



**T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

İKİ BOYUTTA HİPERBOLİK KARMAŞIK SAYILAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Filiz AMAÇ

**Danışman
Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ**

**RİZE
2023**

KABUL VE ONAY

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında, Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ danışmanlığında, Filiz AMAÇ tarafından hazırlanan *İki Boyutta Hiperbolik Karmaşık Sayılar* adlı bu tez çalışması, 05/05/2023 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği / oy çokluğuyla başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı, Adı SOYADI	İmza
Başkan :	Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ	
Üye :	Dr. Öğr. Mehmet Akif İNCE	
Üye :	Dr. Öğr. Üyesi Sümeyye GÜR MAZLUM	

ETİK BEYAN

Matematik Tezli Yüksek Lisans Programından mezun olmak üzere teslim ettiğim “İki Boyutta Hiperbolik Karmaşık Sayılar” adlı tezime, bilim ve araştırma etiği prensiplerine riayet ederek tarafımdan yazılmıştır.

Tez çalışmamda, başka kaynaklardan aktarılan bütün bilgi ve alıntılar, Enstitünüz Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak açıkça gösterilmiştir. Kaynağı gösterilenler dışında kalan bütün bilgiler uygun araştırma yöntemi kullanılarak tarafımdan edinilmiş ve esere bu şekilde yansıtılmıştır. Şahsıma ait olmayan hiçbir bilgi, kasıt veya kusurlar, şahsıma aitmiş gibi gösterilmemiştir. İnternet kaynakları dâhil, sahibine/kaynağına atıf yapılmaksızın hiçbir bilgi kullanılmamıştır. Aksinin ortaya çıkması halinde doğacak bütün hukuki, idari, akademik ve etik sorumluluk tarafıma ait olacaktır. Eserin tesliminden sonra herhangi bir zamanda, bilim etiğine aykırılık tespit edilmesi ve / veya eserimle ilgili intihal veya intihal şeklinde anlaşılacak bir durum ortaya çıkması halinde; Üniversiteniz ve eğitim kadronuzun hiçbir şekilde sorumlu tutulmayacağını hür irademle kabul, beyan ve taahhüt ederim.

05 / 05 / 2023

Filiz AMAÇ

ÖN SÖZ

“İki Boyutta Hiperbolik Karmaşık Sayılar” adlı tez çalışmamın hazırlanmasında bilgi, tecrübe ve katkılarından dolayı çok değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ’a teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Bu süreçte yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarıma, her zaman emeklerini üzerimde hissettiğim anneme, babama ve kardeşlerim ve çocuklarım Ahmet Tuna ve Ayşe Zehra’ya teşekkür ederim. Son olarak beni asla yalnız bırakmayan, her koşul ve şartta yanımda olan eşim Adem AMAÇ ’a teşekkür ederim.

Filiz AMAÇ
2023 / RİZE

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	I
ETİK BEYAN.....	II
ÖN SÖZ	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÖZET	VI
ABSTRACT.....	VII
KISALTMALAR.....	VIII
ŞEKİLLER LİSTESİ	IX
GİRİŞ	1
1. GENEL BİLGİLER	3
2. HİPERBOLİK İKİ-KARMAŞIK SAYILARIN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ	6
2.1. Ön Bilgiler	6
2.2. Hiperbolik İki-Karmaşık Sayıların Temel Özellikleri	12
3. HİPERBOLİK İKİ-KARMAŞIK SAYILARIN GEOMETRİK GÖSTERİMİ.....	16
4. İKİ-KARMAŞIK SAYININ ÜSTEL VE TRİGONOMETRİK FORMLARI	23
5. İKİ-KARMAŞIK DEĞİŞKENLİ TEMEL FONKSİYONLAR	26
6. İKİ-KARMAŞIK ÜSTEL SERİLER.....	30
7. İKİ-KARMAŞIK DEĞİŞKENLİ ANALİTİK FONKSİYONLAR	33
7.1. Hiperbolik İki-Karmaşık Değişkenli Fonksiyonların Türevleri	33
8. İKİ-KARMAŞIK FONKSİYONLARIN İNTEGRALLERİ	36
8.1. Hiperbolik Fonksiyonların İntegral Özellikleri	36
9. İKİ-KARMAŞIK POLİNOMLARIN ÇARPANLARA AYRILMASI	38

10. HİPERBOLİK İKİ-KARMAŞIK SAYILARIN İNDİRGENEMEZ MATRİSLERLE TEMSİLİ	40
11. SONUÇ.....	41
11.1. Öneriler	41
KAYNAKÇA.....	42



Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ana Bilim Dalı : Matematik

Tez Türü : Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ

Hazırlayan : Filiz AMAÇ

Yıl : 2023

Sayfa Sayısı : 43

ÖZET

İKİ BOYUTTA HİPERBOLİK KARMAŞIK SAYILAR

Bu çalışmada iki boyutta hiperbolik karmaşık sayılar ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. Hiperbolik karmaşık sayı için üstel ve trigonometrik ifadelerin elde edilmesinden bahsedilmiştir. Ayrıca iki-karmaşık sayı değerli temel fonksiyonlar için özellikler sunulmuştur. Kuvvet serileri yardımıyla tanımlanan iki-karmaşık değerli fonksiyonlar ve bu fonksiyonun analitikliği verilmiştir.

Daha sonra, hiperbolik iki-karmaşık değerli reel bileşenli fonksiyonların kısmi türevleri arasındaki eşitlik ilişkilerinin mevcut olduğu gösterilmiştir. Ayrıca iki-karmaşık fonksiyonun iki nokta arasındaki integrali noktaları birbirine bağlayan yoldan bağımsızdır. Diğer taraftan çarpanlara ayırma tek olmamasına rağmen bir hiperbolik iki-karmaşık polinom lineer veya ikinci dereceden çarpanlı bir çarpım olarak yazılabilir.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik karmaşık sayı, İki-karmaşık sayı, İki-karmaşık değerli fonksiyon

Recep Tayyip Erdoğan University Institute of Graduate Studies

Department : Department of Mathematics

Thesis Type : Master Thesis

Supervisor : Assoc. Prof. Özcan BEKTAŞ

Author : Filiz AMAÇ

Year : 2023

Pages : 43

ABSTRACT

HYPERBOLIC COMPLEX NUMBERS IN TWO DIMENSIONS

In this study, general information about two-dimensional hyperbolic complex numbers is provided. The logarithmic and trigonometric expressions for a hyperbolic complex number are discussed. Additionally, the properties of the two complex-valued functions are presented. The two-complex valued functions defined by power series and their analyticity are given.

Furthermore, it is shown that there are equality relations between the partial derivatives of the hyperbolic two-complex valued real component functions. It is also noted that the integral of the two complex functions between two points is independent of the path connecting the points. On the other hand, despite not being able to be separated into factors, a hyperbolic two-complex polynomial can be written as a linear or quadratic product of factors.

Keywords: Hyperbolic complex number, Two-complex number, Two-complex valued functions

KISALTMALAR

δ : Karesi 1 olan Hiperbolik Sayı

$\mathbb{R}$: Reel Sayılar Kümesi

$\mathbb{H}$: Hiperbolik Sayılar Kümesi

$\mathbb{C}$: Karmaşık Sayılar Kümesi

$\mathbb{R}^n$: n Boyutta Hiperbolik Sayılar Kümesi

$\mathbb{P}$: Hiperbolik Sayılar Kümesi

x, y : Reel Sayı

X, Y : Hiperbolik, Karmaşık Sayı

$\mathbb{Z}$: Tam Sayılar Kümesi

$f(u)$: İki-karmaşık Değişkenli Fonksiyon

θ : Kutupsal Açısı

d : $x + \delta y$ nın Modülü

v_+, v_- : Hiperbolik İki-karmaşık Değişken

ρ : İki-karmaşık Sayı Genliği

λ : İki-karmaşık Sayı Argümenti

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. A noktasının geometrik gösterimi.....1

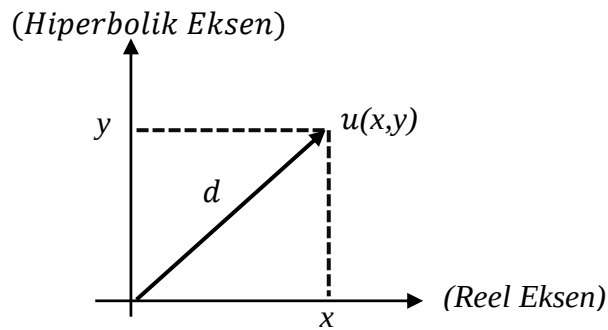


GİRİŞ

İki boyutta hiperbolik karmaşık sayılar kavramı Olariu tarafından verilmiştir (Olariu, 2000). Literatürde bu sayı, split karmaşık sayı, double karmaşık sayı, perplex sayı olarak da adlandırılabilir (Fjelstad, 1986; Gökhan, 2011; Çakır, 2017). Borota ve Osler, spacetime sayı olarak adlandırdıkları, hiperbolik sayıların özelliklerini vermişler ve 2002 yılında hiperbolik sayı değişkenli fonksiyonları incelemişlerdir (Borota, vd., 2000). Hiperbolik karmaşık sayılar Catoni ve diğerleri tarafından kullanılmıştır ve geliştirilmiştir (Catoni, vd., 2004). Ayrıca, Sobczyk, hiperbolik sayıları tanıtmış ve geometrik yorumuna odaklanmıştır (Sobczyk, 1995). Hiperbolik sayılar ile ilgili daha geniş çaplı çalışmalara da ulaşmak mümkündür (Fjelstad, 1998; Callahan, 2000; Catoni, vd., 2005; Catoni, vd., 2008; Catoni, vd., 2011).

Bir karmaşık sayı $x + iy$ olarak yazılabilir ve genliği $\rho = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$ şeklinde hesaplanır. Bir karmaşık sayı için kutup açısı θ ise $\theta = \arctan(y/x)$ olur (Başkan, 2000). Diğer taraftan kuaterniyonlar dört boyutta tanımlanan bir hiper karmaşık sayı sistemidir ve iki kuaterniyonun çarpımı işlemi değişmeli değildir (Finko-Richter, 2022). Bunlar oktoniyonlar ve sedeniyonlardır (Imaeda-Imaeda, 2000; Conway-Smith, 2003). Tüm bu sayı sistemleri iki-karmaşık sayı sisteminin sağladığı özelliklere sahip değildir.

Bu çalışmada tanımı verilen iki boyutta hiper karmaşık sayı sistemi değişmeli ve birleşimlidir. Bu sistem ile analitik iki-karmaşık fonksiyon ve yol integrali tanımlanabilir. Bu tezde iki-karmaşık sayılar $u = x + \delta y, x, y \in \mathbb{R}, 1 \cdot \delta = \delta, \delta^2 = 1$ koşullarını sağlayacak şekilde tanımlanmıştır (Yaglom, 1979). Geometrik olarak u iki-karmaşık sayısı $A = (x, y)$ şeklinde gösterilebilir (Şekil 1).



Şekil 1. A noktasının geometrik gösterimi

Ayrıca u ve v iki karmaşık sayıları için $u = v = 0$ ise $uv = 0$ olur. Diğer taraftan $u = (x, y)$ olmak üzere iki karmaşık sayılardan $x = y$ biri doğrusu üzerinde ise diğeri de $x = -y$ doğrusu üzerindedir. Bu durumda da $uv = 0$ şeklindedir (Olariu, 2000).



1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümdeki bilgiler (Olariu, 2000) kaynağından alınmıştır. Bu çalışmada, (Olariu, 2000) kaynağının çevirisi yapılarak ayrıntılı incelenmiştir.

Tanım 1.1. (İki-karmaşık sayının üstel formu)

$$x + y > 0,$$

$$x - y > 0$$

olacak şekilde tanımlanan $u = x + \delta y$ iki-karmaşık sayının üstel formu :

$$u = \rho e^{\delta \lambda}$$

şeklindedir.

Burada ρ genliği,

$$\rho = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$\tan \theta = \frac{x+y}{x-y}$$

olmak üzere λ argümenti de

$$\lambda = \ln \tan \theta$$

şeklindedir.

Tanım 1.2. (İki-karmaşık sayının trigonometrik formu)

$$d = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

olmak üzere

$$u = d \sqrt{\sin 2\theta} \exp\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\delta \ln \tan \theta\right\}$$

ile verilir.

Not 1.2. $u = x + \delta y$ iki-karmaşık sayının $x = \pm y$ doğrusu üzerinde genliği $\rho = 0$

dır. Ayrıca

$$\rho \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x + \delta y}$$

olduğunda mevcuttur. Eğer

$$u_1 = x_1 + \delta y_1,$$

$$u_2 = x_2 + \delta y_2$$

genlikleri sırasıyla ρ_1, ρ_2 ve argümentleri sırasıyla λ_1, λ_2 olan iki-karmaşık sayılar ise;

$$u_1 u_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + \delta(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

u_1 ve u_2 iki-karmaşık sayıların çarpımı olmak üzere bu çarpımın genliği ve argümenti sırasıyla

$$\rho = \rho_1 \rho_2,$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$

şeklindedir. Bu nedenle, iki-karmaşık sayıların çarpımında genliği ρ , λ argümentlerin toplamıdır. Bu özellik karmaşık sayıların özelliğinin aynısıdır (Olariu, 2000).

Yukarıda verilen kavramların uygulaması aşağıdaki gibi verilebilir.

Örnek 1.1.

$$i. 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$\rho \neq 0,$$

$$\frac{1}{x+\delta y}$$

$$u_1 = 3 + 2\delta$$

$$u_2 = 5 + 4\delta$$

$$ii. 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$\rho = 0,$$

$$x = \pm y$$

$$u_1 = 3 + 3\delta$$

$$u_2 = 3 - 3\delta$$

olmak üzere; genlikleri, argümentleri ve $u_1 u_2$ ifadelerinin çözümleri aşağıdaki gibidir.

Çözüm:

$$i.) u_1 u_2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + \delta(3 \cdot 4 + 2 \cdot 5)$$

$$= 15 + 8 + \delta(12 + 10)$$

$$= 23 + 22\delta$$

$$\rho = \rho_1 \rho_2 \text{ için}$$

$$\rho_1 = (3^2 - 2^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \text{ ve } \rho_2 = (5^2 - 4^2)^{\frac{1}{2}} = 3$$

ifadelerinden

$$\rho = 3 \cdot \sqrt{5}$$

sonucu bulunur.

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ olmak üzere } \lambda_1 \text{ için}$$

$$\tan \theta_1 = \frac{x+y}{x-y} \text{ olup } \tan \theta_1 = \frac{3+2}{3-2} = 5$$

$$\lambda_1 = \ln \tan \theta_1 = \ln 5$$

ve λ_2 için

$$\tan \theta_2 = \frac{x+y}{x-y} \text{ olup } \tan \theta_2 = \frac{5+4}{5-4} = 9$$

$$\lambda_2 = \ln \tan \theta_2 = \ln 9$$

elde edilir. Böylece

$$\lambda = \ln 5 + \ln 9 = \ln 45$$

olarak bulunur.

$$\text{ii.) } u_1 u_2 = 3 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) + \delta(3 \cdot (-3) + 3 \cdot 3)$$

$$= 9 - 9 + \delta(-9 + 9)$$

$$= 0$$

dır. Buradan

$$\rho = \rho_1 \rho_2 \text{ için}$$

$$\rho_1 = (3^2 - 3^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (3^2 - (-3)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0$$

dır. Öyleyse

$$\rho = 0$$

olarak bulunur.

2. HİPERBOLİK İKİ-KARMAŞIK SAYILARIN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda hiperbolik iki-karmaşık sayılar ile ilgili temel tanım, teorem ve ispatlar verilecektir.

2.1. Ön Bilgiler

Tanım 2.1.1. G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $(G,*)$ ikilisine bir grup denir.

1) $*$, G de bir ikili işlemdir.

2) $*$ işleminin G de birleşme özelliği vardır. Yani, $\forall a, b, c \in G$ için,

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

dir.

3) $*$ işleminin G de birim elemanı vardır. Yani, $\forall a \in G$ için,

$$a * e = e * a = a$$

olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır.

4) $*$ işlemine göre, G deki her elemanın bir tersi vardır. Yani $a \in G$ için,

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

olacak şekilde $\exists a^{-1} \in G$ bulunabilir (Çallıalp, 2000).

Not 2.1.1.

1) $(G,*)$ grubunun birim elemanı tektir. Gerçekten kabul edelim ki e ve e' iki birim eleman olsun. e birim eleman olduğundan $\forall a \in G$ için;

$$a * e = e * a = a$$

olur. Özel olarak $a = e'$ alınırsa

$$e' * e = e * e' = e'$$

bulunur. Aynı şekilde e' bir birim eleman olduğunda

$$\forall a \in G \text{ için } e' * a = a * e' = a$$

dir. Özel olarak $a = e$ alınırsa

$$e' * e = e * e' = e$$

bulunur. Böylece $e' = e$ olur.

2) $(G,*)$ grubunun $\forall g \in G$ elemanının tersi tektir. Kabul edelim ki g nin tersi g_1 ve g_2 olsun. Bu halde,

$$g * g_1 = g_1 * g = e \text{ ve } g * g_2 = g_2 * g = e$$

eşitlikleri sağlanır (Çallıalp, 2000).

Tanım 2.1.2. $(G,*)$ bir grup ve

$$\forall a, b \in G \text{ için } a * b = b * a$$

değişme özelliği sağlanıyorsa G grubuna değişmeli grup veya Abel grubu denir (Çallıalp, 2000).

Tanım 2.1.3. $R \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem $\oplus$ ve $\odot$ olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R, \oplus, \odot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

i. $(R, \oplus)$ bir değişmeli gruptur.

ii. $\odot$ işleminin R de birleşme özelliği vardır.

iii. $\odot$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır:

$$\forall a, b, c \in R \text{ için } a(b + c) = ab + ac \text{ ve } (a + b)c = ac + bc$$

dir (Çallıalp, 2000).

Tanım 2.1.4. $(R, \oplus, \odot)$ cebirsel yapısı bir halka olsun.

i. $\forall x \in R$ için $e \odot x = x \odot e = x$ olacak biçimde $e \in R$ varsa e ye R halkasının birimi denir ve R ye birimli halka adı verilir.

ii. $\forall x, y \in R$ için $x \odot y = y \odot x$ ise R ye bir değişmeli halka denir (Çallıalp, 2000).

Tanım 2.1.5. R bir halka ve R nin her elemanı $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer S kümesi R nin işlemlerine göre halka şartlarını sağlıyorsa S ye R nin althalkası denir (Çallıalp, 2000).

Önerme 2.1.1. $A \neq \emptyset$, A alt halkadır $\Leftrightarrow \forall a, b \in A, a - b \in A, a \cdot b \in A$ dır (Çallıalp, 2000).

Tanım 2.1.6. F birimli, değişmeli bir halka ve $1_F \neq 0_F$ olsun. Eğer F değişmeli ise F ye bir cisim adı verilir (Çallıalp, 2000).

Tanım 2.1.7. R ve S iki halka ve $f: R \rightarrow S$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a, b \in R$ için;

$$i. f(a + b) = f(a) + f(b),$$

$$ii. f(ab) = f(a)f(b)$$

ise f ye, R den S ye bir halka homomorfizması denir (Çallıalp, 2000).

Tanım 2.1.8. $(G, \odot)$ ve $(G', \oplus)$ iki grup olmak üzere $f: G \rightarrow G'$ bir fonksiyon olsun.

Eğer $\forall a, b \in G$ için

$$f(a \odot b) = f(a) \oplus f(b)$$

oluyorsa o zaman f ye grup homomorfizması adı verilir. Eğer f homomorfizması birebir ise o zaman f ye bir monomorfizma, f örten ise epimorfizma, f birebir ve örten ise bir izomorfizma adını alır (Çallıalp, 2000).

Tanım 2.1. Hiperbolik karmaşık sayı (x, y) sıralı ikili olmak üzere $h = (x, y)$ şeklinde tanımlanır (Göksal, 2011).

Hiperbolik iki-karmaşık sayıların kümesi $\mathbb{HTC}$ olarak gösterilir.

Tanım 2.2. $\oplus : \mathbb{HTC} \times \mathbb{HTC} \rightarrow \mathbb{HTC}$ toplama işlemi $h = (x, y), k = (z, w) \in \mathbb{HTC}$ olmak üzere $h \oplus k = (x, y) \oplus (z, w) = (x + z, y + w)$ şeklinde tanımlanır ve hiperbolik iki-karmaşık sayıların toplamı olarak adlandırılır (Göksal, 2011).

Tanım 2.3. $\odot : \mathbb{HTC} \times \mathbb{HTC} \rightarrow \mathbb{HTC}$ çarpma işlemi $h = (x, y), k = (z, w) \in \mathbb{HTC}$ olmak üzere $h \odot k = (x, y) \odot (z, w) = (xz + yw, xw + yz)$ şeklinde tanımlanır ve hiperbolik iki-karmaşık sayıların çarpımı olarak adlandırılır (Göksal, 2011).

Teorem 2.1. $(\mathbb{HTC}, \oplus, \odot)$ bir değişmeli ve birimli halkadır (Göksal, 2011).

İspat: $\mathbb{H}$ kümesi;

1. $(\mathbb{H}, \oplus)$ ikilisi değişmeli gruptur.

i) $\forall A = (a, b), B = (c, d)$ ve $C = (e, f) \in \mathbb{HTC}$ için;

$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$ özelliği sağlanır:

$$\begin{aligned} A \oplus (B \oplus C) &= (a, b) \oplus ((c, d) \oplus (e, f)) = (a, b) \oplus (c + e, d + f) \\ &= (a + (c + e), b + (d + f)) = (a + c + e, b + d + f) \\ (A \oplus B) \oplus C &= ((a, b) \oplus (c, d)) \oplus (e, f) = (a + c, b + d) \oplus (e, f) \\ &= ((a + c) + e, (b + d) + f) = (a + c + e, b + d + f) \end{aligned}$$

Bu eşitliklerden $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$ olduğu görülür.

ii) $\forall A = (a, b), B = (c, d) \in \mathbb{HTC}$ için $A \oplus B = B \oplus A$ şeklindedir.

$$A \oplus B = (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$B \oplus A = (c, d) \oplus (a, b) = (c + a, d + b)$$

eşitliklerinden $A \oplus B = B \oplus A$ olduğu görülür.

iii) $\forall A = (a, b) \in \mathbb{HTC}$ için $A \oplus 0 = 0 \oplus A = A$ olacak şekilde $0 = (0, 0) \in \mathbb{HTC}$ vardır ve

$$A + 0 = (a, b) + (x, y) = (a, b)$$

$$a + x = a$$

$$b + y = b$$

$$x = 0, y = 0$$

bulunur.

iv) $A \in \mathbb{HTC}$ için $A \oplus X = X \oplus A = 0$ olacak şekilde $X \in \mathbb{HTC}$ elemanı vardır.

$$A \oplus X = (a, b) \oplus (x, y) = 0 \Rightarrow (a + x, b + y) = (0, 0)$$

olur. Buradan; $x + a = 0 \Rightarrow x = -a$ ve $y + b = 0$ ve $y = -b$

şeklindedir.

Dolayısıyla $X = (-a, -b) \in \mathbb{HTC}$ bulunur. Böylece $(\mathbb{H}, \oplus)$ bir abel gruptur.

2. $(\mathbb{HTC}, \odot)$ birleşme özelliğini sağlar. Gerçekten

$\forall A, B, C \in \mathbb{HTC}$ ve $A = (a, b), B = (c, d), C = (e, f)$ için;

$$\begin{aligned} A \odot (B \odot C) &= (a, b) \odot ((c, d) \odot (e, f)) = (a, b) \odot (ce + df, cf + de) \\ &= (a(ce + df) + b(cf + de), a(cf + de) + b(ce + df)) \\ &= (ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bce + bdf) \\ (A \odot B) \odot C &= ((a, b) \odot (c, d)) \odot (e, f) = (ac + bd, ad + bc) \odot (e, f) \\ &= ((ac + bd)e + (ad + bc)f, (ac + bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ace + bde + adf + bcf, acf + bdf + ade + bce) \end{aligned}$$

Bu eşitlikten $A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$ olduğu sonucu çıkar.

3. $\odot$ ikili işlemi $\oplus$ ikili işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılır. Gerçekten

$\forall A, B, C \in \mathbb{HTC}$ için $A = (a, b), B = (c, d), C = (e, f)$ ise

$$\begin{aligned} A \odot (B \oplus C) &= (a, b) \odot ((c, d) \oplus (e, f)) = (a, b) \odot (c + e, d + f) \\ &= (a(c + e) + b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= (ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be) \\ (A \odot B) \oplus (A \odot C) &= ((a, b) \odot (c, d)) \oplus ((a, b) \odot (e, f)) \\ &= (ac + bd, ad + bc) \oplus (ae + bf, af + be) \\ &= (ac + bd + ae + bf, ad + bc + af + be) \end{aligned}$$

Bu eşitlikten ;

$$A \odot (B \oplus C) = (A \odot B) \oplus (A \odot C)$$

sonucu çıkar. Benzer şekilde

$$(A \oplus B) \odot C = (A \odot C) \oplus (B \odot C)$$

olduğu gösterilebilir.

Ayrıca $\forall A, B \in \mathbb{HTC}$ ve $A = (a, b), B = (c, d)$ ise

$$A \odot B = (a, b) \odot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$$

$$B \odot A = (c, d) \odot (a, b) = (ca + bd, cb + da) ;$$

olduğundan $(\mathbb{HTC}, \oplus, \odot)$ değişmeli halkadır.

Ek olarak $\varepsilon = (1,0) \in \mathbb{HTC}$ elemanı ve $\forall A = (a,b) \in \mathbb{HTC}$ için

$$A \odot \varepsilon = (a,b) \odot (1,0) = (a1 + b0, b1 + a0) = A$$

olur ki bu $(\mathbb{HTC}, \oplus, \odot)$ halkasının birimli olduğunu gösterir.

Uyarı 2.1. $(\mathbb{HTC}, \oplus, \odot)$ bir cisim değildir.

İspat: Cisim olsa idi $\forall 0 \neq A \in \mathbb{HTC}$ için $A^{-1} \in \mathbb{HTC}$ olurdu.

Fakat $\forall 0 \neq A = (a,a) \in \mathbb{HTC}$ elemanı göz önüne alınsın. Bir $B = (x,y) \in \mathbb{HTC}$ için

$$A \odot B = \varepsilon \Rightarrow (a,a) \odot (x,y) = (1,0) \Rightarrow (ax + ay, ax + ay) = (1,0)$$

$$ax + ay = 1$$

$$ax + ay = 0$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Böylece $A \odot B = \varepsilon$ olacak şekilde $B \in \mathbb{HTC}$ mevcut olmayıp $(\mathbb{HTC}, \oplus, \odot)$ bir cisim olamaz.

Teorem 2.2. $\mathbb{HTC}$ hiperbolik sayılar halkası $\mathbb{R}$ reel sayılar cismine izomorf ve cisim olan alt kümeyi kapsar.

İspat: $M = \{(a,0), a \in \mathbb{R}\}, M \subseteq \mathbb{HTC}$ alt kümesi göz önüne alınsın.

$(0,0) \in M$ olup $M \neq \emptyset$ dir. Şimdi M nin cisim olduğunu gösterelim. Bunun için;

i. M , $\mathbb{HTC}$ nin bir alt halkasıdır.

ii. M , birimlidir.

iii. $\forall 0 \neq (a,0) \in M$ için $(a,0)^{-1} \in M$ olduğu gösterilmelidir.

i. $\forall (a,0), (b,0) \in M$ için

- $(a,0) \ominus (b,0) = (a-b,0) \in M$
- $(a,0) \odot (b,0) = (a \cdot b + 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab,0) \in M$ olduğundan

M , $\mathbb{HTC}$ nin bir alt halkasıdır.

ii. $\varepsilon = (1,0) \in M$ olduğundan M birimli bir halkadır.

iii. $\forall 0 \neq (a,0) \in M$ için $a \neq 0$ olduğundan $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ olup

$$(a,0) \odot \left(\frac{1}{a},0\right) = (1,0) = \varepsilon \text{ olur ki } (a,0)^{-1} = \left(\frac{1}{a},0\right) \text{ bulunur.}$$

Böylece $(M, \oplus, \odot)$ bir cisim olur.

Şimdi M nin $\mathbb{R}$ ye izomorf olduğunu gösterelim.

$f: M \rightarrow \mathbb{R}, f(a,0) = a$ bir izomorfidir. Gerçekten

- $\forall (a,0), (b,0) \in M$ için

$$f((a,0) \oplus (b,0)) = f(a+b,0)$$

$$f((a,0) \odot (b,0)) = f(ab,0)$$

$(a, 0), (b, 0) \in M$ için $f(a, 0) = f(b, 0) \Rightarrow a = b \Rightarrow (a, 0) = (b, 0)$

olup f birebirdir.

- $\forall y \in \mathbb{R}$ için $x = (y, 0)$ olarak alınırsa

$$f(x) = f(y, 0) = y$$

olup f örtendir. Böylece f bir izomorfi olup $M \cong \mathbb{R}$ dir.

Notasyon 2.1. $(a, 0)$ hiperbolik iki-karmaşık sayısının izomorfu olan a reel sayısı olarak gösterilecek yani; $(a, 0) = a$ alınacaktır.

Tanım 2.4. Bir $A = (a, b) \in \mathbb{HTC}$ hiperbolik iki-karmaşık sayısında a reel sayısına A nın reel kısmı, b reel sayısının

a A nın hiperbolik kısmı denir ve

$$Re(A) = a, Hp(A) = b$$

şeklinde yazılır (Göksal, 2011).

Notasyon 2.2. $(0,1)$ hiperbolik iki-karmaşık sayısı δ ile gösterilecektir. Yani;

$$(0,1) = \delta$$

alınacak ve hiperbolik birim olarak adlandırılacaktır.

Sonuç 2.1. $\delta^2 = 1$ dir.

$$\text{İspat: } \delta^2 = \delta\delta = (0,1)(0,1) = (0 + 1, 0 + 0) = (1,0) = 1$$

elde edilir.

Teorem 2.3. $A = (a, b) \in \mathbb{HTC}$ için $A = a + \delta b$ şeklinde tek türlü yazılabilir.

Buradan,

$$(a, b) = a + \delta b$$

şeklinde yazılır.

İspat: $A = (a, b) = (a, 0) + (b, 0) = (a, 0) + (0,1)(0, b) = a + \delta b$ elde edilir.

Tanım 2.7. $\lambda \in \mathbb{R}$ ile $A \in \mathbb{HTC}$ sayısının çarpımı;

$\mathbb{R} \times \mathbb{HTC} \rightarrow \mathbb{HTC}$, $\lambda \odot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ şeklindeki sayıya bir hiperbolik sayının bir reel skaler ile çarpımı denir.

2.2. Hiperbolik İki-Karmaşık Sayıların Temel Özellikleri

Bu kısımda hiperbolik iki-karmaşık sayılarla ilgili temel tanım ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.2.1. Hiperbolik iki-karmaşık (x_1, y_1) ve (y_1, y_2) sayıların toplamı,
 $(x_1 + x_2, y_2 + y_1)$

şeklinde hiperbolik iki-karmaşık sayıdır.

Tanım 2.2.2. Hiperbolik iki-karmaşık (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) sayıların çarpımı,
 $(x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$

şeklinde hiperbolik iki-karmaşık sayı olarak tanımlanır.

Notasyon 2.2.1. İki-karmaşık sayı

$$u = (x, y) = x + \delta y$$

şeklinde yazılarak temsil edilebilir. Burada δ aşağıdaki özelliği sağlayan bir bazdır.

$$1 \cdot \delta = \delta, \delta^2 = 1 \quad (1)$$

dir.

Tanım 2.2.3. $u_1 = x_1 + \delta y_1$, $u_2 = x_2 + \delta y_2$ iki-karmaşık sayıları verilsin.

$x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ eşitlikleri sağlanıyorsa, u_1 ve u_2 iki-karmaşık sayıları eşittir denir.

Tanım 2.2.4. $u_1 = x_1 + \delta y_1$, $u_2 = x_2 + \delta y_2$ iki-karmaşık sayıları verilsin. Bu durumda iki-karmaşık sayıların toplama ve çarpma işlemi sırasıyla,

$$u_1 + u_2 = x_1 + x_2 + \delta(y_1 + y_2) \quad (2)$$

$$u_1u_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + \delta(x_1y_2 + y_1x_2) \quad (3)$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda verilen kavramların uygulaması aşağıdaki gibi verilebilir:

Örnek 2.2.1.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\rho \neq 0$ olmak üzere $u_1 = 4 + 2\delta$, $u_2 = 5 + 3\delta$ iki-karmaşık sayıları verilsin. Bu durumda $u_1 + u_2$ ve u_1u_2 işlemlerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$u_1 + u_2 = (4 + 2\delta) + (5 + 3\delta)$$

$$= 4 + 5 + \delta(2 + 3)$$

$$= 9 + \delta(5)$$

$$= 9 + 5\delta$$

$$u_1u_2 = (4 + 2\delta) \cdot (5 + 3\delta)$$

$$= 4 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + \delta(4 \cdot 3 + 2 \cdot 5)$$

$$\begin{aligned}
&= 20 + 6 + \delta(12 + 10) \\
&= 26 + \delta(22) \\
&= 26 + 22\delta
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.2.5. $0 = 0 + \delta \cdot 0$ sayısına iki-karmaşık sıfır sayısı ve $1 = 1 + \delta \cdot 0$ sayısına da birim iki-karmaşık sayısı denir.

Not 2.2.1. $u = x + \delta y$ iki-karmaşık sayısının tersi $u_1 = x_1 + \delta y_1$ olsun. Bu durumda $uu_1 = 1$ yazılır. Çarpma işlemi kullanılırsa

$$xx_1 + yy_1 = 1 \quad (4)$$

$$yx_1 + xy_1 = 0$$

$$x \frac{x}{v} + y \left(-\frac{y}{v} \right) = 1$$

$$y \frac{x}{v} + x \left(-\frac{y}{v} \right)$$

$$\frac{xy}{v} - \frac{xy}{v} = 0$$

elde edilir.

(4) sistemi $v \neq 0$ durumunda,

$$x_1 = \frac{x}{v} \quad (5)$$

$$y_1 = -\frac{y}{v} \quad (6)$$

çözümüne sahiptir. Burada

$$v = x^2 - y^2 \quad (7)$$

şeklindedir. v ifadesi

$$v_+ = x + y,$$

$$v_- = x - y \quad (8)$$

olmak üzere

$$v = v_+ v_- \quad (9)$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.2.6. v_+ , v_- değişkenleri, kanonik hiperbolik iki-karmaşık değişkenler olarak adlandırılır. Hiperbolik İki-karmaşık $u = x + \delta y$ sayının tersi vardır. Ancak

$$v_+ = 0 \text{ veya } v_- = 0 \quad (10)$$

olması durumunda $u = x + \delta y$ hiperbolik iki-karmaşık sayısının tersi yoktur.

x, y değişkenlerinin keyfi değerleri için v nin değeri pozitif veya negatif olabilir. Eğer $v \geq 0$ ise

$$\rho = v^{1/2}, v > 0 \quad (11)$$

değeri hiperbolik iki-karmaşık sayının argümentidir. (10) ifadesinde doğruların normalleri birbirine diktir. (10) ifadesine göre bu doğrular düğüm doğruları olarak adlandırılır.

Not 2.2.2. $u = x + \delta y$ iki-karmaşık sayısının tersi $u_1 = x_1 + \delta y_1$ olmak üzere;

$$uu_1 = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ veya } u_1 = 0$$

şeklindedir ya da iki-karmaşık sayılardan biri $x + \delta x$ diğeri de $x - \delta x$ şeklindedir.

Yukarıda verilen kavramları uygulamasını araştıralım

Örnek 2.2.2.

i) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\rho \neq 0$ olmak üzere $u = 3 - 3\delta$ iki-karmaşık sayı olsun.

ii) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\rho = 0$ olmak üzere $u = 3 - 3\delta$ iki-karmaşık sayı olsun.

Bu durumda yukarıda anlatılan ters ifadelerine göre çözümleri araştıralım.

Çözüm:

i) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\rho \neq 0$ olmak üzere $3 - 3\delta$ olduğunda,

$$v = x^2 - y^2$$

$$v = 3^2 - (-2)^2 = 9 - 4 = 5$$

olarak bulunur. Buradan $v = x^2 - y^2$ olmak üzere $v_+ = x + y$, $v_- = x - y$ ifadeleri aşağıdaki gibidir;

$$v_+ = x + y$$

$$v_+ = 3 + (-2) = 1$$

ve

$$v_- = x - y$$

$$v_- = 3 - (-2) = 5$$

sonuçları bulunur. Ayrıca $v = v_+v_-$ ifadesi,

$$v = v_+v_-$$

$$v = 1 \cdot 5 = 5$$

elde edilir. Böylece $v_+ = 0$ veya $v_- = 0$ olmadığından $3 - 2\delta$ nın çarpmaya göre

tersi, $\frac{1}{3-2\delta}$ hesaplayalım;

$$\frac{1}{\frac{3-2\delta}{(3+2\delta)}} = \frac{3+2\delta}{3^2-2^2} = \frac{3+2\delta}{9-4} = \frac{3+2\delta}{5} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\delta$$

tersi elde edilir.

$$ii) 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \rho = 0 \text{ olmak üzere } u = 3 - 3\delta$$

olduğunda ise,

$$v = x^2 - y^2$$

$$v = 3^2 - (-3)^2 = 0$$

olarak bulunur.

$$v_+ = x + y$$

$$v_+ = 3 + (-3) = 0$$

ve

$$v_- = x - y$$

$$v_- = 3 - (-3) = 6$$

sonuçları bulunur. Ayrıca $v = v_+ v_-$ ifadesi,

$$v = v_+ v_-$$

$$v = 0 \cdot 6 = 0$$

elde edilir. Böylece $v_+ = 0$ veya $v_- = 0$ olduğundan $u = 3 - 3\delta$ nın çarpmaya göre

$$\text{tersi ise } \frac{1}{3-3\delta},$$

hesaplayalım;

$$\frac{1}{\frac{3-3\delta}{(3+3\delta)}} = \frac{3+3\delta}{3^2-3^2} = \frac{3+3\delta}{9-9} = \frac{3+3\delta}{0}$$

ifadesi tanımsız olduğundan tersi yoktur.

Uyarı 2.2.1. Bu ifadelerde $\rho \neq 0$ olduğunda $u = x + y\delta$ hiperbolik iki-karmaşık sayısının tersi vardır.

$\rho = 0$ olduğunda ise $u = x + y\delta$ hiperbolik iki-karmaşık sayısının tersi mevcut değildir.

3. HİPERBOLİK İKİ-KARMAŞIK SAYILARIN GEOMETRİK GÖSTERİMİ

Bu kısımda hiperbolik iki-karmaşık sayılarla ilgili temel tanım, teorem, ispatlar ve örnekler verilecektir.

Tanım 3.1. $x + \delta y$ hiperbolik iki-karmaşık sayısı, koordinatları (x, y) olan bir noktası A olsun. Eğer O , iki boyutlu uzay xOy uzayının orijini ise, A noktasının O noktasına olan uzaklığı

$$d^2 = x^2 + y^2 \quad (12)$$

şeklinde d , $x + \delta y$ iki-karmaşık sayısının modülü olarak adlandırılır.

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2d^2 \quad (13)$$

olduğundan $x + y$ ve $x - y$ ise

$$\begin{aligned} x + y &= \sqrt{2}d \sin \theta, \\ x - y &= \sqrt{2}d \cos \theta \end{aligned} \quad (14)$$

şeklinde verilebilir. Böylece

$$\begin{aligned} x &= d \sin(\theta + \pi/4), \\ y &= -d \cos(\theta + \pi/4) \end{aligned} \quad (15)$$

olur.

Yukarıda verilen kavramların uygulamasını araştıralım.

Örnek 3.1. $u = 2 + \delta$ iki-karmaşık sayısı verilsin. d , u nun modülü olmak üzere

$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2d^2$ ifadesinin çözümünü ve θ açılarını hesaplayalım.

Çözüm:

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2d^2$$

$$3^2 + 1^2 = 2d^2$$

$$10 = 2d^2$$

$$5 = d^2$$

$$\sqrt{5} = d$$

olur. d , u nun modülü olduğundan (13) ifadesini kullanarak $d = \sqrt{5}$ elde edilir. Ayrıca (14) ifadelerini kullanarak θ açılarını aşağıdaki gibi hesaplarız.

$$i) x + y = \sqrt{2}d \sin \theta$$

$$3 = \sqrt{10} \sin \theta$$

$$\frac{3}{\sqrt{10}} = \sin\theta$$

bulunur. Buradan θ açısını

$$\arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \theta$$

$$\theta = 71,56$$

olarak hesaplanır.

$$x - y = \sqrt{2}d\cos\theta$$

$$1 = \sqrt{10}\cos\theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \cos\theta$$

bulunur. Buradan θ açısı ise

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \theta$$

$$\theta = 71,56$$

olarak hesaplanır. Ayrıca (15) ifadelerinden de θ açıları aşağıdaki gibi hesaplarız.

$$x = d\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2 = \sqrt{5}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

bulunur. Buradan θ açısı

$$\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \theta + \frac{\pi}{4}$$

$$\theta + \frac{\pi}{4} = 63,43$$

$$\theta = 18,44$$

olarak hesaplanır.

$$y = -d\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$1 = -\sqrt{5}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = -\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

bulunur. Buradan θ açısı ise

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \theta + \frac{\pi}{4}$$

$$\theta + \pi/4 = 63,43$$

$$\theta = 18,44$$

olarak hesaplanır.

Notasyon 3.1. Hiperbolik iki-karmaşık sayılar

$$u = x + \delta y,$$

$$u_1 = x_1 + \delta y_1,$$

$$u_2 = x_2 + \delta y_2$$

olsun. Buradan hiperbolik iki-karmaşık sayı çarpımı $u = u_1 u_2$ ve kanonik hiperbolik iki-karmaşık v_+ , v_- değişkenleri, (8) ifadesi sonucu olarak

$$v_{j+} = x_j + y_j \text{ olduğundan } j = 1,2 \text{ için}$$

$$v_{1+} = x_1 + y_1 = \sqrt{2}d_1 \sin \theta_1,$$

$$v_{2+} = x_2 + y_2 = \sqrt{2}d_2 \sin \theta_2$$

ve

$$v_{j-} = x_j - y_j \text{ olduğundan } j = 1,2 \text{ için}$$

$$v_{1-} = x_1 - y_1 = \sqrt{2}d_1 \cos \theta_1,$$

$$v_{2-} = x_2 - y_2 = \sqrt{2}d_2 \cos \theta_2$$

elde edilir. Ayrıca

$$2d_j^2 = v_{j+}^2 + v_{j-}^2,$$

$$x_j + y_j = \sqrt{2}d_j \sin \theta_j,$$

$$x_j - y_j = \sqrt{2}d_j \cos \theta_j \tag{16}$$

ise $j = 1, 2$ için

$$v_+ = v_{1+} v_{2+},$$

$$v_- = v_{1-} v_{2-},$$

elde edilir. Ayrıca

$$\tan \theta = \tan \theta_1 \tan \theta_2 \tag{17}$$

şeklinde gösterilir.

Uyarı 3.1. (17) ile verilen ifadeler aşağıdaki özelliklerin sonucudur:

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \tag{18}$$

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2) - (x_1 y_2 + y_1 x_2) = (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \tag{19}$$

Ayrıca $u = u_1 u_2$ olduğundan (17) ifadesinin sonucu olarak

$$v = v_1 v_2 \tag{20}$$

ifadesi verilebilir. Buradan

$$v_1 = v_{1+}v_{1-},$$

$$v_2 = v_{2+}v_{2-},$$

olduğundan

$$v = v_1v_2 = (v_{1+}v_{1-})(v_{2+}v_{2-})$$

elde edilir. Burada $j = 1,2$ için

$$v_j = v_{j+}v_{j-}$$

(21)

elde edilir.

Verilen kavramların uygulamasını araştıralım.

Örnek 3.2. İki-karmaşık sayı $u_1 = 3 + 6\delta$, $u_2 = 2 + \delta$ olsun. Bu durumda

i) $u = u_1u_2$

ii) $v = v_1v_2$

iii) $\tan\theta = \tan\theta_1\tan\theta_2$

ifadelerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} i) \ u &= u_1u_2 = 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + \delta (3 \cdot 1 + 6 \cdot 2) \\ &= 6 + 6 + \delta(3 + 12) \\ &= 12 + \delta (15) \\ &= 12 + 15\delta \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $v_{j+} = x_j + y_j \Rightarrow j = 1,2$ için

$$v_{1+} = x_1 + y_1 = 3 + 6 = 9$$

$$v_{2+} = x_2 + y_2 = 2 + 1 = 3$$

elde edilir.

$v_{j-} = x_j - y_j \Rightarrow j = 1,2$ için

$$v_{1-} = x_1 - y_1 = 3 - 6 = -3$$

$$v_{2-} = x_2 - y_2 = 2 - 1 = 1$$

elde edilir. Buradan

$$v_+ = v_{1+}v_{2+} = 9 \cdot 3 = 27$$

$$v_- = v_{1-}v_{2-} = (-3) \cdot 1 = -3$$

elde edilir. Ayrıca

$$v_1 = v_{1+}v_{1-}$$

$$v_2 = v_{2+}v_{2-}$$

çözümünden de

$$v = v_1v_2$$

$$v = v_1v_2 = (v_{1+}v_{1-})(v_{2+}v_{2-}) = [9 \cdot (-3)][3 \cdot 1] = -27 \cdot 3 = -81$$

şeklinde hesaplanır.

iii) $\tan\theta = \tan\theta_1\tan\theta_2$ için

$$\tan\theta_1 = \frac{x_1+y_1}{x_1-y_1} = \frac{3+6}{3-6} = \frac{9}{-3} = -3$$

$$\tan\theta_2 = \frac{x_2+y_2}{x_2-y_2} = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\tan\theta = \tan\theta_1\tan\theta_2 \Rightarrow \tan\theta = (-3) \cdot 3 = -9$$

şeklinde hesaplanır. Buradan

$$(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2) = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)$$

$$(x_1x_2 + y_1y_2) - (x_1y_2 + y_1x_2) = (x_1 - y_1)(x_2 - y_2)$$

elde edilir. Ayrıca

$$v > 0, v_1 > 0, v_2 > 0 \Rightarrow \rho = \rho_1\rho_2 \quad (22)$$

yazılır. Burada $j = 1,2$ için

$$\rho_j = v_j^{1/2} \quad (23)$$

şeklinde dir.

Yukarıda verilen ifadenin uygulamasını inceleyelim.

Örnek 3.3. $u_1 = 2 + \delta$, $u_2 = 3 + 2\delta$ iki-karmaşık sayısı verildiğinde

$$v > 0, v_1 > 0, v_2 > 0 \text{ olmak üzere } \rho = \rho_1\rho_2$$

yazılabildiğini gösterelim.

Çözüm:

$$v_{j+} = x_j + y_j \Rightarrow j = 1,2 \text{ için}$$

$$v_{1+} = x_1 + y_1 = 2 + 1 = 3$$

$$v_{2+} = x_2 + y_2 = 3 + 2 = 5$$

elde edilir. Ayrıca,

$$v_{j-} = x_j - y_j \Rightarrow j = 1,2 \text{ için}$$

$$v_{1-} = x_1 - y_1 = 2 - 1 = 1$$

$$v_{2-} = x_2 - y_2 = 3 - 2 = 1$$

elde edilir. Ayrıca (20) ifadesi kullanılarak

$$v_1 = v_{1+}v_{1-}$$

$$v_2 = v_{2+}v_{2-}$$

$$v = v_1v_2 = (v_{1+}v_{1-})(v_{2+}v_{2-}) = (3 \cdot 1)(5 \cdot 1) = 3 \cdot 5 = 15$$

bulunur ve (22) ifadesinden

$$\rho_1 = (x_1^2 - y_1^2)^{1/2} = (2^2 - 1^2)^{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\rho_2 = (x_2^2 - y_2^2)^{1/2} = (3^2 - 2^2)^{1/2} = \sqrt{5}$$

elde edilir. Bu ifadeler sonucunda da (23) ifadesinden

$$\Rightarrow \rho = \rho_1\rho_2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$$

elde edilir.

Tanım 3.3. İki-karmaşık sayı

$$e_+ = \frac{1+\delta}{2}, \quad e_- = \frac{1-\delta}{2} \quad (24)$$

ortogonaldır. Yani

$$e_+e_- = 0 \quad (25)$$

şeklindedir. Ayrıca şu özelliğe de sahiptir:

$$e_+^2 = e_+, \quad e_-^2 = e_- \quad (26)$$

Böylece e_+ ve e_- kanonik hiperbolik iki-karmaşık taban olarak adlandırılır.

$u = x + \delta y$ iki-karmaşık sayısı

$$x + \delta y = (x + y)e_+ + (x - y)e_- \quad (27)$$

olarak yazılabilir.

Yukarıda verilen ifadelerin uygulamasını inceleyelim.

Örnek 3.4. $u = 3 + \delta$ iki-karmaşık sayısında

$x + \delta y = (x + y)e_+ + (x - y)e_-$ yazımını araştıralım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 3 + \delta &= (3 + 1) \left(\frac{1+\delta}{2} \right) + (3 - 1) \left(\frac{1-\delta}{2} \right) \\ &= (4) \left(\frac{1+\delta}{2} \right) + (2) \left(\frac{1-\delta}{2} \right) \\ &= (2 + 2\delta) + (1 - \delta) \\ &= 3 + \delta \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Uyarı 3.1. (12) eşitliği kullanılırsa;

$$u = v_+e_+ + v_-e_- \quad (28)$$

şeklinde yazılır. Bu ifade hiperbolik iki-karmaşık sayının kanonik formu olarak adlandırılır. Eğer

$$u_j = v_{j+}e_+ + v_{j-}e_- ,$$

$j = 1, 2$ ve $u = u_1u_2$ ise hiperbolik iki-karmaşık sayıların çarpımı, (17) eşitlikleriyle ifade edilir.

Tanım 3.4. $u = x + \delta y$ iki-karmaşık sayısı

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \quad (29)$$

matrisi ile temsil edilebilir.

$$u_1 = x_1 + \delta y_1,$$

$$u_2 = x_2 + \delta y_2$$

iki-karmaşık sayıların çarpımı

$$u = x + \delta y$$

olmak üzere çarpımı

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \quad (30)$$

şeklinde de verilir. Burada

$$\det \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = v \quad (31)$$

olduğu da görülür. O halde, (22) eşitliği matrislerin çarpımının determinantının, çarpan matrislerin determinantlarının çarpımına eşit olduğunun bir sonucudur.

Yukarıda verilen ifadelerin uygulamasını inceleyelim.

Örnek 3.5. $u_1 = 3 + 6\delta$, $u_2 = 2 + \delta$ iki karmaşık sayısı verilsin.

Bu durumda $\det \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = v$ determinantını hesaplayalım.

Çözüm:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} = 12 \cdot 12 - 15 \cdot 15 = -81$$

Buradan $v = v_1v_2 = -81$ olduğundan $\det \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = v$ olduğunu gördük.

4. İKİ-KARMAŞIK SAYININ ÜSTEL VE TRİGONOMETRİK FORMLARI

Bu bölümde iki-karmaşık sayının üstel ve trigonometrik formları ile ilgili kavramlardan bahsedeceğiz.

Tanım 4.1. u , iki-karmaşık değişkenli u fonksiyonunun üstel fonksiyonu,

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots \quad (32)$$

serisiyle tanımlanabilir. Buradan

$$e^{(u_1 u_2)} = e^{u_1} \cdot e^{u_2} \quad (33)$$

ifadesinin yazılabildiğini gösterelim;

$$u_1 = x_1 + \delta y_1,$$

$$u_2 = x_2 + \delta y_2,$$

$$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2) + \delta(y_1 + y_2)$$

olduğundan

$$e^{(u_1 + u_2)} = e^{(x_1 + x_2) + \delta(y_1 + y_2)}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} e^{(u_1 + u_2)} &= e^{(x_1 + x_2) + \delta(y_1 + y_2)} \\ &= e^{x_1 + x_2} [\cos(y_1 + y_2) + \delta \sin(y_1 + y_2)] \\ &= e^{x_1} e^{x_2} [(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + \delta (\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)] \\ &= e^{x_1} e^{x_2} [(\cos y_1 + \delta \sin y_1) \cdot (\cos y_2 + \delta \sin y_2)] \\ &= e^{x_1} [(\cos y_1 + \delta \sin y_1)] \cdot [e^{x_2} (\cos y_2 + \delta \sin y_2)] \\ &= e^{u_1} \cdot e^{u_2} \end{aligned}$$

olduğu açıktır.

Tanım 4.2. $u = x + \delta y$ iki-karmaşık sayısı ise

$$e^u = e^x \cdot e^{\delta y}$$

olarak hesaplanır. (1) eşitliğine göre,

$$\delta^{2m} = 1, \delta^{2m+1} = \delta \quad (34)$$

şeklinde yazılır. Burada m doğal bir sayıdır. Ayrıca $e^{\delta y}$ ifadesi

$$e^{\delta y} = \cosh y + \delta \sinh y \quad (35)$$

$$f(u) = e^u = e^x \cdot e^{\delta y}$$

$$= e^x (\cos y + \delta \sin y)$$

şeklinde yazılır.

Yukarıda verilen ifadelerin uygulamasını inceleyelim.

Örnek 4.1.

$$1) e^u = e^x \cdot e^{\delta y}$$

$$= e^x (\cos \pi + \delta \sin \pi)$$

$$= e^x (-1 + \delta \cdot 0)$$

$$= -e^x$$

$$2) e^{2 \pm 3\pi \delta} = e^2 \cdot e^{3\pi \delta}$$

$$= e^2 \cdot (\cos(\pm 3\pi) + \delta \sin(\pm 3\pi))$$

$$= e^2 \cdot (\cos(\pm \pi) + \delta \sin(\pm \pi))$$

$$= e^2 \cdot (-1 + \delta \cdot 0)$$

$$= -e^2$$

olduğunu gördük.

Uyarı 4.1. $e^{\delta y} = \cosh y + \delta \sinh y$ eşitliğinden

$$(\cosh t + \delta \sinh t)^m = \cosh mt + \delta \sinh mt \quad (36)$$

ifadesine ulaşılabilir (Çakır, 2017).

Tanım 4.3. $v_+ = x + y > 0$,

$$v_- = x - y > 0$$

koşullarını sağlayan $u = x + \delta y$, iki-karmaşık sayısı

$$x + \delta y = e^{x_1 + \delta y_1} \quad (37)$$

formunda yazılabilir. (37) ve (35) dikkate alındığında x ve y fonksiyonları x_1 ve y_1 cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$x = e^{x_1} \cosh y_1 \quad (38)$$

$$y = e^{x_1} \sinh y_1 \quad (39)$$

(38) ve (39) eşitliklerinden

$$x_1 = \frac{1}{2} \ln(v_+ v_-), \quad y_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{v_+}{v_-} \quad (40)$$

olduğunu görmek kolaydır (Olariu, 2000).

Tanım 4.4. u iki-karmaşık sayısı

$$u = \rho \exp(\delta \lambda) \quad (41)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $x + y > 0$ ve $x - y > 0$ için

$$\rho = (x^2 - y^2)^{1/2},$$

$$\lambda = \left(\frac{1}{2}\right) \ln\left\{\frac{(x + y)}{(x - y)}\right\}$$

dir. (41) eşitliği, d ve θ değerleri yardımıyla

$$u = \rho \exp\left(\frac{1}{2} \delta \ln \tan \theta\right) \quad (42)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere u iki-karmaşık sayısının üstel formudur.

ρ ile d uzaklığı arasındaki ilişki

$$\rho = d \sin^{1/2} 2\theta \quad (43)$$

ile verilir. Bu ifade (42) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$u = d \sin^{1/2} 2\theta \exp\left(\frac{1}{2} \delta \ln \tan \theta\right) \quad (44)$$

elde edilir. Bu son eşitlik u iki-karmaşık sayısının trigonometrik formudur (Olariu, 2000).

5. İKİ-KARMAŞIK DEĞİŞKENLİ TEMEL FONKSİYONLAR

Bu bölümde iki karmaşık değişkenli fonksiyonlar ile ilgili kavramlardan bahsedeceğiz.

Tanım 5.1. $v_+ = x + y > 0$,

$$v_- = x - y > 0$$

koşullarını sağlayan iki karmaşık sayı u ve u_1 ,

$$u = e^{u_1} \quad (45)$$

eşitliği

$$u_1 = \ln u$$

şeklinde tanımlanır. (42) göz önüne alınır

$$\ln u = \ln \rho + \frac{1}{2} \delta \ln \tan \theta \quad (46)$$

elde edilir. (46) ve (17) eşitliklerinden

$$\ln(u_1 u_2) = \ln u_1 + \ln u_2 \quad (47)$$

sonucuna ulaşılır. (46) ifadesi açılırsa

$$\ln(x + \delta y) = \frac{1}{2} (1 + \delta) \ln(x + y) + \frac{1}{2} (1 - \delta) \ln(x - y) \quad (48)$$

elde edilir.

Ayrıca (46) eşitliği (24) eşitliğinin yardımıyla

$$\ln u = e_+ \ln v_+ + e_- \ln v_- \quad (49)$$

elde edilir (Olariu, 2000).

Tanım 5.2. $v_+ = x + y > 0$,

$$v_- = x - y > 0$$

koşullarını sağlayan iki-karmaşık sayı u ve üstel fonksiyonu u^n

ve reel n değeri için,

$$u^n = e^{n \ln u} \quad (50)$$

olarak tanımlanır. (50) ve (47) eşitlikleri kullanılırsa;

$$(u_1 u_2)^n = u_1^n u_2^n \quad (51)$$

elde edilir.

Ayrıca $\ln u$ için (49) ifadesini kullanılarak, (25) ve (26) eşitlikleri göz önüne alındığında

$$(x + \delta y)^n = \frac{1}{2} (1 + \delta) (x + y)^n + \frac{1}{2} (1 - \delta) (x - y)^n \quad (52)$$

elde edilir.

n tam sayı olmak üzere herhangi x ve y için, (52) geçerlidir.

$n = -1$ için (52) ifadesi

$$\frac{1}{x+\delta y} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\delta}{x+y} + \frac{1-\delta}{x-y} \right) \quad (53)$$

şeklindedir (Olariu, 2000).

Tanım 5.3. İki-karmaşık değerli $\cos u$ ve $\sin u$ trigonometrik fonksiyonları

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots \quad (54)$$

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots \quad (55)$$

serileriyle tanımlanır. Burada karmaşık sayılara benzer olarak

$$\cos(u_1 + u_2) = \cos u_1 \cos u_2 - \sin u_1 \sin u_2 \quad (56)$$

$$\sin(u_1 + u_2) = \sin u_1 \cos u_2 + \cos u_1 \sin u_2 \quad (57)$$

özellikleri geçerlidir (Olariu, 2000).

Hiper-kompleks değişkenli δy ifadesinin sinüs ve kosinüs fonksiyonları

$$\cos \delta y = \cos y, \quad \sin \delta y = \delta \sin y \quad (58)$$

şeklinde ifade edilebilir. (58), eşitliğindeki ifadenin ve (56) ve (57) özellikleri yardımıyla $x + \delta y$ iki-karmaşık sayısının kosinüs ve sinüs fonksiyonları temel fonksiyon cinsinden verilebilir (Olariu, 2000).

Tanım 5.4. İki-karmaşık değişkenli u fonksiyonunun hiperbolik fonksiyonları $\cosh u$ ve $\sinh u$,

$$\cosh u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \dots \quad (59)$$

$$\sinh u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \dots \quad (60)$$

serileriyle tanımlanır. Seri çarpımıyla kontrol edilebilir ki, u_1, u_2 iki karmaşık sayılar için de aşağıdaki özellikler geçerlidir

$$\cosh(u_1 + u_2) = \cosh u_1 \cosh u_2 + \sinh u_1 \sinh u_2 \quad (61)$$

$$\sinh(u_1 + u_2) = \sinh u_1 \cosh u_2 + \cosh u_1 \sinh u_2 \quad (62)$$

Hiper-karmaşık değerli δy ifadesinin $\cosh$ ve $\sinh$ fonksiyonları,

$$\cosh \delta y = \cosh y, \quad \sinh \delta y = \delta \sinh y \quad (63)$$

şeklinde ifade edilebilir. (61), (62) eşitliğindeki ifadelerin ve (63) ifadesindeki özellikler yardımıyla $x + \delta y$ iki-karmaşık sayısının kosinüs ve sinüs fonksiyonları temel fonksiyon cinsinden verilebilir (Olariu, 2000).

Tanım 5.5. İki-karmaşık değişkenli u fonksiyonunun hiperbolik fonksiyonları $\cosh u$ ve $\sinh u$,

$$\sinh u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$$

$$\cosh u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$$

ifadeleri toplanırsa;

$$e^u = \cosh u + \sinh u$$

elde edilir. İfadeler çıkarılırsa;

$$e^{-u} = \cosh u - \sinh u$$

ifadesine ulaşılır. Ayrıca

$$\sinh(-u) = \frac{1}{2}(e^{-u} - e^u) = -\sinh u$$

$$\cosh(-u) = \frac{1}{2}(e^{-u} + e^u) = \cosh u$$

olarak tanımlanır. Ayrıca

$$\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u}$$

$$\coth u = \frac{\cosh u}{\sinh u}$$

ifadelerde geçerlidir (Başkan,2000).

Teorem 5.2. $u, u_1, u_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$e^u = \cosh u + \sinh u$$

$$e^{-u} = \cosh u - \sinh u$$

olup

$$i. \cosh(u_1 + u_2) = \cosh u_1 \cosh u_2 + \sinh u_1 \sinh u_2$$

$$ii. \sinh(u_1 + u_2) = \sinh u_1 \cosh u_2 + \cosh u_1 \sinh u_2$$

$$iii. \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

ifadeleri geçerlidir.

İspat:

$$i. \cosh(u_1 + u_2) = \cosh u_1 \cosh u_2 + \sinh u_1 \sinh u_2$$

$$= \frac{1}{4}(e^{u_1} + e^{-u_1})(e^{u_2} + e^{-u_2}) + \frac{1}{4}(e^{u_1} - e^{-u_1})(e^{u_2} - e^{-u_2})$$

$$= \frac{1}{4}(e^{u_1+u_2} + e^{-u_1+u_2} - e^{u_1-u_2} - e^{-u_1-u_2} + e^{u_1+u_2})$$

$$\begin{aligned}
& -e^{-u_1+u_2}-e^{u_1-u_2}-e^{-u_1-u_2}) \\
& = \frac{1}{2}(e^{u_1+u_2}+e^{-u_1-u_2}) \\
& = \cosh(u_1+u_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
ii. \sinh(u_1+u_2) &= \sinh u_1 \cosh u_2 + \cosh u_1 \sinh u_2 \\
&= \frac{1}{4}(e^{u_1}-e^{-u_1})(e^{u_2}+e^{-u_2})+\frac{1}{4}(e^{u_1}+e^{-u_1})(e^{u_2}-e^{-u_2}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{u_1+u_2}-e^{-u_1+u_2}+e^{u_1-u_2}-e^{-u_1-u_2}+e^{u_1+u_2}+e^{-u_1+u_2} \\
&\quad -e^{u_1-u_2}-e^{-u_1-u_2}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{u_1+u_2}-e^{-u_1-u_2}) \\
&= \sinh(u_1+u_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine benzer olarak

$$\begin{aligned}
iii. \cosh^2 u - \sinh^2 u &= \frac{1}{4}(e^u+e^{-u})^2 - \frac{1}{4}(e^u-e^{-u})^2 \\
&= \frac{1}{4}(e^{2u}+2+e^{-2u}-e^{2u}+2-e^{-2u}) \\
&= \frac{1}{4}(4) \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

6. İKİ-KARMAŞIK ÜSTEL SERİLER

Bu kısımda hiperbolik iki-karmaşık seriler ile ilgili temel tanım, teorem ve ispatlar verilecektir.

Tanım 6.1. İki-karmaşık seri,

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (64)$$

şeklinde sonsuz bir toplamı olan bir yapıdır. Bu yapının katsayıları ler iki-karmaşık sayılardır. Serisinin yakınsaklığı, 2 reel bileşeninin yakınsaklığına göre tanımlanır. Bununla birlikte iki-karmaşık değerli serinin yakınsaklığı iki-karmaşık değişken kullanılarak incelenebilir. Mutlak yakınsaklık için ana kriter, karşılaştırma teoremidir.

Ayrıca

$$u = x + \delta y,$$

iki-karmaşık sayısının modülü

$$|u| = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad (65)$$

şeklinde tanımlanır. Bu nedenle eşitlik (13) e göre

$$d = |u|$$

elde edilir (Olariu, 2000).

Tanım 6.1. u_1 ve u_2 iki-karmaşık sayılarının $u_1 + u_2$ toplamının modülü

$$|u_1| + |u_2| \leq |u_1 + u_2| \leq |u_1| + |u_2| \quad (66)$$

eşitsizliğini sağlar.

Tanım 6.2. u_1 ve u_2 iki-karmaşık sayılarının $u_1 u_2$ çarpımının modülü için

$$|u_1 u_2| \leq \sqrt{2} |u_1| |u_2| \quad (67)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Dikkat edilirse karmaşık sayılar için (67), ifadesinde geçerli olan özellik burada değişmiştir. Eşitlik

$$x_1 = y_1,$$

$$x_2 = y_2$$

veya

$$x_1 = -y_1,$$

$$x_2 = -y_2$$

durumlarında gerçekleşir. Diğer taraftan

$$u = u_1 = u_2$$

ise

$$|u^2| \leq \sqrt{2}|u|^2 \quad (68)$$

elde edilir. (70) ifadesindeki eşitsizlik,

$$|u^m| \leq 2^{(m-1)/2}|u|^m \quad (69)$$

eşitsizliğini içerir. (70) ve (72) denklemlerinden

$$|au^m| \leq 2^{m/2}|a||u|^m \quad (70)$$

sonucu çıkar.

Tanım 6.3. u iki-karmaşık değişkenli kuvvet serisi,

$$a_0 + a_1u + a_2u^2 + \dots a_lu^l + \dots, \quad (71)$$

şeklinde bir seridir.

$$|\sum_{l=0}^{\infty} a_lu^l| \leq \sum_{l=0}^{\infty} 2^{l/2}|a_l||u|^l \quad (72)$$

olduğundan, bu serinin mutlak yakınsak olması için yeter koşul

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}|a_{l+1}||u|}{|a_l|} < 1 \quad (73)$$

olmasıdır. Bu nedenle seri,

$$|u| < c_0 \quad (74)$$

koşulu altında mutlak yakınsaktır. Burada

$$c_0 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{|a_l|}{\sqrt{2}|a_{l+1}|} \quad (75)$$

şeklindedir.

(71) serisinin yakınsaklığı, herhangi bir x, y, z, t değerleri ve l nin tamsayı değeri için geçerli olan (52) formülü yardımıyla da incelenebilir. Eğer

$$a_l = a_{lx} + \delta a_{ly},$$

$$A_{l+} = a_{lx} + a_{ly},$$

$$A_{l-} = a_{lx} - a_{ly} \quad (76)$$

ise, (25) ve (26) eşitlikleri yardımıyla

$$a_l e_+ = A_{l+} e_+,$$

$$a_l e_- = A_{l-} e_- \quad (77)$$

olduğu gösterilir. Bu da serinin (71) ifadesini

$$\sum_{l=0}^{\infty} (A_{l+} v_+^l e_+ + A_{l-} v_-^l e_-) \quad (78)$$

olarak verir. Burada v_+, v_- , (9) eşitliğinde tanımlanmıştır. (78) ile verilen serinin mutlak yakınsaklığı için yeterli koşullar,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{|A_{l+1,+}| |v_+|}{|A_{l+}|} < 1,$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{|A_{l+1,-}| |v_-|}{|A_{l-}|} < 1 \quad (79)$$

koşullarıdır. Bu nedenle eşitlik (78) deki seri,

$$\begin{aligned} |x + y| &< c_+, \\ |x - y| &< c_- \end{aligned} \quad (80)$$

koşulları için mutlak yakınsaktır. Burada,

$$c_+ = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{|A_{l+}|}{|A_{l+1,+}|}, \quad c_- = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{|A_{l-}|}{|A_{l+1,-}|} \quad (81)$$

Eşitsizlikleri (78) serisinin yakınsaklık bölgesinin kenarları

$$x = \pm y$$

açıortaylarına paralel olan bir dikdörtgen olduğunu gösterir.

7. İKİ-KARMAŞIK DEĞİŞKENLİ ANALİTİK FONKSİYONLAR

Bu kısımda hiperbolik iki-karmaşık değişkenli analitik fonksiyonlar hakkında bilgiler verilecektir.

7.1. Hiperbolik İki-Karmaşık Değişkenli Fonksiyonların Türevleri

Tanım 7.1. İki-karmaşık değişkenli bir $f(u)$ fonksiyonunun türevi, aşağıdaki özelliğe sahip bir $f'(u)$ fonksiyonu olarak tanımlanır.

$|u - u_0| \rightarrow 0$ iken;

$$|(f(u) - f(u_0)) - f'(u_0)(u - u_0)| \rightarrow 0, |u - u_0| \rightarrow 0 \quad (82)$$

olur. Eğer $u - u_0$ arasındaki fark bir düğüm hiper yüzeylerinden birine paralel değilse, (85) eşitliği aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$f'(u_0) = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \quad (83)$$

Tanım 7.2. $f(u)$ iki-karmaşık değişkenli bir fonksiyon ve m tamsayı olsun. Bu durumda $f(u) = u^m$ fonksiyonun türevi,

$$f'(u) = mu^{m-1}$$

şeklindedir.

$$u^m = [u_0 + (u - u_0)]^m \text{ ise}$$

$$u^m = \sum_{p=0}^m \frac{m!}{p!(m-p)!} u_0^{m-p} (u - u_0)^p, \quad (84)$$

yazılabilir.

(82) eşitliği ile verilen $f'(u)$ fonksiyonu, u nun u_0 a doğru uzayda hangi yönde yaklaştığına bağlı değilse, $f(u)$ fonksiyonu analitiktir denir (Catoni, vd., 2005). İki-karmaşık sayı değerli olmak üzere u^m analitiktir. Çünkü $u^m - u_0^m$ farkı her zaman denklem (84) den görüleceği gibi, $u - u_0$ a orantılıdır. Bu durumda, u nun tamsayı kuvvet serileri de iki-karmaşık değişken u nun analitik fonksiyonları olacaktır. Bu sonuç aslında herhangi bir değişmeli cebir için geçerlidir.

Tanım 7.3. $f(u)$ İki-karmaşık değişkenli bir analitik fonksiyon olsun. Eğer $f(u)$,

$u = 0$ noktası etrafında bir seriyle açılırsa,

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k \quad (85)$$

elde edilir. Bu ifade farklı bir u_0 noktası etrafında $f(u)$ fonksiyonunun genişlemesidir ve

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (u - u_0)^k \quad (86)$$

şeklinde gösterilir.

Bu ifadeler (85) denklemindeki u^k ifadesinin (84) denkleminde yerine konulmasıyla elde edilir. Serilerin kesinlikle yakınsak olduğunu varsaymak ve elde edilen ifadedeki terimleri u_0 ın artan kuvvetine göre sıralamak gerekir. Yani

$$f(u) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k!l!} a_{k+l} u_0^l (u - u_0)^k \quad (87)$$

şeklinde elde edilir. (85) denklemindeki fonksiyonun $u = u_0$ noktasında k dereceden türevinin,

$$f^{(k)}(u_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{l!} a_{k+l} u_0^l \quad (88)$$

şeklinde olması durumunda (87) denklemindeki fonksiyonunun $u = u_0$ noktası etrafında genişlemesi

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(u_0) (u - u_0)^k \quad (89)$$

şeklinde olur. Bu ifade 2 boyutta karmaşık fonksiyonların seri genişlemesine benzer bir durumdur. (89) denklem (86) denklemindeki serinin genişletilmiş katsayıların olduğunu gösterir. Ayrıca

$$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(u_0) \quad (90)$$

şeklinde gösterilir.

Temel fonksiyonların türevlerinin ve integralinin nasıl elde edileceğine dair kurallar seriler yardımıyla elde edilebilir ve bu seriler 2 boyutta karmaşık fonksiyonlara karşılık gelen serilere benzer bir formda olması koşuluyla, türev ve integral kuralları değişmez, yani aynıdır.

Tanım 7.3. u iki-karmaşık değerli $f(u)$ iki-karmaşık fonksiyonu x ve y reel olmak üzere $P(x, y)$ ve $Q(x, y)$ reel fonksiyonları cinsinden yazılırsa;

$$f(u) = P(x, y) + \delta Q(x, y) \quad (91)$$

elde edilir. Bu durumda P , Q fonksiyonlarının parçalı türevleri arasında eşitlik bağıntıları mevcuttur. Bu ilişkiler, f fonksiyonunun türevi yazılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x + \Delta y} \left[\frac{\partial P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y + \delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial Q}{\partial y} \Delta y \right) \right] \quad (92)$$

Burada (83) denklemindeki $u - u_0$ farkı, $\Delta x + \delta \Delta y$ şeklindedir. P, Q fonksiyonlarının parçalı türevleri arasındaki ilişkiler, (92) denklemindeki sırasıyla

$$\Delta x \rightarrow 0,$$

$$\Delta y = 0$$

sonra

$$\Delta x = 0,$$

$$\Delta y \rightarrow 0$$

konularak elde edilir. Bu bağıntıları şunlardır:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (93)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (94)$$

(93) ve (94) özellikleri karmaşık bir fonksiyonun gerçekte ve sanal bileşenleri için Riemann ilişkilerine benzerdir. (93) ve (94) denklemlerinden P , Q bileşenlerinin

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad (95)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0 \quad (96)$$

denklemlerinin çözümlerinin olduğu görülür. (95) ve (96) denklemlerinden görülebileceği gibi, iki-karmaşık değişkenli analitik fonksiyonun P , Q bileşenleri x , y değişkenlerine göre dalga denkleminin çözümleridir (Olariu, 2000).

8. İKİ-KARMAŞIK FONKSİYONLARIN İNTEGRALLERİ

Bu kısımda hiperbolik iki-karmaşık fonksiyonların integralleri ile ilgili temel tanımlar verilecektir.

8.1. Hiperbolik Fonksiyonların İntegral Özellikleri

Tanım 8.1. İki-karmaşık fonksiyonların tekillikleri $m > 0$ olmak üzere $\frac{1}{(u - u_0)^m}$ şeklindeki terimlerden elde edilir. Bu tür terimler içeren fonksiyonlar sadece $u = u_0$ noktasında değil, ayrıca u_0 noktasından geçen ve düğüm çizgilerine paralel olan tüm noktalarda da tekil olur (Olariu, 2000).

Tanım 8.2. Tekil noktaları olmayan bir bölgede bulunan bir yol üzerinde A, B noktaları arasında iki-karmaşık fonksiyonun integrali yoldan bağımsızdır, bu da bir analitik fonksiyonun tekil noktaları olmayan bir bölgede bulunan bir döngü üzerinde integralinin sıfır olduğu anlamına gelir ve

$$\oint_{\Gamma} f(u)du = 0 \quad (97)$$

şeklinde gösterilir.

İspat:

$$f(u) = P(x, y) + \delta Q(x, y)$$

ifadesindeki, $f(u)$ fonksiyonu ve

$$du = dx + \delta dy$$

ifadesi

$$\oint_{\Gamma} f(u)du = 0$$

da yerine yazarsak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\oint_{\Gamma} f(u)du = \oint_{\Gamma} [(Pdx + Qdy) + \delta(Qdx + Pdy)] \quad (98)$$

Eğer P, Q fonksiyonları Γ düğümü tarafından çevrelenen Σ yüzeyinde regülerse (düzenliyse) Γ düğümü boyunca bulunan integral, Stokes teoreminin yardımıyla,

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ve

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}$$

formundaki terimlerin Σ yüzeyi üzerinde bir integrale dönüştürülebilir. Burada (93) ve (94) ifadelerine göre

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

ve

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

şeklindedir. Böylece (97) ifadesi ispatlanmış olur (Olariu, 2000).

İki-karmaşık sayının üstel formu, denklem (41), devirli bir değişken içermez ve bu nedenle, (1) denkleminde tanımlanan iki-karmaşık sayılara rezidü kavramı uygulanmaz.

9. İKİ-KARMAŞIK POLİNOMLARIN ÇARPANLARA AYRILMASI

Bu kısımda hiperbolik iki-karmaşık polinomların çarpanlara ayrılması ile ilgili bilgiler yer almaktadır.

Tanım 9.1. m dereceden $u = x + \delta y$ iki-karmaşık değerli bir polinom

$$P_m(u) = u^m + a_1 u^{m-1} + \dots + a_{m-1} u + a_m \quad (99)$$

formundadır. Burada sabitler genel olarak iki-karmaşık sayılardır. Eğer

$$a_m = a_{mx} + \delta a_{my}$$

$i = 0, 1, \dots, m$ için

(9) ve (76) denklemleri kullanılırsa polinom $P_m(u)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$P_m = [v_+^m + A_{1+} v_+^{m-1} + \dots + A_{m-1,+} v_+ + A_{m+}] e_+ + [v_-^m + A_{1-} v_-^{m-1} + \dots + A_{m-1,-} v_- + A_{m-}] e_- \quad (100)$$

(100) denkleminde gerçel katsayılı m dereceden polinomların her biri, katsayılı lineer veya kuadrik çarpanların çarpımı ya da lineer çarpanların çarpımı olarak yazılabilir. Notasyonun daha sade olması için

$$P_m = \prod_{l=1}^m (v_+ - v_{l+}) e_+ + \prod_{l=1}^m (v_- - v_{l-}) e_- \quad (101)$$

yazılabilir.

Burada v_{l+} ifadeleri her zaman karmaşık eşlenik çiftleridir ve v_{l-} ifadeleri için de aynısı geçerlidir. (25) ve (26) denklem özelliklerine göre, polinom $P_m(u)$;

$$P_m(u) = \prod_{l=1}^m [(v_+ - v_{l+}) e_+ + (v_- - v_{l-}) e_-] \quad (102)$$

formundaki çarpanların çarpımı olarak yazılabilir. Bu bağıntı, (28) denkleminin yardımıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$P_m(u) = \prod_{l=1}^m (u - u_l) \quad (103)$$

Burada

$l = 1, \dots, m$ için

$$u_l = e_+ v_{l+} + e_- v_{l-} \quad (104)$$

(101) Denkleminde tanımlanan v_{l+} ve v_{l-} kökler, isteğe göre sıralanabilir. Yani denklem (104), her grupta l ye göre v_{l+} , v_{l-} köklerinin sıralandığı çeşitli yollara karşılık gelen $P_m(u)$ polinomunun m kök $u_1, \dots, u_m$ kümelerini verir. Böylece denklemdeki hiper-karmaşık bileşenler, (101) ayrı ayrı alındığında bir değerli çarpanlara ayırmalara sahiptir. Polinom $P_m(u)$ doğrusal çarpanların bir çarpım olarak birçok farklı şekilde yazılabilir.

Tanım 9.2. $P(u) = u^2 - 1$ ise derece $m = 2$ dir. Polinomun katsayıları

$$a_1 = 0, a_2 = -1$$

dir. a_2 nin iki-karmaşık bileşenleri

$$a_{2x} = -1, a_{2y} = 0$$

şeklindedir. A_{2+}, A_{2-} bileşenleri ise

$$A_{2+} = -1,$$

$$A_{2-} = -1$$

dir. $P(u)$ nin (100) denklemindeki ifadesi

$$P(u) = e_+(v_+^2 - 1) + e_-(v_-^2 - 1)$$

şeklindedir ve (103) denkleminin çarpanlara ayrılması

$$u^2 - 1 = (u - u_1)(u - u_2)$$

şeklindedir. Buradan

$$u_1 = \pm e_+ \pm e_-$$

$$u_2 = -u_1$$

dir. Çarpanlar şu şekildedir:

$$u^2 - 1 = (u + 1)(u - 1),$$

$$u^2 - 1 = (u + \delta)(u - \delta)$$

Böylece

$$(\pm e_+ \pm e_-)^2 = e_+ + e_- = 1$$

olduğu açıktır.

10. HİPERBOLİK İKİ-KARMAŞIK SAYILARIN İNDİRGENEMEZ MATRİSLERLE TEMSİLİ

Tanım 10.1. $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ denklemindeki matris u iki-karmaşık sayısıyla gösterilirse U diye isimlendirilir ve

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (105)$$

şeklindedir. Buradan

$$TUT^{-1} = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x-y \end{pmatrix} \quad (106)$$

olduğu açıktır.

Tanım 10.2. İki-karmaşık sayının çarpımı için

$$v_+ = x + y,$$

$$v_- = x - y$$

değişkenleri için bağıntılar (17) denkleminde yazılır. TUT^{-1} matrisi $u = x + \delta y$ iki-karmaşık sayının indirgenemez gösterimini sağlar (Catoni, vd., 2012).

11. SONUÇ

İki-karmaşık sayılarını ρ genliğini ve λ argümentini içeren üstel formu vardır. Kuvvet serileri yardımıyla tanımlanan iki-karmaşık fonksiyonlar analitiktir. Ayrıca iki-karmaşık fonksiyonların bileşenlerinin kısmi türevleri de birbirleriyle yakından ilişkilidir iki-karmaşık fonksiyonların integralleri fonksiyonların düzgün olduğu bölgede yoldan bağımsızdır. İki-karmaşık değişkenli polinomlar lineer veya kuadratik çarpanların çarpımları şeklinde yazılabilir.

11.1. Öneriler

Bu sistemin genellemesi olarak n boyutta değişmeli karmaşık sayılar tanıtılıp, bunların cebirsel yapıları ile ilgili çalışmalar verilebilir.

KAYNAKÇA

- Başkan T. 2000, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, ISBN : 978-605-4485-76-5
- Borota N. A., Flores E., Osler T.J., 2000, Spacetime numbers the easy way, Mathematics and. Computer Education 34: 159-168
- Callahan, J.J., 2000, The geometry of spacetime: an introduction to special and general relativity. Springer Science ve Business Media.
- Catoni, F., Cannata, R., Catoni, V. and Zampetti, P. 2004. Two-dimensional hypercomplex numbers and related trigonometries and geometries. Advances in Applied Clifford Algebras, 14(1), 47-68.
- Catoni, F., Cannata, R., Catoni, V. and Zampetti, P. 2005. Hyperbolic trigonometry in two-dimensional space-time gomety. arXiv preprint mathph/0508011.
- Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E. and Zambetti, P. 2008. The mathematics of Minkowski space-time: with an intro duction to commutative hypercomplex numbers. Springer Science & Business Media
- Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V. and Zampetti, P. 2011. Geometry of Minkowski space-time. Springer Science ve Business Media
- Catoni, F. and Zampetti, P. 2012. Cauchy-Like Integral Formula for Functions of a Hyperbolic Variable. Advances in Applied Clifford Algebras, 22(1), 23-37.
- Çakır H., 2017, Hiperbolik Sayılar ve Hiperbolik Sayı Matrislerinin Cebirsel ve Geometrik Uygulamaları, Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Antalya.
- Çallıalp F., 2000, Örneklerle Soyut Cebir. ISBN : 975 – 511–350–9
- Finko O., Richter W.D., 2022, On Hyperbolic Complex Numbers, Applied Sciences 2022, Vol. 12, Page 5844, vol. 12, no. 12, p. 5844,
- Fjelstadand P., 1986, Extending special relativity via perplex numbers, Am. J. Phys. vol. 54, pp. 416–422
- Fjelstadand P., Gal S. G., 1998, n-Dimensional hyperbolic complex numbers, Adv Appl Clifford Algebr, vol. 8, no. 1, pp. 47–68
- Göksal, Y., 2011, Hiperbolik Sayılar ve Hiperbolik sayıların 2-Boyutlu Hiperbolik Geometriye Uygulamaları, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Trabzon
- Imaeda K., Imaeda M. 2000. Sedenions: algebra and analysis. Applied Mathematics and Computation, 115: 77-88.

J.H. Conway and D.A. Smith, 2003. On Quaternions and Octonions: Their Geometry and Symmetry, A.K. Peters Ltd., Natick, MA,

Olariu S. 2000, preprint math/0008120 and undefined, Complex numbers in three dimensions,

Olariu S. 2000, preprint math/0007180 and undefined 2000, Exponential forms and path integrals for complex numbers in n dimensions,

Olariu S. 2000, Hyperbolic complex numbers in two dimensions,

Özdemir M.. 2015, Hiperbolik Sayıların Geometrisi Ders Notları , Akdeniz Üniversitesi, Antalya

Sobczyk, G., 1995.The hyperbolic number plane. The College Mathematics Journd, 26(4), 268-280

