

T.C.  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**İKİ FAZLI SIVILARIN DÜZLEMSEL ORTAMDA HAREKET  
MODELİNİN ENTROPİ ÇÖZÜMÜ**

Doktora Tezi

Hazırlayan  
**Hasan CARFİ**

İstanbul, 2019

T.C.  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**İKİ FAZLI SIVILARIN DÜZLEMSEL ORTAMDA HAREKET  
MODELİNİN ENTROPİ ÇÖZÜMÜ**

Doktora Tezi

Hazırlayan  
**Hasan CARFİ**

Öğrenci No:

140791001

Danışman  
Prof. Dr. Mahir RESULOV

İstanbul, 2019

## YEMİN METNİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “İki Fazlı Sıvıların Düzlemsel Ortamda Hareket Modelinin Entropi Çözümü ” başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. 22/03/2019

Hasan CARFİ



T.C.  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DOKTORA TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI**

**Beykent Üniversitesi**  
**Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,**

Aşağıda kayıtlı olduğu doktora programı ve tez adı belirtilen 140791001 no'lu öğrenci Hasan CARFI'nin 22/03/2019 tarihinde saat 18:00'da yapılan tez savunma sınavı sonucunda 170.. dakika süreyle sunduğu ve jürinin yönelttiği soruları cevaplayarak savunduğu tezi hakkında OYBİRLİĞİYLE/~~OYÇOKLUĞUYLA~~ ...kabul..... kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

**Anabilim Dalı** : Matematik-Bilgisayar  
**Programı** : Uygulamalı Matematik  
**Tez Başlığı** : İki Fazlı Sıvıların Düzlemsel Ortamda Hareket Modelinin Entropi Çözümü

| DOKTORA TEZ SAVUNMA JÜRİSİ                                    | KANAAT  | İMZA    |
|---------------------------------------------------------------|---------|---------|
| Prof.Dr. Mahir RESULOV (Danışman)                             | Basarlı | Me Ra.f |
| Prof.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL (Üye)<br>(Beykent Üniversitesi)   | Basarlı | Khingur |
| Prof.Dr. Ethem Soner ÇELİKKOL (Üye)<br>(Beykent Üniversitesi) | Basarlı | Shamur  |
| Prof.Dr. Yusuf AVCI (Üye)<br>(İstanbul Gelişim Üniversitesi)  | Basarlı | Yusuf A |
| Prof.Dr. Halim ÖZDEMİR (Üye)<br>(Sakarya Üniversitesi)        | Basarlı | Halim Ö |

## ÖNSÖZ

“İki Fazlı Sıvıların Düzlemsel Ortamda Hareket Modelinin Entropi Çözümü” adlı bu çalışma, Beykent Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı’nda “Doktora Tezi” olarak hazırlanmıştır. Tezimin her aşmasında yardımlarını esirgemeyen, Doktora öğrenimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan tez danışmanım, değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV’ a ve ayrıca tezimin hazırlanması esnasında desteğini esirgemeyen hocam Prof. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL’a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hasan CAFRİ  
İstanbul, 2019

Adı ve Soyadı : Hasan CARFİ  
Danışmanı : Prof. Dr. Mahir RESULOV  
Türü ve Tarihi : Doktora / 2019  
Alanı : Uygulamalı Matematik  
Anahtar Kelimeler : Doğrusal Olmayan Hiperbolik Denklemler, Sıkıştırılamayan Akışlar, Sıkışabilir Akışlar

## ÖZ

### İKİ FAZLI SIVILARIN DÜZLEMSEL ORTAMDA HAREKET MODELİNİN ENTROPİ ÇÖZÜMÜ

Ülkelerin ekonomik gelişmesi sırasında yeni enerji kaynaklarının keşfedilmesi ve onların optimal istismar edilmesi süreçlerinin bilimsel açıdan öğrenilmesi gerekmektedir. Bu ise yeni matematiksel ve mühendislik metotların oluşturulmasını zaruri kılar.

Tezde hidrodinamiğin özel bir alanı olan, iki fazlı sıvıların tabakalı ortamda birlikte hareketini ifade eden denklemler sisteminin sayısal çözümünün bulunması için bir metot geliştirilmiştir. İki fazlı sıvıların (örneğin, su ve petrol) birlikte hareketini ifade eden denklemler sistemi, su ile doyma fonksiyonuna göre birinci mertebeden nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemin verilmiş başlangıç koşulu çerçevesinde çözümünün bulunmasına indirgenir. Bu denklem veya denklemler sisteminin spesifik özelliklerinden biri de çözümde yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarının mevcut olmasıdır. Bu özellik literatürde iyi bilinen klasik yöntemlerin uygulanmasında bir takım zorluklar çıkarmaktadır. Bu nedenle tezin ilk bölümünde zayıf (genelleştirilmiş) çözüm kavramının dahil edilebilmesi için gereken altyapı oluşturulmuştur.

İkinci bölümde araştırılacak olayın dinamiğini açıklamak için önce bir boyutlu ortamda sıkışamayan sıvıların, sonra sıkışabilir sıvıların hareket modelleri incelenmiştir. Buckley-Leverett modelinin çözümünün özelliklerini incelemek için önce Cauchy problemi matematiksel açıdan incelenmiş, sonra ise bu inceleme metodu, pratikte rastlanan petrolün su ile sıkıştırılması probleminin çalışılmasına uygulanmıştır. Ayrıca, karışık denklemler sisteminin ilki su ile doyma fonksiyonu, ikincisi ise basınç fonksiyonu olmak üzere fiziksel parametrelere

göre müstakil denklemlere parçalanması için metot önerilmiştir. Son olarak, petrolün kimyasal aktif suların yardımı ile sıkıştırıp çıkarılması sürecini ifade eden denklemler sisteminin uygun başlangıç ve sınır şartları dahilinde çözümünün bulunması için sonlu farklar metodu geliştirilmiştir.

Üçüncü bölümde, sıvıların mikroskobik ortamdaki akış dinamiği ve kapiler basınç dikkate alınarak petrolün su ile sıkıştırılması süreci incelenmiştir.

Son olarak, düzlemsel tabakalı ortamda iki fazlı sıvıların hareket denklemleri incelenmiştir. Fiziksel olayın tüm fiziksel özelliklerini tam açıklayan ve M. Rasulov tarafından geliştirilen metotlar kullanılarak, bazı iyileştirmeler önerilmiş ve bir kaç problemin çözümüne uygulanmıştır.

Name and Surname : Hasan CARFI  
Supervisor : Prof. Dr. Mahir RESULOV  
Degree and Date : Doctorate / 2019  
Major : Applied Mathematics  
KeyWords : Nonlinear Hyperbolic Equations, Incompressible Flows, Compressible Flows

## **ABSTRACT**

### **ENTROPY SOLUTION OF MOTION MODEL IN PLANAR ENVIRONMENT OF TWO-PHASE FLUID**

During the economic development of countries, the discovery of new energy sources and their optimal usage processes need to be examined on a scientific basis. This in turn requires the creation of novel mathematical and engineering methods.

In the thesis, a method has been developed to find a numerical solution of the system of equations that models the co-movement of two-phase fluids in the porous medium, which is a special field of hydrodynamics. Equation systems that represent the co-movement of two-phase fluids (eg water and oil) are reduced to finding the solution of the first order nonlinear partial-differential differential equation based on the water saturation function. One of the specific features of this equations or system of equations is that they have discontinuities at unknown locations in the solution. This feature presents some difficulties in the application of well-known classical methods in the literature. Therefore, in the first part of the thesis, the necessary framework has been created for the formation of the concept of weak (generalized) solution.

In the second part, in order to explain the dynamics of the subject, movement models of incompressible, then compressible, fluids on one dimension has been examined. To examine the properties of the solutions of Buckley-Leverett model, Cauchy model has been examined mathematically, then this examination method has been applied to the problem of compressing oil using water as in practice. Moreover, a method has been proposed to separate the complex equation system into separate equations based on the physical parameters; a saturation function and a pressure function. Lastly, a finite difference method has been developed to find the



solution of the equation system that describe the compression and extraction of oil using chemically active water with the appropriate initial and boundary conditions.

In the third part, considering the flow dynamics and capillary pressure of fluids in a microscopic environment, the process of compressing oil with water has been examined.

In the last part, the movement equations of two-phased fluids in the planar layer has been examined. Using the methods developed by M. Rasulov, that describe the complete physical properties of the physical phenomenon, some improvements have been suggested and applied to the solutions of a few practical problems.



## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>ÖZ</b> .....                                                                                                       | i   |
| <b>ABSTRACT</b> .....                                                                                                 | iii |
| <b>ŞEKİLLER LİSTESİ</b> .....                                                                                         | vii |
| <b>KISALTMALAR LİSTESİ</b> .....                                                                                      | ix  |
| <b>1. GİRİŞ</b> .....                                                                                                 | 1   |
| 1.1 Temel Kavramlar ve Yardımcı İfadeler.....                                                                         | 3   |
| 1.2. Genelleştirilmiş Fonksiyonlar.....                                                                               | 5   |
| 1.2.1 Genelleştirilmiş Fonksiyonların Türevleri.....                                                                  | 8   |
| 1.2.2 Çok Değişkenli Fonksiyonların Genelleştirilmiş Türevleri .....                                                  | 10  |
| 1.3 Karakteristikler Yöntemi .....                                                                                    | 12  |
| 1.4 Nonlinear Denklemler .....                                                                                        | 19  |
| 1.4.1 İki Bağımsız Değişkenli Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemin.....                                          | 19  |
| Geometrik Anlamı .....                                                                                                | 19  |
| 1.4.2 İki Bağımsız Değişkenli Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemin Genel .....                                   | 20  |
| Çözümü. Charpit Denklemler Sistemi.....                                                                               | 20  |
| 1.4.3. Homojen Olmayan Kuazi Lineer Denklemler.....                                                                   | 22  |
| 1.4.4 Cauchy Probleminin Çözümü.....                                                                                  | 24  |
| 1.5. Lineer ve Kuazi Lineer Denklemlerin Zayıf (Genelleştirilmiş) Çözümleri .....                                     | 27  |
| 1.6 Literatür Taraması ve Fiziksel Problemin Koyuluşu.....                                                            | 33  |
| <b>2. İKİ FAZLI SIVILARIN TABAKALI ORTAMDA BİRLİKTE HAREKETİNİN</b> .....                                             | 37  |
| <b>MATEMATİKSEL MODELLERİ</b> .....                                                                                   | 37  |
| 2.1 Mikroskopik Ortamda İki Fazlı Sıvıların Birlikte Hareketini İfade Edebilen Denklemler ve Problemin Koyuluşu ..... | 37  |
| 2.2 Bir Boyutlu Ortamda Sıkışamayan Sıvıların Birlikte Hareketi. Buckley-Leverett Modeli .....                        | 41  |
| 2.2.1 Cauchy Problemi .....                                                                                           | 42  |
| 2.3. Buckley – Leverett Modelinin Petrolün Su İle Sıkıştırılması Problemine Uygulanması .....                         | 51  |
| 2.4 Sıkışabilen Sıvıların Hareketinin Matematiksel Modeli .....                                                       | 58  |

|                                                                                                                                                                |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.4.1 Denklemler Sisteminin Fiziksel Parametrelere Göre Ayrıklaştırılması .....                                                                                | 60         |
| 2.5 Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Farklar Metodu .....                                                                                                 | 62         |
| 2.5.1 Aşık sonlu fark karşılığı .....                                                                                                                          | 63         |
| 2.5.2 Aşık olmayan sonlu fark karşılığı .....                                                                                                                  | 63         |
| 2.6 Petrolün Kimyasal Aktif Sıvılar Yardımıyla Sıkıştırılması.....                                                                                             | 65         |
| 2.6.1 Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümler .....                                                                                                   | 67         |
| 2.6.2. Bilgisayar Deneyleri .....                                                                                                                              | 68         |
| 2.6.3 Petrolün $CO_2$ Karışımlı Su İle Sıkıştırılması .....                                                                                                    | 72         |
| <b>3. BİR BOYUTLU MİKROSKOPİK ORTAMDA İKİ FAZLI SIVILARIN BİRLİKTE HAREKETİNİN MATEMATİKSEL MODELİ VE SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....</b> | <b>74</b>  |
| 3.1 Mikroskopik Ortamda Sıkışamayan Sıvıların Hareketi.....                                                                                                    | 74         |
| 3.1.1 Kapiler Basıncın Su İle Doyma Fonksiyonundan Bağımlılığın Teorik .....                                                                                   | 75         |
| Özelliklerinden İstifade Edilerek Bulunması .....                                                                                                              | 75         |
| 3.2 Yardımcı Problem ve Sonlu Farklar Şemasının Kurulması .....                                                                                                | 81         |
| 3.3 Kapiler Kuvvet Etkisinde Petrolün Su ile Sıkıştırılması Prosesinin İncelenmesi (İslatma) .....                                                             | 87         |
| <b>4. İKİ BOYUTLU MİKROSKOPİK ORTAMDA İKİ FAZLI SIVILARIN BİRLİKTE HAREKETİNİN MATEMATİKSEL MODELİ VE SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....</b> | <b>91</b>  |
| 4.1 Sonlu Farklar Şemasının Kurulması.....                                                                                                                     | 93         |
| 4.2 Çözüm Algoritması ve Bilgisayar Deneyleri .....                                                                                                            | 98         |
| <b>5. SONUÇ .....</b>                                                                                                                                          | <b>103</b> |
| <b>KAYNAKLAR.....</b>                                                                                                                                          | <b>104</b> |

## ŞEKİLLER LİSTESİ

|            |                                                                                                     |    |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 1.1  | Sobolev şapkası.....                                                                                | 4  |
| Şekil 2.1  | $k_{\omega}$ , $k_o$ ve $F_{\omega}(\sigma)$ fonksiyonlarının grafikleri.....                       | 54 |
| Şekil 2.2  | $F'_{\omega}(\sigma)$ fonksiyonunun türevinin grafiği .....                                         | 54 |
| Şekil 2.3  | Zamanın farklı değerlerinde $\sigma(x,t)$ fonksiyonunun grafikleri .....                            | 55 |
| Şekil 2.4  | $v(x,t)$ fonksiyonunun $x$ 'e göre değişimi.....                                                    | 56 |
| Şekil 2.5  | $v_{\text{gen}}(x,t)$ fonksiyonunun grafiği .....                                                   | 56 |
| Şekil 2.6  | $\sigma_{\text{gen}}(x,t)$ fonksiyonunun grafiği .....                                              | 57 |
| Şekil 2.7  | Henri izotermi için su ile doyma fonksiyonunun dağılımı .....                                       | 68 |
| Şekil 2.8  | Henri izotermi için konsantrasyon fonksiyonunun dağılımı .....                                      | 69 |
| Şekil 2.9  | Lengmyr izotermi için su ile doyma fonksiyonunun dağılımı .....                                     | 70 |
| Şekil 2.10 | Lengmyr izotermi için konsantrasyon fonksiyonunun dağılımı.....                                     | 70 |
| Şekil 2.11 | $ac = 0$ için su ile doyma fonksiyonunun dağılımı .....                                             | 71 |
| Şekil 2.12 | $ac = 0$ için su ile doyma fonksiyonunun dağılımı .....                                             | 71 |
| Şekil 2.13 | Buckley-Leverett fonksiyonunun karakteristik dağılımı.....                                          | 72 |
| Şekil 2.14 | Kimyasal aktif sıvı ile petrolün sıkıştırılması sürecinde su ile doyma fonksiyonunun dağılımı.....  | 73 |
| Şekil 2.15 | Kimyasal aktif sıvı ile petrolün sıkıştırılması sürecinde konsantrasyon fonksiyonunun dağılımı..... | 73 |
| Şekil 3.1  | Suyun ve petrolün oransal faz geçirgenliği .....                                                    | 76 |
| Şekil 3.2  | $pc'$ fonksiyonunun grafiği .....                                                                   | 78 |
| Şekil 3.3  | Buckley-Leverett fonksiyonunun grafiği .....                                                        | 78 |
| Şekil 3.4  | $pc$ fonksiyonunun grafiği .....                                                                    | 79 |
| Şekil 3.5  | Buckley-Leverett fonksiyonunun 1.türevinin grafiği .....                                            | 79 |
| Şekil 3.6  | Buckley-Leverett fonksiyonunun 2.türevinin grafiği .....                                            | 80 |
| Şekil 3.7  | $J(S\omega)$ fonksiyonunun grafiği .....                                                            | 80 |
| Şekil 3.8  | $v\omega(x,t)$ fonksiyonunun grafiği .....                                                          | 89 |
| Şekil 3.9  | $\sigma\omega x, t = \partial^2 v\omega(x,t)/\partial x^2$ fonksiyonunun grafiği .....              | 90 |

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Şekil 3.10</b> $\sigma\omega x, t = 1 - \sigma\omega x, t$ fonksiyonunun grafiği ..... | 90  |
| <b>Şekil. 4.1</b> Kuyuların Yerleşim Şeması .....                                         | 92  |
| <b>Şekil 4.2</b> $x, y, t$ Uzayında Kurulmuş Hesaplama Şablonu .....                      | 93  |
| <b>Şekil 4.3</b> $T = 600$ gün sonrası basıncın dinamik dağılımı .....                    | 99  |
| <b>Şekil 4.4</b> $T = 600$ gün sonrası yatağa pompalanan suyun dinamik dağılımı .....     | 100 |
| <b>Şekil 4.5</b> $T = 1800$ gün sonrası yatağa pompalanan suyun dinamik dağılımı .....    | 100 |
| <b>Şekil 4.6</b> $T = 1800$ gün sonrası yatağa pompalanan suyun dinamik dağılımı .....    | 101 |
| <b>Şekil 4.7</b> $T = 2200$ gün sonrası yatağa pompalanan suyun dinamik dağılımı .....    | 101 |
| <b>Şekil 4.8</b> Yatay kuyulardan yatağa pompalanan suyun dinamik dağılımı.....           | 102 |

## KISALTMALAR LİSTESİ

|                                 |                                                                                                                                    |
|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A, B, L, M$                    | Operatörler                                                                                                                        |
| ADD                             | Adi Diferansiyel Denklem                                                                                                           |
| $A^*$                           | $A$ nın adjoint operatörü                                                                                                          |
| $A^{-1}$                        | $A$ nın ters operatörü                                                                                                             |
| $C([a, b])$                     | $[a, b]$ de tanımlı ve sürekli fonksiyonlar uzayı                                                                                  |
| $C^k([a, b])$                   | $[a, b]$ de tanımlı ve $k(k \geq 1)$ mertebeye kadar sürekli türevlenebilen fonksiyonlar uzayı                                     |
| $C^{m,n}(Q)$                    | $Q$ da tanımlı, sırasıyla m. ve n. mertebeden sürekli, diferansiyellenebilen fonksiyonlar uzayı                                    |
| $\overset{0}{C}_{m,n}(Q)$       | $Q$ da tanımlı, sırasıyla m. ve n. mertebeden sürekli, diferansiyellenebilen ve $Q$ da kompakt taşıyıcıya sahip fonksiyonlar uzayı |
| $D, Q$                          | Bölgeler                                                                                                                           |
| $E$                             | Adi fonksiyonlar kümesi                                                                                                            |
| $K, D$                          | Test fonksiyonlar kümesi                                                                                                           |
| KTDD                            | Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem                                                                                                 |
| $Ker M$                         | $M$ operatörünün çekirdeği                                                                                                         |
| $M_\infty^2$                    | Mach sayısı                                                                                                                        |
| $Q_T$                           | $\{(x, t)   x \in D, 0 \leq t < T\}$ kümesi                                                                                        |
| $R^n$                           | $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktalarının Euclid uzayı                                                                             |
| $R_+^{n+1} = R^n \times [0, T]$ |                                                                                                                                    |
| $\sup u$                        | $u(x)$ fonksiyonun taşıyıcısı, yani $\{x : u(x) \neq 0\}$                                                                          |

|                                                                                                     |                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $t$ ve $x$                                                                                          | zaman ve yer değişkeni                                                                                 |
| $u_{ext}(x, t)$                                                                                     | $u(x, t)$ fonksiyonun çözümüne karşılık gelen genişletilmiş çözüm                                      |
| $U \equiv U(x_i, t_k)$                                                                              | $u(x, t)$ fonksiyonun $(x_i, t_k)$ düğüm noktasındaki yaklaşık değeri                                  |
| $\hat{U} \equiv U(x_i, t_{k+1})$                                                                    | $u(x, t)$ fonksiyonun $(x_i, t_{k+1})$ düğüm noktasındaki yaklaşık değeri                              |
| $\tilde{U} \equiv U(x_{i+1}, t_k)$                                                                  | $u(x, t)$ fonksiyonun $(x_{i+1}, t_k)$ düğüm noktasındaki yaklaşık değeri                              |
| $U_{x_i}$                                                                                           | $u(x)$ fonksiyonun $x_i$ değişkenine göre ileri (sağ) sonlu fark türevi                                |
| $U_{-x_i}$                                                                                          | $u(x)$ fonksiyonun $x_i$ değişkenine göre ileri (sol) sonlu fark türevi                                |
| $U_t$                                                                                               | $u(x, t)$ fonksiyonun $t$ değişkenine göre sonlu fark türevi, yani<br>$(U_{i,k+1} - U_{i,k}) / t$      |
| $\Delta_x \cdot \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_i^2}$                        | Laplace operatörü                                                                                      |
| $\nabla \cdot \equiv \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}$ | $(t, x)$ değişkenlerine göre D' Alambert operatörü                                                     |
| $\delta(x)$                                                                                         | Dirac fonksiyonu                                                                                       |
| $(\cdot, \cdot)$                                                                                    | Skaler çarpım                                                                                          |
| $(f, \varphi)$                                                                                      | $\varphi$ test fonksiyonlar üzerinde oluşmuş genelleştirilmiş fonksiyon                                |
| $\Omega_{h,r}$                                                                                      | $Q$ bölgesini örten ağ, burada $t, h$ sırasıyla zaman ve yer değişkenlerine göre ağın adımı olmaktadır |
| $\frac{\partial u}{\partial x_i}$                                                                   | $u(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ fonksiyonunun $x_i$ değişkenine göre kısmi türevi                |
| $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$                                                               | $u$ fonksiyonunun $x_i$ değişkenine göre ikinci mertebeden kısmi türevi                                |

## 1. GİRİŞ

Doğadaki birçok pratik problemin matematiksel modeli kısmi türevli diferansiyel denklem veya denklemler sistemi için yazılmış başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünün bulunmasına indirgenebilir. Çoğu zaman problemin söz konusu verileri süreksiz fonksiyonlar olabilir. Bazı durumlarda ise matematiksel problemin çözümünde, diğer deyişle fiziksel olayın dinamiğinde süreksizlik ortaya çıkmaktadır.

Genel olarak nonlinear problemin çözümünde zorluk oluşturan bazı özellikler ortaya çıkmaktadır. Nonlinear problemlerde ortaya çıkan yeni karakteristik özellikler (örneğin, heyecanlanmış cephenin sonlu hızla dağılımı, darbe dalgası, arakesit (kontakt) sıçrayışları vs. gibi fiziksel özellikler) zayıf çözüm kavramı yardımıyla ifade edilebilir.

Söz konusu zayıf çözümü tanımlamak için göz önüne alınan diferansiyel denkleme karşılık gelen integral gösterimi yazmak gerekmektedir. Genelde, kısmi türevli diferansiyel denklem için zayıf çözüm kavramı farklı yollarla yazılabilir. Ancak, zayıf çözüm kavramına değinilmeden önce kavramsal yapıların iyi anlaşılması için temel kavram ve yardımcı ifadeler öncelik verilecektir.

Diğer taraftan, bilgisayar simülasyonu yapmaksızın tekniksel özelliğe sahip olan mega projeleri gerçekleştirmenin mümkün olmadığı herkesçe bilinmektedir. Bilgisayar deneyleri teorik bir enstrüman olmanın yanı sıra bir çok alanda, özellikle de hidro gaz dinamiğinde etkin olarak kullanılmaktadır. Bilgisayar deneylerinin temelini oluşturan aşamalar, olayın matematiksel modellenmesi, etkin çözüm metotlarının üretilmesi ve çağdaş bilgisayar teknolojilerinin uygulanması ile bilimsel karar verilmesidir.

Petrol yataklarının işlenmesi, teknolojik göstergelerin bulunması ve yatağın optimal istismarı gibi konular da bilgisayar deneyleriyle ele alınması gereken zor ve çok faktörlü projelerdir. İstismar sürecinin dinamiğini etkileyen faktörlerin çokluğu, yeraltı ve yerüstü sistemlerin karşılıklı ilişkileri matematiksel modelden ve çözüm algoritmasından yüksek hassaslık talep eder. Özellikle çok fazlı sıvıların tabakalı ortamlarda birlikte hareket zamanında önemli zorluklar ortaya çıkar. Bu tür süreçleri ifade eden sistemlere klasik metotların uygulanması, bazı parametrelerde keskin değişen bölgelerin (örneğin, heyecanlanmış bölgenin sonlu hızla hareketi, iki farklı sıvıların arakesitinde oluşan sıçrayışlar, petrolün su ile



sıkıştırılma sürecinde su ile doyma fonksiyonunda sıçrayışlar vs,) mevcut olmasından dolayı çok da yararlı olmayabilir.

Petrol yataklarının istismar sürecinin optimal gerçekleştirilmesi, yeni teorik yaklaşımların ve etkin çözüm algoritmalarının oluşturulmasını gerektirir. Bu nedenle tezde petrol yataklarında iki fazlı sıvıların birlikte hareketini ifade eden nonlinear denklemler sisteminin olayın fiziksel özelliklerini düzgün ifade edebilen çözümlerinin bulunması ve istismar sürecinin teknolojik göstergelerinin elde edilmesi hedeflenmiştir. Böylece, iki fazlı sıvıların birlikte hareketini ifade eden nonlinear kısmi türevli denklemler sisteminin uygun başlangıç ve sınır koşulları çerçevesinde sayısal çözümünün bulunması için süreksiz fonksiyonlar sınıfında orijinal bir metot geliştirilmiştir. Göz önüne alınan problemler, Fizikte Matematiksel Metotlar ve Sayısal Matematik yöntemlerinden istifade edilerek çözülmüştür.

Tezde, M. Rasulov tarafından geliştirilen ve fiziksel olayın tüm fiziksel özelliklerini tam olarak açıklayan metotlar kullanılarak, bazı iyileştirmeler önerilmiş ve bir kaç teorik sonuç elde edilmiştir. Bunlar bazı pratik problemlerin çözümlerine uygulanmıştır. Tezdeki araştırma konularını temelde iki başlık altında aşağıdaki şekilde verebiliriz:

- İki fazlı sıvıların birlikte (hem bir boyutlu, hem de iki boyutlu ) makroskopik ortamda hareketini ifade eden nonlinear denklemler sisteminin analitik ve sayısal çözüm yöntemlerinin incelenmesi,
- İki fazlı sıvıların birlikte (hem bir boyutlu, hem de iki boyutlu ) mikroskopik ortamda hareketini ifade eden nonlinear denklemler sisteminin analitik ve sayısal çözüm yöntemlerinin incelenmesi.

Tezde elde edilen önemli bulgular ve gelişmeleri de aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

- İki fazlı sıkışamayan sıvıların mikroskopik ortamda hareketini ifade edebilen denklemler sisteminin çözümü için süreksiz fonksiyonlar sınıfında etkin nümerik algoritma önerilmiştir.
- İki fazlı sıkışamayan sıvıların mikroskopik ortamda hareketini ifade edebilen denklemler sisteminin fiziksel parametrelere göre ayrışması gerçekleştirilmiştir ki, bu da etkin çözüm yöntemlerinin üretilmesine olanak sağlamıştır.
- Kapiler basınç dikkate alınarak, petrolün su ile sıkıştırılması sürecinde su ile doyma fonksiyonunun yapısı incelenmiştir.

Ayrıca, ek olarak düzlemsel tabakalı ortamda petrolün su ile sıkıştırılması dinamiği de incelenmiştir.

Nonlinear denklemlerin teorisinin kavramsal ve teoriksel alt yapısına giriş yapmadan önce sonraki işlerimizde gereken bazı kavramlar kısaca hatırlatılacaktır.

### 1.1 Temel Kavramlar ve Yardımcı İfadeler

Sonraki işlemlerimizde kolaylık sağlamak için bazı yardımcı bilgileri hatırlayalım.

**Tanım 1.1**  $-\infty < x < \infty$  da tanımlı reel değer alan herhangi bir sonlu  $-a \leq x \leq b$  aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlara adi (ordinary) fonksiyon denir.  $f_1$  ve  $f_2$  adi fonksiyonları için hemen hemen her yerde  $f_1(x) = f_2(x)$  oluyorsa  $f_1$  ve  $f_2$  denktir denir ve  $f_1 \equiv f_2$  yazılır.

Adi fonksiyonlar kümesini  $E$  ile gösterelim.  $E$  lineer bir uzaydır. Bu uzayda limit kavramı da aşağıdaki şekilde verilebilir:

$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \xrightarrow{hhy} f(x)$  ve  $\forall \nu$  için öyle bir  $\psi(x)$  fonksiyonu,  $|f_\nu(x)| < \psi(x)$  olacak şekilde varsa  $f(x)$  limit fonksiyonu da adi fonksiyon olur.

$E$  de Lebesgue anlamında adi fonksiyonların diferansiyeli mevcut olmayabilir. Gerçekten, Weierstrass fonksiyonu hemen-hemen her yerde sürekli, fakat türevlenebilir değildir.

Diğer taraftan,  $y = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$  adi fonksiyonunun türevi adi fonksiyon değildir. Nihayet,  $\{f_\nu(x)\}$

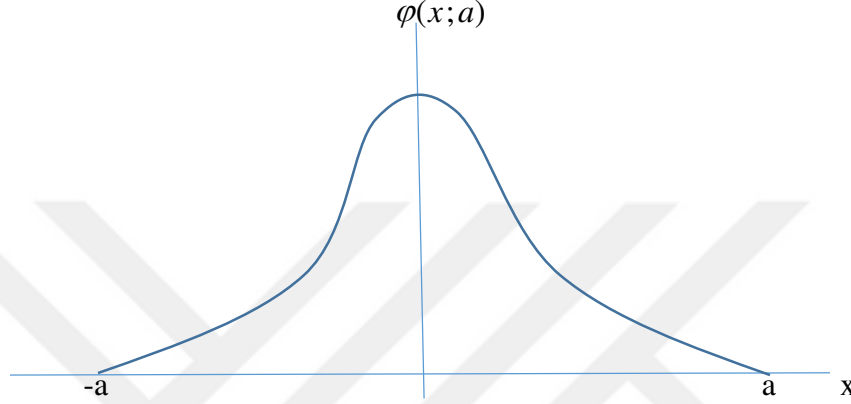
adi fonksiyonlar dizisi için  $\{f_\nu(x)\} \rightarrow f'_\nu(x)$  olacak şekilde  $f'_\nu(x)$  türevleri mevcut olsa bile  $f_\nu(x) \rightarrow f(x)$  olması her zaman  $f'_\nu(x) \rightarrow f'(x)$  olmasını gerektirmez. Diferansiyelleme işlemlerinin yürütülebileceği tüm adi fonksiyonları içine alan bir sınıfı aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

**Tanım 1.2**  $-\infty < x < \infty$  da tanımlı, reel değerli ve her mertebeden sürekli diferansiyellenebilen ve kompakt taşıyıcıya sahip fonksiyonlar sınıfına temel veya test fonksiyonlar sınıfı adı verilir ve  $K$  veya  $D$  ile gösterilir [62], [69].

**Örnek 1.1** Sobolev' in 1937 de tanımladığı,

$$\varphi(x; a) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$$

fonksiyonu test (temel) fonksiyondur, [68]. Bu fonksiyon Sobolev şapkası olarak adlandırılır.



**Şekil 1.1** Sobolev şapkası

$D$  test fonksiyonlar uzayı lineer bir uzaydır, yani herhangi  $\varphi_1(x)$  ve  $\varphi_2(x)$  test fonksiyonları için:

- i.  $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ ,
- ii.  $\forall c \in \mathbb{R}$  için ve  $\varphi(x) \in D$  için  $c\varphi(x)$

test fonksiyon olmaktadır.

$\{\varphi_\nu(x)\}$ ,  $(\nu = 1, 2, \dots, n)$  test fonksiyonlar dizisi olsun. Bu fonksiyonların keyfi mertebeden  $\varphi_j^{(n)}(x)$  türevleri aynı bir  $[a, b]$  aralığının dışında sifıra eşitseler ve bu  $\{\varphi_\nu(x)\}$  fonksiyonları sifıra düzgün yakınsak olursa, bu takdirde  $\{\varphi_\nu(x)\}$ ,  $(\nu = 1, 2, \dots, n)$  dizisine sifıra yakınsar dizisi denir.

**Örnek 1.2** Şimdi  $\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\nu} \varphi(x; a)$ ,  $(\nu = 1, 2, \dots)$  dizisini göz önüne alalım.  $\{\varphi_\nu(x)\}$ ,

$(\nu = 1, 2, \dots)$   $D$  de sifıra yakınsaktır.  $\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\nu} \varphi\left(\frac{x}{\nu}; a\right)$  dizisi ise tüm türevleri ile birlikte

sifıra yakınsaktır, fakat  $D$  de sifıra yakınsak değildir. Çünkü,  $\varphi_\nu(x)$  lerin hepsinin aynı anda dışında sifıra eşit olduğu bir  $[a, b]$  aralığı yoktur.



esaslandırılması problemlerine uygulamıştır [62]. Bu yöntem günümüzde çok ilerlemiş ve bu konuda oldukça önemli bir çok çalışma yapılmıştır.

Genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisinde ikinci yöntem “dizisel yaklaşım” ( Sequential) yöntemidir, [7]. Bu yöntemde herhangi bir genelleştirilmiş fonksiyon adi fonksiyonlar dizisinin limiti olarak alınmaktadır. Bu yöntem kolay olmanın yanı sıra, fizikçiler için de bir o kadar doğal olmaktadır. Yukarıda sözü edilen iki yöntemin dışında da genelleştirilmiş fonksiyon tanımı mevcuttur.

**Tanım 1.3**  $D$  uzayı üzerinde herhangi bir  $f(x)$  adi fonksiyonuna karşılık gelen

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in D \quad (1.1)$$

ifadesinde lineer fonksiyonel denir .

Tanım 1.3’deki integralleme aralığı doğal olarak  $\sup \varphi$  üzerinde yoğunlaşmaktadır. Bu kavram fonksiyon tanımının genelleştirilmesine olanak sağlamaktadır. Önceleri, herhangi bir fonksiyonun tanım aralığının keyfi noktasında (veya hemen her yerde) tanımlı ve tek değerli olması isteniliyordu, ama şimdi göz önüne alınan adi fonksiyonun herhangi bir temel fonksiyonla çarpımının integralinin sonucu bizi ilgilendirmektedir. İşte, biz bu integrali genelleştirilmiş fonksiyon olarak isimlendireceğiz.

Bu arada, fonksiyonun ayrı ayrı noktalarda değeri belli olmayıp, genel ve temel fonksiyonların çarpımının integralinin nasıl tanımlanacağı sorusu akla gelebilir. Bu sorunun cevabı ise çok basittir. Çünkü, bu durumda biz integrali yapısal değil aksiyomatik olarak tanımlayacağız. Diğer yandan,  $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D$  ve  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in R$  için

$$(f, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 (f, \varphi_1) + \alpha_2 (f, \varphi_2)$$

olduğundan (1.1) cinsinden tanımlanan fonksiyonel lineerdir. Ayrıca (1.1) fonksiyoneli aşağıdaki anlamda sürekli de olmaktadır. Eğer  $D$  de  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \rightarrow 0$  olan temel fonksiyonların bir dizisi ise, integralin özelliğinden  $\lim_{v \rightarrow \infty} (f, \varphi_v) = 0$  olur. Böylece, (1.1) fonksiyoneli  $D$  de sürekli ve lineer bir fonksiyoneldir.

$D$  de (1.1) cinsinden ifade edilemeyen diğer fonksiyoneller de vardır. Her hangi bir  $\varphi(x)$  temel fonksiyonuna  $\varphi(0)$  sayısını karşılık getiren  $\delta$  fonksiyoneli göz önüne alalım.

$(\delta, \varphi(x)) = \varphi(0)$  fonksiyoneli lineer ve süreklidir [24]. Diğer taraftan, bir  $\varphi(x)$  'e  $\varphi(0)$  sayısını karşılık getiren (1.1) cinsinden fonksiyonel yoktur. Gerçekten de, varsayalım ki  $D$  de keyfi  $\varphi(x)$  ve belli bir  $f(x)$  adi fonksiyonu için

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \quad (1.2)$$

olsun. Özellikle  $\varphi(x) = \varphi(x; a)$  olarak Örnek 1.1 deki fonksiyonu ele alırsak

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x; a)dx = \varphi(0; 0) = \frac{1}{e} \quad (1.3)$$

elde ederiz. Fakat  $a \rightarrow 0$  olduğunda (1.3) ün sol tarafı sıfıra yaklaşır, bu ise (1.1) gösterimi ile çelişir.

**Tanım 1.4**  $D$  de tanımlı lineer ve sürekli fonksiyonele, yani

$$(i) \quad (f, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 (f, \varphi_1) + \alpha_2 (f, \varphi_2)$$

$$(ii) \quad D \text{ de } \varphi_v \rightarrow 0 \text{ ise } (f, \varphi_v) \rightarrow 0$$

koşullarını sağlayan  $f$  fonksiyoneline genelleştirilmiş fonksiyon denir, [24].

(1.1) cinsinden ifade edilebilen fonksiyonele regüler, edilemeyene de singüler fonksiyonel denir. Bu durumda,  $(\delta; \varphi) = \varphi(0)$  fonksiyoneli singülerdir. Keyfi adi fonksiyona (1.1) cinsinden genelleştirilmiş bir fonksiyon karşılık gelir.

**Örnek 1.3**  $f(x) \equiv 0$  olsun. Tanım 1.1' e göre

$$(f, \varphi) \equiv (c, \varphi) = c \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$$

biçimindeki genelleştirilmiş fonksiyon sabit olarak isimlendirilecektir. Özel olarak 1 genelleştirilmiş fonksiyonu,  $(1, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$  anlamındadır, [24].

$f_1$  ve  $f_2$  genelleştirilmiş fonksiyonlarının aynı temel fonksiyonlar üzerinde oluşturduğu fonksiyoneller eşitse, yani  $(f_1, \varphi) \equiv (f_2, \varphi)$  ise, bu takdirde  $f_1$  ve  $f_2$  ye eşittir denir.

Eğer en az bir  $\varphi_0$  test fonksiyonu için  $(f_1, \varphi_0) \neq (f_2, \varphi_0)$  oluyorsa  $f_1$  ve  $f_2$  fonksiyonlarına farklı genelleştirilmiş fonksiyon denir. Ayrıca farklı  $f_1$  ve  $f_2$  adi fonksiyonlarına farklı genelleştirilmiş fonksiyonlar karşılık gelir [24].

Toplama ve herhangi bir reel sayı ile çarpma

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi) = \alpha_1 (f_1, \varphi) + \alpha_2 (f_2, \varphi)$$

ile tanımlanır.  $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$  fonksiyonuna tekabül eden  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$  fonksiyoneli de regülerdir.

### 1.2.1 Genelleştirilmiş Fonksiyonların Türevleri

Sonsuz mertebeden diferansiyellenebilen herhangi bir  $\alpha(x)$  fonksiyonu ile genelleştirilmiş herhangi bir  $f$  fonksiyonunun  $\alpha(x)f$  çarpımı

$$(\alpha(x)f, \varphi) = (f, \alpha(x)\varphi)$$

ile tanımlanır.

Eğer  $f(x)$  mutlak sürekli bir fonksiyon ise, onun  $f'(x)$  adi türevi mevcuttur. Bu takdirde  $f'(x)$  için

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D$$

ifadesini oluşturabiliriz. Şimdi varsayalım ki,  $\varphi(x)$  de mutlak sürekli ve sınırlı  $\varphi'(x)$  türevine sahip fonksiyon olsun. Son integralden kısmi integrasyon yardımı ile

$$(f', \varphi) = f(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx$$

elde edilir, yani

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') \quad (1.4)$$

dır. Eğer  $f'$  fonksiyonu klasik anlamda mevcut olmazsa bile  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx$  ifadesi keyfi  $\varphi(x)$  test fonksiyonları için mutlaka mevcuttur. Böylelikle elimizde  $f'(x)$  olmasa da ve kesinlikle bize  $f'(x)$  in sınırlı türevine sahip, kompakt desteği olan sınırlı bir fonksiyonla çarpımının integrali gerekmekte ise,  $f'(x)$  in mevcut olduğu var sayılır gibi kabul ederek, (1.4) ifadesinin önüne eksi işareti koyarak bu sonuca ulaşabiliriz.

Bu kavram, temel fonksiyonların iyi seçilmesi durumunda keyfi genelleştirilmiş fonksiyonun türevi var ve bu türevinde bir genelleştirilmiş fonksiyon olacağını göstermektedir. Diğer deyişle, herhangi bir genelleştirilmiş fonksiyon her mertebeden türeve sahiptir. Bu bağlamda,

$$(f'', \varphi) = (f', -\varphi') = (f, \varphi'')$$

ve benzer şekilde, herhangi bir  $q$  için

$$(f^{(q)}, \varphi) = (f, (-1)^q \varphi^{(q)}) = (-1)^q (f, \varphi^{(q)})$$

dır. Kolayca görülür ki, türev lineerlik özelliğine sahiptir.  $f_1$  ve  $f_2$  iki genelleştirilmiş fonksiyon ve  $\alpha_1, \alpha_2$  sabitler ise  $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)' = \alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2'$  dir. Ayrıca,  $\alpha(x)$  sonsuz diferansiyellenebilen herhangi bir fonksiyon ise  $(\alpha f)' = \alpha f' + \alpha' f$  dir.

Eğer,  $f(x)$  ve  $f'(x)$  fonksiyonları sürekli ise, bu takdirde  $f'$  fonksiyoneli  $f'(x)$  türevini verir. Burada, türevin belirlenmesine dair birkaç örnek ele alalım.

**Örnek 1.4** (Heaviside fonksiyonu)

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun türevini alalım. (1.4) formülüne göre

$$(\theta'(x), \varphi(x)) = (\theta(x), \varphi'(x)) = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

dir. Böylelikle,  $\delta(x)$  fonksiyonunun tanımına göre  $\theta'(x) = \delta(x)$  olduğu elde edilir. Genel olarak  $\theta'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$  olur, [24].

**Örnek 1.5**  $f(x)$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  noktalarında  $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$  sıçrayışlarına sahip parçalı mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $f'(x)$  fonksiyonu sonlu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  noktaları dışında her yerde tanımlı fonksiyon olmaktadır

Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım

$$f_1(x) = f(x) - \sum_k h_k \theta(x - x_k).$$

Bu fonksiyonun genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfında türevi

$$f_1'(x) = f'(x) - \sum_k h_k \delta(x - x_k)$$

olup



$$f'(x) = f'_1(x) + \sum_k h_k \delta(x - x_k)$$

dır.

### 1.2.2 Çok Değişkenli Fonksiyonların Genelleştirilmiş Türevleri

Şimdi çok değişkene bağlı genelleştirilmiş fonksiyonun kısmi türevi kavramına geçelim.  $f$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  değişkenlerine bağlı fonksiyon olduğunda  $f(x)$  fonksiyonunun  $x_i$ ,  $(i=1,2,\dots,n)$  değişkenine göre kısmi türevleri aşağıdaki formül yardımı ile tanımlanır, [24], [68],

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right) = \left( f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right), \quad (i=1,2,\dots,n). \quad (1.5)$$

Bilindiği gibi genelleştirilmiş fonksiyonun türevi de genelleştirilmiş fonksiyon olduğundan  $f$  fonksiyonunun yüksek mertebeden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \dots$$

türevlerini de aynı yolla tanımlayabiliriz. Böylelikle tüm genelleştirilmiş fonksiyonlar sonsuz diferansiyellenebilir.

İkinci mertebeden genelleştirilmiş türevi olan, fakat birinci mertebeden genelleştirilmiş türevi olmayan fonksiyon gösterilebilir.  $f(x)$  genelleştirilmiş türevi olmayan fonksiyon olmak üzere aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım

$$f(x, y) = f(x) + f(y)$$

Bu taktirde,  $f(x, y)$  fonksiyonun birinci mertebeden türevi yoktur, [68]. Fakat  $f(x, y)$  nin ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevi vardır. Gerçekten de, gereken koşulları sağlayan  $\psi(x, y)$  fonksiyonu için

$$\iint_G F(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dx dy = \iint_G f(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dx dy + \iint_G f(y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dx dy$$

dır. Diğer taraftan

$$\iint_G F(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dx dy = \int_a^b f(x) \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dx dy = \int_a^b f(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = 0$$

ve

$$\psi'_x(x, \varphi_1(x)) = \psi'_x(x, \varphi_2(x)) = 0$$

dır. Burada  $\varphi_1(x)$  ve  $\varphi_2(x)$  fonksiyonları  $D$ 'nin sınır noktalarının ordinatlarını göstermektedir. Aynı yolla

$$\iint_G f(y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dx dy = 0$$

elde ederiz. Buradan,

$$\iint_G F(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dx dy = 0 = \iint_G 0 \psi(x, y) dx dy$$

yani  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$  mevcuttur ve özdeş olarak sıfıra eşittir.

**Uyarı 1.2** Hemen-hemen her yerde türevin olmasından genelleştirilmiş türevin mevcut olduğu çıkarılamaz.

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

fonksiyonu için matematiksel analiz teorisinden

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

olduğunu ispatlaya biliriz.

$$\int f(x) \varphi(x, a) dx = (f, \varphi)$$

fonksiyonu lineer sürekli fonksiyonel, genelleştirilmiş fonksiyon

$$\int \delta(x) dx = 1$$

olur.

**Örnek 1.6**  $f(x) \equiv c$  ( $c$  sabit) fonksiyonunun oluşturduğu genelleştirilmiş fonksiyonu

$$(f, \varphi) \equiv \int_R f(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} c \varphi(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$$

dır.

**Örnek 1.7**  $f(x) = \frac{1}{x}$  fonksiyonuna karşılık gelen genelleştirilmiş fonksiyonu aşağıdaki şekilde

elde ederiz.

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{x}, \varphi(x) \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] \end{aligned}$$

ifadesindeki ilk integralde  $x$  yerine  $-x$  yazılırsa

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right]$$

elde ederiz. Yine ilk integralde sınırların yerini değiştirirsek

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \right]$$

buluruz.

**Önek 1.8**  $f, f_2, c f$  fonksiyonları genelleşmiş fonksiyon anlamında

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f \varphi dx, \quad (f_2, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2 \varphi dx \\ (c f, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} c f \varphi dx = \int_{-\infty}^{\infty} f (c \varphi) dx = (f, c \varphi) \end{aligned}$$

olmaktadır.

### 1.3 Karakteristikler Yöntemi

Alışlageldiği üzere bağımsız değişkenleri  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$  ile bilinmeyen fonksiyonu  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ile gösterelim.  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  fonksiyonu için birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemin (KTDD) genel yazılım formu

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \quad (1.6)$$

olmaktadır [18], [22], [28], [69]. (1.6) türünden denklemlere kuantum mekaniğinde, varyasyonlar hesabında, geometrik optikte ve benzeri alanlarda sıkça rastlanmaktadır.

**Tanım 1.5** Eğer  $F$  fonksiyonu  $u$  fonksiyonu ve onun tüm türevlerine göre lineer fonksiyon ise, denkleme birinci mertebeden lineer kısmi türevli denklem denir.

Birinci mertebeden lineer homojen olmayan KTDD in genel şekli

$$a_0(x_1, x_2, \dots, x_n)u + a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)u_{x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n)u_{x_n} = \varphi(x_1, \dots, x_n) \quad (1.7)$$

olmaktadır. Burada,  $a_0, \dots, a_n$  lere denkleminin katsayıları,  $\varphi$  bilinen fonksiyonuna ise denklemin sağ tarafı denir. (1.7) denklemini

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)u_{x_i} + a_0(x_1, x_2, \dots, x_n)u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.8)$$

biçiminde kısaca yazabiliriz. Eğer  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$  olursa, (1.8) denkleminde (1.7) denkleminin karşılığı gelen birinci mertebeden lineer homojen KTDD denir.

**Örnek 1.9** Aşağıdaki denklemler birinci mertebeden lineer denklemlerdir:

- (i)  $u_x - u_y + u_z = 0$ ,
- (ii)  $(x + 2)u_x + 2yu_y = 2u$ ,
- (iii)  $xu_x + yu_y = ku$ ,  $k \in R$  sabit.

**Tanım 1.6** Eğer  $F$  bilinmeyen fonksiyonun birinci mertebeden türevlerine göre lineer fonksiyon ise, denkleme kuazi lineer denklem denir ve bu denklemlerin genel yazılım formu

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u)u_{x_i} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0 \quad (1.9)$$

şeklinde verilir.

**Örnek 1.10** Aşağıdaki denklemler birinci mertebeden kuazi lineer denklemlere birer örnek oluşturmaktadır.

- (i)  $xuu_x - yuu_y = y^2 - x^2$ ,
- (ii)  $yuu_x + xuu_y = x + y$ ,
- (iii)  $(x^2 - y^2 - z^2)z_x + 2xyz_y = 2xz$ ,
- (iv)  $(z - y)z_x + (x - z)z_y + x - y = 0$ .

**Tanım 1.7**

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)u_{x_i} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0 \quad (1.10)$$

şeklindeki denklemlere yarı lineer denklem denir. (Bu tür denklemlere bazı kaynaklarda “hemi” veya “semi” lineer denklem de denilmektedir.)

**Örnek 1.11** Aşağıdaki denklemler yarı lineer denklemlerdir:

- (i)  $(x^2 + y^2)u_x + 2u_y = xu^2 + yu$ ,
- (ii)  $(x + 3)u_x + u_y = 2y\sqrt{u}$ .

**Tanım 1.8** Eğer  $F$  fonksiyonu  $u$  ve onun türevlerine göre lineer olmayan fonksiyon olursa, denkleme lineer olmayan (nonlinear) denklem denir.

**Örnek 1.12** Lineer olmayan denklemlere aşağıdaki örnekleri verebiliriz:

$$(i) \quad u_x^2 + u_y^2 = 1,$$

$$(ii) \quad u^2 + u_t = u_x^3.$$

(1.9) veya (1.10) cinsinden olan denklemlerin çözümlerini incelemekten önce adi diferansiyel denklemler (ADD) teorisinden bazı kavramları hatırlayalım. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bildiğimiz,  $n$ . mertebeden diferansiyel denklemin

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.11)$$

şeklinde genel yazılım formunu göz önüne alalım. Eğer  $\Phi$  fonksiyonu  $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$  değişkenlerine lineer bağımlı ise, (1.11) denklemin lineer diferansiyel denklem denir ve genel yazılım formu

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = f(x) \quad (1.12)$$

olur. Burada  $f(x)$ ,  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$ ,  $\dots$ ,  $p_n(x)$  fonksiyonları bilinen ve gereken mertebeden türevlenebilen sürekli fonksiyonlar olup,  $p_i(x)$  ler denklemin katsayıları,  $f$  ise denklemin sağ tarafı olmaktadır.

Eğer  $f(x) \equiv 0$  olursa, denkleme  $n$ . mertebeden lineer homojen diferansiyel denklem denir.  $f(x) \neq 0$  olması halinde ise (1.12)  $n$ . mertebeden lineer homojen olmayan diferansiyel denklem olarak adlandırılır.

Bilindiği üzere,  $n$ . mertebeden adi diferansiyel denklemin genel çözümü bağımsız değişken, bilinmeyen fonksiyon ve  $n$  tane keyfi sabit içermektedir. Yani, her bir çözüm

$$\psi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad (1.13)$$

cinsinden verilmektedir. Tersine, (1.13) cinsinden fonksiyonlar ailesi  $n$ . mertebeden bir tane adi diferansiyel denklem oluşturur.

(1.11) denkleminin genel çözümünü şöyle de tanımlayabiliriz. Eğer (1.13) fonksiyonundan  $x$ 'e göre  $n$  defa türev aldıktan sonra bulduğumuz ifadelerden  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sabitlerini yok ettiğimizde (1.11) denklemini elde edersek, bu takdirde (1.13) ifadesine (1.11) denkleminin genel çözümü denir.

Şimdi aşağıdaki gibi bir denklemi göz önüne alalım

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}, c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n) = 0. \quad (1.14)$$

Eğer (1.14) denkleminde  $x$ 'e göre  $(n - k)$  defa türev alıp, bulunan ifadelerden  $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots$

$c_n$  sabitleri yok edildikten sonra (1.11) denklemi elde edilirse, (1.14) fonksiyonuna (1.11) denkleminin  $k$ . aralık integrali denir.

Gözönüne aldığımız (1.14) aralık integrali kendi başına  $k$ .mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Dolayısıyla, eğer (1.11) türünden bir denklem için herhangi bir aralık integrali bulabilirsek, bu (1.11) denkleminin mertebesinin düşürülmesi anlamına gelir.

Bu söylediklerimiz KTDD ler için söz konusu değildir. Ama burada yine de genel çözümleri bulmak mümkündür. KTDD de söz konusu keyfi elemanlar artık sabitler değil, keyfi fonksiyonlar olacaktır.

**Teorem 1.1** Birinci mertebeden kuazi lineer

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = 0 \quad (1.15)$$

KTDD nin genel çözümü  $f(\varphi, u) = 0$  dır. Burada  $f$  herhangi bir diferansiyellenebilen fonksiyon,  $\varphi(x, y, u) = c_1 = \text{sabit}$   $u = c_2 = \text{sabit}$  fonksiyonları ise (1.15) denkleminin birinci aralık integralleri olmaktadır.

**İspat** Parametrik denklemleri  $x = x(t), y = y(t)$  olan bir eğriyi göz önüne alalım ve (1.15) denklemini bu eğri üzerinde yazalım. Eğer

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b \quad \text{olursa} \quad \frac{du}{dt} = 0 \quad (1.16)$$

veya  $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}, \quad du = 0$  olur.  $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$  adi diferansiyel denkleme (1.15) in karakteristik denklemini, onun çözümüne (1.15) in karakteristikleri denir.

(1.16) denklemler sisteminin birinci aralık integral eğrileri  $\varphi(x, y, u) = c_1$  ve  $u = c_2$  olmaktadır.  $\varphi(x, y, u) = c_1$  (1.16) denklemini sağladığından,

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0 \quad (1.17)$$

elde ederiz. (1.16) denkleminde

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = dt$$

veya  $dx = a dt, dy = b dt$  olduğundan (1.17)

$$a\varphi_x + b\varphi_y = 0 \quad (1.18)$$

denklemine denktir. Benzer şekilde,  $u = c_2$  (1.16) denklemini sağlamaktadır.  $a, b$  için (1.16) ve (1.18) cebirsel denklemler sisteminden  $a$  ve  $b$  göre tek bir çözümünün olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\frac{D(\varphi, u)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ u_x & u_y \end{vmatrix}$$

olmasıdır. Yani,

$$u(x, y) = \Psi(\varphi(x, y, u)) \quad (1.19)$$

herhangi bir diferansiyellenebilen  $\Psi$  fonksiyonu için (1.15) denkleminin genel çözümü olmaktadır.

Daha genel olarak,  $\varphi = \varphi(x, y, u)$  ve  $\psi = \psi(x, y, u)$  gibi diferansiyellenebilen iki fonksiyonu göz önüne alalım.  $f, \varphi$  ve  $\psi$  ın herhangi bir fonksiyonu olmak üzere  $f(\varphi, \psi) = 0$  ise, bu takdirde  $u = u(x, y)$  fonksiyonu aşağıdaki birinci mertebeden KTDD i sağlar

$$p \frac{D(\varphi, \psi)}{D(y, u)} + q \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, x)} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}$$

Burada  $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial u}{\partial y}$  dir. Gerçekten de,

$$f(\varphi(x, y, u(x, y)), \psi(x, y, u(x, y))) = 0$$

ifadesini  $x$  ve  $y$ ' ye göre diferansiyellersek sırasıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial f}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right] &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial f}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \right] &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz.  $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$  ve  $\frac{\partial f}{\partial \psi}$  türevlerini bilinmeyenler olarak kabul edersek, sonuncu sistemin tirivial olmayan çözümleri ancak bu sistemin katsayılarından oluşan determinantın sıfıra eşit olmasıyla bulunabilir, yani

$$\begin{vmatrix} \varphi_x + p\varphi_u & \psi_x + p\psi_u \\ \varphi_y + q\varphi_u & \psi_y + q\psi_u \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Bu determinantın hesaplanmasıyla

$$p[\varphi_u\psi_y - \varphi_y\psi_u] + q[\varphi_x\psi_u - \varphi_u\psi_x] + [\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x] = 0$$

veya

$$p \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_u & \psi_u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$p \frac{D(\varphi, \psi)}{D(y, z)} + q \frac{D(\varphi, \psi)}{D(z, x)} + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = 0$$

bulunur.

**Teorem 1.2** Birinci mertebeden kuazi lineer

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (1.20)$$

KTDD nin genel çözümü  $f(\emptyset, \psi) = 0$  dır. Burada  $f$  herhangi bir diferansiyellenebilen fonksiyon,  $\varphi(x, y, u) = c_1 = \text{sabit}$  ve  $\psi(x, y, u) = c_2 = \text{sabit}$

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} \quad (1.21)$$

karakteristik denkleminin birinci aralık integral eğrileri olmaktadır. Buradaki

$\varphi(x, y, u) = c_1$  ve  $\psi(x, y, u) = c_2$  integral eğrileri (1.20) denkleminin karakteristikleri olarak isimlendirilir.

**İspat**  $\varphi(x, y, u) = c_1$  ve  $\psi(x, y, u) = c_2$  (1.21) denklemini sağladığından, bu denklemler

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_u du = 0 \quad (1.22)$$

denklemini ile bağdaşır. Bu da

$$a\varphi_x + b\varphi_y + c\varphi_u = 0 \quad (1.23)$$

denklemine denktir. (1.21) denkleminde

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} = dt$$

veya  $dx = a dt$ ,  $dy = b dt$ ,  $du = c dt$  bulunur. Benzer şekilde, (1.21) denklemini

$$a\psi_x + b\psi_y + c\psi_u = 0 \quad (1.24)$$

denklemini de bağdaşmaktadır.  $a, b, c$  için (1.23), (1.24) cebirsel denklemler sisteminden  $a$

ve  $b$  yi  $c$  cinsinden  $a = \frac{-c\Delta_1}{\Delta}$ ,  $b = \frac{-c\Delta_2}{\Delta}$  olarak bulabiliriz.

Burada

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_y \\ \psi_u & \psi_y \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_u \\ \psi_x & \psi_u \end{vmatrix}$$

olmaktadır. Buradan

$$\frac{a}{\Delta_1} = \frac{b}{\Delta_2} = \frac{-c}{\Delta}$$

veya



$$\frac{a}{\frac{D(\varphi,\psi)}{D(y,u)}} = \frac{b}{\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,x)}} = \frac{c}{\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}} \quad (1.25)$$

elde ederiz. Yukarıda  $f(\varphi, \psi) = 0$  kapalı fonksiyonun

$$p \frac{D(\varphi,\psi)}{D(y,u)} + q \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,x)} = \frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)} \quad (1.26)$$

şeklindeki bir denklemi sağladığını göstermiştik. (1.26) denkleminde (1.25) ifadesi yerine konursa  $f(\varphi, \psi) = 0$  nin (1.20) nin çözümü olduğunu buluruz. Gerçekten de,

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(y,u)} = \frac{a}{dt}, \quad \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,x)} = \frac{b}{dt}, \quad \frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)} = \frac{c}{dt}$$

olup, (1.26) den  $p \frac{a}{dt} + q \frac{b}{dt} = \frac{c}{dt}$  veya  $ap + bp = c$  olduğu görülür.

**Örnek 1.13**  $u_x - u_y = 1$  lineer denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**Çözüm** Karakteristik denklemler sistemi

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{du}{1}$$

şeklinde olmaktadır. Buradan

$$\frac{dy}{dx} = -1, \quad \frac{du}{dx} = 1$$

denklemlerini çözersek  $c_1 = x + y$ ,  $c_2 = u - x$  alırız. O halde denklemin genel çözümü  $f(x + u, u - x) = 0$  veya  $u = x + g(x + y)$  şeklinde elde edilir. Burada  $g$  fonksiyonu keyfi diferansiyellenebilen bir fonksiyondur.

**Örnek 1.14** Aşağıdaki denklemin genel çözümünü bulunuz

$$(y - z)u_x + (z - x)u_y + (x - y)u_z = 0$$

**Çözüm** Bu örnek için karakteristik denklemler sistemi

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y} = \frac{du}{0}.$$

olur. Birinci aralık integrali  $du = 0$  denkleminde  $u = c_1$  olarak bulunur. Diğer, birinci aralık integrali ise  $\frac{dx+dy+dz}{y-z+z-x+x-y} = 0$  denkleminde  $x + y + z = c_2$  şeklinde bulunur. Nihayet denklemi

$$\frac{xdx}{x(y - z)} = \frac{ydy}{y(z - x)} = \frac{zdz}{z(x - y)} = \frac{du}{0}$$

şeklinde yazarsak  $xdx + ydy + zdz = 0$  veya  $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$  dan  $x^2 + y^2 + z^2 = c_3$  üçüncü aralık integralini elde ederiz. Bu durumda genel çözüm

$F(u, x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$  veya  $u(x, y, z) = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$  olur.

**Örnek 1.15**  $\alpha(u)\frac{\partial u}{\partial x} - \beta(u)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**Çözüm** Karakteristik denklemler sistemi

$$\frac{dx}{\alpha(u)} = \frac{dy}{-\beta(u)} = \frac{du}{0}$$

dır. Buradan birinci aralık integrali  $u = c_1$  olarak elde ederiz. Diğer birinci aralık integral

$$\frac{dx}{\alpha(u)} = \frac{dy}{-\beta(u)}$$

denkleminde  $\alpha(u)y + \beta(u)x = c_2$  biçiminde elde ederiz. Genel çözüm ise

$$u = f(\alpha(u)y + \beta(u)x)$$

olur. Burada  $f$  diferansiyellenebilen herhangi bir fonksiyon olur.

#### 1.4 Nonlinear Denklemler

Lineer ve kuazi lineer denklemlerle kısaca da olsa tanıştıktan sonra nonlinear denklemlerin çözümü için geliştirilmiş karakteristikler metodunu inceleyelim. Lineer denklemlerden farklı olarak nonlinear denklemlerin çözümümünün bulunması kendine özgü karakter taşımaktadır.

##### 1.4.1 İki Bağımsız Değişkenli Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemin Geometrik Anlamı

Birinci mertebeden ve  $u(x, y)$  fonksiyonu için yazılmış diferansiyel denklemler teorisinde bu denklemin anlamı önemli yer tutmaktadır.

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \quad (1.27)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada  $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial u}{\partial y}$  ve  $F_p^2 + F_q^2 > 0$  dır. Bunun için (1.27) denklemini

$$p = f(x, y, z, q) \quad (1.28)$$

şeklinde yazmak faydalı olur. (1.27) veya (1.28) denkleminin,  $(x, y, z)$  koordinat düzleminde

$$z = \Phi(x, y) \quad (1.29)$$

şeklinde bir yüzey oluşturan çözümünü, (1.27) veya (1.28) denkleminin integral yüzeyi olarak adlandıracağız. Dolayısıyla, söz konusu denklemin çözümünün bulunması, integral yüzeyinin bulunması anlamına gelir. Eğer (1.29) denklemine tanımlayıcı yüzey olarak bakarsak, ona  $(x, y, z)$  noktasında teğet olan düzlemin denklemi

$$Z - z = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(Y - y) \quad (1.30)$$

veya

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

olur. Buradaki  $X, Y, Z$  geçerli olan koordinatları;  $p$  ve  $q$  ise teğet düzleminin açılal katsayılarını göstermektedir. Böylelikle (1.30) denklemi, aranan yüzeyin  $x, y$  ve  $z$  koordinatları ile söz konusu düzleme bu noktada teğet olan düzlemin açılal katsayıları arasındaki bağıntıyı göstermektedir.

Şimdi, aşağıdaki başlangıç koşulunun yorumunu verelim

$$x = x_0, \quad z = \varphi(y). \quad (1.31)$$

(1.31) denklemi uzayda bir  $K$  eğrisi ifade etmektedir. Dolayısıyla Cauchy probleminin çözümü  $K$  eğrisinden geçen yüzeyin bulunması anlamına gelir. Önemle belirtelim ki,  $K$  eğrisinin özel bir yapısı vardır. Bu eğri  $yo$ z düzlemine paralel olan  $x = x_0$  düzleminde yerleşir. Koordinatların bu tür düzensizliği (1.30) denklemindeki  $x'$  in rolünün özel olmasından kaynaklanmaktadır. Eğer denklemi teoride olduğu gibi simetrik şekilde yazarsak, Cauchy problemini doğal olarak aşağıdaki biçimde tanımlamak gerekir. Bu durumda genelleştirilmiş Cauchy problemi; (1.29) denkleminin,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (1.32)$$

denklemleri ile verilen eğriden geçen integral yüzeyinin bulunması olarak ifade edilir. Problemin bu tür koyuluşunda Cauchy problemi, (1.32) cinsinden olan bazı eğriler için tanımsız olarak koyulur ki, bazı eğrilerden sonsuz sayıda integral yüzeyleri geçer. Böyle özel eğriler karakteristikler olarak adlandırılır ve onlar birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin integrallenmesi teorisinde önemli rol oynar.

#### **1.4.2 İki Bağımsız Değişkenli Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemin Genel Çözümü. Charpit Denklemler Sistemi**

Bu bölümde (1.27) denkleminin genel çözümünü bulalım. Bunun için (1.27) denklemini sırasıyla  $x$  ve  $y$  göre diferansiyelleyek

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

alırız. Aşağıdaki notasyonları içerelim  $\frac{\partial F}{\partial x} = X$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = Y$ ,  $\frac{\partial F}{\partial p} = P$ ,  $\frac{\partial F}{\partial q} = Q$ ,  $\frac{\partial F}{\partial u} = U$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = p$ ,

$\frac{\partial u}{\partial y} = q$ . Bu durumda yukarıdaki denklemler sistemi

$$X + Up + P \frac{\partial p}{\partial x} + Q \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$Y + Uq + P \frac{\partial p}{\partial y} + Q \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

gibi yazılır.  $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$  olduğunu dikkate alırsak

$$X + Up + P \frac{\partial p}{\partial x} + Q \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$Y + Uq + P \frac{\partial q}{\partial x} + Q \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

elde ederiz.

$(x, y, z, p, q)$  uzayında karakteristiklerin denklemler sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{ds} = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}, \\ \frac{dy}{ds} = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}, \\ \frac{dp}{ds} = -\frac{X+pZ}{\sqrt{P^2+Q^2}}, \\ \frac{dq}{ds} = -\frac{Y+qZ}{\sqrt{P^2+Q^2}}, \\ \frac{dp}{ds} = \frac{pP+qQ}{\sqrt{P^2+Q^2}} \end{array} \right. \quad (1.33)$$

olmaktadır . Bu denklemler sistemine Charpit denklemler sistemi adı verilir. Bu sistem için uygun başlangıç koşulları verilerek denklemin çözümünü elde edebiliriz. Charpit denklemler sistemini daha genel şekilde yazılmış denklem için de kolayca elde edebiliriz. Bu nedenle de genelliği bozmadan bazı kavramları  $n$  değişkene bağlı  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  fonksiyonu için yazılmış denklemler üzerinde inceleyeceğiz.

### 1.4.3. Homojen Olmayan Kuazi Lineer Denklemler

(1.9) şeklinde denklemi göz önüne alalım. Yukarıdaki incelemelerden görüldüğü üzere bu denklemin genel çözümü tüm değişkenlere göre diferansiyellenebilen herhangi bir  $V$  fonksiyonu için

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0 \quad (1.34)$$

şeklindeki kapalı fonksiyon olmaktadır. (1.34) ifadesini  $x_i$  lere göre diferansiyellersek,

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0,$$

.....

$$\frac{\partial V}{\partial x_n} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0,$$

sistemini elde ederiz. Buradan,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = - \frac{\partial V}{\partial x_i} / \frac{\partial V}{\partial u}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ifadelerini bulup, elde ettiğimiz bu ifadeleri (1.9) da yerine yazarsak

$$- \left[ a_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} / \frac{\partial V}{\partial u} + a_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} / \frac{\partial V}{\partial u} + \dots + a_n \frac{\partial V}{\partial x_n} / \frac{\partial V}{\partial u} \right] = -b$$

alırız. Sonuncu ifadenin her iki tarafını  $\left( -\frac{\partial V}{\partial u} \right)$  ile çarparsak

$$a_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + b \frac{\partial V}{\partial u} = 0 \quad (1.35)$$

denklemini elde ederiz. Görüldüğü gibi, (1.35) denklemi  $V$  fonksiyonuna göre homojen denklemdir. (1.35) denklemi için karakteristik denklem sistemi

$$\frac{dx_1}{p_1} = \frac{dx_2}{p_2} = \dots = \frac{dx_n}{p_n} = \frac{dV}{R}$$

dir. Bu denklemler sisteminin  $n$  tane bağımsız birinci aralık integrallerini aşağıdaki gibi gösterelim

[illegible]

Yukarıdaki bölümde bahsedildiği gibi, (1.9) denkleminin genel çözümü

$$V = \Phi(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})$$

olmaktadır. Burada  $\Phi$  keyfi diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

**Örnek 1.16**  $m$  herhangi bir sabit olmak üzere

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = mf$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**Çözüm** Bu denkleme karşılık gelen karakteristik denklem

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{df}{mf}$$

dir. Sistemin aralık integralleri

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = c_2, \dots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}, \quad \frac{f}{x_n^m} = c_n$$

olmaktadır. O halde, denklemin genel çözümü

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{f}{x_n^m}\right) = 0$$

olur. Eğer bu fonksiyonu  $f$  ye göre çözersek,

$$f = x_n^m \psi \left( \frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} \right)$$

elde ederiz. Burada  $\psi$  keyfi bir fonksiyondur.

#### 1.4.4 Cauchy Probleminin Çözümü

Şimdi (1.11) denkleminin  $x_n = x_n^0$  da

$$u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (1.37)$$

şartını sağlayan çözümünü bulalım. Burada  $\varphi$  bilinen bir fonksiyondur. Bunun için (1.9) un birinci aralık integralinde  $x_n = x_n^0$  yazalım

$$\begin{aligned} \psi_0(u, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) &= \bar{\psi}_0, \\ \psi_1(u, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) &= \bar{\psi}_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \psi_{n-1}(u, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) &= \bar{\psi}_{n-1}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

(1.38) denklemler sistemini  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  göre çözersek

$$\begin{aligned} x_1 &= \omega_1(\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), \\ x_2 &= \omega_2(\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n-1} &= \omega_{n-1}(\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}) \end{aligned} \quad (1.39)$$

alırız. Bu ifadeleri (1.37) de yerine yazmadan önce  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$  ve  $\omega$  fonksiyonlarındaki  $\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}$  argümanlarını  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  argümanlarına dönüştürelim. Böylece

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(\omega_1(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})) \quad (1.40)$$

ifadesi (1.11), (1.37) probleminin çözümü olur.

**Örnek 1.17** Aşağıdaki problemi çözünüz.

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= x, \\ u(x, 0) &= 1. \end{aligned}$$

**Çözüm** Denklemin karakteristik sistemi

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{x}$$

olur. Karakteristik sistemin aralık integralini bulmak için

$$\frac{d(x+u)}{x+u} = dt \text{ ve } \frac{dx}{u} = \frac{du}{x}$$

adi diferansiyel denklemlerini çözersek

$$c_1 = e^{-t}(u + x) \quad \text{ve} \quad c_2 = u^2 - x^2$$

elde ederiz. Bu durumda problemin çözümünü

$$F(e^{-t}(u + x), u^2 - x^2) = 0$$

veya  $u^2 - x^2 = f(e^{-t}(u + x))$  şeklinde elde ederiz. Burada  $f$  diferansiyellenebilen herhangi bir fonksiyondur. Söz konusu fonksiyonu bulabilmek için başlangıç koşulunu kullanırsak,  $1 - x^2 = f(1 + x)$  olur. Bu fonksiyonel denklemden  $f(x) = -x^2 + 2x$  olup, bu ifadeyi dikkate alarak problemin çözümünü

$$u^2 - x^2 = 2e^{-t}(u + x) - e^{-2t}(u + x)^2$$

veya

$$u(x, t) = \frac{x + 2e^{-t} - xe^{-2t}}{1 + e^{-2t}}$$

olarak elde ederiz.

### Örnek 1.18

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

denkleminin  $x = 2$  noktasında  $z = y - 4$  şartını sağlayan çözümünü bulunuz.

**Çözüm** Denklemin genel çözümünü bulmak için öncelikle karakteristik denklemler sistemini aşağıdaki gibi

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2} = \frac{dz}{z}$$

veya

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2}, \\ \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \end{cases}$$

şeklinde yazalım. Şimdi aralık integralini araştıralım. Sistemin ilk denkleminden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x^2}{x}$$

veya homojen olmayan

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$$



lineer diferansiyel denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü yani birinci aralık integralinden ilki  $\psi_1(x, y, z) = \frac{y-x^2}{x} = c_1$  olarak elde edilir. Diğer birinci aralık integrali ise sistemin ikinci denkleminden  $\psi_2(x, y, z) = \frac{z}{x} = c_2$  olarak bulunur. O halde, denkleminin genel çözümü

$$\Phi\left(\frac{y-x^2}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$$

veya  $z = xf\left(\frac{y-x^2}{x}\right)$  şeklinde olur. Şimdi Cauchy probleminin çözümünü bulalım.  $x = 2$  için  $\frac{y-4}{2} = \bar{\psi}_0$  ve  $\frac{z}{2} = \bar{\psi}_1$  olur; buradan  $y = 2\bar{\psi}_0 + 4$  ve  $z = 2\bar{\psi}_1$  dir.  $y$  ve  $z$  nin bu değerleri  $z = y - 4$  de yerine yazılırsa  $2\bar{\psi}_1 = 2\bar{\psi}_0 + 4 - 4$  elde edilir. O halde aranan çözüm  $\frac{z}{x} = \frac{y-x^2}{x}$  veya  $z = y - x^2$  olur.

### Örnek 1.19

$$yu \frac{\partial u}{\partial x} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = -2xy$$

denkleminin  $u = 3$  için  $x^2 + y^2 = 16$  çemberinden geçen çözümünü bulunuz.

**Çözüm** Öncelikle (1.63) denkleminin genel çözümünü bulalım. Bunun için karakteristik denklem sistemini yazarsak

$$\frac{dx}{yu} = \frac{dy}{xu} = \frac{du}{-2xy}$$

veya

$$\frac{dx}{yu} = \frac{dy}{xu}, \quad \frac{dx}{yu} = \frac{du}{-2xy}$$

olur. Bu sistemin birinci denkleminden  $x^2 - y^2 = c_1$ , ikinci denkleminde ise  $x^2 + \frac{u^2}{2} = c_2$  elde edilir. Bulunan birinci aralık integrallerini

$$\psi_1(x, y, u) = x^2 - y^2,$$

$$\psi_2(x, y, u) = x^2 + \frac{u^2}{2}$$

olarak gösterelim. Bu durumda, (1.63) denkleminin genel çözümü

$$\Phi\left(x^2 - y^2, x^2 + \frac{u^2}{2}\right) = 0$$

veya  $x^2 + \frac{u^2}{2} = f(x^2 - y^2)$  olur. Burada  $f$  diferansiyellenebilen herhangi bir fonksiyondur.

Şimdi Cauchy probleminin çözümünü araştıralım.  $u = 3$  için

$$\psi_1(x, y, u)|_{u=3} = x^2 - y^2 = \bar{\psi}_1,$$

$$\psi_2(x, y, u)|_{u=3} = x^2 = x^2 + \frac{9}{2} = \bar{\psi}_2,$$

halini alır. Buradan

$$x^2 = \bar{\psi}_2 - \frac{9}{2} \text{ ve } y^2 = x^2 - \bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2 - \frac{9}{2} - \bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 - \frac{9}{2}$$

elde edilir.  $x^2$  ve  $y^2$  nin bu değerleri  $x^2 + y^2 = 16$  da yerine yazılırsa,

$$\left(\bar{\psi}_2 - \frac{9}{2}\right) + \left(\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 - \frac{9}{2}\right) = 16,$$

$$\left(x^2 + \frac{u^2}{2} - \frac{9}{2}\right) + \left(x^2 + \frac{u^2}{2} - x^2 + y^2 - \frac{9}{2}\right) = 16$$

buluruz. Buradan  $x^2 + y^2 + u^2 = 25$  elde edilir.

**Örnek 1.20** Aşağıdaki problemi çözünüz

$$u_t + uu_x = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

**Çözüm** Denklemin karakteristik sistemi

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0}$$

olur. Buradan birinci aralık integralleri  $c_1 = u$  ve  $c_2 = x - ut$  olarak buluruz. Başlangıç koşulunu da dikkate alırsak problemin çözümünü

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 - (x - ut)^2, & |\xi| < 1, \\ 0, & |\xi| > 1. \end{cases} \quad (1.41)$$

şeklinde alırız. Burada  $\xi = x - ut$  olmaktadır. [29], [72] de (1.41) çözümü detaylı şekilde incelenmiştir. İspatlanmıştır ki, (1.41) fonksiyonunda zamanın artan değerlerinde çözümde iki değerlilik oluşur. Yani göz önüne aldığımız problemin klasik çözümü mevcut değil. Bu tür çözümlerden fiziksel yararlı çözüm elde etmek için zayıf çözüm kavramı içerilir.

## 1.5. Lineer ve Kuazi Lineer Denklemlerin Zayıf (Genelleştirilmiş) Çözümleri

Önceki bölümlerde birinci basamaktan kuazi lineer kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde ederken klasik çözümün mevcut olmadığını görmüştük. Bazı

fiziksel problemlerin doğası gereği, başlangıç fonksiyonu ve katsayılarının minimal koşullar çerçevesinde çözümlerinin bulunması talep edilir. Böyle durumlarda problemin çözümünün diferansiyellenebilme mertebesi denklemin çözümden talep ettiğinden az olur. Bu durumda klasik çözüm kavramını genelleştirmek gerekir. Bu bölümde bu tür sorulara cevap vermeye çalışacağız.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler için zayıf çözüm kavramı 1930 lu yıllarda Sobolev tarafından verilmişti. [68]. Sobolev anlamındaki zayıf çözüm integral eşitlik yardımı ile tanımlanmaktadır

Sadelik açısından ve fiziğin yapısı gereği iki değişkene bağlı olan problemleri inceleyeceğiz. O halde, değişkenlerden birinin  $t$  -zaman değişkeni, diğerinin ise  $x$  -yer değişkeni olduğunu kabul edeceğiz.

$$L[u] \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + b(t, x)u + c(t, x) = 0 \quad (1.42)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada  $a, b$  ve  $c$  bilinen sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. (1.42) denkleminde

$$u(0, x) = f(x) \quad (1.43)$$

başlangıç koşulunu ekleyelim. Açıkça görüldüğü üzere,  $t = 0$  (1.42) denkleminin karakteristiği değildir. Herhangi bir  $G$  bölgesinin sınırında sıfıra eşit olan herhangi bir sürekli diferansiyellenebilen  $\varphi(t, x)$  test fonksiyonu için

$$\iint_G \varphi L[u] dt dx = 0 \quad (1.44)$$

olur. (Verilen bölgenin içinde istenilen mertebeden sürekli diferansiyellenebilen ve bölgenin sınırları civarında sıfıra eşit olan fonksiyonlara test fonksiyonu denir.) Tersine,  $G$  de sürekli diferansiyellenebilen herhangi bir  $\varphi(t, x)$  fonksiyonu için (1.44) eşitliği korunduğu takdirde  $L[u] = 0$  olur, yani  $u(x, t)$  (1.42) denkleminin çözümü olur. Gerçekten de, eğer herhangi bir  $(t_0, x_0)$  noktasında  $L[u] \neq 0$  olursa,  $L[u]$  söz konusu noktanın,  $\Omega$  civarında işaretini korur.  $\varphi(t, x)$  nin  $\Omega$  içeriğinde sıfırdan farklı,  $\Omega$  nın dışında sıfıra eşit olduğunu varsayarsak, (1.44) eşitliğine ters düşen bir sonuç elde ederiz. (1.44) eşitliğini başka şekilde de yazabiliriz. Aşağıdaki

$$\varphi L[u] = L^*[\varphi]u + c\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(u\varphi) + \frac{\partial}{\partial x}(a u \varphi) \quad (1.45)$$

eşitliği doğru olduğu açıktır. Burada

$$L^*[\varphi] \equiv -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(a\varphi) + b\varphi$$

dır. (1.45) eşitliğini integrallersek

$$\iint_G \varphi L[u] dt dx = \iint_G [L^*[\varphi]u + c\varphi] dt dx$$

elde ederiz.

$$\iint_G [uL^*[\varphi] + c\varphi] dt dx \quad (1.46)$$

eşitliğini (1.42) denkleminin zayıf çözümü olarak tanımlayalım. Önemle belirtelim ki, (1.46) eşitliği diferansiyellenemeyen, hatta süreksiz  $u(t, x)$  fonksiyonları için de geçerlidir.

Biz sadece kendisinin ve birinci mertebeden türevlerinin, ikişer ikişer kesişmeyen veya yalnız  $x = \psi(t)$  gibi ortak noktalara sahip bölgelerde birinci tür süreksizliğe sahip olan  $u(t, x)$  fonksiyonunu göz önüne alacağız. Burada  $\psi(t)$  sürekli diferansiyellenebilen fonksiyondur ve her bir parçada  $\varepsilon \rightarrow +0$  iken  $u(t, \psi(t) - \varepsilon)$  ve  $u(t, \psi(t) + \varepsilon)$  limitleri mevcuttur. Benzer şekilde  $u_t$  ve  $u_x$  türevlerinin de mevcut olduğunu kabul edelim. Bu tür fonksiyonlara parçalı sürekli fonksiyon denilmektedir.

**Tanım 1.9**  $G$  bölgesi, sonlu taşıyıcıya sahip istenilen mertebeden sürekli diferansiyellenebilen herhangi bir  $\psi(t, x)$  fonksiyonu için (1.46) eşitliğinin korunması halinde  $u(t, x)$  fonksiyonuna zayıf çözüm denir.

(1.42) denkleminin zayıf çözümünün süreksizlik noktalarının sadece karakteristikler üzerinde olacağı kolayca gösterilebilir. Gerçekten de,  $x = \psi(t)$ ,  $u(t, x)$  fonksiyonunun süreksizlik eğrisi olsun ve  $\varphi(t, x)$   $x = \psi(t)$  eğrisinin küçük civarı  $\Omega$  nın dışında sıfır, dahilinde ise sürekli diferansiyellenebilen fonksiyon olsun.  $x = \psi(t)$  yi  $\Omega$  nın iki yere böldüğü  $\Omega_1$  ve  $\Omega_2$  kısımlarında sürekli diferansiyellenebilen fonksiyon olarak kabul edebiliriz ve böylece  $\Omega_1$  ve  $\Omega_2$  bölgelerinde (1.44) denklemini de korumuş olur. (1.46) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\Omega} [L^*[\varphi]u + c\varphi] dx dt = \iint_{\Omega_1} [L^*[\varphi]u + c\varphi] dx dt = \iint_{\Omega_2} [L^*[\varphi]u + c\varphi] dx dt \\ &= \iint_{\Omega_1} L[u]\varphi dx dt = \iint_{\Omega_2} L[u]\varphi dx dt = \iint_{x=\psi(t)} [u] \left( \frac{d\psi}{dt} - a(t, \psi(t)) \right) \varphi dt \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradaki son iki integral  $x = \psi(t)$  eğrisi üzerinde alınmıştır ve

$$[u] = u(t, \psi(t) + 0) - u(t, \psi(t) - 0)$$

olmaktadır.  $\varphi$  keyfi fonksiyon olduğundan sonuncu eşitlikten  $\frac{d\psi}{dt} - a = 0$  alırız, yani  $x = \psi(t)$  eğrisi (1.42) denkleminin karakteristiği olmaktadır.

$u_t$  ve  $u_x$  fonksiyonlarının da karakteristik üzerinde süreksiz olduğunu gösterebiliriz. Bunun için  $u^*(t, x)$  fonksiyonunun karakteristik olmayan  $x = \psi(t)$  üzerinde sürekli olduğunu varsayalım. Bu durumda teklik teoremine göre, o hem  $\Omega_1$ , hem de  $\Omega_2$  de normal sürekli diferansiyellenebilen  $x = \psi(t)$  de  $u^*(t, \psi(x))$  olan çözümle çakışır. Dolayısıyla  $u_1^*$  ve  $u_2^*$  fonksiyonlarının  $x = \psi(t)$  karakteristiği üzerinde sıçrayışları olamaz. Benzer şekilde, herhangi bir parçalı sürekli ve diferansiyellenebilen noktalarda (1.42) denklemini sağlayan, karakteristikler üzerinde sıçrayışa sahip  $u(t, x)$  fonksiyonunun (1.42) denkleminin genelleştirilmiş (zayıf) çözümü olduğunu kolayca gösterebiliriz.

(1.42) denkleminin (1.43) başlangıç koşullu Cauchy probleminin genelleştirilmiş çözümü öyle  $u(t, x)$  fonksiyonuna denir ki, o süreksizlik noktaları için  $t = 0$  da önceden verilen  $f(x)$  ile çakışsın. Açıktır ki, böyle  $u(t, x)$  fonksiyonu

$$\iint_{G_1} [L^*[\varphi]u + c\varphi] dt dx - \int_{a_1}^{a_2} \varphi(0, x) f(x) dx = 0$$

eşitliğini korur. Burada  $G_1 = G \cap \{t \geq 0\}$  ve  $\{a_1, a_2\}$  ise  $G \cap \{t = 0\}$  olmaktadır. Bu eşitlik (1.42), (1.43) probleminin genelleştirilmiş çözümünün tanımı olarak kullanılabilir. Zayıf çözümler göz önüne alındığında denklem için başlangıç ve sınır değer koşullarının hangi anlamda verileceğini özel olarak belirtmek gerekmektedir.

Lineer denklemin bir özelliğinin önemini belirtelim. Yukarıda gösterildiği gibi, çözümün varlığının garanti olduğu  $S$  yüzeyinin  $R_0$  civarında Cauchy probleminin çözümü  $S$  üzerinde verilmiş  $f(x)$  başlangıç fonksiyonuna bağlı değildir.  $f(x)$  fonksiyonunun sonlu sayıda 1.tür süreksizlik noktaları hariç tüm süreklilik noktalarında (1.42) denkleminin (1.43) başlangıç koşulu çerçevesindeki genelleştirilmiş çözümünün de aynı bölgede mevcut olduğu gösterilebilir.

Şimdi, kuazi lineer denklemi göz önüne alalım. Lineer denklemlerden farklı olarak, kuazi lineer denklemlerde, Cauchy probleminin çözümünün tanımlı olduğu bölge  $f$  ve onun türevlerine bağlı olur. Örneğin,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.47)$$

denkleminin

$$u(0, x) = -th\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

koşulu çerçevesindeki çözümü sadece  $t < \varepsilon$  olduğunda tanımlıdır. Çünkü karakteristiklerin  $(t, x)$  düzlemi üzerindeki izdüşümleri  $t > \varepsilon$  olduğunda kesişirler ve bu noktalarda  $u$  nun farklı değerler almasına neden olurlar, [41].

Lineer denklemlere benzer şekilde, birinci mertebeden kuazi lineer denklemler için de geliştirilmiş çözüm kavramı içermek mümkündür, Örneğin,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a(t, x, u)}{\partial x} + b(t, x, u) = 0 \quad (1.48)$$

denklemini için geliştirilmiş çözüm aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$G$  bölgesinde tanımlı herhangi bir  $\varphi(x, t)$  test fonksiyonu için aşağıdaki

$$\iint_G \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} u + \frac{\partial \varphi}{\partial x} a(t, x, u) + b(t, x, u) \varphi \right] dx dt = 0 \quad (1.49)$$

integral eşitliğini koruyan parçalı sürekli  $u(t, x)$  fonksiyonuna (1.48) denkleminin geliştirilmiş çözümü denir.

(1.42) denklemine benzer şekilde,  $x = \psi(t)$  süreksizlik eğrisi üzerinde (1.48) denkleminin geliştirilmiş çözümünün

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{a(t, x + 0, u(t, x + 0)) - a(t, x - 0, u(t, x - 0))}{u(t, x + 0) - u(t, x - 0)} \quad (1.50)$$

denklemini koruduğu gösterilebilir. Ayrıca,  $u(t, x)$  fonksiyonun süreksizlik eğrisinin, (1.48) denkleminin karakteristiklerinin izdüşümü ile çakışmadığı da kolayca görülebilir.

Lineer denklemlerden farklı olarak (1.47) denklemini için bir tek geliştirilmiş çözüm tanımlanamaz. Örneğin,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{u^2}{2}\right)}{\partial x} = 0, \quad (1.51)$$

$$u(0, x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases} \quad (1.52)$$

Cauchy probleminin geliştirilmiş çözümü  $\alpha \geq 1$  sayısı için

$$u_{\alpha}(t, x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1-\alpha}{2}t, \\ -\alpha, & \frac{1-\alpha}{2}t < x \leq t, \\ \alpha, & 0 < x \leq \frac{\alpha-1}{2}t, \\ -1, & \frac{\alpha-1}{2}t < x \end{cases} \quad (1.53)$$

olur. Böylelikle, (1.42) denkleminin (1.43) başlangıç koşulu çerçevesindeki çözümünün tekliği için ek koşula ihtiyaç vardır.  $\frac{\partial^2 a}{\partial u^2} \geq 0$  koşulunu koruyan (1.48) türünden denklemler için  $t > 0$  yarı düzleminde süreksizlik eğrileri üzerinde

$$u(t, x - 0) > u(t, x + 0) \quad (1.54)$$

koşulunun sağlanmasıdır. Bu koşul (1.53) çözümlerinin içinden sadece birisinin  $\alpha = 1$  olduğu durumda (1.51), (1.52) probleminin fiziksel gerçek ve tek

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

çözümünü verir.

Lineer denklerden farklı olarak kuazi lineer denklemlerde  $(0, x, u(0, x))$  noktasından çıkan karakteristikler yardımıyla çözümü inşa edemeyiz. Örnek olarak, yine (1.47) denklemi için (1.52) koşulunu göz önüne alalım. Kolayca görülür ki, bu Cauchy problemin çözümünü karakteristikleri kullanarak  $t = 0$  doğrusunun küçük bir civarında tek olarak bulamayız. Gerçekten de,  $(t, x, u)$  uzayında  $(0, x, u(0, x))$ ,  $-\infty < x < \infty$  noktalarından karakteristikleri, yani

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = u$$

denklemler sisteminin çözümlerini çizelim.  $u(0, x)$  in pürüzsüz olduğu durumda karakteristiklerin örttüğü yüzey Cauchy probleminin çözümünü oluşturur. (1.52) ifadesi ile tanımlanan başlangıç koşulu Cauchy probleminin karakteristikleri  $(t, x)$  düzleminin  $t > 0$  yarı düzleminin  $x - t = 0$  ve  $x + t = 0$  doğruları arasında  $t < 0$  yarı düzlemini örtmez.

(1.50) koşulu gaz dinamiğinde darbe dalgası olarak isimlendirilir. Bu da gaz dinamiğindeki kütlenin, enerjinin ve impulsun darbe dalgası üzerinden geçtiği korunum kuralını ifade eder. (1.54) koşulu ise entropinin azalmaması kuralına denk gelir, [28], [34], [41].

## 1.6 Literatür Taraması ve Fiziksel Problemin Koyuluşu

Tabakalı ortamlarda sıvıların birlikte hareketi ilk olarak G. Darci, M. Masket, H.E. Leybenzon, S. A. Chistianovich vs. gibi bilim adamları tarafından öğrenilmeye başlanmıştır. Daha sonraları bu alanda önemli sonuçlar hem eski Sovetler Birliği'nde H.E. Jukovskii, N.N. Pavlovskii, M.D. Millionshikov, G.I. Barenblatt, G. Charniy, V.N. Shelkochev ve diğerleri, hem de batıda M. Muscat, K. Aziz, A. Settari, A. Huper ve diğerleri tarafından elde edilmiştir.

Pavlovskii'nin filtrasyon problemlerini kısmi türevli diferansiyel denklemlerin uygun koşullar çerçevesinde çözümünün bulunmasına indirgemesinden sonra, bu alanda elde edilen çözüm metotlarını aşağıdaki gibi sınıflandırmak mümkündür:

1. Analitik metotlar,
2. Yaklaşık metotlar,
3. Sayısal, sayısal-analitik metotlar.

Bunun sonucunda petrol yataklarının işlenmesi sürecinde akının bilinmeyen integral karakteristiklerinin veya onun diğer parametrelerinin (debisi, özgül hızları, basıncın dinamik dağılımı vs) bulunması için etkin ve kullanılabilir analitik ve yaklaşık metotlar üretilmiştir.

Bilindiği üzere, filtrasyon problemlerini ifade edebilen kısmi türevli diferansiyel denklemler bir kural olarak nonlinear denklemlerden oluşur ve bunların gerçek çözümlerini elde etmek mümkün olmamaktadır. Spesifik doğrusal olmayan denklemler çok fazlı sıvıların tabakalı ortamda birlikte hareketi esnasında ortaya çıkar. Bu tür problemlerin çözümü nadiren bulunabilir ve bu alanda aktüel sayılabilen sorunlardan biri de bu problemlerin çözümlerini araştırmaktır.

Doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinin bulunması son on yıllara kadar mümkün değildi. Buna göre de mevcut yaklaşım metotlarının büyük bir kısmı problemi lineerleştirmeyele elde edilirdi. Bu nedenle de böyle yaklaşık metotlarla bulunan çözümler olayın fiziksel özelliklerini ne kadar düzgün ifade edebilir sorusu her zaman açık kalmıştır.

Son yıllarda nonlinear fonksiyonel analiz alanında üretilen metotlar ve çok sayıda kitapların piyasaya çıkması ile bir sürü doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerle ifade edilen pratik problemlere çözümler üretilmiştir. Fakat, mevcut çözüm metotlarını analiz ettiğimizde doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin



öz mlerinin bulunması için genel bir metodun olmadığını, her bir problemin çözümü için özel metodların gerektiğini gözlemlemekteyiz.

Ayrıca, denklemlerde bulunan nonlinearlik fiziksel olayın doğasından oluşan çeşitli ve yeni spesifik özellikler yaratır. Bu tür özellikler o kadar çok olur ki, onları bir çırpıda dikkate almak imkansız olur.

Son yıllarda nonlinear filtrasyon problemleri teorisi geniş öğrenilmiş bir alana çevrildiğinden, artık serbest bir dalı bile oluşturmuştur. Otomodel çözümler yardımı ile ilk kez nonlinear denklemlerin önemli özellikleri keşfedilmiştir. [11], [13] de nonlinear filtrasyon denklemleri için  $t = 0$  da verilmiş başlangıç fonksiyonun uzayın her hangi bir sonlu bölgesinde sıfırdan farklı değerler aldığı noktalarda,  $t > 0$  için çözümün de yalnız sonlu bir bölgede sıfırdan farklı değerler aldığı ispatlanmıştır.  z m n sonlu zaman zarfında sonlu mesafeye kadar dağılma özelliği nonlinear filtrasyon denklemlerinin çözümlerinin klasik olamayacağını gösterir, [11].

Nonlinear filtrasyon denklemleri bir çok ünlü matematikçilerin de araştırma konuları olmuştur. Oleinik O.A.[42], Kalashnikov A.S. [30], [31] bu denklemler için zayıf çözüm kavramlarını dahil etmiş ve çözümün varlık ve teklik teoremlerini ispatlamışlar. [36] da Lax dejenere olan nonlinear daha genel parabolik tür denklemlerin çözümü için lokalleşme özelliğinin olduğunu göstermiştir. Daha detaylı incelemeler Samarskii, Galaktionov ve Kurdyumov tarafından yapılmıştır, [60].

Çağdaş bilgisayar teknolojilerinin katkısıyla nonlinear filtrasyon denklemleri için yazılmış problemlerin çözümlerinin bulunması için etkin sayısal çözüm metodları uygulanmaya başlanmıştır. Literatürde bulunan özel çözümleri analiz ettiğimizde çözüm fonksiyonlarının diferansiyellenebilme mertebesi denklemin çözümden talep ettiği diferansiyellenebilme mertebesinden küçük olmaktadır, [22], [25], [33], [40], [41]. Bu nedenle de nonlinear filtrasyon denklemleri için yazılmış problemlerin çözümlerinin bulunması için yeni ve  z lebilirlikleri yüksek olan metodların yaratılmasına ihtiyaç duyulur.

Linear filtrasyon denklemleri için yazılmış problemlerin çözümlerinin, nonlinear problemlerle kıyaslandığında daha iyice incelendiği görülmektedir. Bunu yukarıda sözünü ettiğimiz gibi nonlinear denklemlerin çözümlerinde zamanın büyük değerlerinde oluşan yeni fenomenlerin, örneğin heyecanlanmış bölgenin sınırının sonlu hızla değişmesi, çözümde yeri önceden bilinmeyen sıçrayışlar ve infilak gibi özellikler talep eder.

[5], [8], [14], [26], [60], [61], [72] de sıcaklık dalgalarının hesaplanmasında ortaya çıkan zorluklar incelenmiş ve çözümde oluşan özellikleri dikkate almaksızın homojen sonlu farklar algoritmaları önerilmiştir [5], [9], [10], [26]. Denklemlerin çözümünde oluşan pürüzler, klasik çözüm kavramını genelleştirerek zayıf çözüm kavramı dahil etmeyi zorunlu kılmıştır. Bu kavram çerçevesinde elde edilen çözümler süresiz de olabilir.

Sıcaklık dalgalarının hesaplanması esnasında hareket eden ön cephenin de bulunması [3] ve [14] de geliştirilmiştir. Bu kaynaklarda önerilen metotlardan matematiksel fizik ve hidrodinamikte rastlanan bir çok problemlerin çözümlerin bulunmasında istifade edilmiştir. [3] ve [13] de incelenen problemlerdeki dejenerasyon açık şekilde, yani çözümün  $x = \xi(t)$  ön cephesi üzerinde  $u(\xi(t), t) = 0$  şeklinde ifade edilir. Fakat Bukcley-Leverett problemi gibi bir çok pratik denklem yeri önceden bilinmeyen noktalarda dejenere olur.

[9] ve [10] da  $C$  uzayında bir sınıf stasyonier olmayan nonlinear filtrasyon denklemleri için yazılmış birinci başlangıç sınır değer problemlerinin çözümü için bir sayısal metot önerilmiştir. Burada yaklaşık çözümün gerçek çözüme yakınsamasının ispatı için özel metot da önerilmiştir.

Bir kural olarak, pratik problemleri çözerken matematiksel modeli oluşturan denklemlerde problemin fiziğinden kaynaklanan farklı karakterli nonlinearlikle karşılaşılır. Nonlinear kısmi türevli denklemlerin günümüzde mevcut olan matematiksel teorisi halen tam incelenmemiştir. Bu nedenle de spesifik özelliklere sahip olan problemlerin her birisi özgün araştırma ve etkin çözüm metotlarının kurulmasını talep etmektedir.

Petrol yataklarının istismarı sürecinin teorik olarak öğrenilmesi, tabakalı ortamda sıvıların hareketini ifade eden denklem veya denklemler sisteminin uygun koşullar çerçevesinde çözümlerinin bulunması ve onlar esasında bilimsel karar vermeye dayanır. Açıktır ki, bu prosesi etkileyen bir çok fiziksel faktörler vardır. Fakat bu faktörlerin hepsini aynı zamanda dikkate almak matematiksel modelin çözümünün bulunmasını zorlaştırır. Ona göre de herhangi bir problem incelenirken bazı fiziksel varsayımlar yapılmaktadır. Bunun yanı sıra modeli oluşturan denklemler nonlinear olduğundan onun gerçek çözümünü her zaman elde etmek imkansız olur. Fakat, bazı durumlarda özel çözümler elde edilebilir. Böyle çözümler, birincisi fiziksel olayın dinamiğinin açıklanması, ikincisi ise uygulanan sayısal çözümlerin test edilmesi açısından çok önemlidir.

Tezde iki fazlı sıvıların tabakalı ortamda birlikte hareketini ifade edebilen denklemler sisteminin sayısal çözümünün bulunması için bir metot geliştirilmiştir. Literatürden bilindiği üzere iki fazlı sıvıların (örneğin, su ve petrol) birlikte hareketini ifade eden denklemler sistemi su ile doyma fonksiyonuna göre birinci mertebeden nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemin verilmiş başlangıç koşulu çerçevesinde çözümünün bulunmasına indirgenilir. [22], [28], [32], [41], [65], [72] de ispatlanmıştır ki, eğer başlangıç fonksiyonun  $x$ 'e göre azalan parçası varsa, zamanın artan değerlerinde denklemin çözümünde çok değerlilik oluşur. Fakat, fiziksel açıdan çok değerlilik kabul edilemezdir. Çözümdeki çok değerlilik ise matematiksel açıdan elde edilen çözümün klasik çözüm olmadığını gösterir. Bu tür çözümleri “kurtarmak” için, yani ondan fiziksel yararlı çözüm elde etmek için klasik çözüm kavramını geliştirip, zayıf çözüm kavramı dahil edilmiştir [22], [67], [72]. Bu nedenle tezde zayıf (genelleştirilmiş) çözüm kavramının dahil edilebilmesi için gereken altyapı oluşturulmuş ve göz önüne alınacak problemlerin matematiksel modelleri çıkarılmış ve süreci ifade edebilen başlangıç ve sınır şartları incelenmiştir. İncelenecek olayın dinamiğini açıklamak için önce bir boyutlu ortamda sıkışamayan sıvıların hareket modelleri incelenmiştir. Eğer tabakalı ortamın mikroskobik, yani, yatağın kumlu olduğunu kabul edersek (pratikte böyle yataklar mevcuttur [13]) yukarıda da sözünü ettiğimiz gibi bu olayın denklemi non lineer kısmi türevli diferansiyel denkleme indirgenilir. Bu modele Buckley-Leverett modeli denilir [15]. Buckley-Leverett modelinin çözümünün (hem gerçek, hem de sayısal) bulunması için orijinal bir metot geliştirilir. Bu modelin çözümünün özelliklerini incelemek için önce Cauchy problemi matematiksel açıdan incelenmiş, sonra ise bu inceleme metodu, pratikte rastlanan petrolün su ile sıkıştırılması probleminin öğrenilmesine uygulanmıştır. Ayrıca, sıkışabilir sıvıların hareket modeli incelenmiş ve karışık denklemler sistemi fiziksel parametrelere göre, birincisi su ile doyma fonksiyonuna göre, ikincisi ise basınç fonksiyonuna göre müstakil denklemlere parçalanması için metot önerilmiştir [46].

Petrol yataklarının verimlilik katsayısını artırmak için çoğu zaman petrolü kimyasal aktif suların yardımı ile sıkıştırıp çıkarmak daha faydalı olur. Bu prosesi ifade eden denklemler sisteminin uygun başlangıç ve sınır şartları dahilinde çözümünün bulunması için sonlu farklar metodu geliştirilecektir.

## **2. İKİ FAZLI SIVILARIN TABAKALI ORTAMDA BİRLİKTE HAREKETİNİN MATEMATİKSEL MODELLERİ**

Petrol yataklarının işlenmesi, teorik analizi ve istismarının optimal idare edilebilmesi için olayın fizikine denk hidrodinamik modelin ve onun efektif çözümünün elde edilmesi gerekmektedir. Bu çözüm yardımı ile petrol kuyularının sulanma dinamiğinin yanı sıra yatağın su ile doyma dağılımının incelenmesi ve yatağın işlenmesi için gereken teknolojik göstergelerin hesaplanması mümkün olmaktadır.

Bilindiği üzere tabakalı ortamlarda petrol, petrolün içerisinde çözülmüş gaz ve su birlikte hareket eder. Bu sürecin teorik incelenmesi yeteri kadar zor bir problem olmaktadır. Bu nedenle (incelen problemin yapısı gereği) söz konusu problem bazı fiziksel yaklaşımlar çerçevesinde incelenir.

### **2.1 Mikroskopik Ortamda İki Fazlı Sıvıların Birlikte Hareketini İfade Edebilen Denklemler ve Problemin Koyuluşu**

Petrol yataklarının istismarı sürecinde çıkarılan petrolün önemli bir kısmı ikinci istismar tekniği olarak adlandırılan, tabakalı ortama su vurma kuyuları olarak tanımlanan, noktalardan yatağın basıncını sabit tutmak niyeti ile basılan sıvı sayesinde elde edilir. Basılan su, istismar tekniğine bağlı olarak sade veya hasılatın artması niyeti ile kimyasal katkıları olan sıvılar da olabilir. Bazı doğal durumlarda petrolün su ile kuyular sistemine sıkıştırılması tabakalı ortamda bulunan doğal sıvının yardımı ile de gerçekleştirilebilir.

Petrol yataklarının optimal istismarı sürecinde petrolün çıkarılma temposunu ve ortamda basıncın dinamik dağılımını her daima kontrol altında tutmak gerekir. Bunun yanı sıra ortamın su ile doyma (sulanma) dinamiği de takip edilmelidir. Bu faktörleri deneysel seviyede öğrenmek mümkün değildir. Sıvıların tabakalı ortamda birlikte hareketini ancak teorik şekilde incelemek zorunda kalıyoruz. Fakat, matematiksel modelin kurulmasına ve istismar için gereken parametrelerin bulunmasına, modelin fiziksel olayı düzgün aksettirebilmesi için ek şartların düzgün verilmesine dikkat edilmesi gerekmektedir.

Önerilen matematiksel model incelenen fiziksel sürecin dinamik yapısını düzgün aksettirmenin yanı sıra, laboratuvar ve reel deneylerle kıyaslama ve yatağın analiz edilebilmesi için anında bilimsel kararlar verilebilmesine yardım etmelidir.

Modeldeki denklemlerin özellikleri ve özellikle de problemin etkin çözüm metotlarının seçilmesine tabakalı ortamda bulunan sıvıların reel özellikleri de tesir etmektedir. Fakat, matematiksel hesaplama sürecinde her hangi bir fiziksel varsayımın veya hesaplamadaki herhangi bir hatanın, model sonucun fiziksel sonuçtan farklı olmasına neden olduğunu kestirmek zor olur. Bu cinsten olan varsayımlar, genelde sıvıların durum denklemlerinin matematiksel karşılığını yazarken ortaya çıkabilir.

Bilindiği üzere sıvıların tabakalı ortamda birlikte hareketini ifade eden diferansiyel denklemlerin yazılması fiziğin iki temel kanununa dayanır. Bunlardan biri petrol ve su fazlarının korunması ve diğeri de Darcy kuralıdır, [12], [17], [39]. Söz konusu denklemler sistemi aşağıdaki gibi

$$A \frac{\partial}{\partial t} \left[ m \frac{S_\omega}{B_\omega(p)} \right] + \text{div}[\vec{q}_\omega] + q_\omega = 0, \quad (2.1)$$

$$A \frac{\partial}{\partial t} \left[ m \frac{S_o}{B_o(p)} \right] + \text{div}[\vec{q}_o] + q_o = 0, \quad (2.2)$$

$$q_i = - \frac{k k_i(S_\omega) A}{\mu_i(p)} \text{grad } p_i, \quad (i = \omega, o) \quad (2.3)$$

$$s_o + s_\omega = 1, \quad (2.4)$$

$$p_o - p_\omega = p_c(s_\omega). \quad (2.5)$$

olmaktadır. Sadelik için  $\beta_\omega = \beta_o = 1$  olarak kabul edelim. (2.5) i dikkate alarak (2.3) den

$$\text{div} \left[ Ak \left( \frac{k_\omega(S_\omega)}{\mu_\omega} + \frac{k_o(S_\omega)}{\mu_\omega} \right) \text{grad } p_\omega + Ak \frac{k_o(S_\omega)}{\mu_o} \text{grad } p_c(S_\omega) \right] = q, \quad (2.6)$$

alırız, burada

$$q = q_o + q_\omega. \quad (2.7)$$

Toplam hacimdeki su ve petrol oranını ifade eden ve aşağıdaki gibi tanımlanan Buckley-Leverett fonksiyonlarını

$$F_{\omega} = \frac{q_{\omega}}{q}, \quad F_o = \frac{q_o}{q}, \quad (2.8)$$

$$F_o + F_{\omega} = 1. \quad (2.9)$$

ve toplam sıvı anlamını veren  $q = q_o + q_{\omega}$ , yani

$$q = q_{\omega} + q_o = Ak \left[ \left( \frac{k_{\omega}(S_{\omega})}{\mu_{\omega}} + \frac{k_o(S_{\omega})}{\mu_o} \right) \text{grad } p_{\omega} + \frac{k_o}{\mu_o} \text{grad } p_c(S_{\omega}) \right] \quad (2.10)$$

dahil edelim. (2.10) dan

$$\text{grad } p_B = \frac{q}{Ak \left[ \frac{k_{\omega}(S_{\omega})}{\mu_{\omega}} + \frac{k_o(S_{\omega})}{\mu_o} \right]} + \frac{\frac{k_o(S_{\omega})}{\mu_o} \text{grad } p_c(S_{\omega}) + \frac{k_o(S_{\omega})}{\mu_o}}{\frac{k_{\omega}(S_{\omega})}{\mu_{\omega}} + \frac{k_o(S_{\omega})}{\mu_o}} \quad (2.11)$$

alırız. (2.11) ifadesi (2.1) de yerine konursa

$$mA \frac{\partial S_{\omega}}{\partial t} + \text{div} \left\{ Ak \frac{k_{\omega}(S_{\omega})}{\mu_{\omega}} \left[ \frac{q}{Ak \left[ \frac{k_{\omega}(S_{\omega})}{\mu_{\omega}} + \frac{k_o(S_{\omega})}{\mu_o} \right]} + \frac{\frac{k_o(S_{\omega})}{\mu_o} \text{grad } p_c(S_{\omega})}{\frac{k_{\omega}(S_{\omega})}{\mu_{\omega}} + \frac{k_o(S_{\omega})}{\mu_o}} \right] \right\} = q_{\omega} \quad (2.12)$$

elde ederiz. [15], [17] da gösterildiği için Buckley-Leverett fonksiyonları için

$$F_{\omega}(S_{\omega}) = \frac{\frac{k_{\omega}(S_{\omega})}{\mu_{\omega}}}{\frac{k_{\omega}(S_{\omega})}{\mu_{\omega}} + \frac{k_o(S_{\omega})}{\mu_o}}, \quad F_o(S_{\omega}) = \frac{\frac{k_o(S_{\omega})}{\mu_o}}{\frac{k_{\omega}(S_{\omega})}{\mu_{\omega}} + \frac{k_o(S_{\omega})}{\mu_o}} \quad (2.13)$$

ifadelerini almış oluruz. (2.13) dikkate alındığında (2.12) denklemi

$$mA \frac{\partial S_{\omega}}{\partial t} + \text{div}[q F_{\omega}(S_{\omega})] + \text{div} \left[ Ak \frac{k_{\omega}(S_{\omega})}{\mu_{\omega}} F_o(S_{\omega}) \text{grad } p_{\omega} + \text{grad } p_c(S_{\omega}) \right] = -q_{\omega} \quad (2.14)$$

şeklini alır.

Böylece (2.1)-(2.5) denklemler sistemi aşağıdaki gibi karışık tür diferansiyel denklemler sistemine parçalanır. Bir başka deyimle, bu denklemler sistemi fiziksel parametrelere göre; birisi su ile doyma fonksiyonuna, diğeri ise basınç fonksiyonuna göre denklemlere ayrışır. (2.6) ve (2.14) denklemleri nonlineer olduğundan onları yer değişkenine göre üç boyutlu ortamda çözmek zordur. Sadelik için denklemleri bir boyutlu ortamda

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ Ak \left( \frac{k_\omega(S_\omega)}{\mu_\omega} + \frac{k_o(S_\omega)}{\mu_o} \right) \frac{\partial p_\omega}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \left( \frac{k_o(S_\omega)}{\mu_o} + \frac{\partial P_c(S_\omega)}{\partial x} \right) \right] = q, \quad (2.15)$$

$$mA \frac{\partial S_\omega}{\partial t} + q \frac{\partial F_\omega(S_\omega)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ Ak \frac{k_o(S_\omega)}{\mu_o} F_\omega(S_\omega) p'_c(S_\omega) \frac{\partial S_\omega}{\partial x} \right] = -q_\omega \quad (2.16)$$

olarak ele alıp inceleyeceğiz. Bilindiği üzere bir boyutlu tabakalı ortamda sıkışamayan sıvılar için  $q = q(t)$  olmaktadır. Görüldüğü gibi, bu durumda denklemler sistemi fiziksel parametrelere göre ayrıklaştırılmıştır. Burada amaç elde edilen teorik sonuçlar ile laboratuvar ortamında yapılan deneyleri de modellemektir.

İstismar rejimine bağlı olarak (2.15), (2.16) denklemlerine başlangıç ve sınır şartları eklenir. Yatağı imitasyon eden bölgeyi  $G$  ve onun sınırını  $\Gamma$  ile gösterelim. Varsayalım ki,  $G$  bölgesinde  $N_\omega$  kadar istismar kuyusu vardır ve bu kuyulardan elde edilen petrolün debileri  $q_j^\omega$ , ( $j = 1, 2, \dots, N_\omega$ ) olmaktadır. Bölgede  $N_o$  kadar da yatağa su basma kuyuları olduğunu varsayalım ve bu kuyulardan da pompalanan su debileri  $q_v^o$ , ( $v = 1, 2, \dots, N_o$ ) olsun. Petrol yatağının işlenmeden önce basıncını  $p_0$ , yatakta bulunan doğal su ile doymayı ise  $S_\omega^0$  ile gösterelim, yani başlangıç koşullar

$$p(x, y, 0) = p_0, \quad S_\omega(x, y, 0) = S_\omega^0 \quad (2.17)$$

olsun.  $G$  bölgenin dış sınırı olan  $\Gamma$  da ise şartlar

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \right|_\Gamma = 0, \quad \text{veya} \quad p(x, y, t)|_\Gamma = p_c(t) \quad (2.18)$$

olarak verilebilir.

$$\Gamma_j^\omega = (x_j^\omega, y_j^\omega, t), \quad (j = 1, 2, \dots, N_\omega) \text{ ve } \Gamma_v^o = (x_v^o, y_v^o, t), \quad (v = 1, 2, \dots, N_o)$$

ile sırasıyla  $G$  bölgesinde yerleşen petrol ve su vurma kuyularının koordinatlarını gösterelim.

$\Gamma_v^o = (x_v^o, y_v^o, t)$  noktalarından yatağa su pompalandığı için

$$S_\omega|_{\Gamma_v^o} = S_1^j(x_v^o, y_v^o, t). \quad (2.19)$$

olacaktır, burada  $S_1^j = 1 - S_\omega^0$  dir.

Klasik matematiksel teoriye göre tabakalı ortamın uç noktasında yani,  $x = \ell$  de sınır koşulu verilmelidir. Fakat, yukarıda sözünü ettiğimiz kaynaklarda (2.16) cinsinden

denklemlerle ifade olan fiziksel olaylarda heyecanlanmış bölgenin sınırının sonlu hızla hareket ettiği ve sonlu mesafeye kadar dağıldığı ispatlanmıştır. Diğer taraftan (2.16) denklemi heyecanlanmış bölgenin bilinmeyen sınırında dejenere olur ve sonlu  $t$  zamanında sonlu  $x = \ell_f(t)$  noktasına ulaşır, yani  $\sup S_\omega(t)$  sonludur. Böylelikle (2.16) denklemi  $D_{\ell(t)} = \{(x, t) | 0 \leq x \leq \ell_f(t), t > 0\}$  bölgesinde tanımlı ve

$$S_\omega(\ell_f(t), t) = S_\omega^{(0)} \quad (2.20)$$

olmaktadır. Yani, (2.16) denklemi  $x = \ell_f(t)$  noktasında birinci mertebeden denkleme dejenere olur.

Literatürden de bilindiği üzere dejenere olunan sınırdaki veya sınırın bir kısmında şart vermeye gerek yoktur. Ayrıca (2.20) şartı bilinmeyen  $\ell_f(t)$  sınırını da bulmaya imkan verir. Eğer,  $k_\omega(S_\omega)$ ,  $k_o(S_\omega)$ ,  $p_c(S_\omega)$  fonksiyonları belli olursa (2.15)-(2.20) problemi çözülerek basınç ve su ile doyma fonksiyonlarının dinamik dağılımları bulunabilir.

Gözönüne aldığımız problemin doğal yapısını inceleyebilmek için önce (2.15)-(2.20) problemini özel durumlarda inceleyelim.

## 2.2 Bir Boyutlu Ortamda Sıkışamayan Sıvıların Birlikte Hareketi. Buckley-Leverett Modeli

Makroskobik ortamda sıkışamayan sıvıların bir boyutlu hareket denklemleri de petrolün ve suyun korunum kuralları ve lineer Darcy yasası ile ifade edilmektedir. Bu varsayımlar çerçevesinde akışı ifade eden denklemler sistemi,

$$\frac{\partial(m\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial v_s}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial((m-1)\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial v_p}{\partial x} = 0,$$

$$v_l = -\frac{kk_l(\sigma)}{\mu_l} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (l = s, p)$$

şeklinde olur [8], [13], [17], [39]. Burada,  $\sigma(x, t)$  - tabakalı ortamların su ile doyma fonksiyonu,  $p(x, t)$  - su fazının basıncını,  $k_o$  ve  $k_v$  oransal faz geçirgenlikleri,  $\mu_o$  ve  $\mu_\omega$



petrol ve suyun viskoziteleri,  $m, k$  – sırasıyla tabakalı ortamın gözenekliliğini ve geçirgenliğini göstermektedir.

Bu problem ilk kez Buckley – Leverett tarafından incelenmiş ve literatürde Buckley – Leverett modeli olarak adlandırılırlar [15]. Bu denklemler sisteminden bilinmeyen  $\sigma(x, t)$  fonksiyonu için

$$\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(\sigma(x, t))}{\partial x} = 0 \quad (2.21)$$

skaler denklemini elde ederiz.

Burada,  $F(\sigma)$  fonksiyonu toplam sıvı hacmindeki su oranını ifade etmektedir. Ayrıca  $F'(\sigma)$  ve  $F''(\sigma)$  türevleri mevcut olan bilinen bir fonksiyon,  $G$  ise

$$D = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, t \geq 0\}$$

dır. (2.21) denklemi, birinci mertebeden nonlinear hiperbolik tip denklemdir ve çok sayıda farklı problemleri ifade eder. Literatürden bilindiği üzere başlangıç fonksiyonunun sürekli olduğu halde bile (2.21) denkleminin çözümü süreksiz olabilir ve bu süreksizliğin yeri önceden belli olmayabilir.

(2.21) denklemi için göz önüne alınan problemin fiziksel anlamına göre çeşitli şartlar verilebilir. Bunlar tabakalı ortamdaki kalık su oranı ve sınırda tabakalı ortama pompalanan suyun debisi olabilir. (2.21) denkleminin çözümünün yapısını, yani onun diferansiyellenebilme özelliklerini incelemek için aşağıdaki problemi göz önüne alalım.

### 2.2.1 Cauchy Problemi

(2.21) denklemi için aşağıdaki başlangıç koşuluna sahip

$$\sigma_0(x) \equiv \sigma(x, 0) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

Cauchy problemini inceleyeceğiz. Burada  $f(x)$  başlangıç profilini tanımlayan bilinen sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

(2.21) ve (2.22) probleminin çözümü karakteristikler metodu ile kolayca oluşturulabilir

$$\sigma(x,t) = \begin{cases} f(\xi), & |\xi| \leq 1, \\ 0, & |\xi| > 1, \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\xi = x - F'(\sigma)t. \quad (2.24)$$

Burada  $\xi$ ,  $F'(\sigma)$  hızı ile hareket eden uzaysal koordinatı göstermektedir, [21], [33], [39], [65], [71]. (2.23) şeklindeki çözümlere yumuşak (soft) çözümler denir, [40]. (2.23) ifadesinden  $x$ 'e göre türev alırsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} &= \frac{df(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = f'(\xi) \cdot \left( 1 - t f''(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) = f'(\xi) - f'(\xi) t F''(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} (1 + f'(\xi) F''(\sigma) t) &= f'(\xi) \end{aligned}$$

buluruz. Buradan

$$\sigma_x = \frac{f'(\xi)}{1 + f'(\xi) F''(\sigma) t} \quad (2.25)$$

elde ederiz. Yine (2.23) ifadesinin  $t$ 'ye göre türevi alınır

$$\sigma_t = \frac{df(t)}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = f'(\xi) (-F'(\sigma) - t F''(\sigma) \sigma_t) = -f'(\xi) F'(\sigma) - f'(\xi) F''(\sigma) t \sigma_t$$

veya

$$\sigma_t (1 + f'(\xi) F''(\sigma) t) = -f'(\xi) F'(\sigma)$$

olur. Buradan

$$\sigma_t = \frac{-f'(\xi) F'(\sigma)}{1 + f'(\xi) F''(\sigma) t} \quad (2.26)$$

alırız. (2.25) bağıntısı  $(x = \xi, (t=0))$  da başlangıç profilinin eğimine göre,  $(x,t)$  noktasında  $\sigma(x,t)$  profilinin eğimini gösterir. Eğer  $f' < 0$  ve  $F'' > 0$ , (veya  $f'(u) > 0$ ,  $F''(u) < 0$ ) ise, bu takdirde  $1 + f'(\xi) F''(\sigma) t = 0$  olur ve

$$t = -\frac{1}{f'(\xi) F''(\sigma)} > 0$$

değeri için  $\sigma_x(x,t) = \infty$  bulunur. Ayrıca, bu noktalarda  $\sigma_t(x,t)$  de sonsuz olur, yani  $\sigma_t(x,t) = \infty$ . Bu yüzden, eğer başlangıç profilin belli bir  $\xi$  noktasında negatif bir eğime

sahipse, yani  $f'(\xi) < 0$  ise,  $T_0 = \left(-\frac{1}{f'F''}\right)_{\min}$  de  $\sigma_t(x,t) = \infty$  ve  $\sigma_x(x,t) = \infty$  olur. Bu değer çözümün profilinde ilk kez dik teğetlerin olduğu zamandır. O halde,  $x_0 = \xi_0 + T F'(\xi_0)$  noktasının komşuluğunda çözüm  $t > T = \left(-\frac{1}{f'F''}\right)_{\min}$  için tek değerli olmayabilir.

Sadece  $F$  nin değil aynı zamanda  $F'$  türevinin de  $\sigma$  nın bir fonksiyonu olması tipik bir nonlinear etkiye neden olur.  $F'(\sigma) > 0$  için, büyük değerli  $\sigma$  lar küçük değerli olanlardan daha hızlı yayıldığı için  $\sigma(x,t)$  başlangıç profilinde zamanla bozulma oluşur.  $F'(\sigma) < 0$  olduğunda tersine süreç gözlemlenir. Böylece (2.21) in çözümü tek değerli olamaz. Bu da elbette ki, fiziksel açıdan anlamsızdır. Sürekli, çok değerli çözümler yerine, süreksiz fakat tek değerli çözümlerle bu durum düzeltilebilir. Fakat bu süreksiz çözüm diferansiyel denklemin klasik anlamda bir çözümü olamaz.

Bu nedenle, bu durum için S. L. Sobolev anlamında zayıf çözüm kavramını ileri süreceğiz. Bu tanım sayesinde, (2.21) denkleminin zayıf (ya da genelleştirilmiş) çözümü için iki kısımdan ibaret olacaktır: İlki, (2.21) denklemini sağlayan sürekli, diferansiyellenebilir ve ikincisi, Rankine-Hugoniot koşulunu sağlayan sıçrayıştan oluşur, [22], [26], [61], [67], [72].

Zayıf çözüm kavramını anlayabilmek için,  $\sigma$  fonksiyonunun tanım bölgesi olan  $D$  yi ikiye bölen öyle bir  $\ell(t)$  eğrisinin mevcut olduğunu kabul edelim ki, bu eğri üzerinde  $\sigma$  fonksiyonu sıçrayışa sahip olsun ve (2.21) denklemini  $\varphi(x,t)$  test fonksiyonu ile çarparak,  $D$  bölgesi üzerinden integralleyelim

$$\iint_D \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial t} \varphi(x,t) dx dt + \iint_D \frac{\partial F(\sigma(x,t))}{\partial x} \varphi(x,t) dx dt = 0. \quad (2.27)$$

(2.27) eşitliğindeki ilk integrale  $t$  ye göre kısmi integrasyon formülünü uygularsak

$$\int_0^T \sigma(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = \sigma(x,t) \varphi(x,t) \Big|_0^T - \int_0^T \sigma(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$$

elde edilir. Böylece birinci integral için

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^T \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial t} \varphi(x,t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x,0) \varphi(x,0) dx - \iint_{-\infty 0}^{\infty T} \sigma(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt \quad (2.28)$$

alırız. Şimdi de, (2.27) eşitliğindeki ikinci integrale  $x'$ e göre kısmi integrasyon formülünü uygulayalım

$$\begin{aligned}
\int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F(\sigma)}{\partial x} \varphi(x, t) dx &= \int_0^T dt \left[ \int_{-\infty}^{\ell(t)} \frac{\partial F(\sigma)}{\partial x} \varphi(x, t) dx + \int_{\ell(t)}^{\infty} \frac{\partial F(\sigma)}{\partial x} \varphi(x, t) dx \right] \\
&= \int_0^T dt \left[ \varphi(x, t) F(\sigma) \Big|_{-\infty}^{\ell_-(t)} - \int_{-\infty}^{\ell_-(t)} F(\sigma) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \varphi(x, t) F(\sigma) \Big|_{\ell_+(t)}^{\infty} - \int_{\ell_+(t)}^{\infty} F(\sigma) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right] \\
&= \int_0^T \left[ \varphi(\ell_-(t), t) F(\sigma) - \varphi(\ell_+(t), t) F(\sigma) \right] dt - \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \\
&= \int_0^T \left[ \varphi(\ell_-(t), t) F(\sigma) - \varphi(\ell_+(t), t) F(\sigma) \right] dt - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T F(\sigma) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt \quad (2.29)
\end{aligned}$$

olur. (2.28) ve (2.29) ifadeleri (2.27) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, 0) \varphi(x, 0) dx + \int_0^T \left[ \varphi(\ell_-(t), t) F(\sigma) - \varphi(\ell_+(t), t) F(\sigma) \right] dt \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T \left[ \sigma(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(\sigma) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt = 0 \quad (2.30)
\end{aligned}$$

alırız. (2.27) eşitliğinin herhangi bir  $\varphi(x, t)$  test fonksiyonu için sağlanması için

$$\varphi(\ell_-(x, t) F(\sigma) - \varphi(\ell_+(x, t) F(\sigma) = 0$$

olması gerekir, ve buna Rankine-Hugoniot koşulu denir. (2.30) ifadesinden görüldüğü üzere, (2.21) denkleminde  $\sigma$  'dan talep edilen türevlere artık ihtiyaç kalmamaktadır. Şimdi genelleştirilmiş veya zayıf çözüm kavramını tanımlayabiliriz.

**Tanım 2.1** (2.23) başlangıç şartını bilinen anlamda koruyan ve  $D$  de kompakt desteğe sahip herhangi bir test fonksiyonu için

$$\int_D \left[ \sigma(x, t) \varphi_t(x, t) + F(\sigma(x, t)) \varphi_x(x, t) \right] dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, 0) \sigma(x, 0) dx = 0 \quad (2.31)$$

integral eşitliğini sağlayan  $\sigma(x, t)$  fonksiyonuna (2.21), (2.23) probleminin bir zayıf (genelleştirilmiş) çözümü denir. (Buradaki  $\sigma(x, 0)$ , genelde sınırlı ölçülebilen herhangi bir fonksiyon olabilir.)

Eğer (2.31) integral eşitliğindeki  $\sigma$  ve  $F(\sigma)$  fonksiyonları sürekli diferansiyellenebilir ise bu takdirde (2.31) ve (2.21) ifadeleri denktirler. (2.31) eşitliğinde  $\sigma(x, t)$  fonksiyonlarının sürekli türevleri gerekmediğinden (2.31) denklemi daha geniş çözümler sınıfına sahiptir.

İncelediğimiz bu durumdaki gibi, bir çözümün sıçrayışa sahip olması sadece (2.21) denkleminin hiperbolik karakterine göre değil, aynı zamanda bazı başlangıç fiziksel varsayımların (şimdiki durumda kapiler basıncın) ihmal edilmesiyle ortaya çıkar. Bununla birlikte, gerçekten süreksiz çözümleri olan problemlerle de karşılaşılabilir, (örneğin bir şok dalgası). Bundan dolayı, her iki etki de dikkate alınmalıdır. Genelde  $\sigma(x, 0)$  sınırlı ölçülebilen herhangi bir fonksiyon olabilir

Zayıf çözüm dahil edildiğinde ortaya çıkan temel zorluk, sıçrayış noktalarının belirlenmesi ve onun sonraki evriminden ibarettir. Süreksizlik noktalarının varlığı, onların yakınında çözümün türevleri olmadığından klasik çözüm metotlarının uygulanmasında önemli zorluklara neden olur. Bu yüzden, esas problemin yerine aşağıdaki yardımcı problemi önereceğiz. [1], [46], [47] ve [53] takip ederek aşağıdaki

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + F\left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial x}\right) = 0, \quad (2.32)$$

$$v(x, 0) = v_0(x). \quad (2.33)$$

yardımcı problemi inceleyeceğiz. Burada  $v_0(x)$

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = \sigma_0(x) \quad (2.34)$$

denkleminin sürekli diferansiyellenebilen herhangi bir çözümüdür.

(2.32) den açıktır ki,  $v(x, t)$  nin pürüzsüzlüğü,  $\sigma(x, t)$  nin pürüzsüzlüğünden bir mertebe daha yüksektir. Böylece, (2.32), (2.33) probleminin çözümlerinin sınıfı, (2.21) i sağlayan fonksiyonlar sınıfı ile aynı olur. Bunun yanı sıra, (2.12) denklemi her zaman potansiyel fonksiyonda  $\sigma(x, t)$  için bir korunma kanunu ifade eder. (2.32), (2.33) probleminin

bir diğer avantajı, onu çözerken  $\frac{\partial F(\sigma)}{\partial x}$  türevini hesaplamaya gerek duyulmamasıdır.

Aşağıdaki teorem (2.32), (2.33) ve (2.22), (2.23) probleminin denkleğini ispatlar.

**Teorem 2.1**  $v(x, t)$  fonksiyonunun (2.32), (2.33) probleminin pürüzsüz bir çözümü olsun.

Bu takdirde,

$$1) \quad \sigma(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \text{ fonksiyonu (2.21), (2.22) problemini (2.31) anlamında}$$

sağlar,

$$2) \quad v(x, t) \text{ mutlak sürekli bir fonksiyondur.}$$

**İspat**  $v(x, t)$  fonksiyonunun (2.32), (2.33) probleminin bir çözümü olduğunu varsayalım.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = q, \quad \frac{\partial \pi}{\partial q} = Q$$

ifadelerini dikkate alırsak, (2.12) denklemini

$$\pi(p, q) \equiv p + F(q) = 0 \quad (2.35)$$

formunda yazabiliriz. (2.35) ifadesini  $x$  ve  $t$  'ye göre diferansiyelleyerek

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(F(q)) = \frac{\partial p}{\partial x} + F'(q) \cdot \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(F(q)) = \frac{\partial p}{\partial t} + F'(q) \cdot \frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

alırız ve  $\frac{\partial F(q)}{\partial q} = Q = F'(q)$  olduğunu da dikkate alırsak

$$\frac{\partial p}{\partial x} + Q \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + Q \frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

elde ederiz.  $\frac{\partial v}{\partial t} = p$  den  $x$  e göre,  $\frac{\partial v}{\partial x} = q$  den  $t$  'ye göre türev alırsak, sırasıyla

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} \text{ ve } \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial q}{\partial t}$$

olduğuna ve buradan da  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial t}$  eşitliğine ulaşırız. Buradan da  $p$  ve  $q$  fonksiyonlarına göre

$$\frac{\partial p}{\partial t} + Q \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + Q \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

denklemlerini alırız. Elde edilen denklemlere artık karakteristikler metodunu uygulayabiliriz. (2.36)'nın birinci denklemi için karakteristik denklemler sistemini

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{F'(q)} = \frac{dp}{0}$$

şeklinde yazabiliriz. Benzer şekilde (2.36) ifadesinin ikinci denklemi için karakteristik denklemler sistemini

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{F'(q)} = \frac{dq}{0}$$

olduğunu görürüz. Bu iki karakteristik denklemleri birleştirirsek,  $x, t, v, p$  ve  $q$  uzayında karakteristiklerin denklem sisteminin

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{F'(q)} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

şeklinde alırız. Böylece beş bilinmeyen için dört denklem elde etmiş oluruz. Eksik kalan 5.denklemi

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dt}{ds} = p + qF'(q)$$

eşitliğinden elde ederiz. Son olarak Charpit denklemler sistemini

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = F'(q), \quad \frac{dp}{ds} = 0, \quad \frac{dq}{ds} = 0, \quad \frac{dv}{ds} = p + qF'(q) \quad (2.37)$$

şeklinde elde ederiz. (2.37) sisteminden  $x, t, v, p, q$  ve  $v$  bilinmeyenlerini tek olarak elde etmek için  $s = 0$  noktasında aşağıdaki başlangıç koşullarını verelim

$$\begin{aligned} t_{s=0} &= 0, \\ x_{s=0} &= \xi, \\ v_{s=0} &= \begin{cases} v_0, & |\xi| \leq 1, \\ 0, & |\xi| > 1, \end{cases} \\ p_{s=0} &= -F\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right), \\ q_{s=0} &= \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{s=0} = \begin{cases} \delta_0, & |\xi| \leq 1, \\ 0, & |\xi| > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.38)$$

(2.37), (2.38) problemini çözersek

$$v(x, t) = \left[ \frac{\partial v}{\partial x} F' \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) - F \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] t + v_0(\xi) \quad (2.39)$$

$$x = \xi + F' \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) t$$

alırız.

Diğer taraftan, (2.32) denkleminin  $x_1$  den  $x_2$  ye integralini alırsak,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial F(\sigma)}{\partial x} \right) dx = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(\sigma)}{\partial x} dx = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} dx + F(\sigma(x_2, t)) - F(\sigma(x_1, t)) = 0$$

olur ve buradaki  $F(\sigma)$  akış fonksiyonu olduğundan  $F(\sigma(x_2, t)) - F(\sigma(x_1, t))$  farkı sıfır olur.

Böylece

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \sigma dx = 0$$

bulunur, yani integrali herhangi bir  $x_1$  ve  $x_2$  için

$$\int_{x_1}^{x_2} \sigma(x, t) dx = s \text{ a } b$$

olur. Yukarıdaki eşitlik keyfi  $t$  ler için aynı olduğundan  $t = 0$  için de aynı olmalıdır. O halde,  $t = 0$  için

$$\int_{x_1}^{x_2} \sigma_0(x) dx = s \text{ a } b$$

dir. Bu sabit sayısına kritik sayı adını vereceğiz.

Sade hesaplamalar yolu ile (2.39) dan

$$\sigma(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^x \sigma(\xi, t) d\xi \quad (2.40)$$



yazabiliriz ve böylece de teoremin ikinci kısmının doğruluğu direkt olarak ispatlanabilir.

Biz şimdi, çözümde bulunan sıçrayış noktalarının yerini ve onun zamanla evrimini belirleyelim. Yukarıda belirttiğimiz üzere (2.1) denklemi korunum kuralı ifade ettiğinden,  $\sigma(x,t)$ ' nin grafiği ile sınırlanan alan zamanla sabit kalır. Açıktır ki,  $t = 0$  için bu alan

$$S_I = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_0(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

olmaktadır.  $S_I$  bölgesinin zamana göre evrimini  $S_f(t)$  ile gösterelim ve bu alanı hesaplayalım.

$\sigma_x(x,t)$  türevinin işaret değiştirdiği noktaya kırılma noktası (break point) diyeceğiz ve onu  $X_{br}$  ile göstereceğiz.  $\sigma(x,t)$  fonksiyonunun  $X_{br}$  noktasın önünde ve sağında kalan çözümün parçalarını sırasıyla  $\sigma^+(x,t)$  ve  $\sigma^-(x,t)$  olarak gösterelim. Bu takdirde kırılma noktasının apsisi

$$\sigma^+(x,t) = \sigma^-(x,t)$$

bağıntısından belirlenir.  $S_+$  ve  $S_-$  ile sırasıyla aşağıdaki

$$S_+ = \int_{-1}^{X_{br}} \sigma^+(x,t) dx, \quad S_- = \int_{-1}^{X_{br}} \sigma^-(x,t) dx \quad (2.41)$$

integralleri gösterelim. Açıktır ki,

$$S_N = S_+ - S_- = S_{fE}(t) \quad (2.42)$$

olmaktadır. Bu eşitlikten  $S_{IE}$  nin zamana bağlı olmadığı ve başlangıçtaki  $S_I$  değerini koruduğu görülür.

Su hacminin sabit kalması dengesinin sabitliğinden ve Teorem 2.1' den

$$S_I = \int_{-1}^{X_{fr}(t)} \sigma_0(\xi) d\xi = \int_{-1}^{X_{fr}(t)} \sigma(x,t) dx = v(X_{fr}(t), t) \quad (2.43)$$

elde ederiz.  $S_I$  sayısına  $v(x,t)$  nin kritik değeri diyeceğiz.  $v(x,t)$  nin  $S_I$  kritik değerini aldığı noktaya ön cephe (front) noktası denir ve  $X_{fr}$  ile gösterilir.

Bu terminolojiyi kullanarak ve  $v(x,t)$ ' ye karşılık gelen genişletilmiş çözümü  $v_{ext}(x,t)$  ile gösterirsek,

$$v_{ext}(x,t) = \begin{cases} S_I & , \quad v > S_I, \\ v(x,t) & , \quad v < S_I \end{cases} \quad (2.44)$$

elde ederiz. Bu durumda, teoreme göre,  $\sigma_{ext}(x,t)$  için

$$\sigma_{ext}(x,t) = \frac{\partial v_{ext}(x,t)}{\partial x} \quad (2.45)$$

elde ederiz. Bu şu anlama gelir;  $\sigma(x,t)$  için bir süreksizlik noktası, doyma fonksiyonunun sıfıra eşit olduğu noktanın sağında yerleşen noktalardır.

(2.43) den Rankine- Hugoniot koşulunun limit durumu

$$\frac{dX_{fr}(t)}{dt} = \frac{F(\sigma)}{\sigma} \Big|_{x=x_0(t)} \quad (2.46)$$

olarak kolayca elde edilir. Buradan,

$$t = \int_0^{X_{fr}(t)} \frac{dx}{F'(\sigma)} < \infty \quad (2.47)$$

dır. (Önemle belirtmek gerekir ki, bu integralin varlığı,  $t$ 'nin sonlu olması için gereklidir.  $t$ 'nin sonlu olması da, çözümün varlığı ve tekliği için gerekli ve yeterli koşul olmaktadır).

Böylece, önerilen metot birinci mertebeden dejenere olan hiperbolik tip nonlinear denklemin bir genelleştirilmiş çözümünü bulmayı mümkün kılar.

### 2.3. Buckley – Leverett Modelinin Petrolün Su İle Sıkıştırılması Problemine Uygulanması

Yukarıdaki bölümde önerilen yöntemi yeraltı hidrodinamiğinin problemlerinden biri olan petrolün su ile sıkıştırılıp çıkarılması probleminin matematiksel modeline uygulayalım. Bilindiği gibi, iki fazlı sıvıların tabakalı ortamlarda makroskobik hareketini ifade eden matematiksel model "Buckley-Leverett" modelidir. Söz konusu modelin temelini birinci basamaktan nonlinear bir boyutlu hiperbolik tür denklem oluşturmaktadır.

Tabakalı ortamlardan petrolün optimal şekilde çıkarılması için yatağın her bir noktasında ve istismar süresince basıncın ve yatağın su ile doyma oranının zamana göre değişmesinin kontrol altında tutulması gerekmektedir. Literatürden bilindiği gibi [12], [17] ve [39] iki fazlı

sıkıştırılamayan sıvıların, kapiler basınç dikkate alınmaksızın, yani  $p_c(\sigma_\omega) \equiv 0$  olduğunda hareketi Muskat-Mires denklemler sistemi için yazılmış uygun başlangıç ve sınır koşulları yardımı ile ifade edilmektedir . Bu durumda (2.21)

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div}(u F_s(\sigma)) = 0 \quad (2.48)$$

şeklinde tek bir denkleme indirgenmektedir.

Aşağıdaki fiziksel problemi gözönüne alalım. Petrol yatağına bir noktadan, mesela  $x = 0$  noktasından günde  $q = 200\text{m}^3$  hacminde suyun pompalandığını varsayalım. Yatağın geometrik ölçüleri: eni ( $b$ ) ve uzunluğu ( $l$ ) 600m yüksekliği  $h_0 = 20\text{m}$  olan ortamda kalıcı suyun miktarı  $\sigma_\omega(x, 0) = \sigma_\omega^0 = \sigma_{\omega o} = 0.1$ , yatağın su ile dolma payı ise  $\eta_2 = 0.75$  olsun. Bu ise yatağın efektif yüksekliğinin  $h_0 = 15\text{m}$  olması anlamına gelir. Yatağın fiziksel parametreleri  $k = 0.5\text{mkm}^2$ ,  $m = 0.2$ , suyun ve petrolün dinamik viskoziteleri  $\mu_o = 4.10^{-3}\text{pa.s}$ ,  $\mu_\omega = 10^{-3}\text{pa.s}$  olmaktadır. Yatağın oransal faz geçirgenliği sırasıyla

$$k_o(\sigma) = \left( \frac{\sigma^* - \sigma}{\sigma^* - \sigma_{sb}} \right)^2, \quad \sigma_{sb} \leq \sigma \leq \sigma^*, \quad (2.49)$$

$$k_\omega(\sigma) = \begin{cases} \left( \frac{\sigma - \sigma_{sb}}{\sigma^* - \sigma_{sb}} \right)^2, & \sigma_{sb} \leq \sigma \leq \sigma^1 \\ 0.8 \left( \frac{\sigma - \sigma_{sb}}{\sigma^* - \sigma_{sb}} \right)^{\frac{1}{2}}, & \sigma^1 \leq \sigma \leq \sigma^* \end{cases} \quad (2.50)$$

ile ifade edilmektedir. Burada  $\sigma^* = 0.8$  ve  $\sigma^1$  in sayısal değeri, suyun ve petrolün oransal geçirgenlikleri eşitliğinden  $\sigma^1 = 0.7032$  olarak bulunur. (2.48) denklemini için başlangıç ve sınır koşulu

$$\sigma(x, 0) = \sigma_0 = 0.1 \quad (2.51)$$

$$\sigma(0, t) = \sigma_1 = 0.8 \quad (2.52)$$

olmaktadır. Yukarıdaki fiziksel veriler çerçevesinde (2.48)- (2.50) probleminin çözümünü kullanarak yatağın herhangi bir  $x$  noktasında ve istenilen  $t$  zamanında su ve petrolle doyma

fonksiyonlarının bulunması ve bunların da yardımıyla diğer teknolojik göstergelerin hesaplanması istenmektedir.

$u(t)$  süzülme hızını,  $F_s(\sigma)$  Buckley-Leverett fonksiyonu toplam sıvı hacmindeki su payını göstermektedir. Bilindiği gibi akışın toplam hızı  $u(t) = \frac{q(t)}{b.h}$  formülüyle,  $F_\omega(\sigma)$  fonksiyonu ise

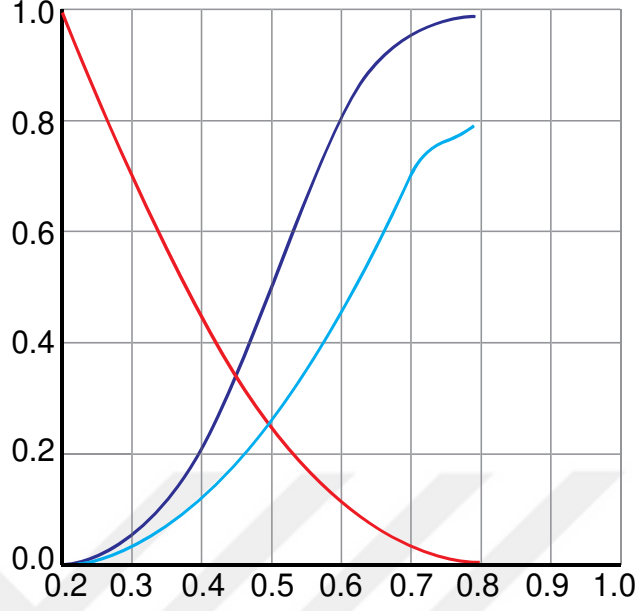
$$F_\omega(\sigma) = \frac{k_\omega(\sigma)}{k_\omega(\sigma) + \bar{\mu}k_o(\sigma)}, \quad (2.53)$$

olarak tanımlanmaktadır, burada  $\bar{\mu} = \frac{\mu_\omega}{\mu_o}$  dır. (2.49), (2.50) ve (2.53) eşitlikleri ile tanımlanan  $F_\omega(\sigma)$ ,  $k_\omega(\sigma)$  ve  $k_o(\sigma)$  fonksiyonlarının grafikleri Şekil 2.1 'de gösterilmiştir.  $F'_\omega(\sigma)$  fonksiyonunun grafiği Şekil 2.2 de gösterilmiştir.

(2.48), (2.51) ve (2.52) probleminin çözümünü

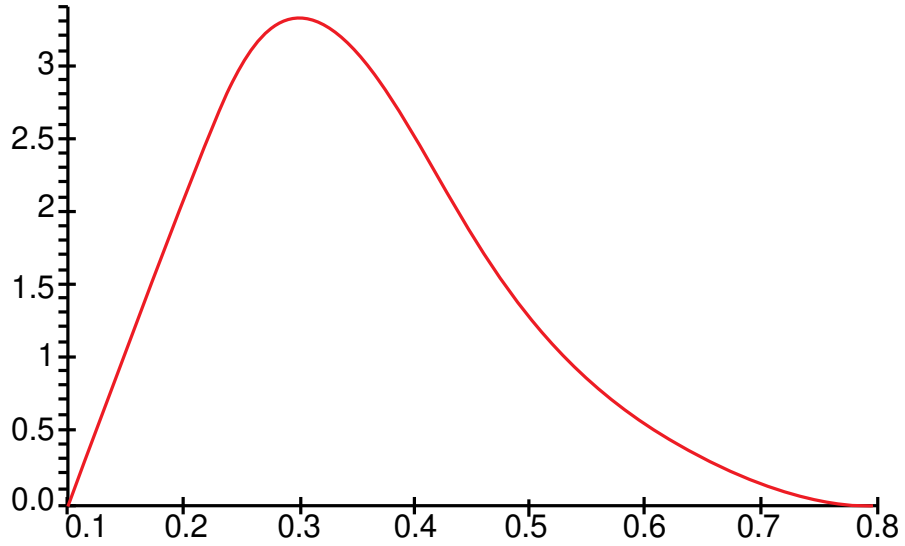
$$\sigma(x,t) = \begin{cases} 0.1, & \frac{x}{t} > \frac{u(t)}{m} F'_\omega(0.1) \\ G\left(\frac{x}{t}\right), & \frac{u(t)}{m} F'_\omega(0.1) < \frac{x}{t} < \frac{u(t)}{m} F'_\omega(0.8) \\ 0.8, & \frac{x}{t} < \frac{u(t)}{m} F'_\omega(0.8) \end{cases} \quad (2.54)$$

olarak yazabiliriz. Burada  $G^{-1} = \frac{m}{u(t)} (F'_\omega)^{-1}$  dır.

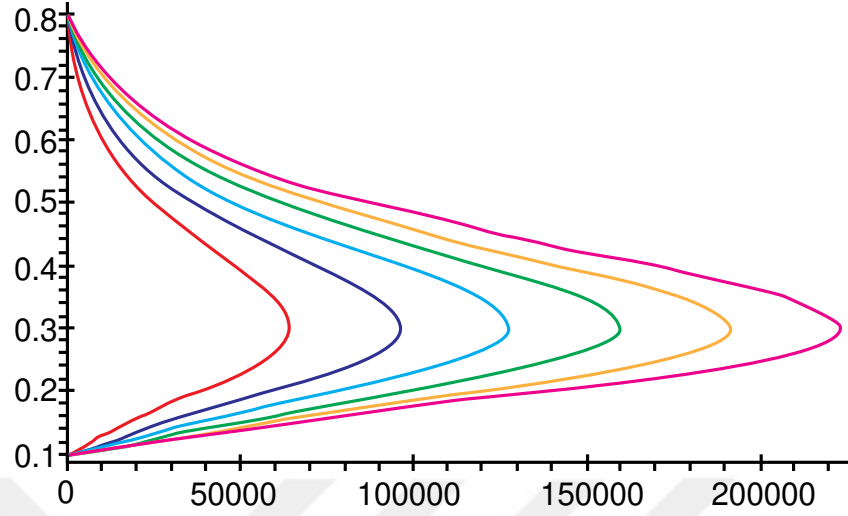


**Şekil 2.1**  $k_{\omega}$ ,  $k_o$  ve  $F_{\omega}(\sigma)$  fonksiyonlarının grafikleri

(2.34) formülü ile bulunan  $\sigma(x,t)$  fonksiyonunun grafikleri zamanın çeşitli değerlerinde Şekil 2.3' de gösterilmiştir. Grafikten görüldüğü gibi  $\sigma(x,t)$  fonksiyonu  $t > 0$  değerleri için çok değerli olmaktadır, bu da fiziksel açıdan kabul edilemezdir. (2.48), (2.51) ve (2.52) probleminin zayıf çözümünü bulmak için yukarıda önerildiği gibi



**Şekil 2.2**  $F'_{\omega}(\sigma)$  fonksiyonunun türevinin grafiği



Şekil 2.3 Zamanın farklı değerlerinde  $\sigma(x, t)$  fonksiyonunun grafikleri

$$m \frac{\partial v}{\partial t} + u(t) F_{\omega}(\sigma) = 0, \quad (2.55)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad (2.56)$$

$$\sigma(0, t) = \sigma_1 \quad (2.57)$$

yardımcı problemini dahil edelim [46], [53], [55]. Burada  $v_0(x)$  fonksiyonu

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = \sigma_0$$

denklemini koruyan herhangi bir fonksiyon olmaktadır.

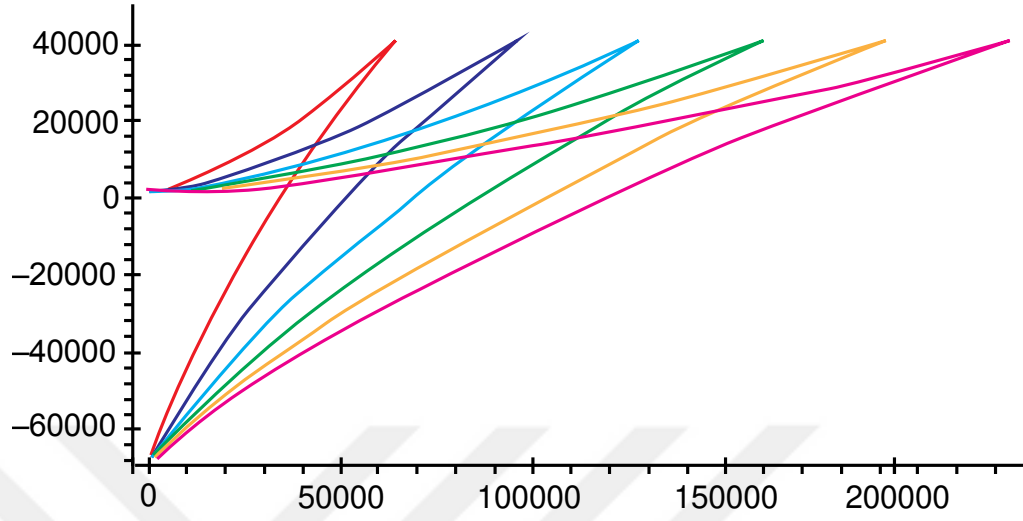
(2.55)-(2.57) probleminin çözümü

$$v(x, t) = \begin{cases} v_0(\xi) + 0.1(F'_{\omega}(0.1) - F_{\omega}(0.1))t, & \frac{x}{t} > D_1 \\ \int G(\frac{x}{t}) dx, & D_1 < \frac{x}{t} < D_2, \\ \left(0.8 - \frac{F_{\omega}(0.8)}{F'_{\omega}(0.8)}\right)x - F_{\omega}(0.8)\left(t - \frac{x}{F'_{\omega}(0.8)}\right) + c, & \frac{x}{t} < D_2 \end{cases} \quad (2.58)$$

şeklinde elde ederiz. Burada

$$D_1 = \frac{u(t)}{m} F'_{\omega}(0.1) D_2 = \frac{u(t)}{m} F'_{\omega}(0.8)$$

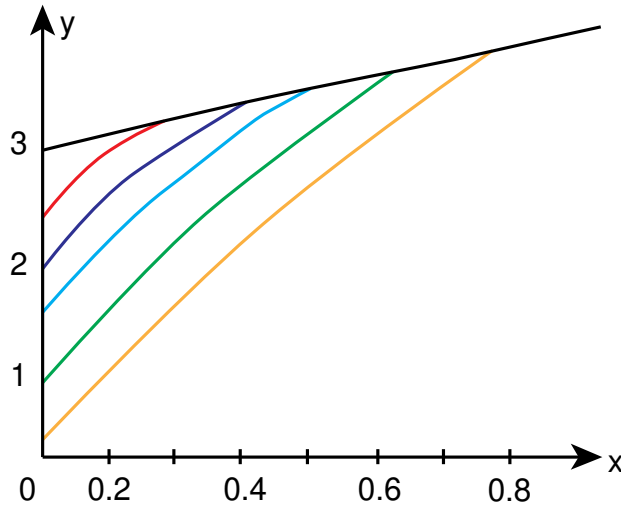
olmaktadır.



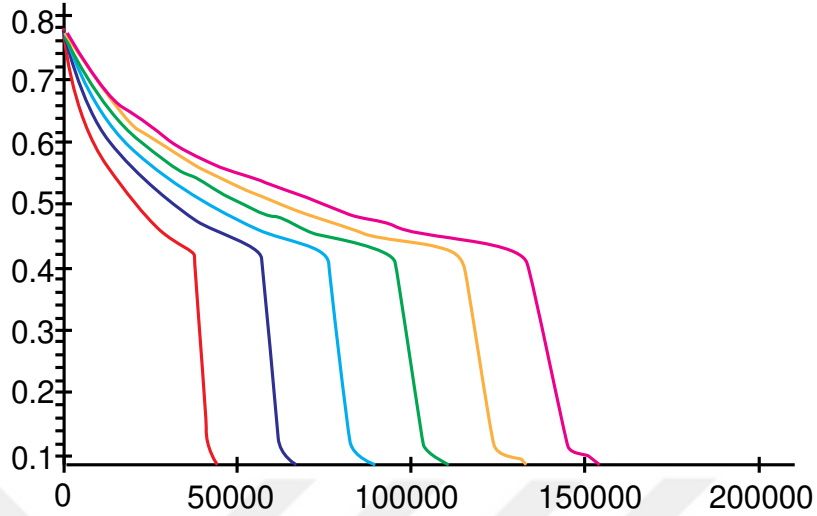
**Şekil 2.4**  $v(x, t)$  fonksiyonunun  $x$ 'e göre değişimi

$v(x, t)$  fonksiyonunun  $x$ 'e göre değişiminin grafiği zamanın farklı değerlerinde Şekil 2.4' de yer almıştır. Çözümde mevcut olan sıçrayışı kurmak için, enerji integralini

$$E(t) = \int_0^t (F_\omega(0.8) - F_\omega(0.1)) dt \quad (2.59)$$



**Şekil 2.5**  $v_{\text{gen}}(x, t)$  fonksiyonunun grafiği



**Şekil 2.6  $\sigma_{\text{gen}}(x, t)$  fonksiyonunun grafiği**

olarak tanımlayalım. Yukarıda olduğu gibi  $v(x, t)$  fonksiyonu için genişletilmiş çözümü

$$v_{\text{gen}}(x, t) = \begin{cases} v(x, t), & v < E(t), \\ E(t), & v \geq E(t) \end{cases} \quad (2.60)$$

şeklinde yazabiliriz. Teorem 2.1' e göre

$$\sigma_{\text{gen}}(x, t) = \frac{\partial v_{\text{gen}}(x, t)}{\partial x}$$

elde edilir. Şekil 2.5 ve 2.6' da sırasıyla  $v_{\text{gen}}(x, t)$  ve  $\sigma_{\text{gen}}(x, t)$  fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Şekil 2.6 dan görüldüğü üzere  $\sigma_{\text{gen}}(x, t)$  (2.48), (2.51) ve (2.52) probleminin zayıf çözümü dur ve bu fonksiyon tek değerlidir, lakin 1.tür sıçrayışa sahip bir fonksiyon olmaktadır. Çözümde bulunan sıçrayış dayanıklı olarak hareket eder ve sözkonusu sıçrayışın üzerinde  $\sigma_f \equiv \sigma(x_f, t) = 0.414$  değerini alır.  $\sigma_f$  nin bu değeri suyun petrolün yüzde kaçının kuyular sistemine sıkıştırıldığını göstermektedir. Elde edilen çözümü kullanarak istismarın diğer gösterigeleri, istismarın susuz devri, petrol verimi ve bu gibi değerler de hesaplanmıştır. Teorik olarak ele aldığımız verilerin istismarın pratik göstergeleri ile çakıştığı saptanmıştır.



## 2.4 Sıkışabilen Sıvıların Hareketinin Matematiksel Modeli

Buckley – Leverett modelinden farklı olarak, mikroskobik ortamda iki fazlı sıvıların tabakalı ortamdaki hareketi aşağıdaki

$$\frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\sigma_o}{\beta_o} \right) = \text{div} \left( \frac{k_o}{\mu_o \beta_o} \text{grad} p_o \right) + q_o, \quad (2.61)$$

$$\frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\sigma_\omega}{\beta_\omega} \right) = \text{div} \left( \frac{k_\omega}{\mu_\omega \beta_\omega} \text{grad} p_\omega \right) + q_\omega, \quad (2.62)$$

Muskat-Mires diferansiyel denklemler sistemi yardımı ile ifade edilmektedir, [39]. Burada,  $q_\ell = \sum_{\nu=1}^{N_\ell} Q_\ell^{(\nu)}(t) \delta(x - x_\nu) \delta(y - y_\nu)$ , ( $\ell = o, \omega$ ) sırasıyla petrol ve su debileri,  $\delta(x)$  Diract fonksiyonu,  $\beta_o$  ve  $\beta_\omega$  petrol ve su fazlarının hacimsel katsayıları,  $k_o$  ve  $k_\omega$  oransal faz geçirgenlikleri;  $\mu_o$  ve  $\mu_\omega$  petrol ve suyun viskoziteleri,  $N_o$  ve  $N_\omega$  petrol ve su kuyularının sayısı,  $Q_0^{(\nu)}$ , ( $\nu = \overline{1, N_o}$ ) ve  $Q_\omega^{(\mu)}$ , ( $\mu = \overline{1, N_\omega}$ ) petrol ve suyun hacimsel debileri,  $p_o(x, t)$ ,  $p_\omega(x, t)$ ,  $\sigma_o(x, t)$  ve  $\sigma_\omega(x, t)$  sırasıyla petrol ve su fazlarının basınçları ve doyma fonksiyonları olmaktadır.

(2.61) ve (2.62) denklemler sistemindeki bilinmeyenlerin sayısı dört olduğu için söz konusu sisteme

$$p_o - p_\omega = p_c(\sigma_\omega), \quad (2.63)$$

$$\sigma_o + \sigma_\omega = 1 \quad (2.64)$$

denklemlerini de ekleyelim. Burada  $p_c(\sigma_\omega)$  kapiler basıncı göstermektedir.

Petrol yatağının işlenmesi stratejisiyle uyumlu olarak (2.61)-(2.64) denklemler sistemine uygun başlangıç ve sınır koşulları ilave edilmektedir. (2.61)-(2.64) denklemler sisteminin çözümlerinin yeri önceden belli olmayan sıçrayış noktalarına sahip olmaları, söz konusu problemin çözümünün bulunmasında birçok zorluklar çıkarmaktadır.

Makroskobik akış durumunda kapiler basıncın etkisi ihmal edilir. Bu durumda (2.61)-(2.64) denklemler sisteminde  $p_c(\sigma_\omega) = 0$  olup, sıkışamayan sıvılar için gerçek çözümü ilk kez Buckley ve Leverett tarafından incelenmiştir, [15]. Bu denklemler sisteminin fiziki parametrelere göre ayrıklaştırılabilir olması, Buckley-Leverett metodunun en önemli tarafıdır.

Bu fikir sonradan Rapaport - Leas tarafından  $p_c(\sigma_\omega) \neq 0$  olduğu durum için de geliştirilmiştir, [44]. Böylece, ilk denklemi su ile doyma fonksiyonunun bulunması, ikinci denklemi ise basınç fonksiyonunun bulunması için olmak üzere (2.61)-(2.64) denklemler sistemi

$$\frac{m}{k} \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial t} = \text{div}(-\omega F_\omega(\sigma_\omega) + F_o(\sigma_\omega) p'_c(\sigma_\omega) \text{grad} \sigma_\omega), \quad (2.65)$$

$$\text{grad} p_\omega = - \left( \omega(t) F_\omega(\sigma_\omega) \frac{\mu_\omega}{k_\omega} + F_o(\sigma_\omega) \text{grad} p_c(\sigma_\omega) \right), \quad (2.66)$$

biçiminde iki denkleme parçalanmıştır. Burada  $F_\omega$  ve  $F_o$  Buckley - Leverett fonksiyonlarını göstermektedir.

Yukarıda söylendiği gibi (2.61)-(2.64) denklemler sistemindeki su ve petrol ile doyma fonksiyonları birinci tür süreksizlik noktalarına sahiptir. Dolayısıyla söz konusu denklemler sisteminin klasik çözümü mevcut olmamaktadır. Zayıf çözümü ise aşağıdaki gibi tanımlayalım

**Tanım 2.2** Başlangıç koşullarını koruyan ve  $C_{1,1}^{0,2}(R_+^2)$  sınıfından,  $f(x, T) = 0$  olan keyfi  $f(x, t)$  test fonksiyonu için

$$\int_R \left\{ \frac{m}{k} \frac{\sigma_o}{\beta_o} f_t + \frac{k_o}{\mu_o \beta_o} \frac{\partial p_o}{\partial x} f_x \right\} dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{k} \frac{\sigma_o(x, 0)}{\beta_o(p(x, 0))} f(x, 0) dx = 0, \quad (2.67)$$

$$\int_{R_+^2} \left\{ \frac{m}{k} \frac{\sigma_\omega}{\beta_\omega} f_t + \frac{k_\omega}{\mu_\omega \beta_\omega} \frac{\partial p_\omega}{\partial x} f_x \right\} dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{k} \frac{\sigma_\omega(x, 0)}{\beta_\omega(p(x, 0))} f(x, 0) dx = 0, \quad (2.68)$$

integral eşitliğini koruyan  $\sigma_0(x, t)$  ve  $\sigma_\omega(x, t)$  fonksiyonlarına (2.61)-(2.62) probleminin zayıf çözümü denir. Burada,  $R_+^2 = \{(x, t) \mid 0 \leq x < \infty, t > 0\}$  dır.

(2.67) ve (2.68) eşitliklerinden görüldüğü gibi bu durumda  $\sigma_0(x, t)$  ve  $\sigma_\omega(x, t)$  fonksiyonları süreksiz de olabilir. Fiziksel açıdan da açıktır ki,  $\frac{k_o}{\mu_o \beta_o} \frac{\partial p_o}{\partial x}$  ve  $\frac{k_\omega}{\mu_\omega \beta_\omega} \frac{\partial p_\omega}{\partial x}$  fonksiyonları sürekli fonksiyonlardır.

Buckley-Leverett metodu sıkışamayan sıvılar için uygulanmaktadır. Bu çalışmada sıkışabilen sıvılar için (2.61)-(2.64) denklemler sisteminin fiziksel parametrelere göre ayrıklaştırılması ve ele alınan denklemler sisteminin süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal

çözümünün bulunması için yeni bir yöntem önerilecektir. Sadelik için önce bir boyutlu durumu inceleyeceğiz.

#### 2.4.1 Denklemler Sisteminin Fiziksel Parametrelere Göre Ayırıklaştırılması

Sıkışabilen sıvıların bir boyutlu hareketlerini göz önüne alalım. Basıncı  $p(x,0) = p_0$  olan tabakalı ortamın  $x=0$  noktasından tabakalı ortama  $q_\omega(t)$  hacminde su basıldığını ve istismar zamanına kadar yataktaki kalık su oranının  $\sigma_\omega^{(0)}$  olduğunu varsayalım. Bu koşullar çerçevesinde (2.61), (2.62) denklemler sistemi

$$\frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\sigma_o}{\beta_o} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_o}{\mu_o \beta_o} \frac{\partial p_o}{\partial x} \right), \quad (2.69)$$

$$\frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\sigma_\omega}{\beta_\omega} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_\omega}{\mu_\omega \beta_\omega} \frac{\partial p_\omega}{\partial x} \right) \quad (2.70)$$

denklemler sistemine dönüşür. (2.69), (2.70) denklemler sistemi için başlangıç ve sınır koşulları

$$\sigma_\omega(x,0) = \sigma_\omega^{(0)}, \quad \sigma_o(x,0) = 1 - \sigma_\omega^{(0)}, \quad (2.71)$$

$$\sigma_\omega(0,t) = \sigma_\omega^{(1)}(t), \quad \sigma_o(0,t) = \sigma_o^{(1)}(t). \quad (2.72)$$

$$\frac{k_\omega}{\mu_\omega \beta_\omega} \frac{\partial p_\omega(0,t)}{\partial x} = -q_\omega(t), \quad \frac{k_o}{\mu_o \beta_o} \frac{\partial p_o(0,t)}{\partial x} = 0 \quad (2.73)$$

olmaktadır.

$A(\cdot)$  ile  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$  operatörünü gösterelim ve (2.69), (2.70) denklemlerine  $A^{-1}$

operatörünü uygularsak

$$\frac{m}{k} \frac{\partial \mathcal{G}_o(x,t)}{\partial t} = \frac{k_o}{\mu_o \beta_o} \frac{\partial p_o(x,t)}{\partial x}, \quad (2.74)$$

$$\frac{m}{k} \frac{\partial \mathcal{G}_\omega(x,t)}{\partial t} = \frac{k_\omega}{\mu_\omega \beta_\omega} \frac{\partial p_\omega(x,t)}{\partial x} + q_\omega(t) \quad (2.75)$$

elde ederiz. Burada

$$\mathcal{G}_o(x,t) = \int_0^x \frac{\sigma_o(\xi,t)}{\beta_o} d\xi \quad \text{ve} \quad \mathcal{G}_\omega(x,t) = \int_0^x \frac{\sigma_\omega(\xi,t)}{\beta_\omega} d\xi$$

dır. (2.40) ü dikkate alarak (2.74) ve (2.75) den

$$\frac{\partial p_{\omega}}{\partial x} = \frac{\mu_{\omega} \beta_{\omega}}{k_{\omega}} F_{\omega}(\sigma_{\omega}) \left[ \frac{m}{k} \frac{\partial(\mathcal{G}_o + \mathcal{G}_{\omega})}{\partial t} - q_{\omega} \right] - F_o(\sigma_{\omega}) \frac{\partial p_c(\sigma_{\omega})}{\partial x} \quad (2.76)$$

elde ederiz. Burada

$$F_{\omega}(\sigma, \omega) = \frac{\frac{k_{\omega}}{\mu_{\omega} \beta_{\omega}}}{\frac{k_0}{\mu_0 \beta_0} + \frac{k_{\omega}}{\mu_{\omega} \beta_{\omega}}}, \quad F_o(\sigma, \omega) = \frac{\frac{k_o}{\mu_o \beta_o}}{\frac{k_o}{\mu_o \beta_o} + \frac{k_{\omega}}{\mu_{\omega} \beta_{\omega}}}, \quad (2.77)$$

Buckley-Leverett fonksiyonları olmaktadırlar. (2.76) ifadesi (2.77) de yerine konursa

$$\begin{aligned} \frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \frac{\sigma_{\omega}(\xi, t)}{\beta_{\omega}} d\xi = F_{\omega}(\sigma_{\omega}) \left[ -q_{\omega}(t) + \frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \left( \frac{1}{\beta_{\omega}} - \frac{1}{\beta_o} \right) x \sigma_{\omega}(\xi, t) d\xi + \frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \frac{d\xi}{\beta_o} \right] \\ - \frac{k_{\omega}}{\mu_{\omega} \beta_{\omega}} F_o(\sigma_{\omega}) \frac{\partial p_c(\sigma_{\omega})}{\partial x} + q_{\omega} \end{aligned} \quad (2.78)$$

ifadesi alınır. Böylelikle (2.69), (2.70) diferansiyel denklemler sistemi iki denkleme parçalanır. Birincisi su ile doyma fonksiyonuna göre (2.76) denklemi, diğeri ise su fazındaki basınç fonksiyonu için (2.78) denklemdir.

Bazı durumlarda tabakalı ortamın jeolojik yapısı ve bununla ilgili olarak ortamdaki sıvının hızı öyle bir değere ulaşır ki, kapiler basıncın etkisi kalmaz, yani  $p_c(\sigma_{\omega}) = 0$  olur. Bu durumda (2.76), (2.78) denklemleri

$$\frac{\partial p_{\omega}}{\partial x} = \frac{\mu_{\omega} \beta_{\omega}}{k_{\omega}} F_{\omega}(\sigma_{\omega}) \left[ \frac{m}{k} \frac{\partial(\mathcal{G}_o + \mathcal{G}_{\omega})}{\partial t} - q_{\omega} \right], \quad (2.79)$$

$$\frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \frac{\sigma_{\omega}(\xi, t)}{\beta_{\omega}} d\xi = F_{\omega}(\sigma_{\omega}) \left[ -q_{\omega}(t) + \frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \frac{d\xi}{\beta_o} + \frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \left( \frac{1}{\beta_{\omega}} - \frac{1}{\beta_o} \right) \sigma_{\omega}(\xi, t) d\xi \right] + q_{\omega} \quad (2.80)$$

şeklini alır.

Böylelikle (2.69)-(2.73) denklemlerini (2.79), (2.80) yardımcı denklemler sistemine indirgemiş olduk. Bu denklemler sistemi için başlangıç koşul (2.71) olmaktadır. (2.79), (2.80) denklemler sisteminin uygun başlangıç ve sınır koşulları çerçevesinde ya regüler zayıf çözümü ya da klasik çözümü mevcut olabilir. Burada (2.80)  $\sigma_\omega(x, t)$  bilinmeyen fonksiyonu için integro-diferansiyel denkleme dönüşür.

## 2.5 Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Farklar Metodu

Yukarıdaki bölümlerde iki fazlı sıvıların tabakalı ortamdaki hareketinin matematiksel modelini yazarken ele aldığımız (2.79) denklemi ve (2.80) denklemlerinin sırasıyla nonlinear birinci basamaktan ve ikinci basamaktan denklemler olduğunu gördük ve onların gerçek çözümlerini genelde elde etmede belli zorluklarla karşılaşmaktadır. Bu nedenle bu tür denklemler için yazılmış problemler nümerik yöntemler vasıtasıyla çözülür. Ayrıca denklemlerde bulunan özellikler literatürde iyi bilinen klasik yöntemlerin uygulanmasında zorluklar çıkarmaktadır. Bu tür problemlerin nümerik çözümlerinin bulunması özel yöntemler oluşturulmasını talep eder.

Süreksiz fonksiyonlar sınıfında çalışma zorunluluğu da süreksiz fonksiyonlar sınıfında nümerik çözümlerin üretilmesini gerektirir.

Diferansiyel denklemlerin çözümü için uygulanan nümerik yöntemlerin en geneli sonlu farklar yöntemidir. Diferansiyel problemlerin sonlu farklar yöntemiyle çözümünün temelini söz konusu diferansiyel problemin diskritleştirilmesi, elde edilmiş nonlinear cebirsel denklemler sisteminin çözümü için hassas algoritmaların üretilmesi ve sayısal çözümlerin gerçek çözümlere yakınsaklığı problemlerinin incelenmesi oluşturur.

(2.21) cinsinden olan denklemlerin gerçek çözümlerini incelerken gördük ki, başlangıç veriler sürekli olsa bile denklemin çözümünde sonlu bir zaman diliminden sonra yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktaları oluşturmaktadır. Bu denklemlere direkt sonlu farklar yöntemini uygulamaya zorluk çıkarır. Sonlu farklar yöntemini uygulamak için argümanın sürekli değiştiği bölgeyi diskritleştirmek (buna ağ denir) gerekmektedir, sonra ise bu ağın doğru noktalarında diferansiyel problemi diskritleştirmek gerekir.

Şimdi (2.79), (2.80) denklemler sisteminin çözümü için efektif sonlu fark yöntemi geliştirelim. Söz konusu problemin çözüm algoritmasını geliştirmek için öncelikle  $R_+^2$  bölgesini aşağıdaki ağ ile örtelim

$$\Omega_{h,\tau} = \{(x_i, t_k), x_i = ih; t_k = k\tau, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots; h > 0, \tau > 0\}.$$

Burada,  $h$  ve  $\tau$   $\Omega_{h,\tau}$  ağının sırasıyla  $x$  ve  $t$  değişkenlerine göre adımlarını göstermektedir.

Önce kapilyer basıncın sıfır olduğunu varsayalım, yani  $p_c(\sigma_\omega) = 0$  olduğu durumu inceleyelim. Bunun için (2.79), (2.80) denklemlerinin içerdiği  $t$  ye göre türevin altındaki integralin sonlu fark karşılığını aşağıdaki şekilde

$$\int_0^x \frac{\sigma_\omega(\xi, t)}{\beta_\omega(p(\xi, t))} d\xi \cong h \sum_{j=1}^i \frac{\Sigma_{oj}}{B_{oj}} \quad (2.81)$$

olarak yazalım. (2.79) denklemi için iki tür sonlu fark karşılığı yazmak mümkündür:

### 2.5.1 Aşık sonlu fark karşılığı

Bu bölümde biz önce (2.80) denklemi için  $\Omega_{h,\tau}$  ağının  $(x_i, t_k)$  noktasında aşağıdaki sonlu fark karşılığını

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{oi} = & \left[ \frac{1}{\hat{B}_{oi}} - F_\omega(\Sigma_{oi}) \left( \frac{1}{\hat{B}_{oi}} - \frac{1}{B_{0i}} \right) \right]^{-1} \left\{ \frac{\Sigma_{oi}}{B_{oi}} + \frac{\tau}{h} \frac{k}{m} q_\omega(t_k) F_0(\Sigma_{oi}) + F_\omega(\Sigma_{oi}) \right\} \\ & \left[ \sum_{j=1}^i \left( \frac{1}{\hat{B}_{0j}} - \frac{1}{B_{0j}} \right) + - \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{\hat{\Sigma}_{oj}}{\hat{B}_{oj}} - \frac{\Sigma_{oj}}{B_{oj}} \right) \right] \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{\hat{\Sigma}_{oj}}{\hat{B}_{oj}} - \frac{\hat{\Sigma}_{oj}}{\hat{B}_{0j}} \right) - \sum_{j=1}^i \left( \frac{\Sigma_{oj}}{B_{oj}} - \frac{\Sigma_{oj}}{B_{0j}} \right) \end{aligned} \quad (2.82)$$

yazalım. Burada,  $\Sigma_{oi}$ ,  $B_{oi}$  ve  $B_o$  sırasıyla  $\sigma_\omega(x, t)$ ,  $\beta_\omega$  ve  $\beta_o$  fonksiyonlarının  $(x_i, t_i)$  noktasındaki yaklaşık değerleri olmaktadır. (2.82) sonlu fark karşılığı ağın adımları üzerinde belli bir koşul (Courant-Friedrichs-Levy koşulu) talep etmektedir.

### 2.5.2 Aşık olmayan sonlu fark karşılığı

Bu durumda (2.80) denkleminin sağ tarafı  $t = t_{k+1}$  zaman katında

$$\hat{\Sigma}_{oi} = \left[ \frac{1}{\hat{B}_{oi}} - F_\omega(\Sigma_{oi}) \left( \frac{1}{\hat{B}_{oi}} - \frac{1}{B_0} \right) \right]^{-1} \left\{ \frac{\Sigma_{oi}}{B_{oi}} + \frac{\tau}{h} \frac{k}{m} q_\omega(t_{k+1}) F_o(\hat{\Sigma}_{oi}) + F_\omega(\hat{\Sigma}_{oi}) \right\}$$

$$\left[ \sum_{j=1}^i \left( \frac{1}{\hat{B}_{oj}} - \frac{1}{B_{oj}} \right) + \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{\hat{\Sigma}_{oj}}{\hat{B}_{oj}} - \frac{\hat{\Sigma}_{oj}}{\hat{B}_{oj}} \right) - \sum_{j=1}^i \left( \frac{\Sigma_{oj}}{B_{oj}} - \frac{\Sigma_{oj}}{B_{oj}} \right) \right] - \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{\hat{\Sigma}_{oj}}{\hat{B}_{oj}} - \frac{\Sigma_{oj}}{B_{oj}} \right) \right\} \quad (2.83)$$

biçiminde sonlu farklara ayrıklaştırılır. Bilinmeyen  $\hat{\Sigma}_{oi}$  ler için nonlinear cebirsel denklem sistemi oluşturulur ve söz konusu bilinmeyenleri elde etmek için Newton iterasyon yöntemi uygulanır.

Şimdi ise  $p(x, t)$  fonksiyonunu elde etmek için algoritmalar oluşturalım. Bu amaçla (2.79) denklemini

$$\frac{\partial p_{\omega}}{\partial x} = \tilde{F}_{\omega}(\sigma_{\omega}) \times \left\{ \frac{m}{k} \int_0^x [C'(p) + B'(p)\sigma_{\omega}(\xi, t)] \frac{\partial p}{\partial t} d\xi + \frac{m}{k} \int_0^x B(p) \frac{\partial \sigma_{\omega}(\xi, t)}{\partial t} d\xi - q_{\omega} \right\} \quad (2.84)$$

olarak yazalım. Burada

$$\tilde{F}_{\omega}(\sigma_{\omega}) = \left( \frac{\mu_{\omega} \beta_{\omega}}{k_{\omega}} \right) F_{\omega}(\sigma_{\omega}), \quad B(p) = \frac{1}{\beta_{\omega}(p)} - \frac{1}{\beta_o(p)},$$

$$C(p) = \frac{1}{\beta_o(p)}, \quad C'(p) = \frac{dC(p)}{dp} \quad \text{ve} \quad B'(p) = \frac{dB(p)}{dp}$$

olmaktadır. (2.84) denklemini aşağıdaki gibi sonlu farklara ayrıklaştıralım

$$\begin{aligned} \hat{\wp}_i &= \wp_i + \left\{ \frac{m}{k} \frac{h}{\tau} \tilde{F}_{\omega}(\Omega_i^{(\omega)}) [\overline{C'}(\wp_i) + \overline{B'}(\wp_i) \Omega_i^{(\omega)}] \right\}^{-1} \times \\ &\left\{ \frac{\wp_{i+1} - \wp_{i-1}}{2h} - \frac{m}{k} \frac{h}{\tau} \tilde{F}_{\omega}(\Omega_i^{(\omega)}) \sum_{j=1}^{i-1} [\overline{C'}(\wp_j) + \overline{B'}(\wp_j) \Omega_j^{(\omega)}] (\hat{\wp}_j - \wp_j) \right. \\ &\left. - \frac{m}{k} \frac{h}{\tau} \tilde{F}_{\omega}(\Omega_i^{(\omega)}) \sum_{j=1}^i \overline{B}(\wp_i) [\tilde{\Omega}_j^{(\omega)} - \Omega_j^{(\omega)}] + \tilde{F}_{\omega}(\Omega_i^{(\omega)}) q_{\omega}(t_k) \right\}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

(2.85) denklemi için başlangıç koşulu

$$\wp_{i,0} = p_0(x_i) \quad (2.86)$$

olmaktadır. (2.83), (2.85) nonlinear cebirsel denklemler sistemini Newton iterasyon yöntemi ile çözerek bilinmeyenleri ağın herhangi düğüm noktalarında elde edebiliriz.  $p_c(\sigma_w) \neq 0$  olduğu durum da benzer şekilde sonlu farklara ayrıklaştırılabilir.

## 2.6 Petrolün Kimyasal Aktif Sıvılar Yardımıyla Sıkıştırılması

Petrolün su ile sıkıştırılması sürecinde yüzeysel gerginliği azaltmak için suya bazı kimyasal aktif katkıları karıştırılır ki, bu da petrol verimliliğini artırır. Böyle karışımlar tabakalı ortamı hem fiziksel, hem de kimyasal etkiler. Böyle problemlere hidro-gaz dinamiğinin birçok alanlarında rastlanmaktadır. Böyle problemlerde tabakalı ortamda sıvıların birlikte hareketi esnasında kimyasal aktif sıvıların petrole gösterdiği etki ile onlar arasındaki kimyasal etkileşim de dikkate alındığından, bunlar yeteri kadar zor nolineer kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi yardımı ile ifade edilmektedir.

Literatürden bilindiği üzere kimyasal etkilenen iki fazlı sıvının tabakalı bir boyutlu ortamda hareket dinamiğini ifade eden denklemlerin matematiksel modeli,  $s(x,t)$  ve  $c(x,t)$  sırasıyla su ile doyma ve konsantrasyon fonksiyonları olmak üzere, aşağıdaki gibi birinci mertebeden nolineer hiperbolik

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial F_1(s,c)}{\partial x} = 0, \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial G_2(s,c)}{\partial t} + \frac{\partial F_2(s,c)}{\partial x} = 0 \quad (2.82)$$

denklemler sistemi için yazılmış

$$s(x,0)=s_0(x), \quad c(x,0)=c_0(x), \quad (2.83)$$

$$s(0,t)=s_1(x), \quad c(0,t)=c_1(t) \quad (2.84)$$

başlangıç-sınır değer problemi ile ifade edilmektedir, [21]. (Geniş bilgi için Oran E. Boris J. “Numerical Simulation of Reactive Flow, Elsevier, New York, 1987” kitabına bakılabilir.)

Burada  $F_1(s,c)$ ,  $F_2(s,c)$ ,  $G_2(s,c)$  aşağıdaki gibi tanımlanan ve bilinen fonksiyonlar

$$F_1(s,c) \equiv F(s,c) = \frac{\frac{k_\omega(s,c)}{\mu_\omega(c)}}{\frac{k_\omega(s,c)}{\mu_\omega(c)} + \frac{k_o(s,c)}{\mu_o(c)}},$$

$$G_2(s,c) = ms(x,t)c(x,t) + m(1-s(x,t))\varphi(c) + a(c),$$



$$F_2(s, c) = F_1 c(x, t) + (1 - s(x, t))\varphi(c)$$

ve  $s_i, c_i$  ( $i = 0, 1$ ) fonksiyonları kendi argümanlarına göre bilinen fonksiyonlardır ve  $(G_2)'_s(s, c), (G_2)'_c(s, c)$  sıfırdan farklı ve sınırlı olmaktadır.  $k_\omega(s, c), k_\omega(s, c)$  sırasıyla su ve petrolün oransal faz geçirgenliği,  $a = a(c)$  ve  $\varphi = \varphi(c)$  ise sırasıyla su ve petroldeki kimyasal aktif maddenin hacimsel konsantrasyonunu göstermektedir.  $F(s, c)$  toplam sıvı hacimdeki su fazının oranı olmaktadır. Kimyasal aktif maddenin terkibi ve kalitesine göre  $F, a, \varphi$  fonksiyonları  $c$  ve  $s$  ya bağlı özel olarak seçilir. (2.81)- (2.84) probleminin çözümünü yalnız ve yalnız sayısal metotlar yardımı ile bulmak mümkündür. Yukarıda altını çizdiğimiz gibi  $s(x, t), c(x, t)$  fonksiyonları yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarına sahiptir. Dolayısıyla (2.81)-(2.84) başlangıç-sınır değer probleminin zayıf çözümünü [53] deki gibi tanımlayalım.

**Tanım 2.3** (2.83), (2.84) koşullarını ve  $\varphi(x, T) = 0$  şartını sağlayan herhangi  $\varphi(x, t)$  test fonksiyonları için aşağıdaki

$$\iint_{R_+^2} [s \varphi_t + F_1(s, c) \varphi_x] dx dt + \int_0^\infty s_0(x) \varphi(x, 0) dx + \int_0^T f_1(s_1, c_1) \varphi(0, t) dt = 0, \quad (2.85)$$

$$\iint_{R_+^2} [G_2(s, c) \varphi_t + F_2(s, c) \varphi_x] dx dt + \int_0^\infty c_0(x) \varphi(x, 0) dx + \int_0^T f_2(s_1, c_1) \varphi(0, t) dt = 0, \quad (2.86)$$

integral eşitliklerini koruyan  $s(x, t)$  ve  $c(x, t)$  fonksiyonlarına (2.81)-(2.84) probleminin zayıf çözümü denir.

Tanım 2.3'ten görüldüğü gibi, bu durumda  $s(x, t)$  ve  $c(x, t)$  fonksiyonları süreksiz de olabilir. Yeri önceden bilinmeyen süreksizlik noktalarının varlığı, (2.81)-(2.84) probleminin de sayısal çözümünün bulunması için mevcut olan klasik çözüm yöntemlerinin uygulanmasında zorluklara neden olmaktadır.

(2.81)-(2.84) probleminin sayısal çözümünün bulunması için yukarıda önerilen yöntemi takip ederek aşağıdaki 2.tür yardımcı problemi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x s(\xi, t) d\xi + F_1(s(x, t), c(x, t)) = F_1(s_1, c_1), \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x G_2(s(\xi, t), c(\xi, t)) d\xi + F_2(s(x, t), c(x, t)) = F_2(s_1, c_1) \quad (2.88)$$

şeklinde yazalım.

(2.87) ve (2.88) denklemlerinden görüldüğü gibi, burada da  $s(x, t)$  ve  $c(x, t)$  ve hatta  $G_2(s(\xi, t), c(\xi, t))$  fonksiyonları süreksiz olabilirler.

### 2.6.1 Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümler

(2.83) başlangıç koşulları çerçevesinde (2.87) ve (2.88) denklemler sisteminin çözümünü bulmak için söz konusu problemi çeşitli yollarla sonlu farklara ayırklaştırmak mümkündür.

#### a) Aşıkır Şema

$$\hat{\Sigma}_i = \Sigma_i + \frac{\tau}{h} F_1(\sigma_1(t_k), c_1(t_k)) - \frac{\tau}{h} F_1(\Sigma_i, C_i) - \sum_{j=1}^{i-1} (\hat{\Sigma}_i - \Sigma_i), \quad (2.89)$$

$$\hat{C}_i = C_i + \left\{ \frac{\tau}{h} F_2(\sigma_1(t_k), c_1(t_k)) - \frac{\tau}{h} F_2(\Sigma_i, C_i) - \sum_{j=1}^{i-1} [\psi_2(\hat{\Sigma}_j, \hat{C}_j) - \psi_2(\Sigma_j, C_j)] - \right.$$

$$\left. \psi'_{2\sigma}(\tilde{\Sigma}_i, \tilde{C}_i)(\hat{\Sigma}_i - \Sigma_i) \right\} \left( \psi'_{2c}(\tilde{\Sigma}_i, \tilde{C}_i) \right)^{-1} \quad (2.90)$$

#### b) Aşıkır Olmayan Şema

$$\hat{\Sigma}_i = \Sigma_i + \frac{\tau}{h} F_1(\sigma_1(t_k), c_1(t_k)) - \frac{\tau}{h} F_1(\hat{\Sigma}_i, \hat{C}_i) - \sum_{j=1}^{i-1} (\hat{\Sigma}_i - \Sigma_i), \quad (2.91)$$

$$\hat{C}_i = C_i + \left\{ \frac{\tau}{h} F_2(\sigma_1(t_k), c_1(t_k)) - \frac{\tau}{h} F_2(\hat{\Sigma}_i, \hat{C}_i) - \sum_{j=1}^{i-1} [\psi_2(\hat{\Sigma}_j, \hat{C}_j) - \psi_2(\Sigma_j, C_j)] - \right.$$

$$\left. \psi'_{2\sigma}(\tilde{\Sigma}_i, \tilde{C}_i)(\hat{\Sigma}_i - \Sigma_i) \right\} \left( \psi'_{2c}(\tilde{\Sigma}_i, \tilde{C}_i) \right)^{-1} \quad (2.92)$$

(2.91), (2.92) cebirsel denklemler sistemi  $\hat{\Sigma}_j$  ve  $\hat{C}_j$  bilinmeyenlerine göre nonlineer olmaktadır. Söz konusu bilinmeyenleri bulmak için Newton iterasyon metodu uygulanabilir. (2.91), (2.92) denklemler sistemi

$$\Sigma_i^0 = \sigma_0(x_i), \quad C_i^0 = C_0(x_i) \quad (2.93)$$

başlangıç şartları çerçevesinde çözülecektir.

### 2.6.2. Bilgisayar Deneyleri

(2.89), (2.90) ve (2.93) algoritması kullanılarak bir dizi bilgisayar testleri yapılmıştır. (2.81), (2.82) denklemlerine dahil olan  $F(s, c)$ ,  $a = a(c)$  ve  $\varphi = \varphi(c)$  fonksiyonları ele aldığımız bu zor problemin tüm fiziksel özelliklerini ifade edebilirler.

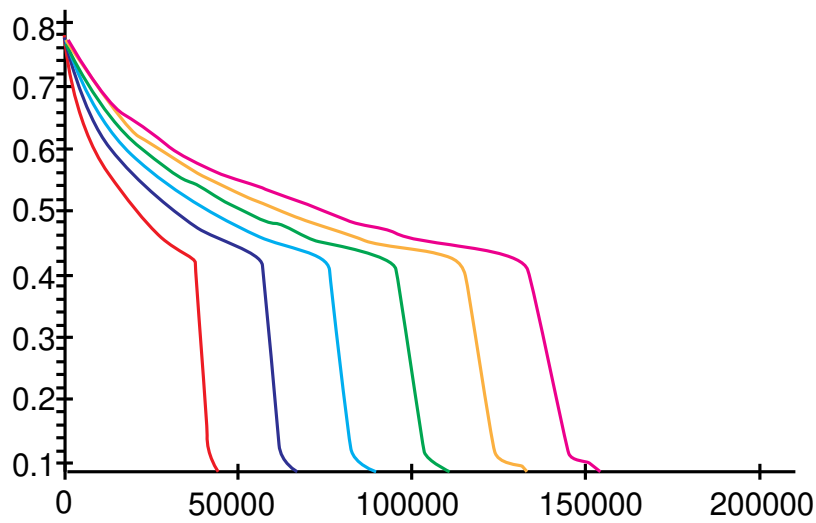
Yüzeysel aktif sıvılar genelde fazlar arası gerginliği etkilediğinden bu durumda  $\mu_H$  ve  $\mu_o$ 'ı sabit olarak kabul edebiliriz. Aşağıdaki fiziksel veriler çerçevesinde

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 0.2, & c_0 &= 0, & \sigma_1 &= 1.0, & c_1 &= 1.0, \\ \mu_o &= 1, & \mu_\omega &= 3, & m &= 0.2, & \varphi &= \varphi(c) = 0. \end{aligned}$$

Absorbsiyon izotermi olarak

- a)  $a(c) = 0.5c$  (Henri izotermi),
- b)  $a(c) = \frac{0.1c}{1+0.1c}$  (Lengmyur izotermi),
- c)  $a(c) = 0$

kullanılmıştır.



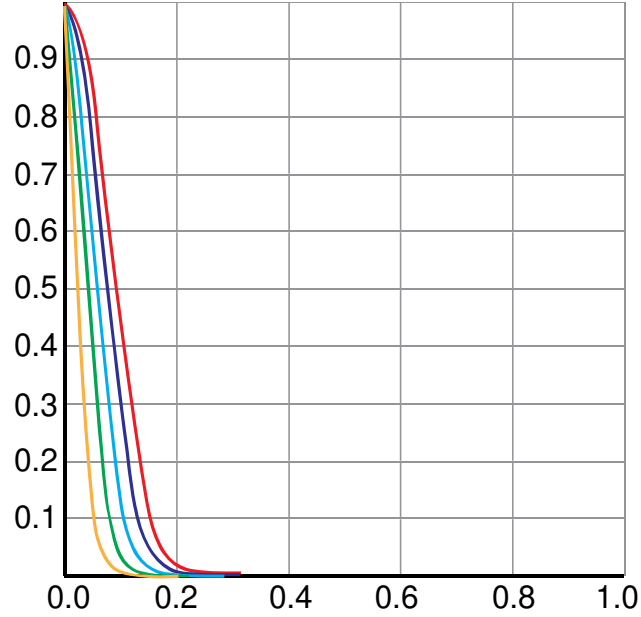
Şekil 2.7 Henri izotermi için su ile doyma fonksiyonunun dağılımı

Ayrıca, oransal faz geçirgenlikleri

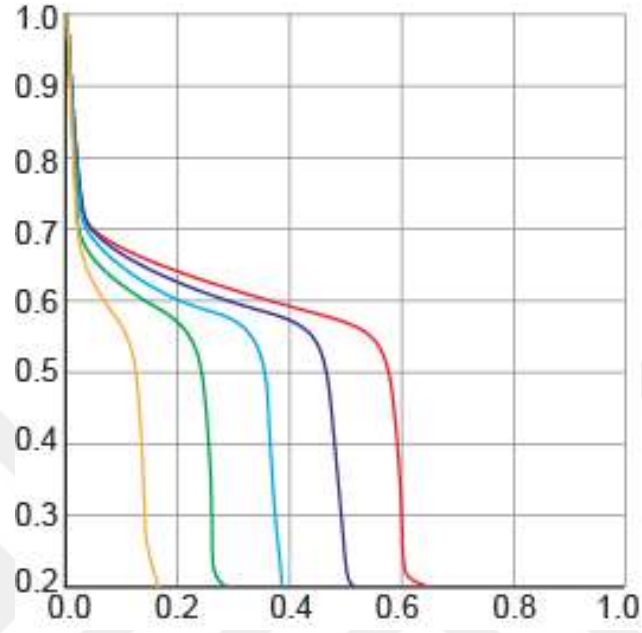
$$k_{\omega}(\sigma, c) = \begin{cases} 0, & \sigma \leq 0.2, \\ \left(\frac{\sigma - 0.2}{0.8}\right)^3 \frac{\ell}{\ell + a(c)}, & 0.2 \leq \sigma \leq 1, \end{cases}$$

$$k_o(\sigma, c) = \begin{cases} \left(\frac{0.8 - \sigma}{0.6}\right)^3, & 0 \leq \sigma \leq 0.8, \\ 0, & \sigma \geq 0.8 \end{cases}$$

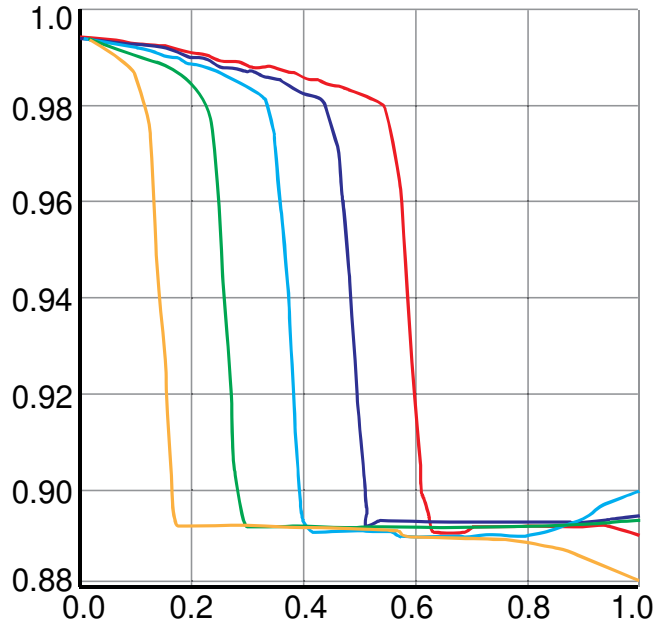
dır ve toplam filtrasyon hızı  $w(t) = 3.016 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s}$ ,  $\ell = 5.0$  olarak ele alınmıştır. Hesaplama işlemleri yapılmadan önce denklemler sisteminde boyutsuz duruma getirilmiştir. Bilgisayar testlerinin sonuçları Şekil 2.7- 2.13' de gösterilmiştir.



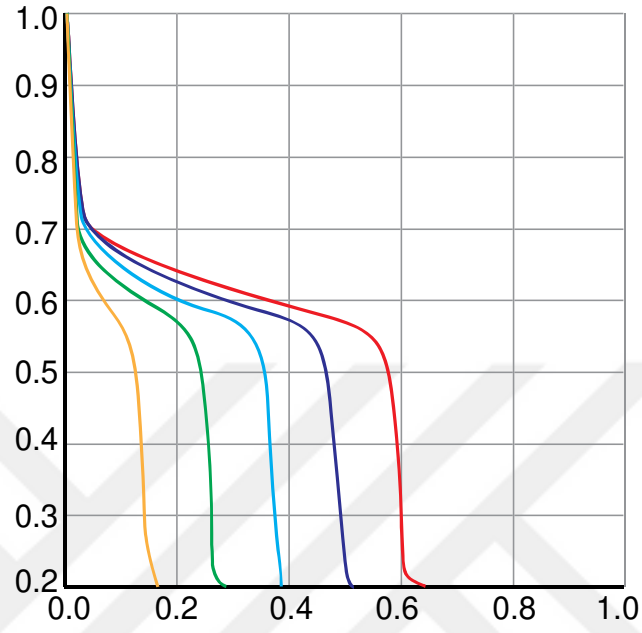
**Şekil 2.8 Henry izotermi için konsantrasyon fonksiyonunun dağılımı**



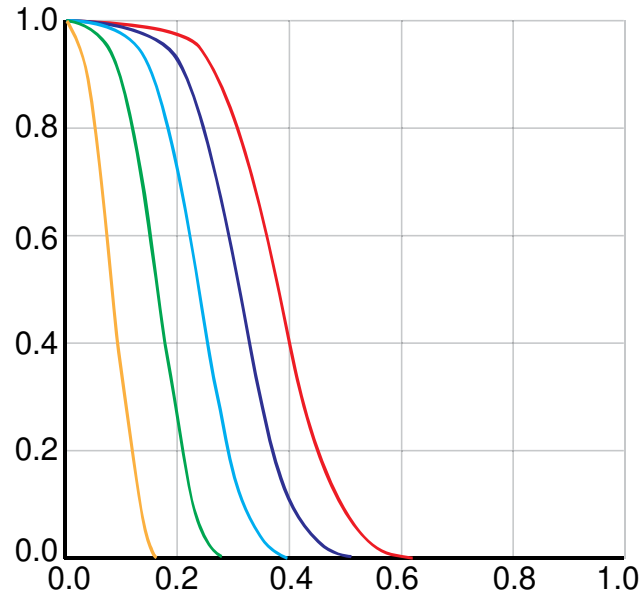
**Şekil 2.9 Lengmyr izotermi için su ile doyma fonksiyonunun dağılımı**



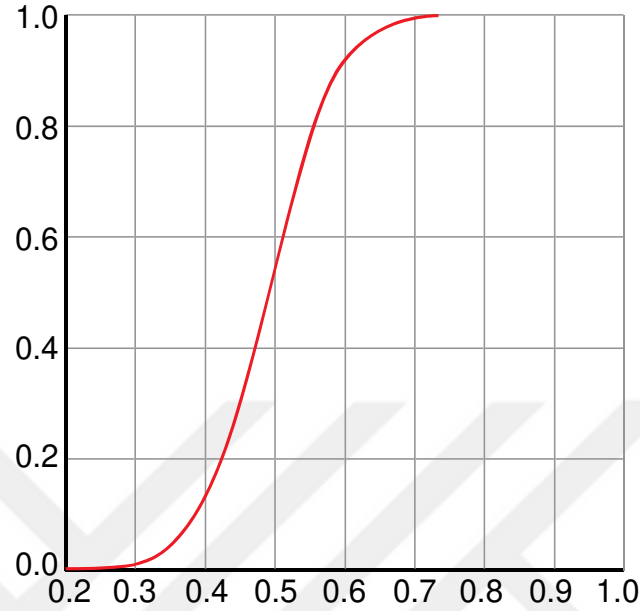
**Şekil 2.10 Lengmyr izotermi için konsantrasyon fonksiyonunun dağılımı**



Şekil 2.11  $a(c) = 0$  için su ile doyma fonksiyonunun dağılımı



Şekil 2.12  $a(c) = 0$  için su ile doyma fonksiyonunun dağılımı



Şekil 2.13 Buckley-Leverett fonksiyonunun karakteristik dağılımı

### 2.6.3 Petrolün $CO_2$ Karışımli Su İle Sıkıştırılması

$CO_2$  nin petrolde çözülmesi sonucunda fazların sınırında yüzeysel gerilim kuvveti azalır ve bu da suyun viskozitesini artırarak petrolün tabakalı ortamdan çıkarılması prosesini iyileştirir. Bu olayı ifade eden denklemler sistemi yine de (2.81), (2.82) olmaktadır. Bu denklemler sistemine

$$\sigma_0 = 0.2, \quad \sigma_1 = 1.0, \quad c_1 = \begin{cases} 1.0, & 0 \leq t \leq T^0 \\ 0, & t \geq T^0 \end{cases},$$

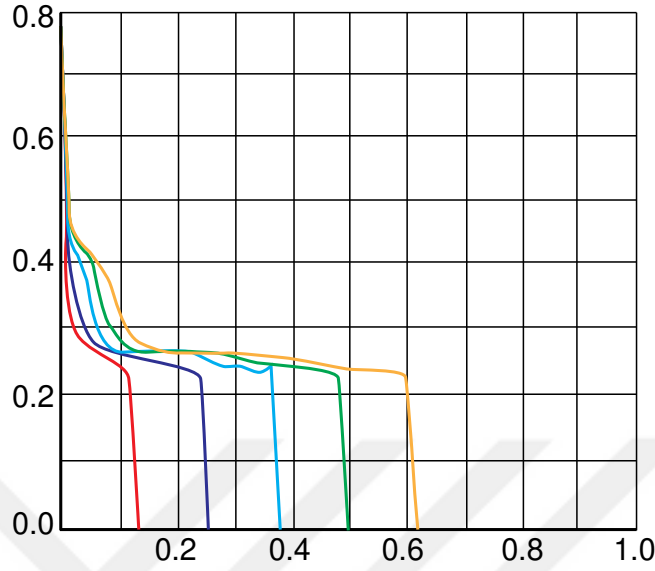
$$c(0, x) \equiv c_0 = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

koşullarını ekleyeceğiz. Burada,  $T^0$  birimsiz bir sayı olmakla birlikte  $CO_2$  karıştırılmış ara su katının yatağa pompalanma süresini gösterir. Hesaplamalar  $a(c) = 0$ ,  $CO_2$  nin dağılım izotermi Henri kuralı ile, yani  $\varphi(c) = 2c$ , suyun ve petrolün viskoziteleri sırasıyla

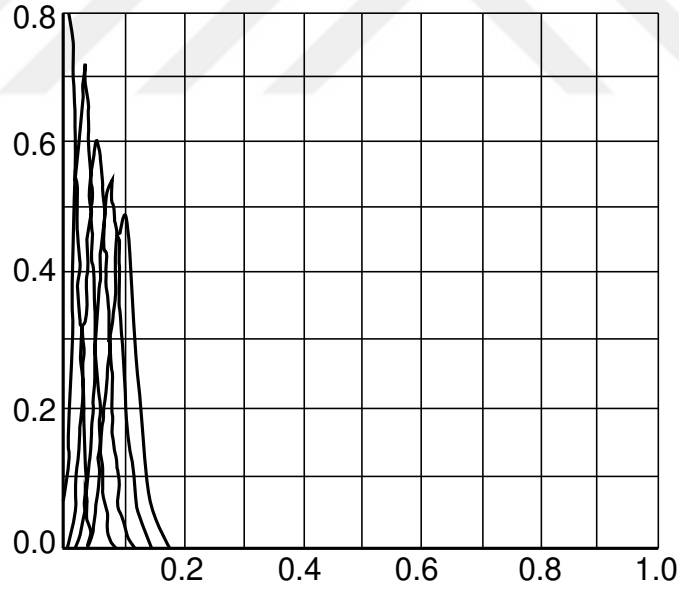
$$\mu_o(c) = 1 + 0.55 \frac{c}{c^*} - \left( \frac{c}{c^*} \right)^2, \quad \mu_w(c) = 14.6 + 14.7 \frac{c}{c^*} + 5.5 \left( \frac{c}{c^*} \right)^2, \quad c^* = 0.086,$$

$$k_o = \left( \frac{\sigma - 0.2}{0.8} \right)^3, \quad k_w(\sigma, \varphi) = (k_2^1 - k_2^0) \frac{\varphi}{\varphi^*} + k_2^0,$$

$$k_2^0 = \left( \frac{0.74 - \sigma}{0.3655} \right)^3, \quad k_2^1 = \left( \frac{0.8 - \sigma}{0.58} \right)^3, \quad \varphi^* = 0.172$$



**Şekil 2.14 Kimyasal aktif sıvı ile petrolün sıkıştırılması sürecinde su ile doyma fonksiyonunun dağılımı**



**Şekil 2.15 Kimyasal aktif sıvı ile petrolün sıkıştırılması sürecinde konsantrasyon fonksiyonunun dağılımı**

verileri çerçevesinde yapılmıştır ve sonuçlar sırasıyla Şekil 2.14 ve 2.15’de gösterilmiştir. Şekil 2.14’den görüldüğü gibi  $s(x, t)$  fonksiyonunun grafiğinde iki sıçrayış mevcuttur. Böylelikle önerilen metot daha hassas çözünürlüğe sahiptir ve bu türden olan daha geniş bir sınıftaki problemleri çözmeye imkan sağlar.



### 3. BİR BOYUTLU MİKROSKOBİK ORTAMDA İKİ FAZLI SIVILARIN BİRLİKTE HAREKETİNİN MATEMATİKSEL MODELİ VE SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

#### 3.1 Mikroskopik Ortamda Sıkışamayan Sıvıların Hareketi

Önceki bölümlerde iki fazlı sıvıların makroskopik tabakalı ortamdaki akış dinamiği incelenmişti. Orada, göz önüne alınan problemlerin sayısal çözümlerini bulmak için süreksiz fonksiyonlar sınıfında bir metot da geliştirilmişti.

Bu bölümde ise sıvıların mikroskopik tabakalı ortamdaki akış dinamiği incelenecektir. Yani kapiler basınç dikkate alınacaktır. Bu varsayımlar çerçevesinde petrolün tabakalı ortamda su ile sıkıştırılıp kuyular sistemine akış problemini ifade eden diferansiyel denklemler sistemi aşağıdaki

$$mA \frac{\partial s_o}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ qF_o(s_o) + Ak \frac{k_w(s_o)}{\mu_w} F_o(s_o) p'(s_o) \frac{\partial s_o}{\partial x} \right] = -q_o, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ Akh \left( \frac{k_w(s_o)}{\mu_o} + \frac{k_w(s_w)}{\mu_w} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + k \frac{k_w(s_o)}{\mu_w} \frac{\partial p_c(s_o)}{\partial x} \right] = q \quad (3.2)$$

şeklinde yazılır. (3.1), (3.2) denklemleri için sınır şartlarının yazılması da özel inceleme gerektirir. [8], [17], [39] da sınır şartlarının yazılması araştırılmıştır. Bu araştırmaya göre giriş noktasında, yani  $x = 0$  da suyun debisi,  $x = \ell$  de ise  $t < t^*$  için  $q_o(\ell, t) = 0$ , ve  $t > t^*$  için  $S_\omega(\ell, t) = S_{o\omega}$ , şartı verilir. Burada  $t = t^*$ ,  $S_B$  su ile doyma fonksiyonunun ilk defa  $x = \ell$  de maksimum değerini aldığı zamanı göstermektedir. Ancak, yukarıda sözünü ettiğimiz gibi (3.2) denklemi  $x = \ell$  noktasında dejenere olur, bu nedenle de bu noktada sınır şartlarını vermeye gerek kalmaz.

Bu söylenenlerin ışığında, (3.1), (3.2) denklemleri için aşağıdaki başlangıç ve sınır şartlarını vereceğiz

$$p_\omega(x, 0) = p_o, \quad (3.3)$$

$$Ak \frac{k_o(s_o)}{\mu_o} \frac{\partial p}{\partial x} = -q_o, \quad (3.4)$$

$$s_\omega(x, 0) = s_\omega^{(0)}, \quad (3.5)$$

$$s_\omega(0, t) \Big|_{x=0} = s_\omega^{(1)} = 1 - s_\omega^{(0)}. \quad (3.6)$$

İncelenen olayın fiziksel anlamına dayanarak söyleyebiliriz ki, bilinmeyen  $s_B(x, t)$  nin dahil olduğu bölgenin sağ sınırı da  $s_\omega(x, t)$  ile birlikte bulunmak zorundadır. (3.1), (3.2) denklemleri doğrusal olamadığından onların gerçek çözümlerini elde etmek imkansızdır. Burada yine de sayısal çözümlere başvurmak gerekir. Fakat sayısal çözümleri de direkt uygulamak mümkün değildir. Çünkü denklemlerin çözümlerinden talep olunan diferansiyelle nebilme yeteri kadar olmayabilir. Fiziksel açıdan da bilindiği üzere  $s_\omega(x, t)$  fonksiyonu yeri önceden bilinmeyen 1.tür sıçrayış noktalarına sahiptir.

Diğer taraftan da tanım bölgesinin sağ sınırı  $x = \ell(t)$  de zamana bağlı olarak hareket ettiğinden problemin sayısal çözümü için ağda oluşturmak mümkün olmayabilir, çünkü yer değişkenine göre ağıın adımı zaman değişkenine bağlı olur. Bu ise  $\frac{\partial s_\omega(x, t)}{\partial t}$  türevinin sonlu fark karşılığının yazılmasına engel çıkarır.  $x' = \frac{x}{\ell(t)}$  dönüşümü de arzu edilen sonuca ulaştırmayabilir.

Bu bölümde (3.1)-(3.6) probleminin çözümü için özel bir çözüm algoritması önerilecektir. Bunun için ise kapiler basıncın su ile doyma fonksiyonundan bağımlılığının bilinmesi gerekmektedir.

### 3.1.1 Kapiler Basıncın Su İle Doyma Fonksiyonundan Bağımlılığın Teorik Özelliklerinden İstifade Edilerek Bulunması

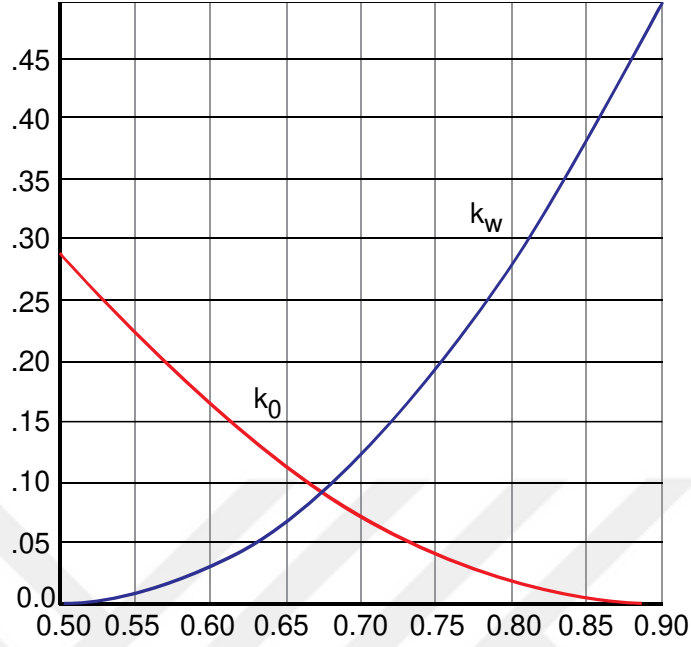
$k_\omega$  ve  $k_o$  suyun ve petrolün oransal faz değişim grafiklerinden görüldüğü gibi (Şekil 3.1) ve aynı zamanda fiziksel karakterlerine göre de aşağıdaki

$$s_\omega^{(0)} < s_\omega < 1 - s_\omega^{(0)},$$

$$\frac{dk_\omega(s_\omega)}{ds_\omega} < 0, \frac{dk_o(s_\omega)}{ds_\omega} > 0, \frac{dp_c(s_\omega)}{ds_\omega} > 0,$$

ilişkiler geçerlidir. Sınır noktalarında ise

$$s_\omega = s_\omega^{(0)}, k_\omega = 1, k_o = 0, \frac{dp_s}{ds_o} \rightarrow \infty \quad (3.7)$$



Şekil 3.1 Suyun ve petrolün oransal faz geçirgenliği

$$s_w = s_w^{(0)}, k_w = 1, k_o = 0, \frac{dp_s}{ds_o} \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

$$s_w = 1 - s_w^{(0)}, k_w = 0, k_o = 1, \frac{dp_c(s_w)}{ds_w} \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

şartları geçerlidir.

(3.7) ve (3.8) şartlarını koruyan fonksiyonu

$$p_c(s_w) = a(s_w - s_o)^3 + b(s_w - s_o)^2 \quad (3.9)$$

şeklinde arayalım. Burada  $a, b, s_o$  şimdilik bilinmeyen sabitlerdir. (3.9) dan

$$\frac{dp_c(s_w)}{ds_w} = 3a(s_w - s_o)^2 + 2b(s_w - s_o),$$

$$\frac{d^2 p_c(s_w)}{ds_w^2} = 6a(s_w - s_o) + 2b$$

alırız.  $s_\omega$  yi ise  $p(s_\omega)$  fonksiyonunun dönme noktasının olması şartından bulacağız. Sonuncu ifadeden  $s_o = s_\omega + \frac{b}{3a}$  ın  $p(s_\omega)$  fonksiyonunun dönme noktası olduğu görülür.  $a$  ve  $b$  sabitlerinin buluna bilmesi için

$$\begin{cases} \left. \frac{dp_c(s_\omega)}{ds_\omega} \right|_{s_\omega=s_\omega^{(0)}} = A, \\ \left. \frac{dp_c(s_\omega)}{ds_\omega} \right|_{s_\omega=s_o^{(0)}} = B \end{cases} \quad (3.10)$$

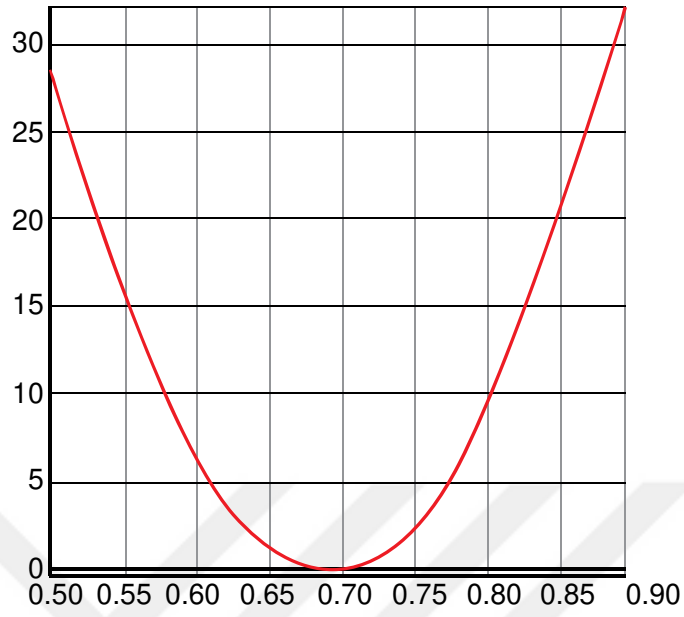
olduğunu kabul edeceğiz. Burada  $A$  ve  $B$  bilinen sabitler olup deney yardımı ile hesaplanabilir. (3.10) ifadesinden

$$\begin{aligned} p'_c = \frac{dp_c(s)}{ds} = & \frac{A - (s_\omega - s_0) \frac{B - AD}{[(s_\omega - s_0) - D(s_\omega - s_0)]}}{(s_\omega - s_0)^2} (s - s_0)^2 + \\ & + (s - s_0) \frac{B - AD}{[(s_\omega - s_0) - D(s_\omega - s_0)]}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

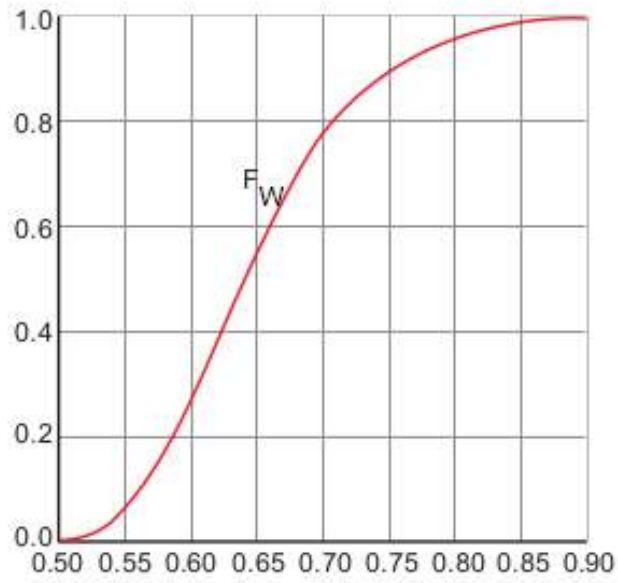
alırız, burada

$$D = \frac{(s_o - s_0)^2}{(s_\omega - s_0)^2}$$

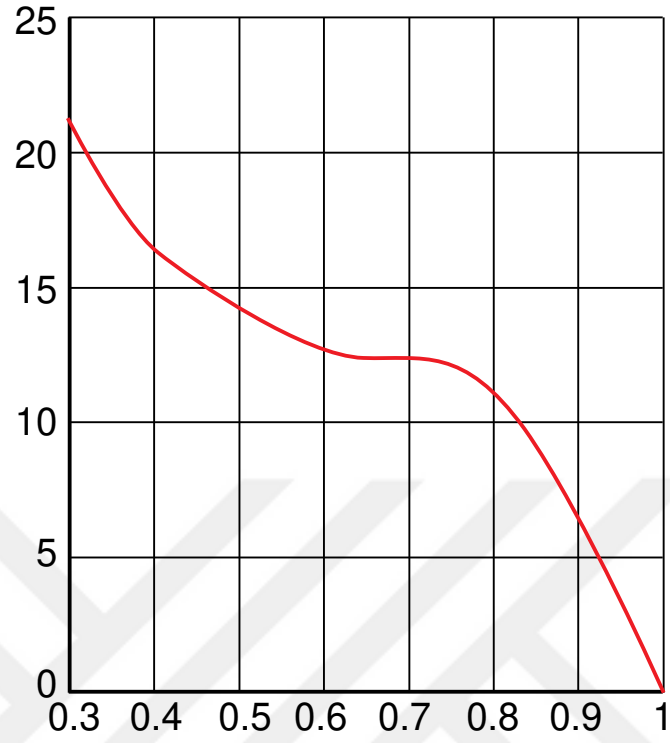
dır. Deney sonucu elde edilen  $s_0 = 0.67$ ,  $s_\omega = 0.53$ ,  $s_o = 0.85$ ,  $A = 20$ ,  $B = 20$  değerlerini da dikkate alarak (3.11) den  $p'_c$  fonksiyonunu elde edilir.  $p'_c$  fonksiyonunu grafiği Şekil 3.2 de gösterilmiştir.



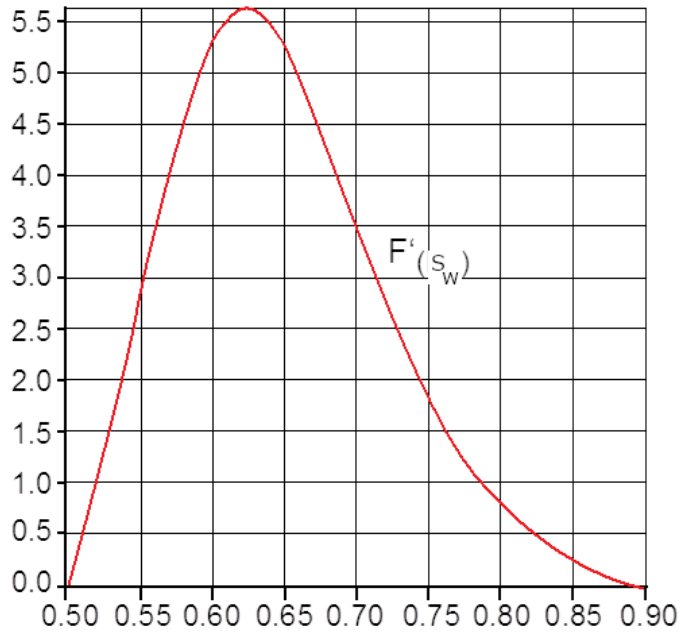
Şekil 3.2  $p'_c$  fonksiyonunun grafiği



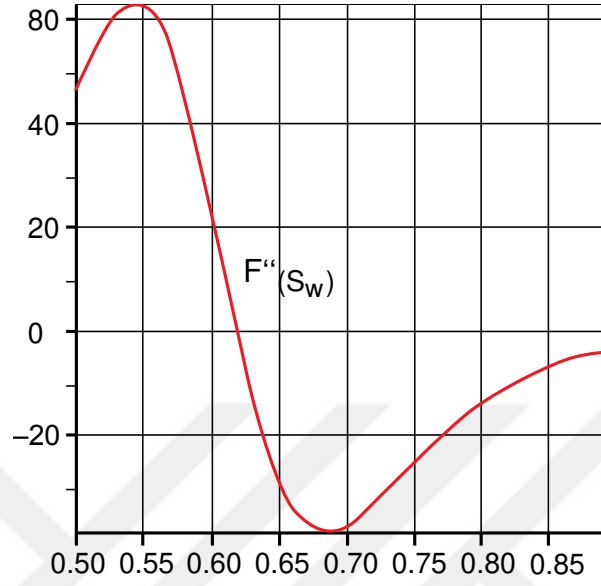
Şekil 3.3 Buckley-Leverett fonksiyonunun grafiği



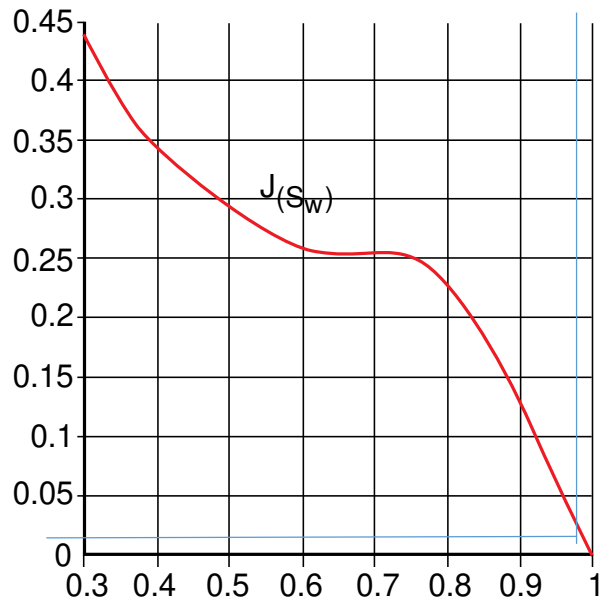
Şekil 3.4  $p_c$  fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.5 Buckley-Leverett fonksiyonunun 1.türevinin grafiği



Şekil 3.6 Buckley-Leverett fonksiyonunun 2.türevinin grafiği



Şekil 3.7  $J(S_w)$  fonksiyonunun grafiği

### 3.2 Yardımcı Problem ve Sonlu Farklar Şemasının Kurulması

(3.1)-(3.6) probleminin çözümünü elde etmek için sonlu farklar şemasını oluşturmadan önce aşağıdaki değişken

$$\Phi(s_\omega) = \int_0^{s_\omega} \frac{k_o(v)}{\mu_o} F(v) p'_c(v) dv \quad (3.12)$$

dönüşümü yapalım. (3.12) ve

$$s_\omega(x, t) = \sigma_\omega(x, t) - \frac{1}{mA} \int_0^t q_\omega(\tau) d\tau \quad (3.13)$$

dönüşümlerinden sonra (3.1) denklemi  $\sigma_\omega(x, t)$  fonksiyonuna göre homojen

$$mA \frac{\partial \sigma_\omega(x, t)}{\partial t} + q \frac{\partial F(\sigma_\omega(x, t))}{\partial x} + Ak \frac{\partial^2 \Phi(\sigma_\omega(x, t))}{\partial x^2} = 0 \quad (3.14)$$

elde ederiz. (3.14) denklemi için başlangıç ve sınır şartları

$$\sigma_\omega(x, 0) = S_\omega^{(0)} \quad (3.15)$$

$$\sigma_\omega(0, t) = S_\omega^{(1)} + \frac{1}{mA} \int_0^t q_\omega(\tau) d\tau = \sigma_\omega^{(1)} \quad (3.16)$$

olmaktadır. [46], [53] de önerildiği gibi aşağıdaki gibi yardımcı problem dahil edelim

$$mA \frac{\partial v_\omega(x, t)}{\partial t} + q F_\omega(\sigma_\omega) + Ak \frac{\partial \phi(\sigma_\omega)}{\partial x^2} = 0, \quad (3.17)$$

$$v_\omega(x, t) = v_\omega^{(1)}(x), \quad (3.18)$$

$$\sigma_\omega(0, t) = \sigma_\omega^{(1)}. \quad (3.19)$$

Burada  $v_\omega^{(1)}$  fonksiyonu

$$\frac{dv_\omega^{(1)}}{dx} = \sigma_\omega(x)$$

denkleminin sürekli diferansiyellenebilen her hangi bir çözümüdür. (3.17)- (3.19) problemine 1.tür yardımcı problem denilir.



**Teorem 3.1** Eğer  $v_\omega(x, t)$  fonksiyonu (3.17)- (3.19) probleminin pürüzsüz çözümü ise, bu takdirde

$$\sigma_\omega(x, t) = \frac{\partial v_\omega(x, t)}{\partial x} \quad (3.20)$$

eşitliği tanımlanan  $\sigma_\omega(x, t)$  fonksiyonu (3.14)- (3.16) probleminin zayıf çözümü olur.

**İspat** Teorem 3.1'i ispatlamak için (3.15) denklemini test fonksiyonlar sınıfından herhangi bir  $\varphi(x, t)$  ile çarpalım. Elde edilen ifadedeki integrallere iki kez kısmi integrasyon formülünü uygulayarak teoremin ispatını yapabiliriz.

Yukarıda söylediğimiz gibi  $\sigma_\omega(x, t)$  fonksiyonu yeri önceden bilinmeyen 1.tür süreksizlik noktalarına sahiptir. Bu nedenle de  $\frac{\partial \sigma_\omega(x, t)}{\partial x}$  ve  $\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x}$  türevleri mevcut olamaz. Bu tür süreksizliğe darbe dalgası denilir. Bu denilenleri dikkate alarak aşağıdaki 2.tür yardımcı problemi

$$mA \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x v_\omega(\xi, t) d\xi + q \int_0^x F_\omega(\sigma_\omega(\xi, t)) d\xi + Ak\phi(\sigma_\omega(\xi, t)) - Ak\phi(\sigma_\omega(\xi, t)) = 0 \quad (3.21)$$

dahil edeceğiz. Bu denklem için başlangıç ve sınır koşulları (3.18), (3.19) olacaktır. (3.21) den görüldüğü gibi bu durumda  $\sigma_\omega(x, t)$  fonksiyonu sürekli de olabilir.

2.tür yardımcı probleminin aşağıdaki avantajları vardır:

- $v_\omega(x, t)$  fonksiyonunun diferansiyellenebilme mertebesi  $s_\omega(x, t)$  fonksiyonunun diferansiyellenebilme mertebesinden iki birim fazladır.
- $v_\omega(x, t)$  fonksiyonunun bulunması için yazılmış algoritmalarda

$$\frac{\partial F_\omega(s_\omega)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Phi(s_\omega)}{\partial x^2}$$

türevlerini kullanmak gerekmemektedir.

**Teorem 3.2** Eğer  $v_\omega(x, t)$  fonksiyonu (3.21), (3.18) ve (3.19) probleminin pürüzsüz çözümü ise

$$\sigma_\omega(x, t) = \frac{\partial^2 v_\omega(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.22)$$

eşitliği tanımlanan  $\sigma_\omega(x, t)$  fonksiyonu (3.14)- (3.16) probleminin zayıf çözümü olur.

Teorem 3.2'nin de ispatı Teorem 3.1'in ispatına benzer şekilde gerçekleştirilebilir. (3.22) den

$$v_{\omega}(x, t) = \int_0^x (x - \xi) \sigma_{\omega}(\xi, t) d\xi$$

olur. Bunun yanı sıra, 2.tür yardımcı problem incelemekte olduğumuz olayın tüm fiziksel özelliklerini düzgün ifade edebilen hassas sonlu farklar şemasının yazılmasına da imkan sağlar. Söz konusu sonlu farklar şemasının yazılması için  $(x, t)$  argümanlarının süreksiz değiştiği bölgeyi

$$\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_k), x_i = ih, i = 1, 2, 3, \dots, k = 0, 1, 2, \dots; h > 0, \tau > 0\}$$

ağı ile örtelim. 2.tür yardımcı problemin sonlu farklar karşılığını yazmak için önce (3.21) ifadesinde dahil olan integralin aşağıdaki gibi

$$\int_0^x V_{\omega}(\xi, t) d\xi = h \sum_{j=1}^i V_{j,k}$$

sonlu fark karşılığını yazalım. Sonucu ifadeyi dikkate alarak (3.21) için

$$mA \left[ \frac{h \sum_{j=1}^i V_{j,k+1} - h \sum_{j=1}^i V_{j,k}}{\tau} \right] + qh \sum_{j=1}^i F_{\omega}(\sum_{j,k}) + Ak\phi(\sum_{j,k}) - Ak\phi(\sigma_{\omega}(0, t_k)) = 0 \quad (3.23)$$

(3.23) nonlinear cebirsel denklemleri için başlangıç ve sınır koşulları

$$\begin{cases} v_{\omega}(x_i, t_k) = v_{\omega}^{(0)}(x_i), \\ \sigma_{\omega}(0, t_k) = \sigma_{\omega}^{(1)}(t_k) \end{cases} \quad (3.24)$$

olur. (3.23) şemasını

$$v_{i,k+1} = v_{i,k} - \sum_{j=1}^{i-1} (v_{j,k+1} - v_{j,k}) - \frac{qr}{mA} \sum_{j=1}^i F_{\omega}(\sum_{j,k}) - \frac{\tau}{h} \frac{k}{m} \phi(\sum_{i,k}) + \frac{\tau}{h} \frac{k}{m} \phi(\sigma_{\omega}^{(1)}(t_k)) \quad (3.25)$$

şeklinde de yazabiliriz.

(3.25) sonlu farklar karşılığını yazarken şebekenin sadece iki düğüm noktasını kullanmış olduk. Bu tür şemalar hesaplama açısından çok efektiftir ve bunlara iki noktalı sistemler denilir. (3.25) aşıkâr şema olarak adlandırılır ve bu şema hesaplama sürecinde ağı adımları üzerine Courant- Friedrichs–Lewy koşulu olarak isimlendirilen  $\tau < \frac{h}{w}$  şartını da talep eder. Burada  $w$  sistemin en büyük karakteristik hızını temsil eden bir parametredir. Bu tür

cebirsel denklemler sisteminin her bir denkleminde bir tane bilinmeyen bulunur ki, bunu hesaplamak için hiçbir metotun kullanılması gerekmez.

Literatürde aşikar olmayan ve  $\tau$  adımı üzerine koşul talep etmeyen birkaç şema mevcuttur, fakat değişken sınırlı bölgelerde bu tür metotların ne kadar yararlı olduğu bilinmemektedir. Çünkü bu tür şemalarda hesaplama karakterli enformasyonlar fiziksel anlamı olan, heyecanlanmış sınırın dağılım hızından daha hızlı olabilir. Bu da olayın fiziksel anlamını bozar.

Sade hesaplama yolu ile (3.25) şemasının uzlaşan olduğunu göstermek mümkündür. Bunun için (3.25) şemasına dahil olan  $V_{i,k+1} = V(x_i, t_k + \tau)$  fonksiyonunu Taylor serisine ayrıklaştıralım

$$v(x_i, t_k + \tau) = v_{i,k} + \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{i,k} \tau + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{i,k} \frac{\tau^2}{2!} + o(\tau^2),$$

$$\varepsilon_{i,k} = \sup |l(f(x)) - s_u(f)|.$$

Burada

$$l(f) = \int_0^x f(x) dx, \quad s_u(f) = h \sum_{j=1}^i f(x_j)$$

Bu ifadeler (3.25) de yerine konursa

$$\begin{aligned} & v_{i,k} + \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{i,k} \tau + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{i,k} \frac{\tau^2}{2!} + o(\tau^3) = \\ & = v_{i,k} - \sum_{j=1}^{i-1} \left( v_{i,k} + \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{i,k} \tau + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{i,k} \frac{\tau^2}{2!} + o(\tau^3) - v_{i,k} \right) - \\ & - \frac{qr}{mA} \sum_{j=1}^i F_\omega(\sum_{i,k}) - \frac{kr}{mh} \phi(\sum_{i,k}) + \frac{kr}{mh} \phi(\sum_{i,k}) \\ & = h \sum_{j=1}^i \left( \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{i,k} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{i,k} \frac{\tau^2}{2!} + o(\tau^3) \right) - \frac{qr}{mh} \int_0^x F_\omega(\sigma) d\xi - \frac{qr}{mA} \varepsilon_{i,k} - \frac{kr}{mh} \phi(\sigma) - \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$-\frac{kr}{mh}\phi(\sigma_i) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x v(\xi, t) d\xi - \frac{qr}{mA} \int_0^x F_\omega(\sigma) d\xi - \frac{k}{m}\phi(\sigma) - \frac{k}{m}\phi(\sigma_i) + O(\tau, \varepsilon_{i,k})$$

elde ederiz.

Elde edilen değerlendirmeden (3.21) denklemini sonlu farklara ayırlaştırdığımız şemanın hatası yer değişkenin adımından bağımsızdır ve sadece zaman değişkeni olan  $\tau$  ya ve integral için yazdığımız yaklaşık hesaplama formülünün hatasına bağlı olur. Ayrıca,  $\tau \rightarrow 0$  da yaklaşık  $V_{i,k+1}$  çözümün gerçek  $v_B(x, t)$  çözümüne yakınsaklığı da elde edilir.

**Teorem 3.3** Eğer  $V_{i,k+1}$  ağ fonksiyonu (3.25) ve (3.24) probleminin çözümü ise

$$\Sigma_{i,k+1} = \frac{V_{i+1,k+1} - 2V_{i,k+1} - V_{i-1,k+1}}{h^2} \quad (3.27)$$

eşitliği tanımlanan  $\Sigma_{i,k+1}$  ağ fonksiyonu (3.14)- (3.16) probleminin zayıf çözümünün yaklaşık değeri olur.

Şimdi (3.2),(3.3) ve (3.4) probleminin çözümünü bulmak için sonlu farklar algoritmasını yazalım. Bunun için (3.2) denkleminin parabolik regülizasyonunu oluşturalım.  $\varepsilon$  sıfıra yaklaşan pozitif parametre olsun ve aşağıdaki denklemi

$$\varepsilon \frac{\partial p_\omega^\varepsilon(s_\omega(x, t))}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ Akh\Phi_1(s_B(x, t)) \frac{\partial p_\omega^\varepsilon(s_\omega(x, t))}{\partial x} + k \frac{k_o(s_\omega)}{\mu_o} \frac{\partial p_\omega^\varepsilon(s_\omega(x, t))}{\partial x} \right] - q \quad (3.28)$$

göz önüne alalım, burada

$$\Phi_1(s_\omega(x, t)) = \frac{k_\omega(s_\omega)}{\mu_\omega} + \frac{k_o(s_\omega)}{\mu_o}$$

olmaktadır. Yukarıda da görüldüğü gibi artık (3.1), (3.3), (3.4) ve (3.14)-(3.16) problemleri bir birinden bağımsız olur. Bu problemleri sadelik namına sırasıyla  $(\sigma_\omega)$  ve  $(p_\omega^\varepsilon)$  problemleri olarak adlandıralım.

[45] ve [51] de olduğu gibi düzenlenmiş (3.28) denklemi için yardımcı problem dahil edelim

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x p_\omega^\varepsilon(s_\omega(\xi, t)) d\xi &= \left[ Akh\Phi_1(s_\omega(x, t)) \frac{\partial p_\omega^\varepsilon(s_\omega(x, t))}{\partial x} + k \frac{k_o(s_\omega)}{\mu_o} \frac{\partial p_\omega^\varepsilon(s_\omega(x, t))}{\partial x} \right] - \\ &- \left[ Akh\Phi_1(s_\omega(x, t)) \frac{\partial p_\omega^\varepsilon(s_\omega(x, t))}{\partial x} + k \frac{k_o(s_\omega)}{\mu_o} \frac{\partial p_\omega^\varepsilon(s_\omega(x, t))}{\partial x} \right] \Big|_{x=0} - q(t)x. \end{aligned} \quad (3.29)$$

$(p_\omega^\varepsilon)$  problemi için yazılmış yardımcı problemin bir çok avantajları vardır.

- (3.2) denkleminin  $p_\omega(x, t)$  fonksiyonundan talep ettiği pürüzsüzlüğe gerek yoktur, zira

$$\frac{\partial^2 p_\omega(x, t)}{\partial x^2}$$

türevi mevcut olamayabilir.

- (3.28) denklemi  $x = \ell$  sınırında dejenere olduğu için sınır şartı talep etmeyebilir.

Fiziksel açıdan (3.2), denklemi tabakalı ortama su pompalandıktan sonra ortamda oluşan basıncın heyecanlanmasını ifade ettiğinden onun keskin hareket eden su-petrol sınırı vardır. Bu nedenle de (3.2) denklemini direkt olarak sonlu farklara ayırklaştırmak mümkün değildir. Ayrıca, regüle edilmiş (3.28) denkleminin dahil edilmesi de çok önem taşımaktadır, çünkü bu denklemin sağ tarafındaki ifade fiziksel olarak suyun akısını göstermektedir. Bu anlamda (3.29) denklemi tabakalı ortamın  $[0, x = \ell(t)]$  kısmındaki toplam su kitlesini ifade eder.

Şimdi regule edilmiş  $(p_\omega^\varepsilon)$  problemi için aşağıdaki sonlu farklar karşılığını yazalım

$$\begin{aligned} & \frac{h_x \sum_{j=1}^i \left( {}_\varepsilon P_{j,k+1}^\omega - {}_\varepsilon P_{j,k}^\omega \right)}{\tau} = \\ & = h A k \phi I_{i+1} \frac{{}_\varepsilon P_{i+1,k}^\omega - {}_\varepsilon P_{i,k}^\omega}{h_x} + k \frac{k_o(S_i^\omega)}{\mu_o} \frac{{}_\varepsilon P_{i+1,k}^c - {}_\varepsilon P_{i,k}^c}{h_x} - \\ & - \left( h A k \phi I_{i+1} \frac{{}_\varepsilon P_{i+1,k}^\omega - {}_\varepsilon P_{i,k}^\omega}{h_x} + k \frac{k_o(S_i^\omega)}{\mu_o} \frac{{}_\varepsilon P_{i+1,k}^c - {}_\varepsilon P_{i,k}^c}{h_x} \right) \Big|_{i=0} - q x_i. \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} & {}_\varepsilon P_{i,k+1}^\omega = {}_\varepsilon P_{i,k}^\omega - \sum_{j=1}^i \left( {}_\varepsilon P_{j,k+1}^\omega - {}_\varepsilon P_{j,k}^\omega \right) + \\ & + \frac{\tau}{\varepsilon h_x} \left( h A k \phi I_{i+1} \frac{{}_\varepsilon P_{i+1,k}^\omega - {}_\varepsilon P_{i,k}^\omega}{h_x} + k \frac{k_o(S_i^\omega)}{\mu_o} \frac{{}_\varepsilon P_{i+1,k}^c - {}_\varepsilon P_{i,k}^c}{h_x} \right) - \\ & - \frac{\tau}{\varepsilon h_x} \left( h A k \phi I_{i+1} \frac{{}_\varepsilon P_{i+1,k}^\omega - {}_\varepsilon P_{i,k}^\omega}{h_x} + k \frac{k_o(S_i^\omega)}{\mu_o} \frac{{}_\varepsilon P_{i+1,k}^c - {}_\varepsilon P_{i,k}^c}{h_x} \right) \Big|_{i=0} - \frac{q\tau}{\varepsilon h_x} x_i \end{aligned} \quad (3.30)$$

olur. Burada

$${}_{\varepsilon}P_{i,0}^{\omega} = p_0, \quad (3.31)$$

$$Ak \frac{k_{\omega}(S_i^{\omega})}{\mu_{\omega}} \frac{{}_{\varepsilon}P_{i+1,k}^{\omega} - {}_{\varepsilon}P_{i,k}^{\omega}}{h_x} \Big|_{l=0} = -q_{\omega} \quad (3.32)$$

olmaktadır. Elde edilen algoritmalar göz önüne alınan problemin tüm fiziksel özelliklerini düzgün ifade edebilen çözümlerin bulunmasına imkan sağlamaktadır.

### 3.3 Kapiler Kuvvet Etkisinde Petrolün Su ile Sıkıştırılması Prosesinin İncelenmesi (İslatma)

Yukarıdaki bölümde kapiler basınç dikkate alınarak bir boyutlu ortamda petrolün su ile sıkıştırılması prosesini inceledik. Bu durumda amacımız su ile petrolün kuyular sistemine sıkıştırılıp çıkarılması sürecine kapiler basıncın etkisini ne kadar olduğunu göstermektir. Literatürden bilindiği üzere sadece kapiler basınc da petrolün tabakalı ortamda süzülmesi olayına neden olabilir. Bu bölümde amacımız su ile petrolün çıkarılmasının prosesinde kapiler basıncın etkisini incelemektir. Bu süreç bazen literatürde ıslanma hesabına suyun petrolün çıkarılması olarak anılır.

Bu durumda (3.14) denkleminde  $q = 0$  olur ve denklem

$$mA \frac{\partial \sigma_{\omega}(x, t)}{\partial t} + Ak \frac{\partial^2 \Phi(\sigma_{\omega}(x, t))}{\partial x^2} = 0. \quad (3.33)$$

(3.33) denklemi için başlangıç ve sınır koşulları

$$\sigma_{\omega}(x, 0) = \sigma_{\omega}^{(0)}, \quad (3.34)$$

$$\sigma_{\omega}(0, t) = \sigma_{\omega}^{(1)} \quad (3.35)$$

dır. Su ile doyma fonksiyonunun dinamik dağılımında olayın fiziğinden kaynaklanan birinci tür sıçrayışların mevcut olduğunu yukarıda gösterdik. Söz konusu sıçrayışların mevcudluğu (3.33) denklemini de (3.14) de olduğu gibi, direkt sonlu farklara ayırklaştırmaya imkan vermez, çünkü tersinmezlik prensipi burada da bozulmaktadır.

Önce aşağıda 1.tür yardımcı problemi dahil edelim

$$mA \frac{\partial v_{\omega}}{\partial t} + Ak \frac{\partial \Phi(\sigma_{\omega})}{\partial x} = 0, \quad (3.36)$$

$$v_{\omega}(x, 0) = v_0(x) \quad (3.37)$$

Burada  $v_0(x)$  fonksiyonu

$$\frac{dv_{\omega}(x)}{dx} = \sigma_{\omega}(x)$$

denkleminin herhangi bir sürekli çözümüdür. Yukarıda söylediğimiz gibi bazı durumlarda  $\frac{\partial \Phi(\sigma_{\omega})}{\partial x}$  türevi de mevcut olmayabilir.

Bu nedenle yine de yukarıda olduğu gibi

$$mA \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x v_{\omega}(\xi, t) d\xi + Ak \Phi(\sigma_{\omega}(x, t)) - Ak \Phi(\sigma_{\omega}^{(1)}) = q_{\omega} \quad (3.38)$$

ikinci tür yardımcı problem dahil edelim. (3.38) denklemi (3.34) başlangıç şartı dahilinde çözülecektir. (3.38) den görüldüğü gibi bu durumda  $\sigma_{\omega}(x, t)$  fonksiyonu ve hatta  $Ak \Phi(\sigma_{\omega}(x, t))$  de süreksiz olabilir. (3.38), (3.37) problemi için de yukarıda söylediğimiz Teorem 3.1 ve 3.2 geçerlidir.

(3.36), (3.37) problemini aşağıdaki gibi sonlu farklara ayıklaştıralım

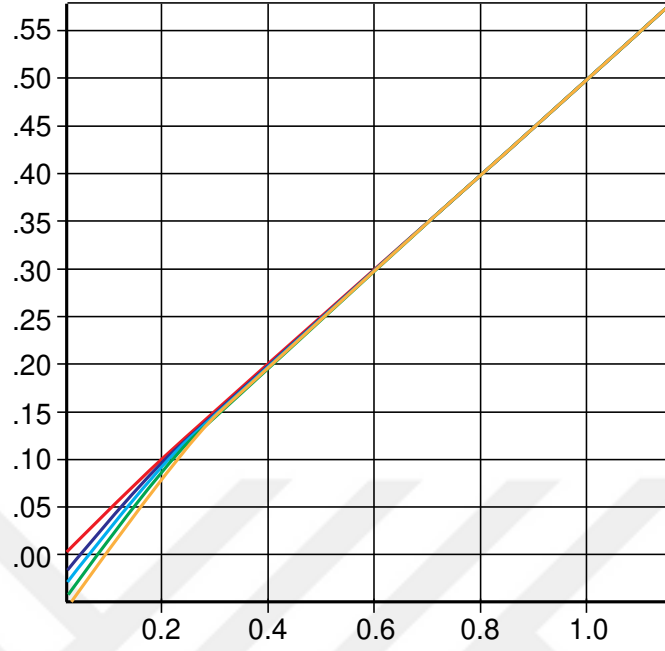
$$\frac{mh}{\tau} \sum_{j=1}^i (V_{j,k+1} - V_{j,k}) + k\Phi(\Sigma_{i,k}^{\omega}) - k\Phi(\sigma_{\omega}^{(1)}(t_k)) = 0$$

veya

$$V_{i,k+1} = V_{i,k} - \sum_{j=1}^{i-1} (V_{j,k+1} - V_{j,k}) - \frac{k\tau}{mh} \Phi(\Sigma_{i,k}^{\omega}) + \frac{k\tau}{mh} \Phi(\sigma_{\omega}^{(1)}(t_k)) = 0 \quad (3.39)$$

$$V_{i,0} = v_{\omega}^{(0)} \quad (3.38)$$

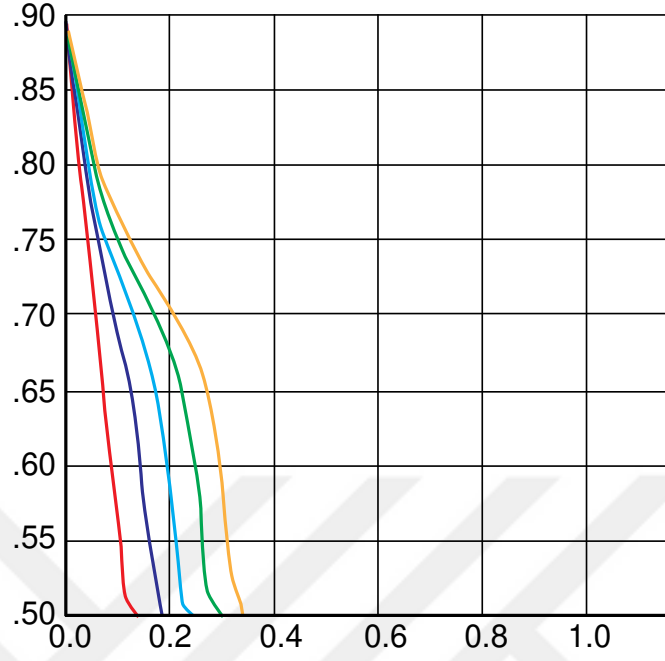
(3.37), (3.38) algoritmasıyla yapılmış bilgisayar testlerinin sonuçları sırasıyla Şekil 3.8-3.10 da gösterilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi, su ile doyma ve buna bağlı olarak da petrol ile doyma fonksiyonlarında yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktaları bulunmaktadır. Bu ise önerilen metodun çok hassas ve aynı zamanda ekonomik de olduğunu göstermektedir.



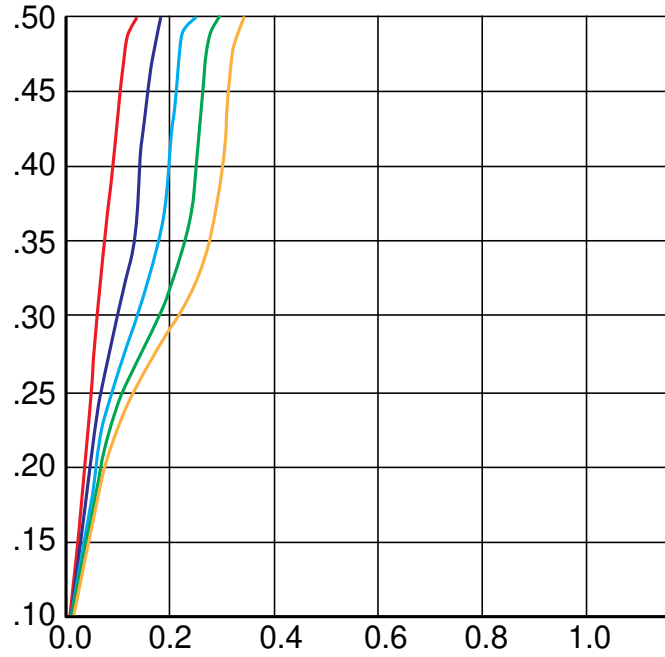
**Şekil 3.8**  $v_{\omega}(x, t)$  fonksiyonunun grafiği

**Not 3.1** (3.37), (3.38) algoritmasını çalıştırmadan önce (3.12) formulüne göre  $\Phi(\sigma_{\omega}(x, t))$  fonksiyonunu hesaplamak gerekir.





**Şekil 3.9**  $\sigma_{\omega}(x, t) = \frac{\partial^2 v_{\omega}(x, t)}{\partial x^2}$  fonksiyonunun grafiği



**Şekil 3.10**  $\sigma_o(x, t) = 1 - \sigma_{\omega}(x, t)$  fonksiyonunun grafiği

#### 4. İKİ BOYUTLU MİKROSKOPİK ORTAMDA İKİ FAZLI SIVILARIN BİRLİKTE HAREKETİNİN MATEMATİKSEL MODELİ VE SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Yukarıdaki bölümlerde petrolün bir boyutlu ortamda su ile sıkıştırılıp çıkarılması, yani Buckley-Leverett ve Rapoport-Leas modelini incelerken göstermiştik ki, bu model yatağa pompalanan suyun hareket hızının büyük olduğu durumlarda fiziksel gerçeği daha iyi yansıtır. Fakat, pompalanan suyun hareket hızının düşük olduğu durumlarda bu model gerçeği çok da aksettirebilmiyor ve burada kapiler basıncın da etkisini dikkate almak zorunda kalıyoruz. Bu nedenle de üçüncü bölümde kapiler basınç dikkate alınarak petrolün su ile sıkıştırılmasını ifade eden denklemler sistemi incelenmiştir. Bir boyutlu problemlerle sadece çok dar sınıf problemlerin çözümlerinin kalite karakterlerini öğrenmek mümkün olur.

Bu bölümde düzlemsel tabakalı ortamda iki fazlı sıvıların hareket denklemleri incelenecektir. İki fazlı sıvıların iki veya üç boyutlu ortamda hareketi izlendiğinde ve kapiler basınç da dikkate alındığı durumda olayın matematiksel modeli karışık, yani su ile doyma fonksiyonuna nazaran hiperbolik, basınç fonksiyonuna göre ise elliptik tür denklemlere indigenilir. Ayrıca, denklemler yer değişkenine nazaran da iki boyutlu olduğunda matematiksel problemin çözümünün bulunması da bir hayli zorlaşır. İkinci bölümde de gösterdiğimiz gibi, hatta yer değişkenlerinin sayısı bir tane olduğunda bile denklemin çözümünde yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktaları meydana çıkar ki, bu da çözümün bulunması için daha hassas metotların önerilmesini zorunlu kılar.

Yer değişkenlerinin sayısı iki olduğunda problemin çözümünün bulunması daha da zorlaşır, çünkü bu durumda çözümde sonsuz sayıda sıçrayışlar oluşur [23], [38]. Bu sıçrayışlardan hangisinin gerçek fiziksel yararlı olduğunu belirlemek için uygulanan metottan yüksek çözünürlük talep edilir.

İki boyutlu ortamda petrolün su ile sıkıştırılıp çıkarılmasının matematiksel modeli aşağıdaki denklemler sistemi [38] ile ifade edilir

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ Akh \left( \frac{k_w(S_w)}{\mu_w} + \frac{k_o(S_w)}{\mu_o} \right) \frac{\partial p_w}{\partial x} + k \frac{k_o(S_w)}{\mu_o} \frac{\partial p_c(S_w)}{\partial x} \right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ Akh \left( \frac{k_{\omega}(S_{\omega})}{\mu_{\omega}} + \frac{k_o(S_{\omega})}{\mu_o} \right) \frac{\partial p_{\omega}}{\partial y} + k \frac{k_o(S_{\omega})}{\mu_o} \frac{\partial p_c(S_{\omega})}{\partial y} \right] = q, \quad (4.1)$$

$$mA \frac{\partial S_{\omega}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mathcal{M} \frac{\partial(S_{\omega})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ qF_{\omega}(S_{\omega}) + Ak \frac{k_o(S_{\omega})}{\mu_o} F_{\omega}(S_{\omega}) p'_c(S_{\omega}) \frac{\partial(S_{\omega})}{\partial y} \right] = -q_{\omega}. \quad (4.2)$$

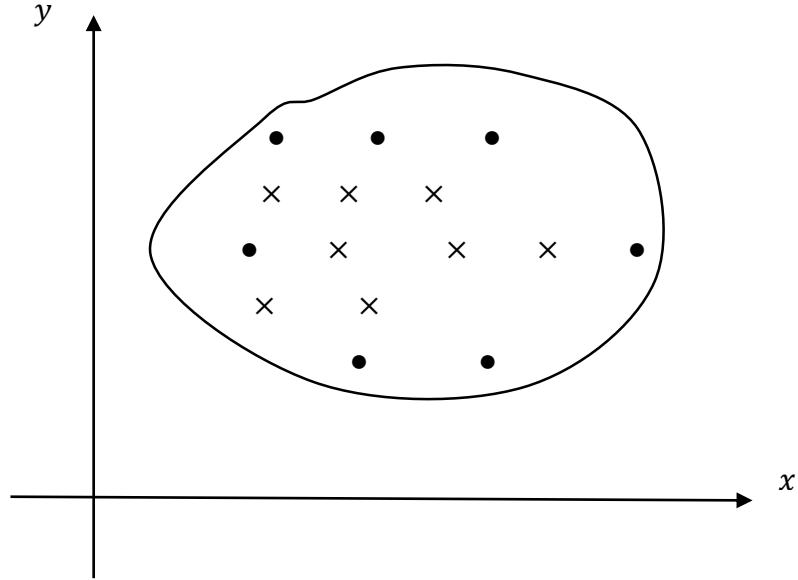
(4.1), (4.2) denklemler sistemi için başlangıç ve sınır şartları

$$p_{\omega}(x, y, 0) = p_0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial p_{\omega}}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (4.4)$$

$$S_{\omega}(x, y, 0) = S_{\omega}^{(0)}(x, y), \quad (4.5)$$

$$S_{\omega}(x, y, t) \Big|_{\Gamma_j^{\omega}} = S_{1j} \left( x_j^{(\omega)}, y_j^{(\omega)}, t \right), \quad j = \overline{1, N_{\omega}}. \quad (4.6)$$



**Şekil. 4.1 Kuyuların Yerleşim Şeması**

a) • su pompalanan kuyular; b) × petrol kuyuları

Burada  $q = q_{\omega} + q_o$ ,  $q_{\omega} = \sum_{v=1}^{N_{\omega}} Q_{\omega}^{(v)} \delta_{i,j}^{(v)}$ ,  $q_o = \sum_{\mu=1}^{N_{\omega}} Q_{\omega}^{(\mu)} \delta_{i,j}^{(\mu)}$ ,

$$\delta_{i,j}^{(\alpha)} = \begin{cases} 1, & x = x_i^{(\alpha)}, y = y_j^{(\alpha)} \\ 0, & x \neq x_i^{(\alpha)}, y \neq y_j^{(\alpha)} \end{cases}$$

Kronecker sembolü,  $(\alpha = \nu, \mu)$ ,  $\Gamma$  ise  $Q$  bölgesinin sınırı olmaktadır.

#### 4.1 Sonlu Farklar Şemasının Kurulması

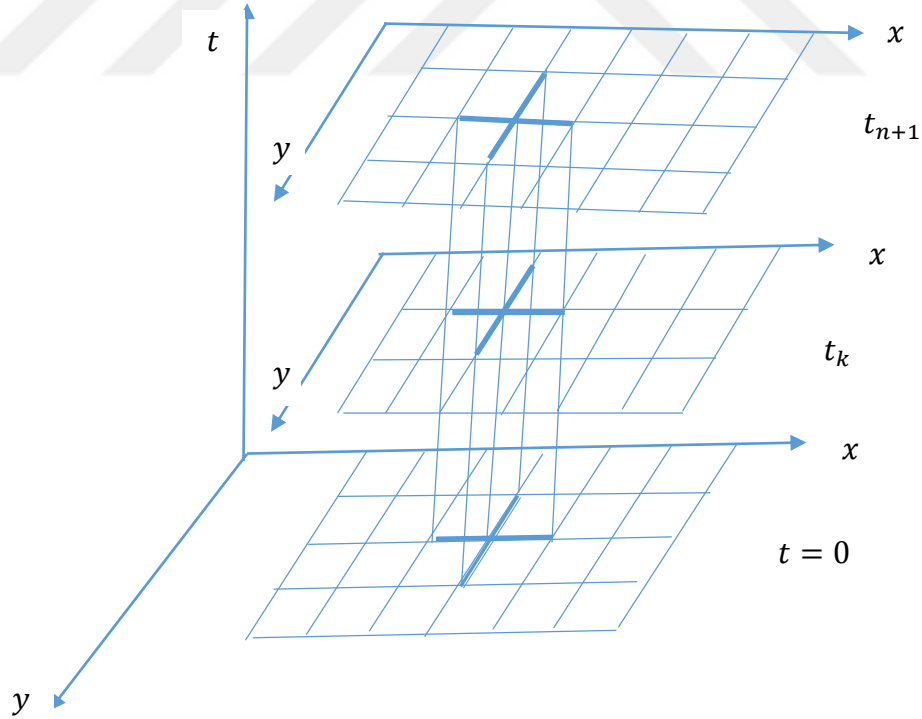
Şimdi (4.1)-(4.6) problemini sonlu farklara ayırklaştırmak için. Aşağıdaki notasyonları kabul edelim

$$\Phi(p_\omega, S_\omega) = \frac{k_\omega(S_\omega)}{\mu_\omega} + \frac{k_o(S_\omega)}{\mu_o}, \quad \Psi_o = \frac{k_o(S_\omega)}{\mu_o}.$$

Argumanların sürekli değiştiği bölgeyi

$$\omega_{h_x, h_y, \tau} = \{(x_i, y_j, t_n) | x_i = ih_x, y_j = jh_y, t_n = n\tau, \}$$

$$i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y}, n = 0, 1, 2, \dots, h_x > 0, h_y > 0, \tau > 0\}$$



Şekil 4.2  $(x, y, t)$  Uzayında Kurulmuş Hesaplama Şablonu

ağı ile örtelim ve Şekil 4.2 de gösterilen şablon üzerinden sonlu farklar şemasını yazalım. (4.1) denkleminin

$$\begin{aligned}
& \frac{A}{h_x} \left[ k_{i+\frac{1}{2},j} p \Phi_{i+\frac{1}{2},j}^n (\omega^{P_{i+1,j}^{n+1}} - \omega^{P_{i+1,j}^{n+1}}) - k_{i-\frac{1}{2},j} p \Phi_{i-\frac{1}{2},j}^n (\omega^{P_{i,j}^{n+1}} - \omega^{P_{i-1,j}^{n+1}}) \right] + \\
& \frac{A}{h_x} \left[ k_{i+\frac{1}{2},j} \Psi_{i+\frac{1}{2},j}^n (c^{P_{i+1,j}^{n+1}} - c^{P_{i+1,j}^{n+1}}) - k_{i-\frac{1}{2},j} \Psi_{i-\frac{1}{2},j}^n (\omega^{P_{i,j}^{n+1}} - \omega^{P_{i-1,j}^{n+1}}) \right] + \\
& \frac{A}{h_y} \left[ k_{i,j+\frac{1}{2}} p \Phi_{i,j+\frac{1}{2}}^n (\omega^{P_{i,j+1}^{n+1}} - \omega^{P_{i,j}^{n+1}}) - k_{i,j-\frac{1}{2}} p \Phi_{i,j-\frac{1}{2}}^n (\omega^{P_{i,j}^{n+1}} - \omega^{P_{i,j-1}^{n+1}}) \right] + \\
& \frac{A}{h_y} \left[ k_{i,j+\frac{1}{2}} \Psi_{i,j+\frac{1}{2}}^n (c^{P_{i,j+1}^{n+1}} - c^{P_{i,j}^{n+1}}) - k_{i,j-\frac{1}{2}} \Psi_{i,j-\frac{1}{2}}^n (\omega^{P_{i,j}^{n+1}} - \omega^{P_{i,j-1}^{n+1}}) \right] = q
\end{aligned} \tag{4.7}$$

şeklinde sonlu fark karşılığını yazalım. Burada

$$\begin{aligned}
k_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{2k_{i,j}k_{i+1,j}}{k_{i,j} + k_{i+1,j}}, & k_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{2k_{i,j}k_{i,j+1}}{k_{i,j} + k_{i,j+1}}, \\
p \Phi_{i+\frac{1}{2},j}^n &= \frac{2\Phi_{i,j}\Phi_{i+1,j}}{\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j}}, & p \Phi_{i,j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{2\Phi_{i,j}\Phi_{i,j+1}}{\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j+1}}, \\
\Psi_{i+\frac{1}{2},j}^n &= \frac{2\omega k_{i,j}^n \omega k_{i+1,j}^n}{\omega k_{i,j}^n + \omega k_{i+1,j}^n}, & \Psi_{i,j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{2\omega k_{i,j}^n \omega k_{i,j+1}^n}{\omega k_{i,j}^n + \omega k_{i,j+1}^n},
\end{aligned}$$

dır ve  $\omega^{P_{i,j}^n}$ ,  $\omega k_{i,j}^n$ ,  $\omega k_{i,j}^n$  sırasıyla  $p_\omega, k_\omega(S_\omega)$  ve  $k_o(S_\omega)$  fonksiyonlarının ağı her hangi bir  $(x_i, y_j, t_n)$  düğüm noktalarındaki yaklaşık değerlerini göstermektedir. (4.7) cebirsel denklemleri için başlangıç ve sınır koşulları

$$\omega^{P_{i,j}^0} = p_0, \tag{4.8}$$

$$\omega^{P_{-1,j}^n} = \omega^{P_{1,j}^n}, \quad \omega^{P_{N_x-1,j}^n} = \omega^{P_{N_x+1,j}^n}, \quad j = \overline{0, N_y}, \tag{4.9}$$

$$\omega P_{i,-1}^n = \omega P_{i,1}^n, \quad \omega P_{i,N_y-1}^n = \omega P_{i,N_y+1}^n, \quad i = \overline{0, N_x}$$

olmaktadır.

Şimdi (4.2) denklemini (4.5), (4.6) şartları dahilinde sonlu farklara ayırklaştıralım. Bilindiği üzere (4.2) denkleminin çözümünde çok pürüzsüz başlangıç verileri dahilinde bile birinci tür sıçrayışlar oluşur ki, bunlara literatürde darbe dalgaları denilir. İki boyutlu problemlerde ise söz konusu sıçrayışların sayısı sonsuz olabilir [38]. Bu özellik ise (4.2) denklemini ağın düğüm noktalarında direkt sonlu farklara ayırklaştırmayı zorlaştırır.

(4.2) denklemi suyun tabakalı ortamda korunum kuralını ifade eder. Fiziksel açıdan da suyun hareket hızı sonlu olduğundan ve su bir noktadan diğer noktaya ulaşırken tüm aralık noktalardan geçmelidir. Tersinmezlik olarak adlandırılan bu özellik çözüm metotlarını seçerken önem taşımaktadır. Denklemi formel olarak sonlu farklara ayırklaştırdığımızda, suni olarak çözümün bir noktadaki değeri ((4.2) denklemi durumunda) su ile doyma fonksiyonunu ortamdaki başka bir nokta ile bağlamak zorunda kalıyoruz. Bazı durumlarda hesaplamadan doğan heyecanlanma fiziksel (yani olayın fiziyinden doğan) heyecanlamadan daha hızlı hareket edebilir. Bu ise fiziksel sürecin dinamiğini bozabilir. Fiziksel açıdan da hareket eden cephenin önündeki nokta cephenin yaklaşmasını hisetmemelidir.

(4.2), (4.5), (4.6) probleminin sonlu farklara ayırklaştırılmasında alışılan metot, denklemin sağ tarafına suni difüzyon terimi eklemek, yani denklemi parabolikleştirmek ve sonra da denklemi diskretleştirmekten ibarettir. Bu durumda noktada oluşan fiziksel sıçrayış ağın birkaç düğüm noktalarına dağılır, çünkü difüzyon terim konvektif terimden oluşan etkiyi aradan kaldırır. Gradyentinin yüksek değer aldığı bölgelerde çözümün düzgün ifade edile bilme ihtiyacı bir çok pratik problemin ve matematiksel fizik denklemlerinin çözüm aşamasında önem taşır. Bu anlamda iki fazlı sıvıların birlikte hareketini ifade edebilen denklemler sistemin çözerken önerilen metotlardan yüksek hassaslık talep edilir.

[1], [2], [8], [25], [35], [40], [58], [59], [71] gibi aşamasında çok fazlı sıvıların tabakalı ortamda hareket denklemlerinin çözümün bulunması için homojen, yani sıçrayış noktalarını dikkate almayan bir metod önerilmiştir. Bu metotda sıçrayış birkaç düğüm noktalarına dağılır. Ayrıca sonlu farklar metodunu uygularken göz önüne alınan denklem değil modifike olunmuş denklemi çözeriz.

İki ölçülü denklemlerde sıçrayışın bulunması için talep daha yüksek olmaktadır. Bunun iki nedeni vardır. Birincisi bilgisayar hesaplaması açısından ekonomiklik hatırına ağırlık adımlarını büyük alırlar, böylece çözümün fiziksel özellikleri kaybolabilir. İkincisi ise çok boyutlu problemlerde sıçrayışın geometrik yapısı daha zor olur. Bu nedenle de çözüm metodundan yüksek çözünürlük talep edilir.

Süreksiz fonksiyonlarla, örneğin su ile doyma fonksiyonu ile çalışmak ve olayın fiziksel özelliklerini düzgün ifade edebilmek ve ayrıca denklemin çözümden talep ettiği diferansiyellenebilme mertebesinde az olan fonksiyonlarla çalışma zorunluluğu süreksiz fonksiyonlar sınıfında sonlu farklar metodunun geliştirilmesine neden olmuştur.

(4.2) denklemini incelemeyen önce

$$\vec{\mathcal{H}}_{\omega}(S_{\omega}(x, y, t)) = qF_{\omega}(S_{\omega}) + Ak \frac{k_o(S_{\omega})}{\mu_o} F_{\omega}(S_{\omega}) p'_c(S_{\omega}) \quad (4.10)$$

fonksiyonunu dahil edelim. (4.10) dönüşümünden sonra (4.2) denklemi aşağıdaki şekle

$$mA \frac{\partial S_{\omega}(x, y, t)}{\partial t} + \text{div}[\vec{\mathcal{H}}_{\omega}(S_{\omega}(x, y, t)) \text{grad} S_{\omega}(x, y, t)] = -q_{\omega} \quad (4.11)$$

indirgenir.

$$S_{\omega}(x, y, t) = u - \frac{1}{mA} \int_0^t q_{\omega}(\tau) d\tau$$

değişken dönüşümü yapalım ve [46] yı takip ederek aşağıdaki yardımcı denklemi ele alalım

$$\frac{\partial v_{\omega}(x, y, t)}{\partial t} + \vec{\mathcal{H}}_{\omega}(u(x, y, t)) = 0 \quad (4.12)$$

Görüldüğü gibi (4.12) denkleminde  $u(x, y, t)$  (dolayısıyla  $S_B(x, y, t)$ ) fonksiyonu hiçbir değişkene göre türevi içermez. Zaten bu türevler mevcut da değildir.

(4.12) için başlangıç ve sınır koşulları

$$v_{\omega}(x, y, 0) = v_0(x, y), \quad (4.13)$$

$$u|_{r_j} = (1 - S_{\omega}^{(0)}) + \int_0^t q_{\omega}(\tau) d\tau, \quad (j = 1, 2, \dots, N_{\omega}) \quad (4.14)$$

dır. Burada  $v_0(x, y)$  aşağıdaki

$$\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} = S_\omega^0 \quad (4.15)$$

denkleminin herhangi bir sürekli diferansiyellenebilen çözümüdür.

**Teorem 4.1** Eğer  $\vec{v}(x, t) = (v_x(x, y, t), v_y(x, y, t))$  vektör fonksiyonu (4.12)-(4.14) probleminin çözümü ise

$$u(x, y, t) = \frac{\partial v_x(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x, y, t)}{\partial y} \quad (4.16)$$

ifadesi ile tanımlanan  $u(x, y, t)$  fonksiyonu (4.11), (4.5), (4.6) probleminin çözümü olur.

(4.12)-(4.14) problemini  $\Omega_{hx,hy,\tau}$  ağının herhangi düğüm noktalarında sonlu farklara ayırıştırarak bu problem için çeşitli sonlu fark şemaları yazabiliriz.

(4.11), (4.5) ve (4.6) problemini

$$V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n + \tau \vec{H}_\omega(U_{i,j}^n) \quad (4.17)$$

$$V_{i,j}^0 = V_0(x_i, y_j) \quad (4.18)$$

$$U_{i,j}^n|_{r_j} = (1 - S_\omega^{(0)}) + \tau \sum_{i=1}^{i\tau} q_\omega(\tau_i) \quad (4.18)$$

aşık şeması ile sonlu farklara ayırıştırılalım. Burada  $V_0(x_i, y_i)$  ağ fonksiyonu, (4.15) denklemindeki  $\vartheta_0(x, y)$  fonksiyonunun  $(x_i, y_j)$  noktalarında aldığı değerleri göstermektedir.

$$U_{i,j}^{n+1} = \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i-1,j}^{n+1}}{h_x} + \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1}}{h_y} \quad (4.20)$$

olduğunu göstermek oldukça kolaydır.  $U_{i,j}^{n+1}$  ağ fonksiyonu bulunduktan sonra

$$\sum_\omega^{n+1} = U_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{mA} \int_0^{t_n} q_\omega(\tau) d\tau \quad (4.21)$$

formülü ile aradığımız su ile doyma fonksiyonu  $\Omega_{hx,hy,\tau}$  ağının tüm düğüm noktalarında yaklaşık değerlerini elde edebiliriz.



## 4.2 Çözüm Algoritması ve Bilgisayar Deneyleri

Bu bölümde (4.1)-(4.6) probleminin çözüm algoritmasını inceleyeceğiz. Bilindiği üzere kısmi türevli diferansiyel denklemi sonlu farklara ayrıklaştırdığımızda, bilinmeyenlerin katsayılarından oluşan ve bol sıfırları olan matrisli cebirsel (genelde nonlinear) denklemler sistemini elde ederiz. Bu tür cebirsel denklemler sistemi düz ve iterasyon metotları uygulamakla çözülür. İterasyon metotlarının uygulanması özel bilgi ve deneyim ister.

Şimdi problemin şemasını inceleyelim. Önce (4.7), (4.8) denklemler sistemi Jacobi metodunun yardımı ile çözülür ve ağın düğüm noktalarında  $P_{i,j}^{n+1}$  basınç fonksiyonları bulunur.

$$w^x = -M\Phi(P, S_0) \frac{\partial P}{\partial x},$$

$$w^y = -M\Phi(P, S_0) \frac{\partial P}{\partial y}$$

formülleri ile hesaplanır. (4.17)-(4.19) algoritmalarında  $V_{i,j}^{n+1}$  değerleri, sonra da (4.21) formülünü kullanarak  $\sum_{i,j}^{n+1}$  değerleri elde edilir. Pratik olarak  $\sum_{i,j}^{n+1}$  değerlerini bulmak zor değildir, ama yazdığımız şema aşıkard olduğundan ağın adımları üzerinde sağlanması gereken bir şart talep edilir.

Önerilen algoritma üzerine aşağıdaki problem çözülmüştür. (Pratikten elde edilen veriler kullanılmıştır) Petrol yatağının uzunluğu  $l = 600 \text{ m}$ , eni  $b = 600 \text{ m}$ , genel etkin katın yüksekliği  $h_0 = 20 \text{ m}$ . Yatağın kalınlığı üzerine sulaşma katsayısı  $l_2 = 0,75$  ve sulaşmış katın yüksekliği  $h = 15 \text{ m}$ , yatağın geçirgenliği ve gözenekliliği sırasıyla  $v = 0,5 \text{ mkm}^2$ , ve  $m = 0,2$  dir. Doğal rejimde petrolün ve suyun vizkoziteleri  $\mu_H = 4.10^{-3} \pi_a \cdot c$  ve  $\mu_B = 10^{-3} \pi_a \cdot c$  olmaktadır. Yatağa iki kuyudan su pompalanır, bir kuyudan petrol elde edilir. Yatağa her kuyudan  $q = 200 \text{ m}^3 / \text{gün}$  su pompalanır. Buckley-Leverett fonksiyonu

$$F(a) = \frac{K_\omega(u)}{\mu_\omega K_\omega(u) + \mu_\omega K(u)}$$

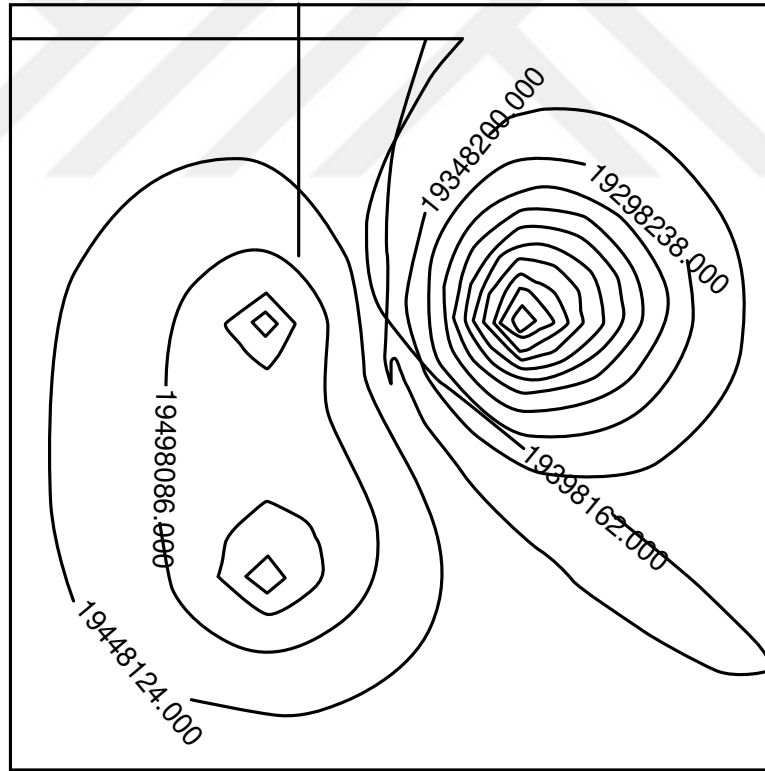
dir ve oransal faz geçirgenliği ise

$$k_{\omega}(x) = \begin{cases} \left( \frac{u-0,1}{u_*-u_0} \right)^2, & u_0 \leq u \leq u_1 \\ 0,8 \left( \frac{u-0,1}{u_*-u_0} \right)^{\frac{1}{2}}, & u_1 \leq u \leq u_* \end{cases}$$

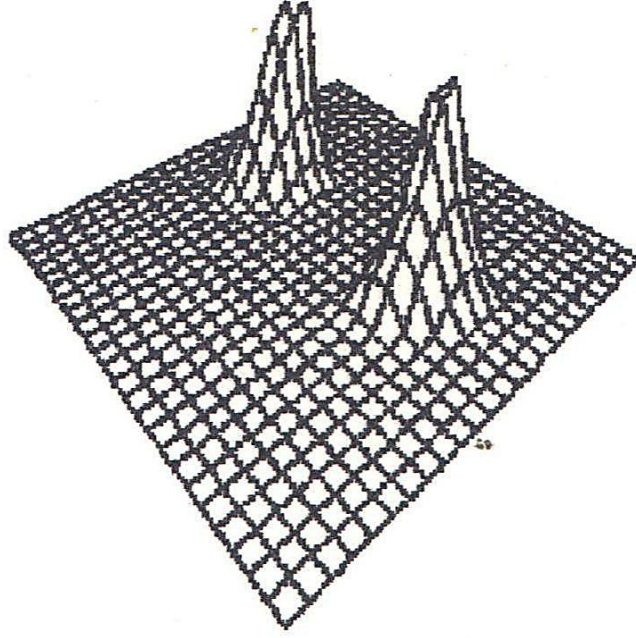
$$k_{\omega}(x) = \left( \frac{u-0,1}{u_*-u_0} \right)^2, \quad u_1 \leq u \leq u_*$$

olmaktadır. Burada  $u_0 = 0,1$ ,  $u_* = 0,8$  değerleri kullanılmıştır.  $u_1$  in değeri ise  $k_B(a) = k_H(u)$  eşitliğinden  $u_1 = 0,7$  olarak elde edilmiştir. Talep edilen bu fiziksel veriler çerçevesinde yataktaki basıncın ve su ile doyma fonksiyonlarının dinamik değerlerinin bulunması gerekmektedir.

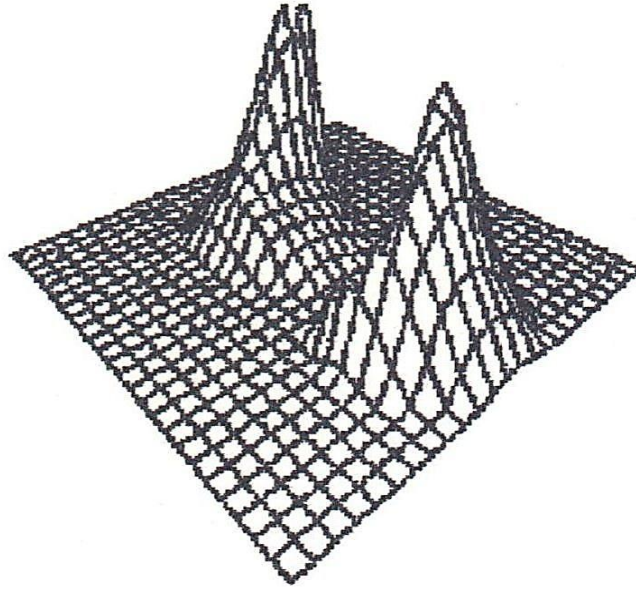
Önerilen algoritma üzerinde bilgisayar testleri yapılmış ve elde edilen sunular grafik şeklinde (Şekil 4.3-4.8) de gösterilmiştir.



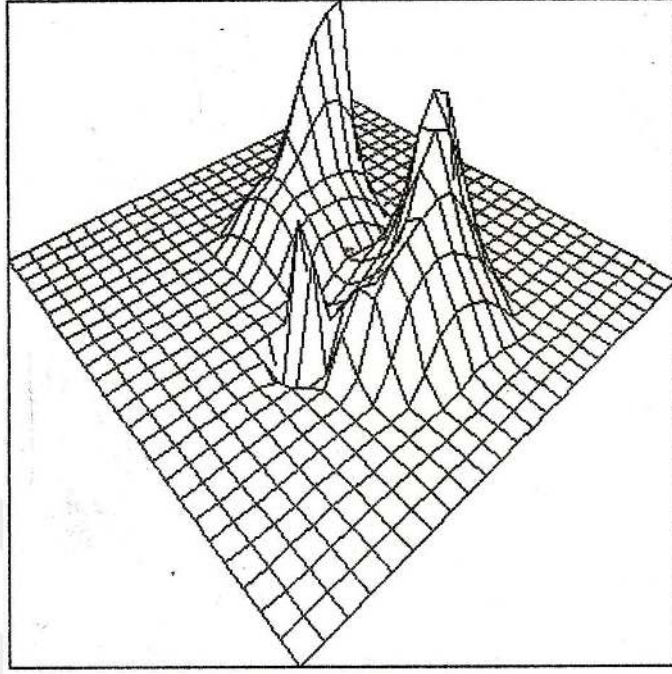
Şekil 4.3  $T = 600$  gün sonrası basıncın dinamik dağılımı



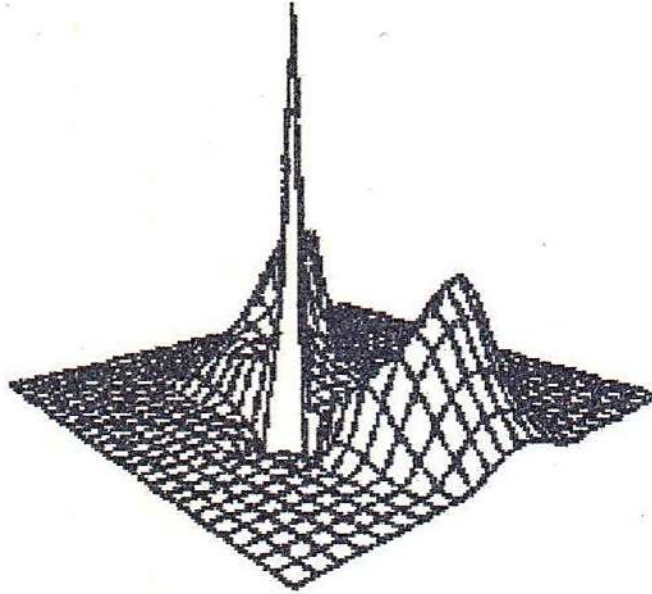
Şekil 4.4  $T = 600$  gün sonrası yatağa pompalanan suyun dinamik dağılımı



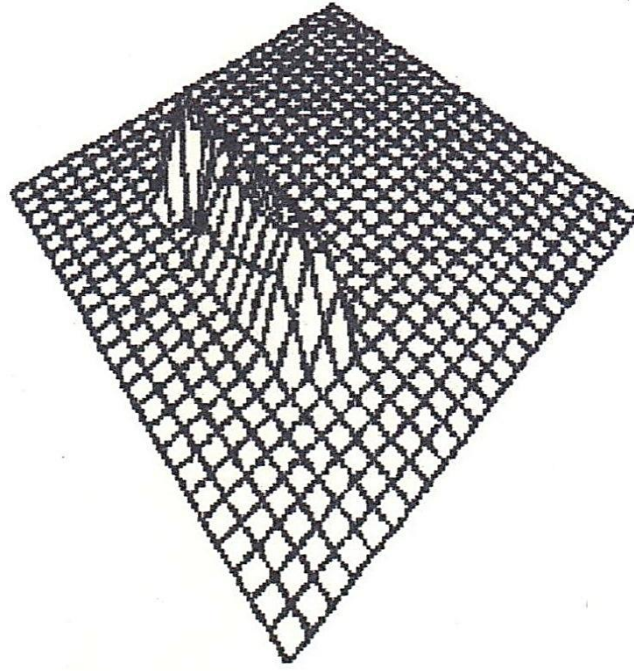
Şekil 4.5  $T = 1800$  gün sonrası yatağa pompalanan suyun dinamik dağılımı



**Şekil 4.6  $T = 1800$  gün sonrası yatağa pompalanan suyun dinamik dağılımı**



**Şekil 4.7  $T = 2200$  gün sonrası yatağa pompalanan suyun dinamik dağılımı**



**Şekil 4.8 Yatay kuyulardan yatağa pompalanan suyun dinamik dağılımı**

Şekillerden görüldüğü gibi önerilen algoritmalar petrol yataklarının işlenme sürecinde karşılaşılan istismar teknolojilerini gerçekleştirmeden önce bilimsel karar verilmesi için gereken simülasyonları yapmağa imkan verir. Ayrıca önerilen metotlar, bu incelediğimiz türden denklemlerin yanısıra matematik, fizik ve mühendislik dallarında da karşılaşılan ve özelliklere sahip problemlerin çözümünde de kullanılabilir.

## 5. SONUÇ

Tezde elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi sıralamak mümkündür:

1. Mikroskobik ortamda sıkışabilir iki fazlı sıvıların hareketini ifade eden nonlinear karışık tür kısmi diferansiyel denklemler sistemi fiziksel parametrelere göre ayrıklaştırılmıştır.
2. Esas problemin çözümlerinin diferansiyellenebilme özelliklerinden bir birim fazla diferansiyellenebilme özelliğine sahip ve birçok avantajları olan yardımcı problem önerilmiştir.
3. Singülerlik derecesi birden fazla olan nonlinear parabolik tür denklemin sayısal çözümünü elde etmek için 2.tür yardımcı problem önerilmiştir.
4. Antiparabolik denklem için yazılmış problemin sayısal çözümü için süreksiz fonksiyonlar sınıfında algoritmalar önerilmiştir.
5. Yardımcı problemin avantajlarını kullanarak süreksiz fonksiyonlar sınıfında efektif sonlu fark algoritmaları önerilmiştir ki, bu algoritmalar yardımı ile elde edilen çözümler problemin fiziksel özelliklerini düzgün ifade etmektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] Abasov M.T., Rasulov, M. A., On a Method of Solving the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dok. Vol.316 (4), 1991, 777-781.
- [2] Abasov, M.T., Rasulov, M.A., Ragimova, T.A., Identification of the Saturation Jump in the Process of Oil Displacement by Water in a Two-Dimensional Domain, Soviet Math. Dokl. USSR, Vol.319, (4) , 1992, 943-947.
- [3] Abrashin V.,N. On a Theory of Finite Differences Schemes for Nonstationary Equations of Mathematical Physics, Thesis of Doctor of Sciences, Moscow. 1979.
- [4] Ames, W. F., Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Academic Press, New York, London, 1965.
- [5] Ames, W. F., Numerical Methods for Partial Differential Equations, Academic Press, New York, 1977.
- [6] Anderson, D. A., Tannehill, J. C., Pletcher, R. H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Vol. 1, 2, Hemisphere Publishing Corporation Washington, 1984.
- [7] Antosik, P., Mikusinski, J., Sikorski, R., Theory of Distributions The Sequential Approach, Elsevier Scientific, Amsterdam, 1973.
- [8] Aziz, K., Settari, A., Petroleum Reservoir Simulation, Elsevier Applied Science Pub., London, 1979.
- [9] Baklanovskaya V. F. The Numerical Solution of a Nonstationary Filtration Problem, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol.1 (1), 1962, 114-122.
- [10] Baklanovskaya V. F. Numerical Solution One Dimensional problem for Nonstationary Equation of Filtration Type JVM and MF, Vol.1 (3), 1961, 461-469.
- [11] Barenblatt, G.I., Vishik, M.I., On Finite Velocity of Propagation in Problems of Non-Stationary Filtration of a Liquid ar Gas, Prikladnaja Matematika i Mehhamika, Vol. 20, 1956, 411-417.
- [12] Barenblatt, G.I., Entov, V.M., Rijik, V.M., Motions of Fluids and Gases in Reservoirs, Nedra Pub., Moscow, 1984.
- [13] Barenblatt G. I., Entov V. M., Rijik V. M., The Theory of Nonstationary Filtration of Oil and Gas, Nedra Pub., Moscow, 1972.
- [14] Budak, B.M. Uspenskii, A.B., A Difference Method with Front Straightening for Solving Stefan-Type Problems, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol.9 (6), 1969, 83-103.
- [15] Buckley, S.E., Leverett, M.C., Mechanism of Fluid Displacement in Sands, Trans. AIME, Vol. 146 ,1942, 107-116.
- [16] Carfi, H., Sinsoysal, B., "Otobanlarda Trafik Dinamiğinin İncelenmesi", Beykent University Journal of Science and Engineering, Vol.7 (1), 2014, 55-68.
- [17] Collins, R.E., Flow of Fluids through Porous Materials, Penn-Well, Tulsa, UK, 1976.

- [18] Courant, R., Nonlinear Partial Differential Equations, New York- London, 1962.
- [19] Dietmar, K., Numerical Schemes for Conservation Laws, Wiley, Teubner, 1997.
- [20] Douglis, A., An Ordering Principle and Generalized Solutions of Certain Quasi Linear Partial Differential Equations, Comm. Pure Appl. Math., Vol.12, 1959, 87-112.
- [21] Entov, B.M., Zazovskii, A.F., Hydrodynamics of Process of Increase of Oil Efficiency, Nedra, Moscow, 1989.
- [22] Fritz, J., Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1986.
- [23] Gelfand, I., Some Problems in the Theory of Quasi Linear Equations, Usp. Mat. Nauk., Vol.14, 1959, 87-158.
- [24] Gelfand, I. M., Shilov G. E., Generalized Functions, Vol. 1: Properties and Operations, Academic Press, New York, 1964.
- [25] Glimm, J., Solutions in the Large for Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations, Comm. Pure Appl. Math., Vol.18 1965, 95-105.
- [26] Godunov, S. K., Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1979.
- [27] Godunov, S. K., Ryabenkii, V. S., Finite Difference Schemes, Nauka, Moscow, 1972.
- [28] Goritskii, A. A., Krujkov, S. N., Chechkin, G. A., First Order Quasi Linear Equations with Partial Differential Derivatives, Pub. of Moscow University, Moscow, 1997.
- [29] Hopf, E., The Partial Differential Equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ , Comm. Pure Appl. Math., Vol.3, 1950, 201-230.
- [30] Kalashnikov A. S. Cauchy Problem for Equations of Unsteady Filtration in the Class of Unbound Solutions, Uspekhi Mat. Nauk, 18 Vol.4, 1963, 213-214
- [31] Kalashnikov A. S. Unbounded Solutions of the Cauchy Problem for Doubly Nonlinear Degenerate Parabolic Equations, Fundam. Prikl. Mat., Vol. 4 (2), 1998, 543-557.
- [32] Kruskov, S., First-Order Quasi Linear Equations with Several Space Variables, Mat. Sb., 123 (1970) 228-255; English Transl. In Math. USSR Sb., Vol.10, 1970, 217-273.
- [33] Lax, P. D., The Formation and Decay of Shock Waves, Amer. Math Monthly, Vol.79, 1972, 227-241.
- [34] Lax, P. D., Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 7 (1954) 159-193.
- [35] Lax, P. D., Wendorff, B., System of Conservation Laws, Comm. Pure Appl. Math., Vol.13, 1960, 217-237.
- [36] Lax, P. D., Hyperbolic Systems of Conservation Laws II, Comm. of Pure and App. Math., vol.10, 1957, 537-566.
- [37] Lusternik, L. A., Sobolev, V. I., Elements of Functional Analysis, Nauka, Moscow, 1965.
- [38] Moretti, G., On the Matter of Shock Fitting, "Proceedings of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Fluid dynamics", Springer – Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1975, pp. 55-63.



- [39] Muscat, M., The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Medium, McGraw-Hill, New York, 1946.
- [40] Noh, W. F., Protter, M. N., Difference Methods and the Equations of Hydrodynamics, Journal of Math. and Mechanics, Vol 12, No.2, (1963).
- [41] Oleinik, O. A., Discontinuous Solutions of Nonlinear Differential Equations, Usp. Math. Nauk, Vol.12 , 1957, 3-73.
- [42] Oleinik, O. A., Kalashnikov A.S. Chou Juj-lin, The Cauchy Problem and Boundary Problems for Equations of the Typen of Non- Stationary Filtration Izv. Akad. Nauk SSR Ser. Mat. Vol. 22 (5) 1958, 667-704
- [43] Petrovsky, I. G., Lectures on Partial Differential Equations, Inter Scence Publishers, Moskow, 1954.
- [44] Rapoport, L.A., Leas, W.T., Properties of Linear Water floods, Trans. AIME, 198 , 1953, 139-148.
- [45] Randall, J.L., Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University press, UK, 2002.
- [46] Rasulov, M.A., Finite Difference Scheme for Solving of Some Nonlinear Problems of Mathematical Physics in a Class of Discontinuous Functions, Baku, 1996. (in Russian)
- [47] Rasulov, M.A., On The Method Of Calculation of the First Phase Saturation During The Process Of Displacement of Oil By Water From Porous Medium, Appl. Math. Comput. 85, Vol.1, 1997, 1-16 .
- [48] Rasulov, M.A., Abasov, M.T., To the Theory Filtration of Three-Phase Mixes in View of Them Compressible, Sviet Math. Dokl. USSR 325, Vol.1, 1992, 130-133.
- [49] Rasulov, On a Method of Soluing the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dok., 43 (1) 1991.
- [50] Rasulov, M., Bal, H., Sinsoysal, B., Carfi, H., Finite Differences Scheme to the Solution of 2D Riemann Type Problem for Scalar Conservation Laws in a Class of Discontinuous Functions, Baku State University, Conference on Actual Problems of Theoretical and Applied Mathematics, 28-29 October, 2016, Baku, Azerbaijan.
- [51] Rasulov, M. A., Coşkun, E., Sinsoysal, B., İkinci Mertebeden Nonlineer Değişken Türlü Denklem İçin Cauchy Probleminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü, I. Türk Dünyası Matematik Sempozyumu, 29 Haziran- 2 Temmuz 1999, Fırat Üniversitesi, Elazığ.
- [52] Rasulov, M., Coşkun, E., Sinsoysal, B., A Finite Differences Method for a Two-Dimensional Nonlinear Hyperbolic Equation in a Class of Discontinuous Functions, App. Math. and Comp., Vol. 140, 2-3, 2003, 255-277.
- [53] Rasulov, M., Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Korunum Kuralları, Seçkin Yayınevi, İstanbul, 2011
- [54] Rasulov, M., Karagüler, T., Sinsoysal, B., Numerical Solution of Cauchy Problem for Second Order Nonlinear Wave Equation with Changeable Type in a Class of Discontinuous Functions, App. Math. and Comp., Vol. 147, 2004, 423-437.

- [55] Rasulov, M. A., Ragimova, T. A., A Numerical Method of the Solution of one Nonlinear Equation of a Hyperbolic Type of the First Order, *Differential Equations*, Minsk, vol. 28, No.7, 1992, 2056-2063.
- [56] Rasulov, M., Sinsoysal, B., Finite Difference Schemes for Solving Boundary Initial Value Problem of a System Equations of Gas Dynamic in a Class of Discontinuous Functions, The Third International Conference, "Tools for Mathematical Modelling", 18-23 June 2001, Saint Petersburg, Russia.
- [57] Rasulov, M. A., Yıldız, B., Bayram, M., On a Method of Calculation of the First Phase Saturation during the Process of Displacement of Oil by Water from Porous Media, *App. Math. Comp.*, 85, 1997, 1-16.
- [58] Richmyer, R. D., Morton, K. W., *Difference Methods for Initial Value Problems*, New Wiley Int., York, 1967.
- [59] Rozdestvenskii, B. L., Yanenko, N. H., *Systems of Quasi-Linear Equations*, Nauk, Moscow, 1960, (in Russian).
- [60] Samarskii, A. A., Galaktionov, V.A., Kurdyumov, S.P., Mikahilov, V.P., *Blow-up Quasi Linear Parabolic Equations*, Nauka, Moscow, 1987.
- [61] Samarskii, A. A., *Theory of Difference Schemes*, Nauka, Moscow, 1977.
- [62] Schwartz, L., *Théorie des Distributions*, Vols. I and II, Hermann, Paris, 1957-1959.
- [63] Sikorski, R., On Substitution in the Dirac Delta- Distribution, *Bull. Dead. Pol. Sci.*, 1960.
- [64] Sinsoysal, B., Carfi, H., Koç, N., A Finite Differences Scheme for Solving the System of Differential Equations of Non-Isentropic Flow in a Class of Discontinuous Functions, Sixth International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2017), August 15-18, 2017, Budapest, Hungary.
- [65] Sinsoysal, B., Carfi, H., Rasulov, M., A Study on the Dynamics of Solution of Riemann Type Problem in a Class of Discontinuous Functions, Fifth International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2016), 16-20 August 2016, Belgrade, Serbia.
- [66] Sinsoysal, B., Rasulov, M., Carfi, H., On Grid Method for Entropy Solution of the Problem of Simultaneous Motion of Two-Phase Fluid in a Natural Reservoir, *Asian Journal of Applied Sciences*, Vol.4, No.2, 2016, 286-302.
- [67] Smoller, J.A., *Shock Wave and Reaction Diffusion Equations*, Springer-Verlag Inc., New York, 1983.
- [67] Sneddon, I. N., *Elements of Partial Differential Equations*, Mc.-Graw- Hill Book Company Newyork, Toronto, London, 1957.
- [68] Sobolev, S. L., *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, Nauka, Moscow, 1978.
- [69] Stepanov, V. V., *A Course in Differential Equations*, Gostekhizdat, Moscow, 1950, (in Russian).
- [70] Tikhonov, A. N., Samarski, A. A., On Discontinuous Solution of First-Order Quasi Linear Equation, *DAN SSSR*, 99, Vol.1, 1954, 27-30.

- [71] Toro, E.F., Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [72] Whitham, G.B., Linear and Nonlinear Waves, Wiley Int., New York, 1974.



## ÖZGEÇMİŞ

Hasan CARFİ, 22.03.1972 tarihinde Bingöl’de doğdu. 2003 yılında Karaelmas İlkokulu’ndan, 2007 yılında Bingöl Lisesi Ortaokulu’ndan, 1991 yılında Bingöl Lisesi’nden, 2002 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Ana Bilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalında 2012 yılında başladığı yüksek lisans eğitimini ‘Otobanda Trafik Akış Dinamiğinin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Matematiksel Modeli ve Çözümü’ başlıklı tez ile 2014 yılında tamamlamıştır. 2014 yılında Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Ana Bilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalında doktora eğitimine başlamış olup halen devam eden tez aşamasının son haline gelmiştir. Çok fazlı sıvıların tabakalı ortamda akışının süreksiz fonksiyonlar sınıfında incelenmesi alanında çalışmalar yapmaktadır. Evli ve iki çocuk babasıdır.

**Hasan CARFİ**