

133480

**İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ
BERNSTEIN POLİNOMLARI
İÇİN TERS TEOREMLER**

İbrahim BÜYÜKYAZICI

**DOKTORA TEZİ
(MATEMATİK)**

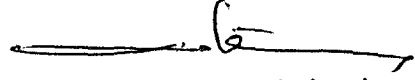
**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Mayıs 2003

ANKARA

133480

İbrahim BÜYÜKYAZICI tarafından hazırlanan İKİ DEĞİŞKENLİ
GENELLEŞTİRİLMİŞ BERNSTEIN POLİNOMLARI İÇİN TERS TEOREMLER
adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



Doç.Dr.Ertan İBİKLİ

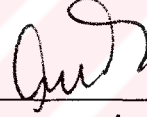
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafındanMatematik..... Anabilim Dalında
.....Doktora.... tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ömer AKIN



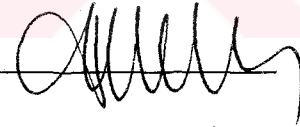
Üye : Prof. Dr. Kerim KOCA



Üye : Prof. Dr. Aydın TIRYAKI



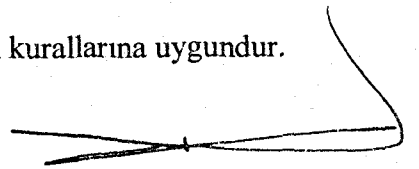
Üye : Prof. Dr. Ziya ARGÜN



Üye : Doç. Dr. Ertan İBİKLİ



Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	iv
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	v
SİMGELER	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	4
2.1. $C(D)$ Sürekli Fonksiyonlar Uzayı.....	4
2.2 Süreklilik Modülleri	4
2.3 Lipschitz Sınıfı.....	8
3. $C(D)$ UZAYINDA YAKLAŞIM PROBLEMİ VE ÇÖZÜMÜ.....	13
3.1 $C([0,1])$ Uzayında Karleson Problemi ve Çözümü	13
3.2 $C(D)$ Uzayında Karleson Problemi ve Çözümü	15
4. $C(D)$ UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ BERNSTEIN	24
POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM	
4.1 İki Değişkenli Genelleştirilmiş Bernstein Polinomları	24
4.2 Yakınsaklık Hızı	38
5. İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ BERNSTEIN	67
POLİNOMLARI İÇİN TERS TEOREMLER	
KAYNAKLAR	83
ÖZGEÇMİŞ.....	84

İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ BERNSTEIN POLİNOMLARI İÇİN TERS TEOREMLER

(Doktora Tezi)

İbrahim BÜYÜKYAZICI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2003

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümünde, temel tanımlar, iki değişkenli fonksiyonların süreklilik modülleri ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlarla ilgili temel bilgiler verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde, iki değişkenli sürekli fonksiyonlar uzayında yaklaşım problemi incelenmiş ve bununla ilgili teorem verilmiştir. Dördüncü bölümde, iki değişkenli Bernstein polinomlarının farklı iki genelleştirilmesi verilmiş olup, bu polinomların birim karede sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı ve yakınsaklık hızları incelenmiştir. Çalışmanın son bölümü olan beşinci bölümünde ise iki değişkenli genelleştirilmiş Bernstein polinomları için ters teoremler ispatlanmıştır.

Bilim Kodu : 403.03.01

Anahtar Kelimeler : Bernstein Polinomları, Süreklilik Modülleri, Yakınsaklık Hızı, Düzgün Yakınsaklık, Ters Teoremler, Lipschitz Sınıfı.

Sayfa Adedi : 84

Tez Yöneticisi : Doç.Dr. Ertan İBİKLİ

**INVERSE THEOREMS FOR GENERALIZED BERNSTEIN
POLYNOMIALS OF TWO VARIABLES**

(Ph. D. Thesis)

İbrahim BÜYÜKYAZICI

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

May 2003

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. First chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, basic definitions, basic information on modules of continuity of two variable functions and Lipschitz function are given. In the third chapter of the thesis, approximation problems were examined continuous functions space in the two variables and theorem on this space are given. In the fourth chapter, generalized Bernstein polynomials of two variables are given, the uniform approximation of the f function on unit square of these polynomials and their rate of converges were observed. In the fifth and last chapter, inverse theorems for generalized Bernstein polynomials of two variables are proved.

Science Code : 403.03.01

**Key Words : Bernstein Polynomials, Modules of Continuity, Rate of
Convergence, Uniformly convergence , Inverse Theorems,
Lipschitz Class.**

Page number : 84

Adviser : Assoc.Prof. Dr. Ertan İBİKLİ

TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca engin bilgi ve hoşgörüsü ile; ilgi, destek, öneri ve zamanını esirgemeyen çok kıymetli saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Akif Hacıyev'e (Azerbaycan Milli İlimler Akademisi), danışmanım değerli hocam Doç. Dr. Ertan İbikli'ye (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi), teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmamın her safhasında maddi ve manevi destekleri ile beni yalnız bırakmayan sevgili eşim Meral BÜYÜKYAZICI, annem Meliha BÜYÜKYAZICI, babam Niyazi BÜYÜKYAZICI ve kardeşlerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge

Sayfa

Çizelge 4.1. $f(x, y) = x^3 y$ fonksiyonu için hata değerleri ($\beta_1 = 1$ ve $\beta_2 = 2$).....54

Çizelge 4.2. $f(x, y) = e^x y$ fonksiyonu için hata değerleri ($\beta_1 = 1$ ve $\beta_2 = 2$).....55

Çizelge 4.3. $f(x, y) = x^3 y$ fonksiyonu için hata değerleri ($b_n = \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n}$).....64

Çizelge 4.4. $f(x, y) = e^x y$ fonksiyonu için hata değerleri ($b_n = \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n}$).....65



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil

Sayfa

- Şekil 1.1. $f(x) = \sin(2\pi x)$ fonksiyonuna bir değişkenli Bernstein.....1
polinomlarının yaklaşımı
- Şekil 4.1. $f(x, y) = x^4 y^4 \ln(1 + x^4 y^4)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş32
Bernstein polinomlarının yaklaşımı ($\alpha_k = 1, \beta_k = 2; k = 1, 2$)
- Şekil 4.2. $f(x, y) = \frac{1 + (xy)^2 \sin(xy)}{1 + (xy)^2}$ fonksiyonuna genelleştirilmiş32
Bernstein polinomlarının yaklaşımı ($\alpha_k = 1, \beta_k = 2; k = 1, 2$)
- Şekil 4.3. $f(x, y) = xy - \sin(xy)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş 37
Bernstein polinomlarının yaklaşımı ($b_n = \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n}$)
- Şekil 4.4. $f(x, y) = \frac{1}{100}(x^5 + y^5)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş38
Bernstein polinomlarının yaklaşımı ($b_n = \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n}$)

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$C(D)$	D de sürekli fonksiyonlar uzayı
D	$[0,1] \times [0,1]$ birim karesi
$Lip \alpha$	İki değişkenli Lipschitz sınıfı.
$Lip_x \alpha$	x değişkenine göre Lipschitz sınıfı
$Lip_y \alpha$	y değişkenine göre Lipschitz sınıfı
$\mu_k = (x_k, y_k)$	Birim karede nokta gösterimi
$\rho(\mu_k, \mu_j)$	$\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}$
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun tam süreklilik modülü
$\omega^{(1)}(f; \delta)$	f fonksiyonunun x değişkenine göre kısmi süreklilik modülü
$\omega^{(2)}(f; \delta)$	f fonksiyonunun y değişkenine göre kısmi süreklilik modülü

1.GİRİŞ

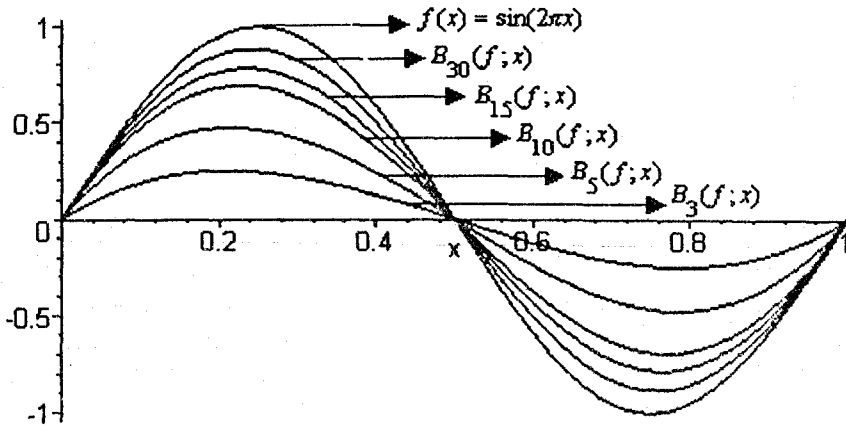
Matematiğin bir çok dalında, örneğin, yaklaşımlar teorisi, olasılık teorisi, sayılar teorisi, cebir mantığı, diferensiyel ve integral denklemlerinin sayısal çözümleri ve başkaları, Bernstein polinomları önemli uygulamalara sahip polinomlardır [2,9-12]. Bernstein polinomlarının bu kadar yaygın kullanılması, Bernstein polinomlarının çok sade bir yapısı ve önemli özelliklerinin olması ile alakadardır. Bilindiği gibi Bernstein polinomları $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlı her bir sürekli fonksiyon için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.1)$$

biçiminde tanımlanmaktadır ve keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, $[0,1]$ aralığının her bir x noktasında

$$|B_n(f; x) - f(x)| < \varepsilon, \quad n \geq n_0(\varepsilon) \quad (1.2)$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı bulunabilir [3,4,6].



Şekil 1.1. $f(x) = \sin(2\pi x)$ fonksiyonuna bir değişkenli Bernstein polinomlarının yaklaşımı

(1.2) eşitsizliğinden görüldüğü gibi f fonksiyonunun sadece rasyonel noktalarındaki değerleri bilindiği takdirde onun diğer noktalarındaki değerleri $B_n(f; x)$ in değerlerinden çok az farketmektedir.

$[0,1]$ aralığında, sürekli fonksiyonlar sınıfının bazı alt sınıflarında (1.2) eşitsizliğinden daha iyi eşitsizlikler elde edilebilir. Örneğin G.G.Lorentz $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $f \in Lip_M \alpha$ koşulu sağlandığı takdirde $[0,1]$ aralığının her x noktasında

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq M \left(\frac{x(1-x)}{n} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \quad (1.3)$$

eşitsizliğini göstermiştir.

(1.2) eşitsizliği ile (1.3) eşitsizliğini karşılaştırsak, (1.3) eşitsizliğinin yaklaşım hakkında daha çok bilgi verdiğini açıkça görürüz: (1.2) eşitsizliği sadece x noktasında $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f; x) = f(x)$ olduğunu göstermesine karşın, (1.3) eşitsizliği hem bunu, hem de aynı noktada yaklaşım hızını vermektedir. (1.3) eşitsizliğinden görüldüğü gibi $f \in Lip_M \alpha$ olduğunda $B_n(f; x)$ dizisinin $f(x)$ 'e yaklaşımı $\frac{M}{n^{\alpha/2}}$ nin sıfıra yaklaşma hızından daha hızlıdır.

Şimdi (1.3) eşitsizliği veya benzer bir eşitsizliğin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda f hangi alt sınıftandır? Bu sorunun cevabı yaklaşımlar teorisinin ters teoremidir, soru ise yaklaşımlar teorisinin ters problemidir.

Bir değişkenli Bernstein polinomları için $Lip_M \alpha$ sınıfında bu tür ters teoremler G.G.Lorentz ve G.G.Lorentz – H.Berens tarafından ispatlanmıştır [1].

Bu çalışmada ise, (b_n) pozitif terimli dizi olmak üzere, $D=[0,1;0,1]$ karesinde sürekli $f(x,y)$ fonksiyonuna bağlı iki değişkenli genelleştirilmiş Bernstein polinomu

$$B_{n,m}^{(b_n)}(f;x,y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \binom{n}{k} \binom{m}{j} x^k (1-x)^{n-k} y^j (1-y)^{m-j}$$

biçiminde ele alınarak, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b_n} = 1$ koşulu altında bu polinomlar için bazı ters

problemler ispatlanmıştır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, temel tanımlar, iki değişkenli fonksiyonların süreklilik modülleri ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlarla ilgili temel bilgiler verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, iki değişkenli sürekli fonksiyonlar uzayında yaklaşım problemi incelenmiş ve bununla ilgili teorem verilmiştir.

Dördüncü bölümde, iki değişkenli Bernstein polinomlarının farklı iki genelleştirilmesi verilmiş olup, bu polinomların birim karede sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı ve yakınsaklık hızları incelenmiştir.

Çalışmanın son bölümü olan beşinci bölümünde ise iki değişkenli genelleştirilmiş Bernstein polinomları için ters teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 $C(D)$ Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.1.1: $D = [0,1;0,1]$ olmak üzere bu karede tanımlı tüm sürekli fonksiyonlar uzayını $C(D)$ ile gösterelim. $C(D)$ lineer normlu uzaydır ve bu uzayda norm

$$\|f\|_{C(D)} = \max_{(x,y) \in D} |f(x,y)| \quad (2.1)$$

olarak tanımlanabilir.

Tanım 2.1.2: n, m doğal sayılar olmak üzere $(f_{n,m})$, $C(D)$ uzayında bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer $f \in C(D)$ olmak üzere

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|f_{n,m} - f\|_{C(D)} = 0 \quad (2.2)$$

ise, bu durumda $(f_{n,m})$, fonksiyon dizisi f fonksiyonuna $C(D)$ uzayında yakınsar yada yakınsaktır denir. $C(D)$ uzayının normuna göre bu yakınsaklık düzgün yakınsaklıktır.

2.2. Süreklilik Modülleri

$D = [0,1;0,1]$ karesinin farklı noktalarını $\mu_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$; μ_k ve μ_j noktaları arasındaki uzaklığı $\rho(\mu_k, \mu_j)$ olarak gösterelim:

$$\rho(\mu_k, \mu_j) = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}.$$

Tanım 2.2.1: f fonksiyonu D karesinde sürekli bir fonksiyon, δ pozitif bir sayı olmak üzere

$$\omega(f; \delta) = \max_{\substack{\rho(\mu_1, \mu_2) \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in D}} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \quad (2.3)$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun tam süreklilik modülü denir.

Tam süreklilik modülünün önemli özellikleri şunlardır:

1. $\omega(f; \delta)$, δ değişkenine göre negatif olmayan, monoton artan bir fonksiyondur.
2. $\omega(f; \delta) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul f nin sabit olmasıdır.
3. $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f; \delta) = 0$ dır.
4. n bir doğal sayı olmak üzere

$$\omega(f; n\delta) \leq n \omega(f; \delta)$$

dır.

5. λ keyfi pozitif sayı olmak üzere

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda+1) \omega(f; \delta)$$

dır [4,7].

Tanım 2.2.2: f fonksiyonu $D = [0,1;0,1]$ karesinde sürekli bir fonksiyon δ pozitif bir sayı olmak üzere

$$\omega^{(1)}(f; \delta) = \max_{0 \leq y \leq 1} \max_{|x_1 - x_2| \leq \delta} |f(x_1, y) - f(x_2, y)| \quad (2.4)$$

ve

$$\omega^{(2)}(f; \delta) = \max_{0 \leq x \leq 1} \max_{|y_1 - y_2| \leq \delta} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \quad (2.5)$$

fonksiyonlarına sırasıyla f fonksiyonunun x değişkenine ve y değişkenine göre kısmi süreklilik modülleri denir.

Tam süreklilik modülü için sağlanan tüm özellikler kısmi süreklilik modülleri için de sağlanır.

Süreklilik modüllerinin tanımlarından görüldüğü üzere, D karesinde

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \omega(f; \rho(\mu_1, \mu_2)) \quad (2.6)$$

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq \omega^{(1)}(f; |x_1 - x_2|) \quad (2.7)$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \omega^{(2)}(f; |y_1 - y_2|) \quad (2.8)$$

eşitsizliklerinin sağlandığı açıktır. Bunlar süreklilik modüllerinin en çok kullanılan özellikleridir.

Lemma 2.2.3: M herhangi bir pozitif sabit olmak üzere

$$\omega(f; h) \leq M \left(\delta^\alpha + \frac{h}{\delta} \omega(f; \delta) \right) \quad , \quad (0 < h, \delta \leq 1 ; 0 < \alpha < 1)$$

eşitsizliğinden

$$\omega(f; h) \leq M' h^\alpha$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: A sayısını $A > 1$ ve $2M < A^{1-\alpha}$ olacak biçimde, M_1 sayısını $M_1 = \max\{\omega(f; 1), 2MA^\alpha\}$ olarak seçelim. $h_n = A^{-n}$ olmak üzere

$$\omega(f; h_n) \leq M_1 h_n^\alpha, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

eşitsizliğinin sağlandığını tümevarım yöntemi ile gösterelim.

$n=0$ için yukarıdaki eşitsizliğin sağlandığı açıktır. $n>0$ için (2.9) eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\omega(f; h) \leq M \left(\delta^\alpha + \frac{h}{\delta} \omega(f; \delta) \right)$$

eşitsizliğinde $h = h_n$, $\delta = h_{n-1}$ olarak alınırsa

$$\omega(f; h_n) \leq M \left(h_{n-1}^\alpha + \frac{h_n}{h_{n-1}} \omega(f; h_{n-1}) \right)$$

buradan

$$\omega(f; h_n) \leq M h_{n-1}^\alpha + M \frac{h_n}{h_{n-1}} \omega(f; h_{n-1}) \quad (2.10)$$

elde edilir. $a \leq b + c$ ise $a \leq 2b$ veya $a \leq 2c$ dir. Dolayısıyla (2.10) eşitsizliğinden

$$\omega(f; h_n) \leq 2Mh_{n-1}^\alpha = 2MA^\alpha h_n^\alpha \leq M_1 h_n^\alpha$$

veya

$$\begin{aligned} \omega(f; h_n) &\leq 2M \frac{h_n}{h_{n-1}} \omega(f; h_{n-1}) = 2M \frac{1}{A} \omega(f; h_{n-1}) \leq 2MA^{-1} M_1 h_{n-1}^\alpha \\ &\leq 2MA^{\alpha-1} M_1 h_n^\alpha \leq M_1 h_n^\alpha \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. $0 < h \leq 1$ olduğunda öyle bir n pozitif tam sayısı bulunabilir öyle ki $h_n < h \leq h_{n-1}$ dir. Süreklilik modülünün monotonluğundan

$$\omega(f; h) \leq \omega(f; h_{n-1}) \leq M_1 A^\alpha h_n^\alpha \leq M' h^\alpha. \quad (M' = M_1 A^\alpha)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

2.3. Lipschitz Sınıfı

Tanım 2.3.1: Eğer $D = [0,1;0,1]$ karesinde tanımlı f fonksiyonu, μ_1 ve μ_2 bu karenin keyfi noktaları olmak üzere,

$$|f(\mu_1) - f(\mu_2)| \leq K \rho^\alpha(\mu_1, \mu_2) \quad , \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (2.11)$$

koşulunu sağlarsa, f fonksiyonu D karesinde *Lipschitz* koşulunu sağlar veya *Lip α* sınıfındandır denir. Burada K *Lipschitz* sabiti denilen bir sabit sayıdır.

Tanım 2.3.2: Eğer $D = [0,1;0,1]$ karesinde tanımlı f fonksiyonu, (x_1, y) ve (x_2, y) bu karenin keyfi noktaları olmak üzere, her belirlenmiş $y \in [0,1]$ için

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq K_1 |x_1 - x_2|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (2.12)$$

koşulunu sağlarsa, o zaman f fonksiyonu D karesinde x değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlar veya x değişkenine göre $Lip\alpha$ sınıfındandır denir ve bu $f \in Lip_x \alpha$ biçiminde yazılır. Benzer şekilde (x, y_1) ve (x, y_2) D karesinin keyfi noktaları olmak üzere, her belirlenmiş $x \in [0,1]$ için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K_2 |y_1 - y_2|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (2.13)$$

koşulunu sağlarsa, f fonksiyonu y değişkenine $Lip\alpha$ sınıfındandır denir ve bu $f \in Lip_y \alpha$ olarak gösterilir.

Lemma 2.3.3: D karesinde $f \in Lip\alpha$ ise $f \in C(D)$.

İspat: (2.11) formülünden görüldüğü gibi

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow \mu_2} |f(\mu_1) - f(\mu_2)| = 0$$

yazılabilir. Dolayısıyla D karesinde $f \in lip\alpha$ ise, her $\mu_1, \mu_2 \in D$ için

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow \mu_2} f(\mu_1) = f(\mu_2)$$

dır ve f , D karesinde süreklidir.

Benzer şekilde D karesinde $f \in Lip_x \alpha$ veya $f \in Lip_y \alpha$ olduğu durumda f sırasıyla x ve y değişkenlerine göre süreklidir.

Lemma 2.3.4: i) $f \in Lip \alpha \Leftrightarrow \omega(f; \delta) \leq K \delta^\alpha$.

$$ii) f \in Lip_x \alpha \Leftrightarrow \omega^{(1)}(f; \delta) \leq K_1 \delta^\alpha.$$

$$iii) f \in Lip_y \alpha \Leftrightarrow \omega^{(2)}(f; \delta) \leq K_2 \delta^\alpha.$$

$$iv) f \in Lip_x \alpha \cap Lip_y \beta \Rightarrow \omega(f; \delta) \leq K_1 \delta^\alpha + K_2 \delta^\beta.$$

İspat: i) Kabul edelim ki $f \in Lip \alpha$ olsun. Bu durumda (2.11)'den

$$\begin{aligned} \omega(f; \delta) &= \max_{\substack{\rho(\mu_1, \mu_2) \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in D}} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \\ &\leq K \max_{\rho(\mu_1, \mu_2) \leq \delta} \rho^\alpha(\mu_1, \mu_2) \leq K \delta^\alpha \end{aligned} \quad (2.14)$$

dolayısıyla $f \in Lip \alpha$ ise (2.14)'den dolayı

$$\omega(f; \delta) \leq K \delta^\alpha$$

dır.

Şimdi de $\omega(f; \delta) \leq K \delta^\alpha$ eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda (2.6)'dan

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \omega(f; \rho(\mu_1, \mu_2)) \leq K \rho^\alpha(\mu_1, \mu_2)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da $f \in Lip_\alpha$ olduğu görülür.

ii) (2.4) formülünden,

$$\omega^{(1)}(f; \delta) = \max_{0 \leq y \leq 1} \max_{|x_1 - x_2| \leq \delta} |f(x_1, y) - f(x_2, y)|$$

yazılabilir. $f \in Lip_x \alpha$ olduğundan, (2.12)' den

$$\omega^{(1)}(f; \delta) \leq K_1 \delta^\alpha$$

elde edilir.

$\omega^{(1)}(f; \delta) \leq K_1 \delta^\alpha$ olsun. (2.5)'ten,

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq \omega^{(1)}(f; |x_1 - x_2|) \leq K_1 |x_1 - x_2|^\alpha$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan da $f \in Lip_x \alpha$ olduğu görülür.

iii) (ii) deki ispata benzer şekilde $f \in Lip_y \alpha$ iken

$$\omega^{(2)}(f; \delta) \leq K_2 \delta^\alpha$$

ve $\omega^{(2)}(f; \delta) \leq K_2 \delta^\alpha$ olduğunda $f \in Lip_y \alpha$ sonucu gösterilebilir.

iv) $f \in Lip_x \alpha \cap Lip_y \beta$ ($0 < \alpha, \beta \leq 1$) olduğunu kabul edelim. Bu durumda (2.12)

ve (2.13) eşitsizliklerine göre

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq K_1 |x_1 - x_2|^\alpha$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K_2 |y_1 - y_2|^\beta$$

yazabiliriz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| &\leq |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1)| + |f(x_2, y_1) - f(x_2, y_2)| \\ &\leq C_1 |x_1 - x_2|^\alpha + C_2 |y_1 - y_2|^\beta \end{aligned} \quad (2.15)$$

elde edilir.

$\rho(\mu_1, \mu_2) \leq \delta$ iken $|x_1 - x_2| \leq \delta$ ve $|y_1 - y_2| \leq \delta$ olması açıkça görüldüğü için (2.15) eşitsizliğinin her iki tarafından maksimum alarak tam süreklilik modülü için

$$\omega(f; \delta) \leq K_1 \delta^\alpha + K_2 \delta^\beta$$

bulunur.

Sonuç 2.3.5: $f \in C(D)$ olsun. Eğer $\omega^{(1)}(f; \delta) \leq K_1 \delta^\alpha$ ve $\omega^{(2)}(f; \delta) \leq K_2 \delta^\beta$

$(0 < \alpha, \beta \leq 1)$ eşitsizlikleri sağlanıyor ise

$f \in Lip_x^\alpha \cap Lip_y^\beta$ dir.

Bu sonucun ispatı Lemma 2.3.4 ün (ii) ve (iii) şıklarından elde edilir.

3. $C(D)$ UZAYINDA YAKLAŞIM PROBLEMİ VE ÇÖZÜMÜ

3.1 $C([0,1])$ Uzayında Karleson Problemi ve Çözümü

Aşağıdaki problem Karleson tarafından önerilmiş ve Bohman tarafından çözülmüştür [5].

$[0,1]$ aralığının arakesiti boş olan n ardışık parçaya bölündüğünü kabul edelim ve $0 = \alpha_{0,n} < \alpha_{1,n} < \alpha_{2,n} < \dots < \alpha_{k,n} < \dots < \alpha_{n,n} = 1$ parçaların uç noktaları olsun. Ayrıca, $P_{k,n}(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$) bu aralıkta tanımlı sürekli ve negatif olmayan fonksiyonlar olsun. f , $[0,1]$ aralığında verilen sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x) \quad (3.1)$$

toplamını oluşturalım. Burada $0 \leq x \leq 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ dir.

Tanım 3.1.1: Eğer $(L_n(f, x))$ dizisi $n \rightarrow \infty$ iken $f(x)$ fonksiyonuna $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak ise, o zaman $(L_n(f, x))$ dizisi $f(x)$ fonksiyonu için yaklaşım probleminin çözümüdür denir. Düzgün yakınsama

$$L_n(f; x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x) \quad , \quad n \rightarrow \infty$$

olarak gösterilir.

Karleson Problemi (Tek değişkenli): $\alpha_{k,n}$ ve $P_{k,n}(x)$ hangi koşulları sağladığı taktirde $(L_n(f, x))$ dizisi verilen sürekli $f(x)$ fonksiyonu için yaklaşım probleminin çözümüdür?

(3.1) ve (1.1) formüllerinin karşılaştırılması gösteriyor ki

$$\alpha_{k,n} = \frac{k}{n} \quad , \quad P_{k,n}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

özel durumunda $L_n(f;x) = B_n(f;x)$ dır, yani $L_n(f;x)$ Bernstein polinomlarıdır. Bernstein teoremine göre $[0,1]$ aralığında

$$B_n(f;x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad , \quad n \rightarrow \infty$$

olduğu için, bu özel durumda $(B_n(f;x))$ dizisi sürekli $f(x)$ fonksiyonu için Karleson probleminin çözümüdür diyebiliriz.

Genel durumda Karleson probleminin çözümü aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 3.1.2(Bohman): (3.1) formülü ile tanımlanmış $(L_n(f,x))$ dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonu için yaklaşım probleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul bu dizinin

$$f_1(t) = 1 \quad , \quad f_2(t) = t \quad \text{ve} \quad f_3(t) = t^2$$

fonksiyonları için yaklaşım probleminin çözümü olmasıdır.

(3.1) formülünde f fonksiyonu yerine bu üç fonksiyonu yazarsak

$$f_1(\alpha_{k,n}) = 1, \quad f_2(\alpha_{k,n}) = \alpha_{k,n}, \quad f_3(\alpha_{k,n}) = \alpha_{k,n}^2$$

olduğu göz önüne alınmalı ve dolayısıyla Bohman teoremine göre $[0,1]$ aralığında

$$L_n(f;x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x) \quad , \quad n \rightarrow \infty$$

olması için gerek ve yeter koşullar şunlardır:

$$\sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \xrightarrow{\rightarrow} 1 \quad , \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{k=0}^n \alpha_{k,n} P_{k,n}(x) \xrightarrow{\rightarrow} x \quad , \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{k=0}^n \alpha_{k,n}^2 P_{k,n}(x) \xrightarrow{\rightarrow} x^2 \quad , \quad n \rightarrow \infty .$$

3.2 $C(D)$ Uzayında Karleson Problemi ve Çözümü

Şimdi $D = [0,1;0,1]$ olmak üzere $C(D)$ uzayında Karleson problemini ifade edelim. n ve m belirlenmiş doğal sayılar olmak üzere ox - ekseninde $[0,1]$ aralığını yukarıdaki gibi $\alpha_{k,n}$, $k = 0,1,2,...,n$ noktalarıyla

$$0 = \alpha_{0,n} < \alpha_{1,n} < \alpha_{2,n} < \dots < \alpha_{k,n} < \dots < \alpha_{n,n} = 1$$

parçalara bölelim ve ayrıca oy - ekseninde $[0,1]$ aralığını $\beta_{j,m}$, $j = 0,1,2,...,m$

$$0 = \beta_{0,m} < \beta_{1,m} < \beta_{2,m} < \dots < \beta_{j,m} < \dots < \beta_{m,m} = 1$$

parçalarına bölelim.

$P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$, D karesinde sürekli pozitif fonksiyonlar olduğunu kabul edelim. f ,

D karesinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$T_{n,m}(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \quad (3.2)$$

toplamını oluşturalım.

Problem(iki değişkenli Karleson problemi): $\alpha_{k,n}$, $\beta_{j,m}$ sayıları ve $P_{k,j}^{(n,m)}(x, y)$ fonksiyonları

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|T_{n,m}f - f\|_{C(D)} = 0 \quad (3.3)$$

olması için hangi koşulları sağlamalıdır?

Bu problemin çözümü aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 3.2.1(Volkov): (3.2) dizisinin $C(D)$ de olan f fonksiyonu için yaklaşım probleminin çözümü olması için, yani (3.3) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right\|_{C(D)} = 0 \quad (3.4)$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - x \right\|_{C(D)} = 0 \quad (3.5)$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - y \right\|_{C(D)} = 0 \quad (3.6)$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - (x^2 + y^2) \right\|_{C(D)} = 0 \quad (3.7)$$

dır.

İspat: $C(D)$ uzayında olan f fonksiyonu için (3.3)'ün sağlandığını kabul edelim. Bu taktirde

$$f_1(x,y) = 1, f_2(x,y) = x, f_3(x,y) = y, f(x,y) = x^2 + y^2$$

fonksiyonlarından her biri $C(D)$ uzayının elemanı olduğundan (3.3) bu fonksiyonlar için de geçerlidir. Dolayısıyla (3.4) - (3.7) koşulları sağlanır ve bu da bu koşulların gerekli olduğunu ispatlar. Şimdi koşulların yeterli olduğunu ispatlayalım.

Kabul edelim ki $T_{n,m}(f;x,y)$, (3.2) formülü ile tanımlanmış olmak üzere (3.4) - (3.7) koşulları sağlansın ve f , $C(D)$ uzayının elemanı olsun.

f , kapalı D karesinde sürekli olduğundan, D de olan tüm (x,y) noktaları için

$$|f(x,y)| \leq M$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir M sabit sayısı bulunabilir. Bu durumda her $k = 0,1,2,...,n$ ve $j = 0,1,2,...,m$ için $(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})$ noktaları D karesinde olduğundan

$$|f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x,y)| \leq 2M \quad (3.8)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Kısalık için $\mu_{k,j} = (\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})$, $\mu = (x,y)$ gösterimlerini kabul edelim.

Bu durumda yine f nin düzgün sürekliliğinden dolayı her pozitif ε sayısına karşılık sadece ε 'na bağlı bir δ sayısı bulunabilir ve $\rho(\mu_{k,j}, \mu) < \delta$ olduğunda

$$\left| f(\mu_{k,j}) - f(\mu) \right| < \varepsilon \quad (3.9)$$

sağlanır.

$\rho(\mu_{k,j}, \mu) < \delta$ eşitsizliğini sağlayan D karesinin $\mu_{k,j}$ noktalarının dışındaki noktaları $\rho(\mu_{k,j}, \mu) \geq \delta$ eşitsizliğini sağlar. Bu durumda (3.8)'den

$$\left| f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x,y) \right| \leq 2M \frac{\rho^2(\mu_{k,j}, \mu)}{\delta^2} \quad (3.10)$$

eşitsizliği elde edilir.

Dolayısıyla, $\rho(\mu_{k,j}, \mu) < \delta$ olduğunda (3.9), $\rho(\mu_{k,j}, \mu) \geq \delta$ olduğunda ise (3.10) sağlandığından $\forall \mu_{k,j} \in D$ için

$$\left| f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x,y) \right| < \varepsilon + 2M \frac{\rho^2(\mu_{k,j}, \mu)}{\delta^2} \quad (3.11)$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi de aşağıdaki toplamı ele alalım:

$$I_{n,m} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left| f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x, y) \right| P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \quad (3.12)$$

(3.11)'i (3.12)'de kullanırsak ve $P_{k,j}^{(n,m)}(x, y)$ fonksiyonlarının negatif olmadığına dikkat edersek

$$I_{n,m} < \varepsilon \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \rho^2(\mu_{k,j}, \mu) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y)$$

$$I_{n,m} < \varepsilon I'_{n,m} + \frac{2M}{\delta^2} I''_{n,m} \quad (3.13)$$

elde edilir. Burada

$$I'_{n,m} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y)$$

$$I''_{n,m} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \rho^2(\mu_{k,j}, \mu) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y)$$

dır. $I'_{n,m}$ eşitliğini,

$$\varepsilon I'_{n,m} = \varepsilon + \left[\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right] \varepsilon \quad (3.14)$$

biçiminde yazabiliriz. Ayrıca,

$$\rho^2(\mu_{k,j}, \mu) = (\alpha_{k,n} - x)^2 + (\beta_{j,m} - y)^2$$

$$=(\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) - 2\alpha_{k,n}x - 2\beta_{j,m}y + (x^2 + y^2)$$

olduğundan dolayı $I''_{n,m}$ aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \rho^2(\mu_{k,j}, \mu) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \\ &- 2x \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 2y \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) + (x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Buradan da sağ tarafa $2x^2 + 2y^2$ ekleyip çıkarırsak

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \rho^2(\mu_{k,j}, \mu) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) &= \left[\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - (x^2 + y^2) \right] + \\ &+ 2x \left[x - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \right] + 2y \left[y - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \right] \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

Bu eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri ve $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ için $(x, y) \in D$ lere göre maksimumu alınırsa

$$\begin{aligned} I''_{n,m} &\leq \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - (x^2 + y^2) \right\|_{C(D)} + \\ &+ 2 \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - x \right\|_{C(D)} + 2 \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - y \right\|_{C(D)} \quad (3.15) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.14) eşitliği ve (3.15) eşitsizliği, (3.13) eşitsizliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left| f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x, y) \right| P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \right\|_{C(D)} \leq \varepsilon + \varepsilon \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right\|_{C(D)} + \\
 & + \frac{2M}{\delta^2} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - (x^2 + y^2) \right\|_{C(D)} \\
 & + \frac{4M}{\delta^2} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - x \right\|_{C(D)} + \\
 & + \frac{4M}{\delta^2} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - y \right\|_{C(D)}
 \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Her iki tarafta $n, m \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse ve (3.4) – (3.7) formülleri de göz önüne alınırsa

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left| f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x, y) \right| P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \right\|_{C(D)} \leq \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $\varepsilon > 0$ keyfi olduğu için

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left| f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x, y) \right| P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \right\|_{C(D)} = 0 \quad (3.16)$$

sonucunu verir.

Şimdi $(T_{n,m}(f;x,y))$ dizisinin genel terimini tanımlayan (3.2) formülünü ele alalım. Bu formülün her iki tarafından $f(x,y)$ çıkarılırsa

$$\begin{aligned} T_{n,m}(f;x,y) - f(x,y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left[f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x,y) \right] P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) + \\ &+ f(x,y) \left[\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - 1 \right] \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan her iki yanın mutlak değeri alınır ve $P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) \geq 0$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |T_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)| &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m |f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x,y)| P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) + \\ &+ |f(x,y)| \left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - 1 \right| \end{aligned}$$

elde ederiz.

Yukarıda belirtildiği gibi f , tüm D karesinde sürekli olduğundan $|f(x,y)| \leq M$ eşitsizliği sağlanır. Her iki tarafın tüm $(x,y) \in D$ maksimumu alınır

$$\begin{aligned} \|T_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)\|_{C(D)} &\leq \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m |f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x,y)| P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) \right\|_{C(D)} + \\ &+ M \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - 1 \right\|_{C(D)} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$n, m \rightarrow \infty$ iken limite geçilip birinci terim için (3.16), ikinci terim için (3.4) formülleri uygulanırsa

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|T_{n, m} f - f\|_{C(D)} = 0$$

elde edilir ve dolayısıyla (3.3) formülünü ispatlamış oluruz. Bu ise (3.4) – (3.7) koşullarının yeterli koşullar olduğunu gösterir ve teoremin ispatı tamamlanır.



4. $C(D)$ UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ BERNSTEIN POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM

İki değişkenli Bernstein polinomlarının yaklaşım özellikleri L.M.Martinez tarafından incelenmiştir [14].

Bu bölümde iki değişkenli Bernstein polinomlarının iki farklı genelleştirilmesi verilmiş olup, bu polinomların birim karede sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı ve yakınsaklık hızları araştırılacaktır.

4.1. İki Değişkenli Genelleştirilmiş Bernstein Polinomları

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ Binom formülünde $(x,y) \in D = [0,1;0,1]$ olmak üzere,

sırasıyla $a = x$, $b = 1 - x$ ve $a = y$, $b = 1 - y$ alınırsa

$$1^n = (1-x+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

ve

$$1^m = (1-y+y)^m = \sum_{j=0}^m C_m^j y^j (1-y)^{m-j}$$

özdeşliklerinden

$$1 = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m C_n^k C_m^j x^k (1-x)^{n-k} y^j (1-y)^{m-j}$$

eşitliğini yazabiliriz.

$$P_{k,n}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (4.1)$$

gösterimini(notasyonunu) kabul edersek

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) = 1 \quad (4.2)$$

olduğu

$$\sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) = 1, \quad \sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) = 1 \quad (4.3)$$

formüllerinden görülmektedir.

(4.2) eşitliğinden yararlanarak, D karesinde sürekli bir f fonksiyonunun Bernstein polinomlarının bir genelleştirilmesini şu şekilde oluşturalım:
 $0 \leq \alpha_i \leq \beta_i \quad (i=1,2)$ olmak üzere;

$$B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \quad (4.4).$$

Bir değişkenli Bernstein polinomları için bu tür bir genelleştirilmenin Romen matematikçi D.D. Stancu tarafından verildiğini belirtelim[11]. Ayrıca (4.4) formülü ile tanımlı polinomlar için de ters problemler benzer şekilde ispatlanabilir (5.Bölüm'e bakınız).

Teorem 4.1.1: f , D karesinde sürekli bir fonksiyon olduğunda

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i} f - f \right\|_{C(D)} = 0$$

dır.

İspat: (4.4) formülünde tanımlanan $B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y)$ polinomlarını (3.2)

formülüyle tanımlanmış olan $T_{n,m}(f; x, y)$ toplamı ile karşılaştırsak,

$$\alpha_{k,n} = \frac{k + \alpha_1}{n + \beta_1}, \quad \beta_{j,m} = \frac{j + \alpha_2}{m + \beta_2}$$

$$P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) = P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)$$

ise $T_{n,m}(f; x, y) = B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y)$ sonucunu görürüz. Bundan dolayı $\left(B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i} f \right)$ dizisinin $n, m \rightarrow \infty$ iken sürekli f fonksiyonuna $C(D)$ normunda yakınsaması için (3.4) – (3.7) koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir.

Şimdi bunu gösterelim. (4.2)'ye göre

$$\left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x)P_{j,m}(y) - 1 \right\|_{C(D)} = 0$$

olduğu açıktır ve bu da (3.4)'ün sağlandığını göstermektedir.

$\alpha_{k,n} = \frac{k + \alpha_1}{n + \beta_1}$ olmak üzere (3.5)'in sağlandığını gösterelim. (4.1) ve (4.3)'e göre

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{k + \alpha_1}{n + \beta_1} P_{k,n}(x)P_{j,m}(y) = \sum_{k=0}^n \frac{k + \alpha_1}{n + \beta_1} P_{k,n}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n + \beta_1} \sum_{k=0}^n (k + \alpha_1) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n + \beta_1} \left\{ \sum_{k=0}^n k \frac{n}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \alpha_1 \sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \right\} \\
&= \frac{1}{n + \beta_1} \left\{ n \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \alpha_1 \right\} \quad (4.5)
\end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz. Parantez içindeki toplam ifadesini ele alalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

eşitliğinde k yerine k+1 yazalım. Bu durumda,

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^{k+1} (1-x)^{n-1-k}$$

elde edilir. (4.3)'e göre,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^{k+1} (1-x)^{n-1-k} = x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k} = x$$

dır ve buradan

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x \quad (4.6)$$

eşitliği elde edilir. (4.6) eşitliği (4.5)'de yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) = \frac{1}{n+\beta_1} (nx + \alpha_1) = \frac{n}{n+\beta_1} x + \frac{\alpha_1}{n+\beta_1}$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra, eşitliğin iki tarafından x çıkarılır, her iki tarafın mutlak değeri alınır ve $0 \leq x \leq 1$ olduğu kullanılırsa

$$\left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) - x \right\|_{C(D)} \leq \left| \frac{n}{n+\beta_1} - 1 \right| + \frac{\alpha_1}{n+\beta_1}$$

eşitsizliği elde edilir. $n, m \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse (3.5) sağlanır. Benzer işlemler yapılarak

$$\left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) - y \right\|_{C(D)} \leq \left| \frac{m}{m+\beta_2} - 1 \right| + \frac{\alpha_2}{m+\beta_2}$$

olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $n, m \rightarrow \infty$ iken (3.6) da sağlanmaktadır.

Şimdi son olarak (3.7)'nin sağlandığını gösterelim. (4.3)'e göre

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} \right)^2 \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right)^2 P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} \right)^2 P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \\
& = \sum_{k=0}^n \frac{(k+\alpha_1)^2}{(n+\beta_1)^2} P_{k,n}(x) + \sum_{j=0}^m \frac{(j+\alpha_2)^2}{(m+\beta_2)^2} P_{j,m}(y) \quad (4.7)
\end{aligned}$$

dır ve sağ taraftaki toplamlardan birini hesaplamak yeterlidir. Birinci toplamı ele alalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \frac{(k+\alpha_1)^2}{(n+\beta_1)^2} P_{k,n}(x) &= \frac{1}{(n+\beta_1)^2} \sum_{k=0}^n (k+\alpha_1)^2 P_{k,n}(x) \\
&= \frac{1}{(n+\beta_1)^2} \sum_{k=0}^n (k^2 + 2\alpha_1 k + \alpha_1^2) P_{k,n}(x) \\
&= \frac{1}{(n+\beta_1)^2} \left\{ \sum_{k=0}^n k^2 P_{k,n}(x) + 2\alpha_1 \sum_{k=0}^n k P_{k,n}(x) + \alpha_1^2 \sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \right\} \\
&= \frac{1}{(n+\beta_1)^2} \left\{ n^2 \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} P_{k,n}(x) + 2\alpha_1 n \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} P_{k,n}(x) + \alpha_1^2 \right\} \quad (4.8).
\end{aligned}$$

Son eşitliğin sağ tarafındaki parantez içindeki $\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} P_{k,n}(x)$ toplamını ele alalım. Bu eşitlikte k^2 yerine onun eşiti olan $k^2 = k(k-1) + k$ yazılırsa (4.6) eşitliğine göre,

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} P_{k,n}(x) = \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{n^2} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \\
&= \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} x^{k+2} (1-x)^{n-2-k} + \frac{x}{n} \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k} + \frac{x}{n} \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} P_{k,n}(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \quad (4.9)$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.6) ve (4.9) eşitlikleri (4.8)'de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right)^2 P_{k,n}(x) &= \frac{1}{(n+\beta_1)^2} \left\{ n^2 \left(x^2 + \frac{x-x^2}{n} \right) + 2\alpha_1 nx + \alpha_1^2 \right\} \\
&= \frac{1}{(n+\beta_1)^2} \{ (n^2 - n)x^2 + (2\alpha_1 + 1)nx + \alpha_1^2 \}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right)^2 P_{k,n}(x) = \frac{n^2 - n}{(n+\beta_1)^2} x^2 + \frac{(2\alpha_1 + 1)n}{(n+\beta_1)^2} x + \frac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2}$$

eşitliği bulunur. Benzer şekilde

$$\sum_{k=0}^n \frac{(j+\alpha_2)^2}{(m+\beta_2)^2} P_{j,m}(y) = \frac{m^2-m}{(m+\beta_2)^2} y^2 + \frac{(2\alpha_2+1)m}{(m+\beta_2)^2} y + \frac{\alpha_2^2}{(m+\beta_2)^2}$$

eşitliği yazılabilir. Bunlar (4.7)'de kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} \right)^2 \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \\ &= \frac{n^2-n}{(n+\beta_1)^2} x^2 + \frac{m^2-m}{(m+\beta_2)^2} y^2 + \frac{(2\alpha_1+1)n}{(n+\beta_1)^2} x + \frac{(2\alpha_2+1)m}{(m+\beta_2)^2} y + \frac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2} + \frac{\alpha_2^2}{(m+\beta_2)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\frac{(k+\alpha_1)^2}{(n+\beta_1)^2} + \frac{(j+\alpha_2)^2}{(m+\beta_2)^2} \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) - (x^2 + y^2) \\ &= \left(\frac{n^2-n}{(n+\beta_1)^2} - 1 \right) x^2 + \left(\frac{m^2-m}{(m+\beta_2)^2} - 1 \right) y^2 + \frac{(2\alpha_1+1)n}{(n+\beta_1)^2} x + \frac{(2\alpha_2+1)m}{(m+\beta_2)^2} y \\ & \quad + \frac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2} + \frac{\alpha_2^2}{(m+\beta_2)^2} \end{aligned}$$

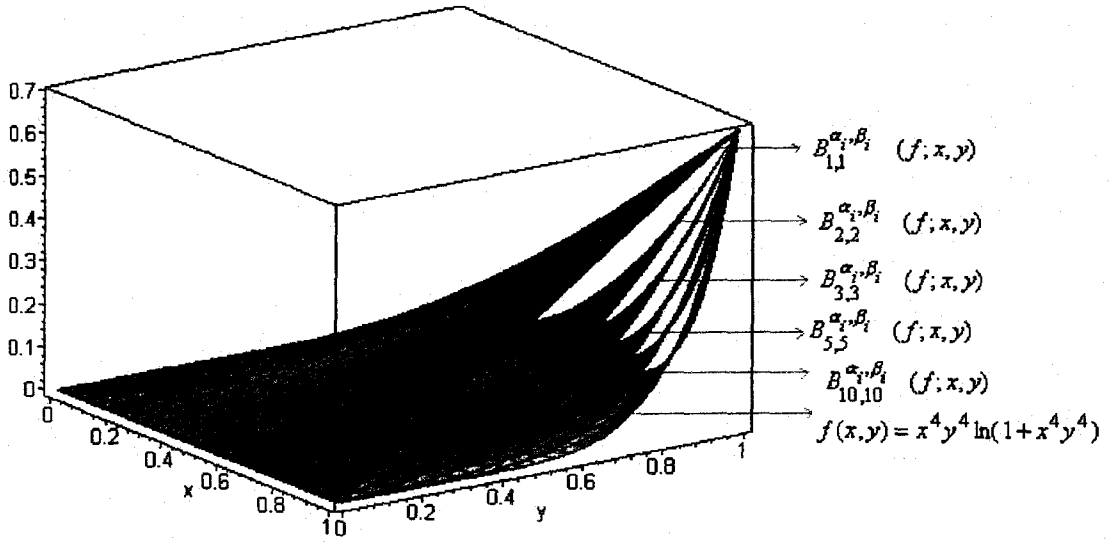
bulunur. Her iki tarafın mutlak değeri ve $(x,y) \in D$ için maksimumu alınırsa

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} \right)^2 \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) - (x^2 + y^2) \right\| \\ & \leq \left| \frac{n^2-n}{(n+\beta_1)^2} - 1 \right| + \left| \frac{m^2-m}{(m+\beta_2)^2} - 1 \right| + \frac{(2\alpha_1+1)n}{(n+\beta_1)^2} + \frac{(2\alpha_2+1)m}{(m+\beta_2)^2} + \frac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2} + \frac{\alpha_2^2}{(m+\beta_2)^2} \end{aligned}$$

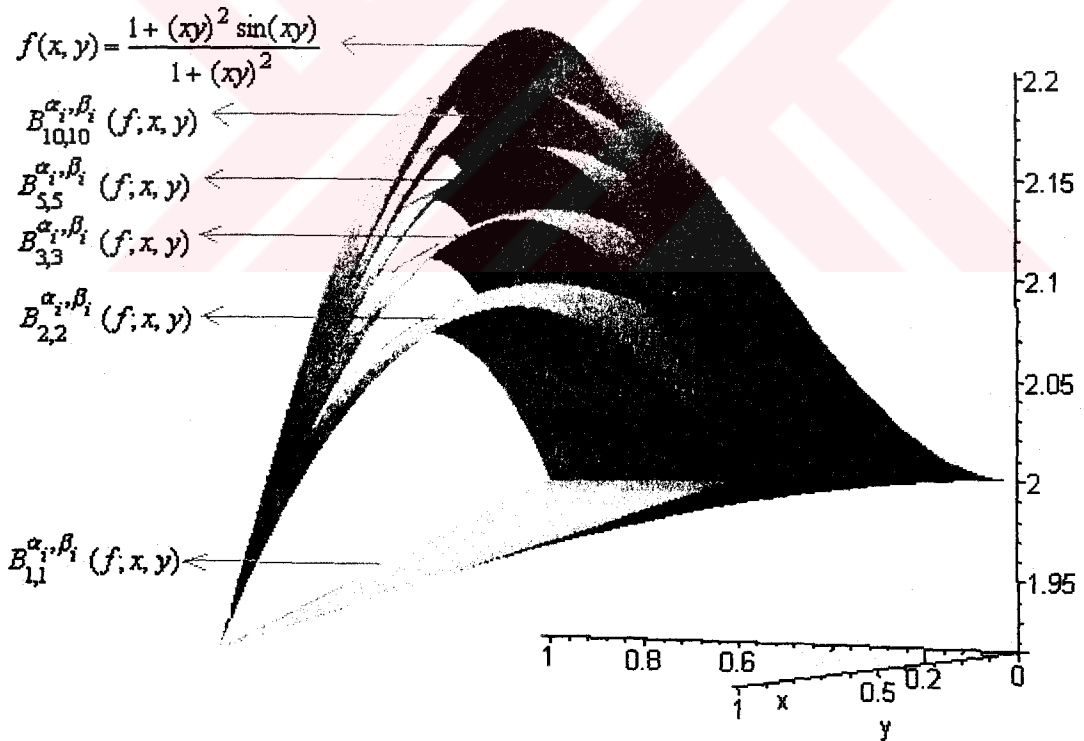
olduğu görülür ve $n,m \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse (3.7) sağlanır. Dolayısıyla

Teorem 3.2.1' in tüm koşulları sağlanmış ve bu teoreme göre

Teorem 4.1.1 ispatlanmış olur.



Şekil 4.1. $f(x, y) = x^4 y^4 \ln(1 + x^4 y^4)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş Bernstein polinomlarının yaklaşımı ($\alpha_i = 1, \beta_i = 2; i = 1, 2$)



Şekil 4.2. $f(x, y) = \frac{1 + (xy)^2 \sin(xy)}{1 + (xy)^2}$ fonksiyonuna genelleştirilmiş Bernstein polinomlarının yaklaşımı ($\alpha_i = 1, \beta_i = 2; i = 1, 2$)

Şimdi de, (b_n) pozitif terimli dizi olmak üzere D karesinde sürekli bir f fonksiyonunun Bernstein polinomlarını

$$B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \quad (4.10).$$

şeklinde oluşturalım.

Teorem 4.1.2: Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b_n} = 1$ koşulu sağlanıyor ise $f \in C(D)$ için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| B_{n,m}^{(b_n)} f - f \right\|_{C(D)} = 0$$

dır.

İspat: $\alpha_{k,n} = \frac{k}{b_n}$, $\beta_{j,m} = \frac{j}{b_m}$ ve $P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) = P_{k,n}(x) P_{j,m}(y)$ olduğunda

$T_{n,m}(f; x, y) = B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y)$ dir. Bu durumda $\left(B_{n,m}^{(b_n)} f \right)$ dizisinin $n, m \rightarrow \infty$ iken sürekli f fonksiyonuna $C(D)$ normunda yakınsaması için (3.4) – (3.7) koşullarının sağlandığını göstermek yeterli olacaktır.

Teorem 4.1.1 de olduğu gibi (4.2)'ye göre

$$\left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) - 1 \right\|_{C(D)} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| B_{n,m}^{(b_n)}(l; x, y) - 1 \right\|_{C(D)} = 0$$

dır. Bu da (3.4)'ün sağlandığını göstermektedir. Şimdi de (3.5)'in sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} B_{n,m}^{(b_n)}(\alpha_{k,n}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{k}{b_n} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{b_n} P_{k,n}(x) \sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{b_n} P_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{b_n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n}{b_n} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

(4.6) eşitliğinden

$$B_{n,m}^{(b_n)}(\alpha_{k,n}; x, y) = \frac{n}{b_n} x$$

dır. Eşitliğin iki tarafından x 'i çıkaralım. Bu durumda

$$B_{n,m}^{(b_n)}(\alpha_{k,n}; x, y) - x = \frac{n}{b_n} x - x = x \left(\frac{n}{b_n} - 1 \right)$$

eşitliğin iki tarafının mutlak değeri alınır ve $0 \leq x \leq 1$ kullanılırsa

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(\alpha_{k,n}; x, y) - x \right| = x \left| \frac{n}{b_n} - 1 \right| \leq \left| \frac{n}{b_n} - 1 \right|$$

eşitsizliği bulunur. $n, m \rightarrow \infty$ için limite geçilirse buradan

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left\| B_{n, m}^{(b_n)}(\alpha_{k, n}; x, y) - x \right\|_{C(D)} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.5) eşitliği sağlanır.

Benzer işlemler yapılarak

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left\| B_{n, m}^{(b_n)}(\beta_{j, m}; x, y) - y \right\|_{C(D)} = 0$$

olduğu gösterilebilir.

Şimdi de (3.7) eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} B_{n, m}^{(b_n)}(\alpha_{k, n}^2 + \beta_{j, m}^2; x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\frac{k^2}{b_n^2} + \frac{j^2}{b_m^2} \right) P_{k, n}(x) P_{j, m}(y) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{k^2}{b_n^2} P_{k, n}(x) P_{j, m}(y) + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{j^2}{b_m^2} P_{k, n}(x) P_{j, m}(y) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{b_n^2} P_{k, n}(x) \sum_{j=0}^m P_{j, m}(y) + \sum_{k=0}^n P_{k, n}(x) \sum_{j=0}^m \frac{j^2}{b_m^2} P_{j, m}(y) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{b_n^2} P_{k, n}(x) + \sum_{j=0}^m \frac{j^2}{b_m^2} P_{j, m}(y) \end{aligned}$$

$$= \frac{n^2}{b_n^2} \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} P_{k,n}(x) + \frac{m^2}{b_m^2} \sum_{j=0}^m \frac{j^2}{m^2} P_{j,m}(y)$$

(4.9) eşitliğinden

$$= \frac{n^2}{b_n^2} \left(x^2 + \frac{x-x^2}{n} \right) + \frac{m^2}{b_m^2} \left(y^2 + \frac{y-y^2}{m} \right)$$

elde edilir. Son eşitliğin iki tarafından $x^2 + y^2$ ifadesini çıkaralım ve her iki tarafın mutlak değerini alalım. O zaman,

$$B_{n,m}^{(b_n)}(\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) - (x^2 + y^2) = \frac{n^2}{b_n^2} \left(x^2 + \frac{x-x^2}{n} \right) + \frac{m^2}{b_m^2} \left(y^2 + \frac{y-y^2}{m} \right) - (x^2 + y^2)$$

$$= x^2 \left(\frac{n^2}{b_n^2} - 1 \right) + \frac{n^2}{b_n^2} \frac{x-x^2}{n} + y^2 \left(\frac{m^2}{b_m^2} - 1 \right) + \frac{m^2}{b_m^2} \frac{y-y^2}{m}$$

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2; x, y) - (x^2 + y^2) \right| = \left| x^2 \left(\frac{n^2}{b_n^2} - 1 \right) + \frac{n^2}{b_n^2} \frac{x-x^2}{n} + y^2 \left(\frac{m^2}{b_m^2} - 1 \right) + \frac{m^2}{b_m^2} \frac{y-y^2}{m} \right|$$

$$\leq \left| x^2 \left(\frac{n^2}{b_n^2} - 1 \right) \right| + \left| \frac{n^2}{b_n^2} \frac{x-x^2}{n} \right| + \left| y^2 \left(\frac{m^2}{b_m^2} - 1 \right) \right| + \left| \frac{m^2}{b_m^2} \frac{y-y^2}{m} \right|$$

$$\leq x^2 \left| \frac{n^2}{b_n^2} - 1 \right| + y^2 \left| \frac{m^2}{b_m^2} - 1 \right| + \left| \frac{n^2}{b_n^2} \frac{x-x^2}{n} \right| + \left| \frac{m^2}{b_m^2} \frac{y-y^2}{m} \right|$$

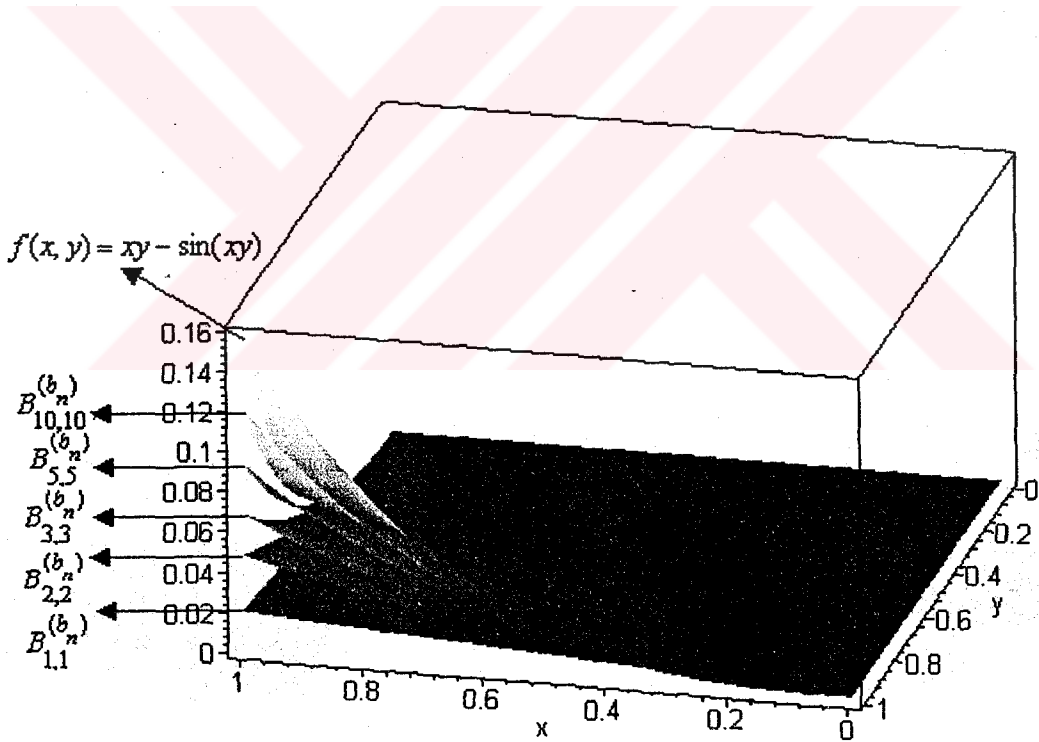
elde ederiz. $0 \leq x, y \leq 1$ olduğundan, bu bize

$$\left\| B_{n,m}^{(b_n)}(\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2; x, y) - (x^2 + y^2) \right\|_{C(D)} \leq \left| \frac{n^2}{b_n^2} - 1 \right| + \left| \frac{m^2}{b_m^2} - 1 \right| + \frac{1}{4n} \frac{n^2}{b_n^2} + \frac{1}{4m} \frac{m^2}{b_m^2}$$

sonucunu verir. $n, m \rightarrow \infty$ için limite geçilirse,

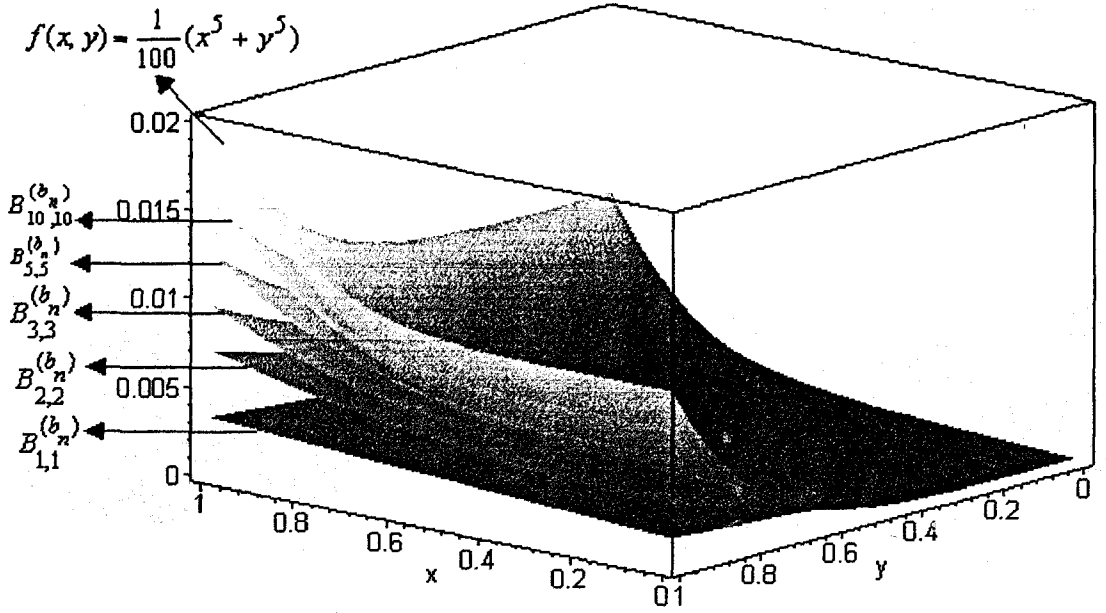
$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| B_{n,m}^{(b_n)}(\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2; x, y) - (x^2 + y^2) \right\|_{C(D)} = 0$$

elde edilir. Yani (3.7) eşitliği de sağlanır. Dolayısıyla Teorem 3.2.1 gereğince ispat tamamlanır.



Şekil 4.3. $f(x, y) = xy - \sin(xy)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş Bernstein

polinomlarının yaklaşımı $(b_n = \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n})$



Şekil 4.4. $f(x, y) = \frac{1}{100}(x^5 + y^5)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş Bernstein polinomlarının yaklaşımı ($b_n = \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n}$)

4.2. Yakınsaklık Hızı

Bu kısımda, (4.4) ve (4.10) formülleri ile tanımlı genelleştirilmiş Bernstein polinomları için yaklaşım hızının, f fonksiyonunun tam ve kısmi süreklilik modülleri ile ilişkileri verilecektir.

Teorem 4.2.1: $f \in C(D)$ olsun. $B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y)$, (4.4) ile tanımlı f fonksiyonunun genelleştirilmiş Bernstein polinomları olmak üzere, her $(x, y) \in D$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$i) \left| B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \frac{3}{2} \left\{ \omega^{(1)}\left(f; \frac{\sqrt{n+4\beta_1^2}}{n+\beta_1}\right) + \omega^{(2)}\left(f; \frac{\sqrt{m+4\beta_2^2}}{m+\beta_2}\right) \right\}$$

$$ii) \left| B_{n,m}^{\alpha_1, \beta_1} (f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \frac{3}{2} \omega(f; \sqrt{\frac{n+4\beta_1^2}{(n+\beta_1)^2} + \frac{m+4\beta_2^2}{(m+\beta_2)^2}}).$$

İspat: i) (4.2)'ye göre $\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) = 1$ olduğundan

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f(x, y) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik (4.4)'ten taraf tarafa çıkarılırsa aşağıdaki eşitlikler yazabilir:

$$\begin{aligned} B_{n,m}^{\alpha_1, \beta_1} (f; x, y) - f(x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \\ &\quad - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f(x, y) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left\{ f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f(x, y) \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left\{ f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, y\right) + f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, y\right) - f(x, y) \right\}$$

eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınır ve sonra üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\left| B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y) - f(x, y) \right| &= \left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \right. \\
&\quad \left. \left\{ f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, y\right) + f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, y\right) - f(x, y) \right\} \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left\{ f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, y\right) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left\{ f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, y\right) - f(x, y) \right\} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left| f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, y\right) \right| \\
&\quad + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left| f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, y\right) - f(x, y) \right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sağ taraftaki toplamaları sırasıyla I_1 ve I_2 ile göstererek

$$\left| B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq I_1 + I_2 \quad (4.11)$$

yazalım.

Şimdi I_1 ifadesini ele alalım.

$$I_1 = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left| f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, y\right) \right|.$$

dır. Buradan (2.7)'ye göre

$$I_1 \leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \omega^{(2)}\left(f; \left| \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right| \right)$$

$$I_1 \leq \sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \omega^{(2)}\left(f; \left| \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right| \right)$$

$$\leq \sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \omega^{(2)}\left(f; \left| \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right| \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Süreklilik modülünün özelliklerine göre keyfi pozitif δ_m dizisi için

$$\omega^{(2)}\left(f; \left| \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right| \right) = \omega^{(2)}\left(f; \frac{\left| \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right|}{\delta_m} \delta_m \right) \leq \left\{ \frac{\left| \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right|}{\delta_m} + 1 \right\} \omega^{(2)}(f; \delta_m)$$

yazılabilir ve buradan

$$I_1 \leq \sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \left\{ \frac{\left| \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right|}{\delta_m} + 1 \right\} \omega^{(2)}(f; \delta_m) = \omega^{(2)}(f; \delta_m) \left\{ \frac{1}{\delta_m} \sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \left| \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right| + 1 \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Parantez içindeki toplam ifadesini ele alalım:

$$\sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \left| \frac{j+\alpha_1}{m+\beta_1} - y \right| = \sum_{j=0}^m \left(P_{j,m}(y) \right)^{1/2} \left(P_{j,m}(y) \right)^{1/2} \left| \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right|$$

biçiminde yazıp, Cauchy - Schwartz eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \left| \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right| &\leq \left(\sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla,

$$I_1 \leq \omega^{(2)}(f; \delta_m) \left\{ \frac{1}{\delta_m} \left(\sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right)^2 \right)^{1/2} + 1 \right\} \quad (4.12)$$

olur. Teorem 4.1.1' in ispatında olduğu gibi

$$\sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right)^2 = \sum_{j=0}^m \frac{(j+\alpha_2)^2}{(m+\beta_2)^2} P_{j,m}(y) - 2y \sum_{j=0}^m \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} P_{j,m}(y) + y^2 \sum_{j=0}^m P_{j,m}(y)$$

$$\sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right)^2 = \frac{(m^2 - m)}{(m+\beta_2)^2} y^2 + \frac{(2\alpha_2 + 1)m}{(m+\beta_2)^2} y + \frac{\alpha_2^2}{(m+\beta_2)^2}$$

$$\begin{aligned}
& -2y \left(\frac{m}{m+\beta_2} y + \frac{\alpha_2}{m+\beta_2} \right) + y^2 \\
& = \frac{(m^2-m)}{(m+\beta_2)^2} y^2 + \frac{(2\alpha_2+1)m}{(m+\beta_2)^2} y + \frac{\alpha_2^2}{(m+\beta_2)^2} - \frac{2m}{m+\beta_2} y^2 - \frac{2\alpha_2}{m+\beta_2} y + y^2 \\
& = \frac{1}{(m+\beta_2)^2} \left\{ (m^2-m)y^2 + (2\alpha_2+1)my + \alpha_2^2 - 2m(m+\beta_2)y^2 \right. \\
& \quad \left. - 2\alpha_2(m+\beta_2)y + (m+\beta_2)^2 y^2 \right\} \\
& = \frac{1}{(m+\beta_2)^2} \left\{ (m^2-m) - 2m^2 - 2m\beta_2 + m^2 + 2m\beta_2 + \beta_2^2 \right\} y^2 \\
& \quad + (2\alpha_2 m + m - 2\alpha_2 m - 2\alpha_2 \beta_2) y + \alpha_2^2 \} \\
& = \frac{1}{(m+\beta_2)^2} \left\{ (\beta_2^2 - m)y^2 + (m - 2\alpha_2 \beta_2)y + \alpha_2^2 \right\} \\
& = \frac{1}{(m+\beta_2)^2} \left\{ \beta_2^2 y^2 - 2\alpha_2 \beta_2 y + \alpha_2^2 + m(y - y^2) \right\} \\
& \sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_1} - y \right)^2 = \frac{1}{(m+\beta_2)^2} \left\{ \beta_2^2 y^2 - 2\alpha_2 \beta_2 y + \alpha_2^2 + m(y - y^2) \right\}^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(m + \beta_2)^2} \{ (\beta_2 y - \alpha_2)^2 + m(y - y^2) \}$$

eşitliği bulunur. $0 \leq y \leq 1$ için $(\beta_2 y - \alpha_2)^2$ ifadesi β_2^2 den , $(y - y^2)$ ifadesi ise $\frac{1}{4}$ ten küçük kalır. Dolayısıyla,

$$\sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \left(\frac{j + \alpha_2}{m + \beta_1} - y \right)^2 \leq \frac{1}{(m + \beta_2)^2} \left\{ \beta_2^2 + \frac{m}{4} \right\} = \frac{m + 4\beta_2^2}{4(m + \beta_2)^2}$$

eşitsizliği (4.12)'de yerine yazılırsa

$$I_1 \leq \omega^{(2)}(f; \delta_m) \left\{ \frac{1}{\delta_m} \left(\frac{m + 4\beta_2^2}{4(m + \beta_2)^2} \right)^{1/2} + 1 \right\} = \omega^{(2)}(f; \delta_m) \left(\frac{1}{\delta_m} \frac{\sqrt{m + 4\beta_2^2}}{2(m + \beta_2)} + 1 \right)$$

$\frac{1}{\delta_m} \frac{\sqrt{m + 4\beta_2^2}}{2(m + \beta_2)}$ ifadesi m den bağımsız olacak şekilde $\delta_m = \frac{\sqrt{m + 4\beta_2^2}}{m + \beta_2}$ seçimi yapıldığı takdirde,

$$I_1 \leq \omega^{(2)}\left(f; \frac{\sqrt{m + 4\beta_2^2}}{m + \beta_2}\right) \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \omega^{(2)}\left(f; \frac{\sqrt{m + 4\beta_2^2}}{m + \beta_2}\right) \quad (4.13)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi de I_2 terimini ele alalım. Tanıma göre

$$I_2 = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left| f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, y\right) - f(x, y) \right|$$

dır ve süreklilik modülünün (2.8) özelliğinden dolayı,

$$I_2 \leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \omega^{(1)}\left(f; \left|\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right|\right)$$

$$= \sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \omega^{(1)}\left(f; \left|\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right|\right) \sum_{j=0}^m P_{j,m}(y)$$

dır. Yani

$$I_2 \leq \sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \omega^{(1)}\left(f; \left|\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right|\right) \quad (4.14)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\omega^{(1)}\left(f; \left|\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right|\right) = \omega^{(1)}\left(f; \frac{\left|\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right|}{\delta_n} \delta_n\right) \leq \left(\frac{\left|\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right|}{\delta_n} + 1 \right) \omega^{(1)}(f; \delta_n)$$

eşitsizliği (4.14)'te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \left\{ \left(\frac{\left| \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right|}{\delta_n} + 1 \right) \omega^{(l)}(f; \delta_n) \right\} \\
&= \omega^{(l)}(f; \delta_n) \left\{ \frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \left| \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right| + 1 \right\} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Parantez içindeki

$$\sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \left| \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right|$$

ifadesi

$$\sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \left| \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right| = \sum_{k=0}^n \left(P_{k,n}(x) \right)^{1/2} \left(P_{k,n}(x) \right)^{1/2} \left| \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right|$$

şeklinde yazılır ve Cauchy - Schwartz eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \left| \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right| &\leq \left(\sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right)^2 P_{k,n}(x) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

buluruz. Bu eşitsizlik (4.15)' de yerine yazılırsa,

$$I_2 \leq \omega^{(1)}(f; \delta_n) \left\{ \frac{1}{\delta_n} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right)^2 P_{k,n}(x) \right)^{1/2} + 1 \right\} \quad (4.16)$$

eşitsizliği bulunur. Yine Teorem 4.1.1 in ispatında olduğu gibi

$$\sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right)^2 = \sum_{k=0}^n \frac{(k+\alpha_1)^2}{(n+\beta_1)^2} P_{k,n}(x) - 2x \sum_{k=0}^n \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} P_{k,n}(x) + x^2 \sum_{k=0}^n P_{k,n}(x)$$

$$= \frac{(n^2 - n)}{(n+\beta_1)^2} x^2 + \frac{(2\alpha_1 + 1)n}{(n+\beta_1)^2} x + \frac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2}$$

$$- 2x \left(\frac{n}{n+\beta_1} x + \frac{\alpha_1}{n+\beta_1} \right) + x^2$$

$$= \frac{(n^2 - n)}{(n+\beta_1)^2} x^2 + \frac{(2\alpha_1 + 1)n}{(n+\beta_1)^2} x + \frac{\alpha_1^2}{(n+\beta_1)^2} - \frac{2n}{n+\beta_1} x^2 - \frac{2\alpha_1}{n+\beta_1} x + x^2$$

$$= \frac{1}{(n+\beta_1)^2} \left\{ (n^2 - n)x^2 + (2\alpha_1 + 1)nx + \alpha_1^2 - 2n(n+\beta_1)x^2 - 2\alpha_1(n+\beta_1)x + (n+\beta_1)^2 x^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{(n+\beta_1)^2} \left\{ (n^2 - n) - 2n^2 - 2n\beta_1 + n^2 + 2n\beta_1 + \beta_1^2 \right\} x^2 + \left\{ 2\alpha_1 n + n - 2\alpha_1 n - 2\alpha_1 \beta_1 \right\} x + \alpha_1^2 \}$$

$$= \frac{1}{(n+\beta_1)^2} \left\{ \beta_1^2 - n \right\} x^2 + (n - 2\alpha_1 \beta_1) x + \alpha_1^2 \left\{ \right.$$

$$= \frac{1}{(n+\beta_1)^2} \left\{ \beta_1^2 x^2 - 2\alpha_1 \beta_1 x + \alpha_1^2 + n(x - x^2) \right\}$$

$$\sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right)^2 = \frac{1}{(n+\beta_1)^2} \left\{ \beta_1^2 x^2 - 2\alpha_1 \beta_1 x + \alpha_1^2 + n(x - x^2) \right\}$$

$$= \frac{1}{(n+\beta_1)^2} \left\{ (\beta_1 x - \alpha_1)^2 + n(x - x^2) \right\}$$

eşitliği bulunur. $0 \leq x \leq 1$ için $(\beta_1 x - \alpha_1)^2$ ifadesi β_1^2 den , $(x - x^2)$ ifadesi $\frac{1}{4}$ ten küçük kalır. Dolayısıyla,

$$\sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right)^2 \leq \frac{1}{(n+\beta_1)^2} \left\{ \beta_1^2 + \frac{n}{4} \right\} = \frac{n+4\beta_1^2}{4(n+\beta_1)^2}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik (4.16)'da yerine yazılırsa

$$I_2 \leq \omega^{(1)}(f; \delta_n) \left\{ \frac{1}{\delta_n} \left(\frac{n+4\beta_1^2}{4(n+\beta_1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right\} = \omega^{(1)}(f; \delta_n) \left\{ \frac{1}{\delta_n} \frac{\sqrt{n+4\beta_1^2}}{2(n+\beta_1)} + 1 \right\}$$

sonucu bulunur. $\frac{1}{\delta_n} \frac{\sqrt{n+4\beta_1^2}}{2(n+\beta_1)}$ ifadesi n den bağımsız olacak şekilde

$$\delta_n = \frac{\sqrt{n+4\beta_1^2}}{n+\beta_1} \text{ seçimi yapılırsa,}$$

$$I_2 \leq \omega^{(1)}\left(f; \frac{\sqrt{n+4\beta_1^2}}{(n+\beta_1)}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2} \omega^{(1)}\left(f; \frac{\sqrt{n+4\beta_1^2}}{n+\beta_1}\right) \quad (4.17)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.13) ve (4.17) (4.11)'de yerine yazılırsa

$$\left| B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \frac{3}{2} \left\{ \omega^{(1)}\left(f; \frac{\sqrt{n+4\beta_1^2}}{n+\beta_1}\right) + \omega^{(2)}\left(f; \frac{\sqrt{m+4\beta_2^2}}{m+\beta_2}\right) \right\}$$

eşitsizliği elde edilir ve Teoremin (i) şıkkı ispatlanmış olur.

ii) i) şıkkının ispatında olduğu gibi

$$B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y) - f(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y)$$

$$- \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f(x, y) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y)$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left\{ f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f(x, y) \right\}$$

eşitliği yazılabilir ve buradan

$$\begin{aligned} \left| B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y) - f(x, y) \right| &= \left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left\{ f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f(x, y) \right\} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \left| f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f(x, y) \right| \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$\delta = \sqrt{\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2}$ seçimi yapılp ω tam süreklilik modülünün özelliği göz önüne alındığı takdirde

$$\left| B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \omega\left(f; \sqrt{\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca,

$$\omega\left(f; \sqrt{\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2}\right) = \omega\left(f; \frac{\sqrt{\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2}}{\delta_{n,m}} \delta_{n,m}\right)$$

$$\leq \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2}}{\delta_{n,m}} + 1 \right) \omega(f; \delta_{n,m})$$

eşitsizliği yerine yazıldığı takdirde

$$\left| B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2}}{\delta_{n,m}} + 1 \right)$$

$$\omega(f; \delta_{n,m}) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y)$$

$$\leq \omega(f; \delta_{n,m}) \left\{ \frac{1}{\delta_{n,m}} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \sqrt{\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \right\}$$

$$\leq \omega(f; \delta_{n,m}) \left\{ \frac{1}{\delta_{n,m}} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \sqrt{\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) + 1 \right\} \quad (4.18)$$

sonucu elde edilir. Parantez içindeki toplamı ele alalım. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \sqrt{\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \sqrt{\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2}$$

$$(P_{k,n}(x) P_{j,m}(y))^{\frac{1}{2}} (P_{k,n}(x) P_{j,m}(y))^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left\{ \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2 \right\} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left\{ \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2 \right\} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlik (4.18)'de yerine yazıldığında

$$\left| B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \omega(f; \delta_{n,m})$$

$$\left\{ \frac{1}{\delta_{n,m}} \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2 \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikteki toplam ifadesini ele alalım:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2 \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \\ &+ \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2 P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right)^2 P_{k,n}(x) + \sum_{j=0}^m \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right)^2 P_{j,m}(y) \quad (4.19)$$

$$\sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right)^2 \leq \frac{n+4\beta_1^2}{4(n+\beta_1)^2}$$

ve

$$\sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right)^2 \leq \frac{m+4\beta_2^2}{4(m+\beta_2)^2}$$

eşitsizlikleri (4.19)'da yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right)^2 \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \leq \frac{n+4\beta_1^2}{4(n+\beta_1)^2} + \frac{m+4\beta_2^2}{4(m+\beta_2)^2}$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla,

$$\left| B_{n,m}^{\alpha_1, \beta_1}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \omega(f; \delta_{n,m}) \left(\frac{1}{\delta_{n,m}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+4\beta_1^2}{(n+\beta_1)^2} + \frac{m+4\beta_2^2}{(m+\beta_2)^2}} + 1 \right)$$

dir ve $\delta_{n,m} = \sqrt{\frac{n+4\beta_1^2}{(n+\beta_1)^2} + \frac{m+4\beta_2^2}{(m+\beta_2)^2}}$ olarak seçilirse,

$$\left| B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \frac{3}{2} \omega(f; \sqrt{\frac{n+4\beta_1^2}{(n+\beta_1)^2} + \frac{m+4\beta_2^2}{(m+\beta_2)^2}})$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 4.2.2: $f(x, y) = x^3 y$ fonksiyonunun, $\beta_1 = 1$ ve $\beta_2 = 2$ olmak üzere, yaklaşım değerleri Çizelge 4.1’de verilmiştir.

Çizelge 4.1. $f(x, y) = x^3 y$ fonksiyonu için hata değerleri ($\beta_1 = 1$ ve $\beta_2 = 2$)

n, m	Tam süreklilik modülü için hata değerleri	Kısmi süreklilik modülü için hata değerleri
10	0,6841818310	1,2515493920
10^2	0,4617814461	0,5304083252
10^3	0,1743489394	0,1820172037
10^4	0,0583907538	0,0591943575
10^5	0,0188102826	0,0188919395
10^6	0,0059835815	0,0059917896
10^7	0,0018957221	0,0018965443
10^8	0,0005998354	0,0005999177
10^9	0,0001897202	0,0001897284
10^{10}	0,0000599983	0,0000599991

Örnek 4.2.3: $f(x, y) = e^x y$ fonksiyonunun, $\beta_1 = 1$ ve $\beta_2 = 2$ olmak üzere, yaklaşım değerleri Çizelge 4.2’de verilmiştir.

Çizelge 4.2. $f(x, y) = e^x y$ fonksiyonu için hata değerleri ($\beta_1 = 1$ ve $\beta_2 = 2$)

n, m	Tam süreklilik modülü için hata değerleri	Kısmi süreklilik modülü için hata değerleri
10	1,8441665280	2,6911481380
10^2	0,7309971190	0,8048596763
10^3	0,2477514630	0,2550851876
10^4	0,0804653760	0,0812058651
10^5	0,0256771890	0,0257515704
10^6	0,0081437010	0,0081511475
10^7	0,0025776718	0,0025784175
10^8	0,0008153730	0,0008154472
10^9	0,0002578665	0,0002578740
10^{10}	0,0000815470	0,0000815478

Sonuç 4.2.4: Eğer f fonksiyonu (2.11) Lipschitz koşulunu sağlarsa, bu takdirde

$$\left| B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq K \left(\frac{n + 4\beta_1^2}{(n + \beta_1)^2} + \frac{m + 4\beta_2^2}{(m + \beta_2)^2} \right)^{\alpha/2}$$

dır.

Bu sonucun ispatı (2.6) eşitsizliğinden elde edilir ($K' = \frac{3}{2} K$).

Sonuç 4.2.5: Eğer $f \in Lip_x \alpha \cap Lip_y \beta$ ise bu takdirde

$$\left| B_{n,m}^{\alpha_i, \beta_i}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq K_1 \left(\frac{n + 4\beta_1^2}{(n + \beta_1)^2} \right)^{\alpha/2} + K_2 \left(\frac{m + 4\beta_2^2}{(m + \beta_2)^2} \right)^{\beta/2}$$

dır.

Bu sonucun ispatı (2.7) ve (2.8) eşitsizliklerinden elde edilir

$$(K_1' = \frac{3}{2}K_1, K_2' = \frac{3}{2}K_2).$$

Teorem 4.2.6: $f \in C(D)$ olsun. $B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y)$, (4.10) formülü ile tanımlı f fonksiyonunun Bernstein polinomları olmak üzere, her $(x, y) \in D$ için,

$$i) \left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq 2\omega\left(f; \left(\frac{n}{b_n} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{n}{b_n^2} + \left(\frac{m}{b_m} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{b_m^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ii)

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq 2 \left\{ \omega^{(1)}\left(f; \left(\frac{n}{b_n} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{n}{b_n^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \omega^{(2)}\left(f; \left(\frac{m}{b_m} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{b_m^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: i) Teorem 4.2.1 in ispatında olduğu gibi

$$B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left\{ f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f(x, y) \right\} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y)$$

eşitliğinden

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right| = \left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left\{ f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f(x, y) \right\} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left| f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f(x, y) \right| P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \\
&\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \omega(f; \sqrt{\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 + \left(\frac{j}{b_m} - y\right)^2}) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \\
&\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \omega(f; \frac{\sqrt{\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 + \left(\frac{j}{b_m} - y\right)^2}}{\delta_{n,m}} \delta_{n,m}) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. $\delta_{n,m}$ sıfıra yakınsayan keyfi bir dizi olmak üzere, süreklilik modülünün özelliklerinden aşağıdaki eşitsizlikler yazılır;

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \omega(f; \delta_{n,m}) \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 + \left(\frac{i}{b_m} - y\right)^2}}{\delta_{n,m}} + 1 \right) P_{k,n}(x) P_{i,m}(y)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \omega(f; \delta_{n,m}) \left\{ \frac{1}{\delta_{n,m}} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\sqrt{\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 + \left(\frac{j}{b_m} - y\right)^2} \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \right\}
\end{aligned}$$

$$\leq \omega(f; \delta_{n,m}) \left\{ \frac{1}{\delta_{n,m}} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\sqrt{\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 + \left(\frac{j}{b_m} - y\right)^2} \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) + 1 \right\} \quad (4.20)$$

son eşitsizlikteki toplam ifadesini ele alalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\sqrt{\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 + \left(\frac{j}{b_m} - y\right)^2} \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\sqrt{\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 + \left(\frac{j}{b_m} - y\right)^2} \right) \\
&\quad \sqrt{P_{k,n}(x) P_{j,m}(y)} \sqrt{P_{k,n}(x) P_{j,m}(y)} \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 + \left(\frac{j}{b_m} - y\right)^2 \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 + \left(\frac{j}{b_m} - y\right)^2 \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliği (4.20)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right| &\leq \omega(f; \delta_{n,m}) \\
&\quad \left\{ \frac{1}{\delta_{n,m}} \sqrt{\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 + \left(\frac{j}{b_m} - y\right)^2 \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) + 1} \right\} \quad (4.21)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Son eşitsizlikteki toplam ifadesini,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 + \left(\frac{j}{b_m} - y\right)^2 \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\frac{j}{b_m} - y\right)^2 P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 P_{k,n}(x) \sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) + \sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \sum_{j=0}^m \left(\frac{j}{b_m} - y\right)^2 P_{j,m}(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 P_{k,n}(x) + \sum_{j=0}^m \left(\frac{j}{b_m} - y\right)^2 P_{j,m}(y) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{b_n^2} P_{k,n}(x) - 2x \sum_{k=0}^n \frac{k}{b_n} P_{k,n}(x) + x^2 \sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \\
&\quad + \sum_{j=0}^m \frac{j^2}{b_m^2} P_{j,m}(y) - 2y \sum_{j=0}^m \frac{j}{b_m} P_{j,m}(y) + y^2 \sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \\
&= \frac{n^2}{b_n^2} \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} P_{k,n}(x) - 2x \frac{n}{b_n} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} P_{k,n}(x) + x^2 \sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \\
&\quad + \frac{m^2}{b_m^2} \sum_{j=0}^m \frac{j^2}{m^2} P_{j,m}(y) - 2y \frac{m}{b_m} \sum_{j=0}^m \frac{j}{m} P_{j,m}(y) + y^2 \sum_{j=0}^m P_{j,m}(y)
\end{aligned}$$

(4.6) ve (4.9) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^2}{b_n^2} \left(x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \right) - 2x^2 \frac{n}{b_n} + x^2 + \frac{m^2}{b_m^2} \left(y^2 + \frac{y(1-y)}{m} \right) - 2y^2 \frac{m}{b_m} + y^2 \\
&= \frac{n^2}{b_n^2} x^2 + \frac{n^2}{b_n^2} \frac{x(1-x)}{n} - 2x^2 \frac{n}{b_n} + x^2 + \frac{m^2}{b_m^2} y^2 + \frac{m^2}{b_m^2} \frac{y(1-y)}{m} - 2y^2 \frac{m}{b_m} + y^2 \\
&= \frac{n^2}{b_n^2} x^2 - 2x^2 \frac{n}{b_n} + x^2 + \frac{n^2}{b_n^2} \frac{x(1-x)}{n} + \frac{m^2}{b_m^2} y^2 - 2y^2 \frac{m}{b_m} + y^2 + \frac{m^2}{b_m^2} \frac{y(1-y)}{m} \\
&= \left(\frac{n^2}{b_n^2} - 2 \frac{n}{b_n} + 1 \right) x^2 + \frac{n^2}{b_n^2} \frac{x(1-x)}{n} + \left(\frac{m^2}{b_m^2} - 2 \frac{m}{b_m} + 1 \right) y^2 + \frac{m^2}{b_m^2} \frac{y(1-y)}{m}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{n}{b_n} - 1\right)^2 x^2 + \frac{n^2}{b_n^2} \frac{x(1-x)}{n} + \left(\frac{m}{b_m} - 1\right)^2 y^2 + \frac{m^2}{b_m^2} \frac{y(1-y)}{m}$$

$0 \leq x, y \leq 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\leq \left(\frac{n}{b_n} - 1\right)^2 + \frac{1}{4n} \frac{n^2}{b_n^2} + \left(\frac{m}{b_m} - 1\right)^2 + \frac{1}{4m} \frac{m^2}{b_m^2}$$

$$\leq \left(\frac{n}{b_n} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{n}{b_n^2} + \left(\frac{m}{b_m} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{b_m^2}$$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m \left(\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 + \left(\frac{i}{b_m} - y\right)^2 \right) P_{k,n}(x) P_{i,m}(y) \leq \left(\frac{n}{b_n} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{n}{b_n^2} + \left(\frac{m}{b_m} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{b_m^2}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik (4.21) de yerine yazılırsa

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \omega(f; \delta_{n,m}) \left\{ \frac{1}{\delta_{n,m}} \left(\left(\frac{n}{b_n} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{n}{b_n^2} + \left(\frac{m}{b_m} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{b_m^2} \right)^{1/2} + 1 \right\}$$

$$\text{eşitsizliği bulunur. } \delta_{m,m} = \left(\left(\frac{n}{b_n} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{n}{b_n^2} + \left(\frac{m}{b_m} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{b_m^2} \right)^{1/2} \text{ olacak}$$

şekilde seçilirse

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq 2\omega(f; \left(\left(\frac{n}{b_n} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{n}{b_n^2} + \left(\frac{m}{b_m} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{b_m^2} \right)^{1/2})$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) i) şıkkının ispatında olduğu gibi

$$B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left\{ f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f(x, y) \right\} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y)$$

eşitliğinden

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left\{ f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, y\right) + f\left(\frac{k}{b_n}, y\right) - f(x, y) \right\} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y)$$

eşitliği yazılabilir. Eşitliğin iki tarafının mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right| &= \left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left\{ f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, y\right) + f\left(\frac{k}{b_n}, y\right) - f(x, y) \right\} P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left| f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, y\right) \right| P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left| f\left(\frac{k}{b_n}, y\right) - f(x, y) \right| P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \end{aligned}$$

(2.7) ve (2.8) eşitsizliklerinden

$$\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \omega^{(2)}\left(f; \left| \frac{j}{b_m} - y \right| \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \omega^{(1)}\left(f; \left| \frac{k}{b_n} - x \right| \right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y)$$

eşitsizliği yazılır. (4.3)'den

$$\leq \sum_{j=0}^m \omega^{(2)}\left(f; \left| \frac{j}{b_m} - y \right| \right) P_{j,m}(y) + \sum_{k=0}^n \omega^{(1)}\left(f; \left| \frac{k}{b_n} - x \right| \right) P_{k,n}(x)$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki toplam ifadelerine sırasıyla I_1 ve I_2 diyelim ve bu toplamlardan birini hesaplamak yeterli olacaktır. Yani;

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq I_1 + I_2 \quad (4.22)$$

şeklinde ifade edilsin. Şimdi I_1 ifadesini ele alalım

$$I_1 = \sum_{j=0}^m \omega^{(2)}\left(f; \left| \frac{j}{b_m} - y \right| \right) P_{j,m}(y) = \sum_{j=0}^m \omega^{(2)}\left(f; \frac{\left| \frac{j}{b_m} - y \right|}{\delta_m} \delta_m \right) P_{j,m}(y)$$

süreklilik modülünün özelliğinden

$$\leq \omega^{(2)}\left(f; \delta_m\right) \sum_{j=0}^m \left(\frac{\left| \frac{j}{b_m} - y \right|}{\delta_m} + 1 \right) P_{j,m}(y)$$

$$\leq \omega^{(2)}\left(f; \delta_m\right) \left\{ \frac{1}{\delta_m} \sum_{j=0}^m \left| \frac{j}{b_m} - y \right| P_{j,m}(y) + 1 \right\} \quad (4.23)$$

(4.23) eşitsizliğindeki toplam ifadesini

$$\sum_{j=0}^m \left| \frac{j}{b_m} - y \right| P_{j,m}(y) = \sum_{j=0}^m \left| \frac{j}{b_m} - y \right| \sqrt{P_{j,m}(y)} \sqrt{P_{j,m}(y)}$$

şeklinde ifade edip Cauchy- Schwartz eşitsizliği uygulandığında

$$\leq \left(\sum_{j=0}^m \left(\frac{j}{b_m} - y \right)^2 P_{j,m}(y) \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=0}^m \frac{j^2}{b_m^2} P_{j,m}(y) - 2y \sum_{j=0}^m \frac{j}{b_m} P_{j,m}(y) + y^2 \sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\frac{m^2}{b_m^2} \sum_{j=0}^m \frac{j^2}{m^2} P_{j,m}(y) - 2y \frac{m}{b_m} \sum_{j=0}^m \frac{j}{m} P_{j,m}(y) + y^2 \sum_{j=0}^m P_{j,m}(y) \right)^{1/2}$$

(4.6) ve (4.9) eşitliklerinden

$$\leq \left(\frac{m^2}{b_m^2} \left(y^2 + \frac{y-y^2}{m} \right) - 2y^2 \frac{m}{b_m} + y^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{m^2}{b_m^2} y^2 + \frac{m^2}{b_m^2} \frac{y-y^2}{m} - 2y^2 \frac{m}{b_m} + y^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\left(\frac{m}{b_m} - 1 \right)^2 y^2 - \frac{m^2}{b_m^2} \frac{y-y^2}{m} \right)^{1/2}$$

$$\sum_{i=0}^m \left| \frac{i}{b_m} - y \right| P_{i,m}(y) \leq \left(\left(\frac{m}{b_m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{b_m^2} \right)^{1/2} \quad (4.24)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.24) eşitsizliği (4.23) de yerine yazıldığında

$$I_1 \leq \omega^{(2)}(f; \delta_m) \left\{ \frac{1}{\delta_m} \left(\left(\frac{m}{b_m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{b_m^2} \right)^{1/2} + 1 \right\}$$

$$\text{ve } \delta_m = \left(\left(\frac{m}{b_m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{b_m^2} \right)^{1/2} \text{ olacak şekilde seçilirse;}$$

$$I_1 \leq 2\omega^{(2)}(f; \left(\left(\frac{m}{b_m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{b_m^2} \right)^{1/2}) \quad (4.25)$$

eşitsizliği elde edilir. Aynı işlemler yapılarak

$$I_2 \leq 2\omega^{(1)}\left(f; \left(\left(\frac{n}{b_n} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{n}{b_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad (4.26)$$

olduğu gösterilebilir. (4.25) ve (4.26) eşitsizlikleri (4.22) de yerine yazıldığında son olarak

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq 2 \left\{ \omega^{(1)}\left(f; \left(\left(\frac{n}{b_n} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{n}{b_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + \omega^{(2)}\left(f; \left(\left(\frac{m}{b_m} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{b_m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 4.2.7: $f(x, y) = x^3 y$ fonksiyonunun, $b_n = \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n}$ olmak üzere, yaklaşım değerleri Çizelge 4.3' de verilmiştir.

Çizelge 4.3. $f(x, y) = x^3 y$ fonksiyonu için hata değerleri

n, m	Tam süreklilik modülü için hata değerleri	Kısmi süreklilik modülü için hata değerleri
10	0,7978721570	1,0110291170
10^2	0,3478487876	0,3732558041
10^3	0,1210925000	0,1237702394
10^4	0,0394542241	0,0397264252
10^5	0,0125943449	0,0126217060
10^6	0,0039945174	0,0039972580
10^7	0,0012643626	0,0012646368
10^8	0,0003999451	0,0003999725
10^9	0,0001264856	0,0001264883
10^{10}	0,0000399994	0,0000399997

Örnek 4.2.8: $f(x, y) = e^x y$ fonksiyonunun, $b_n = \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n}$ olmak üzere, yaklaşım değerleri Çizelge 4.4' de verilmiştir.

Çizelge 4.4. $f(x, y) = e^x y$ fonksiyonu için hata değerleri

n, m	Tam süreklilik modülü İçin hata değerleri	Kısmi süreklilik modülü için hata değerleri
10	1,3813069320	1,6015620180
10^2	0,5075918868	0,5315270044
10^3	0,1682307902	0,1706864756
10^4	0,0539941210	0,0542416945
10^5	0,0171546839	0,0171795059
10^6	0,0054328369	0,0054353218
10^7	0,0017188178	0,0017190661
10^8	0,0005436185	0,0005436425
10^9	0,0001719190	0,0001719216
10^{10}	0,0000543647	0,0000543654

Sonuç 4.2.9: Eğer f fonksiyonu (2.11) Lipschitz koşulunu sağlarsa, o zaman

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq K' \left(\left(\frac{n}{b_n} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{n}{b_n^2} + \left(\frac{m}{b_m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{b_m^2} \right)^{\alpha/2}$$

($K' = 2K$) dir.

Sonuç 4.2.10: Eğer $f \in Lip_x \alpha \cap Lip_y \beta$ ise bu taktirde

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq K_1' \left(\left(\frac{n}{b_n} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{n}{b_n^2} \right)^{\alpha/2} + K_2' \left(\left(\frac{m}{b_m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{b_m^2} \right)^{\beta/2},$$

$$\text{dir } (K_1' = 2K_1, K_2' = 2K_2).$$

5. İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ BERNSTEIN POLİNOMLARI İÇİN TERS TEOREMLER

Bu kesimde (b_n) pozitif terimli dizi olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b_n} = 1$ koşulu altında,

$$B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \quad (5.1)$$

biçiminde ele alınan iki değişkenli genelleştirilmiş Bernstein polinomu için bazı ters teoremler ispat edilecektir.

Teorem 5.1: $f \in C(D)$ olsun. M bir pozitif sayı ve

$$\delta_{n,m} = \frac{1}{nm} \text{ olmak üzere}$$

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq M(\delta_{n,m})^\alpha \quad ; \quad 0 < \alpha < 1$$

koşulu sağlanıyor ise $f \in \text{lip } \alpha$ dır.

İspat: (5.1) denkleminin x ' e göre kısmi türevi alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) P_{k,n}(x) P_{j,m}(y) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} P_{j,m}(y) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \frac{n!}{k!(n-k)!} \left\{ kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1} \right\} P_{j,m}(y) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \frac{kn!}{k!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k} P_{j,m}(y) \\
&\quad - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \frac{(n-k)n!}{k!(n-k)!} x^k(1-x)^{n-k-1} P_{j,m}(y)
\end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k} P_{j,m}(y) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \frac{n!}{k!(n-k-1)!} x^k(1-x)^{n-k-1} P_{j,m}(y)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Son eşitlikteki ilk toplam ifadesinde k yerine $k+1$ yazalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \frac{n(n-1)!}{k!(n-k-1)!} x^k(1-x)^{n-k-1} P_{j,m}(y) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \frac{n(n-1)!}{k!(n-k-1)!} x^k(1-x)^{n-k-1} P_{j,m}(y)
\end{aligned}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right\} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} x^k(1-x)^{n-k-1} P_{j,m}(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) = n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right\} P_{k,n-1}(x) P_{j,m}(y) \quad (5.2)$$

eşitliği elde edilir. (5.2) denklemini y değişkenine göre kısmi türevi alınırsa şu eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right\} P_{k,n-1}(x) P_{j,m}(y) \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left[n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right\} \frac{m!}{j!(m-j)!} y^j (1-y)^{m-j} P_{k,n-1}(x) \right] \\
 &= n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right\} \frac{m!}{j!(m-j)!} j y^{j-1} (1-y)^{m-j} P_{k,n-1}(x) \\
 &\quad - n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right\} \frac{m!}{j!(m-j)!} (m-j) y^j (1-y)^{m-j-1} P_{k,n-1}(x) \\
 &= n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right\} \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!} y^{j-1} (1-y)^{m-j} P_{k,n-1}(x) \\
 &\quad - n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right\} \frac{m!}{j!(m-j-1)!} y^j (1-y)^{m-j-1} P_{k,n-1}(x)
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikteki ilk toplam ifadesinde j yerine $j+1$ yazıldığında,

$$\begin{aligned}
 &= n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j+1}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j+1}{b_m}\right) \right\} \frac{m(m-1)!}{j!(m-j-1)!} y^j (1-y)^{m-j-1} P_{k,n-1}(x) \\
 &\quad - n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right\} \frac{m(m-1)!}{j!(m-j-1)!} y^j (1-y)^{m-j-1} P_{k,n-1}(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= nm \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j+1}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j+1}{b_m}\right) \right\} \frac{(m-1)!}{j!(m-j-1)!} y^j (1-y)^{m-j-1} P_{k,n-1}(x) \\
&\quad - nm \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right\} \frac{(m-1)!}{j!(m-j-1)!} y^j (1-y)^{m-j-1} P_{k,n-1}(x) \\
&= nm \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j+1}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j+1}{b_m}\right) \right\} P_{j,m-1}(y) P_{k,n-1}(x) \\
&\quad - nm \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right\} P_{j,m-1}(y) P_{k,n-1}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B_{n,m}(f; x, y) &= nm \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j+1}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right. \\
&\quad \left. + f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j+1}{b_m}\right) \right\} P_{k,n-1}(x) P_{j,m-1}(y)
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) \right| &\leq nm \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left| f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j+1}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right| P_{k,n-1}(x) P_{j,m-1}(y) \\
&\quad - nm \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left| f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j+1}{b_m}\right) \right| P_{k,n-1}(x) P_{j,m-1}(y)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.6) eşitsizliğinden

$$\leq 2nm \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \omega(f; \sqrt{\frac{1}{b_n^2} + \frac{1}{b_m^2}}) P_{k,n-1}(x) P_{j,m-1}(y)$$

eşitsizliği elde edilir. Süreklilik modülünün (5) özelliği kullanılırsa,

$$\leq 2nm\omega(f;\delta) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{1}{b_n^2} + \frac{1}{b_m^2}}\right) P_{k,n-1}(x) P_{j,m-1}(y)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) \right| &\leq 2nm\omega(f;\delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{1}{b_n^2} + \frac{1}{b_m^2}} \right\} \\ &\leq 2\omega(f;\delta) \left\{ nm + \frac{1}{\delta} \sqrt{m^2 \frac{n^2}{b_n^2} + n^2 \frac{m^2}{b_m^2}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. $0 \leq x_1, x_2, y_1, y_2 \leq 1$ olmak üzere eşitsizliğin iki tarafının integrali alındığında şu eşitsizlikler yazılabilir:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) \right| dx dy \leq 2\omega(f;\delta) \left\{ nm + \frac{1}{\delta} \left(m^2 \frac{n^2}{b_n^2} + n^2 \frac{m^2}{b_m^2} \right)^{1/2} \right\} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} dx dy$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) dx dy \right| \leq 2\omega(f;\delta) |x_1 - x_2| |y_1 - y_2| \left\{ nm + \frac{1}{\delta} \left(m^2 \frac{n^2}{b_n^2} + n^2 \frac{m^2}{b_m^2} \right)^{1/2} \right\}$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) dx dy \right| \leq \omega(f;\delta) \left\{ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right\}$$

$$\left\{ nm + \frac{1}{\delta} \left(m^2 \frac{n^2}{b_n^2} + n^2 \frac{m^2}{b_m^2} \right)^{1/2} \right\} \quad (5.3).$$

$$(5.3) \text{ eşitsizliğinde } C = \left(m^2 \frac{n^2}{b_n^2} + n^2 \frac{m^2}{b_m^2} \right)^{1/2} \text{ ve } \delta_{n,m} = \frac{1}{nm}$$

olarak alalım. Bu durumda,

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) dx dy \right| \leq \omega(f; \delta) \left\{ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right\} \left\{ \frac{1}{\delta_{n,m}} + \frac{C}{\delta} \right\} \quad (5.4)$$

$n, m \rightarrow \infty$ için $\delta_{n,m} \rightarrow 0$ dır. $n, m = 2, 3, \dots$ için $\delta_{n-1, m-1} \leq 4\delta_{n,m}$ eşitsizliği yazılabilir. $0 < \delta \leq 1$ için öyle n, m sayıları vardır öyle ki

$$\delta_{n,m} \leq \delta \leq \delta_{n-1, m-1} \leq 4\delta_{n,m} \text{ dır.} \quad (5.5)$$

(5.5) eşitsizliği (5.4) eşitsizliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) dx dy \right| &\leq \omega(f; \delta) \left\{ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right\} \left\{ \frac{4}{\delta} + \frac{C}{\delta} \right\} \\ &\leq (C+4)\omega(f; \delta) \left\{ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right\} \frac{1}{\delta} \end{aligned} \quad (5.6)$$

eşitsizliği elde edilir. Öte yandan her belirli n ve m için

$$\begin{aligned} \left| f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \right| &\leq \left| f(x_1, y_1) - B_{n,m}^{(b_n)}(f; x_1, y_1) \right| + \left| f(x_2, y_2) - B_{n,m}^{(b_n)}(f; x_2, y_2) \right| \\ &\quad + \left| \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) dx dy \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Hipotezden

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq M(\delta_{n,m})^\alpha$$

olduğundan

$$\left| f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \right| \leq 2M(\delta_{n,m})^\alpha + \left| \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) dx dy \right|$$

dır. Bu son eşitsizlikte (5.5) ve (5.6) eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\left| f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \right| \leq 2M\delta^\alpha + (C+4)\omega(f; \delta) \left\{ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right\}^{\frac{1}{\delta}}$$

$$\left| f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \right| \leq M' \left(\delta^\alpha + \omega(f; \delta) \left\{ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right\}^{\frac{1}{\delta}} \right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $M' = \max\{2M, C+4\}$ dır. Buradan,

$$\max_{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq h} \left| f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \right| \leq M' \left(\delta^\alpha + \omega(f; \delta) \left\{ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right\}^{\frac{1}{\delta}} \right)$$

eşitsizliği bulunur ve süreklilik modülünün tanımına göre

$$\omega(f; h) \leq M' \left(\delta^\alpha + \frac{h}{\delta} \omega(f; \delta) \right) \quad ; \quad (0 < h, \delta \leq 1)$$

eşitsizliği yazılabilir. Lemma 2.2.3' den,

$$\omega(f; h) \leq M'' h^\alpha \quad (0 < h \leq 1)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $f \in \text{lip}\alpha$ olduğunu verir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 5.2: $f \in C(D)$ olsun. M bir pozitif sayı ve $n = m$ olmak üzere

$$\left| B_{n,n}^{(b_n)}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq M \left(\frac{1}{n} \right)^{2\alpha} \quad ; \quad 0 < \alpha < 1$$

koşulu sağlanıyor ise $f \in \text{lip}\alpha$ dır.

Örnek 5.3: $f(x, y) = xy$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $b_n = n$ ve $n = m$ olmak üzere,

$$B_{n,n}(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{k}{n} \frac{j}{n} P_{k,n}(x) P_{j,n}(y) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} P_{k,n}(x) \sum_{j=0}^n \frac{j}{n} P_{j,n}(y) = xy$$

$$\left| B_{n,n}(f; x, y) - xy \right| = 0 < \left(\frac{1}{n} \right)^{2\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç 5.2' den dolayı

$$f(x, y) = xy \in \text{Lip}\alpha \quad (0 < \alpha < 1).$$

Örnek 5.4: $f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $b_n = n$ ve $n = m$ olmak üzere,

$$B_{n,n}(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{j^2}{n^2} \right) P_{k,n}(x) P_{j,n}(y) = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} P_{k,n}(x) + \sum_{j=0}^n \frac{j^2}{n^2} P_{j,n}(y)$$

$$B_{n,n}(f; x, y) = x^2 + \frac{x-x^2}{n} + y^2 + \frac{y-y^2}{n} = x^2 + y^2 + \frac{x-x^2}{n} + \frac{y-y^2}{n}$$

$$\left| B_{n,n}(f; x, y) - (x^2 + y^2) \right| = \left| \frac{x-x^2}{n} + \frac{y-y^2}{n} \right| < \frac{1}{2} \frac{1}{n}$$

$n^{2\alpha} \leq n$ ($0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$) olduğundan $\frac{1}{n} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{2\alpha}$ eşitsizliği yazılabilir.

Dolayısıyla,

$$\left| B_{n,n}(f; x, y) - (x^2 + y^2) \right| = \frac{1}{2} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^{2\alpha} \quad (0 < \alpha \leq \frac{1}{2})$$

eşitsizliği elde edilir. *Sonuç 5.2'* den dolayı

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \in Lip_{\alpha} \quad (0 < \alpha \leq \frac{1}{2}).$$

Teorem 5.5: $f \in C(D)$ ve C_1, C_2 iki pozitif sayı olsun. $\delta_n = \frac{1}{n}$ ve $\delta_m = \frac{1}{m}$

olmak üzere,

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x_1, y) - f(x_1, y) \right| \leq C_1 (\delta_n)^{\alpha} \quad ; \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y_1) - f(x, y_1) \right| \leq C_2 (\delta_m)^{\beta} \quad ; \quad 0 < \beta < 1$$

ise $f \in Lip_x \alpha \cap Lip_y \beta$ dir.

İspat: (5.2) den

$$\frac{\partial}{\partial x} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) = n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \left\{ f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right\} P_{k,n-1}(x) P_{j,m}(y)$$

yazılabilir. Dolayısıyla eşitliğin iki tarafının mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği kullanıldığında

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) \right| \leq n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \left| f\left(\frac{k+1}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right| P_{k,n-1}(x) P_{j,m}(y)$$

eşitsizliği bulunur. (2.7) eşitsizliği ve (4.2) eşitliğinden

$$\leq n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \omega^{(1)}\left(f; \frac{1}{b_n}\right) P_{k,n-1}(x) P_{j,m}(y)$$

$$\leq n \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(1)}\left(f; \frac{1}{b_n}\right) P_{k,n-1}(x)$$

$$\leq n \omega^{(1)}(f; \delta) \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{\delta} \frac{1}{b_n} P_{k,n-1}(x)\right)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) \right| \leq n \omega^{(1)}(f; \delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \frac{1}{b_n} \right\} = \omega^{(1)}(f; \delta) \left\{ n + \frac{1}{\delta} \frac{n}{b_n} \right\}$$

eşitsizliği bulunur. $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ olmak üzere eşitsizliğin iki tarafının integrali alındığında

$$\int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{\partial}{\partial x} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) \right| dx \leq \omega^{(1)}(f; \delta) \left\{ n + \frac{1}{\delta} \frac{n}{b_n} \right\} \int_{x_1}^{x_2} dx$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) dx \right| \leq \omega^{(1)}(f; \delta) |x_1 - x_2| \left\{ n + \frac{1}{\delta} \frac{n}{b_n} \right\} \quad (5.7)$$

eşitsizliği elde edilir. (5.7) eşitsizliğinde $A_1 = \frac{n}{b_n}$ ve $\delta_n = \frac{1}{n}$ olsun. Bu durumda

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) dx \right| \leq \omega^{(1)}(f; \delta) |x_1 - x_2| \left\{ \frac{1}{\delta_n} + \frac{A_1}{\delta} \right\} \quad (5.8)$$

yazılır. $n \rightarrow \infty$ için $\delta_n \rightarrow 0$ dır. $n=2,3,\dots$ için $\delta_{n-1} \leq 2\delta_n$

$0 < \delta \leq 1$ için öyle n sayısı vardır öyle ki $\delta_n \leq \delta \leq \delta_{n-1} \leq 2\delta_n$ (5.9)

dır. (5.8) eşitsizliğinde (5.9) eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) dx \right| &\leq \omega^{(1)}(f; \delta) |x_1 - x_2| \left\{ \frac{2}{\delta} + \frac{A_1}{\delta} \right\} \\ &\leq (A_1 + 2) \omega^{(1)}(f; \delta) |x_1 - x_2| \frac{1}{\delta} \end{aligned} \quad (5.10)$$

elde edilir. Her belirli n ve m doğal sayıları için

$$\begin{aligned} |f(x_1, y) - f(x_2, y)| &\leq \left| f(x_1, y) - B_{n,m}^{(b_n)}(f; x_1, y) \right| + \left| f(x_2, y) - B_{n,m}^{(b_n)}(f; x_2, y) \right| \\ &\quad + \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) dx \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Hipotezden

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x_1, y) - f(x_1, y) \right| \leq C_1 (\delta_n)^\alpha$$

olduğu ve (5.9) ve (5.10) eşitsizlikleri göz önüne alındığında

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq 2C_1 \delta^\alpha + (A_1 + 2)\omega^{(1)}(f; \delta) |x_1 - x_2| \frac{1}{\delta}$$

eşitsizliği yazılır. $C'_1 = \max\{2C_1, A_1 + 2\}$ olsun. Bu durumda,

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq C'_1 \left(\delta^\alpha + \omega^{(1)}(f; \delta) |x_1 - x_2| \frac{1}{\delta} \right)$$

eşitsizliği elde edilir. $0 < h \leq 1$ olmak üzere $|x_1 - x_2| \leq h$ üzerinden maksimum alınırsa

$$\max_{|x_1 - x_2| \leq h} |f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq C'_1 \left(\delta^\alpha + \omega^{(1)}(f; \delta) \frac{h}{\delta} \right),$$

$$\omega^{(1)}(f; h) \leq C'_1 \left(\delta^\alpha + \frac{h}{\delta} \omega^{(1)}(f; \delta) \right) \quad ; \quad (0 < h, \delta \leq 1),$$

elde edilir. Lemma 2.2.3' den,

$$\omega^{(1)}(f; h) \leq C_1'' h^\alpha \quad ; \quad (0 < h \leq 1) \quad (5.11)$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde,

$$\frac{\partial}{\partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) = m \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j+1}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right\} P_{k,n}(x) P_{j,m-1}(y)$$

eşitliğinin mutlak değeri alındığında

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) \right| \leq m \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} \left| f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j+1}{b_m}\right) - f\left(\frac{k}{b_n}, \frac{j}{b_m}\right) \right| P_{k,n}(x) P_{j,m-1}(y)$$

(2.8) eşitsizliğinden

$$\leq m \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} \omega^{(2)}\left(f; \frac{1}{b_m}\right) P_{k,n}(x) P_{j,m-1}(y)$$

(4.2) eşitliğinden

$$\leq m \sum_{j=0}^{m-1} \omega^{(2)}\left(f; \frac{1}{b_m}\right) P_{j,m-1}(y)$$

$$\leq m \omega^{(2)}(f; \delta) \sum_{j=0}^{m-1} \left(1 + \frac{1}{\delta} \frac{1}{b_m} P_{j,m-1}(y)\right)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) \right| \leq m \omega^{(2)}(f; \delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \frac{1}{b_m} \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) \right| \leq m \omega^{(2)}(f; \delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \frac{1}{b_m} \right\} = \omega^{(2)}(f; \delta) \left\{ m + \frac{1}{\delta} \frac{m}{b_m} \right\}$$

$0 \leq y_1, y_2 \leq 1$ olmak üzere eşitsizliğin iki tarafının integrali alınırsa

$$\int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial}{\partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) \right| dy \leq \omega^{(2)}(f; \delta) \left\{ m + \frac{1}{\delta} \frac{m}{b_m} \right\} \int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial}{\partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) \right| dy \right| \leq \omega^{(2)}(f; \delta) |y_1 - y_2| \left\{ m + \frac{1}{\delta} \frac{m}{b_m} \right\} \quad (5.12)$$

eşitsizliği elde edilir. (5.12) eşitsizliğinde $A_2 = \frac{m}{b_m}$ ve $\delta_m = \frac{1}{m}$ olarak alalım.

Bu durumda

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial}{\partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) \right| dy \right| \leq \omega^{(2)}(f; \delta) |y_1 - y_2| \left\{ \frac{1}{\delta_m} + \frac{A_2}{\delta} \right\} \quad (5.13)$$

$m \rightarrow \infty$ için $\delta_m \rightarrow 0$ dır. $m=2,3,\dots$ için $\delta_{m-1} \leq 2\delta_m$

$0 < \delta \leq 1$ için öyle m sayısı vardır öyle ki $\delta_m \leq \delta \leq \delta_{m-1} \leq 2\delta_m$ (5.14)

dır. (5.14) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left| \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial}{\partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) \right| dy \right| &\leq \omega^{(2)}(f; \delta) |y_1 - y_2| \left\{ \frac{2}{\delta} + \frac{A_1}{\delta} \right\} \\ &\leq (A_2 + 2) \omega^{(2)}(f; \delta) |y_1 - y_2| \frac{1}{\delta} \end{aligned} \quad (5.15)$$

elde edilir. Her belirli n ve m için

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &\leq \left| f(x, y_1) - B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y_1) \right| + \left| f(x, y_2) - B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y_2) \right| \\ &\quad + \left| \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial}{\partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) \right| dy \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Hipotezden

$$\left| B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y_1) - f(x, y_1) \right| \leq C_2 (\delta_m)^\beta$$

olduğundan

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \leq 2C_2 (\delta_m)^\beta + \left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y} B_{n,m}^{(b_n)}(f; x, y) dy \right|$$

dir. (5.14) ve (5.15) eşitsizliklerinden

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \leq 2C_2 \delta^\beta + \omega^{(2)}(f; \delta) |y_1 - y_2| \frac{1}{\delta} (A_2 + 2)$$

elde edilir. $C_2' = \max\{2C_2, A_2 + 2\}$ olsun. Bu durumda,

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \leq C_2' \left(\delta^\beta + \omega^{(2)}(f; \delta) |y_1 - y_2| \frac{1}{\delta} \right)$$

eşitsizliği elde edilir. $0 < h \leq 1$ olmak üzere $|y_1 - y_2| \leq h$ üzerinden maksimum alınırsa

$$\max_{|y_1 - y_2| \leq h} \left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \leq C_2' \left(\delta^\beta + \omega^{(2)}(f; \delta) \frac{h}{\delta} \right),$$

$$\omega^{(2)}(f; h) \leq C_2' \left(\delta^\beta + \frac{h}{\delta} \omega^{(2)}(f; \delta) \right) \quad ; \quad (0 < h, \delta \leq 1)$$

Lemma 2.2.3 'den,

$$\omega^{(2)}(f; h) \leq C_2'' h^\beta \quad 0 < h \leq 1 \quad (5.16)$$

eşitsizliği elde edilir. (5.11) ve (5.16) eşitsizliklerinden $f \in Lip_x \alpha \cap Lip_y \beta$ dır ve bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

1. Berens, H. and Lorentz, G.G., 1972, Inverse theorems for Bernstein polynomials, **Indiana University Mathematics Journal**, Vol.21.
2. Korovkin, P.P., 1960, Linear operators and approximation theory, **Hindustan Publishing Corp.**, Delhi.
3. Hacıyev, A. ve Hacısalıhoğlu, H.H., 1995, Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı, **A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları**, Ankara.
4. Lorentz, G.G., 1953, Bernstein polynomials, **Univ. of Toronto Press**, Toronto.
5. Bohman, H., 1952, On approximation of continuous and of analytic functions, **Ark. Mat.**, 2; 43-52.
6. Eisenberg, S. and Wood, B. , 1972, Approximation of analytic functions by Bernstein - Type operators, **Journal of Approximation Theory**, 6; 242-248.
7. A.D. Gadjiev, R.O. Efendiev and E. İbikli, 1998, Generalized Bernstein – Chlodowsky polynomials, **Rocky Mountain Journal of Mathematics**, 28; 1267-1277.
8. D.D. Stancu., 1969, Asupra unei generalizano a polinomilor lui Bernstein, **Studia Univ. Basel-Boljeu.**, 2; 31-45.
9. Babu, G. J., Canty, A., and Chaubey, Y., 2002, Application of Bernstein Polynomials for Smooth Estimation of a Distribution and Density Function, **J. Statistical Planning and Inference**, 105, no. 2, 377-392.
10. C.W. Groetsch and J.T. King, 1973, The Bernstein polynomials and finite differences, **Mathematics Magazine**, 46, 280-282.
11. C.Heitzinger and S. Selberherr, 2001, Optimization for TCAD purposes using Bernstein polynomials, **Proceeding SISPAD 2001 conf.**, 420-423.
12. Divnić ,T. R., 2001, On Approximative Solutions Of Some Differential Equations By Means Of Bernstein Polynomials, **Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat**, 12, 12-15.
13. Volkov, V.I., 1957, “ On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of two variables” , **Dokl. Akad. Nauk., SSSR(N.S.)**, 115, 17-19.
14. Martinez, L.M., 1989, Some Properties of Two – Dimensional Bernstein Polynomials, **Journal of Approximation Theory**, 59, 300 – 306.

ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında Rize’de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara’da tamamladı. 1992 yılında girdiği Gazi Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden 1996 yılında mezun oldu. 1996 – 1999 yılları arasında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.

