

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

İKİ BOYUTLU VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİN RASTGELE
ÇÖZÜM DAVRANIŞLARI

YÜKSEK LİSANS

Olca YILDIZ

HAZİRAN - 2023
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**İKİ BOYUTLU VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİN RASTGELE
ÇÖZÜM DAVRANIŞLARI**

**RANDOM SOLUTION BEHAVIOR OF TWO-DIMENSIONAL VOLTERRA
INTEGRAL EQUATIONS**

YÜKSEK LİSANS

Olcay YILDIZ

**HAZİRAN - 2023
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**İKİ BOYUTLU VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİN RASTGELE
ÇÖZÜM DAVRANIŞLARI**

**RANDOM SOLUTION BEHAVIOR OF TWO-DIMENSIONAL VOLTERRA
INTEGRAL EQUATIONS**

YÜKSEK LİSANS

Olca YILDIZ

Danışman: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

**HARİZAN - 2023
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**İki Boyutlu Volterra İntegral Denklemlerin Rastgele Çözüm Davranışları**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kısıtlara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

22/06/2023

.....
Olcay YILDIZ

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans tez çalışmamda konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanıp bu hale kadar getirilmesinde beden desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Mehmet MERDAN’a saygılarımı sunar emeğı için teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmamım her aşamasında manevi desteğı ile hep yanımda olan anneme ve babama sonsuz teşekkür ederim.

Olçay YILDIZ
GÖMÖŐHANE – 2023



ÖZET

Bu tez, yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin konusu ile ilgili temel bilgiler ve literatür verilmiştir. İkinci bölümde, olasılık teorisi ve olasılık dağılımları ile ilgili temel kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, integral denklemlerin özellikleri ve sınıflandırılması ile ilgili temel tanımlamaları verilmiştir. Dördüncü bölümde, Diferansiyel Dönüşüm Metodunun (DDM) temel tanımları, özellikleri, Volterra integral denklemlerin çözüm yöntemleri ve ilgili örnekler verilmiştir. Beşinci bölümde, başlangıç koşulları veya katsayıları sürekli olasılık dağılımlarından seçilerek elde edilen rastgele iki boyutlu Volterra integral denklemlerin, karışık Volterra – Fredholm integral denklemlerin ve iki boyutlu rastgele lineer olmayan Volterra integral denklem sistemlerin Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM) kullanılarak çözüm davranışlarının olasılık karakterleri incelenmiştir. Elde edilen çözümlerin olasılık karakteristiklerinden en kullanışlı olan beklenen değer, varyans ve güven aralıkları hesaplanarak elde edilen çözümlerin grafikleri Maple veya Matlab programı yardımıyla çizdirilmiştir. Altıncı bölümde, ilgili bulgular ve tartışmalar incelenmiştir. Yedinci bölümde, tezde ele alınan sonuçlar özetlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel dönüşüm metodu, Volterra integral denklem, Rastgele iki boyutlu volterra integral denklem, Beklenen değer, Varyans, Güven aralıkları

SUMMARY

This thesis consists of seven chapters. In the first chapter, basic information and literature related to the subject of the thesis are given. In the second chapter, basic concepts and definitions for probability theory and probability distributions are given. In the third chapter, the properties and classification of integral equations and their basic definitions are given. In the fourth chapter, basic definitions and properties of Differential Transformation Method (DTM), solution methods of Volterra integral equations and related examples are given. In the fifth chapter, the probability characters of the solution behaviors of random two-dimensional Volterra integral equations, mixed Volterra - Fredholm integral equations and two-dimensional random nonlinear Volterra integral equation systems obtained by selecting initial conditions or coefficients from continuous probability distributions were studied using the Differential Transformation Method (DTM). The graphs of the solutions obtained by calculating the expected value, variance and confidence intervals, which are the most useful of the probability characteristics of the obtained solutions, were plotted with the help of the Maple or Matlab program. In the sixth chapter, the relevant findings and discussions are examined. In the seventh chapter, the results discussed in the thesis are summarized.

Keywords: Differential transformation method, Volterra integral equation, Random two-dimensional volterra integral equation, Expected value, Variance, Confidence intervals

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLolar DİZİNİ	X
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XII
1. GİRİŞ	1
2. OLASILIK TEORİSİ VE OLASILIK DAĞILIMLARI.....	4
2.1. Olasılık Teorisi İle İlgili Temel Kavramlar	4
2.1.1. Olasılığın Klasik Tanımı	4
2.1.2. Beklenen Değerin Tanımı	5
2.1.3. Moment Çıkaran Fonksiyonlar	5
2.1.4. Dağılım Fonksiyonu.....	5
2.1.5. Varyans	6
2.2. Bazı Olasılık Dağılımları	6
2.2.1. Normal Dağılımın Özellikleri	6
2.2.2. Düzgün Dağılımın Özellikleri.....	7
2.2.3. Gamma Dağılımın Özellikleri.....	7
2.2.4. Geometrik Dağılımın Özellikleri	7
2.2.5. Standart Beta Dağılımın Özellikleri.....	8
2.2.6. Üçgensel Dağılımın Özellikleri	9
2.2.7. Üstel Dağılımın Özellikleri	9
3. İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÖZELLİKLERİ VE SINIFLANDIRMASI	11
3.1. İntegral Denklemlerin Genel Özellikleri.....	11
3.2. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması	11
3.2.1. İntegral Sınırlarına Göre Sınıflandırma	11
3.3. İntegro - Diferansiyel Denklemler	12
3.4. İki Boyutlu İntegral Denklemler	13
3.5. İntegral Denklem Sistemleri	13

4. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODUNUN İNTEGRAL DENKLEMLERDE KULLANIMI	15
4.1. Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM)	15
4.1.1. Bir Boyutlu İntegral Denklemlerde Diferansiyel Dönüşüm Metodunun (DDM) Kullanımı	15
4.1.2. İki Boyutlu İntegral Denklemlerde Diferansiyel Dönüşüm Metodunun (DDM) Kullanımı	18
4.1.3. Üç Boyutlu İntegral Denklemlerde Diferansiyel Dönüşüm Metodunun (DDM) Kullanımı	22
4.1.4. N - Boyutlu İntegral Denklemlerde Diferansiyel Dönüşüm Metodunun (DDM) Kullanımı	22
4.1.5. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi	23
4.2. İntegral Denklemleri Çözümünde Kullanılan Diğer Metotlar	26
4.2.1. Seri Çözüm Metodu (SÇM)	26
4.3. İki Boyutlu Volterra İntegral Denkleminin DDM Çözümü için Örnekler.....	32
4.3.1. Örnek-1	32
4.3.2. Örnek-2	34
4.3.3. Örnek-3	35
4.3.4. Örnek-4	36
5. RASTGELE İKİ BOYUTLU VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM DAVRANIŞLARI	38
5.1. Rastgele İki Boyutlu Volterra İntegral Denklemlerin Çözüm Davranışları için Örnekler.....	38
5.1.1. Örnek-1	38
5.1.2. Örnek-2	42
5.2 Karışık Volterra-Fredholm İntegral Denklemler	47
5.2.1. Örnek-1	48
5.3. İki Boyutlu Rastgele Lineer Volterra İntegral Denklem Sistemi.....	52
5.3.1. Örnek-1	52
5.4. İki Boyutlu Rastgele Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklem Sistemi	61
5.4.1. Örnek-1	62
6. BULGULAR VE TARTIŞMA	71
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	72
KAYNAKÇA	73
ÖZGEÇMİŞ	76

TABLolar DİZİNİ

Tablo 2.1. Bir boyutlu bazı fonksiyonların dönüşümü	16
Tablo 2.2. İki boyutlu bazı fonksiyonların dönüşümü	19



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $\alpha = 2, \beta = 1$ değerleri için (5.1) denkleminin beklenen değeri	40
Şekil 2. $\alpha = 2, \beta = 1$ değerleri için (5.1) denkleminin varyansı	41
Şekil 3. $\alpha = 2, \beta = 1$ değerleri için (5.1) denkleminin $K=3$ için güven aralıkları	42
Şekil 4. $\alpha = 4, \beta = 3, a = 1$ ve $b = 2$ değerleri için (5.2) denkleminin beklenen değeri	45
Şekil 5. $\alpha = 4, \beta = 3, a = 1$ ve $b = 2$ değerleri için (5.2) denkleminin varyansı	46
Şekil 6. $\alpha = 4, \beta = 3, a = 1$ ve $b = 2$ değerleri için (5.2) denkleminin $K=3$ için güven aralıkları	47
Şekil 7. $\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (5.5) denkleminin beklenen değeri	50
Şekil 8. $\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (5.5) denkleminin varyansı	51
Şekil 9. $\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (5.5) denkleminin $K=3$ için güven aralıkları	52
Şekil 10. $\alpha = 4, \beta = 3, \mu = 5$ ve $\sigma^2 = 4$ değerleri için (5.6) denkleminin beklenen değeri.....	56
Şekil 11. $\alpha = 4, \beta = 3, \mu = 5$ ve $\sigma^2 = 4$ değerleri için (5.7) denkleminin beklenen değeri.....	57
Şekil 12. $\alpha = 4, \beta = 3, \mu = 5$ ve $\sigma^2 = 4$ değerleri için (5.6) denkleminin varyansı.....	58
Şekil 13. $\alpha = 4, \beta = 3, \mu = 5$ ve $\sigma^2 = 4$ değerleri için (5.7) denkleminin varyansı.....	59
Şekil 14. $\alpha = 4, \beta = 3, \mu = 5$ ve $\sigma^2 = 4$ değerleri için (5.6) denkleminin güven aralıkları	60
Şekil 15. $\alpha = 4, \beta = 3, \mu = 5$ ve $\sigma^2 = 4$ değerleri için (5.7) denkleminin güven aralıkları	61
Şekil 16. $\alpha = 2, \beta = 4, a = 2$ ve $b = 3$ değerleri için (5.10) denkleminin beklenen değeri.....	65
Şekil 17. $\alpha = 2, \beta = 4, a = 2$ ve $b = 3$ değerleri için (5.11) denkleminin beklenen değeri.....	66
Şekil 18. $\alpha = 2, \beta = 4, a = 2$ ve $b = 3$ değerleri için (5.10) denkleminin varyansı	67
Şekil 19. $\alpha = 2, \beta = 4, a = 2$ ve $b = 3$ değerleri için (5.11) denkleminin varyansı	68
Şekil 20. $\alpha = 2, \beta = 4, a = 2$ ve $b = 3$ değerleri için (5.10) denkleminin güven aralıkları	69
Şekil 21. $\alpha = 2, \beta = 4, a = 2$ ve $b = 3$ değerleri için (5.11) denkleminin güven aralıkları	70

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

DDM	: Diferansiyel Dönüşüm Metodu
DTM	: Differential Transformation Method
SÇM	: Seri Çözüm Metodu
AAM	: Adomain Ayırıştırma Metodu
VİM	: Varyasyonel İterasyon Metodu
HAM	: Homotopi Analiz Metodu
HPM	: Homotopi Pertürbasyon Metodu
DHM	: Direkt Hesaplama Metodu



1. GİRİŞ

Bu çalışmada, iki boyutlu Volterra integral denklemleri katsayıları veya başlangıç koşulları sürekli olasılık dağılımlarından düzgün, normal, gamma ve beta seçilerek oluşturulan iki boyutlu rastgele Volterra integral denklemlerinin yaklaşık analitik çözümleri Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM) kullanılarak elde edildi. Elde edilen çözümlerin olasılık karakteristikleri hesaplandı.

Bilindiği üzere adi diferansiyel denklemler integral denklemlerine dönüştürülebilirler. İntegrasyon sınırlarına göre de sınıflandırılabilirler. En çok bilinen türleri Volterra ve Fredholm integral denklemleridir. Ayrıca türev içeren integral denklemleri de integro Volterra veya integro Fredholm şeklinde ifade edilir.

Son yıllarda, lineer olmayan integral denklemlerin yaklaşık analitik çözümleri için çok sayıda yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan, literatürde yaygın olarak kullanılan yöntemlerden Diferansiyel Dönüşüm Metodunu (DDM) inceleyelim.

Zhou (Zhou, 1986) tarafından makalesinde ortaya çıkan diferansiyel dönüşüm metodu Genelleştirilmiş Taylor serisi metodu baz alınarak, Taylor serisi çözümündeki türev katsayılarını (algoritma) iteratif yolla hesaplayan bir metod olmasının yanısıra diferansiyel denklemleri (Laplace ve Fourier dönüşümü gibi) cebirsel denklemlere dönüştürmektedir. Zhou makalesinde elektrik devreleri üzerindeki lineer ve lineer olmayan başlangıç yada sınır değer problemlerinin çözümlerini DDM yöntemi ile elde etmiştir.

Chen ve Ho (Chen, Ho, 1996) makalesinde, diferansiyel dönüşüm metodunu öz değer problemlerinde uygulamıştır.

Chen ve Ho (Chen, Ho, 1999) makalesinde, lineer olmayan bir diferansiyel denklem çözümü için bu yöntemi kullanmıştır ve DDM, diferansiyel denklem çözümü için kullanmaya başlanmıştır.

Chen ve Ho (Chen, Ho, 1999) makalesinde, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu geliştirmiştir ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü içinde DDM kullanmaya başlamışlardır.

Jang ve diğerleri (Jang, 2000) makalelerinde, başlangıç sınır değer problemleri çözümünde Diferansiyel Dönüşüm Metodunu (DDM) kullanarak yaklaşık analitik çözümler elde etmişlerdir.

Hassan (Hassan, 2002) makalesinde, diferansiyel dönüşüm metodu yardımıyla, Strum-Liouville özdeğer problemi için özdeğer ve normalleştirilmiş özdeğer fonksiyonu elde etmiştir.

Hassan (Hassan, 2002) bir diğer makalesinde ise tek boyutlu DDM ile ikinci ve dördüncü mertebe diferansiyel denklemlerin özdeğer ve normalleştirilmiş öz fonksiyonlarını elde etmiştir.

Ayaz (Ayaz, 2003) makalesinde, iki boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM) kullanmış ve bu sayede iki boyutlu kısmi diferansiyel denklemler için yeni dönüşüm fonksiyonları tanımlamıştır.

Ayaz (Ayaz, 2004) makalesinde, DDM ile cebirsel ve lineer diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmişlerdir.

Chen (Chen, 2004) makalesinde, lineer olmayan denklem sisteminin çözümünü yeni algoritmalar tanımlamak suretiyle DDM yardımıyla elde etmiştir.

Arikoglu ve Ozkol (Arikoglu, Ozkol, 2005) makalesinde, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için DDM kullanmış ve içerisinde integral yapıları bulunan yeni dönüşüm fonksiyonları tanımlamışlardır.

Kurnaz ve Diğerleri (Kurnaz, Diğerleri, 2005) makalesinde, n boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodunu tanımlamışlar ve n . mertebeden bir diferansiyel denklemin DDM yardımı ile çözülebileceğini göstermişlerdir.

Kurnaz ve Oturanc (Kurnaz, Oturanc, 2005) makalesinde, lineer yada lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünü DDM kullanarak elde etmişlerdir.

Bildik ve Diğerleri (Bildik, Diğerleri, 2006) makalesinde ise kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini hem DDM hem de Adomian Ayırıştırma Yöntemiyle elde ederek her iki yöntemi karşılaştırılmışlardır.

Arikoglu ve Ozkol (Arikoglu, Ozkol, 2006) makalesinde, lineer ve lineer olmayan fark denklemleri için Diferansiyel Dönüşüm Yöntemini tanımlamışlar ve birkaç uygulama ile yöntemin etkinliğini göstermişlerdir.

Momani ve Diğerleri (Mamani, Diğerleri, 2007) makalesinde, Diferansiyel Dönüşüm Metodunu kesirli mertebeden adi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanmışlardır.

Erturk ve Diğerleri (Erturk, Diğerleri, 2008) makalesinde çoklu mertebeli lineer ve lineer olmayan caputo anlamında kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerini Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile elde etmişlerdir.

Odibat (Obibat, 2008) makalesinde, lineer ve lineer olmayan ayrılabilir çekirdekli Volterra integral denkleminin Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile seri çözümü elde edilmiş ve tam çözümleri ile karşılaştırmışlardır.

Islam ve Diğerleri (Islam, Diğerleri, 2009) makalesinde 12. mertebeden özel bir sınır değer problemini Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile çözmüşlerdir.

Biazar ve Eslami (Biazar, Eslami, 2010) , Telgraf denklemini Diferansiyel Dönüşüm Metodu yardımı ile çözmüşlerdir.

Yaghoobi ve Torabi (Yaghoobi, Torabi, 2011) makalesinde, lineer olmayan ısı transfer problemi Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile çözmüşler, elde edilen sonuçları VİM ve HPM ile karşılaştırmışlardır.

Ganji ve Diğerleri (Ganji, Diğerleri, 2012) makalesinde trafik ilerleme problemine karşılık gelen lineer olmayan problemi DDM ile çözmüşler ve 4. mertebeden Runge-Kutta yöntemiyle elde edilen sonuçların analizleri yapılarak karşılaştırılmıştır.

Bu tez çalışması 7 bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde; yöntemin ortaya çıkış süreci ve genel literatür özetine yer verilmiştir. İkinci bölümde; olasılık teorisi ve olasılık dağılımları hakkında temel tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde; integral denklemlerin özellikleri ve sınıflandırması hakkında tanımlamaları yapılmıştır. Dördüncü bölümde; Diferansiyel Dönüşüm Metodunun tanımları, özellikleri, Volterra integral denklemlerinin çözüm yöntemleri ve örnekler üzerinde analizleri yapılmıştır. Beşinci bölümde, başlangıç koşulları veya katsayıları sürekli olasılık dağılımlarından seçilerek elde edilen rastgele iki boyutlu Volterra integral denklemlerin, karışık Volterra – Fredholm integral denklemlerin ve iki boyutlu rastgele lineer olmayan Volterra integral denklemlerinin Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM) kullanılarak çözüm davranışlarının olasılık karakterleri incelenmiştir. Elde edilen çözümlerin olasılık karakteristiklerinden en kullanışlı olan beklenen değer, varyans ve güven aralıkları hesaplanarak elde edilen çözümlerin grafikleri Maple veya Matlab programı yardımıyla çizdirilmiştir. Altıncı bölümde; ilgili bulgular ve tartışmalar incelenmiştir. Yedinci bölümde; tezde elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

2. OLASILIK TEORİSİ VE OLASILIK DAĞILIMLARI

Bu bölümde, olasılık teorisi ile ilgili temel kavramları, tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir.

2.1. Olasılık Teorisi İle İlgili Temel Kavramlar

2.1.1. Olasılığın Klasik Tanımı

Olasılığın klasik tanımı olasılığın birinci teorik tanımından önce ortaya konmuştur. Bu nedenle olasılığın klasik tanımı, olasılığın birinci teorik tanımından elde edilmelidir. Bunun için aşağıdaki iki koşul sağlanmalıdır.

1. $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ olur.
2. Her w_i , basit olasılığı aynı p olasılığına sahiptir. Yani,

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$$

olur. Bu koşullar altında $\forall B \subseteq \Omega$ olayının olasılığını bulalım.

$$B = \{w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_m}\}, \quad 0 \leq m \leq n$$

olsun. Olasılığın birinci teorik tanımına dayanarak

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{j:w_{ij} \in B} p_{w_{ij}} = p_{w_{i_1}} + p_{w_{i_2}} + \dots + p_{w_{i_m}} \\ &= p + p + p + \dots + p = mp \quad (\text{m tane}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

yazılabilir. Şimdi p yi bulalım.

$\{p_i, i \geq 1\}$, dizisinin 2. Özelliğine göre,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

dir. Buradan;

$$p + p + p + \dots + p = 1 \Rightarrow np = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{n}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$P(B) = mp = \frac{m}{n}$$

yazılabilir. Böylece B olayının klasik anlamda olasılığı,

$$P(B) = \frac{m}{n}$$

olur. Burada n basit olaylar uzayının eleman sayısı m ise B olayını gerçekleştiren elemanların sayısıdır.

2.1.2. Beklenen Değerin Tanımı

Rastgele değişkenin istatistiksel karakteristikleri arasında en önemlisi beklenen değerdir. Deneysel çalışmalarda beklenen değer yerine ortalama değer de kullanılır.

$(\Omega, \xi, P(.))$ olasılık uzayında reel değerler alan bir $\xi(w)$ rastgele değişkeni verildiğinde eğer $\int_{\Omega} \xi(w)P(dw)$ integrali varsa, bu integrali değerine $\xi(w)$ rastgele değişkeninin beklenen değeri denir.

Beklenen değer aşağıdaki gibi gösterilir.

$$E \xi(w) = \int_{\Omega} \xi(w)P(dw)$$

2.1.3. Moment Çıkaran Fonksiyonlar

$\xi(w)$ kesikli dağılıma sahip bir rastgele değişken olsun.

$$\Psi_{\xi}(z) = E(z^{\xi(w)}) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(\xi(w) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n \quad (2.2)$$

fonksiyonuna $\xi(w)$ 'nin moment çıkaran fonksiyonu denir.

Bu seri en azından $|z| \leq 1$ için yakınsaktır. Moment çıkaran fonksiyonlar genellikle $\xi(w)$ rastgele değişkeninin değerleri negatif olmayan tam sayılar olduğunda kullanılır.

2.1.4. Dağılım Fonksiyonu

Rastgele değişkenin dağılımı ile işlem yapmak her zaman kolay değildir. Bu nedenle olasılık teorisinde rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu kavramı verilir.

$\xi(w), (\Omega, \xi, P(.))$ olasılık uzayını $(R, B, M_{\xi}(.))$ seçim uzayına dönüştüren reel değerli rastgele değişken olsun. Bu durumda biliyoruz ki, $\forall B \in B$ için

$$M_{\xi}(B) = P\{\omega: \xi(\omega) \in B\}$$

$\xi(w)$ rastgele değişkeninin dağılımıdır.

Özel durumda;

$B = (-\infty, x)$ ve $x \in R$ olursa $\xi(w)$ rastgele değişkeninin dağılımı daha basit bir şekil alır. Bu durumda aşağıdaki tanımı yapalım.

Bir rastgele değişkenin dağılımında $B = (-\infty, x)$ alınırsa,

$$M_{\xi}\{(-\infty, x)\} = P\{\omega: \xi(\omega) \in -\infty, x\} = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$$

fonksiyonuna $\xi(\omega)$ rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu denir.

Dağılım fonksiyonunu,

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$$

şeklinde gösterilir.

2.1.5. Varyans

$V_{\xi}(\omega) = E[\xi(\omega) - E\xi(\omega)]^2$ sayısına $\xi(\omega)$ rastgele değişkeninin varyansı denir.

Bir başka deyişle varyans, rastgele değişkenin aldığı değerlerin beklenen değerden sapmasıdır. Varyans için başka formül

$$\begin{aligned} V_{\xi}(\omega) &= E[\xi(\omega) - E\xi(\omega)]^2 \\ &= E[\xi^2(\omega) - 2\xi(\omega)E\xi(\omega) + (E\xi(\omega))^2] \\ &= E\xi^2(\omega) - 2[E\xi(\omega)]^2 + [E\xi(\omega)]^2 \\ &= E\xi^2(\omega) - [E\xi(\omega)]^2 \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir.

2.2. Bazı Olasılık Dağılımları

2.2.1. Normal Dağılımın Özellikleri

Normal dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan (Feller, 1968) faydalanarak

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)} \quad (2.3)$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri ve varyansı

$$E[X] = \mu, E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2 \text{ ve } Var[X] = \sigma^2 \quad (2.4)$$

bulunur. Momentler kullanılarak X ve Y bağımsız rastgele değişkenler için

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

olur.

2.2.2. Düzgün Dağılımın Özellikleri

Düzgün dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim U(\alpha, \beta)$ dir. Düzgün dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan (Feller, 1968) faydalanarak

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t} \quad (2.5)$$

$X \sim U(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin birinci momenti ve varyansı

$$E[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}, Var[X] = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \quad (2.6)$$

bulunur.

2.2.3. Gamma Dağılımın Özellikleri

Gamma dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim G(\alpha, \beta)$ dir. Gamma dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan (Feller, 1968) faydalanarak

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha} \quad (2.7)$$

$X \sim G(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin birinci momenti ve varyansı

$$E[X] = \alpha\beta, Var[X] = \alpha\beta^2 \quad (2.8)$$

bulunur.

2.2.4. Geometrik Dağılımın Özellikleri

Geometrik dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim G(p, q)$ dir. Geometrik dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan (Feller, 1968) faydalanarak

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{pe^t}{1 - qe^t} \quad (2.9)$$

$X \sim G(p, q)$ rastgele değişkeninin birinci momenti ve varyansı

$$E[X] = \frac{1}{p}, Var[X] = \frac{q}{p^2} \quad (2.10)$$

bulunur.

2.2.5. Standart Beta Dağılımın Özellikleri

Öncelikle $\alpha > 0$, $\beta > 0$ parametresine bağlı $B(\alpha, \beta)$ fonksiyonu tanımlayalım (Feller, 1968). Fonksiyon

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \quad (2.11)$$

şeklindedir.

Yoğunluk fonksiyonu tanımından;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{diğer } x\text{'ler} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır. (R.J.Larsen, M.L. Marx, 1986)

Beta Dağılımının Beklenen Değeri

$$X \sim B(\alpha, \beta) \text{ ise } E[X] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$Var[x] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 \cdot (\alpha + \beta + 1)}$$

$$E[X^2] = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)}$$

$$E[X^3] = \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)}$$

⋮

$$E[X^N] = \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + (n - 1))}{(\alpha + \beta + n - 1)(\alpha + \beta + n - 2) \dots (\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)}$$

Y_0 ve Y_1 bağımsız rastgele değişkenler olduğundan $E[Y_0, Y_1] = 0$ olur. Yani Y_0 ve Y_1 in beklenen değeri sıfır olur.

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^N x(k)t^k \quad (2.14)$$

$$E[x_N(t)] = \sum_{k=0}^N E[x(k)]t^k,$$

$$Var[x_N(t)] = \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N Cov(x(i), x(j)) t^i t^j \quad (2.15)$$

$$Cov(x(i), x(j)) = E(x(i)x(j)) - E[X_i]E[X_j], \forall i, j = 0, 1, \dots, N. \quad (2.16)$$

2.2.6. Üçgensel Dağılımın Özellikleri

Bir X rastgele değişkeni,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & a < x < c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & c \leq x < b \end{cases}$$

şeklinde olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse genelleştirilmiş üçgensel dağılıma sahiptir.(Feller, 1968) Burada a ve b sırasıyla rastgele değişkenin (olasılık yoğunluk fonksiyonunun) alabileceği en küçük ve en büyük değerlerken, c dağılımın mod değeridir.

Beklenen değeri ve varyansı

$$E(X) = \frac{(a+b+c)}{3}, Var(X) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}$$

ile verilir.

Üçgensel dağılımın moment çıkaran fonksiyonu;

$$M_x(t) = 2 \frac{(b-c)e^{at} - (b-a)e^{ct} + (c-a)e^{bt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2} \quad (2.17)$$

2.2.7. Üstel Dağılımın Özellikleri

Sürekli tipteki t rastgele değişkeni bir parametrelili üstel dağılıma sahip ise beklenen değer ya da ortalaması

$$E(t) = \frac{1}{\lambda}$$

dır. (Evans, Hasting, Peacock, 1993)

Sürekli tipteki t rastgele değişkeni bir parametrelili üstel dağılıma sahip ise varyansı

$$Var(t) = \frac{1}{\lambda^2}$$

dır. (Evans, Hasting, Peacock, 1993)

Üstel dağılımın moment çıkaran fonksiyonu;

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$



3. İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÖZELLİKLERİ VE SINIFLANDIRMASI

İntegral denklemlerin uygulamaları mühendislik alanlarında çok yaygın olarak kullanılmaktadır.

İntegral denklemlerin temel tanımlarına bu bölümde verilmiştir.

Tanım: İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında olduğunu gösteren denklemlerdir (Aksoy, 1998).

İntegral denklemler çeşitli özelliklerine göre sınıflandırılmıştır.

Burada integral denklemlerin kısaca genel özelliğinden bahsederek, ardından üzerinde çalışmak istediğimiz integral denklemlerin sınıflandırılması yapılacaktır.

3.1. İntegral Denklemlerin Genel Özellikleri

İntegral denklemlerin genel yapısını incelemek için;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \quad (3.1)$$

integral denklemi ele alınsın. Burada, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $f(x)$ bilinen fonksiyon, λ parametre, $k(x,t)$ çekirdek fonksiyondur.

3.2. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

İntegral denklemler lineerliğe, homojenliğine, tekillliğe, sınırlarına ve bilinmeyen fonksiyonun bulunduğu yere göre sınıflandırılır.

Burada integral sınırlarına göre sınıflandırma durumunu inceleyelim.

3.2.1. İntegral Sınırlarına Göre Sınıflandırma

İntegral sınırlarına göre sınıflandırmada integral sınırlarının sabit olma veya değişken içerme durumu dikkate alınır. Bu sınıflandırmaya göre integral denklemleri Fredholm ve Volterra integral denklemler olmak üzere iki grupta toplanır.

Fredholm İntegral Denklemleri:

İntegral sınırları sabitlerden oluşan (3.1) yapısındaki integral denklemler Fredholm integral denklemleri olarak sınıflandırılır.

Volterra İntegral Denklemleri:

İntegral sınırlarından biri değişken olan,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) u(t) dt \quad (3.2)$$

yapısındaki integral denklemler Volterra integral denklemleri olarak sınıflandırılır.

3.3. İntegro -Diferansiyel Denklemler

Denklemlerin içinde bilinmeyen fonksiyonların türevlerinin bulunduğu integral denklemlerine genel olarak integro - diferansiyel denklemler denir. İntegro-iferansiyel denklemlerin özel çözümleri için verilen şartlardan başlangıç şartlarına dikkat edilir.

Bilinmeyen fonksiyonun m . mertebeden türevlerinin bulundurulduğu;

Fredholm integro – diferansiyel denklemi,

$$u^{(m)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) u(t) dt \quad (3.3)$$

ele alınsın ve Volterra integro-diferansiyel denklemi ise,

$$u^{(m)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) u(t) dt \quad (3.4)$$

olarak ele alınsın. Burada $u^{(m)}(x) = \frac{d^m u}{dx^m}$ olarak ifade edilir. Başlangıç şartları integral denkleminin çözümü için $u(0), u'(0), u''(0), \dots, u^{(m-1)}(0)$ değerleri integral denklemi ile birlikte verilir. (Wazwaz, 2011).

Örneğin,

$$u^{(m)}(x) = x^2 + \int_0^1 (2 + x^2 - t) u(t) dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u''(0) = 0$$

Verilen integro-diferansiyel denklemi içinde, üçüncü mertebeden türevinin bulunduğu Fredholm integro-diferansiyel denklem örneğidir. İntegro-diferansiyel denklemi ile verilen başlangıç şartları $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, $u''(0) = 0$ değerleridir.

3.4. İki Boyutlu İntegral Denklemler

$u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonun iki katlı integralin içinde bulunduğu integral denklemler iki boyutlu integral denklemlerdir.

İki boyutlu Fredholm integral denklemleri,

$$u(x, t) = f(x, t) + \int_c^d \int_a^b k(x, t, y, z)u(y, z)dydz, \quad x \in [a, b], \quad t \in [c, d] \quad (3.5)$$

yapısına; iki boyutlu Volterra integral denklemler ise,

$$u(x, t) = f(x, t) + \int_0^t \int_0^x k(x, t, y, z)u(y, z)dydz \quad (3.6)$$

yapısına sahiptir. Bu integral denklemlerdeki $k(x, t, y, z)$ çekirdek fonksiyonlar, $f(x, t)$ bilinen fonksiyonlar ve $u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonlardır.

Örneğin;

$$u(x, t) = x^3 e^t + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{5}x^4 e^{2t} - \frac{1}{4}x^2 t + \int_0^t \int_0^x (y + e^{4z})u^2(y, z)dydz, \quad x \in [a, b]$$

İntegral denklemi iki boyutlu lineer olmayan Volterra integral denklemdir.

3.5. İntegral Denklem Sistemleri

İntegral denklem sistemleri, birden fazla integral denklemin bir arada ele alındığı sistemlerdir. İntegral denklem sistemlerinin analitik çözümlerine ulaşmak genellikle zordur. Bundan dolayı çoğu zaman yaklaşık çözümleri bulunur.

n bilinmeyenli n tane denklemden oluşan lineer Fredholm integral denklem sistemi

$$\sum_{i=1}^n a_{ji}(x)u_i(x) = f_j(x) + \int_a^b \sum_{i=1}^n k_{ji}(x,t)u_i(t)dt, \quad j = 1,2,3 \dots n. \quad (3.7)$$

şeklinde de ifade edilebilir. (3.7) integral denklem sistemindeki $u_i(x)$ bilinmeyen fonksiyonlar, $k_{ji}(x,t)$ çekirdek fonksiyonlar, $a_{ji}(x)$ katsayı fonksiyonları ve $f_j(x)$ bilinen fonksiyonlardır. (Yusufoğlu, 2008), (Tulga, 2006), (Kajani, Shehni, 2001).

Örneğin;

$$u_1(x) = \frac{x}{6} + \frac{7}{12} + \int_0^1 \frac{x+t}{4} (u_1(x) + u_2(x))dt$$

$$u_2(x) = x^3 - \frac{17}{5}x + 1 - \int_0^1 xt(u_1(x) + u_2(x))dt$$

integral denklem sistemi, iki bilinmeyen fonksiyon ve iki denklemden oluşan lineer Fredholm integral denklem sistemidir.

$$u_1(x,t) = e^{4x}t + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{8}e^xt^2 - \frac{1}{3}x^2e^t + \int_0^t \int_0^x (u_1(y,z)^2 + u_2(y,z))dydz$$

$$u_2(x,t) = xe^{2t} - \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}e^{-2x}t^2 + \frac{1}{3}x^2e^t - \int_0^t \int_0^x (u_1(y,z) - u_2(y,z))dydz$$

integral denklem sistemi ise, iki bilinmeyen fonksiyon ve iki denklemden oluşan lineer olmayan iki boyutlu Volterra integral denklem sistemidir.

4. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODUNUN İNTEGRAL DENKLEMLERDE KULLANIMI

Bu bölümde Diferansiyel Dönüşüm Metodunun (DDM), bir boyutlu ve iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun tanımı, genel özellikleri ve diğer kullanılan metotlar ele alınacaktır. Diferansiyel dönüşüm metodu kullanılarak örneklerin çözümleri bulunacaktır.

4.1. Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM)

DDM diferansiyel ve integral denklemlerin çözümünde kullanılan bir metottur. Son yıllarda bu metot; diferansiyel denklem sistemlerinde (Ayaz, 2004), kısmi diferansiyel denklemlerde (Chen, 1999), (Jang, Chen, Liu, 2001), integral ve integro-diferansiyel denklemlerde (Arikoğlu, Ozkol, 2005), (Odibat, 2008), iki boyutlu lineer ve lineer olmayan volterra integral denklemlerde (Tari, Rahimi, Shahmorad, Talati ,2005) uygulanmıştır.

Bu metodun integral denklemlerde kullanımı, bir boyutlu integral denklemlerde DDM'nin kullanımı ve iki boyutlu integral denklemlerde DDM'nin kullanımı olmak üzere ayrı ayrı ele alalım.

4.1.1. Bir Boyutlu İntegral Denklemlerde Diferansiyel Dönüşüm Metodunun (DDM) Kullanımı

Tek bileşenden oluşan $f(x)$ fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $F(k)$ olmak üzere, bu fonksiyonun tek boyutlu diferansiyel dönüşümü;

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (4.1)$$

$f(x)$ orijinal fonksiyon ve $F(k)$ dönüşüm fonksiyonu olmak üzere, $F(k)$ 'nın diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu ise;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x - x_0)^k \quad (4.2)$$

serisi ile ifade edilir.

(4.1) ve (4.2) eşitliklerinden yararlanılarak;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=x_0} \quad (4.3)$$

ifadesi yazılabilir.

Kullanılan bazı fonksiyonların dönüşüm fonksiyonları Tablo 2.1’de verilmiştir.

Tablo 2.1. Bir boyutlu bazı fonksiyonların dönüşümü

Orijinal Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$f(x) = u(x) \mp v(x)$	$F(k) = U(k) \mp V(k)$
$f(x) = \alpha u(x)$	$F(k) = \alpha U(k)$
$f(x) = v(x)u(x)$	$F(k) = \sum_{r=0}^k V(r)U(k-r)$
$f(x) = \frac{du(x)}{dx}$	$F(k) = (k+1)U(k+1)$
$f(x) = \frac{d^n u(x)}{dx^n}$	$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} U(k+n)$
$f(x) = \int_{x_0}^x u(t)dt$	$F(k) = \frac{U(k-1)}{k}, \quad k \geq 0, \quad F(0) = 0$
$f(x) = x^n$	$F(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$
$f(x) = e^{\lambda x}$	$F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$
$f(x) = \sin(wx + \alpha)$	$F(k) = \frac{w^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$
$f(x) = \cos(wx + \alpha)$	$F(k) = \frac{w^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$

Tablo 2.1’de verilen basit fonksiyonlar bir boyutlu fonksiyonların dönüşüm fonksiyonları da integral denklemlerin DDM ile çözümünde kullanılmaktadır.

Teorem 4.1.1.1: (Arıkoğlu, Ozkol 2005)

$$f(x) = u_1(x)u_2(x) \dots u_{n-1}(x)u_n(x)$$

fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu;

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} U_1(k_1)U_2(k_2 - k_1) \dots U_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2})U_n(k - k_{n-1}) \quad (4.4)$$

olarak ifade edilir.

Teorem 4.1.1.2:

$$f(x) = \int_{x_0}^x v(t)u(t)dt$$

fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu;

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^{k-1} V(k_1) \frac{U(k - k_1 - 1)}{k}, F(0) = 0 \quad (4.5)$$

olarak ifade edilir.

Teorem 4.1.1.3:

$$f(x) = \int_{x_0}^x u_1(t)u_2(t) \dots u_{n-1}(t)u_n(t)dt$$

fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu;

$$F(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_{n-1}=0}^{k-1} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} U_1(k_1)U_2(k_2 - k_1) \dots U_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2})U_n(k - k_{n-1} - 1) \quad (4.6)$$

olarak ifade edilir.

Teorem 4.1.1.4:

$$f(x) = v(x) \int_{x_0}^x u(t) dt$$

fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu;

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^{k-1} V(k_1) \frac{U(k - k_1 - 1)}{k - k_1}, F(0) = 0 \quad (4.7)$$

olarak ifade edilir.

Teorem 4.1.1.5:

$$f(x) = v_1(x)v_2(x) \dots v_{n-1}(x)v_n(x) \int_{x_0}^x u_1(t)u_2(t) \dots u_{n-1}(t)u_n(t) dt$$

fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu;

$$F(k) = \sum_{k_{m+n-1}=1}^k \sum_{k_{m+n-2}=1}^{k_{m+n-1}} \dots \sum_{k_2=1}^{k_3} \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_m} U_1(k_1 - 1) U_2(k_2 - k_1) \dots U_{m-1}(k_{m-1} - k_{m-2}) U_m(k_m - k_{m-1}) \times V_1(k_{m+1} - k_m) V_2(k_{m+2} - k_{m+1}) \dots V_{n-1}(k_{m+n-1} - k_{m+n-2}) V_n(k - k_{m+n-1}) \quad (4.8)$$

olarak ifade edilir (Arikoglu, Ozkol, 2008), (Odibat, 2008), (Toker, 2008).

4.1.2. İki Boyutlu İntegral Denklemlerde Diferansiyel Dönüşüm Metodunun (DDM) Kullanımı

İki bileşenden oluşan $f(x, t)$ fonksiyonun (x_0, t_0) için iki boyutlu diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $F(m, n)$ olmak üzere;

$$F(m, n) = \frac{1}{m! n!} \left[\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} f(x, t) \right]_{x=x_0, t=t_0} \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlanır. $F(m, n)$ fonksiyonun ters dönüşümü ise;

$$f(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F(m, n) (x - x_0)^m (t - t_0)^n \quad (4.10)$$

serisi ile ifade edilir. (4.9) ve (4.10) eşitliklerinden yararlanılarak;

$$f(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m! n!} \left[\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} f(x, t) \right]_{x=x_0, t=t_0} (x - x_0)^m (t - t_0)^n \quad (4.11)$$

elde edilir. Ayrıca (4.10) serisi, sonlu seri olarak;

$$f(x, t) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N F(m, n) (x - x_0)^m (t - t_0)^n \quad (4.12)$$

Sık kullanılan bazı iki boyutlu fonksiyonların dönüşüm fonksiyonları Tablo 2.2’de verilmiştir.

Tablo 2.2. İki boyutlu bazı fonksiyonların dönüşümü

Orijinal Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$f(x, t) = u(x, t) \mp v(x, t)$	$F(m, n) = U(m, n) \mp V(m, n)$
$f(x, t) = \alpha u(x, t)$	$F(m, n) = \alpha U(m, n)$
$f(x, t) = u(x, t)v(x, t)$	$F(m, n) = \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^n U(k, r)V(m - k, n - r)$
$f(x, t) = \frac{\partial(x, t)}{\partial x}$	$F(m, n) = (m + 1)U(m + 1, n)$
$f(x, t) = \frac{\partial(x, t)}{\partial t}$	$F(m, n) = (n + 1)U(m, n + 1)$
$f(x, t) = \frac{\partial^{k+r} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^r}$	$F(m, n) = \frac{(m + k)! (n + r)!}{k! r!} U(m + k, n + r)$
$f(x, t) = \int_0^t \int_0^x u(y, z) dy dz$	$F(m, n) = \frac{1}{mn} U(m - 1, n - 1)$
$f(x, t) = x^k t^r$	$F(m, n) = \delta_{m,k} \delta_{n,r} = \delta(m - k, n - r)$ $= \begin{cases} 1, & m = k, n = r \\ 0, & m \neq k, n \neq r \end{cases}$
$f(x, t) = x^k e^{at}$	$F(m, n) = \frac{a^n}{n!} \delta_{m,k} = \frac{a^n}{n!} \delta(m - k)$

Tablo 2.3. (Devamı)

Orijinal Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$f(x, t) = x^k \sin(at + b)$	$F(m, n) = \frac{a^n}{n!} \delta_{m,k} \sin\left(\frac{n\pi}{2} + b\right)$ $= \frac{a^n}{n!} \delta(m - k) \sin\left(\frac{n\pi}{2} + b\right)$
$f(x, t) = x^k \cos(at + b)$	$F(m, n) = \frac{a^n}{n!} \delta_{m,k} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + b\right)$ $= \frac{a^n}{n!} \delta(m - k) \cos\left(\frac{n\pi}{2} + b\right)$

Tablo 2.2’de verilen iki boyutlu fonksiyonlar dışında teoremlerle verilen yapılarıdaki iki boyutlu fonksiyonların dönüşüm fonksiyonları da integral denklemlerin DDM ile çözümünde sıkça kullanılmaktadır.

$F(m, 0) = F(0, n) = 0$, $m, n = 0, 1 \dots$ olmak üzere;

Teorem 4.1.2.1:

$$f(x, t) = \int_0^t \int_0^x u(y, z) v(y, z) dy dz$$

fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu;

$$F(m, n) = \frac{1}{mn} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} U(k, r) V(m - k - 1, n - r - 1) \quad (4.13)$$

olarak ifade edilir (Arikoglu, Ozkol, 2008).

Teorem 4.1.2.2:

$$f(x, t) = \int_0^t \int_0^x u_1(y, z) u_2(y, z) u_3(y, z) dy dz$$

fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu

$$F(m, n) = \frac{1}{mn} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-r-1} \sum_{p=0}^{m-k-1} U_1(k, r) U_2(p, q) U_3(m - k - p - r, n - r - q - 1) \quad (4.14)$$

olarak ifade edilir (Arikoglu, Ozkol, 2008).

Teorem 4.1.2.3:

$$f(x, t) = v(x, t) \int_0^t \int_0^x u(y, z) dy dz$$

fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu

$$F(m, n) = \frac{1}{mn} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} V(k, l) \frac{U(m-k-1, n-r-1)}{(m-k)(n-r)} \quad (4.15)$$

olarak ifade edilir edilir (Arikoglu, Ozkol, 2008).

Teorem 4.1.2.4:

$$f(x, t) = \int_0^t \int_0^x \frac{u(y, z)}{v(y, z)} dy dz$$

fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu

$$U(m, n) = \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^n (m-k+1)(n-r+1) V(k, r) F(m-k+1, n-r+1) \quad (4.16)$$

olarak ifade edilir edilir (Arikoglu, Ozkol, 2008).

Teorem 4.1.2.5:

$$f(x, t) = \int_0^t \int_0^x \frac{1}{v(y, z)} dy dz$$

fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu

$$\frac{1}{(m+1)(n+1)} U(m, n) = \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{r=0}^{n+1} V(k, r) F(m-k+1, n-r+1) \quad (4.17)$$

olarak ifade edilir (Al-Khaled, Allan, 2005), (Arikoglu, Ozkol, 2008), (Linz, 1985).

4.1.3. Üç Boyutlu İntegral Denklemlerde Diferansiyel Dönüşüm Metodunun (DDM) Kullanımı

Üç bileşenden oluşan $f(x, y, t)$ fonksiyonun (x_0, y_0, t_0) için üç boyutlu diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $F(k, m, n)$ olmak üzere;

$$F(k, m, n) = \frac{1}{k! m! n!} \left[\frac{\partial^{k+m+n}}{\partial x^k \partial y^m \partial t^n} f(x, y, t) \right]_{x=x_0, y=y_0, t=t_0} \quad (4.18)$$

şeklinde tanımlanır. $F(k, m, n)$ fonksiyonun ters dönüşümü ise;

$$f(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F(k, m, n) (x - x_0)^k (y - y_0)^m (t - t_0)^n \quad (4.19)$$

serisi ile ifade edilir. (4.18) ve (4.19) eşitliklerinden yararlanılarak;

$$f(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k! m! n!} \left[\frac{\partial^{k+m+n}}{\partial x^k \partial y^m \partial t^n} f(x, y, t) \right]_{x=x_0, y=y_0, t=t_0} (x - x_0)^k (y - y_0)^m (t - t_0)^n \quad (4.20)$$

elde edilir. Ayrıca (4.19) serisi, sonlu seri olarak;

$$f(x, y, t) = \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N F(k, m, n) (x - x_0)^k (y - y_0)^m (t - t_0)^n \quad (4.21)$$

şeklinde alınabilir.

4.1.4. N - Boyutlu İntegral Denklemlerde Diferansiyel Dönüşüm Metodunun (DDM) Kullanımı

N - bileşenden oluşan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonun $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ için N - boyutlu diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $F(k_1, k_2, \dots, k_n)$ olmak üzere;

$$F(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right]_{x_1=x_{10}, x_2=x_{20}, \dots, x_n=x_{n0}} \quad (4.22)$$

şeklinde tanımlanır. $F(k_1, k_2, \dots, k_n)$ fonksiyonun ters dönüşümü ise;

$$\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} F(k_1, k_2, \dots, k_n) (x_1 - x_{10})^{k_1} (x_2 - x_{20})^{k_2} \dots (x_n \\
&\quad - x_{n0})^{k_n}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

serisi ile ifade edilir. (4.22) ve (4.23) eşitliklerinden yararlanılarak;

$$\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left[\frac{\partial^{x_1+x_2+\dots+x_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right]_{x_1=x_{10}, x_2=x_{20}, \dots, x_n=x_{n0}} (x_1 \\
&\quad - x_{10})^{k_1} (x_2 - x_{20})^{k_2} \dots (x_n - x_{n0})^{k_n}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir. Ayrıca (4.23) serisi, sonlu seri olarak;

$$\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= \sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=0}^N \dots \sum_{k_n=0}^N F(x_1, x_2, \dots, x_n) (x_1 - x_{10})^{k_1} (x_2 - x_{20})^{k_2} \dots (x_n \\
&\quad - x_{n0})^{k_n}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

şeklinde alınabilir.

4.1.5. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi için kabul edelim ki iki boyutlu diferansiyel denklemin çözümü;

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(h, t) x^k t^h$$

şeklinde olsun. Yukarıdaki fonksiyonun diferansiyel dönüşüm çözümü

$$U(x, t) = \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} u(x, t) \right]_{x=0, t=0}$$

olarak tanımlanmıştır.

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U_{k,h} x^k t^h$$

olduğundan fonksiyonu açık halde yazılırsa,

$$U_{0,0}, U_{0,1}x, U_{0,2}x^2, \dots, U_{1,0}t, U_{1,1}xt, U_{1,2}tx^2, \dots, U_{2,0}t^2, U_{2,1}t^2x, \dots$$

elde edilir. Buradaki terimlerin t'nin kuvvetlerine göre düzenleme yapılırsa yani;

Birinci grup:

$$t^0 \sum_{k=0}^{\infty} U_{k,0} x^k$$

İkinci grup:

$$t^1 \sum_{k=0}^{\infty} U_{k,1} x^k$$

Üçüncü grup:

$$t^2 \sum_{k=0}^{\infty} U_{k,2} x^k$$

vb...

olarak gruplanır.

böylece

$$U_{x,t} = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x) t^h$$

fonksiyonu elde edilir. Buradaki bilgilere göre aşağıdaki tanımlar verilmiştir.
(Keskin, 2010)

Tanım 4.1.5.1: (Keskin, 2010)

İki bileşenli $u(x, t)$ fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k, h)$ olmak üzere, $u(x, t)$ nin t boyunca hesaplanacak çözümün,

$$u(x, t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x) t^h$$

şeklindedir.

Tanım 4.1.5.2: (Keskin, 2010)

İki bileşenli $u(x, t)$ fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k, h)$ olmak üzere, $u(x, t)$ nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü,

$$U_h(x) = \frac{1}{h!} \left[\frac{\partial^h}{\partial t^h} u(x, t) \right]_{t=0}$$

şeklindedir.

Tanım 4.1.5.3: (Keskin, 2010)

$U_h(x)$ nin t boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonun tersi;

$$u(x, t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x) t^h$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki iki eşitlik dikkate alınarak aşağıdaki eşitliği ede edebilir.

$$U_h(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \left[\frac{\partial^h}{\partial t^h} u(x, t) \right]_{t=0} t^h$$

Tanım 4.1.5.4: (Keskin, 2010)

İki bileşenli $u(x, t)$ fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k, h)$ olmak üzere, $u(x, t)$ nin x boyunca hesaplanacak çözümü

$$u(x, t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x) t^h$$

şeklindedir.

Tanım 4.1.5.5: (Keskin, 2010)

İki bileşenli $u(x, t)$ fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k, h)$ olmak üzere, $u(x, t)$ nin x boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü,

$$U_h(x) = \frac{1}{h!} \left[\frac{\partial^h}{\partial t^h} u(x, t) \right]_{t=0}$$

şeklindedir.

4.2. İntegral Denklemleri Çözümünde Kullanılan Diğer Metotlar

İntegral denklemlerin çözümünde kullanılan, analitik ve sayısal çözümleri için diğer metotlar ise; Seri Çözüm Metodu (SÇM), Adomain Ayırıştırma Metodu (AAM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM), Homotopi Analiz Metodu (HAM), Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM), Direkt Hesaplama Metodu (DHM)'dur (Saadati, 2009), (Wazwaz, 2009), (Wazwaz, 2011), (Ganji, 2007), (Adomian, 1992), (Adomian, 1994).

4.2.1. Seri Çözüm Metodu (SÇM)

Seri Çözüm Metodu (SÇM) genellikle diferansiyel denklemler ve integral denklemlerde Taylar serilerine direkt bağlı olan metottur.

Seri Çözüm Metodunun (SÇM) integral denklemlerinde nasıl kullanıldığını incelemek gerekirse;

$$u^{(m)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) u(t) dt \quad (4.23)$$

Volterra integral denklemini ele alalım.

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun analitik fonksiyon olduğu düşünülürse bu fonksiyon;

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4.24)$$

Serisi ile ifade edilir. Bu seri incelenen (4.23) Volterra integral denklemi eşitliğinin her iki tarafına yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x k(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \quad (4.25)$$

eşitliği elde edilir. (4.25) eşitliğinin her iki tarafındaki seriler açılırsa;

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = T(f(x)) + \lambda \int_0^x k(x,t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots) dt \quad (4.26)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte yer alan $T(f(x))$ ifadesi $f(x)$ fonksiyonun Taylar serisidir. (4.25) veya (4.26) eşitliğinin sağ tarafında yer alan integral alınıp x 'in aynı kuvvetlerinin katsayıları bir araya getirildiğinde ve eşitliğinin diğer tarafında yer alan aynı kuvvetlere sahip x 'in katsayılarıyla eşitlendiğinde yineleme bağlantısı elde edilir. Elde edilen yineleme bağlantısı çözülerek $a_n (n \geq 0)$ katsayıları bulunur. Bulunan katsayılar (4.24) serisinde yerine yazıldığında integral denklemin bir çözümü var ise bu çözüm elde edilir. Tam çözümün olmadığı veya bulunmadığı durumlarda farklı metotlar kullanılabilir. (Wazwaz, 2011),(Aksoy, 1998)

4.2.1.1. Seri Çözüm Metodu ile İntegral Denklemlerin Çözümleri

4.2.1.1.1. Örnek-1

$$u(x) = 12 + 4x - 12e^x + 8xe^x + \int_0^x (x-t)u(t) dt \quad (4.27)$$

Volterra integral denklemini seri çözüm metodunu kullanarak çözünüz.

Çözüm: $u(x)$ fonksiyonunun seri açılımı

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(4.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 12 + 4x - 12e^x + 8xe^x + \int_0^x (x-t)u(t) dt$$

Denklemler açık şekilde yazılarak, aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
& a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \dots \\
& = 12 + 4x - 12 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \\
& + 8x \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) + \frac{a_0x^2}{2} + \frac{a_1x^3}{6} + \frac{a_2x^4}{12} + \frac{a_3x^5}{20} + \frac{a_4x^6}{30} \\
& + \dots \\
& = 2x^2 + \frac{a_0x^2}{2} + 2x^3 + \frac{a_1x^3}{6} + \frac{5x^4}{6} + \frac{a_2x^4}{12} + \frac{7x^5}{30} + \frac{a_3x^5}{20} \dots \\
& = \left(2 + \frac{a_0}{2} \right) x^2 + \left(2 + \frac{a_1}{6} \right) x^3 + \left(\frac{5}{6} + \frac{a_2}{12} \right) x^4 + \left(\frac{7}{30} + \frac{a_3}{20} \right) x^5 \dots =
\end{aligned}$$

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = \frac{1}{3}, \dots$$

bulunur. Böylece bulunan değerler seride yerine yazılırsa,

$$u(x) = 2x^2 \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)$$

elde edilir. Böylece analitik çözüm

$$u(x) = 2x^2 e^x$$

elde edilir.

4.2.1.1.2. Örnek-2

$$u'(x) = -11 - 6x + \int_{-1}^1 (1 - xt)u(t) dt, u(0) = 1 \quad (4.28)$$

Fredholm integro-diferansiyel denklemini seri çözüm metodunu kullanarak çözünüz.

Çözüm: $u(x)$ fonksiyonunun seri açılımı ve türevi

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(4.28) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = -11 - 6x + \int_{-1}^1 \left((1 - xt) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt$$

Başlangıç koşulundan $a_0 = 1$ bulunur. Bu değer denklemde yerine yazılarak, aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitliğinden,

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots \\ = -9 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 + \frac{2}{7}a_6 + \frac{2}{9}a_8 \\ + \left(-6 - \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{5}a_3 - \frac{2}{7}a_5 - \frac{2}{9}a_7 \right)x \\ a_1 = -9, a_n = 0, n \geq 2 \end{aligned}$$

Bulunur. Böylece analitik çözümü, $a_0 = 1$ ile birlikte

$$u(x) = 1 - 9x$$

elde edilir.

4.2.1.1.3. Örnek-3

$$u'(x) = 1 - \int_0^x u(t) dt, u(0) = 0 \quad (4.29)$$

Volterra integro-diferansiyel denklemini seri çözüm metodunu kullanarak çözünüz.

Çözüm: $u(x)$ fonksiyonunun seri açılımı ve türevi

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(4.29) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 - \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt$$

ifadesi integralden kurtulup yeniden yazıldığında,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n$$

bulunur, burada x 'in dereceleri eşitlenirse

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n$$

bulunur. Denklemin her iki yanında aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse ve başlangıç koşullarından $a_0 = 0$ olduğu hesaba katılırsa,

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = -\frac{1}{n(n+1)} a_{n-1}, n \geq 1$$

Buradan da

$$a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

elde edilir. O halde denklemin seri çözümü

$$u(x) = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x}{5!} - \frac{x}{7!} + \dots$$

Böylece analitik çözümü,

$$u(x) = \sin(x)$$

elde edilir.

4.2.1.1.4. Örnek-4

$$u(x) = -4 + 14x - 12x^2 - x^3 + x^4 + \int_0^x (x-t)u(t) dt + \int_{-1}^1 (x+t)u(t) dt \quad (4.30)$$

Volterra-Fredholm integral denklemini seri çözüm metodunu kullanarak çözünüz.

Çözüm: $u(x)$ fonksiyonunun seri açılımı

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(4.30) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= -4 + 14x - 12x^2 - x^3 + x^4 + \int_0^x (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt \\ &+ \int_{-1}^1 (x+t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt \end{aligned}$$

Denklemler açık şekilde yazılarak, aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitliğinden,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \dots \\ &= -4 + 14x - 12x^2 - x^3 + x^4 \\ &+ \left(\frac{a_0 x^2}{2} + \frac{a_1 x^3}{6} + \frac{a_2 x^4}{12} + \frac{a_3 x^5}{20} + \frac{a_4 x^6}{30} + \dots \right) \\ &+ \left(2a_0 x + \frac{2}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 x + \frac{2}{5}a_3 + \frac{2}{5}a_4 x + \frac{2}{7}a_5 + \dots \right) \\ &= -4 + \frac{2}{3}a_1 + \frac{2}{5}a_3 + \frac{2}{7}a_5 + \left(14 + 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 + \dots \right) x + \left(-12 + \frac{a_0}{2} \right) x^2 \\ &+ \left(-1 + \frac{a_1}{6} \right) x^3 + \left(1 + \frac{a_2}{12} \right) x^4 + \dots \end{aligned}$$

$$a_0 = 0, a_1 = 6, a_2 = -12, a_3 = a_4 = a_5 = \dots = 0$$

bulunur. Böylece bulunan değerler seride yerine yazılırsa tam çözüm,

$$u(x) = 6x - 12x^2$$

elde edilir.

4.2.1.1.5. Örnek-5

$$u(x) = 10x + 8x^2 + \int_0^x \int_{-1}^1 (s-t)u(t) dt ds \quad (4.31)$$

Karışık Volterra-Fredholm integral denklemini Taylor seri çözüm metodunu kullanarak çözünüz.

Çözüm: $u(x)$ fonksiyonunun seri açılımı

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(4.31) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 10x + 8x^2 + \int_0^x \int_{-1}^1 (s-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt ds$$

Denklemler açık şekilde yazılarak, aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitliğinden,

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \dots \\ &= 10x + 8x^2 + \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \frac{a_8}{9} + \dots \right) x^2 \\ &+ \left(-\frac{2}{3} a_1 - \frac{2}{5} a_3 - \frac{2}{7} a_5 - \frac{2}{9} a_7 - \dots \right) x \\ &= \left(10 - \frac{2}{3} a_1 - \frac{2}{5} a_3 - \frac{2}{7} a_5 - \frac{2}{9} a_7 - \dots \right) x + \left(8 + a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \frac{a_8}{9} + \dots \right) x^2 \\ & a_0 = 0, a_1 = 6, a_2 = -12, a_3 = a_4 = a_5 = \dots = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece bulunan değerler seride yerine yazılırsa analitik çözüm,

$$u(x) = 6x - 12x^2$$

elde edilir.

4.3. İki Boyutlu Volterra İntegral Denkleminin DDM Çözümü için Örnekler

4.3.1. Örnek-1

Aşağıdaki iki boyutlu lineer Volterra integral denkleminin diferansiyel dönümüm metodu (DDM) ile çözümü ele alınsın.

$$u(x, t) = xe^{-t} + t - xt - \frac{1}{3}x^4 - xt^2e^t + xte^t + \frac{1}{3}x^4e^{-t} - \frac{1}{4}x^3t^2 - \frac{1}{2}x^2t^2 \\ + \int_0^t \int_0^x (xy + te^z)u(y, z)dydz$$

$$U(x, t) = xe^{-t} + t$$

$$U(0, 0) = 0$$

$$U(m, 0) = F(m, 0), \quad m = 1, 2 \dots N$$

$$U(0, n) = F(0, n), \quad n = 1, 2 \dots N \quad m, n = 1, 2, \dots N$$

olmak üzere;

$$U(m, n) = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,1} \delta_{l,0} \delta_{m,k} \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!} + \delta_{m,0} \delta_{n,1} - \delta_{m,1} \delta_{n,1} - \frac{1}{3} \delta_{m,4} \delta_{n,0} \\ - \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,1} \delta_{l,2} \delta_{m,k} \frac{1}{(n-l)!} + \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,1} \delta_{l,1} \delta_{m,k} \frac{1}{(n-l)!} \\ + \frac{1}{3} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,4} \delta_{l,0} \delta_{m,k} \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!} - \frac{1}{4} \delta_{m,3} \delta_{n,2} - \frac{1}{2} \delta_{m,2} \delta_{n,2} \\ + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{k,1} \delta_{l,0} \frac{1}{(m-k)(n-l)} \left[\sum_{s=0}^{n-l-1} \sum_{r=0}^{m-k-1} \delta_{r,1} \delta_{s,0} U(m-k-r \right. \\ \left. - 1, n-l-s-1) \right] \\ + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{k,0} \delta_{l,1} \frac{1}{(m-k)(n-l)} \left[\sum_{s=0}^{n-l-1} \sum_{r=0}^{m-k-1} \delta_{r,0} \frac{1}{s!} U(m-k-r \right. \\ \left. - 1, n-l-s-1) \right]$$

olarak bulunur. Bulunan $U(h, k)$ çözümler yerine yazılırsa,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(h, k) x^k t^h = t + x - xt + \frac{1}{2!} xt^2 - \frac{1}{3!} xt^3 + \frac{1}{4!} xt^4 + \dots \\ = xe^{-t} + t$$

elde edilir.

4.3.2. Örnek-2

Aşağıdaki iki boyutlu lineer Volterra integral denkleminin diferansiyel dönümüm metodu (DDM) ile çözümü ele alınsın.

$$u(x, t) = x \sin t - \frac{1}{4} x^5 - \frac{1}{4} x^5 \cos t - \frac{1}{4} x^2 \sin^2 t + \int_0^t \int_0^x (xy^2 + \cos z) u(y, z) dy dz$$

$$U(x, t) = x \sin t$$

$$U(0, 0) = 0$$

$$U(m, 0) = F(m, 0), \quad m = 1, 2 \dots N$$

$$U(0, n) = F(0, n), \quad n = 1, 2 \dots N \quad m, n = 1, 2, \dots N$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} U(m, n) &= \frac{1}{n!} \delta_{m,1} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{4} \delta_{m,4} \delta_{n,0} + \frac{1}{4(n!)} \delta_{m,5} \cos \frac{n\pi}{2} \\ &- \frac{1}{4} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,2} \delta_{l,0} \sum_{s=0}^{n-l} \sum_{r=0}^{m-k} \delta_{r,0} \delta_{m-k-r,0} \frac{1}{s! (n-l-s)!} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{(n-l-s)\pi}{2} \\ &+ \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{k,1} \delta_{l,0} \frac{1}{(m-k)(n-l)} \left[\sum_{s=0}^{n-l-1} \sum_{r=0}^{m-k-1} \delta_{r,2} \delta_{s,0} U(m-k-r-1, n-l-s \right. \\ &\left. - 1) \right] + \frac{1}{mn} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\delta_{k,0} \frac{1}{l!} \cos \frac{n\pi}{2} \right) U(m-k-1, n-l-1) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bulunan $U(h, k)$ çözümler yerine yazılırsa,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(h, k) x^k t^h = xt - \frac{1}{3!} xt^3 + \frac{1}{5!} xt^5 - \frac{1}{7!} xt^7 + \frac{1}{9!} xt^9 + \dots = x \sin t$$

elde edilir.

4.3.3. Örnek-3

Aşağıdaki iki boyutlu lineer Volterra integral denkleminin diferansiyel dönüşüm metodu (DDM) ile çözümü ele alınsın.

$$u(x, t) = xe^{-t} + t + \frac{1}{3}x^5 + xt - \frac{1}{3}x^5e^t - \frac{1}{2}x^2t^2 + \frac{1}{4}x^4t^2 - xt^2e^{-t} - xte^{-t} \\ + \int_0^t \int_0^x (x^2y + te^{-z})u(y, z)dydz$$

$$U(x, t) = xe^t - t$$

$$U(0, 0) = 0$$

$$U(m, 0) = F(m, 0), \quad m = 1, 2 \dots N$$

$$U(0, n) = F(0, n), \quad n = 1, 2 \dots N \quad m, n = 1, 2, \dots N$$

olmak üzere;

$$U(m, n) = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,1} \delta_{l,0} \delta_{m,k} \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!} + \delta_{m,0} \delta_{n,1} + \frac{1}{3} \delta_{m,5} \delta_{n,0} + \delta_{m,1} \delta_{n,1} \\ - \frac{1}{3} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,5} \delta_{l,0} \delta_{m,k} \frac{1}{(n-l)!} - \frac{1}{2} \delta_{m,2} \delta_{n,2} + \frac{1}{4} \delta_{m,4} \delta_{n,2} \\ - \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,1} \delta_{l,2} \delta_{m,k} \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!} - \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,1} \delta_{l,1} \delta_{m,k} \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!} \\ + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{k,2} \delta_{l,0} \frac{1}{(m-k)(n-l)} \left[\sum_{s=0}^{n-l-1} \sum_{r=0}^{m-k-1} \delta_{r,1} \delta_{s,0} U(m-k-r \right. \\ \left. - 1, n-l-s-1) \right] \\ + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{k,0} \delta_{l,1} \frac{1}{(m-k)(n-l)} (-1) \left[\sum_{s=0}^{n-l-1} \sum_{r=0}^{m-k-1} \delta_{r,0} \frac{1}{s!} U(m-k \right. \\ \left. - r-1, n-l-s-1) \right]$$

olarak bulunur. Bulunan $U(h, k)$ çözümler yerine yazılırsa,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(h, k) x^k t^h = t - x + xt + \frac{1}{2!} xt^2 + \frac{1}{3!} xt^3 + \frac{1}{4!} xt^4 + \dots = xe^t - t$$

elde edilir.

4.3.4. Örnek-4

Aşağıdaki iki boyutlu lineer Volterra integral denkleminin diferansiyel dönümüm metodu (DDM) ile çözümü ele alınsın.

$$u(x, t) = x \cos t - \frac{1}{4} x^6 \sin t + \frac{1}{4} x^2 \sin^2 t + \int_0^t \int_0^x (x^2 y^2 - \sin z) u(y, z) dy dz$$

$$U(x, t) = x \cos t$$

$$U(0, 0) = 0$$

$$U(m, 0) = F(m, 0), \quad m = 1, 2 \dots N$$

$$U(0, n) = F(0, n), \quad n = 1, 2 \dots N \quad m, n = 1, 2, \dots N$$

olmak üzere;

$$U(m, n)$$

$$= \frac{1}{n!} \delta_{m,1} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{4(n!)} \delta_{m,6} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,2} \delta_{l,0} \sum_{s=0}^{n-l} \sum_{r=0}^{m-k} \delta_{r,0} \delta_{m-k-r,0} \frac{1}{s! (n-l-s)!} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{(n-l-s)\pi}{2}$$

$$+ \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{k,2} \delta_{l,0} \frac{1}{(m-k)(n-l)} \left[\sum_{s=0}^{n-l-1} \sum_{r=0}^{m-k-1} \delta_{r,2} \delta_{s,0} U(m-k-r-1, n-l-s-1) \right] - \frac{1}{mn} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\delta_{k,0} \frac{1}{l!} \sin \frac{n\pi}{2} \right) U(m-k-1, n-l-1)$$

olarak bulunur. Bulunan $U(h, k)$ çözümler yerine yazılırsa,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(h, k) x^k t^h = x - \frac{1}{2!} xt^2 + \frac{1}{4!} xt^4 - \frac{1}{6!} xt^6 + \frac{1}{8!} xt^8 + \dots = x \cos t$$

elde edilir.



5. RASTGELE İKİ BOYUTLU VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM DAVRANIŞLARI

Bu bölümde Diferansiyel Dönüşüm Metodunun (DDM) kullanarak iki boyutlu Volterra integral denklemler, karışık Volterra–Fredholm Denklemler ve iki boyutlu rastgele lineer ve lineer olmayan Volterra integral denklem sistemlerin yaklaşık analitik çözümü, olasılık karakterleri incelenerek beklenen değeri, varyansı ve güven aralıkları bulunmuştur.

5.1. Rastgele İki Boyutlu Volterra İntegral Denklemlerin Çözüm Davranışları için Örnekler

5.1.1. Örnek-1

Aşağıdaki iki boyutlu lineer Volterra integral denkleminin diferansiyel dönüşüm metodu (DDM) ile çözümü ele alınsın.

$$u(x, t) = Bx \cos t - \frac{B}{4} x^6 \sin t + \frac{B}{4} x^2 \sin^2 t + \int_0^t \int_0^x (x^2 y^2 - \sin z) u(y, z) dy dz \quad (5.1)$$

burada $B \sim U(\alpha, \beta)$ düzgün dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere, rastgele iki boyutlu lineer Volterra integral denkleminin yaklaşık analitik çözümünü DDM yöntemi ile çözünüz ve olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$U(x, t) = Bx \cos t$$

$$U(0, 0) = 0$$

$$U(m, 0) = F(m, 0), \quad m = 1, 2 \dots N$$

$$U(0, n) = F(0, n), \quad n = 1, 2 \dots N \quad m, n = 1, 2, \dots N$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
& U(m, n) \\
&= \frac{B}{n!} \delta_{m,1} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{B}{4(n!)} \delta_{m,6} \sin \frac{n\pi}{2} \\
&+ \frac{B}{4} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,2} \delta_{l,0} \sum_{s=0}^{n-l} \sum_{r=0}^{m-k} \delta_{r,0} \delta_{m-k-r,0} \frac{1}{s! (n-l-s)!} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{(n-l-s)\pi}{2} \\
&+ \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{k,2} \delta_{l,0} \frac{1}{(m-k)(n-l)} \left[\sum_{s=0}^{n-l-1} \sum_{r=0}^{m-k-1} \delta_{r,2} \delta_{s,0} U(m-k-r-1, n-l-s \right. \\
&\left. - 1) \right] - \frac{1}{mn} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\delta_{k,0} \frac{1}{l!} \sin \frac{n\pi}{2} \right) U(m-k-1, n-l-1)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bulunan $U(h, k)$ çözümler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(h, k) x^k t^h = Bx - \frac{1}{2!} Bxt^2 + \frac{1}{4!} Bxt^4 - \frac{1}{6!} Bxt^6 + \frac{1}{8!} Bxt^8 + \dots \\
&= Bx \cos t
\end{aligned}$$

elde edilir.

$B \sim U(\alpha, \beta)$ düzgün dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere,

$$M_z(t) = E[e^{tz}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t}$$

$B \sim U(\alpha, \beta)$, $E[B] = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $Var[B] = \frac{(\alpha-\beta)^2}{12}$ bu momentleri kullanırken, x ve y bağımsız rastgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$, bu yaklaşık formüller kullanılarak,

$$A, B \sim U(\alpha, \beta)$$

Beklenen Değeri;

$$E[u(x, t)] = E[Bx \cos t] = x \cos t E(B) = \frac{x \cos t (\alpha + \beta)}{2}$$

Varyansı;

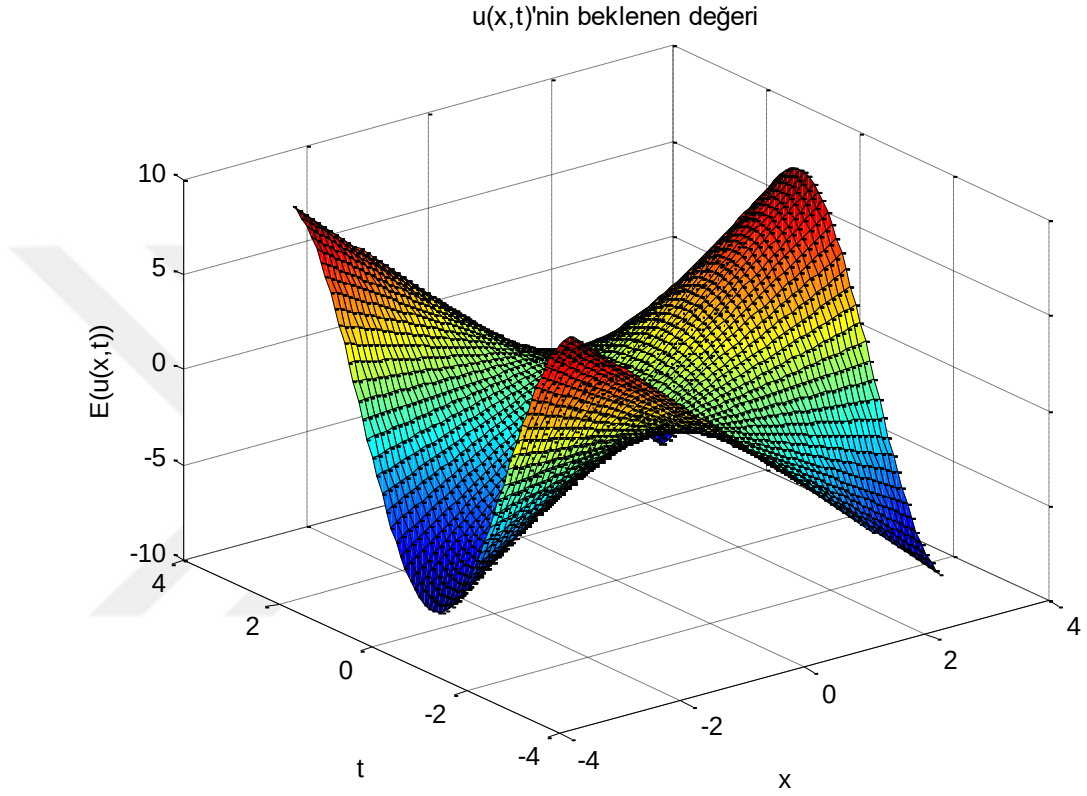
$$Var[u(x, t)] = Var[Bx \cos t] = x^2 \cos^2 t Var[B] = x^2 \cos^2 t \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$$

hesaplanabilir.

$B \sim U(\alpha, \beta)$ için özel olarak $\alpha = 2$, $\beta = 1$ seçilirse,

Beklenen Değer;

$$E[u(x, t)] = \frac{3x \cos t}{2}$$

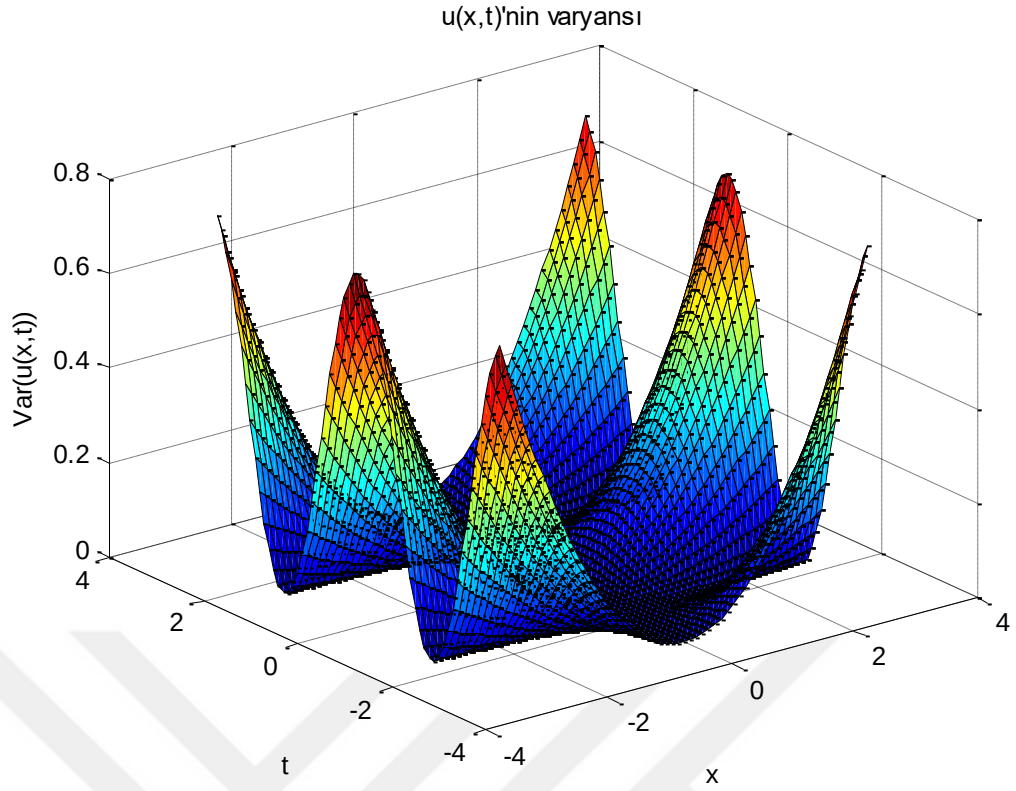


Şekil 1. $\alpha = 2$, $\beta = 1$ değerleri için (5.1) denkleminin beklenen değeri

ve

Varyansı;

$$Var[u(x, t)] = \frac{x^2 \cos^2 t}{12}$$



Şekil 2. $\alpha = 2$, $\beta = 1$ değerleri için (5.1) denkleminin varyansı

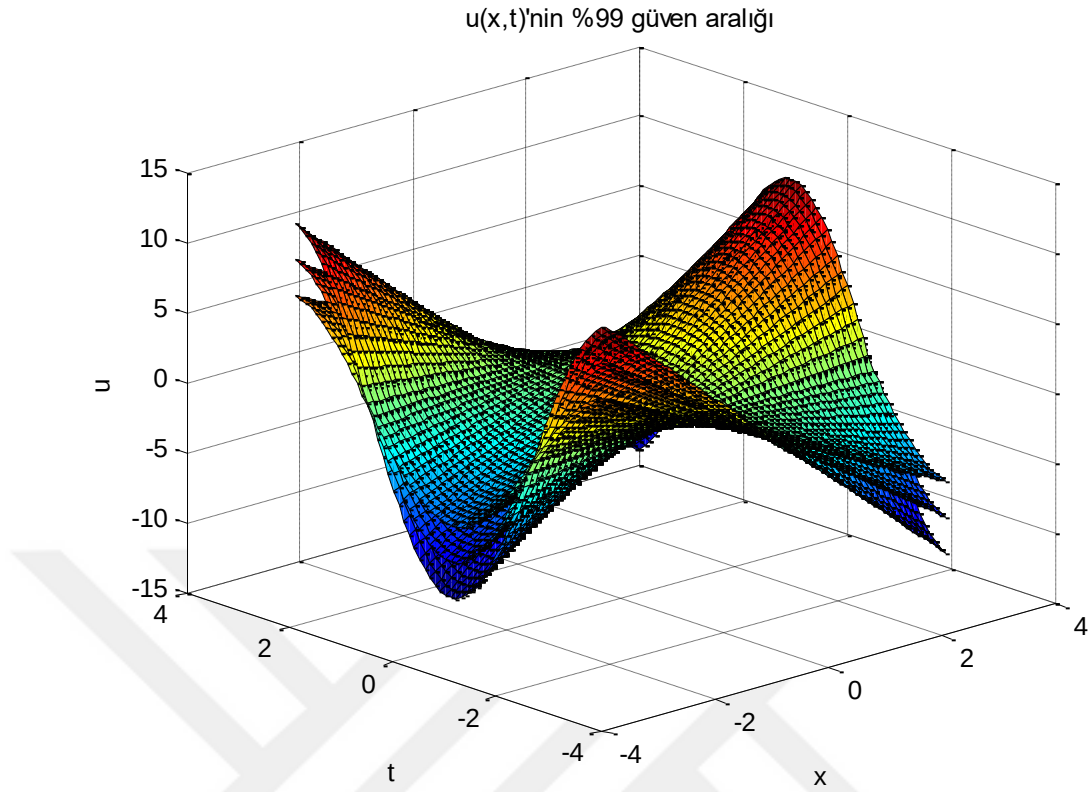
bulunur.

Alt Güven Sınırı;

$$AGS = E(u(x)) - 3\sqrt{Var(u(x))}$$

Üst Güven Sınırı;

$$UGS = E(u(x)) + 3\sqrt{Var(u(x))}$$



Şekil 3. $\alpha = 2$, $\beta = 1$ değerleri için (5.1) denkleminin $K=3$ için güven aralıkları

olarak bulunur.

5.1.2. Örnek-2

Aşağıdaki iki boyutlu lineer Volterra integral denkleminin diferansiyel dönümüm metodu (DDM) ile çözümü ele alınsın.

$$u(x, t) = Cxe^{-t} - Dt + \frac{C}{3}x^5 + Dxt - \frac{C}{2}x^2t^2 + \frac{D}{4}x^4t^2 - \frac{C}{3}x^5e^t - Dxt^2e^{-t} - Dxt e^{-t} + \int_0^t \int_0^x (x^2y + te^{-z})u(y, z)dydz \quad (5.2)$$

burada $C \sim G(\alpha, \beta)$ Gamma dağılıma ve $D \sim Beta(a, b)$ sahip rastgele değişkenler olmak üzere, rastgele iki boyutlu lineer Volterra integral denkleminin yaklaşık analitik çözümünü DDM yöntemi ile çözünüz ve olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$U(x, t) = Cxe^t - Dt$$

$$U(0,0) = 0$$

$$U(m, 0) = F(m, 0), \quad m = 1, 2 \dots N$$

$$U(0, n) = F(0, n), \quad n = 1, 2 \dots N \quad m, n = 1, 2, \dots N$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} U(m, n) = & C \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,1} \delta_{l,0} \delta_{m,k} \frac{1}{(n-l)!} - E \delta_{m,0} \delta_{n,1} + \frac{1}{3} \delta_{m,5} \delta_{n,0} + E \delta_{m,1} \delta_{n,1} \\ & - \frac{C}{2} \delta_{m,2} \delta_{n,2} + \frac{E}{4} \delta_{m,4} \delta_{n,2} - \frac{C}{3} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,5} \delta_{l,0} \delta_{m,k} \frac{1}{(n-l)!} \\ & - E \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,1} \delta_{l,2} \delta_{m,k} \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!} - E \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,1} \delta_{l,1} \delta_{m,k} \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!} \\ & + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{k,2} \delta_{l,0} \frac{1}{(m-k)(n-l)} \left[\sum_{s=0}^{n-l-1} \sum_{r=0}^{m-k-1} \delta_{r,1} \delta_{s,0} U(m-k-r \right. \\ & \left. - 1, n-l-s-1) \right] \\ & + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{k,0} \delta_{l,1} \frac{1}{(m-k)(n-l)} (-1) \left[\sum_{s=0}^{n-l-1} \sum_{r=0}^{m-k-1} \delta_{r,0} \frac{1}{s!} U(m-k \right. \\ & \left. - r-1, n-l-s-1) \right] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bulunan $U(h, k)$ çözümler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(h, k) x^k t^h = Cx - Dt + Cxt + \frac{1}{2!} Cxt^2 + \frac{1}{3!} Cxt^3 + \frac{1}{4!} Cxt^4 + \dots \\ &= Cxe^t - Dt \end{aligned}$$

elde edilir.

$C \sim G(\alpha, \beta)$ Gamma dağılıma sahip bir rastgele değişken ve $\alpha = 4$ ve $\beta = 3$ olsun.

Gamma dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}$$

dir. $x \sim G(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri ve varyansı,

$$E[x] = \alpha\beta ,$$

$$E[x^2] = (\alpha + \alpha^2)\beta^2,$$

$$Var[x] = \alpha\beta^2$$

hesaplanabilir.

$D \sim Beta(a, b)$ özel olarak $a = 1, b = 2$ seçilirse $D \sim Beta(a = 1, b = 2)$ ortalama kare hesap ve DDM kullanılırsa, beklenen değer ve varyans

$$E[u(x, t)] = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n E(u(k, h)) x^k t^h$$

ve beta dağılımının moment çıkaran fonksiyonu

$$\begin{aligned} M_x(a, b, t) &= E[e^{tx}] \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{a+r}{a+b+r} \right) \frac{t^k}{k!} \end{aligned}$$

$x \sim Beta(a, b)$ ise,

$$E[x] = \frac{a}{a+b},$$

$$Var(x) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

Bu momentler kullanılırken, x ve y bağımsız rasgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$, bu yaklaşık formüller kullanılarak, beklenen değer ve varyans, aşığıdaki gibi hesaplanabilir. Bu momentler kullanılarak ve x ve y rasgele bağımsız değişken ise $E[x.y] = E[x]E[y]$ olduğundan, beklenen değer ve varyansın yaklaşık formülleri

$$E[u(x, t)] = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n E(u(k, h)) x^k t^h$$

$$E[u(x, t)] = E[C x e^t - D t]$$

$$= x e^t E(C) - t E(D)$$

$$= xe^t(\alpha\beta) - t\left(\frac{a}{a+b}\right)$$

$$Var[u(x,t)] = Var[C xe^t - D t]$$

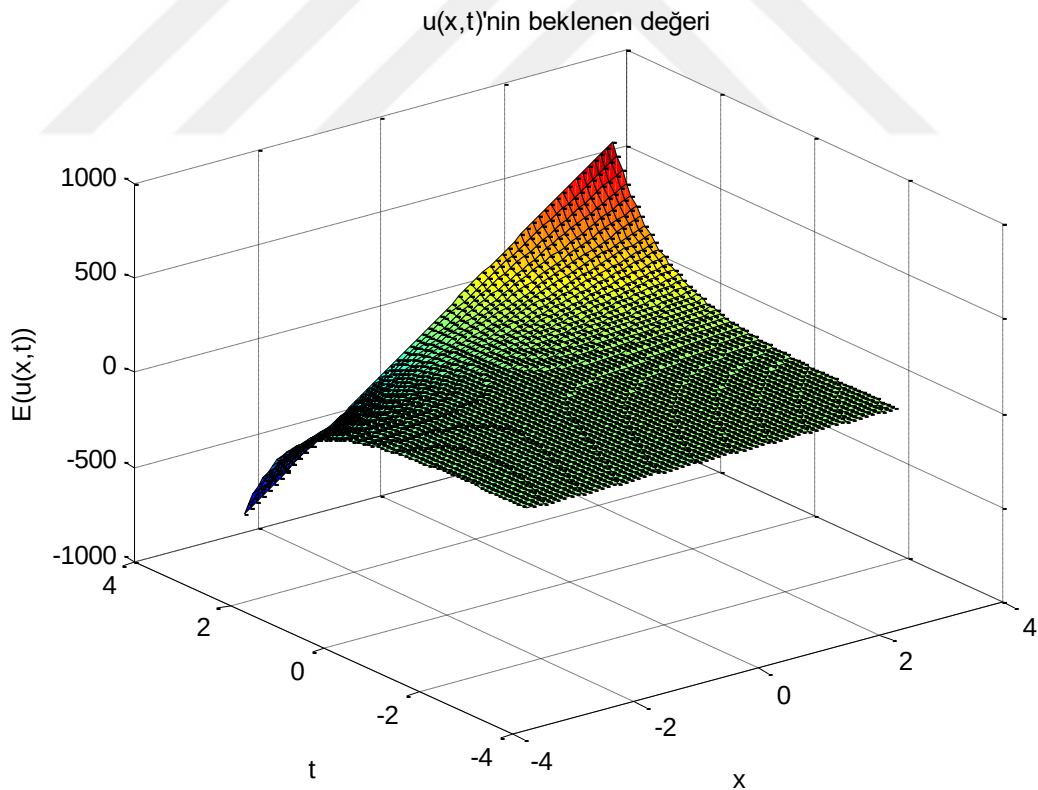
$$= x^2 e^{2t} Var(C) + t^2 Var(D)$$

$$= x^2 e^{2t} \alpha\beta^2 + \frac{abt^2}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

Özel olarak, $\alpha = 4, \beta = 3$ seçilirse, $C \sim G(\alpha = 4, \beta = 3)$ ve $D \sim Beta(a = 1, b = 2)$ için,

Beklenen Değer;

$$E[u(x,t)] = xe^t(\alpha\beta) - t\left(\frac{a}{a+b}\right) = 12xe^t - \frac{t}{3}$$

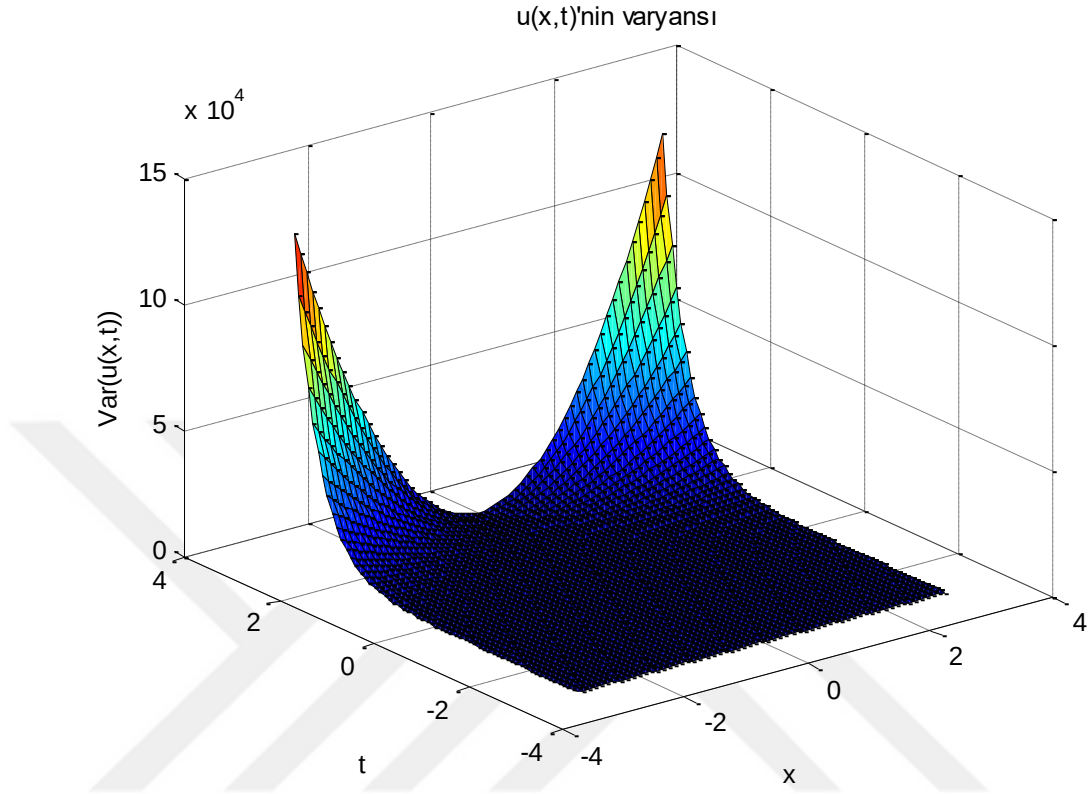


Şekil 4. $\alpha = 4, \beta = 3, a = 1$ ve $b = 2$ değerleri için (5.2) denkleminin beklenen değeri

ve

Varyansı;

$$Var[u(x, t)] = x^2 e^{2t} \alpha \beta^2 + \frac{abt^2}{(a+b)^2(a+b+1)} = 36x^2 e^{2t} + \frac{t^2}{18}$$



Şekil 5. $\alpha = 4, \beta = 3, a = 1$ ve $b = 2$ değerleri için (5.2) denkleminin varyansı

olarak bulunur.

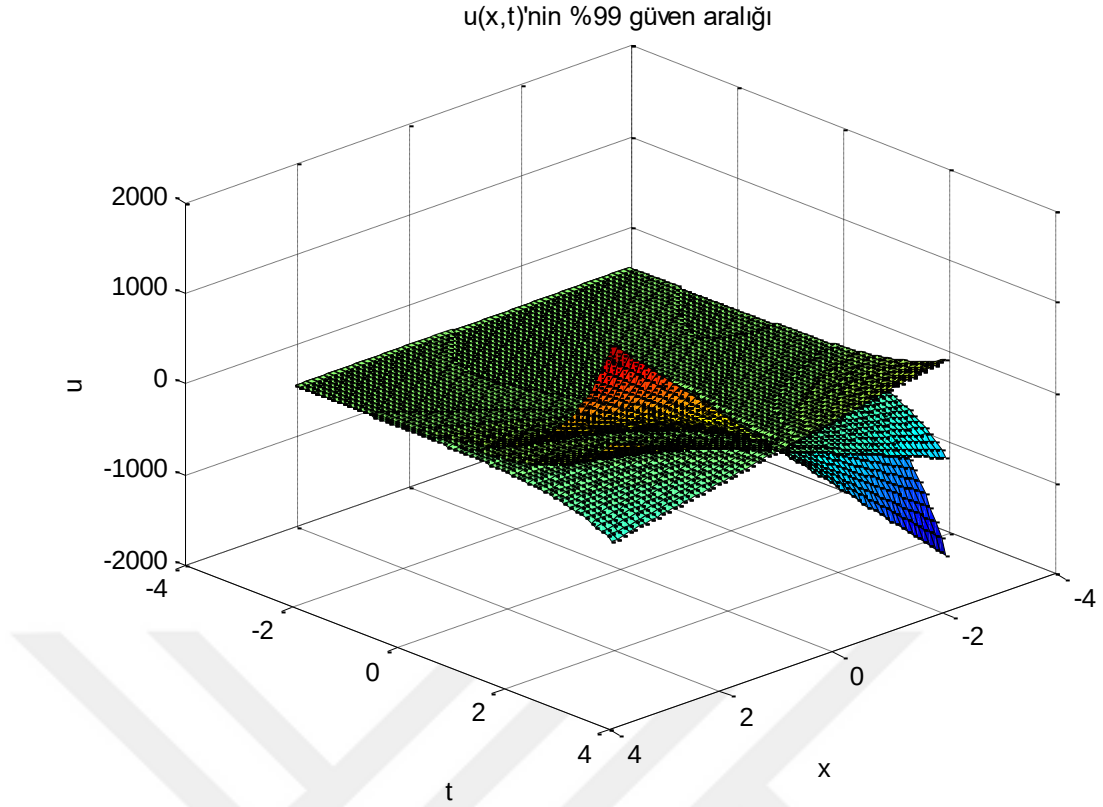
Güven Aralığı;

Alt Güven Sınırı;

$$AGS = E(u(x)) - 3\sqrt{Var(u(x))}$$

Üst Güven Sınırı;

$$UGS = E(u(x)) + 3\sqrt{Var(u(x))}$$



Şekil 6. $\alpha = 4, \beta = 3, a = 1$ ve $b = 2$ değerleri için (5.2) denkleminin $K=3$ için güven aralıkları

olarak bulunur.

5.2 Karışık Volterra-Fredholm İntegral Denklemler

$f(x)$ ve $K(x, t)$ analitik fonksiyonlar olmak üzere, iki ayrı formda

$$u(x) = f(x) + \beta_1 \int_0^x K_1(x, t)u(t)dt + \beta_2 \int_a^b K_2(x, t)u(t)dt \quad (5.3)$$

ya da bu iki formu birleştiren integraller içeren,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \int_a^b K(s, t) u(t)dt ds \quad (5.4)$$

integral denklemlerdir.

Yukarıdaki (5.3) denkleminde birbirinden ayrık Volterra ve Fredholm integralleri kullanılırken, (5.4) denkleminde ise Volterra ve Fredholm integralleri içeren çift katlı bir integral kullanılmıştır. Ayrıca tüm integral denklemlerde olduğu gibi bilinmeyen $u(x)$

fonksiyonu hem integral işareti altında hem de dışında yer alıyorsa ikinci tip, eğer sadece integral işareti altında yer alıyorsa birinci tip olarak adlandırılır.

5.2.1. Örnek-1

Aşağıdaki karışık Volterra-Fredholm integral denklemi ele alınsın.

$$u(x) = Bx e^x - Be^{-1}x^2 + \int_0^x \int_{-1}^1 ru(s) dt ds \quad (5.5)$$

burada $B \sim U(\alpha, \beta)$ düzgün dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere, rastgele karışık Volterra-Fredholm integral denkleminin analitik çözümünü Taylor seri çözüm metodu ile çözünüz ve olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm:

$u(x)$ fonksiyonunun seri açılımı

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(5.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = Bx e^x - Be^{-1}x^2 + \int_0^x \int_{-1}^1 r \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n dt ds$$

Denklemler açık şekilde yazılarak, aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitliğinden,

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \dots \\ &= B \left(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{24} + \frac{x^6}{120} + \frac{x^7}{720} \right) - B \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \dots \right) x^2 + \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \frac{a_8}{9} \right) x^2 \\ &= Bx + \left[B - B \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} \right) + a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \frac{a_8}{9} \right] x^2 \\ & \quad + \left(\frac{B}{2} \right) x^3 + \left(\frac{B}{6} \right) x^4 + \left(\frac{B}{24} \right) x^5 + \left(\frac{B}{120} \right) x^6 + \left(\frac{B}{720} \right) x^7 + \dots \end{aligned}$$

$$a_0 = 0, a_1 = B, a_2 = B, a_3 = \frac{B}{2}, a_4 = \frac{B}{6}, a_5 = \frac{B}{24}, a_6 = \frac{B}{120}, \dots$$

bulunur. Böylece bulunan değerler seride yerine yazılırsa tam çözüm,

$$u(x) = B \left(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{24} + \frac{x^6}{120} + \frac{x^7}{720} + \dots \right) = Bxe^x$$

olarak bulunur.

$B \sim U(\alpha, \beta)$ düzgün dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere,

$$M_z(t) = E[e^{tz}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t}$$

$B \sim U(\alpha, \beta)$, $E[B] = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $Var[B] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$ bu momentleri kullanırken, x ve y bağımsız rastgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$, bu yaklaşık formüller kullanılarak,

$$A, B \sim U(\alpha, \beta)$$

Beklenen Değeri;

$$E[u(x)] = E[Bx e^x] = x e^x E(B) = \frac{x e^x (\alpha + \beta)}{2}$$

Varyansı;

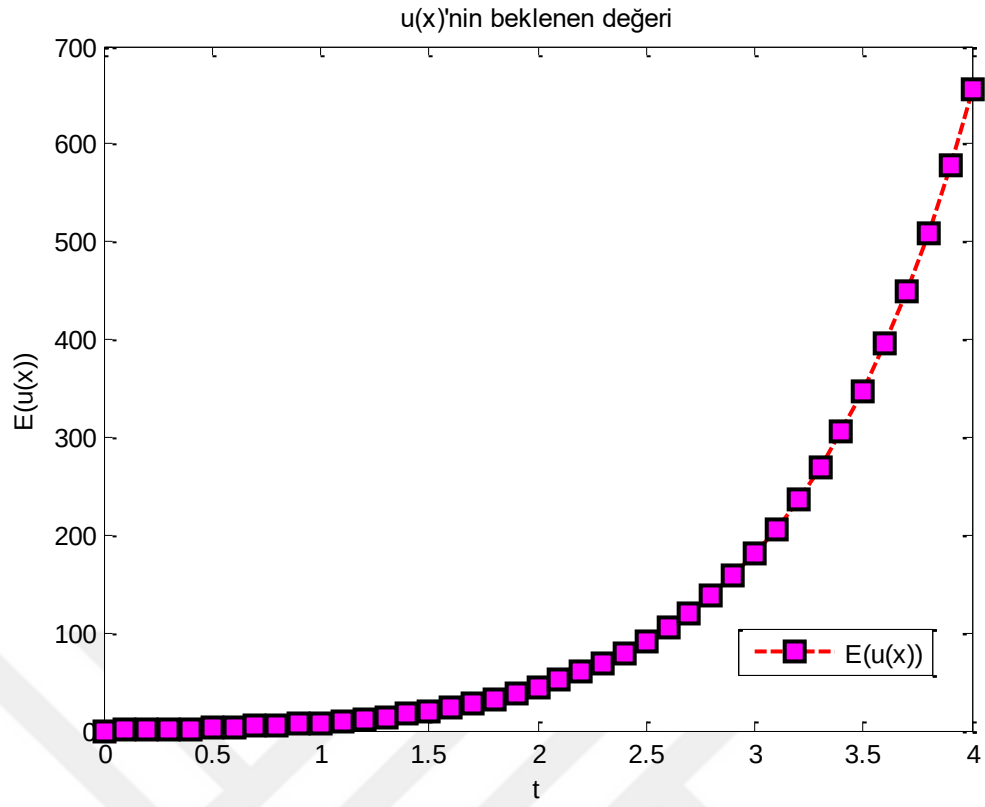
$$Var[u(x)] = Var[Bx e^x] = x^2 e^{2x} Var[B] = x^2 e^{2x} \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$$

hesaplanabilir.

$B \sim U(\alpha, \beta)$ için özel olarak $\alpha = 1$, $\beta = 2$ seçilirse,

Beklenen Değer;

$$E[u(x)] = \frac{3x e^x}{2}$$

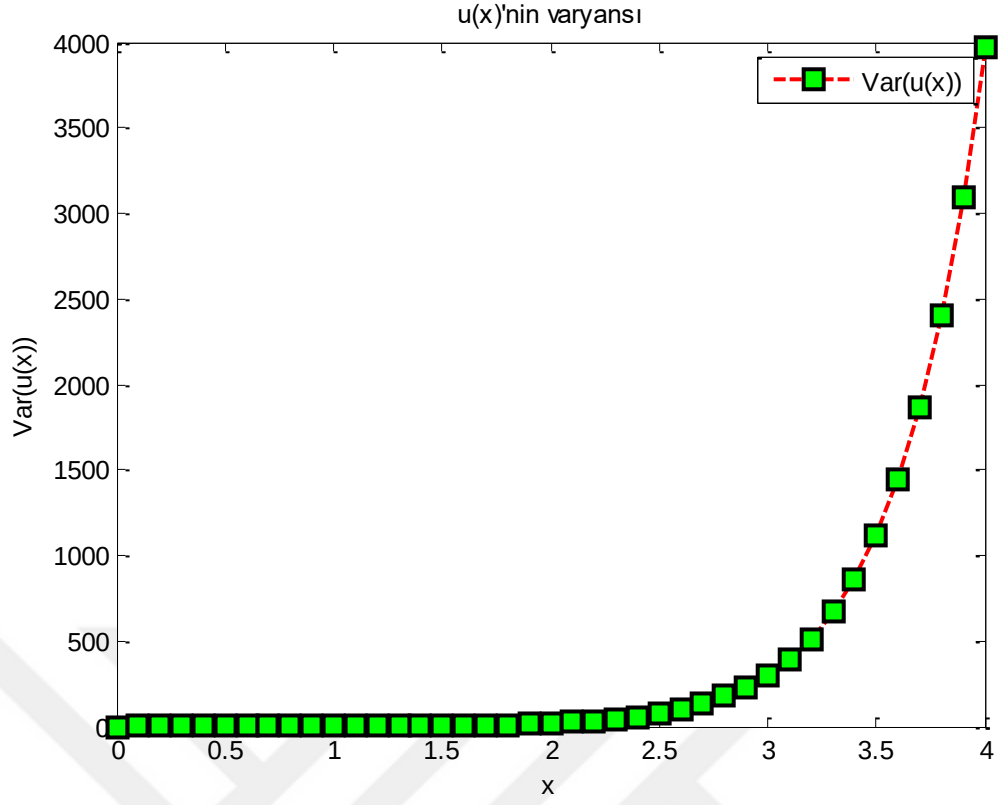


Şekil 7. $\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (5.5) denkleminin beklenen değeri

ve

Varyansı;

$$Var[u(x)] = \frac{x^2 e^{2x}}{12}$$



Şekil 8. $\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (5.5) denkleminin varyansı

bulunur.

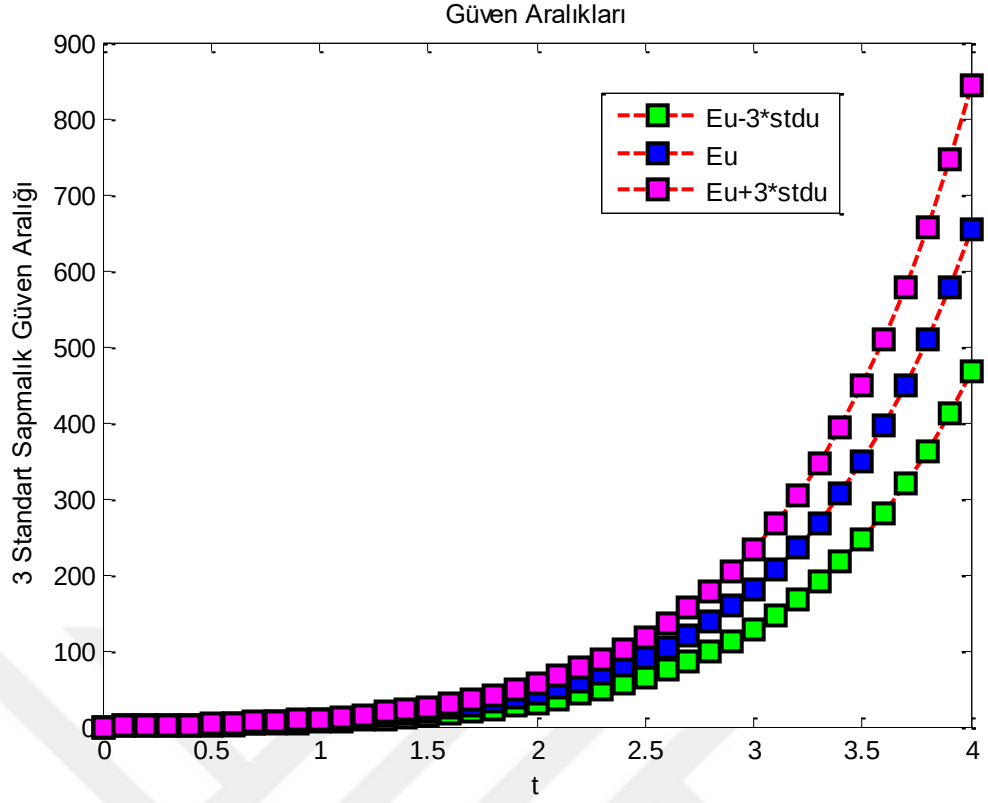
Güven Aralıkları;

Alt Güven Sınırı;

$$AGS = E(u(x)) - 3\sqrt{Var(u(x))}$$

Üst Güven Sınırı;

$$UGS = E(u(x)) + 3\sqrt{Var(u(x))}$$



Şekil 9 . $\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (5.5) denkleminin $K=3$ için güven aralıkları bulunur.

5.3. İki Boyutlu Rastgele Lineer Volterra İntegral Denklem Sistemi

Bu kısımda iki boyutlu rastgele lineer Volterra integral denklem sistemlerinin beklenen değeri, varyansı ve güven aralıkların hesaplanacaktır.

5.3.1. Örnek-1

Aşağıdaki iki boyutlu lineer Volterra integral denklem sistemi ele alınsın.

$$u(x, t) = Ae^x t^2 + \frac{Bx^3}{3} - \frac{At^3}{3} + \frac{Ae^x t^3}{3} - \frac{Be^t x^3}{3} + \int_0^x \int_0^t [v(r, s) - u(r, s)] dr ds \quad (5.6)$$

$$v(x, t) = Be^t x^2 - \frac{Bx^3}{3} + \frac{At^3}{3} - \frac{Ae^x t^3}{3} + \frac{Be^t x^3}{3} + \int_0^x \int_0^t [u(r, s) - v(r, s)] dr ds \quad (5.7)$$

Burada $A \sim G(\alpha, \beta)$ Gamma ve $B \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere, rastgele iki boyutlu lineer Volterra integral denkleminin yaklaşık analitik çözümünü İndirgenmiş DDM yöntemi ile çözünüz ve olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm:

Yukarıda verilen denklemlerin tam çözümleri

$$u(x, t) = Ax^2t^2$$

$$v(x, t) = Be^tx^2$$

(5.6) ve (5.7) ile verilen denklemlerin her iki tarafının indirgenmiş diferensiyel dönüşümü alınırsa, aşağıdaki iteratif ilişki elde edilebilir

$$U_k(x) = Ae^x\delta_{k,2} + \frac{Bx^3}{3}\delta_{k,0} - \frac{A}{3}\delta_{k,3} + \frac{Ae^x}{3}\delta_{k,3} - \frac{Bx^3}{3k!} - \frac{1}{k} \int_0^x \left[\sum_{k_1=0}^{k-1} U_{k-1}(r) \right] dr + \frac{1}{k} \int_0^x \left[\sum_{k_1=0}^{k-1} V_{k-1}(r) \right] dr$$

$$V_k(x) = \frac{Bx^2}{k!} - \frac{Bx^3}{3}\delta_{k,0} + \frac{A}{3}\delta_{k,3} - \frac{Ae^x}{3}\delta_{k,3} + \frac{Bx^3}{3k!} + \frac{1}{k} \int_0^x \left[\sum_{k_1=0}^{k-1} U_{k-1}(r) \right] dr - \frac{1}{k} \int_0^x \left[\sum_{k_1=0}^{k-1} V_{k-1}(r) \right] dr$$

iteratif hesaplamalardan sonra ,

$$U_k(x) = \begin{cases} Ax^2, k = 2 \\ 0, \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$V_0(x) = Bx^2, V_1(x) = Bx^2, V_2(x) = \frac{Bx^2}{2!}, V_3(x) = \frac{Bx^2}{3!}, \dots$$

$$u(x, t) = Ax^2t^2$$

$$v(x, t) = Be^t x^2$$

olarak bulunur.

$A \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ Gamma dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere, Gamma dağılımının moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}. \quad (5.8)$$

$A \sim G(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin birinci moment ve varyansı

$E[A] = \alpha\beta, \text{Var}[B] = \alpha\beta^2$ bu momentleri kullanırken, x ve y bağımsız rastgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$, bağıntısından faydalanarak beklenen değer ve varyans hesaplanabilir.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, Normal dağılımının moment çıkaran fonksiyonundan

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)} \quad (5.9)$$

$B \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri ve varyansı

$$E[B] = \mu, E[B^2] = \mu^2 + \sigma^2 \text{ ve } \text{Var}[B] = \sigma^2$$

Bu momentler kullanılarak ve x ve y rasgele bağımsız değişken ise $E[x.y] = E[x]E[y]$ olduğundan, beklenen değer ve varyansın yaklaşık formülleri

$$E[u(x, t)] = E[Ax^2 t^2]$$

$$= x^2 t^2 E(A)$$

$$= x^2 t^2 \alpha \beta$$

$$E[v(x, t)] = E[Be^t x^2]$$

$$= x t^2 E(B)$$

$$= e^t x^2 \mu$$

$$\text{Var}[u(x, t)] = \text{Var}[Ax^2 t^2]$$

$$= x^4 t^4 \text{Var}(A)$$

$$= x^4 t^4 \alpha \beta^2$$

$$\text{Var}[v(x, t)] = \text{Var}[B e^t x^2]$$

$$= e^{2t} x^4 \text{Var}(B)$$

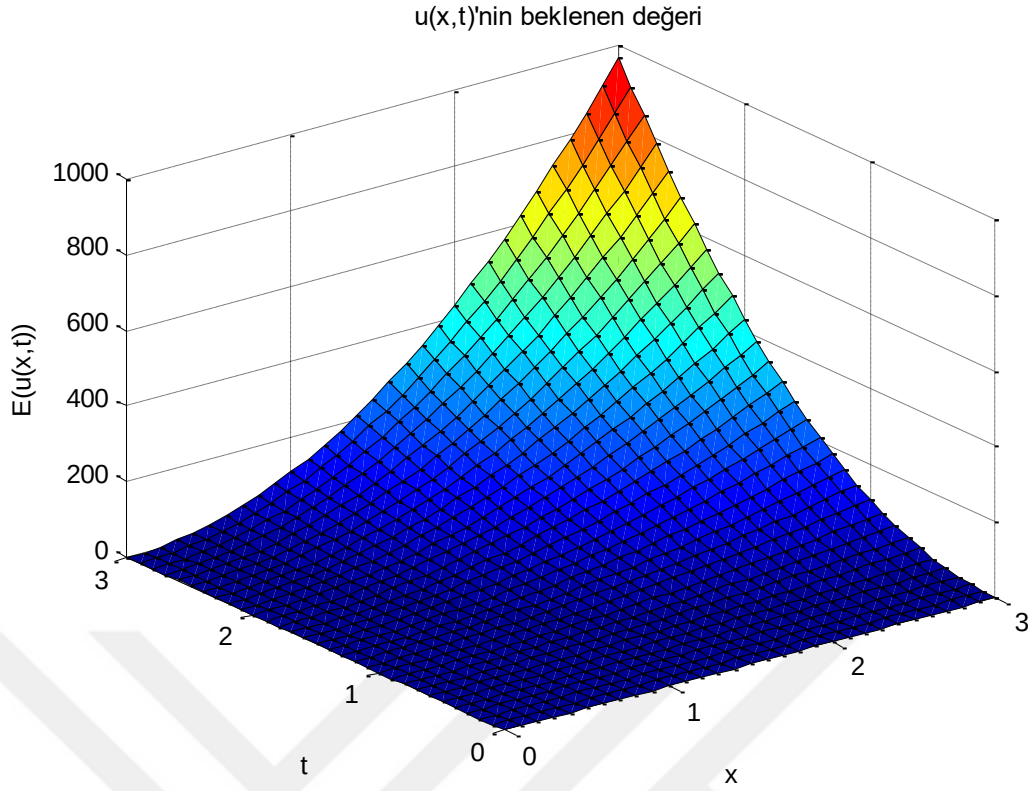
$$= e^{2t} x^4 \sigma^2$$

Özel olarak, $\alpha = 4, \beta = 3, \mu = 5$ ve $\sigma^2 = 4$ seçilirse, $A \sim \text{Gamma}(\alpha = 4, \beta = 3)$ ve $B \sim N(\mu = 5, \sigma^2 = 4)$ için,

Beklenen Değer;

$$E[u(x, t)] = x^2 t^2 \alpha \beta = 12 x^2 t^2$$

$$E[v(x, t)] = e^t x^2 \mu = 5 e^t x^2$$

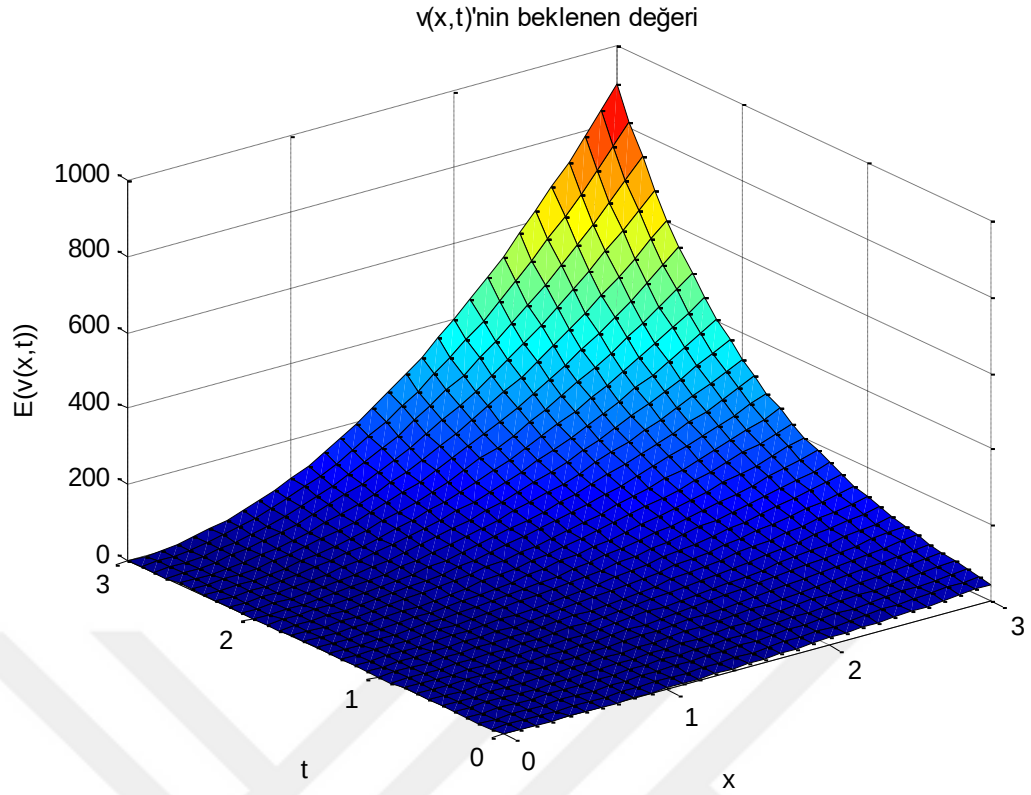


Şekil 10. $\alpha = 4, \beta = 3, \mu = 5$ ve $\sigma^2 = 4$ değerleri için (5.6) denkleminin beklenen değeri

$u(x, t)$ 'nin beklenen değeri yukarıda verilmiştir (Şekil 10). Rastgele değişkenlerin varyanslarının uç değerleri şu şekilde elde edilir:

$$\min [E(u(x, t))] = 0$$

$$\max[E(u(x, t))] = 972$$



Şekil 11. $\alpha = 4, \beta = 3, \mu = 5$ ve $\sigma^2 = 4$ değerleri için (5.7) denkleminin beklenen değeri

$v(x,t)$ 'nin beklenen değeri yukarıda verilmiştir (Şekil 11). Rastgele değişkenlerin varyanslarının uç değerleri şu şekilde elde edilir:

$$\min [E(v(x,t))] = 0$$

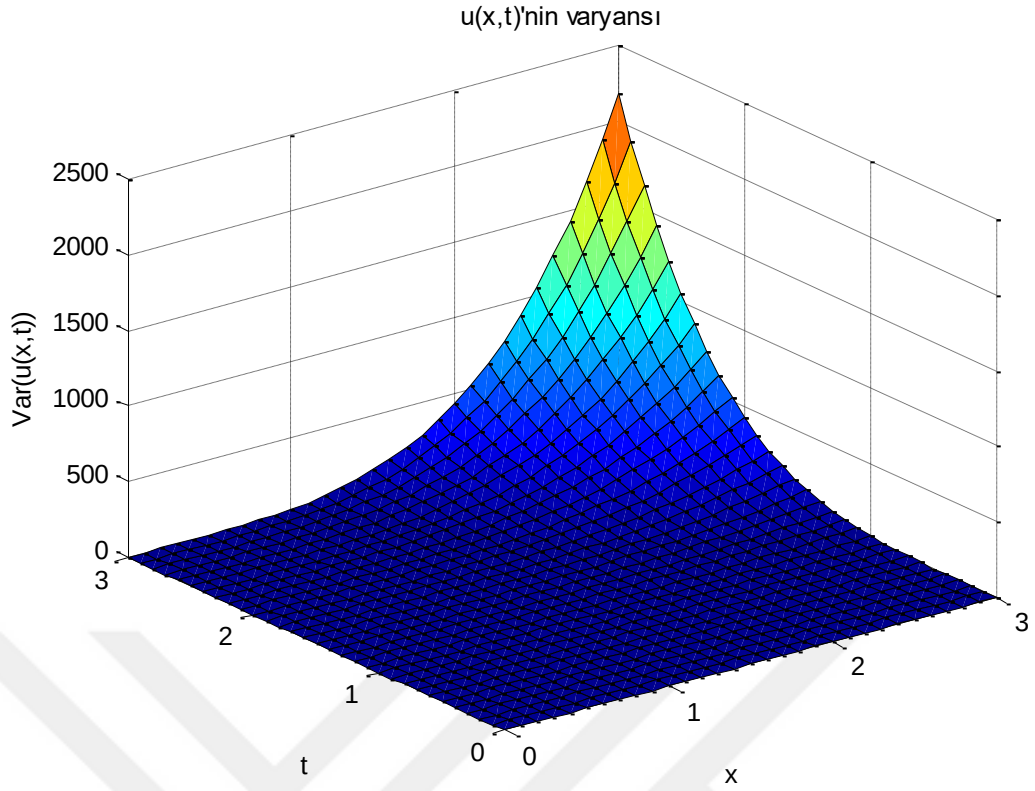
$$\max[E(v(x,t))] = 903,8492$$

ve

Varyansı;

$$\text{Var}[u(x,t)] = x^4 t^4 \alpha \beta^2 = 36 x^4 t^4$$

$$\text{Var}[v(x,t)] = e^{2t} x^4 \sigma^2 = 4 e^{2t} x^4$$



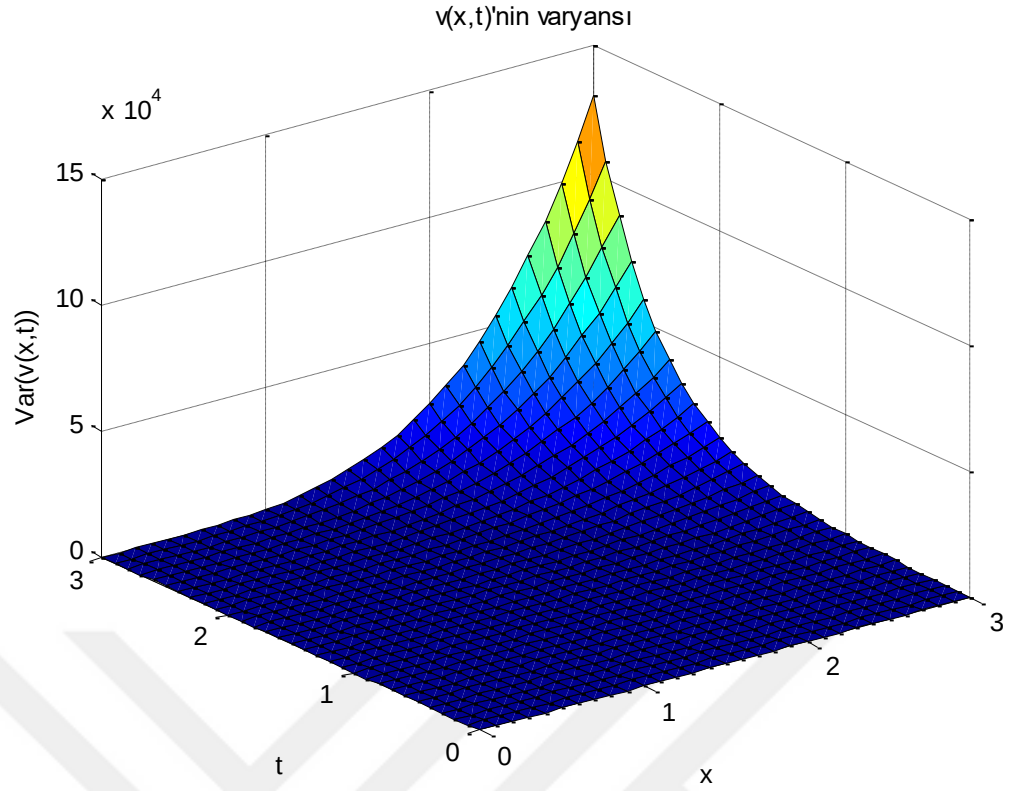
Şekil 12. $\alpha = 4, \beta = 3, \mu = 5$ ve $\sigma^2 = 4$ değerleri için (5.6) denkleminin varyansı

olarak bulunur.

$u(x, t)$ 'nin varyansı yukarıda verilmiştir (Şekil 12). Rastgele değişkenlerin varyanslarının uç değerleri şu şekilde elde edilir:

$$\min [Var(u(x, t))] = 0$$

$$\max[Var(u(x, t))] = 2361,96$$



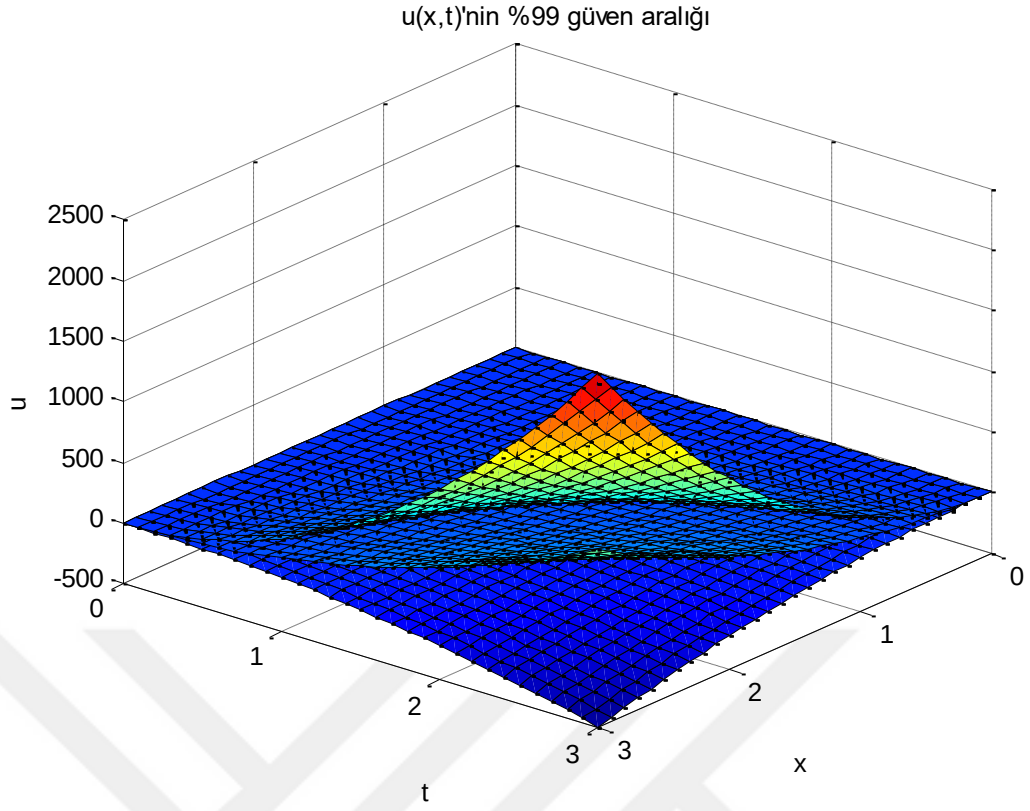
Şekil 13. $\alpha = 4, \beta = 3, \mu = 5$ ve $\sigma^2 = 4$ değerleri için (5.7) denkleminin varyansı

olarak bulunur.

$v(x, t)$ 'nin varyansı yukarıda verilmiştir (Şekil 13). Rastgele değişkenlerin varyanslarının uç değerleri şu şekilde elde edilir:

$$\min [Var(v(x, t))] = 0$$

$$\max[Var(v(x, t))] = 13,0710$$

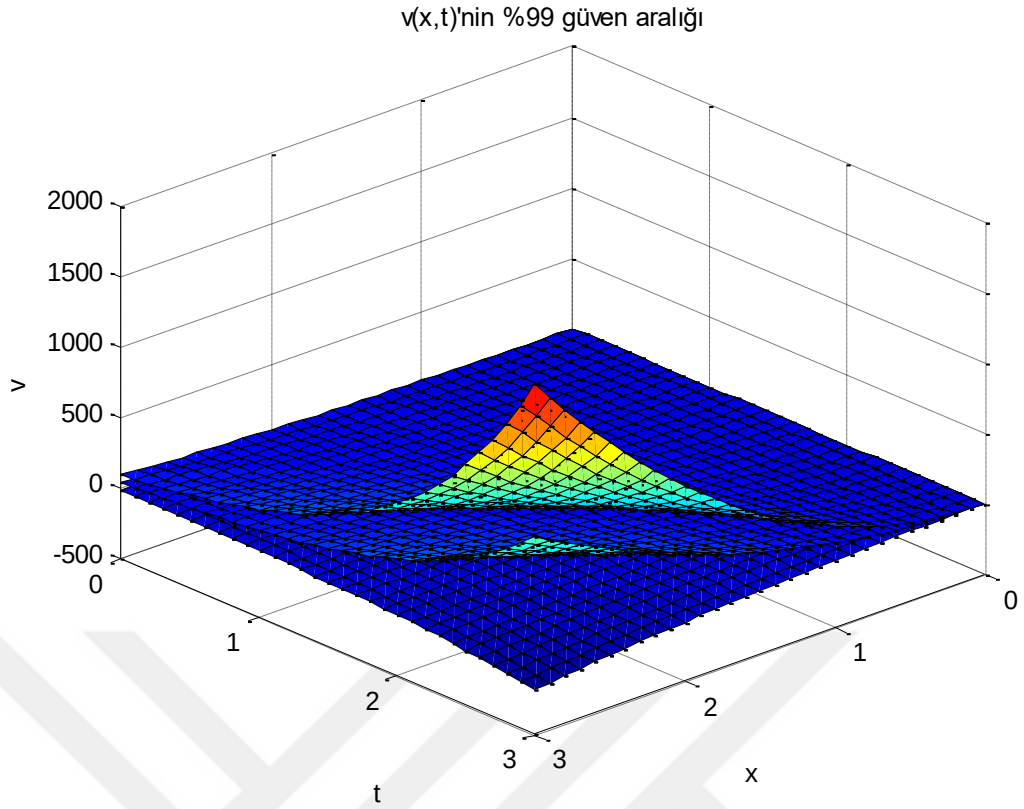


Şekil 14. $\alpha = 4, \beta = 3, \mu = 5$ ve $\sigma^2 = 4$ değerleri için (5.6) denkleminin güven aralıkları olarak bulunur.

$u(x, t)$ 'nin güven aralıkları Şekil 14'te verilmiştir. Güven aralıklarının uç değerleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \min(E(u(x, t)) - 3std(u(x, t))) &= -486 \\ \max(E(u(x, t)) + 3std(u(x, t))) &= 2430. \end{aligned}$$

Burada $K = 3$ yaklaşık %99 güven aralığı verir.



Şekil 15. $\alpha = 4, \beta = 3, \mu = 5$ ve $\sigma^2 = 4$ değerleri için (5.7) denkleminin güven aralıkları

olarak bulunur.

$v(x, t)$ 'nin güven aralıkları Şekil 15'te verilmiştir. Güven aralıklarının uç değerleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \min \left(E(v(x, t)) - 3\text{std}(v(x, t)) \right) &= -180.7698 \\ \max(E(v(x, t)) + 3\text{std}(v(x, t))) &= 1988.5. \end{aligned}$$

Burada $K = 3$ yaklaşık %99 güven aralığı verir.

5.4. İki Boyutlu Rastgele Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemler Sistemi

Bu kısımda iki boyutlu rastgele lineer olmayan Volterra integral denklemlerinin beklenen değeri, varyansı ve güven aralıklarının hesaplanacaktır.

5.4.1. Örnek-1

Aşağıdaki iki boyutlu lineer olmayan Volterra integral denklem sistemini diferansiyel dönümüm metodu (DDM) ile çözümü ele alınsın.

$$u(x, t) = Ax^2t^2 - \frac{A^2x^5t^5}{25} + \frac{B^2x^5t^3}{15} + \int_0^x \int_0^t (u(r, s)^2 - v(r, s)^2) dr ds \quad (5.10)$$

$$v(x, t) = Bxt^2 - \frac{A^2x^5t^5}{25} + \frac{B^3x^7t^4}{28} + \int_0^x \int_0^t (u(r, s)^2 - v(r, s)^3) dr ds \quad (5.11)$$

burada $A \sim U(\alpha, \beta)$ düzgün dağılıma ve $B \sim Beta(a, b)$ sahip rastgele değişkenler olmak üzere, rastgele iki boyutlu lineer olmayan Volterra integral denkleminin yaklaşık analitik çözümünü İndirgenmiş DDM yöntemi ile çözünüz ve olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm:

Yukarıda verilen denklemlerin tam çözümleri

$$u(x, t) = Ax^2t^2; v(x, t) = Bxt^2.$$

(5.10) ve (5.11) ile verilen denklemlerin her iki tarafının indirgenmiş diferansiyel dönüşümü alınırsa, aşağıdaki iteratif ilişki elde edilebilir.

$$\begin{aligned} U_k(x) &= CAx^2\delta(k-2) - \frac{A^2x^5\delta(k-5)}{25} + \frac{B^2x^5\delta(k-3)}{15} \\ &\quad + \frac{1}{k} \int_0^x \left[\sum_{k_1=0}^k U_{k_1}(r) U_{k-k_1-1}(r) \right] dr - \frac{1}{k} \int_0^x \left[\sum_{k_1=0}^k V_{k_1}(r) V_{k-k_1-1}(r) \right] dr \\ V_k(x) &= Bx\delta(k-2) - \frac{A^2x^5\delta(k-5)}{25} + \frac{B^3x^7\delta(k-4)}{28} \\ &\quad + \frac{1}{k} \int_0^x \left[\sum_{k_1=0}^k U_{k_1}(r) U_{k-k_1-1}(r) \right] dr \\ &\quad - \frac{1}{k} \int_0^x \left[\sum_{k_1=0}^{k-1} \sum_{k_2=0}^{k_1} V_{k_2}(r) V_{k-k_2}(r) V_{k-k_1-1}(r) \right] dr \end{aligned}$$

İteratif hesaplamalardan sonra ,

$$U_k(x) = \begin{cases} x^2, k = 2 \\ 0, aksi takdirde \end{cases}, V_k(x) = \begin{cases} x, k = 2 \\ 0, aksi takdirde \end{cases}$$

$$u(x, t) = Ax^2t^2$$

$$v(x, t) = Bxt^2$$

olarak bulunur.

$A \sim U(\alpha, \beta)$ düzgün dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere,

$$M_z(t) = E[e^{tz}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t}$$

$A \sim U(\alpha, \beta)$, $E[A] = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $Var[A] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$ bu momentleri kullanırken, x ve y bağımsız rastgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$, bağıntısından faydalanarak beklenen değer ve varyans hesaplanabilir. $B \sim Beta(a, b)$ beta dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere, beta dağılımının moment çıkaran fonksiyonu

$$M_x(a, b, t) = E[e^{tx}]$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{a+r}{a+b+r} \right) \frac{t^k}{k!}$$

$x \sim Beta(a, b)$ ise, beklenen değer ve varyans

$$E[x] = \frac{a}{a+b}$$

$$Var(x) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

Bu momentler kullanılarak ve x ve y rasgele bağımsız değişken ise $E[x \cdot y] = E[x]E[y]$ olduğundan, beklenen değer ve varyansın yaklaşık formülleri

$$E[u(x, t)] = E[Ax^2t^2]$$

$$= x^2t^2E(A)$$

$$= x^2 t^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$E[v(x, t)] = E[Bxt^2]$$

$$= xt^2 E(B)$$

$$= xt^2 \left(\frac{a}{a+b} \right)$$

$$Var[u(x, t)] = Var[Ax^2 t^2]$$

$$= x^4 t^4 Var(A) = x^4 t^4 \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \right),$$

$$Var[v(x, t)] = Var[Bxt^2]$$

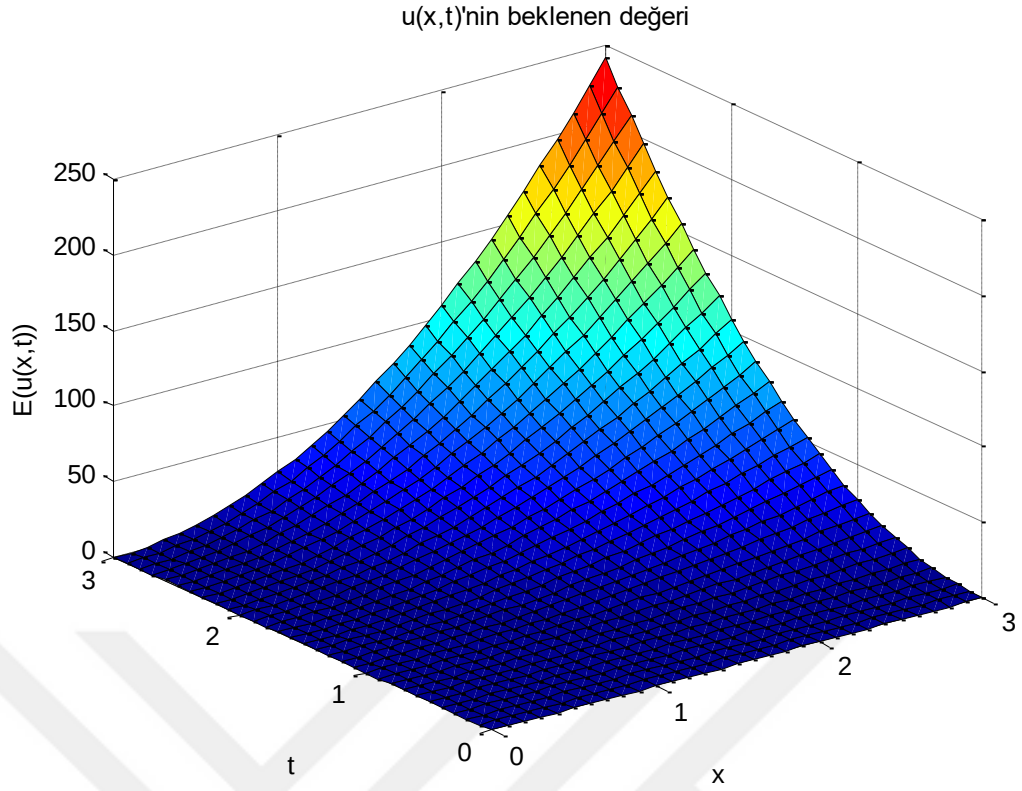
$$= x^2 t^4 Var(B) = \frac{abx^2 t^4}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

Özel olarak, $\alpha = 2, \beta = 4, a = 2$ ve $b = 3$ seçilirse, $A \sim U(\alpha = 2, \beta = 4)$ ve $B \sim Beta(a = 2, b = 3)$ için,

Beklenen Değer;

$$E[u(x, t)] = x^2 t^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 3x^2 t^2$$

$$E[v(x, t)] = xt^2 \left(\frac{a}{a+b} \right) = \frac{2}{5} xt^2$$



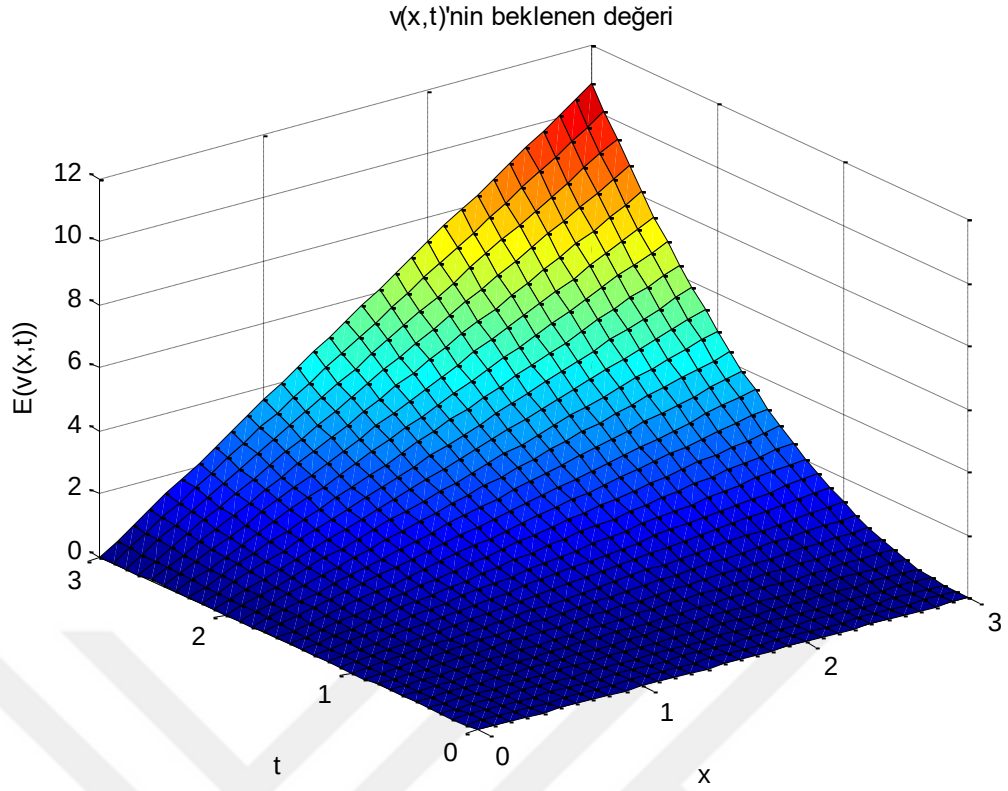
Şekil 16. $\alpha = 2, \beta = 4, a = 2$ ve $b = 3$ değerleri için (5.10) denkleminin beklenen değeri

$u(x,t)$ 'nin beklenen değeri yukarıda verilmiştir (Şekil 16). Rastgele değişkenlerin varyanslarının uç değerleri şu şekilde elde edilir:

$$\min [E(u(x, t))] = 0)$$

ve

$$\max[E(u(x, t))] = 243$$



Şekil 17. $\alpha = 2, \beta = 4, a = 2$ ve $b = 3$ değerleri için (5.11) denkleminin beklenen değeri

$v(x,t)$ 'nin beklenen değeri yukarıda verilmiştir (Şekil 17). Rastgele değişkenlerin varyanslarının uç değerleri şu şekilde elde edilir:

$$\min [E(v(x,t))] = 0$$

ve

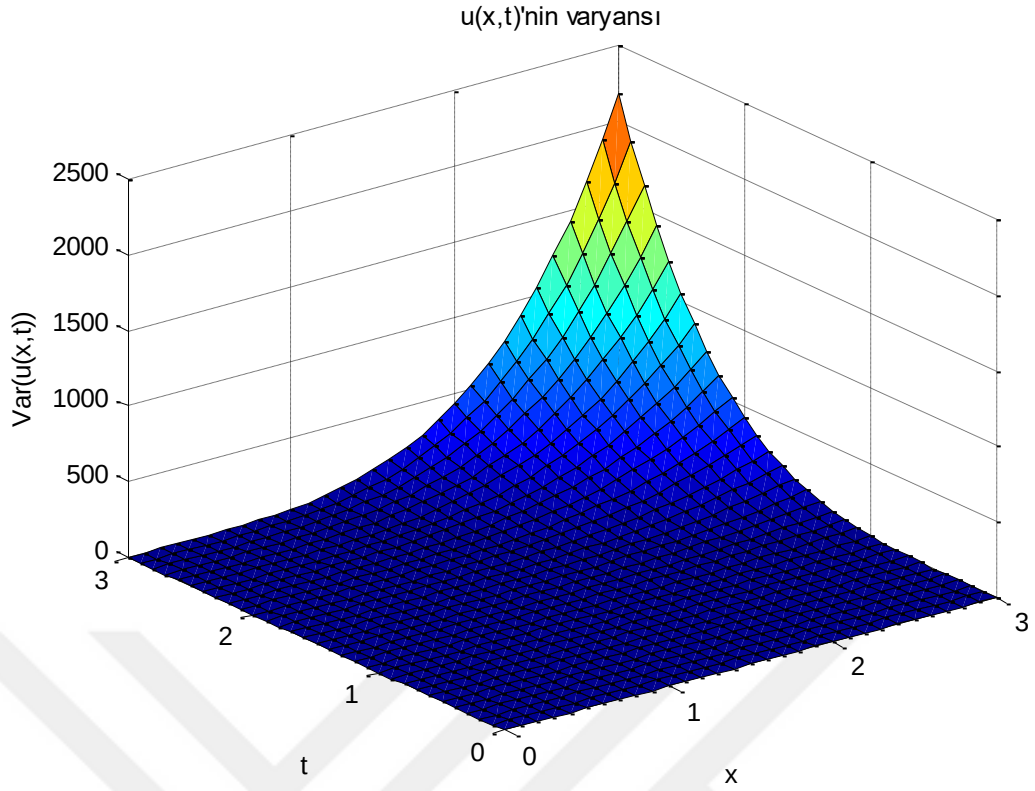
$$\max[E(v(x,t))] = 10.8$$

ve

Varyansı;

$$\text{Var}[u(x,t)] = x^4 t^4 \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \right) = \frac{x^4 t^4}{3}$$

$$\text{Var}[v(x,t)] = \frac{abx^2 t^4}{(a+b)^2(a+b+1)} = \frac{x^2 t^4}{25}$$

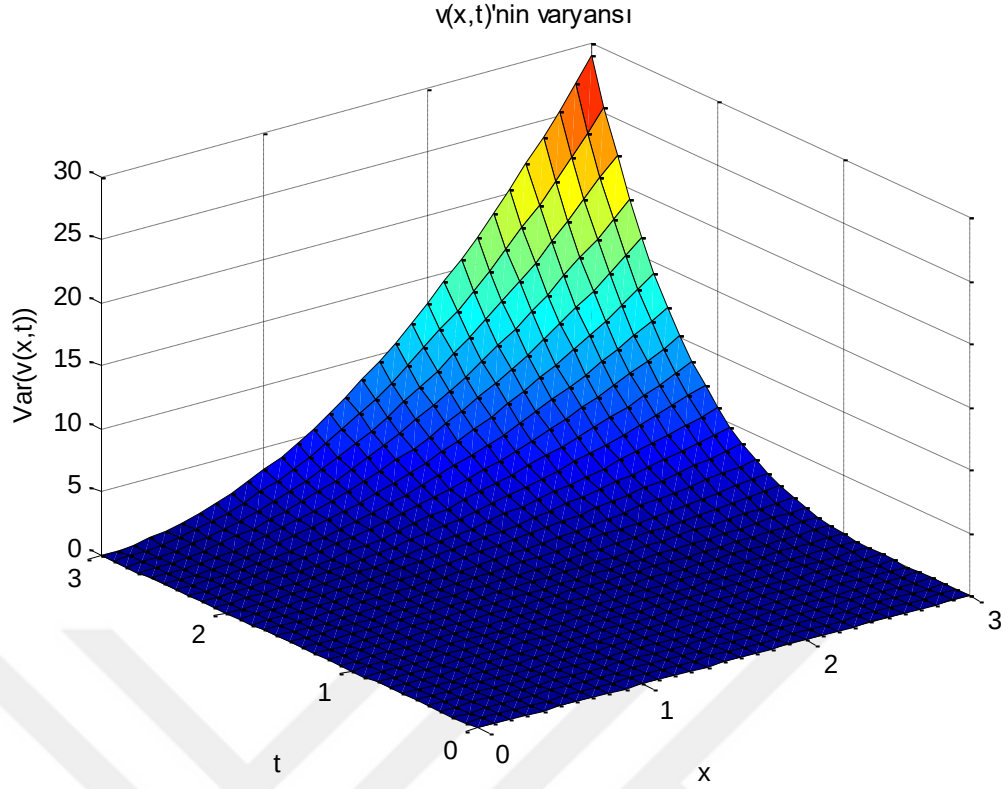


Şekil 18. $\alpha = 2, \beta = 4, a = 2$ ve $b = 3$ değerleri için (5.10) denkleminin varyansı

olarak bulunur.

$u(x, t)$ 'nin varyansı yukarıda verilmiştir (Şekil 18). Rastgele değişkenlerin varyanslarının uç değerleri şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \min [Var(u(x, t))] &= 0 \\ &ve \\ \max [Var(u(x, t))] &= 2187 \end{aligned}$$



Şekil 19. $\alpha = 2, \beta = 4, a = 2$ ve $b = 3$ değerleri için (5.11) denkleminin varyansı

olarak bulunur.

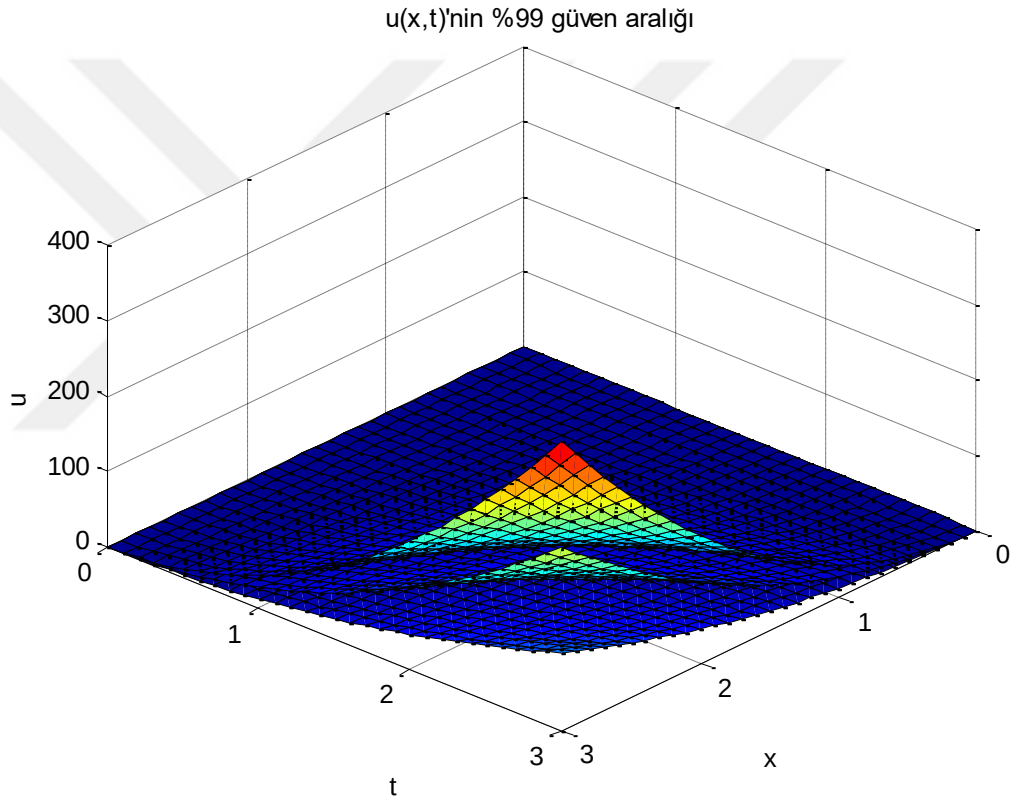
$v(x, t)$ 'nin varyansı yukarıda verilmiştir (Şekil 19). Rastgele değişkenlerin varyanslarının uç değerleri şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \min [Var(v(x, t))] &= 0 \\ &ve \\ \max[Var(v(x, t))] &= 29.16 \end{aligned}$$

Beklentilerin güven aralıklarına ilişkin sonuçlar aşağıda verilmektedir (Şekil 20 ve Şekil 21). Burada güven aralıklarını elde etmek için üç standart sapma kullanılır ve kesikli çizgi güven aralığının üst sınırını, kesikli noktalı çizgiler ise aralığın alt uçlarını gösterir. Rastgele değişkenlerin beklenen değerleri için güven aralıkları,

$$\begin{aligned} (E[u(x, t)] - K \cdot std(u(x, t)), \\ E(u(x, t)) + K \cdot std(u(x, t)) \end{aligned}$$

eşittir ve bu standart sapmalardan elde edilebilir. $K = 3$ için bu formül, normal dağılan rastgele değişkenin yaklaşık beklenen değeri için yaklaşık %99 güven aralığı verir (Merdan v.d,2018). MATLAB (2013a) ile %99 güven aralığı çizilirse Şekil 20.'deki grafik elde edilir. Üç sigma kuralı olarak bilinen bu popüler kural, normal dağılan bir değişken için değerlerin yaklaşık %99,73'ünün ortalamanın yaklaşık üç standart sapması içinde olduğunu gösterir. Bu nedenle, uygun parametreler kullanılarak, sırasıyla sınırlı ve sınırsız destekli iki sürekli dağıtım için sonuçların varyasyonlarını karşılaştıracacağız. Uygun parametreler, rastgele etkiler için neredeyse tüm olası değerlerin her iki dağılım için de aynı aralıktan çekilmesini sağlayacaktır.



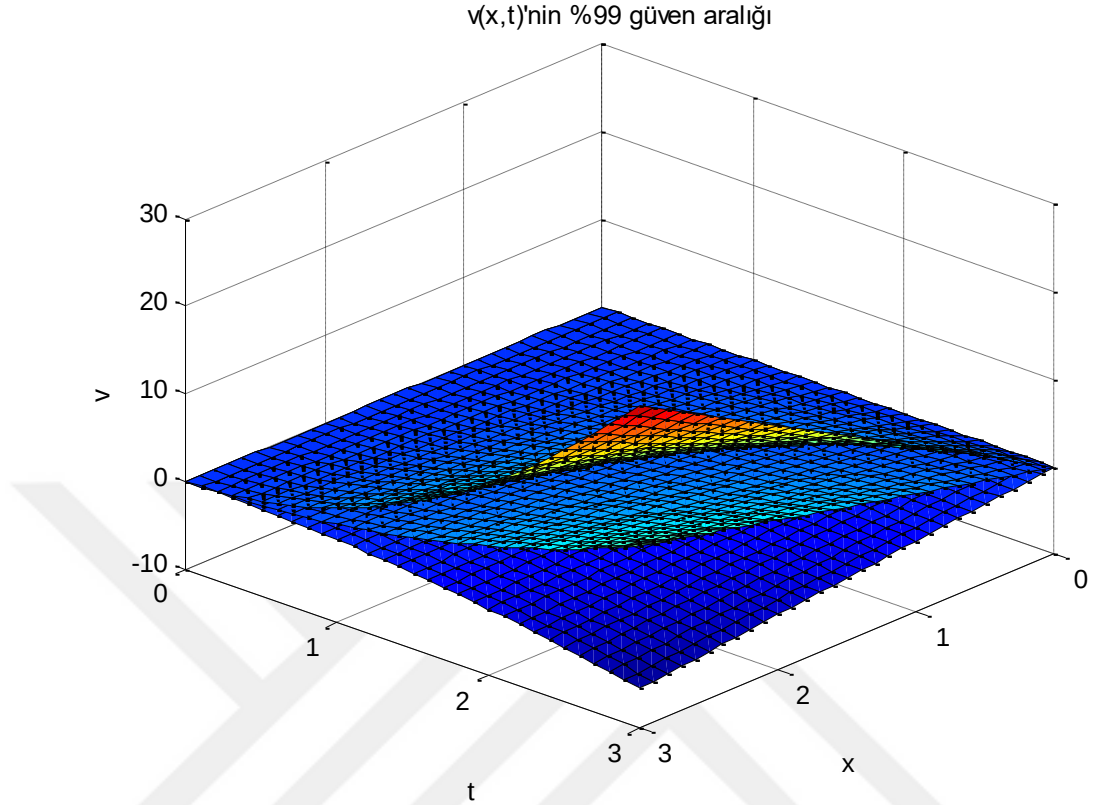
Şekil 20. $\alpha = 2, \beta = 4, a = 2$ ve $b = 3$ değerleri için (5.10) denkleminin güven aralıkları

olarak bulunur.

$u(x, t)$ 'nin güven aralıkları Şekil 20'te verilmiştir. Güven aralıklarının uç değerleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \min(E(u(x, t)) - 3std(u(x, t))) &= 0,0025 \\ \max(E(u(x, t)) + 3std(u(x, t))) &= 383.2961 \end{aligned}$$

Burada $K = 3$ yaklaşık %99 güven aralığı verir.



Şekil 21. $\alpha = 2, \beta = 4, a = 2$ ve $b = 3$ değerleri için (5.11) denkleminin güven aralıkları

olarak bulunur.

$v(x, t)$ 'nin güven aralıkları Şekil 21'te verilmiştir. Güven aralıklarının uç değerleri şu şekildedir:

$$\min \left(E(v(x, t)) - 3\text{std}(v(x, t)) \right) = -5.4$$

$$\max(E(v(x, t)) + 3\text{std}(v(x, t))) = 27$$

Burada $K = 3$ yaklaşık %99 güven aralığı verir.

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasından elde edilen bulgulardan çıkarılan sonuca göre, Seri çözüm metodu kullanılarak; Volterra integral denkleminin çözümü, Fredholm integro diferansiyel denkleminin çözümü, Volterra – Fredholm integral denkleminin çözümü, karışık Volterra – Fredholm integral denkleminin Taylor seri çözüm metodu kullanılarak çözülmüştür.

Diferansiyel Dönüşüm Metodunu (DDM) ile iki boyutlu Volterra integral denklemlerin yaklaşık analitik çözümlerine daha kolay ve hızlı ulaşıldığı sonucuna varılmıştır. İki boyutlu Volterra integral denklemler ve sistemler ile ilgili literatürde Türkçe kaynağın az olduğu görülmüştür.

İki boyutlu Volterra integral denklem ve denklem sistemlerinin katsayıları veya başlangıç koşulları sürekli olasılık dağılımlarından düzgün, normal, gamma ve beta seçilerek rastgele hale getirilmiştir.

Rastgele iki boyutlu Volterra integral denklem ve sistemlerinin çözümleri Diferansiyel Dönüşüm Metodunun (DDM) ile elde edilerek, rastgele çözüm davranışlarından en önde gelen beklenen değer, varyans ve güven aralıklarını hesaplayarak Maple veya Matlab paket programı yardımıyla çizilerek bulunan sonuçlar yorumlanmıştır.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM) ile ilgili literatür özeti ve genel bilgiler verilmiş olup yöntemin integral denklemlere uygulanması gösterilmiştir.

İntegral denklemlerin 1,2,3 ve n-boyuta kadar olan kısmı Diferansiyel Dönüşüm Metodu kullanarak nasıl çözülebileceği gösterilmiştir.

Rastgele hale getirilen iki boyutlu Volterra integral denkleminin çözümü Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile elde edilip, çözümlerinin olasılık karakteristiklerinden en çok kullanışlı olan beklenen değeri, varyans ve güven aralıkları hesaplanmıştır. Elde edilen çözümlerin grafikleri Maple veya Matlab programı yardımıyla çizdirilmiştir.

Tezde yapılan çalışmaya ilaveten, iki ve daha yüksek boyutlu rastgele integral denklemlerinin yaklaşık analitik çözümleri literatürde yaygın olarak kullanılan Adomian Ayırıştırma Metodu, Varyasyonel İterasyon Metodu, Homotopi Analiz Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodu ile bulunabilir.

KAYNAKÇA

- Adomian, G. ve Rach, R. "Noise terms in decomposition series solution," Comput. Math. Appl. 24(1992): 61-64.
- Adomian, G. Solving Frontier Problems of Physics, The Decomposition Method (Boston: Kluwer, 1994).
- Aksoy, Y., (1998). İntegral Denklemler, Cilt 1, 2.Baskı, Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayım Merkezi, İstanbul.
- Al-Khaled, K. ve Allan, F., (2005). "Decomposition Method for Solving Nonlinear Integro-Differential Equations", Journal of Applied Mathematics and Computing, 19:415-425.
- Arikoglu, A. ve Ozkol, I., (2005). "Solution of Boundary Value Problems for Integro-Differential Equations by Using Differential Transform Method", Applied Mathematics and Computation, 168:1145-1158.
- Arikoglu, A. ve Ozkol, I., (2008). "Solutions of Integral and Integro-Differential Equation Systems by Using Differential Transform Method", Computers and Mathematics with Applications, 56:2411-2417.
- Ayaz, F., (2004). "Solution of the System of Differential Equations by Differential Transform Method", Applied Mathematics and Computation, 147:547-567.
- Chen, C. K. and Ho, S. H. (1996) Application of differential transformation to eigenvalue problems. Applied Mathematics and Computation, 79, 179-188. Chen, C. L. and Liu, Y. C. (1998) Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems. Applied Mathematics and Computation, 95, 155-164.
- Chen, C.K., (1999). "Solving Partial Differential Equations by Two-Dimensional Differential Transform Method", Applied Mathematics and Computation, 106:171-179.
- Chen, C. K. and Chen, S. S. (2004) Application of the differential transformation method to a non-linear conservative system. Applied Mathematics and Computation, 154, 431-441.
- Ertürk, V. S. , Momani, S. and Odibat Z. (2008) Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 1642-1654.
- Evans, M., Hastings, N. ve Peacock, B., 1993. Statistical Distributions. New York: John Wiley

- Feller, W. (1968) An Introduction to Probability Theory and Its Applications. 3rd Edition, John Wiley, Hoboken.
- Ganji, D. D. and Sadighi, A. (2007). Application of Homotopy Perturbation and Variational Iteration Methods to Nonlinear Heat Transfer and Porous Media Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207, 24-34.
- Hassan, A. H. ve I., H., (2002). Different applications for the differential transformation in the differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 2- 3(129), p. 183–201
- Hassan, A. H. ve I., H., (2002). On solving some eigenvalue problems by using a differential Transformation. *Applied Mathematics and Computation*, Issue 127, p. 1–22.
- Jang, M.J., Chen, C.K. ve Liu, Y.C., (2001). “Two-Dimensional Differential Transform for Partial Differential Equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 121:261-270.
- Jang B., (2009). “Comments on Solving a Class of Two-Dimensional Linear and Nonlinear Volterra Integral Equations by the Differential Transform Method”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233:224-230.
- Kajani, M.T. ve Shehni, N.A., (2011). “Solution of Two-Dimensional Integral Equation Systems by Using Differential Transform Method”, *Applications of Mathematics and Computer Engineering*, 29-31 January 2011, Puerto Morelos, 74-77.
- Keskin Y., Oturanç G., 2010 “Reduced differential transform method for generalized KdV Equations”, *Mathematical and Computational Applications*, 15 (3), 382-393.
- Keskin Y., Oturanç G., 2010 “The Reduced Differential Transform Method: a New Approach to Fractional Partial Differential Equations”, *Nonlinear Science Letters A*, 1 (2), 207-218.
- Kurnaz, A. ve Oturanç, G., (2005). The differential transform approximation for the system of ordinary differential equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 6(82), pp. 709-719.
- Larsen, R.J., Marx, M.L., 1986, A Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications (2nd ed), Prentice-Hall
- Linz, P., (1985). Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia.
- Merdan, M., Bekiryazici, Z., Kesemen, T., and Khaniyev, T. (2018). Analyzing the dynamics of Ebola transmission with random effects. *Communications in*

- Mathematical Biology and Neuroscience, 2018, Article ID 22, <https://doi.org/10.28919/cmbn/3822>
- Odibat, Z.M., (2008). “Differential Transform Method for Solving Volterra Integral Equation with Seperable Kernels”, Mathematical and Computer Modelling, 48:1144-1149.
- Özkan, O. and Keskin, Y. (2005) An application of the differential transform method to boundary value problems of the system of integro differential equations. Selçuk Journal of Applied Mathematics, 6, 43-53.
- Saadati, R., Dehghana, M., Vaezpoura, S. M. and Saravi, M. (2009). The Convergence of He’s Variational Iteration Method for Solving Integral Equations. Computers and Mathematics with Applications, 58(11-12), 2167-2171.
- Tari, A., Rahimi, M.Y., Shahmorad, S. ve Talati, F., (2009). “Solving a Class of Two-Dimensional Linear and Nonlinear Volterra Integral Equations by the Differential Transform Method”, Journal of Computational and Applied Mathematics, 228:70-76.
- Toker, M.M., (2008). Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Diferansiyel Transform Metodu ile Çözümü ve Diğer Yöntemlerle Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Tulga, İ., (2006). İntegral Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta.
- Yusufoğlu, E., (2008). “A Homotopy Perturbation Algorithm to Solve a System of Fredholm-Volterra Type Integral Equations”, Mathematical and Computer Modelling, 47:1099-1107.
- Wazwaz, A.M., (2011). Linear and Non-Linear Equations, Springer, Chicago.
- Wazwaz, A.M. Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory (Beijing and Berlin: HEP and Springer, 2009).

ÖZGEÇMİŞ

İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimini Balıkesir’de tamamladı. Lisans eğitimini Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümü’nde tamamladı.

