



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İKİ NOKTADA SÜREKSİZLİĞE SAHİP OLAN BİR PERİYODİK
STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UMUTKAN YÜKSEL

NİSAN 2023

UMUTKAN YÜKSEL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

NİSAN 2023

**İKİ NOKTADA SÜREKSİZLİĞE SAHİP OLAN BİR PERİYODİK
STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ**

Umutkan YÜKSEL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

NİSAN 2023

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Umutkan YÜKSEL

14/04/2023

İKİ NOKTADA SÜREKSİZLİĞE SAHİP OLAN BİR PERİYODİK STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Umutkan YÜKSEL

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
NİSAN -2023

ÖZET

Bu tez çalışmasında iki noktada süreksizliğe sahip periyodik Sturm-Liouville sınır - değer - geçiş problemi araştırılmıştır. Çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Sturm-Liouville problemleri hakkında genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, Sturm-Liouville teorisi ile ilgili literatürde yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, bu tez çalışmasında yararlanılacak olan Sturm-Liouville teorisine ait tanım, teoremler ve ispatlara değinilmiştir. Dördüncü bölümde, periyodik Sturm-Liouville sınır-değer-geçiş probleminin özdeğerlerinin reel olduğu, özfonksiyonlar sisteminin ortogonal olduğu ve problemin kendine eşlenik olduğu ispatlanmıştır. Problemle yakından ilgili temel çözümler tanımlanmıştır. Temel çözümlere karşılık gelen integral denklemler bulunmuş ve bu integral denklemler aracılığı ile temel çözümler için asimptotik formüller elde edilmiştir. Probleme karşılık gelen karakteristik denklem tanımlanmıştır. Çalışılan problemin özdeğerlerinin karakteristik denkleminin sıfır yerleri ile çakışık olduğu gösterilmiştir. Son bölümde ise bu çalışma ile ilgili ortaya çıkan sonuçlara yer verilmiştir.

Sayfa Adedi
Anahtar Kelimeler

: 72
: Sturm-Liouville Problemi, Özdeğer, Özfonksiyon, sınır-geçiş şartları, Karşılaştırma Teoremi, Karakteristik Denklem
: Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR

Danışman

SOME PROPERTIES OF A PERIODIC STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH DISCONTINUITY AT TWO POINTS

(M. Sc. Thesis)

Umutkan YÜKSEL

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
April-2023

ABSTRACT

In this thesis, the periodic Sturm-Liouville boundary-value-transition problem with discontinuity at two points is investigated. The study consists of five chapters. In the first chapter, general information about Sturm-Liouville problems is given. In the second chapter, the works on Sturm-Liouville theory in the literature are mentioned. In the third chapter, some the methods definitions, theorems and proofs of the Sturm-Liouville theory which are used in this thesis are given. In the fourth section, it is shown that the eigenvalues of the periodic Sturm-Liouville boundary-value-transmission problem are real. Fundamental solutions closely related to the problem are defined. The integral equations corresponding to the fundamental solutions are defined and asymptotic formulas for the fundamental solutions are found by using these integral equations. The characteristic equation corresponding to the problem is determined. It is shown that the eigenvalues of the studied problem coincide with the zeros of the characteristic equation. In the last chapter, the importance of the thesis topic is discussed.

Page Number	: 72
Keywords	: Sturm-Liouville Problem, Eigenvalue, Eigenfunction, Boundary-Transition Conditions, Comparison Theorem, Characteristic Equation
Supervisor	: Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Öncelikle tez danışmanım Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR' e gösterdiği sonsuz sabır, anlayış, paha biçilemez eğitimi ve hoşgörülü davranışı için en içten teşekkürlerimi sunarım. Kendisinden matematiğin yanısıra pek çok şey öğrenmiş olmakla beraber araştırmayı, üretmeyi ve geliştirmeyi öğrendim. Kendisinin öğrencisi olup ders almak benim için büyük bir onurdur. Yüksek lisans eğitimim boyunca üzerimde emeği bulunan tüm hocalarıma sonsuz saygı ve teşekkürü bir borç bilirim. En önemlisi hayatım boyunca her başarımın arkasında sevgisini, güvenini, sabrını ve sonsuz desteğini en derinden hissettiren canım annem ve canım babam Selma - Erkan YÜKSEL'e, bu hayatın güzelliği konuşulurken bahsedeceğim kişi olan Meryem ÇOLDUR'a, tez çalışmam sürecinde beni daima motive edip daha iyi odaklanmama yardımcı olan kıymetlilerim Zeynep - İsmail COŞKUN'a, en değerlilerim ve miniklerim Alp Arslan COŞKUN ve Kutay Berk COŞKUN'a sonsuz saygı, sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	viii
RESİMLER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	2
3. GENEL BİLGİLER	6
4. BULGULAR	15
4.1. Sınır Değer Geçiş Probleminin İfadesi	15
4.2. Problemin Geçiş Şartlarını Sağlayan Sturm-Liouville Denklemleri İçin Karşılaştırma Teoremi	16
4.3. Sınır Değer Geçiş Probleminin Özdeğerlerin Reel Olma Durumu	25
4.4. Ortogonalite	28
4.5. Sınır Değer Geçiş Probleminin Kendine Eşleniklik Durumu	30
4.6. Problemlerle İlgili Yardımcı Başlangıç Değer Problemleri	33
4.7. Başlangıç Değer Problemlerinin Çözümleri İle Eşdeğer Olan İntegral Denklemler	38
4.8. Başlangıç - Değer Problemlerinin Çözümleri için Asimptotik Davranışlar	48
4.9. Karakteristik Denklem	60
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	69

KAYNAKLAR	70
ÖZGEÇMİŞ	72



RESİMLER DİZİNİ

Resim	Sayfa
Resim 2.1. Bir Telin Titreşimleri	2



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
H	Hilbert Uzayı
L	Lineer Operatör
L^*	L Operatörünün Adjointi
$L_2[a, b]$	Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$\ \cdot \ $	Norm
$W(\phi_i, \chi_i)$	Wronskian Determinantı

1. GİRİŞ

Charles Sturm (1803-1855) ve Joseph Liouville (1809-1882), 1836 ve 1837'deki bir makale serisiyle kendi adlarıyla isimlendirilen Sturm-Liouville sınır değer teorisinin kurucuları olarak bilinirler. Sturm-Liouville sistemleri, sınır koşullarına sahip ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerdir ve genellikle fiziksel sistemleri temsil eden kısmi diferansiyel denklemlerdeki değişkenlere ayırma yöntemi kullanıldıktan sonra elde edilmektedirler. Sturm-Liouville denkleminin fizik, kuantum fiziği, mühendislik, astronomi, mekanik problemleri, elektrik iletkenliği, jeofizik, meteoroloji ve doğa bilimlerinin diğer dalları vb. gibi birçok çeşitli uygulama alanlarında sıkça karşılaşılmaktadır.

Sturm-Liouville problemleri genel olarak regüler, singüler ve periyodik olmak üzere üç farklı şekilde karşımıza çıkar. Küre biçimindeki bölgedeki fiziksel süreçlerin matematiksel modeli oluşturulduğunda elde edilen problemler genel olarak periyodik Sturm-Liouville problemleridir. Ayrıca birçok titreşim problemleri de periyodik sınır-değer problemlerine indirgenmektedir. Böyle problemlere örnek olarak Yer'in sismik hareketleri, ince telin titreşimi, atmosfer dalgaları gösterilebilir.

Fiziksel bir problemin çözümü için Sturm-Liouville probleminin aşağıdaki özellikleri elde edilmedir.

- (i) - Özdeğerlerini bulmak,
- (ii) - Özdeğerlerine karşılık gelen uygun özfonksiyonlarını bulmak,
- (iii) - Verilmiş fonksiyonu özfonksiyonların serisine açmak.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Diferansiyel denklemler için önemli bir yere sahip olan Sturm-Liouville denklemleri adını ilk olarak 18. yy ortalarında Charles Sturm (1803-1855) ve Joseph Liouville'den (1809-1882) alan son derece gelişmiş teori ve aktif bir ilgi alanıdır. İlk olarak ısı iletimi problemlerine uygulanan Sturm-Liouville teorisi günümüzde daha geniş alanlara yayılmış olup çeşitli fiziksel problemlere uygulanmaya başlanmıştır. Bundan dolayı matematikçiler iki yüzyıla yakın süredir Sturm-Liouville problemleri üzerinde çalışmalarına devam etmektedirler.

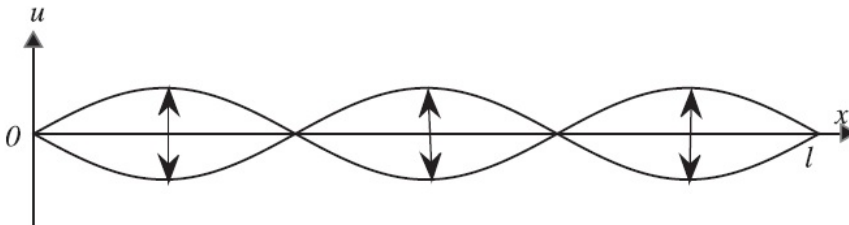
Piyano, gitar veya keman teli gibi iki direk arasına gerilmiş gergin, homojen bir tel düşünün. Daha sonra teli, enine küçük titreşimler yayacak şekilde çekin. Bir telin hareketsiz (çekilmemiş) halinden sapması $u = u(x, t)$ denklemi ile gösterilsin. Eğer $u = u(x, t)$, telin hareketsiz (çekilmemiş) halinden sapmasını gösteriyorsa o zaman u fonksiyonu aşağıdaki dalga denklemini, başlangıç koşullarını ve sınır koşullarını sağlar.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Burada l telin uzunluğu olur. $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ dalga yayılma hızıdır. τ teldeki gerilimin yatay bileşenidir. ρ ise telin lineer yoğunluğu olur. f ve g fonksiyonları, telin ilk yer değiştirmesini ve hızını belirtmektedir. Homojen olan bu tele, eğer dış kuvvetler etki ederse dalga denklemini

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + u(x, t)$$

biçiminde yazılır.



Resim 2.1. Bir Telin Titreşimleri

Burada $u(x, t)$ fonksiyonu, Şekil (2.1)'deki tel çekildiğinde enine doğru oluşan titreşimleri

modellemektedir. Eğer tel homojen değilse, o zaman $\rho = \rho(x) > 0$ olur. Dalga fonksiyonunun türevi $\tau > 0$ fonksiyonunun ya bir sabit ya da t zaman değişkenine bağlı bir fonksiyon olduğunu gösterir. Böylece daha genel olarak dalga denklemi modeli

$$\rho(x)u_{tt} = (\tau(t)u_x)_x$$

halini alır. Eğer tel homojen ise, $\rho(x) = \rho_0$ ve $\tau = \tau_0$ olur. Burada ρ_0 ve τ_0 sabittir ve $c = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}}$ dır. (2.1) dalga denkleminin sınır şartlarıyla birlikte

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

biçiminde değişkenlerine ayırma yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \\ T''(x) + \lambda c^2 T(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

elde edilir. Burada λ ayırma sabitidir. $u(x, t) = X(x)T(t)$ çözümü, özdeşlik olarak sıfır değilse önemli olacaktır. Bu denklem her zaman $X(x) = 0$ aşıkâr çözümüne sahiptir. Bu nedenle, ayrılmış çözümler (2.2) probleminin, aşıkâr olmayan çözümlere sahip λ değerleri için kullanışlı olacaktır. Yani, değişkenlere ayırma yöntemi X için bir Sturm-Liouville problemi ortaya çıkarmıştır. Eğer tel homojen değilse ve gerilimin yatay bileşeni zamana bağlıysa, o zaman (2.2) denklemi

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda \rho(x)X(x) &= 0 \\ X(0) &= 0, \quad X(l) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

şeklinde olur ve ayrılmış bir çözümün zaman faktörü

$$T''(x) + \lambda r(t)T = 0$$

denklemini sağlar.

Diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır koşullarını sağlamak için bir özdeğer parametresi içeren adi lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerinden asimptotik denklemler elde ederek regüler sınır değer probleminin özfonksiyonlar ve bu özfonksiyonlar için fonksiyonlar sisteminin tamlığı G. D. Birkhoff tarafından ispatlanmıştır (Birkhoff, 1908).

Reel periyodik katsayıya sahip eşlenik diferansiyel operatörlerin spektral açılımı, 1950'li yıllarda Gelfand tarafından verilmiştir (Gelfand, 1950).

J. W. Lee, Periyodik Sturm-Liouville sınır değer problemlerinin spektral özellikleri ve salınım teoremleri üzerine bir çalışma yapmıştır (Lee, 1972).

Eastham, Periyodik diferansiyel operatörlerin (Hill, Dirac, Difüzyon denklemi vs) periyodik ve antiperiyodik sınır koşullarını sağlamak üzere spektrumların dağılımı ile ilişkili önemli çalışmalar yapmıştır (Eastham, 1974).

A. Boumenir, Shannon-Whittaker örnekleme teoremi ile Paley-Wiener uzaylarında interpolasyon tekniklerini kullanarak bir periyodik Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini hesaplamıştır (Boumenir, 1999).

O. Sh. Mukhtarov, M. Kandemir ve N. Kuruoğlu, Ele alınan aralığın sadece uç noktalarını değil, aynı zamanda bir süreksizlik noktasını, sonlu sayıda iç noktayı ve soyut lineer fonksiyonelleri de içeren süreksiz katsayılar ve sınır koşulları ile diferansiyel denklem tarafından üretilen özdeğer parametresi ile sınır değer problemini araştırmışlardır (Mukhtarov, Kandemir, & Kuruoğlu, 2002).

H. Volkmer & P. Binding, Periyodik Sturm-Liouville problemine bir Prüfer açısı yaklaşımı adlı makalesinde Prüfer açısı analizine antiperiyodik/periyodik Sturm-Liouville problemlerinin nasıl indirgeneceğini araştırmışlardır (Binding & Volkmer, 2012).

K. Aydemir, Özdeğere bağlı sınır ve geçiş koşulları ile iki aralıklı Sturm-Liouville denkleminde oluşan yeni tip sınır-değer problemlerini araştırmak için operatör-teorik yöntem geliştirmiştir (Aydemir, 2014).

F. Rictsz, V. Neumann, K. O. Friedrichs ve diğer matematikçiler, Simetrik ve kendine eşlenik operatörlerin spektral analizini oluşturmuşlardır (Duygun, 2013).

O. Sh. Mukhtarov ve meslektaşları, Denkleminde özdeğer parametresi içeren Sturm-Liouville denkleminin yanı sıra sınır şartlarında da özdeğer parametresi içeren süreksiz problemleri incelemişlerdir (Aydemir, 2014), (Aydemir & Mukhtarov, 2017), (Aydemir & Mukhtarov, 2021c), (Sh., Aydemir, Jabbarov, & Olgar, 2018), (Mukhtarov, Kadakal, & Mukhtarov, 2002), (Mukhtarov, Kadakal, & Altınışık, 2004).

H. Olğar ve O. Sh. Mukhtarov, Sınır koşullarında özdeğer parametresi ve sınır koşulları ile birlikte iki ayrı aralıkta tanımlanmış ikinci mertebeden diferansiyel denklem olan Sturm-Liouville denkleminde oluşan yeni tip bir sınır değer probleminin bazı spektral özelliklerini araştırmışlardır (Olğar & Mukhtarov, 2017).

M. Kandemir, K. Aydemir ve O. Yılmaz, Süreksizlik noktası ile verilen periyodik bir Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonları hakkında çalışma yapmışlardır (Yılmaz, Kandemir, & Aydemir, 2019).

K. Aydemir, F. Muhtarov ve S. Paş, Tanımlanan aralıkta süreksizlik noktasıyla verilen aynı zamanda bu noktada geçiş koşulu içeren bir antiperiyodik sınır değer probleminin spektral özelliklerini incelemiştir (Paş, Aydemir, & Mukhtarov, 2020).

O. Sh. Mukhtarov ve K. Aydemir, Periyodik Sturm-Liouville denkleminin, sınır koşulları ve bir iç noktadaki ek iletim koşulları altında bazı spektral özelliklerini araştırmışlardır (Aydemir & Mukhtarov, 2021a).

O. Sh. Mukhtarov ve K. Aydemir, Üç aralıkta tanımlanan iki iç süreksizlik noktasında dört geçiş şartıyla tanımlanan periyodik Sturm-Liouville problemini araştırmışlardır (Aydemir & Mukhtarov, 2021b).

Çeşitli türdeki diferansiyel denklemler için periyodik Sturm-Liouville problemleri literatürde kapsamlı bir şekilde incelenmiştir.

3. GENEL BİLGİLER

Bu kısımda, ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan başlıca tanımların, teoremlerin ve yardımcı teoremlerin ifadelerine yer verilmiştir.

3.1 Tanım $I \neq \emptyset$ aynı zamanda toplama ve bir skaler ile çarpma işlemlerinin tanımlı olduğu herhangi küme, K 'nin de (kompleks ya da reel) cisim olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki aksiyomların sağlandığını kabul edelim.

A) $(I, +)$ cebirsel yapısı değişmeli gruptur. Yani,

- 1) Her $m, n \in I$ için $m + n \in I$
- 2) Her $m, n \in I$ için $m + n = n + m$
- 3) Her $m, n, k \in I$ için $(m + n) + k = m + (n + k)$
- 4) Her $m \in I$ için $m + 0 = m$ eşitliği sağlayan $0 \in I$ elemanı mevcuttur.
- 5) Her $m \in I$ için $m + (-m) = 0$ olacak şekilde $(-m) \in I$ elemanı mevcuttur..

B) $m, n \in I$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ için aşağıdaki koşullar sağlanmaktadır.

- 1) $\lambda_1 m \in I$
- 2) Her $m, n \in I$ ve her $\lambda_1 \in K$ için $\lambda_1(m + n) = \lambda_1 m + \lambda_1 n$
- 3) Her $m \in I$ ve her $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ için $(\lambda_1 + \lambda_2)m = \lambda_1 m + \lambda_2 m$
- 4) Her $m \in I$ ve her $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ için $(\lambda_1 \lambda_2)m = \lambda_1(\lambda_2 m)$
- 5) Her $m \in I$ için $1I = I$ olacak biçimde $1 \in K$ vardır.

Bu takdirde I kümesine K cismi üzerinde bir vektör uzay (lineer uzayı) denir. $K = \mathbb{R}$ seçilirse I kümesine reel lineer uzay, $K = \mathbb{C}$ seçilirse I kümesine kompleks lineer uzay adı verilmektedir (Bozkurt & Türen, 2000).

3.2 Tanım V , n -boyutlu bir reel vektör uzayı olmak üzere W_1 ve W_2 , V vektör uzayının iki alt vektör uzayı olsun.

$$W_1 + W_2 = V$$

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

koşulları sağlanıyorsa V vektör uzayına W_1 ve W_2 alt vektör uzaylarının direkt toplam uzayı denir ve $W_1 \oplus W_2 = V$ ile gösterilir.

3.3 Tanım Bir I lineer uzayı (vektör uzayı) üzerinde tanımlanan $\|\cdot\| : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki

- 1) Her $m \in I$ için $\|m\| \geq 0$
- 2) Her $m \in I$ için $\|m\| = 0 \Leftrightarrow m = 0$
- 3) Her $m \in I$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) için $\|\lambda m\| = |\lambda| \|m\|$
- 4) Her $m, n \in I$ için $\|m + n\| \leq \|m\| + \|n\|$

aksiyomları sağladığı takdirde bu fonksiyona bir norm denir. Eğer I lineer uzayı üzerinde tanımlanmış olan $\|\cdot\|$ fonksiyonu norm aksiyomlarını sağlıyorsa, $(I, \|\cdot\|)$ sıralı ikilisine normlu lineer uzay ya da sadece normlu uzay adı verilir (Orlicz, 1992).

3.4 Tanım $(I, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı üzerinde

$$d : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^+, d(x, y) = \|x - y\|$$

ile tanımlanan d fonksiyonu bir metrik belirtmektedir. Bu metriğe de $\|\cdot\|$ normu tarafından üretilen metrik denilmektedir (Orlicz, 1992).

3.5 Tanım $(I, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve (a_n) bu uzayın içinde bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $m, n > N$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak biçimde ε 'a bağlı bir $N \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (a_n) dizisine bir Cauchy dizisidir denir (Orlicz, 1992).

3.6 Tanım Eğer I normlu lineer uzayında $d(m, n) = \|m - n\|$ metriğine göre her Cauchy dizisi yakınsak ise I uzayına tam normlu uzay denir (Orlicz, 1992).

3.7 Tanım $K = \mathbb{C}$ ya da $K = \mathbb{R}$ olmak üzere V, K cismi üzerinde tanımlı herhangi bir lineer uzay olsun. V lineer uzayı üzerinde tanımlı

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$$

dönüşümü

- 1) Her $m \in V$ için $\langle m, m \rangle \geq 0$ ve $\langle m, m \rangle = 0 \iff m = 0$
- 2) Her $m, n \in V$ için $\langle m, n \rangle = \overline{\langle n, m \rangle}$
- 3) Her $m, n \in V$ ve $\lambda \in K$ için $\langle \lambda m, n \rangle = \lambda \langle m, n \rangle$
- 4) Her $m, n, k \in V$ için $\langle m + n, k \rangle = \langle m, k \rangle + \langle n, k \rangle$

koşullarını sağlasın. Bu şartları sağlayan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümüne bir iç çarpım, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sıralı iki-

lisine de iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı) denir (Naimark, 1968).

3.8 Tanım $i \in V$ ve $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir iç çarpım uzayı olsun. i vektörünün normu

$$\|i\| = \langle i, i \rangle^{1/2} = \left(\sum_{j=k}^{\infty} |\varepsilon_j|^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Böylece $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayı bir normlu vektör uzayı belirtmektedir (Naimark, 1968).

3.9 Tanım $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir iç çarpım uzayı olsun. Buna göre

$$\|e\| = \langle e, e \rangle^{1/2}$$

iç çarpım uzayı tam ise yani $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uzayındaki her Cauchy dizisi bir e_0 noktasına yakınsıyor ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir (Kreyszig, 1978).

3.10 Tanım N Hilbert uzayında herhangi bir $D \subseteq N$ lineer alt uzayı olmak üzere

$$L : D \subseteq N \rightarrow N$$

dönüşümü tanımlansın. Eğer her $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ve her $e_1, e_2 \in D$ için

$$L(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = \lambda_1 L(e_1) + \lambda_2 L(e_2)$$

eşitliği sağlanıyorsa L 'ye lineer operatör, D 'ye ise L operatörünün tanım bölgesi adı verilir. $D(L)$ ile gösterilmektedir (Naimark, 1968).

3.11 Tanım $Z, D(Z)$ tanım bölgesinde lineer bir operatör olması şartıyla

$$Zy = \lambda y$$

eşitliği sağlanan $y \neq 0$ vektörü var ise λ sayısına Z operatörünün özdeğeri, y vektörüne de bu özdeğere karşılık gelen özvektör denir (Kreyszig, 1978).

3.12 Tanım L , bir H Hilbert uzayında bir sınırlı lineer operatör olsun. Her $u_1, u_2 \in D(L) \subset H$ için

$$\langle Lu_1, u_2 \rangle = \langle u_1, L^* u_2 \rangle$$

denklemini sağlandığı takdirde L^* 'a L 'nin bir eşlenik operatörü adı verilir.

Eğer $D(L) = D(L^*)$ ve $L = L^*$ olduğu durumlarda da L operatörü kendine eşlenik operatör

olarak adlandırılır (Kreyszig, 1978).

3.13 Tanım $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$ ve $\rho_3(x)$ bir $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere ve $\rho_1(x) \neq 0$ olması şartıyla herhangi bir

$$\rho_1(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \rho_2(x) \frac{dy}{dx} + (\rho_3(x) + \lambda) y = 0$$

ikinci mertebeden olan lineer ve homojen diferansiyel denklemi verilsin. Bu denklem $\rho_1(x)$ fonksiyonuna bölündüğünde

$$\frac{d^2(y)}{dx^2} + \frac{\rho_2(x)}{\rho_1(x)} \frac{dy}{dx} + \frac{\rho_3(x)y}{\rho_1(x)} + \frac{\lambda y}{\rho_1(x)} = 0$$

denklemini elde edilir. Buradan denklemi türevlenebilen bir $p(x) > 0$ fonksiyonu ile çarparsak

$$p(x) \frac{d^2(y)}{dx^2} + p(x) \frac{\rho_2(x)}{\rho_1(x)} \frac{dy}{dx} + p(x) \frac{\rho_3(x)y}{\rho_1(x)} + p(x) \frac{\lambda y}{\rho_1(x)} = 0$$

denklemini bulunur. Son ifadede $p(x)$ fonksiyonu

$$p'(x) = p(x) \frac{\rho_2(x)}{\rho_1(x)} \text{ olacak biçimde seçilirse ve } q(x) = p(x) \frac{\rho_3(x)}{\rho_1(x)}, r(x) = \frac{p(x)}{\rho_1(x)}$$

gösterimleri tanımlanırsa verilen ikinci mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemi

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) + \lambda r(x)) y(x) = 0$$

Sturm-Liouville denklemi şeklinde yazılabilmektedir. Bu denklemde $p(x)$ türevlenebilirdir ve $q(x)$, $r(x)$ ise sürekli fonksiyondur.

$p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r(x)$ fonksiyonları bir $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde sürekli ve $p(x) > 0$ ve $r(x) > 0$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığındaki tüm x değerleri için reel fonksiyon ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \quad (3.1)$$

denklemine Sturm-Liouville denklemi denir.

Eğer L diferansiyel operatörü

$$L := \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y$$

biçiminde tanımlanırsa (3.1) denklemi

$$L[y] = \lambda r(x)y \quad (3.2)$$

şeklinde operatör denklem biçiminde yazılabilir.

3.14 Tanım Regüler Sturm-Liouville problemi

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \quad a \leq x \leq b \quad (3.3)$$

diferansiyel denklemi ile birlikte uç noktadaki

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \text{ ve } \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 \quad (3.4)$$

sınır koşullarından oluşan bir problemidir. Burada $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde reel değerli ve sürekli fonksiyonlar olup $p(x) > 0$ ve $r(x) > 0$ dır. α , β , γ , δ reel sabitler, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ve $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise x den bağımsız özdeğer parametresidir.

3.15 Tanım Herhangi bir $\lambda = \lambda_i$ değeri için bu problemin sıfırdan farklı bir $y_i(x) \neq 0$ çözümü mevcutsa, λ_i değerine problemin bir özdeğeri, $y_i(x)$ fonksiyonu için de bu özdeğere karşılık gelen uygun özfonksiyon adı verilir.

3.16 Tanım (3.3) – (3.4) denklemleri ile verilen problemde:

- i) $p(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonlarının en az bir tanesi, verilen sınır noktalarından en az birinde sonlu limite sahip değildir.
- ii) (a, b) aralığı sonsuzdur, yani sadece $a = -\infty$ ya da $b = \infty$ ya da her ikisi sonsuz.
- iii - Keyfi $x \in [a, b]$ için $p(x) = 0$ ya da keyfi $x \in [a, b]$ için $r(x) = 0$ durumlarından en az biri sağlandığı takdirde singüler Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır (Kandemir, 2021).

3.17 Tanım $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r(x)$ fonksiyonları bir $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde reel değerli sürekli fonksiyon ve $p(x) > 0$, $q(x) > 0$ ve $r(x) > 0$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığındaki tüm x değerleri için reel fonksiyon ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \quad a \leq x \leq b \quad (3.5)$$

denkleminde ve

$$y(a) = y(b) \quad (3.6)$$

$$y'(a) = y'(b) \quad (3.7)$$

sınır koşullarından oluşan problem periyodik Sturm-Liouville problemi adı verilir (Kandemir, 2021).

3.1 Teorem Periyodik Sturm-Liouville problemleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

- i) (3.1) - (3.7) Periyodik Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri reeldir.
- ii) (3.1) - (3.7) Periyodik Sturm-Liouville probleminin farklı olan özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonaldır. Yani (3.1) - (3.7) probleminin $\lambda_n \neq \lambda_m$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar sırasıyla ϕ_n ve ϕ_m ise bu durumda

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) r(x) dx = 0$$

sağlanır.

- iii) - Bir periyodik Sturm-Liouville probleminin sayılabilir sonsuz sayıda (λ_n) özdeğeri vardır ve bu özdeğerler

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

biçiminde sıralanabilir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

eşitliği sağlanır (Boyce & DiPrima, 2016).

3.18 Tanım Asimptotik olarak sınırlılık

$f, g : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonları verilsin ve $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası D kümesinin bir yığılma noktası olsun. Eğer z_0 -ın en az bir delinmiş komşuluğunda

$$|f(z)| \leq K|g(z)|$$

eşitsizliği en az bir $K \geq 0$ için sağlanıyorsa, yani öyle $\delta > 0$ ve $K \geq 0$ sabitleri varsa ki $0 < |z - z_0| < \delta$ olacak şekilde yukarıdaki eşitsizlik sağlanırsa bu durumda

$$f(z) = O(g(z)), \quad z \rightarrow z_0$$

biçiminde yazılmaktadır. Bu sonuç $z \rightarrow z_0$ için $f(z)$ fonksiyonunun $g(z)$ fonksiyonundan asimptotik olarak büyük olmadığını gösterir ve 'büyük O' ile gösterilir. Dolayısıyla $z \rightarrow z_0$

için $g(z)$ fonksiyonunun hem z_0 noktasında hem de z_0 noktasının bir komşuluğunda sıfır olmaması şartı sağlandığı durumda

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right|$$

z_0 -ın delinmiş komşuluğunda sınırlıdır.

3.19 Tanım Asimptotik olarak küçüklük

Eğer her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $0 < |z - z_0| < \delta$ olacak şekilde her z için

$$|f(z)| \leq \varepsilon |g(z)|$$

sağlanırsa bu durumda

$$f(z) = o(g(z)), \quad z \rightarrow z_0$$

biçiminde yazılır. Dolayısıyla $z \rightarrow z_0$ için $g(z)$ fonksiyonunun hem z_0 noktasında hem de z_0 noktasının bir komşuluğunda sıfır olmaması şartı sağlandığı durumda

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$$

olur. Bu da $z \rightarrow z_0$ için $f(z)$ fonksiyonunun $g(z)$ fonksiyonundan asimptotik olarak daha küçük olduğunu ve 'küçük o' mertebesinde olduğunu gösterir.

3.20 Tanım Asimptotik olarak eşitlik

Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1$$

ise f ve g fonksiyonları $z \rightarrow z_0$ için asimptotik olarak eşittir denir ve bu durum

$$f(z) \sim g(z), \quad z \rightarrow z_0$$

ile gösterilir. Bu durumda

$$f(z) = g(z) + o(g(z)), \quad z \rightarrow z_0$$

olacağı açıktır. Bu eşitlikte $f(z)$ fonksiyonunun asimptotik olarak $g(z)$ fonksiyonuna eşdeğer olduğunu ifade eder. Örneğin, $z \rightarrow 0$ için $\sin z = z + o(z^2)$ eşitliği bize $\sin z - z \rightarrow 0$ ın z^2 den daha hızlı sıfıra yakınsar olduğunu söyler. $\sin z = z + O(z^3)$ bize $\sin z - z \rightarrow 0$ ın $z = 0$ noktasının komşuluğunda z^3 gibi davrandığını söyler.

Örnekler

- $f(t) = O(1)$, $t \rightarrow t_0$ için t ifadesi t_0 'a yakın olduğunda $f(t)$ fonksiyonunun sınırlı olduğu anlamına gelir.
- $t \rightarrow t_0$ için $f(t) = o(1) \Rightarrow f(t) \rightarrow 0$.
- $t \rightarrow \infty$ için $f(t) = 5t^2 + t + 3$ ise o zaman $f(t) = o(t^3)$, $f(t) = O(t^2)$ ve $f(t) \sim 5t^2$ elde edilir. Fakat $t \rightarrow 0$ için $f(t) \sim 3$ elde edilir.
- $t \rightarrow \infty$ için $t^{1000} = o(e^t)$, $\cos t = O(1)$ elde edilir.
- $t \rightarrow 0+$ için $t^2 = o(t)$, $e^{-1/t} = o(1)$, $\tan t = O(t)$, $\sin t \sim t$.
- $t \rightarrow 0$ için $\sin(1/t) = O(1)$, $\cos t \sim 1 - \frac{1}{2}t^2$

3.21 Tanım (Karşılaştırma Teoremi)

$$L_1(u) = u'' + m(x)u = 0$$

ve

$$L_2(u) = u'' + t(x)u = 0$$

denklemleri verilsin. Bu $L_1(u) = 0$ ve $L_2(u) = 0$ denklemleri $x \in [a, b]$ için $m(x) < t(x)$ koşulunu sağlasın. $L_1(u_1)$ ve $L_2(u_2)$ olsun. O halde sıfır olmayan çözümler için $u_1(x)$ in iki ardışık sıfırının arasında $u_2(x)$ de en az bir sıfıra sahiptir (Swanson, 1968).

3.2 Teorem Birinci mertebeden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.8)$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Burada

(a) f fonksiyonu, xy -düzleminin D gibi bir bölgesinde x ve y 'nin tek değerli, sürekli bir fonksiyonu ve

b) $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevi de, $(x, y) \in D$ için x ve y 'nin sürekli bir fonksiyonu, ayrıca $(x_0, y_0) \in D$ olsun. O halde (3.8) denkleminin, $h > 0$ yeterince küçük olmak üzere bir $|x - x_0| \leq h$ aralığında tanımlı olan ve

$$\phi(x_0) = y_0 \quad (3.9)$$

şartını sağlayan bir tek ϕ çözümü vardır (Shepley & Ross, 1985).

3.22 Tanım (Cauchy İntegral Formülü) Eğer

$$y^{(n)}(x) = f(x)$$

ise bu durumda

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t) dt + M_{n-1}(x)$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$M_{n-1}(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots + u_{n-1} x^{n-1}$$

herhangi bir $(n-1)$. mertebeden türevlenebilir bir polinom olarak bilinir.

3.23 Tanım $u(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlanmış ve Lebesgue anlamında ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|u(x)|^2$ fonksiyonu bir kapalı $[a, b]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilirse $u(x)$ fonksiyonu bu $[a, b]$ kapalı aralığında karesi integrallenebilen fonksiyon adını alır ve $\forall x \in [a, b]$ için $L_2[a, b]$ uzayı,

$$L_2[a, b] = \left\{ u(x) : \int_a^b |u(x)|^2 dt < \infty \right\}$$

denklemleriyle tanımlanmaktadır. Bu uzaydaki iç çarpım ise $\forall x \in [a, b], \forall u, m \in L_2$ için

$$\langle u(x), m(x) \rangle := \int_a^b u(x) \overline{m(x)} dx$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca tanımlanan iç çarpım uzayı bir Hilbert uzayıdır (Kreyszig, 1978).

4. BULGULAR

Bu bölümde iki noktada süreksizliğe sahip olan Sturm-Liouville problemi tanımlanmıştır. Daha sonra sınır ve geçiş şartları kullanarak problemle ilgili teoremler verilmiş ve ispatlanmıştır.

4.1. Sınır Değer Geçiş Probleminin İfadesi

Bu çalışmada

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in [a, c_1) \cup (c_1, c_2) \cup (c_2, b] \quad (4.1)$$

diferansiyel denkleminde;

$$u(a) = u(b) \quad (4.2)$$

$$u'(a) = u'(b) \quad (4.3)$$

periodyk sınır koşullarından ve $x = c_1$ ve $x = c_2$ noktalarındaki

$$u(c_1^-) = \alpha u(c_1^+) \quad (4.4)$$

$$u'(c_1^-) = \frac{1}{\alpha} u'(c_1^+) \quad (4.5)$$

$$u(c_2^-) = \beta u(c_2^+) \quad (4.6)$$

$$u'(c_2^-) = \frac{1}{\beta} u'(c_2^+) \quad (4.7)$$

geçiş koşulları ile verilen sınır değer geçiş problemindeki bazı özellikler araştırılmıştır. Bu problemde $q(x)$, $[a, c_1)$, (c_1, c_2) ve $(c_2, b]$ aralıklarının her birinde sürekli fonksiyondur. Ayrıca

$$q(c_1 \pm) := \lim_{x \rightarrow c_1 \pm} q(x), \quad q(c_2 \pm) := \lim_{x \rightarrow c_2 \pm} q(x)$$

limitleri mevcuttur ve λ kompleks özdeğer parametresidir. $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ reel sayılardır.

4.1 Tanım $L_2(a, c_1) \oplus L_2(c_1, c_2) \oplus L_2(c_2, b)$ uzayı (a, c_1) , (c_1, c_2) , (c_2, b) aralıklarının her birinde karesi integrallenebilen fonksiyonların uzayı olsun. Buradaki $\langle u_1, u_2 \rangle$ iç çarpımı

$$\langle u_1, u_2 \rangle := \int_a^{c_1^-} u_1(x) \overline{u_2(x)} dx + \int_{c_1^+}^{c_2^-} u_1(x) \overline{u_2(x)} dx + \int_{c_2^+}^b u_1(x) \overline{u_2(x)} dx$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

4.2. Problemin Geçiş Şartlarını Sağlayan Sturm-Liouville Denklemi İçin Karşılaştırma Teoremi

4.1 Teorem Kabul edelim ki $u_1(x)$ fonksiyonu

$$L_1(u) = u_1''(x) + m(x)u_1(x) = 0, \quad x \in [a, c_1) \cup (c_1, c_2) \cup (c_2, b]$$

denkleminin $x = c_1, c_2$ noktalarında (4.4)-(4.7) geçiş şartlarını sağlayan aşikar olmayan çözümleri olsun. Benzer şekilde $u_2(x)$ fonksiyonu ise

$$L_2(u) = u_2''(x) + t(x)u_2(x) = 0, \quad x \in [a, c_1) \cup (c_1, c_2) \cup (c_2, b]$$

denkleminin $x = c_1, c_2$ noktalarında (4.4)-(4.7) geçiş şartlarını sağlayan aşikar olmayan çözümleri olsun. $[a, c_1) \cup (c_1, c_2) \cup (c_2, b]$ tanım kümesinde $m(x) < t(x)$ olsun. O halde $u_1(x)$ in iki ardışık sıfırının arasında $u_2(x)$ de en az bir sıfıra sahiptir.

Kanıt İlk olarak

$$u_1''(x) + m(x)u_1(x) = 0 \quad \text{ve} \quad u_2''(x) + t(x)u_2(x) = 0$$

eşitlikleri sırasıyla u_2 ve u_1 fonksiyonları ile çarpıldığında

$$u_1''(x)u_2(x) + m(x)u_1(x)u_2(x) = 0 \quad \text{ve} \quad u_2''(x)u_1(x) + t(x)u_2(x)u_1(x) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Elde edilen eşitlikler taraf tarafa çıkartılırsa

$$(u_1'(x)u_2(x) - u_2'(x)u_1(x))' = [t(x) - m(x)]u_1(x)u_2(x) \quad (4.8)$$

eşitliği bulunur. x_1 ile x_2 , $u_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olarak verilsin. Eğer bu noktalar $[a, c_1)$, (c_1, c_2) ve $(c_2, b]$ aralıklarından sadece birine ait ise (4.8) eşitliğinin x_1 'den x_2 'ye integrali alındığında

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [t(x) - m(x)]u_1(x)u_2(x)dx &= \int_{x_1}^{x_2} (u_1'(x)u_2(x) - u_2'(x)u_1(x))' dx \\ &= (u_1'(x)u_2(x) - u_2'(x)u_1(x)) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= u_1'(x_2)u_2(x_2) - u_2'(x_2)u_1(x_2) - u_1'(x_1)u_2(x_1) + u_2'(x_1)u_1(x_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu integral sonucunda ortaya çıkan $u_1(x_1)$ ve $u_1(x_2)$ yerine $u_1(x_1) = u_1(x_2) = 0$ yazılırsa denklem

$$u_1'(x_2)u_2(x_2) - u_1'(x_1)u_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [t(x) - m(x)]u_1(x)u_2(x)dx \quad (4.9)$$

halini alır. (x_1, x_2) aralığında $u_2(x)$ fonksiyonunun sıfırı olmadığını kabul edelim. O halde $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonlarının negatif ya da pozitif olduğu durumlarını incelememiz gerekir.

A) Kabul edelim ki $(x_1, x_2) \subset (a, c_1)$ olsun.

a) $u_1(x) > 0$ ve $u_2(x) > 0$ için (4.9) denklemi incelendiğinde, $m(x) < t(x)$, $u_1(x) \neq 0$, $u_2(x) \neq 0$, $u_1(x) \geq 0$ ve $u_2(x) \geq 0$ olup denklemin sağ tarafı pozitif bulunur. Fakat denklemin sol tarafını inceleyebilmek için $u'_1(x_1)$ ve $u'_1(x_2)$ fonksiyonlarının işaretleri araştırılması gerekmektedir. Buradan hareketle bu ifadelerin türev tanımından

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} \quad \text{ve} \quad u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x}$$

yararlanalım. (a, c_1) aralığında $u_1(x) > 0$ ve $u_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı x_1 ile x_2 olduğundan $u_1(x)$ fonksiyonu x_1 noktasında artan fonksiyon, x_2 noktasında da azalan bir fonksiyondur. Gerçekten de

i) $\Delta x > 0$ yeteri kadar küçük ise $x_1 < x_1 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan ve $u_1(x_1) = 0$ ve $u_1(x_1 + \Delta x) > 0$ olur. O halde

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x)}{\Delta x} \geq 0$$

elde edilir. Fakat $u'_1(x_1) = 0$ olamaz. Çünkü bu durumda varlık ve teklik teoremi gereği $u_1(x) \equiv 0$ olur. Bu ise kabulümüz gereği çelişki oluşturur. Böylece $u'_1(x_1) > 0$ elde edilir. Ayrıca $\Delta x > 0$ olduğu durumda $u_1(x_2) = 0$ ve x_2 nin sol komşuluğunda $u_1(x) > 0$ olduğundan, x_2 nin sol komşuluğunda $u_1(x) < 0$ olmalıdır. Bu nedenle

$$u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x)}{\Delta x} \leq 0$$

bulunur. Yani $u'_1(x_2) \neq 0$ olduğundan $u'_1(x_2) < 0$ bulunmuş olur.

b) $u_1(x) < 0$ ve $u_2(x) < 0$ için (4.9) denklemi incelendiğinde, $m(x) < t(x)$, $u_1(x) < 0$ ve $u_2(x) < 0$ olup denklemin sağ tarafı pozitif bulunur. Fakat denklemin sol tarafını inceleyebilmek için $u'_1(x_1)$ ve $u'_1(x_2)$ fonksiyonlarının işaretleri araştırılması gerekmektedir. Buradan hareketle bu ifadelerin türev tanımından

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} \quad \text{ve} \quad u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x}$$

yararlanalım.

i) $\Delta x > 0$ yeteri kadar küçük ise $x_1 < x_1 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x)}{\Delta x} \leq 0$$

elde edilir. $u'_1(x_1) \neq 0$ olduğundan buradan $u'_1(x_1) < 0$ elde edilir. $x_2 < x_2 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x)}{\Delta x} \geq 0$$

elde edilir. $u'_1(x_2) \neq 0$ olduğundan buradan $u'_1(x_2) > 0$ elde edilir.

Bu sonuçlar dikkate alınarak $u_1(x) < 0$, $u_2(x) < 0$ şartları için $u'_1(x_1) < 0$ ve $u'_1(x_2) > 0$ olmaktadır. Dolayısıyla (4.9) denklemi göz önüne alınırsa bu denklemin sağ tarafının pozitif olduğu, sol tarafının ise negatif olduğu görülür. Bu sonuç da bir çelişki ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $u_2(x)$ fonksiyonunun (x_1, x_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

c) $u_1(x) > 0$ ve $u_2(x) < 0$ kabul edilip (4.9) denklemi incelendiğinde, $m(x) < t(x)$, $u_1(x) > 0$ ve $u_2(x) < 0$ olup eşitliğin sağ tarafı negatif bulunur. Fakat denklemin sol tarafını inceleyebilmek için $u'_1(x_1)$ ve $u'_1(x_2)$ fonksiyonlarının işaretleri araştırılması gerekmektedir. Buradan hareketle bu ifadelerin türev tanımından

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} \quad \text{ve} \quad u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x}$$

yararlanalım.

i) $\Delta x > 0$ yeteri kadar küçük ise $x_1 < x_1 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x)}{\Delta x} \geq 0$$

elde edilir. $u'_1(x_1) \neq 0$ olduğundan buradan $u'_1(x_1) > 0$ elde edilir. $x_2 < x_2 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x)}{\Delta x} \leq 0$$

elde edilir. $u'_1(x_2) \neq 0$ olduğundan buradan $u'_1(x_2) < 0$ elde edilir.

Bu sonuçlar dikkate alınarak $u_1(x) > 0$, $u_2(x) < 0$ şartları için $u'_1(x_1) > 0$ ve $u'_1(x_2) < 0$

olmaktadır. Dolayısıyla (4.9) denklemi göz önüne alınırsa bu denklemin sol tarafının pozitif olduğu, sağ tarafının ise negatif olduğu görülür. Bu sonuç da bir çelişki ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $u_2(x)$ fonksiyonunun (x_1, x_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

d) $u_1(x) < 0$ ve $u_2(x) > 0$ için (4.9) denklemi incelendiğinde, $m(x) < t(x)$, $u_1(x) < 0$ ve $u_2(x) > 0$ olup denklemin sağ tarafı negatif bulunur. Fakat denklemin sol tarafını inceleyebilmek için $u'_1(x_1)$ ve $u'_1(x_2)$ fonksiyonlarının işaretleri araştırılması gerekmektedir. Buradan hareketle bu ifadelerin türev tanımından

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} \quad \text{ve} \quad u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x}$$

yararlanalım.

i) $\Delta x > 0$ yeteri kadar küçük ise $x_1 < x_1 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x)}{\Delta x} \leq 0$$

bulunmaktadır. $u'_1(x_1) \neq 0$ olduğundan buradan $u'_1(x_1) < 0$ elde edilir. $x_2 < x_2 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x)}{\Delta x} \geq 0$$

bulunmaktadır. $u'_1(x_2) \neq 0$ olduğundan buradan $u'_1(x_2) > 0$ elde edilir.

Bu sonuçlar dikkate alınarak $u_1(x) < 0$, $u_2(x) > 0$ şartları için $u'_1(x_1) < 0$ ve $u'_1(x_2) > 0$ olmaktadır. Dolayısıyla (4.9) denklemi göz önüne alınırsa bu denklemin sol tarafının pozitif olduğu, sağ tarafının ise negatif olduğu görülür. Bu sonuç da bir çelişki ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $u_2(x)$ fonksiyonunun (x_1, x_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

B) Kabul edelim ki $(x_1, x_2) \subset (c_2, b)$ olsun.

a) $u_1(x) > 0$ ve $u_2(x) > 0$ için (4.9) denklemi incelendiğinde, $m(x) < t(x)$, $u_1(x) > 0$ ve $u_2(x) > 0$ olup denklemin sağ tarafı pozitif bulunur. Fakat denklemin sol tarafını inceleyebilmek için $u'_1(x_1)$ ve $u'_1(x_2)$ fonksiyonlarının işaretleri araştırılması gerekmektedir. Buradan hareketle bu ifadelerin türev tanımından

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} \quad \text{ve} \quad u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x}$$

yararlanalım.

i) $\Delta x > 0$ yeteri kadar küçük ise $x_1 < x_1 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x)}{\Delta x} \geq 0$$

elde edilir. $u'_1(x_1) \neq 0$ olduğundan buradan $u'_1(x_1) > 0$ elde edilir. $x_2 < x_2 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x)}{\Delta x} \leq 0$$

elde edilir. $u'_1(x_2) \neq 0$ olduğundan buradan $u'_1(x_2) < 0$ elde edilir.

Bu sonuçlar dikkate alınarak $u_1(x) > 0$, $u_2(x) > 0$ şartları için $u'_1(x_1) > 0$ ve $u'_1(x_2) < 0$ olmaktadır. Dolayısıyla (4.9) denklemi göz önüne alınırsa bu denklemin sağ tarafının pozitif olduğu, sol tarafının ise negatif olduğu görülür. Bu sonuç da bir çelişki ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $u_2(x)$ fonksiyonunun (x_1, x_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

b) $u_1(x) < 0$ ve $u_2(x) < 0$ için (4.9) denklemi incelendiğinde, $m(x) < t(x)$, $u_1(x) < 0$ ve $u_2(x) < 0$ olup denklemin sağ tarafı pozitif bulunur. Fakat denklemin sol tarafını inceleyebilmek için $u'_1(x_1)$ ve $u'_1(x_2)$ fonksiyonlarının işaretleri araştırılması gerekmektedir. Buradan hareketle bu ifadelerin türev tanımından

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} \quad \text{ve} \quad u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x}$$

yararlanalım.

i) $\Delta x > 0$ yeteri kadar küçük ise $x_1 < x_1 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x)}{\Delta x} \leq 0$$

bulunmaktadır. Buradan $u'_1(x_1) \neq 0$ olduğundan $u'_1(x_1) < 0$ elde edilir. $x_2 < x_2 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x)}{\Delta x} \geq 0$$

bulunmaktadır. Buradan $u'_1(x_2) \neq 0$ olduğundan $u'_1(x_2) > 0$ elde edilir.

Bu sonuçlar dikkate alınarak $u_1(x) < 0$, $u_2(x) < 0$ şartları için $u'_1(x_1) < 0$ ve $u'_1(x_2) > 0$ olmaktadır. Dolayısıyla (4.9) denklemi göz önüne alınırsa bu denklemin sağ tarafının pozitif olduğu, sol tarafının ise negatif olduğu görülür. Bu sonuç da bir çelişki ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $u_2(x)$ fonksiyonunun (x_1, x_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

c) $u_1(x) > 0$ ve $u_2(x) < 0$ için (4.9) denklemi incelendiğinde, $m(x) < t(x)$, $u_1(x) > 0$ ve $u_2(x) < 0$ olup denklemin sağ tarafı negatif bulunur. Fakat denklemin sol tarafını inceleyebilmek için $u'_1(x_1)$ ve $u'_1(x_2)$ fonksiyonlarının işaretleri araştırılması gerekmektedir. Buradan hareketle bu ifadelerin türev tanımından

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} \quad \text{ve} \quad u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x}$$

yararlanalım.

i) $\Delta x > 0$ yeteri kadar küçük ise $x_1 < x_1 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x)}{\Delta x} \geq 0$$

bulunmaktadır. Buradan $u'_1(x_1) \neq 0$ olduğundan $u'_1(x_1) > 0$ elde edilir. $x_2 < x_2 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x)}{\Delta x} \leq 0$$

elde edilir. Buradan $u'_1(x_2) \neq 0$ olduğundan $u'_1(x_2) < 0$ bulunmaktadır.

Bu sonuçlar dikkate alınarak $u_1(x) > 0$, $u_2(x) < 0$ şartları için $u'_1(x_1) > 0$ ve $u'_1(x_2) < 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla (4.9) denklemi göz önüne alınırsa bu denklemin sol tarafının pozitif olduğu, sağ tarafının ise negatif olduğu görülür. Bu sonuç da bir çelişki ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $u_2(x)$ fonksiyonunun (x_1, x_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

d) $u_1(x) < 0$ ve $u_2(x) > 0$ için (4.9) denklemi incelendiğinde, $m(x) < t(x)$, $u_1(x) < 0$ ve $u_2(x) > 0$ olup denklemin sağ tarafı negatif bulunur. Fakat denklemin sol tarafını inceleyebilmek için $u'_1(x_1)$ ve $u'_1(x_2)$ fonksiyonlarının işaretleri araştırılması gerekmektedir. Buradan hareketle bu ifadelerin türev tanımından

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} \quad \text{ve} \quad u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x}$$

yararlanalım.

i) $\Delta x > 0$ yeteri kadar küçük ise $x_1 < x_1 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x)}{\Delta x} \leq 0$$

bulunmaktadır. Buradan $u'_1(x_1) \neq 0$ olduğundan $u'_1(x_1) < 0$ elde edilir. $x_2 < x_2 + \Delta x \in (x_1, x_2)$

$$u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x)}{\Delta x} \geq 0$$

bulunur. Buradan $u'_1(x_2) \neq 0$ olduğundan $u'_1(x_2) > 0$ bulunmaktadır.

Bu sonuçlar dikkate alınarak $u_1(x) < 0$, $u_2(x) > 0$ şartları için $u'_1(x_1) < 0$ ve $u'_1(x_2) > 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla (4.9) göz önüne alınırsa bu denklemin sol tarafının pozitif olduğu, sağ tarafının ise negatif olduğu görülür. Bu sonuç da bir çelişki ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $u_2(x)$ fonksiyonunun (x_1, x_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

C) Verilen şartlar için $c_1 < x_1 < c_2 < x_2 < b$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{c_2^-} [t(x) - m(x)] u_1(x) u_2(x) dx + \int_{c_2^+}^{x_2} [t(x) - m(x)] u_1(x) u_2(x) dx \\ &= u'_1(x) u_2(x) - u'_2(x) u_1(x) \Big|_{x_1}^{c_2^-} + u'_1(x) u_2(x) - u'_2(x) u_1(x) \Big|_{c_2^+}^{x_2} \\ &= u'_1(c_2^-) u_2(c_2^-) - u'_2(c_2^-) u_1(c_2^-) - u'_1(x_1) u_2(x_1) + u'_2(x_1) u_1(x_1) \\ &+ u'_1(x_2) u_2(x_2) - u'_2(x_2) u_1(x_2) - u'_1(c_2^+) u_2(c_2^+) + u'_2(c_2^+) u_1(c_2^+) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u(c_2^-) = \beta u(c_2^+)$, $u'(c_2^-) = \frac{1}{\beta} u'(c_2^+)$ geçiş şartları kullanılarak ve $u_1(x_1) = u_1(x_2) = 0$ olduğu dikkat edilirse

$$\begin{aligned} u'_1(x_2) u_2(x_2) - u'_1(x_1) u_2(x_1) &= \int_{x_1}^{c_2^-} [t(x) - m(x)] u_1(x) u_2(x) dx \\ &+ \int_{c_2^+}^{x_2} [t(x) - m(x)] u_1(x) u_2(x) dx \end{aligned} \quad (4.10)$$

bulunur. (x_1, x_2) aralığında $u_2(x)$ fonksiyonunun sıfırı olmadığını kabul edelim. O halde $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonlarının negatif ya da pozitif olduğu durumları incelememiz gerekir.

a) $u_1(x) > 0$ ve $u_2(x) > 0$ için (4.10) denklemi incelendiğinde, $m(x) < t(x)$, $u_1(x) > 0$ ve $u_2(x) > 0$ olup denklemin sağ tarafı pozitif bulunur. Fakat denklemin sol tarafını inceleye-

bilmek için $u'_1(x_1)$ ve $u'_1(x_2)$ fonksiyonlarının işaretleri araştırılması gerekmektedir. Buradan hareketle bu ifadelerin türev tanımından

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} \quad \text{ve} \quad u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x}$$

yararlanalım.

i) $\Delta x > 0$ yeteri kadar küçük ise $x_1 < x_1 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x)}{\Delta x} \geq 0$$

bulunmaktadır. Buradan $u'_1(x_1) \neq 0$ olduğundan $u'_1(x_1) > 0$ elde edilir. $x_2 < x_2 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x)}{\Delta x} \leq 0$$

bulunmaktadır. Buradan $u'_1(x_2) \neq 0$ olduğundan $u'_1(x_2) < 0$ elde edilir.

Bu sonuçlar dikkate alınarak $u_1(x) > 0$, $u_2(x) > 0$ şartları için $u'_1(x_1) > 0$ ve $u'_1(x_2) < 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla (4.10) göz önüne alınırsa denklemin sağ tarafının pozitif olduğu, sol tarafının ise negatif olduğu görülür. Bu sonuç da bir çelişki ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $u_2(x)$ fonksiyonunun (x_1, x_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

b) $u_1(x) < 0$ ve $u_2(x) < 0$ için (4.10) eşitliği incelendiğinde, $m(x) < t(x)$, $u_1(x) < 0$ ve $u_2(x) < 0$ olup denklemin sağ tarafı pozitif bulunur. Fakat denklemin sağ tarafını inceleyebilmek için $u'_1(x_1)$ ve $u'_1(x_2)$ fonksiyonlarının işaretleri araştırılması gerekmektedir. Buradan hareketle bu ifadelerin türev tanımından

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} \quad \text{ve} \quad u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x}$$

yararlanalım.

i) $\Delta x > 0$ yeteri kadar küçük ise $x_1 < x_1 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x)}{\Delta x} \leq 0$$

bulunmaktadır. Buradan $u'_1(x_1) \neq 0$ olduğundan $u'_1(x_1) < 0$ elde edilir. $x_2 < x_2 + \Delta x \in (x_1, x_2)$

olduğundan

$$u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x)}{\Delta x} \geq 0$$

bulunmaktadır. Buradan $u'_1(x_2) \neq 0$ olduğundan $u'_1(x_2) > 0$ elde edilir.

Bu sonuçlar dikkate alınarak $u_1(x) < 0$, $u_2(x) < 0$ şartları için $u'_1(x_1) < 0$ ve $u'_1(x_2) > 0$ olmaktadır. Dolayısıyla (4.10) göz önüne alınırsa bu denklemin sağ tarafının pozitif olduğu, sol tarafının ise negatif olduğu görülür. Bu sonuç da bir çelişki ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $u_2(x)$ fonksiyonunun (x_1, x_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

c) $u_1(x) > 0$ ve $u_2(x) < 0$ için (4.10) denklemi incelendiğinde, $m(x) < t(x)$, $u_1(x) > 0$ ve $u_2(x) < 0$ olup denklemin sağ tarafı negatif bulunur. Fakat denklemin sol tarafını inceleyebilmek için $u'_1(x_1)$ ve $u'_1(x_2)$ fonksiyonlarının işaretleri araştırılması gerekmektedir. Buradan hareketle bu ifadelerin türev tanımından

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} \quad \text{ve} \quad u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x}$$

yararlanalım.

i) $\Delta x > 0$ yeteri kadar küçük ise $x_1 < x_1 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x)}{\Delta x} \geq 0$$

bulunmaktadır. Buradan $u'_1(x_1) \neq 0$ olduğundan $u'_1(x_1) > 0$ elde edilir. $x_2 < x_2 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x)}{\Delta x} \leq 0$$

elde edilir. Buradan $u'_1(x_2) \neq 0$ olduğundan $u'_1(x_2) < 0$ bulunmaktadır.

Bu sonuçlar dikkate alınarak $u_1(x) > 0$, $u_2(x) < 0$ şartları için $u'_1(x_1) > 0$ ve $u'_1(x_2) < 0$ olmaktadır. Dolayısıyla (4.10) denklemi göz önüne alınırsa bu denklemin sol tarafının pozitif olduğu, sağ tarafının ise negatif olduğu görülür. Bu sonuç da bir çelişki ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $u_2(x)$ fonksiyonunun (x_1, x_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

d) $u_1(x) < 0$ ve $u_2(x) > 0$ için (4.10) denklemi incelendiğinde, $m(x) < t(x)$, $u_1(x) < 0$ ve $u_2(x) > 0$ olup denklemin sağ tarafı negatif bulunur. Fakat denklemin sol tarafını inceleye-

bilmek için $u'_1(x_1)$ ve $u'_1(x_2)$ fonksiyonlarının işaretleri araştırılması gerekmektedir. Buradan hareketle bu ifadelerin türev tanımından

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} \quad \text{ve} \quad u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x}$$

yararlanalım.

i) $\Delta x > 0$ yeteri kadar küçük ise $x_1 < x_1 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x) - u_1(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x)}{\Delta x} \leq 0$$

bulunmaktadır. Buradan $u'_1(x_1) \neq 0$ olduğundan $u'_1(x_1) < 0$ elde edilir. $x_2 < x_2 + \Delta x \in (x_1, x_2)$ olduğundan

$$u'_1(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x) - u_1(x_2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1(x_2 + \Delta x)}{\Delta x} \geq 0$$

bulunmaktadır. Buradan $u'_1(x_2) \neq 0$ olduğundan $u'_1(x_2) > 0$ elde edilir.

Bu sonuçlar dikkate alınarak $u_1(x) < 0$, $u_2(x) > 0$ şartları için $u'_1(x_1) < 0$ ve $u'_1(x_2) > 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla (4.10) denklemi göz önüne alınırsa bu denklemin sol tarafının pozitif olduğu, sağ tarafının ise negatif olduğu görülür. Bu sonuç da bir çelişki ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $u_2(x)$ fonksiyonunun (x_1, x_2) aralığında en az bir sıfırı vardır. $\square$

Diğer durumlar tamamen benzer şekilde araştırılabilir.

4.3. Sınır Değer Geçiş Probleminin Özdeğerlerin Reel Olma Durumu

4.2 Teorem (4.1) – (4.7) Sınır değer problemin özdeğerleri reeldir.

Kanıt Kabul edelimki λ bu problem için herhangi bir özdeğer olsun ve $u(x)$ de buna karşılık gelen uygun özfonksiyon olsun. λ nın reel olduğunu gösterelim. Eğer (4.1) denkleminin ve (4.2) - (4.7) sınır-geçiş şartlarının kompleks eşleniğini alırsak, $\bar{\lambda}$ nın da bu problemin bir özdeğeri olduğunu görürüz. Bu durumda $\bar{u}(x)$ fonksiyonu da $\bar{\lambda}$ özdeğerine uygun olan özfonksiyon olur.

Bu durumda aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x) \tag{4.11}$$

$$-\bar{u}''(x) + q(x)\bar{u}(x) = \bar{\lambda}\bar{u}(x) \tag{4.12}$$

(4.12) eşitliğine karşılık periyodik sınır şartları ve geçiş şartları

$$\bar{u}(a) = \bar{u}(b) \quad (4.13)$$

$$\bar{u}'(a) = \bar{u}'(b) \quad (4.14)$$

$$\bar{u}(c_1^-) = \alpha \bar{u}(c_1^+) \quad (4.15)$$

$$\bar{u}'(c_1^-) = \frac{1}{\alpha} \bar{u}'(c_1^+) \quad (4.16)$$

$$\bar{u}(c_2^-) = \beta \bar{u}(c_2^+) \quad (4.17)$$

$$\bar{u}'(c_2^-) = \frac{1}{\beta} \bar{u}'(c_2^+) \quad (4.18)$$

şeklinde olur. (4.11) eşitliğini $\bar{u}(x)$ ile, (4.12) eşitliğini ise $u(x)$ ile çarpılırsa

$$-u''(x)\bar{u}(x) + q(x)u(x)\bar{u}(x) = \lambda u(x)\bar{u}(x) \quad (4.19)$$

$$-\bar{u}''(x)u(x) + q(x)\bar{u}(x)u(x) = \bar{\lambda} \bar{u}(x)u(x) \quad (4.20)$$

denklemleri elde edilir. Devamında (4.19) ve (4.20) denklemleri taraf tarafa çıkartılırsa

$$-(u''(x)\bar{u}(x) - \bar{u}''(x)u(x)) = (\lambda - \bar{\lambda})(u(x)\bar{u}(x)) \quad (4.21)$$

denklemini elde edilir. Buradan hareketle (4.21) denklemi düzenlenirse

$$(\bar{u}''(x)u(x) - u''(x)\bar{u}(x)) = (\bar{u}'(x)u(x) - u'(x)\bar{u}(x))'$$

olur ve (4.21) denklemi

$$(\bar{u}'(x)u(x) - u'(x)\bar{u}(x))' = (\lambda - \bar{\lambda})(u(x)\bar{u}(x)) \quad (4.22)$$

biçiminde yazılabilir. (4.22) eşitliğinin a dan c_1^- ye integrali alınır

$$\begin{aligned} (\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^{c_1^-} u(x)\bar{u}(x)dx &= (\bar{u}'(x)u(x) - u'(x)\bar{u}(x)) \Big|_a^{c_1^-} \\ &= [\bar{u}'(c_1^-)u(c_1^-) - u'(c_1^-)\bar{u}(c_1^-)] \\ &\quad - [\bar{u}'(a)u(a) - u'(a)\bar{u}(a)] \end{aligned} \quad (4.23)$$

denklemini elde edilir. (4.2) – (4.7) şartları ve (4.13) – (4.18) sınır geçiş koşulları (4.23) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^{c_1^-} u(x)\bar{u}(x)dx &= \frac{1}{\alpha} \bar{u}'(c_1^+) \alpha u(c_1^+) - \frac{1}{\alpha} u'(c_1^+) \alpha \bar{u}(c_1^+) - \bar{u}'(a)u(a) \\ &\quad + u'(a)\bar{u}(a) \end{aligned} \quad (4.24)$$

denklemini elde edilir. Benzer şekilde (4.22) eşitliğinin c_1^- den c_2^+ ya integrali alınır

$$\begin{aligned} (\lambda - \bar{\lambda}) \int_{c_1^+}^{c_2^-} u(x) \bar{u}(x) dx &= \left(\bar{u}'(x) u(x) - u'(x) \bar{u}(x) \right) \Big|_{c_1^+}^{c_2^-} \\ &= [\bar{u}'(c_2^-) u(c_2^-) - u'(c_2^-) \bar{u}(c_2^-)] \\ &\quad - [\bar{u}'(c_1^+) u(c_1^+) - u'(c_1^+) \bar{u}(c_1^+)] \end{aligned} \quad (4.25)$$

denklemini elde edilir. (4.2) – (4.7) şartları ve (4.13) – (4.18) sınır geçiş koşulları (4.25) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (\lambda - \bar{\lambda}) \int_{c_1^+}^{c_2^-} u(x) \bar{u}(x) dx &= \frac{1}{\beta} \bar{u}'(c_2^+) \beta u(c_2^+) - \frac{1}{\beta} u'(c_2^+) \beta \bar{u}(c_2^+) - \alpha \bar{u}'(c_1^-) \frac{1}{\alpha} u(c_1^-) \\ &\quad + \alpha u'(c_1^-) \frac{1}{\alpha} \bar{u}(c_1^-) \end{aligned} \quad (4.26)$$

denklemini bulunur. Yine benzer şekilde (4.22) eşitliğinin c_2^+ den b ye integrali alınır

$$\begin{aligned} (\lambda - \bar{\lambda}) \int_{c_2^+}^b u(x) \bar{u}(x) dx &= \left(\bar{u}'(x) u(x) - u'(x) \bar{u}(x) \right) \Big|_{c_2^+}^b \\ &= [\bar{u}'(b) u(b) - u'(b) \bar{u}(b)] \\ &\quad - [\bar{u}'(c_2^+) u(c_2^+) - u'(c_2^+) \bar{u}(c_2^+)] \end{aligned} \quad (4.27)$$

denklemini elde edilir. (4.2) – (4.7) şartları ve (4.13) – (4.18) sınır geçiş koşulları (4.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (\lambda - \bar{\lambda}) \int_{c_2^+}^b u(x) \bar{u}(x) dx &= \bar{u}'(a) u(a) - u'(a) \bar{u}(a) - \beta \bar{u}'(c_2^-) \frac{1}{\beta} u(c_2^-) \\ &\quad + \beta u'(c_2^-) \frac{1}{\beta} \bar{u}(c_2^-) \end{aligned} \quad (4.28)$$

elde edilir. Şimdi (4.24), (4.26) ve (4.28) denklemlerinin her iki tarafı toplandığında

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \left[\int_a^{c_1^-} \bar{u}(x) u(x) dx + \int_{c_1^+}^{c_2^-} \bar{u}(x) u(x) dx + \int_{c_2^+}^b \bar{u}(x) u(x) dx \right] = 0$$

yani

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \left[\int_a^{c_1^-} |u(x)|^2 dx + \int_{c_1^+}^{c_2^-} |u(x)|^2 dx + \int_{c_2^+}^b |u(x)|^2 dx \right] = 0 \quad (4.29)$$

elde edilir. $u(x)$ özfonksiyon olduğu için sıfırdan farklıdır. Bu durumda

$$\left[\int_a^{c_1^-} |u(x)|^2 dx + \int_{c_1^+}^{c_2^-} |u(x)|^2 dx + \int_{c_2^+}^b |u(x)|^2 dx \right] > 0$$

yazılabilir. O halde (4.29) eşitliğinden

$$\lambda - \bar{\lambda} = 0$$

yani

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

olur. Bu ise (4.1) – (4.7) sınır-değer-geçiş problemin tüm özdeğerlerinin reel olduğunu gösterir. $\square$

Not: Tüm özdeğerler reel olduğu için her özdeğere uygun reel değerli özfonksiyon bulunur. Bu nedenle bundan sonra tüm özfonksiyonların reel değerli olduğunu kabul edebiliriz.

4.4. Ortogonalite

4.3 Teorem (4.1) – (4.7) Periyodik Sturm-Liouville probleminde $\lambda_1 \neq \lambda_2$ özdeğerlerine karşılık gelen uygun $u_1(x)$, $u_2(x)$ özfonksiyonları ortogondur. Yani

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \int_a^{c_1^-} u_1(x)u_2(x)dx + \int_{c_1^+}^{c_2^-} u_1(x)u_2(x)dx + \int_{c_2^+}^b u_1(x)u_2(x)dx = 0$$

Kanıt $u_1(x)$, $u_2(x)$ sırasıyla λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen uygun özfonksiyonlar olduğundan

$$-u_1''(x) + q(x)u_1(x) = \lambda_1 u_1(x) \quad (4.30)$$

$$-u_2''(x) + q(x)u_2(x) = \lambda_2 u_2(x) \quad (4.31)$$

eşitlikleri sağlar. Benzer şekilde $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonları için (4.13) – (4.18) arasında belirtilen periyodik sınır şartları ve geçiş şartları düzenlenebilir. Buradan önce (4.30) eşitliği $u_2(x)$ ile (4.31) eşitliği ise $u_1(x)$ ile çarpılırsa ve elde edilen eşitlikler taraf tarafa çıkarılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(u_2'(x)u_1(x) - u_1'(x)u_2(x))' = (\lambda_1 - \lambda_2)(u_1(x)u_2(x)) \quad (4.32)$$

elde edilir. (4.32) eşitliği a dan c_1^- ye integrali alınır

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^{c_1^-} u_1(x)u_2(x)dx &= \left(u_2'(x)u_1(x) - u_1'(x)u_2(x) \right) \Big|_a^{c_1^-} \\
 &= [u_2'(c_1^-)u_1(c_1^-) - u_1'(c_1^-)u_2(c_1^-)] \\
 &\quad - [u_2'(a)u_1(a) - u_1'(a)u_2(a)] \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. (4.2) – (4.7) şartları ve (4.13) – (4.18) sınır geçiş koşulları (4.33) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^{c_1^-} u_1(x)u_2(x)dx &= \frac{1}{\alpha} u_2'(c_1^+) \alpha u_1(c_1^+) - \frac{1}{\alpha} u_1'(c_1^+) \alpha u_2(c_1^+) - u_2'(a)u_1(a) \\
 &\quad + u_1'(a)u_2(a) \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Benzer şekilde (4.32) eşitliğinin c_1^+ dan c_2^- ye integrali alınır

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{c_1^+}^{c_2^-} u_1(x)u_2(x)dx &= \left(u_2'(x)u_1(x) - u_1'(x)u_2(x) \right) \Big|_{c_1^+}^{c_2^-} \\
 &= [u_2'(c_2^-)u_1(c_2^-) - u_1'(c_2^-)u_2(c_2^-)] \\
 &\quad - [u_2'(c_1^+)u_1(c_1^+) - u_1'(c_1^+)u_2(c_1^+)] \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (4.2) – (4.7) şartları ve (4.13) – (4.18) sınır geçiş koşulları (4.35) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{c_1^+}^{c_2^-} u_1(x)u_2(x)dx &= \frac{1}{\beta} u_2'(c_2^+) \beta u_1(c_2^+) - \frac{1}{\beta} u_1'(c_2^+) \beta u_2(c_2^+) \\
 &\quad - \alpha u_2'(c_1^-) \frac{1}{\alpha} u_1(c_1^-) + \alpha u_1'(c_1^-) \frac{1}{\alpha} u_2(c_1^-) \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir.

Yine benzer şekilde (4.32) eşitliğinin c_2^+ dan b ye integrali alınır

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{c_2^+}^b u_1(x)u_2(x)dx &= \left(u_2'(x)u_1(x) - u_1'(x)u_2(x) \right) \Big|_{c_2^+}^b \\
 &= [u_2'(b)u_1(b) - u_1'(b)u_2(b)] \\
 &\quad - [u_2'(c_2^+)u_1(c_2^+) - u_1'(c_2^+)u_2(c_2^+)] \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (4.2) – (4.7) şartları ve (4.13) – (4.18) sınır geçiş koşulları (4.37) denklemini

lemine yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{c_2^+}^b u_1(x)u_2(x)dx &= u_2'(a)u_1(a) - u_1'(a)u_2(a) - \beta u_2'(c_2^-) \frac{1}{\beta} u_1(c_2^-) \\
 &\quad + \beta u_1'(c_2^-) \frac{1}{\beta} u_2(c_2^-)
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

denklemini elde edilir. Şimdi (4.34), (4.36) ve (4.38) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^{c_1^-} u_1(x)u_2(x)dx + (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{c_1^+}^{c_2^-} u_1(x)u_2(x)dx + (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{c_2^+}^b u_1(x)u_2(x)dx = 0$$

yani

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \left[\int_a^{c_1^-} u_1(x)u_2(x)dx + \int_{c_1^+}^{c_2^-} u_1(x)u_2(x)dx + \int_{c_2^+}^b u_1(x)u_2(x)dx \right] = 0$$

bulunur. Buradan

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

olduğundan

$$\int_a^{c_1^-} u_1(x)u_2(x)dx + \int_{c_1^+}^{c_2^-} u_1(x)u_2(x)dx + \int_{c_2^+}^b u_1(x)u_2(x)dx = 0$$

olmalıdır. Bu ise (4.1) – (4.7) sınır değer problemin farklı özdeğerlerine karşılık gelen uygun özfonksiyonlarının aralarında ortogonal olduğunu göstermektedir. $\square$

4.5. Sınır Değer Geçiş Probleminin Kendine Eşleniklik Durumu

4.4 Teorem (4.1) – (4.7) sınır değer problemi kendine eşleniktir.

Kanıt Keyfi $u(x), v(x) \in L_2[a, c_1] \oplus L_2(c_1, c_2) \oplus L_2(c_2, b]$ fonksiyonları verilsin. Bu fonksiyonların (4.2) – (4.7) sınır ve geçiş şartlarını sağladığını kabul edelim. $L(u(x))$ diferansiyel operatörü

$$L(u(x)) = -u''(x) + q(x)u(x)$$

ile, $L(v(x))$ diferansiyel operatörü de

$$L(v(x)) = -v''(x) + q(x)v(x)$$

ile gösterilsin. Problemin kendine eşlenik olduğunu göstermek için

$$\langle u(x), L(v(x)) \rangle = \langle L(u(x)), v(x) \rangle$$

yani

$$\begin{aligned} \int_a^{c_1^-} [u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x))] dx + \int_{c_1^+}^{c_2^-} [u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x))] dx \\ + \int_{c_2^+}^b [u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x))] dx = 0 \end{aligned}$$

olduğunu göstermemiz gereklidir. Buradan $Lv(x)$ operatörü $u(x)$ ile $Lu(x)$ operatörü $v(x)$ ile çarpılırsa

$$u(x)L(v(x)) = -v''(x)u(x) + q(x)v(x)u(x)$$

ve

$$v(x)L(u(x)) = -u''(x)v(x) + q(x)u(x)v(x)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkartılırsa

$$u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x)) = (u'(x)v(x) - v(x)'u(x))' \quad (4.39)$$

elde edilir. $u(x)$ ve $v(x)$ (4.2) – (4.7) sınır ve geçiş şartlarını sağladığından bu fonksiyonlara göre periyodik sınır şartları ve geçiş şartları

$$\begin{array}{ll} u(a) = u(b) & v(a) = v(b) \\ u'(a) = u'(b) & v'(a) = v'(b) \\ u(c_1^-) = \alpha u(c_1^+) & v(c_1^-) = \alpha v(c_1^+) \\ u'(c_1^-) = \frac{1}{\alpha} u'(c_1^+) & v'(c_1^-) = \frac{1}{\alpha} v'(c_1^+) \\ u(c_2^-) = \beta u(c_2^+) & v(c_2^-) = \beta v(c_2^+) \\ u'(c_2^-) = \frac{1}{\beta} u'(c_2^+) & v'(c_2^-) = \frac{1}{\beta} v'(c_2^+) \end{array} \quad \text{ve}$$

elde edilir. (4.39) eşitliği a dan c_1^- ye integrali alınır

$$\begin{aligned} \int_a^{c_1^-} (u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x)))dx &= \left(u'(x)v(x) - v'(x)u(x) \right) \Big|_a^{c_1^-} \\ &= [u'(c_1^-)v(c_1^-) - v'(c_1^-)u(c_1^-)] \\ &\quad - [u'(a)v(a) - v'(a)u(a)] \end{aligned} \quad (4.40)$$

denklemini elde edilir. Düzenlenen sınır şartları (4.40) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \int_a^{c_1^-} (u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x)))dx &= \frac{1}{\alpha} u'(c_1^+) \alpha v(c_1^+) - \frac{1}{\alpha} v'(c_1^+) \alpha u(c_1^+) - u'(a)v(a) \\ &\quad + v'(a)u(a) \end{aligned} \quad (4.41)$$

denklemini elde edilir. Benzer şekilde (4.39) eşitliğinin c_1^+ dan c_2^- ye integrali alınır

$$\begin{aligned} \int_{c_1^+}^{c_2^-} (u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x)))dx &= \left(u'(x)v(x) - v'(x)u(x) \right) \Big|_{c_1^+}^{c_2^-} \\ &= [u'(c_2^-)v(c_2^-) - v'(c_2^-)u(c_2^-)] \\ &\quad - [u'(c_1^+)v(c_1^+) - v'(c_1^+)u(c_1^+)] \end{aligned} \quad (4.42)$$

denklemini elde edilir. Düzenlenen sınır şartları (4.42) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \int_{c_1^+}^{c_2^-} (u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x)))dx &= \frac{1}{\beta} u'(c_2^+) \beta v(c_2^+) - \frac{1}{\beta} v'(c_2^+) \beta u(c_2^+) \\ &\quad - \alpha u'(c_1^-) \frac{1}{\alpha} v(c_1^-) + \alpha v'(c_1^-) \frac{1}{\alpha} u(c_1^-) \end{aligned} \quad (4.43)$$

denklemini elde edilir. Yine aynı şekilde (4.39) denkleminin c_2^+ den b ye integrali alınır

$$\begin{aligned} \int_{c_2^+}^b (u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x)))dx &= \left(u'(x)v(x) - v'(x)u(x) \right) \Big|_{c_2^+}^b \\ &= [u'(b)v(b) - v'(b)u(b)] \\ &\quad - [u'(c_2^+)v(c_2^+) - v'(c_2^+)u(c_2^+)] \end{aligned} \quad (4.44)$$

eşitliği elde edilir. Verilen periyodik sınır şartları ve geçiş şartları (4.44) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \int_{c_2^+}^b (u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x)))dx &= u'(a)v(a) - v'(a)u(a) - \beta u'(c_2^-) \frac{1}{\beta} v(c_2^-) \\ &\quad + \beta v'(c_2^-) \frac{1}{\beta} u(c_2^-) \end{aligned} \quad (4.45)$$

elde edilir. (4.41),(4.43) ve (4.45) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} \int_a^{c_1^-} (u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x))) dx + \int_{c_1^+}^{c_2^-} (u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x))) dx \\ + \int_{c_2^+}^b (u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x))) dx = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (4.1) – (4.7) probleminin kendine eşlenik olduğunu gösterir. $\square$

4.6. Problemle İlgili Yardımcı Başlangıç Değer Problemleri

Bu bölümün içeriğinde (4.1)-(4.7) sınır-değer-geçiş problemi ile ilişkili ve $[a, c_1)$, (c_1, c_2) , $(c_2, b]$ aralıklarında verilen bazı yardımcı başlangıç değer problemleri tanımlanacaktır.

4.5 Teorem Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x) \quad x \in [a, c_1) \quad (4.46)$$

$$u(a) = 1 \quad (4.47)$$

$$u'(a) = 0 \quad (4.48)$$

denklemleri ile tanımlanan başlangıç değer probleminin yalnızca $\phi_1(x, \lambda)$ çözümü vardır ve bu çözüm her bir $x \in [a, c_1)$ değeri için λ değişkenine göre tüm kompleks düzlemde analitiktir. Diğer bir deyişle $\forall x \in [a, c_1)$ için $\phi_1(x, \lambda)$, λ parametresinin tam fonksiyonudur (Titchmars, 1962).

4.6 Teorem Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x) \quad x \in (c_1, c_2) \quad (4.49)$$

$$u(c_1^+) = \frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \quad (4.50)$$

$$u'(c_1^+) = \alpha \phi_1'(c_1^-, \lambda) \quad (4.51)$$

denklemleri ile tanımlanan başlangıç değer probleminin yalnızca $\phi_2(x, \lambda)$ çözümü vardır ve bu çözüm her bir $x \in (c_1, c_2)$ değeri için λ değişkenine göre tüm kompleks düzlemde analitiktir. Diğer bir deyişle $\forall x \in (c_1, c_2)$ için $\phi_2(x, \lambda)$, λ parametresinin tam fonksiyonudur.

Kanıt (4.1) denklemi, yani:

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x)$$

denklemini

$$u''(x) = (q(x) - \lambda)u(x)$$

biçimde yazılsın. Bu ifadenin art arda iki defa integrali alınır

$$u'(x) = \int_{c_1}^x ((q(t) - \lambda)u(t))dt + M_0(\lambda) \quad x \in (c_1, c_2) \quad (4.52)$$

$$u(x) = \int_{c_1}^x ds \int_{c_1}^s ((q(t) - \lambda)u(t))dt + M_0(\lambda)x + M_1(\lambda) \quad x \in (c_1, c_2) \quad (4.53)$$

eşitliği elde edilir. (4.53) denkleminde Cauchy integral formülü uygulanırsa

$$u(x) = \int_{c_1}^x dt \int_t^x ((q(t) - \lambda)u(t))ds + M_0(\lambda)x + M_1(\lambda)$$

yani

$$u(x) = \int_{c_1}^x (x-t)((q(t) - \lambda)u(t))ds + M_0(\lambda)x + M_1(\lambda) \quad (4.54)$$

bulunur. $M_0(\lambda)$ ve $M_1(\lambda)$ ifadelerini bulmak için (4.50) ve (4.51) başlangıç şartları (4.52) ve (4.54) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u(c_1^+) &= M_0(\lambda)c_1 + M_1(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\phi_1(c_1^-, \lambda) \\ u'(c_1^+) &= M_0(\lambda) = \alpha\phi_1'(c_1^-, \lambda) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$M_0(\lambda) = \alpha\phi_1'(c_1^-, \lambda), \quad M_1(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\phi_1(c_1^-, \lambda) - \alpha\phi_1'(c_1^-, \lambda)c_1$$

elde edilir. Elde edilen $M_0(\lambda)$ ve $M_1(\lambda)$ değerleri (4.54) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(x) = \int_{c_1}^x (x-t)(q(t) - \lambda)u(t)dt + \alpha\phi_1'(c_1^-, \lambda)x + \frac{1}{\alpha}\phi_1(c_1^-, \lambda) - \alpha\phi_1(c_1^-, \lambda)c_1 \quad (4.55)$$

elde edilir. Buradan da görülürki (4.55) integral denklemi (4.49) - (4.51) başlangıç değer problemi ile eşdeğerdir. Şimdi $\phi_2(x, \lambda)$ 'nin (4.50) - (4.52) başlangıç değer probleminin bir tek çözümü olduğunu ve $\forall x \in (c_1, c_2)$ için $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks değişkenin tam fonksiyon olduğunu göstermek için ardışık yaklaşımlar metodundan yararlanılacaktır. Bunun için önce

$$u_m(x, \lambda) = \int_{c_1}^x (x-t)((q(t) - \lambda)u_{m-1}(t))dt + u_0(x, \lambda) \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.56)$$

$$u_0(x, \lambda) = \alpha\phi_1'(c_1^-, \lambda) + \frac{1}{\alpha}\phi_1(c_1^-, \lambda) - \alpha\phi_1(c_1^-, \lambda)c_1 \quad (4.57)$$

şeklinde tanımlanmış $\{u_m(x, \lambda)\}$ fonksiyonlar dizisi oluşturulsun. $I > 0$ için $|\lambda| \leq I$ olsun. $a \leq x \leq c_1$ için $q(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonları süreklidir ve sonlu $q(c_{\pm}), i = 1, 2, \dots$ limit değerleri

var olduğu için $|q(x)| \leq E$ ve $|u_0(x)| \leq Z$ olduğundan $E > 0$ ve $I > 0$ sayıları mevcuttur. O halde $|u_m(x) - u_{m-1}(x)|$ ifadesini göz önüne olalım.

$m = 1$ için

$$\begin{aligned}
 |u_1(x) - u_0(x)| &= \left| \int_{c_1}^x (x-t)(q(t)u_0(t) - \lambda u_0(t))dt \right| \\
 &\leq \int_{c_1}^x |x-t||q(t)u_0(t) - \lambda u_0(t)|dt \\
 &\leq \int_{c_1}^x |x-t|(|q(t)||u_0(t)| - |\lambda||u_0(t)|)dt \\
 &\leq \int_{c_1}^x (x-t)(E+I)Zdt \\
 &= (E+I)Z \int_{c_1}^x (x-t)dt \\
 &= (E+I)Z \left[xt - \frac{t^2}{2} \right]_{c_1}^x \\
 &= (E+I)Z \left[\left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) - \left(c_1x - \frac{(c_1)^2}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Yani

$$|u_1(x) - u_0(x)| \leq (E+I)Z \left[\frac{(x-c_1)^2}{2!} \right] \quad (4.58)$$

elde edilir.

$m = 2$ için

$$\begin{aligned}
 |u_2(x) - u_1(x)| &= \left| \int_{c_1}^x (x-t)(q(t)u_1(t) - \lambda u_1(x))dt - \int_{c_1}^x (x-t)(q(t)u_0(t) - \lambda u_0(x))dt \right| \\
 &\leq \int_{c_1}^x |x-t||q(t) - \lambda||u_1(t) - u_0(t)|dt \\
 &\leq \int_{c_1}^x (x-t)(|q(t)| + |\lambda|)(E+I)Z \left[\frac{(t-c_1)^2}{2!} \right] dt \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_{c_1}^x (x-t)(E+I)^2 Z (t-c_1)^2 dt \\
 &= \frac{(E+I)^2 Z}{2} \int_{c_1}^x ((t^2 - 2tc_1 + c_1^2)x - (t^2 - 2tc_1 + c_1^2)t) dt \\
 &= \frac{(E+I)^2 Z}{2} \left[\frac{(x-c_1)^4}{12} \right]
 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Yani

$$|u_2(x) - u_1(x)| \leq (E+I)^2 Z \left[\frac{(x-c_1)^4}{4!} \right] \quad (4.59)$$

elde edilir. Bu şekilde tümevarım metodu uygulandığında

$$|u_m(x) - u_{m-1}(x)| \leq (E + I)^n Z \left[\frac{(x - c_1)^{2n}}{2n!} \right] \quad (4.60)$$

eşitsizlikleri bulunur. $c_1 \leq x \leq c_2$ olduğundan $(x - c_1)^2 \leq (c_2 - c_1)^2$ dir. Dolayısıyla

$$|u_m(x) - u_{m-1}(x)| \leq \frac{(E + I)^n Z}{2n!} (c_2 - c_1)^{2n}$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(E + I)^n Z}{2n!}$$

serisi yakınsaktır. Böylece (4.56) - (4.57) ile tanımlanmış olan $\{u_m(x, \lambda)\}$ fonksiyonlar dizisi aracılığı ile oluşturulmuş olan

$$\phi_2(x, \lambda) = u_0(x, \lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} (u_m(x, \lambda) - u_{m-1}(x, \lambda)) \quad (4.61)$$

serisi $x \in (c_1, c_2)$ için $I > 0$ ve $|\lambda| < I$ şartları dikkate alınırsa bu seri mutlak ve düzgün yakınsak olduğu görülür. Bununla birlikte $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq I\}$ bölgesinde (4.61) serisinin her bir elemanı analitik olduğundan $\phi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu da analitik olur. Böylece (4.61) serisi x 'e göre düzgün yakınsak ve (4.56) ile tanımlanmış olan $\{u_m(x, \lambda)\}$ fonksiyonlar dizisinin

$$\begin{aligned} u'_m(x) - u'_{m-1}(x) &= \int_{c_1}^x (q(t) - \lambda) [u_{m-1}(t) - u_{m-2}(t)] dt \\ u''_m(x) - u''_{m-1}(x) &= (q(x) - \lambda) [u_{m-1}(x) - u_{m-2}(x)] \end{aligned}$$

birinci ve ikinci türevleri var olup (4.61) serisi de x e göre terim terim diferansiyellenebilir ve

$$\begin{aligned} \phi_2''(x, \lambda) &= \sum_{m=1}^{\infty} [u''_m(x) - u''_{m-1}(x)] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (q(x) - \lambda) [u_{m-1}(x) - u_{m-2}(x)] \\ &= (q(x) - \lambda) \left\{ u_0(x) + \sum_{m=3}^{\infty} [u_{m-1}(x) - u_{m-2}(x)] \right\} \\ &= (q(x) - \lambda) \phi_2(x, \lambda) \end{aligned} \quad (4.62)$$

denklemini sağlar. Bulunan sonuç aynı zamanda $\phi_2(x, \lambda)$ 'nın ve (4.49) denkleminin bir çözümü olduğunu gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur. $\square$

4.7 Teorem Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x) \quad x \in (c_2, b] \quad (4.63)$$

$$u(c_2^+) = \frac{1}{\beta} \phi_2(c_2^-, \lambda) \quad (4.64)$$

$$u'(c_2^+) = \beta \phi_2'(c_2^-, \lambda) \quad (4.65)$$

denklemleri ile tanımlanmış olan başlangıç değer probleminin yalnızca $\phi_3(x, \lambda)$ çözümü vardır ve bu çözüm her bir $x \in (c_2, b]$ değeri için λ değişkenine göre tüm kompleks düzlemde analitik olur. Diğer bir deyişle $\forall x \in (c_2, b]$ için $\phi_3(x, \lambda)$, λ parametresinin tam fonksiyonudur.

Kanıt İspatı Teorem (4.6) nın ispatına tamamen benzerdir. □

4.8 Teorem Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x) \quad x \in [a, c_1) \quad (4.66)$$

$$u(a) = 0 \quad (4.67)$$

$$u'(a) = 1 \quad (4.68)$$

denklemleri ile tanımlanmış olan başlangıç değer probleminin yalnızca $\chi_1(x, \lambda)$ çözümü elde edilir ve bu çözüm her bir $x \in [a, c_1)$ değeri için λ değişkenine göre tüm kompleks düzlemde analitiktir. Diğer bir deyişle $\forall x \in [a, c_1)$ için $\chi_1(x, \lambda)$, λ parametresinin tam fonksiyonudur (Titchmars, 1962).

Kanıt İspatı Teorem (4.6) nın ispatına tamamen benzerdir. □

4.9 Teorem Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x) \quad x \in (c_1, c_2) \quad (4.69)$$

$$u(c_1^+) = \frac{1}{\alpha} \chi_1(c_1^-, \lambda) \quad (4.70)$$

$$u'(c_1^+) = \alpha \chi_1'(c_1^-, \lambda) \quad (4.71)$$

denklemleri ile tanımlanmış olan başlangıç değer probleminin yalnızca $\chi_2(x, \lambda)$ çözümü elde edilir ve bu çözüm her bir $x \in (c_1, c_2)$ değeri için λ değişkenine göre tüm kompleks düzlemde analitiktir. Diğer bir deyişle $\forall x \in (c_1, c_2)$ için $\chi_2(x, \lambda)$, λ parametresinin tam fonksiyonudur.

Kanıt İspatı Teorem (4.6) nın ispatına tamamen benzerdir. □

4.10 Teorem Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x) \quad x \in (c_2, b] \quad (4.72)$$

$$u(c_2^+) = \frac{1}{\beta} \chi_2(c_2^-, \lambda) \quad (4.73)$$

$$u'(c_2^+) = \beta \chi_2'(c_2^-, \lambda) \quad (4.74)$$

denklemleri ile tanımlanmış olan başlangıç değer probleminin bir tek $\chi_3(x, \lambda)$ çözümü vardır ve bu çözüm her bir $x \in (c_2, b]$ değeri için λ değişkenine göre tüm kompleks düzlemde analitiktir. Diğer bir deyişle $\forall x \in (c_2, b]$ için $\chi_3(x, \lambda)$, λ parametresinin tam fonksiyonudur.

Kanıt İspatı Teorem (4.6) nın ispatına tamamen benzerdir. $\square$

4.7. Başlangıç Değer Problemlerinin Çözümleri İle Eşdeğer Olan İntegral Denklemler

Bu bölümde yukarıda tanımlanan başlangıç değer problemleri ile eşdeğer olan integral denklemleri bulunmuştur.

4.11 Teorem (4.46) - (4.48) başlangıç değer problemi ile tanımlanan $\phi_1(x, \lambda)$ temel çözümü için

$$\phi_1(x, \lambda) = \cos u(x-a) + \frac{1}{u} \int_a^x \sin u(x-s) q(s) \phi_1(s, \lambda) ds \quad (4.75)$$

$$\phi_1'(x, \lambda) = -u \sin u(x-a) + \int_a^x \cos u(x-s) q(s) \phi_1(s, \lambda) ds \quad (4.76)$$

integral diferansiyel denklemleri sağlanır.

Kanıt (4.46) denklemi

$$u''(x) + \lambda u(x) = q(x)u(x) \quad (4.77)$$

olarak ifade edilebilir. Önce

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0$$

homojen denkleminin çözümünü bulalım. Yukarıdaki denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 + \lambda = 0$$

olup $\lambda > 0$ için bu denklemin kökleri

$$r_1 = -\sqrt{\lambda}i \quad r_2 = \sqrt{\lambda}i$$

olarak bulunur. Buradan hareketle denklemin çözümü

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) &= m_1 e^{-\sqrt{\lambda}i} + m_2 e^{\sqrt{\lambda}i} \\ &= (m_1 + m_2) \cos \sqrt{\lambda}x + (-m_1 + m_2) \sin \sqrt{\lambda}x \end{aligned}$$

elde edilmiştir. Böylece bu denklemin lineer bağımsız iki çözümü

$$\cos \sqrt{\lambda}x \quad \text{ve} \quad \sin \sqrt{\lambda}x$$

olarak bulunur. O halde denklemin genel çözümü

$$u(x, \lambda) = e_1 \cos \sqrt{\lambda}x + e_2 \sin \sqrt{\lambda}x \quad (4.78)$$

şeklinde bulunur. Sabitin değişimi yöntemini kullanarak (4.77) denkleminin çözümü

$$u(x, \lambda) = e_1(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda}x + e_2(x, \lambda) \sin \sqrt{\lambda}x \quad (4.79)$$

biçiminde aranacaktır. Burada $e_1(x, \lambda)$ ve $e_2(x, \lambda)$ bilinmeyen fonksiyonlardır. Eğer (4.79) denkleminin x 'e göre türev alındığında

$$\begin{aligned} u'(x, \lambda) &= e_1'(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda}x - \sqrt{\lambda} e_1(x, \lambda) \sin \sqrt{\lambda}x + e_2'(x, \lambda) \sin \sqrt{\lambda}x \\ &\quad + \sqrt{\lambda} e_2(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda}x \end{aligned} \quad (4.80)$$

bulunur. Burada $e_1(x, \lambda)$ ve $e_2(x, \lambda)$ fonksiyonlarını öyle belirleyelim ki

$$e_1'(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda}x + e_2'(x, \lambda) \sin \sqrt{\lambda}x = 0 \quad (4.81)$$

olsun. Son ifade (4.80) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$u'(x, \lambda) = -\sqrt{\lambda} e_1(x, \lambda) \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} e_2(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda}x \quad (4.82)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin x 'e göre tekrar türevi alındığında

$$\begin{aligned} u''(x, \lambda) &= -\sqrt{\lambda} e_1'(x, \lambda) \sin \sqrt{\lambda}x - \lambda e_1(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} e_2'(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda}x \\ &\quad - \sqrt{\lambda} e_2(x, \lambda) \sin \sqrt{\lambda}x \end{aligned} \quad (4.83)$$

elde edilir. (4.79) - (4.83) denklemleri (4.77) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\sqrt{\lambda} e_1'(x, \lambda) \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} e_2'(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda}x = q(x)u(x) \quad (4.84)$$

eşitliği elde edilir. Buradan (4.81) ve (4.84) denklemlerinin oluşturmuş olduğu denklem sis-

teminin çözümü ile $e'_1(x, \lambda)$ ve $e'_2(x, \lambda)$ bilinmeyen fonksiyonları bulunacaktır. Bu denklem sisteminin çözümünden

$$e'_1(\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin \sqrt{\lambda} x \\ q(x)u(x) & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} x & \sin \sqrt{\lambda} x \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x \end{vmatrix}} = \frac{-\sin \sqrt{\lambda} x q(x)u(x)}{\sqrt{\lambda}} \quad (4.85)$$

elde edilir. Eşitliğin integrali alındığında

$$e_1(x, \lambda) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x \sin \sqrt{\lambda} s q(s) u(s) ds + e_1(\lambda) \quad (4.86)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$e'_2(\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} x & 0 \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x & q(x)u(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} x & \sin \sqrt{\lambda} x \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x \end{vmatrix}} = \frac{\cos \sqrt{\lambda} x q(x)u(x)}{\sqrt{\lambda}} \quad (4.87)$$

bulunur. Eşitliğin integrali alındığında

$$e_2(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x \cos \sqrt{\lambda} s q(s) u(s) ds + e_2(\lambda) \quad (4.88)$$

elde edilir. Burada $e_1(\lambda)$ ve $e_2(\lambda)$ keyfi sabitlerdir. (4.86) ve (4.88) eşitlikleri (4.79) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) &= \frac{-1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x \cos \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} s q(s) u(s) ds + e_1(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} x \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x \sin \sqrt{\lambda} x \cos \sqrt{\lambda} s q(s) u(s) ds + e_2(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} x \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik düzenlendiğinde

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x \sin \sqrt{\lambda} (x-s) q(s) u(s) ds + e_1(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} x + e_2(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} x \quad (4.89)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.86) ve (4.88) denklemleri (4.82) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$u'(x, \lambda) = \int_a^x \cos \sqrt{\lambda} (x-s) q(s) u(s) ds - \sqrt{\lambda} e_1(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda} e_2(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} x \quad (4.90)$$

elde edilir. (4.89) ve (4.90) eşitlikleri (4.47) - (4.48) başlangıç değer şartlarını sağladığı görür. Böylece bu başlangıç şartları (4.89) ve (4.90) integral denklemlerine uygulanırsa

$$\begin{aligned} u(a) &= e_1(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} a - e_2(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} a = 1 \\ u'(a) &= \sqrt{\lambda} e_1(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} a + \sqrt{\lambda} e_2(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} a = 0 \end{aligned} \quad (4.91)$$

lineer denklem sistemi bulunur. Buradan lineer denklem sistemi çözüldüğünde $e_1(\lambda)$ ve $e_2(\lambda)$ sabitleri sırasıyla

$$e_1(\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\sin \sqrt{\lambda} a \\ 0 & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} & -\sin \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix}} = \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a}{\sqrt{\lambda} \cos^2 \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda}} = \cos \sqrt{\lambda} a \quad (4.92)$$

ve

$$e_2(\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} a & 1 \\ \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} & -\sin \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix}} = \frac{-\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a}{\sqrt{\lambda} \cos^2 \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda}} = -\sin \sqrt{\lambda} a \quad (4.93)$$

şeklinde bulunur. $e_1(\lambda)$ ve $e_2(\lambda)$ sabitleri (4.89) eşitliğinde yerine yazıp düzenlendiğinde ve $\lambda := u^2$ eşitliği ile gösterilirse

$$u(x, \lambda) = \cos u(x-a) + \frac{1}{u} \int_a^x \sin u(x-s) q(s) u(s) ds \quad (4.94)$$

integral denklemi bulunur. O halde $\phi_1(x, \lambda)$ çözümü için

$$\phi_1(x, \lambda) = \cos u(x-a) + \frac{1}{u} \int_a^x \sin u(x-s) q(s) \phi_1(s, \lambda) ds \quad (4.95)$$

integral denklemi sağlanır. Böylece (4.47) - (4.48) başlangıç değer probleminin (4.95) integral denklemi ile eş değer olduğunu görülür. Böylelikle (4.75) ispatlanmış olur. $e_1(\lambda)$ ve $e_2(\lambda)$ sabitleri (4.90) eşitliğinde yerine yazıp düzenlendiğinde ve $\lambda := u^2$ eşitliği ile gösterilirse

$$u'(x, \lambda) = -u \sin u(x-a) + \int_a^x \cos u(x-s) q(s) u(s) ds \quad (4.96)$$

integral denklemi bulunur. O halde $\phi_1'(x, \lambda)$ çözümü için

$$\phi_1'(x, \lambda) = -u \sin u(x-a) + \int_a^x \cos u(x-s)q(s)\phi_1(s, \lambda)ds \quad (4.97)$$

şekline dönüşür. Dolayısıyla istenilen elde edilir. $\square$

4.12 Teorem (4.49) - (4.51) başlangıç değer problemi ile tanımlı $\phi_2(x, \lambda)$ temel çözümü için

$$\begin{aligned} \phi_2(x, \lambda) &= \frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \cos u(x-c_1) + \frac{\alpha}{u} \phi_1'(c_1^-, \lambda) \sin u(x-c_1) \\ &\quad + \frac{1}{u} \int_{c_1}^x \sin u(x-s)q(s)\phi_1(s, \lambda)ds \end{aligned} \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} \phi_2'(x, \lambda) &= -\frac{u}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \sin u(x-c_1) + \alpha \phi_1'(c_1^-, \lambda) \cos u(x-c_1) \\ &\quad + \int_{c_1}^x \cos u(x-s)q(s)\phi_1(s, \lambda)ds \end{aligned} \quad (4.99)$$

integral diferansiyel denklemleri sağlanır.

Kanıt Üstteki teoremin ispatındaki benzer işlemler yapılırsa ve de (4.50) - (4.51) başlangıç şartları uygulanırsa

$$u(c_1^+) = e_1(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} c_1 - e_2(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} c_1 = \frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \quad (4.100)$$

$$u'(c_1^+) = \sqrt{\lambda} e_1(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} c_1 + \sqrt{\lambda} e_2(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} c_1 = \alpha \phi_1'(c_1^-, \lambda) \quad (4.101)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Buradan hareketle

$$\begin{aligned} e_1(\lambda) &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) & -\sin \sqrt{\lambda} c_1 \\ \alpha \phi_1'(c_1^-, \lambda) & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} & -\sin \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} c_1 + \alpha \phi_1'(c_1^-, \lambda) \sin \sqrt{\lambda} c_1}{\sqrt{\lambda} \cos^2 \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda}} \\ &= \frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \cos \sqrt{\lambda} c_1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \phi_1'(c_1^-, \lambda) \sin \sqrt{\lambda} c_1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} e_2(\lambda) &= \frac{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} c_1 & \frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \\ \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} c_1 & \alpha \phi_1'(c_1^-, \lambda) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} & -\sin \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix}} = \frac{\alpha \phi_1'(c_1^-, \lambda) \cos \sqrt{\lambda} c_1 - \frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} c_1}{\sqrt{\lambda} \cos^2 \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda}} \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \phi_1'(c_1^-, \lambda) \cos \sqrt{\lambda} c_1 - \frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \sin \sqrt{\lambda} c_1 \end{aligned}$$

elde edilir. $e_1(\lambda)$ ve $e_2(\lambda)$ sabitleri (4.89) eşitliğinde yerine yazıp düzenlendiğinde ve $\lambda := u^2$ eşitliği ile gösterilirse

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) = & \frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \cos u(x - c_1) + \frac{\alpha}{u} \phi_1'(c_1^-, \lambda) \sin u(x - c_1) \\ & + \frac{1}{u} \int_{c_1}^x \sin u(x - s) q(s) u(s) ds \end{aligned} \quad (4.102)$$

integral denklemi bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \phi_2(x, \lambda) = & \frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \cos u(x - c_1) + \frac{\alpha}{u} \phi_1'(c_1^-, \lambda) \sin u(x - c_1) \\ & + \frac{1}{u} \int_{c_1}^x \sin u(x - s) q(s) \phi_1(s, \lambda) ds \end{aligned} \quad (4.103)$$

elde edilir. Bu da (4.50) - (4.51) başlangıç değer problemlerinin (4.103) integral denklemi ile eş değer olduğu görülür. Böylelikle (4.98) ispatlanmış olur. $e_1(\lambda)$ ve $e_2(\lambda)$ sabitleri (4.101) eşitliğinde yerine yazıp düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} u'(x, \lambda) = & -\frac{u}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \sin u(x - c_1) + \alpha \phi_1'(c_1^-, \lambda) \cos u(x - c_1) \\ & + \int_{c_1}^x \cos u(x - s) q(s) u(s) ds \end{aligned} \quad (4.104)$$

integral denklemi bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \phi_2'(x, \lambda) = & -\frac{u}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \sin u(x - c_1) + \alpha \phi_1'(c_1^-, \lambda) \cos u(x - c_1) \\ & + \int_{c_1}^x \cos u(x - s) q(s) \phi_1(s, \lambda) ds \end{aligned} \quad (4.105)$$

şekline dönüşür. Dolayısıyla istenilen elde edilir. $\square$

4.13 Teorem (4.63) - (4.65) başlangıç değer problemi ile tanımlanan $\phi_3(x, \lambda)$ temel çözümü için

$$\begin{aligned} \phi_3(x, \lambda) = & \frac{1}{\beta} \phi_2(c_2^-, \lambda) \cos u(x - c_2) + \frac{\beta}{u} \phi_2'(c_2^-, \lambda) \sin u(x - c_2) \\ & + \frac{1}{u} \int_{c_2}^x \sin u(x - s) q(s) \phi_2(s, \lambda) ds \end{aligned} \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} \phi_3'(x, \lambda) = & -\frac{u}{\beta} \phi_2(c_2^-, \lambda) \sin u(x - c_2) + \beta \phi_2'(c_2^-, \lambda) \cos u(x - c_2) \\ & + \int_{c_2}^x \cos u(x - s) q(s) \phi_2(s, \lambda) ds \end{aligned} \quad (4.107)$$

integral diferansiyel denklemleri sağlanır.

Kanıt İspatı Teorem (4.12) nin ispatına tamamen benzerdir. $\square$

4.14 Teorem (4.66) - (4.68) başlangıç değer problemi ile tanımlanan $\chi_1(x, \lambda)$ temel çözümü

$$\chi_1(x, \lambda) = \frac{1}{u} \sin u(x-a) + \frac{1}{u} \int_a^x \sin u(x-s) q(s) \chi_1(s, \lambda) ds \quad (4.108)$$

$$\chi_1'(x, \lambda) = \cos u(x-a) + \int_a^x \cos u(x-s) q(s) \chi_1(s, \lambda) ds \quad (4.109)$$

integral diferansiyel denklemleri sağlanır.

Kanıt (4.66) denklemi

$$u''(x) + \lambda u(x) = q(x)u(x) \quad (4.110)$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliği homojen diferansiyel denklem gibi düşündüğümüzde

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0$$

halini alır. Yukarıdaki denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 + \lambda = 0$$

olup bu denklemin kökleri $\lambda > 0$ için

$$r_1 = -\sqrt{\lambda}i \quad r_2 = \sqrt{\lambda}i$$

olarak bulunur. Buradan hareketle denklem

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) &= m_1 e^{-\sqrt{\lambda}i} + m_2 e^{\sqrt{\lambda}i} \\ &= (m_1 + m_2) \cos \sqrt{\lambda}x + (-m_1 + m_2) \sin \sqrt{\lambda}x \end{aligned}$$

elde edilmir. Böylece bu denklemin lineer bağımsız iki çözümü

$$\cos \sqrt{\lambda}x \quad \text{ve} \quad \sin \sqrt{\lambda}x$$

olarak bulunur. O halde denklemin genel çözümü

$$u(x, \lambda) = e_1 \cos \sqrt{\lambda}x + e_2 \sin \sqrt{\lambda}x \quad (4.111)$$

şeklinde bulunur. Sabitin değişimi yöntemini kullanarak (4.110) denkleminin çözümü

$$u(x, \lambda) = e_1(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda}x + e_2(x, \lambda) \sin \sqrt{\lambda}x \quad (4.112)$$

şeklinde aranacaktır. Burada $e_1(x, \lambda)$ ve $e_2(x, \lambda)$ bilinmeyen fonksiyonlardır. Eğer (4.112) denkleminin x 'e göre türev alındığında

$$\begin{aligned} u'(x, \lambda) = & e_1'(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}x - \sqrt{\lambda}e_1(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}x + e_2'(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}x \\ & + \sqrt{\lambda}e_2(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}x \end{aligned} \quad (4.113)$$

bulunur. Burada $e_1(x, \lambda)$ ve $e_2(x, \lambda)$ fonksiyonlarını öyle belirleyelim ki

$$e_1'(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda}x + e_2'(x, \lambda) \sin \sqrt{\lambda}x = 0 \quad (4.114)$$

olsun. Son ifade (4.113) denkleminde yerine yazılırsa

$$u'(x, \lambda) = -\sqrt{\lambda}e_1(x, \lambda) \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}e_2(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda}x \quad (4.115)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin x 'e göre tekrar türevi alındığında

$$\begin{aligned} u''(x, \lambda) = & -\sqrt{\lambda}e_1'(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}x - \lambda e_1(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}e_2'(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}x \\ & - \sqrt{\lambda}e_2(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}x \end{aligned} \quad (4.116)$$

elde edilir. (4.112) - (4.116) denklemleri (4.110) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\sqrt{\lambda}e_1'(x, \lambda) \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}e_2'(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda}x = q(x)u(x) \quad (4.117)$$

eşitliği elde edilir. Buradan (4.114) ve (4.117) denklemlerinin oluşturduğu denklem sisteminin çözümünden $e_1'(x, \lambda)$ ve $e_2'(x, \lambda)$ bilinmeyen fonksiyonları bulunacaktır. Bu denklem sisteminin çözümünden

$$e_1'(\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin \sqrt{\lambda}x \\ q(x)u(x) & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda}x & \sin \sqrt{\lambda}x \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x \end{vmatrix}} = \frac{-\sin \sqrt{\lambda}x q(x)u(x)}{\sqrt{\lambda}}$$

bulunur. Eşitliğin integrali alındığında

$$e_1(x, \lambda) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x \sin \sqrt{\lambda}s q(s)u(s)ds + e_1(\lambda) \quad (4.118)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$e_2'(\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda}x & 0 \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x & q(x)u(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda}x & \sin \sqrt{\lambda}x \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x \end{vmatrix}} = \frac{\cos \sqrt{\lambda}x q(x)u(x)}{\sqrt{\lambda}}$$

bulunur. Eşitliğin integrali alındığında

$$e_2(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x \cos \sqrt{\lambda}sq(s)u(s)ds + e_2(\lambda) \quad (4.119)$$

elde edilir. Burada $e_1(\lambda)$ ve $e_2(\lambda)$ keyfi sabitlerdir. (4.118) ile (4.119) eşitlikleri (4.112) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) &= \frac{-1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x \cos \sqrt{\lambda}x \sin \sqrt{\lambda}sq(s)u(s)ds + e_1(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}x \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x \sin \sqrt{\lambda}x \cos \sqrt{\lambda}sq(s)u(s)ds + e_2(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}x \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik düzenlendiğinde

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x \sin \sqrt{\lambda}(x-s)q(s)u(s)ds + e_1(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}x + e_2(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}x \quad (4.120)$$

bulunur. Benzer biçimde (4.118) ve (4.119) denklemleri (4.115) denkleminde yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$u'(x, \lambda) = \int_a^x \cos \sqrt{\lambda}(x-s)q(s)u(s)ds - \sqrt{\lambda}e_1(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}e_2(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}x \quad (4.121)$$

elde edilir. (4.120) ile (4.121) eşitlikleri (4.67) ve (4.68) başlangıç değer şartlarını sağladığı görülür. Böylelikle

$$\begin{aligned} u(a) &= e_1(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}a - e_2(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}a = 0 \\ u'(a) &= \sqrt{\lambda}e_1(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}a + \sqrt{\lambda}e_2(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}a = 1 \end{aligned} \quad (4.122)$$

lineer denklem sistemi bulunur. Buradan hareketle

$$e_1(\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\sin \sqrt{\lambda}a \\ 1 & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} & -\sin \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix}} = \frac{\sin \sqrt{\lambda}a}{\sqrt{\lambda} \cos^2 \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}a$$

ve

$$e_2(\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} a & 0 \\ \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} & -\sin \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix}} = \frac{\cos \sqrt{\lambda} a}{\sqrt{\lambda} \cos^2 \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda} a$$

bulunur. $e_1(\lambda)$ ve $e_2(\lambda)$ sabitleri (4.120) eşitliğinde yerine yazıp düzenlendiğinde ve $\lambda := u^2$ eşitliği ile gösterilirse

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{u} \sin u(x-a) + \frac{1}{u} \int_a^x \sin u(x-s) q(s) u(s) ds \quad (4.123)$$

integral denklemi bulunur.

$$\chi_1(x, \lambda) = \frac{1}{u} \sin u(x-a) + \frac{1}{u} \int_a^x \sin u(x-s) q(s) \chi_1(s, \lambda) ds \quad (4.124)$$

şekline dönüşür. Bu da (4.46) ve (4.48) başlangıç değer problemlerinin (4.124) integral denklemi ile eş değer olduğunu gösterir. Böylelikle (4.108) ispatlanmış olur. $e_1(\lambda)$ ve $e_2(\lambda)$ sabitleri (4.121) eşitliğinde yerine yazıp düzenlendiğinde

$$u'(x, \lambda) = \cos u(x-a) + \int_a^x \cos u(x-s) q(s) u(s) ds \quad (4.125)$$

integral denklemi bulunur.

$$\chi_1'(x, \lambda) = \cos u(x-a) + \int_a^x \cos u(x-s) q(s) \chi_1(s, \lambda) ds \quad (4.126)$$

şekline dönüşür. Dolayısıyla istenen elde edilir. $\square$

4.15 Teorem (4.69) - (4.71) başlangıç değer problemi ile tanımlanan $\chi_2(x, \lambda)$ temel çözümü için

$$\begin{aligned} \chi_2(x, \lambda) &= \frac{1}{\alpha} \chi_1(c_1^-, \lambda) \cos u(x-c_1) + \frac{\alpha}{u} \chi_1'(c_1^-, \lambda) \sin u(x-c_1) \\ &\quad + \int_{c_1}^x \sin u(x-s) q(s) \chi_1(s, \lambda) ds \end{aligned} \quad (4.127)$$

$$\begin{aligned} \chi_2'(x, \lambda) &= \frac{-u}{\alpha} \chi_1(c_1^-, \lambda) \sin u(x-c_1) + \alpha \chi_1'(c_1^-, \lambda) \cos u(x-c_1) \\ &\quad + \int_{c_1}^x \cos u(x-s) q(s) \chi_1(s, \lambda) ds \end{aligned} \quad (4.128)$$

integral diferansiyel denklemleri sağlanır.

Kanıt İspatı Teorem (4.12) nin ispatına tamamen benzerdir. $\square$

4.16 Teorem (4.72) - (4.74) başlangıç değer problemi ile tanımlanan $\chi_3(x, \lambda)$ temel çözümü için

$$\begin{aligned} \chi_3(x, \lambda) = & \frac{1}{\beta} \chi_2(c_2^-, \lambda) \cos u(x - c_2) + \frac{\beta}{u} \chi_2'(c_2^-, \lambda) \sin u(x - c_2) \\ & + \frac{1}{u} \int_{c_2}^x \sin u(x - s) q(s) \chi_2(s, \lambda) ds \end{aligned} \quad (4.129)$$

$$\begin{aligned} \chi_3'(x, \lambda) = & \frac{-u}{\beta} \chi_2(c_2^-, \lambda) \sin u(x - c_2) + \beta \chi_2'(c_2^-, \lambda) \cos u(x - c_2) \\ & + \int_{c_2}^x \cos u(x - s) q(s) \chi_2(s, \lambda) ds \end{aligned} \quad (4.130)$$

integral diferansiyel denklemleri sağlanır.

Kanıt İspatı Teorem (4.12) nin ispatına tamamen benzerdir. $\square$

4.8. Başlangıç - Değer Problemlerinin Çözümleri için Asimptotik Davranışlar

Bu bölümde $\phi_i(x, \lambda)$ ve $\chi_i(x, \lambda)$ ($i = 1, 2, 3$) temel çözümlerinin bir önceki bölümde eşdeğer olduğu integral ve integral - diferansiyel denklemleri kullanarak λ parametresine göre $|\lambda| \rightarrow \infty$ için asimptotik formülleri araştırılmıştır.

4.17 Teorem $\lambda = u^2$, $u = \gamma + iz$, $Im|u| = z$ olmak üzere $\phi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu için $a \leq x < c_1$ aralığında

$$\phi_1(x, \lambda) = O(\exp(|z|(x - a))), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.131)$$

$$\phi_1'(x, \lambda) = O(|u| \exp(|z|(x - a))), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.132)$$

$$\phi_1(x, \lambda) = \cos u(x - a) + O\left(\frac{1}{|u|} \exp(|z|(x - a))\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.133)$$

$$\phi_1'(x, \lambda) = -u \sin u(x - a) + O(\exp(|z|(x - a))), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.134)$$

asimptotik formülleri sağlanır.

Kanıt Titchmarsh (1962) kitabındaki ispatlara birebir benzer şekilde ispatlanabilir. $\square$

4.18 Teorem $\lambda = u^2$, $u = \gamma + iz$, $Im|u| = z$ olmak üzere $\phi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu için $c_1 \leq x \leq c_2$ aralığında

$$\phi_2(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|u|} \exp(|z|(x - c_1))\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.135)$$

$$\phi_2'(x, \lambda) = O(|u| \exp(|z|(x - c_1))), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.136)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(x, \lambda) = & \frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \cos u(x - c_1) + \frac{\alpha}{u} \phi_1'(c_1^-, \lambda) \sin u(x - c_1) \\ & + O\left(\frac{1}{|u|^2} \exp(|z|(x - c_1))\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.137)$$

$$\begin{aligned} \phi_2'(x, \lambda) = & -\frac{u}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \sin u(x - c_1) + \alpha \phi_1'(c_1^-, \lambda) \cos u(x - c_1) \\ & + O(\exp(|z|(x - c_1))), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.138)$$

asimptotik formülleri sağlanır.

Kanıt Teorem 4.5 den dolayı $\phi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu Teorem 4.11 'de bulunan integral denkleminin bir çözümü olup

$$\begin{aligned} \phi_2(x, \lambda) = & \frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \cos u(x - c_1) + \frac{\alpha}{u} \phi_1'(c_1^-, \lambda) \sin u(x - c_1) \\ & + \frac{1}{u} \int_{c_1}^x \sin u(x - s) q(s) \phi_1(s, \lambda) ds \end{aligned} \quad (4.139)$$

eşitliği elde edilir. (4.139) eşitliği $|u| \exp(-|z|(x - c_1))$ ile çarpılıp ve

$$K_1(x, \lambda) := |u| \exp(-|z|(x - c_1)) \phi_2(s, \lambda) \quad (4.140)$$

gösteriminden yararlanılırsa

$$\begin{aligned} K_1(x, \lambda) = & |u| \frac{1}{\alpha} \exp(-|z|(x - c_1)) \cos u(x - c_1) + |u| \frac{\alpha}{u} \exp(-|z|(x - c_1)) \sin u(x - c_1) \\ & + |u| \frac{1}{u} \int_{c_1}^x \sin u(x - s) q(s) \exp(-|z|(x - c_1)) \phi_2(s, \lambda) \phi_1(s, \lambda) ds \end{aligned} \quad (4.141)$$

elde edilir. Daha sonra

$$K_1(\lambda) := \max_{x \in [c_1, c_2]} |K_1(x, \lambda)|, \quad q_1 := \max_{x \in [c_1, c_2]} |q(x)| \quad (4.142)$$

eşitliklerini tanımlayıp (4.141) eşitliği için aşağıdaki

$$|K_1(x, \lambda)| \leq |u| \frac{1}{|\alpha|} \exp(-|z|(x - c_1)) |\cos u(x - c_1)| + |u| \frac{\alpha}{|u|} \exp(-|z|(x - c_1)) |\sin u(x - c_1)| \\ + |u| \frac{1}{|u|} \int_{c_1}^x |\sin u(x - s)| |q(s)| \exp(-|z|(x - c_1)) |\phi_2(x, \lambda)| ds \quad (4.143)$$

eşitsizliği yazılabilir. Kompleks fonksiyonların özelliklerinden

$$|\sin z| \leq \exp(|\operatorname{Im} z|) \quad \text{ve} \quad |\cos z| \leq \exp(|\operatorname{Im} z|)$$

olduğu için (4.143) ifadesi

$$|K_1(x, \lambda)| \leq \frac{|u|}{|\alpha|} \exp(-|z|(x - c_1)) \exp(|z|(x - c_1)) + |\alpha| \exp(-|z|(x - c_1)) \exp(|z|(x - c_1)) \\ + \int_{c_1}^x |\exp|z|(x - s) \exp(-|z|(x - c_1)) \phi_2(s, \lambda)| |q(s)| ds$$

yani

$$|K_1(x, \lambda)| \leq \frac{|u|}{|\alpha|} + |\alpha| + \int_{c_1}^x |\exp(-|z|(s - c_1)) \phi_2(s, \lambda)| |q(s)| ds \quad (4.144)$$

şeklinde olur. Daha sonra (4.142) eşitliği dikkate alındığında

$$|K_1(x, \lambda)| \leq \frac{|u|}{|\alpha|} + |\alpha| + \frac{1}{|u|} \int_{c_1}^x |K_1(s, \lambda)| |q(s)| ds \\ \leq \frac{|u|}{|\alpha|} + |\alpha| + \frac{1}{|u|} \int_{c_1}^x K_1(\lambda) |q(s)| ds \\ \leq \frac{|u|}{|\alpha|} + |\alpha| + \frac{1}{|u|} \{K_1(\lambda) q_1(c_2 - c_1)\} \quad (4.145)$$

bulunur. Buradan hareketle keyfi bir $M := \frac{|u|}{|\alpha|} + |\alpha| + \frac{1}{|u|} \{K_1(\lambda) q_1(c_2 - c_1)\}$ tanımlanırsa

$$|K_1(x, \lambda)| \leq M \quad (4.146)$$

bulunur. Eğer (4.140) gösterimi dikkate alınırsa

$$|u \exp(-|z|(x - c_1)) \phi_2(x, \lambda)| \leq M \implies |\phi_2(x, \lambda)| \leq \frac{1}{|u|} \exp(|z|(x - c_1)) M$$

yani

$$\phi_2(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|u|} \exp(|z|(x - c_1))\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.147)$$

asimptotik eşitliği elde edilmiş olur. Şimdi (4.136) eşitliği ispatlanacaktır. Daha önce

$$\begin{aligned}\phi_2'(x, \lambda) = & -\frac{u}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \sin u(x - c_1) + \alpha \phi_1'(c_1^-, \lambda) \cos u(x - c_1) \\ & + \int_{c_1}^x \cos u(x - s) q(s) \phi_1(s, \lambda) ds\end{aligned}$$

olduğu gösterilmişti. Son eşitlik $\frac{1}{|u|} \exp(-|z|(x - c_1))$ ile çarpılıp

$$K_2(x, \lambda) := \frac{1}{|u|} \exp(-|z|(x - c_1)) \phi_2'(x, \lambda) \quad (4.148)$$

gösteriminden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}K_2(x, \lambda) = & -\frac{u}{\alpha} \frac{1}{|u|} \exp(-|z|(x - c_1)) \sin u(x - c_1) + \alpha \frac{1}{|u|} \exp(-|z|(x - c_1)) \cos u(x - c_1) \\ & + \frac{1}{|u|} \int_{c_1}^x \cos u(x - s) q(s) \exp(-|z|(x - c_1)) \phi_2(s, \lambda) \phi_1(s, \lambda) ds\end{aligned} \quad (4.149)$$

elde edilir. Daha sonra

$$K_2(\lambda) := \max_{x \in [c_1, c_2]} |K_2(x, \lambda)|, \quad q_2 := \max_{x \in [c_1, c_2]} |q(x)| \quad (4.150)$$

eşitliklerini tanımlayıp (4.149) eşitliği için aşağıdaki

$$\begin{aligned}|K_2(x, \lambda)| \leq & \frac{|u|}{|\alpha|} \frac{1}{|u|} \exp(-|z|(x - c_1)) |\sin u(x - c_1)| + \alpha \frac{1}{|u|} \exp(-|z|(x - c_1)) |\cos u(x - c_1)| \\ & + \frac{1}{|u|} \int_{c_1}^x |\cos u(x - s)| |q(s)| \exp(-|z|(x - c_1)) |\phi_2(s, \lambda)| ds\end{aligned} \quad (4.151)$$

eşitsizliği yazılabilir. Kompleks fonksiyonların özelliklerinden

$$|\sin z| \leq \exp(|\operatorname{Im} z|) \quad \text{ve} \quad |\cos z| \leq \exp(|\operatorname{Im} z|)$$

olduğu için (4.151) ifadesi

$$\begin{aligned}|K_2(x, \lambda)| \leq & \frac{1}{|\alpha|} \exp(-|z|(x - c_1)) \exp(|z|(x - c_1)) + \frac{|\alpha|}{|u|} \exp(-|z|(x - c_1)) (\exp(|z|(x - c_1)) \\ & + \frac{1}{|u|} \int_{c_1}^x \exp(|z|(x - s)) \exp(-|z|(x - c_1)) \phi_2'(s, \lambda) |q(s)| ds\end{aligned} \quad (4.152)$$

yani

$$|K_2(x, \lambda)| \leq \frac{1}{|\alpha|} + \frac{|\alpha|}{|u|} + \frac{1}{|u|} \int_{c_1}^x \exp(-|z|(s - c_1)) \phi_2(s, \lambda) |q(s)| ds \quad (4.153)$$

şeklinde olur. Daha sonra (4.150) eşitliği dikkate alındığında ve

$$\phi_2(x, \lambda) \leq \exp(|z|(s - c_1))M$$

olduğundan $N := \frac{1}{|\alpha|} + \frac{|\alpha|}{|u|} + \frac{1}{|u|}Mq_2(c_2 - c_1)$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} |K_2(x, \lambda)| &\leq \frac{1}{|\alpha|} + \frac{|\alpha|}{|u|} + \frac{1}{|u|} \int_{c_1}^x \exp(-|z|(s + c_1)) \exp(|z|(s + c_1)) M |q(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{|\alpha|} + \frac{|\alpha|}{|u|} + \frac{1}{|u|} M \int_{c_1}^x |q(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{|\alpha|} + \frac{|\alpha|}{|u|} + \frac{1}{|u|} M q_2(c_2 - c_1) \\ &= N \end{aligned} \tag{4.154}$$

elde edilir. O halde herhangi bir $N \in \mathbb{R}^+$ için

$$|K_2(x, \lambda)| \leq N \tag{4.155}$$

bulunur. (4.150) gösterimi dikkate alınırsa

$$\left| \frac{1}{|u|} \exp(-|z|(x - c_1)) \phi_2'(s, \lambda) \right| \leq M \implies |\phi_2'(x, \lambda)| \leq |u| \exp(|z|(x - c_1)) N$$

yani

$$\phi_2'(x, \lambda) = O(|u| \exp(|z|(x - c_1))), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \tag{4.156}$$

asimptotik eşitliği bulunur. Şimdi (4.137) eşitliği ispatlanacaktır. Daha önce

$$\phi_2(x, \lambda) = \frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \cos u(x - c_1) + \frac{\alpha}{u} \phi_1'(c_1^-, \lambda) \sin u(x - c_1) + \frac{1}{u} \int_{c_1}^x \sin u(x - s) q(s) \phi_1(s, \lambda) ds$$

ve

$$\phi_2(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{u} \exp(|z|(x - c_1))\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

eşitlikleri gösterilmişti. Buradan $M_0 > 0$ herhangi bir sayı olmak üzere

$$|\phi_2(x, \lambda)| \leq M_0 (\exp(|z|(x - c_1))) \text{ ve } q_3 := \max_{x \in [c_1, c_2]} |q(x)|$$

ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{u} \int_{c_1}^x \sin u(x-s) q(s) \phi_2(s, \lambda) ds \right| &\leq \frac{1}{|u|} \int_{c_1}^x |\sin u(x-s)| |\phi_2(x, \lambda)| |q(s)| ds \\
 &\leq \frac{1}{|u|^2} \int_{c_1}^x \exp(|z|(x-s)) M_0 \exp(|z|(s-c_1)) |q(s)| ds \\
 &\leq \frac{1}{|u|^2} \exp(|z|(x-c_1)) M_0 \int_{c_1}^x |q(s)| ds \\
 &\leq \frac{1}{|u|^2} \exp(|z|(x-c_1)) M_0 q_3 (c_2 - c_1)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{1}{u} \int \sin u(x-s) q(s) \phi_2(s, \lambda) ds = O \left(\frac{1}{|u|} \exp(|z|(x-c_1)) \right) \quad (4.157)$$

eşitliği bulunur. (4.157) eşitliği $\phi_2(x, \lambda)$ integral denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
 \phi_2(x, \lambda) &= \frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \cos u(x-c_1) + \frac{\alpha}{u} \phi_1'(c_1^-, \lambda) \sin u(x-c_1) \\
 &\quad + O \left(\frac{1}{|u|} \exp(|z|(x-c_1)) \right)
 \end{aligned} \quad (4.158)$$

asimptotik eşitliği bulunur. Şimdi (4.138) eşitliği ispatlanacaktır. Daha önce

$$\phi_2'(x, \lambda) = -\frac{u}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \sin u(x-c_1) + \alpha \phi_1'(c_1^-, \lambda) \cos u(x-c_1) + \int_{c_1}^x \cos u(x-s) q(s) \phi_2(s, \lambda) ds$$

ve

$$\phi_2(x, \lambda) = O(\exp(|z|(x-c_1))), \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

eşitlikleri gösterilmişti. Buradan $M_1 > 0$ herhangi bir sayı olmak üzere

$$|\phi_2(x, \lambda)| \leq M_1 (\exp(|z|(x-c_1)))$$

olduğundan

$$q_4 := \max_{x \in [c_1, c_2]} |q(x)| \text{ ve } T := M_1 q_4 (c_2 - c_1) \quad (4.159)$$

ifadeleri ile gösterilirse

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{c_1}^x \cos u(x-s) q(s) \phi_2(s, \lambda) ds \right| &\leq \int_{c_1}^x |\cos u(x-s)| |\phi_2(s, \lambda)| |q(s)| ds \\
 &\leq \int_{c_1}^x \exp(|z|(x-s)) M_1 \exp(|z|(s-c_1)) |q(s)| ds \\
 &\leq \exp(|z|(x-c_1)) M_1 \int_{c_1}^x |q(s)| ds \\
 &\leq \exp(|z|(x-c_1)) M_1 q_4(c_2 - c_1) \\
 &\leq T \exp(|z|(x-c_1))
 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\int_{c_1}^x \cos u(x-s) q(s) \phi_2(s, \lambda) ds = O(\exp(|z|(x-c_1))) \quad (4.160)$$

eşitliği bulunur. (4.160) eşitliği $\phi_2'(x, \lambda)$ integral denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
 \phi_2'(x, \lambda) &= -\frac{u}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \sin u(x-c_1) + \alpha \phi_1'(c_1^-, \lambda) \cos u(x-c_1) \\
 &\quad + O(\exp(|z|(x-c_1))), |\lambda| \rightarrow \infty
 \end{aligned} \quad (4.161)$$

asimptotik eşitliği bulunur. □

4.19 Teorem $\lambda = u^2$, $u = \gamma + iz$, $Im(u) = z$ olmak üzere $\phi_3(x, \lambda)$ fonksiyonu için $c_2 \leq x < b$ aralığında aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanmaktadır.

$$\phi_3(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|u|} \exp(|z|(x-c_2))\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.162)$$

$$\phi_3'(x, \lambda) = O(|u| \exp(|z|(x-c_2))), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.163)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_3(x, \lambda) &= \frac{1}{\beta} \phi_2(c_2^-, \lambda) \cos u(x-c_2) + \frac{\beta}{u} \phi_2'(c_2^-, \lambda) \sin u(x-c_2) \\
 &\quad + O\left(\frac{1}{|u|^2} \exp(|z|(x-c_2))\right), |\lambda| \rightarrow \infty
 \end{aligned} \quad (4.164)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_3'(x, \lambda) &= -\frac{u}{\beta} \phi_2(c_2^-, \lambda) \sin u(x-c_2) + \beta \phi_2'(c_2^-, \lambda) \cos u(x-c_2) \\
 &\quad + O(\exp(|z|(x-c_2))), |\lambda| \rightarrow \infty
 \end{aligned} \quad (4.165)$$

4.20 Teorem $\lambda = u^2$, $u = \gamma + iz$, $Im|u| = z$ olmak üzere $\chi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu için $a \leq x \leq c_1$ aralığında aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanmaktadır.

$$\chi_1(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|u|} \exp(|z|(x-a))\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.166)$$

$$\chi_1'(x, \lambda) = O(\exp(|z|(x-a))), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.167)$$

$$\chi_1(x, \lambda) = \frac{1}{u} \sin u(x-a) + O\left(\frac{1}{|u|^2} \exp(|z|(x-a))\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.168)$$

$$\chi_1'(x, \lambda) = \cos u(x-a) + O(\exp(|z|(x-a))), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.169)$$

Kanıt Teorem 4.7 den dolayı $\chi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu Teorem 4.13 'de bulunan integral denkleminin bir çözümü olup

$$\chi_1(x, \lambda) = \frac{1}{u} \sin u(x-a) + \frac{1}{u} \int_a^x \sin u(x-s) q(s) \chi_1(s, \lambda) ds \quad (4.170)$$

eşitliği elde edilir. (4.170) eşitliği $|u| \exp(-|z|(x-a))$ ile çarpılıp ve

$$K_1(x, \lambda) := |u| \exp(-|z|(x-a)) \chi_1(s, \lambda) \quad (4.171)$$

gösteriminden yararlanılırsa

$$\begin{aligned} K_1(x, \lambda) &= \frac{|u|}{u} \exp(-|z|(x-a)) \sin u(x-a) \\ &+ \frac{|u|}{u} \int_a^x \sin u(x-s) q(s) \exp(-|z|(x-a)) \chi_1(s, \lambda) ds \end{aligned} \quad (4.172)$$

elde edilir. Daha sonra

$$K_1(\lambda) := \max_{x \in [a, c_1]} |K_1(x, \lambda)|, \quad q_1 := \max_{x \in [a, c_1]} |q(x)| \quad (4.173)$$

eşitliklerini tanımlayıp (4.172) eşitliği içi aşağıdaki

$$\begin{aligned} |K_1(x, \lambda)| &\leq \frac{|u|}{|u|} \exp(-|z|(x-a)) |\sin u(x-a)| \\ &+ \frac{|u|}{|u|} \int_a^x |\sin u(x-s)| |q(s)| \exp(-|z|(x-a)) |\chi_1(s, \lambda)| ds \end{aligned} \quad (4.174)$$

eşitsizliği yazılabilir. Kompleks sayıların özelliklerinden

$$|\sin z| \leq \exp(|Imz|) \quad \text{ve} \quad |\cos z| \leq \exp(|Imz|)$$

olduğu için (4.174) ifadesi

$$|K_1(x, \lambda)| \leq \exp(-|z|(x-a)) \exp(|z|(x-a)) \\ + \int_a^x |\exp(|z|(x-s)) \exp(-|z|(x-a)) \chi_1(s, \lambda)| |q(s)| ds$$

yani

$$|K_1(x, \lambda)| \leq 1 + \int_a^x |\exp(-|z|(s-a)) \chi_1(s, \lambda)| |q(s)| ds \quad (4.175)$$

şeklinde olur. Daha sonra (4.173) eşitliği dikkate alındığında

$$|K_1(x, \lambda)| \leq 1 + \frac{1}{|u|} \int_a^x |K_1(x, \lambda)| |q(s)| ds \\ \leq 1 + \frac{1}{|u|} \int_a^x K_1(\lambda) |q(s)| ds \\ \leq 1 + \frac{1}{|u|} \{K_1(\lambda) q_1(c_1 - a)\} \quad (4.176)$$

bulunur. Buradan hareketle keyfi bir $M := 1 + \frac{1}{|u|} \{K_1(\lambda) q_1(c_1 - a)\}$ tanımlanırsa

$$|K_1(x, \lambda)| \leq M \quad (4.177)$$

bulunur. Eğer (4.171) gösterimi dikkate alınır

$$| |u| \exp(-|z|(x-a)) \chi_1(s, \lambda) | \leq M \implies |\chi_1(x, \lambda)| \leq \frac{1}{|u|} \exp(|z|(x-a)) M$$

yani

$$\chi_1(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|u|} \exp(|z|(x-a))\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.178)$$

asimptotik eşitliği elde edilmiş olur. Şimdi (4.167) eşitliği ispatlanacaktır. Daha önce

$$\chi_1'(x, \lambda) = \cos u(x-a) + \int_a^x \cos u(x-s) q(s) \chi_1(x, \lambda) ds \quad (4.179)$$

olduğu gösterilmişti. (4.179) eşitliği $\exp(-|z|(x-a))$ ile çarpılıp ve

$$K_2(x, \lambda) := \exp(-|z|(x-a)) \chi_1'(x, \lambda) \quad (4.180)$$

gösteriminden yararlanılırsa

$$K_2(x, \lambda) = \exp(-|z|(x-a)) \cos u(x-a) + \int_a^x \cos u(x-s) q(s) \exp(-|z|(x-a)) \chi_1(s, \lambda) ds \quad (4.181)$$

elde edilir. Daha sonra

$$K_2(\lambda) := \max_{x \in [a, c_1]} |K_2(x, \lambda)|, \quad q_2 := \max_{x \in [a, c_1]} |q(x)| \quad (4.182)$$

eşitliklerini tanımlayıp (4.181) eşitliği için aşağıdaki

$$|K_2(x, \lambda)| \leq \exp(-|z|(x-a)) |\cos u(x-a)| + \int_a^x |\cos u(x-s)| |q(s)| \exp(-|z|(x-a)) |\chi_1(s, \lambda)| ds \quad (4.183)$$

eşitsizliği yazılabilir. Kompleks fonksiyonların özelliklerinden

$$|\sin z| \leq \exp(|\operatorname{Im} z|) \quad \text{ve} \quad |\cos z| \leq \exp(|\operatorname{Im} z|)$$

olduğu için (4.183) ifadesi

$$|K_2(x, \lambda)| \leq \exp(-|z|(x-a)) \exp(|z|(x-a)) + \int_a^x \exp(|z|(x-s)) \exp(-|z|(x-a)) |\chi_1(s, \lambda)| |q(s)| ds \quad (4.184)$$

yani

$$|K_2(x, \lambda)| \leq 1 + \int_a^x \exp(-|z|(s-a)) |\chi_1(s, \lambda)| |q(s)| ds \quad (4.185)$$

şeklinde olur. Daha sonra (4.182) eşitliği dikkate alındığında ve

$$\chi_1(x, \lambda) \leq \frac{1}{u} \exp(|z|(x-a)) M$$

olduğundan $N := 1 + \frac{1}{u} M q_2 (c_1 - a)$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} |K_2(x, \lambda)| &\leq 1 + \frac{1}{u} \int_a^x \exp(-|z|(s-a)) \exp(|z|(s-a)) M |q(s)| ds \\ &\leq 1 + \frac{1}{u} M \int_a^x |q(s)| ds \\ &\leq 1 + \frac{1}{u} M q_2 (c_1 - a) \\ &= N \end{aligned} \quad (4.186)$$

elde edilir. O halde herhangi bir $N \in \mathbb{R}^+$ için

$$|K_2(x, \lambda)| \leq N \quad (4.187)$$

bulunur. (4.182) gösterimi dikkate alınır

$$|\exp(-|z|(x-a))\chi_1'(x, \lambda)| \leq N \implies |\chi_1'(x, \lambda)| \leq \exp(|z|(x-a))N$$

yani

$$\chi_1'(x, \lambda) = O(\exp(|z|(x-a))), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.188)$$

asimptotik eşitliği bulunur. Şimdi (4.168) eşitliği ispatlanacaktır. Daha önce

$$\chi_1(x, \lambda) = \frac{1}{u} \sin u(x-a) + \frac{1}{u} \int_a^x \sin u(x-s)q(s)\chi_1(s, \lambda)ds$$

ve

$$\chi_1(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|u|} \exp(|z|(x-a))\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

eşitlikleri gösterilmişti. Buradan $M_0 > 0$ herhangi bir sayı olmak üzere

$$|\chi_1(x, \lambda)| \leq M_0 (\exp(|z|(x-a))) \text{ ve } q_3 := \max_{x \in [a, c_1]} |q(x)|$$

ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{u} \int_a^x \sin u(x-s)q(s)\chi_1(s, \lambda)ds \right| &\leq \frac{1}{|u|} \int_a^x |\sin u(x-s)| |\chi_1(s, \lambda)| |q(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{|u|^2} \int_a^x \exp(|z|(x-s)) M_0 \exp(|z|(s-a)) |q(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{|u|^2} \exp(|z|(x-a)) M_0 \int_a^x |q(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{|u|^2} \exp(|z|(x-a)) M_0 q_3 (c_1 - a) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{1}{u} \int \sin u(x-s)q(s)\chi_2(s, \lambda)ds = O\left(\frac{1}{|u|^2} \exp(|z|(x-a))\right) \quad (4.189)$$

eşitliği bulunur. (4.189) eşitliği $\chi_1(x, \lambda)$ integral denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\chi_1(x, \lambda) = \frac{1}{u} \sin u(x-a) + O\left(\frac{1}{|u|^2} \exp(|z|(x-a))\right) \quad (4.190)$$

asimptotik eşitliği bulunur. Şimdi (4.169) eşitliği ispatlanacaktır. Daha önce

$$\chi_1'(x, \lambda) = \cos u(x-a) + \int_a^x \cos u(x-s)q(s)\chi_1(x, \lambda)ds$$

ve

$$\chi_1'(x, \lambda) = O(\exp(-|z|(x-a))), \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

eşitlikleri gösterilmişti. Buradan $M_1 > 0$ herhangi bir sayı olmak üzere

$$|\chi_1(x, \lambda)| \leq M_1 (\exp(|z|(x-a)))$$

olduğundan

$$q_4 := \max_{x \in [a, c_1]} |q(x)| \text{ ve } T := M_1 q_4 (c_1 - a) \quad (4.191)$$

ifadeleri ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_1}^x \cos u(x-s)q(s)\chi_1(s, \lambda)ds \right| &\leq \int_{c_1}^x |\cos u(x-s)| |\chi_1(s, \lambda)| |q(s)| ds \\ &\leq \int_{c_1}^x \exp(|z|(x-s)) M_1 \exp(|z|(s-a)) |q(s)| ds \\ &\leq \exp(|z|(x-a)) M_1 \int_a^x |q(s)| ds \\ &\leq \exp(|z|(x-a)) M_1 q_4 (c_1 - a) \\ &\leq T \exp(|z|(x-a)) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\int_{c_1}^x \cos u(x-s)q(s)\chi_1(s, \lambda)ds = O(\exp(|z|(x-a))) \quad (4.192)$$

eşitliği bulunur. (4.192) eşitliği $\chi_1'(x, \lambda)$ integral denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\chi_1'(x, \lambda) = \cos u(x-a) + O(\exp(|z|(x-a))), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.193)$$

asimptotik eşitliği bulunur. □

4.21 Teorem $\lambda = u^2$, $u = \gamma + iz$, $Im|u| = z$ olmak üzere $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu için $c_1 \leq x \leq c_2$ aralığında

$$\chi_2(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|u|} \exp(|z|(x - c_1))\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.194)$$

$$\chi_2'(x, \lambda) = O(|u| \exp(|z|(x - c_1))), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.195)$$

$$\begin{aligned} \chi_2(x, \lambda) = & \frac{1}{\alpha} \chi_1(c_1^-, \lambda) \cos u(x - c_1) + \frac{\alpha}{u} \chi_1'(c_1^-, \lambda) \sin u(x - c_1) \\ & + O\left(\frac{1}{|u|^2} \exp(|z|(x - c_1))\right), |\lambda| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.196)$$

$$\begin{aligned} \chi_2'(x, \lambda) = & -\frac{u}{\alpha} \chi_1(c_1^-, \lambda) \sin u(x - c_1) + \alpha \chi_1'(c_1^-, \lambda) \cos u(x - c_1) \\ & + O(\exp(|z|(x - c_1))), |\lambda| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.197)$$

Kanıt İspatı Teorem (4.20) nin ispatına tamamen benzerdir. $\square$

4.22 Teorem $\lambda = u^2$, $u = \gamma + iz$, $Im(u) = z$ olmak üzere $\chi_3(x, \lambda)$ fonksiyonu için $c_2 \leq x < b$ aralığında aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanmaktadır.

$$\chi_3(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|u|} \exp(|z|(x - c_2))\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.198)$$

$$\chi_3'(x, \lambda) = O(|u| \exp(|z|(x - c_2))), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.199)$$

$$\begin{aligned} \chi_3(x, \lambda) = & \frac{1}{\beta} \chi_2(c_2^-, \lambda) \cos u(x - c_2) + \frac{\beta}{u} \chi_2'(c_2^-, \lambda) \sin u(x - c_2) \\ & + O\left(\frac{1}{|u|^2} \exp(|z|(x - c_2))\right), |\lambda| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.200)$$

$$\begin{aligned} \chi_3'(x, \lambda) = & -\frac{u}{\beta} \chi_2(c_2^-, \lambda) \sin u(x - c_2) + \beta \chi_2'(c_2^-, \lambda) \cos u(x - c_2) \\ & + O(\exp(|z|(x - c_2))), |\lambda| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.201)$$

Kanıt İspatı Teorem (4.20) nin ispatına tamamen benzerdir. $\square$

4.9. Karakteristik Denklem

Daha önce tanımlamış olduğumuz başlangıç değer problemlerini kısaca hatırlayalım.

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in [a, c_1) \cup (c_1, c_2) \cup (c_2, b] \quad (4.202)$$

denklemini alalım. Öncelikle $\phi_1(x, \lambda)$ çözümünü tanımlansın. $\phi_1(x, \lambda)$ fonksiyonunu (4.202) denkleminin $[a, c_1)$ aralığında

$$\phi_1(a) = 1, \quad \phi_1'(a) = 0 \quad (4.203)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözüm olarak tanımlamıştık. Daha sonra $\phi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu (4.202) denkleminin (c_1, c_2) aralığında

$$\phi_2(c_1^+) = \frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda), \quad \phi_2'(c_1^+) = \alpha \phi_1'(c_1^-, \lambda) \quad (4.204)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözüm olarak tanımlanmıştı. Son olarak $\phi_3(x, \lambda)$ fonksiyonu (4.202) denkleminin $(c_2, b]$ aralığında

$$\phi_3(c_2^+) = \frac{1}{\beta} \phi_2(c_2^-, \lambda), \quad \phi_3'(c_2^+) = \beta \phi_2'(c_2^-, \lambda) \quad (4.205)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözüm olarak tanımlanmıştı. Benzer yöntemler ile $\chi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu (4.202) denkleminin $[a, c_1)$ aralığında

$$\chi_1(a) = 0, \quad \chi_1'(a) = 1 \quad (4.206)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözüm olarak tanımlanmıştı. Daha sonra $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu (4.202) denkleminin (c_1, c_2) aralığında

$$\chi_2(c_1^+) = \frac{1}{\alpha} \chi_1(c_1^-, \lambda), \quad \chi_2'(c_1^+) = \alpha \chi_1'(c_1^-, \lambda) \quad (4.207)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözüm olarak tanımlanmıştı. Son olarak $\chi_3(x, \lambda)$ fonksiyonu (4.202) denkleminin $(c_2, b]$ aralığında

$$\chi_3(c_2^+) = \frac{1}{\beta} \chi_2(c_2^-, \lambda), \quad \chi_3'(c_2^+) = \beta \chi_2'(c_2^-, \lambda) \quad (4.208)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözüm olarak tanımlanmıştı. O halde bu başlangıç değer problemleri aracılığıyla $x \in [a, c_1) \cup (c_1, c_2) \cup (c_2, b]$ aralığında $\phi(x, \lambda)$ ve $\chi(x, \lambda)$ fonksiyonları

$$\phi(x, \lambda) = \begin{cases} \phi_1(x, \lambda), & x \in [a, c_1) \\ \phi_2(x, \lambda), & x \in (c_1, c_2) \\ \phi_3(x, \lambda), & x \in (c_2, b] \end{cases} \quad \text{ve} \quad \chi(x, \lambda) = \begin{cases} \chi_1(x, \lambda), & x \in [a, c_1) \\ \chi_2(x, \lambda), & x \in (c_1, c_2) \\ \chi_3(x, \lambda), & x \in (c_2, b] \end{cases}$$

eşitlikleri ile tanımlanabilir.

4.23 Yardımcı Teorem $\phi_i(x, \lambda)$ ve $\chi_i(x, \lambda)$ ($i = 1, 2, 3$) çözümlerinin her biri (4.202) denklemlerinin lineer bağımsız çözümleridir.

Bunu kanıtlamak için

$$W_\lambda(\phi_i; \chi_i; x) := \phi_i(x, \lambda) \chi_i'(x, \lambda) - \phi_i'(x, \lambda) \chi_i(x, \lambda)$$

Wronskiyanının verilen aralık içinde sıfırdan farklı olduğu gösterilmelidir.

4.24 Teorem $\phi_1(x, \lambda)$ ve $\chi_1(x, \lambda)$ fonksiyonları $[a, c_1)$ aralığında lineer bağımsızdır.

Kanıt Wronskian determinanti x e bağlı olmadığından yukarıdaki (4.203) ve (4.206) başlangıç değer şartlarını kullanarak Wronskian determinanti

$$\begin{aligned} W_\lambda(\phi_1; \chi_1; x) &= W_\lambda(\phi_1; \chi_1; a) \\ &= \phi_1(a, \lambda) \chi_1'(a, \lambda) - \phi_1'(a, \lambda) \chi_1(a, \lambda) \\ &= 1.1 - 0.0 \\ &= 1 \neq 0 \end{aligned} \tag{4.209}$$

bulunur. □

4.25 Teorem $\phi_2(x, \lambda)$ ve $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonları (c_1, c_2) aralığında lineer bağımsızdır.

Kanıt Sırasıyla $\phi_2(x, \lambda)$ ve $\chi_2(x, \lambda)$ için (4.204) ve (4.207) başlangıç değer şartları ile (4.209) denklemini dikkate alınırsa Wronskian determinanti

$$\begin{aligned} W_\lambda(\phi_2; \chi_2; x) &= W_\lambda(\phi_2; \chi_2; c_1^+) \\ &= \phi_2(c_1^+, \lambda) \chi_2'(c_1^+, \lambda) - \phi_2'(c_1^+, \lambda) \chi_2(c_1^+, \lambda) \\ &= \left(\frac{1}{\alpha} \phi_1(c_1^-, \lambda) \right) (\alpha \chi_1'(c_1^-, \lambda)) - (\alpha \phi_1'(c_1^-, \lambda)) \left(\frac{1}{\alpha} \chi_1(c_1^-, \lambda) \right) \\ &= W_\lambda(\phi_1; \chi_1; c_1^-) = W_\lambda(\phi_1; \chi_1; a) \\ &= 1 \neq 0 \end{aligned} \tag{4.210}$$

bulunur. □

4.26 Teorem $\phi_3(x, \lambda)$ ve $\chi_3(x, \lambda)$ fonksiyonları $(c_2, b]$ aralığında lineer bağımsızdır.

Kanıt $\phi_3(x, \lambda)$ ve $\chi_3(x, \lambda)$ için (4.205) ve (4.208) başlangıç değer şartları ile (4.210) denk-

lemi dikkate alınırsa Wronskian determinanı

$$\begin{aligned}
 W_{\lambda}(\phi_3; \chi_3; x) &= W_{\lambda}(\phi_3; \chi_3; c_2^+) \\
 &= \phi_3(c_2^+, \lambda) \chi_3'(c_2^+, \lambda) - \phi_3'(c_2^+, \lambda) \chi_3(c_2^+, \lambda) \\
 &= \left(\frac{1}{\beta} \phi_2(c_2^-, \lambda) \right) (\beta \chi_2(c_2^-, \lambda)) - (\beta \phi_2(c_2^-, \lambda)) \left(\frac{1}{\beta} \chi_2(c_2^-, \lambda) \right) \\
 &= W_{\lambda}(\phi_2; \chi_2; c_2^-) = W_{\lambda}(\phi_2; \chi_2; c_1^+) \\
 &= 1 \neq 0
 \end{aligned} \tag{4.211}$$

bulunur. $\square$

Sonuç $\phi(x, \lambda)$ ve $\chi(x, \lambda)$ ($i = 1, 2, 3$) fonksiyonlarının her biri sırasıyla $[a, c_1), (c_1, c_2), (c_2, b]$ aralıklarında lineer bağımsız olduğu açıktır.

4.27 Teorem λ kompleks sayısı (4.1) - (4.7) sınır - değer - geçiş periyodik probleminin bir özdeğeridir ancak ve ancak

$$E(\lambda) = W_{\lambda}(\phi_2, \chi_2; c_2^+) W_{\lambda}(\phi_2, \chi_2; c_2^-) [W_{\lambda}(\phi_3, \chi_3; b) + 1 - \phi_3(b) - \chi_3'(b)] = 0$$

olmasıdır.

Kanıt Kabul edelim ki $u_0(x, \lambda_0)$ fonksiyonu, λ_0 özdeğerine karşılık gelen herhangi bir öz-fonksiyon olsun. Yukarıdaki sonuç bölümünden, $\phi_i(x, \lambda_0)$ ve $\chi_i(x, \lambda_0)$ Ω_i ($i = 1, 2, 3$) çözümlerinin, (4.1) probleminin lineer bağımsız çözümleri olduğu sonucu çıkar. Bu nedenle $u_0(x, \lambda_0)$ özfonksiyonu

$$u_0(x, \lambda_0) = \begin{cases} \mu_1 \phi_1(x, \lambda_0) + \varphi_1 \chi_1(x, \lambda_0), & x \in [a, c_1) \\ \mu_2 \phi_2(x, \lambda_0) + \varphi_2 \chi_2(x, \lambda_0), & x \in (c_1, c_2) \\ \mu_3 \phi_3(x, \lambda_0) + \varphi_3 \chi_3(x, \lambda_0), & x \in (c_2, b] \end{cases} \tag{4.212}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ katsayılarından en az biri sıfırdan farklıdır. Şimdi (4.2)-(4.3) sınır şartları

$$l_1 u := u(a, \lambda_0) - u(b, \lambda_0) = 0 \tag{4.213}$$

$$l_2 u := u'(a, \lambda_0) - u'(b, \lambda_0) = 0 \tag{4.214}$$

şeklinde, $x = c_1$ ve $x = c_2$ süreksizlik noktalarında verilen geçiş şartları ise

$$l_3 u := u(c_1^-, \lambda_0) - \alpha u(c_1^+, \lambda_0) = 0 \quad (4.215)$$

$$l_4 u := u'(c_1^-, \lambda_0) - \frac{1}{\alpha} u'(c_1^+, \lambda_0) = 0 \quad (4.216)$$

$$l_5 u := u(c_2^-, \lambda_0) - \beta u(c_2^+, \lambda_0) = 0 \quad (4.217)$$

$$l_6 u := u'(c_2^-, \lambda_0) - \frac{1}{\beta} u'(c_2^+, \lambda_0) = 0 \quad (4.218)$$

şeklinde gösterilsin. $\phi_i(x, \lambda_0)$ ve $\chi_i(x, \lambda_0)$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_1(x, \lambda_0) &= \begin{cases} \phi_1(x, \lambda_0), & x \in [a, c_1) \\ 0, & x \in (c_1, c_2) \\ 0, & x \in (c_2, b] \end{cases} & \tilde{\chi}_1(x, \lambda_0) &= \begin{cases} \chi_1(x, \lambda_0), & x \in [a, c_1) \\ 0, & x \in (c_1, c_2) \\ 0, & x \in (c_2, b] \end{cases} \\ \tilde{\phi}_2(x, \lambda_0) &= \begin{cases} 0, & x \in [a, c_1) \\ \phi_2(x, \lambda_0), & x \in (c_1, c_2) \\ 0, & x \in (c_2, b] \end{cases} & \tilde{\chi}_2(x, \lambda_0) &= \begin{cases} 0, & x \in [a, c_1) \\ \chi_2(x, \lambda_0), & x \in (c_1, c_2) \\ 0, & x \in (c_2, b] \end{cases} \\ \tilde{\phi}_3(x, \lambda_0) &= \begin{cases} 0, & x \in [a, c_1) \\ 0, & x \in (c_1, c_2) \\ \phi_3(x, \lambda_0), & x \in (c_2, b] \end{cases} & \tilde{\chi}_3(x, \lambda_0) &= \begin{cases} 0, & x \in [a, c_1) \\ 0, & x \in (c_1, c_2) \\ \chi_3(x, \lambda_0), & x \in (c_2, b] \end{cases} \end{aligned}$$

şeklinde gösterilsin. Buradan hareketle genel çözüm

$$u = E_1 \tilde{\phi}_1(x, \lambda_0) + E_2 \tilde{\chi}_1(x, \lambda_0) + E_3 \tilde{\phi}_2(x, \lambda_0) + E_4 \tilde{\chi}_2(x, \lambda_0) + E_5 \tilde{\phi}_3(x, \lambda_0) + E_6 \tilde{\chi}_3(x, \lambda_0)$$

biçiminde gösterilebilir. Bu durumda $m_1 := \tilde{\phi}_1(x, \lambda_0), m_2 := \tilde{\chi}_1(x, \lambda_0), m_3 := \tilde{\phi}_2(x, \lambda_0), m_4 := \tilde{\chi}_2(x, \lambda_0), m_5 := \tilde{\phi}_3(x, \lambda_0), m_6 := \tilde{\chi}_3(x, \lambda_0)$ ile gösterilirse bu genel çözüm $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} u &= E_1 m_1 + E_2 m_2 + E_3 m_3 + E_4 m_4 + E_5 m_5 + E_6 m_6 \\ &= \sum_{s=1}^6 E_s m_s \end{aligned} \quad (4.219)$$

şeklinde yazılabilir. O halde problemin özdeğerleri

$$l_i u = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (4.220)$$

denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümlerini verir. Şimdi bu denklem sistemini yazalım.

(4.219) ve (4.220) denklemlerinden

$$l_i u = l_i \left(\sum_{s=1}^6 E_s m_s \right) = 0 \quad i, s = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.221)$$

gösterimi yazılabilir. Bu sistem açık bir şekilde yazılırsa

$$E_1 l_1 m_1 + E_2 l_1 m_2 + E_3 l_1 m_3 + E_4 l_1 m_4 + E_5 l_1 m_5 + E_6 l_1 m_6 = 0$$

$$E_1 l_2 m_1 + E_2 l_2 m_2 + E_3 l_2 m_3 + E_4 l_2 m_4 + E_5 l_2 m_5 + E_6 l_2 m_6 = 0$$

$$E_1 l_3 m_1 + E_2 l_3 m_2 + E_3 l_3 m_3 + E_4 l_3 m_4 + E_5 l_3 m_5 + E_6 l_3 m_6 = 0$$

$$E_1 l_4 m_1 + E_2 l_4 m_2 + E_3 l_4 m_3 + E_4 l_4 m_4 + E_5 l_4 m_5 + E_6 l_4 m_6 = 0$$

$$E_1 l_5 m_1 + E_2 l_5 m_2 + E_3 l_5 m_3 + E_4 l_5 m_4 + E_5 l_5 m_5 + E_6 l_5 m_6 = 0$$

$$E_1 l_6 m_1 + E_2 l_6 m_2 + E_3 l_6 m_3 + E_4 l_6 m_4 + E_5 l_6 m_5 + E_6 l_6 m_6 = 0$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümünün olması için katsayı determinantı

$$E(\lambda) := \begin{vmatrix} l_1 m_1 & l_1 m_2 & l_1 m_3 & l_1 m_4 & l_1 m_5 & l_1 m_6 \\ l_2 m_1 & l_2 m_2 & l_2 m_3 & l_2 m_4 & l_2 m_5 & l_2 m_6 \\ l_3 m_1 & l_3 m_2 & l_3 m_3 & l_3 m_4 & l_3 m_5 & l_3 m_6 \\ l_4 m_1 & l_4 m_2 & l_4 m_3 & l_4 m_4 & l_4 m_5 & l_4 m_6 \\ l_5 m_1 & l_5 m_2 & l_5 m_3 & l_5 m_4 & l_5 m_5 & l_5 m_6 \\ l_6 m_1 & l_6 m_2 & l_6 m_3 & l_6 m_4 & l_6 m_5 & l_6 m_6 \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Buradan hareketle bu determinantın elemanları teker teker hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
l_1 m_1 &= l_1 \tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_1(a) - \tilde{\phi}_1(b) = \phi_1(a) - \phi_1(b) = 1 - 0 = 1 \\
l_1 m_2 &= l_1 \tilde{\chi}_1 = \tilde{\chi}_1(a) - \tilde{\chi}_1(b) = \chi_1(a) - \chi_1(b) = 0 - 0 = 0 \\
l_1 m_3 &= l_1 \tilde{\phi}_2 = \tilde{\phi}_2(a) - \tilde{\phi}_2(b) = 0 - 0 = 0 \\
l_1 m_4 &= l_1 \tilde{\chi}_2 = \tilde{\chi}_2(a) - \tilde{\chi}_2(b) = 0 - 0 = 0 \\
l_1 m_5 &= l_1 \tilde{\phi}_3 = \tilde{\phi}_3(a) - \tilde{\phi}_3(b) = \phi_3(a) - \phi_3(b) = 0 - \phi_3(b) = -\phi_3(b) \\
l_1 m_6 &= l_1 \tilde{\chi}_3 = \tilde{\chi}_3(a) - \tilde{\chi}_3(b) = \chi_3(a) - \chi_3(b) = 0 - \chi_3(b) = -\chi_3(b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_2 m_1 &= l_2 \tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}'_1(a) - \tilde{\phi}'_1(b) = 0 - 0 = 0 \\
l_2 m_2 &= l_2 \tilde{\chi}_1 = \tilde{\chi}'_1(a) - \tilde{\chi}'_1(b) = \chi_1(a) - \chi_1(b) = 1 - 0 = 1 \\
l_2 m_3 &= l_2 \tilde{\phi}_2 = \tilde{\phi}'_2(a) - \tilde{\phi}'_2(b) = 0 - 0 = 0 \\
l_2 m_4 &= l_2 \tilde{\chi}_2 = \tilde{\chi}'_2(a) - \tilde{\chi}'_2(b) = 0 - 0 = 0 \\
l_2 m_5 &= l_2 \tilde{\phi}_3 = \tilde{\phi}_3(a) - \tilde{\phi}_3(b) = \phi'_3(a) - \phi'_3(b) = 0 - \phi'_3(b) = -\phi'_3(b) \\
l_2 m_6 &= l_2 \tilde{\chi}_3 = \tilde{\chi}'_3(a) - \tilde{\chi}'_3(b) = \chi'_3(a) - \chi'_3(b) = 0 - \chi'_3(b) = -\chi'_3(b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_3 m_1 &= l_3 \tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_1(c_1^-) - \alpha \tilde{\phi}_1(c_1^+) = \phi_1(c_1^-) - \alpha \phi_1(c_1^+) = \phi_1(c_1^-) - 0 = \phi_1(c_1^-) \\
l_3 m_2 &= l_3 \tilde{\chi}_1 = \tilde{\chi}_1(c_1^-) - \alpha \tilde{\chi}_1(c_1^+) = \chi_1(c_1^-) - \alpha \chi_1(c_1^+) = \chi_1(c_1^-) - 0 = \chi_1(c_1^-) \\
l_3 m_3 &= l_3 \tilde{\phi}_2 = \tilde{\phi}_2(c_1^-) - \alpha \tilde{\phi}_2(c_1^+) = 0 - \alpha \phi_2(c_1^+) = -\alpha \phi_2(c_1^+) \\
l_3 m_4 &= l_3 \tilde{\chi}_2 = \tilde{\chi}_2(c_1^-) - \alpha \tilde{\chi}_2(c_1^+) = 0 - \alpha \chi_2(c_1^+) = -\alpha \chi_2(c_1^+) \\
l_3 m_5 &= l_3 \tilde{\phi}_3 = \tilde{\phi}_3(c_1^-) - \alpha \tilde{\phi}_3(c_1^+) = 0 - 0 = 0 \\
l_3 m_6 &= l_3 \tilde{\chi}_3 = \tilde{\chi}_3(c_1^-) - \alpha \tilde{\chi}_3(c_1^+) = 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_4 m_1 &= l_4 \tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}'_1(c_1^-) - \frac{1}{\alpha} \tilde{\phi}'_1(c_1^+) = \phi'_1(c_1^-) - \frac{1}{\alpha} \phi'_1(c_1^+) = \phi'_1(c_1^-) - 0 = -\phi'_1(c_1^-) \\
l_4 m_2 &= l_4 \tilde{\chi}_1 = \tilde{\chi}'_1(c_1^-) - \frac{1}{\alpha} \tilde{\chi}'_1(c_1^+) = \chi'_1(c_1^-) - \frac{1}{\alpha} \chi'_1(c_1^+) = \chi'_1(c_1^-) - 0 = -\chi'_1(c_1^-) \\
l_4 m_3 &= l_4 \tilde{\phi}_2 = \tilde{\phi}'_2(c_1^-) - \frac{1}{\alpha} \tilde{\phi}'_2(c_1^+) = 0 - \frac{1}{\alpha} \phi'_2(c_1^+) = -\frac{1}{\alpha} \phi'_2(c_1^+) \\
l_4 m_4 &= l_4 \tilde{\chi}_2 = \tilde{\chi}'_2(c_1^-) - \frac{1}{\alpha} \tilde{\chi}'_2(c_1^+) = 0 - \frac{1}{\alpha} \chi'_2(c_1^+) = -\frac{1}{\alpha} \chi'_2(c_1^+) \\
l_4 m_5 &= l_4 \tilde{\phi}_3 = \tilde{\phi}'_3(c_1^-) - \frac{1}{\alpha} \tilde{\phi}'_3(c_1^+) = 0 - 0 = 0 \\
l_4 m_6 &= l_4 \tilde{\chi}_3 = \tilde{\chi}'_3(c_1^-) - \frac{1}{\alpha} \tilde{\chi}'_3(c_1^+) = 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_5 m_1 &= l_5 \tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_1(c_2^-) - \beta \tilde{\phi}_1(c_2^+) = 0 - 0 = 0 \\
l_5 m_2 &= l_5 \tilde{\chi}_1 = \tilde{\chi}_1(c_2^-) - \beta \tilde{\chi}_1(c_2^+) = 0 - 0 = 0 \\
l_5 m_3 &= l_5 \tilde{\phi}_2 = \tilde{\phi}_2(c_2^-) - \beta \tilde{\phi}_2(c_2^+) = \phi_2(c_2^-) - \beta \phi_2(c_2^+) = \phi_2(c_2^-) \\
l_5 m_4 &= l_5 \tilde{\chi}_2 = \tilde{\chi}_2(c_2^-) - \beta \tilde{\chi}_2(c_2^+) = \chi_2(c_2^-) - \beta \chi_2(c_2^+) = \chi_2(c_2^-) \\
l_5 m_5 &= l_5 \tilde{\phi}_3 = \tilde{\phi}_3(c_2^-) - \beta \tilde{\phi}_3(c_2^+) = \phi_3(c_2^-) - \beta \phi_3(c_2^+) = 0 - \beta \phi_3(c_2^+) = -\beta \phi_3(c_2^+) \\
l_5 m_6 &= l_5 \tilde{\chi}_3 = \tilde{\chi}_3(c_2^-) - \beta \tilde{\chi}_3(c_2^+) = \chi_3(c_2^-) - \beta \chi_3(c_2^+) = 0 - \beta \chi_3(c_2^+) = -\beta \chi_3(c_2^+)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_6 m_1 &= l_5 \tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_1'(c_2^-) - \frac{1}{\beta} \tilde{\phi}_1'(c_2^+) = 0 - 0 = 0 \\
l_6 m_2 &= l_5 \tilde{\chi}_1 = \tilde{\chi}_1'(c_2^-) - \frac{1}{\beta} \tilde{\chi}_1'(c_2^+) = 0 - 0 = 0 \\
l_6 m_3 &= l_5 \tilde{\phi}_2 = \tilde{\phi}_2'(c_2^-) - \frac{1}{\beta} \tilde{\phi}_2'(c_2^+) = \phi_2'(c_2^-) - \frac{1}{\beta} \phi_2'(c_2^+) = \phi_2'(c_2^-) \\
l_6 m_4 &= l_5 \tilde{\chi}_2 = \tilde{\chi}_2'(c_2^-) - \frac{1}{\beta} \tilde{\chi}_2'(c_2^+) = \chi_2'(c_2^-) - \frac{1}{\beta} \chi_2'(c_2^+) = \chi_2'(c_2^-) \\
l_6 m_5 &= l_5 \tilde{\phi}_3 = \tilde{\phi}_3'(c_2^-) - \frac{1}{\beta} \tilde{\phi}_3'(c_2^+) = \phi_3'(c_2^-) - \frac{1}{\beta} \phi_3'(c_2^+) = 0 - \frac{1}{\beta} \phi_3'(c_2^+) = -\frac{1}{\beta} \phi_3'(c_2^+) \\
l_6 m_6 &= l_5 \tilde{\chi}_3 = \tilde{\chi}_3'(c_2^-) - \frac{1}{\beta} \tilde{\chi}_3'(c_2^+) = \chi_3'(c_2^-) - \frac{1}{\beta} \chi_3'(c_2^+) = 0 - \frac{1}{\beta} \chi_3'(c_2^+) = -\frac{1}{\beta} \chi_3'(c_2^+)
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen ifadeler yukarıdaki denklem sisteminin katsayı determinantında yerine yazıldığında

$$E(\lambda) := \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\phi_3(b) & -\chi_3(b) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\phi_3'(b) & -\chi_3'(b) \\ \phi_1(c_1^-) & \chi_1(c_1^-) & -\alpha \phi_2(c_1^+) & -\alpha \chi_2(c_1^+) & 0 & 0 \\ -\phi_1'(c_1^-) & -\chi_1'(c_1^-) & -\frac{1}{\alpha} \phi_2'(c_1^+) & -\frac{1}{\alpha} \chi_2'(c_1^+) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_2(c_2^-) & \chi_2(c_2^-) & -\beta \phi_3(c_2^+) & -\beta \chi_3(c_2^+) \\ 0 & 0 & \phi_2'(c_2^-) & \chi_2'(c_2^-) & -\frac{1}{\beta} \phi_3'(c_2^+) & -\frac{1}{\beta} \chi_3'(c_2^+) \end{vmatrix}$$

bulunur. Sınır şartları yerine yazıldığında ise bu determinant

$$E(\lambda) := \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\phi_3(b) & -\chi_3(b) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\phi_3'(b) & -\chi_3'(b) \\ \alpha \phi_2(c_1^+) & \alpha \chi_2(c_1^+) & -\alpha \phi_2(c_1^+) & -\alpha \chi_2(c_1^+) & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} \phi_2'(c_1^+) & \frac{1}{\alpha} \chi_2'(c_1^+) & -\frac{1}{\alpha} \phi_2'(c_1^+) & -\frac{1}{\alpha} \chi_2'(c_1^+) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_2(c_2^-) & \chi_2(c_2^-) & -\phi_2(c_2^-) & -\chi_2(c_2^-) \\ 0 & 0 & \phi_2'(c_2^-) & \chi_2'(c_2^-) & -\phi_2'(c_2^-) & -\chi_2'(c_2^-) \end{vmatrix}$$

elde edilir. Bu determinant hesaplanırsa

$$E(\lambda) = W_\lambda(\phi_2, \chi_2; c_2^+) W_\lambda(\phi_2, \chi_2; c_2^-) [W_\lambda(\phi_3, \chi_3; b) + 1 - \phi_3(b) - \chi_3'(b)] \quad (4.222)$$

elde edilir. Buradan (4.220) denklemi aşıkâr olmayan bir çözüme sahip olduğundan

$$E(\lambda_0) = 0$$

yazılır. $E(\lambda)$ fonksiyonunun herhangi bir sıfırı $\lambda = \lambda_0$ olsun. Şimdi λ_0 ın (4.1) - (4.7) probleminin bir özdeğeri olduğunu gösterelim. Eğer $E(\lambda_0) = 0$ ise, (4.220) sistemi sıfırdan farklı bir $(\mu_1, \varphi_1, \mu_2, \varphi_2, \mu_3, \varphi_3)$ çözümüne sahiptir. Bu nedenle, (4.212) ile tanımlanan sıfırdan farklı $u_0(x, \lambda_0)$ fonksiyonu (4.1) denklemini, (4.2)-(4.7) sınır ve geçiş koşullarını sağlar. Bu sonuç da λ_0 'ın bir özdeğer olduğunu gösterir. Böylece istenen elde edilmiş olup ispat tamamlanmıştır. $\square$

4.2 Tanım $E(\lambda)$ ile tanımlanan

$$E(\lambda) = W_\lambda(\phi_2, \chi_2; c_2^+) W_\lambda(\phi_2, \chi_2; c_2^-) [W_\lambda(\phi_3, \chi_3; b) + 1 - \phi_3(b) - \chi_3'(b)] \quad (4.223)$$

fonksiyonuna (4.1) - (4.7) sınır-değer-geçiş probleminin karakteristik fonksiyonu adı verilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sınır-değer-geçiş problemleri, uygulamalı bilimlerde önemli bir rol almakla birlikte son derece gelişmiş teori ve aktif bir ilgi alanına sahiptir. Bu çalışmada herhangi üç ayrık aralıkta tanımlı, süreksizliğe sahip periyodik Sturm-Liouville probleminin, tanımlanan aralıklarda başlangıç değer probleminin yalnızca bir çözümü olduğu ve bu aralıklarda kompleks değişkenin tam fonksiyonu olduğu, özdeğerlerinin reel olduğu, bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların bulunup sistemin bir Hilbert uzayında ortogonal olduğu ve araştırdığımız sınır değer probleminin kendine eşlenik olduğu ispatlanmıştır. Devamında bu temel çözümlerin integral denklemleri bulunmuş olup yine aynı çözümlerin spektral davranışı ile ilgili teorik bilgiler ele alınmıştır. Ayrıca problemin karakteristik denklemi tanımlanmıştır.

Tezde kullanılan yöntem, yüksek mertebeden diferansiyel denklemler ve daha genel sınır şartları içeren sınır değer geçiş problemleri için uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- Aydemir, K. (2014). Boundary value problems with eigenvalue-dependent boundary and transmission conditions. *Boundary Value Problems*, 2014(1), 131.
- Aydemir, K., & Mukhtarov, O. S. (2017). Class of sturm-liouville problems with eigen-parameter dependent transmission conditions. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 38(10), 1260-1275.
- Aydemir, K., & Mukhtarov, O. S. (2021a). Spectrum of periodic sturm-liouville problems involving additional transmission conditions. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 72(1), 553 - 564.
- Aydemir, K., & Mukhtarov, O. S. (2021b). The transmittal-characteristic function of three-interval periodic sturm-liouville problem with transmission conditions. *Journal of New Theory*, 37(2021), 26 - 34.
- Aydemir, K., & Mukhtarov, O. S. (2021c). Two-linked periodic sturm-liouville problems with transmission conditions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(2), 1-13.
- Binding, P., & Volkmer, H. (2012). A prüfer angle approach to the periodic sturm-liouville problem. *The American Mathematical Monthly*, 119(6), 477-484.
- Birkhoff, G. (1908). On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. *Transactions of the American Mathematical Society*, 9(2), 219 - 231.
- Boumenir, A. (1999). Eigenvalues of periodic sturm-liouville problems by the shannon-whittaker sampling theorem. *Mathematics of Computation*, 68(227), 1057-1066.
- Boyce, W. E., & DiPrima. (2016). *Elementer diferansiyel denklemler ve sınır değer problemleri* (10th ed.; Çetin Ürtiş ve Muhiddin Uğuz, Trans.). Ankara: Palme Yayınevi - Akademik Kitaplar.
- Bozkurt, D., & Türen, B. (2000). *Lineer cebir*. Konya: Selçuk Üniversitesi Yayınları.
- Duygun, T. (2013). *Hilbert uzaylarında kendine eş operatörlerin spektral analizi*. İstanbul: Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Eastham, M. (1974). *Results and problems in the spectral theory of periodic differential equations*. Scotland: Spectral Theory and Differential Equations.
- Gelfand, I. (1950). Expansion in series of eigenfunctions of an equation with periodic coefficients. *In Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 73(6), 1117-1120.

- Kandemir, M. (2021). *Diferensiyel denklemler*. Ankara: Pegem Akademi yayıncılık.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. New York: John Wiley and Sons.
- Lee, J. W. (1972). Spectral properties and oscillation theorems for periodic boundary-value problems of sturm-liouville type. *Journal of Differential Equations*, 11(3), 592–606.
- Mukhtarov, O. S., Kadakal, M., & Altınışik, N. (2004). Eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous sturm-liouville with eigenparameter-dependent boundary conditions. *Acta Mathematica Hungarica*, 102(1-2), 159–193.
- Mukhtarov, O. S., Kadakal, M., & Mukhtarov, F. (2002). Sınır şartlarının birinde özdeğer parametresi bulunduran süreksiz sturm-liouville probleminin özfonksiyonları. *Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 8(2), 219-226.
- Mukhtarov, O. S., Kandemir, M., & Kuruoğlu, N. (2002). Distribution of eigenvalues for the discontinuous boundary-value problem with functional-manypoint conditions. *Isr. J. Math.*, 129(1), 143–156.
- Naimark, M. (1968). *Linear differential operators*. New York: Ungar.
- Olğar, H., & Mukhtarov, O. S. (2017). Weak eigenfunctions of two-interval sturm-liouville problems together with interaction conditions. *Journal of Mathematical Physics*, 58(4), 042201.
- Orlicz, W. (1992). *Linear functional analysis*. New York: World Scientific.
- Paş, S., Aydemir, K., & Mukhtarov, F. (2020). Spectral properties of the anti-periodic boundary-value-transition problems. *Journal of New Theory*, 33, 40-49.
- Sh., M. O., Aydemir, K., Jabbarov, & Olgar, H. (2018). Operator-pencil realization of one sturm-liouville problem with transmission conditions. *Applied And Computational Mathematics*, 17(3), 284-294.
- Shepley, L., & Ross. (1985). *Differential equations*. New York: John Wiley and Sons.
- Swanson, C. A. (1968). *Comparison and oscillation theory of linear differential equations*. New York: Academic Press.
- Titchmars, E. C. (1962). *Eigenfunction expansion associated with second order differential equations*. London: Oxford University.
- Yılmaz, O., Kandemir, M., & Aydemir, K. (2019). Eigenvalues and eigenfunctions of the periodic sturm-liouville problems with discontinuities. *Journal of New Results in Science*, 8(2), 37-41.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Umutkan YÜKSEL

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
-----------------	--------------	----------------

Lisans	Amasya Üniversitesi - Matematik	2020
--------	---------------------------------	------

Pedagojik Formasyon	Amasya Üniversitesi	2020
---------------------	---------------------	------

İş Deneyimi/Yıl	Çalıştığı Yer	Görevi
2022	Halk Eğitim Merkezi	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)