



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**İKİ KATLI ÇARPIK ÇARPIM ALT MANİFOLDLARIN
GEOMETRİSİ**

Yankı ÜLKER

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN

NİSAN, 2022

İSTANBUL

Bu alışma 29.04.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakóltesi

Dr. Öğr. Üyesi Sinem GÜLER
İstanbul Sabahattin Zaim Üniversitesi
Mühendislik Ve Doęa Bilimleri Fakóltesi

Dr. Öğr. Üyesi Beran PİRİNÇÇİ
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakóltesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

- **Proje Destekleri**

Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) nun 119F207 numaralı 1002- Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programı kapsamında desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana bilgi ve tecrübeleriyle yön gösteren her konu da destek olan danışmanım Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN'a teşekkür ederim.

NİSAN, 2022

Yankı ÜLKER



İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vii
ÖZET	ix
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	4
2.1. RİEMANNİYEN MANİFOLDLAR	4
2.1.1. Riemanniyen Alt Manifoldlar	9
2.2. KATLI ÇARPIK ÇARPIM MANİFOLDLAR	16
2.2.1. Katlı Çarpık Çarpım Manifoldlar	16
2.3. YEREL ÇARPIM RİEMANNİYEN MANİFOLDLAR	20
2.3.1. Yerel Çarpım Riemanniyen Manifoldlar	20
2.3.2. Yerel Çarpım Riemanniyen Manifoldun 1. Dereceden Yamuk Yarı - Değişmez Alt Manifoldları	21
2.3.3. Bir Yerel Çarpım Riemanniyen Manifoldun Değişmez Alt Manifoldları	24
2.3.4. Bir Yerel Çarpım Riemanniyen Manifoldun Ters - Değişmez Alt Manifoldları	24
2.3.5. Bir Yerel Çarpım Riemanniyen Manifoldun Eğik Alt Manifoldları	25
2.3.6. Bir Yerel Çarpım Riemanniyen Manifoldun Yarı - Değişmez Alt Manifoldları	26
2.3.7. Bir Yerel Çarpım Riemanniyen Manifoldun Yarı - Eğik Alt Manifoldları	27
2.3.8. Bir Yerel Çarpım Riemanniyen Manifoldun Kısmi - Eğik Alt Manifoldları ...	28
3. MALZEME VE YÖNTEM	30
4. BULGULAR	31
4.1. YEREL ÇARPIM RİEMANNİYEN MANİFOLDLARDA İKİ KATLI ÇARPIK ÇARPIM ALT MANİFOLDLAR	31
4.2. $M_\theta \times_F M_T \times_\sigma M_\perp$ FORMUNDAKİ İKİ KATLI ÇARPIK ÇARPIM 1. DERECEDEN HAS YAMUK YARI-DEĞİŞMEZ ALT MANİFOLDLAR	34

4.3. $M_\theta \times_F M_T \times_\sigma M_\perp$ FORMUNDA BİR (AŞIKAR OLMAYAN) İKİ KATLI ÇARPIK ÇARPIM 1.DERECEDEN HAS YAMUK YARI-DEĞİŞMEZ ALT MANIFOLD İÇİN BİR EŞİTSİZLİK	48
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	57
6. KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ	63



SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Cismi
$\mathbb{R}^n$	: n -Boyutlu Öklid Uzayı
M	: Riemanniyen Manifold
$Boy(M)$	: M Riemanniyen Manifoldun Boyutu
$T_p M$	: M Manifoldunun p Noktasındaki Teğet Uzayı
C^∞	: Diferansiyellenebilirlik Sınıfı
$\Gamma(TM)$	: M Manifoldunun Teğet Demetine Ait Vektör Alanlarının Kümesi
$\Gamma(T^\perp M)$	: M Manifoldunun Normal Demetine Ait Vektör Alanlarının Kümesi
∇	: Levi-Civita Koneksiyon Ya Da Riemanniyen Koneksiyon
F	: Hemen Hemen Çarpım Yapı
D^T	: Değişmez Dağılım
$D^\perp$	: Ters Değişmez Dağılım
D^θ	: θ Eğik Açılı Eğik Dağılım

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ KATLI ÇARPIK ÇARPIM ALT MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

Yankı ÜLKER

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN

Bu tez çalışmasının amacı yerel çarpım Riemanniyen manifoldların belirli bir tipteki iki katlı çarpık çarpım alt manifoldlarının geometrisini incelemektir.

Bu tez altı bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde tezin konusu tanıtılmıştır. İkinci bölüm üç alt bölüme ayrılmıştır. Birinci alt bölümde Riemanniyen manifold ve alt manifold kavramlarından bahsedilmiştir. İkinci alt bölümde ise bu tez üzerinde yoğunlaşacağımız katlı çarpık çarpım manifoldlardan bahsedilmektedir. Üçüncü alt bölümde ise yerel çarpım Riemanniyen manifoldlardan ve yerel çarpım Riemanniyen manifoldların değişmez, ters-değişmez, eğik, yarı değişmez, yarı eğik ve kısmi eğik gibi alt manifoldları hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde tez çalışmasının hazırlanmasında izlenen yöntemlerden ve kullanılan araçlardan bahsedilmiştir.

Dördüncü bölüm tezimizin asıl kısmını oluşturur. Bu bölümde bir yerel çarpım Riemanniyen manifoldun baz çarpanı has eğik alt manifold, lif çarpanlarının birisi değişmez diğeri de ters-değişmez olan iki katlı çarpık çarpım alt manifoldları ele alınmış ve çalışılmıştır. Öncelikle bu tip alt manifoldlar için varlık teoremi ispatlanmıştır. Daha sonra bu tip alt

manifoldların çarpık çarpım olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Ayrıca bu tip alt manifoldlar için bir genel eşitsizlik inşa edilmiş ve bu eşitsizliğin eşitlik hali irdelenmiştir. Son olarak bu eşitsizliğin bir uygulaması verilmiştir.

Beşinci bölümde bu tez çalışmasının bir genel değerlendirmesi yapılmıştır. Son bölümde ise bu tezde kullanılan çalışmalar listelenmiştir.

Nisan, 2022, 75 sayfa.

Anahtar kelimeler: Değişmez dağılım, ters-değişmez dağılım, eğik dağılım, çok katlı çarpık çarpım manifold, 1.dereceden iki katlı çarpık çarpım yarı-değişmez alt manifold, yerel çarpım Riemanniyen manifold.



SUMMARY

M.Sc. THESIS

THE GEOMETRY OF BIWARPED PRODUCT SUBMANIFOLDS

Yankı ÜLKER

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Prof.Dr. Hakan Mete TAŞTAN

The aim of this thesis is to examine a certain type of biwarped product submanifolds of locally product Riemannian manifolds.

This thesis consists of six sections. In the first chapter, the subject of the thesis is presented. The second part is divided into three subsections. In the first subsection, the concepts of Riemannian manifold and submanifold are mentioned. In the second subsection, multiply warped product manifolds, which we will focus on this thesis, are mentioned. In the third subsection, we recall that the well known some submanifolds of locally product Riemannian manifolds such as invariant, anti-invariant, slant, semi-invariant, semi-slant and hemi-slant.

In the third chapter, tools and methods that are used through the thesis are mentioned.

The fourth chapter the main part of our thesis. In this section, we consider and study of the biwarped product submanifold of locally product Riemannian manifold whose base factor is proper slant and the one of the fiber factor is invariant and the other fiber factor is anti-invariant. First of all, the existence theorem has been proved for such submanifolds. Later, the necessary and sufficient conditions for such submanifolds to be warped products are given. In addition, a general inequality_x for such submanifolds has been constructed

and the equality case of this inequality has been examined. Finally, an application of this inequality is given.

In the fifth chapter, a general evaluation of this thesis study is made. In the last chapter, the studies used in this thesis are listed.

April, 2022, 75 pages.

Keywords: Invariant distribution, anti-invariant distribution, slant distribution, multiply warped product manifold, biwarped product semi-invariant submanifold of order 1, locally product Riemannian Manifold.



1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride aktif olarak çalışılan alanlardan birisi de alt manifoldlar teorisidir. Çeşitli tipte alt manifoldlar mevcuttur, şöyle ki verilen bir alt manifoldun teğet uzayını çevreleyen manifoldun hemen hemen çarpım yapısı altındaki davranışı o alt manifoldun bir tipini belirler. Şöyle ki; eğer alt manifoldun teğet uzayı hemen hemen çarpım yapı altında değişmiyorsa o alt manifold değişmez, eğer hemen hemen çarpım yapı altında normal uzaya resmediliyorsa ters-değişmez adını alır. Bir yerel çarpım Riemanniyen manifoldun değişmez ve ters-değişmez alt manifoldları ilk olarak Adati [1] tarafından tanımlanıp çalışılmıştır.

Değişmez, ters-değişmez alt manifoldların doğal genelleştirilmeleri olarak Bejancu [6] yarı-değişmez alt manifold kavramına giriş yapmıştır. Bir yarı-değişmez alt manifold ne değişmez ne de ters-değişmez ise ona has yarı-değişmez denir.

Bir yerel çarpım Riemanniyen yapıda değişmez ve ters-değişmez alt manifoldlarının bir diğer genelleştirilmiş de eğik alt manifoldlardır. Bu tip alt manifoldlar ilk olarak Şahin [18] tarafından tanımlanmıştır. Bir eğik alt manifoldda sıfırdan farklı bir teğet vektörün hemen hemen çarpım yapısı altındaki görüntüsü ile teğet uzay arasındaki açı sabittir. Bu açı 0 ise eğik alt manifold değişmez $\frac{\pi}{2}$ ise ters-değişmez alt manifoldda dönüşür. Bir eğik alt manifold ne değişmez ne de ters-değişmez ise has eğik alt manifold adını alır. Öte yandan bir yerel çarpım Riemanniyen manifoldun yarı-değişmez ve eğik alt manifoldlarını genelleştiren yarı-eğik alt manifold kavramı ilk olarak Şahin tarafından [20] ortaya atılmıştır. Gerçekten yarı-eğik manifoldun eğik açısı $\theta = \frac{\pi}{2}$ olması durumunda yarı-eğik alt manifold yarı-değişmez haline ve yarı-eğik alt manifoldun değişmez dağılımı $D = \{0\}$ ise eğik alt manifold haline dönüşür.

Bir yerel çarpım Riemanniyen yapıda bir yarı-değişmez alt manifold kavramının bir diğer genelleştirilmişide Taştan ve Özdemir [24] tarafından kısmi-eğik alt manifold olarak

tanımlanmıştır. Bu durumda bu kısmi-eğik alt manifoldun teğet demeti birbirine dik ters-değişmez dağılım $D^\perp$ ve eğik dağılım D^θ dan oluşur. Eğer $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ve $D^\perp \neq \{0\}$ ise, o kısmi-eğik alt manifolda has denir.

Has durumda yarı-eğik ve kısmi-eğik kavramlarının birbirlerini içermediğini gözlemleyebiliriz. Öte yandan çarpık çarpım alt manifoldlar teorisi Chen [9] nin Kaehleriyen yapılarda çarpık çarpım CR - alt manifoldları çalışmasından beri oldukça popüler bir çalışma alanı haline gelmeye başlamıştır. O zamandan beri değişik tipte çarpık çarpım alt manifoldlar tanımlandı ve yaklaşık Kaehler, para-Kaehler, kosimpletik, Sasakiyen, genelleştirilmiş Sasakiyen, aşkın-Sasakiyen, Kenmotsu ve Kuaternionan gibi tanınmış yapılarda çalışılmaya başlandı ve halen çalışıla gelmektedir.

Çarpık çarpım alt manifoldlar yerel çarpım Riemanniyen yapılarda da çalışılmaktadır. Gerçekten, baz çarpanı değişmez lif çarpanı ters-değişmez alt manifold olan çarpık çarpım alt manifoldlar, daha değişik ifadeyle $M_T \times_f M_\perp$ tipindeki çarpık çarpım alt manifoldlar, burada M_T , bir yerel çarpım Riemanniyen manifoldun değişmez, $M_\perp$ ise ters-değişmez alt manifolddudur, hem Atçeken [4], hem de Şahin [19] tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmalarda bir yerel çarpım Riemanniyen manifoldun f çarpık fonksiyonun sabit olma durumu hariç $M_\perp \times_f M_T$ biçimindeki çarpık çarpım alt manifoldlara izin vermediği gözlemlenmiştir.

Öte yandan bir yerel çarpım Riemanniyen yapıda çarpık çarpım yarı-eğik alt manifoldlar, daha net ifadeyle $M_\theta \times_f M_T$ biçimindeki alt manifoldlar hem Atçeken [3] hem de Şahin [20] tarafından çalışılmıştır, burada M_θ bir has eğik alt manifolddur. Bu çalışmalarda, f çarpık fonksiyonunun sabit olduğu durumlar hariç $M_T \times_f M_\theta$ biçimindeki çarpık çarpım yarı-eğik alt manifoldlar bir hemen hemen Riemanniyen yapıda mevcut olmadığı kanıtlanmıştır.

Taştan [22] ise bir hemen hemen Riemanniyen yapıda $(M_\theta \times M_\perp) \times_f M_T$ biçimindeki çarpık çarpımları tanımlayıp çalışmıştır, görüldüğü üzere burada baz çarpan bir kısmi-eğik alt manifolddur. Bu çalışmada bir yerel çarpım Riemanniyen yapının f çarpık fonksiyonunun

sabit olduğu durumlar hariç $M_T \times_f (M_\theta \times M_\perp)$ biçimindeki çarpık çarpımlara izin vermediği gösterilmiştir. İki katlı çarpık çarpımlar teorisi ise Taştan [23]’nın $M_T \times_f M_\perp \times_\sigma M_\theta$ biçimindeki alt manifoldları Kaehleriyen yapılarda tanımlayıp çalışmasıyla birlikte yeni bir çalışma alanı olarak öne çıkmaktadır, burada M_θ , bir Kaehleriyen manifoldun bir has (noktasal) eğik alt manifoldudur. Gerçekten, bu çalışmayı takiben iki katlı çarpık çarpımlar değişik yapılarda çalışılmaya başlamıştır, (bkz, [2] [26], [27], [28], [29]).

Biz bu tezde bir yerel çarpım Riemanniyen yapıda çarpık fonksiyonların sabit olma durumları hariç, $M_T \times_f M_\perp \times_\sigma M_\theta$ ve $M_\perp \times_f M_\theta \times_\sigma M_T$ biçimindeki iki katlı çarpık çarpımların mevcut olmadığını kanıtlayıp $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ biçimindeki iki katlı çarpık çarpım alt manifoldları çalışacağız, burada M_T değişmez, $M_\perp$ ters-değişmez ve M_θ da bir has eğik alt manifoldtur.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. RIEMANNİYEN MANİFOLDLAR

Tanım 2..1 [21] M bir manifold

$$g : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

g formu simetrik ve pozitif tanımlı olmak üzere, yani her $U, V \in \Gamma(M)$ için

- a) $g(U, V) = g(V, U)$
- b) $g(U, U) \geq 0$ ve $g(U, U) = 0 \Leftrightarrow U = 0$

koşulları sağlanıyorsa g bilineer formuna, Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir. (M, g) ikilisine Riemanniyen manifoldu denir.

Örnek 2..1 [21] $\mathbb{R}^n$ uzayında

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

iç çarpımı bilineer, pozitif ve simetriktir. $\langle, \rangle$ Riemann metriktir.

Örnek 2..2 [21] (M, g) ve (B, g') , $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ve $\{(\mathcal{V}_\beta, \phi_\beta)\}_{\beta \in J}$ diferensiyellenebilir yapılara sahip Riemann manifoldları olmak üzere $\{(U_\alpha \times \mathcal{V}_\beta)_{\alpha \in I, \beta \in J}, M \times B$ topolojik çarpım uzayı için bir açık örtü oluşturur.

$$\begin{aligned} \phi_\alpha \times \phi_\beta : \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta &\longrightarrow \mathbb{R}^{m+n} \\ (p, q) &\longrightarrow \phi_\alpha \times \phi_\beta(p, q) = (\phi_\alpha(p), \phi_\beta(q)) \end{aligned}$$

dönüşümüne göre $(\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta, \phi_\alpha \times \phi_\beta)$, $M \times B$ için diferensiyellenebilir yapısına çarpım manifoldu denir. $M \times B$ manifoldunu π_1 ve π_2 de $M \times B$ den sırasıyla M ve B ye olan projeksiyonları gösterebilir.

$$g_{M \times B}(X, Y) = \pi_1^* g(X, Y) + \pi_2^* g'(X, Y)$$

olmak üzere bu ifade

$$g_{M \times B}(X, Y) = g(\pi_{1*} X, \pi_{1*} Y) + g'(\pi_{2*} X, \pi_{2*} Y)$$

biçiminde de yazılabilir. $g_{M \times B}$, simetrik bilineerdir. Kabul edelim ki $V = 0$ için

$$g_{M \times B}(V, V) = 0 \quad V \in \Gamma(M \times B)$$

olsun. Bu durumda

$$g_{M \times B}(V, \pi_{1*}(V)) = g(\pi_{1*}(V), \pi_{1*}(V)) = 0$$

$$\Rightarrow \pi_{1*}(V) = 0$$

ve

$$g_{M \times B}(V, \pi_{2*}(V)) = g(\pi_{2*}(V), \pi_{2*}(V)) = 0$$

$$\Rightarrow \pi_{2*}(V) = 0$$

böylece $V = 0$ olur. Bu durumda $g_{M \times B}$ formunun pozitif tanımlı olduğu elde edilir.

$(M \times B, g_{M \times B})$ bir Riemann manifoldudur.

Teorem 2..1 [21] (M, g) Riemann manifoldu üzerinde torsiyonsuz ($T = 0$) ve $\nabla g = 0$ olacak şekilde bir tek ∇ lineer konneksiyonu vardır.

İspat: [21] $T = 0$ ve $\nabla g = 0$ olmak üzere bir ∇ konneksiyonu var olsun.

$U, V \in \Gamma(M)$ için $T(U, V) = 0$ olduğundan

$$[U, V] = \nabla_U V - \nabla_V U \tag{2.1}$$

dır. $Z \in \Gamma(M)$, $(\nabla_X g)(U, Z) = 0$ olduğundan

$$Ug(V, Z) = g(\nabla_U V, Z) + g(V, \nabla_U Z) \quad (2.2)$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$g(\nabla_U V, Z) = Ug(V, Z) - g(V, \nabla_Z U) + g([V, U], Z)$$

olur. Bu işlem devam ettirilirse

$$g(\nabla_U V, Z) = Ug(V, Z) + Vg(Z, U) - Zg(U, V) + g(Z, [U, V]) + g(V, [Z, U]) - g(U, [V, Z]) - g(\nabla_U V, Z)$$

bulunur. Buradan Koszul formülü

$$g(\nabla_U V, Z) = \frac{1}{2} \{ Ug(V, Z) + Vg(Z, U) - Zg(U, V) + g(Z, [U, V]) + g(V, [Z, U]) - g(U, [V, Z]) \} \quad (2.3)$$

denklemini elde edilir. Bu ifade de M manifoldu üzerinde (2.1) ve (2.2) şartlarını sağlayan her ∇ konneksiyonu için sağlandığından ve g Riemann metriği pozitif tanımlı olduğundan ∇ tektir. $U, V \in \Gamma(M)$ olmak üzere ∇ konneksiyonu (2.3) ile tanımlayalım. Bu durumda ∇ lineerdir. Kolayca görülür ki (2.1) ve (2.2) şartlarını sağlar. Teorem 2.1 de verilen konneksiyona Levi-Civita, Riemann yada metrik konneksiyon denir. M Riemann manifoldunun U komşuluğundaki koordinat sistemi $x^1, \dots, x^n$ ve ortonormal çatısı $E_1, \dots, E_n$ olsun. Bu durumda

$$\nabla_{E_k} E_j = \sum_i \Gamma_{kj}^i E_i$$

ile tanımlı $\Gamma_{kj}^i : C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu fonksiyonlara Christoffel sembolleri denir. ∇ Levi-Civita konneksiyonu olduğundan gerekli işlemler yapılırsa

$$E_i(g(E_r, E_j) + E_j(g(E_r, E_i)) - E_r(g(E_i, E_j))) = g(\nabla_{E_i} E_r, E_j) + g(E_r, \nabla_{E_i} E_j)$$

$$\begin{aligned}
& +g(\nabla_{E_j} E_r, E_i) + g(E_r, \nabla_{E_j} E_i) - g(\nabla_{E_r} E_i, E_j) - g(E_i \nabla_{E_r} E_j) \\
& +g(E_r, \nabla_{E_j} E_i) - g(\nabla_{E_r} E_i, E_j) - +g(E_i, \nabla_{E_r} E_j) \\
& = \sum_{i=1}^n \Gamma_{ir}^k g(E_k, E_j) + \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^k g(E_r, E_k) + \sum_{i=1}^n \Gamma_{jr}^k g(E_k, E_i) \\
& + \sum_{i=1}^n \Gamma_{ji}^k g(E_r, E_k) - \sum_{i=1}^n \Gamma_{ri}^k g(E_k, E_j) - \sum_{i=1}^n \Gamma_{rj}^k g(E_i, E_k) \\
& = \sum_{i=1}^k \{(\Gamma_{ir}^k - \Gamma_{ri}^k) g(E_k, E_j) + (\Gamma_{jr}^k - \Gamma_{rj}^k) g(E_k, E_i) \\
& + (\Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ij}^k) g(E_r, E_k)\}
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}
[E_k, E_s](f) &= E_k[E_s(f)] - E_s[E_k(f)] \\
&= E_k\left(\frac{\partial f}{\partial E_k}\right) - E_s\left(\frac{\partial f}{\partial E_k}\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial E_k \partial E_s} - \frac{\partial^2 f}{\partial E_s \partial E_k} = 0
\end{aligned}$$

olduğundan $[E_k, E_s] = 0$ bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
[E_k, E_s] &= \nabla_{E_k} E_s - \nabla_{E_s} E_k \\
&= \sum_{t=1}^n \Gamma_{sk}^t E_t - \sum_{t=1}^n \Gamma_{ks}^t E_t \\
&= \sum_{t=1}^n (\Gamma_{sk}^t - \Gamma_{ks}^t) E_t
\end{aligned}$$

$E_1, \dots, E_n$ lineer bağımsız olduklarından

$$\Gamma_{sk}^t - \Gamma_{ks}^t = 0$$

$$\Gamma_{sk}^t = \Gamma_{ks}^t$$

bulunur. Buna göre $1 \leq i, j, k, r \leq n$ iken

$$E_i(g(E_r, E_j)) + E_j(g(E_r, E_i)) - E_r(g(E_i, E_j)) = 2 \sum_{k=1}^n \Gamma_{ji}^k g_{kr}$$

$$E_i[g_{rj}] + E_j[g_{ri}] - E_r[g_{ij}] = 2 \sum_{k=1}^n \Gamma_{ji}^k g_{kr}$$

dir. Burada g_{ij} ve $[g_{ij}]$ g_{ij} matrisini göstermektedir. Böylece

$$\begin{aligned} [\Gamma_{ji}^k] &= \frac{1}{2} g^{kr} \{E_i[g_{rj}] + E_j[g_{ri}] - E_r[g_{ij}]\} \\ &= \frac{1}{2} g^{kr} \left\{ \frac{\partial g_{rj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n g^{kr} \left\{ \frac{\partial g_{rj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada g^{kr} , $[g_{kr}]$ matrisinin tersi olan matrisin bileşenlerini göstermektedir.

Böylece

$$\Gamma_{ji}^k = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n g^{kr} \left\{ \frac{\partial g_{rj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r} \right\} \quad (2.4)$$

olur. Bu ifade Christoffel sembollerini dolayısıyla Levi-Civita konneksiyonunun metrik tensörün bileşenleri türünden elde edileceğini göstermektedir.

Tanım 2..2 [21] (M, g) bir Riemanniyen manifold ve ∇ , M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü

$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$, herhangi $U, V, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R(U, V)Z = \nabla_U \nabla_V Z - \nabla_V \nabla_U Z - \nabla_{[U, V]} Z \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlı $(3, 1)$ -tipinden bir tensör alanıdır.

Tanım 2..3 [32] (M, g) , n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerindeki ortonormal çatı alanı $E_1, \dots, E_n$ olmak üzere $X, Y \in \Gamma(M)$ için

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(E_i, X)Y, E_i) \quad (2.6)$$

ifadesi $(0, 2)$ tipinden bir simetrik tensör alanıdır ve M nin Ricci tensörü denir. Ricci tensörünü kullanarak M nin τ skaler eğriliği

$$\tau = \sum_{i=1}^n S(E_i, E_i) \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2..4 [32] (M, g) , n -boyutlu bir Riemann manifold X ve Y , M nin bir noktasında lineer bağımsız iki vektör olmak üzere, X ile Y tarafından gerilen düzlem kesiti için kesitsel eğrilik

$$K(X, Y) = \frac{R(X, Y; Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g^2(X, Y)} \quad (2.8)$$

şeklinde olur. Kesitsel eğrilik bütün düzlem kesitleri için aynı c sabitine eşit olursa M ye sabit eğrilikli uzay ya da bir reel uzay form denir ve $M(c)$ ile gösterilir.

2.1.1. Riemanniyen Alt Manifoldlar

Bu bölümde Riemann alt manifoldunun tanımı verilir ve alt manifoldun incelenmesinde kullanılan yöntemler ve formüllerden bahsedilecektir.

Tanım 2..5 [21] $(\bar{M}, g)$ m -boyutlu ve M n -boyutlu manifold olsun. $i : M \rightarrow \bar{M}$ immersiyonu M üzerinde i^*g ile tanımlı simetrik bilinear ve pozitif tanımlı form olsun. Bu formu g ile gösterelim. Bu durumda (M, g) Riemann manifoldu ve i de izometrik üst daldırma olur. Manifoldun ek boyutu $m - n$ olur. Burada i içirme dönüşümü olarak alındığından $i(p)$ ile p ve $i_*(X)$ ile $X \in \chi(M)$ özdeş kabul edilecektir.

$p \in M$ noktasında alt manifoldun tanjant uzayı $T_p M$, $T_p \bar{M}$ tanjant uzayının alt vektör uzayıdır. $T_p M$ uzayına dik olan tamamlayan uzayı $T_p M^\perp$ ile gösterelim. $T_p M^\perp$ uzayına

normal uzay $TM^\perp$ teğet demete normal demet denir. $T_p\bar{M}$ uzayı için

$$T_p\bar{M} = T_pM \oplus TM^\perp \quad (2.9)$$

veya

$$T\bar{M} = TM \oplus TM^\perp \quad (2.10)$$

dır. $V \in T_pM^\perp$ vektörüne normal vektör denilir. Normal vektör alanlarının kümesi ise $\chi(M)^\perp$ yada $\Gamma(TM^\perp)$ ile gösterilir. Birim normal vektöre de normal kesit ismi verilir. $\bar{M}$ üzerindeki konneksiyon $\bar{\nabla}$ ve $X, Y \in \Gamma(TM)$, $V \in \Gamma(TM^\perp)$ için

$$(\bar{\nabla}_X Y)^T = \nabla_X Y \quad (\bar{\nabla}_X Y)^\perp = \nabla_X^\perp V$$

ile tanımlayalım, $(\bar{\nabla}_X Y)^T$, $(\bar{\nabla}_X Y)$ nin teğet, $(\bar{\nabla}_X Y)^\perp$ de $(\bar{\nabla}_X Y)$ nin normal bileşenini göstermektedir.

$$(\bar{\nabla}_X Y)^\perp = h(X, Y) \quad (2.11)$$

$$(\bar{\nabla}_X V)^T = -A_V X \quad (2.12)$$

ile tanımlanırsa h simetrik ve bilineerdir. Böylece

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (2.13)$$

ve

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^\perp V \quad (2.14)$$

elde edilir. (2.13) Gauss formülü, (2.14) ise Weingarten formülü olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 2..1 [21] ∇ , M üzerinde Levi-Civita konneksiyonudur.

İspat: [21] ∇ lineer konneksiyondur. Levi-Civita konneksiyonu olduğunu gösterelim. $Xg(Y, Z)$ açılımını $\bar{\nabla}$ konneksiyonuna göre yaparsak

$$Xg(Y, Z) = g(\bar{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \bar{\nabla}_X Z)$$

ifadesine (2.13) uygulanırsa

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y + h(X, Y), Z) + g(Y, \nabla_X Z + h(X, Z))$$

olur. (2.9) dan $h(X, Y)$ ile Z ve Y vektör alanları birbirine dik olduğu için

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

elde edilir. Yani $(\nabla_X g(Y, Z)) = 0$ dır. Torsiyonsuz olduğunu göstermek için $[X, Y]$ Lie braketi $\bar{\nabla}$ konneksiyonuna göre açılımından

$$[X, Y] = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X$$

elde edilir. (2.13) uygulanırsa

$$[X, Y] = \nabla_X Y + h(X, Y) - \nabla_Y X - h(Y, X)$$

buradan denklemin teğet demeti ve normal demeti üzerindeki bileşenleri eşlenirse

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

$$h(X, Y) = h(Y, X) \quad (2.15)$$

olur ki buda ∇ konneksiyonunun torsiyonsuz olduğunu gösterir ve ispat biter.

Tanım 2..6 [21] $h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)^\perp$ ile tanımlanan h dönüşümüne ikinci temel form ve ∇ Levi Civita konneksiyonuna indirgenmiş konneksiyon adı verilir. Ayrıca Yardımcı Teorem 2.1 e benzer olarak görülür ki $W \in \Gamma(TM^\perp)$ olmak üzere $(\nabla_X^\perp g)(V, W) = 0$ dır. Yani $\nabla^\perp$ normal demet üzerinde metrik konneksiyondur. $A_V : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ dönüşümü Weingarten tensörü olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 2..2 [21] $(\bar{M}, g)$ bir Riemann manifold M , $\bar{M}$ manifoldunun alt manifoldu olmak üzere $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(TM^\perp)$ için,

$$g(A_V X, Y) = g(h(X, Y), V). \quad (2.16)$$

İspat: [21] $Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(TM^\perp)$ olsun. Bu durumda $g(Y, V) = 0$ olur. Bu ifadenin her iki tarafına $\bar{\nabla}$ kovaryant türevi uygulanırsa

$$g(\bar{\nabla}_X Y, V) + g(Y, \bar{\nabla}_X V) = 0$$

denklemi elde edilir. Elde edilen denkleme (2.13) ve (2.14) uygulanırsa

$$g(\nabla_X Y + h(X, Y), V) + g(Y, -A_V X + \nabla_X^\perp V) = 0$$

(2.10) ifadesine göre iç çarpım ayrıştırılırsa yardımcı teorem kanıtlanmış olur. h simetrik ve bilineer olduğunda (2.16) denkleminde A_V simetrik ve lineer olduğu elde edilir.

Tanım 2..7 [21] $\bar{M}$ manifoldunun eğrilik tensör alanı $\bar{R}$, M manifoldunun eğrilik tensör alanı R olmak üzere ve $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ olsun. Bu durumda

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla_X^\perp h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \quad (2.17)$$

dir. A_V Weingarten tensör türevi ise

$$(\nabla_X A)_V Y = \nabla_X A_V Y - A_{\nabla_X^\perp V} Y - A_V \nabla_X Y \quad (2.18)$$

olur. Burada Gauss formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \\ &= \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + h(Y, Z)) - \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + h(X, Z)) \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]} Z - h([X, Y], Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denkleme Weingarten ve Gauss formülleri ve (2.17) uygulanırsa

$$\bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - A_{h(Y, Z)} X + A_{h(X, Z)} Y + (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) \quad (2.19)$$

olur. (2.16) kullanılırsa ve (2.19) ifadesi $T \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\bar{R}(X,Y)Z,T) = g(R(X,Y)Z,T) - g(h(Y,Z),h(X,T)) + g(h(X,Z),h(Y,T)) \quad (2.20)$$

(2.20) ifadesine Gauss denklemi denilir. (2.19) un normal uzay bileşenlerine göre

$$(\bar{R}(X,Y)Z)^\perp = (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) \quad (2.21)$$

denklemine ise Codazzi denklemi denilir. $X, Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi(M)^\perp$, $R^\perp$ eğrilik tensörü

$$R^\perp(X,Y)V = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp V - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp V - \nabla_{[X,Y]}^\perp V$$

şeklinde tanımlayıp yukarıdaki işlemleri tekrar uygulayıp (2.18) ifadesini kullanırsak

$$\bar{R}(X,Y)V = R^\perp(X,Y)V - h(X, A_V Y) + h(Y, A_V X) - (\nabla_X A)V_Y + (\nabla_Y A)_V X \quad (2.22)$$

elde edilir. $U \in \Gamma(TM)^\perp$ için

$$g(\bar{R}(X,Y)V,U) = g(R^\perp(X,Y)V,U) + g([A_U, A_V]X, Y) \quad (2.23)$$

olur. Burada $[A_U, A_V] = A_U A_V - A_V A_U$ şeklinde tanımlı olmak üzere (2.23) denklemine

Ricci denklemi denilir. Eğer $R^\perp = 0$ ise normal konneksiyona flattır denir.

Tanım 2.8 [32] $M, \bar{M}$ nin m -boyutlu alt manifoldu olmak üzere M manifoldunun ortonormal çatı alanı $\{e_1, \dots, e_m\}$, h ise M manifoldunun ikinci temel formu olsun. Bu durumda ortalama eğrilik vektör alanı

$$H = \frac{1}{m} \text{iz}(h) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h(e_i, e_i) \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$h_{ij}^r = g(h(e_i, e_j), e_r) \quad \text{ve} \quad \|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^m g(h(e_i, e_j)h(e_i, e_j)) \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanır. Dahası e_i ve e_j tarafından belirlenen düzlemsel kesitin kesitsel eğriliği

$$K_{ij} = R(e_i, e_j, e_j, e_i) \quad (2.26)$$

şeklindedir.

Tanım 2..9 [11] M manifoldunun skaler eğriliği

$$\tau(TM) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} K_{ij} \quad (2.27)$$

Ayrıca TM üzerinde ki r -kesitsel bölge G_r ve $e_1, \dots, e_r$ ise G_r nin ortonormal bazı olmak üzere G_r nin skaler eğriliği $\tau(G_r)$ olmak üzere

$$\tau(G_r) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq r} K_{ij} \quad (2.28)$$

dir. Dahası M üzerindeki f düzgün fonksiyonunun Laplasyeni, f nin gradienti ∇f olmak üzere,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^m \{(\nabla_{e_i} e_i) f - e_i(e_i(f))\} = - \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i} \nabla f, e_i) \quad (2.29)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2..10 [21] (M, g) bir Riemanniyen manifold ve $f \in C^\infty$ olmak üzere f fonksiyonunun Hessiyan tensörü $H^f : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$, $U \in \Gamma(TM)$ için

$$H^f(U) = \nabla_U \nabla f \quad (2.30)$$

ile tanımlı bir lineer dönüşümdür.

Tanım 2..11 [21] (M, g) bir Riemanniyen manifold ve $f \in C^\infty$ olsun. Bu durumda $h^f : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ olmak üzere $U, V \in \Gamma(TM)$ için

$$h^f(U, V) = g(H^f(U), V) \quad (2.31)$$

tensörüne f fonksiyonunun Hessiyan formu denir.

Tanım 2..12 [32] $M, \bar{M}$ nin alt manifoldu olmak üzere $h = 0$ ise M manifolduna

tümel jeodezik, $H \equiv 0$ olursa M manifolduna **minimal alt manifold** denir. Her $X, Y \in TM$ iken $h(X, Y) = g(X, Y)H$ olursa M manifolduna **tümel umbilik alt manifold** denilir.

Tanım 2..13 [21] M manifoldu üzerindeki bir D dağılımı M nin her bir p noktasına $T_p M$ uzayının r -boyutlu D_p alt uzayını götürür. Her p noktası bir U komşuluğuna sahip ve U komşuluğundaki q noktasında D_q nun bazı olacak biçimde $X_1, \dots, X_n$ tane diferensiyellenebilir vektör varsa bu durumda D ye diferensiyellenebilir dağılım denir. $X_1, \dots, X_n$ kümesi U içinde D nin bir yerel bazıdır. $\forall p \in M, X_p \in D_p$ oluyorsa X vektör alanı D ye aittir denir. Herhangi $X, Y \in D$ için $[X, Y] \in D$ oluyorsa D dağılımına involutiv denilir. Bunda sonra dağılım denildiğinde dağılımın diferensiyellenebilir olduğu kabul edilecektir. $p \in M$ ise D dağılımının tümleyen ortogonal dağılımı $D^\perp : p \rightarrow D_p^\perp \subset T_p M$ şeklindedir.

Tanım 2..14 [21] (M, g) Riemanniyen manifold ve $U \in TM$ olsun. M manifoldu üzerinde V vektör alanının diverjansı $\text{div} V = \text{iz} \nabla V$ olarak tanımlanır. Böylece $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ lokal ortonormal çatı alanı olmak üzere,

$$\text{div} V = \sum_{i=1}^k g(\nabla_{e_i} V, e_i) \quad (2.32)$$

olur.

Tanım 2..15 [21] $\bar{M}$, bir manifold ve $D, \bar{M}$ üzerinde r -boyutlu bir dağılım olmak üzere $M, \bar{M}$ nün bir alt manifoldu olsun. Eğer M nin her bir p noktasında M nin teğet uzayı ile D_p aynı ise M ye D dağılımının integral manifoldu denir. $f : M \rightarrow \bar{M}$ bir gömme olmak üzere her $p \in M$ için $f_*(TM(p)) = D_p$ dir. D dağılımının M manifoldunu kapsayan başka integral manifoldu yok ise bu manifoldda dağılımın maksimal integral manifoldu denir. Eğer her $p \in M$ için D dağılımının p noktasını içeren bir maksimal integral manifoldu varsa D dağılımına integrallenebilir dağılım denir.

Teorem 2..2 [25, 32] (**Frobenius Teoremi**) $\bar{M}$ manifold $D, \bar{M}$ üzerinde r -boyutlu bir dağılım olsun. Bu halde her involutiv dağılım integrallenebilir olur. Üstelik D dağılımının her p noktasından geçen tek maksimal integral manifoldu vardır ve p noktasını içeren diğer tüm integral manifoldlar bu maksimalin bir açık alt manifoldudur.

Tanım 2..16 [32] $\bar{M}$ manifold, $D, \bar{M}$ manifoldu üstünde bir dağılım olmak üzere herhangi $X, Y \in D$ iken $\bar{\nabla}_X Y \in D$ ise D dağılımına içparalel dağılım denir. Eğer $X \in D$ ve $U \in TM$ iken $\bar{\nabla}_U X \in D$ ise D dağılımına paralel dağılım denir.

Bu durumda eğer D dağılımı $\bar{M}$ üzerinde integrallenebilir ve içparalel ise Gauss formülüünden $\bar{M}$ içinde tümel jeodeziktir. D dağılımının paralel olması için gerek ve yeter koşul $D^\perp$ dağılımının paralel olmasıdır.

2.2. KATLI ÇARPIK ÇARPIM MANİFOLDLAR

2.2.1. Katlı Çarpık Çarpım Manifoldlar

Bu bölümde katlı çarpık çarpım manifoldlardan bahsedeceğiz.

Tanım 2..17 [7] $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için (M_i, g_i) Riemanniyen manifoldlar, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $f_j : M_0 \rightarrow (0, \infty)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve $\pi_i = M_0 \times M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ olsun. Bu durumda $g = g_0 \oplus (f_1 \circ \pi_0)^2 g_1 \oplus \dots \oplus (f_k \circ \pi_0)^2 g_k$ metriği üzerine kurulu $M = M_0 \times M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$ Riemanniyen manifolduna bir **katlı çarpık çarpım manifold** denir ve $M_0 \times_{f_1} M_1 \times \dots \times_{f_k} M_k$ ile gösterilir, burada g metrik tensörü

$$g = \pi^*(g_0) \oplus (f_1 \circ \pi_0)^2 \pi_1^*(g_1) \oplus \dots \oplus (f_k \circ \pi_0)^2 \pi_k^*(g_k) \quad (2.33)$$

biçiminde tanımlıdır. Her bir f_j fonksiyonuna katlı çarpık çarpımın **çarpık fonksiyonu** (M_0, g_0) manifolduna **baz manifoldu** ve her bir (M_i, g_i) manifolduna da **lif manifoldu** denir. Bu tanım bir genelleştirmedir. Gerçekten; $k = 1$ için $M_0 \times_{f_1} M_1$ çarpık çarpımını elde ederiz [7].

Eğer tüm $f_j \equiv 1$ ise o zaman çok katlı direkt çarpım manifolduna sahibiz.

Uyarı 2..1 Bu bölüm boyunca, Tanım 2.17 de verilen katlı çarpık çarpım manifoldu kısaca (M, g) ile gösterilecektir.

Uyarı 2..2 $M_0 \times_{f_1} M_1 \times \dots \times_{f_k} M_k$, Tanım 2.17 deki gibi katlı çarpık çarpım manifold olsun. (M, g) nin Levi-Civita koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ve $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ için her bir (M_i, g_i) Riemanniyen

manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu ∇^i olsun. Her bir M_i üzerindeki vektör alanlarının M ye olan liftlerinin (kaldırmalarının) kümesini $\mathcal{L}(M_i)$ ile gösterelim. Biz bu çalışma boyunca bir vektör alanı ile onun liftini aynı sembol ile göstereceğiz. Öte yandan π_0 bir izometri ve $\pi_1, \dots, \pi_k$ lar (pozitif) benzeşim (homothetik) olduklarından Levi-Civita koneksiyonunu korurlar. Bu nedenle her bir M_i üzerindeki ∇^i konneksiyonu ile onun π_i aracılığı ile M ye geri çekilişini yine aynı notasyonla gösterebiliriz. Aynı şey, f_j çarpık fonksiyonları ve g_i metrikleri içinde geçerlidir.

Önerme 2..1 [14] (M, g) katlı çarpık çarpım manifoldu ve $Y, X \in \mathcal{L}(M_0)$, $V \in \mathcal{L}(M_i)$ ve $W \in \mathcal{L}(M_j)$ olmak üzere,

$$\nabla_X Y = \nabla_X^0 Y \quad (2.34)$$

$$\nabla_X V = \nabla_V X = \frac{X(f_i)}{f_i} V \quad (2.35)$$

$$\nabla_V W = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ \nabla_V^i W - \frac{g(V, W)}{f_i} \nabla^0 f_i & i = j. \end{cases} \quad (2.36)$$

kovaryant türev formülleri geçerlidir.

M üzerindeki gradyan ve Laplace operatörü, M_0 ve M_i üzerindeki gradyan ve Laplace operatörü cinsinden hesaplanabilir. Bundan böyle $grad = grad_M$ yerlerine sırasıyla $\nabla = \nabla_M$ yazılacaktır.

Sonuç 2..1 [14] (M, g) bir katlı çarpık çarpım manifold olsun. Önerme (2.1)-(2.34) ve (2.36) dan, sırasıyla (M_0, g_0) in (M, g) nin tümel jeodezik ve $j \in \{1, \dots, k\}$ için her bir (M_j, g_j) nin (M, g) nin tümel ümbilik alt manifoldu olduğu görülmektedir.

Önerme 2..2 [14] (M, g) katlı çarpık çarpım manifoldu ve $\phi : M_0 \rightarrow R$ ve $\psi_i : M_i \rightarrow R$ $i \in \{1, \dots, m\}$ için diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

- (1) $\nabla(\phi \circ \pi) = \nabla^0 \phi,$
- (2) $\nabla(\psi_j \circ \pi_j) = \nabla^j \psi_j,$
- (3) $\nabla(\phi \circ \pi_j) = \nabla^0 \phi + \sum_{i=1}^k \frac{g_0(\nabla^0 \phi, \nabla^0 f_i)}{f_i},$
- (4) $\nabla(\psi \circ \pi_j) = \frac{\nabla^i \psi_i}{f_i^2},$

bağıntıları geçerlidir.

Uyarı 2..3 (M, g) katlı çarpık çarpım manifoldunun Riemann eğrilik tensörünü R ile (M_i, g_i) , $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ manifoldlarının Riemann eğrilik tensörünü ise R^i ile göstereceğiz.

Önerme 2.3 [14] (M, g) katlı çarpık çarpım manifoldu ve $Y, X, Z \in \mathfrak{L}(M_0)$, $V \in \mathfrak{L}(M_i)$, $W \in \mathfrak{L}(M_j)$ ve $U \in \mathfrak{L}(M_t)$ olmak üzere

- (1) $R(X, Y)Z = R^0(X, Y)Z$,
- (2) $R(V, X)Y = -\frac{h_0^{f_i}(X, Y)}{f_i}V$,
- (3) $R(X, V)W = R(V, W)X = R(V, X)W = 0 \quad i \neq j$,
- (4) $R(X, Y)V = 0$,
- (5) $R(V, W)X = 0 \quad i = j$,
- (6) $R(V, W)X = 0 \quad i = j \text{ ve } i, j \neq t$,
- (7) $R(U, V)W = -g(V, W)\frac{g_0(\nabla^0 f_i, \nabla^0 f_i)}{f_i f_t}U \quad i = j \text{ ve } i, j \neq t$,
- (8) $R(X, V)W = \frac{g(V, W)}{f_i}\nabla_X^0(\nabla^0 f_i) \quad i = j$,
- (9) $R(V, W)U = R_i(V, W)U + \frac{\|\nabla^0 f_i\|_0^2}{f_i^2}(g(V, U)W - g(W, U)V), \quad i, j = t$.

Uyarı 2..4 (M, g) katlı çarpık çarpım manifoldunun Ricci tensörünü S ile (M_i, g_i) , $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ manifoldlarının Ricci tensörünü ise S^i ile göstereceğiz.

Önerme 2.4 [14] (M, g) katlı çarpık çarpım manifoldu olsun. $Y, X, Z \in \mathfrak{L}(M_0)$, $V \in \mathfrak{L}(M_i)$, $W \in \mathfrak{L}(M_j)$ ve $s_j = \text{Boy}(M_j)$ ve $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ olmak üzere,

- (1) $S(X, Y) = S^0(X, Y) - \sum_i^k \frac{s_i}{f_i} h_0^{f_i}(X, Y)$,
- (2) $S(X, V) = 0$,
- (3) $S(V, W) = 0, \quad i \neq j$,
- (4) $S(V, W) = S^i(V, W) - \left(\frac{\nabla^0 f_i}{f_i} + (s_i - 1) \frac{\|\nabla^0 f_i\|_0^2}{f_i^2} + \sum_{t=1, t \neq i}^k s_t \frac{g_0(\nabla^0 f_i, \nabla^0 f_t)}{f_i f_t} \right) g(V, W) \quad i = j$

denklemleri geçerlidir.

Şimdi, katlı çarpık çarpımın skaler eğriliğini hesaplayacağız. Bunu yapmak için, M üzerinde aşağıdaki gibi oluşturulan ortonormal çatı alanı kullanılabilir.

$\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^r}\}$ ve $\{\frac{\partial}{\partial y_i^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_i^{s_i}}\}$ sırasıyla $U \subseteq M_0, V_i \subseteq M_i$ koordinat komşuluklarında ortonormal çatı alanları olsun. Burada $r = \text{Boy}(M_0)$, $s_j = \text{Boy}(M_j)$ ve $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ dir. Bu durumda

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^r}, \frac{\partial}{f_1 \partial y_1^1}, \dots, \frac{\partial}{f_1 \partial y_1^{s_1}}, \dots, \frac{\partial}{f_k \partial y_k^1}, \dots, \frac{\partial}{f_k \partial y_k^{s_k}} \right\} \quad (2.37)$$

kümesi $U \times V_1 \times \dots \times V_k \subseteq M$ üzerinde bir ortonormal çatı alanı olacaktır.

Uyarı 2..5 (M, g) katlı çarpık çarpım manifoldunun skaler eğriliğini τ ile (M_i, g_i) , $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ manifoldlarının skaler eğriliklerini ise τ^i ile göstereceğiz.

Önerme 2..5 [14] (M, g) bir katlı çarpık çarpım manifoldu olsun. τ aşağıdaki ifadeleri sağlar

$$\begin{aligned} 1) \quad \tau &= \tau^0 - 2 \sum_{i=1}^k s_i \frac{\Delta_0 f_i}{f_i} + \sum_{i=1}^k \frac{\tau^i}{f_i^2} - \sum_{i=1}^k s_i (s_i - 1) \frac{\|\nabla^0 f_i\|_0^2}{f_i^2} \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \sum_{t=1, t \neq i}^k s_t s_i \frac{g_0(\nabla^0 f_i, \nabla^0 f_t)}{f_i f_t} \\ 2) \quad \tau &= \tau^0 - \sum_{i=1}^k s_i \frac{\Delta_0 f_i}{f_i} - \text{div} \sum_{i=1}^k s_i \frac{\nabla^0 f_i}{f_i} \\ &\quad - g_0 \left(\sum_{i=1}^k s_i \frac{\nabla^0 f_i}{f_i}, \sum_{i=1}^k s_i \frac{\nabla^0 f_i}{f_i} \right) + \sum_{i=1}^k \frac{\tau^i}{f_i^2} \end{aligned}$$

Aşağıdaki formülü $\nabla^0 f_i = -f_i'$, $\|\nabla^0 f_i\|_0^2 = -(f_i')^2$, $g_0(\frac{\partial}{\partial l}, \frac{\partial}{\partial l}) = f_i''$ ve $\Delta_0 f_i = -f_i''$ gerçeklerini kullanarak doğrudan bir önceki sonuçtan elde edebiliriz.

Sonuç 2..2 [14] (M, g) katlı çarpık çarpım manifoldu olsun. Bu durumda τ aşağıdaki denklemleri sağlar.

$$1) \quad \tau = 2 \sum_{i=1}^k s_i \frac{f_i''}{f_i} + \sum_i^k \frac{\tau^i}{f_i^2} + \sum_i^k s_i (s_i - 1) \frac{(f_i')^2}{f_i^2} + \sum_{i=1}^k \sum_{t=1, t \neq i}^k s_t s_i \frac{f_i' f_t'}{f_i f_t}$$

$$2) \quad \tau = \sum_{i=1}^k s_i \frac{f_i''}{f_i} + \left(\sum_{i=1}^k s_i \frac{f_i'}{f_i} \right)' + \left(\sum_{i=1}^k s_i \frac{f_i'}{f_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^k \frac{\tau^i}{f_i^2}$$

2.3. YEREL ÇARPIM RİEMANNİYEN MANİFOLDLAR

2.3.1. Yerel Çarpım Riemanniyen Manifoldlar

M manifoldu,

$$F^2 = I, \quad (F \neq \pm I) \quad (2.38)$$

ile tanımlı $(1, 1)$ tipinden bir tensör alanına sahip herhangi bir hemen hemen çarpım manifoldu olsun, burada I, M nin teğet demeti TM üzerinde tanımlı birim dönüşümdür. Bu durumda, (M, F) ye F hemen hemen çarpım yapısına sahip bir

hemen hemen çarpım manifold [32] denir. Eğer,

$$D = \frac{1}{2}(I + F), \quad C = \frac{1}{2}(I - F) \quad (2.39)$$

denklemlerini kullanırsak;

$$D + C = I, \quad D^2 = D, \quad C^2 = C, \quad DC = CD = 0 \quad (2.40)$$

elde edilir. Dahası

$$F = D - C \quad (2.41)$$

olur. Burada D ve C global tümleyen dağılımdır. F yapısının özdeğerleri $+1$ yada -1 dir. $+1$ e denk gelen özvektör D ve -1 e denk gelen özvektör C olmak üzere. Eğer F 'in, $+1$ değerli özdeğer e katlı ve -1 değerli özdeğeri λ katlı ise D nin boyutu e , C nin boyutu ise λ dir.

Tersine eğer M manifoldunun iki tane, D ve C , global tümleyen dağılımı ve bu dağılımların sırasıyla boyutları e ve λ olursa $e, \lambda \geq 1$ olmak üzere $e + \lambda = m$ olur. O halde M manifoldu üzerinde tanımlanan F çarpım yapısı $F = D - C$ şeklinde tanımlanabilir.

$(\bar{M}, F)$ üzerindeki g Riemann metriği ve $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ keyfi olmak üzere

$$g(F\bar{X}, F\bar{Y}) = g(\bar{X}, \bar{Y}) \quad (2.42)$$

koşulunu sağlıyorsa $(\bar{M}, F, g)$ ye bir **hemen hemen çarpım Riemanniyen manifold** denir. Ayrıca $(\bar{M}, F, g)$ nin Levi-Civita koneksiyonu $\bar{\nabla}$ olmak üzere, eğer $F, \bar{\nabla}$ ya göre paralel ise, $(\bar{M}, F, g)$ ye bir **yerel çarpım Riemanniyen manifold** denir. Yani herhangi $\bar{X} \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} F = 0 \quad (2.43)$$

ise $M_1(c_1)$ (sırasıyla $M_2(c_2)$) kesitsel eğriliği sabit c_1 (sırasıyla c_2) olan reel uzay formlar olmak üzere $\bar{M} = M_1(c_1) \times M_2(c_2)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldun Riemann eğrilik tensörü, her $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$\begin{aligned} \bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} &= \frac{1}{4}(c_1 + c_2)\{g(\bar{Y}, \bar{Z})\bar{X} - g(\bar{X}, \bar{Z})\bar{Y} + g(F\bar{Y}, \bar{Z})F\bar{X} - g(F\bar{X}, \bar{Z})F\bar{Y}\} \\ &= \frac{1}{4}(c_1 - c_2)\{g(\bar{Y}, \bar{Z})F\bar{X} - g(\bar{X}, \bar{Z})F\bar{Y} + g(F\bar{Y}, \bar{Z})\bar{X} - g(F\bar{X}, \bar{Z})\bar{Y}\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

formundadır [32].

2.3.2. Yerel Çarpım Riemanniyen Manifoldun 1. Dereceden Yamuk Yarı - Değişmez Alt Manifoldları

Bu bölümde, bir yerel çarpım Riemann manifoldunun 1. dereceden yamuk yarı - değişmez alt manifoldlarının tanımını hatırlayıp daha fazla çalışma için bazı yararlı sonuçlar elde edeceğiz.

$(\bar{M}, F, g)$ bir yerel çarpım Riemann manifoldu olsun ve $M, \bar{M}$ nin bir alt manifoldu olsun. M üzerindeki bir D dağılımı aşağıdaki koşulu sağlarsa bir **eğik dağılım** adını alır: $V \in D_p, p \in M$ olsun, eğer FV ve D_p arasındaki θ açısı sabit ise, yani $p \in M$ ve $V \in D_p, p$ seçiminden bağımsızdır. θ sabit açısına D eğik dağılımının eğik açısı denir. Dolayısıyla, F' ye göre değişmez ve ters-değişmez dağılımlar, sırasıyla eğim açısı $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ olan eğik dağılımlardır. $\bar{M}$ nin bir M alt manifoldunun, teğet demeti TM eğik ise, M ye bir **eğik alt manifold** denir. [15, 18] Ne değişmez ne de ters-değişmez olan bir eğik alt

manifold, bir **has eğik alt manifold** olarak adlandırılır.

$(\bar{M}, g, F)$ yerel çarpım Riemann manifoldunun θ eğik açılı eğik alt manifoldu M olsun. Her $V \in \Gamma(TM)$ için

$$FV = TV + NV \quad (2.45)$$

yazabiliriz. Burada TV , FV nin teğet kısmı ve NV ise FV nin normal kısmıdır. Bu durumda her $U, V \in \Gamma(TM)$ için [18]

$$T^2V = \cos^2 \theta V \quad (2.46)$$

$$g(TU, TV) = \cos^2 \theta g(U, V), \quad g(NU, NV) = \sin^2 \theta g(U, V) \quad (2.47)$$

geçerlidir. M , $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Eğer M nin TM teğet demeti

$$TM = D^\perp \oplus D^T \oplus D^\theta$$

şeklinde ise $FD^T \subseteq D^T$ olmak üzere burada D^T değişmez dağılım, $FD^\perp \subseteq T^\perp M$ olmak üzere $D^\perp$ ters-değişmez dağılım ve D^θ dağılımı θ açılı eğik dağılımdır.

Bu durumda M nin $T^\perp M$ normal demeti

$$T^\perp M = F(D^\perp) \oplus N(D^\theta) \oplus \bar{D}^T \quad (2.48)$$

biçiminde ayrışır.

Burada $\bar{D}^T, T^\perp(M)$ de $F(D^\perp) \oplus N(D^\theta)$ nın değişmez tümleyen dağılımıdır. Bu durumda M ,

1. dereceden yamuk yarı-değişmez alt manifold olarak adlandırılır [22].

Uyarı 2..6 Yerel çarpım Riemanniye manifoldlarının 1. dereceden yarı-değişmez yamuk alt manifoldlarının sınıfı, yarı-değişmez yamuk alt manifoldların özel bir alt sınıfıdır [15]. Yerel çarpım Riemann manifoldlarının değişmez, ters-değişmez [1], yarı-değişmez [7], eğik [18], yarı-eğik [16] ve kısmi-eğik altmanifoldlarının [24] doğal bir genelleştirilmiştir.

Yardımcı Teorem 2..3 [22] $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemann manifoldun, 1. dereceden has eğik yarı-değişmez alt manifoldu M olsun. Bu durumda $Z, W \in \Gamma(D^\theta)$, $U, V \in \Gamma(D^T)$ ve

$X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ olmak üzere,

$$g(\nabla_Z W, U) = -\csc^2 \theta \{g(A_{NTW}Z, U) + g(A_{NW}Z, FU)\} \quad (2.49)$$

$$g(\nabla_Z W, X) = \sec^2 \theta \{g(A_{FX}Z, TW) + g(A_{NTW}Z, X)\} \quad (2.50)$$

$$g(\nabla_U V, Z) = \csc^2 \theta \{g(A_{NTZ}U, V) + g(A_{NZ}U, FV)\} \quad (2.51)$$

$$g(\nabla_U V, X) = g(A_{FX}U, FV) \quad (2.52)$$

$$g(\nabla_X Y, Z) = -\sec^2 \theta \{g(A_{FY}X, TZ) + g(A_{NTZ}X, Y)\} \quad (2.53)$$

$$g(\nabla_X Y, V) = -g(A_{FY}X, FV) \quad (2.54)$$

$$g(\nabla_X Z, V) = -\csc^2 \theta \{g(A_{NTZ}X, V) + g(A_{NZ}X, FV)\} \quad (2.55)$$

$$g(\nabla_Z X, V) = -g(A_{FX}Z, FV) \quad (2.56)$$

$$g(\nabla_U X, Z) = -\sec^2 \theta \{g(A_{FX}U, TZ) + g(A_{NTZ}U, X)\} \quad (2.57)$$

denklemleri geçerlidir.

İspat: [22] (2.54) denklemini gösterelim. $X, Y \in D^\perp$, $Z \in D^\theta$ ve $V \in D^T$ iken (2.13) ve (2.14) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, V) &= g(\bar{\nabla}_X FY, FV) = g(-A_{FY}X + \nabla_X^\perp FY, FV) \\ &= g(-A_{FY}X, FV) = -g(A_{FY}X, FV) \end{aligned}$$

(2.54) elde edilir. Benzer şekilde $g(\nabla_X Z, V) = g(\bar{\nabla}_X FZ, FV)$ denklemine sahibiz. Bu denklemde (2.45), (2.38), (2.42) ve (2.43) kullanılırsa

$$g(\nabla_X Z, V) = g(\bar{\nabla}_X FTZ, V) + g(\bar{\nabla}_X NZ, FV)$$

elde edilen denklemde tekrar (2.45) ve (2.14) kullanılırsa

$$g(\nabla_X Z, V) = g(\bar{\nabla}_X T^2 Z, V) + g(\bar{\nabla}_X N(TZ), V) - g(A_{NZ}X, FV)$$

denkleminde de (2.46), (2.13) ve (2.14) kullanılırsa (2.55) denkleminde ulaşılır. Benzer şekilde diğerleri de gösterilebilir.

2.3.3. Bir Yerel Çarpım Riemanniyen Manifoldun Değişmez Alt Manifoldları

Tanım 2..18 [1] $M, (\bar{M}, F, g)$ bir yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Eğer her $X \in \Gamma(TM)$ için $FX \in \Gamma(TM)$ ise M 'ye $\bar{M}$ 'nin **bir değişmez alt manifoldu** denir.

Örnek 2..3 $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, g Öklid metriğine $m = n_1 + n_2$ boyutlu Öklidyen uzay ve F ,

$$i \in \{1, \dots, n_1\} \text{ için } F\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$j \in \{n_1 + 1, \dots, m\} \text{ için } F\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}$$

ile tanımlı hemen hemen çarpım yapısı olsun. Burada $(x_1, \dots, x_m)$, $\mathbb{R}^m$ in doğal koordinat fonksiyonlarıdır. Bu durumda $(\mathbb{R}^m, F, g)$ bir yerel çarpım Riemanniyen manifold olur.

Şimdi $M, (\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, F, g)$ nin

$$x_1 = u, x_2 = v, x_3 = 0 \text{ ve } x_4 = 0$$

biçiminde tanımlı bir alt manifoldu olsun. Bu durumda TM nin bir yerel çatısı

$$U = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad V = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

ile verilir, yani $TM = \text{ger}\{U, V\}$. Öte yandan $F(TM) = TM$ olduğundan M bir değişmez alt manifolddur.

2.3.4. Bir Yerel Çarpım Riemanniyen Manifoldun Ters - Değişmez Alt Manifoldları

Tanım 2..19 [1] $M, (\bar{M}, F, g)$ bir yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Eğer her $X \in \Gamma(TM)$ için $FX \in \Gamma(TM^\perp)$ ise M ye $\bar{M}$ nin **bir ters-değişmez alt manifoldu** denir.

Örnek 2..4 $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, g Öklid metriğine $m = n_1 + n_2$ boyutlu Öklidyen uzay ve F ,

$$i \in \{1, \dots, n_1\} \text{ için } F\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$j \in \{n_1 + 1, \dots, m\} \text{ için } F\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}$$

ile tanımlı hemen hemen çarpım yapısı olsun. Burada $(x_1, \dots, x_m)$, $\mathbb{R}^m$ in doğal koordinat fonksiyonlarıdır. Bu durumda $(\mathbb{R}^m, F, g)$ bir yerel çarpım Riemanniyen manifold olur.

Şimdi $M, (\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, F, g)$ nin

$$x_1 = \frac{u}{\sqrt{2}}, x_2 = \frac{v}{\sqrt{2}}, x_3 = \frac{u}{\sqrt{2}} \text{ ve } x_4 = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

biçiminde tanımlı bir alt manifoldu olsun. Bu durumda TM nin bir yerel çatısı

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \right),$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_4} \right)$$

ile verilir, yani $TM = \text{ger}\{U, V\}$. Öte yandan $T^\perp M = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right)$ seçilirse

$$FU = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3} \right),$$

$$FV = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \text{ olur.}$$

Bu durumda $F(TM) = T^\perp M$ olduğundan M bir ters-değişmez alt manifold olur.

2.3.5. Bir Yerel Çarpım Riemanniyen Manifoldun Eğik Alt Manifoldları

Tanım 2..20 [15, 18] $(\bar{M}, F, g)$ bir yerel çarpım Riemanniyen manifold olsun ve $M, \bar{M}$ 'nin bir alt manifoldu olsun. $V \in D_p$ olmak üzere, FV ile D_p arasındaki açı θ sabit ise, yani, $p \in M$ 'nin ve $V \in D_p$ 'nin seçiminden bağımsız ise, M üzerinde bir D dağılımına eğik dağılım denir. Sabit açı θ ya D eğik dağılımının **eğik açısı** denir. Böylece, F ile bağlantılı değişmez ve ters-değişmez dağılımlar sırasıyla $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ eğik açılarına karşılık gelen eğik dağılımlardır. Eğer M 'nin TM teğet demeti eğik ise $\bar{M}$ nin bir M alt manifolduna **eğik alt manifold** denir. Bir eğik alt manifold ne değişmez ne de ters-değişmez alt manifold ise **has eğik alt manifold** olarak adlandırılır.

$\bar{M}$ hemen hemen yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun, bir has eğik yüzeyi M ve M nin ortonormal bazı ise $\{e_1, e_2\}$ olsun. Bu durumda θ , M nin eğik açısı olmak üzere,

$$g(Fe_i, e_i) = \cos \theta, \quad g(Fe_i, e_j) = \cos \theta, \quad i \neq j \in \{1, 2\}$$

denklemleri aynı anda gerçekleşmez [18]. Ayrıca

1) $g(Fe_i, e_i) = \cos \theta$, olması durumunda

$$Te_1 = \cos \theta e_1, \quad Te_2 = \cos \theta e_2 \quad \text{ve} \quad g(Fe_i, e_j) = 0$$

2) $g(Fe_i, e_j) = \cos \theta$, olması durumunda

$$Te_1 = \cos \theta e_2, \quad Te_2 = \cos \theta e_1 \quad \text{ve} \quad g(Fe_i, e_i) = 0$$

denklemleri gerçeklenir [18]. Sonuç olarak bir yerel arpım Riemanniye manifoldun, bir eğik alt manifoldunun eğik açısı yukarıda verilen durumlar dikkate alınarak hesaplanır.

Örnek 2..5 [18] Öklidyen metrik ile tanımlanan $m = n_1 + n_2$ boyutlu Öklidyen uzayda $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ olsun. $F(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = (\frac{\partial}{\partial x_i}, -\frac{\partial}{\partial x_j})$, $i \in \{1, \dots, n_1\}$, $j \in \{n_1 + 1, \dots, m\}$ tarafından $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ üzerinde tanımlanan çarpım yapısı F olsun. Her bir $u, v \in (0, \frac{\pi}{2})$ ve pozitif sabit $k \neq 1$ için

$$X(u, v) = (u, v, -k \sin u, -k \sin v, k \cos u, k \cos v)$$

ele alalım. Doğrudan hesapla $\text{rank}(JX) = 2$ ve X , birebir olduğundan bu X fonksiyonu bir gömmedir. Dolayısıyla, X fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$ bir 2-boyutlu alt manifold belirler. Öte yandan bu alt manifoldun teğet uzayı

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial}{\partial x_1} - k \cdot \cos u \frac{\partial}{\partial x_3} - k \cdot \sin u \frac{\partial}{\partial x_5}, \\ X_v &= \frac{\partial}{\partial x_2} - k \cdot \cos v \frac{\partial}{\partial x_4} - k \cdot \sin v \frac{\partial}{\partial x_6} \end{aligned}$$

vektör alanları tarafından gerilir. Bu iki vektör arasındaki Wirtinger açı $\theta = \cos^{-1} \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$ dır. Böylece bu alt manifold bir (has) eğik alt manifolddur.

2.3.6. Bir Yerel arpım Riemanniye Manifoldun Yarı - Değişmez Alt Manifoldları

Tanım 2..21 [6] $M, (\bar{M}, F, g)$ bir yerel arpım Riemanniye manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Eğer D, F altında değişmez dağılım ve $D^\perp, F$ altında ters-değişmez dağılım olmak üzere

$$TM = D \oplus D^\perp$$

şeklinde yazılabiliyorsa, bu durumda M ye **bir yarı-değişmez alt manifold** denir.

Örnek 2..6 [19] $(\mathbb{R}^4, g)$ 4-boyutlu Öklidyen uzay olsun, burada g , öklid metriğidir. $(x_1, x_2, x_3, x_4), \mathbb{R}^4$ ün doğal koordinat fonksiyonları olmak üzere, F arpım yapısını

$$F(\frac{\partial}{\partial x_i}) = -\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad F(\frac{\partial}{\partial y_i}) = \frac{\partial}{\partial y_i}$$

biçiminde tanımlayalım.

$$x_1 = t \cos \theta, \quad x_2 = t \sin \theta$$

$$y_1 = t \cos \varphi, \quad y_2 = t \sin \varphi$$

teğet uzayı ile verilen M alt manifoldunu düşünelim. Bu durumda M nin

$$Z_1 = \cos \theta \partial x_1 + \sin \theta \partial x_2 + \cos \varphi \partial y_1 + \sin \varphi \partial y_2$$

$$Z_2 = -t \sin \theta \partial x_1 + t \cos \theta \partial x_2,$$

$$Z_3 = -t \sin \varphi \partial y_1 + t \cos \varphi \partial y_2$$

vektör alanları tarafından gerilir. Burada

$$FZ_2 = -Z_2, \quad FZ_3 = Z_3 \quad \text{ve} \quad FZ_1$$

TM dir. O halde M , $D^\perp = \text{ger}\{Z_1\}$ ve $D = \text{ger}\{Z_2, Z_3\}$ olan $(\mathbb{R}^4, F, g)$ bir yarı-değişmez alt manifolddur.

2.3.7. Bir Yerel Çarpım Riemanniyen Manifoldun Yarı - Eğik Alt Manifoldları

Tanım 2..22 [20] Eğer D ve D^θ gibi ortogonal dağılımları varsa, $M, \bar{M}$ 'nin yarı eğik alt manifoldudur. Öyleki M manifoldu üzerinde

a) $TM = D \oplus D^\theta$

b) D değişmez bir dağılımdır, $F(D) = D$.

c) $\theta \neq 0$ açısıyla D^θ dağılımı eğiktir.

şartlarını sağlayan D ve D^θ ortogonal dağılımları varsa $M, \bar{M}$ nin yarı - eğik alt manifoldu olarak adlandırılır. Özellikle, eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise yarı-eğik alt manifold, yarı değişmez bir alt manifolddur.

Örnek 2..7 [20] $(\mathbb{R}^4)$, g alışılmış metriğine sahip 4-boyutlu Öklidyen uzay ve F yapısını

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad F\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}$$

biçiminde tanımlayalım. $M, (\mathbb{R}^4, F, g)$ nin

$$x_1 = \frac{t}{\sqrt{2}} \cos \alpha, \quad x_2 = \frac{t}{\sqrt{2}} \sin \alpha, \quad y_1 = t \sin \beta, \quad y_2 = t \cos \beta,$$

ile tanımlı bir alt manifoldu olsun, burada $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ve $t \neq 0$. Bu durumda, TM nin yerel çatısı

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha \partial x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha \partial x_2 + \sin \beta \partial y_1 + \cos \beta \partial y_2 \\ Z_2 &= -\frac{t}{\sqrt{2}} \sin \alpha \partial x_1 + \frac{t}{\sqrt{2}} \cos \alpha \partial x_2 \\ Z_3 &= t \cos \beta \partial y_1 - t \sin \beta \partial y_2 \end{aligned}$$

ile verilir. Kolayca görülür ki $D^\theta = \text{ger}\{Z_1\}$, $\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{3})$ eğik açısı olan eğik dağılımdır. $D = \text{ger}\{Z_2, Z_3\}$ değişmez dağılımdır. $M, \mathbb{R}^4$ 'te yarı değişmez alt manifolddur.

2.3.8. Bir Yerel Çarpım Riemanniyen Manifoldun Kısmi - Eğik Alt Manifoldları

Tanım 2..23 [24] $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun, bir kısmi-eğik alt manifoldu M olsun. $D^\perp$ ve D^θ , M üzerinde sırasıyla ters-değişmez ve eğik dağılımlar olmak üzere, eğer M nin teğet demeti TM ,

$$TM = D^\perp \oplus D^\theta$$

biçiminde yazılabiliyorsa, M ye $\bar{M}$ nin bir **kismi-eğik alt manifoldu** denir.

Örnek 2..8 [30] $R^4 = R^2 \times R^2$ 'nin alt manifoldu M olsun. x_1, x_2, y_1, y_2 koordinatları ve

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad F\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_i}, \quad i = 1, 2.$$

çarpım yapısı olmak üzere. Her bir $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ açısı için

$$f(u, v) = (u \cos \alpha, v, u \sin \alpha, v), \quad u, v \neq 0$$

daldırması tarafından verilen R^4 'teki M manifoldunu düşünelim. M 'nin tanjant uzayı TM ,

$$e_1 = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y_2}$$

vektör uzayları tarafından belirlenir. F yapısı uygulandığında

$$Fe_1 = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad Fe_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial y_2}$$

bulunur. Fe_2 TM 'de ortogonaldir. Dahası $D^\perp = \text{ger}\{e_2\}$ ters değişmez dağılım ve $D^\theta = \text{ger}\{e_1\}$, $\theta = \arccos\left(\frac{g(Fe_1, e_1)}{\|Fe_1\| \|e_1\|}\right) = 2\alpha$ eğik açısıyla, eğik dağılımdır ve dahası M , $\theta = 2\alpha$ eğik açısı ile has kısmi - eğik alt manifolddur.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu çalışma yapılırken yerel çarpım Riemanniyen manifoldların belirli tipteki iki katlı çarpık çarpım alt manifoldların geometrisi incelenmiştir. Ayrıca bir yerel çarpım Riemanniyen manifoldun baz çarpanı has eğik alt manifold, lif çarpanlarının birisi değişmez diğeri de ters-değişmez olan iki katlı çarpık çarpım alt manifoldları ele alınmış ve incelenmiştir. Bulgular için diferansiyel geometrideki temel tanımlardan, teoremlerden ve alt manifold teorisindeki temel denklemler ve sonuçlardan yararlanılmıştır.

Diferansiyel geometrinin dalı olan manifoldlar ve alt manifoldlar teorisi ile ilgili kitaplar ve makaleler, kütüphane ve web aracılığı ile taranmıştır. Yerel çarpım Riemanniyen manifoldların belirli tipteki iki katlı çarpık çarpım alt manifoldları ve konu ile alakalı makaleler kronolojik olarak incelenmiştir. Tezin doküman haline getirilmesi için Latex programı kullanılmıştır.

4. BULGULAR

4.1. YEREL ÇARPIM RIEMANNİYEN MANİFOLDLARDA İKİ KATLI ÇARPIK ÇARPIM ALT MANİFOLDLAR

Bu bölümde, iki katlı çarpık çarpım alt manifoldlardan bahsedeceğiz.

$M_T \times_f M_\perp \times_\sigma M_\theta$, $M_\perp \times_f M_\theta \times_\sigma M_T$ ve $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ formundaki iki katlı çarpık çarpım alt manifoldların varlığı kontrol edilecektir. Burada M_T , $M_\perp$ ve M_θ , bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun sırası ile bir değişmez, bir ters-değişmez ve bir has eğik alt manifoldudur.

Teorem 4.1 M , $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemann manifoldunun, 1. dereceden has eğik yarı-değişmez alt manifoldu olsun. Bu durumda D^θ eğik dağılımın tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul herhangi $Z, W \in \Gamma(D^\theta)$, $V \in \Gamma(D^T)$, $X \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$g(A_{NTW}Z, V) = -g(A_{NW}Z, FV), \quad (4.1)$$

$$g(A_{FX}Z, TW) = -g(A_{NTW}Z, X) \quad (4.2)$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: M , $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemann manifoldunun, 1. dereceden has eğik yarı-değişmez alt manifoldu olsun. $Z, W \in \Gamma(D^\theta)$, $V \in \Gamma(D^T)$, $X \in \Gamma(D^\perp)$ olmak üzere D^θ nın tümel jeodezik olması için gerek ve yeter şart $g(\nabla_Z W, X) = 0$ ve $g(\nabla_Z W, V) = 0$ sağlanmasıdır. Dolayısıyla, (4.1) ve (4.2) deki iddialar sırasıyla (2.49) ve (2.50)'dan gelir.

Teorem 4.2 M , $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemann manifoldunun, 1. dereceden has eğik yarı-değişmez alt manifoldu olsun. Herhangi $Z \in \Gamma(D^\theta)$, $U, V \in \Gamma(D^T)$, $X \in \Gamma(D^\perp)$ için D^T değişmez dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$g(A_{FX}U, FV) = g(A_{FX}V, FU), \quad (4.3)$$

$$g(A_{NTZ}U, V) + g(A_{NZ}U, FV) = g(A_{NTZ}V, U) + g(A_{NZ}V, FU) \quad (4.4)$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: $M, (\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemann manifoldunun, 1. dereceden has eğik yarı-değişmez alt manifoldu olsun. Herhangi $Z \in \Gamma(D^\theta)$, $U, V \in \Gamma(D^T)$, $X \in \Gamma(D^\perp)$ için D^T değişmez dağılımının integre edilebilmesi için gerek yeter şart $g([U, V], X) = 0$ ve $g([U, V], Z) = 0$ sağlanmasıdır. Dolayısıyla, (4.3) ve (4.4) deki iddialar sırasıyla (2.51) ve (2.52) den gelir.

Teorem 4.3 $M, (\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemann manifoldunun, 1. dereceden has eğik yarı-değişmez alt manifoldu olsun. Herhangi $Z \in \Gamma(D^\theta)$, $V \in \Gamma(D^T)$, $X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ için $D^\perp$ ters değişmez dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$g(A_{FX}Y, FV) = g(A_{FY}X, FV), \quad (4.5)$$

$$g(A_{FY}X, TZ) = g(A_{FX}Y, TZ) \quad (4.6)$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: $M, (\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemann manifoldunun, 1. dereceden has eğik yarı-değişmez alt manifoldu olsun. Herhangi $Z \in \Gamma(D^\theta)$, $V \in \Gamma(D^T)$, $X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ için $D^\perp$ ters invariant dağılımının integre edilebilmesi için gerek yeter şart $g([X, Y], Z) = 0$ ve $g([X, Y], V) = 0$ sağlanmasıdır. Dolayısıyla, (4.5) ve (4.6) deki iddialar sırasıyla (2.53) ve (2.54)'dan gelmektedir.

M. Atçeken ve B. Şahin, sırasıyla Teorem 3.1 [4] ve Teorem 3.1 [19] de, birbirlerinden bağımsız olarak bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldu içinde $M_T \times_f M_\perp$ formunda bir çarpık çarpım yarı-değişmez alt manifoldun var olmadığını kanıtlamıştır. Yine, M. Atçeken ve B. Şahin, sırasıyla Teorem 3.3 ([3]) ve Teorem 3.1 ([20]) de birbirlerinden bağımsız olarak, bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldu içinde $M_T \times_f M_\theta$ formunda bir çarpık çarpım yarı-eğik alt manifoldunun var olmadığını kanıtlamıştır. Burada M_T ve M_θ sırası ile $\bar{M}$ nin bir değişmez ve bir has eğik alt manifoldudur. Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4..1 Bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun $M_T \times_f M_\perp \times_\sigma M_\theta$ formunda (aşıkar olmayan) iki katlı çarpık çarpım alt manifoldu yoktur. Burada M_T , $M_\perp$ ve M_θ , $\bar{M}$ manifoldunun sırası ile bir değişmez, bir ters-değişmez ve bir has eğik alt manifoldudur.

Öte yandan ([3] Teorem 3.4) de $\bar{M}$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun $M_\perp \times_f M_\theta$ formunda (aşıkar olmayan) çarpık çarpım alt manifoldunun var olmadığı kanıtlanmıştır. Burada $M_\perp$ ve M_θ , $\bar{M}$ manifoldunun sırası ile bir ters-değişmez ve bir has eğik alt manifoldudur. Böylece, aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Sonuç 4..2 Bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun $M_\perp \times_f M_\theta \times_\sigma M_T$ formunda (aşıkar-olmayan) iki katlı çarpık çarpım alt manifoldu yoktur. Burada M_T , $M_\perp$ ve M_θ , $\bar{M}$ manifoldunun sırası ile bir değişmez, bir ters değişmez ve bir has eğik alt manifoldudur.

Artık, burada bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ formundaki (aşıkar-olmayan) iki katlı çarpık çarpım alt manifoldu incelenmiştir. Burada M_T , $M_\perp$ ve M_θ , $\bar{M}$ manifoldunun sırası ile bir değişmez, bir ters değişmez ve bir has eğik alt manifoldudur. Öncelikle böyle bir alt manifolda örnek verelim.

Örnek 4..1 $\mathbb{R}^8$, g alışılmış metriğine sahip 8-boyutlu Öklidyen uzay ve F ,

$$F\partial_1 = \partial_1, \quad F\partial_2 = \partial_2, \quad F\partial_3 = -\partial_3, \quad F\partial_4 = -\partial_4,$$

$$F\partial_5 = \partial_6, \quad F\partial_6 = \partial_5, \quad F\partial_7 = \partial_8, \quad F\partial_8 = \partial_7,$$

ile tanımlı hemen hemen çarpım yapı olsun. Burada $\partial_k = \partial_{x_k}$, $k \in \{1, \dots, 8\}$ ve $(x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8$ in doğal koordinatlarıdır. Bazı hesaplamalardan sonra, $(\mathbb{R}^8, F, g)$ in bir yerel çarpım Riemanniyen manifold olduğu görülür. M , $(\mathbb{R}^8, F, g)$ nin

$$x_1 = t \sin u, \quad x_2 = t \cos u, \quad x_3 = \frac{t}{\sqrt{2}} \cos v, \quad x_4 = \frac{t}{\sqrt{2}} \sin v,$$

$$x_5 = 2t \sin x, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 2t \cos x, \quad x_8 = 0,$$

ile tanımlı bir alt manifoldu olsun, burada $u, v \in (0, \frac{\pi}{2})$ ve $t > 0$. Bu durumda, TM nin bir yerel çatısı

$$Z = \sin u \partial_1 + \cos u \partial_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos v \partial_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin v \partial_4 + 2 \sin x \partial_5 + 2 \cos x \partial_7,$$

$$U = t \cos u \partial_1 - t \sin u \partial_2,$$

$$V = -\frac{t}{\sqrt{2}} \sin v \partial_3 + \frac{t}{\sqrt{2}} \cos v \partial_4,$$

$$X = 2t \cos x \partial_5 - 2t \sin x \partial_7,$$

biçiminde verilebilir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında görülür ki $D^\theta = \text{ger}\{Z\}$ nin $\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{11})$ eğik açısına sahip bir has eğik alt manifold olduğu, $D^T = \text{ger}\{U, V\}$ nin bir değişmez dağılım olduğu ve $D^\perp = \text{ger}\{X\}$ nin bir ters-değişmez dağılım olduğu görülür. Dahası, D^θ tümel jeodeziktir ve D^T ile $D^\perp$ integrallenebilir dağılımlardır. Eğer D^θ , D^T ve $D^\perp$ nin integral manifoldları sırası ile M_θ , M_T ve $M_\perp$ ile gösterilirse, bu durumda M nin indirgenmiş metriği

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{11}{2} dt^2 + t^2 (du^2 + \frac{1}{2} dv^2) + 4t^2 dx^2 \\ &= g_{M_\theta} + t^2 g_{M_T} + (2t)^2 g_{M_\perp} \end{aligned}$$

şeklinde dir. Böylece, $M = M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$, $(\mathbb{R}^8, F, g)$ in $f = t$ ve $\sigma = 2t$ çarpık fonksiyonlarına sahip bir (aşıkar olmayan) iki katlı çarpık çarpım 1. mertebeden has yamuk yarı-değişmez alt manifolddur.

4.2. $M_\theta \times_F M_T \times_\sigma M_\perp$ FORMUNDAKİ İKİ KATLI ÇARPIK ÇARPIM 1. DERECE DEN HAS YAMUK YARI-DEĞİŞMEZ ALT MANİFOLDLAR

Bu bölümde $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ formundaki iki katlı çarpık çarpım 1. dereceden has yamuk yarı-değişmez alt manifoldların karakterizasyonunu vereceğiz. Burada M_T , $M_\perp$ ve M_θ , bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun sırasıyla bir değişmez, bir ters değişmez ve bir has eğik alt manifoldudur. Önce bu tip alt manifold için bir varlık teoremi ispatlayacağız. Daha sonra, bu tarz alt manifoldların ikinci temel formunun davranışını araştıracağız ve sonuç olarak, bu tür alt manifoldların yerel olarak çarpık çarpım olması için gerekli ve yeterli bir koşulu vereceğiz. İlk önce ana teoremimizi kanıtlamak için [13]'de

verilen uyarıdan yararlanacağız.

Uyarı 4..1 (*Uyarı 2.1* [13]) *Bir M Riemanniyen manifoldunun teğet demetinin $TM = D_0 \oplus D_1 \oplus \dots \oplus D_k$ şeklinde aşikar olmayan dağılımların bir ortogonal toplam ayrışımına sahip olduğu varsayılın, öyle ki burada her bir D_j küreseldir ve bu dağılımların TM içindeki tümleyenleri $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ için içparaleldir. Bu durumda M manifoldu bir $M_0 \times_{f_1} M_1 \times \dots \times_{f_k} M_k$ çok katlı çarpık çarpımına yerel olarak izometriktir.*

Şimdi, bu tezin ana teoremini verelim.

Teorem 4.4 *M manifoldu bir $\bar{M}, F, g$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun bir $(D^\theta, D^\perp)$ karışık-jeodezik 1. dereceden has yamuk yarı-değişmez alt manifoldu olsun. Bu durumda M nin $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ formunda yerel olarak iki katlı çarpık çarpım alt manifold olabilmesi için gerek ve yeter koşul herhangi $Z, W \in \Gamma(D^\theta)$, $U, V \in \Gamma(D^T)$, $X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ için*

$$A_{NTZ}X = \cos^2 \theta Z(\lambda)X \quad (4.7)$$

$$A_{NZ}V + A_{NTZ}FV = -\sin^2 \theta Z(\mu)FV \quad (4.8)$$

burada λ ve μ $X(\lambda) = V(\lambda) = 0$ ve $X(\mu) = V(\mu) = 0$ koşullarını sağlayan bazı fonksiyonlardır,

$$g(A_{FX}Z, TW) = -g(A_{NTW}Z, X) \quad (4.9)$$

$$g(A_{FX}U, FV) = 0 \quad (4.10)$$

$$g(A_{FY}X, FU) = 0 \quad (4.11)$$

$$g(A_{FX}Z, FU) = 0 \quad (4.12)$$

$$g(A_{FX}U, TZ) = -g(A_{NTZ}U, X) \quad (4.13)$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: M , bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$

formunda iki katlı çarpık çarpım 1. dereceden has yamuk yarı-değişmez alt manifoldu olsun.

Herhangi $Z \in \Gamma(D^\theta)$, $U \in \Gamma(D^T)$ ve $X \in \Gamma(D^\perp)$ için (2.13), (2.14) ve (2.45) denklemlerinden,

$$g(A_{NTZ}X, U) = -g(\bar{\nabla}_X NTZ, U) = -g(\bar{\nabla}_X FTZ, U) + g(\bar{\nabla}_X T^2Z, U)$$

elde edilir. (2.38) ~ (2.43) ve (2.46) denklemleri kullanılırsa

$$g(A_{NTZ}X, U) = -g(\bar{\nabla}_X TZ, FU) + \cos^2 \theta g(\bar{\nabla}_X Z, U)$$

bulunur. Burada (2.13) ve (2.14) deki Gauss ve Weingarten formülleri kullanılırsa

$$g(A_{NTZ}X, U) = -g(\nabla_X TZ, FU) + \cos^2 \theta g(\nabla_X Z, U)$$

denklemine ulaşılır. O halde (2.35) kullanılırsa

$$g(A_{NTZ}X, U) = -TZ(\ln \sigma)g(X, FU) + \cos^2 \theta Z(\ln \sigma)g(X, U) = 0 \quad (4.14)$$

sonucu çıkarılır. M manifoldu, $(D^\theta, D^\perp)$ karışık jeodezik olduğundan, $W \in \Gamma(D^\theta)$ için (2.16) kullanılırsa

$$g(A_{NTZ}X, W) = g(h(X, W), NTZ) = 0 \quad (4.15)$$

bulunur. Benzer şekilde, herhangi $Y \in \Gamma(D^\perp)$ için (2.11), (2.13) ve (2.45) kullanılırsa

$$g(h(X, Y), NZ) = g(\bar{\nabla}_X Y, NZ) = g(\bar{\nabla}_X Y, FZ) - g(\bar{\nabla}_X Y, TZ).$$

elde edilir. Bu durumda (2.42), (2.43) ve (2.35) kullanılırsa

$$g(h(X, Y), NZ) = g(\bar{\nabla}_X FY, Z) + TZ(\ln \sigma)g(X, Y)$$

bulunur. Böylece (2.13), (2.14) ve (2.16) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(h(X,Y),NZ) &= -g(A_{FY}X,Z) + TZ(\ln \sigma)g(X,Y) \\
&= -g(h(X,Z),FY) + TZ(\ln \sigma)g(X,Y)
\end{aligned}$$

denkleme ulaşılır. Bu denklemde eğer Z nin yerine TZ yazılırsa, bu durumda

$$g(h(X,Y),NTZ) = -g(h(X,TZ),FY) + \cos^2 \theta Z(\ln \sigma)g(X,Y)$$

elde edilir. M manifoldu $(D^\theta, D^\perp)$ karışık-jeodezik olduğundan,

$$g(A_{NTZ}X,Y) = \cos^2 \theta Z(\ln \sigma)g(X,Y) \quad (4.16)$$

sonucu çıkarılır. Dahası, σ sadece M_θ nın noktalarına bağlı olduğundan

$X(\ln \sigma) = V(\ln \sigma) = 0$ elde edilir. O halde, $\lambda = \ln \sigma$ sonucu çıkar. Böylece (4.14) ~ (4.16) denklemlerinden, ilk denklemimiz olan (4.7) elde edilir.

İkinci denklemimiz olan (4.8) i kanıtlayalım. Herhangi $Z \in \Gamma(D^\theta)$, $V \in \Gamma(D^T)$ ve $X \in \Gamma(D^\perp)$ için (2.13), (2.14) ve (2.45) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(A_{NZ}V + A_{NTZ}FV, X) &= g(A_{NZ}V, X) + g(A_{NTZ}FV, X) \\
&= g(A_{NZ}X, V) + g(A_{NTZ}X, FV) \\
&= -g(\bar{\nabla}_X NZ, V) - g(\bar{\nabla}_X NTZ, FV) \\
&= -g(\bar{\nabla}_X NZ, V) - g(\bar{\nabla}_X FTZ, FV) \\
&\quad + g(\bar{\nabla}_X T^2Z, FV)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.42), (2.43), (2.45) ve (2.46) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
g(A_{NZ}V + A_{NTZ}FV, X) &= -g(\bar{\nabla}_X FZ, V) + g(\bar{\nabla}_X TZ, V) - g(\bar{\nabla}_X TZ, V) \\
&\quad + \cos^2 \theta g(\bar{\nabla}_X Z, FV) + X[\cos^2 \theta]g(Z, FV) \\
&= -g(\bar{\nabla}_X FZ, V) + \cos^2 \theta g(\bar{\nabla}_X Z, FV)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda (2.35), (2.13), (2.14), (2.38) ~ (2.43) kullanıldığında ulaşacağımız denklem

$$\begin{aligned}
g(A_{NZ}V + A_{NTZ}FV, X) &= -g(\bar{\nabla}_X Z, FV) + \cos^2 \theta g(\nabla_X Z, FV) \\
&= -g(\nabla_X Z, FV) + \cos^2 \theta g(\nabla_X Z, FV)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sin^2 \theta g(\nabla_X Z, FV) \\
&= -\sin^2 \theta Z(\ln \sigma) g(X, FV)
\end{aligned}$$

olur. $g(X, FV) = 0$ olduğu için

$$g(A_{NZ}V + A_{NTZ}FV, X) = -\sin^2 \theta Z(\ln \sigma) g(X, FV) = 0 \quad (4.17)$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde, herhangi $Z, W \in \Gamma(D^\theta)$ ve $V \in \Gamma(D^T)$ için, (2.13), (2.14) ve (2.45) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
g(A_{NZ}V + A_{NTZ}FV, W) &= g(A_{NZ}V, W) + g(A_{NTZ}FV, W) \\
&= g(A_{NZ}W, V) + g(A_{NTZ}W, FV) \\
&= -g(\bar{\nabla}_W NZ, V) - g(\bar{\nabla}_W NTZ, FV) \\
&= -g(\bar{\nabla}_W NZ, V) - g(\bar{\nabla}_W FTZ, FV) \\
&\quad + g(\bar{\nabla}_W T^2 Z, FV)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (2.42), (2.43), (2.45) ve (2.46) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
g(A_{NZ}V + A_{NTZ}FV, W) &= -g(\bar{\nabla}_W FZ, V) + g(\bar{\nabla}_W TZ, V) - g(\bar{\nabla}_W TZ, V) \\
&\quad + \cos^2 \theta g(\bar{\nabla}_W Z, FV) + W[\cos^2 \theta] g(Z, FV) \\
&= -g(\bar{\nabla}_W FZ, V) + \cos^2 \theta g(\bar{\nabla}_W Z, FV) \\
&= +W[\cos^2 \theta] g(Z, FV)
\end{aligned}$$

denkleme ulaşılır. Bu durumda, (2.35), (2.13), (2.14) ve (2.38)~(2.43) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(A_{NZ}V + A_{NTZ}FV, W) &= -g(\bar{\nabla}_W Z, FV) + \cos^2 \theta g(\nabla_W Z, FV) \\
&\quad + W[\cos^2 \theta] g(Z, FV) \\
&\quad - g(\nabla_W Z, FV) + \cos^2 \theta g(\nabla_W Z, FV) \\
&\quad + W[\cos^2 \theta] g(Z, FV) \\
&\quad - \sin^2 \theta g(\nabla_W Z, FV) + W[\cos^2 \theta] g(Z, FV) \\
&\quad - \sin^2 \theta g(\nabla_W^\theta Z, FV) + W[\cos^2 \theta] g(Z, FV)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $g(\nabla_W^\theta Z, FV) = 0$ ve $g(Z, FV) = 0$ olduğundan,

$$g(A_{NZ}V + A_{NTZ}FV, W) = -\sin^2 \theta g(\nabla_W^\theta Z, FV) + W[\cos^2 \theta]g(Z, FV) = 0 \quad (4.18)$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan, herhangi $Z \in \Gamma(D^\theta)$, $U, V \in \Gamma(D^T)$ için, (2.13), (2.14) ve (2.45) kullanıldığında

$$\begin{aligned} g(A_{NZ}V + A_{NTZ}FV, U) &= g(A_{NZ}V, U) + g(A_{NTZ}FV, U) \\ &= g(A_{NZ}U, V) + g(A_{NTZ}FV, U) \\ &= -g(\bar{\nabla}_U NZ, V) - g(\bar{\nabla}_U NTZ, FV) \\ &= -g(\bar{\nabla}_U NZ, V) - g(\bar{\nabla}_U FTZ, FV) \\ &\quad + g(\bar{\nabla}_U T^2 Z, FV) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (2.42), (2.43), (2.45) ve (2.46) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(A_{NZ}V + A_{NTZ}FV, U) &= -g(\bar{\nabla}_U FZ, V) + g(\bar{\nabla}_U TZ, V) - g(\bar{\nabla}_U TZ, V) \\ &= +\cos^2 \theta g(\bar{\nabla}_U Z, FV) + U[\cos^2 \theta]g(Z, FV) \\ &= -g(\bar{\nabla}_U FZ, V) + \cos^2 \theta g(\bar{\nabla}_U Z, FV) \\ &= +U[\cos^2 \theta]g(Z, FV) \end{aligned}$$

denklemine ulaşılır. $U[\cos^2 \theta] = 0$, (2.35), (2.13), (2.14), (2.38) ~ (2.43) kullanıldığında

$$\begin{aligned} g(A_{NZ}V + A_{NTZ}FV, U) &= -g(\bar{\nabla}_U Z, FV) + \cos^2 \theta g(\nabla_U Z, FV) \\ &= -g(\nabla_U Z, FV) + \cos^2 \theta g(\nabla_U Z, FV) \\ &= -\sin^2 \theta g(\nabla_U Z, FV) \\ &= -\sin^2 \theta Z(\ln f)g(U, FV) \end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$g(A_{NZ}V + A_{NTZ}FV, U) = -\sin^2 \theta Z(\ln f)g(FV, U) \quad (4.19)$$

sonucuna ulaşılır. Dahası, f sadece M_θ nın noktalarına bağlı olduğundan,

$X(\ln f) = V(\ln f) = 0$ elde edilir. O halde, $\mu = \ln f$ elde edilir. Böylece (4.17) ~ (4.19) dan dolayı (4.8) eşitliği elde edilir.

M nin, $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun bir iki katlı çarpık çarpım 1. dereceden has yamuk yarı-değişmez alt manifoldu olduğu bilinmektedir. Bu durumda, herhangi $Z, W \in \Gamma(D^\theta)$ için (2.34) kullanılırsa, $\nabla_Z W = \nabla_Z^\theta W$ elde edilir ve herhangi

$X \in \Gamma(D^\perp)$ için, (2.50) den

$$g(\nabla_Z W, X) = \sec^2 \theta \{g(A_{FX}Z, TW) + g(A_{NTW}Z, X)\} = g(\nabla_Z^\theta W, X) = 0$$

elde edilir. M_θ bir has eğik alt manifold olduğundan,

$$g(A_{FX}Z, TW) + g(A_{NTW}Z, X) = 0$$

elde edilir. Bu da (4.9) denklemini verir. Herhangi $U, V \in \Gamma(D^T)$ ve $X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ iken (2.36) kullanılırsa

$$g(\nabla_U V, X) = g(\nabla_U^T V - g(U, V)\nabla(\ln f), X) = 0$$

elde edilir. Bu durumda (2.52) den

$$g(\nabla_U V, X) = g(A_{FX}U, FV) = 0$$

(4.10) denkleminde ulaşılır. Herhangi $U \in \Gamma(D^T)$ ve $X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ iken (2.36) kullanılırsa

$$g(\nabla_X Y, U) = g(\nabla_X^\perp Y - g(X, Y)\nabla(\ln \sigma), U) = 0 \text{ denkleminde ulaşılır. (2.54) den}$$

$$g(\nabla_X Y, U) = -g(A_{FY}X, FU) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.11) denkleminde ulaşılır. Herhangi $X \in \Gamma(D^\perp)$, $Z \in \Gamma(D^\theta)$ ve $U \in \Gamma(D^T)$ iken (2.35) kullanıldığında

$$g(\nabla_Z X, FU) = g(Z(\ln \sigma)X, FU) = Z(\ln \sigma)g(Z, FU) = 0. \text{ Diğer yandan (2.56) dan}$$

$$g(\nabla_Z X, FU) = -g(A_{FX}Z, FU) = 0$$

(4.12) denkleminde ulaşılır. Herhangi $X \in \Gamma(D^\perp)$, $Z \in \Gamma(D^\theta)$ ve $U \in \Gamma(D^T)$ iken (2.36) kullanılırsa $g(\nabla_U X, Z) = 0$ deklemini elde edilir. (2.57) den

$$g(\nabla_U X, Z) = -\sec^2 \theta \{g(A_{FX}U, TZ) + g(A_{NTZ}U, X)\} = 0 \text{ bulunur. (4.13) denklemini de gösterilmiş olur.}$$

Aksine, M manifoldu bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun bir $(D^\theta, D^\perp)$ karışık jeodezik 1. dereceden has yamuk yarı-değişmez alt manifoldu olsun öyle ki (4.7)

den (4.13) e kadar olan denklemler sağlansın. (4.9) denkleminde, (4.2) sağlanır. Diğer yandan eğer (4.8) denkleminde V yerine FV ve Z yerine W yazılırsa

$$A_{NW}FV + A_{NTW}V = -\sin^2 \theta W(\mu)V$$

bulunur. Bu denklemin $Z \in \Gamma(D^\theta)$ ile iç çarpımını alırsak,

$$g(A_{NW}FV + A_{NTW}V, Z) = g(A_{NW}Z, FV) + g(A_{NTW}Z, V) = -\sin^2 \theta W(\mu)g(V, Z) = 0$$

yani (4.1) elde edilir. Böylece, Teorem (4.1) den, eğik dağılım D^θ tümel jeodeziktir ve sonuç olarak integrallenebilir. Diğer taraftan, (4.10) denkleminde, herhangi

$U, V \in \Gamma(D^T)$ ve $X \in \Gamma(D^\perp)$ için, $g(A_{FX}V, FU) = 0$ sağlanır. Böylece

$$g(A_{FX}V, FU) = g(A_{FX}U, FV) \text{ bulunur. Bu (4.3) denklemini verir.}$$

Diğer yandan (4.8) denkleminde eğer V yerine FV yazılırsa

$A_{NZ}FV + A_{NTZ}V = -\sin^2 \theta Z(\mu)V$ denkleminde ulaşılır, ulaşılan denklemin $U \in \Gamma(D^\theta)$ ile iç çarpımı alınır

$$g(A_{NZ}FV + A_{NTZ}V, U) = g(A_{NZ}FV, U) + g(A_{NTZ}V, U) = -\sin^2 \theta Z(\mu)g(V, U) \quad (4.20)$$

denkleminde ulaşılır. Burada, (4.20) denkleminde U ve V nin yerleri değiştirilirse

$$g(A_{NZ}FU + A_{NTZ}U, V) = g(A_{NZ}FU, V) + g(A_{NTZ}U, V) = -\sin^2 \theta Z(\mu)g(U, V) \quad (4.21)$$

bulunur. (4.20) ve (4.21) denklemlerinden $g(A_{NZ}U, FV) + g(A_{NTZ}U, V) = g(A_{NZ}V, FU) + g(A_{NTZ}V, U)$ elde edilir. Bu da (4.4) denklemini verir. Böylece Teorem 4.2 den, değişmez dağılım D^T integrallenebilir. Diğer taraftan, herhangi $X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ ve $U \in \Gamma(D^T)$ için (4.11) den $g(A_{FY}X, FU) = 0$ bulunur. Dahası buradan $g(A_{FY}X, FU) = g(A_{FX}Y, FU) = 0$ yani (4.5) elde edilir. Ayrıca (2.53) den $g(\nabla_X Y, Z) = -\sec^2 \theta \{g(h(Y, TZ), FX) + g(A_{NTZ}X, Y)\}$ elde edilir. $M, (D^\theta, D^\perp)$ karışık jeozedik olduğundan $g(h(Y, TZ), FX) = 0$ olur. Bu durumda, $g(\nabla_X Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z)$ yani (4.6) denkleminde ulaşırız. O halde Teorem 4.3 e göre tümel reel dağılım $D^\perp$ integrallenebilir. M_θ, M_T ve $M_\perp$ sırasıyla D^θ, D^T ve $D^\perp$ nin integral manifoldları olsun. M_T nin M içindeki ikinci temel formunu h^T ile gösterirsek, herhangi $U, V \in \Gamma(D^T)$ ve $X \in \Gamma(D^\perp)$ için (2.13), (2.14) ve (4.10) kullanılarak

$$g(h^T(U, V), X) = g(\nabla_U V, X) = g(A_{FX}U, FV) = 0 \quad (4.22)$$

elde edilir. Herhangi bir $U, V \in \Gamma(D^T)$ ve $Z \in \Gamma(D^\theta)$ için (2.13), (2.14) ve (2.51) kullanılırsa

$$g(h^T(U, V), Z) = g(\nabla_U V, Z) = \csc^2 \theta g(A_{NTZ}U, V) + g(A_{NZ}U, FV)$$

elde edilir. Bu denklemde (4.8) kullanılırsa

$$g(h^T(U, V), Z) = \csc^2 \theta g(A_{NTZ}, V) + A_{NZ}FV, U = -Z(\mu)g(V, U)$$

bulunur. Bazı hesaplamalardan sonra,

$$g(h^T(U, V), Z) = g(-g(U, V)\nabla_\mu, Z) \quad (4.23)$$

elde edilir, burada ∇_μ , μ nun gradiyentidir. Böylece (4.22) ve (4.23) denklemlerinden,

$$h^T(U, V) = -g(U, V)\nabla_\mu \quad (4.24)$$

bulunur. O halde M_T , M içinde $-\nabla_\mu$ ortalama eğrilik vektör alanına sahip tümel umbilik bir alt manifolddur. Şimdi $-\nabla_\mu$ nin paralel olduğu gösterilmelidir. Burada $U \in \Gamma(D^T)$ ve $E \in (D^T)^\perp = D^\theta \oplus D^\perp$ için $g(\nabla_U \nabla_\mu, E) = 0$ olduğu gösterilmelidir. Burada, $Z \in \Gamma(D^\theta)$ ve $X \in \Gamma(D^\perp)$ olmak üzere E yerine $E = Z + X$ yazılırsa, $U(\mu) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} g(\nabla_U \nabla_\mu, E) &= \{Ug(\nabla_\mu, E) - g(\nabla_\mu, \nabla_U E)\} \\ &= U(E(\mu)) - [U, E](\mu) - g(\nabla_\mu, \nabla_E U) \\ &= [U, E](\mu) + E(U(\mu)) - [U, E](\mu) - g(\nabla_\mu, \nabla_E U) \\ &= -g(\nabla_\mu, \nabla_E U) = -g(\nabla_\mu, \nabla_Z U) - g(\nabla_\mu, \nabla_X U) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, herhangi $W \in \Gamma(D^\theta)$ için, M_θ , M manifoldunda tümel jeodezik olduğundan, $g(\nabla_Z U, W) = -g(U, \nabla_Z W) = 0$ elde edilir. Böylece, $\nabla_Z U \in \Gamma(D^T)$ yada $\nabla_Z U \in \Gamma(D^\perp)$ gerçekleşir. Her iki durumda da

$$g(\nabla_\mu, \nabla_Z U) = 0 \quad (4.25)$$

elde edilir. Diğer taraftan, (2.55) den

$g(\nabla_X U, W) = -g(U, \nabla_X W) = -\csc^2 \theta \{g(A_{NTW}X, U) + g(A_{NW}X, FU)\}$ elde edilir. Burada (4.8) kullanılırsa

$$g(\nabla_X U, W) = g(W(\mu)U, X) = 0$$

elde edilir. Sonuçta $\nabla_X U \in \Gamma(D^T)$ yada $\nabla_X U \in \Gamma(D^\perp)$ gerçekleşir. Her iki durumda da,

$$g(\nabla_\mu, \nabla_X U) = 0 \quad (4.26)$$

bulunur. (4.25) ve (4.26) denklemlerinden,

$$g(\nabla_U \nabla_\mu, E) = 0$$

bulunur. Böylece, M_T aynı zamanda tümel umbilik olduğundan küreseldir. Sonuç olarak D^T küreseldir. Sırada $D^\perp$ dağılımının küresel olduğunu göstermek kalır. $h^\perp$, $M_\perp$ manifoldunun M içindeki ikinci temel formunu gösterebilir. Herhangi $X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ ve $U \in \Gamma(D^T)$ için (2.13), (2.14), (2.54) ve (4.11) kullanılırsa

$$g(h^\perp(X, Y), U) = g(\nabla_X Y, U) = -g(A_{FY} X, FU) = 0 \quad (4.27)$$

elde edilir. Diğer taraftan, herhangi $Z \in \Gamma(D^\theta)$ için, (2.53) kullanılırsa

$$g(h^\perp(X, Y), Z) = -\sec^2 \theta \{g(h(X, TZ), FY) + g(A_{NTZ} X, Y)\}$$

bulunur. M , $(D^\theta, D^\perp)$ karışık jeodezik olduğundan, $g(h(X, TZ), FY) = 0$ elde edilir. O halde

$$g(h^\perp(X, Y), Z) = -g(A_{NTZ} X, Y)$$

bulunur. (4.7) denkleminde

$$g(h^\perp(X, Y), Z) = -Z(\lambda)g(X, Y)$$

elde ederiz. Bazı hesaplamalardan sonra,

$$g(h^\perp(X, Y), Z) = -g(\nabla \lambda g(X, Y), Z) \quad (4.28)$$

elde edilir, burada $\nabla \lambda$, λ nın gradiyentidir. Böylece (4.27) ve (4.28) den

$$h^\perp(X, Y) = -g(X, Y) \nabla \lambda$$

sonucuna ulaşılır. O halde $M_\perp$, M içinde $-\nabla\lambda$ ortalama eğrilik vektör alanına sahip tümel umbilik bir altmanifolddur. Artık $-\nabla\lambda$ nın paralel olduğu gösterilmelidir. Yani, $X \in \Gamma(D^\perp)$ ve $E \in (D^\perp)^\perp = D^\theta \oplus D^T$ iken $g(\nabla_X \nabla\lambda, E) = 0$ sağlanmalıdır. İfadesinin paralel olması ise $-\nabla_\mu$ nün paralelliğinin gösterilmesiyle benzer şekilde gösterilir. $-\nabla\lambda$ paraleldir. $M_\perp$ aynı zamanda tümel umbilik olduğundan küreseldir. Sonuç olarak, $D^\perp$ küreseldir.

Son olarak $(D^T)^\perp = D^\theta \oplus D^\perp$ ve $(D^\perp)^\perp = D^\theta \oplus D^T$ içparalel olduğu gösterilmelidir. $D^\theta \oplus D^\perp$ nin içparalel olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ ve $Z, W \in \Gamma(D^\theta)$ için $\nabla_Z W, \nabla_Z X, \nabla_X Z, \nabla_X Y$ kovaryant türevlerinin yine $\Gamma(D^\theta \oplus D^\perp)$ içinde kalmasıdır. Bunun anlamı $g(\nabla_Z W, U)$, $g(\nabla_Z X, U)$, $g(\nabla_X Z, U)$, $g(\nabla_X Y, U)$ iç çarpımlarının sıfır olmasıdır, burada $U \in \Gamma(D^T)$. (2.49) ve (4.8) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z W, U) &= -\csc^2 \theta \{g(A_{NTW}Z, U) + g(A_{NW}Z, FU)\} \\ &= -\csc^2 \theta g(A_{NTW}U + (A_{NW}FU, Z)) \\ &= W(\mu)g(U, Z) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (2.56) ve (4.12) kullanılırsa

$$g(\nabla_Z X, U) = -g(A_{FX}Z, FU) = 0$$

bulunur. (2.55) ve (4.8) denklemlerinden,

$$g(\nabla_X Z, U) = -\csc^2 \theta \{g(A_{NTZ}X, U) + g(A_{NZ}X, FU)\} = 0$$

elde edilir. (2.54) ve (4.11) denklemlerinden,

$$g(\nabla_X Y, U) = -g(A_{FY}X, FU) = 0$$

bulunur. Böylece, $D^\theta \oplus D^\perp$ içparaleldir. Diğer yandan, $D^\theta \oplus D^T$ içparalel olması için gerek ve yeter koşul $g(\nabla_Z W, X)$, $g(\nabla_Z U, X)$, $g(\nabla_U Z, X)$, $g(\nabla_U V, X)$ iç çarpımlarının sıfır olmasıdır, burada $Z, W \in \Gamma(D^\theta)$ $U, V \in \Gamma(D^T)$ ve $X \in \Gamma(D^\perp)$. İlk olarak sahip olduğumuz iç çarpım $g(\nabla_Z U, X) = 0$. (2.50) ve (4.9) denklemlerinden,

$$g(\nabla_Z W, X) = \sec^2 \theta \{g(A_{FX}Z, TW) + g(A_{NTW}Z, X)\} = 0$$

elde edilir. (2.52) ve (4.10) kullanılırsa,

$$g(\nabla_U V, X) = g(A_{FX} U, FV) = 0$$

bulunur. (2.57) ve (4.13) denklemlerinden,

$$g(\nabla_U Z, X) = -g(\nabla_U X, Z) = \sec^2 \theta \{g(A_{FX} U, TZ) + g(A_{NTZ} U, X)\} = 0$$

denklemine ulaşılır. O halde $D^\theta \oplus D^T$ içparaleldir. Böylelikle Uyarı 4.1 den dolayı M manifoldu yerel olarak $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ formunda iki katlı çarpık çarpım alt manifolddur.

Aşağıdaki lemmada, bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun

$M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ formunda bir (aşıkar olmayan) iki katlı çarpık çarpım 1. dereceden has yamuk yarı-değişmez alt manifoldunun ikinci temel formunun davranışını inceleyeceğiz.

Yardımcı Teorem 4..1 M bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun

$M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ formunda bir (aşıkar olmayan) iki katlı çarpık çarpım 1. dereceden has yamuk yarı-değişmez alt manifoldu olsun. Bu durumda M nin $(\bar{M}, F, g)$ içindeki ikinci temel formu h , herhangi $Z, W \in \Gamma(D^\theta)$, $X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ ve $U, V \in \Gamma(D^T)$ için

$$g(h(U, V), NW) = -W(\ln f)g(U, FV) + TW(\ln f)g(U, V) \quad (4.29)$$

$$g(h(Z, U), NW) = 0 \quad (4.30)$$

$$g(h(X, U), NW) = 0 \quad (4.31)$$

$$g(h(Z, U), FX) = 0 \quad (4.32)$$

$$g(h(X, U), FY) = 0 \quad (4.33)$$

$$g(h(U, V), FX) = 0 \quad (4.34)$$

denklemlerini gerçekler.

İspat: Herhangi $U, V \in \Gamma(D^T)$, $W \in \Gamma(D^\theta)$ için (2.13) (2.14) (2.38) ~ (2.43) ve (2.45) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(h(U, V), NW) &= g(\bar{\nabla}_U V, NW) = -g(V, \bar{\nabla}_U NW) \\ &= -g(V, \bar{\nabla}_U FW) + g(V, \bar{\nabla}_U TW) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -g(FV, \bar{\nabla}_U W) + g(V, \bar{\nabla}_U TW) \\
&= -g(FV, \nabla_U W) + g(V, \nabla_U TW) \\
&= -W(\ln f)g(FV, U) + TW(\ln f)g(U, V)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.29) denkleminde ulaşılır. $U \in \Gamma(D^T)$, $Z, W \in \Gamma(D^\theta)$ için (2.13) (2.14) (2.38)~(2.43) ve (2.45) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
g(h(Z, U), NW) &= g(\bar{\nabla}_Z U, NW) = -g(U, \bar{\nabla}_Z NW) \\
&= -g(U, \bar{\nabla}_Z FW) + g(U, \bar{\nabla}_Z TW) \\
&= -g(FU, \bar{\nabla}_Z W) + g(U, \nabla_Z TW) \\
&= g(W, \bar{\nabla}_Z(FU)) - g(\nabla_Z U, TW) \\
&= g(W, \nabla_Z FU) - g(\nabla_Z U, TW)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (2.35) kullanılırsa

$$g(h(Z, U), NW) = Z(\ln f)g(W, FU) - Z(\ln f)g(U, TW) = 0$$

bulunur, çünkü $g(W, FU) = g(U, TW) = 0$. Sonuç olarak (4.30) gerçekleşir. (4.31) ifadesinin kanıtında benzer şekildedir.

$Z \in \Gamma(D^\theta)$, $X \in \Gamma(D^\perp)$ ve $U \in \Gamma(D^T)$ için (2.13), (2.14), (2.38) ~ (2.43) ve (2.45) kullanılırsa, $g(FU, X) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
g(h(Z, U), FX) &= g(\bar{\nabla}_Z U, FX) = -g(U, \bar{\nabla}_Z FX) \\
&= -g(FU, \bar{\nabla}_Z X) = -g(FU, \nabla_Z X) \\
&= -Z(\ln \sigma)g(FU, X) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.32) ifadesi elde edilir. $U, V \in \Gamma(D^T)$ ve $X \in \Gamma(D^\perp)$ iken (2.13), (2.14), (2.38)~(2.43), (2.45) ve (2.36) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(h(X, U), FY) &= g(\bar{\nabla}_X U, FY) = -g(U, \bar{\nabla}_X FY) \\
&= -g(FU, \bar{\nabla}_X Y) = -g(FU, \nabla_X Y) \\
&= g(\nabla_X FU, Y) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (4.33) denkleminde ulaşırız. Son olarak, (2.13), (2.14), (2.38)~(2.43), (2.45) ve (2.36) kullanılırsa $U, V \in \Gamma(D^T)$ ve $X \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$\begin{aligned}
g(h(U, V), FX) &= g(\bar{\nabla}_U V, FX) = -g(V, \bar{\nabla}_U FX) \\
&= -g(FV, \bar{\nabla}_U X) = -g(FV, \nabla_U X) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde (4.34) denklemi sağlanır. Diğer denklemler benzer şekilde ispat edilir. Bu lemma, $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ formunda bir (aşıkâr olmayan) iki katlı çarpık çarpım 1. dereceden has yamuk yarı-değişmez alt manifoldunun ikinci temel formunun $N(D^\theta)$ ve $F(D^\perp)$ normal alt demetleri içindeki davranışını gösterir.

[27] deki Lemma 3.1-(ii), Lemma 3.1-(i), Lemma (3.3)-(ii) ve Lemma (3.3)-(i) deki denklemler, sırasıyla (4.29), (4.30), (4.31) ve (4.32)'de elde edildi.

(4.30)~(4.33) denklemlerinden, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3 *M bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ formunda bir iki katlı çarpık çarpım 1. dereceden has yamuk yarı-değişmez alt manifoldu olsun. Öyle ki değişmez normal alt demet $\bar{D}^T = \{0\}$ olsun. Bu durumda M , $(D^T, D^\perp)$ ve (D^T, D^θ) karışık jeodeziktir.*

Teorem 4.5 *M bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun, $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ formunda bir iki katlı çarpık çarpım 1. dereceden has yamuk yarı-değişmez alt manifoldu olsun. Öyle ki değişmez normal alt demet $\bar{D}^T = \{0\}$ olsun. Bu durumda M manifoldunun, $M_\theta \times M_T \times_\sigma M_\perp$ formunda yerel olarak bir çarpık çarpım olması için gerek ve yeter koşul M manifoldunun D^T -jeodezik olmasıdır.*

İspat: M bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ formunda bir iki katlı çarpık çarpım 1. dereceden has yamuk yarı-değişmez alt manifoldu olsun. Öyle ki değişmez normal alt demet $\bar{D}^T = \{0\}$ olsun. Eğer M manifoldu $M_\theta \times M_T \times_\sigma M_\perp$ formunda yerel olarak bir çarpık çarpım ise f çarpık fonksiyonu sabittir. (4.8) denkleminde, herhangi $U, V \in \Gamma(D^T)$ ve $W \in \Gamma(D^\theta)$ için $W(\ln f) = TW(\ln f) = 0$ olduğundan,

$$g(h(U, V), NW) = -W(\ln f)g(U, FV) + TW(\ln f)g(U, V) = 0$$

sağlanır. (4.34) denkleminde, $h(U, V) = 0$. Bu ise M nin D^T jeodezik olduğu kanıtlar. Aksine M , D^T jeodezik olsun. Her bir $U, V \in \Gamma(D^T)$ ve $W \in \Gamma(D^\theta)$ iken (4.29)

denkleminde

$$W(\ln f)g(U, FV) + TW(\ln f)g(U, V) = 0 \quad (4.35)$$

elde edilir. Eğer (4.55) denkleminde $W = TW$ yazılır ve (2.46) kullanılırsa

$$TW(\ln f)g(U, FV) + \cos^2 \theta W(\ln f)g(U, V) = 0 \quad (4.36)$$

elde edilir. (4.36) denkleminde V yerine FV yazılırsa, (4.36) denklemi

$$TW(\ln f)g(U, V) + \cos^2 \theta W(\ln f)g(U, FV) = 0 \quad (4.37)$$

olur. (4.35) ve (4.37) denklemlerinden her bir $U, V \in \Gamma(D^T)$ ve $W \in \Gamma(D^\theta)$ için

$$\sin^2 \theta W(\ln f)g(U, FV) = 0 \quad (4.38)$$

bulunur. (4.38) denklemi her bir $U, V \in \Gamma(D^T)$ için gerçekleştiğinden, ayrıca $FV \in \Gamma(D^T)$ için de gerçekleşir. O halde, (4.38) denklemi

$$\sin^2 \theta W(\ln f)g(U, V) = 0 \quad (4.39)$$

haline gelir. M bir has manifold olduğundan, $\sin \theta \neq 0$ dır ve dolayısıyla (4.39) denkleminde $W(\ln f) = 0$ sonucuna ulaşırız. Yani, f bir sabittir. Böylece, M manifoldu $M_\theta \times M_T \times_\sigma M_\perp$ biçiminde yerel olarak bir çarpık çarpımdır.

4.3. $M_\theta \times_F M_T \times_\sigma M_\perp$ FORMUNDA BİR (AŞIKAR OLMAYAN) İKİ KATLI ÇARPIK ÇARPIM 1.DERECEDEN HAS YAMUK YARI-DEĞİŞMEZ ALT MANİFOLD İÇİN BİR EŞİTSİZLİK

Bu bölümde, bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ formunda bir iki katlı çarpık çarpım 1.dereceden has yamuk yarı-değişmez alt manifoldunun ikinci temel formunun normunun karesi için çarpık fonksiyonlar cinsinden bir eşitsizlik kurulacaktır, burada $M_T, M_\perp$ ve M_θ , bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun sırası ile bir değişmez, bir ters-değişmez ve bir has eğik alt manifoldudur.

$M_0 \times_{f_1} M_1 \times_{f_2} M_2$, bir $\bar{M}$ Riemanniyen manifoldunun iki katlı çarpık çarpım alt manifoldu

olsun. Bu durumda [11] den, M_i ye teğet her X_i birim vektörü için

$$\begin{aligned} K(X_0, X_i) &= K_{0i} = \frac{1}{f_i} ((\nabla_{X_0} X_0)(f_i) - X_0(X_0(f_i))) \\ K(X_i, X_j) &= K_{ij} = -\frac{g(\nabla f_i, \nabla f_j)}{f_i f_j}, \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

olduğu bilinmektedir. TM nin $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ yerel ortonormal çatısını alınırsa, Gauss denkleminde,

$$\tau(TM) = \bar{\tau}(TM) + \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} (h_{ii}^r h_{jj}^r - (h_{ij}^r)^2) \quad (4.41)$$

elde edilir. Bu denklemde $\bar{m} - m = \text{boy} T^\perp M$ dir.

Şimdi genel eşitsizliği kanıtlamaya hazırız.

M bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun, $m = m_0 + m_1 + m_2$ -boyutlu $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ formunda bir iki katlı çarpık çarpım 1.dereceden has yamuk yarı-değişmez alt manifoldu olsun.

$T\bar{M}$ nin $\{e_1, \dots, e_{m_0}, e_{m_0+1}, \dots, e_{m_0+m_1}, e_{m_0+m_1+1}, \dots, e_{m_0+m_1+m_2}, e_{m+1}, \dots, e_{\bar{m}}\}$ doğal ortonormal bazı seçilsin öyle ki burada TM_θ nin ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_{m_0}\}$, TM_T nin ortonormal bazı $\{e_{m_0+1}, \dots, e_{m_0+m_1}\}$, $TM_\perp$ nin ortonormal bazı $\{e_{m_0+m_1+1}, \dots, e_{m_0+m_1+m_2}\}$, $T^\perp M$ nin ortonormal bazı $\{e_{m+1}, \dots, e_{\bar{m}}\}$ dir.

Teorem 4..6 $M = M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ $\bar{m}$ -boyutlu bir yerel çarpım Riemanniyen manifold $(\bar{M}, F, g)$ nin m -boyutlu aşikar olmayan iki katlı çarpık çarpım 1. dereceden yamuk yarı-değişmez alt manifoldu olsun, öyle ki burada M_θ , M_T ve $M_\perp$ sırası ile $\bar{M}$ nin has eğik, değişmez ve ters değişmez alt manifoldlarıdır. Bu durumda

(i) M alt manifoldunun ikinci temel formu

$$\frac{1}{2} \|h\|^2 \geq \bar{\tau}(TM) - \bar{\tau}(TM_\theta) - \bar{\tau}(TM_T) - \bar{\tau}(TM_\perp)$$

$$-m_1 \frac{\Delta f}{f} - m_2 \frac{\Delta \sigma}{\sigma} + m_1 m_2 \frac{g(\nabla f, \nabla \sigma)}{f \sigma} \quad (4.42)$$

eşitliğini sağlar, burada $m_1 = \text{boy}M_T$ ve $m_2 = \text{boy}M_\perp$

(ii) (4.42) eşitsizliğinde eşitliğin özdeş olarak sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul M_θ alt manifoldunun $\bar{M}$ içinde tümel jeodezik olmasıdır ve hem M_T hem de $M_\perp$ alt manifoldlarının $\bar{M}$ içinde tümel umbilik olmasıdır.

İspat: $M = M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ bir $\bar{m}$ -boyutlu yerel çarpım Riemanniyen manifold $(\bar{M}, F, g)$ nin $\bar{m}$ -boyutlu aşikar olmayan iki katlı çarpık çarpım 1. dereceden yamuk yarı-değişmez alt manifoldu olsun, öyleki burada M_θ , M_T ve $M_\perp$ sırası ile $M_\perp$ nin has eğik, değişmez ve ters-değişmez alt manifoldları olsun. Bu durumda (2.20) deki Gauss denkleminde $U = W = e_i$ ve $V = Z = e_j$ alınırsa

$$\bar{R}(e_i, e_j, e_j, e_i) = R(e_i, e_j, e_j, e_i) + g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)) - g(h(e_i, e_i), h(e_j, e_j)).$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde $1 \leq i, j \leq m$ ($i \neq j$) üzerinden toplam alınırsa,

$$2\bar{\tau}(TM) = 2\tau(TM) - m^2||H||^2 + ||h||^2$$

eşitliğini elde ederiz. (2.28) den dolayı

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}||h||^2 &= \frac{m^2}{2}||H||^2 + \bar{\tau}(TM) - \sum_{1 \leq i < j \leq m_0} K_{ij} \\ &- \sum_{m_0+1 \leq i < j \leq m_0+m_1} K_{ij} - \sum_{m_0+m_1+1 \leq i < j \leq m_0+m_1+m_2} K_{ij} - \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=m_0+1}^{m_0+m_1} K_{ij} \\ &- \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=m_0+m_1+1}^{m_0+m_1+m_2} K_{ij} - \sum_{i=m_0+1}^{m_0+m_1} \sum_{j=m_0+m_1+1}^{m_0+m_1+m_2} K_{ij} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}||h||^2 &= \frac{m^2}{2}||H||^2 + \bar{\tau}(TM) - \tau(TM_\theta) - \tau(TM_T) - \tau(TM_\perp) \\ &- \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=m_0+1}^{m_0+m_1} K_{ij} - \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=m_0+m_1+1}^{m_0+m_1+m_2} K_{ij} - \sum_{i=m_0+1}^{m_0+m_1} \sum_{j=m_0+m_1+1}^{m_0+m_1+m_2} K_{ij} \end{aligned}$$

denklemine ulaşırız. Yukarıda ki denklemin ilk satırındaki son üç teriminde (4.41)

kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}||h||^2 &= \frac{m^2}{2}||H||^2 + \bar{\tau}(TM) \\
&- \bar{\tau}(TM_\theta) - \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{1 \leq i \neq t \leq m_0} (h_{ii}^r h_{tt}^r - (h_{it}^r)^2) \\
&- \bar{\tau}(TM_T) - \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{m_0+1 \leq j \neq l \leq m_0+m_1} (h_{jj}^r h_{ll}^r - (h_{jl}^r)^2) \\
&- \bar{\tau}(TM_\perp) - \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{m_0+m_1+1 \leq a \neq b \leq m_0+m_1+m_2} (h_{aa}^r h_{bb}^r - (h_{ab}^r)^2) \\
&- \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=m_0+1}^{m_0+m_1} K_{ij} - \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=m_0+m_1+1}^{m_0+m_1+m_2} K_{ij} - \sum_{i=m_0+1}^{m_0+m_1} \sum_{j=m_0+m_1+1}^{m_0+m_1+m_2} K_{ij}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

elde edilir. O halde (4.40) denklemlerinden dolayı

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=m_0+1}^{m_0+m_1} K_{ij} = m_1 \frac{\Delta f}{f}, \quad \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=m_0+m_1+1}^{m_0+m_1+m_2} K_{ij} = m_2 \frac{\Delta \sigma}{\sigma}$$

ve

$$\sum_{i=m_0+1}^{m_0+m_1} \sum_{j=m_0+m_1+1}^{m_0+m_1+m_2} K_{ij} = -m_1 m_2 \frac{g(\nabla f, \nabla \sigma)}{f \sigma}$$

bulunur. Bu denklem (4.43) de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}||h||^2 &= \frac{m^2}{2}||H||^2 + \bar{\tau}(TM) - m_1 \frac{\Delta f}{f} - m_2 \frac{\Delta \sigma}{\sigma} + m_1 m_2 \frac{g(\nabla f, \nabla \sigma)}{f \sigma} \\
&- \bar{\tau}(TM_\theta) - \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{1 \leq i \neq t \leq m_0} (h_{ii}^r h_{tt}^r - (h_{it}^r)^2) \\
&- \bar{\tau}(TM_T) - \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{m_0+1 \leq j \neq l \leq m_0+m_1} (h_{jj}^r h_{ll}^r - (h_{jl}^r)^2) \\
&- \bar{\tau}(TM_\perp) - \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{m_0+m_1+1 \leq a \neq b \leq m_0+m_1+m_2} (h_{aa}^r h_{bb}^r - (h_{ab}^r)^2).
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}||h||^2 &= \frac{m^2}{2}||H||^2 + \bar{\tau}(TM) - m_1 \frac{\Delta f}{f} - m_2 \frac{\Delta \sigma}{\sigma} + m_1 m_2 \frac{g(\nabla f, \nabla \sigma)}{f \sigma} \\
&\quad - \bar{\tau}(TM_\theta) - \bar{\tau}(TM_T) - 2\bar{\tau}(TM_\perp) \\
&\quad + \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{1 \leq i \neq t \leq m_0} (h_{it}^r)^2 + \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{m_0+1 \leq j \neq l \leq m_0+m_1} (h_{jl}^r)^2 \\
&\quad + \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{m_0+m_1+1 \leq a \neq b \leq m_0+m_1+m_2} (h_{ab}^r)^2 - \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{1 \leq i \neq t \leq m_0} (h_{ii}^r h_{tt}^r) \\
&\quad - \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{m_0+1 \leq j \neq l \leq m_0+m_1} (h_{jj}^r h_{ll}^r) \\
&\quad - \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{m_0+m_1+1 \leq a \neq b \leq m_0+m_1+m_2} (h_{aa}^r h_{bb}^r)
\end{aligned}$$

haline gelir. Elde ettiğimiz bu denkleme

$$\frac{1}{2} \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} ((h_{11}^r)^2 + \dots + (h_{mm}^r)^2)$$

teriminin eklenip çıkarılması ile

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}||h||^2 &= \frac{m^2}{2}||H||^2 + \bar{\tau}(TM) - m_1 \frac{\Delta f}{f} - m_2 \frac{\Delta \sigma}{\sigma} + m_1 m_2 \frac{g(\nabla f, \nabla \sigma)}{f \sigma} \\
&\quad - \bar{\tau}(TM_\theta) - \bar{\tau}(TM_T) - \bar{\tau}(TM_\perp) \\
&\quad + \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{1 \leq i \neq t \leq m_0} (h_{it}^r)^2 + \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{m_0+1 \leq j \neq l \leq m_0+m_1} (h_{jl}^r)^2 \\
&\quad + \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{m_0+m_1+1 \leq a \neq b \leq m_0+m_1+m_2} (h_{ab}^r)^2 - \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{1 \leq i \neq t \leq m_0} (h_{ii}^r h_{tt}^r) \\
&\quad - \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{m_0+1 \leq j \neq l \leq m_0+m_1} (h_{jj}^r h_{ll}^r) - \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{m_0+m_1+1 \leq a \neq b \leq m_0+m_1+m_2} (h_{aa}^r h_{bb}^r) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} ((h_{11}^r)^2 + \dots + (h_{mm}^r)^2) - \frac{1}{2} \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} ((h_{11}^r)^2 + \dots + (h_{mm}^r)^2)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

denkleminde ulaşırız. Burada, (2.24) denkleminde,

$$||H||^2 = \frac{1}{m^2} \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} ((h_{11}^r)^2 + \dots + (h_{mm}^r)^2) + 2 \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \{h_{ii}^r h_{jj}^r\}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte de (4.44) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}||h||^2 &= \frac{m^2}{2}||H||^2 + \bar{\tau}(TM) - m_1 \frac{\Delta f}{f} - m_2 \frac{\Delta \sigma}{\sigma} + m_1 m_2 \frac{g(\nabla f, \nabla \sigma)}{f \sigma} \\
&\quad - \bar{\tau}(TM_\theta) - \bar{\tau}(TM_T) - \bar{\tau}(TM_\perp) \\
&\quad + \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{1 \leq i \neq t \leq m_0} (h_{it}^r)^2 + \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{m_0+1 \leq j \neq l \leq m_0+m_1} (h_{jl}^r)^2 \\
&\quad + \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{m_0+m_1+1 \leq a \neq b \leq m_0+m_1+m_2} (h_{ab}^r)^2 - \frac{m^2}{2}||H||^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{r=m+1}^{\bar{m}} ((h_{11}^r)^2) + \dots + (h_{mm}^r)^2
\end{aligned} \tag{4.45}$$

elde edilir. O halde (4.42) eşitsizliği (4.45) den elde edilir. (4.42) de eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
\sum_{r=m+1}^{\bar{m}} \sum_{1 \leq i \neq t \leq m} (h_{it}^r)^2 &= 0 \\
\sum_{r=m+1}^{\bar{m}} (h_{11}^r)^2 + \dots + (h_{mm}^r)^2 &= 0
\end{aligned} \tag{4.46}$$

denklemlerinin gerçekleşmesidir. Bu durumda $i, j \in 1, \dots, m$ ve $r \in m+1, \dots, \bar{m}$ için $h_{ij}^r = g(h(e_i, e_j), e_r) = 0$ sonucuna ulaşılır. O halde $g \equiv 0$. $M = M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ formunda bir iki katlı çarpık çarpım alt manifoldu için, M_θ nın M içinde tümel jeodezik olduğu ve hem M_T hem de $M_\perp$ nin M içinde tümel umbilik olduğu bilinmektedir. M nin h ikinci temel formu özdeş olarak sıfır olduğundan, $M_\theta, \bar{M}$ içinde tümel jeodezik ve hem M_T hemde $M_\perp, \bar{M}$ içinde tümel umbiliktir.

Şimdi de (4.42) eşitsizliğinin başka bir uygulaması verilmiştir.

Teorem 4.7 $M = M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ $\bar{m}$ -boyutlu bir yerel çarpım Riemanniyen manifold $(\bar{M} = M_1(c_1) \times M_2(c_2), F, g)$ nin m -boyutlu aşikar olmayan iki katlı çarpık çarpım 1. dereceden yamuk yarı-değişmez alt manifoldu olsun, öyle ki burada M_θ, M_T ve $M_\perp$ sırası ile $\bar{M}$ nin has eğik, değişmez ve ters-değişmez alt manifoldlarıdır. Bu durumda M nin h

ikinci temel formunun normunun karesi

$$\begin{aligned} ||h||^2 \geq & \frac{1}{2}(c_1 + c_2)(m_0m_1 + m_0m_2 + m_1m_2) - 2m_1\frac{\Delta f}{f} - 2m_2\frac{\Delta \sigma}{\sigma} \\ & + 2m_1m_2\frac{g(\nabla f, \nabla \sigma)}{f\sigma} \end{aligned} \quad (4.47)$$

eşitsizliğini gerçekler, burada $m_0 = \text{boy}M_\theta$, $m_1 = \text{boy}M_T$, $m_2 = \text{boy}M_\perp$ ve $m_0 + m_1 + m_2 = m$ dir.

İspat: (2.44) denkleminde X, Y ve Z nin yerlerine $X = e_i$, $Y = Z = e_j$ seçilir ve e_i ile iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{R}(e_i, e_j, e_j, e_i) = & \frac{1}{4}(c_1 + c_2)\{g(e_j, e_j)g(e_i, e_i) - g(e_i, e_j)g(e_j, e_i) \\ & + g(Fe_j, e_j)g(Fe_i, e_i) - g(Fe_i, e_j)g(Fe_j, e_i)\} \\ & \frac{1}{4}(c_1 - c_2)\{g(e_j, e_j)g(Fe_i, e_i) - g(e_i, e_j)g(Fe_j, e_i) \\ & + g(Fe_j, e_j)g(e_i, e_i) - g(Fe_i, e_j)g(e_j, e_i)\} \end{aligned}$$

elde edilir. $1 \leq i \neq j \leq m$ için TM nin baz vektörleri üzerinden toplam alınırsa,

$$\begin{aligned} 2\bar{\tau}(TM) = & \frac{1}{4}(c_1 + c_2)\left\{\sum_{1 \leq i \neq j \leq m} g(e_j, e_j)g(e_i, e_i) - \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} g(e_i, e_j)^2\right. \\ & + \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} g(Fe_j, e_j)g(Fe_i, e_i) - \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} g(Fe_i, e_j)g(Fe_j, e_i)\} \\ & \frac{1}{4}(c_1 - c_2)\left\{\sum_{1 \leq i \neq j \leq m} g(e_j, e_j)g(Fe_i, e_i) - \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} g(e_i, e_j)g(Fe_j, e_i)\right. \\ & + \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} g(Fe_j, e_j)g(e_i, e_i) - \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} g(Fe_i, e_j)g(e_j, e_i)\} \end{aligned}$$

elde edilir. M bir $\bar{m}$ -boyutlu yerel çarpım Riemanniyen manifold, $\bar{M} = M_1(c_1) \times M_2(c_2)$ nin $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ formunda $\bar{m}$ -boyutlu aşıkak olmayan iki katlı çarpık çarpım 1. dereceden yamuk yarı-değişmez alt manifoldu olsun. TM_θ ve TM_T nin ortonormal çatı alanlarını sırasıyla $\{e_1 = \sec \theta Te_1, \dots, e_{m_0} = \sec \theta Te_{m_0}\}$ ve

$\{Fe_{m_0+1} = e_{m_0+1}, \dots, Fe_t = e_t, Fe_{t+1} = -e_{t+1}, \dots, Fe_{m_0+m_1} = -e_{m_0+m_1}\}$ olarak seçilsin.

Ayrıca $TM_\perp$ nin ortonormal çatı alanlarını $\{e_{m_0+m_1+1}, \dots, e_{m_0+m_1+m_2}\}$ olarak seçelim.

Burada eğik açısı θ olan M_θ eğik alt manifoldu için $1 \leq i \leq m_0$ iken $g(Fe_i, e_i) = \cos \theta$ elde edilir ve $1 \leq i \neq j \leq m_0$ iken $g(Fe_i, e_j) = 0$ elde edilir. $m_0 + 1 \leq i \leq t$ iken $g(Fe_i, e_i) = 1$ ve

$t + 1 \leq i \leq m_0 + m_1$ iken $g(Fe_i, e_i) = -1$ elde edilir. Dahası $M_\perp$ ters-değişmez bir alt manifold olduğu için $m_0 + m_1 + 1 \leq i \leq m_0 + m_1 + m_2 = m$ iken $g(Fe_i, e_i) = 0$ ve $m_0 + m_1 + 1 \leq i \neq j \leq m_0 + m_1 + m_2 = m$ iken $g(Fe_i, e_j) = 0$ elde edilir. Böylece, bu gerçekleri kullanarak aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} \sum_{m_0+1 \leq i \neq j \leq m_0+m_1} g(Fe_j, e_j)g(Fe_i, e_i) &= m_1 - 3 \quad , \\ \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} g(Fe_j, e_j)g(Fe_i, e_i) &= (m_0 - 1) \cos^2 \theta \quad , \\ \sum_{m_0+1 \leq i \neq j \leq m_0+m_1} g(e_j, e_j)g(Fe_i, e_i) &= 2t - m_1 - 1 \quad , \\ \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} g(e_j, e_j)g(Fe_i, e_i) &= (m_0 - 1) \cos \theta \quad , \\ \sum_{m_0+m_1+1 \leq i \neq j \leq m} g(Fe_j, e_j)g(Fe_i, e_i) &= \sum_{m_0+m_1+1 \leq i \neq j \leq m} g(e_j, e_j)g(Fe_i, e_i) = 0. \end{aligned}$$

ve

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq m} g(Fe_i, e_j)g(e_j, e_i) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} g(Fe_i, e_j)g(Fe_j, e_i) = 0.$$

$$\begin{aligned} 2\bar{\tau}(TM) &= \frac{1}{4}(c_1 + c_2) \{m(m-1) + m_1 - 3 + (m_0 - 1) \cos^2 \theta\} \\ &\quad + \frac{1}{4}(c_1 - c_2) \{2(2t - m_1 - 1) + 2(m_0 - 1) \cos \theta\}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Benzer şekilde TM_θ , TM_T ve $TM_\perp$ için sırasıyla

$$\begin{aligned} 2\bar{\tau}(TM_\theta) &= \frac{1}{4}(c_1 + c_2) \{m_0(m_0 - 1) + (m_0 - 1) \cos^2 \theta\} \\ &\quad + \frac{1}{4}(c_1 - c_2) \{2(m_0 - 1) \cos \theta\}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} 2\bar{\tau}(TM_T) &= \frac{1}{4}(c_1 + c_2) \{m_1(m_1 - 1) + m_1 - 3\} \\ &\quad + \frac{1}{4}(c_1 - c_2) \{2(2t - m_1 - 1)\}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$2\bar{\tau}(TM_{\perp}) = \frac{1}{4}(c_1 + c_2)\{m_2(m_2 - 1)\} \quad (4.51)$$

elde edilir. Böylece (4.42) denkleminde (4.48)~(4.51) denklemleri kullanılarak, (4.47) eşitsizliği elde edilir.



5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Çarpık çarpım veya katlı çarpık çarpım alt manifoldlar ([9]) Chen' in çalışmasından beri oldukça aktif bir çalışma alanıdır. Bu tezde bir yerel çarpım Riemanniyen manifoldun belirli tipteki iki katlı çarpık çarpım alt manifoldlarını çalıştık. Daha net ifade edersek, $M_T \times_f M_\perp \times_\sigma M_\theta$, $M_\perp \times_f M_T \times_\sigma M_\theta$ ve $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ tiplerindeki iki katlı çarpık çarpım alt manifoldlar ele alındı. Burada M_T , $M_\perp$ ve M_θ bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldunun sırasıyla değişmez, ters-değişmez ve (has) eğik alt manifoldlarıdır. Öncelikle bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen yapının bunlardan, $M_T \times_f M_\perp \times_\sigma M_\theta$ ve $M_\perp \times_f M_T \times_\sigma M_\theta$ tiplerinde iki katlı çarpım çarpımlara izin vermediğini diğer bir deyişle buradaki f ve σ çarpık fonksiyonlarında biri veya her ikisinin sabit olduğunu gözlemledik. Bu sonuçlarımızı Sonuç 4.1 ve Sonuç 4.2 de ifade ettik. Örnek 4.1 de ise bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen yapının $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ tipinde bir iki katlı çarpık çarpım alt manifoldunu inşa ettik ve böyle bir alt manifoldu ” İki katlı çarpık çarpım 1. dereceden yamuk yarı-değişmez alt manifold ” olarak adlandırdık. Bu tipteki alt manifoldlar için Teorem 4.4 de varlık koşullarını verdik, daha net bir ifadeyle bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen yapıda bir 1. dereceden (has) yamuk yarı-değişmez alt manifoldun $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ tipinde bir iki katlı çarpık çarpım alt manifold olması için gerek ve yeter koşullar verdik. (Bkz. Teorem 4.5). Daha sonra , bir $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ tipindeki bir alt manifoldun ikinci temel formunun davranışını inceleyip elde edilen sonuçlara dayanarak literatürde ”Chen'in diğer eşitsizliği ” olarak bilinen eşitsizliğe benzer bir eşitsizlik kurduk. (Bkz. Teorem 4.6) Öte yandan özel tipteki bir yerel çarpım Riemanniyen yapıda da, daha net ifadeyle $\bar{M} = M_1(c_1) \times M_2(c_2)$ olmak üzere bir $(\bar{M}, F, g)$ yerel çarpım Riemanniyen manifoldda da benzer eşitsizliği elde ettik.

Bu tezdeki fikir ve sonuçlar kullanılarak bir çok makale üretilebilir, örneğin hemen hemen Hermityen ve hemen hemen değme yapıların bazı alt sınıflarında bu tezde ele aldığımız $M_T \times_f M_\perp \times_\sigma M_\theta$, $M_\perp \times_f M_T \times_\sigma M_\theta$ ve $M_\theta \times_f M_T \times_\sigma M_\perp$ biçimindeki iki katlı çarpık çarpım alt manifoldlar tanımlanıp çalışılabilir. Üstelik elde edilebilecek sonuçlar bire bir aynı olmayabilir. Bunun nedenlerinden birisi değişmez ve eğik altmanifoldlar hemen

hemen Hermityen yapıda daima çift boyutlu iken hemen hemen değme yapılarda daima tek boyutlu olmasıdır. Diğer bir neden de bir yerel çarpım Riemanniyen yapının izin verdiği iki katlı çarpık çarpım tipine hemen hemen Hermityen ve hemen hemen değme yapılara izin vermeyebilir ki bunu da zaten literatürden biliyoruz.

Bu nedenlere dayanarak bu tezdeki fikir ve sonuçların diğer geometrik yapı ve alt manifold tiplerine uygulanabilir olduğunu öngörmek düşük bir olasılık değildir.



6. KAYNAKLAR

- [1]. Adati, T.(1981). Submanifolds of an almost product manifold, Kodai Math Journal, 4(2), 327-343.
- [2]. Al-Jedani, A., Uddin, S., Alghanemi, A., Mihai, I. (2019). Bi-warped products and applications in locally product Riemannian manifolds, J. Geom. Phys., 144, 358-369.
- [3]. Atçeken, M. (2008). Warped product semi-slant submanifolds in locally Riemannian product manifolds, Bull. Austral. Math. Soc., 77(2), 177-186.
- [4]. Atçeken, M. (2009). Geometry of warped product semi-invariant submanifolds of a locally Riemannian product manifold. Serdica Math. J., 35(3) , 273p-286p.
- [5]. Baker J.P. (1997). Twice warped products, M. Sc. Thesis, University of Missouri-Columbia, Columbia, MO.
- [6]. Bejancu, A. (1984). Semi-invariant submanifolds of locally product Riemannian manifolds, An. Univ. Timioara Ser. tiin. Math. Al., 22, No.1-2, 3-11.
- [7]. Bishop, R. L., O'Neill, B. (1969). Manifolds of negative curvature, Trans. Amer. Math. Soc., 145 no:1, 1-49.
- [8]. Chen, B.Y. (1990). Slant immersions, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 41, 135-137.
- [9]. Chen, B. Y. (2001). Geometry of warped product submanifolds in Kaehler manifolds, Monatsh Math., 133, 177-195.
- [10].Chen, B. Y.(2002). Ricci Curvature Of Real Hypersurfaces n Complex Hyperbolic Space, Arch.Math.(Brno)., 38., no. 1., 7380
- [11]. Chen, B. Y., Dillen, F. (2008). Optimal Inequalities For Multiply Warped Product Submanifolds, IEJG, 1, 1, 1-11.
- [12]. Chen, B.Y. (2017). Differential geometry of warped product manifolds and submanifolds, World Scientifc.

- [13]. Dillen, F., Nölker, S. (1993). Semi-parallelity multi rotation surfaces and the helix property, *J. Reine. Angew. Math.*, 435, 33-63.
- [14]. Dobarro, F., Ünal, B. (2005). Curvature of multiply warped products, *Journal of Geometry and Physics* 55; 75-106.
- [15]. Liu, X. , Shao, F. M. (1999). Skew semi-invariant submanifolds of locally product manifold, *Portugalie Math.*, 56(3), 319-327.
- [16]. Li, H. , Liu, X. (2005). Semi-slant submanifolds of a locally product manifold, *Georgian Math J*, 12, 273-282.
- [17]. Nölker, S. (1996). Isometric immersions of warped products, *Differential Geom. Appl.* 6,1, 1-30.
- [18]. Şahin, B. (2006). Slant submanifolds of an almost product Riemannian manifold, *J Korean Math Soc*, 43 , 717-732.
- [19]. Şahin, B.(2006). Warped product semi-invariant submanifolds of a locally product Riemannin manifold, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, 49, 97 No.4, 383-394.
- [20]. Şahin, B. (2009). Warped Product semi-slant submanifolds of a locally product Riemannian manifold, *Studia Sci. Math. Hungar.*, 46, no. 2, 169184.
- [21]. Şahin, B. (2012). *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*, Nobel, Ankara.
- [22]. Taştan, H. M. (2015). Warped product skew semi-invariant submanifolds of order 1 of a locally product Riemannian manifold, *Turk J Math*, 39 , 453-466.
- [23]. Taştan, H. M. (2018). Biwarped product submanifolds of a Kaehler manifold, *Filomat*, 32 (7), 2349-2365.
- [24]. Taştan, H. M., Özdemir, F. (2015). The geometry of hemi-slant submanifolds of a locally product Riemannian manifold, *Turk. J. Math.*, 39, 268-284.
- [25]. Tripathi, M. M. (1997). Generic submanifolds of generalized complex space forms. *Publ Math Debrecen*, 50: 373-392.
- [26]. Uddin, S., Chen, B. Y., AL-Jedani, A., and Alghanemi, A. (2020). Bi-warped product submanifolds of nearly Kaehler manifolds. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 43(2), 1945-1958.

- [27]. Uddin, S., Mihai, A., Mihai, I., Al-Jedani, A. (2020). Geometry of bi-warped product submanifolds of locally product Riemannian manifolds, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas.*, 114, 42, <https://doi.org/10.1007/s13398-019-00766-6>.
- [28]. Uddin, S., Al-Solamy, F.R., Shadid, M. H. (2018). Chen, B. Y. 's inequality for bi-warped products and its applications in Kenmotsu manifolds, *Mediterr. J. Math.*, 15, 5, 193.
- [29]. Uddin, S., Al-Jedani, A., Alghanemi, A., Mihai, I.(2018). Geometry of biwarped product submanifolds in Sasakian manifolds, arxiv:1811.02767v1 [math.DG].
- [30]. Uddin, S., Ali A., Al- Asmari N. M., Othman, W. A. (2016). Warped product pseudo-slant submanifolds in a locally product Riemann manifold. *Differential Geometry-Dynamical Systems*, 18, 147-158.
- [31]. Ünal, B. (2005). Multiply warped products, *J. Geom. Phys.*, 34, no.3, 287-301.
- [32]. Yano, K., Kon, M. (1984). *Structures on manifolds*, Singapore, World Scientific,.



ÖZGEÇMİŞ

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2017

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2022

Makale ve Bildiriler	
Makaleler Aydın Gerdan S., Taştan H.M., Traore M., Ülker Y., Biwarped Product Submanifolds With A Slant Base Factor., International Journal Of Maps In Mathematics., ISSN:2636-7467 (Online) accepted.	

