

İKİ DOĞRU VE GENEL BİR ÇEMBER DEMETİNİN
OLUŞTURDUĞU 6-GEN DOKULAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat. Müh. Fuat ERGEZEN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 22 Haziran 1992

Tezin Savunulduğu Tarih : 7 Temmuz 1992

Tez Danışmanı : Prof. Dr. H.İsmail ERDOĞAN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Abdülkadir ÖZDEĞER

Doç. Dr. Hasan ÖZEKES

TEMMUZ 1992

ÖNSÖZ

Bu çalışmam sırasında değerli yardımlarını esirgemiyen Sayın Hocam Prof. Dr. H.İsmail ERDOĞAN'a teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Ayrıca öğretim hayatım süresince çok değerli bilgilerinden yararlandığım bütün hocalarıma teşekkür ederim.

Fuat ERGEZEN



İÇİNDEKİLER

ÖZET,.....	1V
SUMMARY.....	V
BÖLÜM 1. DOKU GEOMETRİSİNE AİT BAZI TEMEL KAVRAMLAR.....	1
1.1 Düzlemde Üçlü Eğri Dokuları ve Altıgen Dokular.....	1
1.2 Pfaff`Formları.....	2
1.3 Bir Dokunun Pfaff Formları.....	3
1.4 Bir Dokunun Diferansiyatörleri.....	4
1.5 Bir Dokunun Bağımlılığı ve eğrileri.	6
BÖLÜM 2. İKİ DOĞRU VE GENEL BİR ÇEMBER DEMETİNİN ELDE EDİLiŞİ.....	7
2.1 Evirtim Tanımı ve Genel Çember Demetleri.....	7
2.2 Genel Çember Demetlerinin Evirtimi..	11
BÖLÜM 3. İKİ DOĞRU VE GENEL BİR ÇEMBER DEMETİNİN OLUŞTURDUĞU 6-GEN DOKULAR.....	14
3.1 İki Doğru Demeti ve Genel Bir Hiperbolik Demet.....	14
3.2 İki Doğru Demeti ve Genel Bir Eliptik Demet.....	25
3.3 İki Doğru Demeti ve Genel Bir Parabolik Demet.....	31
3.4 İki Doğru Demeti ve Genel Bir Aynı MerkezliÇÇemberler Demeti.....	37
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	42
KAYNAKLAR.....	43
ÖZGEÇMİŞ.....	44

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu çalışmada iki doğru demeti ve genel bir çember demetinin oluşturduğu bütün altıgen dokular belirlenmiştir.

Beş kısımdan oluşan birinci bölümde doku geometrisine ait bazı temel kavramlar verilmiştir. Birinci kısımda üçlü eğri dokusu ve altıgen doku tanımı, ikinci kısımda Pfaff Formlarının tanımı ve Pfaff Formlarının dış diferansiyeli verilmiştir. Üçüncü kısımda bir dokunun Pfaff Formları çıkarılmış, dördüncü kısımda da bir dokunun diferansiyatörleri gösterilmiş ve son olarakta bir dokunun bağımlılığı diyebileceğimiz Pfaff Formu ile eğriliği bulunmuştur. Bir dokunun altıgen olması için gerek ve yeter şart olan k eğriliğinin özdeş olarak sıfıra eşit veya aynı anlama gelen dokunun bağımlılığının tam diferansiyel ($\gamma = p(x, y)dx + q(x, y)dy \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$) olmasına dikkat çekilmiştir.

İki kısımdan oluşan ikinci bölümde iki doğru demeti ve genel bir çember demetinin elde edilmesi ele alınmıştır. Birinci kısımda iki doğru demeti ve genel bir çember demetinin elde edilmesi için gerekli olan evirtim tanımı verilerek evirtim formülleri ve genel çember demetlerinin denklemleri elde edilmiştir. İkinci kısımda da evirtim kullanılarak iki doğru demeti ve genel bir çember demetini oluşturan bütün haller incelenmiştir.

Dört kısımdan oluşan üçüncü bölümde iki doğru demeti ve genel bir çember demetinin oluşturduğu altıgen dokular tümü ile incelenmiştir. Birinci kısımda önce demetlerin altıgen doku oluşturmaları için gerek ve yeter şart olan dokunun eğriliğinin sıfıra eşit olması koşulu hesaplanmıştır. Bundan sonraki kısımlarda da tekrardan kaçınmak için doğrudan altıgen doku olma şartından hesaplara başlanılmıştır. Daha sonra iki doğru demeti ve genel bir hiperbolik, ikinci kısımda iki doğru demeti ve genel bir eliptik, üçüncü kısımda iki doğru demeti ve genel bir parabolik, dördüncü kısımda da iki doğru demeti ve genel bir aynı merkezli çemberler demetinin hangi şartlarda altıgen doku oluşturduğu tümü ile incelenmiştir.

HEXAGONAL 3-WEB BY TWO PENCILS OF STRAIGHT LINES AND A PENCIL OF CIRCLES

SUMMARY

In this work, all of the hexagonal 3-webs formed by two pencils of straight lines and a pencil of circles are determined.

The work consists of three parts. In the first part, some fundamental concepts of the Web Geometry are given.

Let c_i ($i = 1, 2, 3$) be three families of lines which cover the region R simply and suppose that through each point (x, y) of R there passes one and only one line of each family, three families of lines be given by the equations

$$U_i(x, y) = u_i = sbt \quad (i = 1, 2, 3) . \quad (0.1.1)$$

Assume that the partial derivatives

$$\frac{\partial U_i}{\partial x} , \quad \frac{\partial U_i}{\partial y} , \quad (0.1.2)$$

are not both zero and that the functions $U_i(x, y)$ are analytic in R . The functional determinants

$$\frac{\partial(U_i, U_k)}{\partial(x, y)} , \quad (0.1.3)$$

are supposed to be non-zero and any two lines each of which belongs to different families have no more than one common point. Three families of lines satisfying the above properties are said to form a 3-web and is denoted by M . A web M is said to be hexagonal in region R , if it is formed by three families of parallel straight lines [1].

An expression such as

$$\omega = p(x, y)dx + q(x, y)dy , \quad (0.1.4)$$

is named as a Pfaffian in two variables.

The polar product of two Pfaffians

$$\omega_i = p_i(x, y)dx + q_i(x, y) \quad (i = 1, 2) , \quad (0.1.5)$$

is defined by

$$[\omega_1, \omega_2] = (p_1 q_2 - p_2 q_1)[dx, dy] , \quad (0.1.6)$$

where

$$[dx, dy] = -[dy, dx].$$

The poler product has the following properties:

$$\begin{aligned} [\omega_1, \omega_2] + [\omega_2, \omega_1] &= 0 , \\ [\omega_1, \omega_2 + \omega_3] &= [\omega_1, \omega_2] + [\omega_1, \omega_3] . \\ [f\omega_1, \omega_2] &= f[\omega_1, \omega_2] , \end{aligned} \quad (0.1.7)$$

where f is a scalar. Exterior differential of a Pfaffian, denoted by dw , is defined as

$$dw = [dp, dx] + [dq, dy] = (q_x - p_y)[dx, dy] . \quad (0.1.8)$$

In the second part, using the concept of inversion, two pencils of straight lines and a pencil of circles are obtained from three appropriate pencils of circles.

Consider a circle with center O and of radius R . The point A' is called the inversion of a point A with respect to the given circle [2], if the following conditions are satisfied:

- i) The points A and A' are on the line through O .
- ii) $OA' \cdot OA = R^2$. From this definition it follows that

$$x = \frac{k^2(X - a)}{(X - a)^2 + (Y - b)^2} + a , \quad y = \frac{k^2(Y - b)}{(X - a)^2 + (Y - b)^2} + b . \quad (0.1.9)$$

Let x be a complex number and let y be its conjugate. Then, the equation of an elliptic pencil with base points e_1, e_2 is

$$xy - \frac{e'_1 + e'_2}{2}x - \frac{e_1 + e_2}{2}y + \frac{e'_1 e_2 + e_1 e'_2}{2} + \lambda \cdot [(e'_1 - e'_2)x - (e_1 - e_2)y + e_1 e'_2 - e'_1 e_2] \cdot i = 0 , \quad (0.1.10)$$

while the equation of an hyperbolic pencil with null-circles h_1 and h_2 is

$$\begin{aligned} xy + (-h'_1)x + (h_1)y + h_1 h'_1 + \\ \lambda \cdot [(h'_2 - h'_1)x + (h_2 - h_1)y + h_1 h'_1 - h_2 h'_2] = 0 . \end{aligned} \quad (0.1.11)$$

On the other hand, if a is the base point and u is the straight line carrying the centres of the circles of the pencil, then the equation of a parabolic pencil is of the form

$$xy - a'x - ay + aa' + \lambda \cdot (u'x + uy - a'u - au') = 0 \quad (0.1.12)$$

By taking inversion with respect to one of the base points of an elliptic pencil, this pencil transforms to a pencil of straight lines. In the same way, by taking inversion with respect to the base point of a parabolic pencil, it transforms to a pencil of parallel straight lines. To obtain pencil of straight lines, the inversion elliptic or parabolic pencils must be taken [3].

In the third part, all the hexagonal 3-webs formed by two pencils of straight lines and a pencil of circles are obtained.

In order to simplify the calculations, equation of pencils of straight lines are taken as

$$a_1(x + y) + 2b_1 + \lambda(-ic_1(x - y) + 2d_1) = 0 , \quad (0.1.13)$$

and

$$(a_1 - ib_1)x + (a_1 + ib_1)y = 2\lambda . \quad (0.1.14)$$

For example, let the pencils be

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a_1(x+y)+2b_1}{-ic_1(x-y)+2d_1} , \\ u_2 &= \frac{a_2(x+y)+2b_2}{-ic_2(x-y)+2d_2} , \\ u_3 &= \frac{xy-h'_1x-h_1y+h_1h'_1}{(h'_2-h'_1)x+(h_2-h_1)y+h_1h'_1-h_2h'_2} . \end{aligned} \quad (0.1.15)$$

By differentiation we get, from (0.1.15)

$$\begin{aligned} A'dx + Ady &= 0 , \\ B'dx + Bdy &= 0 , \\ C'dx + Cdy &= 0 , \end{aligned} \quad (0.1.16)$$

where we have put

$$\begin{aligned} A &= 2ia_1c_1y + 2ib_1c_1 - 2a_1d_1 , \\ B &= 2ia_2c_2y + 2ib_2c_2 - 2a_2d_2 , \\ C &= (h'_2 - h'_1)x^2 - (h'_2 - h'_1)(h_2 + h_1)x + (h'_2 - h'_1)h_1h_2 , \end{aligned} \quad (0.1.17)$$

The differential form σ_i ($i = 1, 2, 3$) of the web, satisfying the condition

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 , \quad (0.1.18)$$

are obtained in the form

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= f_1(A'dx + Ady) , \\ \sigma_2 &= f_2(B'dx + Bdy) , \\ \sigma_3 &= f_3(C'dx + Cdy) , \end{aligned} \quad (0.1.19)$$

where

$$\begin{aligned} f_1 &= B'C - C'B , \\ f_2 &= C'A - A'C , \\ f_3 &= A'B - B'A . \end{aligned} \tag{0.1.20}$$

Taking the exterior differentials of σ_i and remembering that

$$d\sigma_i = H_i \Omega , \quad (i = 1, 2, 3) , \quad (H_1 + H_2 + H_3 = 0) , \tag{0.1.21}$$

$\Omega = [\sigma_1, \sigma_2]$ being the element of area of the web, we find for the dependency γ and for the curvature k of the web

$$\gamma = H_2 \cdot \sigma_1 - H_1 \cdot \sigma_2 \quad (= H_3 \cdot \sigma_2 - H_2 \cdot \sigma_3 = H_1 \cdot \sigma_3 - H_3 \cdot \sigma_1) , \tag{0.1.22}$$

$$d\gamma = k \cdot \Omega . \tag{0.1.23}$$

From we get (0.1.19)

$$\begin{aligned} \Omega = [\sigma_1, \sigma_2] &= (f_1 A' f_2 B - f_2 B' f_1 A) [dx, dy] , \\ &= f_1 f_2 (A'B - B'A) [dx, dy] , \\ &= f_1 f_2 f_3 [dx, dy] , \end{aligned} \tag{0.1.24}$$

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= (f_{1x} A + f_1 A_x - f_{1y} A' - f_1 A'_y) [dx, dy] , \\ d\sigma_2 &= (f_{2x} B + f_2 B_x - f_{2y} B' - f_2 B'_y) [dx, dy] , \\ d\sigma_3 &= (f_{3x} C + f_3 C_x - f_{3y} C' - f_3 C'_y) [dx, dy] , \end{aligned} \tag{0.1.25}$$

where f_{ix} and f_{iy} denote, respectively, the partial derivatives of f_i with respect to x and y .

By (0.1.24) and (0.1.25), we obtain for h_i ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{f_1 f_2 f_3} \cdot (f_{1x} A + f_1 A_x - f_{1y} A' - f_1 A'_y) , \\ H_2 &= \frac{1}{f_1 f_2 f_3} \cdot (f_{2x} B + f_2 B_x - f_{2y} B' - f_2 B'_y) , \\ H_3 &= \frac{1}{f_1 f_2 f_3} \cdot (f_{3x} C + f_3 C_x - f_{3y} C' - f_3 C'_y) . \end{aligned} \tag{0.1.26}$$

We see from (0.1.22) that the expression for γ takes the form

$$\gamma = p(x, y) dx + q(x, y) dy , \tag{0.1.27}$$

where have put

$$\begin{aligned}
 p(x, y) &= \frac{1}{f_1 f_2 f_3} \cdot [(f_{2x}B + f_2B_x - f_{2y}B' - f_2B'_y)f_1A' - \\
 &\quad (f_{1x}A + f_1A_x - f_{1y}A' - f_1A'_y)f_2B'] , \\
 q(x, y) &= \frac{1}{f_1 f_2 f_3} \cdot [(f_{2x}B + f_2B_x - f_{2y}B' - f_2B'_y)f_1A - \\
 &\quad (f_{1x}A + f_1A_x - f_{1y}A' - f_1A'_y)f_2B] .
 \end{aligned}
 \tag{0.1.28}$$

The necessary and sufficient condition for M hexagonal is that the relation

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} , \tag{0.1.29}$$

be satisfied identically in x and y .

The calculations for obtaining the identity (0.1.29) are very long and complicated. Therefore, the calculations are carried out by computer.

Even if the pencil of straight lines is chosen as

$$(a_1 - ib_1)x + (a_1 + ib_1)y + c_1 + \lambda[(a_1 - ib_1)x + (a_1 + ib_1)y + c_1] = 0 , \tag{0.1.30}$$

it is difficult to carry out the calculations by a computer.

When the calculations are carried out to obtain the hexagonality conditions we obtain the pencils of straight lines and a pencil of circles as follows:

1-a) In a rectangular coordinate system, a pencil of straight lines with the vertex point (a, b) , a pencil of parallel lines, and a hyperbolic pencil one of whose null-circles is the point (a, b) .

b) The pencils of two straight lines with vertices (a, b) and (c, d) , and a hyperbolic pencil whose null-circles are points (a, b) and (c, d) .

2) The pencils of two straight lines with vertices (a, b) and (c, d) , and an elliptic pencil whose base points are (a, b) and (c, d) .

3) In a rectangular coordinate system, a pencil of straight lines with the vertex point (a, b) , a pencil of parallel lines, and a parabolic pencil whose base point is (a, b) .

4-a) In a rectangular coordinate system, a pencil of straight lines with the vertex point (a, b) , a pencil of parallel lines, and the pencil of concentric circles.

b) Two pencils of parallel straight lines which are perpendicular to each other and the pencil of concentric circles.

BÖLÜM 1. DOKU GEOMETRİSİNE AİT BAZI TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Düzlemde Üçlü Eğri Dokuları ve Altıgen Dokular

Bir R bölgesinde R yi basit olarak örten bir C_i eğri ailesini , yani R nin herhangi bir x, y noktasından yalnız bir tek eğrisi geçen bir aileyi göz önüne alalım. C_i nin

$$U_i(x, y) = u_i = sbt \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1.1)$$

denklemini ile verildiğini

$$\frac{\partial U_i}{\partial x}, \frac{\partial U_i}{\partial y} \quad (1.1.2)$$

kısmi türevlerinin R de aynı zamanda sıfıra eşit bulunmadıklarını ve $U_i(x, y)$ fonksiyonlarının R de analitik olduğunu kabul edelim. R de bu tarzda tanımlanan C_1, C_2, C_3 gibi üç eğri ailesinin ikişer ikişer determinantlarının R de (sıfırdan) farklı yani

$$\frac{\partial(U_i, U_k)}{\partial(x, y)} \neq 0 \quad (i, k = 2, 3; 3, 1; 1, 2) \quad (1.1.3)$$

olduğunu ve farklı ailelere ait iki eğrinin birden fazla ortak noktası bulunmadığını kabul edelim. Bu şekilde ortaya çıkan şekle üçlü eğri dokusu veya kısaca doku diyeceğiz ve bunu M ile göstereceğiz. Burada R bölgesinin M dokusuna göre konveks olduğunu yani dokunun R den geçen her eğrisinin R yi sürekli bir eğri boyunca kesmekte olduğunu kabul edeceğiz.

R de M dokusunu veren (1.1.1) denklemleri arasında x ve y yi yok edersek aynı noktadan geçen doğru eğrileri için

$$W(U_1, U_2, U_3) = 0 \quad (1.1.4)$$

şeklinde bir bağıntı elde ederiz. Bu bağıntıya doku denklemi denir.

R düzleminde birbirine paralel olan üç doğru ailesinden oluşan bir M dokusu alalım. Böyle dokuya altıgen doku diyeceğiz [1]. R düzleminde affin

bir transformasyonla bu üç doğru ailesinin bir eşkenar üçgenin kenarlarına paralel olmalarını temin etmek mümkündür. Doku doğrularının

$$a_i x + b_i y + c_i = u_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1.5)$$

denklemleri o tarzda norme edilebilirki , doku denklemi

$$W = u_1 + u_2 + u_3 = 0 \quad (1.1.6)$$

şeklini alsın.

1.2. Pfaff Formları

x ve y gibi iki serbest değişkenin $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ gibi iki fonksiyonu ile oluşturulan ve x ile y diferansiyelleri cinsinden olan

$$W = p(x, y)dx + q(x, y)dy \quad (1.2.1)$$

şeklindeki ifadelere iki değişkenli Pfaff formları denir. Pfaff formları üzerinde dış çarpım (polar çarpım) ve dış diferansiyel tanımını verelim.

$$W_i = p_i(x, y)dx + q_i(x, y)dy \quad (i = 1, 2) \quad (1.2.2)$$

olmak ve $[w_1, w_2]$ Pfaff formlarının dış çarpımı göstermek üzere

$$[w_1, w_2] = (p_1 q_2 - p_2 q_1)[dx, dy] \quad (1.2.3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$[dx, dy] = -[dy, dx] \quad (1.2.4)$$

olup dış çarpım şu özelliklere sahiptir

$$[w_1, w_2] + [w_2, w_1] = 0 \quad (1.2.5)$$

$$[w_1, w_2 + w_3] = [w_1, w_2] + [w_1, w_3] \quad (1.2.6)$$

$$[f w_1, w_2] = f[w_1, w_2] \quad (1.2.7)$$

burada f bir skaleri göstermektedir.

(1.2.1) Pfaff formunun dış diferansiyeli dw ile gösterilir ve

$$dw = [dp, dx] + [dq, dy] = (q_x - p_y)[dx, dy] \quad (1.2.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Dış çarpım ve dış diferansiyelin bazı özelliklerine bakalım. $[w_1, w_2] = 0$ ise w_1 ve w_2 Pfaff formları lineer bağımlıdır. Bunun terside doğrudur. Gerçekten (1.2.3) denleminde $[dx, dy] \neq 0$ olduğundan

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0 \quad p_1 q_2 = p_2 q_1 \quad w_1 = \lambda w_2 \quad (1.2.9)$$

bulunur. Tersi için $w_1 = \lambda w_2$ ise

$$[w_1, w_2] = [\lambda w_2, w_2] = \lambda [w_2, w_2] = 0 \quad (1.2.10)$$

bulunur.

f bir skaler ise

$$d(fw) = [df, w] + f dw \quad (1.2.11)$$

dir. Dış diferansiyel tanımından

$$\begin{aligned} d(fw) &= d(f_p dx + f_q dy) \\ &= (f_x q + f_y p)[dx, dy] + f(q_x - p_y)[dx, dy] \\ &= [df, w] + f dw \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

bulunur.

1.3. Bir Dokunun Pfaff Formları

Bir M dokusunun C_i eğri ailelerini başlangıçta olduğu gibi

$$U_i(x, y) = u_i = sbt \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.3.1)$$

denklemleri ile gösterelim. du_i tam diferansiyellerinin her birini $g_i(x, y) \neq 0$ gibi bir çarpan ile çarparsak

$$\sigma_1 = g_1 du_1 = g_1 u_{1x} dx + g_1 u_{1y} dy \quad (1.3.2)$$

ve diğerlerini kısaca

$$\sigma_1 = g_1 du_1 \quad \sigma_2 = g_2 du_2 \quad \sigma_3 = g_3 du_3 \quad (1.3.3)$$

ile gösterirsek bu Pfaff formlarına M okusunun Pfaff formları denir. Burada g_i çarpanlarını öyle seçerizki

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (1.3.4)$$

olsun. Bu ancak

$$\sigma_i^* = \frac{\sigma_i}{g} \quad (1.3.5)$$

şeklinde olur.

Bu Pfaff formları (1.2.5) , (1.2.6) , (1.2.7) denklemlerini sağlarlar. (1.3.4) ve (1.2.6) bağıntılarından

$$[\sigma_1, \sigma_2] = [\sigma_2, \sigma_3] = [\sigma_3, \sigma_1] \quad (1.3.6)$$

olduğu görülür.

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \Omega \quad (1.3.7)$$

ile gösterilen bu bağıntıya M dokusunun alan elamanı diyeceğiz. (1.3.5) normlanmasına göre

$$\Omega^* = \frac{1}{g^2} \Omega \quad (1.3.8)$$

olacaktır.

σ nın tam diferansiyel olması için $d\sigma = 0$ olmalıdır.

1.4. Bir Dokunun Diferansiyatörleri

Bir dokunun (1.3.4) ü sağlayacak şekilde normlanmış olan σ_i Pfaff formlarının dış diferansiyelleri oluşturulursa bunlar dokunun Ω alan elamanından h_i skaler çarpanları kadar fakeder. Gerçekten (1.2.8) ve (1.3.7) denklemleri göz önünde tutulursa

$$d\sigma_1 = \frac{q_{1x} - p_{1y}}{p_1 q_2 - p_2 q_1} \Omega = h_1 \Omega \quad (1.4.1)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$d\sigma_2 = h_2\Omega \quad d\sigma_3 = h_3\Omega \quad (1.4.2)$$

elde edilir.

$$d\sigma_i = h_i\Omega \quad (1.4.3)$$

eşitliğindeki h_i fonksiyonları (1.3.4) denklemi gereğince

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0 \quad (1.4.4)$$

bağıntısını sağlarlar. h_i lerin (1.3.5) normlanmasına göre nasıl değiştiklerini görebilmek için diferansiyatörler kavramını vereceğiz. f bir skaler olmak üzere df tam diferansiyeli $\frac{dx}{dy}$ için lineer bağımsız σ_1, σ_2 Pfaff formları yardımı ile lineer olarak

$$df = f_2\sigma_1 - f_1\sigma_2 \quad (1.4.5)$$

şeklinde ifade edilir. f_1 ve f_2 ye σ_1, σ_2 Pfaff formlarına göre türevleri diyeceğiz. (1.4.5) denklemini göstermek için

$$\sigma_1 = p_1dx + q_1dy \quad \sigma_2 = p_2dx + q_2dy \quad (1.4.6)$$

olmak üzere dx ve dy ler bulunup

$$df = f_xdx + f_ydy \quad (1.4.7)$$

denkleminde yerine konursa (1.4.5) bağıntısı bulunur. (1.3.7) ve (1.4.5) denklemlerinden

$$[df, \sigma_1] = f_1\Omega \quad [df, \sigma_2] = f_2\Omega \quad (1.4.8)$$

elde edilir. Genel olarak

$$[df, \sigma_i] = f_i\Omega \quad (1.4.9)$$

bağıntıları

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0 \quad (1.4.10)$$

denlemini sağlarlar. ∂_i diferansiyatörü

$$f_i = \partial_i f \quad (1.4.11)$$

bağıntısı ile tanımlanır. $\partial_1 + \partial_2 + \partial_3 = 0$ (1.4.10) den görülebilir.

1.5. Bir Dokunun Bağımlılığı ve Eğriliği

(1.3.5) normlamasında h_i ler (1.4.3) e göre

$$d\sigma_i^* = h_i^* \Omega^* \quad (1.5.1)$$

şeklinde yazılırsa

$$h_i^* = g(h_i - \frac{g_i}{g}) \quad (1.5.2)$$

olur.

M dokusunun bağımlılığı diyebileceğimiz

$$\gamma = h_3\sigma_2 - h_2\sigma_3 = h_1\sigma_3 - h_3\sigma_1 = h_2\sigma_1 - h_1\sigma_2 \quad (1.5.3)$$

Pfaff formunu oluşturalım. Bu durumda (1.5.2) bağıntısı ile γ nın normlanmış şekli için

$$\begin{aligned} \gamma^* &= h_2^*\sigma_1^* - h_1^*\sigma_2^* \\ &= \gamma - d(\log g) \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

bulunur. γ nın dış diferansiyeli için

$$\begin{aligned} d\gamma &= [dh_2, \sigma_1] + h_2 d\sigma_1 - [dh_1, \sigma_2] - h_1 d\sigma_2 \\ &= (h_{21} - h_{12})\Omega \\ &= k\Omega \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

bulunurki bu invaryantır. Buradaki k skalerine dokunun eğriliği denir.

Bir dokunun altıgen olması için gerek ve yeter koşul , k eğriliğinin özdeş olarak sifıra eşit olmasıdır.

Bu teorem $\sigma_1 = dx$ $\sigma_2 = dy$ $\sigma_3 = -d(x+y)$ alınarak gösterilebilir.

BÖLÜM 2. İKİ DOĞRU VE GENEL BİR ÇEMBER DEMETİNİN ELDE EDİLİŞİ

2.1. Evirtim Tanımı ve Genel Çember Demetleri

Evirtimin Geometrik ve Analitik Tanımı : Merkezi O ve yarı çapı R olan çember alalım. A' noktasına; aşağıdaki şartlar sağlandığında A nın verilen daireye göre evriği denir.

i) O, A ve A' noktaları O dan geçen bir ışın üzerinde bulunur. (2.1.1)

ii) $OA'.OA = R^2$ (2.1.2)

A nın evriğinde A' dür.(Yine aynı daire için)

Düzlemde her A noktasına A' evriğini tekabül ettiren dönüşüme düzlemin verilen bir daireye göre evriği veya sadece evirtim denir [2].

Verilen daireye evirtim dairesi: merkezine evirtim merkezi veya evirtim kutpu , yarıçapına evirtim yarıçapı ve yarıçapın karesine evirtimin kuvveti denir. Evirtimle birbirine tekabül eden iki şekle evrik şekil adı verilir.

Evirtim kutpunun evriği olmadığından evirtim, düzlemin kendisine birebir dönüşümü değildir. Bir evirtim, kutup noktasında delinmiş düzlemin kendisine olan birebir bir tasviridir.

Şimdi evirtim dönüşümünü formüle edelim. Yarıçapı k olan çember ve çemberin içinde A noktasını alalım (Şekil 1). (2.1.1) gereğince A nın A' evriğini OA ışını üzerinde alalım. (2.1.2) gereğince de

$$OA'.OA = k^2 \quad (2.1.3)$$

olacaktır. A nın koordinatlarını (X, Y) , A' nın koordinatlarını (x, y) alırsak

üçgen benzerliğinden (veya doğru denkleminde)

$$\frac{x}{y} = \frac{X}{Y} \quad (2.1.4)$$

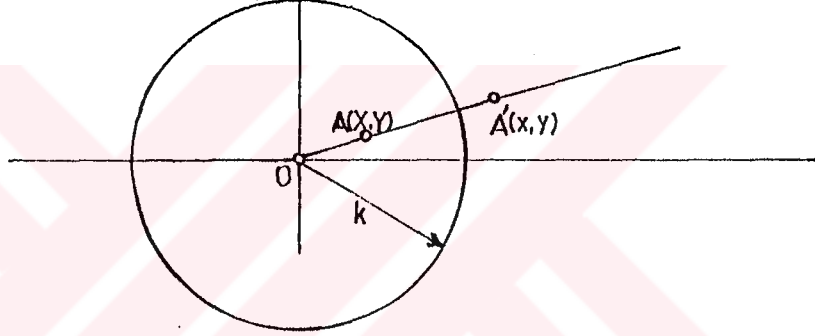
elde edilir. OA ve OA' nün uzunluğu

$$OA = (X^2 + Y^2)^{1/2} \quad OA' = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (2.1.5)$$

olmak üzere (2.1.3) denkleminde yerine konur ve (2.1.4) eşitliği kullanılırsa

$$x = \frac{k^2 X}{X^2 + Y^2} \quad y = \frac{k^2 Y}{X^2 + Y^2} \quad (2.1.6)$$

elde edilir.



Şekil 2.1
Evirtim

Özel olarak $k = 1$ alınarak

$$o(k = 1) \quad x = \frac{X}{X^2 + Y^2} \quad y = \frac{Y}{X^2 + Y^2} \quad (2.1.7)$$

yazılır. Genel halde O noktasının koordinatları (a, b) ise bu durumda formülümüz

$$x = \frac{k^2(X - a)}{(X - a)^2 + (Y - b)^2} + a \quad y = \frac{k^2(Y - b)}{(X - a)^2 + (Y - b)^2} + b \quad (2.1.8)$$

olacaktır.

Evirtimin Özellikleri:

- i) Evirtim merkezinden geçen bir doğru evirtimle kendisine dönüşür.
- ii) Merkezi evirtim kutpunda olan bir çember evirtimle eş merkezli çembere dönüşür.

- iii) Evirtim çemberine dik olan çember evirtimle kendisine dönüşür.
- iv) Evirtim merkezinden geçen bir çember evirtimle doğruya dönüşür.
- v) Evirtim merkezinden geçmeyen bir doğru evirtimle evirtim merkezinden geçen bir çembere dönüşür.
- vi) Evirtim merkezinden geçmeyen bir çember evirtimle başka bir çembere dönüşür.

Bütün bu özelliklerin doğru olduğunu (2.1.8) denklemlerini kullanarak kolayca görebiliriz.

Genel Çember Demetleri: Bölüm 3 de altıgen dokuları incelerken problemlerin çözümünde kolaylık olması için aynı anda gerçel ve kompleks sayıları kullanacağız. Dolayısıyla doğru ve çember demetlerinin bize hem gerçel hem de kompleks denklemleri gerekecektir. Kompleks düzlemde x değişkeninin eşleniğini y , a ve b sabit noktalarının eşleneklerini de sırasıyla a' ve b' ile gösterelim. Buna göre kompleks düzlemde a ve b sabit noktaları verildiğinde, $\frac{x-a}{x-b}$ kompleks sayısını modülü t , argümanı φ olmak üzere

$$\frac{x-a}{x-b} = te^{i\varphi}, \quad (t, \varphi \text{ reel}) \quad (2.1.9)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada t modülü, x noktasının a ve b noktalarına olan uzaklıklarının oranını, φ argümanı ise a ve x noktalarını birleştiren doğru ile b ve x noktalarını birleştiren doğru arasındaki açıyı göstermektedir. Eğer $t = sbt$ tutulur φ parametre olarak bırakılırsa sıfır çemberleri a, b noktaları olan hiperbolik demete ait bir çemberin, $\varphi = sbt$ tutulur t parametre olarak bırakılırsa temel noktaları a, b olan eliptik demete ait bir çemberin denklemi olacağı açıktır. (2.1.9) dan

$$t^2 = \frac{x-a}{x-b} \cdot \frac{y-a'}{y-b'} \quad e^{2i\varphi} = \frac{x-a}{x-b} \cdot \frac{y-b'}{y-a'} \quad (2.1.10)$$

yazabiliriz. Burada a yerine e_1 , b yerine e_2 koyarak temel noktaları e_1, e_2 olan bir eliptik demetin denklemi (demetin $\varphi = 0$ ve $\varphi = \pi/2$ elamanları kullanılarak):

$$xy - \frac{e'_1 + e'_2}{2}x - \frac{e_1 + e_2}{2}y + \frac{e'_1 e_2 + e_1 e'_2}{2} + \lambda \cdot [(e'_1 - e'_2)x - (e_1 - e_2)y + e_1 e'_2 - e'_1 e_2] \cdot i = 0 \quad (2.1.11)$$

ve sıfır çemberleri h_1, h_2 olan bir hiperbolik demetin deklemini de (demetin $t = 0$ ve $t = 1$ elamanları kullanılarak)

$$xy + (-h'_1)x + (h_1)y + h_1h'_1 + \lambda[(h'_2 - h'_1)x + (h_2 - h_1)y + h_1h'_1 - h_2h'_2] = 0 \quad (2.1.12)$$

şeklinde elde edilir.(Bu iki denklemde de λ reel parametre).

Temel noktası a ve merkezler doğrusunun doğrultusu u olan parabolik bir demetin denklemi ise: $\frac{x-(a+pu)}{x-a}$ sayısının (p reel) argümanının $(\pi/2) + 2k\pi$ olduğu yazılarak

$$\frac{x-a-pu}{x-a} + \frac{y-a'-pu'}{y-a'} = 0 \quad (2.1.13)$$

dan ($-p/2 = \lambda$ olmak üzere)

$$xy - a'x - ay + aa' + \lambda.(u'x + uy - a'u - au') = 0 \quad (2.1.14)$$

şeklinde elde edilir.(λ reel parametre) [3]

Elde edilen genel çember demetlerini kartezyen düzlemde yazmak için x yerine $X + iY$, y yerine $X - iY$, e_1 yerine $P_1 + iR_1$, e_2 yerine $P_2 + iR_2$, h_1 yerine $S_1 + iT_1$, h_2 yerine $S_2 + iT_2$, a yerine $A + iB$, u yerine $U_1 + iU_2$ koymak yeterli olacaktır.(Burada $X, Y, P_1, P_2, R_1, R_2, S_1, S_2, T_1, T_2, A, B, U_1, U_2$ Sayıları reeldir.) Bundan sonra büyük harfler içeren denklemleri kartezyen, küçük harfler içeren denklemleri kompleks düzlemde düşüneceğiz. Buna göre kartezyen düzlemdeki genel çember demetleri şöyle olacaktır:

a) Eliptik demet

$$X^2 + Y^2 - (P_1 + P_2)X - (R_1 + R_2)Y + P_1P_2 + R_1R_2 + \lambda.[2(P_2 - P_1)Y - 2(R_2 - R_1)X + 2P_1R_2 - 2R_1P_2] = 0 \quad (2.1.15)$$

b) Hiperbolik demet

$$X^2 + Y^2 - 2S_1X - 2T_1Y + S_1^2 + T_1^2 + \lambda.[2(S_2 - S_1)X + 2(T_2 - T_1)Y + S_1^2 + T_1^2 - S_2^2 - T_2^2] = 0 \quad (2.1.16)$$

c) Parabolik demet

$$X^2 + Y^2 - 2AX - 2BY + A^2 + B^2 + \lambda.[U_1X + U_2Y - AU_1 - BU_2] = 0 \quad (2.1.17)$$

Elde ettiğimiz denklemlerin evirtimlerine bakarsak; bir eliptik demetin temel bir noktasından birine göre alınan bir evirtim ile demetin bir doğru demetine, bir hiperbolik demetin sıfır çemberlerinden birine göre alınan bir evirtim ile demetin bir aynı merkezli çemberler demetine, bir parabolik demetin temel noktasından alınan bir evirtim ile demetin bir paralel doğrular demetine dönüşeceğini (2.1.8) denklemlerini kullanarak kolayca görebiliriz. Aynı şekilde (2.1.8) denklemlerini kullanarak, temel noktaları dışındaki bir noktaya göre alınan bir evirtimle eliptik demetin eliptik demete, sıfır çemberleri dışındaki bir noktaya göre alınan bir evirtimle hiperbolik demetin hiperbolik demete, temel noktası dışında alınan bir noktaya göre parabolik demetin parabolik demete dönüşeceğini görebiliriz.

2.2. Genel Çember Demetlerinin Evirtimi

İki Doğru ve Genel Bir Çember Demetinin Elde Edilişi: Bir doğru demetinin ancak eliptik demetin temel noktalarından birine veya parabolik demetin temel noktasına göre alınan evirtim ile elde edileceğini (2.1) de söyledik. Buna göre iki eliptik demetin birer temel noktasının çakışık olması ve bu ortak noktaya göre alınan bir evirtim ile demetlerin, iki doğru demetine, iki parabolik demetin temel noktalarının çakışık olması ve bu ortak noktaya göre alınan bir evirtim ile demetlerin, iki paralel doğrular demetine, bir eliptik demetin ve bir parabolik demetin esas noktasının çakışık olması ve bu ortak noktaya göre alınan bir evirtim ile demetlerin, bir doğru demeti ile bir paralel doğrular demetine dönüşeceği açıktır.

İki doğru demeti ve genel bir çember demetlerini oluşturan durumları ele alalım.

a) Üç eliptik demetten iki tanesinin birer temel noktaları çakışık üçüncü demetin genel konumunda bulunduğunu varsayar ve sözü geçen ortak noktaya göre evirtim alırsak, demetlerimiz iki doğru demeti ve bir eliptik demete dönüşmüş olur.

b) İki eliptik demetin birer temel noktaları çakışık ve bir hiperbolik

demetin genel konumda bulunduğunu varsayar ve sözü geçen ortak noktaya göre evirtim alırsak, demetlerimiz iki doğru demeti ve bir hiperbolik demete dönüşmüş olur.

c) İki eliptik demetin birer temel noktaları çakışık ve bir parabolik demetin genel konumda bulunduğunu varsayar ve sözü geçen ortak noktaya göre evirtim alırsak, demetlerimiz iki doğru demeti ve bir parabolik demete dönüşmüş olur.

d) Bir parabolik demetin a temel noktasının bir eliptik demetin e_1 temel noktası ile çakıştığını ve bir eliptik demetin genel konumda bulunduğunu varsayar ve sözü geçen ortak noktaya göre bir evirtim alırsak, demetlerimiz bir doğru demeti bir paralel doğrular demeti ve bir eliptik demete dönüşmüş olur.

e) Bir parabolik demetin a temel noktasının bir eliptik demetin e_1 temel noktası ile çakıştığını ve bir hiperbolik demetin genel konumda bulunduğunu varsayar ve sözü geçen ortak noktaya göre bir evirtim alırsak, demetlerimiz bir doğru demeti bir paralel doğrular demeti ve bir hiperbolik demete dönüşmüş olur.

f) Bir parabolik demetin a temel noktasının bir eliptik demetin e_1 temel noktası ile çakıştığını ve bir parabolik demetin genel konumda bulunduğunu varsayar ve sözü geçen ortak noktaya göre bir evirtim alırsak, demetlerimiz bir doğru demeti bir paralel doğrular demeti ve bir parabolik demete dönüşmüş olur.

g) İki parabolik demetin temel noktalarının çakışık ve bir eliptik demetin genel konumda bulunduğunu varsayar ve sözü geçen ortak noktaya göre bir evirtim alırsak, demetlerimiz iki paralel doğrular demeti ve genel bir eliptik demete dönüşmüş olur.

h) İki parabolik demetin temel noktalarının çakışık ve bir hiperbolik demetin genel konumda bulunduğunu varsayar ve sözü geçen ortak noktaya göre bir evirtim alırsak, demetlerimiz iki paralel doğrular demeti ve genel bir

hiperbolik demete dönüşmüş olur.

i) Üç parabolik demetten iki tanesinin temel noktaları çakışık üçüncü demetin genel konumda bulunduğunu varsayar ve sözü geçen ortak noktaya göre bir evirtim alırsak, demetlerimiz iki paralel doğrular demeti ve bir parabolik demete dönüşmüş olur.

j) İki eliptik demetin birer temel noktası ile bir hiperbolik demetin sıfır çemberlerinden biri çakışıyorsa, bu ortak esas noktaya göre alınan bir evirtim sonucunda, demetlerimiz iki doğru demetine ve bir aynı merkezli çemberler demetine dönüşmüş olur.

k) Bir eliptik ve bir hiperbolik demetin birer esas noktası ile bir parabolik demetin temel noktasının çakışması halinde , bu ortak noktaya göre alınan bir evirtim sonucunda demetlerimiz , bir doğru demetine, bir paralel doğrular demetine ve bir aynı merkezli çemberler demetine dönüşmüş olur.

l) İki parabolik demetin temel noktaları ile bir hiperbolik demetin sıfır çemberlerinden biri çakışıyorsa , bu ortak esas noktaya göre alınan bir evirtim sonucunda demetlerimiz, iki paralel doğrular demetine ve bir aynı merkezli çemberler demetine dönüşmüş olur.

BÖLÜM 3. İKİ DOĞRU VE GENEL BİR ÇEMBER DEMETİNİN OLUŞTURDUĞU 6-GEN DOKULAR

3.1. İki Doğru Demeti ve Genel Bir Hiperbolik Demet

İki doğru ve genel bir çember demetinin altıgen doku olma koşulunda gerekli olan dokunun eğriliğinin hesabı uzun ve karışıktır. Bundan dolayı bu çalışmada işlemler bilgisayarlarda sembolik işlem yapan paket programlar tarafından hesaplanmıştır.

Kartezyen düzlemde iki doğru demetinin denklemi

$$a_1X + b_1Y + c_1 + \lambda.(a_2X + b_2Y + c_2) = 0 \quad (3.1.1)$$

şeklinde $(\lambda$ reel parametre). Eğer kullanacağımız doğru demetlerimizi - (3.1.1) denklemlerinde olduğu gibi alırsak işlemlerin büyüklüğü nedeni ile çözüm bilgisayarlarda dahi güç olmaktadır. (3.1.1) denklemi yerine doğru demetini

$$a_1X + b_1Y + \lambda.(c_1Y + d_1) = 0 \quad (3.1.2)$$

şeklinde alırsak bu $(\frac{b_1}{a_1}, \frac{d_1}{c_1})$ tepeli doğru demeti,

$$a_1X + b_1Y = \lambda \quad (3.1.3)$$

şeklinde alırsak paralel doğrular demeti olacaktır. Bu iki demet birlikte genel doğru demetini verir. İnceleyeceğimiz dokulardaki doğru demetlerini (3.1.2) ve (3.1.3) şeklinde ele alacağız. Bu demetleri kompleks düzlemdeki yazılışı sırası ile

$$a_1(x + y) + 2b_1 + \lambda.(-ic_1(x - y) + 2d_1) = 0 \quad (3.1.4)$$

ve

$$(a_1 - ib_1)x + (a_1 + ib_1)y = 2\lambda \quad (3.1.5)$$

dir (burada λ reel parametre).

Doğru demetini (3.1.1) de olduğu gibi genel halde alamadığımız için problemlerimizin çözümü birinci olarak iki tane (3.1.4) şeklinde (tepe noktalı) doğru demeti ile genel bir çember demeti , ikinci olarak (3.1.4) ve (3.1.5) şeklinde iki doğru demeti ile genel bir çember demeti ,üçüncü olarakta iki tane (3.1.5) şeklinde (paralel) doğru demeti demeti ile genel bir çember demeti alarak inceleyeceğiz.

i) Demetler

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a_1 X + b_1}{c_1 Y + d_1} \\ u_2 &= \frac{a_2 X + b_2}{c_2 Y + d_2} \\ u_3 &= \frac{X^2 + Y^2 - 2S_1 X - 2T_1 Y + S_1^2 + T_1^2}{2(S_2 - S_1)X + 2(T_2 - T_1)Y + S_1^2 + T_1^2 - S_2^2 - T_2^2} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

veya kompleks düzlemde

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a_1(x+y) + 2b_1}{-ic_1(x-y) + 2d_1} \\ u_2 &= \frac{a_2(x+y) + 2b_2}{-ic_2(x-y) + 2d_2} \\ u_3 &= \frac{xy - h'_1 x - h_1 y + h_1 h'_1}{(h'_2 - h'_1)x + (h_2 - h_1)y + h_1 h'_1 - h_2 h'_2} \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

şeklinde ise (hesapları kolaylaştırdığı ve sonuçlar aynı olduğu için (3.1.7) denklemlerini kullanacağız)

$$\begin{aligned} A' &= -2ia_1 c_1 y - 2ib_1 c_1 - 2a_1 d_1 \\ A &= 2ia_1 c_1 y + 2ib_1 c_1 - 2a_1 d_1 \\ B' &= -2ia_2 c_2 y - 2ib_2 c_2 - 2a_2 d_2 \\ B &= 2ia_2 c_2 y + 2ib_2 c_2 - 2a_2 d_2 \\ C' &= (h_2 - h_1)y^2 - (h_2 - h_1)(h'_2 + h'_1)y + (h_2 - h_1)h'_1 h'_2 \\ C &= (h'_2 - h'_1)x^2 - (h'_2 - h'_1)(h_2 + h_1)x + (h'_2 - h'_1)h_1 h_2 \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

olmak üzere dokunun diferansiyel denklemleri şunlardır.

$$\begin{aligned} A'dx + Ady &= 0 \\ B'dx + Bdy &= 0 \\ C'dx + Cdy &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Dokunun $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ şartını sağlayan σ_i Pfaff formlarını elde etmek için bu denklemleri sıfırdan farklı f_1, f_2, f_3 çarpanları ile normlarsak şunlar çıkar;

$$\begin{aligned} f_1 &= B'C - C'B \\ f_2 &= C'A - A'C \\ f_3 &= A'B - B'A \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= f_1(A'dx + Ady) \\ \sigma_2 &= f_2(B'dx + Bdy) \\ \sigma_3 &= f_3(C'dx + Cdy) \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Burada σ_i ler dış çarpım özelliklerini sağlarlar yani

$$\begin{aligned} [\sigma_1, \sigma_2] + [\sigma_2, \sigma_1] &= 0 \\ [\sigma_1, \sigma_2 + \sigma_3] &= [\sigma_1, \sigma_2] + [\sigma_1, \sigma_3] \\ [f\sigma_1, \sigma_2] &= f[\sigma_1, \sigma_2] \quad (f \text{ skaler}) \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

bağıntıları gerçekleşir ve $\sigma = pdx + qdy$ olmak üzere σ nın dış diferansiyeli

$$d\sigma = [dp, dx] + [dq, dy] = (q_x - p_y)[dx, dy] \quad (3.1.13)$$

olarak bulunur. Dokunun alan elamanı $\Omega = [\sigma_1, \sigma_2]$ tanımlandığına göre (3.1.11) ve (3.1.12) özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \Omega &= [\sigma_1, \sigma_2] = (f_1 A' f_2 B - f_2 B' f_1 A)[dx, dy] \\ &= f_1 f_2 (A'B - B'A)[dx, dy] \\ &= f_1 f_2 f_3 [dx, dy] \\ \Rightarrow [dx, dy] &= \frac{\Omega}{f_1 f_2 f_3} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

olarak buluruz. (3.1.11) ve (3.1.13) i kullanarak σ_i ($i = 1, 2, 3$) dış diferansiyelini

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= (f_{1x}A + f_1A_x - f_{1y}A' - f_1A'_y)[dx, dy] \\ d\sigma_2 &= (f_{2x}B + f_2B_x - f_{2y}B' - f_2B'_y)[dx, dy] \\ d\sigma_3 &= (f_{3x}C + f_3C_x - f_{3y}C' - f_3C'_y)[dx, dy] \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

elde ederiz. (1.4.3) den $d\sigma = H_i\Omega$ ($i = 1, 2, 3$) ($H_1 + H_2 + H_3 = 0$) olduğuna göre (3.1.14) ü kullanarak

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{f_1f_2f_3} \cdot (f_{1x}A + f_1A_x - f_{1y}A' - f_1A'_y) \\ H_2 &= \frac{1}{f_1f_2f_3} \cdot (f_{2x}B + f_2B_x - f_{2y}B' - f_2B'_y) \\ H_3 &= \frac{1}{f_1f_2f_3} \cdot (f_{3x}C + f_3C_x - f_{3y}C' - f_3C'_y) \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

olarak elde ederiz. (1.3.5) den dokunun bağımlılığı $\gamma = H_2\sigma_1 - H_1\sigma_2$ ($= H_3\sigma_2 - H_2\sigma_3 = H_1\sigma_3 - H_3\sigma_1$) olduğuna göre ve (3.1.16) bilindiğine göre dokunun bağımlılığını

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{f_1f_2f_3} \cdot [(f_{2x}B + f_2B_x - f_{2y}B' - f_2B'_y)f_1(A'dx + A'dy) - \\ &\quad (f_{1x}A + f_1A_x - f_{1y}A' - f_1A'_y)f_2(B'dx + B'dy)] \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

olarak buluruz.

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \frac{1}{f_1f_2f_3} \cdot [(f_{2x}B + f_2B_x - f_{2y}B' - f_2B'_y)f_1A' - \\ &\quad (f_{1x}A + f_1A_x - f_{1y}A' - f_1A'_y)f_2B'] \\ q(x, y) &= \frac{1}{f_1f_2f_3} \cdot [(f_{2x}B + f_2B_x - f_{2y}B' - f_2B'_y)f_1A - \\ &\quad (f_{1x}A + f_1A_x - f_{1y}A' - f_1A'_y)f_2B] \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

olmak üzere dokunun bağımlılığını

$$\gamma = p(x, y)dx + q(x, y)dy \quad (3.1.19)$$

yazabiliriz. O halde dokunun altıgen olması için gerek ve yeter şart olan

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3.1.20)$$

denklemini oluşturmamız gerekiyor. Bundan sonraki alt bölümlerde (3.1.20) ye kadar olan işlemler aynı olduğu için; hesaplarımıza doğrudan (3.1.20) denklemi ile başlayacağız. (3.1.6) veya (3.1.7) demetleri için (3.1.20) denklemini hesapladığımızda x^8y^3 ün katsayısı çarpanlara ayrılmış olarak

$$\begin{aligned} x^8y^3 = & 512ia_1a_2c_1c_2(h_1 - h_2)(h'_1 - h'_2)^3 \\ & (-a_1a_2c_2d_1 + a_1a_2c_1d_2 + i(-a_2b_1c_1c_2 + a_1b_2c_1c_2))^2 \\ & (a_1a_2(c_2d_1 + c_1d_2 + c_1c_2T_1 + c_1c_2T_2) + \\ & i(c_1c_2(a_2b_1 + a_1b_2 + a_1a_2S_1 + a_1a_2S_2))) \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

bulunur. Bu katsayının sıfır olması için en azından tek tek çarpanların sıfır olması gerekir. Buna göre $h_1 - h_2 \neq 0, h'_1 - h'_2 \neq 0$ olduklarından

1) $a_1 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $b_1 \neq 0, c_1 \neq 0, a_2 \neq 0$) (3.1.20) denkleminde x^7y^2 katsayısı

$$\begin{aligned} x^7y^2 = & -512ia_2^3b_1^4c_1^4c_2^3(h_1 - h_2)(h'_1 - h'_2)^2 \\ & (2(a_2d_2S_1 + b_2c_2T_1 + a_2c_2S_1T_1 - a_2d_2S_2 - b_2c_2T_2 - a_2c_2S_2T_2) + \\ & i(2c_2(S_1 - S_2)(2b_2 + a_2S_1 + a_2S_2))) \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturmaları için x^7y^2 nin katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre

1a) $a_1 = 0, c_2 = 0$ (demetlerin bozulmaması için $b_1 \neq 0, c_1 \neq 0, a_2 \neq 0, d_2 \neq 0$) dan x^4y^2 nin katsayısı

$$x^4y^2 = 6144a_2^4b_1^4c_1^4d_2^4(h_1 - h_2)(h'_1 - h'_2)^3 \quad (3.1.23)$$

bulunurki burdanda x^4y^2 ün katsayısı sıfıra eşit olamayacağı için demetlerin altıgen doku oluşturmaları mümkün değildir.

1b) i) $a_1 = 0, S_1 = S_2 = -\frac{b_2}{a_2}$ (demetlerin bozulmaması için $b_1 \neq 0, c_1 \neq 0, a_2 \neq 0, c_2 \neq 0$) dan

$$x^7y = 1024a_2^4b_1^4c_1^4c_2^2(T_1 - T_2)^4(d_2^2 + c_2d_2T_1 + c_2^2T_1T_2 + c_2d_2T_2) \quad (3.1.24)$$

bulunur. Bu katsayının sıfıra eşitlenmesinden

$$a_1 = 0, \quad S_1 = S_2 = -\frac{b_2}{a_2}, \quad T_1 = -\frac{d_2}{c_2} \quad (3.1.25)$$

veya doku için aynı anlama gelen

$$a_1 = 0 \quad , \quad S_1 = S_2 = -\frac{b_2}{a_2} \quad , \quad T_2 = -\frac{d_2}{c_2} \quad (3.1.26)$$

şartları altıgen doku oluşturur.

$$\text{ii) } a_1 = 0 \quad , \quad S_1 = -2\frac{b_2}{a_2} - S_2 \quad , \quad T_1 = -2\frac{d_2}{c_2} - T_2 \text{ ise}$$

$$x^7y = 16384b_1^4c_1^4(b_2c_2 - a_2d_2i + a_2c_2S_2 - a_2c_2iT_2)$$

$$(b_2c_2 + a_2d_2i + a_2c_2S_2 + a_2c_2iT_2)^2$$

$$((b_2^2c_2^2 - a_2^2d_2^2 + 2a_2b_2c_2^2S_2 - a_2^2c_2^2S_2^2 + 2a_2^2c_2d_2T_2 + a_2^2c_2^2T_2^2)^2/(a_2^2c_2^2))$$

bulunur. Bu şartları kullandığımızda

$$x^6y^2 = \frac{262144a_2^4b_1^4c_1^4(d_2 + c_2T_2)^6}{c_2^2} \quad (3.1.27)$$

çıkarki bu katsayıda sıfıra eşit olamayacağı için altıgen doku oluşturamaz.

2) $a_2 = 0$, $a_1 = 0$ ile simetrik olduğu için (1) deki gibi aynı sonuçlar çıkacaktır.

3) $c_1 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $a_1 \neq 0, d_1 \neq 0, c_2 \neq 0$) (3.1.20) denkleminde x^7y^2 katsayısı

$$x^7y^2 = -512ia_1^4a_2^3c_2^3d_1^4(h_1 - h_2)(h_1' - h_2')^2$$

$$(2(a_2d_2S_1 + b_2c_2T_1 + a_2c_2S_1T_1 - a_2d_2S_2 - b_2c_2T_2 - a_2c_2S_2T_2) +$$

$$i(2a_2(T_1 - T_2)(2d_2 + c_2T_1 + c_2T_2))) \quad (3.1.28)$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturması için x^7y^2 nin katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre

3a) $c_1 = 0, a_2 = 0$ Bu durumu (1a) da incelemiştik.

3b) i) $c_1 = 0$, $T_1 = T_2 = -\frac{d_2}{c_2}$ (demetlerin bozulmaması için $a_1 \neq 0, d_1 \neq 0, c_2 \neq 0, a_2 \neq 0$) dan

$$x^7y = 1024a_1^4a_2^2c_2^2d_1^4(S_1 - S_2)^4(-(c_2^2(b_2 + a_2S_1)(b_2 + a_2S_2))) \quad (3.1.29)$$

bulunur. Bu katsayının sıfıra eşitlenmesinden

$$c_1 = 0 \quad , \quad T_1 = T_2 = -\frac{d_2}{c_2} \quad , \quad S_1 = -\frac{b_2}{a_2} \quad (3.1.30)$$

veya doku için aynı anlama gelen

$$c_1 = 0 \quad , \quad T_1 = T_2 = -\frac{d_2}{c_2} \quad , \quad S_2 = -\frac{b_2}{a_2} \quad (3.1.31)$$

şartları altıgen doku oluşturur.

$$\text{ii) } c_1 = 0 \quad , \quad T_1 = -2\frac{d_2}{c_2} - T_2 \quad , \quad S_1 = -2\frac{b_2}{a_2} - S_2 \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} x^7 y = & -16384a_1^4 d_1^4 (-b_2 c_2 - a_2 c_2 S_2 + i(a_2 d_2 - a_2 c_2 T_2))^2 \\ & (b_2 c_2 + a_2 c_2 S_2 + i(a_2 d_2 + a_2 c_2 T_2))(-(c_2(b_2 + a_2 S_2)(b_2^2 c_2^2 + a_2^2 d_2^2 + \\ & 2a_2 b_2 c_2^2 S_2 + a_2^2 c_2^2 S_2^2 + 2a_2^2 c_2 d_2 T_2 + a_2^2 c_2^2 T_2^2)) + \\ & i(a_2(d_2 + c_2 T_2)(b_2^2 c_2^2 + a_2^2 d_2^2 + 2a_2 b_2 c_2^2 S_2 + a_2^2 c_2^2 S_2^2 + \\ & 2a_2^2 c_2 d_2 T_2 + a_2^2 c_2^2 T_2^2))) \end{aligned}$$

bulunur. Bu şartları kullandığımızda

$$x^6 y^2 = \frac{262144a_1^4 d_1^4 c_2^4 (b_2 + a_2 S_2)^6}{a_2^2} \quad (3.1.32)$$

çıkarki bu katsayıda sıfıra eşit olamayacağı için altıgen doku oluşturamaz.

4) $c_2 = 0$, $c_1 = 0$ ile simetrik olduğu için (3) deki gibi aynı sonuçlar çıkacaktır.

5) (3.1.21) de birinci parantezin içini sıfıra eşitlersek $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = l$ çıkarki bu durumda demetler bozulacağı için altıgen doku oluşamaz.

6)(3.1.21) de ikinci parantezin içini sıfıra eşitlersek $S_1 = -\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} - S_2$, $T_1 = -\frac{d_1}{c_1} - \frac{d_2}{c_2} - T_2$ çıkar buradan $x^8 y^2$ nin katsayısı

$$\begin{aligned} x^8 y^2 = & -1536a_1 a_2 c_1 c_2 (h_1 - h_2)(h'_1 - h'_2)^3 \\ & (-a_1 a_2 c_2 d_1 + a_1 a_2 c_1 d_2 + i(-a_2 b_1 c_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 c_2))^2 \\ & ((b_1 b_2 c_1 c_2 - a_1 a_2 d_1 d_2 + a_2 b_1 c_1 c_2 S_2 + a_1 b_2 c_1 c_2 S_2 + \\ & a_1 a_2 c_1 c_2 S_2^2 - a_1 a_2 c_2 d_1 T_2 - a_1 a_2 c_1 d_2 T_2 - a_1 a_2 c_1 c_2 T_2^2) + \\ & i(-(a_1 b_2 c_2 d_1 + a_2 b_1 c_1 d_2 + a_1 a_2 c_2 d_1 S_2 + a_1 a_2 c_1 d_2 S_2 + \\ & a_2 b_1 c_1 c_2 T_2 - a_1 b_2 c_1 c_2 T_2 + 2a_1 a_2 c_1 c_2 S_2 T_2))) \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

olarak bulunur. Bu katsayıyı sıfıra eşitlediğimizde iki tane denklem çıkar bunlar;

$$S_2^2 - T_2^2 + S_2\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2}\right) - T_2\left(\frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2}\right) + \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} - \frac{d_1}{c_1} \cdot \frac{d_2}{c_2} = 0 \quad (3.1.34)$$

$$2S_2T_2 + S_2\left(\frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2}\right) + T_2\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2}\right) + \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{d_2}{c_2} - \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{d_1}{c_1} = 0 \quad (3.1.35)$$

dir. Eğer $w_1 = -\frac{b_1}{a_1}$, $w_2 = -\frac{b_2}{a_2}$, $w_3 = -\frac{d_1}{c_1}$, $w_4 = -\frac{d_2}{c_2}$ alır (3.1.21) de ikinci parentezi sıfıra eşitlersek

$$w_1 = S_1 + S_2 - w_2 \quad \text{ve} \quad w_3 = T_1 + T_2 - w_4 \quad (3.1.36)$$

bulunur. Buradan x^8y^2 nin katsayısından çıkan iki denklem de şunlardır;

$$w_2^2 - w_4^2 + w_2(-S_1 - S_2) - w_4(-T_1 - T_2) + S_1S_2 - T_1T_2 = 0 \quad (3.1.37)$$

$$2w_2w_4 + w_2(-T_1 - T_2) + w_4(-S_1 - S_2) + T_1S_2 + S_1T_2 = 0 \quad (3.1.38)$$

Bu ise (3.1.34) ve (3.1.35) denklemlerinde S_1 yerine $-\frac{b_1}{a_1}$, T_1 yerine $-\frac{d_1}{c_1}$, S_2 yerine $-\frac{b_2}{a_2}$, T_2 yerine $-\frac{d_2}{c_2}$ değerlerini koymakla elde edilir. Buna göre

$$S_1 = -\frac{b_1}{a_1} \quad , \quad T_1 = -\frac{d_1}{c_1} \quad , \quad S_2 = -\frac{b_2}{a_2} \quad , \quad T_2 = -\frac{d_2}{c_2}$$

olmak üzere demetlerimiz altıgen doku oluşturur.(Şekil 2)

ii) Demetler

$$u_1 = a_1X + b_1Y$$

$$u_2 = \frac{a_2X+b_2}{c_2Y+d_2} \quad (3.1.39)$$

$$u_3 = \frac{X^2+Y^2-2S_1X-2T_1Y+S_1^2+T_1^2}{2(S_2-S_1)X+2(T_2-T_1)Y+S_1^2+T_1^2-S_2^2-T_2^2}$$

veya kompleks düzlemde

$$u_1 = \frac{1}{2} \cdot ((a_1 - ib_1)x + (a_1 + ib_1)y)$$

$$u_2 = \frac{a_2(x+y)+2b_2}{-ic_2(x-y)+2d_2} \quad (3.1.40)$$

$$u_3 = \frac{xy-h'_1x-h_1y+h_1h'_1}{(h'_2-h'_1)x+(h_2-h_1)y+h_1h'_1-h_2h'_2}$$

şeklinde ise (3.1.20) denklemi hesaplandığında x^8 in katsayısı çarpanlara ayrılmış olarak

$$x^8 = 2a_2^2 c_2^2 (h_1 - h_2)(h'_1 - h'_2)^3 (-a_1 + ib_1)^4 \\ (a_2 d_2 + a_2 c_2 T_1 + i(b_2 c_2 + a_2 c_2 S_1))(a_2 d_2 + a_2 c_2 T_2 + i(b_2 c_2 + a_2 c_2 S_2)) \quad (3.1.41)$$

bulunur. Bu katsayının sıfır olması için en azından tek tek çarpanların sıfır olması gerekir. Buna göre $h_1 - h_2 \neq 0, h'_1 - h'_2 \neq 0$ olduklarından

1) $a_2 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $b_2 \neq 0, c_2 \neq 0, a_1 \neq 0$) (3.1.20) denkleminde $x^5 y$ katsayısı

$$x^5 y = 32ia_1^2 b_1 b_2^4 c_2^4 (h_1 - h_2)(h'_1 - h'_2)^3 (-a_1 + ib_1) \quad (3.1.42)$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturması için $x^5 y$ nin katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre

$a_2 = 0$, $b_1 = 0$ (demetlerin bozulmaması için $b_2 \neq 0, c_2 \neq 0, a_1 \neq 0$) dan $x^4 y^2$ nin katsayısı

$$x^4 y^2 = 24a_1^4 b_2^4 c_2^4 (h_1 - h_2)(h'_1 - h'_2)^3 \quad (3.1.43)$$

bulunurki burdanda $x^4 y^2$ ün katsayısı sıfıra eşit olamayacağı için demetlerin altıgen doku oluşturması mümkün değildir.

2) $c_2 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $a_2 \neq 0, b_1 \neq 0, d_2 \neq 0$) (3.1.20) denkleminde $x^5 y$ katsayısı

$$x^5 y = -32a_1 a_2^4 b_1^2 d_2^4 (h_1 - h_2)(h'_1 - h'_2)^3 (-a_1 + ib_1) \quad (3.1.44)$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturması için $x^5 y$ nin katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre

$c_2 = 0$, $a_1 = 0$ (demetlerin bozulmaması için $a_2 \neq 0, d_2 \neq 0, b_1 \neq 0$) dan $x^4 y^2$ nin katsayısı

$$x^4 y^2 = 24a_2^4 b_1^4 d_2^4 (h_1 - h_2)(h'_1 - h'_2)^3 \quad (3.1.45)$$

bulunurki burdanda $x^4 y^2$ ün katsayısı sıfıra eşit olamayacağı için demetlerin altıgen doku oluşturması mümkün değildir.

3) (3.1.41) de birinci büyük parantezin iinin sıfır olmasından $S_1 = -\frac{b_2}{a_2}$, $T_1 = -\frac{d_2}{c_2}$ çıkar.Bu ifadeyi kullandığımızda x^7y^2 nin katsayısı

$$\begin{aligned} x^7y^2 = & 4i(-a_1 + ib_1)^3(-b_2c_2 - a_2c_2S_2 + i(a_2d_2 + a_2c_2T_2))^2 \\ & (b_2c_2a_2c_2S_2 + i(a_2d_2 + a_2c_2T_2)) \\ & (c_2(b_2 + a_2S_2)(b_1b_2c_2 - a_1a_2d_2 + a_2b_1c_2S_2 - a_1a_2c_2T_2) + \\ & i(a_2(d_2 + c_2T_2)(-b_1b_2c_2 + a_1a_2d_2 - a_2b_1c_2S_2 + a_1a_2c_2T_2))) \end{aligned} \quad (3.1.46)$$

bulunur. Bu katsayısında sıfır olmasından

$$S_1 = -\frac{b_2}{a_2} \quad , \quad T_1 = -\frac{d_2}{c_2} \quad , \quad S_2 = \frac{a_1}{b_1}T_2 + \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{d_2}{c_2} - \frac{b_2}{a_2} \quad (3.1.47)$$

bulunurki bu şart ise altıgen doku oluşturur.(şekil 3)

4) (3.1.41) de ikinci büyük parantezin iinin sıfır olması doku için (3) ile aynı şartları verecektir.

iii) Demetler

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1X + b_1Y \\ u_2 &= a_2X + b_2Y \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

$$u_3 = \frac{X^2+Y^2-2S_1X-2T_1Y+S_1^2+T_1^2}{2(S_2-S_1)X+2(T_2-T_1)Y+S_1^2+T_1^2-S_2^2-T_2^2}$$

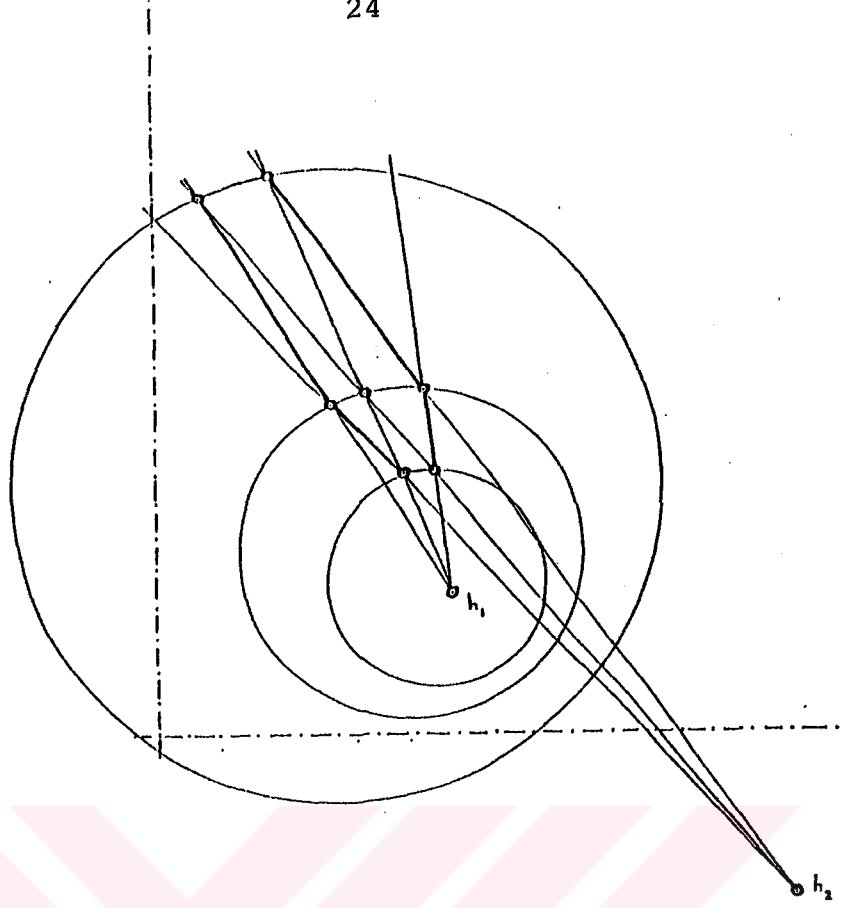
veya kompleks düzlemde

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \cdot ((a_1 - ib_1)x + (a_1 + ib_1)y) \\ u_2 &= \frac{1}{2} \cdot ((a_2 - ib_2)x + (a_2 + ib_2)y) \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

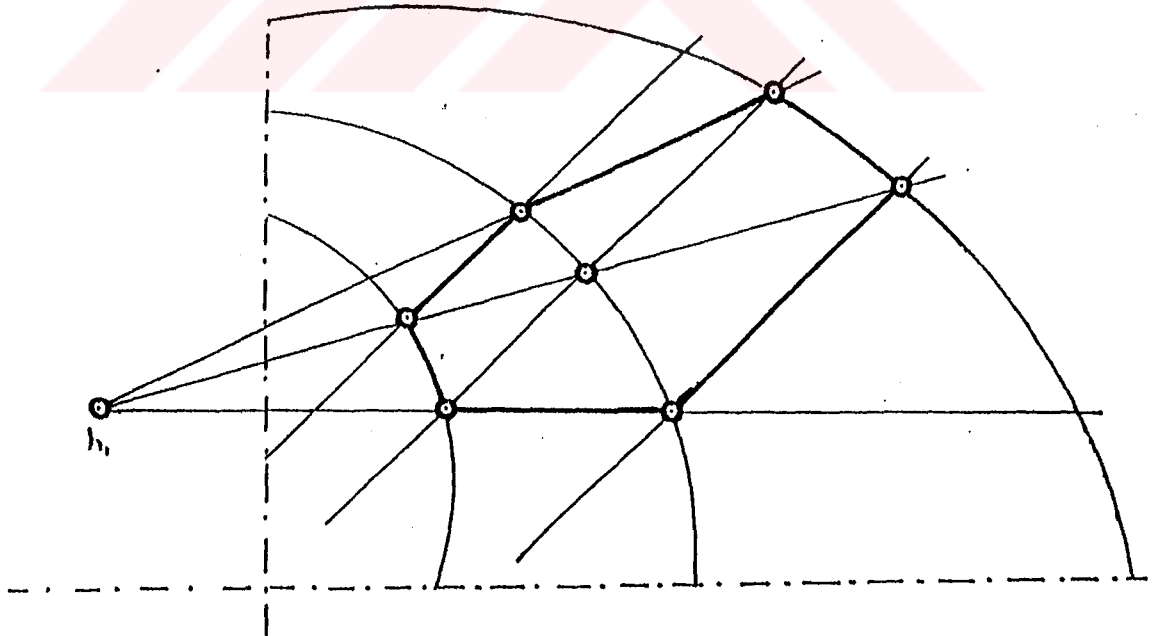
$$u_3 = \frac{xy-h'_1x-h_1y+h_1h'_1}{(h'_2-h'_1)x+(h_2-h_1)y+h_1h'_1-h_2h'_2}$$

şeklinde ise (3.1.20) denklemi hesapladığıda x^5y nin katsayısı çarpanlara ayrılmış olarak

$$\begin{aligned} x^5y = & (-a_2b_1 + a_1b_2)^2(h_1 - h_2)(h'_1 - h'_2)^3(-a_1 + ib_1) \\ & (-a_2 + ib_2)(-a_1a_2 - b_1b_2)/8 \end{aligned} \quad (3.1.50)$$



Şekil 3.1
Altigen Doku Oluşturan Hiperbolik Demet



Şekil 3.2
Altigen Doku Oluşturan Hiperbolik Demet

bulunur. Bu katsayının demetler bozulmadan sıfır olması şartı olan $a_1 = w_1 b_1$, $b_2 = -w_1 a_2$ i kullanarak $x^4 y^2$ nin katsayısını

$$x^4 y^2 = \frac{3a_2^4 b_1^4 (h_1 - h_2)(h'_1 - h'_2)^3 (1 + w_1^2)^4}{32} \quad (3.1.51)$$

buluruz. Bu katsayı sıfır olamayacağından altıgen doku olamaz.

3.2. İki Doğru Demeti ve Genel Bir Eliptik Demet

i) Demetlerimiz

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a_1 X + b_1}{c_1 Y + d_1} \\ u_2 &= \frac{a_2 X + b_2}{c_2 Y + d_2} \\ u_3 &= \frac{X^2 + Y^2 - (P_1 + P_2)X - (R_1 + R_2)Y + P_1 P_2 + R_1 R_2}{2(P_2 - P_1)Y - 2(R_2 - R_1)X + 2P_1 R_2 - 2R_1 P_2} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

veya kompleks düzlemde

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a_1(x+y) + 2b_1}{-ic_1(x-y) + 2d_1} \\ u_2 &= \frac{a_2(x+y) + 2b_2}{-ic_2(x-y) + 2d_2} \\ u_3 &= \frac{xy - \frac{e'_1 + e'_2}{2}x - \frac{e_1 + e_2}{2}y + \frac{e'_1 e_2 + e_1 e'_2}{2}}{i[(e'_1 - e'_2)x - (e_1 - e_2)y + e_1 e'_2 - e'_1 e_2]} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

şeklinde ise (3.1.20) denklemi hesapladığında $x^8 y^3$ ün katsayısı çarpanlara ayrılmış olarak

$$\begin{aligned} x^8 y^3 &= -512i a_1 a_2 c_1 c_2 (e_1 - e_2)(e'_1 - e'_2)^3 \\ &\quad (-a_1 a_2 c_2 d_1 + a_1 a_2 c_1 d_2 + i(-a_2 b_1 c_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 c_2))^2 \\ &\quad (a_1 a_2 (c_2 d_1 + c_1 d_2 + c_1 c_2 R_1 + c_1 c_2 R_2) + \\ &\quad i(c_1 c_2 (a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_1 a_2 P_1 + a_1 a_2 P_2))) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

bulunur. Bu katsayının sıfır olması için en azından tek tek çarpanların sıfır olması gerekir. Buna göre $e_1 - e_2 \neq 0$, $e'_1 - e'_2 \neq 0$ olduklarından

1) $a_1 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $b_1 \neq 0$, $c_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$) (3.1.20)

denkleminde x^8 in katsayısı

$$x^8 = -512a_2^2b_1^4c_1^2c_2^2(e_1 - e_2)(e'_1 - e'_2)^3(a_2(d_2 + c_2R_1) + i(c_2(b_2 + a_2P_1)))(a_2(d_2 + c_2R_2) + i(c_2(b_2 + a_2P_2))) \quad (3.2.4)$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturmaları için x^8 in katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre

1a) $a_1 = 0, c_2 = 0$ (demetlerin bozulmaması için $b_1 \neq 0, c_1 \neq 0, a_2 \neq 0, d_2 \neq 0$) dan x^4y^2 nin katsayısı

$$x^4y^2 = -6144a_2^4b_1^4c_1^4d_2^4(e_1 - e_2)(e'_1 - e'_2)^3 \quad (3.2.5)$$

bulunurki burdanda x^4y^2 ün katsayısı sıfıra eşit olamayacağı için demetlerin altıgen doku oluşturmaları mümkün değildir.

1b) $a_1 = 0$, $P_1 = -\frac{b_2}{a_2}$, $R_1 = -\frac{d_2}{c_2}$ (demetlerin bozulmaması için $b_1 \neq 0, c_1 \neq 0, a_2 \neq 0, c_2 \neq 0$) dan x^7y^2 nin katsayısı

$$\begin{aligned} x^7y^2 = & -512ib_1^4c_1^4(b_2c_2 + a_2c_2P_2 + i(a_2d_2 + a_2c_2R_2)) \\ & (-b_2c_2 - +a_2c_2P_2 + i(a_2d_2 + a_2c_2R_2))^2(-2a_2c_2(b_2 + a_2P_2) \\ & (d_2 + c_2R_2) + i(-((b_2c_2 - a_2d_2 + a_2c_2P_2 - a_2c_2R_2) \\ & (b_2c_2 + a_2d_2 + a_2c_2P_2 + a_2c_2R_2)))) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

bulunur. Bu katsayıyı sıfıra eşitlersek $e_1 - e_2 \neq 0$ olduğundan bu şart altıgen doku oluşturmaz.

1c) $a_1 = 0$, $P_2 = -\frac{b_2}{a_2}$, $R_2 = -\frac{d_2}{c_2}$ olması şartıda (1b) ile aynıdır.

2) $a_2 = 0$, doku için (1) deki gibi aynı sonuçları verecektir.

3) $c_1 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $a_1 \neq 0, d_1 \neq 0, c_2 \neq 0$) (3.1.20) denkleminde x^8 in katsayısı

$$x^8 = -512a_1^4a_2^2c_2^2d_1^4(e_1 - e_2)(e'_1 - e'_2)^3(a_2(d_2 + c_2R_1) + i(c_2(b_2 + a_2P_1)))(a_2(d_2 + c_2R_2) + i(c_2(b_2 + a_2P_2))) \quad (3.2.7)$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturmaları için x^8 in katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre

3a) $c_1 = 0, a_2 = 0$ şartı (1a) da simetrik olarak incelendi.

3b) $c_1 = 0$, $P_1 = -\frac{b_2}{a_2}$, $R_1 = -\frac{d_2}{c_2}$ (demetlerin bozulmaması için $a_1 \neq 0, d_1 \neq 0, a_2 \neq 0, c_2 \neq 0$) dan $x^7 y^2$ nin katsayısı

$$\begin{aligned} x^7 y^2 = & -512ia_1^4 d_1^4 (b_2 c_2 + a_2 c_2 P_2 + i(a_2 d_2 + a_2 c_2 R_2)) \\ & (-b_2 c_2 - +a_2 c_2 P_2 + i(a_2 d_2 + a_2 c_2 R_2))^2 (-2a_2 c_2 (b_2 + a_2 P_2) \\ & (d_2 + c_2 R_2) + i(-((b_2 c_2 - a_2 d_2 + a_2 c_2 P_2 - a_2 c_2 R_2) \\ & (b_2 c_2 + a_2 d_2 + a_2 c_2 P_2 + a_2 c_2 R_2)))) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

bulunur. Bu katsayıyı sıfıra eşitlersek $e_1 - e_2 \neq 0$ olduğundan bu şart altıgen doku oluşturamaz.

3c) $c_1 = 0$, $P_2 = -\frac{b_2}{a_2}$, $R_2 = -\frac{d_2}{c_2}$ olması şartıda (1b) ile aynıdır.

4) $c_2 = 0$, doku için (3) deki gibi aynı sonuçları verecektir.

5) (3.2.3) de birinci büyük parantezin sıfır olmasından $b_1 = a_1 t$, $b_2 = a_2 t$, $d_1 = c_m$, $d_2 = c_2 m$ çıkarkı buda demetlerin bozulduğunu gösterir.

6) (3.1.3) de ikinci büyük parantezin sıfır olmasından

$$P_1 = -\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} - P_2 \text{ ve } R_1 = -\frac{d_1}{c_1} - \frac{d_2}{c_2} - R_2$$

şartı çıkarkı bunu kullanarak $x^8 y^2$ nin katsayısı

$$\begin{aligned} x^8 y^2 = & 1536a_1 a_2 c_1 c_2 (e_1 - e_2)(e'_1 - e'_2)^3 \\ & (-a_1 a_2 c_2 d_1 + a_1 a_2 c_1 d_2 + i(-a_2 b_1 c_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 c_2))^2 \\ & ((b_1 b_2 c_1 c_2 - a_1 a_2 d_1 d_2 + a_2 b_1 c_1 c_2 P_2 + a_1 b_2 c_1 c_2 P_2 + \\ & a_1 a_2 c_1 c_2 P_2^2 - a_1 a_2 c_2 d_1 R_2 - a_1 a_2 c_1 d_2 R_2 - a_1 a_2 c_1 c_2 R_2^2) + \\ & i(-(a_1 b_2 c_2 d_1 + a_2 b_1 c_1 d_2 + a_1 a_2 c_2 d_1 P_2 + a_1 a_2 c_1 d_2 P_2 + \\ & a_2 b_1 c_1 c_2 R_2 - a_1 b_2 c_1 c_2 R_2 + 2a_1 a_2 c_1 c_2 P_2 R_2))) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

olarak bulunur. Bu katsayıyı sıfıra eşitlediğimizde iki tane denklem çıkar bunlar;

$$P_2^2 - R_2^2 + P_2\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2}\right) - R_2\left(\frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2}\right) + \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} - \frac{d_1}{c_1} \cdot \frac{d_2}{c_2} = 0 \quad (3.2.10)$$

$$2P_2R_2 + P_2\left(\frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2}\right) + R_2\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2}\right) + \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{d_2}{c_2} - \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{d_1}{c_1} = 0 \quad (3.2.11)$$

dir. Eğer $w_1 = -\frac{b_1}{a_1}$, $w_2 = -\frac{b_2}{a_2}$, $w_3 = -\frac{d_1}{c_1}$, $w_4 = -\frac{d_2}{c_2}$ alır (3.2.3) de ikinci büyük parentezi sıfıra eşitlersek

$$w_1 = P_1 + P_2 - w_2 \quad \text{ve} \quad w_3 = R_1 + R_2 - w_4 \quad (3.2.12)$$

bulunur. Buradan x^8y^2 nin katsayısından çıkan iki denklem de şunlardır;

$$w_2^2 - w_4^2 + w_2(-P_1 - P_2) - w_4(-R_1 - R_2) + P_1P_2 - R_1R_2 = 0 \quad (3.2.13)$$

$$2w_2w_4 + w_2(-R_1 - R_2) + w_4(-P_1 - P_2) + R_1P_2 + P_1R_2 = 0 \quad (3.2.14)$$

Bu ise (3.2.10) ve (3.2.11) denklemlerinde P_1 yerine $-\frac{b_1}{a_1}$, R_1 yerine $-\frac{d_1}{c_1}$, P_2 yerine $-\frac{b_2}{a_2}$, R_2 yerine $-\frac{d_2}{c_2}$ değerlerini koymakla elde edilir. Buna göre

$$P_1 = -\frac{b_1}{a_1} \quad , \quad R_1 = -\frac{d_1}{c_1} \quad , \quad P_2 = -\frac{b_2}{a_2} \quad , \quad R_2 = -\frac{d_2}{c_2}$$

olmak üzere demetlerimiz altıgen doku oluşturur.(Şekil 4)

ii) Demetler

$$u_1 = a_1X + b_1Y$$

$$u_2 = \frac{a_2X + b_2Y}{c_2Y + d_2} \quad (3.2.15)$$

$$u_3 = \frac{X^2 + Y^2 - (P_1 + P_2)X - (R_1 + R_2)Y + P_1P_2 + R_1R_2}{2(P_2 - P_1)Y - 2(R_2 - R_1)X + 2P_1R_2 - 2R_1P_2}$$

veya kompleks düzlemde

$$u_1 = \frac{1}{2} \cdot ((a_1 - ib_1)x + (a_1 + ib_1)y)$$

$$u_2 = \frac{a_2(x+y) + 2b_2}{-ic_2(x-y) + 2d_2} \quad (3.2.16)$$

$$u_3 = \frac{xy - \frac{e'_1 + e'_2}{2}x - \frac{e_1 + e_2}{2}y + \frac{e'_1e_2 + e_1e'_2}{2}}{i[(e'_1 - e'_2)x - (e_1 - e_2)y + e_1e'_2 - e'_1e_2]}$$

şeklinde ise (3.1.20) denklemini hesapladığımızda x^8 in katsayısı çarpanlara ayrılmış olarak

$$x^8 = -2a_2^2c_2^2(e_1 - e_2)(e'_1 - e'_2)^3(-a_1 + ib_1)^4(a_2d_2 + a_2c_2R_1 + i(b_2c_2 + a_2c_2P_1))(a_2d_2 + a_2c_2R_2 + i(b_2c_2 + a_2c_2P_2)) \quad (3.2.17)$$

bulunur. Bu katsayının sıfır olması için en azından tek tek çarpanların sıfır olması gerekir. Buna göre $e_1 - e_2 \neq 0$, $e'_1 - e'_2 \neq 0$ olduklarından

1) $a_2 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $b_2 \neq 0, c_2 \neq 0, a_1 \neq 0$) (3.1.20) denkleminde x^5y katsayısı

$$x^5y = -32ia_1^2b_1b_2^4c_2^4(e_1 - e_2)(e'_1 - e'_2)^3(-a_1 + ib_1) \quad (3.2.18)$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturması için x^5y nin katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre

$a_2 = 0$, $b_1 = 0$ (demetlerin bozulmaması için $b_2 \neq 0, c_2 \neq 0, a_1 \neq 0$) dan x^4y^2 nin katsayısı

$$x^4y^2 = -24a_1^4b_2^4c_2^4(e_1 - e_2)(e'_1 - e'_2)^3 \quad (3.2.19)$$

bulunurki burdanda x^4y^2 ün katsayısı sıfıra eşit olamayacağı için demetlerin altıgen doku oluşturması mümkün değildir.

2) $c_2 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $a_2 \neq 0, b_1 \neq 0, d_2 \neq 0$) (3.1.20) denkleminde x^5y katsayısı

$$x^5y = 32a_1a_2^4b_1^2d_2^4(e_1 - e_2)(e'_1 - e'_2)^3(-a_1 + ib_1) \quad (3.2.20)$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturması için x^5y nin katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre

$c_2 = 0$, $a_1 = 0$ (demetlerin bozulmaması için $a_2 \neq 0, d_2 \neq 0, b_1 \neq 0$) dan x^4y^2 nin katsayısı

$$x^4y^2 = -24a_2^4b_1^4d_2^4(e_1 - e_2)(e'_1 - e'_2)^3 \quad (3.2.21)$$

bulunurki burdanda x^4y^2 ün katsayısı sıfıra eşit olamayacağı için demetlerin altıgen doku oluşturması mümkün değildir.

3) (3.2.17) de birinci büyük parantezin içinin sıfır olmasından $P_1 = -\frac{b_2}{a_2}$,

$R_1 = -\frac{d_2}{c_2}$ çıkar. Bu ifadeyi kullandığımızda x^7y^2 nin katsayısı

$$\begin{aligned}
 x^7y^2 = & -2i(-a_1 + ib_1)^3(b_2c_2 + a_2c_2e_2 + a_2d_2i)(-b_2c_2 - a_2c_2e'_2 + a_2d_2i)^2 \\
 & (b_1b_2^2c_2^2 - 2a_1a_2b_2c_2d_2 - a_2^2b_1d_2^2 + 2a_2b_1b_2c_2^2P_2 - \\
 & 2a_1a_2^2c_2d_2P_2 + a_2^2b_1c_2^2P_2^2 - 2a_1a_2b_2c_2^2R_2 - 2a_2^2b_1c_2d_2R_2 - \\
 & 2a_1a_2^2c_2^2P_2R_2 - a_2^2b_1c_2^2R_2^2 - i(a_1b_2^2c_2^2 + 2a_2b_1b_2c_2d_2 - \\
 & a_1a_2^2d_2^2 + 2a_1a_2b_2c_2^2P_2 + 2a_2^2b_1c_2d_2P_2 + a_1a_2^2c_2^2P_2^2 + \\
 & 2a_2b_1b_2c_2^2R_2 - 2a_1a_2^2c_2d_2R_2 + 2a_2^2b_1c_2^2P_2R_2 - a_1a_2^2c_2^2R_2^2))
 \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

olarak buluruz. Burada büyük parantezi düzenler sıfıra eşitlersek

$$(P_2 + \frac{b_2}{a_2})^2 - (R_2 + \frac{d_2}{c_2})^2 - 2\frac{a_1}{b_1}[\frac{b_2}{a_2}R_2 + \frac{d_2}{c_2}P_2 + P_2R_2 + \frac{b_2}{a_2}\frac{d_2}{c_2}] = 0 \quad (3.2.23)$$

$$(P_2 + \frac{b_2}{a_2})^2 - (R_2 + \frac{d_2}{c_2})^2 + 2\frac{b_1}{a_1}[\frac{b_2}{a_2}R_2 + \frac{d_2}{c_2}P_2 + P_2R_2 + \frac{b_2}{a_2}\frac{d_2}{c_2}] = 0 \quad (3.2.24)$$

denklemleri çıkar. Bu denklemleri taraf tarafa çıkarırsak

$$[\frac{b_2}{a_2}R_2 + \frac{d_2}{c_2}P_2 + P_2R_2 + \frac{b_2}{a_2}\frac{d_2}{c_2}][\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_1}{a_1}] = 0 \quad (3.2.25)$$

ve çarpanlarına ayırırsak

$$(\frac{d_2}{c_2} + R_2)(\frac{b_2}{a_2} + P_2) = 0 \quad (3.2.26)$$

bulunur. Bu çarpanların ikisi aynı anda sıfıra eşit olamayacağından

$$i) \quad P_1 = -\frac{b_2}{a_2}, \quad R_1 = \frac{d_2}{c_2}, \quad P_2 = \frac{b_2}{a_2}$$

durumunda x^7y nin katsayısı

$$\begin{aligned}
 x^7y = & -4a_2^3(-a_1 + ib_1)^3(d_2 + c_2R_2)^5 \\
 & (a_1a_2d_2 - b_1b_2c_2 + i(a_1b_2c_2 + a_2b_1d_2))
 \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

olur. Bu katsayının sıfır olması ($a_1, b_1, a_2, c_2 \neq 0$) $b_2 = d_2 = 0$ ile mümkündür. Bu durumda da demetlerimiz altıgen doku oluşturmuyor.

$$ii) \quad P_1 = -\frac{b_2}{a_2}, \quad R_1 = \frac{d_2}{c_2}, \quad R_2 = \frac{b_2}{a_2}$$

durumunda ise sonuçlar (i) ile benzer çıkar.

4) (3.2.17) de ikinci büyük parantezin içinin sıfır olması doku için (3) ile aynı şartları verecektir.

iii) Demetler

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1X + b_1Y \\ u_2 &= a_2X + b_2Y \\ u_3 &= \frac{X^2+Y^2-(P_1+P_2)X-(R_1+R_2)Y+P_1P_2+R_1R_2}{2(P_2-P_1)Y-2(R_2-R_1)X+2P_1R_2-2R_1P_2} \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

veya kompleks düzlemde

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \cdot ((a_1 - ib_1)x + (a_1 + ib_1)y) \\ u_2 &= \frac{1}{2} \cdot ((a_2 - ib_2)x + (a_2 + ib_2)y) \\ u_3 &= \frac{xy - \frac{e'_1+e'_2}{2}x - \frac{e_1+e_2}{2}y + \frac{e'_1e_2+e_1e'_2}{2}}{i[(e'_1-e'_2)x - (e_1-e_2)y + e_1e'_2 - e'_1e_2]} \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

şeklinde ise (3.1.20) denklemini hesapladığımızda x^6 nin katsayısı çarpanlara ayrılmış olarak

$$x^6 = - \frac{(-a_2b_1 + a_1b_2)^2(e_1 - e_2)(e'_1 - e'_2)^3(-a_1 + ib_1)^2(-a_2 + ib_2)^2}{32} \quad (3.2.30)$$

bulunur. Bu katsayının sıfır olması için $a_2 = b_2m$, $a_1 = b_1m$ olması demektir ki buda demetlerin bozulduğunu gösterir. Dolayısıyla bu durumda da altıgen doku oluşmaz.

3.3. İki Doğru Demeti ve Genel Bir Parabolik Demet

i) Demetlerimiz

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a_1X+b_1}{c_1Y+d_1} \\ u_2 &= \frac{a_2X+b_2}{c_2Y+d_2} \\ u_3 &= \frac{X^2+Y^2-2AX-2BY+A^2+B^2}{U_1X+U_2Y-AU_1-BU_2} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

veya kompleks düzlemde

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a_1(x+y)+2b_1}{-ic_1(x-y)+2d_1} \\ u_2 &= \frac{a_2(x+y)+2b_2}{-ic_2(x-y)+2d_2} \\ u_3 &= \frac{xy-a'x-ay+aa'}{u'x+uy-a'u-au'} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

şeklinde ise (3.1.20) denklemi hesapladığında x^8y^3 ün katsayısı çarpanlara ayrılmış olarak

$$\begin{aligned} x^8y^3 = & 512ia_1a_2c_1c_2(-a_1a_2c_2d_1 + a_1a_2c_1d_2 + i(-a_2b_1c_1c_2 + a_1b_2c_1c_2))^2 \\ & (a_1a_2(c_2d_1 + c_1d_2 + 2c_1c_2B) + i(c_1c_2(a_2b_1 + a_1b_2 + 2a_1a_2A)))uu'^3 \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

bulunur. Bu katsayının sıfır olması için en azından tek tek çarpanların sıfır olması gerekir. Buna göre $u \neq 0, u' \neq 0$ olduklarından

1) $a_1 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $b_1 \neq 0, c_1 \neq 0, a_2 \neq 0$) (3.1.20) denkleminde x^7y^2 nin katsayısı

$$\begin{aligned} x^7y^2 = & -512ia_2^3b_1^4c_1^4c_2^3uu'^2(2(a_2d_2U_1 + a_2c_2BU_1 + \\ & b_2c_2U_2 + a_2c_2AU_2) + i(4c_2(b_2 + a_2A)U_1)) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturması için x^7y^2 in katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre

1a) $a_1 = 0, c_2 = 0$ (demetlerin bozulmaması için $b_1 \neq 0, c_1 \neq 0, a_2 \neq 0, d_2 \neq 0$) dan x^4y^2 nin katsayısı

$$x^4y^2 = 6144a_2^4b_1^4c_1^4d_2^4uu'^3 \quad (3.3.5)$$

bulunurki burdanda x^4y^2 ün katsayısı sıfıra eşit olamayacağı için demetlerin altıgen doku oluşturması mümkün değildir.

1b) i) $a_1 = 0$, $U_1 = 0$, $A = -\frac{b_2}{a_2}$ (demetlerin bozulmaması için $b_1 \neq 0, c_1 \neq 0, a_2 \neq 0, c_2 \neq 0$) dan x^7y nin katsayısı

$$x^7y = 1024a_2^4b_1^4c_1^4c_2^2(-d_2 - c_2B)^2U_2^2 \quad (3.3.6)$$

bulunur. Bu katsayıyı sıfıra eşitlersek

$$a_1 = 0 \quad , \quad U_1 = 0 \quad , \quad A = -\frac{b_2}{a_2} \quad , \quad B = -\frac{d_2}{c_2}$$

olurki buda altıgen doku oluşturur.

ii) x^7y^2 de büyük parantezin sıfır olması için diğer durumda

$$a_1 = 0 \quad , \quad A = -\frac{b_2}{a_2} \quad , \quad B = -\frac{d_2}{c_2}$$

olmasıdır. Bu durumda da altıgen doku oluşur.

2) $a_2 = 0$, doku için (1) deki gibi aynı sonuçları verecektir.

3) $c_1 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $a_1 \neq 0, d_1 \neq 0, c_2 \neq 0$) (3.1.20) denkleminde x^7y^2 nin katsayısı

$$x^7y^2 = 512ia_1^4a_2^3c_2^4d_1^4uu'^2(2(a_2d_2U_1 + a_2c_2BU_1 + b_2c_2U_2 + a_2c_2AU_2) + i(4c_2(d_2 + c_2B)U_2)) \quad (3.3.7)$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturması için x^7y^2 in katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre

3a) $c_1 = 0, a_2 = 0$ şartı (1a) da simetrik olarak incelendi.

3b) i) $c_1 = 0$, $U_2 = 0$, $B = -\frac{d_2}{c_2}$ (demetlerin bozulmaması için $b_1 \neq 0, c_1 \neq 0, a_2 \neq 0, c_2 \neq 0$) dan x^7y nin katsayısı

$$x^7y = 1024a_1^4a_2^2c_2^4d_1^4(-b_2 - a_2A)^2U_1^2 \quad (3.3.8)$$

bulunur. Bu katsayıyı sıfıra eşitlersek

$$c_1 = 0 \quad , \quad U_2 = 0 \quad , \quad A = -\frac{b_2}{a_2} \quad , \quad B = -\frac{d_2}{c_2}$$

olurki buda altıgen doku oluşturur.

ii) x^7y^2 de büyük parantezin sıfır olması için diğer durumda

$$c_1 = 0 \quad , \quad A = -\frac{b_2}{a_2} \quad , \quad B = -\frac{d_2}{c_2}$$

olmasıdır. Bu durumda da altıgen doku oluşur.

4) $c_2 = 0$, doku için (3) deki gibi aynı sonuçları verecektir.

5) (3.3.3) de birinci büyük parantezin sıfır olmasından $b_1 = a_1t$, $b_2 = a_2t$, $d_1 = c_m$, $d_2 = c_2m$ çıkarki buda demetlerin bozulduğunu gösterir.

6) (3.3.3) de ikinci büyük parantezin sıfır olmasından

$$A = -\frac{b_1}{2a_1} - \frac{b_2}{2a_2} \text{ ve } B = -\frac{d_1}{2c_1} - \frac{d_2}{2c_2}$$

şartı çıkarkı bunu kullanarak x^8y^2 nin katsayısı

$$\begin{aligned} x^8y^2 = & -384(-a_1a_2c_2d_1 + a_1a_2c_1d_2 + i(-a_2b_1c_1c_2 + a_1b_2c_1c_2))^2 \\ & (-2(-a_2b_1c_1c_2 + a_1b_2c_1c_2 + a_1a_2c_2d_1 - a_1a_2c_1d_2) \\ & (- (a_2b_1c_1c_2 + a_1b_2c_1c_2 - a_1a_2c_2d_1 + a_1a_2c_1d_2) + \\ & i(4a_1a_2(-a_2b_1 + a_1b_2)c_1c_2(-c_2d_1 + c_1d_2))) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

olarak bulunur. Bu katsayıyı sıfıra eşitlediğimizde demetler bozulacağı için altıgen doku oluşmaz.

ii) Demetler

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1X + b_1Y \\ u_2 &= \frac{a_2X+b_2}{c_2Y+d_2} \\ u_3 &= \frac{X^2+Y^2-2AX-2BY+A^2+B^2}{U_1X+U_2Y-AU_1-BU_2} \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

veya kompleks düzlemde

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \cdot ((a_1 - ib_1)x + (a_1 + ib_1)y) \\ u_2 &= \frac{a_2(x+y)+2b_2}{-ic_2(x-y)+2d_2} \\ u_3 &= \frac{xy-a'x-ay+aa'}{u'x+uy-a'u-au'} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

şeklinde ise (3.1.20) denklemi hesapladığımızda x^8 in katsayısı çarpanlara ayrılmış olarak

$$x^8 = 2a_2^2c_2^2(-a_1 + ib_1)^4(a_2(d_2 + c_2B) + ic_2(b_2 + a_2A))^2uu'^3 \quad (3.3.12)$$

bulunur. Bu katsayının sıfır olması için en azından tek tek çarpanların sıfır olması gerekir. Buna göre $u \neq 0$, $u' \neq 0$ olduklarından

1) $a_2 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $b_2 \neq 0, c_2 \neq 0, a_1 \neq 0$) (3.1.20) denkleminde x^5y katsayısı

$$x^5y = 32ia_1^2b_1b_2^4c_2^4(-a_1 + ib_1)uu'^3 \quad (3.3.13)$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturmaları için x^5y nin katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre

$a_2 = 0$, $b_1 = 0$ (demetlerin bozulmaması için $b_2 \neq 0, c_2 \neq 0, a_1 \neq 0$)
dan x^4y^2 nin katsayısı

$$x^4y^2 = 24a_1^4b_2^4c_2^4uu'^3 \quad (3.3.14)$$

bulunurki burdanda x^4y^2 ün katsayısı sıfıra eşit olamayacağı için demetlerin altıgen doku oluşturmaları mümkün değildir.

2) $c_2 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $a_2 \neq 0, b_1 \neq 0, d_2 \neq 0$) (3.1.20) denkleminde x^5y katsayısı

$$x^5y = 32a_1a_2^4b_1^2d_2^4(-a_1 + ib_1)uu'^3 \quad (3.3.15)$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturmaları için x^5y nin katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre

$c_2 = 0$, $a_1 = 0$ (demetlerin bozulmaması için $a_2 \neq 0, d_2 \neq 0, b_1 \neq 0$)
dan x^4y^2 nin katsayısı

$$x^4y^2 = 24a_2^4b_1^4d_2^4uu'^3 \quad (3.3.16)$$

bulunurki burdanda x^4y^2 ün katsayısı sıfıra eşit olamayacağı için demetlerin altıgen doku oluşturmaları mümkün değildir.

3) (3.3.12) de büyük parantezin içinin sıfır olmasından

$$A = -\frac{b_2}{a_2} \quad , \quad B = -\frac{d_2}{c_2}$$

çıkarki bu durumda da (3.1.20)denklemini sağlandığından altıgen doku oluşur.
(Şekil 5)

iii) Demetler

$$u_1 = a_1X + b_1Y$$

$$u_2 = a_2X + b_2Y \quad (3.3.17)$$

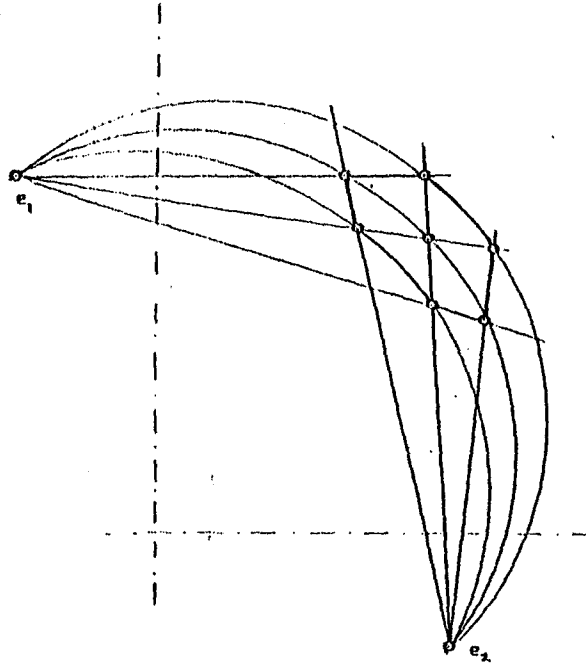
$$u_3 = \frac{X^2+Y^2-2AX-2BY+A^2+B^2}{U_1X+U_2Y-AU_1-BU_2}$$

veya kompleks düzlemde

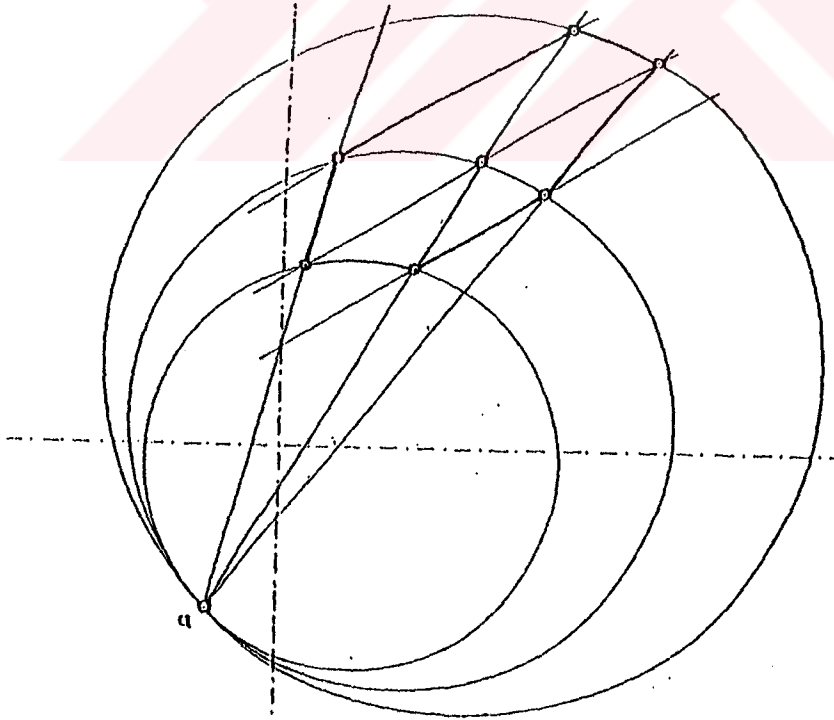
$$u_1 = \frac{1}{2} \cdot ((a_1 - ib_1)x + (a_1 + ib_1)y)$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \cdot ((a_2 - ib_2)x + (a_2 + ib_2)y) \quad (3.3.18)$$

$$u_3 = \frac{xy - a'x - ay + aa'}{u'x + uy - a'u - au'}$$



Şekil 3.3
Altıgen Doku Oluşturan Eliptik Demet



Şekil 3.4
Altıgen Doku Oluşturan Parabolik Demet

şeklinde ise (3.1.20) denklemi hesapladığımızda x^5y nin katsayısı çarpanlara ayrılmış olarak

$$x^5y = \frac{(-a_2b_1 + a_1b_2)^2(-a_1 + ib_1)(-a_2 + ib_2)(a_1a_2 + b_1b_2)uu'^3}{32} \quad (3.3.19)$$

bulunur. Bu katsayının sıfır olmasından

1) $a_2 = b_2m$, $a_1 = b_1m$ bulunurki buda demetlerin bozulduğunu gösterir. Dolayısıyla bu durumda da altıgen doku oluşmaz.

2) $a_1 = b_2m$, $b_1 = -a_2m$ bulunurki buradan x^4y^2 nin katsayısı

$$x^4y^2 = \frac{3(a_2^2 + b_2^2)m^4uu'^3}{32} \quad (3.3.20)$$

çıkar. Buda sıfıra eşit olamayacağından altıgen doku olamaz.

3.4. İki Doğru Demeti ve Genel Bir Aynı Merkezli Çemberler Demeti

i) Demetlerimiz

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a_1X+b_1}{c_1Y+d_1} \\ u_2 &= \frac{a_2X+b_2}{c_2Y+d_2} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

$$u_3 = X^2 + Y^2 - 2AX - 2BY + A^2 + B^2$$

veya kompleks düzlemde

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a_1(x+y)+2b_1}{-ic_1(x-y)+2d_1} \\ u_2 &= \frac{a_2(x+y)+2b_2}{-ic_2(x-y)+2d_2} \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

$$u_3 = xy - a'x - ay + aa'$$

şeklinde ise (3.1.20) denklemi hesapladığımızda x^5y^2 nin katsayısı çarpanlara ayrılmış olarak

$$\begin{aligned} x^5y^2 &= 1024ia_1a_2c_1c_2(-a_1a_2c_2d_1 + a_1a_2c_1d_2 + i(-a_2b_1c_1c_2 + \\ & a_1b_2c_1c_2))^2(a_1a_2(2Bc_1c_2 + c_2d_1 + c_1d_2) + \\ & i((2Aa_1a_2 + a_2b_1 + a_1b_2)c_1c_2)) \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

bulunur. Bu katsayının sıfır olması için en azından tek tek çarpanların sıfır olması gerekir. Buna göre

1) $a_1 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $b_1 \neq 0, c_1 \neq 0, a_2 \neq 0$) (3.1.20) denkleminde x^4y nin katsayısı

$$x^4y = -512ia_2^3b_1^4c_1^4c_2^3(a_2(d_2 + Bc_2) + i(c_2(b_2 + Aa_2))) \quad (3.4.4)$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturması için x^4y in katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre

1a) $a_1 = 0, c_2 = 0$ (demetlerin bozulmaması için $b_1 \neq 0, c_1 \neq 0, a_2 \neq 0, d_2 \neq 0$) Bu koşul (3.1.20) denklemini sağladığından altıgen doku oluşturur.

1b) $a_1 = 0$, $A = -\frac{b_2}{a_2}$, $B = -\frac{d_2}{c_2}$ (demetlerin bozulmaması için $b_1 \neq 0, c_1 \neq 0, a_2 \neq 0, c_2 \neq 0$) Bu koşul da (3.1.20) denklemini sağladığından altıgen doku oluşturur.

2) $a_2 = 0$, doku için (1) deki gibi aynı sonuçları verecektir.

3) $c_1 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $a_1 \neq 0, d_1 \neq 0, c_2 \neq 0$) (3.1.20) denkleminde x^4y nin katsayısı

$$x^4y = 512ia_1^4a_2^3c_2^3d_1^4(a_2(d_2 + Bc_2) + i(c_2(b_2 + Aa_2))) \quad (3.4.5)$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturması için x^4y in katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre

3a) $c_1 = 0, a_2 = 0$ (1) de simetrik olarak incelenmiştir.

3b) $c_1 = 0$, $A = -\frac{b_2}{a_2}$, $B = -\frac{d_2}{c_2}$ (demetlerin bozulmaması için $b_2 \neq 0, c_2 \neq 0, a_1 \neq 0$) Bu koşul da (3.1.20) denklemini sağladığından altıgen doku oluşturur.

4) $a_2 = 0$, doku için (1) deki gibi aynı sonuçları verecektir.

5) (3.4.3) de birinci büyük parantezin sıfır olmasından $b_1 = a_1t$, $b_2 = a_2t$, $d_1 = c_m$, $d_2 = c_2m$ çıkarki buda demetlerin bozulduğunu gösterir.

6) (3.4.3) de ikinci büyük parantezin sıfır olmasından

$$A = -\frac{b_1}{2a_1} - \frac{b_2}{2a_2} \text{ ve } B = -\frac{d_1}{2c_1} - \frac{d_2}{2c_2}$$

şartı çıkarkı bunu kullanarak x^5y nin katsayısı

$$\begin{aligned}
 x^5y = & -256(-a_1a_2c_2d_1 + a_1a_2c_1d_2 + i(-a_2b_1c_1c_2 + a_1b_2c_1c_2))^2 \\
 & (-3(-a_2b_1c_1c_2 + a_1b_2c_1c_2 + a_1a_2c_2d_1 - a_1a_2c_1d_2) \\
 & (-(a_2b_1c_1c_2 + a_1b_2c_1c_2 - a_1a_2c_2d_1 + a_1a_2c_1d_2) + \\
 & i(6a_1a_2(-a_2b_1 + a_1b_2)c_1c_2(-c_2d_1 + c_1d_2)))
 \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

olarak bulunur. Bu katsayıyı sıfıra eşitlediğimizde demetler bozulacağı için altıgen doku oluşmaz.

ii) Demetler

$$\begin{aligned}
 u_1 &= a_1X + b_1Y \\
 u_2 &= \frac{a_2X+b_2}{c_2Y+d_2} \\
 u_3 &= X^2 + Y^2 - 2AX - 2BY + A^2 + B^2
 \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

veya kompleks düzlemde

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{1}{2} \cdot ((a_1 - ib_1)x + (a_1 + ib_1)y) \\
 u_2 &= \frac{a_2(x+y)+2b_2}{-ic_2(x-y)+2d_2} \\
 u_3 &= xy - a'x - ay + aa'
 \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

şeklinde ise (3.1.20) denklemi hesapladığımızda x^4y nin katsayısı çarpanlara ayrılmış olarak

$$x^4y = -2ia_2^2c_2^3(-a_1 + ib_1)^3(a_1 + ib_1)(a_2(d_2 + c_2B) + ic_2(b_2 + a_2A)) \tag{3.4.9}$$

bulunur. Bu katsayının sıfır olması için en azından tek tek çarpanların sıfır olması gerekir. Buna göre

1) $a_2 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $b_2 \neq 0, c_2 \neq 0, a_1 \neq 0$) (3.1.20) denkleminde x^2 nin katsayısı

$$x^2 = 16ia_1^2b_1b_2^4c_2^4(-a_1 + ib_1) \tag{3.4.10}$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturması için x^2 nin katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre $a_2 = 0$, $b_1 = 0$ (3.1.20) denklemini sağladığından altıgen doku oluşturur.

2) $c_2 = 0$ ise (demetlerin bozulmaması için $a_2 \neq 0, b_1 \neq 0, d_2 \neq 0$) (3.1.20) denkleminde x^2 nin katsayısı

$$x^2 = -16a_1a_2^4b_1^2d_2^4(-a_1 + ib_1) \quad (3.4.11)$$

olarak bulunur. Demetlerin altıgen doku oluşturmaları için x^2 nin katsayısı sıfır olması gerekir. Buna göre $c_2 = 0$, $a_1 = 0$ (3.1.20) denklemini sağladığından altıgen doku oluşturur.

3) (3.4.9) de büyük parantezin içinin sıfır olmasından

$$A = -\frac{b_2}{a_2} \quad , \quad B = -\frac{d_2}{c_2}$$

çıkarki bu durumda da (3.1.20)denklemini sağlandığından altıgen doku oluşur. (Şekil 6)

iii) Demetler

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1X + b_1Y \\ u_2 &= a_2X + b_2Y \\ u_3 &= X^2 + Y^2 - 2AX - 2BY + A^2 + B^2 \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

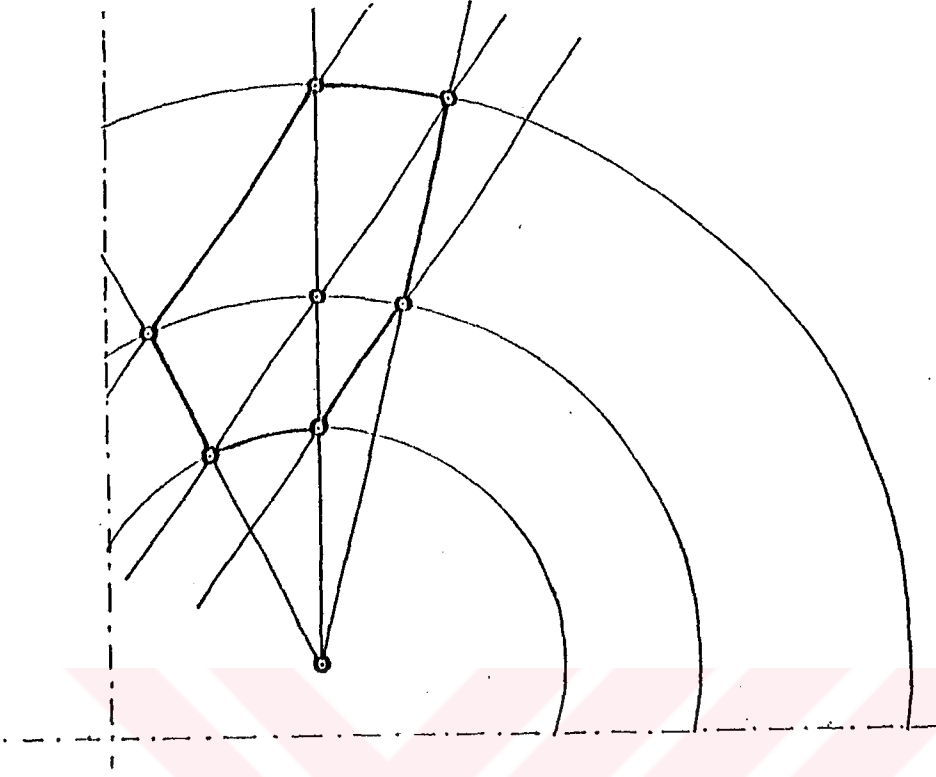
veya kompleks düzlemde

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \cdot ((a_1 - ib_1)x + (a_1 + ib_1)y) \\ u_2 &= \frac{1}{2} \cdot ((a_2 - ib_2)x + (a_2 + ib_2)y) \\ u_3 &= xy - a'x - ay + aa' \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

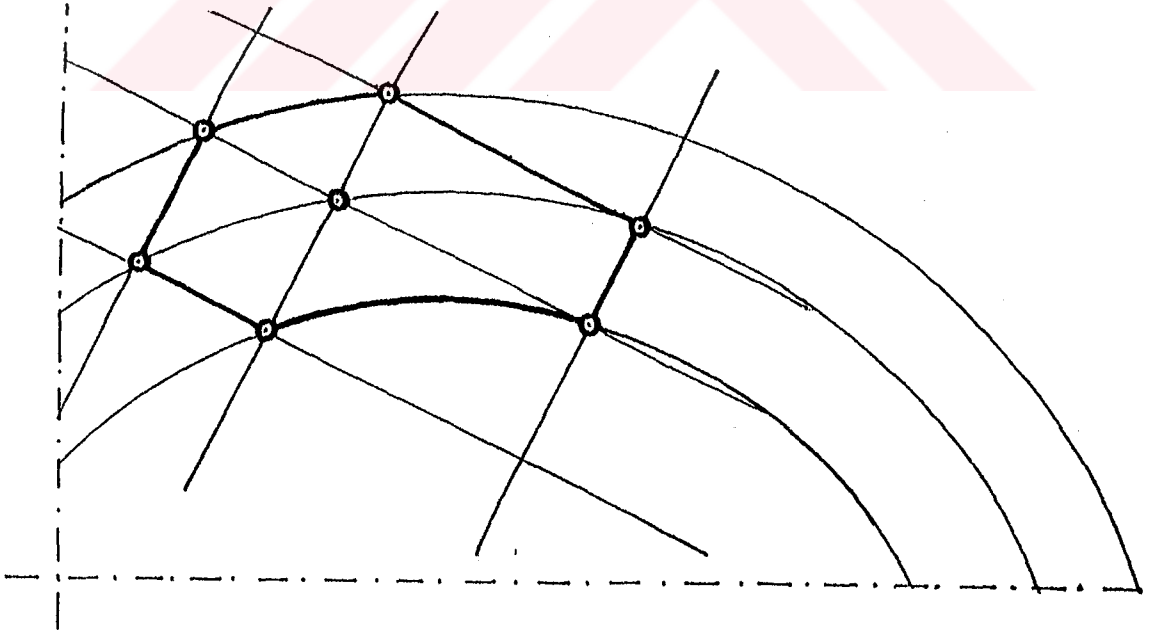
şeklinde ise (3.1.20) denklemini hesapladığıda x^2 nin katsayısı çarpanlara ayrılmış olarak

$$x^2 = \frac{(-a_2b_1 + a_1b_2)^2(-a_1 + ib_1)(-a_2 + ib_2)(a_1a_2 + b_1b_2)}{16} \quad (3.4.14)$$

bulunur. Bu katsayının sıfır olmasından $a_1 = b_2m$, $b_1 = -a_2m$ bulunur. Buda (3.1.20) denklemini sağladığından altıgen doku oluşturur.(Şekil 7)



Şekil 3.5
Altıgen Doku Oluşturan Aynı Merkezli Çemberler Demeti



Şekil 3.6
Altıgen Doku Oluşturan Aynı Merkezli Çemberler Demeti

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada iki doğru demeti ve genel bir çember demetinin altıgen doku oluşturduğu bütün haller incelendi. Bunun için gerekli olan, dokunun Pfaff Formları kullanıldı. Evirtim formülleri elde edilerek iki doğru demeti ve genel bir çember demetini veren bütün durumlar elde edildi. Bunların ışığında altıgen doku oluşturan durumlar şunlardır:

- 1) İki doğru demeti ve genel bir hiperbolik demet için altıgen doku;
 - i) kartezyen düzlemde (a, b) tepe noktalı bir doğru demeti , bir paralel doğrular demeti ile sıfır çemberlerinden biri (a, b) noktasında bulunan bir hiperbolik demet
 - ii) kartezyen düzlemde (a, b) ve (c, d) tepe noktalı iki doğru demeti ile sıfır çemberleri (a, b) ve (c, d) noktalarında bulunan bir hiperbolik demet konumlarında oluşur.
- 2) İki doğru demeti ve genel bir eliptik demet için altıgen doku; kartezyen düzlemde (a, b) ve (c, d) tepe noktalı iki doğru demeti ile temel noktaları (a, b) ve (c, d) olan bir eliptik demet konumunda oluşur.
- 3) İki doğru demeti ve genel bir parabolik demet için altıgen doku; kartezyen düzlemde (a, b) tepe noktalı bir doğru demeti, bir paralel doğrular demeti ile temel noktası (a, b) olan bir parabolik demet konumunda oluşur.
- 4) İki doğru demeti ve genel bir aynı merkezli çemberler demeti için altıgen doku;
 - i) kartezyen düzlemde (a, b) tepe noktalı bir doğru demeti , bir paralel doğrular demeti ile sıfır çemberleri (a, b) noktası olan aynı merkezli çemberler demeti
 - ii) kartezyen düzlemde birbirine dik iki paralel doğrular demeti ile bir aynı merkezli çemberler demeti konumlarında oluşur.

İki doğru demeti ve genel bir çemberler demetinin oluşturduğu tüm bu altıgen dokuların rektifiye (doğrusallaştırılabilmesi) araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] BLASCLKE , W. : Doku Geometrisi , İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Yayını ,1962

[2] KUTUZOV , B.,V. : Geometri (Cilt 2) (Çeviri Hüseyin Demir) Türk Matematik Derneği Yayınları , Sayı 20 , 1963

[3] ERDOĞAN , H.,İ. : Triples of Circle-Pencils Forming A Hexagonal Three-Web In E^2 ,Journal of Geometry , Vol. 35 , Basel , 1989



ÖZGEÇMİŞ

1965’de Kars’da doğdu. Lise öğrenimini Koşuyolu Kazım İşmen Lisesinde tamamladı. 1984 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakóltesi Matematik Mühendislięi Bölümüne girdi. 1988 yılında mezun olarak aynı üniversite araştırma görevliliğine ve yüksek lisans öğretime başladı.

