

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**İKİ PARAMETRELİ YENİ DAĞILIM MODELLERİ VE
İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ**

Büşra ASLAN

Yüksek Lisans Tezi

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI
Yöneylem Araştırması Bilim Dalı

ŞUBAT 2022

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İstatistik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

İKİ PARAMETRELİ YENİ DAĞILIM MODELLERİ VE İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ

Tez Yazarı

Büşra ASLAN

Danışman

Doç. Dr. Ayşe BUĞATEKİN

ŞUBAT 2022

ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İstatistik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	İki Parametrelili Yeni Dağılım Modelleri ve İstatistiksel Özellikleri
Yazarı:	Büşra ASLAN
İlk Teslim Tarihi:	03.01.2022
Savunma Tarihi:	03.02.2022

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

İmza

Danışman: Doç. Dr. Ayşe BUĞATEKİN
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Onayladım

Başkan: Prof. Dr. Sinan ÇALIK
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Onayladım

Üye: Doç. Dr. Ayşe Metin KARAKAŞ
Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Fakültesi

Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “İki Parametrelili Yeni Dağılım Modelleri ve İstatistiksel Özellikleri” Başlıklı tez çalışmasının içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

03/02/2022

Büşra ASLAN



ÖNSÖZ

Tez konumun belirlenmesinde hazırlanma sürecinde tecrübelerini, emeğini ve zamanını bana ayıran, zor zamanlarımda bana destek olup, beni motive ederek yol gösteren benden desteğini esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Ayşe Buğatekin'e, İstatistik Bölümü Başkanı Prof. Dr. Sinan Çalık'a, ve bölümümüzdeki tüm hocalarıma katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Hayatımın her anında yanımda olan ve benden desteklerini hiç esirgemeyen canım ailem nezdinde abim Fuat Aslan'a kuzenlerim Ayhan Emre Aslan, Mehmet Nebi Aslan, Remziye Aslan ve Merve Aslan'a teşekkür ederim. Son olarak Yüksek Lisansa başlamam için bana destek olup bilgilerini tecrübelerini benimle paylaşan ve paylaşmaya devam eden Arş. Gör. Mine Doğan'a, yüksek lisans arkadaşım Sümeyye Levent'e ve her koşulda yanımda olan kardeşlerim Zübeyde Yıldırım'a, Zahide Serin'e ve Esma Toran'a sonsuz teşekkür ederim.

Büşra ASLAN

ELAZIĞ, 2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
TABLolar LİSTESİ	ix
KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ	1
2. TANIMLAR	2
3. YENİ DAĞILIM MODELLERİ	7
3.1. Binom-Üstel 2 Dağılımı (BE2)	8
3.1.1. Önerilen Model ve Özellikleri.....	8
3.1.2. Momentler	10
3.1.3. BE2 Dağılımı İçin Sıra İstatistikleri	10
3.1.4. Maksimum Olabilirlik Tahmini.....	11
3.2. Üstel – Sıfır Kesilmiş Poisson Dağılımı (EP)	11
3.2.1. Dağılım Fonksiyonu ve Momentler.....	13
3.2.2. Maksimum Olabilirlik Tahmini.....	13
3.3. Üstel-Geometrik Dağılım	14
3.3.1. Dağılımın Özellikleri ve Diğer Dağılımlarla İlişkileri	15
3.3.2. Olasılıklar ve Momentleri	15
3.3.3. Maksimum Olabilirlik Yöntemi ile Parametre Tahmini.....	15
3.4. Poisson-Üstel (PE) Dağılımı	16
3.4.1. Momentler	17
3.4.2. Maksimum Olabilirlik	17
3.5. Rayleigh – Logaritmik Dağılım	18
3.5.1. RL Dağılımının İstatistiksel ve Matematiksel Özellikleri	19
3.5.2. Parametre Tahmini	20
4. YENİ DAĞILIM MODELLERİNİN VERİ ANALİZİ İLE KARŞILAŞTIRILMASI.....	22
4.1. Üstelleştirilmiş Üstel Dağılım (EE).....	22
4.2. Ağırlıklandırılmış Üstel Dağılım (WE).....	22
5. SONUÇLAR.....	25
KAYNAKLAR	26
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

İki Parametrelili Yeni Dağılım Modelleri ve İstatistiksel Özellikleri

Büşra ASLAN

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı
Şubat, 2022, Sayfa: x+27

İstatistikte dağılımlar verilerin karakteristik özellikleri hakkında bilgi verdiği için önemli bir yere sahiptirler. Ancak çoğu durumda bilinen istatistiksel dağılımlar gerçek verilere uygulamada yetersiz kalırlar. Bu yetersizliği ortadan kaldırmak için yeni istatistiksel dağılımlar türetilmiştir. Bununla ilgili olarak literatürde birçok çalışma yapılmıştır ve yeni dağılımlar üretilmiştir.

Bu tez çalışmasında yeni dağılım modellerinden önemli görülenlerin birkaçı tanıtılmıştır. Bu dağılım modellerinin istatistiksel özellikleri ve yapılan parametre tahminleri verilmiştir. Ayrıca dağılım modelleri için aynı veri üzerinden elde edilen K-S değerleri de bu tezde toplu olarak değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Maksimum olabilirlik, Hazard Fonksiyonu, İki değişkenli dağılımlar, Momentler

ABSTRACT

New Distribution Models with Two Parameters and It's Statistical Properties

Büşra ASLAN

Master Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistics
February, 2022 Pages: x+27

Distributions have on important place in statistics because they give information about the characteristics of the data. However, in many cases, known statistical distribution do not sufficient fits to real data. New statistical distributions have been derived to eliminate this shortcoming. Many studies have been done in the literature on this and new distributions have been derived. In this thesis, a some distributions that are considered important from the new distribution models are introduced. Statistical properties of these distribution models and parameter estimates are given. K-S test values obtained from the some data for distribution models were also evaluated collectively.

Keywords: Maximum Likelihood, Hazard Function, Bivariate Distributions, Moments

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1. $p=0,1, \sigma^2=1$ için RL dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu	19
Şekil 3.2. $p=0,5, \sigma^2=0,5$ için RL dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu	19



TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 4.1. Veri seti için parametre tahmini ve K-S değerleri	23
---	----



KISALTMALAR

Kısaltmalar

BE2	: Binom-Üstel 2 Dağılım
EG	: Üstel-Geometrik Dağılım
EM	: Beklenti Maksimizasyonu Algoritması
EP	: Üstel-Poisson Dağılım
K-S	: Kolmogorov- Smirnov Test
PE	: Poisson- Üstel Dağılım
RL	: Rayleigh-Logaritmik Dağılım



1. GİRİŞ

Olasılık dağılımları, olasılık incelemesi ve olayların olasılığının tanımlanması için kullanılan modellerdir. İstatistiksel çözümler belirli bir kuramsal dağılıma dayandırıldığından çözümlemede kullandığımız değişkenlerin bir kuramsal dağılıma uyması gerekir. Teorik ve uygulamalı alanlarda kullanılan bilinen dağılımlar bazen yeterli olmayabilir. Böylece verilere en uygun olasılık dağılımlarını belirlemek için yani yeni olasılık dağılımlarını elde etmek için çeşitli metodlar geliştirilmiştir. Bu aşamada daha genel ve daha çok parametreye sahip (bu yüzden daha esnek bir yapıya sahip) olan yeni karma dağılım modelleri ortaya çıkmıştır. Bu konuyla ilgili literatürde yeni karma dağılımların elde edilmesi ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır.

İki ya da daha fazla parametreden oluşan ve iki veya daha fazla bilindik dağılımdan türetilen yeni dağılıma karma dağılım adı verilir. Karma dağılım modelleri birçok alanda rasgelelik içeren doğal olayların farklı özellikleri hakkında toplanan ölçüm değerlerine istatistiksel olarak model oluşturmada matematiksel bir yaklaşım sağlar. Bu nedenle hem teorik hem de uygulamalı bilimlerde bu konu önemli bir rol oynar.

Karma dağılım modelleri ilk olarak 1894 yılında Pearson tarafından ele alınmıştır. Pearson 1894 yılında yengeç verisi için birbirinden farklı iki tek değişkenli normal dağılımın karma modelini uygulamıştır. Rao 1948 yılında yaptığı çalışmasında eşit varyanslı tek değişkenli iki normal dağılımdan oluşan karma dağılım için en çok olabilirlik yöntemleriyle parametre tahmini yapmışlardır. Alexander 2008’de en çok olabilirlik yöntemiyle EM algoritmasını karma dağılım modelinde bilinmeyen parametreleri tahmin etmek için kullanmıştır [1-3]. Yeni karma dağılım modelleri ile ilgili olarak literatürde birçok çalışma yapılmıştır. Bu tezde bu çalışmalardan önemli görülen bazı dağılım modelleri verilmiş ve dağılımların istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca parametre tahminleri yapılmıştır. Son olarak incelenen bu dağılım modelleri için daha önce yapılmış olan bir veri seti üzerinde parametre tahmini değerleri ve Kolmogorov- Smirnov değerleri karşılaştırılmıştır.

2. TANIMLAR

Tanım 2.1. (Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu)

Değerleri $f(x)$ olan fonksiyon,

$$1. f(x) \geq 0, -\infty < x < \infty \quad (2.1)$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (2.2)$$

şartlarını sağlıyorsa $f(x)$ ' e X sürekli tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir [4].

Tanım 2.2 (Olasılık Fonksiyonu)

X , sonlu sayıdaki $x_1, x_2, \dots, x_N$ değerlerini $f(x_i) = P(X = x_i), i = 1, 2, \dots, N$ olasılıkları ile alabilen kesikli rasgele değişken olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X ' in olasılık fonksiyonu denmektedir [5].

$$1. f(x) \geq 0 \text{ tüm } x' \text{ ler için} \quad (2.3)$$

$$2. \sum_{i=1}^N f(x_i) = 1 \quad (2.4)$$

Tanım 2.3. (Kümülatif Dağılım Fonksiyonu)

X , olasılık fonksiyonu P olan bir S örnek uzayında tanımlanmış bir tesadüfi değişken olsun. Herhangi bir gerçel değer x için, X ' in kümülatif dağılım fonksiyonu gerçel sayılar kümesinde x ' e eşit veya ondan küçük değerleri alan ve S örnek uzayında X tesadüfi değişkeni ile ilişkili olan olasılıktır. Bu fonksiyon,

$$f(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (2.5)$$

eşitliğiyle ifade edilir [4].

Tanım 2.4. (Üstel Dağılımı)

Üstel dağılım güvenirlik analizinde, yaşam analizinde ve bekleme hattı teorisinde çok yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yüzden olasılık teorisinde büyük bir öneme sahip olan dağılım modelidir.

Negatif olmayan değerler alan sürekli X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & d.d \end{cases} \quad (2.6)$$

olsun. Bu durumda X , $\lambda > 0$ parametresi ile üstel dağılıma sahiptir denir. λ parametresine sahip üstel dağılımın beklenen değer ve varyansı sırasıyla,

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (2.7)$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilmektedir [6].

Tanım 2.5. (Poisson Dağılımı)

X , $0, 1, 2, \dots$ değerlerini alan bir Poisson rasgele değişkeni olmak üzere, X ' in olasılık fonksiyonu aşağıda gösterildiği gibidir.

$$f(x) = P(X=x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x=0, 1, 2, \dots, \lambda > 0 \quad (2.9)$$

Poisson dağılımının beklenen değeri;

$$E(X) = \lambda \quad (2.10)$$

varyansı ise,

$$Var(X) = \lambda \quad (2.11)$$

dır [5].

Tanım 2.6. (Geometrik Dağılımı)

Bu dağılım bekleme hattı istatistik ve güvenilirlik teorisinde yaygın olarak kullanılmaktadır. T ile başarı olasılığı $0 < p < 1$ olan bernoulli denemelerinde ilk başarı ile sonuçlanan deneme numarasını gösterelim ve $f(x; p) = P(T = x)$ olsun. Dolayısıyla $T-1$, ilk başarının elde edilmesi ne kadar yapılan deneme sayısı, $f(x; p)$ ise ilk başarının x -inci denemede gerçekleşme olasılığıdır.

$$f(x;p)=q^{x-1}.p \ , \ x=1,2,... \quad (2.12)$$

şeklindedir. Geometrik dağılımın beklenen değer ve varyansı sırasıyla,

$$E(X)=\frac{1}{p} \quad (2.13)$$

$$Var(X)=\frac{q}{p^2} \quad (2.14)$$

olarak bulunur [7].

Tanım 2.7. (İki Parametrelili Weibull Dağılımı)

$X \sim Weibull(k, \beta)$ için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^k}, & x > 0 \\ 0, & d.d \end{cases} \quad (2.15)$$

Weibull dağılımının beklenen değer ve varyansı sırasıyla,

$$E(X)=\beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad (2.16)$$

$$Var(X)=\beta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \right] \quad (2.17)$$

dır [6].

Tanım 2.8. (Rayleigh Dağılımı)

$X \sim Weibull(k, \beta)$ iken $k=2$ ve $\beta = \sqrt{2}\sigma$ alınırsa sürekli tesadüfi değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

olur. Rayleigh dağılımının beklenen değer ve varyansı sırasıyla,

$$E(X) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (2.19)$$

$$Var(X) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2 \quad (2.20)$$

dır[6].

Tanım 2.9. (Pareto Dağılımı)

X tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}}, & a \leq x \leq \infty, \beta > 0 \\ 0, & d. d \end{cases} \quad (2.21)$$

olarak verilmiş ise, X tesadüfi değişkenine pareto dağılımına sahiptir denir.

Pareto dağılımının beklenen değer ve varyansı sırasıyla

$$E(X) = \frac{\beta \alpha}{(\beta-1)}, \beta > 1 \quad (2.22)$$

$$Var(X) = \frac{\beta \alpha^2}{(\beta-1)^2(\beta-2)}, \beta > 2 \quad (2.23)$$

dır[6].

Tanım 2.10. (Stokastik Bağımsızlık)

$f_1(x_1)$ ve $f_2(x_2)$ sırasıyla X_1 ve X_2 'nin marjinal yoğunluk fonksiyonları ve f de X_1 ve X_2 'nin ortak yoğunluk fonksiyonu olmak üzere, X_1 ve X_2 tesadüfi değişkenlerinin stokastik olarak bağımsız olması için gerek ve yeter şart $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ olmasıdır [8].

Tanım 2.11. (En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi)

Parametreleri tahmin etmek için kullanılması önemli metod olan en çok olabilirlik metodu, 1922 yılında genetikçi ve aynı zamanda istatistikçi olan Ronal A. Fisher tarafından bulunmuştur. Bu metod geniş boyutlu verilerde daha iyi sonuç elde etmemizi sağlamakta ve bu verilerin istatistiksel modellere uygunluğunu ölçmede kullanılan en uygun metodlardandır. En çok olabilirlik yöntemiyle β' nın değerinin gerçekte gözlemlenen değerlerden maksimum olasılığa sahip değer olmasını ister [9].

$X_1, X_2, \dots, X_n; f(x|\beta)$ dağılımından alınan örneklem ve bu örneklemin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n|\beta) &= f(x_1|\beta) \dots f(x_n|\beta) \text{ olmak üzere} \\ L(\beta; x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n; \beta) = L(\beta) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \beta) \end{aligned} \quad (2.24)$$

biçiminde tanımlanan $L(\beta)$ fonksiyonuna olabilirlik fonksiyonu denilmektedir. Buradaki fonksiyonu maksimum yapan β değerine β' nın en çok olabilirlik tahmini denir.

Genellikle, olabilirlik fonksiyonunu maksimize etmek yerine, fonksiyonun logaritması (log-olabilirlik) maksimize edilir ve bu fonksiyon,

$$l(\beta) = \log(L(\beta|X_1, \dots, X_n)) \quad (2.25)$$

elde edilir [10].

Tanım 2.12. (Sıra İstatistikleri)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı tesadüfi değişkenler olmak üzere bu tesadüfi değişkenler büyüklük sırasına göre dizildiğinde elde edilen $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ tesadüfi değişkenlerine sıra istatistikleri denir. Buna göre $X_{r:n}$ n boyutlu örneklemin r inci sıra istatistiği olmak üzere 1 inci ve r inci sıra istatistikleri sırasıyla,

$$X_{1:n} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.26)$$

$$X_{n:n} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.27)$$

olur.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ tesadüfi değişkenleri olasılık yoğunluk fonksiyonları $f(x)$ ve dağılım fonksiyonları $F(X)$ olan mutlak sürekli bir ana kütleden çekilen tesadüfi örneklem olsun. Buna göre $X_{r:n}$ sıra istatistiğinin olasılık fonksiyonu

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(X)]^{r-1} [1 - F(X)]^{n-r} f(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad (2.28)$$

şeklinde yazılabilir[11].

3. YENİ DAĞILIM MODELLERİ

Çoğu kez bilinen istatistiksel dağılımlar gerçek verilere uygulanmakta yetersiz kalır. Örneğin veriler geometrik olduğunda normal dağılım iyi bir dağılım seçimi olmayacaktır. Böylece verilere en uygun olasılık dağılımlarını belirlemek için yani yeni olasılık dağılımlarını elde etmek için çeşitli metodlar geliştirilmiştir. Bu konuyla ilgili literatürde yeni karma dağılımların elde edilmesi ile ilgili olarak pek çok çalışma yapılmıştır. Adamidis ve Loukas azalan başarısızlık oranına sahip iki parametrelili Üstel-Geometrik dağılımı elde etmişlerdir. Kuş 2007'deki çalışmasında üstel-sıfır kesilmiş Poisson dağılımını oluşturmuş ve bu dağılımın karakteristik özelliklerini incelemiştir. Artan başarısızlık oranına sahip dağılımlar gerçek veri sistemlerine uygundur. Bu konuda artan başarısızlık oranına sahip dağılımlar (Tuğrul, Gupta and Kundu, Silva) tarafından ele alınmıştır [12-15].

Tahmasbi ve Rezaei, 2008'deki çalışmalarında azalan başarısızlık oranına sahip iki parametrelili yeni yaşam dağılımı elde etmişlerdir. Yaptıkları bu yeni dağılımın karakteristik özelliklerini inceleyip gerçek veri setleri üzerinde bir çalışma yapmışlardır. Bu yaşam dağılımı üstel-logaritmik dağılımdır. Bu dağılımın yine Nassar ve Nada, 2013'te Pareto-Geometrik dağılımın bir yeni genelleştirilmesini ortaya sunmuşlardır. Ayrıca Buğatekin, 2017'deki çalışmasında yeni bir dağılım olarak Rayleigh-Logaritmik dağılımı elde etmiş ve bu dağılımın genel istatistiksel özellikleri üzerinde durmuştur [16-18].

Sonlu karma dağılım modellerinde kitle içerisinde $n (\geq 2)$ tam sayı olmak üzere, n tane farklı bileşen olduğu varsayımı yapılır. Karma dağılım modelinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x; \theta_i) \quad (3.1)$$

olarak tanımlanır. $\lambda_i, \lambda_i \in (0,1)$ ve $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ koşuluyla karma ağırlıkları, x p -boyutlu rassal vektörü, θ_i bilinmeyen parametre vektörünü ve $f_i(x; \theta_i)$ ise θ_i bilinmeyen parametre vektör i bileşenine ait olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir. (3.1)'de belirtilen fonksiyonun bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için;

$$i) \quad \forall x \text{ için } f(x; \lambda_1, \dots, \lambda_n, \theta_1, \dots, \theta_n) \geq 0 \quad (3.2)$$

$$ii) \quad \int_A f(x; \lambda_1, \dots, \lambda_n, \theta_1, \dots, \theta_n) dx = 1 \quad (3.3)$$

özelliklere sahip olması gerekir [19].

Bu konuda yapılan çalışmaların hepsi literatürde önemli bir yere sahip olmakla birlikte bu tezde hepsine birden yer verilemeyeceğinden konunun anlaşılması açısından faydalı olacağı düşünülen birkaç yeni dağılım modelleri üzerinde durulacaktır.

3.1. Binom-Üstel 2 Dağılımı (BE2)

Artan başarısızlık oranına sahip dağılımların çoğu gerçek yaşam sistemlerinde ilgi çeker olmuştur. Örneğin artan başarısızlık oranına sahip en popüler dağılımlar Gamma ve Weibull dağılımlarıdır [20]. Bu konuda Gupta ve Kundu 2009'da Gamma ve Weibull dağılımlarına alternatif olarak üstelleştirilmiş üstel dağılım ve ağırlıklı üstel dağılımı tanıtmışlardır [15].

Bakouch ve arkadaşları 2014'teki çalışmasında, örnek boyutu sıfır kesilmiş binom dağılımına sahip bağımsız üstel tesadüfi değişkenlerin toplamından oluşan bir Binom-Üstel 2 dağılımını elde etmişlerdir. Bu dağılım artan başarısızlık özelliğine sahip iki parametrelili yeni bir yaşam dağılımıdır. Bu dağılım Weibull, Gamma, Üstel gibi yaşam dağılımlarına alternatif olarak kullanılabilir. Bu dağılıma benzer olarak Cancho ve arkadaşları 2011'de yine artan başarısızlık oranına sahip Poisson – Üstel adıyla yeni bir yaşam dağılımını tanıtmışlardır [20-21].

N olasılık kütle fonksiyonu aşağıdaki gibi olmak üzere sıfır-kesilmiş binom tesadüfi değişkeni olsun.

$$P(N = k) = \frac{\binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}}{1-(1-\theta)^n}, \quad k = 1, 2, \dots, n \text{ ve } 0 \leq \theta \leq 1 \quad (3.4)$$

Bu sıfır kesilmiş binom dağılımı istatistik ve aktüerya bilimlerinde çok yaygın olarak kullanılan bir dağılım türüdür.

W_i , N tane bağımsız ve aynı dağılımlı üstel tesadüfi değişkenlerin bir dizisi olsun. $X = \sum_{i=1}^N W_i$ olarak alalım. Üstel dağılım en basit yaşam modeli olduğundan X için üstel tesadüfi değişkenlerin toplamı W_i ' ler olarak alınır.

3.1.1. Önerilen Model ve Özellikleri

N , eşitlik (3.4)' teki gibi verilen bir sıfır-kesilmiş binom tesadüfi değişkeni olsun.

$X = \sum_{i=1}^n W_i$ alalım. Burada $W_1, W_2, \dots, W_n$ ' ler λ parametresi ile üstel dağılıma sahip N in bağımsız ve aynı dağılımlı tesadüfi değişkenleri olsun.

Buna göre; üstel dağılımların toplamı gamma dağılımını verdiğinden $X|N = n$ ' in koşullu dağılımı

$$f_{X|N=n}(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}, x > 0 \quad (3.5)$$

olur. Buna göre X' in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için aşağıdaki işlemin yapılması gerekir.

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \sum_{k=1}^n f_{x|N=k}(x) P(N = k) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} \cdot \frac{\binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}}{1-(1-\theta)^n} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Bu elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonu çok karmaşık olduğundan $n=2$ olması durumunda üstel olasılık yoğunluk fonksiyonunun basit bir genelleştirilmesi, gerekli işlemler ve düzenlemeler yapıldığında

$$h(x; \lambda, \theta) = \left(1 + \frac{(\lambda x - 1)\theta}{2 - \theta}\right) \lambda e^{-\lambda x} \quad (3.7)$$

olarak bulunur. Elde edilen yeni dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak birikimli dağılım fonksiyonu da

$$H(x; \lambda, \theta) = 1 - \left(1 + \frac{\lambda \theta x}{2 - \theta}\right) e^{-\lambda x} \quad (3.8)$$

olarak elde edilir. Buradan yaşam fonksiyonu $\bar{H}(\cdot) = 1 - H(\cdot)$ olduğu yazılabilir. (3.7) eşitliğinde $\theta = 0$ alındığı zaman sıradan üstel dağılıma ulaşıldığı kolayca görülebilir. Özel olarak $\theta = 1$ alındığında ise şekil parametresi 2 ve ölçek parametresi λ ile bir gamma dağılımına dönüşmüş olur. Buna göre λ ve θ parametreleri ile BE2 dağılımlı bir tesadüfi değişken $BE2(\lambda, \theta)$ olarak ifade edilebilir.

Klugman ve arkadaşları bağımsız ve aynı dağılımlı tesadüfi değişkenlerin toplamlarından oluşan dağılımların bir listesini 2004' te vermişlerdir. Fakat BE2 dağılımı bu listede değildir [22].

(3.6)'daki eşitlik ile verilen BE2 dağılımının önemi, artan başarısızlık oranına sahip yaşam verileri için uyumlu bir model olmasıdır. BE2 dağılımı Weibull, Gamma, PE dağılımlarına şekilce benzer bir şekilde sahiptir. Ayrıca gerçek veri setine uygulandığında aynı veri seti için Weibull, Gamma ve PE dağılımları için iyi bir rekabetçi olduğu görülmektedir. Bu özellikleri sayesinde BE2 dağılımı bahsedilen dağılımlardan herhangi birine alternatif olarak kullanılabilir.

3.1.2. Momentler

Bir dağılımın karakteristikleri ve özellikleri momentler ve onun üretici fonksiyonları sayesinde incelenebilir. Eğer $X \sim BE2(\lambda, \theta)$ ise buna göre X ' in moment çıkaran fonksiyonu,

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \left(1 + \frac{(\lambda x - 1)\theta}{2 - \theta}\right) \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda(\lambda - t)(2 - \theta) + \lambda\theta t}{(2 - \theta)(\lambda - t)^2}, \quad t < \lambda \end{aligned} \quad (3.9)$$

olarak hesaplanır. Ayrıca X ' in sıfıra göre r inci momenti

$$\begin{aligned} E(x^r) &= r \int_0^{\infty} x^{r-1} \left(1 + \frac{(\lambda x - 1)\theta}{2 - \theta}\right) \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{r!}{\lambda^r} \left(1 + \frac{r\theta}{2 - \theta}\right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

şeklinde hesaplanır. Buradan (3.10) eşitliği kullanılarak X ' in beklenen değer ve varyansı sırasıyla,

$$E(X) = \frac{2}{\lambda(2 - \theta)} \quad (3.11)$$

$$Var(X) = \frac{2(2 - \theta^2)}{\lambda^2(2 - \theta)^2} \quad (3.12)$$

olarak elde edilir. Yine burada da $\theta = 0$ olarak alınırsa $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ ve $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ şeklinde bilinen üstel dağılımın beklenen değer ve varyansı elde edilir.

3.1.3. BE2 Dağılımı İçin Sıra İstatistikleri

Sıra istatistikleri parametrik olmayan istatistik ve sonuç çıkarımında en temel kavramdır. Bu bölümde BE2 dağılımı için sıra istatistiklerinin bazı özellikleri tartışılmıştır.

Teorem: BE2 dağılımından alınan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tesadüfi değişkenlerinin sıra istatistikleri $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ olarak tanımlayalım. Buna göre $X_{k:n}$ sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu ve k . momenti aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} f_{k:n}(y) &= \frac{n! \lambda(2 - 2\theta + \lambda\theta y) e^{-\lambda ky}}{(k-1)! (n-k)! (2-\theta)^k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-1)^i \cdot [(2-\theta)(e^{\lambda y} - 1) - \lambda\theta y]^{k+i-1} \\ &\quad \cdot (2-\theta)^{-i} e^{-\lambda i y} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$F_{k:n}(y) = \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} (-1)^i \frac{((2-\theta)(e^{\lambda y}-1)-\lambda\theta y)^{i+j}}{((2-\theta)e^{\lambda y})^{i+j}} \quad (3.14)$$

$$E[X_{k:n}^r] = \frac{r}{\lambda^r} \sum_{j=n-k+1}^n \sum_{i=0}^j (-1)^{j-n+k-1} \binom{j-1}{n-k} \binom{n}{j} \binom{j}{i} \left(\frac{\theta}{2-\theta}\right)^i \frac{\Gamma(i+r)}{j^{i+r}} \quad (3.15)$$

İspat: $h(\cdot)$ ve $H(\cdot)$ BE2(λ, θ) dağılımının sırasıyla olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu olsun. Sıra istatistiklerin iyi bilinen formülleri kullanılarak [23].

$$f_{k:n}(y) = \frac{n! H^{k-1}(y) \{H(y)\}^{n-k} h(y)}{(k-1)!(n-k)!} \quad (3.16)$$

$$F_{k:n}(y) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} H^j(y) \{1 - H(y)\}^{n-j} \quad (3.17)$$

$$E[X_{k:n}^r] = r \sum_{j=n-k+1}^n (-1)^{j-n+k-1} \binom{j-1}{n-k} \binom{n}{j} \int_0^\infty y^{r-1} [1 - H(y)]^j dy \quad (3.18)$$

elde edebilir. Burada $[1 - H(y)]^r$ binom açılımının ifadesidir.

3.1.4. Maksimum Olabilirlik Tahmini

BE2 dağılımının bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek için maksimum olabilirlik metodu kullanılacaktır. $X_1, X_2, \dots, X_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ gözlem değerleri ile BE2 (λ, θ) dağılımından alınan n boyutlu tesadüfi örnek olsun. λ ve θ 'nın maksimum olabilirlik tahmini log olabilirlik fonksiyonunun maksimize edilmesi ile bulunur.

$$l \equiv l(\lambda, \theta) = n \log \lambda - n \log(2 - \theta) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \log(2 - 2\theta + \lambda\theta x_i) \quad (3.19)$$

Maksimum olabilirlik metodu ile $\hat{\lambda}$ ve $\hat{\theta}$ 'nın çözümleri aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \frac{\theta x_i}{2 - 2\theta + \lambda\theta x_i} = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{n}{2 - \theta} + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda x_i - 2}{2 - 2\theta + \lambda\theta x_i} = 0 \quad (3.21)$$

3.2. Üstel – Sıfır Kesilmiş Poisson Dağılımı (EP)

Kuş 2007'deki makalesinde azalan başarısızlık oranına sahip iki parametrelili yeni bir dağılım ortaya koymuştur [13]. Bu yeni dağılımın çeşitli özellikleri üzerinde durmuş ve parametre tahmini yapmıştır. Yine makalesinde gerçek verilere dayalı bir örnek sunmuştur.

$W_1, W_2, \dots, W_Z, f(w; \beta) = \beta e^{-\beta w}$ $w, \beta \in R^+$ olasılık yoğunluğu ile üstel dağılımlı tesadüfi değişkenler olsun. Z ise $P(z; \lambda) = e^{-\lambda} \lambda^z \Gamma^{-1}(z + 1) (1 - e^{-\lambda})^{-1}$ $z \in N, \lambda \in R$ olasılık fonksiyonu

ile sıfır kesilmiş Poisson değişkeni olsun. Burada $\Gamma(\cdot)$ gamma fonksiyonu ve Z ve W bağımsızdır. $X = \min(W_1, W_2, \dots, W_z)$ olarak tanımlayalım. Buna göre sıra istatistiklerinin minimum olasılık yoğunluk fonksiyonun formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} f(x|z; p) &= \frac{z!}{0!(z-1)!} \beta e^{-\beta z} e^{-\beta(x-1)z} \\ &= z\beta e^{-\beta z x} \end{aligned} \quad (3.22)$$

koşullu fonksiyonu elde edilir.

Burada; $P(z; \lambda) = e^{-\lambda} \lambda^z \Gamma^{-1}(z+1)(1 - e^{-\lambda})^{-1}$ ifadesi gerekli işlemler yapılarak

$$P(z; \lambda) = \frac{\lambda^z \Gamma^{-1}(z+1)}{(e^\lambda - 1)} \quad (3.23)$$

şeklinde yazılmıştır. (3.22)' deki koşullu fonksiyon yardımıyla ve bağımsızlıktan yola çıkarak X 'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(x, z) &= f(x|z) \cdot f(z) = z\beta e^{-\beta z x} e^{-\lambda} \lambda^z \Gamma^{-1}(z+1)(1 - e^{-\lambda})^{-1} \\ f(x) &= \sum_{z=1}^{\infty} z\beta e^{-\beta z x} e^{-\lambda} \lambda^z \Gamma^{-1}(z+1)(1 - e^{-\lambda})^{-1} \\ f(x) &= e^{-\beta x} \lambda \beta e^{-\lambda} (1 - e^{-\lambda})^{-1} \sum_{z=1}^{\infty} z \frac{(e^{-\beta x} \lambda)^{z-1}}{z!(z-1)!} \end{aligned} \quad (3.24)$$

şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{Burada } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} &= e^y \text{ özelliğini kullanarak;} \\ f(x) &= \lambda \beta e^{-\beta x} e^{-\lambda} (1 - e^{-\lambda})^{-1} e^{e^{-\beta x} \lambda} \\ f(x) &= \frac{\lambda \beta}{(1 - e^{-\lambda})} e^{-\lambda - \beta x + \lambda \exp(-\beta x)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

yeni dağılımı elde edilmiş olur.

X 'in dağılımı Üstel-Poisson (EP) olarak adlandırılabilir. EP yoğunluk fonksiyonu $x = 0$ ' da $\lambda \beta (1 - e^{-\lambda})^{-1}$ değeri ile monoton azalandır. $\lambda = 0$ için EP dağılımı β parametrelili üstel dağılıma yaklaşır.

3.2.1. Dağılım Fonksiyonu ve Momentler

Dağılım fonksiyonunun klasik tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
 F(x, \theta) &= \int_0^x \frac{\lambda \beta}{(1 - e^{-\lambda})} e^{-\lambda - \beta x + \lambda \exp(-\beta x)} dx \\
 &= \frac{\lambda \beta}{(1 - e^{-\lambda})} e^{-\lambda} \int_0^x e^{-\beta x} e^{\lambda e^{-\beta x}} dx \\
 &= (e^{\lambda \exp(-\beta x)} - e^{-\lambda}) (1 - e^{-\lambda})^{-1}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir. EP dağılımı üstel ailesinin bir parçası değildir. X' in sıfıra göre r inci momenti,

$$E(x^r, \theta) = \frac{\lambda \Gamma(r+1)}{(e^{\lambda} - 1) \beta^r} F_{r+1, r+1}([1, 1, \dots, 1], [2, 2, \dots, 2], \lambda) r \in N \tag{3.27}$$

olarak elde edilir. Burada $F_{p,q}(n, d, \lambda)$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyondur. Bu fonksiyon Barnes' in genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu olarak da bilinir. Burada EP dağılımının beklenen değer ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$E(x, \theta) = \frac{\lambda}{(e^{\lambda} - 1) \beta} F_{2,2}([1, 1], [2, 2], \lambda) \tag{3.28}$$

$$Var(x, \theta) = \frac{\lambda}{(e^{\lambda} - 1) \beta^2} \{2F_{3,3}([1, 1, 1], [2, 2, 2], \lambda) - \frac{\lambda}{(e^{\lambda} - 1)} F_{2,2}^2([1, 1], [2, 2], \lambda)\} \tag{3.29}$$

3.2.2. Maksimum Olabilirlik Tahmini

EP dağılımı için n , boyutlu örnek üzerine dayanan log- olabilirlik fonksiyonu

$y = (x_i; i = 1, 2, \dots, n)$ olmak üzere

$$l(\theta, y) = n \log(\lambda \beta) - \beta \sum_{i=1}^n x_i - n \lambda + \lambda \sum_{i=1}^n e^{-\beta x_i} - n \log(1 - e^{-\lambda}) \tag{3.30}$$

Parametre hesabı için λ ve β parametrelerine göre kısmi türev alınır.

$$\frac{\partial l(\theta, y)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n e^{-\beta x_i} + n[\lambda^{-1} - (1 - e^{-\lambda})^{-1}], \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial l(\theta, y)}{\partial \beta} = n \beta^{-1} - \sum_{i=1}^n x_i - \lambda \sum_{i=1}^n x_i e^{-\beta x_i} \tag{3.32}$$

$\frac{\partial l(\theta, y)}{\partial \beta} = 0$ yazıldığında λ parametresinin tahmin edicisi,

$$\hat{\lambda} = (\hat{\beta}^{-1} - \bar{X}) \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \exp(-\hat{\beta} X_i) \right\}^{-1} \quad (3.33)$$

elde edilir. Burada $\hat{\lambda}$ ve $\hat{\beta}$ sırasıyla λ ve β parametrelerinin tahmin edicisidir.

3.3. Üstel-Geometrik Dağılım

Organizmaların, cihazların, yapıların, malzemelerin yaşam süresinin incelenmesi biyoloji ve mühendislik bilimlerinde büyük önem taşımaktadır. Böyle çalışmaların büyük bir kısmı dağılım yardımıyla yaşam süresini tanımlamaya yöneliktir. Arıza mekanizmasının fiziksel yapısı özel dağılımlar tarafından tanımlanabilir fakat genellikle dağılıma uyan gerçek bozulma süreleri temeline dayanmaktadır.

Zamanla azalan bozulma oranı fonksiyonu bazı yazarlar tarafından ele alınmıştır. Örneğin iş ölümleri Lomax(1954), bir Boeing 720 uçak firmasının filosunun iklimlendirme ekipmanındaki arızalar, çeşitli yarı iletkenlerdeki arızalar Proschan (1963), entegre devre modellerinin ömrü gibi Saunders ve Myhre (1983). Genel olarak bir popülasyonun zaman içindeki davranışı örneğin biyolojide bağışıklık terimi ile karakterize edildiğinde azalan bozulma oranı sergilemesi beklenir. Proschan (1963) azalan başarısızlık oranı özelliğinin sabit başarısızlık oranı ile karma dağılımlara özgü olduğunu kanıtlamıştır [24-27].

İçinde sabit başarısızlık oranı ile üstel karışımların diğer özellikleri için ayrıca McNolty ve diğerleri (1980) ve Gleser (1989), şekil parametresi birden az olan herhangi bir gama dağılımı için tersini göstermiştir. İçinde ek olarak, Gurland ve Sethuraman (1994), bu tür sonuçların karışımlar için geçerli olabileceğini gösteren örnekler verir. Hızla artan başarısızlık oranı ile dağılımların aynı heterojenlik teorisi altında Cozzolino (1968) pratik öneme sahip çeşitli azalan başarısızlık oranı modelleri geliştirdi. Tam ve sansürlü örneklerden elde edilen özellikler ve tahmin teknikleri ile ilgili azalan başarısızlık oranı dağılımlarının genel teorik yönleri Barlow ve arkadaşları (1963), Barlow ve Marshall (1964,1965), Marshall ve Proschan (1965) ve Saunders ve Myhre (1983) tarafından araştırılmıştır [28-35].

Yapılan araştırmada gerçek verilere uyan ve gelecek vaat eden bir azalan başarısızlık oranı dağılımı sunulmuş ve bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bilinen diğer dağılımlara ilişkisi de araştırılmıştır. Maksimum olabilirlik yöntemi ile parametrelerinin tahmini yapılmıştır. Ayrıca gerçek veriler kullanılarak nümerik örnekler verilmiştir.

Kabul edelim ki $\{Y_i\}_{i=1}^Z$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip $f(y; \beta) = \beta e^{-\beta y}$, $\beta, y \in R^+$ yoğunluk fonksiyonlu tesadüfi değişken ve Z ise $P(z; p) = (1 - p)p^{z-1}$ olasılık fonksiyonu ile bir geometrik değişken olsun. $X = \min(\{Y_i\}_{i=1}^Z)$ olsun. Buna göre $f(x|z; \beta) = \beta z e^{-\beta z x}$ ve

$$f(x; \theta) = \beta(1 - p)e^{-\beta x} (1 - p e^{-\beta x})^{-2} \quad (3.34)$$

(3.34)'teki ifade üstel-geometrik EG dağılımı olarak adlandırılır. Parametre değerlerinin hepsi x' de kesin azalan ve $x \rightarrow \infty$ iken sıfırdır.

3.3.1. Dağılımın Özellikleri ve Diğer Dağılımlarla İlişkileri

X tesadüfi değişkeni (3.34)'te verilen yoğunluk fonksiyonuna sahip bir EG değişkeniyse,

i) $Y = p^{-1}(e^{\beta x} - 1)$ şekil parametresi ve ölçek parametresi $p/(1 - p)$ olan bir Pareto II dağılımına yaklaşır.

ii) $Y = -\beta^{-1} \ln(1 - e^{-\beta x})$ şekil parametresi $\beta^{-1} \ln\{p(1 - p)^{-1}\}$ ve ölçek parametresi β ile Lojistik dağılıma yaklaşır.

3.3.2. Olasılıklar ve Momentleri

Basit integral işlemi ile dağılım fonksiyonu (3.35)'teki gibi bulunabilir.

$$F(x; \theta) = P(X \leq x) = (1 - e^{-\beta x})(1 - pe^{-\beta x})^{-1} \quad (3.35)$$

Buradan medyan değeri $\beta^{-1} \ln(2 - p)$ olarak hesaplanır.

X 'in momenti ise; $E(X^r; \theta) = (1 - p)r! (\beta^r p)^{-1} L(p; r)$ olur. $L(p; r) = \sum_{j=1}^{\infty} p^j j^{-r}$, Euler'in dilogaritmik fonksiyonunun genelleştirilmiştir.

$$E(X; \theta) = \frac{(p-1) \ln(1-p)}{\beta p} \quad (3.36)$$

$$Var(X; \theta) = \frac{1-p}{p\beta^2} \left\{ 2L(p; 2) - \left(\frac{1-p}{p} \right) \ln^2(1-p) \right\} \quad (3.37)$$

Sonuç olarak, varyasyon katsayısı;

$$-\{2p(1-p)^{-1} L(p; 2) - \ln^2(1-p)\}^{1/2} \ln^{-1}(1-p) \text{ elde edilir.} \quad (3.38)$$

(3.31)'deki denklem kullanılarak, yaşam olasılığı;

$$s(x; \theta) \equiv 1 - F(x; \theta) = (1 - p)e^{-\beta x}(1 - pe^{-\beta x})^{-1} \text{ şeklinde verilir ve böylece EG için}$$

tehlike oranı ; $h(x; \theta) \equiv f(x; \theta)\{s(x; \theta)\}^{-1} \beta(1 - pe^{-\beta x})^{-1}$ olur.

Alt ve üst sınır değerlerine göre hazard fonksiyonu

$$h(0; \theta) = \beta(1 - p)^{-1} \text{ ve } h(\infty; \theta) = \beta \text{ olur.} \quad (3.39)$$

3.3.3. Maksimum Olabilirlik Yöntemi ile Parametre Tahmini

Olasılık yoğunluk fonksiyonunu kullanarak EG dağılımının parametreleri için moment tahminleri kapalı formda elde edilemez. Bu yüzden maksimum olabilirlik metodu ile parametre tahmini yapılır. Buna göre aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$y_{obs} = (x_i, i = 1, 2, \dots, n)$$

$$l(\theta; y_{obs}) = n \ln\{\beta(1-p)\} - \beta \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n \ln(1 - pe^{-\beta x_i}) \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = n\beta^{-1} + \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n \{x_i(1 - pe^{-\beta x_i})^{-1}\} \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial l}{\partial p} = p^{-1}\{n(p-2)(1-p)^{-1} + 2 \sum_{i=1}^n (1 - pe^{-\beta x_i})^{-1}\} \quad (3.42)$$

3.4. Poisson-Üstel (PE) Dağılımı

Üstel dağılım yaşam analizi ve güvenilirlik çalışmalarında birçok soruna basit ve yakın bir çözüm sağlar. Fakat üstel dağılım hazard oranının sabit olmadığı durumlarda makul ölçüde parametrik uygunluk sağlamayabilir. Son yıllarda bu tür bir sorunun üstesinden gelmek için üstel dağılım modifikasyonlarına dayanan yeni model sınıfları tanımlanmıştır. Gupta ve Kundu 2009'da genelleştirilmiş bir üstel dağılım önermişlerdir [15-36]. Bu genelleştirilmiş aile artan ve azalan bozulma oranı fonksiyonlarına sahip verileri barındırabilir.

Barreto-Souza ve Cribari-Neto (2009), Kuş (2007) tarafından önerilen dağılıma bir güç parametresi dahil ederek genelleştirmiştir [37].

Bu makalede de artan bozulma fonksiyonu ile üstel dağılıma dayalı yeni bir dağılım ailesi önerilmiştir.

Poisson-Üstel dağılım λ ve θ parametrelerine sahip yeni bir dağılım modeli olarak ortaya çıkmıştır. Y popülasyonundaki bir bileşenin ömrünü gösteren ve negatif olmayan bir tesadüfi değişken olsun. Buna göre PE dağılımını olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y) = \frac{\theta \lambda e^{-\lambda y - \theta e^{-\lambda y}}}{1 - e^{-\theta}}, y > 0 \quad (3.43)$$

olarak elde edilir. λ parametresi dağılımın ölçeğini kontrol ederken, θ şeklini kontrol eder. Burada θ parametresi 0'a yaklaştığında PE dağılımı üstel dağılıma yaklaşır [20]. PE dağılımı güvenilirlik fonksiyonu

$$S(y) = \frac{1 - e^{-\theta e^{-\lambda y}}}{1 - e^{-\theta}}, y > 0 \quad (3.44)$$

olarak bulunur.

3.4.1. Momentler

Bir dağılımın karakteristiği ve temel özelliklerin çoğu ortalama, varyans, eğilim, çarpıklık ve basıklık gibi momentlerle incelenebilir. Poisson- Üstel dağılımın r inci momentinin bir genel ifadesi $\mu'_r = E(y^r)$, $F_{p,q} = (a, b, \theta)$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon göz önünde bulundurularak analitik olarak hesaplanabilir.

$$F_{p,q} = (a, b, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^j \prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + j) \Gamma(a_i)^{-1}}{\Gamma(j+1) \prod_{i=1}^q \Gamma(b_i + j) \Gamma(b_i)^{-1}} \quad (3.45)$$

Burada $a = [a_1, a_2, \dots, a_p]$, p , a 'nın oluşum sayısı, $b = [b_1, b_2, \dots, b_q]$ ve q , b 'nin oluşum sayısı olarak tanımlanır. Buna göre,

Önerme: $y, \lambda > 0$ ve $\theta > 0$ parametreleri ile PE dağılımından alınan ve olasılık yoğunluk fonksiyonu (3.43)'teki şekilde bir tesadüfi değişken olsun. O zaman,

$$\mu'_r = \frac{\theta \Gamma(r+1)}{\lambda^r (1-e^{-\theta})} F_{r+1,r+1}([1, \dots, 1], [2, \dots, 2], -\theta) \quad (3.46)$$

olur. Burada (3.45)' teki ifade göz önüne alınarak PE dağılımının ortalama ve varyansı ,

$$E(Y) = \frac{\theta}{\lambda(1-e^{-\theta})} F_{2,2}([1,1], [2,2], -\theta) \quad (3.47)$$

$$Var(Y) = \frac{\theta}{\lambda^2(1-e^{-\theta})} \left[F_{3,3}(1,1,1, [2,2,2], -\theta) - \frac{\theta}{(1-e^{-\theta})} F_{2,2}^2([1,1], [2,2], -\theta) \right] \quad (3.48)$$

olarak elde edilir.

3.4.2. Maksimum Olabilirlik

Bir Poisson – Üstel dağılımından $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, n büyüklüğünde gözlemlenen bir örneğe dayalı log-olabilirlik fonksiyonu,

$$l(\theta) = n \log(\theta \lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n y_i - \theta \sum_{i=1}^n e^{-\lambda y_i} - n \log(1 - e^{-\theta}) \quad (3.49)$$

şeklindedir. $\vartheta = (\theta, \lambda)$ iken λ ve θ 'nın maksimum olabilirlik tahmin edicileri bu log-olabilirlik fonksiyonunu maksimize ederek aşağıdaki gibi iki tane lineer olmayan denklem sistemi ile elde edilir.

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \frac{n}{e^{\theta}-1} - \sum_{i=1}^n e^{-\lambda y_i} = 0 \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n y_i + \theta \sum_{i=1}^n y_i e^{-\lambda y_i} = 0 \quad (3.51)$$

Eşitlik (3.51)'deki denklemde $\hat{\lambda}$ 'nın değerine bağlı olarak $\hat{\theta}$,

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - n\hat{\lambda}^{-1}}{\sum_{i=1}^n y_i e^{-\hat{\lambda} y_i}} \quad (3.52)$$

şeklinde hesaplanır. Burada $\hat{\lambda}$ ve $\hat{\theta}$, sırasıyla λ ve θ 'nın maksimum olabilirlik tahminleridir. λ 'nın ve $\hat{\lambda}$ tahminini bulmak için ise eşitlik (3.50)'deki ifade çözülmelidir.

3.5. Rayleigh – Logaritmik Dağılım

Çoğu durumda bilinen istatistiksel dağılımları gerçek verilere uymada yetersiz kalırlar. Bu yüzden son zamanlarda literatürde yeni olasılık dağılımları elde etmek için çeşitli metodlar elde edilmiştir [19].

Artan bozulma oranına sahip dağılımların çoğu gerçek veri setleriyle ilgilidir. Örneğin Cancho ve arkadaşları artan başarısızlık oranı dağılımlarına sahip Poisson-Üstel dağılımını elde etmişlerdir. Yine artan başarısızlık oranı dağılımıyla ilgili çalışmalar [14],[15] ve [38] tarafından çalışılmıştır.

Rayleigh dağılımı, yaygın olarak güvenilirlik teorisinde ve yaşam analizinde sıklıkla kullanılır ve bu dağılımın bozulma oranları zamana bağlı lineer bir fonksiyondur. Bu dağılım gerçek yaşam uygulamalarında önemli rol oynar.

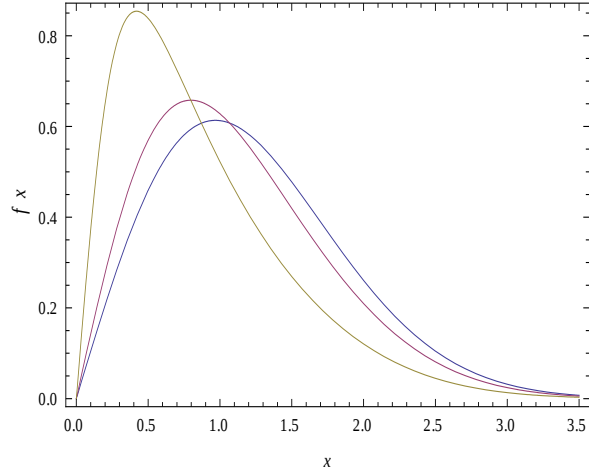
Bu çalışmanın amacı, artan başarısızlık oranı özelliğine sahip yeni iki parametrelili karma bir dağılım bulmaktır. Örnek boyut K Logaritmik bir dağılıma sahip olmak üzere bağımsız Rayleigh tesadüfi değişkenlerin bir dağılımı olarak Rayleigh-Logaritmik dağılımı elde edilmek istenilmiştir. RL dağılımının çeşitli karakteristik özellikleri, maksimum olabilirlik metodu ile parametre tahmini yapılmış ve entropisi verilmiştir.

$Y_1, Y_2, \dots, Y_K$, $f(y, \sigma) = \frac{y}{\sigma^2} e^{-y^2/2\sigma^2}, \sigma > 0, y \in [0, \infty)$ yoğunluk fonksiyonlu bir Rayleigh dağılımlı bir tesadüfi örnek olsun. k 'da, olasılık kütle fonksiyonu

$$P(k, p) = -\frac{1}{\ln(1-p)} \frac{p^k}{k} \quad 0 < p < 1, k \in \{1, 2, 3, \dots\} \text{ olan logaritmik bir tesadüfi değişken olur.}$$

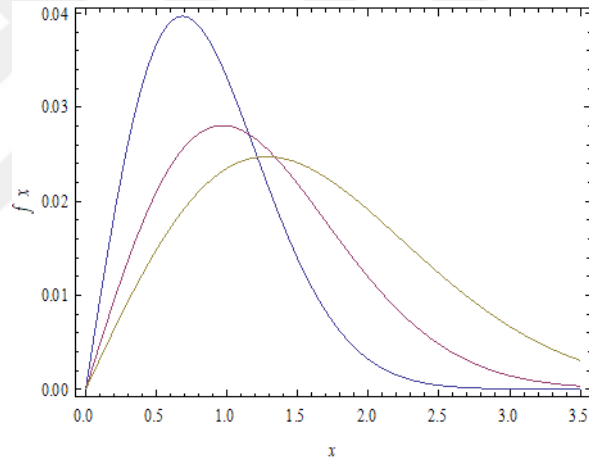
$$X = \min\{Y_i\}_{i=1}^k \text{ olsun o zaman,}$$

$$f(x; \theta) = -\frac{x}{\sigma^2 \ln(1-p)} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} p \left(1 - e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} p\right)^{-1}, \theta = (\sigma^2, p) \quad (3.53)$$



Şekil 3.1. $p=0.1, \sigma^2=1$ için RL dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu [18].

Rayleigh-Logaritmik dağılımının $p=0.1, \sigma^2=1$ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu şekil 3.1. de gösterildiği gibidir.



Şekil 3.2. $p=0.5, \sigma^2=0.5$ için RL dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu [18].

Rayleigh-Logaritmik dağılımının $p=0.5, \sigma^2=0.5$ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu şekil 3.2. de gösterildiği gibidir.

3.5.1. RL Dağılımının İstatistiksel ve Matematiksel Özellikleri

Rayleigh – Logaritmik dağılımın dağılım fonksiyonu

$$F(x, \theta) = 1 - \frac{\ln(1 - e^{-x^2/2\sigma^2} p)}{\ln(1-p)} \quad (3.54)$$

ayrıca X^r in r . momenti ,

$$E(X^r) = -\frac{1}{p\sigma^2 \ln(1-p)} 2^{\frac{r}{2}} (\sigma^2)^{-1} \Gamma[1 + r/2] \text{PolyLog}[2 + r/2, p] \quad (3.55)$$

olarak elde edilir. Burada $\text{PolyLog}(\cdot)$ matematikteki gibi standart yazılımda mevcut bir fonksiyondur.

$$\text{PolyLog}(a, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^a} \quad (3.56)$$

dır. Buna göre RL dağılımının 1. ve 2. momenti sırasıyla,

$$E(X) = -\frac{\sqrt{\pi/2 \text{PolyLog}[3/2, p]}}{\ln(1-p)(\sigma^2)^{5/2}} \quad (3.57)$$

$$E(X^2) = -\frac{2 \text{PolyLog}[2, p]}{\ln(1-p)(\sigma^2)^3} \quad (3.58)$$

(3.58) ile varyans kolaylıkla elde edilebilir. $F(x)$ kullanılarak, RL dağılımının yaşam fonksiyonu $F(x)$ ise $f(x)$ kullanılarak

$$S(x, \theta) = 1 - F(x, \theta) = \frac{\ln(1 - e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} p)}{\ln(1-p)} \quad (3.59)$$

Hazard fonksiyonu ise,

$$h(x, \theta) = -\frac{x e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} p (1 - e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} p)^{-1}}{\sigma^2 \ln(1 - e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} p)} \quad (3.60)$$

olarak elde edilir. Yine alt ve üst sınırlarına göre $h(x, \theta) = 0$ ve $h(\infty, \theta) = \infty$ olarak bulunur. Buradan hazard fonksiyonunun artan fonksiyon olduğu görülür.

3.5.2. Parametre Tahmini

Örnek boyutu n olmak üzere iki parametrelili RL dağılımının olasılık fonksiyonu

$$l(\sigma^2, p) = \sum_{i=1}^n \ln x_i + \ln(-1)^n - n \ln \sigma^2 - n \ln(\ln(1-p)) - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\sigma^2} + n \ln p - \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-x_i^2/2\sigma^2} p) \quad (3.61)$$

ve

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = \frac{-4n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\sigma^4} - \sum_{i=1}^n \frac{(px_i^2/2\sigma^4)e^{-x_i^2/2\sigma^2}}{(1-e^{-x_i^2/2\sigma^2})p} = 0 \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{n}{(1-p)\ln(1-p)} + \frac{n}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{e^{-x_i^2/2\sigma^2}}{(1-e^{-x_i^2/2\sigma^2})p} = 0 \quad (3.63)$$

olarak verilir.

4. YENİ DAĞILIM MODELLERİNİN VERİ ANALİZİ İLE KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde 2003 yılında Kanpur Hindistan Teknoloji Enstitüsü'nün Matematik final sınavında 48 uzay öğrencisinin notlarını temsil eden gerçek bir veri seti ele alınmıştır [15]. Bu veri seti aşağıdaki gibidir.

29,25,50,15,13,27,15,18,7,7,8,19,12,18,5,21,15,86,21,15,14,39,15,14,70,44,6,23,58,19,50, 23,11,6,34,18,28,34,12,37,4,60,20,23,40,65,19,31

Bu verilere göre dağılım verileri üzerinden hesaplanan Kolmogrov-Smirnov (K-S) istatistiği ve ilgili p değerleri verilmiş ve maksimum olabilirlik metoduna bağlı olarak parametre tahminleri yapılmıştır. Karşılaştırılmış olan dağılımlardan BE2, PE ve RL dağılımları 3. bölümde detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Veri analizinde kıyaslaması yapılacak olan Üstelleştirilmiş-Üstel (EE) [39], Ağırlıklandırılmış-Üstel (WE) [15] dağılımları da bu bölümde kısaca ifade edilecektir.

4.1. Üstelleştirilmiş Üstel Dağılım (EE)

Üstelleştirilmiş üstel dağılım α şekil ve λ ölçek parametresine sahip olan iki parametrelili bir dağılımdır. EE dağılımının dağılım fonksiyonu,

$$F_{EE}(x; \alpha, \lambda) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha, \quad \alpha, \lambda, x > 0 \quad (4.1)$$

ve yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{EE}(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha = 1$ alındığında bu dağılım üstel ailesine dönüşmüş olur. Burada Gamma, Weibull ve EE dağılımları üstel ailesinin ve farklı yolla bir genelleştirilmesi olarak ortaya çıkar. Bu yeni dağılım Gamma ve Weibull dağılımı ile benzer özellikler sergilediğinden alternatif bir dağılım olarak da düşünülebilir [39].

4.2. Ağırlıklandırılmış Üstel Dağılım (WE)

Üstel bir modele herhangi bir şekil parametresi eklemek için farklı metodlar kullanılır. Burada farklı ağırlıklandırılmış üstel dağılım çeşitleri ortaya çıkar. Örneğin gamma ve genelleştirilmiş üstel dağılım, üstel dağılımın farklı ağırlıklandırılmış versiyonlarıdır. Bu modelde

Azzalini 'nin iki normal dağılımdan çarpık-normal dağılım elde etmesi fikrine benzer olarak ortaya çıkmıştır [40].

X tesadüfi değişkeni $\alpha > 0$ ve $\lambda > 0$ şekil ve ölçek parametreleri ile aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse X değişkenine WE dağılımlıdır denir.

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\alpha+1}{\alpha} \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\alpha \lambda x}), \quad x > 0 \quad (4.3)$$

Burada $\alpha = 1$ olduğunda WE dağılımı genelleştirilmiş üstel dağılım ile çakışır. WE 'nin dağılım fonksiyonu ise,

$$F_X(x; \alpha) = \frac{\alpha+1}{\alpha} \left[1 - e^{-x} - \frac{1}{1+\alpha} (1 - e^{-(1+\alpha)x}) \right], \quad x > 0 \quad (4.4)$$

şeklinde ifade edilir [15].

Tablo 4.1. Veri seti için parametre tahmini ve K-S değerleri [20].

Model	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	K-S
BE2	0,9446	0,0732	0,0912
Weibull	1,5131	28,9154	0,1180
Gamma	2,2224	11,6524	0,1034
EE	2,5212	0,0655	0,0937
WE	0,4385	0,0655	0,0914
PE	1	0,0743	0,3013
RL	0,24	372	0,0864

Tablo 4.1'e göre BE2 dağılımının $\hat{\theta}$ parametresi 0,9446 ve $\hat{\lambda}$ parametresi 0,0732 olarak bulunup Kolmogorov-Smirnov değeri 0,0912 olarak elde edilmiştir. Weibull dağılımının $\hat{\theta}$ parametresi 1,5131 ve $\hat{\lambda}$ parametresi 28,9154 olarak bulunup Kolmogorov-Smirnov değeri ise analiz sonucunda 0,1180 olarak elde edilmiştir. Gamma dağılımının $\hat{\theta}$ parametresi 2,2224 ve $\hat{\lambda}$ parametresi 11,6524 olarak bulunup Kolmogorov-Smirnov değeri ise analiz sonucunda 0,1034 olarak elde edilmiştir. EE dağılımının $\hat{\theta}$ parametresi 2,5212 ve $\hat{\lambda}$ parametresi 0,0655 olarak bulunup Kolmogorov-Smirnov değeri ise analiz sonucunda 0,0937 olarak elde edilmiştir. WE dağılımının $\hat{\theta}$ parametresi 0,4385 ve $\hat{\lambda}$ parametresi 0,0655 olarak bulunup Kolmogorov-Smirnov değeri ise

analiz sonucunda 0,0914 olarak elde edilmiştir. PE dağılımının $\hat{\theta}$ parametresi 1 ve $\hat{\lambda}$ parametresi 0,0743 olarak bulunup Kolmogorov-Smirnov değeri ise analiz sonucunda 0,3013 olarak elde edilmiştir. RL dağılımının $\hat{\theta}$ parametresi 0,24 ve $\hat{\lambda}$ parametresi 372 olarak bulunup Kolmogorov-Smirnov değeri ise analiz sonucunda 0,0864 olarak elde edilmiştir.

Bu analiz sonucunda Kolmogorov-Smirnov istatistiklerine dayanan değerler kıyaslandığında Rayleigh-Logaritmik dağılım ve BE2 dağılımının diğer dağılımlar ile iyi bir rekabetçi olabileceği görülmüştür. Bu özellikleri sayesinde BE2 ve RL dağılımları bahsedilen dağılımlardan Weibull, Gamma, EE, WE ve PE dağılımlarından herhangi birine alternatif olarak kullanılabilir.



5. SONUÇLAR

İstatistikte kullandığımız dağılım modelleri ele aldığımız verilerin karakteristik özellikleri hakkında bilgi verdiği için önemli bir yere sahiptirler. Ancak bu dağılımlar çoğu kez gerçek verilere uygulamada yetersiz kalmaktadırlar. Bu yetersizliğe çözüm olarak yeni istatistiksel dağılımlar elde edilmiştir. Bununla ilgili olarak literatürde birçok çalışma yapılmıştır ve yeni dağılımlar üretilmiştir.

Bu tez çalışmasında istatistikte kullanılan dağılımlar ve yeni dağılım modelleri olarak elde edilen bazı dağılım modelleri ile ilgili bilgiler verilmiştir. Ayrıca dağılımların istatistiksel özellikleri incelenmiş ve parametre tahminleri yapılmıştır. En son olarak bu dağılım modelleri için daha önce yapılmış olan bir veri seti üzerinden parametre tahmin değerleri ve Kolmogrov-Smirnov değerleri karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda K-S değerleri kıyaslandığında Rayleigh-Logaritmik dağılım ve BE2 dağılımının diğer dağılımlara oranla daha iyi oldukları görülmüştür. Bu özellikleri sayesinde BE2 ve RL dağılımları bahsedilen dağılımlardan Weibull, Gamma, EE, WE ve PE dağılımlarından herhangi birine alternatif olarak kullanılabilir.

Bundan sonraki çalışmalarda literatüre katkı sağlayacak yeni bir dağılım modeli bulunması hedeflenmiştir. Ayrıca gerçek veriler üzerinde elde ettiğimiz bu yeni dağılım modeli ile diğer dağılımların kıyaslanması amaçlanmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Pearson, K., (1894). Contributions to the Theory of Mathematical Evolution, *Philosophical Transaction of the Royal Society of London A*, 185, 71-110.
- [2] Rao, C.R., (1948). The Utilization of Multiple Measurements in This Problems of Biological Classification, *Journal of Royal Statistical Society, Series B(Methodological)*, 10(2), 159-203.
- [3] Alexander, C., (2008). Market Risk Analysis, *Value at Risk Models (Vol. 4)*. John Wiley & Sons.
- [4] Aytaç, M. (1994). *Matematiksel İstatistik*, Uludağ Üniv. Basımevi.
- [5] Akdeniz, F. (2011). *Olasılık ve İstatistik*, Nobel Kitabevi.
- [6] Sağlam, V., Sağır, M., Yücesoy, E. (2016). *Olasılığa Giriş*, 1.Baskı, Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- [7] Shahbazov, A. (2005). *Olasılık Teorisine Giriş*, Birsen Yayınevi.
- [8] Hogg, R.Y., Craig, A.T., (1978) Introduction to Mathematical Statistics, Macmillan Publishing Co., Inc. Newyork.
- [9] Gencer, G. (2016). *Bazı Dağılımlar için En Çok Olabilirlik ve Farklı Kayıp Fonksiyonları Altında Bayes Tahmin Edicilerinin Performanslarının Karşılaştırılması*, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [10] Aktaş, A. (2005). *Tamamlanmamış İki Yönlü Olumsuzluk Tablolarda En Çok Olabilirlik Tahmini*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [11] Turan, A. (2008). *Kesikli Düzgün Dağılımlardaki Sıra İstatistiklerinin Örnek Extremelerinin Momenti*, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [12] Adamidis, K., Loukas, S. (1998). A Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Statistics and Probability Letters*, 39, 35-42.
- [13] Kuş, C. (2007). A New Lifetime Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, 51, 4497-4509.
- [14] Tugrul, O.R. (2003). Energy Sector and wind Energy Potential in Turkey, *Renewable Sustainable Energy Rev*, 7, 449-484.
- [15] Gupta, R.D., Kundu, D. (2009). A New Class of Weighted Exponential Distributions, *Statistics*, 43, 621-634.
- [16] Tahmasbi, R., Rezaei, S. (2008). A Two-Parameter Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, 52, 3899-3901.
- [17] Nassar, M., Nada, N. (2013). A New Generalization of the Pareto-Geometric Distribution, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 21, 148-155.
- [18] Bugatekin, A. (2017). A New Distribution Model with Two-Parametreler, *NTMSCI* 5, No.2, 80-84.
- [19] Köroğlu, Y. (2019). *Finansal Risk Yönteminde Karma Dağılım Modeli*, Yüksek Lisans Tezi, Necmettinerbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [20] Bakouch, H.S., Jazi, M.A., Nadarajah, S., Dolati, A. (2014). A Lifetime Model with Increasing Failure Rate, *Applied Mathematical Modelling*, 38, 5392-5406.
- [21] Cancho, V.G, Louzada-Neto, F., Barriga, G.D.C. (2011). The Poisson-Exponential Lifetime Distribution, *Comput. Stat. Data Anal.* 55, 677-686.
- [22] Klugman, S., Panjer, H., Willmot, C. (2004). Loss Models: Form Data to Decisions, *Second Ed.*, John Wiley and Sons, New York.
- [23] David, H.A., Nagaraja, H.N. (2003). *Order Statistik*, third ed, Jhon Wiley and Sons, Newyork.
- [24] Lomax, K.S., (1954). Business Failures: Another Example of the Analysis of Failure Data, *J. Amer. Statist. Assoc.* 49, 847-852.
- [25] Proschan, F., (1963). Theoretical Explanation of Observed Decreasing Failure Rate, *Technometrics* 5, 375-383.

- [26] Saunders, S.C., Myhre, J.M., (1983). Maximum Likelihood Estimation for Two-Parameter Decreasing Hazard Rate Distributions Using Censored Data, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 78,664-673
- [27] Proschan, F., (1963). Theoretical Explanation of Observed Decreasing Failure Rate, *Technometrics* 5,375-383.
- [28] McNolty, F., Dolye, J., Hansen, E., (1980). Properties of the Mixed Exponential Failure Process, *Technometrics*, 22, 555-565.
- [29] Gleser, L.J., (1989). The Gamma Distribution as a Mixture of Exponential Distributions, *Amer. Statist.*, 43, 115-117.
- [30] Gurland, J., Sethuraman, J., (1994). Revelsal of Increasing Failure Rates when Pooling Failure Data, *Technometrics* 35, 416-418.
- [31] Cozzolino, J.M., (1968). Probabilistic Models of Decreasing Failure Rate Processes, *Naval Res. Logist. Quart.*, 15, 361-374.
- [32] Barlow, R.E., Marshall, A.W., Proschan, F., (1963). Properties of Probability Distributions whit Monotone Hazard Rate, *Ann. of Math. Statist.*, 34, 375-389.
- [33] Barlow, R.E., Marshall, A.W., (1964). Bounds for Distributions whit Monotone Hazard Rate I and II, *Ann. Math. Statist.*, 35, 1234-1274.
- [34] Barlow, R.E., Marshall, A.W., (1965). Tables of Bounds for Distributions whit Monotone Hazard Rate, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 60, 872-890.
- [35] Saunders, S.C., Myhre, J.M., (1983). Maximum Likelihood Estimation for Two-Parameter Decreasing Hazard Rate Distributions Using Censored Data, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 78, 664-673.
- [36] Gupta, R., Kundu, D., (1999). Generalized Exponential Distributions, *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 41(2), 173-188.
- [37] Barretto-Souza, W., Cribari-Neto, F., (2009). A Generalization of the Exponential-Poisson Distribution, *Statistics and Probability Letters*,79, 2493-2500.
- [38] Silva, R.B., Cordeira, G.M., The Burr XII Power Series Distributions: A New Compounding Family, *Brazilian J. of Prob. and Stat*,29(3),2013.
- [39] Gupta, R.D., (2001). Exponentiated Exponential Family: An Alternative to Gamma and Weibull Distributions, *Biometrical J.*, 43,117-130.
- [40] Azzalini, A. (1985). A Class of Distributions Which Includes the Normal Ones,*Scand.J.Stad*,12,171-178.