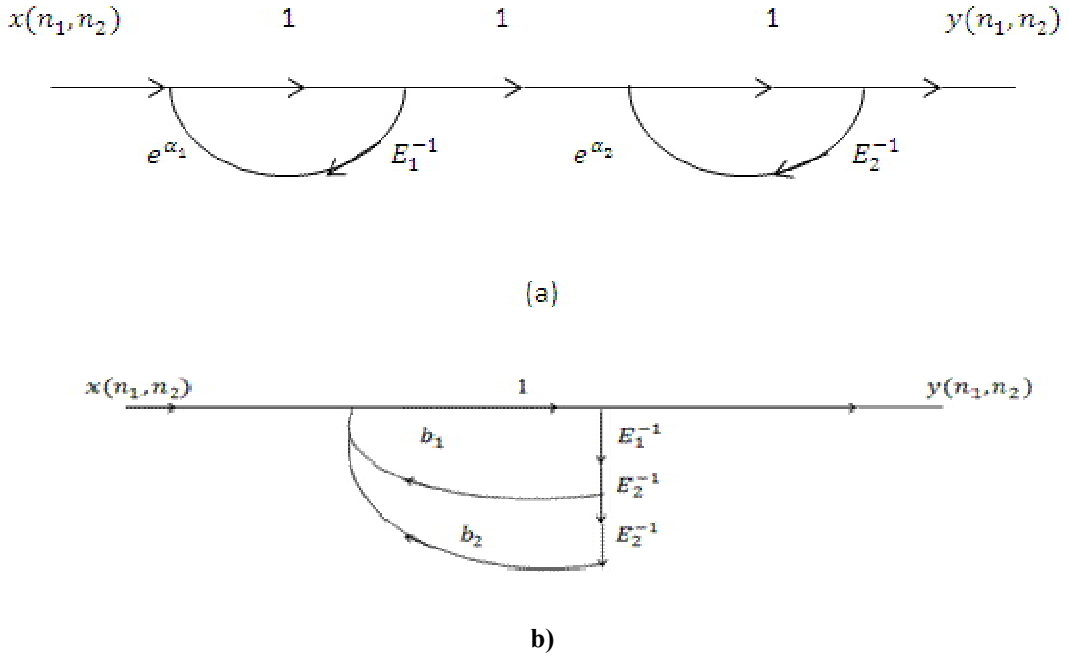
b) Yukarıdaki gibi, çıkış sinyali;

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) + b_1 y(n_1 - 1, n_2) + b_2 y(n_1 - 1, n_2 - 2) \quad (3.18)$$

olarak bulunur.

Şekil 3.4'teki elemanlar basit akış grafikleriyle temsil edilebildiğinden dolayı 2-D sayısal filtreler akış diyagramlarıyla gösterilebilirler.

Sonuç olarak; akış grafikleri metodu 2-D sayısal filtrelerin analizi için uygulanabilir. Şekil 3.5'in akış grafikleri Şekil 3.6'da gösterilmiştir.



**Şekil 3.6** 2-D sayısal filtrelerin sinyallerinin akış grafikleriyle temsil edilmesi

### 3.6. Uzay Domeni Analizi

2-D sayısal filtrelerde uzay domen analizi, 1-D sayısal filtrelerde zaman domen analize benzerdir. Bu analiz; filtreler için bazı keyfi  $x(n_1, n_2)$  girişlerini kullanarak  $y(n_1, n_2)$  çıkış karakteristiklerini bulma sürecidir.

#### 3.6.1. Temel Sinyaller

Uzay domen analizi; 2-D birim impals, birim basamak, birim rampa, üstel fonksiyonlar ve sinüs fonksiyonları gibi 2-D temel sinyallerin kullanımı yoluyla basitleştirilebilir.

$S=(0,0)$  sonlu destek bölgesine sahip olan birim impals aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & n_1 = n_2 = 0 \text{ için} \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (3.19)$$

Diğer yandan;  $S = \{(n_1, n_2): n_1 \geq 0 \text{ ve } n_2 \geq 0\}$  destek bölgesine sahip olan birim basamak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$u(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & n_1, n_2 \geq 0 \text{ için} \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (3.20)$$

Birim impals ve birim basamak, her noktanın bir sinyal değerini temsil ettiği, Şekil 3.7a ve b'deki ayrık eşyükselti haritalarıyla gösterilir.

Birim impals sinyali; 2-D ayrık zamanlı sinyalleri sentez etmek için kullanılır. Diğer bir ifadeyle; herhangi 2-D sinyal eşitlik (3.21) ve (3.22)'de gösterildiği gibi impalslarına ayrıştırılabilir. 2-D sayısal filtrelerde genellikle gerekli olan iki sinyal,  $(n_1, n_2)$  düzleminde  $n_1$  ve  $n_2$  pozitif eksenü üzerinde birim impals varsayılarak rahatlıkla sentez edilebilir. Bunlar birim çizgi impalsları olarak adlandırılır.

$$\delta_1(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & n_1 \geq 0, n_2 = 0 \text{ için} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \delta(n_1 - k_1, n_2) \quad (3.21)$$

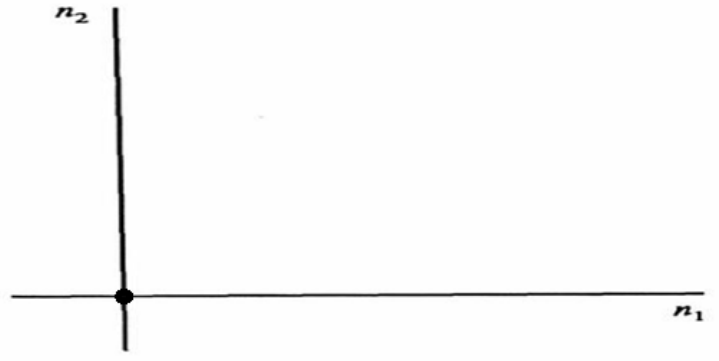
$$\delta_2(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & n_1 = 0, n_2 \geq 0 \text{ için} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$= \sum_{k_2=0}^{\infty} \delta(n_1, n_2 - k_2) \quad (3.22)$$

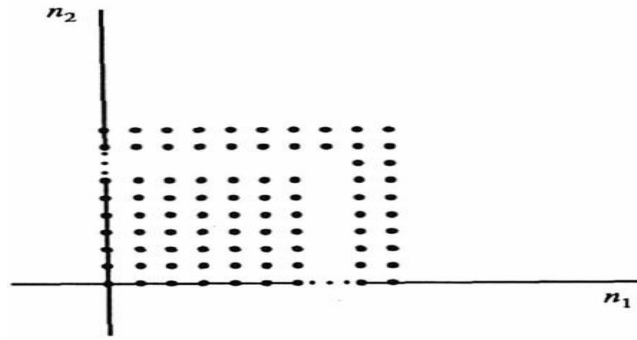
tanımlarıyla açıklanan birim çizgi impalsları Şekil 3.8a ve b' de örneklenmiştir. Birim basamak;  $n_1$  eksenü boyunca  $\delta_1(n_1, n_2)$  birim çizgi impalsları veya  $n_2$  eksenü boyunca  $\delta_2(n_1, n_2)$  birim çizgi impalsları tekrarlanarak (3.19)'daki gibi birim impals terimleriyle açıklanabilir.

$$u(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \delta_2(n_1 - k_1, n_2) = \sum_{k_2=0}^{\infty} \delta_1(n_1, n_2 - k_2)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \quad (3.23)$$

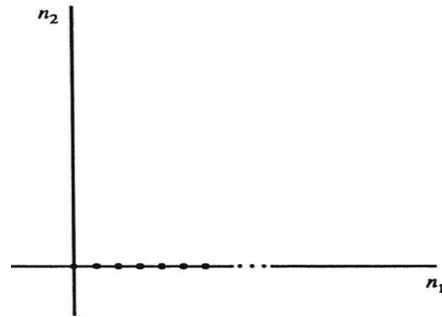


a)

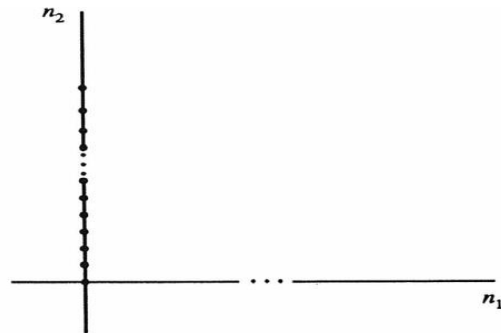


b)

Şekil 3.7. Temel sinyaller: a) birim impals, b) birim basamak.



a)



b)

Şekil 3.8. Birim çizgi impalsı; a)  $n_1$  ekseni boyunca birim çizgi impalsı, b)  $n_2$  ekseni boyunca birim çizgi impalsı.

Bir 2-D birim çizgi palsı, ardışık birim çizgi impulsarı serisinden oluşan bir sinyaldir. Bu tür sinyaller birim basamak kullanılarak sentez edilebilir. Bir birim çizgi palsı,  $k_2$  genişliğindeki  $n_1$  ekseni boyunca;

$$p_{n_1 k_2}(n_1, n_2) = u(n_1, n_2) - u(n_1, n_2 - k_2) \quad (3.24)$$

ve  $k_1$  genişliğindeki  $n_2$  ekseni boyunca;

$$p_{n_2 k_1}(n_1, n_2) = u(n_1, n_2) - u(n_1 - k_1, n_2) \quad (3.25)$$

olarak elde edilebilir (Şekil 3.9a ve 3.9b).

Mevcut birim çizgi palslarıyla bir  $k_1 * k_2$  dikdörtgensel birim palsı;

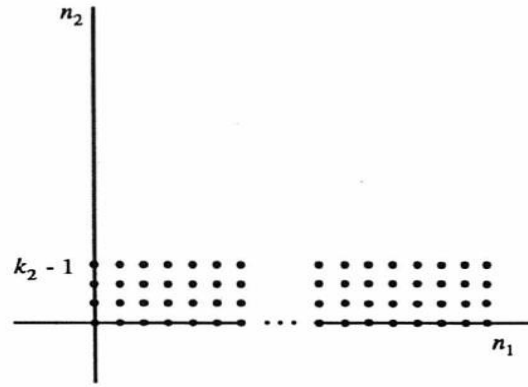
$$\begin{aligned} p_{k_1 k_2}(n_1, n_2) &= p_{n_1 k_2}(n_1, n_2) - p_{n_1 k_2}(n_1 - k_1, n_2) \\ &= p_{k_1 n_2}(n_1, n_2) - p_{k_1 n_2}(n_1, n_2 - k_2) \end{aligned} \quad (3.26)$$

olarak sentez edilebilir. Elde edilen 2-D birim pals sinyali Şekil 3.10'da gösterilmiştir. İlgili diğer temel sinyaller, 2-D ayırık sinüzoidal ve üstel fonksiyonlardır. 2-D sinüs fonksiyonu;

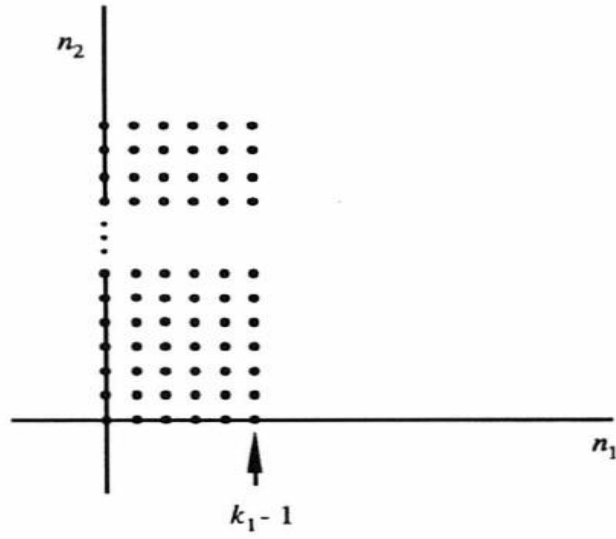
$$x(n_1, n_2) = \sin(w_1 n_1 + w_2 n_2) \quad (3.27)$$

olarak verilir. 2-D ayırık üstel fonksiyonlar kompleks sinyal oluşturmak suretiyle üretilebilirler.

$$\begin{aligned} x(n_1, n_2) &= \cos(w_1 n_1 + w_2 n_2) + j\sin(w_1 n_1 + w_2 n_2) \\ &= e^{j(w_1 n_1 + w_2 n_2)} = e^{jw_1 n_1} + e^{jw_2 n_2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

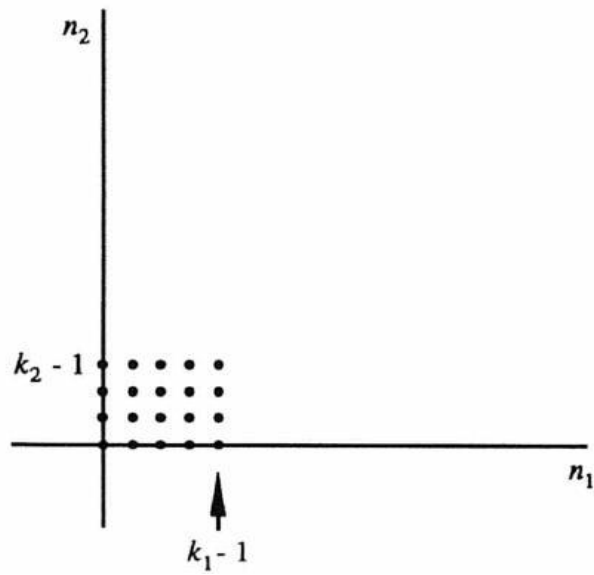


a)



b)

**Şekil 3.9** Birim çizgi palsı; a)  $k_2$  genişliğinde  $n_1$  eksenini boyunca birim çizgi darbesi (palsı), b)  $k_1$  genişliğinde  $n_2$  eksenini boyunca birim çizgi palsı.



**Şekil 3.10**  $k_1 * k_2$  dikdörtgensel birim palsı

### 3.6.2. Konvolüsyon Toplamı

Birim impulsların toplamı şeklinde keyfi bir giriş uygulanarak; bir 2-D lineer, zamanla değişmeyen sayısal filtrenin impuls yanıtı aşağıdaki gibi açıklanabilir.  $x(n_1, n_2)$ 'nin rasgele bir giriş olduğu;

$$x(n_1, n_2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_{ij}(n_1, n_2)$$

$$(x_{ij}(n_1, n_2) = \begin{cases} x(n_1, n_2) & i = n_1 \text{ ve } j = n_2 \text{ için} \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases})$$

$$x_{ij}(n_1, n_2) = x(i, j) \delta(n_1 - i, n_2 - j)$$

$$x(n_1, n_2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(i, j) \delta(n_1 - i, n_2 - j) \quad (3.29)$$

olarak açıklanır.

Bir 2-D sayısal filtre;

$$y(n_1, n_2) = \mathcal{R}x(n_1, n_2) \quad (3.30)$$

ile tanımlanırsa impuls yanıtı

$$h(n_1, n_2) = \mathcal{R} \delta(n_1, n_2) \quad (3.31)$$

olarak verilir.

Eğer filtre lineer ve zamanla değişmez ise eşitlik (3.29) aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$y(n_1, n_2) = \mathcal{R} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(i, j) \delta(n_1 - i, n_2 - j)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(i, j) \mathcal{R} \delta(n_1 - i, n_2 - j)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(i, j) h(n_1 - i, n_2 - j) \quad (3.32a)$$

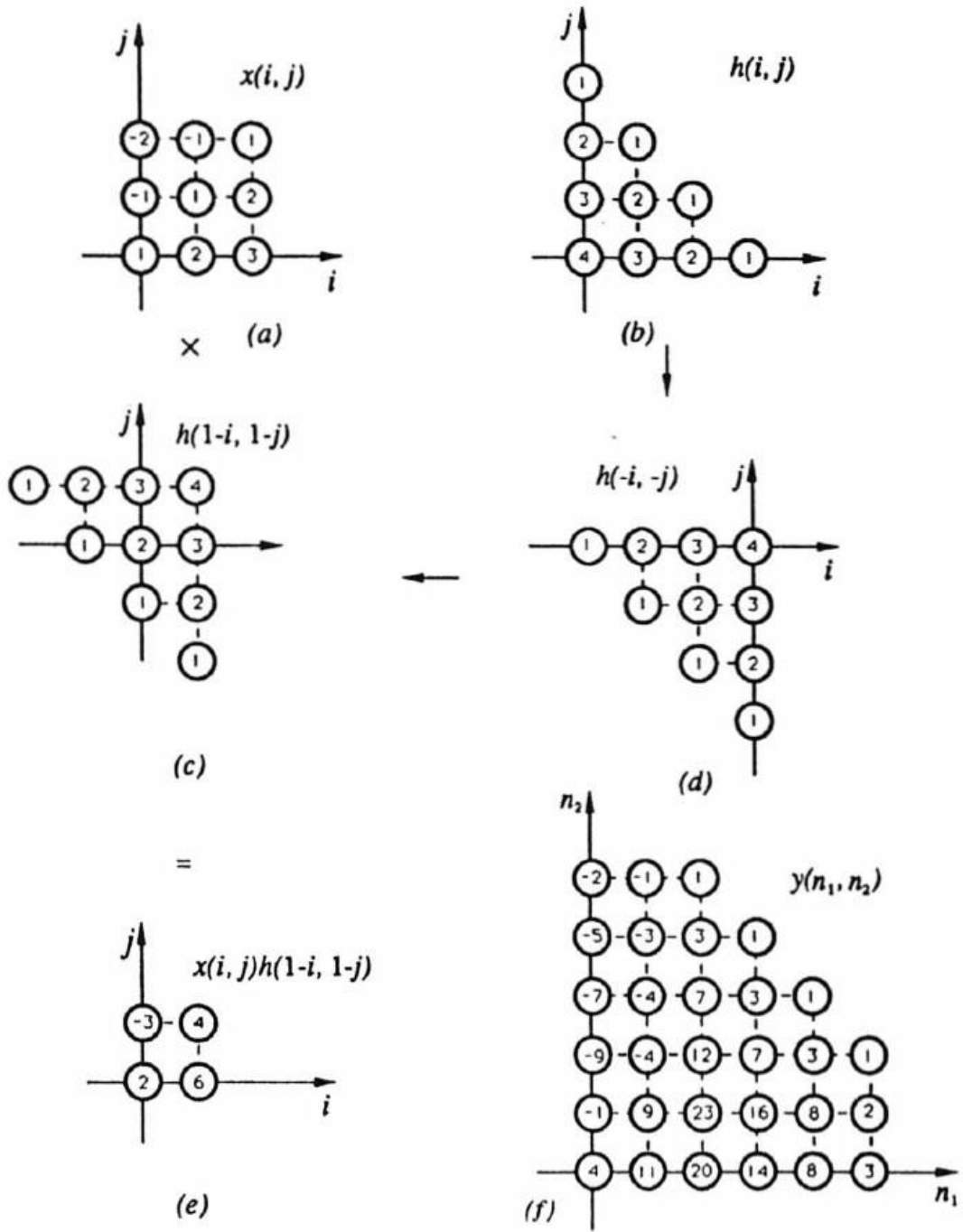
$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(i, j) x(n_1 - i, n_2 - j) \quad (3.32b)$$

Eğer filtre nedensel ise ve  $x(n_1, n_2)$  birinci çeyrek düzlemde ise;

$$\begin{aligned}
y(n_1, n_2) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} x(i, j) h(n_1 - i, n_2 - j) \\
&= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} h(i, j) x(n_1 - i, n_2 - j)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

eşitliklerini elde ederiz.

Bu eşitlik 2-D konvolüsyon toplamı olarak adlandırılır ve  $x \otimes h$  veya  $h \otimes x$  ile gösterilir. Burada  $\otimes$  konvolüsyon toplamını gösterir. Konvolüsyon toplamı Şekil 3.11'de tanımlandığı gibi yapılabilir. Şekil 3.11b'de verilen impuls yanıtı Şekil 3.11d'de gösterildiği gibi  $i$  ve  $j$  eksenleri arasında tutulur ve daha sonra Şekil 3.11c'de gösterildiği gibi iki eksenin pozitif yönünde kaydırılır. Şekil 3.11c değerleri 3.11a'daki değerlerle çarpılır. Şekil 3.11f'de gösterildiği gibi Şekil 3.11e'de tüm sonuçların toplamı  $n_1$  ve  $n_2$  için filtrenin yanıtını verir [5]



**Şekil 3.11** Konvolüsyon toplamı a) Giriş, b) İmpuls yanıtı, c) kaydırılmış İmpuls yanıtı, d) toplanmış impuls yanıtı, e) kaydırılmış toplanmış impuls yanıtı ile giriş değerlerinin çarpımı, f)  $n_1$  ve  $n_2$ 'ye filtrenin cevabı

### 3.7. Kararlılık

Kararlılık için en çok kullanılan kriter, sınırlı giriş- sınırlı çıkış (BIBO) kriteridir. Bu kritere göre; 2-D sayısal filtre sınırlı giriş için sınırlı çıkış veriyorsa kararlı olur. Eğer giriş,

$$|x(n_1, n_2)| \leq M < \infty \quad (\text{tüm } n_1 \text{ ve } n_2 \text{ ve bazı } M \text{ değerleri için})$$

olursa kararlı filtrede çıkış

$$|y(n_1, n_2)| \leq N < \infty \quad (\text{tüm } n_1 \text{ ve } n_2 \text{ ve bazı } N \text{ değerleri için) olur.}$$

### 3.8. 2-D Transfer Fonksiyonlarıyla İlişkili Simetri Türleri

İki ve daha çok boyutlu sistemler, farklı simetri tiplerine sahip olabilirler. Bu simetriler sistemlerin uygulama ve tasarımlarının karmaşıklığını azaltmak için kullanılır [7].

Simetri kavramının matematiksel fonksiyonlarla nasıl ifade edildiğini anlamak için, iki bağımsız değişken  $x_1$  ve  $x_2$ ' nin bir reel fonksiyonu olan  $f(x_1, x_2)$  fonksiyonu göz önüne alınsın.  $f(x_1, x_2)$  fonksiyonu, her  $x_1$  ve  $x_2$  çifti için tek bir değer belirler ve yükseklik olarakta düzlemdeki her noktada fonksiyonun bir değeri bulunur. Böylece fonksiyon taban olarak  $(x_1, x_2)$  düzlemine sahip olan üç boyutlu obje ile temsil edilebilir.

Uygulamaların bir çoğunda 2-D sayısal filtrenin belli bir simetriye sahip olması gerekir. Bu simetri özellikleri optimizasyon yönteminde değişken sayısının azaltılmasında da kullanılabilir. Aşağıda farklı simetri tiplerinin kısa bir incelemesi verilmiştir [7,16].

#### 3.8.1. Öteleme Simetri

Öteleme simetrisinde şekil belli bir yol olarak yer değiştirir, fakat şeklin duruşu değişmez. Öteleme sonrası şeklin görüntüsü, şeklin kendisine eşittir. Eğer bir fonksiyon  $d$  kadar ötelenirse, fonksiyon üzerinde simetri şartları;

$$f(x + d) = f(x) \forall x \in X \quad (3.34)$$

olarak açıklanabilir.

### 3.8.2. Rotasyonel Simetri

Rotasyon merkezi orjin, rotasyon açısı  $\pi/2$  radyan seçilirse,

$$f(x_1, x_2) = f(-x_1, x_2) = f(-x_1, -x_2) = f(x_1, -x_2) \quad (3.35)$$

$$f(x_1, x_2) = f(-x_2, x_1) \forall x \in X \quad (3.36)$$

olarak dört katlı rotasyonel simetri elde edilir.

### 3.8.3. Merkezi Simetri

Eğer bir fonksiyon, iki katlı rotasyonel simetriye sahip olursa merkezi simetrik olarak adlandırılır. Merkezi simetri için gerekli şart,

$$f(-x_1, -x_2) = f(x_1, x_2) \quad \forall x \in X \quad (3.37)$$

şeklindedir.

### 3.8.4. Yansıma Simetri

$x_1$  eksen,  $x_2$  eksen,  $x_1 = x_2$  ve  $x_1 = -x_2$  köşegenleri yansıma simetrileri aşağıda verilmiştir [7].

$$x_1 \text{ eksen yansıması} \rightarrow f(x_1, -x_2) = f(x_1, x_2) \quad (3.38)$$

$$x_2 \text{ eksen yansıması} \rightarrow f(-x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \quad (3.39)$$

$$x_1 = x_2 \text{ doğrusuna göre simetri} \rightarrow f(x_2, x_1) = f(x_1, x_2) \quad (3.40)$$

$$x_1 = -x_2 \text{ doğrusuna göre simetri} \rightarrow f(-x_2, -x_1) = f(x_1, x_2) \quad (3.41)$$

### 3.8.5. Çeyrek Daire (Quadrantal) Simetri

Çeyrek daire simetri şartı;

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, -x_2) = f(-x_1, x_2) = f(-x_1, -x_2) \quad (3.42)$$

olarak verilir.

### 3.8.6. Köşegen Dört Katlı Yansıma Simetri

Çeyrek daire simetri durumunda olduğu gibi; eğer fonksiyon aynı anda  $x_1 = x_2$  ve  $x_1 = -x_2$  ' e göre bir yansıma simetrisine sahip olursa; fonksiyonun köşegen dört katlı yansıma simetriye sahip olduğu söylenir.

$$f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1) = f(-x_2, -x_1) = f(-x_1, -x_2) \quad (3.43)$$

Çeyrek daire simetride olduğu gibi; eğer fonksiyon köşegen dört katlı yansıma simetrisine sahip olursa aynı zamanda iki katlı rotasyonel simetriye sahip olur.

### 3.8.7. Sekizgen (Ortogonal) Simetri

Bu durumda, fonksiyon aynı anda çeyrek daire (quadrantal) ve köşegen (diagonal) simetriye sahip olur. Bir fonksiyonun ortogonal simetriye sahip olması için;

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(x_1, -x_2) = f(-x_1, x_2) = f(x_2, x_1) \\ &= f(-x_2, -x_1) = f(-x_1, -x_2) = f(x_2, -x_1) = f(-x_2, x_1) \end{aligned} \quad (3.44)$$

şartını sağlaması gerekir.

### 3.8.8. Dairesel Simetri

Matematiksel olarak; 2-D filtrelerdeki dairesel simetrik kavramı dairenin genel denklemleriyle tanımlanabilir [7].

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = M \quad (3.45)$$

burada  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  2-D'de frekanslardır ve M dairesel simetri için ihtiyaç duyulan büyüklüktür. Yaklaşık dairesel simetri için;

$$H(s_1, s_2) = h_1(s_1) \cdot h_2(s_2) \quad (3.46)$$

şeklinde ayrık zamanlı bir fonksiyon göz önüne alınırsa; aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

1) Herhangi bir ayrılabilir fonksiyon  $H(s_1, s_2) = h_1(s_1) \cdot h_2(s_2)$  kuadrantal simetriktir.

2)  $h_1(.) = h_2(.)$  olduğu zaman;  $H(s_1, s_2)$  ayrıca ortogonal simetrik olur. ( $h_1(.)$  tek değişkenli bir fonksiyon)

3) Kararlı, tüm kutuplu 2-D transfer fonksiyonları ayrılabilir hale gelebilirler [14,15].

### 3.9. Gerçekleştirme

Gerçekleştirme; transfer fonksiyonunu sayısal filtre ağına veya yapısına çevirme sürecidir. Verilen karakteristik için birkaç sayısal filtre ağı, farklı gerçekleştirme yöntemleri kullanılarak elde edilebilir. Mümkün olan ağlarda sonsuz hassasiyet aritmetiği varsayıldığı zaman, çok farklı değerler elde edilmemesine rağmen önemli farklılıklar ağlarda sonlu duyarlılıklı donanım şartlarında ortaya çıkar [5].

#### 3.9.1. Doğrudan Yapı

Gerçekleştirme yöntemlerinden en basiti doğrudan yapıdır. Bu yöntemde, sayısal filtrenin fark denklemleri değiştirilmeden bir ağa dönüştürülür [9].

#### 3.9.2. Paralel Yapı

İmpuls yanıtının,  $n_1$  ve  $n_2$ 'nin iki fonksiyonunun toplamı olarak açıklanabildiği 2-D sayısal filtre göz önüne alındığında

$$h(n_1, n_2) = h_1(n_1, n_2) + h_2(n_1, n_2) \quad (3.47)$$

Eşitlik (3.32)'nin konvolüsyon toplamından  $y(n_1, n_2)$ ;  $y_1(n_1, n_2)$  ve  $y_2(n_1, n_2)$ 'nin

$$y_1(n_1, n_2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(i, j) h_1(n_1 - i, n_2 - j) \quad (3.48)$$

$$y_2(n_1, n_2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(i, j) h_2(n_1 - i, n_2 - j) \quad (3.49)$$

şeklinde olduğu

$$y(n_1, n_2) = y_1(n_1, n_2) + y_2(n_1, n_2) \quad (3.50)$$

eşitliği ile bulunur.

Bu nedenle;  $h(n_1, n_2)$  impuls yanıtı Şekil 3.12 a'da gösterildiği gibi,  $h_1(n_1, n_2)$  ve  $h_2(n_1, n_2)$  impuls yanıtı iki filtre paralel bağlanarak gerçekleştirilebilir. Benzer şekilde; impuls yanıtı, k impuls yanıtlarının toplamı olarak açıklanabilirse; k paralel bölümlerini içeren bir yapı elde edilebilir.

### 3.9.3. Kaskad Yapı

İmpuls yanıtının,  $n_1$  ve  $n_2$  'nin iki fonksiyonunun bir konvolüsyonu olarak açıklandığı bir filtre göz önüne alındığında,

$$h(n_1, n_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_2(l, m) h_1(n_1 - l, n_2 - m) \quad (3.51)$$

$x(n_1, n_2)$  girişine filtrenin yanıtı; eşitlik (3.32)'den;

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(i, j) h(n_1 - i, n_2 - j) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(i, j) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_2(l, m) h_1(n_1 - l - i, n_2 - m - j) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_2(l, m) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(i, j) h_1(n_1 - l - i, n_2 - m - j) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_2(l, m) w(n_1 - l, n_2 - m) \end{aligned} \quad (3.52)$$

olarak elde edilir. Burada;

$$w(n_1, n_2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(i, j) h_1(n_1 - i, n_2 - j) \quad (3.53)$$

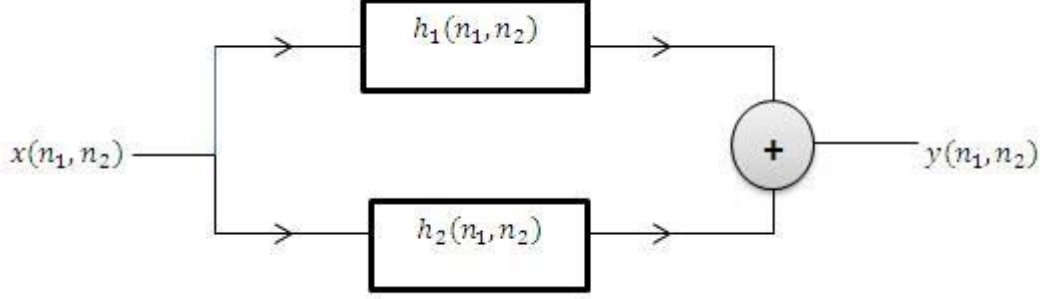
dir. Burada,  $w(n_1, n_2)$  ;  $x(n_1, n_2)$  girişli  $h_1(n_1, n_2)$  impuls yanıtı filtrenin çıkışı;  $y(n_1, n_2)$  ise,  $w(n_1, n_2)$  girişli  $h_2(n_1, n_2)$  impuls yanıtı filtrenin çıkışıdır. Şekil 3.12 b'de de görüldüğü gibi,  $h(n_1, n_2)$  impuls yanıtı filtre,  $h_1(n_1, n_2)$  ve  $h_2(n_1, n_2)$  impuls yanıtı iki filtrenin kaskad bağlanmasıyla gerçekleştirilebilir.

### 3.9.4. Ayrılabilir Yapı

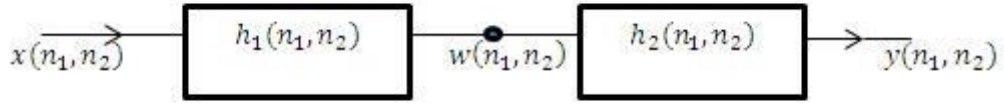
Ayrılabilir yapıda, filtrenin impuls yanıtı ayrılabilir olmalıdır.  $h_1(n_1)$  ve  $h_2(n_2)$  'nin bağımsız olduğu,  $h(n_1, n_2) = h_1(n_1)h_2(n_2)$  ele alınsın. Eşitlik (3.32b)'deki konvolüsyon toplamı bir  $x(n_1, n_2)$  girişine filtrenin yanıtını verir.

$$y(n_1, n_2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_1(i)h_2(j) x(n_1 - i, n_2 - j)$$

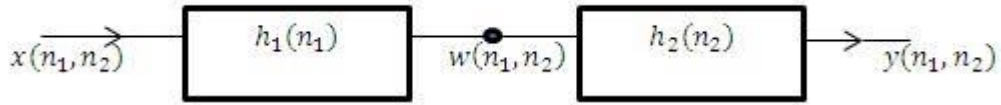
$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_1(i) \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_2(j) x(n_1 - i, n_2 - j) \quad (3.54)$$



a)



b)



c)

**Şekil 3.12.** Gerçekleştirme; (a) paralel yapı, (b) kaskad yapı, (c) ayrılabilir yapı.

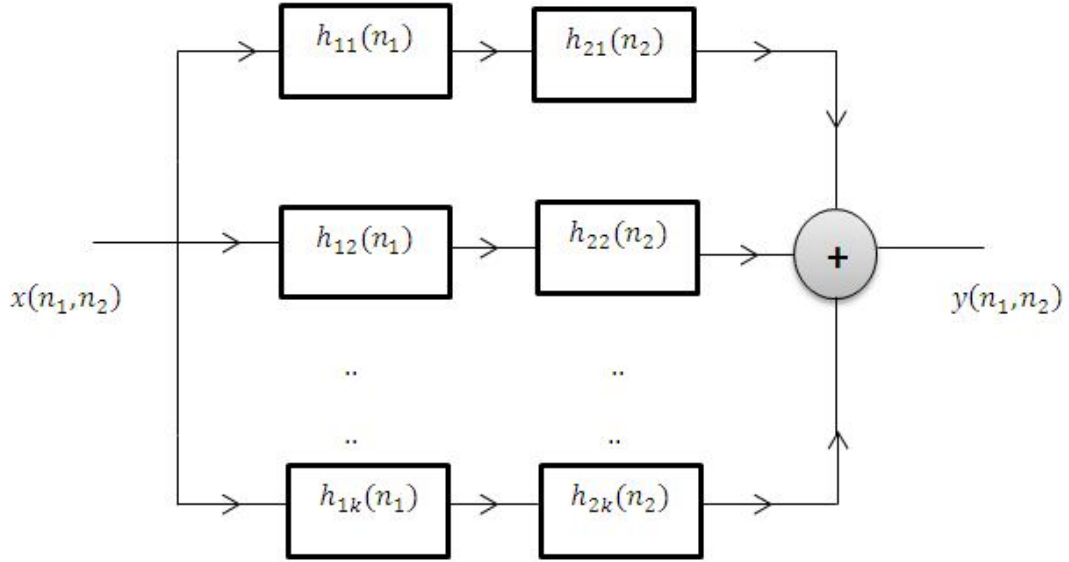
Alternatif olarak;  $w(n_1, n_2)$ ' in  $w(n_1, n_2) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_2(j) x(n_1, n_2 - j)$  olduğu

$$y(n_1, n_2) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_1(i) w(n_1 - i, n_2) \quad (3.55)$$

bağıntısı yazılabilir.  $w(n_1, n_2)$  ve  $y(n_1, n_2)$ , Şekil 3.12 c'de gösterildiği gibi, sırasıyla  $x(n_1, n_2)$  ve  $w(n_1, n_2)$  girişli,  $h_1(n_1)$  ve  $h_2(n_2)$  impuls yanıtı 1-D sayısal filtrelerin çıkışlarıdır. Ayrılabilirlik; iki 1-D sayısal filtre tasarlayıp daha sonra onları kaskad olarak birleştirerek 2-D sayısal filtre tasarlanabildiğinden dolayı pratik açıdan önemlidir.

Yukarıdaki prensipler, impuls yanıtının eşitlik (3.3)'de verildiği gibi ayrılabilir impuls yanıtlarının lineer bir kombinasyonu olarak açıklanabildiği durumlar için

genişletilebilir. Öyle bir durumda; kaskad bağlanan iki 1-D sayısal filtrelerin paralel bağlanmasıyla filtrenin çıkışı elde edilebilir ( şekil 3.13).



**şekil 3.13:** Kaskad bağlanan ayrılabilir impuls yanıtlı filtrelerin paralel bağlanması

### 3.10. Çok Boyutlu Filtreler

Bazı uygulamalarda, işlenecek olan sinyaller  $n_1, n_2, \dots, n_k$  gibi birkaç tamsayı değişkenine bağlıdırlar. Öyle sinyaller çok boyutlu filtreler ile işlenirler. Çok boyutlu filtreler 2-D filtrelerin bir uzantısıdır. Bu filtreler;

$$y(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \dots \sum_{m=0}^{N_k} a_{ij\dots m} x(n_1 - i, n_2 - j, \dots, n_k - m) - \sum_{i=0}^{M_1} \sum_{j=0}^{M_2} \dots \sum_{m=0}^{M_k} b_{ij\dots m} y(n_1 - i, n_2 - j, \dots, n_k - m) \quad (3.56)$$

$b_{00\dots0} = 0$  şeklinde fark denklemi ile karakterize edilirler. 2-D sayısal filtreler ile aynı temel prensiplere tabidirler [5].

## 4. 2-D TEKRARSIZ FİLTRELER

### 4.1.Giriş

2-D sayısal filtrelerin tasarımı 1-D sayısal filtrelerin tasarımına benzer şekilde aşağıdaki gibi dört adımda gerçekleştirilir.

- ❖ Yaklaşım
- ❖ Gerçekleştirme
- ❖ Uygulama
- ❖ Kuantizasyon (Nicemleme) etkilerinin incelenmesi

Filtre tasarımında; filtrenin uzay-domein yanıtı, genlik yanıtı ve faz yanıtı ile ilişkili olarak bazı kısıtlamalara uyulmalı ve bazı koşulların yerine getirilmesi gerekir. Önce istenilen filtre özellikleri belirtilir, daha sonra belirtilen özelliklere tekrarlı veya tekrarsız filtreden hangisinin daha uygun olduğuna karar verilir. Tekrarlı filtrede kutuplar birim çember içinde serbest bulunurken, tekrarsız filtrede bu kutuplar sabit ve katı bir şekilde bulunurlar. Seçim yapıldıktan sonra yaklaşım problemi çözülmelidir. Yaklaşım adımları genlik yanıtı, faz yanıtı ve uzay-domein yanıtı açısından gerekli özellikleri karşılayan reel katsayılı bir kararlı transfer fonksiyonu bulma sürecidir. Yaklaşım; tasarım sürecinin en zaman alıcı bölümüdür. Yaklaşım problemi, 2-D pencere fonksiyonu [12] ile bağlantılı 2-D fourier serisi kullanılarak veya 1-D ayırık zamanlı transfer fonksiyonlarına dönüşümler uygulanarak çözülebilir [5]

Gerçekleştirme, transfer fonksiyonunu veya filtrenin diğer karakteristiklerini sayısal filtre ağına veya yapısına çevirme sürecidir. Paralel, kaskad veya durum-uzay gerçekleştirmesi şeklinde bir seçim yapılabilir.

Filtre uygulaması, yapılan çalışmaya göre donanımsal veya yazılımsal şekilde olabilir. Yazılım uygulamasında, sayısal filtre ağını karakterize eden denklemler herhangi bir giriş dizisi için üretilen çıkış dizisini hesaplamakta kullanılan genellikle yüksek seviyeli bir dile sahip bir bilgisayar programı ile yazılır. Diğer yandan, donanım uygulamalarında sayısal filtre ağı özel bir donanıma çevrilir. Sonuç olarak, yazılım uygulamaları yüksek hızın önemli olmadığı ve işlenecek bilginin kayıtlı olarak hazır olması istenen gerçek zamanlı olmayan uygulamalara daha uygundur.

Sayısal filtrelerin tasarımındaki son adım, uygulamada sonlu hassas aritmetiği kullanılmasıyla birlikte meydana gelen etkilerin incelenmesidir. Katsayılar için sonlu uzunluklu registerların kullanımı genlik yanıtındaki hataları gösterir. Sinyaller için sonlu uzunluklu registerların kullanımı round-off gürültüsü olarak bilinen filtrenin çıkışındaki gürültüleri gösterir. Yazılım uygulamalarında kayıt uzunluğu kuantizasyon (nicemleme) etkilerini ihmal etmek için yeterince büyüktür. Kelime uzunluğunun donanımın maliyetini en aza indirmek ve işlem hızını en üst düzeye çıkarmak için mümkün olduğunca düşük tutulduğu donanım uygulamalarında kuantizasyon etkilerini çalışmak zorunludur.

#### 4.2. 2-D Tekrarsız Filtrelerin Özellikleri

Tekrarsız filtrelerin üç avantajı vardır. Bunlar;

1. Daima kararlıdır ve bu yüzden kararlılık testlerini uygulamaya gerek yoktur.
2.  $w_1$  ve  $w_2$  frekans değişkenlerine göre lineer faz yanıtı elde edilebilir. Lineer faz yanıtı görüntülerin işlenmesinde çok önemlidir.
3. Sonlu impuls yanıtı sayesinde bu filtreler hızlı fourier dönüşümleriyle uygulanabilirler.

##### 4.2.1. Lineer Faz Yanıtı

$$H(z_1, z_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} h(n_1 T_1, n_2 T_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \quad (4.1)$$

Transfer fonksiyonu ile karakterize edilen 2-D nedensel tekrarsız filtre göz önüne alınsın. Filtrenin sırasıyla genlik ve faz yanıtının;

$$M(w_1, w_2) = |H(e^{jw_1 T_1}, e^{jw_2 T_2})|$$

$$\theta(w_1, w_2) = \arg H(e^{jw_1 T_1}, e^{jw_2 T_2})$$

şeklinde olduğu

$$\begin{aligned} H(e^{jw_1 T_1}, e^{jw_2 T_2}) &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} h(n_1 T_1, n_2 T_2) e^{j(w_1 n_1 T_1 + w_2 n_2 T_2)} \\ &= M(w_1, w_2) e^{j\theta(w_1, w_2)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

bağıntısıyla filtrenin frekans yanıtı verilir. Eğer faz yanıtı  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  frekanslarına göre lineerse; filtrenin grup gecikmesi,

$$\tau_1 = -\frac{\partial \theta(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1} \quad \tau_2 = -\frac{\partial \theta(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2}$$

$$\theta(\omega_1, \omega_2) = -\tau_1 \omega_1 - \tau_2 \omega_2 + \theta_0 \quad (4.3)$$

şeklinde olur. Burada  $\theta_0$  sabittir.

Eğer  $\theta_0=0$  olursa; eşitlik (4.2) ve (4.3)'ten

$$\theta(\omega_1, \omega_2) = -\tau_1 \omega_1 - \tau_2 \omega_2$$

$$= \tan^{-1} \left( -\frac{\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} h(n_1 T_1, n_2 T_2) \sin(\omega_1 n_1 T_1 + \omega_2 n_2 T_2)}{\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} h(n_1 T_1, n_2 T_2) \cos(\omega_1 n_1 T_1 + \omega_2 n_2 T_2)} \right)$$

bağıntısı elde edilir. Sonuçta;

$$\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} h(n_1 T_1, n_2 T_2) \sin[(\tau_1 - n_1 T_1) \omega_1 + (\tau_2 - n_2 T_2) \omega_2] = 0 \quad (4.4)$$

bulunur. Bu eşitliğin çözümü;

$$0 \leq n_1 \leq (N_1 - 1) \quad \text{ve} \quad 0 \leq n_2 \leq (N_2 - 1) \quad \text{için};$$

$$(\tau_1 = (N_1 - 1)T_1/2, \quad \tau_2 = (N_2 - 1)T_2/2) \quad (4.5)$$

$$h(n_1 T_1, n_2 T_2) = h[(N_1 - 1 - n_1)T_1, (N_2 - 1 - n_2)T_2] \quad (4.6)$$

olarak bulunur.

Burada; her iki  $N_1$  ve  $N_2$  değeri için, impuls yanıtının  $(N_1 - 1)T_1/2, (N_2 - 1)T_2/2$

noktasına göre simetrik olması sağlanarak lineer faz yanıtı elde edilebilir. Eğer  $\theta_0=\pm\pi/2$  olursa eşitlik (4.4)

$$\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} h(n_1 T_1, n_2 T_2) \cos[(\tau_1 - n_1 T_1) \omega_1 + (\tau_2 - n_2 T_2) \omega_2] = 0 \quad (4.7)$$

şekline dönüşür. Bu eşitliğin çözümü;

$$0 \leq n_1 \leq (N_1 - 1) \quad 0 \leq n_2 \leq (N_2 - 1) \text{ için;}$$

$$\tau_1 = (N_1 - 1)T_1/2 \quad \tau_2 = (N_2 - 1)T_2/2 \quad (4.8)$$

$$h(n_1T_1, n_2T_2) = -h[(N_1 - 1 - n_1)T_1, (N_2 - 1 - n_2)T_2] \quad (4.9)$$

olarak gösterilebilir.

### 4.3. Fourier Serisi ile 2-D Filtre Tasarımı

1-D tekrarsız filtrelerin tasarımı için en iyi metotlardan birisi fourier serisinin uygulanmasıyla yapılan tasarımıdır. Fourier serisi tek başına kullanıldığında iyi sonuçlar elde edilmez ancak pencere fonksiyonu ile kullanılırsa iyi sonuçlar elde edilir. Fourier serisi ile elde edilen yaklaşımlar hesaplama karmaşıklığının az olması açısından avantajlıdır. 2-D pencere fonksiyonları ile birlikte 2-D fourier serisi kullanılarak 2-D tekrarsız sayısal filtrelerin tasarımı yapılabilir. 2-D fourier serisi ve 2-D pencere fonksiyonu onların 1-D karışıklarının basit bir uzantısıdır.

#### 4.3.1. 1-D Filtrelerin Tasarımı

Kesim frekansı  $\Omega_c$  ile gösterilen ideal bir AGF'nin frekans yanıtı,  $2\pi$  ile periyodik olacak şekilde;

$$H_{id}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (4.10)$$

olarak ifade edilmektedir. İdeal AGF'nin impuls yanıtı;

$$h_{id}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{\sin\Omega_c n}{\pi n}, -\infty < n < \infty \quad (4.11)$$

şeklinde bulunmaktadır. İdeal filtrenin impuls yanıtı eksi sonsuzdan başlayıp sonsuza kadar devam ettiği için, pratikte ideal filtrenin gerçekleştirilmesi mümkün değildir. Fakat pratikte sonlu bir aralıkta tanımlı ve impuls yanıtı bu aralıkta ideal filtrenin impuls yanıtına eşit olan bir sistem gerçekleştirilebilir [2]. İmpuls yanıtı;

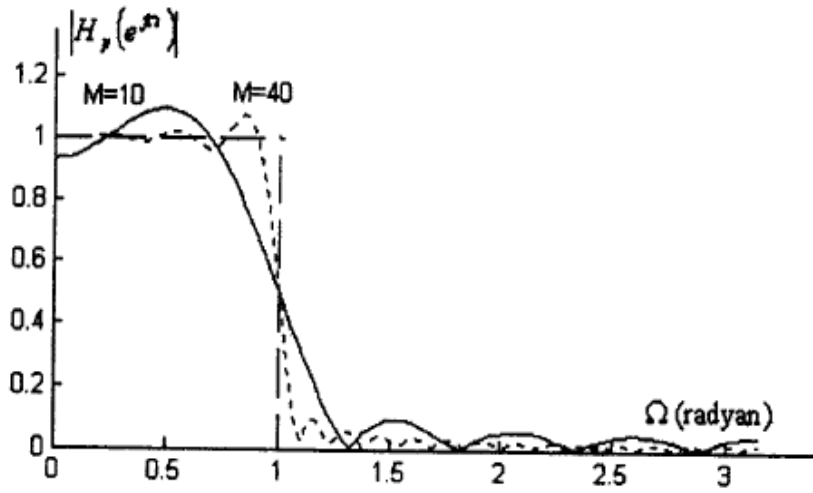
$$h_p[n] = \begin{cases} \frac{\sin\Omega_c n}{\pi n}, & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.12)$$

şeklinde olan bir filtre, impuls yanıtının sonlu olması nedeniyle pratikte gerçekleştirilebilmektedir. Filtrenin sonlu sayıda impuls yanıtı örneği olduğundan, bu filtre yapı itibarıyla bir FIR filtre olmaktadır.

Pratik filtrenin frekans yanıtı,  $2\pi$  ile periyodik olacak şekilde;

$$H_p(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-M/2}^{M/2} h_p[n]e^{-j\Omega n} \quad (4.13)$$

olarak bulunmaktadır. Frekans yanıtı  $2\pi$  ile periyodik olduğundan  $h_p[n]$  değerleri fourier serisi katsayılarına karşılık gelmektedir. Dolayısıyla bu tasarım yöntemi, fourier serisi yöntemi ile FIR filtre tasarımı olarak adlandırılmaktadır.



Şekil 4.1 Fourier serisi yöntemi ile tasarlanan FIR filtrenin genlik yanıtı

Şekil 4.1’de  $\Omega_c = 1$  ve iki farklı  $M$  değeri için pratik filtrenin genlik yanıtı gösterilmektedir. Karşılaştırma sağlamak için impuls yanıtının elde edilmesinde kullanılan ideal filtrenin genlik yanıtı da şekilde gösterilmektedir.

Görüldüğü gibi  $M$  değeri arttıkça pratik filtrenin genlik yanıtı ideal filtrenin genlik yanıtına yaklaşmaktadır. Pratik filtre ideal filtrenin impuls yanıtından sonlu sayıda örnek almaktadır. Dolayısıyla, ideal filtrenin keskin kenarından kaynaklanan Gibbs görüngüsü etkisi nedeniyle pratik filtrenin geçirme bandında salınım gözlenmektedir.

İdeal filtrenin sonsuz uzunluktaki impuls yanıtından, pratikte sonlu uzunlukta bir impuls yanıtı elde edilmektedir. Fakat pratik filtrenin sonlu uzunluktaki impuls yanıtı,  $-M/2 \leq n \leq M/2$  arasında tanımlandığı takdirde filtre nedensel olmamaktadır. impuls yanıtının

sonlu olması özelliğinden faydalanarak uygun bir gecikme ile pratik filtre nedensel hale getirilebilmektedir. Nedensel filtrenin impals yanıtı  $h_{pn}[n]$  ile gösterildiği takdirde nedensel filtrenin impals yanıtı,  $h_p[n]$  yanıtının  $M/2$  örnek geciktirilmesi sonucunda;

$$h_{pn}[n] = h_p[n - M/2] \quad (4.14)$$

olarak elde edilmektedir. Bu şekilde,  $0 \leq n \leq M$  arasında tanımlanmış,  $M$ 'inci dereceden nedensel bir FIR filtre elde edilmektedir.

Zaman uzayındaki gecikme, filtrenin faz yanıtında doğrusal faz etkisi yapmaktadır. Doğrusal faz etkisi, ideal alçak-geçiren filtrenin frekans yanıtına dahil edildiğinde, doğrusal fazlı filtrenin frekans yanıtı;

$$H_{df}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-\frac{j\Omega M}{2}} & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (4.15)$$

olarak bulunmaktadır.

Doğrusal fazlı ideal AGF'nin impals yanıtı;

$$h_{df}[n] = \frac{\sin(\Omega_c (n - \frac{M}{2}))}{\pi(n - \frac{M}{2})} \quad (4.16)$$

olarak elde edilmektedir.

İdeal filtrenin impals yanıtı kırpılarak pratik filtre için sonlu bir impals yanıtının elde edilmesi, bir  $\omega_n$  kırpma penceresinin kullanımı ile;

$$h_{pn}[n] = h_{df}[n]w_n \quad (4.17)$$

şeklinde tanımlanabilmektedir.

Kırpma penceresi;

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.18)$$

şeklinde tanımlandığında dikdörtgensel bir biçim aldığından, dikdörtgensel pencere olarak adlandırılmaktadır.

Dikdörtgensel pencere yerine, genliği kenarlara doğru düzenli bir şekilde sıfıra yaklaşan pencere fonksiyonlarının kullanılması ile Gibbs etkisi azaltılabilmektedir. Bu nedenle; uygulamada üçgen (Bartlett), Blackman, Hamming, Hanning, ve Kaiser gibi pencereler kullanılmaktadır.  $0 \leq n \leq M$  arasında tanımlanmış üçgen, Blackman, Hamming veya Hanning pencereleri;

$$\text{Üçgen pencere: } w[n] = 1 - \left| \frac{2n-M}{M} \right| \quad 0 \leq n \leq M \quad (4.19)$$

$$\text{Blackman penceresi: } w[n] = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right) \quad 0 \leq n \leq M \quad (4.20)$$

$$\text{Hamming penceresi: } w[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) \quad 0 \leq n \leq M \quad (4.21)$$

$$\text{Hanning penceresi: } w[n] = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) \quad 0 \leq n \leq M \quad (4.22)$$

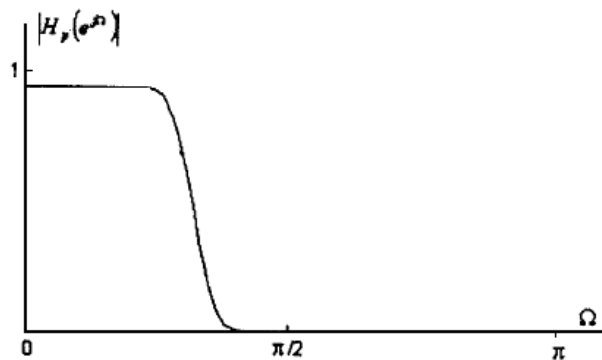
denklemleri ile oluşturulabilmektedir.

Şekil 4.2’de Hamming penceresi kullanılarak  $M=40$  için elde edilen FIR filtrenin genlik yanıtı gösterilmektedir. Görüldüğü gibi, uygun bir pencere şekli kullanıldığı takdirde geçirme bandındaki salınım giderilebilmektedir.

Pencere fonksiyonu  $\omega[n]$  doğrudan  $0 \leq n \leq M$  aralığında tanımlandığı takdirde, nedensel  $M$ ’inci dereceden FIR filtrenin impuls yanıtı;

$$h_{pn}[n] = h_{df}[n] \omega[n] = \frac{\sin(\Omega_c (n - \frac{M}{2}))}{\pi(n - \frac{M}{2})} \omega[n] \quad (4.23)$$

olarak bulunmaktadır.[2]



Şekil 4.2  $M=40$  değeri için Hamming penceresi kullanılarak tasarlanan FIR filtrenin genlik yanıtı

**Örnek 4.1:** Hamming penceresi kullanarak kesim frekansı  $\Omega_c=\pi/4$  olan dördüncü derece, alçak geçiren bir FIR filtre tasarlayalım.

Filtre dördüncü dereceden olduğundan  $M=4$  ve filtrenin impals yanıtı  $0 \leq n \leq 4$  arasında tanımlı aralığında tanımlı olmaktadır. İdeal alçak-geçiren filtrenin gerekli gecikmeye uğratılmış impals yanıtı değerleri,

$$h_{df}[n] = \frac{\sin\left(\Omega_c\left(n-\frac{M}{2}\right)\right)}{\pi\left(n-\frac{M}{2}\right)} = \frac{\sin\left((n-2)*\frac{\pi}{4}\right)}{\pi(n-2)} \quad (4.24)$$

Eşitliğinden  $h_{df}[0] \cong 0.159$  ,  $h_{df}[1] \cong 0.225$  ,  $h_{df}[2] \cong 0.25$  ,  $h_{df}[3] \cong 0.225$ ,  $h_{df}[4] \cong 0.159$  olarak bulunmaktadır.

$0 \leq n \leq M$  arasında değer alan bir Hamming penceresi;

$$w[n] = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) \quad (4.25)$$

Şeklinde tanımlanmaktadır. Bu nedenle pencere işaretinin değerleri  $w[0] = 0.08$ ,  $w[1] = 0.54$ ,  $w[2] = 1$ ,  $w[3] = 0.54$  ve  $w[4] = 0.08$  olarak bulunmaktadır.

Tasarlanacak filtrenin impals yanıtı değerleri;

$$h_{pn}[n] = h_{df}[n] * w[n] \text{ eşitliğinden}$$

$$h_{pn}[0] \cong 0.01272$$

$$h_{pn}[1] \cong 0.1215$$

$$h_{pn}[2] \cong 0.25$$

$$h_{pn}[3] \cong 0.1215$$

$$h_{pn}[4] \cong 0.01272 \text{ olarak bulunmaktadır.}$$

Bu değerlerden yola çıkılarak, filtrenin transfer fonksiyonu;

$$H(z) = 0.01272 + 0.1215z^{-1} + 0.25z^{-2} + 0.1215z^{-3} + 0.01272z^{-4} \quad (4.26)$$

olarak bulunmaktadır. Sistemin frekans yanıtı;

$$H(z) = 0.01272 + 0.1215e^{-j\Omega} + 0.25e^{-2j\Omega} + 0.1215e^{-3j\Omega} + 0.01272e^{-4j\Omega} \quad (4.27)$$

şeklinde yazılabilmektedir.

Sistemin genlik yanıtının  $\Omega = 0$  frekansındaki değeri  $|H(e^{j\Omega})|_{\Omega=0} = 0.51844$  olarak bulunmaktadır. Bu nedenle sistemin transfer fonksiyonu  $\Omega = 0$  frekansında, genlik yanıtının değeri  $|H(e^{j\Omega})|_{\Omega=0} = 1$  olacak şekilde normalize edildiğinde;

$$H(z) = \frac{1}{0.51844} (0.01272 + 0.1215z^{-1} + 0.25z^{-2} + 0.1215z^{-3} + 0.01272z^{-4}) \quad (4.28)$$

elde edilmektedir. Genlik yanıtı normalize edilmiş sistemin transfer fonksiyonu;

$$H(z) = 0.0245 + 0.234z^{-1} + 0.482z^{-2} + 0.234z^{-3} + 0.0245z^{-4} \quad (4.29)$$

olarak bulunmaktadır.

Transfer fonksiyonu elde edilen FIR filtre sabit katsayılı fark denklemi şeklinde tanımlanabilmektedir. Ayırık-zamanlı sistemlerin blok diyagramı gösterimi kullanılarak filtrenin hayata geçirilmesi mümkündür. Tasarlanan filtre sabit katsayılı fark denklemi olarak;

$$y[n] = 0.0245x[n] + 0.234x[n-1] + 0.482x[n-2] + 0.234x[n-3] + 0.0245x[n-4] \quad (4.30)$$

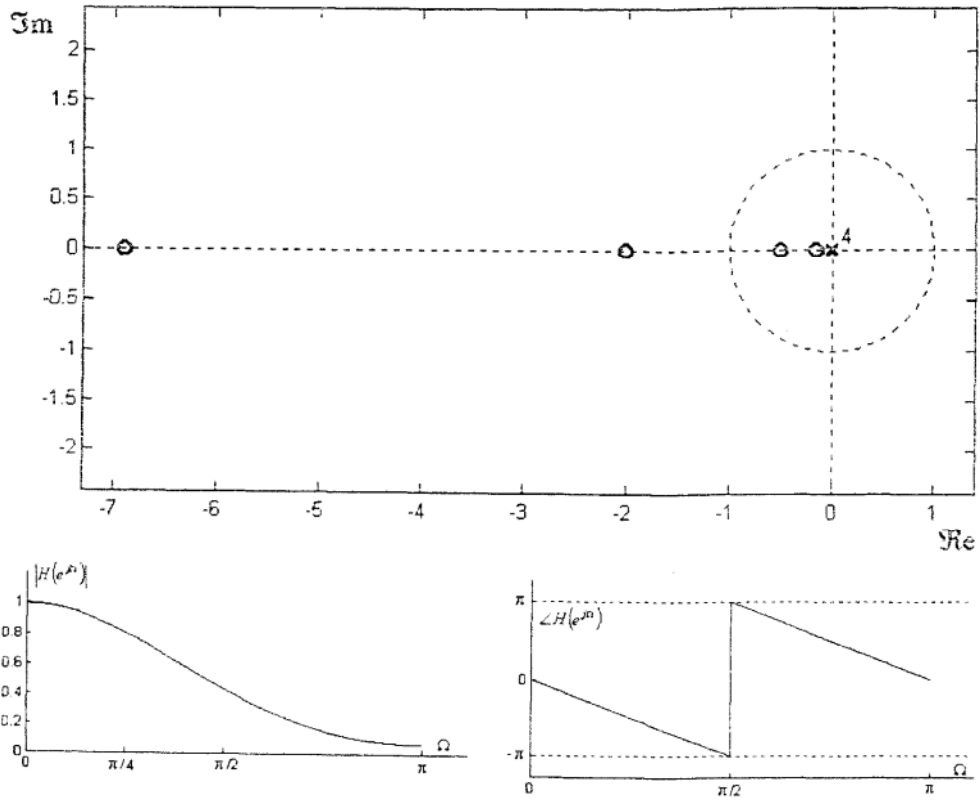
şeklinde tanımlanarak hayata geçirilebilmektedir.

FIR filtrenin kutup/sıfır grafiği, genlik yanıtı ve faz yanıtı Şekil 4.3'te gösterilmektedir. Filtrenin merkezde 4 adet kutbu, birim çember içerisinde 2 adet ve birim çember dışında 2 adet sıfırı mevcuttur. Filtre sadece dördüncü dereceden olduğu için geçiş bandı oldukça geniştir. Filtrenin faz yanıtı incelendiğinde, tasarıma doğrudan dahil edilen doğrusal faz etkisi görülmektedir.

Filtrenin impals yanıtının uzunluğu  $M+1=5$  (tek-sayı) olduğundan ve impals yanıtı

$$h[n] = h[M-n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (4.31)$$

simetrisini sağladığından tasarlanan filtre birinci tür (tür-1) doğrusal fazlı FIR filtresidir.



Şekil 4.3. Örnek 4.1 için tasarlanan FIR filtrenin frekans yanıtı

**Program 1:** MATLAB kullanılarak kesim frekansı  $\Omega_c = \pi/4$  olan ve Hamming penceresi kullanılarak tasarlanacak dördüncü derece alçak-geçiren bir FIR filtre bulalım.

```
N=4; % Dördüncü dereceden filtre
w_n = 0.25; %  $w_n = 0.25, \pi$ 'ye göre normalize edilmiş kesim frekansı
y= fir1(N,0.25, hamming (N+1)) %fir1:pencere ile FIR filtre transfer fonksiyonu
%pencere olarak N+1 uzunluğunda Hamming kullan
```

Çıkış olarak  $y=0.0246 \quad 0.2344 \quad 0.4821 \quad 0.2344 \quad 0.0246$  şeklinde normalize edilmiş impuls yanıtı değerleri bulunmaktadır.

Pratik FIR filtrenin impuls yanıtı, ideal filtrenin impuls yanıtı ile pencere fonksiyonunun çarpımından elde edilmektedir. Frekans uzayında ise pratik filtrenin frekans yanıtı; ideal filtrenin frekans yanıtı ile pencere fonksiyonunun frekans spektrumunun konvolüsyonu şeklinde oluşmaktadır. Pratik filtrenin frekans yanıtının ideal filtrenin frekans yanıtına olabildiğince eşit olması istenmektedir ve bunun için pencere fonksiyonunun frekans spektrumu impuls şeklinde olmalıdır (impuls ile konvolüsyon

işaretin kendisini verdiği için). Pencere fonksiyonunun frekans spektrumunu impuls yaklaştırmamanın bir yolu pencere genişliğini dolayısıyla filtre derecesini arttırmaktır. İkinci bir yol ise; pencerenin genişliğini değiştirmeden sadece biçimini değiştirerek pencere fonksiyonunun spektrumunu impuls yaklaştırmaktır. Dikdörtgensel pencere dışındaki pencere şekilleri bu doğrultuda belirlenmektedir.

#### 4.3.2. 2-D Filtrelerin Tasarımı

2-D filtrelerin frekans yanıtı;

$$H_2(e^{jw_1T_1}, e^{jw_2T_2}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} h_2(n_1T_1, n_2T_2) e^{-j(w_1n_1T_1 + w_2n_2T_2)} \quad (4.32)$$

şeklinde yazılabilir.  $e^{jw_1T_1} = z_1$  ve  $e^{jw_2T_2} = z_2$  yazılırsa

$$H_2(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} h_2(n_1T_1, n_2T_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \quad (4.33)$$

elde edilir. Böylece; 1-D filtrelerdeki gibi, nedensel olmayan ve sonsuz dizili bir transfer fonksiyonu elde edilebilir. Eşitlik (4.32)'de  $|n_1| > (N_1 - 1)/2$  veya  $|n_2| > (N_2 - 1)/2$  için  $h_2(n_1T_1, n_2T_2) = 0$  bırakılarak sonlu dizili bir transfer fonksiyonu elde edilebilir. 1-D'lerde olduğu gibi; Fourier serisinin kırılması ile Gibbs salınımları ortaya çıkar [8]. Nedensel transfer fonksiyonu,  $n_1T_1$  ve  $n_2T_2$  eksenlerine göre impuls yanıtında  $(N_1 - 1)T_1/2$  ve  $(N_2 - 1)T_2/2$  şeklinde bir gecikme yapılarak elde edilebilir.

$$H'_2(z_1, z_2) = z_1^{-(N_1-1)/2} z_2^{-(N_2-1)/2} H_2(z_1, z_2) \quad (4.34)$$

Sonuç olarak;  $H_2(z_1, z_2)$  ile temsil edilen filtre sıfır faz yanıtına sahip olurken  $H'_2(z_1, z_2)$  ile temsil edilen filtre lineer faz yanıtına sahip olur.

#### 4.3.3. 2-D Pencere Fonksiyonları

2-D pencere fonksiyonları kullanılarak “Gibbs” görünüşü etkisi azaltılabilir.  $w_2(n_1T_1, n_2T_2)$  ile temsil edilen 2-D pencere fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahip olan 2-D ayrık zamanlı bir fonksiyondur.

1. Sonlu bir destek bölgesine sahiptir. Yani;

$$|n_1| > (N_1 - 1)/2 \text{ veya } |n_2| > (N_2 - 1)/2 \text{ için} \\ w_2(n_1 T_1, n_2 T_2) = 0 \quad (4.35)$$

2.  $n_1 T_1$  ve  $n_2 T_2$  eksenlerine göre simetriktir. Yani;

$$w_2(-n_1 T_1, -n_2 T_2) = w_2(n_1 T_1, n_2 T_2) \quad (4.36)$$

2-D filtreler pencere fonksiyonlarının uygulanması, 1-D filtreler pencere fonksiyonlarının uygulanmasına benzemektedir. 2-D fourier serisi uygulanarak elde edilen impuls yanıtı 2-D pencere fonksiyonu ile çarpılarak yeni impuls yanıtı elde edilir.

$$h_{w_2}(n_1 T_1, n_2 T_2) = w_2(n_1 T_1, n_2 T_2) \times h_2(n_1 T_1, n_2 T_2) \quad (4.37)$$

Pencere fonksiyonu, sonlu destek bölgesine sahip olduğundan dolayı bir sonlu dizili transfer fonksiyonu elde edilir.

$$H_{w_2}(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-(N_1-1)/2}^{(N_1-1)/2} \sum_{n_2=-(N_2-1)/2}^{(N_2-1)/2} w_2(n_1 T_1, n_2 T_2) \times h_2(n_1 T_1, n_2 T_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \quad (4.38)$$

Burada,  $h_2(n_1 T_1, n_2 T_2)$   $n_1 T_1$  ve  $n_2 T_2$  'e göre bir fonksiyon ise; o zaman  $h_{w_2}(n_1 T_1, n_2 T_2)$  2. Özellikte verildiği gibi  $n_1 T_1$  ve  $n_2 T_2$  'e göre bir fonksiyon olur ve sonuç olarak;  $H_{w_2}(z_1, z_2)$  ile temsil edilen filtre sıfır faz yanıtına sahip olur.

Eğer;  $\omega_{1A}(n_1 T_1)$  ve  $\omega_{1B}(n_2 T_2)$  1-D pencere fonksiyon tipleri ise;  $w_2(n_1 T_1, n_2 T_2)$  fonksiyonu 2-D pencere fonksiyonu olur.

$$w_2(n_1 T_1, n_2 T_2) = \omega_{1A}(n_1 T_1) \omega_{1B}(n_2 T_2) \quad (4.39)$$

Huang tarafından önerilen diğer bir yöntemde ise;  $\omega_1(nT)$  'de " $nT$ " yerine  $\sqrt{(n_1 T_1)^2 + (n_2 T_2)^2}$  bırakılarak 1-D pencere,  $w_2(n_1 T_1, n_2 T_2)$  şeklinde 2-D pencereye dönüştürülür.

$$w_2(n_1 T_1, n_2 T_2) = \omega_1(nT) |_{nT=\sqrt{(n_1 T_1)^2 + (n_2 T_2)^2}} \quad (4.40)$$

#### 4.4. 2-D Dairesel Simetrik Filtreler

##### 4.4.1. Alçak Geçiren Filtreler

Dairesel simetri ile AGF'ler ideal frekans yanıtına sahip oldukları varsayılarak tasarlanabilirler.

$$H_{df}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \leq \omega_c \text{ için} \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.41)$$

1-D pencere fonksiyonlarından birine eşitlik (4.40) uygulanarak 2-D pencere fonksiyonu üretilir ve

$$h_{LP}(n_1T_1, n_2T_2) = w_2(n_1T_1, n_2T_2)h_1(n_1T_1, n_2T_2) \quad (4.42)$$

olduğu;

$$H_{LP}(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\frac{N_1-1}{2}}^{\frac{N_1-1}{2}} \sum_{n_2=-\frac{N_2-1}{2}}^{\frac{N_2-1}{2}} h_{LP}(n_1T_1, n_2T_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \quad (4.43)$$

şeklinde filtrenin transfer fonksiyonu elde edilebilir.

Eşitlik (4.45)'de görüldüğü gibi;  $h_1(n_1T, n_2T, n_1T$  ve  $n_2T$ 'ye göre bir fonksiyondur. Bu yüzden;  $H_{LP}(z_1, z_2)$  sıfır faz yanıtına sahip bir filtreyi temsil eder.

##### 4.4.2. Yüksek Geçiren Filtreler

Aşağıdaki tanımda; sıfır faz yanıtına sahip dairese simetrik AGF'nin transfer fonksiyonu verilmiştir.

$$H_{LP}(e^{jw_1T}, e^{jw_2T}) \approx \begin{cases} 1 & \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \leq \omega_c \text{ için} \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.44)$$

Sıfır faz yanıtına sahip dairese simetrik yüksek geçiren bir filtrenin transfer fonksiyonu;

$$H_{HP}(e^{jw_1T}, e^{jw_2T}) \approx \begin{cases} 0 & \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \leq \omega_c \text{ için} \\ 1 & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.46)$$

frekans yanıtı

$$H_{HP}(z_1, z_2) = 1 - H_{LP}(z_1, z_2) \quad (4.45)$$

olarak elde edilir. Ters z dönüşümü alınarak YGF'nin impals yanıtı;

$$h_{HP}(n_1T, n_2T) = \delta(n_1T, n_2T) - h_{LP}(n_1T, n_2T) \quad (4.47)$$

şeklinde bulunur. Böylece filtrenin transfer fonksiyonu;

$$h_{HP}(n_1T_1, n_2T_2) = \begin{cases} 1 - h_{LP}(n_1T_1, n_2T_2) & (n_1, n_2) = (0,0) \text{ için} \\ -h_{LP}(n_1T_1, n_2T_2) & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.48)$$

$$H_{HP}(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\frac{N_1-1}{2}}^{\frac{N_1-1}{2}} \sum_{n_2=-\frac{N_2-1}{2}}^{\frac{N_2-1}{2}} h_{HP}(n_1T_1, n_2T_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \quad (4.49)$$

olur.

#### 4.4.3. Bant- Geçiren Filtreler

Eğer  $H_{LP1}(z_1, z_2)$  ve  $H_{LP2}(z_1, z_2)$ ;  $\omega_{c1}$  ve  $\omega_{c2}$ 'nin kesim frekansları olduğu ( $\omega_{c1} < \omega_{c2}$ ) sıfır fazlı dairesel simetrik düşük geçiren filtrelerin transfer fonksiyonunu temsil ederse; o zaman (4.50) eşitliği sıfır fazlı, dairesel simetrik bant- geçiren filtrenin transfer fonksiyonunu temsil eder.

$$H_{BP}(z_1, z_2) = H_{LP2}(z_1, z_2) - H_{LP1}(z_1, z_2) \quad (4.50)$$

$$H_{BP}(e^{j\omega_1T}, e^{j\omega_2T}) = \begin{cases} 1 & \omega_{c1} \leq \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \leq \omega_{c2} \text{ için} \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.51)$$

Bir bant- geçiren filtre iki AGF'nin tasarlanmasıyla elde edilebilir.

#### 3.4.4. Bant- Durduran Filtreler

Eğer  $H_{LP1}(z_1, z_2)$  ve  $H_{LP2}(z_1, z_2)$  iki AGF'yi temsil ederse, eşitlik (4.45)'ten;

$$H_{HP2}(z_1, z_2) = 1 - H_{LP2}(z_1, z_2) \quad (4.52)$$

olarak yazılan transfer fonksiyonu YGF'yi temsil eder. Eğer  $\omega_{c1} < \omega_{c2}$  olursa o zaman;

$$H_{BP}(e^{j\omega_1T}, e^{j\omega_2T}) \approx \begin{cases} 0 & \omega_{c1} \leq \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \leq \omega_{c2} \text{ için} \\ 1 & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.53)$$

frekans yanıtına sahip olan,

$$H_{BS}(z_1, z_2) = H_{HP2}(z_1, z_2) + H_{HP1}(z_1, z_2) \quad (4.54)$$

eşitliği sıfır faz yanıtı dairesel simetrik BDF'lerin transfer fonksiyonunu temsil eder. BDF'ler, BGF'ler gibi, uygun AGFler tasarlanarak elde edilirler.

## 5. 2-D TEKRARLI FİLTRELER

### 5.1. Giriş

Tekrarsız filtreler daima kararlıdır ve lineer faz yanıtına sahip olduklarından dolayı kolaylıkla tasarlanabilirler. Fakat bu filtreler ile elde edilebilecek seçicilik (filtreleme) sınırlıdır, bazı sistemlerde gerekli olan filtre tiplerinde durdurma bandı ile geçirme bandı arasında hızlı geçişlerin olması gereklidir. İstenen filtre özelliklerinin sağlanması için yüksek dereceden filtreler gerekir. Bu tip filtrelerin tasarım aşamasında hesaplama karmaşıklığı ortaya çıkar. Bu problem, tekrarsız filtreler yerine çok yüksek seçicilik sağlama yeteneğine sahip tekrarlı filtre kullanılarak aşılabılır.

Tekrarlı filtreler için yaklaşım problemi, 1-D sürekli zamanlı veya ayrık zamanlı transfer fonksiyonlarına dönüşümler uygulanarak; optimizasyon teknikleri kullanılarak veya optimizasyon teknikleri ile bağlantılı dönüşümler uygulanarak çözülebilir. Dönüşümlere dayanan metotların uygulanması kolaydır ve diğer metotlara göre daha az hesaplama gerektirir.

### 5.2. Dönüşümler

Dönüşümlere dayanan metotlar; çeyrek düzlem veya yarı düzlem simetrik filtrelerin tasarımını için rahatlıkla kullanılabilir. Dönüşüme dayanan metotlar 1-D'de kullanılanların uzantısıdır. En sık kullanılan dönüşüm metodu bilineer dönüşüm metodudur. Bu bölümde bazı dönüşüm metotları incelenecektir.

#### 5.2.1. Bilineer Dönüşüm

Sürekli zamanda tasarlanmış 1-D bir filtrenin transfer fonksiyonu  $H_A(s)$  verilmiş olsun.  $H_A(s)$ 'ye  $s=f(z)$  şeklinde bir dönüşüm uygulanarak ayrık zamanlı 1-D süzgecin transfer fonksiyonu  $H_D(z)$  elde edilebilir.

$$H_D(z) = H_A(s) \Big|_{s=f(z)} \quad (5.1)$$

Yukarıdaki dönüşüm, aşağıdaki şartları sağlarsa bir ayrık zamanlı 1-D filtrenin transfer fonksiyonu elde edilir.

1. Kararlı bir analog filtrenin transfer fonksiyonu yine kararlı bir sayısal filtre transfer fonksiyonu vermelidir.
2. Sürekli zamanda tasarlanmış 1-D bir filtrenin transfer fonksiyonunun bazı temel özellikleri, ayrık zamanlı tasarlanmış 1-D filtrenin transfer fonksiyonunda da korunmalıdır.

Bu şartlar karşılanırsa;  $z=f(s)$  şeklinde bir ters fonksiyon oluşur ve 5.1' deki dönüşüm s düzleminin bir veya birçok bölgesini z düzleminin bir veya birçok bölgesine veya z düzleminin bir veya birçok bölgesini s düzleminin bir veya birçok bölgesine eşler.

$$s = 2/T \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \quad (5.2)$$

ile verilen bilineer dönüşüm bu sınıftaki dönüşümlerin içinde önemli bir dönüşümdür.

Bilineer dönüşümde [11];

1. Sol yarı s düzlemi, z düzleminde birim çemberin içine karşılık gelir.
2. S-düzleminin sanal eksenini, z düzleminde birim çemberin üzerine(çevresine) karşılık gelir.
3. Sağ yarı s düzlemi z düzleminde birim çemberin dışına karşılık gelir.

Bu şartlar altında; Eğer

$$M_{1i} \leq |H_A(j\omega)| \leq M_{2i} \quad (\omega_{1i} \leq \omega \leq \omega_{2i} \text{ için}) \text{ olursa;}$$

O zaman;

$n'_B$  nin kazanç frekans bandında bir sayı olduğu  $i = 1, 2, \dots, n_B$  için;

$$M_{1i} \leq |H_D(e^{j\Omega T})| \leq M_{2i} \quad (\Omega_{1i} \leq \Omega \leq \Omega_{2i}) \text{ için,}$$

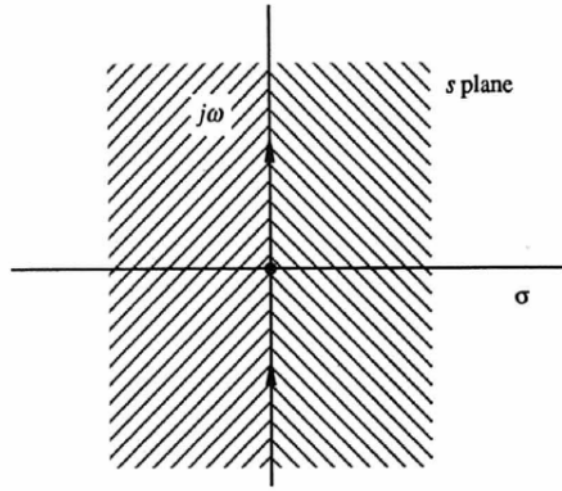
$$\Omega_{1i} = \frac{2}{T_1} \tan^{-1} \frac{\omega_{1i} T_1}{2} \text{ ve } \Omega_{2i} = \frac{2}{T_2} \tan^{-1} \frac{\omega_{2i} T_2}{2} \quad (5.3)$$

olur.

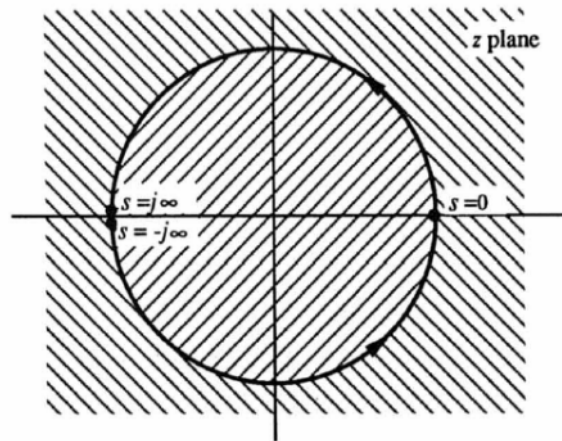
Sonuçta;

1. Analog filtrelerdeki geçirme bandı sayısal filtrelerdeki geçirme bandına dönüşür.
2. Analog filtrelerdeki durdurma bandı sayısal filtrelerdeki durdurma bandına dönüşür
3. Analog filtrelerin geçirme bandı dalgalanmaları sayısal filtrelerde korunur.
4. Analog filtrelerde minimum durdurma bandı zayıflaması sayısal filtrelerde korunur.

Bu nedenlerden dolayı bilineer dönüşüm metodu 1-D tekrarlı sayısal filtrelerin tasarımı için en etkin metotlardan biridir.



(a)



(b)

Şekil 5.1. Bilineer dönüşüm; a) s düzlemi, b) z düzlemi.

### 5.2.2. Analog Filtre Dönüşümleri

Analog filtrelerin tasarımı, genellikle sürekli AGF transfer fonksiyonlarına analog filtre dönüşümleri uygulanarak yapılır (Bessel, Butterworth, Chebyshev yaklaşımları). Bu dönüşümler;  $s = f(\bar{s})$  şeklindedir ve bant geçiren, bant durduran, yüksek geçiren ve AGFlerin tasarımında kullanılabilir. 1-D sayısal filtrelere bilineer dönüşümler uygulanmasıyla; 2-D sayısal filtreler tasarlanabildiğinden bu dönüşümler 2-D sayısal filtrelerin tasarımı için de oldukça önemlidir.

Ayrıca; 1-D sürekli transfer fonksiyonlarına karşılık gelen 2-D sürekli transfer fonksiyonu elde etmek için  $s = g(s_1, s_2)$  şeklinde dönüşümler kullanılabilir. Bu dönüşümlerin ikisi [9]

$$s = g_1(s_1, s_2) = -s_1 \sin \beta + s_2 \cos \beta \quad (5.4a)$$

$$s = g_2(s_1, s_2) = s_1 \cos \beta + s_2 \sin \beta \quad (5.4b)$$

şeklindedir. Eğer  $H_{A1}(s)$  1-D sürekli zamanlı bir transfer fonksiyon ise o zaman;

$$H_{A2}(s_1, s_2) = H_{A1}(s)|_{s=g_1(s_1, s_2)} \quad (5.5)$$

dönüşümü uygulanarak 2-D sürekli zamanlı bir transfer fonksiyona dönüşür.

Eğer  $s = j\omega$   $s_1 = j\omega_1$  ve  $s_2 = j\omega_2$  olursa;  $\omega_2$ 'nin  $\omega_2 = \omega_1 \tan \beta + \frac{\omega}{\cos \beta}$  olduğu

$|H_{A2}(j\omega_1, j\omega_2)| = |H_{A1}(j\omega)|$  eşitliği elde edilir. Eğer  $\beta = 0$  olursa; (5.4a) ve (5.5) eşitliklerinden  $H_{A2}(s_1, s_2) = H_{A1}(s_2)$ 'yi elde ederiz. Sonuç olarak; Eğer  $H_{A2}(s_1, s_2)$ 'ye eşitlik (5.2)'deki bilineer dönüşümü uygulanırsa;

$$H_{D2}(z_1, z_2) = H_{A2}(s_1, s_2)|_{s_1=\frac{2}{T_1}\left(\frac{z_1-1}{z_1+1}\right), s_2=\frac{2}{T_2}\left(\frac{z_2-1}{z_2+1}\right)} \quad (5.6)$$

elde edilir.

Bilineer dönüşüm  $s_1$  ve  $s_2$  düzleminin  $j\omega_1$  ve  $j\omega_2$  eksenlerini  $z_1$  ve  $z_2$  düzleminde birim çemberin üzerine eşlediğinden elde edilen 2-D sayısal filtreler  $(\Omega_1, \Omega_2)$  düzleminin  $\Omega_1$  ve  $\Omega_2$  eksenleri üzerinde genlik yanıtına sahip olur.

$$(\Omega_1 = \frac{2}{T_1} \tan^{-1} \frac{\omega_1 T_1}{2}, \Omega_2 = \frac{2}{T_2} \tan^{-1} \frac{\omega_2 T_2}{2}) \quad (5.7)$$

### 5.3. Tekrarlı Filtrelerde Kararlılık

2-D filtreler sonlu impuls yanıtı filtreler ve sonsuz impuls yanıtı filtreler olarak iki esas kategoriye ayrılabilirler. Sonlu impuls yanıtı filtreler sonlu bir diziden oluşan transfer fonksiyonlarına sahip olur ve sonsuz impuls yanıtı filtreler ise sonsuz bir diziden oluşan transfer fonksiyonlarına sahip olurlar. Her iki filtre tipi içinde kararlılık konusu önemlidir. Sonlu impuls yanıtı filtreler daima kararlıdır fakat sonsuz impuls cevaplı filtreler transfer fonksiyonuna bağlı olarak kararlı veya kararsız bir yapıya sahip olabilirler. Kararlılık için en çok kullanılan kriter sınırlı giriş-sınırlı çıkış (BIBO) kriteridir. Bu kriter gere; eğer filtenin sınırlı bir girişe cevabı da sınırlıysa filtre kararlıdır. Nedensel, lineer, zamanla değişmeyen sistemler için,

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} |h(n_1, n_2)| < \infty \quad (5.8)$$

eşitsizliği ile bu durumu açıklamak mümkündür.  $h(n_1, n_2)$ 'in filtrenin impuls yanıtıdır. Yukarıdaki tanıma göre, impuls yanıtı terimleri sonlu sayıda ise sistem kararlıdır (tekrarsız filtre). Fakat tekrarlı filtreler sonsuz impuls yanıtına sahip olduklarından dolayı bu şartı sağlamazlar. 1-D durumda; z-transfer fonksiyonunun kutuplarının birim çemberin içinde olmasıyla BIBO kararlılık şartını ilişkilendirmek mümkündür ve payda polinomunun sıfırlarını saptayarak kararlılık testi yapılabilir.

Kararlılık testleri açısından; bir tekrarlı filtre tasarımı için iki farklı yaklaşım vardır. Birinci metotta; sonuçta elde ettiğimiz filtre kararlı olsun diye filtre tasarımının her aşamasında kararlılık testi yapılır ve sonuçta kararlı filtre elde edilir. İkinci metotta ise; tasarımın her aşamasında kararlılık testi uygulanmaz önce transfer fonksiyonu elde edilir. Daha sonra kararlılık bölgesinde kutuplar seçilerek kararlı bir filtre elde edilir. İkinci metottaki kararlılık testi daha uygundur. Çünkü filtrenin kutuplarını bulmak kolaydır [7].

## 6. UYGULAMALAR

### 6.1. 2-D Filtre Tasarımı Uygulamaları

Bölüm 4.1 ve 5.1’de bahsedildiği gibi, 1-D sürekli zamanlı veya ayrık zamanlı transfer fonksiyonlarına dönüşümler uygulanarak tasarım yapılabilir. Elde edilen 1-D transfer fonksiyonları birleştirilerek 2-D sayısal transfer fonksiyonları elde edilir.

**Uygulama 1:** 4.Dereceden 2-D sayısal Butterworth AGF tasarımı[17].

Öncelikle 4.dereceden 1-D analog alçak geçiren Butterworth filtrenin

$$S_k = e^{j(k\pi/n)} \quad n \text{ tek ise} \quad (n \text{ filtrenin derecesi, } k=1,2,3,\dots,n)$$

$$S_k = e^{j((2k+1)\pi/2n)} \quad n \text{ çift ise}$$

formülü ile kökleri bulunur;

$$H_a(s) = \frac{1}{(s^2 + 1.8478s + 1)(s^2 + 0.7654s + 1)} \quad (6.1)$$

transfer fonksiyonu elde edilir.

Daha sonra iki tane 4. Dereceden 1-D Butterworth analog AGF’yi kaskad bağlayarak transfer fonksiyonu

$$H_a(s_1, s_2) = \frac{1}{(s_1^2 + 1.8478s_1 + 1)(s_1^2 + 0.7654s_1 + 1)(s_2^2 + 1.8478s_2 + 1)(s_2^2 + 0.7654s_2 + 1)} \quad (6.2)$$

şeklinde olan 2-D analog filtre elde edilir.

$$H_a(s_1, s_2)'e \quad s_i = \frac{z_i - a_{iL}}{z_i + 1} \quad (6.3)$$

bilineer dönüşümü uygulanarak;

$$H_a(z_1, z_2) = \frac{(z_1 + 1)^4(z_2 + 1)^4}{(k_1^2(z_1 - a_{1L})^2 + 1.8478k_1(z_1 - a_{1L})(z_1 + 1) + (z_1 + 1)^2) (k_1^2(z_1 - a_{1L})^2 + 0.7654k_1(z_1 - a_{1L})(z_1 + 1) + (z_1 + 1)^2) (k_2^2(z_2 - a_{2L})^2 + 1.8478k_2(z_2 - a_{2L})(z_2 + 1) + (z_2 + 1)^2) (k_2^2(z_2 - a_{2L})^2 + 0.7654k_2(z_2 - a_{2L})(z_2 + 1) + (z_2 + 1)^2)} \quad (6.4)$$

4. Dereceden 2-D analog alçak geçiren Butterworth filtre sayısal düzleme çevrilmiş olur. 4. Dereceden 2-D sayısal alçak geçiren Butterworth filtrenin genlik yanıtı ve eş yükselti eğrileri Program-2 ile elde edilir.

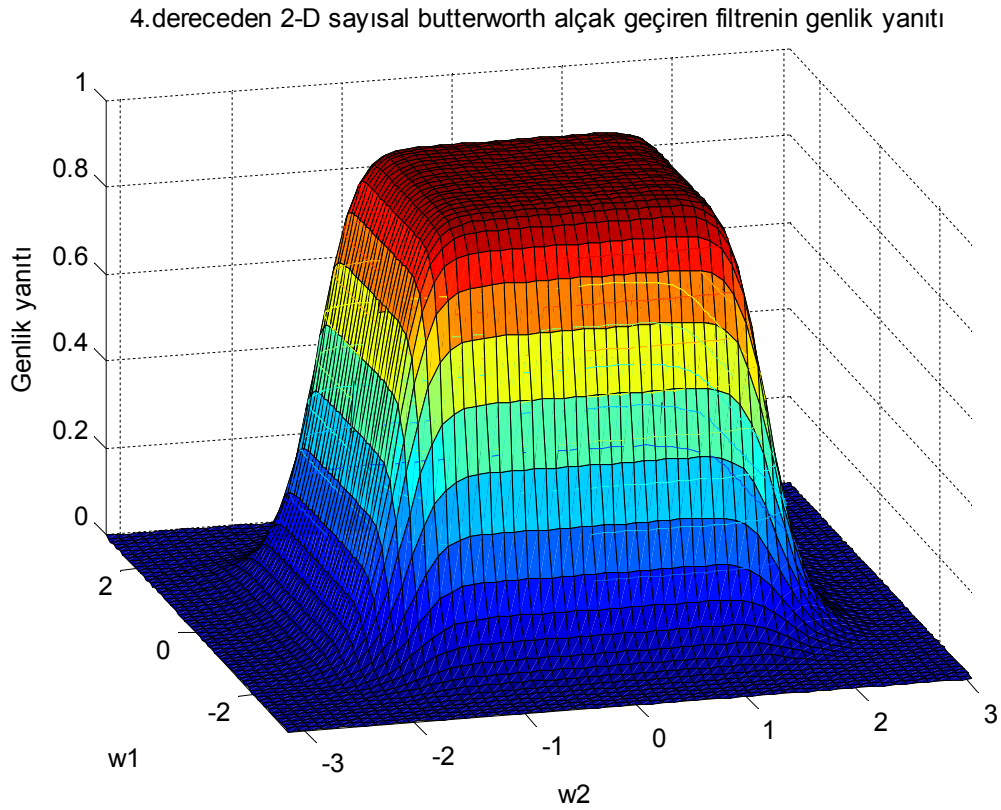
#### Program2:

```
clc;
clear all;
k1=input ('k1 değerini gir=>');
k2=input ('k2değerini gir =>');
a1L=input ('a1L değerini gir=>');
a2L=input ('a2L değerini gir=>');
[w1,w2]=meshgrid(-pi:0.1:pi,-pi:0.1:pi);
z1=exp(j.*w1);
z2=exp(j.*w2);
a=z1-a1L;
b=z2-a2L;
c=z1+1;
d=z2+1;
h1_1=(((k1.^2).*(a.^2))+(k1.*1.8478.*a.*c)+(c.^2)).*(((k1.^2).*(a.^2))+(k1.*0.7654.*a.*c)+(c.^2));
h1_2=(((k2.^2).*(b.^2))+(k2.*1.8478.*b.*d)+(d.^2)).*(((k2.^2).*(b.^2))+(k2.*0.7654.*b.*d)+(d.^2));
h1=abs(((c.^4).*(d.^4))./(h1_1.*h1_2));
figure(1);
contour3(w1,w2,h1);
surface(w1,w2,abs(h1));
grid on;
view(-15,25);
```

```

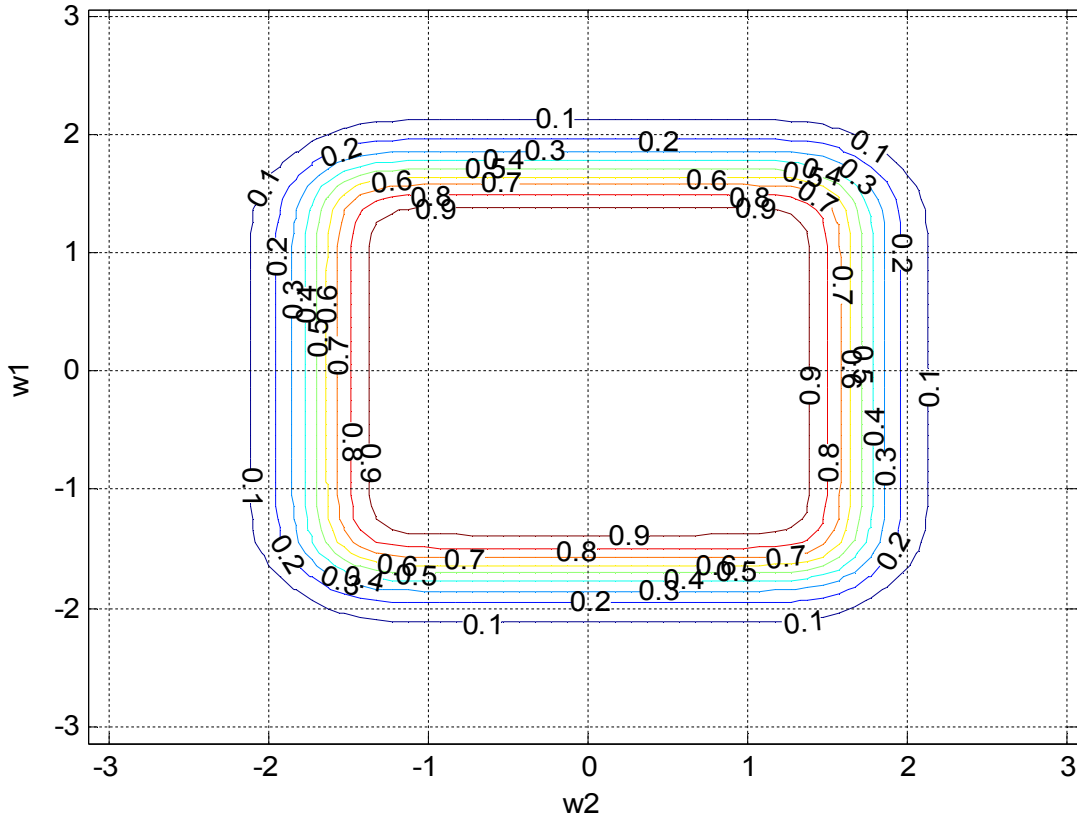
title('3-D 4.dereceden sayısal butterworth alçak geçiren filtrenin genlik yanıtı');
xlabel('w2');
ylabel('w1');
zlabel('Magnitude yanıtı');
figure(2);
[C,h]=contour(w1,w2,h1);
Clabel(C,h);
grid on;
title('3-D 4.dereceden sayısal butterworth alçak geçiren filtrenin eş yükselti eğrisi')
xlabel('w2');
ylabel('w1');

```



**Şekil 6.1.** 4.dereceden 2-D sayısal butterworth alçak geçiren filtrenin genlik yanıtı( $k_1 = k_2 = a_1L = a_2L = 1$  alınmıştır.)

4.dereceden 2-D sayısal butterworth alçak geçiren filtrenin eş yükselti eğrisi



Şekil 6.2. 4.dereceden 2-D sayısal butterworth alçak geçiren filtrenin eş yükselti eğrisi

**Uygulama 2:** 4.dereceden 2-D sayısal chebyshev AGF tasarımı. ( $n=3$ ,  $\varepsilon = 0.5$ )

Öncelikle 4. dereceden 1-D analog chebyshev AGF'nin transfer fonksiyonunu;

$$H_a(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.28s + 0.97)(s^2 + 0.68s + 0.27)} \quad (6.5)$$

şeklinde buluruz. 2-D analog AGF'nin transfer fonksiyonunu ise;

$$H_a(s_1, s_2) = \frac{1}{(s_1^2 + 0.28s_1 + 0.97)(s_1^2 + 0.68s_1 + 0.27)(s_2^2 + 0.28s_2 + 0.97)(s_2^2 + 0.68s_2 + 0.27)} \quad (6.6)$$

şeklinde elde ederiz. eşitlik (6.3) 'teki bilineer dönüşümü uygulanırsa;

$$H_a(z_1, z_2) = \frac{(z_1 + 1)^4(z_2 + 1)^4}{(k_1^2(z_1 - a_{1L})^2 + 0.28k_1(z_1 - a_{1L})(z_1 + 1) + 0.97(z_1 + 1)^2) (k_1^2(z_1 - a_{1L})^2 + 0.68k_1(z_1 - a_{1L})(z_1 + 1) + 0.27(z_1 + 1)^2) (k_2^2(z_2 - a_{2L})^2 + 0.28k_2(z_2 - a_{2L})(z_2 + 1) + 0.97(z_2 + 1)^2) (k_2^2(z_2 - a_{2L})^2 + 0.68k_2(z_2 - a_{2L})(z_2 + 1) + 0.27(z_2 + 1)^2)} \quad (6.7)$$

4.Dereceden 2-D sayısal alçak geçiren chebyshev filtrenin transfer fonksiyonunu bulunmuş olunur. 4.Dereceden 2-D sayısal alçak geçiren chebyshev filtrenin genlik yanıtı ve eş yükselti eğrileri Program-3 ile elde edilir.

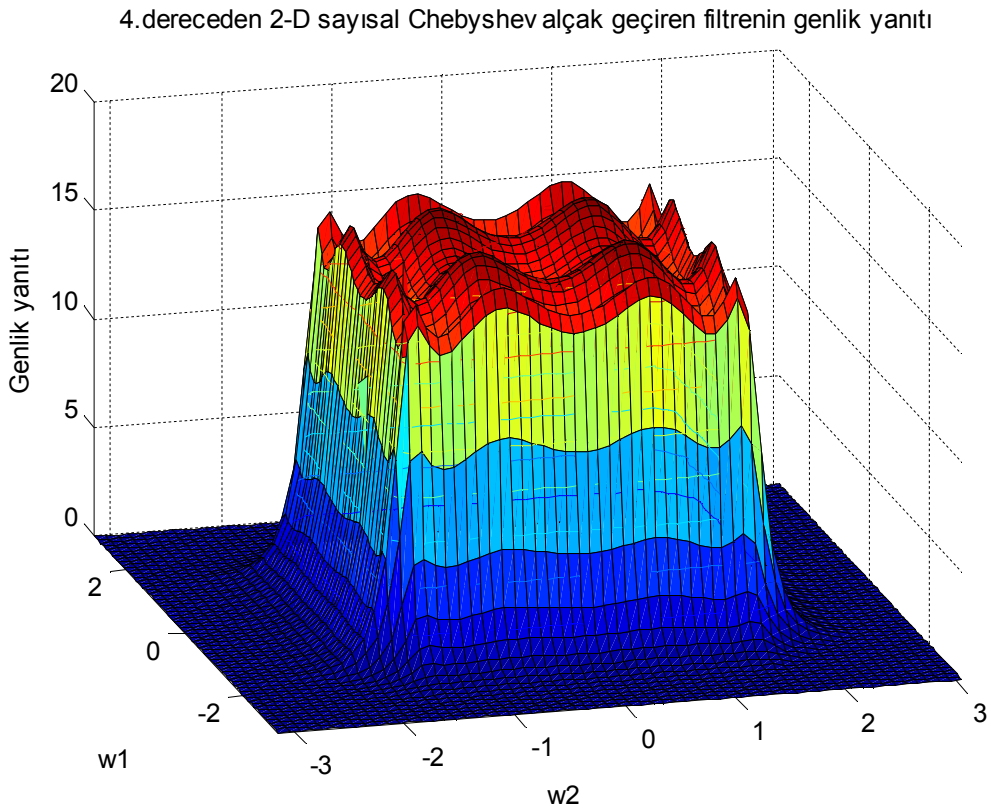
**Program 3:**

```
clc;
clear all;
k1=input('k1 değerini gir=>');
k2=input('k2değerini gir =>');
a1L=input('a1L değerini gir=>');
a2L=input('a2L değerini gir=>');
[w1,w2]=meshgrid(-pi:0.1:pi,-pi:0.1:pi);
z1=exp(j.*w1);
z2=exp(j.*w2);
a=z1-a1L;
b=z2-a2L;
c=z1+1;
d=z2+1;
h1_1=(((k1.^2).*(a.^2))+(k1.*0.28.*a.*c)+0.97.*(c.^2)).*(((k1.^2).*(a.^2))+(k1.*0.68.*a.*c)+0.27.*(c.^2));
h1_2=(((k2.^2).*(b.^2))+(k2.*0.28.*b.*d)+0.97.*(d.^2)).*(((k2.^2).*(b.^2))+(k2.*0.68.*b.*d)+0.27.*(d.^2));
h1=abs(((c.^4).*(d.^4))./(h1_1.*h1_2));
figure(1);
contour3(w1,w2,h1);
surface(w1,w2,abs(h1));
grid on;
view(-15,25);
```

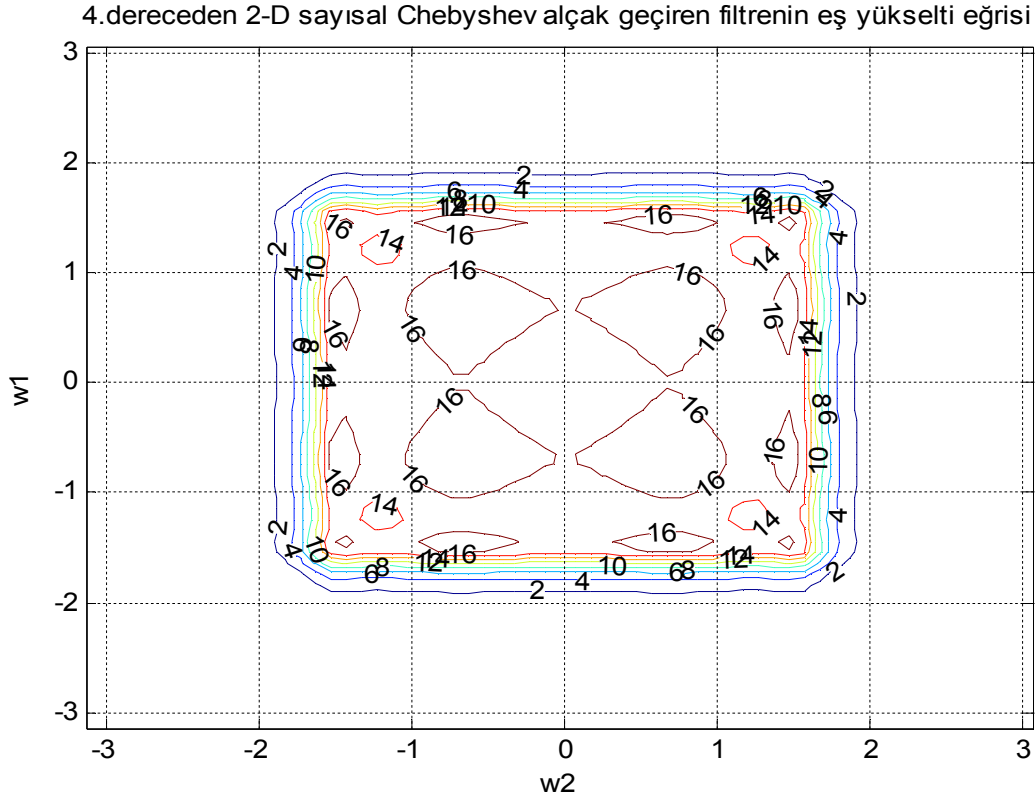
```

title('4.dereceden 2-D sayısal Chebyshev AGF'nin genlik yanıtı');
xlabel('w2');
ylabel('w1');
zlabel('Genlik yanıtı');
figure(2);
[C,h]=contour(w1,w2,h1);
Clabel(C,h);
grid on;
title('4.dereceden 2-D sayısal Chebyshev AGF'nin eş yükselti eğrisi');
xlabel('w2');
ylabel('w1');

```

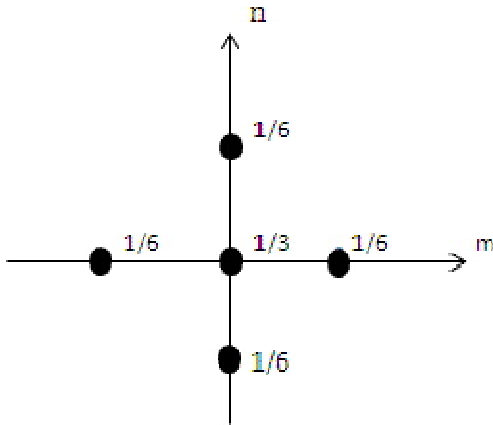


**Şekil 6.3.** 4.dereceden 2-D sayısal Chebyshev AGF'nin genlik yanıtı( $k_1 = k_2 = a_1L = a_2L = 1$  alınmıştır.)



**Şekil 6.4.** 4.dereceden 2-D sayısal Chebyshev AGF'nin eş yükselti eğrisi ( $k_1 = k_2 = a_1L = a_2L = 1$  alınmıştır.)

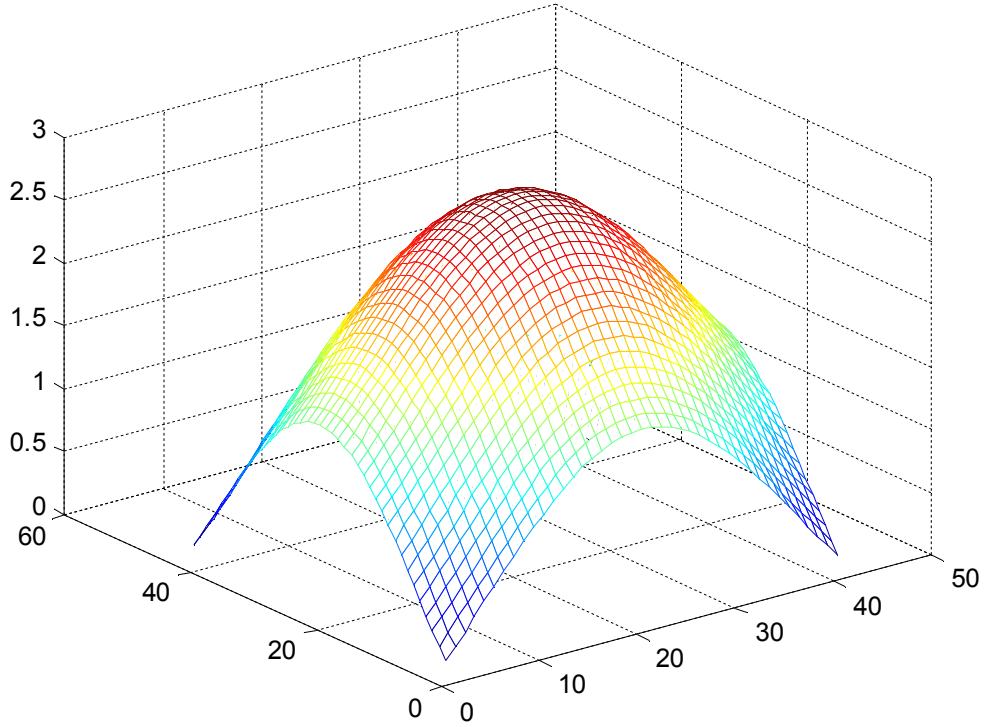
**Uygulama 3:** Aşağıdaki koordinat düzlemindeki noktalardan geçen 2-D filtrenin frekans yanıtının bulunması.



$$\begin{aligned}
 H(u, v) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(m, n) e^{-j2\pi um} e^{-j2\pi vn} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} (e^{-ju} + e^{ju} + e^{-jv} + e^{jv}) \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} (2\cos u + 2\cos v) = \frac{1}{3} (1 + \cos u + \cos v)
 \end{aligned}$$

MATLAB komutları ile frekans yanıtını çizelim.

```
[x,y] = meshgrid(-2:.1:2, -2:.1:2);  
z =(1+cos(x)+cos(y));  
mesh(z)
```



Şekil 6.5: Uygulama 3 için frekans yanıtı

### 6.1.1. MATLAB Komutlarıyla 2-D Filtre Tasarlama

Matlabda fwind1, fwind2, fsamp2, ftrans2, medfilt2, wiener2, freqz2, komutlarıyla filtre tasarımı yapılabilir.

**Uygulama 4:** fwind1 komutu ile 0.3 ve 0.6 arasındaki bir bandı geçiren; yaklaşık dairesel simetrik 2-D BGF tasarımı.

fwind1 komutu bölüm 4.3'te de bahsedildiği gibi pencereleme metodu kullanarak 2-D filtre tasarlar. Fwind1; Huang metodu ile 1-D pencereden yaklaşık dairesel simetrik 2-D pencere üretir.

```
h = fwind1(Hd, win)
```

Burada win; hamming, hanning, bartlett, blackman, kaiser, chebwin pencerelerinden herhangi biri olabilir.

```
[f1,f2] = freqspace(21,'meshgrid');
```

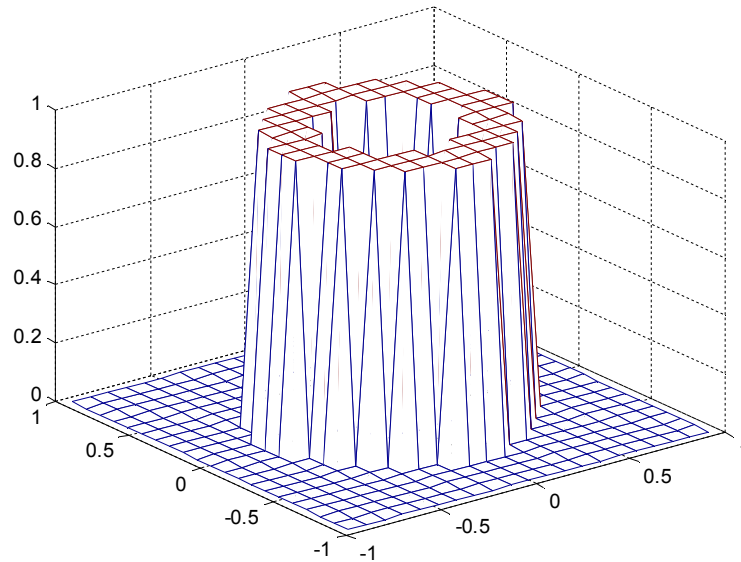
```
Hd = ones(21);
```

```
r = sqrt(f1.^2 + f2.^2);
```

```
Hd((r<0.3)|(r>0.6)) = 0;
```

```
colormap(jet(64))
```

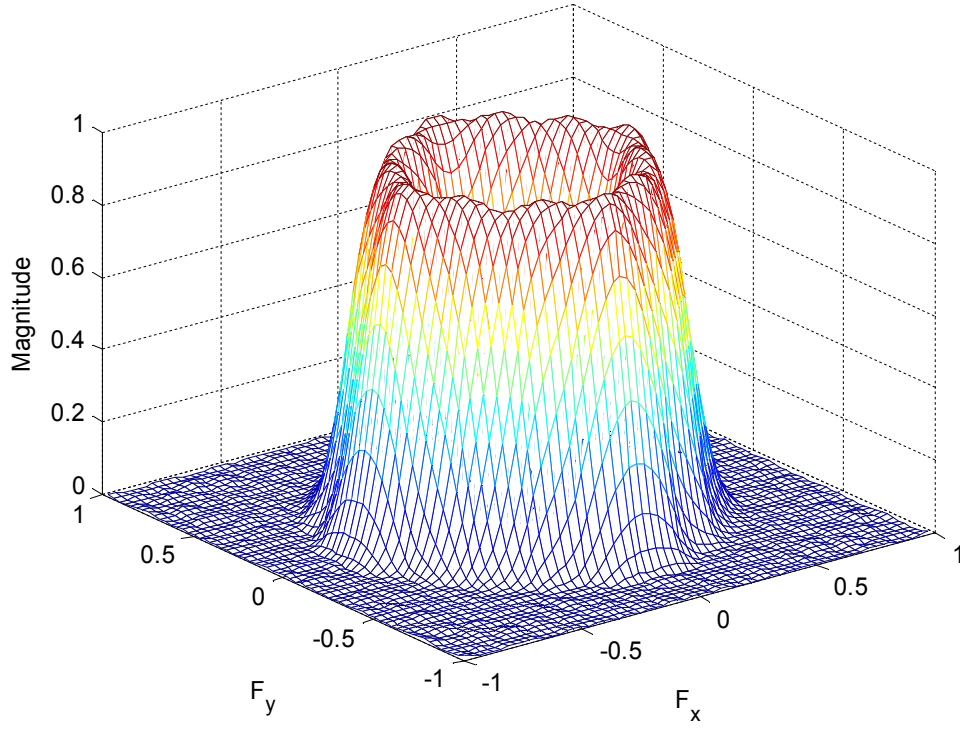
```
mesh(f1,f2,Hd)
```



**Şekil 6.6.** 0.3 ve 0.6 arasındaki bir bandı geçiren yaklaşık dairesel simetrik 2-D BGF'nin frekans yanıtı(ideal)

```
h = fwind1(Hd, hamming(21));
```

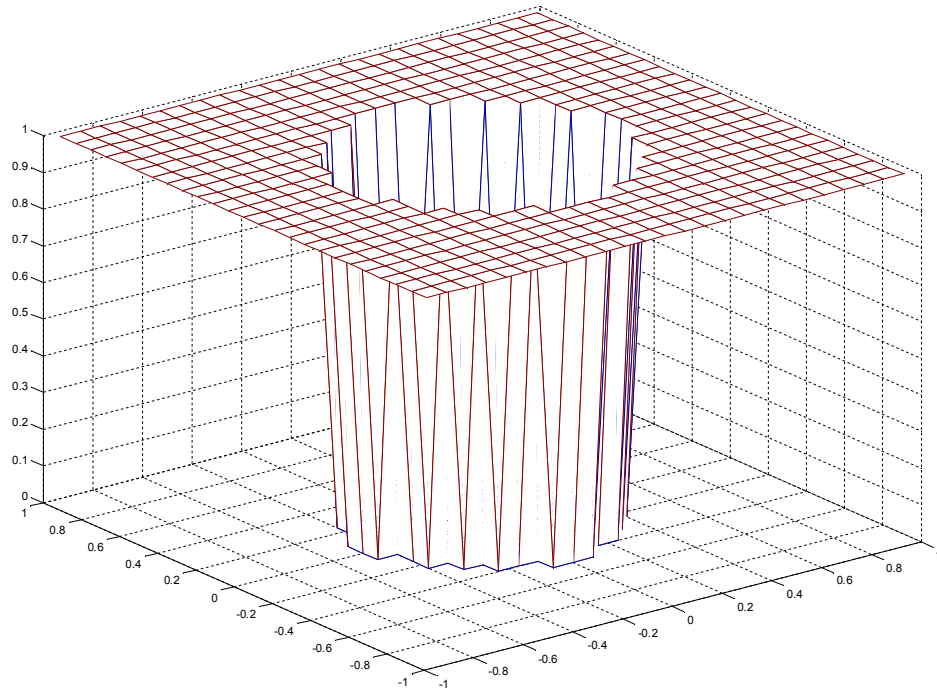
```
freqz2(h)
```



**Şekil 6.7.** 0.3 ve 0.6 arasındaki bir bantı geçiren; yaklaşık dairesel simetrik 2-D BGF

**Uygulama 5:** fwind1 komutu ile kesim frekansı 0.5 olan dairesel simetrik 2-D YGF tasarımı.

```
[f1,f2] = freqspace(25,'meshgrid');
Hd = ones(25);
r = sqrt(f1.^2 + f2.^2);
Hd((r<0.5)) = 0;
colormap(jet(64))
mesh(f1,f2,Hd)
```



**Şekil 6.8.** Kesim frekansı 0.5 olan yaklaşık dairesel simetrik 2-D YGF'nin frekans yanıtı (ideal)

```
[f1,f2] = freqspace(25,'meshgrid');
```

```
Hd = ones(25);
```

```
r = sqrt(f1.^2 + f2.^2);
```

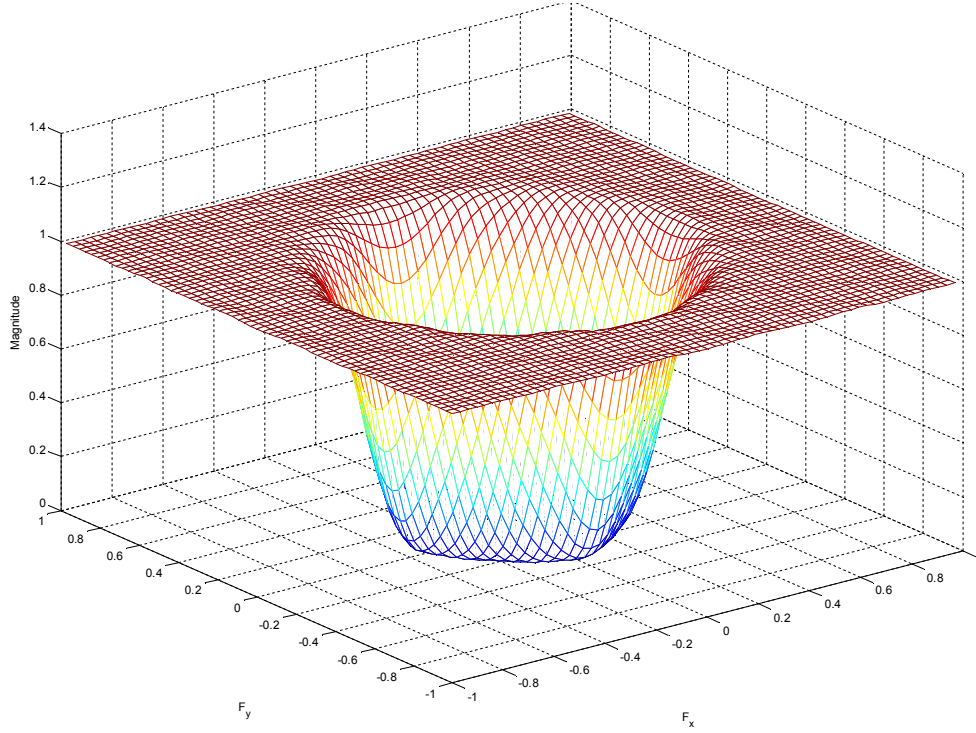
```
Hd((r<0.5)) = 0;
```

```
colormap(jet(64))
```

```
mesh(f1,f2,Hd)
```

```
h = fwind1(Hd, hamming(21));
```

```
freqz2(h)
```



**Şekil 6.9.** Kesim frekansı 0.5 olan yaklaşık dairesel simetrik 2-D YGF'nin frekans yanıtı

**Uygulama 6:** ftrans2 komutu ile kesim frekansı 0.7 olan 2-D AGF tasarımı.

**Ftrans 2** Frekans dönüşümü metodunu kullanarak 2-D filtre tasarlar.

$h = \text{ftrans2}(b, t)$

$t$  dönüşümü ile 1-D  $b$  filtresine karşılık gelen 2-D filtre üretir.

$b = \text{remez}(10, [0 \ 0.2 \ 0.7 \ 1], [1 \ 1 \ 0 \ 0]);$

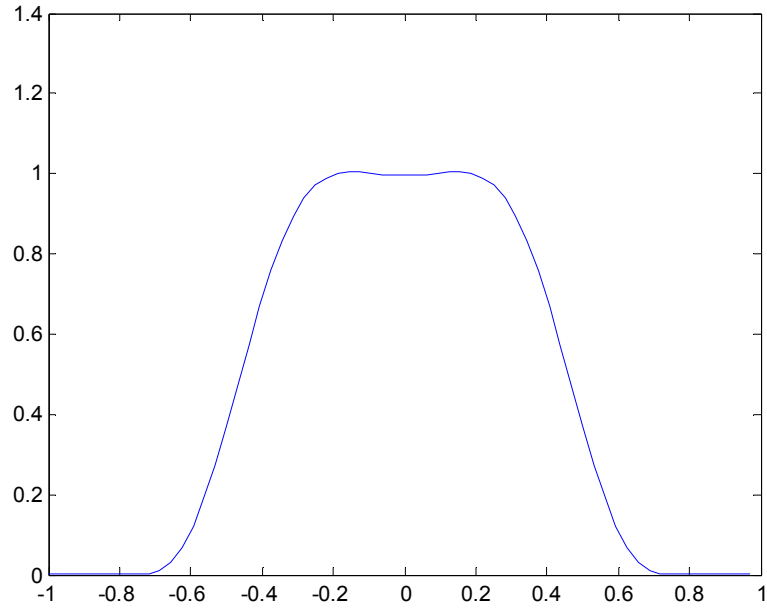
$h = \text{ftrans2}(b);$

$[H, w] = \text{freqz}(b, 1, 64, 'whole');$

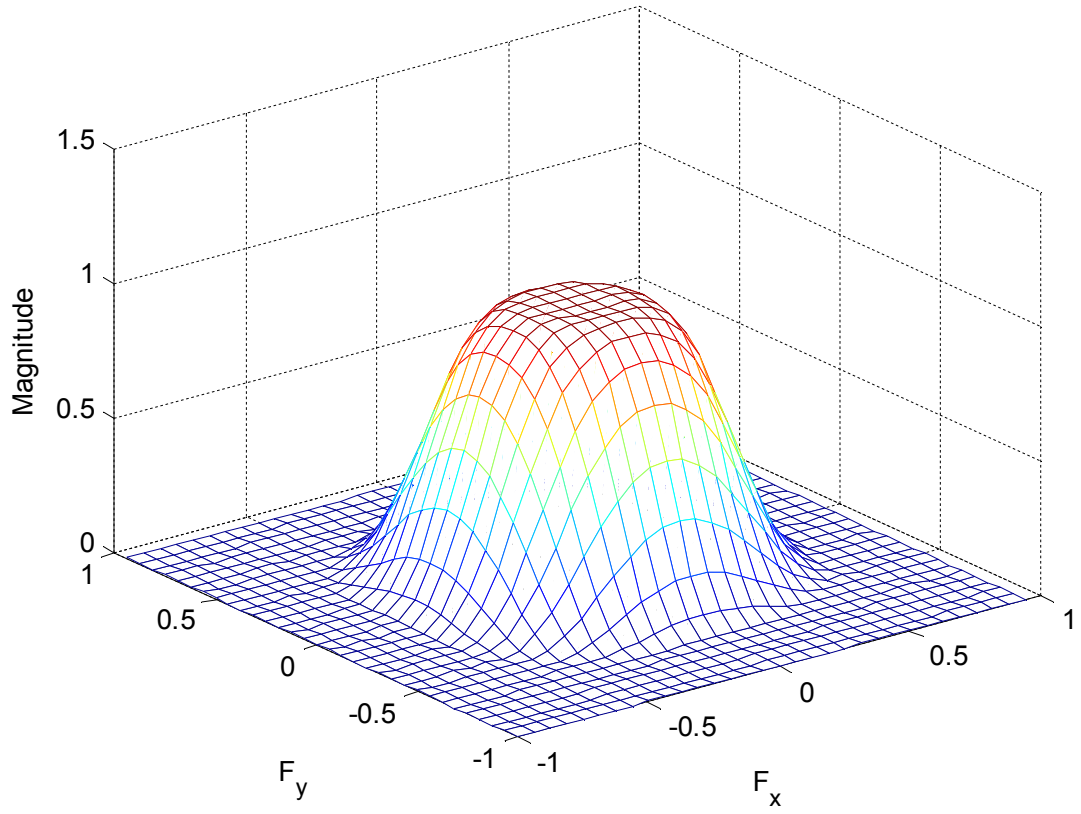
$\text{colormap}(\text{jet}(64))$

$\text{plot}(w/\pi - 1, \text{fftshift}(\text{abs}(H)))$

$\text{figure}, \text{freqz2}(h, [32 \ 32])$



**Şekil 6.10.** Kesim frekansı 0.7 olan 1-D AGF'nin frekans yanıtı



**Şekil 6.11.** Kesim frekansı 0.7 olan 2-D AGF'nin frekans yanıtı

**Uygulama 7:** fsamp2 komutu ile AGF tasarımı.

**fsamp2**, frekans örnekleme metodu kullanarak 2-D sayısal filtre üretir. (  $h = \text{fsamp2}(H_d)$  )

```
Hd = zeros(11,11); Hd(4:8,4:8) = 1;
```

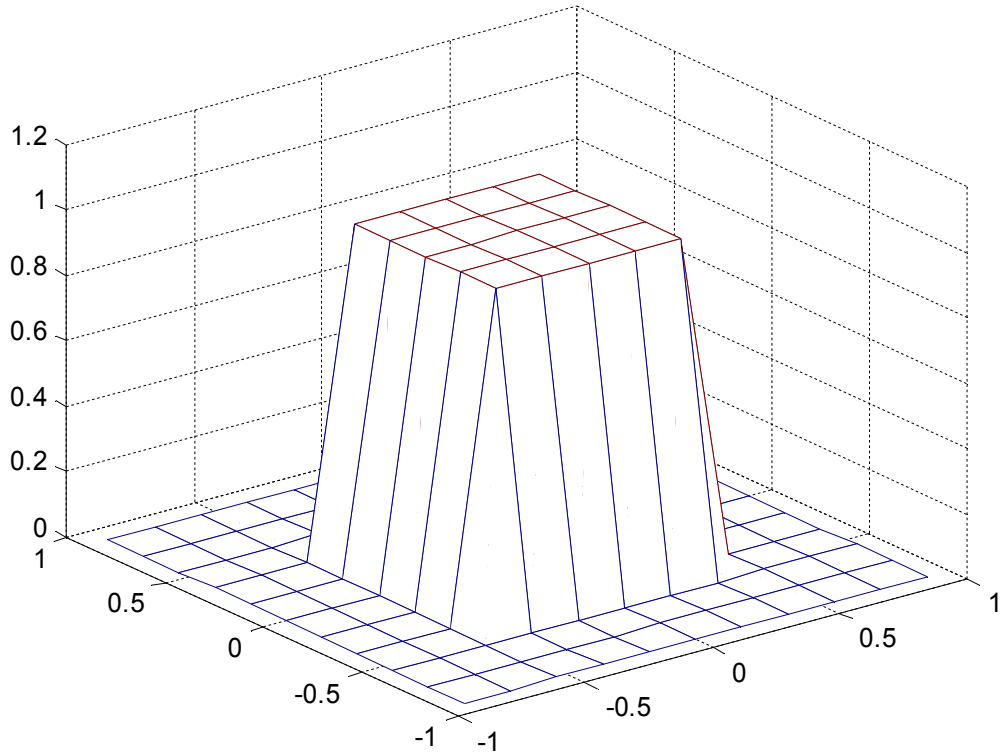
```
[f1,f2] = freqspace(11,'meshgrid');
```

```
mesh(f1,f2,Hd), axis([-1 1 -1 1 0 1.2]),
```

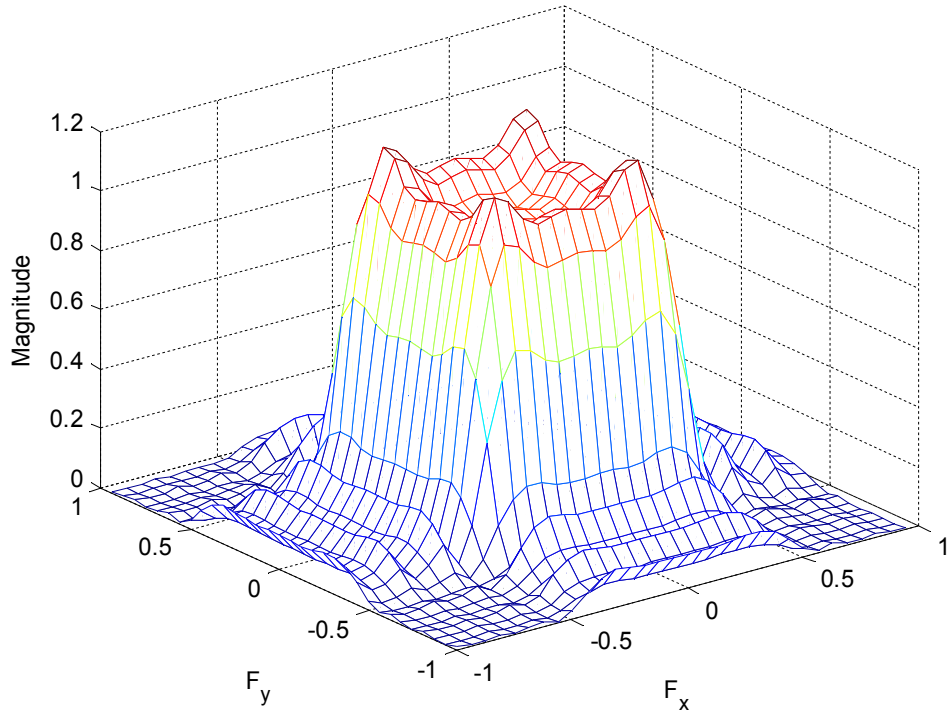
```
colormap(jet(64))
```

```
h = fsamp2(Hd);
```

```
figure, freqz2(h,[32 32]), axis([-1 1 -1 1 0 1.2])
```



**Şekil 6.12.** 2-D AGF'nin frekans yanıtı(ideal)



**Şekil 6.13.** 2-D AGF'nin frekans yanıtı

Daha iyi sonuç için pencereleme veya frekans dönüşüm metodu uygulanır.

✓ Aynı örneğe pencereleme yöntemini uygularsak.

#### **Uygulama 8:**

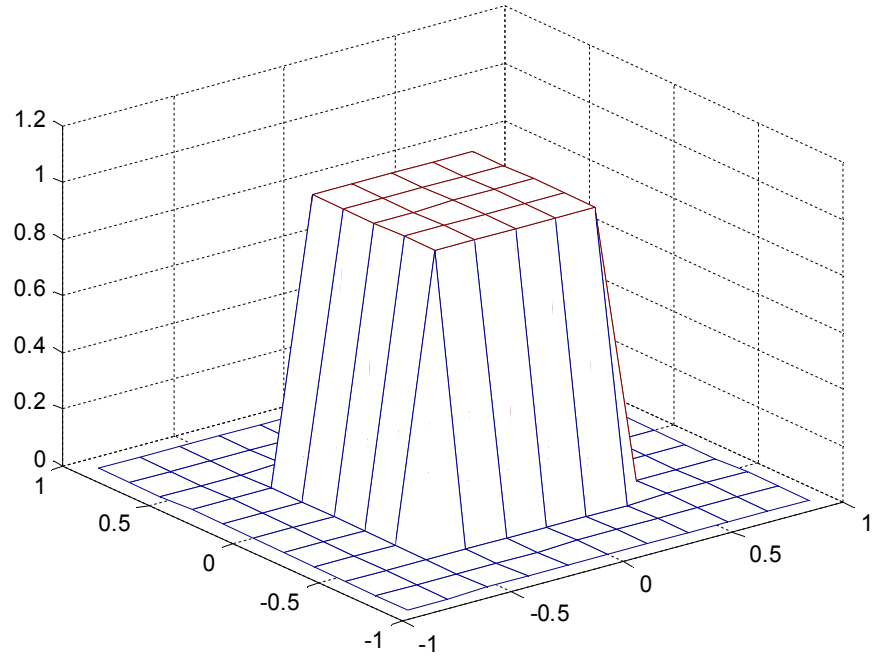
```
Hd = zeros(11,11); Hd(4:8,4:8) = 1;
```

```
[f1,f2] = freqspace(11,'meshgrid');
```

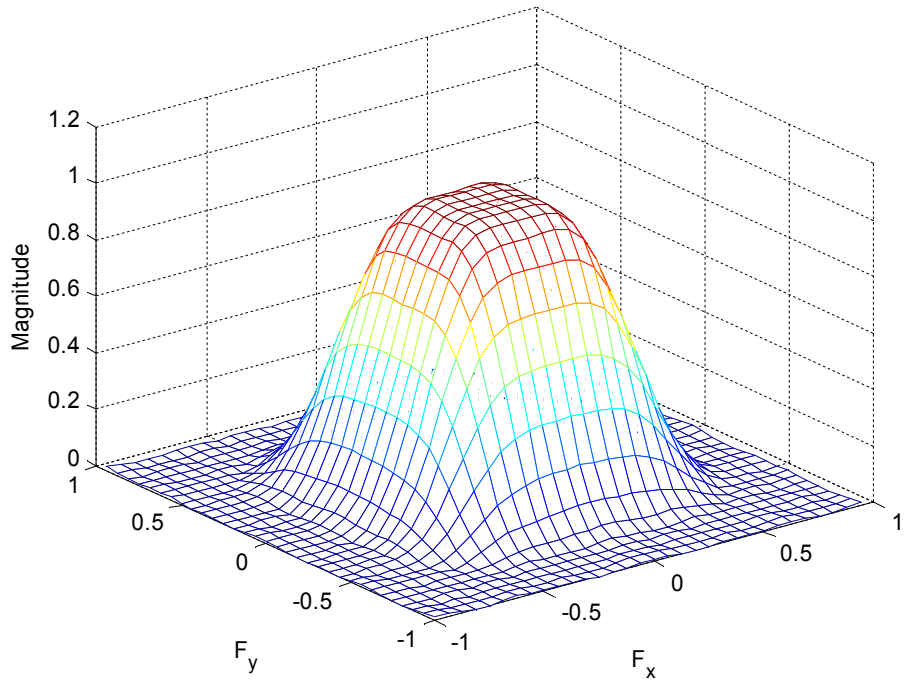
```
mesh(f1,f2,Hd), axis([-1 1 -1 1 0 1.2]), colormap(jet(64))
```

```
h = fwind1(Hd,hamming(11));
```

```
figure, freqz2(h,[32 32]), axis([-1 1 -1 1 0 1.2])
```



**Şekil 6.14.** 2-D AGF'nin frekans yanıtı (ideal)



**Şekil 6.15.** 2-D AGF'nin frekans yanıtı

**Uygulama 9:** fsamp2 komutu ile 0.1 ve 0.5 arasındaki bir bandı geçiren; yaklaşık dairesel simetrik 2-D BGF tasarımı.

```
[f1,f2] = freqspace(21,'meshgrid');
```

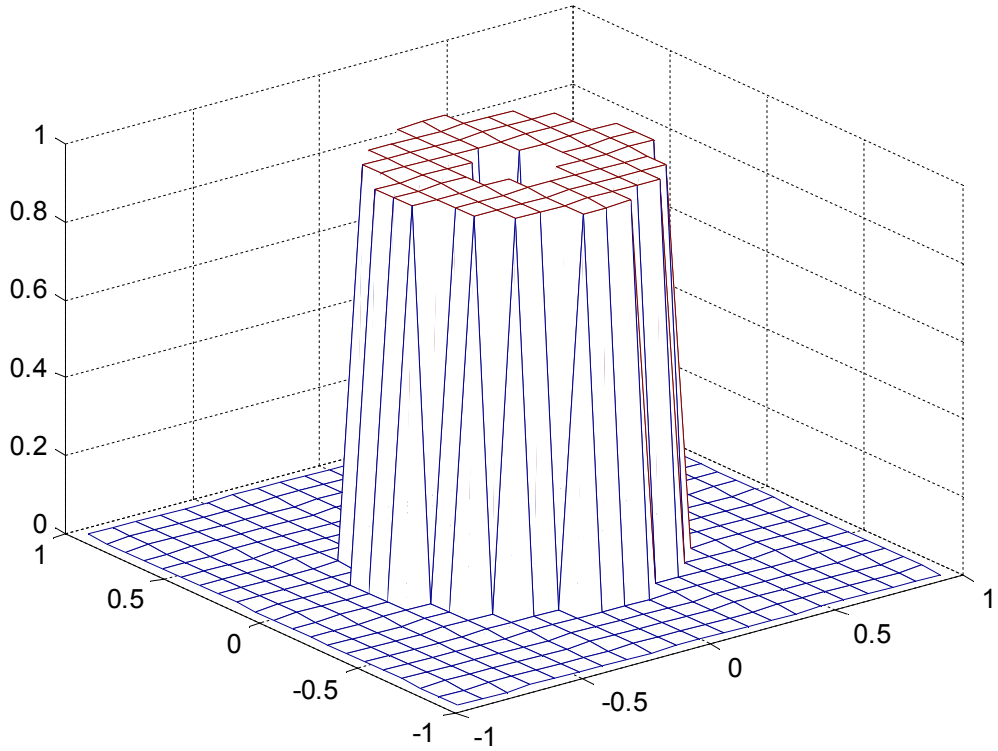
```
Hd = ones(21);
```

```
r = sqrt(f1.^2 + f2.^2);
```

```
Hd((r<0.1)|(r>0.5)) = 0;
```

```
colormap(jet(64))
```

```
mesh(f1,f2,Hd)
```



**Şekil 6.16.** 0.1 ve 0.5 arasındaki bir bandı geçiren yaklaşık dairesel simetrik 2-D BGF'nin frekans yanıtı(ideal)

```
[f1,f2] = freqspace(21,'meshgrid');
```

```
Hd = ones(21);
```

```
r = sqrt(f1.^2 + f2.^2);
```

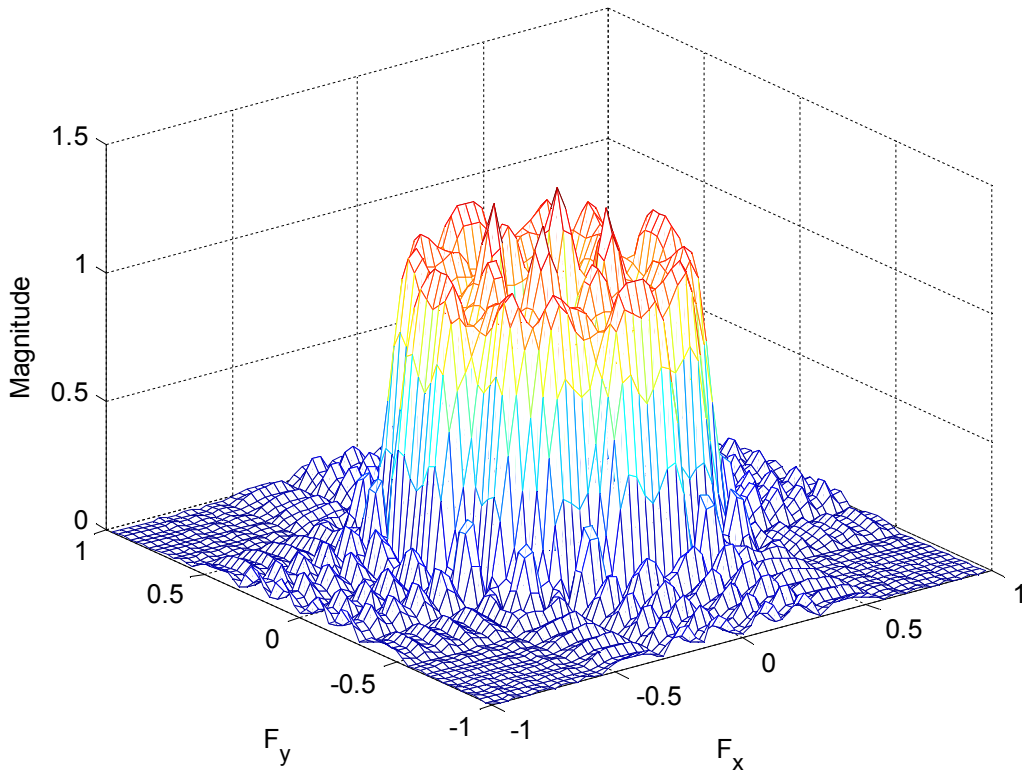
```
Hd((r<0.1)|(r>0.5)) = 0;
```

```
colormap(jet(64))
```

```
mesh(f1,f2,Hd)
```

```
h = fsamp2(Hd);
```

```
freqz2(h)
```

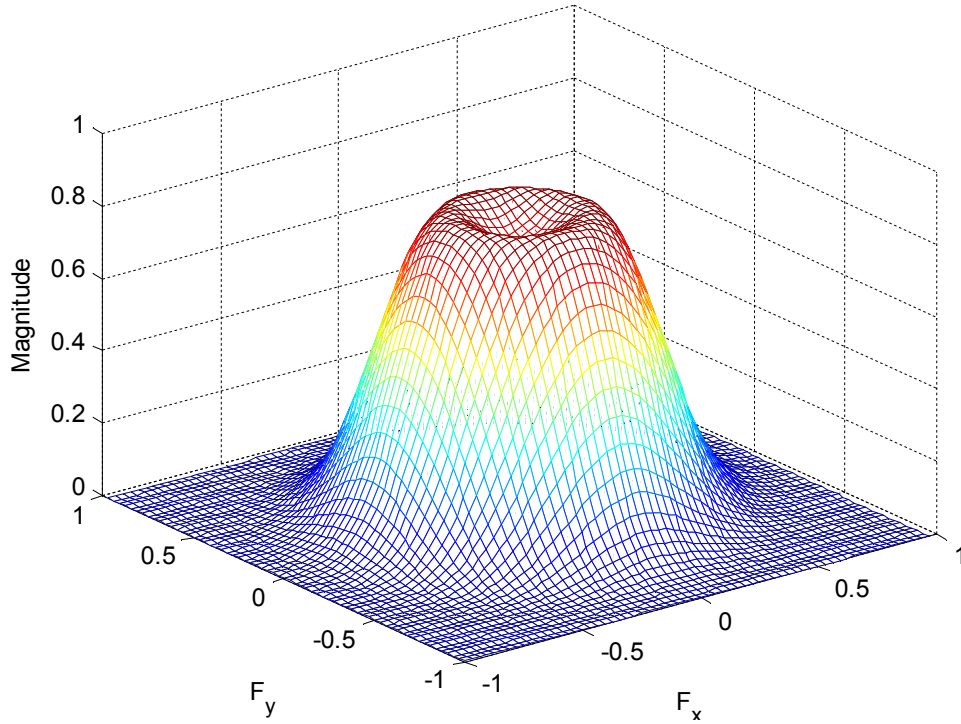


**Şekil 6.17.** 0.1 ve 0.5 arasındaki bir bandı geçiren; yaklaşık dairesel simetrik 2-D BGF'nin frekans yanıtı

**Uygulama 10:** 2-D pencere fonksiyonu (fwind2) kullanarak 0.1 ile 0.5 arasını geçiren 2-D AGF' tasarımı.

**fwind2:** 2-D pencere metodu kullanarak 2-D sayısal filtre üretir.(h = fwind2(Hd, win))

```
[f1,f2] = freqspace(21,'meshgrid');  
Hd = ones(21);  
r = sqrt(f1.^2 + f2.^2);  
Hd((r<0.1)|(r>0.5)) = 0;  
colormap(jet(64)) mesh(f1,f2,Hd)  
win = fspecial('gaussian',21,2); &Gauss pencere oluşturalım.  
win = win ./ max(win(:));  
mesh(win)  
h = fwind2 (Hd,win);  
freqz2(h)
```



**Şekil 6.18.** 0.1 ile 0.5 arasını geçiren 2-D AGF'nin frekans yanıtı

## 6.2. 2-D Filtrelerin Görüntü İyileştirme Uygulamaları

Görüntü iyileştirme; görüntünün işlenmesi ve görüntünün görsel etkisini arttırma sürecidir. Görüntü iyileştirmesine dayanan iki teknikten birincisi; AGF kullanılarak bir görüntüden gürültünün kaldırılma işlemidir. İkincisi ise YGF kullanılarak kenar bulma veya kenar keskinleştirme işlemidir.

Filtreleme resmin üzerinde bir filtre varmış gibi düşünüp her piksel değerinin yeniden hesaplanmasıdır. Filtreleme sayesinde görüntü üzerinde netleştirme, belirli ayrıntıları ortaya çıkarma, görüntüyü yumuşatma, kenar keskinleştirme veya kenar bulma gibi işlemler gerçekleştirilir. Filtreler genelde  $3 \times 3$  lük matrislerdir. Fakat boyutları  $5 \times 5$ ,  $7 \times 7$ ,  $9 \times 9$ ,  $11 \times 11$  şeklinde de olabilmektedir.

### 6.2.1. Gürültü Kaldırma

Bir görüntüde AGF kullanılarak görüntü değiştirilmeden gürültü kaldırılmaya çalışılır. Faz bozulmalarının olmaması için filtrenin lineer faz yanıtına sahip olması istenir. Medyan, Average, Gaussian, Wiener filtreleme yöntemleri ile amacımız gürültüyü azaltmak ve yok etmektir. Özellikle Median filtreleme tuz ve biber dökülmüş resimdeki gürültüleri yok etmede son derece başarılıdır.

### 6.2.1. Ortalama (Average) Filtresi

Resimdeki her piksel yerine komşuları ile beraber ortalaması alınarak yeniden hesaplanır. Resimdeki gri düzeyler arasında keskin geçişler azalır; daha yumuşak geçişler söz konusudur. Resim üzerindeki kenarlarda bulanıklaşmaya (blur) yol açarlar.

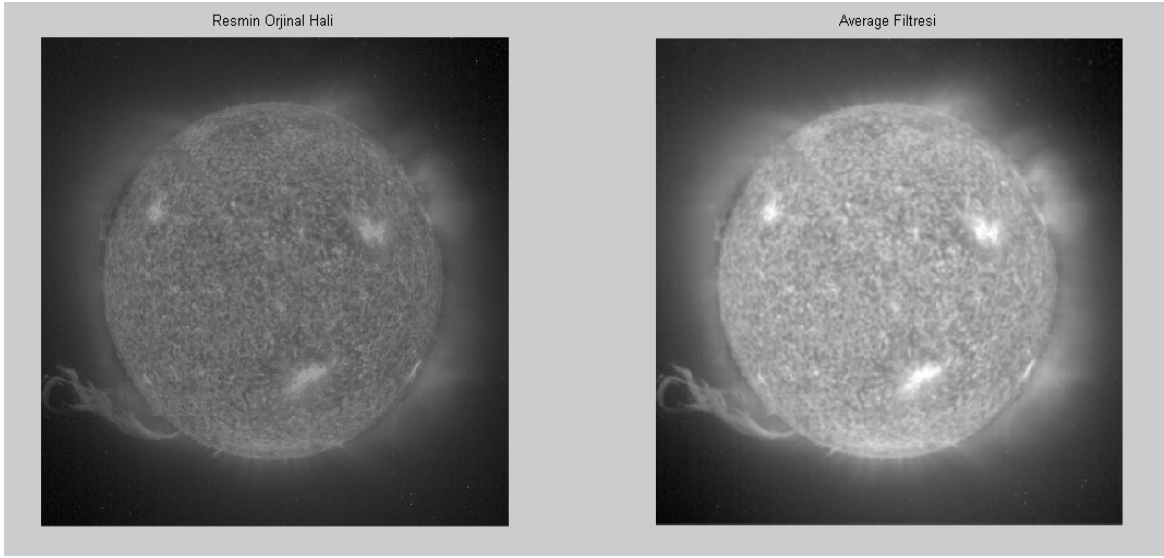
#### Uygulama 11:

```
ResimOrjinal=imread('D:/myimages/solar.gif'); %Resim Yüklendi.  
ResimOrjinal=im2-Double(ResimOrjinal); %Double tipine çevrildi.  
hAverageFiltresi=fspecial('average',3); %maske 3x3lük  
averageFiltresi=imfilter(ResimOrjinal,hAverageFiltresi,'replicate');  
figure;  
subplot(1,2,1);
```

```

imshow(ResimOrjinal);
title('Resmin Orjinal Hali');
subplot(1,2,2);
imshow(averageFiltresi,[]);
title('AverageFiltresi');

```



**Şekil 6.19.** Average filtresi uygulaması

### **Uygulama 12:**

```

ResimOrjinal=imread('D:/myimages/image1.jpg'); %Resim Yüklendi.
ResimOrjinal=im2double(ResimOrjinal); %Double tipine çevrildi.
hAverageFiltresi=fspecial('average',6); %maske 6x6lık
averageFiltresi=imfilter(ResimOrjinal,hAverageFiltresi,'replicate');
figure;
subplot(1,2,1);
imshow(ResimOrjinal);
title('Resmin Orjinal Hali');
subplot(1,2,2);

```

```
imshow(averageFiltresi,[]);  
title('AverageFiltresi');
```



**Şekil 6.20.** Average filtresi uygulaması

### 6.2.2. Gaussian Filtresi

Ortalama filtrenin Gaussian dağılımını kullanarak biraz daha değiştirilmiş hali Gaussian filtresi olarak bilinir. Gaussian filtreleme aynı zamanda bir fourier dönüşümüdür. Gauss filtre ile sonsuz bir transfer fonksiyonuna karşılık mekansal alanda sonlu bir pencerede (tarama penceresi) filtreleme yapılabilmektedir. Bu da filtrelemenin temel problemini daha kolay çözülebilir hale getirir.

Gauss Yumuşatmasının Avantajları: Filtreleme önce yatay ardından çıkan sonuçla düşey ekseninde gerçekleştirilebilir. AGF'dir.

#### Uygulama 13:

% Gaussian Filtresi

```
ResimOrjinal=imread('D:/myimages/lena.jpg'); %Resim Yüklendi.
```

```
ResimOrjinal=im2double(ResimOrjinal); %Double tipine çevrildi.
```

```
hGaussianFiltresi=fspecial('gaussian',3,2); %maske 3x3lük
```

```
gaussianFiltresi=imfilter(ResimOrjinal, hGaussianFiltresi,'replicate');
```

```
figure; subplot(1,2,1); imshow(ResimOrjinal); title('Resmin Orjinal Hali');
subplot(1,2,2); imshow(gaussianFiltresi,[]); title('Gaussian Filtresi Uygulanmış Hali');
```



**Şekil 6.21.** Gaussian filtresi uygulaması

### 6.2.3. Medyan Filtresi

2-D Medyan filtreleme yapar. Medyan filtresi seçimdeki piksellerin parlaklığını karıştırarak katmandaki paraziti azaltır. Filtre benzer parlaklıkta pikseller arar, bitişik piksellerden çok fazla farklılık gösteren pikselleri atar ve merkez pikselin yerine aranan piksellerin ortalama parlaklık değerini koyar. Bu filtre görüntüdeki hareket görünümünü veya taranan görüntüde oluşabilecek istenmeyen desenleri ortadan kaldırmak veya azaltmak için yararlıdır. Özellikle tuz biber gürültüsünü ortadan kaldırmada çok başarılıdır.

Görüntü ve sinyal işleme konularında, gürültü temizlemek için kullanılan yöntemlerden birisidir. Amaç belirli bir pencere aralığındaki sayıların ortancasını (median) alarak aşırı büyük atlamaları kaldırmaktır. Yani filtre uygulandıktan sonra resimde bulunan ve konularından belirgin şekilde ayrılan pikseller tespit edilerek temizlenmesi sağlanır.

Basit bir ortanca filtresinin nasıl çalıştığını incelenir. Örneğin aşağıdaki sayılar için kenar tekrarlı (edgerepeating) ortanca filtresi uygulayalım (pencere genişliği 3 için:

$$g = [ 2 \ 32 \ 2 \ 1 \ 2 \ 8 \ 9 ]$$

$\varphi [0] = [2 \ 2 \ 32] = [ 2 \ 2 \ 32] \Rightarrow 2$  // burada ilk sayıyı tekrar ettik çünkü katar 3 olmalı ve şayet ilk sayıyı 2 kere almazsak ilk sayı için 3 adet sayımız olmayacaktır.

$\checkmark [1] = [2 \ 32 \ 2] = [2 \ 2 \ 32] \Rightarrow 2$  // ilk dizi giriş dizisinin ilk 3 sayısıdır (katar 3 olduğu için) ikinci dizi ise sıralanmış halidir. ve sonuç olarak ortanca değeri 2 bulunur.

$$\checkmark [2] = [32 \ 2 \ 1] = [1 \ 2 \ 32] \Rightarrow 2$$

$$\checkmark [3] = [2 \ 1 \ 2] = [1 \ 2 \ 2] \Rightarrow 2$$

$$\checkmark [4] = [1 \ 2 \ 8] = [1 \ 2 \ 8] \Rightarrow 2$$

$$\checkmark [5] = [2 \ 8 \ 9] = [2 \ 8 \ 9] \Rightarrow 8$$

$$\checkmark [6] = [8 \ 9 \ 9] = [8 \ 8 \ 9] \Rightarrow 9$$

$$\checkmark = [2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 8 \ 9]$$

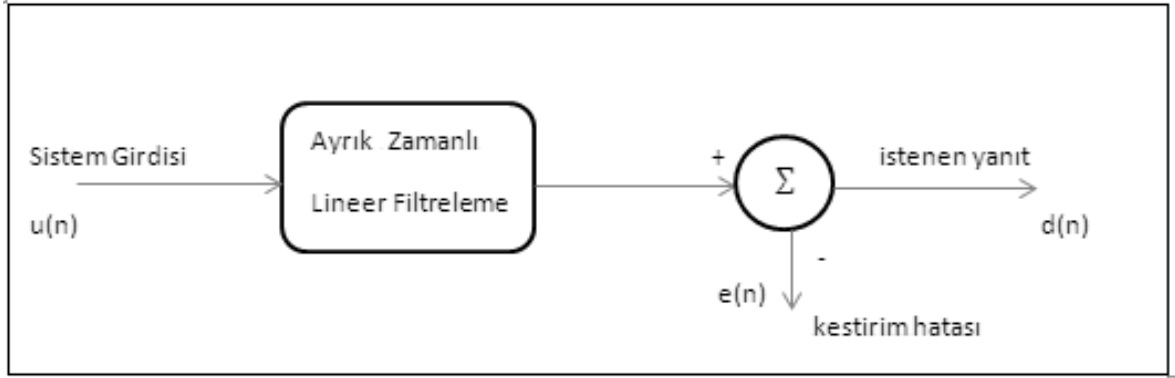
yukarıdaki örnekte g giriş dizisi,  $\checkmark$  ise çıkış dizisi olarak kabul edilmiştir. Görüldüğü üzere yukarıdaki örnekte ortanca filtresi uygulandıktan sonra çok büyük bir sayı olan ve yakınlarında başka benzer sayı bulunmayan 32 sayısı elenmiştir. Benzer şekilde yakınlarında benzeri bulunmayan 1 sayısı da çok fazla 2 sayısı arasında kalıp bu sayılar tarafından boğulmuştur.

2 boyutlu resimlerde bu filtre kullanılırken 2 boyutlu pencere boyutu uygulanır. Örneğin  $3 \times 3$  ( $3 \times 3$ ) gibi. Bu durumda 9 hücreli katar'ın içinde kalan sayılar sıralanarak ortalama değeri yeni değer olarak yazılır.

#### 6.2.4. Wiener filtresi

Genellikle gürültü temizleme ve doğrusal tahmin gibi sayısal sinyal işleme yöntemlerinde kullanılan optimal bir sayısal süzgeçtir. Amaç giriş sinyalinden istenen içeriği yine giriş sinyalinin şimdiki ve geçmiş istatistiksel verilerinden faydalanarak çıkartmaktır .[10]

Durağan olaylarda kullanıma uygun, zamanla değişim göstermeyen bir filtredir. Bu filtre algoritmasıyla, esas işaretle ilgili filtre çıkış işaretinin ortalama karesel hatası en aza indirilmektedir. Gauss gürültüsünü bastırmak için uyarlamalı bir lineer filtre türü olan wiener filtrenin uygulanması tercih edilmektedir. Bu filtre yerel görüntü varyansını uygun hale getirir. Optimizasyona elverişlidir. Kestirim hatası  $e(n)$ 'yi en küçük yapacak şekilde bir tasarım gerçekleştirilmeye çalışılır [20].



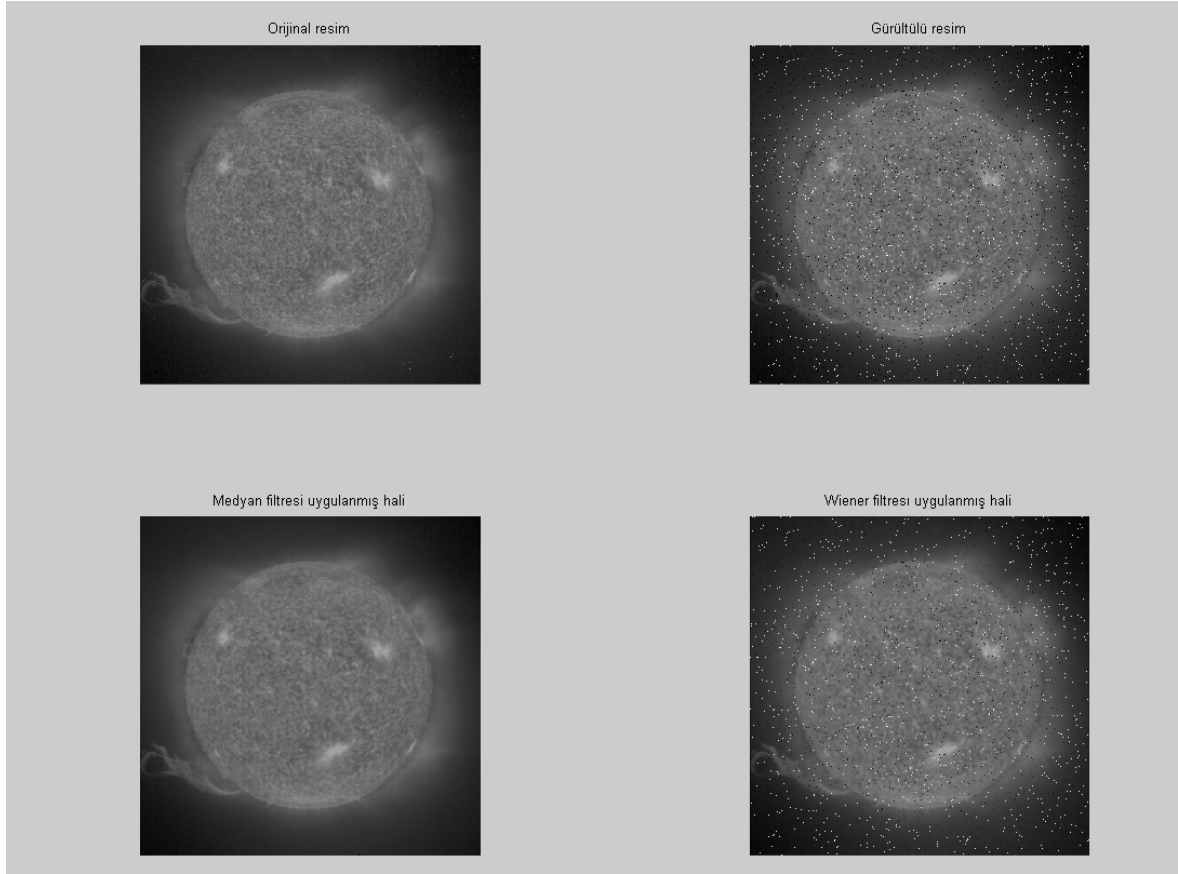
**Şekil 6.22.** Uyarlamalı filtre blok şeması

#### **Uygulama 14:**

```

I=imread('D:/myimages/solar.gif');
no=imnoise(I,'salt& pepper',0.02);
filt1=medfilt2(no); filt2=wiener2(no);
subplot(2,2,1); imshow(I), title('Orijinal resim')
subplot(2,2,2); imshow(no), title('Gürültülü resim')
subplot(2,2,3); imshow(filt1), title('Medyan filtresi uygulanmış hali')
subplot(2,2,4); imshow(filt2), title('Wienerfiltresi uygulanmış hali')

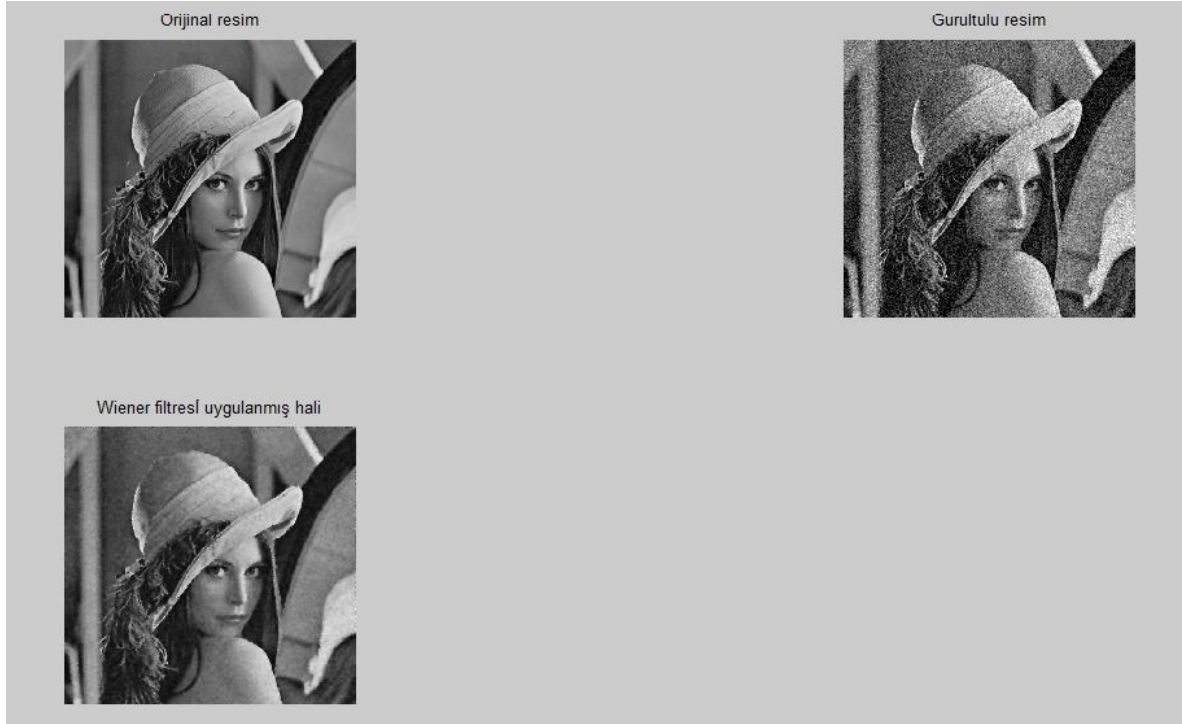
```



**Şekil 6.23.** Medyan ve wiener filtresinin gürültülü bir resme uygulanması

### **Uygulama 15:**

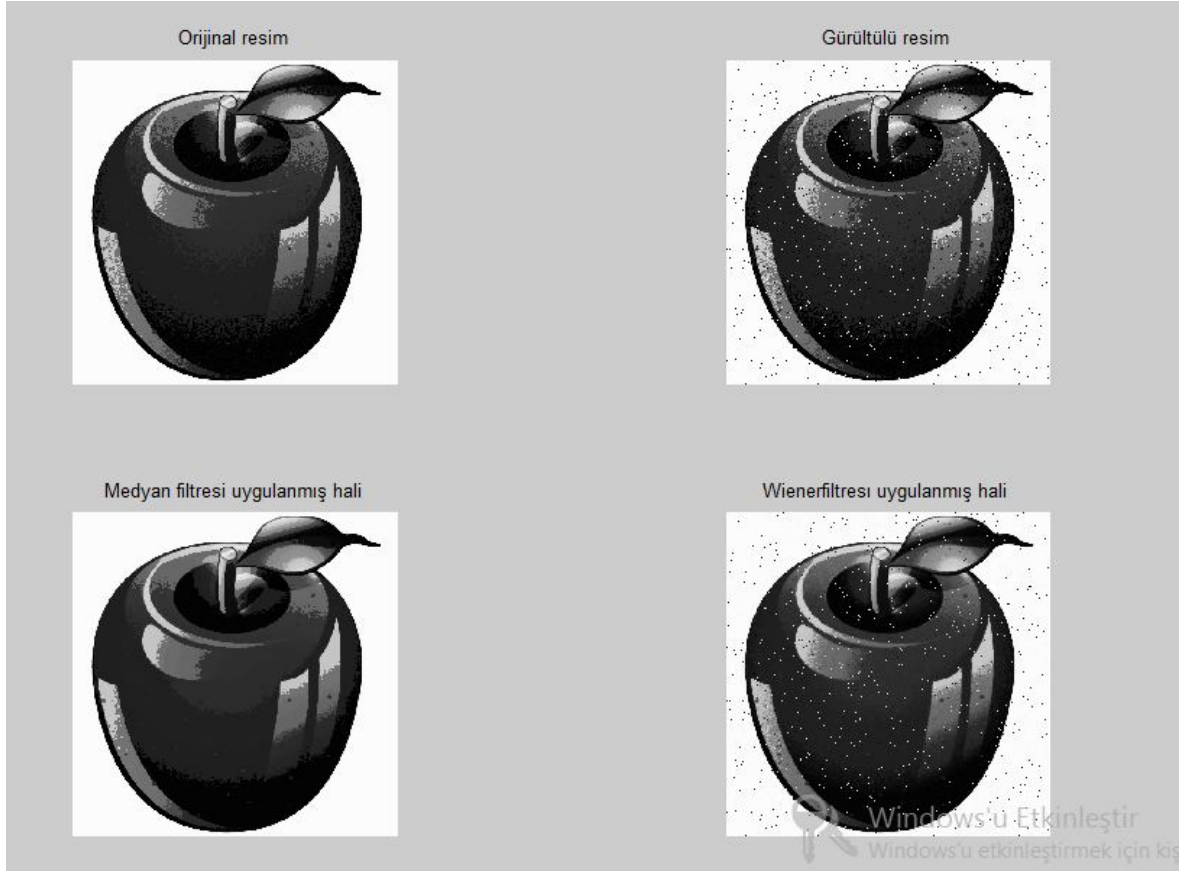
```
J = imread('D:/myimages/lena.jpg');  
d=imnoise(J,'gaussian',0,0.01);  
K = wiener2(d,[5 5]);  
subplot(2,2,1); imshow(J), title('Orijinal resim')  
subplot(2,2,2); imshow(d), title('Gürültülü resim')  
subplot(2,2,3); imshow(K), title('Wiener filtresi uygulanmış hali')
```



**Şekil 6.24:** Wiener filtresinin gaussian gürültülü bir resime uygulanması

#### **Uygulama 16:**

```
I=imread('D:/myimages/elma2.png');  
no=imnoise(I,'salt',0.02);  
filt1=medfilt2(no); filt2=wiener2(no);  
subplot(2,2,1); imshow(I), title('Orijinal resim')  
subplot(2,2,2); imshow(no), title('Gürültülü resim')  
subplot(2,2,3); imshow(filt1), title('Medyan filtresi uygulanmış hali')  
subplot(2,2,4); imshow(filt2), title('Wienerfiltresi uygulanmış hali')
```



Şekil 6.25. Medyan ve wiener filtresi uygulaması

### 6.3. Görüntünün Sınır Eğrisini (Kenar) Çıkarma İşlemi

Sayısal bir görüntü bölgeler ve sınırlandıran kenarlardan oluşur. Görüntüdeki bir bölge genellikle aynı ya da benzer genlikleri paylaşan pikseller yığını olarak tanımlanabilen nesneleri gösterir [18]. Kenar ise bir pikselden diğerine geçişteki piksellerin genliklerinde meydana gelen ani bir sıçrama olarak tanımlanır. Başka bir ifadeyle, gri seviyeleri farklı iki bölge arasındaki geçiş veya sınır bölgesi kenar olarak belirlenir. Bu operatörler işlenecek olan pikselin yoğunluğu ile komşu piksellerin yoğunluklarının karşılaştırılması yöntemiyle çalışmaktadırlar [19].

Görüntüdeki kenarları bulmak için Sobel, Prewitt, Robert vb. filtreler kullanılır. Filtrelerin katsayılarının dizilişi ile kenarları yönlü şekilde tespit edilebilir.

### 6.3.1. Sobel Filtresi

Sobel kenar algılama algoritması verilen herhangi bir resimdeki kenarları elde etmeye yarar. Böylelikle resimler içindeki isteğe yönelik nesneler algılanıp gerekli işlemler yapılabilir. Sobel algoritmasında iki adet konvolüsyon kerneli kullanılır. Bunlardan birisi yatay kenarları bulmaya yararken diğeri dikey kenarları bulmaya yarar. Bu kerneller görüntü içerisinde ışık yoğunluk değişiminin ani olduğu yerleri belirlememize yarar. Doğru bir yaklaşımla, 1-D analiz temeline dayanarak 2-D bir görüntünün türevi hesaplanabilir. Sobel işlemi bir görüntüde 2-boyutlu özel bir eğim (gradyan) ölçümü gerektirir. Bu işlem görüntüde her bir noktada kesin eğim genliğini bulmak için kullanılır. Sobel kenar algılayıcı; biri x-yönündeki eğimi, diğeri y-yönündeki eğimi hesaplamak üzere 3x3'lük bir konvolüsyon maske çifti kullanır. Konvolüsyon maskesi görüntü boyutundan daha küçük olur. Mantık olarak bir kerede bir pikseli işleyerek maske görüntüde hareket eder. x ve y yönünde filtre yapılır.

$$S_X = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad S_Y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Görüntünün üst köşesine yerleştirilen maske, merkezine denk gelen pikselin değerini değiştirerek bir sonraki piksele geçer. Aşağıdaki örnek görüntüde, maskenin merkezi değiştirilecek pikselin etrafına yerleştirilir. Satır, sütun değerlerini ifade eden (i, j) değerlerinin değiştirilmesi ile maske hareket ettirilir. 3x3'lük maske ile ilk ve son satır ve ilk ve son sütundaki piksellerin işlenemeyeceği açıktır. Eğer maske ilk satırdaki piksele yerleştirilseydi, görüntü sınırlarının dışına taşardı. Bu durumda görüntüye birer satır ve sütun eklenerek bu problem ortadan kaldırılabilir.

$$b_{22} = (a_{11} * m_{11}) + (a_{12} * m_{12}) + (a_{13} * m_{13}) + (a_{21} * m_{21}) + (a_{22} * m_{22}) \\ + (a_{23} * m_{23}) + (a_{31} * m_{31}) + (a_{32} * m_{32}) + (a_{33} * m_{33})$$

G<sub>x</sub> maskesi yatay yöndeki kenarları, G<sub>y</sub> maskesi dikey yöndeki kenarları vurgular. Bunların toplanması ile her iki yöndeki kenarlar tespit edilir.

|          |          |          |     |          |
|----------|----------|----------|-----|----------|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | ... | $a_{1n}$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | ... | $a_{2n}$ |
| $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | ... | $a_{3n}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |     | $\vdots$ |
|          |          |          |     |          |

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| $m_{11}$ | $m_{12}$ | $m_{13}$ |
| $m_{21}$ | $m_{22}$ | $m_{23}$ |
| $m_{31}$ | $m_{32}$ | $m_{33}$ |

|          |          |          |     |          |
|----------|----------|----------|-----|----------|
| $b_{11}$ | $b_{12}$ | $b_{13}$ | ... | $b_{1n}$ |
| $b_{21}$ | $b_{22}$ | $b_{23}$ | ... | $b_{2n}$ |
| $b_{31}$ | $b_{32}$ | $b_{33}$ | ... | $b_{3n}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |     | $\vdots$ |
|          |          |          |     |          |

### Uygulama 17:

```
I=imread('D:/myimages/lena.jpg');
```

```
h = fspecial('sobel');
```

```
I2 = filter2(h,I);
```

```
imshow(mat2gray(I2));
```



Şekil 6.26. Sobel filtresi uygulaması

### 6.3.2. Roberts Filtresi

Bu filtre diagonal olarak kenar tarar. Kernel matrisi şöyledir:  $[1,1,0;1,0,-1;0,-1,-1]$  veya  $[2,1,0;1,0,-1;0,-1,-2]$ .

### 6.3.3. Prewitt Filtresi

Bu filtrede sobel filtresi gibi düşey ve yatay keskinlik yakalar. Kernel matrisi sobelden farklıdır. Matrsin dizimi şöyledir: [1,1,1;0,0,0;-1,-1,-1] veya [1,0,-1;1,0,-1;1,0,-1].

### 6.3.4. Laplace Filtresi

Laplace operatörü her iki yönde keskinleştirme yapmaya yarar.[21]

### 6.3.5 Log Filtresi

Bu filtreye Marr-Hildreth (Laplacian of Gaussian – LoG) algoritması denir. Gaussion filtresinin laplasını alarak işlem yapar.[21]

### 6.3.6. Canny Filtresi

Kenar bulmada son derece etkin bir algoritmadır. Önce görüntüdeki gürültü bir sigma değerine göre üretilen Gaussian çekirdekle konvolusyonu alınarak azaltılır. Daha sonra, gradyent operatörü uygulanarak, kenar gradyent büyüklüğü ve yönü hesaplanır. [21]

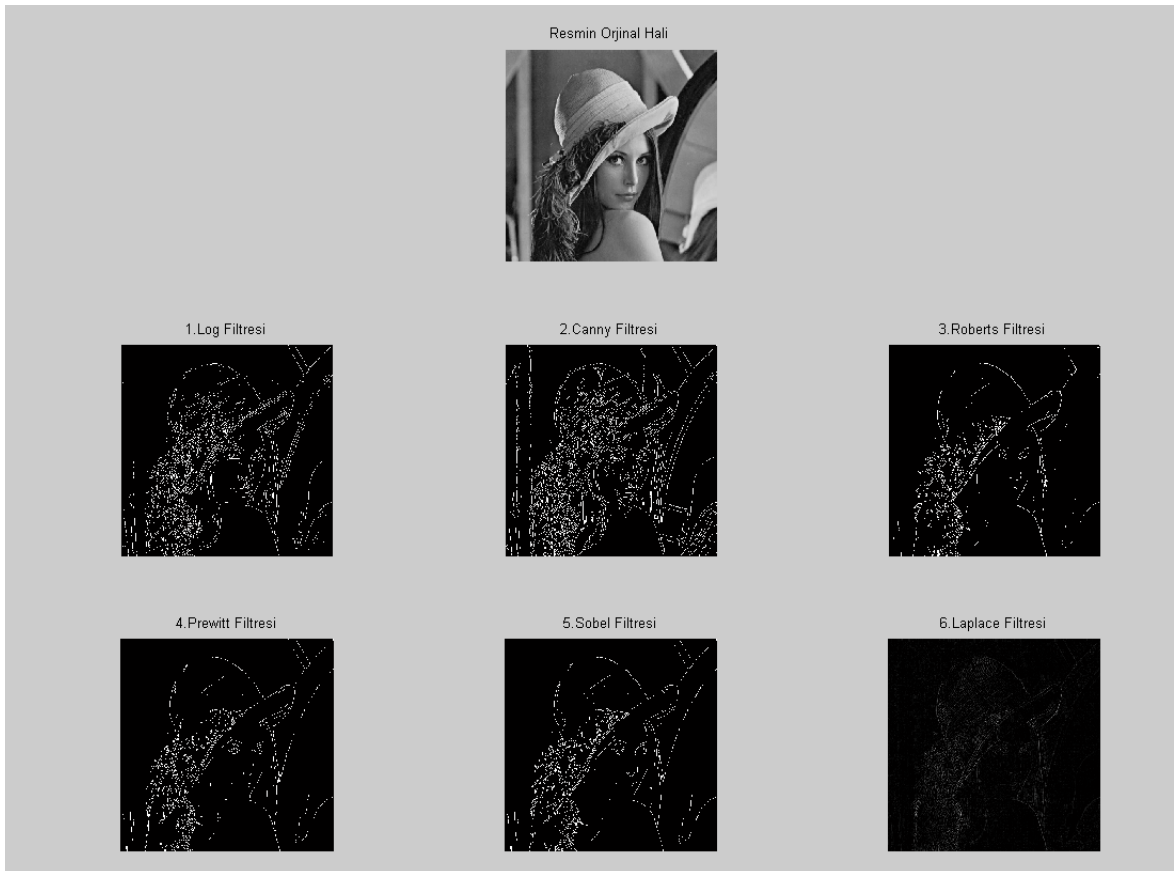
### Uygulama 18:

```
I=imread('D:/myimages/lena.jpg')
logFiltresi=edge(I,'log');
cannyFiltresi=edge(I,'canny');
robertsFiltresi=edge(I,'roberts');
prewittFiltresi=edge(I,'prewitt');
sobelFiltresi=edge(I,'sobel');
hLaplaceFiltresi=fspecial('laplacian');
laplaceFiltresi=imfilter(I,hLaplaceFiltresi,'replicate');
figure; subplot(3,3,2); imshow(ResimOrjinal); title('Resmin Orjinal Hali');
subplot(3,3,4); imshow(logFiltresi); title('1.Log Filtresi');
subplot(3,3,5);
imshow(cannyFiltresi);
title('2.Canny Filtresi');
```

```

subplot(3,3,6);
imshow(robertsFiltresi);
title('3.Roberts Filtresi');
subplot(3,3,7);
imshow(rewittFiltresi);
title('4.Prewitt Filtresi');
subplot(3,3,8);
imshow(sobelFiltresi);
title('5.Sobel Filtresi');
subplot(3,3,9);
imshow(laplaceFiltresi);
title('6.Laplace Filtresi');

```



**Şekil 6.27.** log, Canny, Roberts, Prewitt, Sobel, Laplace filtrelerinin kenar çıkarma uygulaması

## 7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; 1-D sayısal filtre üzerinden bazı kavramlar kısaca açıklandıktan sonra 2-D sayısal filtre tanıtılmıştır. Önce 2-D ayrık zamanlı sinyallerin özellikleri açıklanmıştır. Daha sonra, bir sistem olarak ele alınan 2-D sayısal filtrelerin özellikleri açıklanarak çeşitli tasarım yöntemleri verilmiştir. Özellikle tekrarsız ve tekrarlı filtre yapıları ve aralarındaki farklar vurgulanarak her bir filtre türünün tasarım yöntemleri açıklanmıştır.

1-D analog filtrelerden 2-D sayısal filtreler tasarlanmış ve MATLAB ortamında genlik ve eş yükselti eğrileri çizdirilmiştir. Ayrıca hazır MATLAB komutlarıyla 2-D sayısal filtre tasarlama örnekleri verilmiş ve görüntü üzerine filtreleme uygulamaları yapılmıştır. Bu uygulamalarda medyan filtresinin tuz-biber gürültüsünü temizlemede, wiener filtresinin de gauss gürültüsünü temizlemede başarılı olduğu görülmüştür. Ayrıca, 2-D sayısal filtrelerin kenar belirleme işleminde başarılı olduğu görülmüştür.

İki tane 1-D analog filtre birleştirilerek yapılan 2-D sayısal filtre tasarımı, akıllı hesaplama yöntemleri (yapay sinir ağları, genetik algoritma vb.) kullanılarak yapılabilir. Akıllı hesaplama yöntemleri kullanılarak pencere fonksiyonları geliştirilebilir.

## KAYNAKLAR

1. **Kayran A. H., Ekşioğlu E.M.** 2004, *Bilgisayar Uygulamalarıyla Sayısal İşaret İşleme*, Birsen Yayınevi No: 975-511-362-2, İstanbul, 347.
2. **Ertürk S., 2009**, *Sayısal İşaret İşleme*, Birsen Yayınevi No: 975-511-309-6, İstanbul, 293s
3. **Schlichtharle D., 2000**, *Digital Filters Basics and Design*, Springer, No: 3-540-66841-1, Germany, 361p
4. **Kayran A. H., 1990**, *Sayısal İşaret İşleme*, İstanbul Teknik Üniversitesi Yayınları, No: 1409, İstanbul, 356s
5. **Antoniu A., Lu W., 1992** *Two dimensional digital filters*, University of Victoria Victoria, British Columbia, Canada,
6. **Kaya T., 2006**, *Genetik Algoritma ile Sayısal Filtre Tasarımı*, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik Elektronik Anabilim Dalı.
7. **Swarnamani S., 2000**, *Study of circularly symmetrical two dimensional digital filters possessing separable denominator transfer functions*, A Thesis in the Department of Electrical and Computer Engineering, Concordia University
8. **Gibbs J.W., 1899** “Fourier series”, p. 200-606,
9. **Shanks J.L., Treitel, S. and Justice, J.H.** 1972, *Stability and synthesis of two dimensional recursive filters*, *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. AU- 20, pp. 115-128,.
10. **Ağoğlu E.A., 2008**, *Sayısal Süzgeç Tasarımı ve Uygulamaları*, Başkent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
11. **Antoniu, A.** 1979, *Digital Filters: Analysis and Design*, New York: McGraw-Hill, (2nd ed. in press).
12. **Huang, T.S.** 1972, *Two-dimensional windows*, *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. AU-20, pp.88-89,
13. **Stewart, G.W.** 1973, *Introduction to Matrix Computations*, New York: Academic Press, 1973.

14. **Karivaratharajan, P., Swamy, M.N.S.,** 1979, *Symmetry Constraints on two dimensional Half-Plane Digital Transfer Functions*, IEEE Trans. on Acoustics, speech and signal processing, 27(5):506-511,
15. **Karivaratharajan, P., Swamy, MNS.,** 1978, *Some results on the nature of a two-dimensional filter function possessing certain symmetry in its magnitude response*, IEE J. Elektronik Circuits&Systems, 2,(5), pp.147-153,
16. **Tzafestas, SG.,** 1986, *Multidimensional Systems:Techniques and Applications*,.
17. **Sandhu, A.J.,** 2005, *Generation of 2-D Analog and Digital Lowpass, Highpass and Bandpass Filters with Monotonic Amplitude-Frequency Response*, A Thesis in The department of Elektrical and Computer Engineering, Concordia University Montreal, Quebec, Canada
18. **Gonzalez, R.C. Woods, R.E.** 1993, *Digital İmage Processing*, Addison-Wesley, Reading,
19. **Güvenç U., KARAGÜL T.,** 2009, *Görüntülerin Kenar Haritalarının Çıkarımına Yeni Bir Yaklaşım*, Bilişim Teknolojileri Dergisi, Cilt: 2, Sayı: 1,
20. **Kızrak M.A., Özen F.,** 2009, *Parmak izi iyileştirme yöntemlerine yeni bir bakış: histogram Bölütlemeli, medyan filtrelenmiş parmak izi iyileştirme Algoritması (HMPA)*, Haberleşme Teknolojileri ve Uygulamaları Sempozyumu(Habtekus'09),Yıldız Teknik Üniversitesi, Beşiktaş-İstanbul, 9-11 Aralık, s.147-152.
21. [www.bulentsiyah.com/bolum/programlama/matlab-goruntu\\_isleme](http://www.bulentsiyah.com/bolum/programlama/matlab-goruntu_isleme). 21.03.2014

## **ÖZGEÇMİŞ**

1984 yılında Elazığ'da doğdum. İlk ve Orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2002 yılında F.Ü. Mühendislik Fak. Elektrik-Elektronik Mühendisliği bölümüne kayıt yaptırdım. 2006 yılında aynı bölümden mezun oldum. 2008 yılında F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği, Devreler ve Sistemler ABD'de yüksek lisansa başladım. 2009 Yılında Bingöl Üniversitesi Bilgi İşlem Biriminde Uzman olarak görev yaptım. 2010 yılında Elazığ TEİAŞ 13. İletim Tesis ve İşletme Grup Müdürlüğü'nde Elektrik Mühendisi olarak göreve başladım ve halen bu görevime devam etmekteyim. Evliyim. İngilizce bilmekteyim.