

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



İKİ DEĞİŞKENLİ ZETA VE L -FONKSİYONLARI

Abdurrahman ÜNAL

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2019

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



İKİ DEĞİŞKENLİ ZETA VE L -FONKSİYONLARI

Abdurrahman ÜNAL

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2019

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ DEĞİŞKENLİ ZETA VE L -FONKSİYONLARI

Abdurrahman ÜNAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

**Bu tez T.C. Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon
Birimi tarafından FDK-2018-3965 nolu proje ile desteklenmiştir.**

HAZİRAN 2019

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ DEĞİŞKENLİ ZETA VE L -FONKSİYONLARI

Abdurrahman ÜNAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez 24/06/2019 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

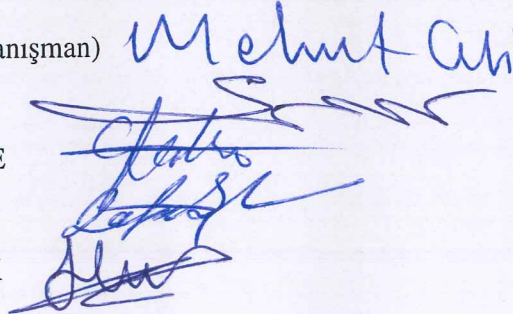
Prof. Dr. Mehmet CENKÇİ (Danışman)

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Doç .Dr. Gültekin TINAZTEPE

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

Dr. Öğr. Üyesi Hakan ŞİMŞEK



ÖZET

İKİ DEĞİŞKENLİ ZETA VE L -FONKSİYONLARI

Abdurrahman ÜNAL

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet CENKÇİ

Haziran 2019; 62 sayfa

Bu çalışmada özel Dirichlet serileri olan zeta ve L -fonksiyonlarının bazı genişlemeleri ele alınmıştır. İlk olarak iki değişkenli Hurwitz zeta fonksiyonu tanımlanmıştır. Bu fonksiyon yardımıyla iki değişkenli Dirichlet L -fonksiyonu ifade edilmiştir. Daha sonra ve iki aritmetik fonksiyona bağlı olan iki değişkenli Dirichlet serileri tanımlanmıştır. Tanımlanan fonksiyonlar ve seriler, Riemann zeta fonksiyonu, Dirichlet L -fonksiyonu, harmonik sayılarla ilgili olan Dirichlet serileri ve katlı zeta fonksiyonları ile bağlantılıdır. Euler-Maclaurin Toplama Formülü ve periyodik Euler-Maclaurin Toplama Formülü kullanılarak tanımlanan fonksiyon ve serilerin bilinen fonksiyonlar ve Dirichlet serileri cinsinden gösterimleri elde edilmiştir. Bu gösterimler, elde edilen fonksiyon ve iki değişkenli Dirichlet serilerinin pozitif olmayan tam sayılarda aldığı değerlerinin hesaplanmasına olanak sağlamaktadır. Ayrıca, karşılık gelen fonksiyon ve seriler için resiprosite formülleri bulunmuş ve formüller yardımıyla Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayıları ve ilgili sayı dizilerini içeren bazı simetrik formüller elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Dirichlet serileri, Euler-Maclaurin Toplama Formülü, Bernoulli sayıları, simetrik toplamalar.

JÜRİ: Prof. Dr. Mehmet CENKÇİ

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

Dr. Öğr. Üyesi Hakan ŞİMŞEK

ABSTRACT

TWO-VARIABLE ZETA AND L -FUNCTIONS

Abdurrahman ÜNAL

Ph D Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet CENKÇİ

June 2019; 62 pages

We define several generalizations of zeta and L -functions. Firstly we define two variable Hurwitz zeta function and Dirichlet L -function. Then we define a two-variable Dirichlet series associated with two arithmetic functions. These functions and series are related to the Riemann zeta function, Dirichlet L -function, Dirichlet series associated to the harmonic numbers, and truncated multiple zeta functions. Using Euler-Maclaurin and periodic Euler-Maclaurin summation formulas we obtain representations in terms of known and ordinary Dirichlet series, which lead to explicit evaluations of their values at nonpositive integers. We also find corresponding reciprocity formulas, which provide some symmetric formulas involving Bernoulli polynomials, and Bernoulli numbers and associated numbers.

KEYWORDS: Dirichlet series, Euler-Maclaurin summation formula, Bernoulli numbers, symmetric sums.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mehmet CENKÇİ

Prof. Dr. İlham ALİYEYEV

Assoc. Prof. Dr. Gültekin TINAZTEPE

Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

Asst. Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma ile Sonuçlar olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde araştırmanın amacı ve kapsamı açıklanmıştır.

Çalışmanın temel kavramları olan Bernoulli polinomları, sayıları, fonksiyonları ve ilgili sayı dizileri Kaynak Taraması bölümünde tanıtılmıştır.

Materyal ve Metot bölümünde Dirichlet serileri, Hurwitz zeta fonksiyonu, Dirichlet L -fonksiyonu ve Euler-Maclaurin Toplama Formülleri verilmiş ve bazı temel sonuçlar ele alınmıştır.

Bulgular ve Tartışma bölümü dört ana başlık altında toplanmıştır. İlk olarak Hurwitz tipli iki değişkenli zeta fonksiyonu tanımlanmıştır. Euler-Maclaurin Toplama Formülü ile bu fonksiyonun sağladığı resiprosite bağıntı verilmiş ve Bernoulli polinomlarını içeren bazı simetrik formüller elde edilmiştir. Tanımlanan iki Hurwitz zeta fonksiyonu kullanılarak iki değişkenli Dirichlet L -fonksiyonu tanımlanmış ve bazı özellikleri listelenmiştir. Daha sonra iki aritmetik fonksiyona bağlı iki değişkenli Dirichlet serisi $H(s, z; a, b)$ tanımlanmıştır. Periyodik Euler-Maclaurin Toplama Formülü kullanılarak bu Dirichlet serisi, tek değişkenli Dirichlet serilerinin bir toplamı şeklinde gösterilmiştir. Bu çalışmanın temel kavramlarından olan iki değişkenli $Y(s, z; a, b)$ Dirichlet serisi tanımlanmış ve $Y(s, z; a, b)$ için bir resiprosite formülü ile $H(s, z; a, b)$ serileri cinsinden bir toplam gösterimi verilerek analitik devam tartışmaları yapılmıştır. Son olarak, $Y(s, z; a, b)$ için resiprosite formülü ve $H(s, z; a, b)$ serileri cinsinden gösterim yardımıyla Bernoulli sayıları ve ilgili sayı dizilerini içeren simetrik formüller elde edilmiştir.

Sonuçlar bölümünde tezde elde edilen bulgular özetlenerek analitik devam tartışmaları farklı bir bakış açısı ile ele alınmıştır.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Prof. Dr. Mehmet CENKÇİ'ye teşekkürlerimi sunarım. Doktora eğitimim boyunca sağladığı maddi destekten dolayı TÜBİTAK BİDEB Araştırma, Burs ve Destek Programları Grubu'na teşekkür ederim. Ayrıca, tez çalışması süresince verdiği destek nedeniyle Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkürlerimi iletirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	7
2.1. Bernoulli Sayıları ve Polinomları	7
2.2. Bernoulli Fonksiyonları ve Fourier Serileri	14
2.3. Periyodik Bernoulli Sayıları, Polinomları ve Fonksiyonları	18
3. MATERYAL VE METOT	24
3.1. Euler-Maclaurin Toplama Formülü ve Riemann Zeta Fonksiyonu	24
3.2. Dirichlet Serileri	29
3.3. Hurwitz Zeta Fonksiyonu	30
3.4. Dirichlet L -Fonksiyonu	33
3.5. Periyodik Euler-Maclaurin Toplama Formülü	34
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	37
4.1. İki Değişkenli Hurwitz Zeta Fonksiyonu	37
4.2. İki Değişkenli Dirichlet L -Fonksiyonu	45
4.3. İki Değişkenli Dirichlet Serileri	46
4.4. Bernoulli Sayıları ve İlgili Sayı Dizilerini İçeren Simetrik Bağlımlar	50
5. SONUÇLAR	56
6. KAYNAKLAR	60
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum “İKİ DEĞİŞKENLİ ZETA VE L -FONKSİYONLARI” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

24/06/2019

Abdurrahman ÜNAL

SİMGELER

$\zeta(s)$	: Riemann zeta fonksiyonu
B_n	: Bernoulli sayısı
$B_n(x)$	: Bernoulli polinomu
χ	: Dirichlet karakteri
$B_{n,\chi}$	: χ ile genelleştirilmiş Bernoulli sayısı
G_n	: Genocchi sayısı
E_n	: Euler sayısı
$a = a(n)$	: Periyodik aritmetik fonksiyon
$F(s; a)$	: a aritmetik fonksiyonuna bağlı Dirichlet serisi
$\zeta(s, x)$	: Hurwitz zeta fonksiyonu
$L(s; \chi)$	: Dirichlet L -fonksiyonu
δ_{nm}	: Kronecker delta sembolü

1. GİRİŞ

$\zeta(s)$ ile gösterilen Riemann zeta fonksiyonu analitik sayılar teorisinde önemli bir role sahiptir. 1737 yılında Euler, $\zeta(s)$ fonksiyonuna karşılık gelen seride s değişkenini bir reel değişken olarak almış ve asal sayılar üzerinden alınan $\sum p^{-1}$ serisinin ıraksak olduğunu göstererek asal sayıların sonsuz çoklukta olduğunu kanıtlamıştır. Riemann, Euler'in tanımını karmaşık s değişkeni için genişleterek $\text{Re}(s) > 1$ yarı düzleminde mutlak yakınsak olan

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Dirichlet serisini tanımlamıştır. Bu seri, tüm karmaşık düzleme analitik devam ettirilebilen s değişkeninin, $s = 1$ noktasında basit kutba ve bu kutupta rezidüsü 1 olan bir meromorfik bir fonksiyonunu temsil eder. Söz konusu analitik devam, Euler-Maclaurin Toplama Formülü veya Euler'in dönüşüm formülü kullanılarak elde edilebilir (bakınız, Arakawa vd. 2014, Sondow 1994). Riemann zeta fonksiyonunun negatif tam sayılardaki değeri

$$\zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n}$$

ile verilir. Burada, n bir pozitif tam sayı ve B_n ,

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanan n . Bernoulli sayısıdır.

Riemann zeta fonksiyonu en ünlü Dirichlet serisidir. Bu tez çalışması boyunca bir Dirichlet serisi ile

$$F(s; a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

şeklinde verilen sonsuz toplam ve buna karşılık gelen fonksiyon ele alınmıştır. Bu tanımda, $a(n)$ bir aritmetik fonksiyon ve s bir karmaşık değişkendir. Sağ taraftaki seri $a(n)$ aritmetik fonksiyonuna bağlı olarak uygun bir yarı düzlemde yakınsaktır ve bu yarı düzlemde analitik olan $F(s; a)$ fonksiyonunu temsil eder. Kuvvet serilerinin özel bir sınıfına karşılık gelen analitik fonksiyonlar anlamında Dirichlet serileri matematiksel analizde fazla bir öneme sahip olmamasına rağmen sayılar teorisinde oldukça önemli bir kavram-

dır. Örneğin, 1837 yılında Dirichlet, Dirichlet L -fonksiyonu olarak adlandırılan

$$L(s; \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

fonksiyonunu kullanarak aritmetik bir dizide sonsuz çoklukta asal sayı olduğunu kanıtlamıştır. Burada, χ bir Dirichlet karakteridir ve seri, $\text{Re}(s) > 1$ için yakınsaktır.

Diğer bir Dirichlet serisi örneği olarak

$$H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

verilebilir. Burada $h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, n . harmonik sayıdır. Bu seri, $\text{Re}(s) > 1$ için mutlak yakınsak olan analitik bir fonksiyondur. $H(s)$ fonksiyonunun pozitif tam sayılardaki değeri zeta fonksiyonu cinsinden

$$2H(m) = (m+2)\zeta(m+1) - \sum_{j=1}^{m-2} \zeta(j+1)\zeta(m-j), \quad m > 2,$$

eşitliği ile Euler tarafından verilmiştir (Basu ve Apostol 2000, Flajolet ve Salvy 1998). s değişkeninin pozitif tam sayı değerleri için $H(s)$ fonksiyonu birçok yazar tarafından incelenmiştir (Basu 2008, Rao ve Sarma 1980, Ramanujan 1957) ve güncel bir konudur (Alkan 2013). Apostol ve Vu (Apostol ve Vu 1984) karmaşık s değişkeni için $H(s)$ fonksiyonunun tüm s -düzleminde $s = 1$, $s = 0$ ve $s = 1 - 2r$, $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 1$, noktalarındaki kutupları ile bir meromorf fonksiyon olduğunu kanıtlamışlardır. Ayrıca karmaşık s ve z değişkenleri için daha genel olan iki değişkenli

$$H(s, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{1}{n^s m^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^z}$$

Dirichlet serisini tanımlayıp bu fonksiyonun yakınsama bölgesini ve kutuplarını incelemişlerdir. Özel olarak,

$$H(s, z) + H(z, s) = \zeta(s)\zeta(z) + \zeta(s+z)$$

resiprosite bağıntısını vermişlerdir.

1979 yılında Woodcock (Woodcock 1979), p -adik analizden bazı derin kavramlar kullanarak $m, n \geq 0$ tam sayıları için

$$A_{m,n} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} B_{m+j} B_{n+1-j}.$$

olmak üzere

$$A_{m,n} = A_{n,m} \quad (1.1)$$

eşitliğini elde etmiştir. Bu eşitlikte özel olarak $m = 0$ alınrsa her $n \geq 0$ için Euler tarafından elde edilmiş olan ve Bernoulli sayıları için doğrusal olmayan girişim tipli indirgeme bağıntısı olarak değerlendirilebilen

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} B_j B_{n+1-j} + B_n = A_{0,n} = A_{n,0} = -B_{n+1} \quad (1.2)$$

eşitliği elde edilir. 1987 yılında Woodcock (Woodcock 1987), $A_{m,n}$ ifadesini yeniden düzenleyerek

$$A_{m,n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2j} B_{m+n+1-2j} B_{2j} + \frac{(-1)^n}{n+1} B_m B_{n+1} \pm (-1)^{n+1} \frac{B_{m+n}}{2},$$

şeklinde ifade etmiştir. $A_{m,n} = A_{n,m}$ bağıntısını sağlayan bu gösterim iki değişkenli Dirichlet serisi $H(s, z)$ ile doğrudan ilişkilidir. Bu ilişki $\text{Re}(s) > 2$ ve $\text{Re}(z) > 2$ için

$$Y(s, z) = (s-1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{1}{n^s m^{z-1}} - (z-1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m > n}}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1} m^z}$$

tanımlanan ve her $(s, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ için bir tam fonksiyon olan $Y(s, z)$ fonksiyonu ile oluşturulmuştur. $Y(s, z)$ fonksiyonu

$$Y(s, z) + Y(z, s) = (s+z-2) \zeta(s+z-1)$$

ile verilen resiprosite bağıntısını sağlar ve negatif olmayan m ile n tam sayıları için

$$Y(1-n, 1-m) = (-1)^{n+1} A_{m,n} + (-1)^n B_n \delta_{n0}$$

eşitliğini gerçeğe. Burada δ_{m0} , Kronecker delta sembolüdür.

Bu tez çalışmasında $H(s, z)$ ve $Y(s, z)$ iki değişkenli Dirichlet serilerinin polinom ve aritmetik fonksiyonlarla ilgili genişlemeleri ele alınmıştır. İlk olarak $H(s, z)$ fonksiyonunun

$$H(s, z; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s (m+x)^z}$$

şeklinde bir polinom genişlemesi verilmiştir. Karşılık gelen $Y(s, z; x)$ Dirichlet serisi

$$Y(s, z) = (s-1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s (m+x)^{z-1}} - (z-1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m > n}}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{s-1} (m+x)^z}$$

olarak tanımlanmış, Euler-Maclaurin Toplama Formülü ile bu seri için analitik devam ve resiprosite bağıntıları ve Bernoulli polinomlarını içeren

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} (-1)^r \binom{n+1}{r} B_r B_{n+m+1-r}(x) \\ & + \frac{1}{m+1} \sum_{r=1}^{m+1} (-1)^r \binom{m+1}{r} B_r B_{n+m+1-r}(x) \\ & = \frac{B_{n+1}(x) B_m(x)}{n+1} + \frac{B_{m+1}(x) B_n(x)}{m+1} \\ & + \frac{n+m+2}{(n+1)(m+1)} B_{n+m+1}(x) + B_{n+m}(x) \end{aligned}$$

girişim tipli toplam elde edilmiştir. Daha sonra $H(s, z, x)$ fonksiyonu kullanılarak iki değişkenli Dirichlet L -fonksiyonu $L(s, z; \chi)$ tanımlanarak analitik devam incelemesi yapılmıştır. Son olarak $H(s, z)$ fonksiyonunun

$$H(s, z; a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{a(n) b(m)}{n^s m^z}$$

şeklinde periyodik aritmetik a ile b fonksiyonlarına bağlı genişlemesi ele alınmıştır. Periyodik Euler-Maclaurin Toplama Formülü (Berndt 1975, Berndt ve Schoenfeld 1975, Cohen 2007) kullanılarak $H(s, z; a, b)$ fonksiyonunun kesin ifadesi elde edilmiştir. Karşılık gelen iki değişkenli Dirichlet serisi

$$Y(s, z; a, b) = (s-1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{a(n) b(m)}{n^s m^{z-1}} - (z-1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m > n}}^{\infty} \frac{a(n) b(m)}{n^{s-1} m^z}$$

şeklinde tanımlanmış ve

$$Y(s, z; a, b) + Y(z, s; b, a) = (s+z-2) F(s+z-1; ab)$$

bağıntısı elde edilmiştir. Bu bağıntı kullanılarak a ve b periyodik fonksiyonların özel seçimleri ve s ile z değişkenlerinin pozitif olmayan tam sayı değerleri için Bernoulli sayıları ve ilgili sayı dizilerini içeren simetrik girişim tipli bağıntılar verilmiştir. Daha açık bir

ifade ile

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} B_{j,\chi} B_{n+m+1-j} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} B_j B_{n+m+1-j,\chi} \\ &= \frac{B_n B_{m+1,\chi}}{m+1} + \frac{B_{n+1} B_{m,\chi}}{n+1} - \frac{B_{n+m+1,\chi}}{n+1} - B_{n+m,\chi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} B_{j,\chi} B_{n+m+1-j,\chi} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} B_{j,\chi} B_{n+m+1-j,\chi} \\ &= \frac{B_{n,\chi} B_{m+1,\chi}}{m+1} + \frac{B_{m,\chi} B_{n+1,\chi}}{n+1} - B_{n+m,\chi^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} G_j B_{n+m+1-j} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} B_j G_{n+m+1-j} \\ &= G_{n+m} + \frac{G_{n+m+1}}{n+1} - \frac{B_n G_{m+1}}{m+1} - \frac{B_{n+1} G_m}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} G_j G_{n+m+1-j} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} G_j G_{n+m+1-j} \\ &= 4B_{n+m} - \frac{G_n G_{m+1}}{m+1} - \frac{G_{n+1} G_m}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} G_j B_{n+m+1-j,\chi} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} B_{j,\chi} G_{n+m+1-j} \\ &= 2(n+m) E_{n+m-1,\bar{\chi}}(0) - \frac{B_{n,\chi} G_{m+1}}{m+1} - \frac{B_{n+1,\chi} G_m}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} j E_{j-1} B_{n+m+1-j} \\ & \quad + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (n+m+1-j) E_{n+m-j} B_j \\ &= B_n E_m + \frac{m}{n+1} E_{m-1} B_{n+1} - \frac{n+m+1}{n+1} E_{n+m} - (n+m) E_{n+m-1}, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} j E_{j-1} (n+m+1-j) E_{n+m-j} \\ & \quad + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} j E_{j-1} (n+m+1-j) E_{n+m-j} \\ &= n E_{n-1} E_m + m E_{m-1} E_n + 4(2^{n+m-1} - 1) B_{n+m}, \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunmuştur. Burada B_n , n . Bernoulli sayısı, $B_{n,\chi}$, χ Dirichlet karakteri ile genelleştirilmiş Bernoulli sayısı, G_n , n . Genocchi sayısı ve E_n , n . Euler sayısıdır.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Bernoulli Sayıları ve Polinomları

1713 yılında yayınlanan meşhur Ars Conjectandi isimli kitabında Jakob Bernoulli, günümüzde Bernoulli sayıları olarak bilinen rasyonel sayıları, ardışık tam sayıların kuvvetleri toplamı olan $1^k + 2^k + \dots + n^k$ toplamı ile ilişkilendirerek tanımlamıştır. Bernoulli,

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \dots$$

kuvvetler toplamlarını $k = 10$ durumuna kadar sıralayarak Bernoulli sayılarını içeren genel bir formül vermiştir. Bernoulli daha sonra bu sayıların indirgemeli olarak nasıl elde edildiğini ve formülün kuvvetler toplamını hesaplamak için nasıl kullanıldığını açıklamıştır.

Bernoulli tarafından verilen söz konusu formül günümüzde kullanılan gösterim ile

$$\sum_{i=1}^n i^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j}$$

şeklinde dir. Burada B_j , Bernoulli sayılarıdır.

Tanım 2.1. (Arakawa vd. 2014) *Bernoulli sayıları* $k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere B_k ile gösterilir ve

$$\sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j = k+1$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

Bernoulli sayılarının bu tanımını kullanarak ilk birkaç değerini hesaplamak kolaydır:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0, \\ B_8 &= -\frac{1}{30}, B_9 = 0, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{11} = 0, B_{12} = -\frac{691}{2730}, B_{13} = 0, B_{14} = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Yukarıda indirgeme bağıntısı ile tanımlanan Bernoulli sayıları

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$$

üreteç fonksiyonu ile de tanımlanabilir. Üreteç fonksiyonu tanımı Bernoulli sayılarının çeşitli özelliklerini elde etmede oldukça kullanışlıdır.

Teorem 2.2. (Arakawa vd. 2014) B_k Bernoulli sayıları için $\mathbb{Q}((t))$ cisminde geçerli olan

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$$

formal kuvvet serisi gösterimi vardır. Burada $\mathbb{Q}((t))$, katsayıları rasyonel sayılar olan

$$\sum_{k=-N}^{\infty} a_k t^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

formal Laurent serilerinin kümesidir.

Kanıt İfadenin kanıtı için

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} \right) (e^t - 1) = te^t$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \right) (e^t - 1) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{B_j}{j!} \frac{1}{(k-j)!} \right) t^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} B_j \right) \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j \right) \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

bulunur. Tanım 2.1 gereği

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j \right) \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = te^t$$

elde edilir. □

Üreteç fonksiyonu kullanılarak Bernoulli sayılarının bazı temel özellikleri elde edilebilir.

Önerme 2.3. (Apostol 1976, Arakawa vd. 2014) $k \geq 3$ bir tek tam sayı ise $B_k = 0$ olur.

Kanıt İfadenin kanıtı için $\frac{te^t}{e^t - 1} - \frac{t}{2}$ formal kuvvet serisinin tek tam sayı kuvvetli terimlerinin olmadığını göstermek yeterlidir.

$$\frac{te^t}{e^t - 1} - \frac{t}{2} = \frac{t(e^t - 1 + 1)}{e^t - 1} - \frac{t}{2} = t + \frac{t}{e^t - 1} - \frac{t}{2} = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2}$$

ve

$$\frac{(-t)e^{-t}}{e^{-t} - 1} - \frac{(-t)}{2} = \frac{-t}{1 - e^{-t}} + \frac{t}{2} = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2}$$

olduğundan $\frac{te^t}{e^t - 1} - \frac{t}{2}$ formal kuvvet serisi $t \rightarrow -t$ dönüşümü altında değişmezdir. Dolayısıyla, tek tam sayı kuvvetli terimlerin katsayıları sıfır olur. $\square$

Çift k tam sayıları için B_k Bernoulli sayıları sıfırdan farklıdır ve B_2 sayısından itibaren ardışık olarak işaret değiştirirler. Bunun kanıtı için aşağıdaki ifade kullanılır.

Önerme 2.4. (Arakawa vd. 2014) $k \geq 2$ için

$$(2k + 1) B_{2k} = - \sum_{m=1}^{k-1} \binom{2k}{2m} B_{2m} B_{2k-2m}$$

olur.

Kanıt Önerme 2.3 gereği

$$\frac{te^t}{e^t - 1} - \frac{t}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

olur.

$$f(t) = \frac{te^t}{e^t - 1} - \frac{t}{2}$$

olsun.

$$f'(t) = \frac{e^t}{e^t - 1} - \frac{te^t}{(e^t - 1)^2} - \frac{1}{2}$$

olduğundan

$$f(t) - t f'(t) = [f(t)]^2 - \frac{t^2}{4}$$

elde edilir.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} - t \sum_{k=0}^{\infty} 2k B_{2k} \frac{t^{2k-1}}{(2k)!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \right)^2 - \frac{t^2}{4}$$

veya denk olarak

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - 2k) B_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k \binom{2k}{2m} B_{2m} B_{2k-2m} \right) \frac{t^{2k}}{(2k)!} - \frac{t^2}{4}$$

bulunur. $k \geq 2$ için $\frac{t^{2k}}{(2k)!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$(1 - 2k) B_{2k} = \sum_{m=0}^k \binom{2k}{2m} B_{2m} B_{2k-2m}$$

elde edilir. $m = 0$ ve $m = 2k$ için sağ taraftan B_{2k} elde edileceğinden istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Sonuç 2.5. (Arakawa vd. 2014) $k \geq 1$ için $(-1)^{k-1} B_{2k} > 0$ olur.

Kanıt İfadenin kanıtı k üzerinde tümevarımla verilecektir.

$k = 1$ için $B_2 = \frac{1}{6} > 0$ olduğundan ifade doğrudur. İfade k sayısından küçük olan tüm pozitif tam sayılar için doğru olsun. Önerme 2.4 ile verilen formül $(-1)^{k-1}$ ile çarpılırsa

$$(2k+1)(-1)^{k-1} B_{2k} = \sum_{m=1}^{k-1} \binom{2k}{2m} (-1)^{m-1} B_{2m} (-1)^{k-m-1} B_{2k-2m}$$

elde edilir. Tümevarım adımı gereği sağ taraf pozitif olduğundan $(-1)^{k-1} B_{2k} > 0$ bulunur. Bu ise tümevarımı ve kanıtı tamamlar. $\square$

Bernoulli sayıları için $B_1 = -\frac{1}{2}$ olan ve geriye kalan diğer değerlerin aynı olduğu diğer bir tanım da vardır. Her $k > 1$ tek tam sayısı için $B_k = 0$ olduğundan bu tanımların birinden diğerine B_k yerine $(-1)^k B_k$ yazılarak geçilebilir. Bu tez çalışmasında Bernoulli sayıları için $B_1 = -\frac{1}{2}$ olan tanım kabul edilecektir, yani Bernoulli sayıları için

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$$

üreteç fonksiyonu tanımı kullanılacaktır.

Bernoulli sayılarının bir genellemesi olan Bernoulli polinomları

$$B_k(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_j x^{k-j}$$

olarak tanımlanan, derecesi k olan bir monik polinomdur. Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu kullanılarak Bernoulli polinomları için aşağıdaki üreteç fonksiyonu elde edilir:

Önerme 2.6. (Apostol 1976, Arakawa vd. 2014, Cohen 2007) $B_n(x)$ Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!}$$

şeklindedir.

Kanıt Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu ve Bernoulli polinomlarının tanımından

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_j x^{k-j} \right) \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k \frac{B_j}{j!} \frac{x^{k-j}}{(k-j)!} \right) t^k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{t^k}{k!} \right) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1} \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Bernoulli polinomları, üreteç fonksiyonu yardımıyla kolaylıkla kanıtlanabilen aşağıdaki temel özellikleri sağlar:

Önerme 2.7. (Cohen 2007) $B_k(x)$ Bernoulli polinomları için

- (1) $k \geq 0$ için $B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1}$ olur.
- (2) $k \geq 1$ için $B'_k(x) = kB_{k-1}(x)$ olur.
- (3) $k \geq 0$ için $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$ olur.
- (4) $m \geq 1$ için

$$\sum_{j=0}^{m-1} B_k \left(x + \frac{j}{m} \right) = m^{1-k} B_k(mx)$$

olur.

Bernoulli sayıları ve polinomları bazı kuvvet serilerinin Taylor katsayıları olarak ortaya çıkar.

Önerme 2.8. (Cohen 2007) Belirtilen R yakınsaklık yarıçapları ile aşağıdaki Taylor seri açılımları geçerlidir:

$$\begin{aligned} \coth(t) &= \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k-1}, \quad R = \pi, \\ \cot(t) &= \frac{1}{t} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 2^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k-1}, \quad R = \pi, \\ \tanh(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} (2^{2k} - 1) \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k-1}, \quad R = \frac{\pi}{2}, \\ \tan(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 2^{2k} (2^{2k} - 1) \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k-1}, \quad R = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sinh(t)} &= \frac{1}{t} - \sum_{k=1}^{\infty} 2(2^{2k}-1) \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k-1}, \quad R = \pi, \\ \frac{1}{\sin(t)} &= \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 2(2^{2k}-1) \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k-1}, \quad R = \pi, \\ \frac{2}{e^t + 1} &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2(2^{2k}-1) \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k-1}, \quad R = \pi.\end{aligned}$$

Kanıt Tanım gereği

$$\coth(t) = \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1} = 1 + \frac{1}{t} \frac{2t}{e^{2t} - 1}$$

ve $\cot(t) = i \coth(it)$ olduğundan ilk iki formül elde edilir. $\tan(t) = \cot(t) - 2 \cot(2t)$ olduğundan $\tan(t)$ için seri açılımı ve $\tanh(t) = \frac{1}{i} \tan(it)$ olduğundan $\tanh(t)$ için seri açılımı elde edilir.

$$\frac{1}{e^t - e^{-t}} = \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{e^{2t} - 1}$$

olduğundan $\frac{1}{\sinh(t)}$ ve $\frac{1}{\sin(t)}$ için seri açılımları bulunur. Son formül,

$$\frac{1}{e^t + 1} = \frac{1}{e^t - 1} - \frac{2}{e^{2t} - 1}$$

gözleminden elde edilir.

Yakınsaklık yarıçapları için verilen ifadeler, yakınsaklık yarıçapının orijin ile en yakın tekil nokta arasındaki uzaklık olması gerçeğinden elde edilir. $\square$

Sonuç 2.9. (Cohen 2007) *Bernoulli polinomları için*

$$B_k\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) B_k$$

eşitliği geçerlidir. Özel olarak, k tek ve $k \geq 3$ ise $B_k(x)$ polinomu $x(x - \frac{1}{2})(x - 1)$ ile bölünür.

Kanıt İlk ifade

$$\frac{te^{\frac{t}{2}}}{e^t - 1} = \frac{t}{2} \sinh\left(\frac{t}{2}\right)$$

gözleminden elde edilir. İkinci ifade tek olan $k \geq 3$ tam sayıları için $B_k = 0$ ve $k \neq 1$ için $B_k(1) = B_k(0)$ eşitliğinden bulunur. $\square$

Tanım 2.10. (Cohen 2007) *Tanjant sayıları* T_k , $k \geq 0$, ile gösterilir ve

$$T_k = 2^{k+1} (2^{k+1} - 1) \frac{B_{k+1}}{k+1}$$

ile tanımlanır.

Önerme 2.8 gereği

$$\tanh(t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k-1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

veya

$$\tan(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} T_{2k-1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

elde edilir. $T_0 = -1$, $k \geq 1$ için $T_{2k} = 0$ ve tek k için ilk birkaç T_k değeri $T_1 = 1, T_3 = -2, T_5 = 16, T_7 = -272, T_9 = 7936$ şeklindedir.

Sonuç 2.11. (Cohen 2007) *Tanjant sayıları*

$$\sum_{j=1}^k \binom{2k-1}{2j-1} T_{2j-1} = 1$$

indirgeme bağıntısını sağlar. Özel olarak, her $k \geq 1$ için $T_{2k-1} \in \mathbb{Z}$ olur.

Kanıt $\cosh(t) \tanh(t) = \sinh(t)$ eşitliği ve bu fonksiyonların seri açılımlarından istenilen elde edilir. $\square$

Tanım 2.12. (Cohen 2007) *Euler sayıları* E_k , $k \geq 0$, ile gösterilir ve $k \geq 0$ için $E_{2k+1} = 0$ ve

$$E_{2k} = -4^{2k+1} \frac{B_{2k+1}(\frac{1}{4})}{2k+1}$$

ile tanımlanır.

İlk birkaç Euler sayısı $E_0 = 1, E_2 = -1, E_4 = 5, E_6 = -61, E_8 = 1385$ şeklindedir.

Önerme 2.13. (Cohen 2007) *Bernoulli polinomları için*

$$B_{2k}\left(\frac{1}{4}\right) = B_{2k}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{B_{2k}(\frac{1}{2})}{2^{2k}} = -\frac{1}{2^{2k}} \left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right) B_{2k}$$

eşitlikleri ve Euler sayıları için

$$\frac{1}{\cosh(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} E_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \quad R = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{1}{\cos(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k E_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \quad R = \frac{\pi}{2}$$

Taylor serisi açılımları geçerlidir.

Kanıt Yukarıda verilen

$$\frac{1}{e^t + 1} = \frac{1}{e^t - 1} - \frac{2}{e^{2t} - 1}$$

eşitliği $e^{\frac{t}{2}}$ ile çarpılır ve t yerine $2t$ yazılırsa

$$\frac{1}{\cosh(t)} = \frac{2e^t}{e^{2t} + 1} = - \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{B_k\left(\frac{1}{4}\right) - B_k\left(\frac{1}{2}\right)}{k!} t^{k-1}.$$

elde edilir. $\cosh(t)$ bir çift fonksiyon olduğundan

$$2^{2k} B_{2k}\left(\frac{1}{4}\right) = B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)$$

bulunur ve $B_{2k}(1-x) = B_{2k}(x)$ olduğundan ilk eşitlik elde edilir. Ayrıca, Sonuç 2.9 gereği $k \geq 0$ için $B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ olduğundan

$$\frac{1}{\cosh(t)} = - \sum_{k=0}^{\infty} 4^{2k+1} B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right) \frac{t^{2k}}{(2k+1)!}$$

bulunur. Son eşitlikte t yerine it yazılırsa $\frac{1}{\cos(t)}$ için formül elde edilir. $\square$

Sonuç 2.14. (Cohen 2007) Euler sayıları $k > 0$ için

$$\sum_{j=0}^k \binom{2k}{2j} E_{2j} = 0$$

indirgeme bağıntısını sağlar. Özel olarak, her k için $E_{2k} \in \mathbb{Z}$ olur.

Kanıt $\cosh(t) \frac{1}{\cosh(t)} = 1$ eşitliğinden elde edilir. $\square$

Tanım 2.1 ile verilen Bernoulli sayıları için indirgeme bağıntısı, Sonuç 2.14 ile verilen Euler sayıları için indirgeme bağıntısına benzerdir. Tanım 2.1'den $k \geq 2$ için

$$B_{k-1} = -\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} B_j$$

elde edilir. $\frac{1}{k}$ çarpanı B_k Bernoulli sayılarının tam sayı olmayabileceğini ifade eder.

2.2. Bernoulli Fonksiyonları ve Fourier Serileri

Bu bölümde Bernoulli polinomları ile Fourier serileri arasında doğrudan ilişkiler verilecektir. Bu ilişkiler, Dirichlet L -fonksiyonunun özel değerlerinin hesaplanmasında kullanılmaktadır.

$B_k(x)$ Bernoulli polinomuna karşılık gelen Fourier serisini bulmak için $B_k(x)$ Bernoulli polinomunun $[0, 1)$ aralığına, periyodu 1 olan bir periyodik genişlemesi gereklidir. x reel sayısının kesir kısmı $\{x\}$ olsun. Yani $\{x\}$, $[0, 1)$ aralığında $x - \{x\} \in \mathbb{Z}$ olan tek türlü belirli sayıdır. $B_k(\{x\})$ fonksiyonu aşıkarak 1 ile periyodiktir.

Teorem 2.15. (Arakawa vd. 2014) k bir doğal sayı olmak üzere

$$B_k(\{x\}) = -\frac{k!}{(2\pi i)^k} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{e^{2\pi i n x}}{n^k}$$

formülü $k \geq 2$ ise tüm reel x sayıları ve $k = 1$ ise $x \notin \mathbb{Z}$ olan tüm x reel sayıları için doğrudur. $k = 1$ için sağ taraftaki seri

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{2\pi i n x}}{n^k}$$

anlamındadır. $k \geq 2$ ise sağ taraftaki seri x değişkenine göre mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Kanıt $0 < x < 1$ olsun.

$$f(z) = \frac{e^{zx}}{e^z - 1}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu z değişkenine göre bir meromorf fonksiyondur. $f(z)$ fonksiyonunun $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $z = 2\pi i n$ noktalarında basit kutupları vardır. Bu noktalardaki rezidü

$$\lim_{z \rightarrow 2\pi i n} (z - 2\pi i n) f(z) = \lim_{t \rightarrow 0} t \frac{e^{x(t+2\pi i n)}}{e^{t+2\pi i n} - 1} = e^{2\pi i n x}$$

olur.

N yeteri kadar büyük bir doğal sayı olmak üzere $R = 2\pi(N + \frac{1}{2})$ olsun. z -düzleminde köşeleri $R + iR$, $-R + iR$, $-R - iR$ ve $R - iR$ sırasında olan C_N karesi oluşturulsun. $t \neq 2\pi i n$ noktası C_N karesi içinde bir nokta ise rezidü teoremi gereği

$$\int_{C_N} \frac{f(z)}{z-t} dz = 2\pi i \left(f(t) + \sum_{n=-N}^N \frac{e^{2\pi i n x}}{2\pi i n - t} \right) = 2\pi i \left(f(t) - \frac{1}{t} - \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{e^{2\pi i n x}}{t - 2\pi i n} \right)$$

elde edilir. $N \rightarrow \infty$ için

$$\int_{C_N} \frac{f(z)}{z-t} dz \rightarrow 0$$

olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla, $0 < |t| < 2\pi$ ise

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{t} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{e^{2\pi i n x}}{t - 2\pi i n} = \frac{1}{t} - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{e^{2\pi i n x}}{2\pi i n \left(1 - \frac{t}{2\pi i n}\right)} \\ &= \frac{1}{t} - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{e^{2\pi i n x}}{2\pi i n} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{t}{2\pi i n}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{(2\pi i n)^k} t^{k-1}$$

toplamı mutlak yakınsak olduğundan yukarıdaki formül

$$f(t) = \frac{1}{t} - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{e^{2\pi i n x}}{2\pi i n} - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{(2\pi i n)^k} t^{k-1}$$

haline gelir. Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu, her reel x sayısı için $\frac{te^{xt}}{e^t - 1}$ fonksiyonunun $t = 0$ noktasındaki Taylor açılımı olarak değerlendirilebileceğinden

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^{k-1}}{k!}$$

olur. Katsayılar karşılaştırılırsa

$$B_1(x) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{e^{2\pi i n x}}{2\pi i n}$$

ve $k \geq 2$ için

$$B_k(x) = -k! \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{(2\pi i n)^k}$$

elde edilir. $k \geq 2$ için sağ taraftaki toplam $[0, 1]$ kapalı aralığında düzgün yakınsak olduğundan ve $B_k(x)$ polinomu aynı aralıkta sürekli olduğundan yukarıdaki formül $[0, 1]$ aralığında geçerlidir. Ayrıca, sağ taraf x değişkenine göre 1 periyodu ile periyodik olduğundan sol taraf genişletilerek istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Aşağıdaki ifadeler Teorem 2.15'in doğrudan sonuçlarıdır.

Sonuç 2.16. (Arakawa vd. 2014, Cohen 2007) k bir tam sayı olsun.

(1) Çift $k \geq 2$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^k} = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}+1}}{2} \frac{(2\pi)^k B_k(\{x\})}{k!}$$

olur.

(2) Tek $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n^k} = \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}+1}}{2} \frac{(2\pi)^k B_k(\{x\})}{k!}$$

olur. $k = 1$ ve $x \in \mathbb{Z}$ ise sağ taraf sıfır olur.

(3) $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}}{2} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!}$$

olur.

(4) $k \geq 0$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{2} \frac{(2\pi)^{2k+1} B_{2k+1}(\frac{1}{4})}{(2k+1)!} = \frac{(-1)^k}{2} \frac{(\frac{\pi}{2})^{2k+1} E_{2k}}{(2k)!}$$

olur.

$\{a_n\}$ ile $\{b_n\}$ iki dizi olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ ise $n \rightarrow \infty$ için $\{a_n\}$ ile $\{b_n\}$ dizilere asimptotiktir denir ve $a_n \sim b_n$, $n \rightarrow \infty$ ile gösterilir.

Sonuç 2.17. (Cohen 2007) $k \rightarrow \infty$ için

$$B_{2k} \sim (-1)^{k-1} \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \quad \text{ve} \quad E_{2k} \sim (-1)^k \frac{2(2k)!}{(\frac{\pi}{2})^{2k+1}}$$

ifadeleri geçerlidir.

$(2k)!$, k sayısının herhangi bir kuvvetinden daha hızlı büyüdüğünden Sonuç 2.17, Bernoulli ve Euler sayıları içeren çoğu asimptotik formülün ıraksayacağını ifade eder. Paydasında $(2k)!$ gibi terimlerin bulunduğu az sayıda özdeşlik yakınsar.

Aşağıdaki sonuç Euler-Maclaurin Toplama Formülündeki kalan terim için üst sınırlar bulmada oldukça yararlıdır.

Sonuç 2.18. (Cohen 2007) k çift ise

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |B_k(\{x\})| = |B_k|$$

ve k tek ise

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |B_k(\{x\})| \leq \frac{7|B_k|}{k+1}$$

olur.

Yukarıdaki ikinci ifade 7 yerine 2π alındığında da doğrudur. Aslında 2π en iyi sabittir. Ancak uygulamalarda daha anlaşılabilir sınırlar 7 sayısı kullanılarak elde edilir.

2.3. Periyodik Bernoulli Sayıları, Polinomları ve Fonksiyonları

Bu tez çalışmasının temel materyallerinden olan periyodik Euler-Maclaurin Toplama Formülü için Bernoulli sayıları ve polinomlarının periyodik genişlemeleri gereklidir.

a bir periyodik aritmetik fonksiyon, yani $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, her $r \in \mathbb{Z}$ için $a(r+m) = a(r)$ özelliğinde olan bir m -periyodik, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, fonksiyon olsun.

Tanım 2.19. (Berndt ve Schoenfeld 1975, Cohen 2007) a , bir m -periyodik aritmetik fonksiyon olsun. Periyodik Bernoulli polinomları veya a -Bernoulli polinomları $\mathfrak{B}_k(a, x)$ ile gösterilir ve

$$E(a, t, x) = te^{tx} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{a(r) e^{rt}}{e^{mt} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{B}_k(a, x) \frac{t^k}{k!}$$

olarak tanımlanır. a -Bernoulli sayıları $\mathfrak{B}_k(a)$ ile gösterilir ve $\mathfrak{B}_k(a) = \mathfrak{B}_k(a, 0)$ olarak tanımlanır.

Periyodik Bernoulli sayıları, Bernoulli sayıları ile ilgili olan bazı sayı dizilerinin tanımlanmasına olanak sağlar. Bunlardan birisi olan χ karakteri ile genelleştirilmiş Bernoulli sayısı, karakter kavramını kullanır.

G bir sonlu çarpımsal Abel grubu olsun. G grubundan karmaşık sayıların $\mathbb{C}^*$ çarpımsal grubuna tanımlanan bir homomorfizmasına G grubunun bir karakteri denir. Dolayısıyla, G grubunun bir karakteri, $f : G \rightarrow \mathbb{C}^*$, her $x, y \in G$ için $f(xy) = f(x)f(y)$ özelliğinde olan bir dönüşümdür. G grubunun karakterlerinin kümesi $\text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ ile gösterilen ve G grubunun duali olarak adlandırılan bir grup oluşturur.

$n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ olmak üzere $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasındaki tersinir elemanların $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ grubu, mertebesi $\phi(n)$ olan bir Abel grubudur (burada ϕ , Euler ϕ -fonksiyonudur). Bu grubun dualindeki bir χ elemanına bir Dirichlet karakteri denir. Bu karakter, tanım kümesi n sayısı

ile aralarında asal olan tam sayılar, görüntü kümesi $\mathbb{C}^*$ ve $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ özelliğini sağlayan bir fonksiyon olarak ele alınabilir. Bu fonksiyon tüm tam sayılar kümesine $(a, b) \neq 1$ ise $\chi(a) = 0$ olacak şekilde genişletilebilir.

$n|m$ olmak üzere $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ grubunun her karakteri n modülüne göre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ grubunun bir karakteridir. Bu yüzden bir χ Dirichlet karakterinin modülü olan n sayısını en küçük olacak şekilde seçmek uygundur. Bu türde olan sayıya χ Dirichlet karakterinin kondüktörü denir ve d_χ (veya kısaca d) ile gösterilir. Bu çalışma boyunca her karakterin kondüktörü modülünde tanımlandığı varsayılacaktır. Bu türde olan karakterlere ilkel karakter denir. χ ve ψ , sırasıyla kondüktörleri d_χ ve d_ψ olan Dirichlet karakterleri olsun. $\chi\psi$ çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\gamma : (\mathbb{Z}/(f_\chi, f_\psi)\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{C}^*.$$

$\gamma(a) = \chi(a)\psi(a)$ homomorfizması ele alınsın. Bu durumda $\chi\psi$, γ ile ilişkili bir ilkel karakterdir ve $\chi\psi$ karakterinin kondüktörü olan $d_{\chi\psi}$ sayısı $\text{OBEB}(f_\chi, f_\psi)$ sayısını böler. Bu çalışma boyunca χ karakterinin kondüktörü d ile gösterilecektir.

Tanım 2.19'da a fonksiyonu kondüktörü m olan bir Dirichlet karakteri χ olarak seçilirse χ ile genelleştirilmiş Bernoulli sayısı $\mathfrak{B}_k(\chi) = B_{k,\chi}$ elde edilir:

$$\sum_{r=0}^{m-1} \frac{\chi(r) te^{rt}}{e^{mt} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_{k,\chi} \frac{t^k}{k!}.$$

Bu tanım gereği $B_{0,\chi} = 0$ olur.

Tanım 2.19'da $a(r) = (-1)^{r-1}$ alınırsa, a fonksiyonunun periyodu 2 olduğundan

$$\sum_{r=0}^1 \frac{(-1)^{r-1} te^{rt}}{e^{2t} - 1} = -\frac{2t}{e^{2t} - 1} + \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - 2^k) B_k \frac{t^k}{k!},$$

yani

$$\mathfrak{B}_k((-1)^{r-1}) = (1 - 2^k) B_k = \frac{G_k}{2}$$

elde edilir. Burada G_k ,

$$\frac{2t}{e^t + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} G_k \frac{t^k}{k!}, \quad R = \pi,$$

ile tanımlanan k . Genocchi sayısıdır. Genocchi sayıları tam sayılardır ve ilk birkaç Genocchi sayısı $G_0 = 0, G_1 = 1, G_2 = -1, G_3 = 0, G_4 = 1, G_5 = 0, G_6 = -3$ şeklindedir.

Herhangi bir α tam sayısı ve pozitif tek n tam sayısı için $\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ ile gösterilen Jacobi sembolü, n sayısının asal çarpanlarına karşılık gelen Legendre sembollerinin çarpımı olarak tanımlanır:

$$\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{k_1} \left(\frac{\alpha}{p_2}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{\alpha}{p_r}\right)^{k_r}, \quad n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}.$$

$\left(\frac{\alpha}{p}\right)$ Legendre sembolü, her α tam sayısı ve her tek p asal sayısı için

$$\left(\frac{\alpha}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \alpha \equiv 0(\text{mod } p) \text{ ise,} \\ 1, & \alpha \not\equiv 0(\text{mod } p) \text{ ve bir } x \text{ tam sayısı için } \alpha \equiv x^2(\text{mod } p) \text{ ise,} \\ -1, & \alpha \not\equiv 0(\text{mod } p) \text{ ve bu şekilde bir } x \text{ tam sayısı yoksa,} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.19'da $a(r) = \left(\frac{-4}{r}\right)$ Jacobi sembolü seçilirse, a fonksiyonunun periyodu 4 olur.

$$\left(\frac{-4}{r}\right) = \begin{cases} 0, & r \text{ tek ise,} \\ (-1)^{\frac{r-1}{2}}, & r \text{ çift ise,} \end{cases}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{B}_k \left(\left(\frac{-4}{r} \right) \right) \frac{t^k}{k!} &= -\frac{\left(\frac{-4}{1}\right) te^t}{e^{4t} - 1} + \frac{\left(\frac{-4}{3}\right) te^{3t}}{e^{4t} - 1} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2te^t}{e^{2t} + 1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k E_{k-1} \frac{t^k}{k!}, \end{aligned}$$

yani

$$\mathfrak{B}_0 \left(\left(\frac{-4}{r} \right) \right) = 0 \quad \text{ve} \quad \mathfrak{B}_k \left(\left(\frac{-4}{r} \right) \right) = -\frac{1}{2} k E_{k-1}, \quad k \geq 1$$

Euler sayıları elde edilir.

Tanım 2.19 yardımıyla periyodik Bernoulli polinomları için aşağıdaki özellikler elde edilir.

Önerme 2.20. (Cohen 2007) k bir tam sayı olsun.

(1) $k \geq 1$ için

$$\frac{d}{dx} (\mathfrak{B}_k(a, x)) = k \mathfrak{B}_{k-1}(a, x)$$

olur.

(2) $k \geq 0$ için

$$\mathfrak{B}_k(a, x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mathfrak{B}_j(a) x^{k-j} = m^{k-1} \sum_{r=0}^{m-1} a(r) B_k\left(\frac{x+r}{m}\right)$$

olur.

Önerme 2.20 (2) gereği örneğin

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_0(a) &= \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} a(r), \quad \mathfrak{B}_1(a) = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} a(r) \left(r - \frac{m}{2}\right), \\ \mathfrak{B}_2(a) &= \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} a(r) \left(r^2 - mr + \frac{m^2}{6}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bernoulli sayılarının farklı üreteç fonksiyonları ile verilen tanımlarının var olması nedeniyle aşağıdaki tanım gereklidir.

Tanım 2.21. (Berndt ve Schoenfeld 1975, Cohen 2007) $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı herhangi bir a fonksiyonu için a^- fonksiyonu $a^-(n) = a(-n)$ ile tanımlanır.

Tanım 2.19 kullanılarak doğrudan kanıtlanabilen aşağıdaki ifade periyodik Bernoulli polinomları için alternatif bir tanım olarak kullanılabilir.

Önteorem 2.22. (Berndt ve Schoenfeld 1975, Cohen 2007) *Periyodik Bernoulli polinomları için*

$$te^{tx} \sum_{r=1}^m \frac{a(r) e^{-rt}}{1 - e^{-mt}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{B}_k(a^-, x) \frac{t^k}{k!}$$

gösterimi geçerlidir.

Tanım 2.23. (Berndt ve Schoenfeld 1975, Cohen 2007) *Periyodik Bernoulli fonksiyonları* $\mathfrak{B}_k(a, \{x\}_a)$ ile gösterilir ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$\mathfrak{B}_k(a, \{x\}_a) = m^{k-1} \sum_{r \bmod m} a(r) B_k\left(\left\{\frac{x+r}{m}\right\}\right)$$

ile tanımlanır.

$a(r)$ ile $\left\{\frac{x+r}{m}\right\}$, r değişkenine göre periyotları m sayısını bölen periyodik fonksiyonlar olduğundan yukarıdaki tanımdaki sağ tarafta yer alan toplam $r \bmod m$ üzerinden alınmıştır. $\mathfrak{B}_k(a, \{x\}_a)$ fonksiyonu $B_k(\{x\})$ fonksiyonunun bir doğal genişlemesidir ve $\mathfrak{B}_k(a, \{0\}_a) = \mathfrak{B}_k(a)$ olur.

Önerme 2.24. (Cohen 2007) *Periyodik Bernoulli fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.*

- (1) $\mathfrak{B}_0(a, \{x\}_a) = \mathfrak{B}_0(a)$ olur.
- (2) $k \geq 1$ ve $x \notin \mathbb{Z}$ için $\frac{d}{dx}(\mathfrak{B}_k(a, \{x\}_a)) = k\mathfrak{B}_{k-1}(a, \{x\}_a)$ olur.
- (3) $k \geq 2$ için $\mathfrak{B}_k(a, \{x\}_a)$ sürekli.
- (4) $k \geq 1$ için $\int_0^m \mathfrak{B}_k(a, \{x\}_a) dx = 0$ olur.
- (5) $n \in \mathbb{Z}$ ise

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} \mathfrak{B}_1(a, \{x\}_a) = \mathfrak{B}_1(a, \{n\}_a),$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} \mathfrak{B}_1(a, \{x\}_a) = \mathfrak{B}_1(a, \{n\}_a) + a^-(n)$$

olur.

- (6) $r \in \mathbb{Z}$ için $(r, r+1)$ aralığında $\mathfrak{B}_k(a, \{x\}_a)$ fonksiyonu derecesi en fazla k olan bir polinomdur.
- (7) $k \geq 2$ için $\mathfrak{B}_k(a, \{x\}_a)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde $(k-2)$. mertebeden sürekli türevlidir.
- (8) Her $x \in \mathbb{R}$ ve $k \geq 0$ için $\mathfrak{B}_k(a, \{x+m\}_a) = \mathfrak{B}_k(a, \{x\}_a)$ olur.

Periyodik Bernoulli fonksiyonları Bernoulli fonksiyonlarının doğal genişlemeleridir. Bu yüzden Fourier açılımına sahiptirler.

Tanım 2.25. (Apostol 1976, Cohen 2007) *m -periyodik olan bir a aritmetik fonksiyonuna bağlı Gauss toplamı*

$$G(a, n) = \sum_{r \bmod m} a(r) e^{\frac{2\pi i n r}{m}}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.26. (Berndt ve Schoenfeld 1975, Cohen 2007) $k \geq 2$ için

$$\mathfrak{B}_k(a, \{x\}_a) = -\frac{k!m^{k-1}}{(2\pi i)^k} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{G(a, n)}{n^k} e^{\frac{2\pi i n x}{m}}$$

Fourier açılımı vardır. $k = 1$ için sağ taraf Cauchy esas değeri anlamındadır ve sol taraf $x \in \mathbb{Z}$ ise $\mathfrak{B}_1(a, \{x\}_a) + \frac{a(x)}{2}$ haline gelir.

Kanıt Önerme 2.24 gereği $\mathfrak{B}_k(a, \{x\}_a)$ fonksiyonu her mertebeden sürekli türevli parçalı sürekli ve $k \geq 2$ için sürekli. $k = 1$ için tam sayılarda süreksizlik noktalarına sahiptir ve m (veya m sayısını bölen) periyodu ile periyodiktir. Dolayısıyla,

$$c_{k,n} = \frac{1}{m} \int_0^m \mathfrak{B}_k(a, \{t\}_a) e^{-\frac{2\pi i n t}{m}} dt$$

olmak üzere

$$\mathfrak{B}_k(a, \{t\}_a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{k,n} e^{\frac{2\pi i n x}{m}}$$

yazılabilir. Bu ifade $k = 1$ için $x \notin \mathbb{Z}$ olduğunda da geçerlidir. $x \in \mathbb{Z}$ ise $\mathfrak{B}_1(a, \{t\}_a)$ yerine

$$\frac{\mathfrak{B}_1(a, t^+) + \mathfrak{B}_1(a, t^-)}{2} = \mathfrak{B}_1(a, \{t\}_a) + \frac{a(x)}{2}$$

yazılır.

$n = 0$ ve $k > 0$ için Önerme 2.24 (4) gereği $c_{k,n} = 0$ olur. $n \neq 0$ ve $k \geq 2$ için kısmi integrasyon ile

$$c_{k,n} = \frac{km}{2\pi i n} c_{k-1,n}$$

ve dolayısıyla

$$c_{k,n} = \frac{k! m^{k-1}}{(2\pi i n)^{k-1}} c_{1,n}$$

bulunur. $n \neq 0$ ve $k = 1$ için yine kısmi integrasyon ile

$$c_{1,n} = -\frac{1}{2\pi i n} \sum_{r \bmod m} a(r) e^{\frac{2\pi i n r}{m}} = -\frac{G(a, n)}{2\pi i n}$$

elde edilir. Bu ise kanıtı tamamlar. □

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Euler-Maclaurin Toplama Formülü ve Riemann Zeta Fonksiyonu

Bernoulli sayıları ve polinomları sayılar teorisinde önemli rol oynamaktadırlar. L -fonksiyonlarının özel değerleri ile p -adik zeta ve L -fonksiyonlarının tanımlanmasında doğrudan kullanım alanlarına sahiptirler. Ancak, Bernoulli sayıları ve polinomları analitik anlamda da oldukça önemli bir konuma sahiptirler. Bu konuma Euler-Maclaurin Toplama Formülü ile ulaşmışlardır.

Euler-Maclaurin Toplama Formülü basit fakat etkili bir araçtır. Bu formül kullanılarak, örneğin,

- bir ıraksak serinin N . kısmi toplamlar dizisi için bir asimptotik açılım
 - bir yakınsak serinin N . kısmi toplamlar dizisi için bir asimptotik açılım ve sonuç olarak serinin oldukça hızlı yakınsaması
 - bir belirli integral ile onun Riemann toplamı arasındaki fark için bir asimptotik açılım ve integral için daha hızlı ve doğru yaklaşım
 - karşılaştırma ile bir serinin yakınsak olup olmadığının belirlenmesi
- gibi problemler çözülebilir.

Euler-Maclaurin Toplama Formülünün temel amacı

$$\sum_{m=0}^{N-1} f(m)$$

şeklinde olan genel bir toplam için bir asimptotik açılım vermektir. Burada f , $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde tanımlı bir düzgün (örneğin, reel analitik) bir fonksiyondur.

Teorem 3.1. (Apostol 1976, Arakawa vd. 2014, Cohen 2007) a ile b , $a \leq b$ özelliğinde olan tam sayılar, M bir doğal sayı ve f , $[a, b]$ aralığında M . mertebeden sürekli türevli bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^b f(n) &= \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} [f(a) + f(b)] \\ &+ \sum_{k=1}^{M-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} [f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)] \\ &- \frac{(-1)^M}{M!} \int_a^b B_M(\{x\}) f^{(M)}(x) dx \end{aligned}$$

olur.

Kanıt $g(x)$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında M defa sürekli türevli bir fonksiyon olsun.

$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ olduğundan $B'_1(x) = 1$ olur. Buradan, kısmi integrasyon ile

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) dx &= [B_1(x) g(x)]_0^1 - \int_0^1 B_1(x) g'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} [g(1) + g(0)] - \int_0^1 B_1(x) g'(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. $B_k(x) = \frac{B'_{k+1}(x)}{k+1}$ kullanılarak kısmi integrasyon devam ettirilirse

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) dx &= \frac{1}{2} [g(1) + g(0)] - \frac{1}{2} [B_2(x) g'(x)]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 B_2(x) g''(x) dx \\ &= \frac{1}{2} [g(1) + g(0)] - \frac{1}{2} [B_2(x) g'(x)]_0^1 \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot 3} [B_3(x) g''(x)]_0^1 - \frac{1}{2 \cdot 3} \int_0^1 B_3(x) g'''(x) dx \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2} [g(1) + g(0)] + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} [B_{k+1}(x) g^{(k)}(x)]_0^1 \\ &\quad + \frac{(-1)^M}{M!} \int_0^1 B_M(x) g^{(M)}(x) dx \end{aligned}$$

bulunur. $k \geq 2$ ise $B_k(0) = B_k(1) = B_k$ ve $(-1)^k B_k = B_k$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) dx &= \frac{1}{2} [g(1) + g(0)] - \sum_{k=1}^{M-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} [g^{(k)}(1) - g^{(k)}(0)] \\ &\quad + \frac{(-1)^M}{M!} \int_0^1 B_M(x) g^{(M)}(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [g(1) + g(0)] &= \int_0^1 g(x) dx + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} [g^{(k)}(1) - g^{(k)}(0)] \\ &\quad - \frac{(-1)^M}{M!} \int_0^1 B_M(x) g^{(M)}(x) dx \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi, $g(x)$ fonksiyonu yerine $a \leq n \leq b-1$ olmak üzere $f(x+n)$ fonksiyonu ele alınsın. $B_M(x)$ polinomunun $[0, 1]$ aralığından tüm reel eksene periyodiklik ile genişlemesi sonucu elde edilen $B_M(\{x\})$ fonksiyonu, her n tam sayısı ve $n \leq x \leq n+1$ özelliğinde olan her x için $B_M(x-n) = B_M(\{x\})$ eşitliğini sağladığından

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [f(1) + f(0)] &= \int_n^{n+1} f(x) dx + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} [f^{(k)}(n+1) - f^{(k)}(n)] \\ &\quad - \frac{(-1)^M}{M!} \int_n^{n+1} B_M(\{x\}) f^{(M)}(x) dx \end{aligned}$$

bulunur. Teoremdaki formül, yukarıdaki ifadenin $n = a$ sayısından $n = b$ sayısına kadar toplanması ve her iki tarafa $\frac{1}{2} [f(1) + f(0)]$ eklenmesi ile elde edilir. $\square$

Herhangi bir a reel sayısı için $s \in \mathbb{C}$ olmak üzere a^s karmaşık kuvvet

$$a^s = e^{s \log a}$$

ile tanımlanır. s bir karmaşık sayı olmak üzere

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{N^s}$$

toplamı için $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = x^{-s}$ olmak üzere $a = 1$ ve $b = N$ için Euler-Maclaurin Toplama Formülü ele alınsın. f fonksiyonunun k . mertebeden türevi

$$f^{(k)}(x) = (-s)(-s-1) \cdots (-s-k+1) x^{-s-k} = (-1)^k s(s+1) \cdots (s+k-1) x^{-s-k}$$

olur. Ayrıca, $s \neq 1$ ise

$$\int_1^N \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1} \left(1 - \frac{1}{N^{s-1}} \right)$$

elde edilir. Dolayısıyla, Euler-Maclaurin Toplama Formülü gereği

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N^s} \right) + \frac{1}{s-1} \left(1 - \frac{1}{N^{s-1}} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{B_{k+1}}{k+1} \binom{s+k-1}{k} \left(1 - \frac{1}{N^{s+k}} \right) \\ &\quad - \binom{s+M-1}{M} \int_1^N B_M(x-[x]) x^{-s-M} dx \end{aligned} \quad (3.1)$$

bulunur. Bu sonuç kullanılarak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ serisinin $\text{Re}(s) > 1$ için mutlak yakınsak olduğu gösterilebilir.

Tanım 3.2. (Apostol 1976, Arakawa vd. 2014) *Riemann zeta fonksiyonu $\zeta(s)$ ile gösterilir ve*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ile tanımlanır.

Riemann zeta fonksiyonunu tanımlayan seri ifadesi $\text{Re}(s) > 1$ için mutlak yakınsaktır. $\text{Re}(s) > 1$ ise bu seri $\text{Re}(z) \geq \text{Re}(s)$ olan z değerleri için düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla, $\zeta(s)$ fonksiyonu $\text{Re}(s) > 1$ olan s değerleri için bir analitik fonksiyondur.

(3.1) ifadesinde $\text{Re}(s) > 1$ olsun ve $N \rightarrow \infty$ limiti ele alınsın. O halde,

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{B_{k+1}}{k+1} \binom{s+k-1}{k} \\ &\quad - \binom{s+M-1}{M} \int_1^{\infty} B_M(\{x\}) x^{-s-M} dx \end{aligned} \quad (3.2)$$

elde edilir. (3.1) ve (3.2) ifadelerinin farkı alınırsa

$$\begin{aligned} \zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} &= \frac{1}{(s-1)N^{1-s}} - \frac{1}{2N^s} + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{B_{k+1}}{k+1} \binom{s+k-1}{k} \frac{1}{N^{s+k}} \\ &\quad - \binom{s+M-1}{M} \int_1^{\infty} B_M(\{x\}) x^{-s-M} dx \end{aligned} \quad (3.3)$$

bulunur. Sağ tarafta yer alan integral $\text{Re}(s) > 1 - M$ için mutlak yakınsak olduğundan $\zeta(s)$ fonksiyonunun $\text{Re}(s) > 1 - M$ bölgesinde bir meromorf fonksiyon olarak devamı elde edilir. M herhangi bir doğal sayı olduğundan $\zeta(s)$ fonksiyonunun tüm s -düzlemine bir meromorf fonksiyon olarak devamı vardır. Ayrıca, $\zeta(s)$ fonksiyonunun $s = 1$ noktasında rezidüsü 1 olan basit kutbu vardır.

Riemann zeta fonksiyonunun pozitif olmayan tam sayılarda aldığı değerler aşağıdaki şekilde belirlenir.

Teorem 3.3. (Arakawa vd. 2014) *m bir pozitif tam sayı olmak üzere*

$$\zeta(1-m) = -\frac{B_m}{m} - \delta_{m1}$$

olur.

Kanıt (3.3) eşitliğinde $s = 1 - m$ alınır ve M sayısı $M \geq m$ olacak şekilde seçilirse sağ tarafta yer alan integralin önündeki binom katsayısı kaybolur. Bu sonuç, $\zeta(1 - m)$ değerinin bir sonlu toplam olarak yazılabileceğini ifade eder. Bu sonlu toplamın $-\frac{B_m}{m}$ olduğu gösterilecektir.

(3.3) eşitliğinde $s = 1 - m$ ve $M = m$ alınırsa

$$\begin{aligned} \zeta(1 - m) - \sum_{n=1}^N n^{m-1} &= -\frac{N^m}{m} - \frac{N^{m-1}}{2} \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} (1-m)(2-m) \cdots (k-m) N^{m-k+1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir. $m = 1$ ise

$$\zeta(0) = \sum_{n=1}^N 1 - N - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = B_1 - 1$$

bulunur. $m \geq 2$ olsun.

$$\begin{aligned} (1-m)(2-m) \cdots (k-m) &= (-1)^k k! \binom{m-1}{k}, \\ \frac{1}{k+1} \binom{m-1}{k} &= \frac{1}{m-k+1} \binom{m-1}{k-1}, \quad k < m-1, \\ (-1)^k B_k &= B_k, \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} (1-m)(2-m) \cdots (k-m) N^{m-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1} \binom{m-1}{k} N^{m-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{m-2} (-1)^k \binom{m-1}{k-1} B_{k+1} \frac{N^{m-k+1}}{m-k+1} + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{m} \\ &= \sum_{k=2}^{m-1} (-1)^{k-1} \binom{m-1}{k} B_k \frac{N^{m-k}}{m-k} + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{m} \\ &= - \sum_{k=2}^{m-1} \binom{m-1}{k} B_k \frac{N^{m-k}}{m-k} - \frac{B_m}{m} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (3.4) eşitliğinin sağ tarafı

$$- \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} B_k \frac{N^{m-k}}{m-k} - \frac{B_m}{m}$$

olur. Diğer taraftan, kuvvetler toplamı formülü gereği

$$\sum_{n=1}^N n^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} B_k \frac{N^{m-k}}{m-k}$$

olduğundan (3.4) gereği $m \geq 2$ için

$$\zeta(1-m) = -\frac{B_m}{m}$$

elde edilir. □

3.2. Dirichlet Serileri

Bu tez çalışması boyunca a aritmetik fonksiyonuna bağlı bir Dirichlet serisi kavramı ile

$$F(s; a) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)}{m^s}$$

olarak tanımlanan ve $\text{Re}(s) > 1$ için yakınsak olan seri gösterimi kullanılacaktır. Bu çalışma boyunca kullanılacak olan bazı özel Dirichlet serileri şu şekilde sıralanabilir:

- Riemann zeta fonksiyonu (bakınız Tanım 3.2)

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

- Dirichlet L -fonksiyonu (bakınız Bölüm 3.4)

$$L(s; \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

- Dirichlet eta fonksiyonu

$$\eta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^s} = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s).$$

- Dirichlet beta fonksiyonu

$$\beta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^s}.$$

- Dirichlet lambda fonksiyonu

$$\lambda(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^s} = (1 - 2^{-s}) \zeta(s).$$

- Dirichlet l -fonksiyonu

$$l(s; \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \chi(m)}{m^s}.$$

Bu fonksiyonlar ile Bernoulli sayıları ve ilgili sayı dizileri arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur: n bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} \zeta(1-n) &= -\frac{B_n}{n}, \quad L(1-n; \chi) = -\frac{B_{n,\chi}}{n}, \\ \eta(1-n) &= -\frac{G_n}{2n}, \quad \beta(1-n) = \frac{E_{n-1}}{2}, \quad \lambda(1-n) = (2^n - 1) \frac{B_n}{n}, \\ l(1-n; \chi) &= \frac{1}{2} E_{n-1, \bar{\chi}}(0), \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. İlk eşitlik, Bölüm 3.1’de gösterilmiştir. İkinci eşitlik klasik bir sonuçtur (örneğin Apostol 1976, Akiyama v.d. 2014, Cohen 2007, ayrıca bakınız Bölüm 3.4). Sonraki üç eşitlik Abramowitz ve Stegun 1964 kaynağında bulunabilir. Son eşitlik ise Can ve Dağlı 2017 kaynağında kanıtlanmıştır. Bu eşitlikte $E_{n, \bar{\chi}}(x)$, tek olan d kontürtörüne sahip χ Dirichlet karakteri için

$$E_{n, \bar{\chi}}(x) = d^n \sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j \chi(j) E_n \left(\frac{j+x}{d} \right)$$

ile tanımlanan $\bar{\chi}$ karakterine bağlı genelleştirilmiş Euler polinomudur.

3.3. Hurwitz Zeta Fonksiyonu

Riemann zeta fonksiyonunun bir genellemesi, gamma fonksiyonu ve L -fonksiyonları ile ilişkileri nedeniyle Hurwitz zeta fonksiyonu önemli bir araçtır.

Tanım 3.4. (Apostol 1976, Cohen 2007) *Bir pozitif reel x sayısı için $\zeta(s, x)$ Hurwitz zeta fonksiyonu $\text{Re}(s) > 1$ için*

$$\zeta(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s}$$

ile tanımlanır.

Yukarıda yer alan sağ taraftaki seri $\text{Re}(s) > 1$ için mutlak yakınsak olduğundan $\zeta(s, a)$ fonksiyonu $\text{Re}(s) > 1$ için tanımlıdır. Özel olarak, $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$ veya $\zeta(s, 2) = \zeta(s) - 1$ Riemann zeta fonksiyonu elde edilir.

Hurwitz zeta fonksiyonunun tanımı, logaritmanın esas dalı seçimi ile

$$\frac{1}{(n+x)^s} = \exp(-s \log(n+x))$$

eşitliği kullanılarak $x \in \mathbb{C} - \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ için genişletilebilir. Ancak bu logaritmanın dal seçimi gibi birçok problem ortaya çıkaracağından x değişkeni bir pozitif reel sayı olarak kısıtlanmıştır.

$\zeta(s, x)$ Hurwitz zeta fonksiyonunun tüm s -düzlemine analitik devamı mümkündür. Bu genişleme ile Bernoulli polinomları arasındaki ilişki kurulabilir.

Önerme 3.5. (Cohen 2007) $Re(s) > 1$ için

$$\zeta(s, x+1) = \zeta(s, x) - x^{-s}$$

fonksiyonel eşitlik,

$$\frac{\partial}{\partial x} (\zeta(s, x)) = -\zeta(s+1, x)$$

kısmi türevli diferansiyel denklem,

$$\zeta(s, x) \rightarrow x^{-s}, Re(s) \rightarrow \infty$$

asimptotik formül ve

$$\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = (2^{-s} - 1) \zeta(s)$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt İlk ifade Tanım 3.4'de n yerine $n+1$ yazılırsa elde edilir. Sonraki iki ifade serinin ve türevinin yakınsaklığının sonucudur. Son ifade

$$\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = 2^s \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^s} = 2^s \lambda(s) = 2^s (1 - 2^{-s}) \zeta(s)$$

bağıntısından elde edilir. □

Sonuç 3.6. (Cohen 2007) $|y| < x$ için

$$\zeta(s, x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{s+k-1}{k} y^k \zeta(s+k, x)$$

seri gösterimi geçerlidir.

Kanıt Tanım 3.4 ve $\binom{s}{k}$ binom operatörünün

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

tanımı gereği

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{s+k-1}{k} y^k \zeta(s+k, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} y^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{s+k}}$$

elde edilir. $|y| < x$ olduğundan sağ taraftaki çift katlı seri mutlak yakınsaktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} y^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{s+k}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \left(\frac{y}{n+x}\right)^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s} \left(1 + \frac{y}{n+x}\right)^{-s} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x+y)^s} = \zeta(s, x+y) \end{aligned}$$

bulunur. □

Sonuç 3.6 ile verilen ifadenin terimleri düzenlenirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.7. (Cohen 2007) $|y| < x$ için

$$\zeta(s, x) = \frac{\zeta(s-1, x) - \zeta(s-1, x+y)}{y(s-1)} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \binom{s+k-1}{k} y^k \frac{\zeta(s+k, x)}{k+1}$$

olur. Özel olarak, $y = 1$ ise

$$\zeta(s, x) = \frac{x^{1-s}}{s-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \binom{s+k-1}{k} \frac{\zeta(s+k, x)}{k+1} \quad (3.5)$$

elde edilir.

Yukarıdaki sonuçlar, $\zeta(s, x)$ Hurwitz zeta fonksiyonunun analitik devamını verir.

Önerme 3.8. (Cohen 2007) Sabitlenmiş pozitif x reel sayısı için $\zeta(s, x)$ Hurwitz zeta fonksiyonu tüm s -düzlemine tek bir kutup noktasına sahip bir meromorf fonksiyon olarak genişletilebilir. Söz konusu kutup noktası $s = 1$ noktasında ortaya çıkar ve $s = 1$, rezidüsü 1 olan bir kutup noktasıdır.

Kanıt $\zeta(s, x+1) = \zeta(s, x) - x^{-s}$ olduğundan $x > 1$ için ifadeyi kanıtlamak yeterlidir. Önerme 3.5 gereği bu durum için $k \rightarrow \infty$ olduğunda $\zeta(s+k, x) \rightarrow x^{-s}x^{-k}$ olduğundan (3.5) eşitliği $\zeta(s, x)$ fonksiyonunu, $k \geq 1$ için sadece $\zeta(s+k, x)$ içeren bir yakınsak geometrik seri olarak ifade eder. Dolayısıyla, $\zeta(s, x)$ genişliği 1 olan şeritler ile önce $\operatorname{Re}(s) > 0$ için daha sonra $\operatorname{Re}(s) > -1$ şeklinde analitik olarak genişletilebilir. Kutup noktası (3.5) eşitliğindeki $\frac{x^{1-s}}{s-1}$ teriminden ortaya çıkar. $s = 1 - k$ noktasındaki kutup noktaları ise $\binom{s+k-1}{k}$ binom operatörü değerleri ile sadeleşir. $\square$

Tanım 3.4 ile verilen Hurwitz zeta fonksiyonunun negatif tam sayılarda aldığı değerler Bernoulli polinomları cinsinden ifade edilir. Bunun için Euler-Maclaurin Toplama Formülünün bir uygulaması sonucu elde edilen aşağıdaki ifade kullanılabilir.

Önerme 3.9. (Cohen 2007) $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq -1$ ve x bir pozitif reel sayı olmak üzere $k \geq 1$ olan her $k > \operatorname{Re}(\alpha) + 1$ için

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^N (m+x)^{\alpha} &= \zeta(-\alpha, x) + \frac{(N+x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{(N+x)^{\alpha}}{2} \\ &\quad + \sum_{j=2}^k \binom{\alpha}{j-1} \frac{B_j}{j} (N+x)^{\alpha-j+1} \\ &\quad + (-1)^k \binom{\alpha}{k} \int_N^{\infty} (t+x)^{\alpha-k} B_k(\{t\}) dt \end{aligned}$$

olur.

Önerme 3.9'de $N = 0$ ve $\alpha = k - 1$ alınırsa

$$-k\zeta(1-k, x) = x^k + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} B_j x^{k-j} = B_k(x),$$

yani

$$\zeta(1-k, x) = -\frac{B_k(x)}{k} \quad (3.6)$$

bulunur.

3.4. Dirichlet L-Fonksiyonu

χ modülo m bir Dirichlet karakteri olsun. $\operatorname{Re}(s) > 1$ için p asal sayı olmak üzere

$$L(s; \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ asal}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

mutlak yakınsak seri ve Euler çarpımı şeklinde tanımlanan $L(s; \chi)$ fonksiyonuna Dirichlet L -fonksiyonu denir.

$d|m$ olmak üzere χ karakterinin konduktörü d ve karşılık gelen ilkel karakter χ_d ise

$$L(s; \chi) = L(s; \chi_d) \prod_{p|m} \left(1 - \frac{\chi_d(p)}{p^s}\right)$$

elde edilir (Cohen 2007). Özel olarak $m = p^k$ ve χ bir aşıkır olmayan karakter ise $L(s; \chi) = L(s; \chi_d)$ olur. Bir sonlu Euler çarpımı ile çalışmak kolay olduğundan bu bölüm boyunca ilkel karakterler ele alınacaktır.

$L(s; \chi)$ Dirichlet L fonksiyonu, $\zeta(s, x)$ Hurwitz zeta fonksiyonu cinsinden ifade edilebilir. Bu gösterim, Dirichlet L -fonksiyonunun analitik devamının incelenmesine ve özel değerlerinin hesaplanmasına olanak sağlar.

Önerme 3.10. (Cohen 2007) $d|m$ olmak üzere χ , konduktörü d olan bir karakter olsun.

(1) $\zeta(s, x)$ Hurwitz zeta fonksiyonu olmak üzere

$$L(s; \chi) = m^{-s} \sum_{r=1}^m \chi(r) \zeta\left(s; \frac{r}{m}\right)$$

olur.

(2) $L(s; \chi)$ fonksiyonu tüm karmaşık s -düzlemine bir analitik fonksiyon olarak genişletilebilir.

(3.6) eşitliği ve Önerme 3.10 (1) ile verilen Dirichlet L -fonksiyonunun Hurwitz zeta fonksiyonu cinsinden gösterimi ile $L(s; \chi)$ fonksiyonunun pozitif olmayan tam sayılardaki değeri, $k \geq 1$ tam sayıları için

$$L(1-k; \chi) = -\frac{B_{k, \chi}}{k}$$

şeklinde elde edilir.

3.5. Periyodik Euler-Maclaurin Toplama Formülü

Periyodik Euler-Maclaurin Toplama Formülü, Euler-Maclaurin Toplama Formülünün bir genellemesidir ve

$$\sum_j a(j) f(j)$$

şeklinde olan daha genel toplamlar için kullanılır.

Önerme 3.11. (Berndt ve Schoenfeld 1975, Cohen 2007) a , periyodu m olan (veya m sayısını bölen) bir periyodik aritmetik fonksiyon, α ile β , $\alpha \leq \beta$ özelliğinde olan iki reel sayı ve f , $k \geq 1$ için $[\alpha, \beta]$ aralığında k . mertebeden sürekli türeve sahip bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\alpha < r \leq \beta \\ r \in \mathbb{Z}}} a(r) f(r) &= \mathfrak{B}_0(a^-) \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \\ &+ \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{j!} (\mathfrak{B}_j(a^-, \{\beta\}_a) f^{(j-1)}(\beta) - \mathfrak{B}_j(a^-, \{\alpha\}_a) f^{(j-1)}(\alpha)) \\ &+ \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_{\alpha}^{\beta} f^{(k)}(t) \mathfrak{B}_k(a^-, \{t\}_a) dt \end{aligned}$$

olur.

Kanıt $\mathfrak{B}_k(a, \{x\}_a)$ periyodik Bernoulli fonksiyonu için

$$R_k(a, f) = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_{\alpha}^{\beta} f^{(k)}(t) \mathfrak{B}_k(a^-, \{t\}_a) dt$$

tanımlansın. Kısmi integrasyon gereği

$$\begin{aligned} R_k(a, f) &= \frac{(-1)^{k-1}}{k!} (\mathfrak{B}_k(a^-, \{\beta\}_a) f^{(k-1)}(\beta) - \mathfrak{B}_k(a^-, \{\alpha\}_a) f^{(k-1)}(\alpha)) \\ &+ R_{k-1}(a^-, f) \end{aligned}$$

elde edilir. $k = 1$ ise α ile β tam sayı olmadığında

$$\begin{aligned} R_{k-1}(a^-, f) &= f(\beta) \mathfrak{B}_1(a^-, \{\beta\}_a) - f(\alpha) \mathfrak{B}_1(a^-, \{\alpha\}_a) \\ &- \mathfrak{B}_0(a^-) \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + \sum_{\substack{\alpha < r \leq \beta \\ r \in \mathbb{Z}}} a(r) f(r) \end{aligned}$$

bulunur. $R_{k-1}(a^-, f) = R_{k-1}(a^-, f, \alpha, \beta)$, α ile β değişkenlerine göre bir sürekli fonksiyondur ve Önerme 2.24 gereği sağ taraf da sürekli. Bu ise kanıtı tamamlar. $\square$

Bu tez çalışmasında periyodik Euler-Maclaurin Toplama Formülünün aşağıdaki ifadesi kullanılacaktır.

Sonuç 3.12. (Cohen 2007) a , periyodu m olan (veya m sayısını bölen) bir periyodik aritmetik fonksiyon, N , $m|N$ özelliğinde olan bir tam sayı ve f , $k \geq 1$ için $[1, N]$ aralığında

k. mertebeden sürekli türe ve sahip bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^N a(r) f(r) &= \mathfrak{B}_0(a) \int_1^N f(t) dt + \sum_{j=1}^k \frac{\mathfrak{B}_j(a)}{j!} (f^{(j-1)}(N) - f^{(j-1)}(1)) \\ &\quad + \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_1^N f^{(k)}(t) \mathfrak{B}_k(a^-, \{t\}_a) dt \end{aligned}$$

olur. Ayrıca, f fonksiyonu $[1, \infty)$ aralığında k. mertebeden sürekli türevli, $\sum a(r) f(r)$ serisi ile $\int_1^\infty f(t) dt$ integrali yakınsak ve $0 \leq j \leq k-1$ için $n \rightarrow \infty$ olduğunda $f^{(j)}(n) \rightarrow 0$ ise

$$\begin{aligned} \sum_{r=n}^\infty a(r) f(r) &= \mathfrak{B}_0(a) \int_n^\infty f(t) dt - \sum_{j=1}^k \frac{\mathfrak{B}_j(a)}{j!} f^{(j-1)}(n) \\ &\quad + \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_n^\infty f^{(k)}(t) \mathfrak{B}_k(a^-, \{t\}_a) dt \end{aligned}$$

olur.

Periyodik Euler-Maclaurin Formülü, özel durumları ve çeşitli genellemeleri Berndt 1975, Berndt ve Schoenfeld 1975, Dağlı ve Can 2015 ve Dağlı ve Can 2017 kaynaklarında ele alınmıştır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. İki Değişkenli Hurwitz Zeta Fonksiyonu

Bu bölümde, iki değişkenli Hurwitz zeta fonksiyonu tanımlanarak bazı özellikleri elde edilecektir.

$s, z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) > 1$, $\operatorname{Re}(z) > 1$ ve $0 < x \leq 1$ özelliğinde olan $x \in \mathbb{R}$ için

$$H(z, s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s} \frac{1}{(n+x)^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \sum_{m=0}^n \frac{1}{(m+x)^s}$$

olsun. Bu toplamın $x = 1$ özel durumu, gamma fonksiyonu çalışmalarında ortaya çıkan Tornheim çifte toplamını verir (Huard vd. 1996).

$H(z, s, x)$ fonksiyonu

$$H(z, s, x) + H(s, z, x) = \zeta(z, x) \zeta(s, x) + \zeta(z+s, x)$$

ile verilen resiprosite bağıntısını sağlar. Bu bağıntının kanıtı için $H(z, s, x)$ fonksiyonunun iki farklı gösterimi elde edilecektir. Bu gösterimlerde Euler-Maclaurin Toplama Formülünün uygulanması ile elde edilen aşağıdaki sonuç kullanılmıştır.

Önteorem 4.1. $\operatorname{Re}(z) > 1$ ve $\operatorname{Re}(s) > 1$ için

$$\begin{aligned} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(n+x)^s} + \frac{1}{s-1} \frac{1}{(n+x)^{s-1}} \\ &\quad + \sum_{r=1}^{k-1} \binom{s+r-1}{r} \zeta(-r) \frac{1}{(n+x)^{s+r}} \\ &\quad - \binom{s+k-1}{k} \int_n^{\infty} \frac{B_k(\{t\})}{(t+x)^{s+k}} dt \end{aligned}$$

olur.

Kanıt $\operatorname{Re}(s) > 1$ için $N \geq n+1$ olmak üzere

$$\sum_{m=n+1}^N \frac{1}{(m+x)^s}$$

toplamı ele alınsın ve $f(t) = \frac{1}{(t+x)^s}$ olsun.

$$f^{(r)}(t) = (-1)^r s(s+1) \cdots (s+r-1) (t+x)^{-s-r}$$

ve $s \neq 1$ ise

$$\int_n^N \frac{dt}{(t+x)^s} = \frac{1}{s-1} \left[\frac{1}{(n+x)^{s-1}} - \frac{1}{(N+x)^{s-1}} \right]$$

olduğundan bir $k \geq 2$ tam sayısı için Euler-Maclaurin Toplama Formülü gereği

$$\begin{aligned} \sum_{m=n+1}^N \frac{1}{(m+x)^s} &= -\frac{1}{(n+x)^s} + \sum_{m=n}^N \frac{1}{(m+x)^s} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(N+x)^s} - \frac{1}{(n+x)^s} \right] + \frac{1}{s-1} \left[\frac{1}{(n+x)^{s-1}} - \frac{1}{(N+x)^{s-1}} \right] \\ &\quad + \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^r \frac{B_{r+1}}{r+1} \binom{s+r-1}{r} \left[\frac{1}{(N+x)^{s+r}} - \frac{1}{(n+x)^{s+r}} \right] \\ &\quad - \binom{s+k-1}{k} \int_n^N \frac{B_k(\{t\})}{(t+x)^{s+k}} dt \end{aligned}$$

bulunur. $\text{Re}(s) > 1$ olduğundan $N \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{(N+x)^s} \rightarrow 0 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{(N+x)^{s-1}} \rightarrow 0$$

olur. $B_k(\{t\})$ fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$\int_n^\infty \frac{dt}{(t+x)^{s+k}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_n^N \frac{dt}{(t+x)^{s+k}}$$

integrali yakınsak ise

$$\int_n^\infty \frac{B_k(\{t\})}{(t+x)^{s+k}} dt$$

integrali yakınsaktır. $\text{Re}(s) > 1$ olduğundan

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_n^N \frac{dt}{(t+x)^{s+k}} = \frac{1}{s+k-1} \frac{1}{(n+x)^{s+k-1}}$$

bulunur, yani

$$\int_n^\infty \frac{dt}{(t+x)^{s+k}}$$

integrali yakınsaktır. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=n+1}^N \frac{1}{(m+x)^s} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(n+x)^s} + \frac{1}{s-1} \frac{1}{(n+x)^{s-1}} \\ &\quad + \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{r+1} \frac{B_{r+1}}{r+1} \binom{s+r-1}{r} \frac{1}{(n+x)^{s+r}} \\ &\quad - \binom{s+k-1}{k} \int_n^{\infty} \frac{B_k(\{t\})}{(t+x)^{s+k}} dt \end{aligned}$$

bulunur. $r \geq 1$ olduğundan $(-1)^{r+1} B_{r+1} = B_{r+1}$ ve $\zeta(-r) = -\frac{B_{r+1}}{r+1}$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(n+x)^s} + \frac{1}{s-1} \frac{1}{(n+x)^{s-1}} \\ &\quad + \sum_{r=1}^{k-1} \binom{s+r-1}{r} \zeta(-r) \frac{1}{(n+x)^{s+r}} \\ &\quad - \binom{s+k-1}{k} \int_n^{\infty} \frac{B_k(\{t\})}{(t+x)^{s+k}} dt \end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 4.2. $k \geq 2$ tam sayısı ve $\operatorname{Re}(z) > 1$, $\operatorname{Re}(s) > 1$ için

$$\begin{aligned} H(z, s, x) &= \zeta(z, x) \zeta(s, x) + \frac{1}{2} \zeta(s+z, x) - \frac{1}{s-1} \zeta(s+z-1, x) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{k-1} \binom{s+r-1}{r} \zeta(-r) \zeta(s+z+r, x) \\ &\quad + \binom{s+k-1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \int_n^{\infty} \frac{B_k(\{t\})}{(t+x)^{s+k}} dt \end{aligned}$$

gösterimi vardır.

Kanıt $\operatorname{Re}(s) > 1$ için

$$\zeta(s, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s}$$

olduğundan

$$\sum_{m=0}^n \frac{1}{(m+x)^s} = \zeta(s, x) - \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s}$$

yazılabilir. Önteorem 4.1 gereği $\operatorname{Re}(s) > 1$, $\operatorname{Re}(z) > 1$ için

$$\begin{aligned}
 H(z, s, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \sum_{m=0}^n \frac{1}{(m+x)^s} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \left(\zeta(s, x) - \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s} \right) \\
 &= \zeta(z, x) \zeta(s, x) + \frac{1}{2} \zeta(s+z, x) - \frac{1}{s-1} \zeta(s+z-1, x) \\
 &\quad + \sum_{r=1}^{k-1} \binom{s+r-1}{r} \zeta(-r) \zeta(s+z+r, x) \\
 &\quad + \binom{s+k-1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \int_n^{\infty} \frac{B_k(\{t\})}{(t+x)^{s+k}} dt
 \end{aligned}$$

bulunur. □

Önerme 4.3. $k \geq 2$ tam sayısı ve $\operatorname{Re}(z) > 1$, $\operatorname{Re}(s) > 1$ için

$$\begin{aligned}
 H(s, z, x) &= \frac{1}{2} \zeta(s+z, x) - \frac{1}{z-1} \zeta(s+z-1, x) \\
 &\quad + \sum_{r=1}^{k-1} \binom{z+r-1}{r} \zeta(-r) \zeta(s+z+r, x) \\
 &\quad - \binom{z+k-1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s} \int_n^{\infty} \frac{B_k(\{t\})}{(t+x)^{z+k}} dt
 \end{aligned}$$

gösterimi vardır.

Kanıt $H(s, z, x)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned}
 H(s, z, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s} \sum_{m=0}^n \frac{1}{(m+x)^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{(n+x)^s (m+x)^z} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s (m+x)^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s (n+x)^z} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \left(\frac{1}{(n+x)^s} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s} \right) \\
 &= \zeta(z+s, x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s}
 \end{aligned}$$

bulunur. Önteorem 4.1 gereği

$$\begin{aligned} H(s, z, x) &= \frac{1}{2} \zeta(s+z, x) - \frac{1}{z-1} \zeta(s+z-1, x) \\ &+ \sum_{r=1}^{k-1} \binom{z+r-1}{r} \zeta(-r) \zeta(s+z+r, x) \\ &- \binom{z+k-1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s} \int_n^{\infty} \frac{B_k(\{t\})}{(t+x)^{z+k}} dt \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Önerme 4.4. $4.9\operatorname{Re}(z) > 1, \operatorname{Re}(s) > 1$ için

$$H(z, s, x) + H(s, z, x) = \zeta(z, x) \zeta(s, x) + \zeta(z+s, x)$$

resiprosite bağıntısı sağlanır.

Kanıt Önerme 4.2 ve Önerme 4.3’de elde edilen bağıntılar taraf tarafa toplanırsa istenilen elde edilir. $\square$

Tanım 4.5. $s, z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 2, \operatorname{Re}(z) > 2$ ve $0 < x \leq 1$ özelliğinde olan $x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} Y(z, s, x) &= (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^{s-1}} \frac{1}{(n+x)^z} \\ &- (s-1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m > n}}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s} \frac{1}{(n+x)^{z-1}} \end{aligned}$$

olsun.

$Y(z, s, x)$ fonksiyonu, $H(z, s, x)$ ve Hurwitz zeta fonksiyonu cinsinden bir gösterime sahiptir.

Önerme 4.6. $Y(z, s, x)$ fonksiyonu için

$$Y(z, s, x) = (z-1) H(z, s-1, x) + (s-1) H(z-1, s, x) - (s-1) \zeta(s, x) \zeta(z-1, x)$$

gösterimi vardır.

Kanıt $H(z, s, x)$ ve $Y(z, s, x)$ fonksiyonlarının tanımından

$$\begin{aligned}
& (z-1)H(z, s-1, x) + (s-1)H(z-1, s, x) \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \sum_{m=0}^n \frac{1}{(m+x)^{s-1}} + (s-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{z-1}} \sum_{m=0}^n \frac{1}{(m+x)^s} \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \left(\zeta(s-1, x) - \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^{s-1}} \right) \\
&\quad + (s-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{z-1}} \left(\zeta(s, x) - \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s} \right) \\
&= (z-1) \zeta(s-1, x) \zeta(z, x) - (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m>n}}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \frac{1}{(m+x)^{s-1}} \\
&\quad + (s-1) \zeta(s, x) \zeta(z-1, x) - (s-1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m>n}}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{z-1}} \frac{1}{(m+x)^s} \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^{s-1}} \frac{1}{(n+x)^z} \\
&\quad - (s-1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m > n}}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s} \frac{1}{(n+x)^{z-1}} + (s-1) \zeta(s, x) \zeta(z-1, x) \\
&= Y(z, s, x) + (s-1) \zeta(s, x) \zeta(z-1, x)
\end{aligned}$$

bulunur. □

Teorem 4.7. $s, z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) > 2$, $\operatorname{Re}(z) > 2$ ve $0 < x \leq 1$ özelliğinde olan $x \in \mathbb{R}$ için $Y(s, z, x)$ fonksiyonu $(s, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ çiftinin bir tam fonksiyonu olarak devam ettirilebilir. Ayrıca, $Y(z, s, x)$ fonksiyonu

$$Y(z, s, x) + Y(s, z, x) = (s+z-2) \zeta(s+z-1, x)$$

eşitliğini sağlar.

Kanıt $H(s, z, x)$ fonksiyonu için Önerme 4.2'de verilen ifade Önerme 4.6'de yerine yazılırsa

$$Y(z, s, x) = Y_1(z, s, x) + Y_2(z, s, x) + Y_3(z, s, x)$$

bulunur. Burada,

$$Y_1(z, s, x) = (z-1) \zeta(s-1, x) \zeta(z, x) + \frac{s+z-2}{2} \zeta(s+z-1, x) - \frac{s+z-3}{s-2} \zeta(s+z-2, x),$$

$$Y_2(z, s, x) = \sum_{r=1}^{k-1} \left\{ (z-1) \binom{s+r-2}{r} + (s-1) \binom{s+r-1}{r} \right\} \times \zeta(-r) \zeta(s+z+r-1, x)$$

ve

$$Y_3(z, s, x) = (z-1) \binom{s+k-2}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \int_n^{\infty} \frac{B_k(\{t\})}{(t+x)^{s+k-1}} dt + (s-1) \binom{s+k-1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{z-1}} \int_n^{\infty} \frac{B_k(\{t\})}{(t+x)^{s+k}} dt$$

şeklindedir.

Şimdi, $\zeta(s, x)$ Hurwitz zeta fonksiyonunun $s = 1$ noktasında rezidüsü 1 olan basit kutbu var olduğundan $Y_1(z, s, x)$ fonksiyonu (k sayısından bağımsız olarak) (s, z) çiftinin bir tam fonksiyonudur. Diğer taraftan,

$$(z-1) \binom{s+r-2}{r} + (s-1) \binom{s+r-1}{r} = \binom{s+r-2}{r} (s+z+r-2)$$

oldüğundan $Y_2(z, s, x)$ fonksiyonu (k sayısına bağlı olarak) (s, z) çiftinin bir tam fonksiyonudur. Dolayısıyla, $Y(z, s, x)$ fonksiyonunun $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ bölgesinde bir tam fonksiyona devam ettirilebileceğini göstermek için verilen bir $L \in \mathbb{R}$ sayısına karşılık $Y_3(z, s, x)$ fonksiyonunun sağ tarafının $\text{Re}(s) > L$, $\text{Re}(z) > L$ için bir analitik fonksiyon olduğu uygun bir $k \geq 2$ seçiminin var olduğunu göstermek yeterlidir. Verilen $k \geq 2$ sayısı için bir $M > 0$ sayısı, her $t \in \mathbb{R}$ için $|B_k(\{t\})| \leq M$ olacak şekilde seçilsin. Bu durumda, $\text{Re}(s) > 2 - \frac{k}{2}$, $\text{Re}(z) > 2 - \frac{k}{2}$ için

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \int_n^{\infty} \frac{B_k(\{t\})}{(t+x)^{s+k-1}} dt \right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+x)^{\frac{k}{2}-2} \int_n^{\infty} M (t+x)^{\frac{k}{2}-2-k+1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+x)^{\frac{k}{2}-2} M \frac{(n+x)^{-\frac{k}{2}}}{\frac{k}{2}} \\ &= \frac{2M}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{z-1}} \int_n^{\infty} \frac{B_k(\{t\})}{(t+x)^{s+k}} dt \right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+x)^{\frac{k}{2}-2+1} \int_n^{\infty} M(t+x)^{\frac{k}{2}-2-k} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+x)^{\frac{k}{2}-1} M \frac{(n+x)^{-\frac{k}{2}-1}}{\frac{k}{2}+1} \\ &= \frac{2M}{k+2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \end{aligned}$$

bulunur. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ bir yakınsak seri olduğundan $Y_3(z, s, x)$ fonksiyonu $\operatorname{Re}(s) > 2 - \frac{k}{2}$, $\operatorname{Re}(z) > 2 - \frac{k}{2}$ için analitiktir. Dolayısıyla, $Y(z, s, x)$ fonksiyonu $(s, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ çiftinin bir tam fonksiyonu olarak devam ettirilebilir.

Şimdi,

$$Y(z, s, x) = (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^{s-1}} \frac{1}{(n+x)^z} - (s-1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m > n}}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s} \frac{1}{(n+x)^{z-1}}$$

ve

$$Y(s, z, x) = (s-1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^{z-1}} \frac{1}{(n+x)^s} - (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m > n}}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^z} \frac{1}{(n+x)^{s-1}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} Y(z, s, x) + Y(s, z, x) &= (z-1) \zeta(s+z-1, x) + (s-1) \zeta(s+z-1, x) \\ &= (s+z-2) \zeta(s+z-1, x) \end{aligned}$$

elde edilir. □

n ile m pozitif tam sayılar olmak üzere Teorem 4.7'de $z = 1 - n$ ve $s = 1 - m$ yazılısın. $k-1 > \max\{n, m\}$ seçilirse Teorem 4.7'ün kanıtında tanımlanan $Y(z, s, x)$ fonksiyonu içerdiği binom katsayısı gereği sıfır olur.

$$\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k} \quad \text{ve} \quad \zeta(1-k, x) = -\frac{B_k(x)}{k}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} Y(1-n, 1-m, x) &= -\frac{B_{n+1}(x) B_m(x)}{n+1} - \frac{B_{n+m+1}(x)}{n+1} \\ &\quad + \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} (-1)^r \binom{n+1}{r} B_r B_{n+m+1-r}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer düşünce ile

$$Y(1-m, 1-n, x) = -\frac{B_{m+1}(x) B_n(x)}{m+1} - \frac{B_{n+m+1}(x)}{m+1} \\ + \frac{1}{m+1} \sum_{r=1}^{m+1} (-1)^r \binom{m+1}{r} B_r B_{n+m+1-r}(x)$$

bulunur. Teorem 4.7 ile verilen

$$Y(z, s, x) + Y(s, z, x) = (s+z-2) \zeta(s+z-1, x)$$

resiprosite bağıntısı gereği aşağıdaki ifade elde edilir.

Sonuç 4.8. *n ve m pozitif tam sayıları için*

$$\frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} (-1)^r \binom{n+1}{r} B_r B_{n+m+1-r}(x) \\ + \frac{1}{m+1} \sum_{r=1}^{m+1} (-1)^r \binom{m+1}{r} B_r B_{n+m+1-r}(x) \\ = \frac{B_{n+1}(x) B_m(x)}{n+1} + \frac{B_{m+1}(x) B_n(x)}{m+1} \\ + \frac{n+m+2}{(n+1)(m+1)} B_{n+m+1}(x) + B_{n+m}(x)$$

olur.

4.2. İki Değişkenli Dirichlet L-Fonksiyonu

$L(s; \chi)$ Dirichlet Lfonksiyonunun $\zeta(s, x)$ Hurwitz zeta fonksiyonu cinsinden ifadesi olan ve Önerme 3.10 (1) ile verilen

$$L(s; \chi) = m^{-s} \sum_{r=1}^m \chi(r) \zeta\left(s; \frac{r}{m}\right)$$

eşitliğinden motivasyon ile iki değişkenli Dirichlet L-fonksiyonu

$$L(z, s; \chi) = d^{-z-s} \sum_{r=1}^d \chi(r) H\left(s, z, \frac{r}{d}\right)$$

olsun. Burada χ , kondüktörü d olan bir Dirichlet karakteridir.

$H(z, s, x)$ fonksiyonu tüm $(z, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ için bir analitik fonksiyon olarak devam ettirilebildiğinden $L(s, z; \chi)$ fonksiyonu da tüm (z, s) çifti için genişletilebilir.

Önerme 4.9. $L(z, s; \chi)$ fonksiyonu $(s, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ çiftinin bir tam fonksiyonu olarak devam ettirilebilir.

$H(z, s, x)$ fonksiyonu için geçerli olan

$$H(z, s, x) + H(s, z, x) = \zeta(z, x) \zeta(s, x) + \zeta(z + s, x)$$

resiprosite bağıntısı gereği $L(z, s; \chi)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifade elde edilir.

Önerme 4.10. $L(s, z; \chi)$ fonksiyonu için

$$L(s, z; \chi) = L(s + z; \chi) + d^{-z-s} \sum_{r=1}^d \chi(r) \zeta\left(z, \frac{r}{d}\right) \zeta\left(s, \frac{r}{d}\right)$$

olur.

4.3. İki Değişkenli Dirichlet Serileri

s ile z karmaşık sayılar ve a ile b periyodik aritmetik fonksiyonlar olmak üzere

$$H(s, z; a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{a(n) b(m)}{n^s m^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \sum_{m=1}^n \frac{b(m)}{m^z} \quad (4.1)$$

olsun. $H(s, z; a, b)$ fonksiyonu ilk olarak Basu tarafından (Basu 2008) reel s ve z değişkenleri için tanımlanmıştır.

$H(s, z; a, b)$ Dirichlet serisinin bazı temel özellikleri için ilk olarak $\sum \frac{b(m)}{m^z}$ toplamı periyodik Euler-Maclaurin Toplama Formülü kullanılarak hesaplanacaktır. Sonuç 3.12'de $f(t) = t^{-z}$ ve $\text{Re}(z) > 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{b(m)}{m^z} &= \frac{\mathfrak{B}_0(b)}{(z-1)n^{z-1}} - \frac{\mathfrak{B}_1(b)}{n^z} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \binom{z+j-1}{j} \frac{\mathfrak{B}_{j+1}(b)}{j+1} \frac{1}{n^{z+j}} \\ &\quad - \binom{z+k-1}{k} \int_n^{\infty} \frac{\mathfrak{B}_k(b^-, \{t\}_b)}{t^{z+k}} dt, \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^n \frac{b(m)}{m^z} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^z} + \frac{b(n)}{n^z} - \sum_{m=n}^{\infty} \frac{b(m)}{m^z} \\
 &= F(z; b) + \frac{b(n)}{n^z} - \frac{\mathfrak{B}_0(b)}{(z-1)n^{z-1}} + \frac{\mathfrak{B}_1(b)}{n^z} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \binom{z+j-1}{j} \frac{\mathfrak{B}_{j+1}(b)}{j+1} \frac{1}{n^{z+j}} \\
 &\quad + \binom{z+k-1}{k} \int_n^{\infty} \frac{\mathfrak{B}_k(b^-, \{t\}_b)}{t^{z+k}} dt.
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeyi (4.1)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 H(s, z; a, b) &= F(s; a) F(z; b) + F(s+z; ab) - \frac{\mathfrak{B}_0(b)}{z-1} F(s+z-1; a) \\
 &\quad + \mathfrak{B}_1(b) F(s+z; a) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \binom{z+j-1}{j} \frac{\mathfrak{B}_{j+1}(b)}{j+1} F(s+z+j; a) \\
 &\quad + \binom{z+k-1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \int_n^{\infty} \frac{\mathfrak{B}_k(b^-, \{t\}_b)}{t^{z+k}} dt.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Benzer şekilde Sonuç 3.12'de $f(t) = t^{-s}$ ve $\text{Re}(s) > 1$ alınır

$$\begin{aligned}
 H(z, s; b, a) &= F(s; a) F(z; b) + F(s+z; ab) - \frac{\mathfrak{B}_0(a)}{s-1} F(s+z-1; b) \\
 &\quad + \mathfrak{B}_1(a) F(s+z; b) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \binom{s+j-1}{j} \frac{\mathfrak{B}_{j+1}(a)}{j+1} F(s+z+j; b) \\
 &\quad + \binom{s+k-1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^z} \int_n^{\infty} \frac{\mathfrak{B}_k(a^-, \{t\}_b)}{t^{s+k}} dt.
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 4.11. a ve b periyodik aritmetik fonksiyonlarıyla iki değişkenli Dirichlet serisi

$$Y(s, z; a, b) = (s-1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{a(n)b(m)}{n^s m^{z-1}} - (z-1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m > n}}^{\infty} \frac{a(n)b(m)}{n^{s-1} m^z} \tag{4.3}$$

olsun.

Sağ tarafta yer alan her iki seri $\operatorname{Re}(s) > 2$ ve $\operatorname{Re}(z) > 2$ için yakınsaktır.

Aşağıdaki ifade $Y(s, z; a, b)$ formülü bir resiprosite formülü vermektedir.

Teorem 4.12. $\operatorname{Re}(s) > 2$ ve $\operatorname{Re}(z) > 2$ için

$$Y(s, z; a, b) + Y(z, s; b, a) = (s + z - 2) F(s + z - 1; ab)$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt Tanım 4.11 gereği

$$\begin{aligned} Y(s, z; a, b) + Y(z, s; b, a) &= (s-1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{a(n)b(m)}{n^s m^{z-1}} - (z-1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m > n}}^{\infty} \frac{a(n)b(m)}{n^{s-1} m^z} \\ &\quad + (z-1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{b(n)a(m)}{n^z m^{s-1}} - (s-1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m > n}}^{\infty} \frac{b(n)a(m)}{n^{z-1} m^s} \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m > n}}^{\infty} \frac{a(n)b(m)}{n^{s-1} m^z} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^z} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a(n)}{n^{s-1}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^z} \left(-\frac{a(m)}{m^{s-1}} + \sum_{n=1}^m \frac{a(n)}{n^{s-1}} \right) \\ &= -F(s+z-1; ab) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m \frac{a(n)b(m)}{n^{s-1} m^z} \\ &= -F(s+z-1; ab) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{a(m)b(n)}{m^{s-1} n^z} \\ &= -F(s+z-1; ab) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{b(n)a(m)}{n^z m^{s-1}}, \end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m > n}}^{\infty} \frac{b(n)a(m)}{n^{z-1} m^s} = -F(s+z-1; ab) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{a(n)b(m)}{n^s m^{z-1}},$$

olduğundan istenilen resiprosite formülü elde edilir. $\square$

$Y(s, z; a, b)$ ile $H(s, z; a, b)$ fonksiyonlarının tanımları incelendiğinde $Y(s, z; a, b)$ ile $H(s, z; a, b)$ arasındaki bir ilişki beklemek doğaldır.

Teorem 4.13. $Re(s) > 2$ ve $Re(z) > 2$ için

$$Y(s, z; a, b) = (s-1)H(s, z-1; a, b) + (z-1)H(s-1, z; a, b) - (z-1)F(s-1; a)F(z; b)$$

olur.

Kanıt (4.1) eşitliği gereği

$$\begin{aligned} H(s-1, z; a, b) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{a(n)b(m)}{n^{s-1}m^z} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^{s-1}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^z} - \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^z} \right) \\ &= F(s-1; a)F(z; b) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m > n}}^{\infty} \frac{a(n)b(m)}{n^{s-1}m^z} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$H(s, z-1; a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{a(n)b(m)}{n^s m^{z-1}},$$

olduğundan

$$\begin{aligned} &(s-1)H(s, z-1; a, b) + (z-1)H(s-1, z; a, b) \\ &= Y(s, z; a, b) + (z-1)F(s-1; a)F(z; b), \end{aligned}$$

bulunur. □

(4.2) ile Teorem 4.13 $Y(s, z; a, b)$ fonksiyonunun tüm $(s, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ için analitik devamını verir. (4.2) ile Teorem 4.13 ayrıca $Y(s, z; a, b)$ fonksiyonunun hesaplanmasına olanak sağlar. Daha açık bir ifade ile k bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} Y_1(s, z; a, b) &= (s-1)F(s; a)F(z-1; b) + (s+z-2)F(s+z-1; ab) \\ &\quad + (s+z-2)\mathfrak{B}_1(b)F(s+z-1; a) \\ &\quad - \frac{s+z-3}{z-2}\mathfrak{B}_0(b)F(s+z-2; a), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} Y_2(s, z; a, b) &= \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \binom{z+j-2}{j} (s+z+j-2) \frac{\mathfrak{B}_{j+1}(b)}{j+1} F(s+z+j-1; a), \end{aligned} \quad (4.5)$$

ve

$$Y_3(s, z; a, b) = (s-1) \binom{z+k-2}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \int_n^{\infty} \frac{\mathfrak{B}_k(\bar{b}, \{t\}_b)}{t^{z+k-1}} dt \\ + (z-1) \binom{z+k-1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^{s-1}} \int_n^{\infty} \frac{\mathfrak{B}_k(\bar{b}, \{t\}_b)}{t^{z+k}} dt, \quad (4.6)$$

için

$$Y(s, z; a, b) = Y_1(s, z; a, b) + Y_2(s, z; a, b) + Y_3(s, z; a, b) \quad (4.7)$$

yazılabilir.

4.4. Bernoulli Sayıları ve İlgili Sayı Dizilerini İçeren Simetrik Bağıntılar

(4.7) gösterimi kullanılarak $Y(s, z; a, b)$ fonksiyonunun özel değerleri elde edilebilir. Teorem 4.12 ile verilen resiprosite formülü ve a ile b aritmetik fonksiyonların uygun seçimleri ile bu değerler Bernoulli sayıları ve ilgili sayı dizilerini içeren simetrik girişim tipli ifadeler elde edilmesine olanak sağlar.

n ile m pozitif tam sayılar olmak üzere (4.7) eşitliğinde (ve dolayısıyla (4.4), (4.5) ve (4.6) bağıntılarında) $s = 1 - n$ ve $z = 1 - m$ yazılsın. k tam sayısı, (4.6) ile verilen $Y_3(1 - n, 1 - m; a, b)$ sıfır olacak şekilde yeteri kadar büyük seçilsin. Daha açık bir ifade ile k tam sayısı $k - 1 > \max\{n, m\}$ olacak şekilde seçilsin. Bu durumda (4.6) ifadesinde yer alan binom katsayısı sıfır olacağından $Y_3(1 - n, 1 - m; a, b)$ (ve karşılık gelen $Y_3(1 - m, 1 - n; b, a)$) sıfır olur. Dolayısıyla,

$$Y(1 - n, 1 - m; a, b) \\ = -nF(1 - n; a) F(1 - (m + 1); b) - (n + m) F(1 - (n + m); ab) \\ - (n + m) \mathfrak{B}_1(b) F(1 - (n + m); a) \\ - \frac{n + m + 1}{m + 1} \mathfrak{B}_0(b) F(1 - (n + m + 1); a) \\ + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \binom{-(m+1-j)}{j} [-(n + m - j)] \frac{\mathfrak{B}_{j+1}(b)}{j + 1} F(1 - (n + m - j); a)$$

elde edilir.

$$(-1)^j \binom{-(m+1-j)}{j} = \binom{m}{j}$$

olduğundan yukarıdaki ifadede yer alan toplam

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} [-(n+m-j)] \frac{\mathfrak{B}_{j+1}(b)}{j+1} F(1-(n+m-j); a) \\
 &= \frac{1}{m+1} \sum_{j=2}^{m+1} \binom{m+1}{j} [-(n+m+1-j)] \mathfrak{B}_j(b) F(1-(n+m+1-j); a) \\
 &= (n+m) \mathfrak{B}_1(b) F(1-(n+m); a) \\
 & \quad + \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} [-(n+m+1-j)] \mathfrak{B}_j(b) F(1-(n+m+1-j); a).
 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
 & Y(1-n, 1-m; a, b) \\
 &= -nF(1-n; a) F(1-(m+1); b) - (n+m) F(1-(n+m); ab) \\
 & \quad - \frac{n+m+1}{m+1} \mathfrak{B}_0(b) F(1-(n+m+1); a) \\
 & \quad + \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} [-(n+m+1-j)] \mathfrak{B}_j(b) F(1-(n+m+1-j); a).
 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
 & Y(1-m, 1-n; b, a) \\
 &= -mF(1-m; b) F(1-(n+1); a) - (n+m) F(1-(n+m); ab) \\
 & \quad - \frac{n+m+1}{n+1} \mathfrak{B}_0(a) F(1-(n+m+1); b) \\
 & \quad + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} [-(n+m+1-j)] \mathfrak{B}_j(a) F(1-(n+m+1-j); b).
 \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi Teorem 4.12 ile verilen resiprosite formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} [-(n+m+1-j)] \mathfrak{B}_j(b) F(1-(n+m+1-j); a) \\
 & \quad + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} [-(n+m+1-j)] \mathfrak{B}_j(a) F(1-(n+m+1-j); b) \\
 &= nF(1-n; a) F(1-(m+1); b) + mF(1-m; b) F(1-(n+1); a) \tag{4.8} \\
 & \quad + \frac{n+m+1}{m+1} \mathfrak{B}_0(b) F(1-(n+m+1); a) + \frac{n+m+1}{n+1} \mathfrak{B}_0(a) F(1-(n+m+1); b) \\
 & \quad + (n+m) F(1-(n+m); ab).
 \end{aligned}$$

(4.8) eşitliğinde a ile b aritmetik fonksiyonlarının özel seçimleri ile Bernoulli sayıları ve ilgili sayı dizilerini içeren girişim tipli simetrik bağıntılar elde edilir.

- $a(m) = 1$ ve $b(m) = \chi(m)$ alınırsa

$$\mathfrak{B}_j(a) = B_j, \quad \mathfrak{B}_j(b) = B_{j,\chi}, \quad \mathfrak{B}_0(a) = B_0 = 1, \quad \mathfrak{B}_0(b) = B_{0,\chi} = 0,$$

ve $t \geq 1$ tam sayısı için

$$\begin{aligned} F(1-t; a) &= \zeta(1-t) = -\frac{B_t}{t}, \\ F(1-t; b) &= F(1-t; ab) = L(1-t; \chi) = -\frac{B_{t,\chi}}{t} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} B_j B_{n+m+1-j,\chi} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} B_{j,\chi} B_{n+m+1-j} \\ &= \frac{B_n B_{m+1,\chi}}{m+1} - \frac{B_m B_{n+1,\chi}}{n+1} - \frac{B_{n+m+1,\chi}}{n+1} - B_{n+m,\chi} \end{aligned}$$

elde edilir.

- $a(m) = b(m) = \chi(m)$ alınırsa

$$\mathfrak{B}_j(a) = \mathfrak{B}_j(b) = B_{j,\chi}, \quad \mathfrak{B}_0(a) = \mathfrak{B}_0(b) = B_{0,\chi} = 0,$$

ve $t \geq 1$ tam sayısı için

$$\begin{aligned} F(1-t; a) &= F(1-t; b) = L(1-t; \chi) = -\frac{B_{t,\chi}}{t}, \\ F(1-t; ab) &= L(1-t; \chi^2) = -\frac{B_{t,\chi^2}}{t} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} B_{j,\chi} B_{n+m+1-j,\chi} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} B_{j,\chi} B_{n+m+1-j,\chi} \\ &= \frac{B_{n,\chi} B_{m+1,\chi}}{m+1} + \frac{B_{m,\chi} B_{n+1,\chi}}{n+1} - B_{n+m,\chi^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede $\chi(m) = 1$ alınırsa Woodcock tarafından verilen $A_{n,m} = A_{m,n}$ eşitliği elde edilir.

- $a(m) = 1$ ve $b(m) = (-1)^{m-1}$ alınırsa

$$\mathfrak{B}_j(a) = B_j, \quad \mathfrak{B}_j(b) = (1-2^j) B_j = \frac{G_j}{2}, \quad \mathfrak{B}_0(a) = B_0 = 1, \quad \mathfrak{B}_0(b) = \frac{G_0}{2} = 0,$$

ve $t \geq 1$ tam sayısı için

$$\begin{aligned} F(1-t; a) &= \zeta(1-t) = -\frac{B_t}{t}, \\ F(1-t; b) &= F(1-t; ab) = \eta(1-t) = \frac{G_t}{2t} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} G_j B_{n+m+1-j} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} B_j G_{n+m+1-j} \\ &= \frac{G_{n+m+1}}{n+1} + G_{n+m} - \frac{B_n G_{m+1}}{m+1} - \frac{G_m B_{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

- $a(m) = b(m) = (-1)^{m-1}$ alınırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_j(a) &= \mathfrak{B}_j(b) = (1-2^j) B_j = \frac{G_j}{2}, \\ \mathfrak{B}_0(a) &= \beta_0(b) = \frac{G_0}{2} = 0, \end{aligned}$$

ve $t \geq 1$ tam sayısı için

$$\begin{aligned} F(1-t; a) &= F(1-t; b) = \eta(1-t) = \frac{G_t}{2t}, \\ F(1-t; ab) &= \zeta(1-t) = -\frac{B_t}{t} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} G_j G_{n+m+1-j} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} G_j G_{n+m+1-j} \\ &= 4B_{n+m} - \frac{G_n G_{m+1}}{m+1} - \frac{G_m G_{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

- $a(m) = \chi(m)$ ve $b(m) = (-1)^{m-1}$ alınırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_j(a) &= B_{j,\chi}, \quad \mathfrak{B}_j(b) = (1-2^j) B_j = \frac{G_j}{2}, \\ \mathfrak{B}_0(a) &= B_{0,\chi} = \mathfrak{B}_0(b) = \frac{G_0}{2} = 0, \end{aligned}$$

ve $t \geq 1$ tam sayısı için

$$\begin{aligned} F(1-t; a) &= L(1-t; \chi) = -\frac{B_{t,\chi}}{t}, \quad F(1-t; b) = \eta(1-t) = \frac{G_t}{2t}, \\ F(1-t; ab) &= l(1-t; \bar{\chi}) = E_{t-1, \bar{\chi}}(0) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} G_j B_{n+m+1-j, \chi} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} B_{j, \chi} G_{n+m+1-j} \\ &= 2(n+m) E_{n+m-1, \bar{\chi}}(0) - \frac{B_{n, \chi} G_{m+1}}{m+1} - \frac{G_m B_{n+1, \chi}}{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

- $a(m) = 1$ ve $b(m) = \left(\frac{-4}{m}\right)$ alınırsa

$$\mathfrak{B}_j(a) = B_j, \quad \mathfrak{B}_j(b) = \frac{j}{2} E_{j-1},$$

$$\mathfrak{B}_0(a) = B_0 = 1, \quad \mathfrak{B}_0(b) = 0,$$

ve $t \geq 1$ tam sayısı için

$$F(1-t; a) = \zeta(1-t) = -\frac{B_t}{t},$$

$$F(1-t; b) = F(1-t; ab) = \beta(1-t) = \frac{E_{t-1}}{2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} j E_{j-1} B_{n+m+1-j} \\ & - \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} B_j (n+m+1-j) E_{n+m-j} \\ &= \frac{n+m+1}{n+1} E_{n+m} + (n+m) E_{n+m-1} - B_n E_m - \frac{m}{n+1} E_{m-1} B_{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

- $a(m) = b(m) = \left(\frac{-4}{m}\right)$ alınırsa

$$\mathfrak{B}_j(a) = \mathfrak{B}_j(b) = \frac{j}{2} E_{j-1}, \quad \mathfrak{B}_0(a) = \mathfrak{B}_0(b) = 0,$$

ve $t \geq 1$ tam sayısı için

$$F(1-t; a) = F(1-t; b) = \beta(1-t) = \frac{E_{t-1}}{2},$$

$$F(1-t; ab) = \lambda(1-t) = (2^{t-1} - 1) \frac{B_t}{t}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} j E_{j-1} (n+m+1-j) E_{n+m-j} \\ & + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} j E_{j-1} (n+m+1-j) E_{n+m-j} \\ & = -n E_{n-1} E_m - m E_{m-1} E_n - 4 (2^{n+m-1} - 1) B_{n+m} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu alt bölümde özet olarak, Bernoulli sayıları ve ilgili sayı dizileri için doğrusal olmayan ifadeler elde edilmiştir. Bu doğrusal olmayan ifadeler girişim tipli özdeşlikler olarak değerlendirilebilir. Bu tipte olan özdeşliklere verilebilecek en klasik örnek Euler özdeşliğidir. Bu tür özdeşliklerin çeşitli varyasyonları ve genellemeleri için Dilcher ve Vignat 2016 kaynağı ve oradaki kaynakça incelenebilir. Özel olarak, Woodcock tarafından verilen $A_{n,m} = A_{m,n}$ bağıntısı, Pan ve Sun (Pan ve Sun 2006) ve Chu (Chu 2012) tarafından Bernoulli ve Euler polinomları için genişletilmiştir.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, matematiksel analiz ve sayılar teorisinde önemli konumlara sahip olan Riemann zeta, Hurwitz zeta ve Dirichlet serilerinin bazı genellemeleri ele alınmıştır. Bu genellemeler, Bernoulli sayıları ve ilgili sayı dizileri ile Bernoulli polinomlarını içeren simetrik toplamaların elde edilmesinde kullanılmıştır. Daha açık bir ifade ile $s, z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) > 2$, $\operatorname{Re}(z) > 2$ ve $0 < x \leq 1$ özelliğinde olan $x \in \mathbb{R}$ için

$$Y(s, z, x) = (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^{s-1}} \frac{1}{(n+x)^z} \\ - (s-1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m > n}}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^s} \frac{1}{(n+x)^{z-1}}$$

iki değişkenli Hurwitz tipli zeta fonksiyonu,

$$L(s, z; \chi) = d^{-s-z} \sum_{r=1}^d \chi(r) H\left(s, z, \frac{r}{d}\right)$$

iki değişkenli Dirichlet L -fonksiyonu ve a ve b periyodik aritmetik fonksiyonlarına bağlı

$$Y(s, z; a, b) = (s-1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{a(n) b(m)}{n^s m^{z-1}} - (z-1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m > n}}^{\infty} \frac{a(n) b(m)}{n^{s-1} m^z}$$

iki değişkenli Dirichlet serisi tanımlanmıştır. $Y(s, z, x)$ ve $Y(s, z; a, b)$ fonksiyonlarının sağladığı resiprosite bağıntıları pozitif n ve m tam sayıları için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} (-1)^r \binom{n+1}{r} B_r B_{n+m+1-r}(x) \\ & + \frac{1}{m+1} \sum_{r=1}^{m+1} (-1)^r \binom{m+1}{r} B_r B_{n+m+1-r}(x) \\ & = \frac{B_{n+1}(x) B_m(x)}{n+1} + \frac{B_{m+1}(x) B_n(x)}{m+1} \\ & + \frac{n+m+2}{(n+1)(m+1)} B_{n+m+1}(x) + B_{n+m}(x), \\ & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} B_{j,\chi} B_{n+m+1-j} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} B_j B_{n+m+1-j,\chi} \\ & = \frac{B_n B_{m+1,\chi}}{m+1} + \frac{B_{n+1} B_{m,\chi}}{n+1} - \frac{B_{n+m+1,\chi}}{n+1} - B_{n+m,\chi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} B_{j,\chi} B_{n+m+1-j,\chi} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} B_{j,\chi} B_{n+m+1-j,\chi} \\ &= \frac{B_{n,\chi} B_{m+1,\chi}}{m+1} + \frac{B_{m,\chi} B_{n+1,\chi}}{n+1} - B_{n+m,\chi^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} G_j B_{n+m+1-j} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} B_j G_{n+m+1-j} \\ &= G_{n+m} + \frac{G_{n+m+1}}{n+1} - \frac{B_n G_{m+1}}{m+1} - \frac{B_{n+1} G_m}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} G_j G_{n+m+1-j} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} G_j G_{n+m+1-j} \\ &= 4B_{n+m} - \frac{G_n G_{m+1}}{m+1} - \frac{G_{n+1} G_m}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} G_j B_{n+m+1-j,\chi} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} B_{j,\chi} G_{n+m+1-j} \\ &= 2(n+m) E_{n+m-1,\bar{\chi}}(0) - \frac{B_{n,\chi} G_{m+1}}{m+1} - \frac{B_{n+1,\chi} G_m}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} j E_{j-1} B_{n+m+1-j} \\ & \quad + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (n+m+1-j) E_{n+m-j} B_j \\ &= B_n E_m + \frac{m}{n+1} E_{m-1} B_{n+1} - \frac{n+m+1}{n+1} E_{n+m} - (n+m) E_{n+m-1}, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} j E_{j-1} (n+m+1-j) E_{n+m-j} \\ & \quad + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} j E_{j-1} (n+m+1-j) E_{n+m-j} \\ &= n E_{n-1} E_m + m E_{m-1} E_n + 4(2^{n+m-1} - 1) B_{n+m} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilen doğrusal olmayan girişim tipli toplamların elde edilmesine olanak sağlamıştır.

Bu tez çalışmasında kullanılan temel materyallerden olan Euler-Maclaurin Toplama Formülü ve periyodik Euler-Maclaurin Toplama Formülü, tanımlanan fonksiyonların analitik devam tartışmalarında kullanılabilir. Örneğin, $\sum \frac{a(n)}{n^s}$ Dirichlet serisinin analitik devamı periyodik Euler-Maclaurin Toplama Formülünün sonucu olarak elde edilir. Ayrıca, $S(a; x) = \sum_{n \leq x} a(n)$ olmak üzere $S(a; x) = O(x^2)$ (karşılık olarak $S(b; x) = O(x^2)$) kabul edilirse $Y(s, z; a, b)$ fonksiyonu tüm $(s, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ değişkenleri için bir meromorf fonksiyon olarak genişletilebilir.

$Y(s, z; a, b)$ fonksiyonunun meromorfik devamı, katlı zeta fonksiyonları kullanılarak da ifade edilebilir. h ile g , sırasıyla, a ve b periyodik aritmetik fonksiyonların periyotları olsun. Bu durumda, $Y(s, z; a, b)$ fonksiyonunun tanımında yer alan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{a(n) b(m)}{n^s m^{z-1}}$$

toplamı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{a(n) b(m)}{n^s m^{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(n+m) b(m)}{(n+m)^s m^{z-1}}.$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$n = hgN + i, \quad 0 \leq i < hg, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

$$m = hgM + j, \quad 1 \leq j \leq hg, \quad M = 0, 1, 2, \dots,$$

yazılırsa

$$\zeta_2(s, z; \alpha, \beta) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{(N+\alpha)^s (N+M+\beta)^z}$$

çift katlı Hurwitz zeta fonksiyonu olmak üzere (Matsumoto 1998)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\infty} \frac{a(n) b(m)}{n^s m^{z-1}} &= \sum_{i=0}^{hg-1} \sum_{j=1}^{hg} a(i+j) b(j) \\ &\times \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{((N+M)hg + i+j)^s (hgM+j)^{z-1}} \\ &= (hg)^{1-z-s} \sum_{i=0}^{hg-1} \sum_{j=1}^{hg} a(i+j) b(j) \zeta_2\left(z-1, s; \frac{j}{hg}, \frac{i+j}{hg}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $Y(s, z; a, b)$ fonksiyonunun tanımında yer alan

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m > n}}^{\infty} \frac{a(n) b(m)}{n^{s-1} m^z}$$

toplamı için

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m>n}}^{\infty} \frac{a(n)b(m)}{n^{s-1}m^z} = (hg)^{1-z-s} \sum_{j=0}^{hg-1} \sum_{i=1}^{hg} a(i)b(i+j) \zeta_2 \left(s-1, z; \frac{i}{hg}, \frac{i+j}{hg} \right)$$

bulunur. Dolayısıyla, $Y(s, z; a, b)$ fonksiyonunun devamı, $\zeta_2(s, z; \alpha, \beta)$ çift katlı Hurwitz zeta fonksiyonunun analitik devamı ile ifade edilebilir. Çift katlı Hurwitz zeta fonksiyonu ve ilgili fonksiyonların analitik devam tartışmaları Akiyama ve Ishikawa 2002, Arakawa ve Kaneko 2004, Kaneko ve Tasaka 2013, Matsumoto 1998, Matsumoto 2003, Matsumoto ve Tanigawa 2003, Murty ve Sinha 2006 ve Terhune 2004 kaynaklarında ele alınmıştır.

6. KAYNAKLAR

- Abramowitz, M., Stegun, I.A. 1964. Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, 1046 sayfa.
- Alkan, E. 2013. Approximation by special values of harmonic zeta function and log-sine integrals, *Commun. Number Theory Phys.* 7: 515–550.
- Akiyama, S., Ishikawa, H. 2002. On analytic continuation of multiple L -functions and related zeta-functions. In: Jia C., Matsumoto K. (eds) *Analytic Number Theory. Developments in Mathematics*, vol 6. Springer, Boston, MA, 2002, 408 sayfa.
- Apostol, T.M. 1976. *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 356 sayfa.
- Apostol, T.M., Vu, T.H. 1984. Dirichlet series related to the Riemann zeta function, *J. Number Theory* 19: 85–102.
- Arakawa, T., Kaneko, M. 2004. On multiple L -values, *J. Math. Soc. Japan* 56: 967–991.
- Arakawa, T., Ibuyikama, T., Kaneko, M. 2014. *Bernoulli Numbers and Zeta Functions*, Springer Verlag, New York, 274 sayfa.
- Basu, A. 2008. A new method in the study of Euler sums, *Ramanujan J.* 16: 7–24.
- Basu, A., Apostol, T.M. 2000. A new method for investigating Euler sums, *Ramanujan J.* 4: 397–419.
- Berndt, B.C. 1975. Character analogues of the Poisson and Euler-Maclaurin summation formulas with applications, *J. Number Theory* 7: 413–445.
- Berndt, B.C., Schoenfeld, L. 1975. Periodic analogues of the Euler-Maclaurin and Poisson summation formulas with applications to number theory, *Acta Arith.* 28: 23–68.
- Can, M., Dağlı, M.C. 2017. Character analogue of the Boole summation formula with applications, *Turk. J. Math.* 41: 1204–1223.

- Chu, W. 2012. Reciprocal formulae for convolutions of Bernoulli and Euler polynomials, *Rend. Mat. Appl.* 32: 17–73.
- Cohen, H. 2007. Number Theory-Volume II: Analytic and Modern Tools. Springer, New York, 596 sayfa.
- Dağlı, M.C., Can, M. 2015. On reciprocity formula of character Dedekind sums and the integral of products of Bernoulli polynomials, *J. Number Theory* 156: 105–124.
- Dağlı, M.C., Can, M. 2017. Periodic analogues of Dedekind sums and transformation formulas of Eisenstein series, *Ramanujan J.* 44: 301–341.
- Dilcher, K., Vignat, C. 2016. General convolution identities for Bernoulli and Euler polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* 435: 1478–1498.
- Flajolet, P., Salvy, B. 1998. Euler sums and contour integral representations, *Exp. Math.* 7: 15–35.
- Huard, J.G., Williams, K.S., Nan-Yue, Z. 1996. On Tornheim’s double series, *Acta Arith.* 75: 105–117.
- Kaneko, M., Tasaka, T. 2013. Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2, *Math. Ann.* 357: 1091–1118.
- Matsumoto, K. 1998. Asymptotic series for double zeta, double gamma, and Hecke L -functions, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 123: 385–405.
- Matsumoto, K. 2003. Asymptotic expansions of double zeta-functions of Barnes, of Shintani, and Eisenstein series, *Nagoya Math. J.*, 172: 223–243.
- Matsumoto, K., Tanigawa, Y. 2003. The analytic continuation and the order estimate of multiple Dirichlet series, *J. Theor. Nomb. Bordx.*, 15: 267–274.
- Murty, M.R., Sinha, K. 2006. Multiple Hurwitz zeta functions, *Proc. Symp. Pure Math.* 75: 135–156.
- Pan, H., Sun, Z.-W. 2006. New identities involving Bernoulli and Euler polynomials, *J. Combin. Theory Ser. A* 113: 156–175.

- Ramanujan, S. 1957. Notebooks, Vol. 2, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 392 sayfa.
- Rao, R.S.R.C., Sarma, A.S.R. 1980. Two identities due to Ramanujan, *Indian J. Pure Appl. Math.* 11: 1139–1140.
- Sondow, J., 1994. Analytic continuation of Riemann's zeta function and values at negative integers via Euler's transformation of series, *Proc. Amer. Math. Soc.* 120: 421–424.
- Terhune, D. 2004. Evaluation of double L -values, *J. Number Theory* 105: 275–301.
- Woodcock, C.F. 1979. Convolutions on the ring of p -adic integers, *J. London Math. Soc.* 20: 101–108.
- Woodcock, C.F. 1987. A two variable Riemann zeta function, *J. Number Theory* 27: 212–221.

ÖZGEÇMİŞ

ABDURRAHMAN ÜNAL
abdurrahmanunal87@gmail.com



ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Doktora	Akdeniz Üniversitesi
2014-2019	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2011-2013	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2006-2010	Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen	Milli Eğitim Bakanlığı
2015-devam	Antalya Korkuteli Hacı Ethem Şerife Kavukçu Anadolu Lisesi

ESERLER

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan bildiriler

- 1- Cenkcı, M. and Ünal, A. (2018). A two-variable Dirichlet series and its applications. International Conference on Number Theory dedicated to the 70th birthdays of Professors Antanas Laurincikas and Eugenijus Manstavicius, Palanga, Lithuania. (Özet Bildiri)