

İKİ DEĞİŞKENLİ ARİTMETİK FONKSİYONLAR

Funda ÇETİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2007
ANKARA**

Funda ÇETİN tarafından hazırlanan İKİ DEĞİŞKENLİ ARİTMETİK FONKSİYONLAR adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



Yrd. Doç. Dr. Naim TUĞLU

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

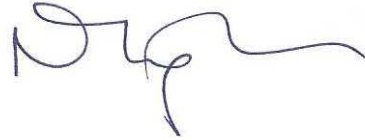
Başkan: : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU



Üye : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI



Üye : Yrd. Doç. Dr. Naim TUĞLU

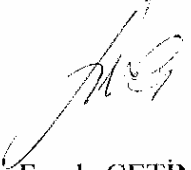


Tarih : 12 / 06 / 2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Funda ÇETİN

İKİ DEĞİŞKENLİ ARİTMETİK FONKSİYONLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Funda ÇETİN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2007

ÖZET

Bu çalışmada, tek değişkenli aritmetik fonksiyonların özellikleri ile bu fonksiyonların Dirichlet ve birimsel çarpımları incelenip cebirsel yapıları verildi. İki değişkenli aritmetik fonksiyonlar tanımlanarak bu fonksiyonların, Dirichlet çarpımları, üreteç fonksiyonları ve çeşitli özellikleri incelendi. Ayrıca iki değişkenli Nagell ve Ramanujan toplam fonksiyonları ve bu fonksiyonların birimsel benzerleri gösterildi.

Bilim Kodu : 204.1.025
Anahtar Kelimeler : Aritmetik fonksiyon, Dirichlet çarpım, Ramanujan toplam
Sayfa Adedi : 99
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Naim TUĞLU

ARITHMETIC FUNCTIONS OF TWO VARIABLES
(M.Sc.Thesis)

Funda ÇETİN

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

June 2007

ABSTRACT

In this study, properties of arithmetic functions of one variable and their Dirichlet and unitary multiplication were studied, and their algebraic structures were given. Arithmetic functions of two variables were defined and their Dirichlet multiplications, generating functions and various properties were examined. Besides, Nagell totient and Ramanujan's sum functions and their unitary analogues were shown.

Science Code	: 204.1.025
Key Words	: Arithmetical functions, Dirichlet multiplication, Ramanujan sum
Page Number	: 99
Adviser	: Assist. Prof. Dr. Naim TUĞLU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Naim TUĞLU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tezi hazırlamam esnasında kıymetli tecrübelerinden faydalandığım Prof. Dr. Dursun TAŞÇI ve Yrd. Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK'a teşekkürü bir borç bilirim. Bu süreçte manevi desteklerini esirgemeyen Prof. Dr. Yunus AKÇAMUR'a, Yrd. Doç. Dr. Nurettin TÜRKAN'a, Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN'e ve Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU'na teşekkür ederim. Yine manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme ve nişanlım Yüksel TAŞDEMİR'e sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ	1
2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	2
2.1. Aritmetik Fonksiyonlar	2
2.2. Aritmetik Fonksiyonların Dirichlet Çarpımı	12
2.3. Çarpımsal Fonksiyonlar	23
2.4. Dirichlet Serileri ve Üreteç Fonksiyonlar	36
3. BİRİMSEL ÇARPIM	41
3.1. Aritmetik Fonksiyonların Birimsel Çarpımı	41
4. İKİ DEĞİŞKENLİ ARİTMETİK FONKSİYONLAR	50
4.1. İki Değişkenli Aritmetik Fonksiyonlar	50
4.2. İki Değişkenli Aritmetik Fonksiyonların Dirichlet Serileri ve Üreteç Fonksiyonları	59
5. NAGELL VE RAMANUJAN FONKSİYONLARI	64
5.1. Nagell Toplam Fonksiyonu	64
5.2. Ramanujan Toplam Fonksiyonu	65
6. BİRİMSEL BENZER NAGELL VE RAMANUJAN FONKSİYONLARI	79
6.1. Birimsel Benzer Nagell Toplam Fonksiyonu	79
6.2. Birimsel Benzer Ramanujan Fonksiyonu	88

	Sayfa
7. SONUÇ	97
KAYNAKLAR	98
ÖZGEÇMİŞ	99

1. GİRİŞ

Matematik biliminde önemli bir yer tutan sayılar teorisi aynı zamanda matematiğin diğer alanları için de temel oluşturmaktadır. Ünlü matematikçi Carl Friedrich Gauss sayılar teorisinin önemini vurgulamak amacıyla: “Matematik, bilimlerin kraliçesi olduğu gibi, sayılar teorisi de matematiğin kraliçesidir” demiştir. Sayılar teorisi diğer bir adıyla aritmetik, reel veya kompleks sayılar ve bunların özelliklerini inceleyen bir bilim dalıdır.

Matematiğin tüm alanlarında temel oluşturan fonksiyon konusu sayılar teorisinde de *aritmetik fonksiyon* veya *teorik sayı fonksiyonu* olarak ele alınmıştır.

Pozitif tam sayılar kümesinden reel veya kompleks sayılar kümesine tanımlanan fonksiyonlara *aritmetik fonksiyon* veya *teorik sayı fonksiyonu* denir [1].

Aritmetik fonksiyonlar üzerinde tanımlanan Dirichlet çarpım ile yeni bir aritmetik fonksiyon elde edilmektedir. Böylece aritmetik fonksiyonlar üzerinde tanımlı Dirichlet çarpım ile Dirichlet terse sahip aritmetik fonksiyonların kümesi bir grup yapısı teşkil etmektedir. Ayrıca çarpımsal fonksiyonlar kümesi bu grup için bir alt grup tanımlayacaktır.

Birimsel bölen kavramından yola çıkılarak aritmetik fonksiyonlar üzerinde bir diğer çarpım türü olan birimsel çarpım verilebilmektedir.

Ayrıca tek değişkenli aritmetik fonksiyonların genelleştirilmiş olan iki değişkenli aritmetik fonksiyonlar tanımlanmaktadır. İki değişkenli aritmetik fonksiyonlardan Nagell ve Ramanujan toplam fonksiyonlarında olduğu gibi bazı özel hallerde iki değişkenli bu fonksiyonlar tek değişkenli temel fonksiyonlara dönüşebilmektedir.

Ayrıca birimsel bölünlülük ele alınarak tek değişkenli ve iki değişkenli aritmetik fonksiyonların birimsel benzer fonksiyonları elde edilebilmektedir.

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

İlk olarak aritmetik fonksiyonun tanımı verilip ardından bazı temel aritmetik fonksiyonlar ve bunlarla ilgili teoremler incelenecektir.

2.1. Aritmetik Fonksiyonlar

2.1. Tanım

Pozitif tamsayılar kümesinden reel veya kompleks sayılar kümesine tanımlanan fonksiyonlara *aritmetik fonksiyon* ya da *teorik sayı fonksiyonu* denir [1].

2.2. Tanım

$p_1, p_2, \dots, p_k$ asal sayılar olmak üzere her $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ pozitif tamsayısı için

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona μ *Möbius fonksiyonu* denir.

Tanımdan da anlaşıldığı gibi n pozitif tamsayısının çarpanlarından en az biri tam kare içeriyorsa $\mu(n) = 0$ olacaktır.

1 den 10'a kadar olan sayıların μ Möbius fonksiyonu altında görüntüleri aşağıda verilmiştir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

Möbius fonksiyonunun temel özelliklerinden birini gösteren aşağıdaki teoremi verelim.

2.1. Teorem

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n=1, \\ 0 & n>1. \end{cases}$$

İspat

$n=1$ ise eşitlik açıktır. $n>1$ ise Aritmetiğin Temel Teoreminden n tamsayısı, $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ biçiminde asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir. Bu durumda $\sum_{d|n} \mu(d)$ toplamında, $d=1$ olduğu ve n nin ayrık asalların çarpımı olarak yazılabildiği durumlarda μ sıfırdan farklı olacağından;

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \mu(1) + \mu(p_1) + \dots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \dots + \mu(p_{k-1} p_k) + \dots + \mu(p_1 p_2 \dots p_k) \\ &= 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \dots + \binom{k}{k}(-1)^k \\ &= (1-1)^k \\ &= 0. \end{aligned}$$

2.3. Tanım

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere n den küçük veya n ye eşit n ile aralarında asal olan pozitif tamsayıların sayısını veren fonksiyona *Euler φ fonksiyonu* denir ve φ ile gösterilir [2]. Yani

$A = \{d : (d, n) = 1, d < n\}$ olmak üzere $\varphi(n) = s(A)$ dır. 1 den 10'a kadar olan sayıların Euler φ fonksiyonu altında görüntüleri aşağıda verilmiştir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

2.2. Teorem

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

İspat

Pozitif tam sayılar kümesini 1 den n ye kadar ayrık sınıflara ayıralım. Ayrıca n nin her d böleni için

$$A(d) = \{k : (k, n) = d, 1 \leq k \leq n\}$$

olsun. Eğer $k \in A(d)$ ise bu durumda $\left(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$ olur. Yani $A(d)$ sınıfındaki

tamsayıların sayısı, $\frac{n}{d}$ yi geçmeyen ve $\frac{n}{d}$ ile aralarında asal olan sayıların sayısı

kadardır. φ fonksiyonunun tanımından, $A(d)$ sınıfındaki tam sayıların $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ adet

oldukları söylenir. Her bir tamsayı sadece bir sınıfa dahil olacağından ve n de bu

ayrık sınıflardaki elemanların toplamına eşit olacağından $n = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ eşitliği elde

edilir. Böylece

$$n = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

bulunur.

Aşağıda verilen teorem Euler φ fonksiyonu ile μ Möbius fonksiyonu arasındaki ilişkiyi göstermektedir:

2.3. Teorem

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

İspat

$(n, k) = 1$ için $\left\lfloor \frac{1}{(n, k)} \right\rfloor = 1$, diğer durumlarda $\left\lfloor \frac{1}{(n, k)} \right\rfloor = 0$ olduğundan

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{1}{(n, k)} \right\rfloor$$

biçiminde yazılabilir. Burada k sayıları n den küçük veya n ye eşit olan tamsayıları göstermektedir. Teorem 2.1 den

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^n \sum_{d|(n, k)} \mu(d) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{d|n \\ d|k}} \mu(d)$$

olup, bu eşitlik n nin d böleni için çarpımları d yi veren ve $1 \leq k \leq n$ şartına uyan tüm k sayılarının toplamını verir. Eğer $k = qd$ alınırsa $1 \leq k \leq n$ olduğundan $1 \leq q \leq \frac{n}{d}$ dır. Böylece

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \sum_{q=1}^{\frac{n}{d}} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{q=1}^{\frac{n}{d}} 1 = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$$

elde edilir.

2.4. Teorem

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

İspat

$n = 1$ değeri için $\varphi(1) = 1$ olarak tanımlanır.

$n > 1$ ve $p_1, p_2, \dots, p_r$ ler n nin ayrık asal bölenleri olsun. Bu durumda

$$\prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1 - \sum \frac{1}{p_i} + \sum \frac{1}{p_i p_j} - \sum \frac{1}{p_i p_j p_k} + \dots + \frac{(-1)^r}{p_i p_j \dots p_r} \quad (2.1)$$

Eş. 2.1 eşitliğinin sağ tarafındaki $\sum \frac{1}{p_i p_j p_k}$ terimi ile n nin p_i, p_j, p_k asal çarpanlarından farklı üç tanesinin bütün olası çarpımlarının toplamı ifade edilmektedir. Benzer şekilde Eş. 2.1 eşitliğindeki her bir terim n nin asal

çarpanlarından $(1 \leq k \leq r)$ olacak şekilde farklı k tanesinin bütün olası çarpımlarının toplamından oluşmaktadır. Böylece eşitliğin sağ tarafı $\pm \frac{1}{d}$ biçiminde olur. Burada d , n nin bir böleni olup ya 1 ya da ayrık asalların çarpımından oluşacaktır. ± 1 sırası ise tamamen $\mu(d)$ ile ilgilidir. Eğer d , herhangi p_i asalının karesi ile bölünüyorsa $\mu(d) = 0$ olur. Böylece Eş. 2.1 eşitliğin sağ tarafı $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$ ye eşit olur.

Teorem 2.3 den

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

olup, böylece

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

olur. φ nin pek çok özelliği bu çarpım formülünden yararlanılarak elde edilebilir.

2.5. Teorem

Euler φ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a) p asal ve $k \geq 1$ için $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$

b) $(m, n) = d$ olmak üzere $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n) \frac{d}{\varphi(d)}$

c) $(m, n) = 1$ ise $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$

d) $a|b$ ise $\varphi(a)|\varphi(b)$

e) $n \geq 3$ için $\varphi(n)$ çifttir.

f) Eğer n , r tane farklı tek asal çarpana sahipse bu durumda $2^r|\varphi(n)$ dir.

İspat

a) Teorem 2.4 de $n = p^k$ alınırsa ispat açıktır.

b) Teorem 2.4 den

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

olur. Ayrıca $m.n$ nin her asal böleni ya m yi bölen bir asal ya da n yi bölen bir asaldır. Eğer bu asallar hem m hem de n yi bölüyorsa bu durumda (m,n) yi de böler. Buradan

$$\frac{\varphi(mn)}{mn} = \prod_{p|mn} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod_{p|(m,n)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} = \frac{\frac{\varphi(m)}{m} \frac{\varphi(n)}{n}}{\frac{\varphi(d)}{d}}$$

olur. Böylece

$$\varphi(mn) = \varphi(m) \varphi(n) \frac{d}{\varphi(d)}$$

bulunur.

c) $(m, n) = 1$ olsun. (b) seçeneğinde $(m, n) = d = 1$ alınırsa $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ elde edilir.

d) $a|b$ ise $b = ac$ ve $1 \leq c \leq b$ olacak şekilde $c \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Eğer $c = b$ ise bu durumda $a = 1$ olup ispat açıktır. Eğer $c < b$ ise bu durumda (b) seçeneğinden $d = (a, c)$ olmak üzere

$$\varphi(b) = \varphi(ac) = \varphi(a)\varphi(c) \frac{d}{\varphi(d)} = d\varphi(a) \frac{\varphi(c)}{\varphi(d)} \quad (2.2)$$

elde edilir. $c = 1$ ise $d = 1$ olup $\varphi(b) = \varphi(a)$ olur. $c > 1$ için

$$(a, c) = d \Rightarrow d|a \text{ ve } d|c$$

olup $d|c \Rightarrow c = dc_1$ olacak şekilde $c_1 \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $(d, c_1) = d_1$ ise (b) seçeneğinden

$$\varphi(c) = \varphi(dc_1) = \frac{\varphi(d)\varphi(c_1)}{\varphi(d_1)} d_1$$

dir. Bu işlemlere $(c_{r+1}, d_r) = 1$ olana kadar devam edilirse

$$\varphi(c_r) = \varphi(d_r)\varphi(c_{r+1})$$

elde edilir. Bunlar Eş. 2.2 ifadesinde yazıldığında

$$\varphi(b) = d.d_1.d_2.....d_r.1\varphi(c_{r+1})\varphi(a)$$

olup, buradan $\varphi(a)|\varphi(b)$ elde edilir.

e) Eğer $n = 2^k$ ($k \geq 2$) ise (a) seçeneğinden $\varphi(n)$ nin çift olduğu bulunur. Eğer n en az bir tek asal çarpana sahipse

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \frac{p-1}{p} = \frac{n}{\prod_{p|n} p} \prod_{p|n} p-1 = c(n) \prod_{p|n} p-1 \quad (2.3)$$

olup, burada $c(n)$ tamsayıdır. $\prod_{p|n} p-1$ çift olduğundan $\varphi(n)$ çift olarak elde edilir.

f) Eğer n , r tane farklı tek asal çarpana sahipse $\prod_{p|n} p-1$ ifadesinde en az r tane 2 çarpanı bulunur. Böylece $2^r \mid \prod_{p|n} p-1$ olup, Eş. 2.3 den $2^r \mid \varphi(n)$ elde edilir.

2.4. Tanım

k , negatif olmayan bir tamsayı ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere n nin bütün pozitif bölenlerinin k . kuvvetlerinin toplamı olarak tanımlanan fonksiyona *bölen fonksiyon* denir ve σ_k ile gösterilir. Yani $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için;

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

olur. Özel olarak

$$\sigma(n) = \sigma_1(n) \text{ } n \text{ nin bölenlerinin toplamını,}$$

$$\tau(n) = \sigma_0(n) \text{ } n \text{ nin bölenlerinin sayısını veren fonksiyondur.}$$

2.1. Örnek

$n = 12$ için $\tau(n)$, $\sigma(n)$ ve $\sigma_2(n)$ değerleri aşağıdaki şekildedir:

$$\tau(12) = \sigma_0(12) = \sum_{d|12} 1 = 6$$

$$\sigma(12) = \sigma_1(12) = \sum_{d|12} d = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$$

$$\sigma_2(12) = \sum_{d|12} d^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 12^2 = 210$$

2.5. Tanım

k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $\zeta_k(n) = n^k$ biçiminde tanımlanan aritmetik fonksiyona *kuvvet fonksiyonu* denir. Özel olarak $k = 0$ olması durumunda $\zeta = \zeta_0$ ile gösterilir ve *Zeta fonksiyonu* adını alır. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\zeta(n) = 1$ dir.

Aritmetik fonksiyonlar kümesi üzerinde birçok ikili işlem tanımlanabilir. f ve g aritmetik fonksiyonlar olmak üzere $f + g$ toplamı ve $f.g$ çarpımı bilinen kurallar ile belirlenir. Yani her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n) \quad (f.g)(n) = f(n)g(n)$$

ile tanımlanır.

Aritmetik fonksiyonların toplam ve çarpımları değişme, birleşme ve dağılma özelliklerine sahiptir.

2.2. Aritmetik Fonksiyonların Dirichlet Çarpımı

Teorem 2.3 de $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$ olduğu gösterilmişti. Bu eşitlikte sağ taraftaki toplam ifadesi sayılar teorisinde sık sık karşılaşılan bir yapıdır. Bu toplam ifadeleri genel olarak f ve g aritmetik fonksiyonlar olmak üzere;

$$\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \text{ yapısındadır.}$$

2.6. Tanım

f ve g aritmetik fonksiyonlar olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}^+$ için;

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

biçiminde tanımlı h aritmetik fonksiyonuna f ile g nin Dirichlet çarpımı (Dirichlet konvolisyonu) denir ve $h = f * g$ ile gösterilir [3].

2.2. Örnek

$$(\zeta_k * \zeta)(n) = \sum_{d|n} \zeta_k(d) \zeta\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} d^k \cdot 1 = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)$$

olup böylece $\sigma_k = \zeta_k * \zeta$ dir.

Aşağıda verilen teorem Dirichlet çarpımının cebirsel özelliklerini göstermesi açısından önemlidir.

2.6. Teorem

f , g ve h aritmetik fonksiyonlar olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$i) f * g = g * f \text{ (değişme)}$$

$$ii) (f * g) * h = f * (g * h) \text{ (birleşme)}$$

$$iii) f * (g + h) = (f * g) + (f * h) \text{ (dağılma)}$$

İspat

i) Dirichlet çarpımının tanımından her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

olup d, n nin bir böleni olduğundan $n = d.k$ olacak biçimde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bu durumda

$$(f * g)(n) = \sum_{k|n} f\left(\frac{n}{k}\right) g(k)$$

olup özel olarak $d = k$ alınırsa

$$\begin{aligned} (f * g)(n) &= \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \\ &= \sum_{d|n} g(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= (g * f)(n) \end{aligned}$$

bulunur.

ii) $(f * g) = F$ ve $(g * h) = G$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
 [(f * g) * h](n) &= [F * h](n) \\
 &= \sum_{dd_3=n} F(d)h(d_3) \\
 &= \sum_{dd_3=n} \left(\sum_{d_1d_2=d} f(d_1)g(d_2) \right) h(d_3) \\
 &= \sum_{d_1d_2d_3=n} f(d_1)g(d_2)h(d_3)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
 [f * (g * h)](n) &= [f * G](n) \\
 &= \sum_{d_1d=n} f(d_1)G(d) \\
 &= \sum_{d_1d=n} f(d_1) \left(\sum_{d_2d_3=d} g(d_2)h(d_3) \right) \\
 &= \sum_{d_1d_2d_3=n} f(d_1)g(d_2)h(d_3)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Eş. 2.4 ve Eş. 2.5 den

$$[(f * g) * h](n) = [f * (g * h)](n)$$

olduğundan

$$[(f * g) * h] = [f * (g * h)]$$

bulunur.

iii) $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned}
[f * (g + h)](n) &= \sum_{d|n} f(d)(g + h)\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= \sum_{d|n} f(d) \left[g\left(\frac{n}{d}\right) + h\left(\frac{n}{d}\right) \right] \\
&= \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{d|n} f(d) h\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{d|n} f(d) h\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= (f * g)(n) + (f * h)(n) \\
&= [(f * g) + (f * h)](n).
\end{aligned}$$

2.3. Örnek

$n=10$ için $(f * g)(10) = (g * f)(10)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
(f * g)(10) &= \sum_{d|10} f(d) g\left(\frac{10}{d}\right) \\
&= f(1)g(10) + f(2)g(5) + f(5)g(2) + f(10)g(1) \\
&= g(1)f(10) + g(2)f(5) + g(5)f(2) + g(10)f(1) \\
&= \sum_{d|10} g(d) f\left(\frac{10}{d}\right) \\
&= (g * f)(10).
\end{aligned}$$

2.4. Örnek

$n = 10$ için $[(f * g) * h](10) = [f * (g * h)](10)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
[(f * g) * h](n) &= \sum_{dd_3=n} (f * g)(d) h(d_3) \\
&= \sum_{dd_3=n} \left(\sum_{d_1 d_2=d} f(d_1) g(d_2) \right) h(d_3)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[f * (g * h)](n) &= \sum_{d_1 d=n} f(d_1) (g * h)(d) \\
&= \sum_{d_1 d=n} f(d_1) \left(\sum_{d_2 d_3=d} g(d_2) h(d_3) \right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
[(f * g) * h](10) &= [f(1)g(1)]h(10) + [f(1)g(2) + f(2)g(1)]h(5) \\
&\quad + [f(1)g(5) + f(5)g(1)]h(2) \\
&\quad + [f(1)g(10) + f(2)g(5) + f(5)g(2) + f(10)g(1)]h(1) \\
[f * (g * h)](10) &= f(1)[g(1)h(10) + g(2)h(5) + g(5)h(2) + g(10)h(1)] \\
&\quad + f(2)[g(1)h(5) + g(5)h(1)] \\
&\quad + f(5)[g(1)h(2) + g(2)h(1)] + f(10)[g(1)h(1)]
\end{aligned}$$

olup gerekli işlemler yapılarak iki denklemin eşit olduğu bulunur.

Şimdi Dirichlet çarpım için birim eleman tanımlayalım.

2.7. Tanım

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\delta(n) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan δ fonksiyonuna *Dirichlet çarpıma göre birim fonksiyon* denir [1].

2.7. Teorem

Her f aritmetik fonksiyonu ve δ Dirichlet çarpımına göre birim fonksiyonu için

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

İspat

$$(f * \delta)(n) = \sum_{d|n} f(d) \delta\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d) \left\lfloor \frac{d}{n} \right\rfloor = f(n).$$

$\mathcal{A}$ aritmetik fonksiyonların kümesi olmak üzere $(\mathcal{A}, +)$ nın değişmeli bir grup olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Diğer taraftan Dirichlet çarpım tanımından $f, g \in \mathcal{A}$ için $f * g \in \mathcal{A}$ olduğundan kapalılık özelliği sağlanır. Teorem 2.6 (i)-(iii) den birleşme, değişme ve dağılma özellikleri sağlanır. Ayrıca Teorem 2.7 den birim mevcuttur. O halde $\mathcal{A}$, kümesi fonksiyonlarda toplama ve Dirichlet çarpım olarak tanımlanan aritmetik çarpım ikili işlemleri ile değişmeli ve birimli bir halkadır.

2.8. Tanım

f , bir aritmetik fonksiyon olsun. $f * g = g * f = \delta$ olacak şekildeki g aritmetik fonksiyonuna f nin *Dirichlet tersi* denir.

f , $f(1) \neq 0$ olacak şekilde bir aritmetik fonksiyon ise f nin Dirichlet tersi f^{-1}

$$n = 1 \text{ için } f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}$$

$$n > 1 \text{ için } f^{-1}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır [1].

2.8. Teorem

f aritmetik fonksiyonunun Dirichlet tersi f^{-1} varsa tektir [4].

İspat

Kabul edelim ki; g ve h , f nin Dirichlet tersi olan iki aritmetik fonksiyon olsun.

Bu durumda

$$g = \delta * g = (h * f) * g = h * (f * g) = h * \delta = h.$$

2.5. Örnek

$f(n) = 3n + 5$ biçiminde tanımlı aritmetik fonksiyon için $f^{-1}(10)$ değerini hesaplayalım.

$f(1) \neq 0$ olduğundan, $f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{8}$ ve 10'un bölenleri 1, 2, 5 ve 10 olduğundan;

$$f^{-1}(10) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|10 \\ d < 10}} f\left(\frac{10}{d}\right) f^{-1}(d)$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(10) &= -\frac{1}{f(1)} [f(10)f^{-1}(1) + f(5)f^{-1}(2) + f(2)f^{-1}(5)] \\ &= -\frac{f(10)}{f(1)} f^{-1}(1) - \frac{f(5)}{f(1)} f^{-1}(2) - \frac{f(2)}{f(1)} f^{-1}(5) \end{aligned}$$

bu ifade düzenlenirse

$$f^{-1}(10) = -\frac{35}{8} \cdot \frac{1}{8} - \frac{20}{8} f^{-1}(2) - \frac{11}{8} f^{-1}(5) \quad (2.6)$$

elde edilir. $f^{-1}(2)$ ve $f^{-1}(5)$ yi bulmalıyız.

$$\begin{aligned} f^{-1}(2) &= -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|2 \\ d < 2}} f\left(\frac{2}{d}\right) f^{-1}(d) = -\frac{1}{f(1)} [f(2)f^{-1}(1)] \\ &= -\frac{f(2)}{f(1)} f^{-1}(1) \end{aligned}$$

olup

$$f^{-1}(2) = -\frac{11}{8} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{11}{64}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} f^{-1}(5) &= -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|5 \\ d < 5}} f\left(\frac{5}{d}\right) f^{-1}(d) = -\frac{1}{f(1)} [f(5) f^{-1}(1)] \\ &= -\frac{f(5)}{f(1)} f^{-1}(1) \end{aligned}$$

buradan

$$f^{-1}(5) = -\frac{20}{8} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{20}{64}$$

bulunur. $f^{-1}(2)$ ve $f^{-1}(5)$ Eş 2.6 eşitliğinde yerine yazılırsa

$$f^{-1}(10) = -\frac{35}{8} \cdot \frac{1}{8} - \frac{20}{8} f^{-1}(2) - \frac{11}{8} f^{-1}(5) = -\frac{35}{64} - \frac{20}{8} \left(-\frac{11}{64}\right) - \frac{11}{8} \left(-\frac{20}{64}\right)$$

olup

$$f^{-1}(10) = \frac{5}{16}$$

bulunur.

2.9. Teorem

f ve g iki aritmetik fonksiyon olsun. $f(1) \neq 0$ ve $g(1) \neq 0$ olmak üzere

$$(f * g)^{-1} = f^{-1} * g^{-1}.$$

Teorem 2.1 den $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta(n)$ olup burada Dirichlet çarpım ve $\zeta(n)$ nin tanımından her $n \in \mathbb{Z}^+$ için;

$$(\mu * \zeta)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \zeta\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) = \delta(n)$$

elde edilir. O halde ζ ve μ fonksiyonları birbirlerinin Dirichlet tersi olup $\zeta = \mu^{-1}$ ve $\mu = \zeta^{-1}$ dir.

Möbius fonksiyonunun bu temel özelliği Dirichlet fonksiyonunun birleşme özelliği de kullanılarak aşağıda ifade edeceğimiz teoremin ispatında kolaylık sağlayacaktır.

2.10. Teorem (Möbius İncersiyon Formülü)

f bir aritmetik fonksiyon olsun. Her $n \in \mathbb{Z}^+$

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \Leftrightarrow f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$$

İspat

$(\Rightarrow)$: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için; $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d_1 d_2 = n} \mu(d_1) g(d_2) \\
&= \sum_{d_1 d_2 = n} \mu(d_1) \sum_{d|d_2} f(d) \\
&= \sum_{d_1 d|n} \mu(d_1) f(d) \\
&= \sum_{d|n} f(d) \sum_{d_1 \left| \frac{n}{d} \right.} \mu(d_1)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Eş. 2.7 eşitliğinde son ifadede $f(d)$ nin katsayısı durumunda olan ikinci toplam, Teorem 2.1 e göre $\frac{n}{d} = 1$ ($n = d$) dışında sıfırdır. Böylece Eş. 2.7 eşitliği $f(n)$ e eşit olur. İkinci bir yöntem olarak

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \text{ ise } g = f * \zeta \text{ olup}$$

$$g * \mu = (f * \zeta) * \mu = f * (\zeta * \mu) = f * \delta = f.$$

$$(\Leftarrow): f(n) = \sum_{d|n} g(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) \text{ olsun. Dirichlet çarpımının tanımından ifade } f = g * \mu$$

biçiminde yazılabildiğinden her $n \in \mathbb{Z}^+$ için;

$$f * \zeta = (g * \mu) * \zeta = g * (\mu * \zeta) = g * \delta = g$$

elde edilir. Bu ise;

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \zeta\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d)$$

olması demektir.

Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 de ispatladığımız eşitlikler Möbius İnverson formülü kullanılarak de ifade edilebilir. Yani

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d) \Leftrightarrow \varphi(n) = \sum_{d|n} d \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

Yine Möbius İnverson formülünden her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k \Leftrightarrow n^k = \sum_{d|n} \sigma_k(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

2.3. Çarpımsal Fonksiyonlar

$f(1) \neq 0$ olan f aritmetik fonksiyonunun tersi Tanım 2.8 de verildi. A aritmetik fonksiyonların kümesinin bir alt kümesi olan $f(1) \neq 0$ biçimindeki bütün aritmetik fonksiyonların kümesi, Dirichlet çarpıma göre bir değişmeli gruptur. Bu grubun alt gruplarından biri olan çarpımsal fonksiyonların kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

2.9. Tanım

f , özdeş olarak sıfır olmayan bir aritmetik fonksiyon olmak üzere $(m, n) = 1$ olan her $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için;

$$f(mn) = f(m)f(n) \tag{2.8}$$

eşitliği gerçekleşiyorsa f aritmetik fonksiyonuna *çarpımsal (çarpanlanabilir)* fonksiyon denir. Eğer Eş. 2.8 ifadesi bütün $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için sağlanıyorsa, bu takdirde f aritmetik fonksiyonuna *tam çarpımsal (tam çarpanlanabilir)* fonksiyon denir.

2.6. Örnek

Tanım 2.5 de tanımlanan $\zeta_k(n) = n^k$ kuvvet fonksiyonu tam çarpımsal bir fonksiyondur. Yine ζ_k nın özel hali olarak tanımlanan ζ fonksiyonu da tam çarpımsal fonksiyondur. Gerçekten her $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için;

$$\zeta_k(mn) = (mn)^k = m^k n^k = \zeta_k(m) \zeta_k(n)$$

olup, $k = 0$ alındığında da ζ nın tam çarpımsal olduğu açıktır.

2.7. Örnek

Dirichlet çarpımının δ birim fonksiyonu tam çarpımsaldır. Gerçekten $m = n = 1$ için

$$\delta(mn) = 1 = \delta(m) \delta(n)$$

olur. Eğer m veya n den en az birisi 1 den farklı ise bu durumda $\delta(mn) = 0$ olup $\delta(m)$ veya $\delta(n)$ fonksiyonlarından herhangi biri 0 olacağından

$$\delta(mn) = \delta(m) \delta(n)$$

bulunur.

2.8. Örnek

Möbius fonksiyonu çarpımsal ancak tam çarpımsal değildir. Gerçekten $m = n = 1$ için

$$\mu(mn) = 1 = \mu(m) \mu(n)$$

olur. Ayrıca $(m, n) = 1$ olmak üzere eğer m ya da n den en az birisi tam kare çarpan içeriyorsa $\mu(m)$ veya $\mu(n)$ den biri 0 olup

$$\mu(mn) = 0 = \mu(m) \mu(n)$$

Diğer bir durum ise; p_i ve q_i sayıları ayrık asalları için $m = p_1 \dots p_s$ ve $n = q_1 \dots q_t$ olmak üzere

$$\mu(m) = (-1)^s \text{ ve } \mu(n) = (-1)^t$$

olup

$$\mu(m.n) = (-1)^{s+t} = \mu(m) \mu(n)$$

olur ve böylece μ çarpımsaldır. μ nün tam çarpımsal olmadığını göstermek için aksine bir örnek vermek yeterli olacaktır. $\mu(4)=0$ olduğu halde $\mu(2) \mu(2)=1$ olup $m = n = 2$ için

$$\mu(mn) \neq \mu(m) \mu(n)$$

olduğundan μ tam çarpımsal değildir.

2.9. Örnek

Euler ϕ fonksiyonu çarpımsal ancak tam çarpımsal değildir. Gerçekten Teorem 2.5 (c) seçeneğinden Euler ϕ fonksiyonunun çarpımsal olduğu söylenebilir. Ancak $\phi(4)=2$ olduğu halde $\phi(2) \phi(2)=1$ olup $m = n = 2$ için

$$\phi(mn) \neq \phi(m) \phi(n)$$

olduğundan Euler φ fonksiyonu tam çarpımsal değildir.

2.10. Örnek

f ve g iki aritmetik fonksiyon olmak üzere;

$$(f.g)(n) = f(n)g(n)$$

ve $(g(n) \neq 0)$ olmak üzere

$$\left(\frac{f}{g}\right)(n) = \frac{f(n)}{g(n)}$$

işlemleri tanımlansın. Eğer f ve g çarpımsal fonksiyonlar ise $(f.g)$ ve $\left(\frac{f}{g}\right)$ fonksiyonları da çarpımsal; eğer f ve g tam çarpımsal fonksiyonlar ise $(f.g)$ ve $\left(\frac{f}{g}\right)$ fonksiyonları da tam çarpımsaldır.

2.11. Teorem

f fonksiyonu çarpımsal ise bu durumda $f(1) = 1$ dir.

İspat

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(n,1)=1$ olup f çarpımsal olduğundan $f(n) = f(1)f(n)$ olarak yazılır. Ayrıca f çarpımsal olduğundan sıfırdan farklı bir fonksiyon olup $f(1) = 1$ bulunur.

2.12. Teorem

f fonksiyonu $f(1)=1$ olan bir aritmetik fonksiyon, p_i ler asal sayılar ve $a_i \geq 1$ olacak şekilde tamsayılar olmak üzere;

$$a) f \text{ çarpımsal} \Leftrightarrow f(p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}) = f(p_1^{a_1}) \dots f(p_r^{a_r})$$

b) f çarpımsal olsun. f tam çarpımsal $\Leftrightarrow f(p^a) = f(p)^a$ (tüm p asalları ve $a \geq 1$ için).

2.13. Teorem

f ve g çarpımsal fonksiyonlar olsun. Bu durumda $f * g$ de çarpımsaldır.

İspat

$h = f * g$ ve $(m, n) = 1$ olmak üzere

$$h(mn) = \sum_{c|mn} f(c) g\left(\frac{mn}{c}\right)$$

olup burada mn nin her c böleni $c = ab$ biçiminde ve $a|m$ ve $b|n$ dir. Ayrıca

$$(a, b) = 1 \text{ ve } \left(\frac{m}{a}, \frac{n}{b}\right) = 1.$$

Buradan

$$\begin{aligned}
h(mn) &= \sum_{ab|mn} f(ab) g\left(\frac{mn}{ab}\right) \\
&= \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(a) f(b) g\left(\frac{m}{a}\right) g\left(\frac{n}{b}\right) \\
&= \sum_{a|m} f(a) g\left(\frac{m}{a}\right) \sum_{b|n} f(b) g\left(\frac{n}{b}\right) \\
&= h(m) h(n)
\end{aligned}$$

Böylece

$$(f * g)(mn) = [(f * g)(m)][(f * g)(n)]$$

elde edilir.

2.1. Uyarı

İki tam çarpımsal fonksiyonun Dirichlet çarpımlarının tam çarpımsal olması gerekmez.

Gerçekten, ζ_k ve ζ fonksiyonları tam çarpımsal olduğu halde $\sigma_k = \zeta_k * \zeta$ olmak üzere σ_k tam çarpımsal bir fonksiyon değildir. $m=2$ ve $n=8$ değerleri için $\sigma_k(mn) \neq \sigma_k(m)\sigma_k(n)$ olduğundan sonuç olarak iki tam çarpımsal fonksiyonun Dirichlet çarpımlarının tam çarpımsal olması gerekmez

2.14. Teorem

g ve $f * g$ fonksiyonları çarpımsal ise bu durumda f de çarpımsaldır.

İspat

f çarpımsal olmadığından $f * g$ nin de çarpımsal olmadığını gösterirsek ispat tamamlanmış olur. $h = f * g$ olsun. f çarpımsal olmadığından $(m, n) = 1$ olacak şekildeki m, n pozitif tamsayıları için

$$f(mn) \neq f(m)f(n)$$

dir. Eğer $mn = 1$ ise $f(1) \neq f(1)f(1)$ olup $f(1) \neq 1$ bulunur.

$$h(1) = f(1)g(1) = f(1) \neq 1$$

olup, buradan h nın çarpımsal olmadığı sonucu elde edilir. Eğer $mn > 1$ ise bu durumda $(a, b) = 1$ olacak şekildeki a, b pozitif tamsayıları ve $ab < mn$ için $f(ab) = f(a)f(b)$ alınabilir.

$$\begin{aligned} h(mn) &= \sum_{\substack{a|m \\ b|n \\ ab < mn}} f(ab)g\left(\frac{mn}{ab}\right) + f(mn)g(1) \\ &= \sum_{\substack{a|m \\ b|n \\ ab < mn}} f(a)f(b)g\left(\frac{m}{a}\right)g\left(\frac{n}{b}\right) + f(mn) \\ &= \sum_{a|m} f(a)g\left(\frac{m}{a}\right) \sum_{b|n} f(b)g\left(\frac{n}{b}\right) - f(m)f(n) + f(mn) \\ &= h(m)h(n) - f(m)f(n) + f(mn) \end{aligned}$$

Buradan $f(mn) \neq f(m)f(n)$ olduğundan

$$h(mn) \neq h(m)h(n)$$

olup h çarpımsal değildir.

2.15. Teorem

g çarpımsal fonksiyon ise bu durumda g nin Dirichlet tersi g^{-1} de çarpımsaldır.

İspat

$(g * g^{-1}) = \delta$ olup g ve δ fonksiyonları çarpımsal olduğundan Teorem 2.14 den g^{-1} de çarpımsaldır.

2.16. Teorem

f bir çarpımsal fonksiyon olsun.

f tam çarpımsal $\Leftrightarrow f^{-1} = \mu f$

İspat

$(\Rightarrow)$: f , tam çarpımsal fonksiyon olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{Z}^+$ için;

$$(\mu f * f)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = f(n) \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} f(1)=1 & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

olup, $\mu f * f = \delta$ bulunur.

$(\Leftarrow)$: $f^{-1} = \mu.f$ olsun. p asal sayısı ve $k \geq 1$ tamsayısı için $f(p^k) = f(p)^k$ olduğunu gösterirsek Teorem 2.12 den tam çarpımsallık gösterilmiş olur. $k = 1$ için eşitlik vardır. $k \geq 2$ için $f(p^{k-1}) = f(p)^{k-1}$ olsun. $k \geq 2$ için

$$f^{-1}(p^k) = \mu(p^k) f(p^k) = 0$$

ve

$$f^{-1}(p) = \mu(p) f(p) = -f(p)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= (f^{-1} * f)(p^k) \\ &= \sum_{d|p^k} f^{-1}(d) f\left(\frac{p^k}{d}\right) \\ &= f^{-1}(1) f(p^k) + f^{-1}(p) f(p^{k-1}) \\ &= f(p^k) - f(p) f(p^{k-1}) \\ &= f(p^k) - f(p) f(p)^{k-1} \\ &= f(p^k) - f(p)^k \end{aligned}$$

O halde; $f(p^k) = f(p)^k$ olduğundan f tam çarpımsaldır.

2.17. Teorem

f bir çarpımsal fonksiyon, p asal sayı ve $k \geq 2$ tamsayı olmak üzere

$$f^{-1}(p^k) = 0 \Leftrightarrow f \text{ tam çarpımsal fonksiyondur.}$$

2.18. Teorem

f , g , h aritmetik fonksiyonlar ve f bir çarpımsal bir fonksiyon olsun.

$$f \text{ tam çarpımsal fonksiyon} \Leftrightarrow f(g * h) = fg * fh$$

2.10. Tanım

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^m \ (m \geq 1) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlanan aritmetik fonksiyona *Mangoldt fonksiyonu* denir.

1 den 10'a kadar olan sayıların Mangoldt fonksiyonu altında görüntüleri aşağıda verilmiştir

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Lambda(n)$	0	$\log 2$	$\log 3$	$\log 2$	$\log 5$	0	$\log 7$	$\log 2$	$\log 3$	0

2.19. Teorem

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d) \quad (2.9)$$

İspat

$n = 1$ ise $\log 1 = 0 = \Lambda(1)$ dir.

$$n > 1 \text{ ve } n = \prod_{k=1}^r p_k^{a_k} \text{ ise}$$

$$\log n = \sum_{k=1}^r a_k \log p_k$$

olur. $\sum_{d|n} \Lambda(d)$ ifadesinde sıfırdan farklı terimler n nin d bölenleri arasından p_k^m ,

$m = 1, 2, \dots, a_k$ $k = 1, 2, \dots, r$ biçiminde olanlardan gelmektedir. Bu durumda

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{k=1}^r \sum_{m=1}^{a_k} \Lambda(p_k^m) = \sum_{k=1}^r \sum_{m=1}^{a_k} \log p_k = \sum_{k=1}^r a_k \log p_k = \log n.$$

2.20. Teorem

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} = - \sum_{d|n} \mu(d) \log d$$

İspat

Eş. 2.9 eşitliğine Möbiüs İnversiyon Formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Lambda(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} \\ &= \log n \sum_{d|n} \mu(d) - \sum_{d|n} \mu(d) \log d \\ &= \delta(n) \log n - \sum_{d|n} \mu(d) \log d \\ &= - \sum_{d|n} \mu(d) \log d \end{aligned}$$

elde edilir.

2.11. Tanım

$p_1, p_2, \dots, p_k$ asal sayılar olmak üzere her $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ pozitif tamsayısı için

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^{a_1 + a_2 + \dots + a_k}, & n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona *Liouville fonksiyonu* denir [1].

2.21. Teorem

Liouville fonksiyonu tam çarpımsaldır.

İspat

$m = n = 1$ ise

$$\lambda(mn) = \lambda(1) = \lambda(1)\lambda(1) = \lambda(m)\lambda(n)$$

$m = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ $n = p_1^{b_1} \dots p_t^{b_t}$ olsun. Bu durumda

$$\lambda(m) = (-1)^{a_1 + \dots + a_k} \text{ ve } \lambda(n) = (-1)^{b_1 + \dots + b_t}$$

olup,

$$\lambda(mn) = (-1)^{a_1 + \dots + a_k + b_1 + \dots + b_t} = \lambda(m)\lambda(n)$$

elde edilir.

2.22. Teorem

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & n \text{ kare ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$\lambda^{-1}(n) = |\mu(n)|$$

İspat

$g(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)$ olsun. Bu durumda g çarpımsaldır. Böylece $g(p^a)$ değerlerini incelemek yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned} g(p^a) &= \sum_{d|p^a} \lambda(d) = 1 + \lambda(p) + \lambda(p^2) + \dots + \lambda(p^a) \\ &= 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^a \\ &= \begin{cases} 0, & a \text{ tek} \\ 1, & a \text{ çift} \end{cases} \end{aligned}$$

Eğer $n = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}$ ise $g(n) = \prod_{i=1}^k g(p_i^{a_i})$ olur. Burada eğer a_i lerden en az biri tek ise bu durumda $g(p_i^{a_i}) = 0$ olacağından $g(n) = 0$ olur. Eğer a_i lerin hepsi çift ise her i için $g(p_i^{a_i}) = 1$ olup $g(n) = 1$ olur. Buradan da anlaşılacağı gibi eğer n bir tam kare ise $g(n) = 1$, aksi takdirde $g(n) = 0$ olur.

λ tam çarpımsal fonksiyon olduğundan Teorem 2.16 dan

$$\lambda^{-1}(n) = \mu(n)\lambda(n)$$

olur.

Ayrıca $\mu(n)\lambda(n) = \mu^2(n) = |\mu(n)|$ olduğundan eşitlik açıktır.

2.4. Dirichlet Serileri ve Üreteç Fonksiyonlar

2.12. Tanım

f aritmetik bir fonksiyon ve s bir reel sayı olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{f(1)}{1^s} + \frac{f(2)}{2^s} + \dots + \frac{f(n)}{n^s} + \dots \quad (2.10)$$

ile tanımlanan seriye f fonksiyonunun *Dirichlet serisi* denir.

Doğal olarak her s reel sayısına karşılık bir Dirichlet serisi elde edilecektir. Ancak bu serilerin mutlak yakınsak olması beklenemez. Eş. 2.10 eşitliğindeki seri s_0 reel sayısı için mutlak yakınsak olsun. $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $s \geq s_0$ için

$$\left| \frac{f(n)}{n^s} \right| = \frac{|f(n)|}{n^s} \leq \frac{|f(n)|}{n^{s_0}} = \left| \frac{f(n)}{n^{s_0}} \right|$$

olup, Karşılaştırma Testinden her $s \geq s_0$ için seriler mutlak yakınsak olur.

2.13. Tanım

f fonksiyonunun Dirichlet serisi $s \geq s_0$ değerleri için mutlak yakınsak ise bu serinin yakınsadığı fonksiyona f aritmetik fonksiyonunun *üreteç fonksiyonu* denir.

ζ aritmetik fonksiyonunun Dirichlet serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots$$

olup, bu seri $s > 1$ için yakınsak ve $s \leq 1$ için ıraksaktır. $s > 1$ için tanımlanan bu fonksiyona *Riemann Zeta fonksiyonu* denir ve $\zeta(s)$ ile gösterilir.

2.23. Teorem

f ve g aritmetik fonksiyonlar olsun. f ve g nin Dirichlet serileri $s > s_0$ için mutlak yakınsak ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

ise $f = g$ dir.

2.24. Teorem

f ve g aritmetik fonksiyonlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \text{ ve } G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

$s > s_0$ için mutlak yakınsak olsun. Bu taktirde $s > s_0$ için

i) $(f + g)$ nin üreteç fonksiyonu $F + G$ dir.

ii) $(f * g)$ nin üreteç fonksiyonu $F.G$ dir.

iii) Eğer f^{-1} varsa f^{-1} nin üreteç fonksiyonu $\frac{1}{F}$ dir.

2.11. Örnek

$$\zeta_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_1(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} = \zeta(s-1), \quad s > 2.$$

2.12. Örnek

$\sigma = \zeta_1 * \zeta$ olduğundan Teorem 2.24 (ii) den

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta_1 * \zeta)(n)}{n^s} = \zeta(s-1)\zeta(s), \quad s > 2$$

2.13. Örnek

$$\zeta(s)\mu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta * \mu)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta(n)}{n^s} = 1$$

olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \mu(s) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

bulunur. Ayrıca $\zeta^{-1} = \mu$ olduğundan Teorem 2.24 (iii) den de açıktır.

2.14. Örnek

$\varphi = \zeta_1 * \mu$ olduğundan Teorem 2.24 (ii) den

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta_1 * \mu)(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}, \quad s > 2$$

2.25. Teorem

f çarpımsal bir aritmetik fonksiyon ve f fonksiyonunun Dirichlet serisi $s > s_0$ için mutlak yakınsak olsun. Bu durumda $s > s_0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right)$$

dir. Bu ifadeye f fonksiyonunun Dirichlet serisinin *Euler Çarpımı* denir. Eğer f tam çarpımsal ise $s > s_0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}$$

olur [1].

2.15. Örnek

$f(n)$ olarak sırasıyla $\zeta(n)$, $\mu(n)$, $\varphi(n)$ ve $\lambda(n)$ çarpımsal fonksiyonları alınırsa, Dirichlet serilerinin Euler çarpımları

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \quad s > 1$$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \quad s > 1$$

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{1-s}}, \quad s > 2$$

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 + p^{-s}}, \quad s > 1$$

3. BİRİMSSEL ÇARPIM

Bu bölümde birimsel bölen kavramı, özellikleri ve fonksiyonların birimsel çarpımının bazı özellikleri incelenmiştir.

Birimsel bölen fikri, ilk olarak Vaidayanathaswamy [5] tarafından ortaya atılmıştır. Vaidayanathaswamy, birimsel bölen kavramını “blok-çarpan” olarak adlandırmıştır. Şimdi kullanılan "birimsel bölen" terimini literatüre Eckford Cohen kazandırmıştır.

3.1. Aritmetik Fonksiyonların Birimsel Çarpımı

3.1. Tanım

$d, n \in \mathbb{Z}$ ve d, n nin bir böleni olmak üzere $\left(d, \frac{n}{d}\right) = 1$ olacak şekildeki d bölenlerine, n nin *birimsel bölenleri* (*üniter bölenleri*) denir ve $d \parallel n$ şeklinde gösterilir [6].

Açık olarak $(1, n) = 1$ olduğundan 1, n nin en küçük birimsel böleni, n de kendisinin en büyük birimsel bölenidir. Bunlar dışında n nin aşikar olmayan birimsel bölenleri n nin asalların kuvvetinden oluşan çarpanlarının birimsel özelliği taşıyanlarından gelmektedir [7].

3.2. Tanım

d, n tamsayılar ve $d > 0$ olsun. n nin birimsel bölenleri arasından d nin bölenleri olanların en büyüğüne d ve n tamsayılarının *en büyük ortak birimsel böleni* denir ve $(d, n)_*$ ile gösterilir.

Hansen ve Swanson [8], d ve n tamsayılarının en küçük ortak birimsel katını

$$[d, n]_* = \frac{d \cdot n}{(d, n)_*} \text{ şeklinde tanımlamışlardır.}$$

3.1. Teorem

Eğer $a \parallel b$ ve $b \parallel c$ ise bu durumda $a \parallel c$ dir.

3.2. Teorem

Birimsel bölenler çiftler halinde bulunur. Eğer d, n için bir birimsel bölen ise $\frac{n}{d}$ de n için birimsel bölendir.

3.3. Teorem

n tamsayısının kanonik formda yazılışı $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ olmak üzere d, n için birimsel bölen ise $d = \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i}$ olup burada $\beta_i = 0$ veya $\beta_i = \alpha_i$ dir.

3.3. Tanım

$d, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere eğer $(d, n)_* = 1$ ise d ile n tamsayılarına *yarı asal* denir.

3.4. Teorem

p bir asal sayı olsun. Eğer $a < b$ ise $(p^a, p^b)_* = 1$, eğer $a \geq b$ ise $(p^a, p^b)_* = p^b$ dir.

3.5. Teorem

d, n nin bir birimsel böleni olsun. Bu durumda $\left(\frac{n}{d}, n\right)_* = 1$ olması için gerek ve yeter şart $n = d$ olmasıdır.

3.6. Teorem

d ve n tamsayıları için $((n, d), d)_* = (n, d)_*$ dir.

3.7. Teorem

n nin bir d böleninin r nin birimsel böleni olması için gerek ve yeter şart $d \parallel (n, r)_*$ olmasıdır. Eğer $d \parallel (n, r)_*$ ve $\left(\frac{n}{d}, \frac{r}{d}\right)_* = 1$ ise bu durumda $d = (n, r)_*$ dir.

3.8. Teorem

Eğer $(a, b)_* = d$ ise bu durumda $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)_* = 1$ dir.

3.9. Teorem

$(s, t) = 1$ olsun. $(x, s)_* = (x, t)_* = 1$ ise $(x, st)_* = 1$ dir.

3.10. Teorem

Eğer $a \equiv b \pmod{r}$ ise $(a, r)_* = (b, r)_*$ dir.

Bu özelliklerle verilen birimsel bölen kavramı bizi aritmetik fonksiyonların birimsel çarpımı kavramına götürecektir.

3.4. Tanım

f ve g herhangi iki aritmetik fonksiyon ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$$(f \oplus g)(n) = \sum_{d \parallel n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

ile tanımlı aritmetik fonksiyona, f ile g nin *birimsel çarpımı* (*üniter konvolüsyonu*) denir ve $f \oplus g$ ile gösterilir [9].

Birimsel çarpımın tanımından değişmeli ve birleşmeli olduğu kolaylıkla gösterilebilir

Eğer n asal çarpanlarının kare veya daha büyük kuvvetlerini içermiyorsa bu durumda n nin her bir böleni aynı zamanda n nin birimsel bölenidir. Bu nedenle n nin hiçbir böleni kareli ifade içermiyorsa bu noktada birimsel çarpım ile Dirichlet çarpım çakışır. Dirichlet çarpımın birimi olan δ aynı zamanda birimsel çarpım için de birimi ifade eder. $\mathcal{A}$ aritmetik fonksiyonlar kümesi olmak üzere her $f \in \mathcal{A}$ için

$$f \oplus \delta = \delta \oplus f = f$$

dir.

3.11. Teorem

$(\mathcal{A}, +, \oplus)$ sıfır bölenli, değişmeli bir halkadır.

İspat

Birimsel çarpımın değişme, birleşme ve dağılma özelliklerini sağladığı açıktır. Ayrıca δ birim elemanı ile $(\mathcal{A}, +, \oplus)$ değişmeli ve birimli bir halkadır.

Sıfırdan farklı iki aritmetik fonksiyon;

$$z_1(r) = \begin{cases} 1, & r = 2 \\ 0, & r \neq 2 \end{cases} \quad z_2(r) = \begin{cases} 0, & r = 2 \\ 1, & r \neq 2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $(z_1 \oplus z_2)$ sıfır fonksiyon olup $(A, +, \oplus)$ sıfır bölendirdir.

3.5. Tanım

f aritmetik fonksiyonunun birimsel çarpım altında tersine f nin eşlenik (*conjugate*) fonksiyonu denir ve $\text{conj}(f)$ ile gösterilir. Dirichlet çarpımındaki gibi burada da $\text{conj}(f)$ olması için gerek ve yeter şart $f(1) \neq 0$ olmasıdır.

3.12. Teorem

Eğer f ve g çarpımsal fonksiyonlar ise $f \oplus g$ de çarpımsaldır.

3.1. Sonuç

Eğer f çarpımsal fonksiyon ise $\sum_{d|n} f(d)$ de çarpımsal fonksiyondur

3.13. Teorem

Eğer f çarpımsal fonksiyon ve r nin kanonik formda gösterimi $r = \prod_{p|r} p^a$ ise

$$\sum_{\substack{d|r \\ (n,d)_s=1}} f(d) = \prod_{p^a | n} (1 + f(p^a)).$$

3.6. Tanım

$w(n)$, n tamsayısının asal çarpanlarının sayısını göstermek üzere ($w(1) = 0$)

$$\mu^*(n) = (-1)^{w(n)}$$

biçiminde tanımlı aritmetik fonksiyonuna *birimsel benzer (unitary analogue) Möbius fonksiyonu* denir ve μ^* ile gösterilir.

3.14. Teorem

μ^* birimsel benzer Möbius fonksiyonu çarpımsaldır.

3.15. Teorem

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{d \parallel n} \mu^*(d) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

yani

$$(\mu^* \oplus \zeta)(n) = \delta(n) \text{ dir [7].}$$

Bu teoremden, ζ fonksiyonun birimsel çarpıma göre tersinin μ^* birimsel benzer Möbius fonksiyonu olduğu görülmektedir.

3.16. Teorem (Birimsel Benzer Möbius İnversiyon Formülü)

f bir aritmetik fonksiyon olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$g(n) = \sum_{d \parallel n} f(d) \Leftrightarrow f(n) = \sum_{d \parallel n} \mu^*(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

3.17. Teorem

Eğer g çarpımsal bir fonksiyon ve $g(n) = \sum_{d \parallel n} f(d)$ ise f de çarpımsal bir fonksiyondur.

Yine r modülüne göre indirgenmiş kalan sınıfına birimsel benzer yarı indirgenmiş kalan sınıfı karşılık gelecektir.

3.7. Tanım

r ile yarı asal ve r modülüne göre kalan sınıfının elemanı olan tamsayıların kümesine r modülüne göre *yarı indirgenmiş kalan sınıfı* denir.

3.18. Teorem

x , r modülüne göre yarı indirgenmiş kalan sınıfının elemanı ve $(a, r) = 1$ ise ax değerleri de r modülüne göre yarı indirgenmiş kalan sınıfının elemanı olur.

3.8. Tanım

n ile yarı asal olan ve n den küçük veya n ye eşit pozitif tamsayıların sayısını veren fonksiyona *birimsel benzer Euler φ fonksiyonu* denir ve φ^* ile gösterilir.

3.19. Teorem

n tamsayısı için $n = \sum_{d \parallel n} \varphi^*(d)$ dir.

3.20. Teorem

φ^* fonksiyonu çarpımsaldır.

3.21. Teorem

n pozitif tamsayısı için $\varphi^*(n) = n \sum_{d \parallel n} \frac{\mu^*(d)}{d}$ dir.

3.22. Teorem

r pozitif tamsayısının kanonik gösterimi $r = \prod_{p|r} p^a$ olsun. Bu durumda

$$\varphi^*(r) = \prod_{p|r} (p^a - 1)$$

dir.

Dirichlet çarpıma benzer olarak $\tau^*(n) = \sum_{d \parallel n} 1$ n nin birimsel bölenlerinin sayısını;

$\sigma^*(n) = \sum_{d \parallel n} d$ n nin birimsel bölenlerinin toplamını göstermektedir.

3.23. Teorem

σ^* fonksiyonu çarpımsaldır.

3.24. Teorem

$w(n)$ n tamsayısının asal çarpanlarının sayısını göstermek üzere her n pozitif tamsayısı için

$$\tau^*(n) = 2^{w(n)}.$$

İspat

$n = \prod_{i=1}^s p_i^{a_i}$ ($s \geq 1$, $a_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, s$) olsun. Buradan $w(n) = s$ olur. t , n pozitif

tamsayısının birimsel böleni ise $t = 1$ veya $t = \prod_{i=1}^j p_i^{a_i}$, $1 \leq j \leq s$ dir. $t \neq 1$ için $\binom{s}{j}$

tane birimsel bölen vardır. Bu durumda

$$\tau^*(n) = \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} = (1+1)^s = 2^s = 2^{w(n)}.$$

Benzer olarak her $n = \prod_{i=1}^s p_i^{a_i}$ ($s \geq 1$, $a_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, s$) pozitif tamsayısı için

$$\sigma^*(n) = \prod_{i=1}^s (1 + p_i^{a_i})$$

dir [7].

4. İKİ DEĞİŞKENLİ ARİTMETİK FONKSİYONLAR

4.1. İki Değişkenli Aritmetik Fonksiyonlar

4.1. Tanım

$F : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ ile tanımlanan F fonksiyonuna *iki değişkenli aritmetik fonksiyon* denir, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $F(n_1, n_2)$ ile gösterilir [7].

Tek değişkenli aritmetik fonksiyonlar için geçerli olan özelliklerin bir kısmı iki değişkenli aritmetik fonksiyonlar için de kolaylıkla gösterilebilir. İlk olarak iki değişkenli aritmetik fonksiyonların çarpımsallık özelliği üzerinde durulacaktır.

4.2. Tanım

F , özdeş olarak sıfır olmayan iki değişkenli bir aritmetik fonksiyon olmak üzere $(m_i, n_j) = 1$ olan her m_i, n_j ($1 \leq i, j \leq 2$) pozitif tamsayıları için

$$F(m_1 n_1, m_2 n_2) = F(m_1, m_2) F(n_1, n_2) \quad (4.1)$$

eşitliği sağlanıyorsa F aritmetik fonksiyonuna *çarpımsal fonksiyon* denir. Eğer bütün m_i, n_j ($1 \leq i, j \leq 2$) pozitif tamsayılar için Eş. 4.1 eşitliği sağlanıyorsa F fonksiyonuna *tam çarpımsal* fonksiyon denir [3].

Bazı kaynaklarda $(m_i, n_j) = 1$, ($1 \leq i, j \leq 2$) şartı yerine $(m_1 m_2, n_1 n_2) = 1$ verilmektedir.

4.3. Tanım

g, h tek değişkenli çarpımsal aritmetik fonksiyonlar olmak üzere her m, n pozitif tamsayıları için

$$F(m, n) = g(m)h(n)$$

biçiminde tanımlanan iki değişkenli F fonksiyonuna *yarı-çarpımsal fonksiyon* denir ve $F = (g : h)$ ile gösterilir.

Tek değişkenli ve iki değişkenli aritmetik fonksiyonlar arasında bazı temel benzerlikler aşağıda verilmiştir.

Eğer F iki değişkenli aritmetik fonksiyonu çarpımsal ise bu durumda

$$F(m_1, m_2) = F(m_1 \cdot 1, m_2 \cdot 1) = F(m_1, m_2) F(1, 1)$$

olup $F(1, 1) = 1$ dir.

4.4. Tanım

F ve G iki değişkenli aritmetik fonksiyonlar olmak üzere her $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$(F ** G)(m, n) = \sum_{d|m} \sum_{e|n} F(d, e) G\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{e}\right) \quad (4.2)$$

biçiminde tanımlı iki değişkenli aritmetik fonksiyona F ile G *iki değişkenli aritmetik fonksiyonlarının Dirichlet çarpımı* denir ve $F ** G$ ile gösterilir [10].

İki değişkenli aritmetik fonksiyonlar için Dirichlet çarpımının değişme ve birleşme özelliklerini sağladığı kolaylıkla gösterilebilir.

Ayrıca Dirichlet çarpımının birim elemanı tek değişkenli aritmetik fonksiyonların birimi cinsinden

$$(\delta : \delta)(m, n) = \delta(m) \delta(n) = \begin{cases} 1, & m = n = 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlanır [7].

4.5. Tanım

F iki değişkenli aritmetik fonksiyon olmak üzere

$$F ** G = G ** F = (\delta : \delta)$$

olacak şekildeki iki değişkenli G aritmetik fonksiyonuna F nin *Dirichlet tersi* denir ve $G = F^{**-1}$ ile gösterilir.

4.1. Teorem

F iki değişkenli aritmetik fonksiyonunun Dirichlet tersinin olması için gerek ve yeter şart $F(1,1) \neq 0$ olmasıdır.

4.2. Teorem

F, G iki değişkenli aritmetik fonksiyonlar ve f, g tek değişkenli aritmetik fonksiyonlar olsun. Eğer $F(1,1) \neq 0, G(1,1) \neq 0$ ve $f(1) \neq 0, g(1) \neq 0$ ise

$$(F ** G)^{**-1} = F^{**-1} ** G^{**-1} \quad \text{ve} \quad (f : g)^{**-1} = f^{-1} : g^{-1}.$$

İki değişkenli aritmetik fonksiyonlar için

$$(F + G)(m, n) = F(m, n) + G(m, n), \quad (-F)(m, n) = -F(m, n), \quad 0(m, n) = 0.$$

Sonuç olarak iki değişkenli aritmetik fonksiyonların kümesi fonksiyonlarda toplama ve Eş. 4.2 eşitliğinde verilen Dirichlet çarpım ile birimli ve değişmeli bir halkadır.

4.3. Teorem

F , G ve H iki değişkenli aritmetik fonksiyonlar olsun. F tam çarpımsal fonksiyon ise

$$F(G ** H) = FG ** FH.$$

İspat

F tam çarpımsal fonksiyon. Bu durumda

$$\begin{aligned} (F(G ** H))(m, n) &= F(m, n) \sum_{d|m} \sum_{t|n} G(d, t) H\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{t}\right) \\ &= \sum_{d|m} \sum_{t|n} F(d, t) F\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{t}\right) G(d, t) H\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{t}\right) \\ &= \sum_{d|m} \sum_{t|n} F(d, t) G(d, t) F\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{t}\right) H\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{t}\right) \\ &= (FG ** FH)(m, n). \end{aligned}$$

$m = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ ve $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\beta_i}$ olsun. Eğer $F(m, n)$ çarpımsal ise bu durumda

$$F(m, n) = \prod_{i=1}^k F(p_i^{\alpha_i}, p_i^{\beta_i})$$

Eğer $F(m, n)$ tam çarpımsal ise bu durumda

$$F(m, n) = \prod_{i=1}^k F(p_i, 1)^{\alpha_i} F(1, p_i)^{\beta_i}$$

dir [3].

4.4. Teorem

F, G iki değişkenli aritmetik fonksiyonlar olsun. Eğer F ve G çarpımsal fonksiyonlar ise $F ** G$ de çarpımsaldır.

İspat

F ve G çarpımsal fonksiyonlar olsun. $(m_i, n_j) = 1$ ($1 \leq i, j \leq 2$) olmak üzere

$$\begin{aligned} (F ** G)(m_1 n_1, m_2 n_2) &= \sum_{d_1 | m_1 n_1} \sum_{d_2 | m_2 n_2} F(d_1, d_2) G\left(\frac{m_1 n_1}{d_1}, \frac{m_2 n_2}{d_2}\right) \\ &= \sum_{\substack{a | m_1 \\ b | n_1}} \sum_{\substack{c | m_2 \\ d | n_2}} F(ab, cd) G\left(\frac{m_1 n_1}{ab}, \frac{m_2 n_2}{cd}\right) \\ &= \sum_{\substack{a | m_1 \\ b | n_1}} \sum_{\substack{c | m_2 \\ d | n_2}} F(a, c) F(b, d) G\left(\frac{m_1}{a}, \frac{m_2}{c}\right) G\left(\frac{n_1}{b}, \frac{n_2}{d}\right) \\ &= \sum_{\substack{a | m_1 \\ c | m_2}} F(a, c) G\left(\frac{m_1}{a}, \frac{m_2}{c}\right) \sum_{\substack{b | n_1 \\ d | n_2}} F(b, d) G\left(\frac{n_1}{b}, \frac{n_2}{d}\right) \\ &= (F ** G)(m_1, m_2) (F ** G)(n_1, n_2). \end{aligned}$$

4.6. Tanım

m ve n pozitif tamsayılar olsun. Her m, n sayıları için $U(m, n)$ iki değişkenli aritmetik fonksiyonu, ζ fonksiyonu yardımıyla

$$U(m, n) = (\zeta : \zeta)(m, n) = \zeta(m) \zeta(n)$$

ile tanımlanır [3].

4.7. Tanım

m, n pozitif tamsayılar ve μ Möbius fonksiyonu yardımıyla

$$\tilde{\mu}(m, n) = (\mu : \mu)(m, n) = \mu(m) \mu(n)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona *iki değişkenli $\tilde{\mu}$ Möbius fonksiyonu* denir [11].

U ve $\tilde{\mu}$ iki değişkenli aritmetik fonksiyonları için

$$\tilde{\mu}^{**}U = (\mu : \mu)^{**}(\zeta : \zeta) = (\delta : \delta)$$

olduğundan U ve $\tilde{\mu}$ fonksiyonları birbirlerinin Dirichlet tersi olup

$$U = (\tilde{\mu})^{**-1} \text{ ve } \tilde{\mu} = U^{**-1}$$

dir.

4.5. Teorem (İki değişkenli fonksiyonlar için Möbius inversiyon formülü)

F iki değişkenli bir aritmetik fonksiyon olsun. Her $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned} G(n_1, n_2) = \sum_{d_1|n_1} \sum_{d_2|n_2} F(d_1, d_2) &\Leftrightarrow F(n_1, n_2) = \sum_{d_1|n_1} \sum_{d_2|n_2} G(d_1, d_2) \tilde{\mu}\left(\frac{n_1}{d_1}, \frac{n_2}{d_2}\right) \\ &= \sum_{d_1|n_1} \sum_{d_2|n_2} \tilde{\mu}(d_1, d_2) G\left(\frac{n_1}{d_1}, \frac{n_2}{d_2}\right) \end{aligned}$$

İspat

$(\Rightarrow)$: $G = F ** U$ olsun.

$$G ** \tilde{\mu} = (F ** U) ** \tilde{\mu} = F ** (U ** \tilde{\mu}) = F ** (\delta : \delta) = F.$$

$(\Leftarrow)$: $F = G ** \tilde{\mu}$ olsun.

$$F ** U = (G ** \tilde{\mu}) ** U = G ** (\tilde{\mu} ** U) = G ** (\delta : \delta) = G.$$

4.1. Örnek

$$\begin{aligned} (F ** U)(6, 8) &= \sum_{d_1|6} \sum_{d_2|8} F(d_1, d_2) U\left(\frac{6}{d_1}, \frac{8}{d_2}\right) \\ &= \sum_{d_1|6} (F(d_1, 1) + F(d_1, 2) + F(d_1, 4) + F(d_1, 8)) \\ &= F(1, 1) + F(1, 2) + F(1, 4) + F(1, 8) + F(2, 1) + F(2, 2) + F(2, 4) + F(2, 8) \\ &\quad + F(3, 1) + F(3, 2) + F(3, 4) + F(3, 8) + F(6, 1) + F(6, 2) + F(6, 4) + F(6, 8) \end{aligned}$$

4.8. Tanım

f tek değişkenli bir aritmetik fonksiyon olmak üzere

$$P(f)(m, n) = \begin{cases} f(n), & m = n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı $P(f)$ fonksiyonuna f nin *esas (principal) fonksiyonu* denir [10].

4.6. Teorem

f, g tek değişkenli iki aritmetik fonksiyon ve bunların esas fonksiyonları $P(f)$ ve $P(g)$ olmak üzere

$$P(f) ** P(g) = P(f * g).$$

İspat

Eğer $m = n$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} (P(f) ** P(g))(m, n) &= \sum_{d|m} \sum_{e|n} P(f)(d, e) P(g)\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{e}\right) \\ &= \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= (f * g)(n) \\ &= P(f * g)(m, n) \end{aligned}$$

Eğer $m \neq n$ ise esas fonksiyonun tanımından

$$P(f * g)(m, n) = 0 \text{ ve } P(f)(m, n) = 0, P(g)(m, n) = 0$$

olup böylece

$$(P(f)**P(g))(m,n)=0$$

olur. Her iki durum için de

$$(P(f)**P(g))(m,n)=P(f*g)(m,n)$$

olup

$$(P(f)**P(g))=P(f*g)$$

elde edilir.

Benzer şekilde f , tek değişkenli aritmetik fonksiyon ve f nin Dirichlet tersi f^{-1} varsa

$$P(f)^{**-1}=P(f^{-1})$$

biçimindedir.

4.2. Örnek

f , g ve h tek değişkenli aritmetik fonksiyonlar olsun. $(P(f)**(g:h))$ fonksiyonu ve $f(1),g(1),h(1)$ sıfırdan farklı olmak üzere ve $(P(f)**(g:h))$ fonksiyonunun tersini bulalım.

$$\begin{aligned}
(P(f)**(g:h))(m,n) &= \sum_{d|m} \sum_{e|n} P(f)(d,e) (g:h) \left(\frac{m}{d}, \frac{n}{e} \right) \\
&= \sum_{d|m} \sum_{d|n} f(d) g \left(\frac{m}{d} \right) h \left(\frac{n}{d} \right) \\
&= \sum_{d|(m,n)} f(d) g \left(\frac{m}{d} \right) h \left(\frac{n}{d} \right)
\end{aligned}$$

Teorem 4.2 den

$$\begin{aligned}
(P(f)**(g:h))^{**-1}(m,n) &= P(f)^{**-1} ** (g:h)^{**-1}(m,n) \\
&= P(f^{-1}) ** (g^{-1}:h^{-1})(m,n) \\
&= \sum_{d|m} \sum_{e|n} P(f^{-1})(d,e) (g^{-1}:h^{-1}) \left(\frac{m}{d}, \frac{n}{e} \right) \\
&= \sum_{d|(m,n)} f^{-1}(d) g^{-1} \left(\frac{m}{d} \right) h^{-1} \left(\frac{n}{d} \right)
\end{aligned}$$

4.2. İki Değişkenli Aritmetik Fonksiyonların Dirichlet Serileri ve Üreteç Fonksiyonları

4.9. Tanım

F iki değişkenli bir aritmetik fonksiyon ve s_1, s_2 reel sayılar olmak üzere

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{F(n_1, n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}}$$

ile tanımlanan seriye iki değişkenli aritmetik fonksiyonların *Dirichlet serisi* denir [10].

4.7. Teorem

F ve G aritmetik fonksiyonlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla DF ve DG olsun. Yani;

$$DF(s_1, s_2) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{F(n_1, n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}}, \quad DG(s_1, s_2) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{G(n_1, n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}}$$

olmak üzere $DF + DG$ de $(F + G)$ nin üreteç fonksiyonudur.

4.8. Teorem

F ve G aritmetik fonksiyonlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla DF ve DG olsun.

$$DF(s_1, s_2) DG(s_1, s_2) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{(F * G)(n_1, n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}}.$$

Bazı iki değişkenli aritmetik fonksiyonların üreteç fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

4.3. Örnek

$U = (\zeta : \zeta)$ iki değişkenli aritmetik fonksiyonunun üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{U(n_1, n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{s_1}} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2^{s_2}} = \zeta(s_1) \zeta(s_2)$$

4.4. Örnek

$\tilde{\mu} = (\mu : \mu)$ iki değişkenli aritmetik fonksiyonunun üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{\tilde{\mu}(n_1, n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{\mu(n_1) \mu(n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{\mu(n_1)}{n_1^{s_1}} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{\mu(n_2)}{n_2^{s_2}} = \frac{1}{\zeta(s_1)} \frac{1}{\zeta(s_2)}$$

4.5. Örnek

$(\delta : \delta)$ iki değişkenli aritmetik fonksiyonunun üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{(\delta : \delta)(n_1, n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{(\delta : \delta)(1, 1)}{1^{s_1} 1^{s_2}} = 1.$$

Diğer taraftan Teorem 4.8 de $F = U$ ve $G = \tilde{\mu}$ alınarak $(\delta : \delta)$ birim fonksiyonunun üreteç fonksiyonu bulunur.

4.6. Örnek

$$\Pi(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & (n_1, n_2) = 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlanan iki değişkenli aritmetik fonksiyon için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{\Pi(n_1, n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \frac{\zeta(s_1) \zeta(s_2)}{\zeta(s_1 + s_2)}.$$

Gerçekten

$$\begin{aligned}
\zeta(s_1)\zeta(s_2) &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1}} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{1}{m_2^{s_2}} \\
&= \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2}} \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{(m_1, m_2)=t} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2}} \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{(n_1 t)^{s_1} (n_2 t)^{s_2}} \quad (n_1, n_2) = 1 \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^{s_1+s_2}} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} \quad (n_1, n_2) = 1 \\
&= \zeta(s_1 + s_2) \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{\Pi(n_1, n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}}
\end{aligned}$$

olup, buradan

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{\Pi(n_1, n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \frac{\zeta(s_1)\zeta(s_2)}{\zeta(s_1 + s_2)}.$$

4.7. Örnek

$$A(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & n_1 = n_2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlanan iki değişkenli aritmetik fonksiyonu için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{A(n_1, n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{s_1} n_1^{s_2}} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{s_1+s_2}} = \zeta(s_1 + s_2)$$

4.8. Örnek

$$D(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & n_1 \mid n_2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlanan iki değişkenli aritmetik fonksiyon için üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{D(n_1, n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} \\ &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{s_1} (n_1 t)^{s_2}} \\ &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{s_1+s_2} t^{s_2}} \\ &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{s_1+s_2}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^{s_2}} \\ &= \zeta(s_1 + s_2) \zeta(s_2). \end{aligned}$$

5. NAGELL VE RAMANUJAN FONKSİYONLARI

Bu bölümde temel iki değişkenli aritmetik fonksiyonlardan Nagell ve Ramanujan toplam fonksiyonlar ve bu fonksiyonların bazı özellikleri incelenecektir.

5.1. Nagell Toplam Fonksiyonu

5.1. Tanım

n negatif olmayan bir tamsayı ve r pozitif bir tamsayı olsun.

$$(x, r) = (n - x, r) = 1$$

şartlarını sağlayan $1 \leq x \leq r$ biçimindeki x tamsayılarının sayısına *Nagell toplam fonksiyonu* denir ve $\theta(n, r)$ ile gösterilir [6].

5.1. Örnek

$n = 12$ ve $r = 10$ için $\theta(n, r)$ değerini bulalım.

$1 \leq x \leq 10$ için $(x, 10) = 1$ şartını sağlayan x değerleri $x = 1, 3, 7, 9$ olup bunlardan $(12 - x, 10) = 1$ şartını sağlayan x değerleri $x = 1, 3, 9$ olur. Böylece $\theta(12, 10) = 3$ olarak bulunur.

5.2. Örnek

$n = r = 10$ için $\theta(n, r)$ değerini bulalım.

Örnek 5.1 deki $(x, 10) = 1$ şartını sağlayan x değerleri aynı zamanda $(10 - x, 10) = 1$ şartını sağlar. Buradan $\theta(10, 10) = 4$ bulunur. Bu da $\phi(10)$ değeridir.

5.1. Teorem

n ve r pozitif tamsayılar olsun. Eğer $n = r$ ise bu durumda

$$\theta(r, r) = \varphi(r).$$

İspat

r pozitif bir tamsayı olsun $(x, r) = 1$ ve $1 \leq x \leq r$ şartlarını sağlayan x tamsayılarının sayısı $\varphi(r)$ fonksiyonunu verecektir. Eğer $(x, r) = 1$ ise $(r - x, r) = 1$ olduğundan $\theta(r, r) = \varphi(r)$ bulunur.

Ayrıca $\theta(n, 1) = 1$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Şimdi iki değişkenli diğer bir fonksiyon olan aynı zamanda sayılar teorisinde de çok önemli bir yeri olan Ramanujan toplam fonksiyonu verilecektir.

5.2. Ramanujan Toplam Fonksiyonu

5.2. Tanım

n bir tamsayı ve r pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$C(n, r) = \sum_z e^{\frac{2\pi i n z}{r}}$$

ile tanımlanan $C(n, r)$ fonksiyonuna *Ramanujan toplam fonksiyonu* denir [4].

Burada toplam, $1 \leq z \leq r$ ve $(z, r) = 1$ şartını sağlayan z tamsayıları üzerinden alınmaktadır. Ayrıca herhangi z_1, z_2 pozitif tamsayıları için $z_1 \equiv z_2 \pmod{r}$

olduğunda $e^{\frac{2\pi iz_1 n}{r}} = e^{\frac{2\pi iz_2 n}{r}}$ olacağından z ler r modülüne göre indirgenmiş kalan sınıfının elemanları olur. Ramanujan toplam fonksiyonunda n ye *argument*, r ye *indeks* denir.

Ramanujan toplam fonksiyonunun tanımından her $n \in \mathbb{Z}$ için $C(n, 1) = 1$ olduğu açıktır.

r sabit ve n pozitif bir tamsayısı olduğunda $C(., r)$ ve n sabit ve r pozitif bir tamsayı olduğunda $C(n, .)$ ile gösterilen aritmetik fonksiyonları elde edilir. Bazı kaynaklarda Ramanujan toplam fonksiyonu $C_r(n)$ biçiminde gösterilmektedir.

5.2. Teorem

r pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$C(0, r) = \varphi(r).$$

İspat

$$C(0, r) = \sum_z 1$$

olduğundan bu toplamın değeri z tamsayıların sayısı kadar olacaktır. $1 \leq z \leq r$ ve $(z, r) = 1$ şartını sağlayan z tamsayıları $\varphi(r)$ kadar olup eşitlik açıktır.

5.3. Teorem

a, n birer tamsayı ve r pozitif bir tamsayı olsun. Eğer $(a, r) = 1$ ise bu durumda

$$C(an, r) = C(n, r).$$

İspat

z , r modülüne göre indirgenmiş kalan sınıfının bir elemanı olsun. $(a, r) = 1$ olduğundan az değerleri de yine r modülüne göre indirgenmiş kalanlar sınıfının elemanı olacağından $C(an, r)$ ve $C(n, r)$ fonksiyonlarının tanımından eşitlik bulunur.

Aşağıda verilecek Lemma yardımıyla Ramanujan toplam fonksiyonunun çarpımsallığı kolaylıkla gösterilebilecektir.

5.1. Lemma

$(m_1, m_2) = 1$ ve h_1 , m_1 modülüne göre indirgenmiş kalan sınıfının bir elemanı; h_2 de m_2 modülüne göre indirgenmiş kalan sınıfının bir elemanı olsun. Bu durumda $h = h_2m_1 + h_1m_2$ de m_1m_2 modülüne göre indirgenmiş kalan sınıfının elemanıdır [6].

5.4. Teorem

Ramanujan toplam fonksiyonu $C(n, r)$, r ye göre çarpımsal fonksiyondur. Yani her n tamsayısı ve $(r, s) = 1$ olacak şekildeki r, s pozitif tamsayıları için

$$C(n, rs) = C(n, r)C(n, s).$$

İspat

$(r, s) = 1$ olsun. z_1 , r modülüne göre indirgenmiş kalan sınıfının elemanı, z_2 de s modülüne göre farklı indirgenmiş kalan sınıfının elemanı olsun. Bu durumda

$$C(n, r)C(n, s) = \sum_{z_1} e^{\frac{2\pi i z_1 n}{r}} \sum_{z_2} e^{\frac{2\pi i z_2 n}{s}} = \sum_{z_1} \sum_{z_2} e^{\frac{2\pi i (z_1 s + z_2 r) n}{rs}} = \sum_z e^{\frac{2\pi i z n}{rs}} \quad (5.1)$$

$z = z_1 s + z_2 r$ ve z, rs modülüne göre indirgenmiş kalan sınıfının elemanı olmak üzere Lemma 5.1 kullanılarak Eş. 5.1 eşitliğinde çift toplamdan tek toplama geçilebilir. Böylece $C(n, rs)$ nin tanımından

$$C(n, rs) = C(n, r)C(n, s)$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem Ramanujan toplam fonksiyonu $C(n, r)$ nin, Möbius fonksiyonu ve birim fonksiyon yardımıyla da elde edilebileceğini göstermesi açısından önemlidir.

5.5. Teorem

n bir tamsayı, r pozitif bir tamsayı ve $(n, r) = k$ olsun. Bu durumda

$$C(n, r) = \sum_{d|k} d \mu\left(\frac{r}{d}\right).$$

İspat

z, r modülüne göre tüm kalan sınıfının bütün elemanları olsun. Möbius fonksiyonunun toplam özelliğinden

$$\sum_{d_1|(z, r)} \mu(d_1) = \begin{cases} 1, & (z, r) = 1 \\ 0, & (z, r) \neq 1 \end{cases}$$

olup $C(n, r)$ fonksiyonunun tanımından z, r modülüne göre kalan sınıfının elemanı ya da başka bir ifadeyle z ler $(z, r) = 1$ şartını sağlayan tamsayılar olacaktır.

Bu durumda $(z, r) = 1$ için

$$\sum_{d_1 | (z, r)} \mu(d_1) = 1$$

olacağından

$$C(n, r) = \sum_{z \pmod{r}} e^{\frac{2\pi izn}{r}} \sum_{d_1 | (z, r)} \mu(d_1)$$

yazılabilir. Burada $d_1 | (z, r)$ olduğundan $d_1 | z$ ve $d_1 | r$ olur. Böylece toplam ifadeleri yer değiştirilerek

$$C(n, r) = \sum_{d_1 | r} \mu(d_1) \sum_{\substack{d_1 | z \\ 1 \leq z \leq r}} e^{\frac{2\pi izn}{r}}$$

elde edilir. $d_1 | z$ olduğundan $z = sd_1$ olacak şekilde en az bir s tamsayısı vardır.

Ayrıca $1 \leq z \leq r$ olduğundan $s = 1, 2, \dots, \frac{r}{d_1}$ değerlerini alacaktır. Buradan

$$C(n, r) = \sum_{d_1 | r} \mu(d_1) \sum_{s=1}^{\frac{r}{d_1}} e^{\frac{2\pi isd_1 n}{r}} = \sum_{d_1 | r} \mu(d_1) \sum_{s=1}^{\frac{r}{d_1}} e^{\frac{2\pi isn}{\frac{r}{d_1}}}$$

olup eğer $\frac{r}{d_1} | n$ ise s üzerinden toplam $\frac{r}{d_1}$ ye eşit olacaktır. Eğer $\frac{r}{d_1} \nmid n$ ise s

üzerinden toplam 0 olur. Böylece

$$C(n, r) = \sum_{\substack{d_1 | r \\ \frac{r}{d_1} | n}} \mu(d_1) \frac{r}{d_1}$$

olur. Burada $\frac{r}{d_1}$ yerine d yazıldığında

$$C(n, r) = \sum_{\substack{d | r \\ d | n}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d$$

dir. $d | r$ ve $d | n$ olduğunda $(n, r) = k$ olmak üzere $d | (n, r)$ olacağından

$$C(n, r) = \sum_{d | k} d \mu\left(\frac{r}{d}\right)$$

elde edilir.

5.1. Sonuç

p bir asal sayı olsun.

i) Eğer $p^b \parallel n$ ve $0 < b < a$ ise bu durumda

$$C(n, p^a) = \begin{cases} 0 & a - b \geq 2, \\ -p^b & a - b = 1. \end{cases}$$

ii) Eğer $p^b \parallel n$ ve $b \geq a$ ise bu durumda

$$C(n, p^a) = p^{a-1} (p-1).$$

iii) Eğer $p \nmid n$ ise bu durumda

$$C(n, p^a) = \begin{cases} 0 & a \geq 2, \\ -1 & a = 1, \\ 1 & a = 0. \end{cases}$$

İspat

i) p bir asal ve $0 < b < a$ aralığında $p^b \parallel n$ olsun. Bu durumda $(n, p^a) = p^b$ dır.

Teorem 5.5 den

$$C(n, p^a) = \sum_{d|p^b} d \mu\left(\frac{p^a}{d}\right) = \mu(p^a) + \dots + p^{b-1} \mu(p^{a-b+1}) + p^b \mu(p^{a-b})$$

bulunur. Bu ifadede son terim olan $p^b \mu(p^{a-b})$ değerine bakıldığında $a-b$ değeri diğer p kuvvetlerin en küçük olanı olacağından eğer $a-b \geq 2$ ise toplamdaki tüm terimler 0 olurken $a-b=1$ olması durumunda sadece $p^b \mu(p)$ terimi sıfırdan farklı olacaktır. Buradan

$$C(n, p^a) = \begin{cases} 0, & a-b \geq 2 \\ -p^b, & a-b = 1 \end{cases}$$

bulunur.

ii) Eğer $p^b \parallel n$ ve $b \geq a$ ise bu durumda $(n, p^a) = p^a$ olur.

$$C(n, p^a) = \sum_{d|p^a} d \mu\left(\frac{p^a}{d}\right) = p^{a-1} \mu(p) + p^a \mu(1) = p^{a-1} (p-1)$$

bulunur.

iii) $p \nmid n$ olsun. Bu durumda $p^a \nmid n$ olacağından $(n, p^a) = 1$ olur.

$$C(n, p^a) = \sum_{d|n} d \mu\left(\frac{p^a}{d}\right) = \mu(p^a) = \begin{cases} 0, & a \geq 2 \\ -1, & a = 1 \\ 1, & a = 0 \end{cases}$$

bulunur.

5.2. Sonuç

Her r pozitif tamsayısı için

$$C(1, r) = \mu(r).$$

İspat

r pozitif tamsayısının tüm değerleri için $(1, r) = 1$ olduğundan

$$C(1, r) = \sum_{d|1} d \mu\left(\frac{r}{d}\right) = \mu(r)$$

dir.

Şimdi Ramanujan toplam fonksiyonu ile ilgili verilen tanım ve teoremler kullanarak örnekler incelenecektir.

5.3. Örnek

$C(9,4)$ değerini Ramanujan toplam fonksiyonun tanımından hesaplayalım. $z, \text{mod } 4$ e göre indirgenmiş kalan sınıfının elemanı olmak üzere $z, 1$ ve 3 değerlerini alacaktır. Böylece

$$\begin{aligned}
 C(9,4) &= \sum_{z=1,3} e^{\frac{2\pi i 9z}{4}} = e^{\frac{2\pi i 9}{4}} + e^{\frac{2\pi i 27}{4}} = e^{\frac{9\pi i}{2}} + e^{\frac{27\pi i}{2}} \\
 &= \left(\cos \frac{9\pi}{2} + i \sin \frac{9\pi}{2} \right) + \left(\cos \frac{27\pi}{2} + i \sin \frac{27\pi}{2} \right) \\
 &= \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) + \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \\
 &= (0 + i.1) + (0 + i.(-1)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

bulunur. Diğer bir yol olarak Teorem 5.5 kullanılırsa, $(9,4) = 1$ olduğundan

$$C(9,4) = \sum_{d|1} d \mu\left(\frac{4}{d}\right) = \mu(4) = 0$$

elde edilir.

5.4. Örnek

$C(12,9)$ değerini Ramanujan toplam fonksiyonun tanımından hesaplayacak olursak $z, \text{mod } 9$ a göre indirgenmiş kalan sınıfının elemanı olmak üzere $z ; 1, 2, 4, 5, 7, 8$ değerlerini alacaktır. Burada her bir z değeri yazılıp hesaplama yapmak güç

olacaktır. Ancak $C(12,9) = C(12,3^2)$ ve $3 \parallel 12$ olduğundan Sonuç 5.1 (i) den $b=1$, $a=2$ ve $a-b=1$ olup, $C(12,9) = C(12,3^2) = -3$ bulunur.

5.6. Teorem

n bir tamsayı ve r pozitif bir tamsayı olmak üzere $m = \frac{r}{(n,r)}$ olsun. Bu durumda

$$C(n,r) = \frac{\varphi(r)\mu(m)}{\varphi(m)}.$$

İspat

p bir asal sayı ve a pozitif bir tamsayı olsun. $C(n,r)$, φ , μ fonksiyonlarının her biri r ye göre çarpımsal olduğundan r nin kanonik formda gösterimini $r = p^a$ olarak almak yeterli olacaktır. Burada üç durum ortaya çıkar:

I. Durum: $0 < b < a$ ve $p^b \parallel n$ ise $m = \frac{p^a}{p^b}$ olur. Bu durumda

$$\frac{\varphi(r)\mu(m)}{\varphi(m)} = \frac{\varphi(p^a)\mu(p^{a-b})}{\varphi(p^{a-b})} = \frac{p^{a-1}(p-1)\mu(p^{a-b})}{p^{a-b-1}(p-1)} = p^b \mu(p^{a-b})$$

Buradan

$$\frac{\varphi(r)\mu(m)}{\varphi(m)} = \begin{cases} 0, & a-b \geq 2 \\ -p^b, & a-b = 1 \end{cases}$$

bulunur.

II. Durum: $b \geq a$ ve $p^b \parallel n$ ise $m = 1$ olup,

$$\frac{\varphi(r)\mu(m)}{\varphi(m)} = \varphi(p^a) = p^{a-1}(p-1)$$

bulunur.

III. Durum: $p \nmid n$ ise $(n, p^a) = 1$ olacağından $m = p^a$ olup

$$\frac{\varphi(r)\mu(m)}{\varphi(m)} = \frac{\varphi(p^a)\mu(p^a)}{\varphi(p^a)} = \mu(p^a) = \begin{cases} 0, & a \geq 2 \\ -1, & a = 1 \\ 1, & a = 0 \end{cases}$$

dir. $\frac{\varphi(r)\mu(m)}{\varphi(m)}$ nin bulunan tüm değerleri Sonuç 5.1 den $C(n, p^a)$ değerlerine eşit olup ispat tamamlanmış olur.

5.7. Teorem

$s > 1$ ve n, r pozitif tamsayılar olmak üzere $C(n, r)$ aritmetik fonksiyonunun üreteç fonksiyonu

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{C(n, r)}{r^s} = \frac{\sigma_{s-1}(n)}{\zeta(s)n^{s-1}}.$$

İspat

n sabit pozitif tamsayısı ve her r pozitif tamsayısı için Teorem 5.5 den

$$|C(n, r)| \leq \sum_{d|(n, r)} d \leq \sum_{d|n} d = \sigma(n)$$

yazılabilir. Bu durumda $s > 1$ için $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{C(n, r)}{r^s}$ Dirichlet serisi mutlak yakınsaktır.

Böylece $s > 1$ için Teorem 2.24 (ii) den

$$\zeta(s) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{C(n, r)}{r^s} = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{d|r} C(n, d) \right) \frac{1}{r^s}$$

olur. Ayrıca

$$\sum_{r|n} \frac{1}{r^{s-1}} = \frac{1}{n^{s-1}} \sum_{r|n} \left(\frac{n}{r} \right)^{s-1} = \frac{\sigma_{s-1}(n)}{n^{s-1}} \quad (5.2)$$

dir. Herhangi bir f fonksiyonu

$$f(r) = \begin{cases} r, & r | n \\ 0, & r \nmid n \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda Eş. 5.2 ifadesi ve f fonksiyonunun tanımından

$$\frac{\sigma_{s-1}(n)}{n^{s-1}} = \sum_{d|n} \frac{1}{d^{s-1}} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(r)}{r^s}$$

olur. Bu eşitlikteki Dirichlet serisinin sıfırdan farklı terimlerin sayısı sonlu sayıda olduğundan bu seri s reel sayısının tüm değerleri için mutlak yakınsaktır. Yine r pozitif tamsayısının tüm değerleri için

$$(f * \mu)(r) = \sum_{d|(n, r)} d \mu\left(\frac{r}{d}\right) = C(n, r)$$

dir. $s > 1$ için Teorem 2.24 (ii) den

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{C(n, r)}{r^s} = \frac{\sigma_{s-1}(n)}{n^{s-1}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu(r)}{r^s}$$

olur. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

Ayrıca her n pozitif tamsayısı için

$$|C(n, r)| \leq \sigma(r)$$

olduğundan $s > 1$ için mutlak yakınsak olan bu seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(n, r)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|(n, r)} d \mu\left(\frac{r}{d}\right) \right) \frac{1}{n^s}$$

biçiminde yazılabilir. Burada r pozitif tamsayısının her d böleni aynı zamanda n için de bir bölen olup $n = md$ olarak alındığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(n, r)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|(n, r)} d \mu\left(\frac{r}{d}\right) \right) \frac{1}{n^s} \\ &= \sum_{d|r} \left(d \mu\left(\frac{r}{d}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(md)^s} \right) \\ &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \right) \left(\sum_{d|r} d^{1-s} \mu\left(\frac{r}{d}\right) \right) \end{aligned}$$

Böylece $s > 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(n, r)}{n^s} = \zeta(s) \sum_{d|r} d^{1-s} \mu\left(\frac{r}{d}\right)$$

dir.

Bulunan bu formül daha genel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

f aritmetik fonksiyonunun Dirichlet serisi $s > s_0$ için mutlak yakınsak olmak üzere r pozitif tamsayısı ve $s > s_0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)C(n,r)}{n^s} = \sum_{d|r} \left(d^{s-1} \mu\left(\frac{r}{d}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(md)}{m^s} \right)$$

Eğer f fonksiyonu tam çarpımsal ise bu durumda $s > s_0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)C(n,r)}{n^s} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{m^s} \right) \left(\sum_{d|r} d^{s-1} f(d) \mu\left(\frac{r}{d}\right) \right)$$

dır. Örneğin; f fonksiyonu olarak tam çarpımsal λ Liouville fonksiyonu alındığında $s > 1$ için Örnek 2.15 de verilen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

eşitliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)C(n,r)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \left(\sum_{d|r} d^{s-1} \lambda(d) \mu\left(\frac{r}{d}\right) \right)$$

bulunur.

6. BİRİMSSEL BENZER NAGELL VE RAMANUJAN FONKSİYONLARI

Bu bölümde, Bölüm 5 de verilen Nagell toplam fonksiyonu ve Ramanujan toplam fonksiyonlarının birimsel benzer fonksiyonları ve bu fonksiyonların bazı özellikleri incelenecektir.

6.1. Birimsel Benzer Nagell Toplam Fonksiyonu

6.1. Tanım

n negatif olmayan bir tamsayı ve r pozitif bir tamsayı olsun.

$$(x, r)_* = (n - x, r)_* = 1$$

şartlarını sağlayan, $1 \leq x \leq r$ biçimindeki x tamsayılarının sayısına birimsel benzer Nagell toplam fonksiyonu denir ve $\theta^*(n, r)$ ile gösterilir [6].

6.1. Örnek

$\theta^*(16, 12)$ değerini bulalım.

$1 \leq x \leq 12$ için $(x, 12)_* = 1$ şartını sağlayan x tamsayıları $x = 1, 2, 5, 7, 10, 11$ olup bunlardan $(16 - x, 12)_* = 1$ şartını sağlayan x değerleri $x = 2, 5, 11$ olur. Böylece $\theta^*(16, 12) = 3$ olarak bulunur.

Teorem 5.1 den $n = r$ olması durumunda $\theta(n, r) = \varphi(r)$ olduğu biliniyor. Benzer şekilde $n = r$ için $\theta^*(n, r) = \varphi^*(r)$ olduğu aşağıdaki teoremle verilmiştir.

6.1. Teorem

n ve r pozitif tamsayılar olsun. Eğer $n = r$ ise

$$\theta^*(r, r) = \varphi^*(r).$$

İspat

r pozitif bir tamsayı olsun. $(x, r)_* = 1$ ve $1 \leq x \leq r$ şartlarını sağlayan x tamsayılarının sayısı $\varphi^*(r)$ fonksiyonunu verecektir. Eğer $(x, r)_* = 1$ ise bu durumda $(r - x, r)_* = 1$ olduğundan $\theta^*(r, r) = \varphi^*(r)$ dir.

Ayrıca $\theta^*(n, 1) = 1$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$\theta^*(n, r)$ nin r ye göre çarpımsal olduğunun ispatı, birimsel bölen ve izomorfizmin özellikleri kullanılarak aşağıda verilmiştir.

$\theta^*(n, r)$ fonksiyonunun değerini tanımından hesaplamak yerine fonksiyonun çarpımsallık özelliği kullanılarak, p asalı ve a pozitif tamsayısı için $\theta^*(n, r)$ ifadesini $\theta^*(n, p^a)$ yardımıyla hesaplamak daha kolay olacaktır.

6.1. Lemma

$(s, t) = 1$, $s \neq 1$ ve $t \neq 1$ için $r = st$ olsun. Negatif olmayan her n tamsayısı için S , T ve R kümeleri

$$\begin{aligned}
S &= \{y : 1 \leq y \leq s \text{ ve } (y, s)_* = (n - y, s)_* = 1\} \\
T &= \{z : 1 \leq z \leq t \text{ ve } (z, t)_* = (n - z, t)_* = 1\} \\
R &= \{x : 1 \leq x \leq r \text{ ve } (x, r)_* = (n - x, r)_* = 1\}
\end{aligned} \tag{6.1}$$

biçiminde tanımlansın. Eğer $x \in R$ ise y ve z için

$$\begin{aligned}
x &\equiv y \pmod{s}, \quad 0 \leq y \leq s \\
x &\equiv z \pmod{t}, \quad 0 \leq z \leq t
\end{aligned} \tag{6.2}$$

olup, $y \in S$ ve $z \in T$ dir [6].

6.2. Teorem

Negatif olmayan her n tamsayısı için $\theta^*(n, r)$, r ye göre çarpımsal bir fonksiyondur.

İspat

$(s, t) = 1$, $s \neq 1$ ve $t \neq 1$ için $r = st$ olsun. Yine S, T ve R kümeleri Eş. 6.1 deki gibi tanımlansın. $g : R \rightarrow S \times T$ dönüşümü y ve z Eş. 6.2 deki gibi olmak üzere $g(x) = (y, z)$ ile tanımlansın. g nin iyi tanımlı olduğu, g nin tanımından ve Eş. 6.2 deki kongrüansdan açıktır. Şimdi g nin bire-bir ve örten bir dönüşüm olduğunu göstereyim. $g(x) = (y, z)$ ve $g(x') = (y, z)$ olsun. g nin tanımından

$$x \equiv y \pmod{s}$$

$$x \equiv z \pmod{t}$$

$$x' \equiv y \pmod{s}$$

$$x' \equiv z \pmod{t}$$

denklikleri vardır. $(s, t) = 1$ olduğundan

$$v \equiv y \pmod{s}$$

$$v \equiv z \pmod{t}$$

kongrüans sistemi $[0, st]$ kapalı aralığında tek çözüme sahiptir. Böylece $x = x'$ olup g bire-bir olur. g nin örten olduğunu gösterelim. $(y, z) \in S \times T$ ve $x, [0, st]$ kapalı aralığında

$$v \equiv y \pmod{s}$$

$$v \equiv z \pmod{t}$$

kongrüans sisteminin tek çözümü olsun. Göstermemiz gereken $x \in R$ olduğudur. $x \in R$ olması için $x, 1 \leq x \leq r$ ve $(x, r)_* = (n - x, r)_* = 1$ şartlarını sağlamalıdır. $(s, t) = 1$ için $(x, s)_* = 1$ ve $(x, t)_* = 1$ olduğundan Teorem 3.9 dan $(x, st)_* = (x, r)_* = 1$ bulunur. Benzer şekilde $(n - x, r)_* = 1$ bulunur. Yani $x \in R$ olacağından g örtendir. g birebir ve örten bulunduğundan R ile $S \times T$ izomorftur. Dolayısıyla R nin eleman sayısı $S \times T$ nin eleman sayısına eşittir. Böylece $\theta^*(n, r)$, r ye göre çarpımsal bir fonksiyondur.

p asal sayısı ve a pozitif tamsayısı için $\theta^*(n, p^a)$ fonksiyonu $1 \leq x \leq p^a$ ve $(x, p^a)_* = (n - x, p^a)_* = 1$ şartlarını sağlayan x tamsayılarının sayısını verecektir. Bu durumda $p^a \mid n$ ve $p^a \nmid n$ durumları için $\theta^*(n, p^a)$ değerini ayrı ayrı hesaplamak gerekecektir.

6.3. Teorem

p bir asal sayı ve n negatif olmayan sabit bir tamsayı ise

$$\theta^*(n, p^a) = \begin{cases} p^a - 1, & p^a \mid n \\ p^a - 2, & p^a \nmid n \end{cases}$$

dir.

İspat

$X = \{1, 2, \dots, p^a - 1\}$ ve $p^a \mid n$ olsun. $\theta^*(n, p^a)$ değeri hesaplanırken, x tamsayıları X kümesinin elemanları arasından seçilecektir. p^a nın birimsel bölenleri yalnızca 1 ve p^a dır. Ayrıca her $x \in X$ için $p^a \nmid x$ ve $p^a \nmid n - x$ olur. O halde her $x \in X$ için $(x, p^a)_* = (n - x, p^a)_* = 1$ bulunur. Böylece eğer $p^a \mid n$ ise $\theta^*(n, p^a) = p^a - 1$ olacaktır. Diğer taraftan $p^a \nmid n$ olsun. $X \cup \{0\}$ kümesi p^a modülüne göre tam kalan sistemini oluşturur. Bu durumda $x \equiv n \pmod{p^a}$ olacak şekilde bir $x \in X \cup \{0\}$ vardır. Fakat $p^a \nmid n$ olduğundan $x \neq 0$ dır. Bunun anlamı $(n - x, p^a)_* \neq 1$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ olduğudur. Buradan da $p^a \nmid n$ ise $\theta^*(n, p^a) = p^a - 2$ olarak bulunur.

$\theta^*(n, r)$ çarpımsal olduğundan ve $\theta^*(n, p^a)$ değeri her p asalı için hesaplanarak $\theta^*(n, r)$ nin hesaplanmasında kolaylık sağlayacaktır.

6.4. Teorem

r tamsayısının kanonik formda yazılışı $r = \prod_{p \mid r} p^a$ olmak üzere

$$\theta^*(n, r) = \prod_{p^a | n} (p^a - 1) \prod_{p^a \nmid n} (p^a - 2)$$

dir.

İspat

n negatif olmayan sabit bir tamsayı olsun. $\theta^*(n, r)$ fonksiyonu r ye göre çarpımsal bir fonksiyon olduğundan

$$\theta^*(n, r) = \prod_{p|r} \theta^*(n, p^a)$$

yazılabilir. Buradan eğer $p^a | n$ ise $\theta^*(n, p^a) = p^a - 1$ eğer $p^a \nmid n$ ise $\theta^*(n, p^a) = p^a - 2$ olduğundan

$$\theta^*(n, r) = \prod_{p^a | n} (p^a - 1) \prod_{p^a \nmid n} (p^a - 2)$$

bulunur.

6.2. Örnek

$\theta^*(21, 15)$ değerini hesaplayalım.

$15 = 3 \cdot 5$ ve $3 | 21$ fakat $5 \nmid 21$ olduğundan Teorem 6.4 gereğince

$$\theta^*(21, 15) = (3 - 1)(5 - 2) = 6 \text{ dir.}$$

r tam sayısının kanonik formda yazılışı $r = \prod_{p|r} p^a$ olmak üzere her p asal sayısı için eğer $p^a \nmid n$ ise $\theta^*(n, r)$ hesaplanırken çarpanlar yalnızca $(p^a - 2)$ ler olacaktır. $p^a | n$ olması durumunda da benzer şekilde yalnızca $(p^a - 1)$ çarpanları gelecektir.

6.1. Sonuç

r pozitif tamsayısının kanonik formda yazılışı $r = \prod_{p|r} p^a$ olsun. Eğer $(n, r)_* = 1$ ise

$$\theta^*(n, r) = \prod_{p|r} (p^a - 2) = r \prod_{p|r} \left(1 - \frac{2}{p^a}\right).$$

İspat

$(n, r)_* = 1$ olduğundan r nin n yi bölen p nin hiçbir asal kuvveti olmayıp her p için $p^a \nmid n$ dır. Böylece

$$\theta^*(n, r) = \prod_{p|r} (p^a - 2)$$

bulunur. Eşitliğin diğer kısmı ise açıktır.

6.2. Sonuç

r pozitif tamsayısının kanonik formda yazılışı $r = \prod_{p|r} p^a$ olsun. Eğer $r | n$ ise bu durumda

$$\theta^*(n, r) = \prod_{p|r} (p^a - 1) = r \prod_{p|r} \left(1 - \frac{1}{p^a}\right) = \varphi^*(r).$$

İspat

$r|n$ olduğundan r nin her p asal böleni için $p^a|n$ dir. Böylece

$$\theta^*(n, r) = \prod_{p|r} (p^a - 1) = \prod_{p|r} p^a \prod_{p|r} \left(1 - \frac{1}{p^a}\right) = r \prod_{p|r} \left(1 - \frac{1}{p^a}\right)$$

olur. Son ifade $\varphi^*(r)$ ye eşit olur. Böylece $r|n$ olması durumunda $\theta^*(n, r) = \varphi^*(r)$ bulunur.

6.5. Teorem

r pozitif tam sayısının kanonik formda yazılışı $r = \prod_{p|r} p^a$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{d||r} \theta^*(n, d) = \prod_{p^a|n} p^a \prod_{p^a \nmid n} (p^a - 1).$$

İspat

$r = \prod_{p|r} p^a$ olsun. $\theta^*(n, r)$ fonksiyonu r ye göre çarpımsal olduğundan $\sum_{d||r} \theta^*(n, d)$

de çarpımsaldır. $p^a || r$ olacak şekildeki her p asalı için $\sum_{d||p^a} \theta^*(n, d)$ değeri

yardımla $\sum_{d||r} \theta^*(n, d)$ değeri hesaplanır. Teorem 6.3 den

$$\sum_{d||p^a} \theta^*(n, d) = \theta^*(n, 1) + \theta^*(n, p^a) = 1 + \theta^*(n, p^a) = \begin{cases} p^a, & p^a | n \\ p^a - 1, & p^a \nmid n \end{cases}$$

Böylece

$$\sum_{d \parallel r} \theta^*(n, d) = \prod_{p^a \mid n} p^a \prod_{p^a \nmid n} (p^a - 1)$$

bulunur.

6.6. Teorem

r pozitif tamsayısının kanonik formda yazılışı $r = \prod_{p \mid r} p^a$ olsun. Bu durumda

$$\theta^*(n, r) = \varphi^*(r) \sum_{\substack{d \parallel r \\ (n, d)_s = 1}} \frac{\mu^*(d)}{\varphi^*(d)}.$$

İspat

Bölüm 3 den μ^* ve φ^* fonksiyonlarının çarpımsal olduğu biliniyor. Ayrıca φ^* fonksiyonu hiçbir zaman sıfır olamayacağından bu iki fonksiyonun bölümleri tanımlıdır ve Örnek 2.10 dan çarpımsaldır. Böylece Teorem 3.13 den

$$\sum_{\substack{d \parallel r \\ (n, d)_s = 1}} \frac{\mu^*(d)}{\varphi^*(d)} = \prod_{p^a \mid n} \left(1 + \frac{\mu^*(p^a)}{\varphi^*(p^a)} \right)$$

olur. $\varphi^*(p^a) = p^a - 1$ ve $\mu^*(p^a) = -1$ olup

$$\sum_{\substack{d \parallel r \\ (n, d)_s = 1}} \frac{\mu^*(d)}{\varphi^*(d)} = \prod_{p^a \mid n} \left(\frac{p^a - 2}{p^a - 1} \right)$$

olur. Ayrıca $\varphi^*(r) = \prod_{p|r} (p^a - 1)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\varphi^*(r) \sum_{\substack{d|r \\ (n,d)_*=1}} \frac{\mu^*(d)}{\varphi^*(d)} = \prod_{p|r} (p^a - 1) \prod_{p^a \nmid n} \frac{(p^a - 2)}{(p^a - 1)} = \prod_{p^a | n} (p^a - 1) \prod_{p^a \nmid n} (p^a - 2) = \theta^*(n, r)$$

elde edilir.

6.2. Birimsel Benzer Ramanujan Toplam Fonksiyonu

Bu bölümde iki değişkenli bir başka aritmetik fonksiyonun birimsel benzeri verilirken aynı zamanda daha önceden verilen Ramanujan toplam fonksiyonu ile ilgili paralelliklerde gösterilecektir.

6.2. Tanım

n bir tamsayı ve r pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$C^*(n, r) = \sum_z e^{\frac{2\pi i n z}{r}}$$

ile tanımlanan $C^*(n, r)$ fonksiyonuna *birimsel benzer Ramanujan toplam fonksiyonu* denir [6]. Burada toplam, $1 \leq z \leq r$ ve $(z, r)_* = 1$ şartını sağlayan z tamsayıları üzerinden alınmaktadır. z ler r modülüne göre yarı indirgenmiş kalan sınıfının elemanları olacaktır.

Ramanujan toplam fonksiyonunun tanımından her $n \in \mathbb{Z}$ için $C^*(n, 1) = 1$ dir.

6.3. Örnek

$C^*(4,12)$ değerini, birimsel benzer Ramanujan toplam fonksiyonunun tanımından hesaplayalım. $z, \text{mod}12$ ye göre yarı indirgenmiş kalan sınıfının elemanı olmak üzere $z, 1, 2, 5, 7, 10, 11$ değerlerini alacaktır. Böylece

$$\begin{aligned}
 C^*(4,12) &= \sum_{z=1,2,5,7,10,11} e^{\frac{2\pi i 4z}{12}} \\
 &= e^{\frac{2\pi i 4}{12}} + e^{\frac{2\pi i 8}{12}} + e^{\frac{2\pi i 20}{12}} + e^{\frac{2\pi i 28}{12}} + e^{\frac{2\pi i 40}{12}} + e^{\frac{2\pi i 44}{12}} \\
 &= 3 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) + 3 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \\
 &= 3 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 3 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= -3
 \end{aligned}$$

6.7. Teorem

r pozitif bir tamsayı olmak üzere $C^*(0,r) = \varphi^*(r)$ dir.

İspat

$$C^*(0,r) = \sum_z 1$$

olacağından bu toplamın değeri z tamsayıların sayısı kadar olacaktır. $1 \leq z \leq r$ ve $(z,r)_* = 1$ şartını sağlayan z tamsayıları $\varphi^*(r)$ kadar olup eşitlik açıktır.

6.8. Teorem

r pozitif bir tamsayı olsun. Eğer $(a, r) = 1$ ise bu durumda $C^*(an, r) = C^*(n, r)$ dir.

İspat

z , r modülüne göre yarı indirgenmiş kalan sınıfının elemanı olsun. $(a, r) = 1$ olduğundan az değerleri de yine r modülüne göre yarı indirgenmiş kalan sınıfının elemanları olacağından $C^*(an, r)$ ve $C^*(n, r)$ fonksiyonlarının tanımından eşitlik bulunur.

6.9. Teorem

n bir tamsayı ve r pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\sum_{d|r} C^*(n, d) = \begin{cases} r & r | n, \\ 0 & r \nmid n. \end{cases}$$

İspat

z , r modülüne göre tam kalan sınıfının elemanı olmak üzere

$$\sum_{z \pmod{r}} e^{\frac{2\pi inz}{r}} = \begin{cases} r, & r | n \\ 0, & r \nmid n \end{cases}$$

olduğundan

$$\sum_{z \pmod{r}} e^{\frac{2\pi inz}{r}} = \sum_{d|r} \sum_{\left(z, \frac{r}{d}\right)_* = 1} e^{\frac{2\pi indz}{r}} \quad (6.3)$$

Eş. 6.3 eşitliğinde sağ taraftaki içteki toplam ifadesi $C^*\left(n, \frac{r}{d}\right)$ ye eşit olup

$$\sum_{d \parallel r} C^*\left(n, \frac{r}{d}\right) = \sum_{z(\bmod r)} e^{\frac{2\pi i n z}{r}} = \begin{cases} r, & r \mid n \\ 0, & r \nmid n \end{cases}$$

olur. $\frac{r}{d}$ yerine d alındığında yalnızca toplam ifadesindeki terimlerin yeri değişeceğinden eşitlik bozulmadan istenilen elde edilmiş olur.

Bölüm 3 de verilen Teorem 3.19, Teorem 6.9 un bir sonucu olarak da elde edilebilir.

6.3. Sonuç

r pozitif tamsayısı için

$$\sum_{d \parallel r} \varphi^*(d) = r.$$

İspat

Teorem 6.7 den $C^*(0, r) = \varphi^*(r)$ olup ayrıca her pozitif r tamsayısı için $r \mid 0$ olduğundan Teorem 6.9 dan

$$\sum_{d \parallel r} \varphi^*(d) = \sum_{d \parallel r} C^*(0, d) = r.$$

6.10. Teorem

n bir tamsayı ve r pozitif bir tamsayı olmak üzere $C^*(n, r)$ fonksiyonu r ye göre çarpımsal bir fonksiyondur. Yani; her n tamsayısı ve $(r, s) = 1$ olacak şekilde r, s pozitif tamsayıları için

$$C^*(n, r) C^*(n, s) = C^*(n, rs).$$

İspat

$(r, s) = 1$ olsun. z_1 , r modülüne göre yarı indirgenmiş kalan sınıfının elemanı, z_2 de s modülüne göre yarı indirgenmiş kalan sınıfının elemanı olsun. Bu durumda

$$C^*(n, r) C^*(n, s) = \sum_{z_1} e^{\frac{2\pi i n z_1}{r}} \sum_{z_2} e^{\frac{2\pi i n z_2}{s}} = \sum_{z_1} \sum_{z_2} e^{\frac{2\pi i n (z_1 s + z_2 r)}{rs}} = \sum_z e^{\frac{2\pi i n z}{rs}}$$

Burada $z = z_1 s + z_2 r$ olup z , rs modülüne göre yarı indirgenmiş kalan sınıfının elemanları olacağından çift toplam ifadesi tek toplam olarak yazılmıştır. Bulunan son toplam $C^*(n, rs)$ ye eşit olduğundan buradan

$$C^*(n, r) C^*(n, s) = C^*(n, rs)$$

bulunur.

6.4. Sonuç

r pozitif tamsayısı için $\varphi^*(r)$ fonksiyonu çarpımsaldır.

İspat

$C^*(0, r) = \varphi^*(r)$ ve $C^*(n, r)$ fonksiyonu da çarpımsal olduğundan sonuç açıktır.

6.11. Teorem

r pozitif tamsayısı için $\mu^*(r) = C^*(1, r)$.

İspat

g fonksiyonunu $g(r) = \sum_{d|r} C^*(1, d)$ ile tanımlayalım. Teorem 6.9 dan

$$\sum_{d|r} C^*(1, d) = \begin{cases} r, & r|1 \\ 0, & r \nmid 1 \end{cases}$$

olduğundan

$$g(r) = \begin{cases} 1, & r = 1 \\ 0, & r \neq 1 \end{cases}$$

olur. Birimsel benzer Möbius inversiyon formülünden

$$C^*(1, r) = \sum_{d|r} \mu^*(d) g\left(\frac{r}{d}\right) \quad (6.4)$$

olup ayrıca

$$g\left(\frac{r}{d}\right) = \begin{cases} 1, & r = d \\ 0, & r \neq d \end{cases}$$

olmak üzere Eş. 6.4 eşitliğinin sağ tarafındaki toplam ifadesinde yalnızca $r = d$ olması durumunda sıfırdan farklı değerler geleceğinden

$$\mu^*(r) = C^*(1, r)$$

bulunur.

6.5. Sonuç

r pozitif tamsayısı için $\mu^*(r)$ fonksiyonu r ye göre çarpımsal bir fonksiyondur.

6.12. Teorem

n bir tamsayı ve r pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$C^*(n, r) = \sum_{\substack{d \parallel r \\ d \mid n}} \mu^*\left(\frac{r}{d}\right) d.$$

İspat

g fonksiyonu

$$g(r) = \begin{cases} r, & r \mid n \\ 0, & r \nmid n \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın Teorem 6.9 dan

$$\sum_{d \parallel r} C^*(n, d) = g(r)$$

olacağından birimsel benzer Möbiüs inversiyon formülünden

$$C^*(n, r) = \sum_{d \parallel r} \mu^*(d) g\left(\frac{r}{d}\right) \quad (6.5)$$

olur.

$$g\left(\frac{r}{d}\right) = \begin{cases} \frac{r}{d}, & \frac{r}{d} | n \\ 0, & \frac{r}{d} \nmid n \end{cases}$$

olmak üzere Eş. 6.5 eşitliğindeki toplam ifadesinde sıfırdan farklı terimler yalnızca

$\frac{r}{d} | n$ olması durumunda geleceğinden

$$C^*(n, r) = \sum_{\substack{d|r \\ d|n}} \mu^*(d) g\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{\substack{d|r \\ d|n}} \mu^*(d) \frac{r}{d} = \sum_{\substack{d|r \\ d|n}} \mu^*\left(\frac{r}{d}\right) d$$

bulunur. Bu eşitlik

$$C^*(n, r) = \sum_{\substack{d|r \\ d|n}} \mu^*\left(\frac{r}{d}\right) d = \sum_{d|(n, r)_*} \mu^*\left(\frac{r}{d}\right) d$$

biçiminde de ifade edilebilir.

6.6. Sonuç

r pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\phi^*(r) = \sum_{d|r} \mu^*(d) \frac{r}{d}.$$

6.7. Sonuç

p asal sayısı ve a pozitif bir tamsayısı için

$$C^*(n, p^a) = \begin{cases} \varphi^*(p^a) & p^a \mid n, \\ -1 & p^a \nmid n. \end{cases}$$

İspat

p^a nın birimsel bölenleri yalnızca 1 ve p^a olup eğer $p^a \mid n$ ise Teorem 6.12 den

$$C^*(n, p^a) = \sum_{d \parallel p^a} \mu^*(d) \frac{p^a}{d} = \mu^*(1) p^a + \mu^*(p^a) = p^a - 1 = \varphi^*(p^a)$$

bulunur. Eğer $p^a \nmid n$ ise $C^*(n, p^a) = \mu^*(p^a) = -1$ bulunur.

6.4. Örnek

$C^*(4, 12)$ değerini Teorem 6.12 den hesaplayacak olursak

$$C^*(4, 12) = \sum_{\substack{d \parallel 12 \\ d \mid 4}} d \mu^*\left(\frac{12}{d}\right)$$

12 nin birimsel bölenleri 1, 3, 4 ve 12 olup bunlardan yalnızca 1 ve 4, 4 ün bir böleni olduğundan

$$C^*(4, 12) = \mu^*(12) + \mu^*(3) \cdot 4 = (-1)^2 + (-1)(4) = -3.$$

7. SONUÇ

İlk bölümde sayılar teorisinin önemi ifade edilmiş, aritmetik fonksiyonlar hakkında çeşitli bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, aritmetik fonksiyon tanımı, bazı aritmetik fonksiyonlar ve bunların özellikleri incelenmiştir. Aritmetik fonksiyonlar üzerinde tanımlanan Dirichlet çarpımının cebirsel özellikleri gösterilmiştir. Aritmetik fonksiyonlar kümesinin alt gruplarından çarpımsal ve tam çarpımsal fonksiyonlara yer verilmiş. Ayrıca aritmetik bir fonksiyonun Dirichlet serileri ve üreteç fonksiyonu ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde birimsel bölen tanımı ve çeşitli özellikleri verilmiş, birimsel bölen yardımıyla aritmetik fonksiyonların birimsel çarpımları belirlenmiştir. Ayrıca bazı aritmetik fonksiyonların birimsel benzerlerinin çeşitli özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde iki değişkenli aritmetik fonksiyon tanımlanmış, tek değişkenli aritmetik fonksiyonlar için verilen bazı özelliklerin iki değişkenli aritmetik fonksiyonlar içinde geçerli olabileceği gösterilmiştir. İki değişkenli aritmetik fonksiyonların Dirichlet serileri ve üreteç fonksiyonlarına yer verilmiştir.

Beşinci bölümde iki değişkenli aritmetik fonksiyonlardan Nagell ve Ramanujan toplam fonksiyonlarının çeşitli özellikleri incelenmiş ve bu fonksiyonların bazı özel durumlarda tek değişkenli temel aritmetik fonksiyonlara dönüştüğü gösterilmiştir.

Altıncı bölümde, Bölüm 3 ve Bölüm 5 den yararlanılarak Nagell ve Ramanujan toplam fonksiyonlarının birimsel benzerleri tanımlanmış ve bu fonksiyonların çeşitli özellikleri incelenmiştir. Bazı özel durumlarda tek değişkenli temel aritmetik fonksiyonlara dönüştüğü gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Apostol, T. M., "Introduction to Analytic Number Theory", *Department of Mathematics California Institute of Technology*, California, 13-38, 224-232 (1998).
2. Altındış, H., "Sayılar Teorisi ve Uygulamaları", *Erciyes Üniversitesi*, Ankara, 40-97 (1999).
3. Balasubramanian, N., "Arithmetic functions of several variables, some multiplicative functions and their applications", *Proceedings of the Conference on Number Theory*, Aarhus, 47-62 (1986).
4. McCarthy, P. J., "Introduction to Arithmetical Functions", *Springer-Verlag*, New York, 1-11, 16-18, 70-72, 184-209 (1984).
5. Vaidyanathaswamy, R., "The Theory of multiplicative arithmetic functions", *Transactions of the American Mathematical Society*, 33: 579-662 (1931).
6. Gautier, G. J., "Number-Theoretic functions of two variables", Doktora Tezi, *Faculty of the Graduate College of the Oklahoma State University*, Oklahoma, 1-7, 20-21, 28-36, 50-69 (1973).
7. Sivaramakrishnan, R., "Classical Theory of Arithmetic Functions", *Marcel Dekker Inc.*, New York, 1-14, 46-48, 55-56, 69-70, 137-146, 188-189 (1989).
8. Hansen, R. T., and Swanson, L. G., "Unitary divisors", *Mathematics Magazine*, 52: 217-222 (1979).
9. Alkan, E., Zaharescu, A., and Zaki, M., "Unitary convolution for arithmetical functions in several variables", *Hiroshima Mathematical Journal*, 36: 113-124 (2006).
10. Laohakosol, V., Ruengsinsub, P. And Pabhapote, N., "Ramanujan sums via generalized Möbius functions", *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1-34 (2006).
11. Kemp, P. A., "Properties of Arithmetic Functions of Several Variables", Doktora Tezi, *Department of Mathematics Kansas State University*, Kansas, 1-4, 56-57 (1974).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÇETİN, Funda
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 19.09.1983 Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 323 93 33
e-mail : funda.cetin@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2005
Lise	Ayrancı Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı)	2001

Yabancı Dil

İngilizce