

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



İKİ VE ÜÇ BOYUTLU GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖKLİDYEN
İÇ ÇARPIM UZAYLARINDA BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER

Mehmet DURU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARALIK 2023

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



İKİ VE ÜÇ BOYUTLU GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖKLİDYEN
İÇ ÇARPIM UZAYLARINDA BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER

Mehmet DURU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARALIK 2023

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ VE ÜÇ BOYUTLU GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖKLİDYEN
İÇ ÇARPIM UZAYLARINDA BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER

Mehmet DURU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 25/12/2023 tarihinde jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Doç. Dr. Semail ÜLGİN

ÖZET

İKİ VE ÜÇ BOYUTLU GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖKLİDYEN İÇ ÇARPIM UZAYLARINDA BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER

Mehmet DURU

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

Aralık 2023; 104 sayfa

Temel olarak iki bölümden oluşan bu tezde iki ve üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzaylarında bazı geometrik özelliklerin belirlenmesi amaçlanmıştır.

İlk bölümde, iki ve üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzaylarında temel özellikler ve yansıma dönüşümü ele alınmıştır. Bu uzaylarda yansıma dönüşümü, elips ya da elipsoid üzerindeki bir vektörü yine aynı elips ya da elipsoid üzerindeki bir vektöre götüren bir dönüşümdür. Dönüşümün matrisi, önce genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım kullanılarak, daha sonra genelleştirilmiş Öklidyen vektörel çarpım tanımlanarak elde edilen genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlar yardımıyla elde edilmiştir. Her bir yöntem ispatlanmış ve örneklerle desteklenmiştir.

İkinci bölümde, iki ve üç boyutlu bu uzaylar içinde bulunan temel iki geometrik nesne arasındaki uzaklık formülleri belirlenmiştir. Burada uzaklık kavramı, genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpımdan elde edilen norm ve bu normdan elde edilen metriğe işaret etmektedir. Elde edilen uzaklık formülleri analitik geometride iyi bilinen; iki nokta, bir nokta ve bir doğru, bir nokta ve bir düzlem, aykırı iki doğru arasındaki uzaklık formülleridir.

ANAHTAR KELİMELER: Genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım, genelleştirilmiş Öklidyen vektörel çarpım, genelleştirilmiş Öklidyen yansıma, genelleştirilmiş eliptik kuaterniyon, uzaklık.

JÜRİ: Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Doç. Dr. Semail ÜLGEN

ABSTRACT

SOME GEOMETRIC PROPERTIES IN TWO AND THREE DIMENSIONAL GENERALIZED EUCLIDEAN INNER PRODUCT SPACES

Mehmet DURU

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

December 2023; 104 pages

In this thesis, which mainly consists of two chapters, it is aimed to determine some geometric properties in two and three-dimensional generalized Euclidean inner product spaces.

In the first part, basic properties and reflection transformation in two and three-dimensional generalized Euclidean inner product spaces is obtained. The reflection transformation in these spaces is a transformation that takes a vector on an ellipse or ellipsoid to a vector on the same ellipse or ellipsoid. The matrix of the transformation is obtained first by using the generalized Euclidean inner product, then by using the generalized elliptic quaternions obtained by defining the generalized Euclidean vector product. Each method is proven and supported by examples.

In the second part, the distance formulas between two basic geometric objects in these two and three-dimensional spaces are determined. The concept of distance here refers to the norm obtained from the generalized Euclidean inner product and the metric obtained from this norm. The distance formulas obtained are well known in analytic geometry; the distance formulas between a point and a line, a point and a plane, and two skew lines.

KEYWORDS: Distance, generalized Euclidean inner product, generalized Euclidean vector product, generalized Euclidean reflection, generalized elliptic quaternion.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Assoc. Prof. Dr. Semail ÜLGEN

ÖNSÖZ

Bu tezde genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım kullanılarak elde edilen iki ve üç boyutlu genelleştirilmiş iç çarpım uzaylarında bir doğru ve düzleme göre genelleştirilmiş Öklidyen yansımalar genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlar kullanılarak incelenmiştir. Ek olarak, iki ve üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzaylarında temel uzaklık formülleri elde edilmiştir.

Tez konumun belirlenmesinde, hazırlanmasında ve düzenlenmesinde yardım ve fedakarlığını esirgemeyen, çalışmalarında bana yol gösteren değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU'na teşekkür ediyorum.

Bu Tezin hazırlanmasında 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı desteği için TÜBİTAK'a teşekkür ediyorum.

Bu çalışmamı, hayatım boyunca beni destekleyerek cesaretlendiren, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	4
2.1. Bilineer Form, İç Çarpım, Vektörel Çarpım	4
2.2. İki ve Üç Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen İç Çarpım ve Vektörel Çarpım	17
2.2.1. Genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım	17
2.2.2. Genelleştirilmiş Öklidyen vektörel çarpım	20
2.3. Genelleştirilmiş Eliptik Kuaterniyonlar	24
2.4. İki ve Üç Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen Uzaylarda Dönme Dönüşümü	30
2.5. İki Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen Uzayda Dönme Dönüşümü	30
2.5.1. Rodrigues formülü kullanılarak	31
2.5.2. Cayley dönüşümü kullanılarak	34
2.5.3. Householder dönüşümü kullanılarak	37
2.6. Üç Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen Uzayda Dönme Dönüşümü	41
2.6.1. Rodrigues formülü kullanılarak	42
2.6.2. Cayley dönüşümü kullanılarak	45
2.6.3. Householder dönüşümü kullanılarak	47
2.6.4. Genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlar kullanılarak	51
3. MATERYAL VE METOT	54
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	55

4.1. İki ve Üç Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen Uzaylarda Uygulamalar . . .	55
4.1.1. İç çarpımla ilgili geometrik uygulamalar	55
4.1.2. Vektörel çarpımla ilgili geometrik uygulamalar	62
4.1.3. Karma çarpımla ilgili geometrik uygulamalar	66
4.2. Üç Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen Uzayda Yansıma Dönüşümü	68
4.2.1. Genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım kullanılarak	69
4.2.2. Genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlar kullanılarak	76
4.3. İki Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen Uzayda Uzaklık Formülleri	81
4.3.1. İki nokta arasındaki Ω -uzaklık	81
4.3.2. Bir noktanın bir doğruya olan Ω -uzaklığı	82
4.4. Üç Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen Uzayda Uzaklık Formülleri	87
4.4.1. İki nokta arasındaki Ω -uzaklık	87
4.4.2. Bir noktanın bir doğruya olan Ω -uzaklığı	88
4.4.3. Bir noktanın bir düzleme olan Ω -uzaklığı	89
4.4.4. Aykırı iki doğru arasındaki Ω -uzaklık	93
5. SONUÇLAR	95
6. KAYNAKLAR	103
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “İki Ve Üç Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen İç Çarpım Uzaylarında Bazı Geometrik Özellikler” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

25/12/2023

Mehmet DURU



SİMGELER

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{\Omega}^n$	: n -boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayı
$\mathbb{R}^n$	: n -boyutlu Öklidyen iç çarpım uzayı
$\mathbb{V}$	: Vektör uzayı
$\mathcal{B}$	: Bilineer form
Ω	: Bilineer formla ilişkilendirilmiş matris
Δ	: Bilineer form sabiti
$\mathcal{B}_{\Omega}(\cdot, \cdot)$	: Genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım
$\mathbf{x} \times_{\Omega} \mathbf{y}$	: $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin genelleştirilmiş Öklidyen vektörel çarpımı
$\ \mathbf{x}\ $	: $\mathbf{x}$ vektörünün Öklidyen normu
$\ \mathbf{x}\ _{\Omega}$	: $\mathbf{x}$ vektörünün genelleştirilmiş Öklidyen normu
$\mathbb{H}$	: Kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{H}_{\Omega}$	: Genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{R}^{m \times n}$	: Reel girdili $m \times n$ boyutundaki matrisler kümesi
I_n	: $n \times n$ türünden birim matris
$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]_{\Omega}$	: $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörlerinin genelleştirilmiş Öklidyen karma çarpımı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1.	$\mathbb{R}_\Omega^2$ de Ω -dik $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri.....	58
Şekil 4.2.	$\mathbf{u}$ vektörünün $\mathbf{v}$ vektörüne Ω -dik izdüşüm vektörü.....	59
Şekil 4.3.	$\mathbf{u} = (1, 2)$ nun $\mathbf{v} = (3, 3)$ ye Ω -dik izdüşüm vektörü ...	60
Şekil 4.4.	$\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PA}_{izdn}^\Omega$ vektörünün düzleme Ω -dik olması.....	60
Şekil 4.5.	$\overrightarrow{PA}$ vektörünün doğruya Ω -dik izdüşümü.....	86



1. GİRİŞ

Genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzaylarında bazı geometrik özelliklerin belirlenmesini konu alan bu tezin iki temel hedefi vardır. Bunlardan biri geometrik dönüşümle, diğeri de uzaklık kavramıyla ilişkilidir.

Geometrik dönüşüm veya kısaca dönüşüm, geometrinin önemli kavramlarından-
dır. Geometrinin dönüşümler altında değişmeyen özelliklerin incelendiği bir bilim olduğu düşünülürse, bunun önemi oldukça açıktır. Örneğin, düzlemde orijinden geçen bir doğruya göre yansıma, orijin etrafında dönme, öteleme ve bu dönüşümlerin bileşkelerinden oluşan dönüşümlerden elde edilen izometrilere, Öklidyen geometrinin yapısal özelliği hakkında temel bilgiler verir. Bununla birlikte, dönüşümler çeşitli uygulama alanları için de önemlidir. Özellikle bilgisayar programlarında ve grafik tasarım alanında önemi bilinmektedir.

Düzlemde veya uzayda bir dönüşüm, düzlemin veya uzayın kendi üzerine birebir ve örten fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu fonksiyonlar koruduğu özelliklere göre sınıflandırılabilirler. Örneğin, uzaklığı, açıları, paralellliği veya doğrudaşlığı koruyan dönüşümlere sırasıyla izometri, konformal dönüşüm, afin dönüşüm ve projektif dönüşüm denmektedir. Bununla birlikte, geometrik dönüşümler kendi içinde yapısal özellikleriyle çeşitlenebildiği gibi, onları zenginleştirmenin bir yolu da genelleştirilmeleridir. Dönüşümler, geometrik özelliklerle analitik yaklaşımın bir arada kullanılabildiği yapılardır. Dolayısıyla onların genelleştirilmesinde iç çarpım fonksiyonları hatta daha genel olarak uzaklık ölçen fonksiyonlar, yani metrikler kullanılır. Örneğin, (Çolakoğlu 2023a) çalışmasında iç çarpım fonksiyonu genelleştirilerek yeni yansıma ve dönme dönüşümleri, (Çolakoğlu 2018) çalışmasında ise temel metrik genelleştirilerek yeni yansıma ve dönme dönüşümleri elde edilmiştir. Bu tezde, (Çolakoğlu ve Özdemir 2023a) çalışmasında elde edilen genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım fonksiyonları kullanılarak, bir doğruya ya da bir düzleme göre yansıma dönüşümü genelleştirilecek ve bu dönüşüm genelleştirilmiş Öklidyen yansıma dönüşümü olarak ifade edilecektir.

Diğer yandan, metrikler bir geometrik yapının özelliklerini belirleyebilen temel fonksiyonlar olarak görülebilirler. Örneğin, en basitinden reel düzlem Öklid metriğiyle birlikte düşüldüğünde, bir metrik uzay olarak iki boyutlu Öklidyen geometri modeli elde edilir. Bilindiği gibi, her iç çarpım fonksiyonu bir metrik belirler ve bir metrik tanımlan-

miş uzayda temel nesneler arasındaki uzaklıkların belirlenmesi bu metrik geometrinin en temel problemlerindendir. Tez içinde, genelleştirilmiş Öklidyen yansımaları ek olarak, 2 ve 3 boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpımından genelleştirilmiş Öklidyen metriği belirlenecek ve bu genelleştirilmiş Öklidyen uzaylarda iki temel geometrik nesne arasındaki iyi bilinen Öklidyen uzaklık formüllerinin karşılıkları elde edilecektir. Son yıllarda metrikler ve temel özellikleri, istatistik, makine öğrenmesi ve veri madenciliği gibi uygulama alanlarında kullanılmakta olduğu göz önüne alınarak, bu yeni metriğin ve uzaklık formüllerinin uygulamaya katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Tezde $\mathbb{R}_\Omega^3$ ile, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ ve Ω pozitif tanımlı simetrik reel matris

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{x}^T \Omega \mathbf{y} \\ &= Ax_1y_1 + Bx_2y_2 + Cx_3y_3 + D(x_1y_2 + x_2y_1) + E(x_1y_3 + x_3y_1) + F(x_2y_3 + x_3y_2) \end{aligned}$$

genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpımıyla donatılmış genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayı gösterilmektedir (Çolakoğlu ve Özdemir 2023a). Bu uzayın birim küresinin denklemi

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 1$$

şeklindedir ve denklem üç boyutlu reel uzayda bir elipsoid belirtir. Farklı pozitif tanımlı Ω matrisleri için farklı $\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ iç çarpımları elde edilir. Tanımlanan $\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ iç çarpımı Öklid iç çarpımının bir genelleştirilmesidir. Dikkat edilirse, $\Omega = I_3$ alınırsa standart Öklid iç çarpımı elde edilir. Üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpımı, elipsoid üzerindeki yansıma ve dönme dönüşümlerini belirleyecektir.

Ek olarak, iki boyutlu uzayda Ω matrisi olarak

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

pozitif tanımlı reel matrisi kullanılacaktır. Bu durumda iç çarpım

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{x}^T \Omega \mathbf{y} \\ &= Ax_1y_1 + B(x_1y_2 + x_2y_1) + Cx_2y_2\end{aligned}$$

şeklidedir. Bu uzayın birim çemberi

$$Ax^2 + 2Bxy + Cz^2 = 1$$

denklemini sahiptir ve reel düzlemde bir elips belirtir. İki boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpımı da elips üzerindeki yansıma ve dönme dönüşümlerini belirleyecektir.

Bu tezde çalışılan iç çarpım uzayları, aşına olduğumuz Öklidyen geometriyi genelleyen yapıda olmasına ek olarak, iki boyutta verilen herhangi bir elipsi çember kabul eden ya da üç boyutta verilen herhangi bir elipsoidi küre kabul eden metrik geometriler olması bakımından önemli metrik geometri örnekleri teşkil eder. Bununla birlikte, bu geometriler tarihsel açıdan, üst üste getirilerek açılardan eşliğinin belirlendiği antik Öklid geometrisinin 4. postulatını sağlamaması, ancak 5.postulatu sağlaması sebebiyle ilginç bir örnek oluşturmaktadır.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu kısımda, sonraki bölüme temel teşkil eden tanım ve teoremler (Özdemir 2020), (Çolakoğlu ve Özdemir 2023a), (Çolakoğlu, Özdemir ve Öztürk 2023) çalışmalarından alınarak derlenmiştir. Ek olarak, kavram ve teoremlerin anlaşılmasını kolaylaştıran bazı örnekler verilmiştir.

2.1. Bilineer Form, İç Çarpım, Vektörel Çarpım

Burada, bilineer form, iç çarpım, vektörel çarpım ve norm kavramları (Özdemir 2020, 2021) kaynağından yararlanılarak verilmiştir.

Tanım 2.1. Sonlu boyutlu $\mathbb{V}$ vektör uzayında, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}$ vektörleri ve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ reel sayıları için tanımlanan

$$\mathcal{B} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

dönüşümü

$$\mathcal{B}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b\mathcal{B}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, c\mathbf{y} + d\mathbf{z}) = c\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme **bilineer form** denir.

Örnek 2.2. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri için tanımlanan

$$\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_2y_1 + x_2y_3 + 4x_3y_1$$

dönüşümü bilineer form örneğidir.

Tanım 2.3. $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ kümesi sonlu boyutlu $\mathbb{V}$ vektör uzayının standart tabanı ve $\mathcal{B}$ de bu vektör uzayında bir bilineer form olsun. Bu durumda $\mathcal{B}$ bilineer formu, $\mathcal{B}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = a_{ij}$ ve $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ olmak üzere,

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{y} = \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki

$$A = \begin{bmatrix} \mathcal{B}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \mathcal{B}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & \dots & \mathcal{B}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \mathcal{B}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & \mathcal{B}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & \dots & \mathcal{B}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{B}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \mathcal{B}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_2) & \dots & \mathcal{B}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix}$$

matrisine standart tabana göre $\mathcal{B}$ **biliner formuyla ilişkilendirilmiş matris** denir. İlişkilendirilmiş matrisi A olan $\mathcal{B}$ biliner formu $\mathcal{B}_A$ ile gösterilir. Ayrıca $\Delta = \sqrt{|\det A|}$ tanımlanan sayısına $\mathcal{B}$ **biliner formunun sabiti** denir.

Örnek 2.4. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri için

$$\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + x_3 y_3 + 2x_2 y_1 + x_2 y_3 + 4x_3 y_1$$

biliner formu tanımlansın. Bu biliner formun standart tabana göre ilişkilendirilmiş matrisi

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \mathcal{B}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \mathcal{B}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & \mathcal{B}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ \mathcal{B}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & \mathcal{B}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & \mathcal{B}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ \mathcal{B}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) & \mathcal{B}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) & \mathcal{B}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklindedir. Buna göre, biliner form

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bilinear formun sabiti

$$\Delta = \sqrt{|\det A|} = \sqrt{3}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.5. $\mathbb{V}$ vektör uzayında tanımlı $\mathcal{B}$ bilinear formu ve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ vektörleri için

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

ise, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerine **$\mathcal{B}$ -ortogonal** denir.

Tanım 2.6. $\mathbb{V}$ vektör uzayında her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ vektörleri için $\mathcal{B}$ bilinear formu

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

koşulunu sağlıyorsa $\mathcal{B}$ bilinear formuna **simetrik bilinear form**;

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathcal{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

koşulunu sağlıyorsa $\mathcal{B}$ bilinear formuna **ters simetrik bilinear form** denir. Simetrik bilinear formların matrisleri simetrik, ters simetrik bilinear formların matrisleri de ters simetriktir.

Tanım 2.7. $\mathcal{B}$ bir bilinear form olmak üzere, her $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ vektörü için

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0,$$

ve bununla birlikte

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

ise $\mathcal{B}$ bilinear formuna **pozitif tanımlı form** denir. Diğer yandan, ilk koşulla birlikte,

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$$

sağlanıyor, ancak

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

sağlanmıyorsa $\mathcal{B}$ bilinear formuna **yarı pozitif tanımlı** denir.

Tanım 2.8. $\mathbb{V}$ vektör uzayında tanımlanmış $\mathcal{B}$ bilinear formunun ilişkilendirilmiş matrisi tersinir ise bu bilinear forma **nondejenere bilinear form**, nondejenere olmayan bilinear formlara da **dejenere bilinear form** denir. Buna göre, bir $\mathcal{B}$ nondejenere bilinear formunun ilişkilendirilmiş matrisi A ise $\det A \neq 0$ dır ve buradan her $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{V}$ vektörü için $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$ olacak şekilde bir $\mathbf{y} \in \mathbb{V}$ vektörü vardır, veya başka bir ifadeyle, her $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{V}$ vektörü için $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ eşitliği sadece $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ için sağlanır. O halde, nondejenere bilinear formlarda her vektöre ortogonal olan tek vektör sıfır $\mathbf{0}$ vektörüdür.

Tanım 2.9. $\mathbb{V}$ vektör uzayında tanımlanan $\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear formu, simetrik ve nondejenere ise, bu bilinear forma **skaler çarpım** denir. Üzerinde bir skaler çarpım tanımlı vektör uzayına da **skaler çarpım uzayı** denir ve $\mathbb{V}_{\mathcal{B}}$ ile gösterilir.

Örnek 2.10. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için tanımlanan

$$\begin{aligned} L & : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & = -x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \\ & = -x_1y_1 + \sum_{i=2}^n x_iy_i \end{aligned}$$

dönüşümünün bir skaler çarpım olduğu gösterilebilir. Bu dönüşüm bir bilinear formdur ve L bilinear formunun ilişkilendirilmiş matrisi $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ standart tabanına göre

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} \\ & = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{B}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \mathcal{B}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & \dots & \mathcal{B}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \mathcal{B}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & \mathcal{B}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & \dots & \mathcal{B}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{B}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \mathcal{B}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_2) & \dots & \mathcal{B}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde yazarak

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. L bilinear formunun simetrik olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca, $\det A = -1 \neq 0$ olduğundan L bilinear formu nondejenere dir. Sonuç olarak, L bir skaler çarpımdır ve bu skaler çarpıma $(-, +, \dots, +)$ işaretli Lorentz skaler çarpımı denir. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı Lorentz skaler çarpım uzayı $\mathbb{R}_1^n$ ile gösterilir. Özel olarak, $n = 3$ durumunda $(-, +, +)$ işaretli Lorentz skaler çarpımı

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

şeklindedir ve bu skaler çarpımla tanımlanmış skaler çarpım uzayına da üç boyutlu Lorentz skaler çarpım uzayı denir ve $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir.

Bir vektör uzayında iç çarpım tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.11. $\mathbb{V}$ vektör uzayında tanımlanan $\mathcal{B} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü, her $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}$ vektörleri ve her $a, b \in \mathbb{R}$ reel sayıları için

1. (Bilineerlik)

$$\mathcal{B}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b\mathcal{B}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{z}) = a\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

2. (Simetri)

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

3. (Pozitif tanımlılık)

$$\text{Her } \mathbf{x} \in \mathbb{V} \text{ için, } \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{B}$ dönüşümüne $\mathbb{V}$ vektör uzayında bir **iç çarpım** denir. Buradaki $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ değerine de $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin iç çarpımı denir. İç çarpım tanımlı bir vektör uzayına, **iç çarpım uzayı** denir. Ek olarak, bu tanımdaki ilk iki şartı sağlayıp "pozitif tanımlılık" şartındaki

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

yerine sadece

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$$

şartı kullanılarak tanımlanan dönüşüme **yarı (pseudo) iç çarpım** denir.

Bazı kaynaklarda skaler çarpım ile iç çarpım kavramları aynı anlamda kullanılmaktadır. Ancak, iç çarpımda pozitif tanımlılık varken skaler çarpımda yoktur, ayrıca skaler çarpım nondejenere bir bilineer form iken, iç çarpımda böyle bir kısıtlama yoktur. Bu çalışmada iç çarpım; simetrik, pozitif tanımlı bir bilineer form olarak ele alınmaktadır:

Örnek 2.12. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektörleri için tanımlanan

$$\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

dönüşümü bir iç çarpım belirtir. Bu iç çarpıma özel olarak Öklid iç çarpımı veya Öklidyen iç çarpım denir. Üzerinde Öklid iç çarpımı tanımlı $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid uzayı denir. Öklid iç çarpımında $\mathcal{B}$ sembolü yerine $\langle, \rangle$ sembolü kullanılır. Öklid iç çarpımının standart tabanla ilişkilendirilmiş matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

olarak bulunur. Öklid iç çarpımı için bilineer form sabiti $\Delta = \sqrt{|\det I_n|} = 1$ dir.

Tanım 2.13. $\mathbb{V}$ vektör uzayında verilen bir $\mathcal{B} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ skaler çarpımı için $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ kümesi bir $\mathcal{B}$ -ortogonal taban olsun. Yani

$$i \neq j \implies \mathcal{B}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$$

$$i = j \implies \mathcal{B}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \neq 0$$

koşulları sağlansın. $\mathcal{B}$ skaler çarpımının ilişkilendirilmiş matrisi

$$A = \text{diag}(\mathcal{B}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1), \mathcal{B}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2), \dots, \mathcal{B}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n))$$

ve skaler çarpım sabiti

$$\Delta = \sqrt{|\det A|} = \sqrt{\prod_{k=1}^n \mathcal{B}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k)}$$

olur. $\mathbb{V}_{\mathcal{B}}$ uzayında

$$\frac{\mathbf{e}_k}{(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k)}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$$

vektörleriyle oluşturulan $n \times n$ mertebeden matrisin determinantının Δ katına, yani

$$\Delta \det \left(\frac{\mathbf{e}_k}{(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k)}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1} \right)$$

değerine $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ vektörlerinin **vektörel çarpımı** denir ve $\mathbf{x}_1 \times_{\mathcal{B}} \mathbf{x}_2 \times_{\mathcal{B}} \dots \times_{\mathcal{B}} \mathbf{x}_{n-1}$ veya $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ ile gösterilir.

Bu çarpım determinant kullanılarak tanımlanabilir. Skaler çarpım uzayında $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ vektörlerin vektörel çarpımı; $\Delta = \sqrt{|\det A|}$ iç çarpım sabiti ve $i =$

$1, 2, \dots, (n-1)$ için $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathcal{B}} &: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) &\rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) = \mathbf{x}_1 \times_{\mathcal{B}} \mathbf{x}_2 \times_{\mathcal{B}} \dots \times_{\mathcal{B}} \mathbf{x}_{n-1} \\ \mathbf{x}_1 \times_{\mathcal{B}} \mathbf{x}_2 \times_{\mathcal{B}} \dots \times_{\mathcal{B}} \mathbf{x}_{n-1} &= \Delta \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{e}_1}{\mathcal{B}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)} & \frac{\mathbf{e}_2}{\mathcal{B}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} & \dots & \frac{\mathbf{e}_n}{\mathcal{B}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n)} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(n-1)1} & x_{(n-1)2} & \dots & x_{(n-1)n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

şeklindedir. $\mathbf{x}_1 \times_{\mathcal{B}} \mathbf{x}_2 \times_{\mathcal{B}} \dots \times_{\mathcal{B}} \mathbf{x}_{n-1}$ vektörü $i = 1, 2, \dots, n-1$ için $\mathbf{x}_i$ vektörlerine $\mathcal{B}$ -ortogonaldır.

Örnek 2.14. Her $i \in 1, 2, \dots, (n-1)$ için $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ vektörlerinin vektörel çarpımı;

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Öklid iç çarpımı ve bu iç çarpımın sabiti $\Delta = \sqrt{|\det A|} = 1$ göz önüne alınarak, $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ standart tabanına göre

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \times_{\mathcal{B}} \mathbf{x}_2 \times_{\mathcal{B}} \dots \times_{\mathcal{B}} \mathbf{x}_{n-1} &= \Delta \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{e}_1}{\mathcal{B}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)} & \frac{\mathbf{e}_2}{\mathcal{B}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} & \dots & \frac{\mathbf{e}_n}{\mathcal{B}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n)} \\ x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(n-1)1} & x_{(n-1)2} & \dots & x_{(n-1)n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \\ x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(n-1)1} & x_{(n-1)2} & \dots & x_{(n-1)n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu vektörel çarpıma **Öklid vektörel çarpım** denir.

Örnek 2.15. Üç boyutlu Lorentz uzayında, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_1^3$ için skaler çarpım

$$\mathcal{B}_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

şeklinde tanımlandığından, vektörel çarpım standart tabana göre

$$\mathbf{x} \times_L \mathbf{y} = \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.16. $\mathbb{V}$ vektör uzayı $\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı olsun. $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ şeklinde tanımlanan fonksiyon

1. (**Pozitif tanımlı**)

$$\begin{aligned} \text{Her } \mathbf{x} \in \mathbb{V} \text{ için } \|\mathbf{x}\| &\geq 0 \\ \|\mathbf{x}\| &= 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

2. (**Skalerin lineerliği**)

$$\text{Her } \mathbf{x} \in \mathbb{V} \text{ ve } \lambda \in \mathbb{R} \text{ için } \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$$

3. (**Üçgen eşitsizliği**)

$$\text{Her } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V} \text{ için } \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona **norm** denir. Üzerinde norm tanımlı vektör uzayına da **normlu uzay** denir. Bu tanımın pozitif tanımlılık şartındaki $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ şartı yerine sadece

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \|\mathbf{x}\| = 0$$

şartını sağlayan ve diğer tüm şartları sağlayan $\|\cdot\|$ fonksiyonuna **yarı (pseudo) norm** denir.

Tanım 2.17. Üzerinde $\mathcal{B}$ bilinear formu tanımlanmış $\mathbb{V}$ vektör uzayında her $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ için tanımlanan

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}} &: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}} &= \sqrt{|\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x})|} \end{aligned}$$

funksiyonuna $\mathbf{x}$ 'in $\mathcal{B}$ **bilineer formundan indirgenmiş normu** veya kısaca **normu** denir.

Üzerinde tanımlı $\mathcal{B}$ bilineer formuyla birlikte düşünülen bir $\mathbb{V}$ vektör uzayında bir vektörün normuyla $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}}$ kastedilir. $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}}$ fonksiyonunun bir norm olduğunu göstermek için Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılır. Cauchy-Schwartz eşitsizliği aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.18. *Eğer $\mathbb{V}$ bir iç çarpım uzayı ise, her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ için*

$$|\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}} \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{B}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ lineer bağımlıysa sağlanır.

Teorem 2.19. *$\mathbb{V}$ vektör uzayında tanımlı $\mathcal{B}$ bilineer formu için $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$*

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}} = \sqrt{|\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x})|}$$

fonksiyonu norm özelliklerini sağlar.

İspat $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}}$ fonksiyonunun norm özelliklerini sağladığı gösterilmelidir.

1. Her $\mathbf{x}$ için $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}} = \sqrt{\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \geq 0$ olduğu açıktır. $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}} = 0$ olsun, bu durumda $0 = \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ olduğundan $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ elde edilir. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ise $\sqrt{\mathcal{B}(\mathbf{0}, \mathbf{0})} = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}} = 0$ olur. Pozitif tanımlılık şartı sağlanır.

2. Her $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için doğrudan $\|\lambda\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}} = \sqrt{\mathcal{B}(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x})} = \sqrt{\lambda^2 \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = |\lambda| \sqrt{\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = |\lambda| \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}}$ olduğu görülür. Skalerin lineerliği sağlanır.

3. Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ için iç çarpım özellikleri ve Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{\mathcal{B}}^2 &= \mathcal{B}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{B}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}}^2 + 2\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{B}}^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}}^2 + 2\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}} \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{B}} + \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{B}}^2 \\ &= (\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}} + \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{B}})^2 \end{aligned}$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafı pozitif olduğundan karekök alınabilir ve

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{\mathcal{B}} \leq \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}} + \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{B}}$$

üçgen eşitsizliğini elde edilir.

Böylece $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}}$ fonksiyonunun bir norm olduğunu görülür. $\square$

Yukarıdaki teoreme göre, her iç çarpımdan bir norm tanımlanabilir ancak, her normdan $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}} = \sqrt{\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ olacak şekilde bir $\mathcal{B}$ iç çarpımı bulunamayabilir. Bir $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}}$ normundan $\mathcal{B}$ iç çarpımı

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{\mathcal{B}}^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathcal{B}}^2}{4}$$

şeklinde bulunur. Bu sonuç paralelkenar kanunu olarak bilinir. Bir iç çarpımdan elde edilebilen ve edilemeyen birer norm örneği aşağıda verilmiştir:

Örnek 2.20. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında her $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörü için

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

fonksiyonu bir norm belirtir. Bu norma Öklid normu, bu normla birlikte $\mathbb{R}^n$ vektör uzayına da n -boyutlu Öklid uzayı denir.

Örnek 2.21. $\mathbb{R}^2$ de her $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ vektörü için tanımlanan

$$\|\mathbf{x}\|_{\max} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

maksimum normundan $\|\mathbf{x}\|_{\max} = \sqrt{\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ şekilde bir iç çarpım elde edilemez. Bunu görmek için

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{\max}^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\max}^2}{4}$$

fonksiyonunun bir iç çarpım olmadığı ispatlanarak gösterilebilir: $\mathbf{x} = (1, 2)$ ve $\mathbf{y} = (2, 1)$ vektörleri için

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(2\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2$$

dir, dolayısıyla f lineer değildir. O halde tanımlanan fonksiyon bir iç çarpım değildir.

Tanım 2.22. $\mathbb{V}$ vektör uzayında tanımlı $\mathcal{B}$ bilinear formu için, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ vektörleri $\mathcal{B}$ -ortogonal ve $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}} = \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{B}} = 1$ ise $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerine **$\mathcal{B}$ -ortonormal vektörler** denir.

Örnek 2.23. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 3x_2y_1 + x_2y_3 + 4x_3y_1$$

bilinear formuna göre $\mathbf{x} = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{y} = (0, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$ vektörleri $\mathcal{B}$ -ortonormaldir.

Yansıma ve dönme dönüşümlerinin bilineer formla ilgili tanımları aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.24. Bir $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümünün matris tamsili L olsun. Bu L matrisinin determinanı pozitif ise $\mathcal{L}$ dönüşümüne **yönlendirmeyi koruyan dönüşüm** denir. L matrisinin determinanı negatif ise $\mathcal{L}$ dönüşümüne **ters yönlendirmeli dönüşüm** denir.

Tanım 2.25. Bir lineer dönüşüm iç çarpımı koruyor ise bu lineer dönüşüme **ortogonal dönüşüm** denir. İç çarpım korunduğu için buna bağlı olarak norm da korunur. $\mathcal{B}, \mathbb{R}^n$ uzayında tanımlı bir iç çarpım olsun. Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ve bir $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümü için

$$\mathcal{B}(\mathcal{L}(\mathbf{x}), \mathcal{L}(\mathbf{y})) = \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

eşitliği doğru ise $\mathcal{L}$ dönüşümüne $\mathcal{B}$ iç çarpımına göre **ortogonal dönüşüm** denir. Tüm ortogonal dönüşümler bileşke işlemi altında bir grup yapısı oluştururlar. Bu grup

$$O_{\mathcal{B}}(n) = \{\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \mathcal{B}(\mathcal{L}(\mathbf{x}), \mathcal{L}(\mathbf{y})) = \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\}$$

kümesi ile gösterilir. Bir $\mathcal{L}$ ortogonal dönüşümüne karşılık gelen matrise **ortogonal matris** veya **$\mathcal{B}$ -ortogonal matris** denir. Bir $\mathcal{L}$ ortogonal dönüşümüne karşılık gelen matris L ve $\mathcal{B}$ bilineer formunun ilişkili matrisi A olsun. Bu durumda

$$\mathcal{B}(\mathcal{L}(\mathbf{x}), \mathcal{L}(\mathbf{y})) = (L\mathbf{x})^t A L\mathbf{y} = \mathbf{x}^t L^t A L\mathbf{y}$$

ve

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{y}$$

eşitliklerinden

$$L \text{ matrisi } \mathcal{B}\text{-ortogonaldir} \iff L^t A L = A$$

gerek ve yeter şartı elde edilir. Determinantın özelliklerinden her ortogonal matris determinantının 1 veya -1 e eşit olduğu görülebilir. Ortogonal matrislerinin kümesi

$$O_{\mathcal{B}}(n) = \{L \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid L^t A L = A, \det L = \pm 1\}$$

şeklinde tanımlıdır. Bir ortogonal matrisin tüm sütunları veya tüm satırları kendi aralarında $\mathcal{B}$ -ortogonaldir.

Tanım 2.26. Yönlendirmeyi koruyan ve ortogonal olan dönüşümlere **dönme dönüşümü** denir. $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^n$ uzayında bir dönme dönüşümü, $\mathcal{B}$ -dönme dönüşümü olarak da ifade edilebilir. Dönme dönüşümleri kümesi bileşke işlemiyle bir grup oluşturur ve bu grup $R_{\mathcal{B}}(n)$ ile gösterilir.

$$R_{\mathcal{B}}(n) = \{ \mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \det L = 1, \mathcal{B}(\mathcal{L}(\mathbf{x}), \mathcal{L}(\mathbf{y})) = \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \}$$

Dönme dönüşümlerine karşılık gelen **dönme matrisleri kümesi**

$$R_{\mathcal{B}}(n) = \{ L \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid L^T A L = A, \det L = 1 \}$$

şeklinde gösterilir.

$R_{\mathcal{B}}(n)$ grubu $O_{\mathcal{B}}(n)$ grubunun bir alt grubudur.

Tanım 2.27. Ters yönlendirmeli olan ortogonal dönüşüme **yansıma dönüşümü** denir. $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^n$ uzayında bir yansıma dönüşümü, $\mathcal{B}$ -yansıma dönüşümü olarak da ifade edilebilir. Öklid uzayında $\mathcal{B}$ bilineer formuna göre tanımlanmış yansıma dönüşümleri kümesi

$$Y_{\mathcal{B}}(n) = \{ \mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \det L = -1, \mathcal{B}(\mathcal{L}(\mathbf{x}), \mathcal{L}(\mathbf{y})) = \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \}$$

şeklindedir.

Tanım 2.28. İki yansıma dönüşümünün bileşkesi bir dönme dönüşümü olduğundan $Y_{\mathcal{B}}(n)$ kümesi bileşke işlemine göre kapalı değildir. Bu yüzden $Y_{\mathcal{B}}(n)$ bir grup değildir. Yansıma dönüşümlerine karşılık gelen matrislerin oluşturduğu kümeye **yansıma matrisleri kümesi** denir ve

$$Y_{\mathcal{B}}(n) = \{ L \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid L^T A L = A, \det L = -1 \}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.29. Bir $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümü ve $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında tanımlı $\mathcal{B}$ bilineer dönüşümü alınsın. Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için $\mathcal{L}$ dönüşümü

$$\mathcal{B}(\mathcal{L}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathcal{L}(\mathbf{y}))$$

eşitliğini sağlıyorsa $\mathcal{L}$ lineer dönüşümüne $\mathcal{B}$ bilineer formuna göre **simetrik dönüşüm** veya **$\mathcal{B}$ -simetrik dönüşüm** denir. Elemanları simetrik dönüşüm olan küme bir Jordan cebiridir. Bu küme

$$\{ L \mid \mathcal{B}(L(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = \mathcal{B}(\mathbf{x}, L(\mathbf{y})), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \}$$

şeklinde gösterilir. Simetrik dönüşümlere karşılık gelen matrise **simetrik matris** veya $\mathcal{B}$ -**simetrik matris** denir. Bir L simetrik dönüşümüne karşılık gelen matris $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{B}$ bilineer formunun ilişkili matrisi A olsun. Bu durumda

$$\mathcal{B}(\mathcal{L}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (L\mathbf{x})^T A\mathbf{y} = \mathbf{x}^T L^T A\mathbf{y}$$

ve

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathcal{L}(\mathbf{y})) = \mathbf{x}^T A L\mathbf{y}$$

eşitliklerinden

$$L \text{ } \mathcal{B}\text{-simetrik matristir} \iff L^T A = A L$$

gerek ve yeterlilik şartı elde edilir.

Tanım 2.30. Bir $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümü ve $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında tanımlı bir $\mathcal{B}$ bilineer dönüşümü alınsın. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayındaki her $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri için $\mathcal{L}$ dönüşümü $\mathcal{B}(\mathcal{L}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = -\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathcal{L}(\mathbf{y}))$ eşitliğini sağlıyorsa $\mathcal{B}$ bilineer formuna göre $\mathcal{L}$ lineer dönüşümüne **ters simetrik dönüşüm** veya $\mathcal{B}$ -**ters simetrik dönüşüm** denir. Elemanları ters simetrik dönüşüm olan küme

$$\{\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \mathcal{B}(\mathcal{L}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = -\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathcal{L}(\mathbf{y})), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\}$$

ile gösterilir. Bu küme bir Lie cebiri örneğidir. Simetrik dönüşümlere karşılık gelen matrise **ters simetrik matrisler** veya $\mathcal{B}$ -**ters simetrik matris** denir. $\mathcal{L}$ ters simetrik dönüşümüne karşılık gelen matris L ve $\mathcal{B}$ bilineer formunun ilişkili matrisi A olsun. Bu durumda

$$\mathcal{B}(\mathcal{L}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (L\mathbf{x})^T A\mathbf{y} = \mathbf{x}^T L^T A\mathbf{y}$$

ve

$$-\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathcal{L}(\mathbf{y})) = -\mathbf{x}^T A L\mathbf{y}$$

eşitliklerinden

$$L \text{ bir } \mathcal{B}\text{-ters simetrik matristir} \iff L^T A = -A L$$

gerek ve yeterlilik şartı elde edilir.

2.2. İki ve Üç Boyutlu Genelleştirilmiş Ökliden İç Çarpım ve Vektörel Çarpım

Bu kısımda 2 ve 3 boyutlu genelleştirilmiş Öklid iç çarpım uzayıyla ilgili temel kavramlar verilmiştir.

2.2.1. Genelleştirilmiş Ökliden iç çarpım

İki boyutlu genelleştirilmiş Ökliden iç çarpım aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.31. $\mathbb{R}^2$ vektör uzayında $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ vektörleri için; reel girdili, $A + C > 0$ ve $\det \Omega > 0$ özelliklerine sahip

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

matrisiyle tanımlanan

$$\mathcal{B}_\Omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \Omega \mathbf{y} = Ax_1y_1 + B(x_1y_2 + x_2y_1) + Cx_2y_2$$

bilineer formuna **iki boyutlu genelleştirilmiş Ökliden iç çarpım** veya $\mathcal{B}_\Omega$ -iç çarpım denir.

$\mathcal{B}_\Omega$ -iç çarpımının sabiti

$$\Delta = \sqrt{|\det \Omega|} = \sqrt{AC - B^2}$$

dir. Bu iç çarpım ile birlikte $\mathbb{R}^2$ vektör uzayına **iki boyutlu genelleştirilmiş Ökliden iç çarpım uzayı** veya kısaca **iki boyutlu genelleştirilmiş Ökliden uzay** denir ve $\mathbb{R}_\Omega^2$ ile gösterilir (Çolakoğlu vd. 2023).

Tanım 2.32. $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ vektörünün normu

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_\Omega &= \sqrt{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \\ &= \sqrt{Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

$\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında birim çember

$$\begin{aligned} C &= \{\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}_\Omega^2 \mid \|\mathbf{x}\|_\Omega = 1\} \\ &= \{\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}_\Omega^2 \mid Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1\} \end{aligned}$$

kümesinin geometrik yeridir. Reel düzlemde bu kümenin geometrik yeri bir elips belirtir.

Tanım 2.33. $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri için

$$\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

ise $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri $\mathcal{B}_\Omega$ -ortogonaldir veya Ω -diktir denir. Birbirine Ω -dik ve Ω -normları 1 olan vektörlere Ω -ortonormal vektörler denir.

Tanım 2.34. $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayındaki herhangi iki $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri arasındaki açının Ω -ölçüsü

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|_\Omega \|\mathbf{y}\|_\Omega}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Bu tanımdan $\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|_\Omega \|\mathbf{y}\|_\Omega \cos \theta$ olduğu aşıkardır.

Örnek 2.35. $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında

$$\Omega = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

için $\mathbf{x} = (1, 2)$ ve $\mathbf{y} = (2, 1)$ vektörleri arasındaki dar açının Ω -ölçüsü

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\sqrt{30}}{6}$$

dir.

Üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.36. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri ve reel girdili, simetrik ve pozitif tanımlı

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}$$

matrisi için tanımlanan

$$\mathcal{B}_\Omega : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \Omega \mathbf{y}$$

$$= Ax_1y_1 + Bx_2y_2 + Cx_3y_3 + D(x_1y_2 + x_2y_1) + E(x_1y_3 + x_3y_1) + F(x_2y_3 + y_2x_3)$$

dönüşümüne üç boyutlu **genelleştirilmiş Ökliden iç çarpım** veya $\mathcal{B}_\Omega$ -iç çarpım denir. Bu iç çarpım ile birlikte $\mathbb{R}^3$ vektör uzayına **üç boyutlu genelleştirilmiş Ökliden iç çarpım uzayı** veya kısaca **üç boyutlu genelleştirilmiş Ökliden uzay** denir ve $\mathbb{R}_\Omega^3$ ile gösterilir. $\mathcal{B}_\Omega$ -iç çarpımının sabiti

$$\Delta = \sqrt{\det \Omega} = \sqrt{ABC + 2FDE - AF^2 - CD^2 - BE^2}$$

dir.

Tanım 2.37. $\mathbb{R}_\Omega^3$ uzayında bir $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vektörünün Ω -normu

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_\Omega &= \sqrt{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \\ &= \sqrt{Ax_1 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Dx_1x_2 + 2Ex_1x_3 + Fx_2x_3} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.38. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında

$$\Omega = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisiyle tanımlanan $\mathcal{B}_\Omega$ -iç çarpıma göre $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$ vektörünün Ω -normu $\|\mathbf{x}\|_\Omega = \sqrt{5}$ olarak bulunur.

$\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında birim küre

$$\begin{aligned} S &= \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}_\Omega^3 \mid \|\mathbf{x}\|_\Omega = 1\} \\ &= \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}_\Omega^3 \mid Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + Fyz = 1\} \end{aligned}$$

kümesidir. Bu küme, üç boyutlu Öklid uzayında bir elipsoid yüzeyi belirtir.

Tanım 2.39. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri için

$$\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

ise $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri Ω -ortogonaldir veya Ω -diktir denir. Birbirine Ω -dik ve Ω -normları 1 olan vektörlere Ω -ortonormal vektörler denir.

Tanım 2.40. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayındaki herhangi iki $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri arasındaki açının Ω -ölçüsü

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|_\Omega \|\mathbf{y}\|_\Omega}$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Benzer şekilde, $\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|_\Omega \|\mathbf{y}\|_\Omega \cos \theta$ olduğu aşıkardır.

Örnek 2.41. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayı,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

için tanımlansın. $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$ ve $\mathbf{y} = (1, 0, 1)$ vektörleri arasındaki açının Ω -ölçüsü θ ise,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|_\Omega \|\mathbf{y}\|_\Omega} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin Ω -dik olduğu görülür.

2.2.2. Genelleştirilmiş Öklidyen vektörel çarpım

Bu kısımda $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında ters simetrik matrisler yardımıyla genelleştirilmiş Öklid vektörel çarpımı tanımlanmıştır. Bir T matrisinin Ω -ters simetrik matrisi olması için gerek ve yeter koşulun $T^t \Omega = -\Omega T$ olduğu ilk kısımda gösterilmiştir. Aşağıda $\mathbb{R}_\Omega^3$ uzayında Ω -ters simetrik matrisler belirlenmiştir:

Teorem 2.42. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında Ω -ters simetrik matrisler; $\Delta = \sqrt{\det \Omega}$ ve $\lambda, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$T = \lambda \begin{bmatrix} \frac{(EF-CD)x_3 - (DF-BE)x_2}{\Delta} & \frac{(DF-BE)x_1 - (BC-F^2)x_3}{\Delta} & \frac{(BC-F^2)x_2 - (EF-CD)x_1}{\Delta} \\ \frac{(AC-E^2)x_3 - (DE-AF)x_2}{\Delta} & \frac{(DE-AF)x_1 - (EF-CD)x_3}{\Delta} & \frac{(EF-CD)x_2 - (AC-E^2)x_1}{\Delta} \\ \frac{(DE-AF)x_3 - (AB-D^2)x_2}{\Delta} & \frac{(AB-D^2)x_1 - (DF-BE)x_3}{\Delta} & \frac{(DF-BE)x_2 - (DE-AF)x_1}{\Delta} \end{bmatrix}$$

formundadır.

İspat Ω -ters simetrik T matrisi

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

şeklinde olsun. T matrisi $T\Omega = -\Omega T$ eşitliğini sağlayacağından

$$Ax_{11} + Dx_{21} + Ex_{31} = 0$$

$$Bx_{22} + Fx_{32} + Dx_{12} = 0$$

$$Cx_{33} + Fx_{23} + Ex_{13} = 0$$

$$Ax_{12} + Bx_{21} + Fx_{31} + Dx_{11} + Dx_{22} + Ex_{32} = 0$$

$$Ax_{13} + Cx_{31} + Fx_{21} + Ex_{11} + Dx_{23} + Ex_{33} = 0$$

$$Bx_{23} + Cx_{32} + Fx_{22} + Fx_{33} + Dx_{13} + Ex_{12} = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi 9 bilinmeyen ve 6 denklemden oluşur.

Denklem sistemini çözebilmek için

$$u_1 = Ex_{12} + Fx_{22} + Cx_{32} = -Fx_{33} - Dx_{13} - Bx_{23}$$

$$u_2 = Ax_{13} + Dx_{23} + Ex_{33} = -Ex_{11} - Fx_{21} - Cx_{31}$$

$$u_3 = Dx_{11} + Bx_{21} + Fx_{31} = -Ax_{12} - Dx_{22} - Ex_{32}$$

değişken değiştirmeleriyle, katsayı matrisleri Ω olan

$$Ax_{11} + Dx_{21} + Ex_{31} = 0$$

$$Dx_{11} + Bx_{21} + Fx_{31} = u_3$$

$$Fx_{11} + Ex_{21} + Cx_{31} = -u_2$$

$$Ax_{12} + Dx_{22} + Ex_{32} = -u_3$$

$$Dx_{12} + Bx_{22} + Fx_{32} = 0$$

$$Fx_{12} + Ex_{22} + Cx_{32} = u_1$$

$$Ax_{13} + Dx_{23} + Ex_{33} = u_2$$

$$Dx_{13} + Bx_{23} + Fx_{33} = -u_1$$

$$Ex_{13} + Fx_{23} + Cx_{33} = 0$$

denklem sistemleri elde edilir. Cramer yöntemiyle her bir denklem sisteminin çözümünden istenilen matris elde edilir. $\square$

T matrisi her $\lambda \in \mathbb{R}$ için bir Ω -ters simetrik matristir. Elde edilen matrisin genelleştirilmiş Öklidyen vektörel çarpımına uygun olması için $\lambda = \Delta = \sqrt{\det \Omega}$ alınmalıdır. Bundan sonra, Ω -ters simetrik T matrisi olarak

$$\begin{bmatrix} (EF-CD)x_3-(DF-BE)x_2 & (DF-BE)x_1-(BC-F^2)x_3 & (BC-F^2)x_2-(EF-CD)x_1 \\ (AC-E^2)x_3-(DE-AF)x_2 & (DE-AF)x_1-(EF-CD)x_3 & (EF-CD)x_2-(AC-E^2)x_1 \\ (DE-AF)x_3-(AB-D^2)x_2 & (AB-D^2)x_1-(DF-BE)x_3 & (DF-BE)x_2-(DE-AF)x_1 \end{bmatrix}$$

ya da kısaca, $\Delta = \sqrt{\det \Omega}$, $\Delta_1 = (AB - D^2)/\Delta$, $\Delta_2 = (AC - E^2)/\Delta$, $\Delta_3 = (BC - F^2)/\Delta$, $\Delta_4 = (DE - AF)/\Delta$, $\Delta_5 = (DF - BE)/\Delta$ ve $\Delta_6 = (EF - CD)/\Delta$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \Delta_6 x_3 - \Delta_5 x_2 & \Delta_5 x_1 - \Delta_3 x_3 & \Delta_3 x_2 - \Delta_6 x_1 \\ \Delta_2 x_3 - \Delta_4 x_2 & \Delta_4 x_1 - \Delta_6 x_3 & \Delta_6 x_2 - \Delta_2 x_1 \\ \Delta_4 x_3 - \Delta_1 x_2 & \Delta_1 x_1 - \Delta_5 x_3 & \Delta_5 x_2 - \Delta_4 x_1 \end{bmatrix}$$

matrisi kullanılacaktır.

Tanım 2.43. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\Delta = \sqrt{\det \Omega}$, $\Delta_1 = (AB - D^2)/\Delta$, $\Delta_2 = (AC - E^2)/\Delta$, $\Delta_3 = (BC - F^2)/\Delta$, $\Delta_4 = (DE - AF)/\Delta$, $\Delta_5 = (DF - BE)/\Delta$ ve $\Delta_6 = (EF - CD)/\Delta$ olmak üzere, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri için

$$\times_\Omega : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \Delta_6 x_3 - \Delta_5 x_2 & \Delta_5 x_1 - \Delta_3 x_3 & \Delta_3 x_2 - \Delta_6 x_1 \\ \Delta_2 x_3 - \Delta_4 x_2 & \Delta_4 x_1 - \Delta_6 x_3 & \Delta_6 x_2 - \Delta_2 x_1 \\ \Delta_4 x_3 - \Delta_1 x_2 & \Delta_1 x_1 - \Delta_5 x_3 & \Delta_5 x_2 - \Delta_4 x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Delta_3 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \Delta_6 (x_3 y_1 - x_1 y_3) + \Delta_5 (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ \Delta_6 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \Delta_2 (x_3 y_1 - x_1 y_3) + \Delta_4 (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ \Delta_5 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \Delta_4 (x_3 y_1 - x_1 y_3) + \Delta_1 (x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\times_\Omega$ dönüşümüne **genelleştirilmiş Öklidyen vektörel çarpım** veya Ω -**vektörel çarpım** denir.

Genelleştirilmiş Öklidyen vektörel çarpım, determinant yardımıyla; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ standart taban vektörlerini göstermek üzere, kısalığı sağlamak için $\hat{\mathbf{i}} = \Delta_3 \mathbf{i} + \Delta_6 \mathbf{j} + \Delta_5 \mathbf{k}$, $\hat{\mathbf{j}} = \Delta_6 \mathbf{i} + \Delta_2 \mathbf{j} + \Delta_4 \mathbf{k}$ ve $\hat{\mathbf{k}} = \Delta_5 \mathbf{i} + \Delta_4 \mathbf{j} + \Delta_1 \mathbf{k}$ alınarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times_{\Omega} \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{i}}(x_2 y_3 - x_3 y_2) + \hat{\mathbf{j}}(x_3 y_1 - x_1 y_3) + \hat{\mathbf{k}}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Dikkat edilirse, genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım yerine Öklid iç çarpımı göz önüne alındığında $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1$, $\Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0$ olur. Bu durumda $\hat{\mathbf{i}} = \mathbf{i}$, $\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{j}$ ve $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}$ olduğundan Öklid vektörel çarpımı

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 2.44. $\mathbb{R}_{\Omega}^3$ iç çarpım uzayı

$$\Omega = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisiyle tanımlı olsun. O halde, $\Delta = 3$, $\Delta_1 = \frac{35}{3}$, $\Delta_2 = \frac{2}{3}$, $\Delta_3 = 6$, $\Delta_4 = \frac{4}{3}$, $\Delta_5 = 8$, $\Delta_6 = 1$ olarak bulunur. Bu durumda $\hat{\mathbf{i}} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{4}{3}\mathbf{k}$ ve $\hat{\mathbf{k}} = 8\mathbf{i} + \frac{4}{3}\mathbf{j} + \frac{35}{3}\mathbf{k}$ için Ω -vektörel çarpım

$$\mathbf{x} \times_{\Omega} \mathbf{y} = \begin{vmatrix} 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k} & \mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{4}{3}\mathbf{k} & 8\mathbf{i} + \frac{4}{3}\mathbf{j} + \frac{35}{3}\mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Örneğin, $\mathbf{x} = (1, 2, 1)$ ve $\mathbf{y} = (2, 1, 1)$ vektörlerinin Ω -vektörel çarpımı

$$\mathbf{x} \times_{\Omega} \mathbf{y} = \left(-17, -\frac{7}{3}, -\frac{77}{3} \right)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca iç çarpım tanımından $\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x} \times_{\Omega} \mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$ ve $\mathcal{B}(\mathbf{x} \times_{\Omega} \mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$ eşitliklerinin doğru olduğu görülebilir.

2.3. Genelleştirilmiş Eliptik Kuaterniyonlar

Hamilton kuaterniyonları, üç boyutlu Öklidyen uzayda dönme ve yansıma dönüşümlerini elde etmek için kullanılmaktadır. Bu dönüşümler küre üzerinde gerçekleşir. Üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen uzayında küre bir elipsoiddir. Elipsoid üzerinde gerçekleşen dönmeleri incelemek için genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım ve vektörel çarpım kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlar kullanılacaktır. Literatürde kuaterniyonların farklı genelleştirilmeleri mevcuttur. (Özdemir 2016) çalışmasında ilişkili matrisi $diag(a_1, a_2, a_3)$ olan iç çarpımla elde edilen eliptik kuaterniyonlar tanımlanmıştır. (Çolakoğlu ve Özdemir 2023a) çalışmasında, bu kuaterniyonlar daha da genelleştirilmiş ve genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlar elde edilmiştir. Reel girdili pozitif tanımlı ve simetrik Ω matrisinden genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlar aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.45. *Reel girdili pozitif tanımlı simetrik matris*

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}$$

ve bu matrisin girdileriyle tanımlanan $\Delta = \sqrt{\det \Omega}$, $\Delta_1 = (AB - D^2)/\Delta$, $\Delta_2 = (AC - E^2)/\Delta$, $\Delta_3 = (BC - F^2)/\Delta$, $\Delta_4 = (DE - AF)/\Delta$, $\Delta_5 = (DF - BE)/\Delta$, $\Delta_6 = (EF - CD)/\Delta$ değerleri için;

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 &= -A, \mathbf{j}^2 = -B, \mathbf{k}^2 = -C \\ \mathbf{ij} &= -D + \Delta_5 \mathbf{i} + \Delta_4 \mathbf{j} + \Delta_1 \mathbf{k} \\ \mathbf{ji} &= -D - \Delta_5 \mathbf{i} - \Delta_4 \mathbf{j} - \Delta_1 \mathbf{k} \\ \mathbf{jk} &= -F + \Delta_3 \mathbf{i} + \Delta_6 \mathbf{j} + \Delta_5 \mathbf{k} \\ \mathbf{kj} &= -F - \Delta_3 \mathbf{i} - \Delta_6 \mathbf{j} - \Delta_5 \mathbf{k} \\ \mathbf{ki} &= -E + \Delta_6 \mathbf{i} + \Delta_2 \mathbf{j} + \Delta_4 \mathbf{k} \\ \mathbf{ik} &= -E - \Delta_6 \mathbf{i} - \Delta_2 \mathbf{j} - \Delta_4 \mathbf{k} \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ve $\mathbf{k}$ temel elemanlarıyla tanımlanan

$$\mathbb{H}_\Omega = \{q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

kümesinin her bir elemanına bir **genelleştirilmiş eliptik kuaterniyon** veya Ω -**kuaterniyon** denir. $\mathbb{H}_\Omega$ kümesi değişmeli olmayan bir bölüm halkasıdır. Dikkat edilirse, bu tanımda $A = B = C = 1, D = E = F = 0$ alındığında $\Delta = \Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_2, \Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0$ ve

$$i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1$$

$$ij = k, ji = -k$$

$$jk = i, kj = -i$$

$$ki = j, ik = -j$$

bulunur; böylece standart Hamilton kuaterniyon kümesi elde edilir.

Genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlarda temel elamların çarpım tablosu

.	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	$-A$	$-D + \Delta_5 i + \Delta_4 j + \Delta_1 k$	$-E - \Delta_6 i - \Delta_2 j - \Delta_4 k$
j	j	$-D - \Delta_5 i - \Delta_4 j - \Delta_1 k$	$-B$	$-F + \Delta_3 i + \Delta_6 j + \Delta_5 k$
k	k	$-E + \Delta_6 i + \Delta_2 j + \Delta_4 k$	$-F - \Delta_3 i - \Delta_6 j - \Delta_5 k$	$-C$

şeklindedir.

Örnek 2.46. Reel girdili simetrik pozitif tanımlı

$$\Omega = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisiyle tanımlanan genelleştirilmiş eliptik kuaterniyon kümesinde çarpım tablosu, $\Delta = 3, \Delta_1 = \frac{35}{3}, \Delta_2 = \frac{2}{3}, \Delta_3 = 6, \Delta_4 = \frac{4}{3}, \Delta_5 = 8, \Delta_6 = 1$ olduğundan,

.	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-6	$1 + 8i + \frac{4}{3}j + \frac{35}{3}k$	$4 - i - \frac{2}{3}j - \frac{4}{3}k$
j	j	$1 - 8i - \frac{4}{3}j - \frac{35}{3}k$	-6	$6i + j + 8k$
k	k	$4 + i + \frac{2}{3}j + \frac{4}{3}k$	$-6i - j - 8k$	-3

şeklinde elde edilir. Bu çarpım tablosu kullanılarak, $q = 1 - \mathbf{i} + \mathbf{k}$ ve $p = 1 + \mathbf{i} - \mathbf{j}$ genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned} qp &= (1 - \mathbf{i} + \mathbf{k})(1 + \mathbf{i} - \mathbf{j}) \\ &= 1 + \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{i} - \mathbf{i}^2 + \mathbf{ij} + \mathbf{k} + \mathbf{ki} - \mathbf{kj} \\ &= 12 + 15\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 22\mathbf{k} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.47. Herhangi bir $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonu, $s_q = q_0$ ve $\mathbf{v}_q = (q_1, q_2, q_3)$ olmak üzere $q = s_q + \mathbf{v}_q$ şeklinde yazılabilir. $q = s_q + \mathbf{v}_q$ yazılışında $s_q \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{v}_q \in \mathbb{R}^3$ elemanlarına, sırasıyla, q genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonunun **skaler kısmı** ve **vektörel kısmı** denir. Skaler kısmı sıfıra eşit olan genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonların oluşturduğu kümeye **genelleştirilmiş eliptik pür kuaterniyonlar kümesi** denir. Genelleştirilmiş eliptik pür kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{H}_\Omega^0$ ile gösterilir.

Genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonların çarpım tablosu $\mathcal{B}_\Omega$ -iç çarpım ve $\mathcal{B}_\Omega$ -vektörel çarpımı kullanılarak elde edilmiştir:

Tanım 2.48. Herhangi bir $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = s_q + \mathbf{v}_q$ ve $p = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} = s_p + \mathbf{v}_p$ genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlarının çarpımı $\mathcal{B}_\Omega$ -iç çarpım ve $\mathcal{B}_\Omega$ -vektörel çarpımı ile

$$qp = s_q s_p - \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{v}_q, \mathbf{v}_p) + s_q \mathbf{v}_p + s_p \mathbf{v}_q + \mathbf{v}_q \times_\Omega \mathbf{v}_p$$

şeklinde tanımlanır. İki pür q ve p genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlarının çarpımı da

$$qp = -\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{v}_q, \mathbf{v}_p) + \mathbf{v}_q \times_\Omega \mathbf{v}_p$$

dir.

Örnek 2.49. Reel girdili, pozitif tanımlı ve simetrik matris

$$\Omega = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ile tanımlanan genelleştirilmiş eliptik kuaterniyon kümesinde, $q = 1 - \mathbf{i} + \mathbf{k}$ ve $p = 1 + \mathbf{i} - \mathbf{j}$ kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned} qp &= \mathbf{s}_q \mathbf{s}_p - \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{v}_q, \mathbf{v}_p) + s_q \mathbf{v}_p + s_p \mathbf{v}_q + \mathbf{v}_q \times_\Omega \mathbf{v}_p \\ &= 12 + 15\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 22\mathbf{k} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlarda çarpma işlemi değişmeli olmadığından çarpma için sağdan ve soldan çarpım matrisi verilebilir. Yapılan işlemler sonucunda bu matrisler aşağıdaki gibi elde edilir:

Teorem 2.50. p ve q genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlarının sağdan ve soldan çarpım matrisleri, sırasıyla

$$R_p(q) = qp = \begin{bmatrix} p_0 & -(Ap_1 + Dp_2 + Ep_3) & -(Dp_1 + Bp_2 + Fp_3) & -(Ep_1 + Fp_2 + Cp_3) \\ p_1 & p_0 + p_2\Delta_5 - p_3\Delta_6 & p_3\Delta_3 - p_1\Delta_5 & p_1\Delta_6 - p_2\Delta_3 \\ p_2 & p_2\Delta_4 - p_3\Delta_2 & p_0 + p_3\Delta_6 - p_1\Delta_4 & p_1\Delta_2 - p_2\Delta_6 \\ p_3 & p_2\Delta_1 - p_3\Delta_4 & p_3\Delta_5 - p_1\Delta_1 & p_0 + p_1\Delta_4 - p_2\Delta_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

ve

$$L_p(q) = pq = \begin{bmatrix} p_0 & -(Ap_1 + Dp_2 + Ep_3) & -(Dp_1 + Bp_2 + Fp_3) & -(Ep_1 + Fp_2 + Cp_3) \\ p_1 & p_0 + p_3\Delta_6 - p_2\Delta_5 & p_1\Delta_5 - p_3\Delta_3 & p_2\Delta_3 - p_1\Delta_6 \\ p_2 & p_3\Delta_2 - p_2\Delta_4 & p_0 + p_1\Delta_4 - p_3\Delta_6 & p_2\Delta_6 - p_1\Delta_2 \\ p_3 & p_3\Delta_4 - p_2\Delta_1 & p_1\Delta_1 - p_3\Delta_5 & p_0 + p_2\Delta_5 - p_1\Delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Bu matrisler yardımıyla $L_p R_q = R_q L_p$ olduğu gösterilebilir. Buradan hareketle p , q ve r genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonları için

$$(pq)r = R_r(L_p(q)) \text{ ve } p(qr) = L_p(R_r(q))$$

yazılabilir. Ayrıca $L_p R_r = R_r L_p$ olduğundan

$$(pq)r = p(qr) = pqr$$

eşitliği gösterilmiş olur. Yani genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlar çarpımının birleşme özelliği vardır. Genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlarda eşlenik ve norm tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.51. Bir $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = s_q + \mathbf{v}_q$ genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonu için tanımlanan

$$\bar{q} = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k} = s_q - \mathbf{v}_q$$

kuaterniyonuna, q nun **eşleniği** denir. Verilen p ve q genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonu için

$$\overline{pq} = \overline{qp}$$

olduğu görülebilir.

Tanım 2.52. Bir $q = s_q + \mathbf{v}_q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonu için tanımlanan

$$\begin{aligned} N_q &= \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{q_0^2 + Aq_1^2 + Bq_2^2 + Cq_3^2 + 2Dq_1q_2 + 2Eq_1q_3 + 2Fq_2q_3} \\ &= \sqrt{q_0^2 + \|\mathbf{v}_q\|_\Omega^2} \end{aligned}$$

pozitif reel sayısına q genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonunun **normu** denir. Normu 1'e eşit olan genelleştirilmiş eliptik kuaterniyona, **birim genelleştirilmiş eliptik kuaterniyon** denir.

Kolayca görülebileceği üzere, $q\bar{q} = \bar{q}q = q_0^2 + \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{v}_q, \mathbf{v}_q)$ eşitliği doğrudur.

Teorem 2.53. p ve q genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonları için

$$N_{pq} = N_p N_q$$

dir.

İspat Doğrudan hesaplamalarla

$$N_{pq}^2 = pq\bar{p}\bar{q} = pq\bar{q}\bar{p} = pN_q^2\bar{p} = p\bar{p}N_q^2 = N_p^2N_q^2$$

olduğu görülür. □

Tanım 2.54. Bir $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = s_q + \mathbf{v}_q$ genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonu için tanımlanan

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N_q^2} = \frac{q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}}{q_0^2 + Aq_1^2 + Bq_2^2 + Cq_3^2 + 2Dq_1q_2 + 2Eq_1q_3 + 2Fq_2q_3}$$

kuaterniyonuna q nun **tersi** denir. Ayrıca bir q birim genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonunun tersi

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N_q^2} = \bar{q}$$

dir.

Kompleks sayılar ve Hamilton kuaterniyonlarında olduğu gibi, genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlar için de kutupsal form tanımlanabilir. Bunun için öncelikle, bir $q = s + \mathbf{v}$ birim genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonu için $q = \cos \theta + \mathbf{v}' \sin \theta$ olacak şekilde $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^3$ vektörü ve $\theta \in (-\pi, \pi]$ reel sayısının var olduğunu gösterilmelidir. $q = 1$ olursa $\theta = 0$ ve $\mathbf{v}'$ vektörü herhangi bir birim vektör seçilebilir. Eğer $q \neq 1$ ise $k = |v|$ ve $\mathbf{v}' = \frac{1}{k}v$ olsun. Bu durumda $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^3$ birim vektörü için $v = k\mathbf{v}'$ olur. q bir birim genelleştirilmiş eliptik kuaterniyon olduğundan,

$$1 = N_q = s^2 + \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = s^2 + k^2 \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{v}', \mathbf{v}') = s^2 + k^2$$

hesaplamalarından, düzlemde bir daireyi tanımlayan $s^2 + k^2 = 1$ denklemi elde edilir. Bir daire $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ denklemiyle de tanımlanabildiğinden $s = \cos \theta$ ve $k = \sin \theta$ olacak şekilde $\theta \in (-\pi, \pi]$ vardır. Sonuç olarak, istenen $q = s + \mathbf{v} = s + k\mathbf{v}' = \cos \theta + \mathbf{v}' \sin \theta$ eşitliğini elde edilir. Birim olmayan genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonun kutupsal formu aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.55. Bir $q = s_q + \mathbf{v}_q$ genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonu için kutupsal form, $\cos \theta = \frac{q_0}{N_q}$, $\sin \theta = \frac{\|\mathbf{v}_q\|_\Omega}{N_q}$ ve $\varepsilon = \frac{\mathbf{v}_q}{\|\mathbf{v}_q\|_\Omega}$ olmak üzere

$$q = N_q (\cos \theta + \varepsilon \sin \theta)$$

şeklindedir. Kutupsal formdaki ε genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonu $\varepsilon^2 = -1$ eşitliğini sağlar. Birim genelleştirilmiş eliptik q kuaterniyonu için kutupsal form

$$q = \cos \theta + \varepsilon \sin \theta$$

şeklindedir.

Örnek 2.56. Bir $q = 1 + 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonu

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

için $N_q = \sqrt{14}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{14}}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}}$, ve $\varepsilon = \frac{(2,1,1)}{\sqrt{13}}$ bulunur. Buna göre, $q = 1 + 2i + j + k$ genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonunun kutupsal formu

$$q = \cos \theta + \frac{(2, 1, 1)}{\sqrt{13}} \sin \theta$$

şeklindedir. $\varepsilon^2 = -1$ olduğu görülür.

2.4. İki ve Üç Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen Uzaylarda Dönme Dönüşümü

Dönme dönüşümü yönlendirmeyi ve uzaklıkları koruyan bir lineer dönüşümdür. Böyle bir dönüşümün bir matrisle ifade edilebileceği aşıkardır. Bu kısımda, iki ve üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzaylarında dönme matrisleri verilecektir. Bir dönme matrisi elde etmenin çeşitli yöntemleri vardır. Bu matrisler genel olarak ortogonal ve ters simetrik matrisler yardımıyla elde edilir. Bu çalışmada; Rodrigues formülü, Cayley dönüşümü, Householder dönüşümü ve sadece üç boyutlu uzay için birim kuaterniyonlar kullanılarak dönme matrislerinin elde edilişi verilmiştir.

Yukarıda listelenen yöntemler kullanarak dönme matrilerinin elde edilişi üzerine birçok çalışma mevcuttur. Bu konuda yapılan çalışmalar, pozitif tanımlı $diag(a_1, a_2, a_3)$ matrisleriyle tanımlanan üç boyutlu skaler çarpım uzaylarında dönme ve yansıma dönüşümünün incelenmesidir. Bu uzaylarda dönmeler geometrik olarak standart denkleme sahip elipsoid yüzeyi ve standart denkleme sahip eliptik hiperboloid yüzeyi üzerinde gerçekleşir.

2.5. İki Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen Uzayda Dönme Dönüşümü

$\mathcal{B}_\Omega$ -iç çarpımıyla tanımlanan $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında çemberler Öklidyen anlamda birer elipstir. Çünkü, $\mathbb{R}_\Omega^2$ de $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ için

$$\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Ax_1y_1 + B(x_1y_2 + x_2y_1) + Cx_2y_2$$

iç çarpımı kullanılırsa, $\mathbf{x} = (x, y)$ için, $\sqrt{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \|\mathbf{x}\|_\Omega = r$ denkleminde sahip olan r yarıçaplı çemberin denkleminin

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = r^2$$

olduğu görülür ki bu denklem, Ω nın özellikleri dolayısıyla bir elips belirtir. Bu çemberlere $\mathcal{B}_\Omega$ -çember de denebilir. Verilen

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

koniği

$$\frac{\partial f}{\partial x}(h, k) = 0 \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial y}(h, k) = 0$$

olacak şekilde $(-h, -k)$ vektörüyle ötelenirse

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + f(h, k) = 0$$

denklemini bulunur. Bu denklem

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

için $\mathbb{R}_\otimes^2$ iç çarpım uzayında merkezi orijin ve yarıçapı $r = \sqrt{-f(h, k)}$ olan $\mathcal{B}_\Omega$ -çemberin denklemidir. Dolayısıyla, verilen her elipsi çember kabul eden bir $\mathcal{B}_\Omega$ -iç çarpımı vardır.

Bu kısımda, Öklidyen dönme dönüşümüne benzer olarak, genelleştirilmiş Öklidyen dönme dönüşümü ele alınacaktır. Bu dönüşüm iki boyut için, yalnızca bir noktayı sabit bırakan ve noktalar arası Ω -uzaklıkları değiştirmeyen bir dönüşüm olacaktır. Ayrıca, sabit nokta haricindeki her bir nokta bir elips (Ω -çember) etrafında hareket eder. Noktaların hareketleri bir elips üzerinde olacağından bu dönüşüme eliptik dönme dönüşümü denmektedir. Bu dönüşüm, $\mathbb{R}_\Omega^2$ uzayının bir izometrisidir ve (Çolakoğlu vd. 2023) çalışmasında tanıtılmış; Rodrigues, Cayley ve Householder yöntemleri kullanılarak incellenmiştir.

2.5.1. Rodrigues formülü kullanılarak

Bir A ters simetrik matrisiyle elde edilen $e^{\theta A}$ ifadesi bir dönme matrisi verir. Bu yöntemle elde edilen formül Rodrigues formülü olarak bilinir. Rodrigues formülü dönme matrisleri üretmek için kullanışlı bir yöntemdir. Bu kısımda Ω -ters simetrik matrisleri kullanarak $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında dönme matrisleri verilecektir. T matrisinin Ω -ters simetrik matris olması için gerek ve yeter şart $T^t \Omega = -\Omega T$ eşitliğinin sağlanmasıdır. İlk olarak, $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında Ω -ters simetrik matrislerini verelim.

Teorem 2.57. $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında Ω -ters simetrik matrisler $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$T = \lambda \begin{bmatrix} -B & -C \\ A & B \end{bmatrix}$$

formundadır. (Çolakoğlu vd. 2023)

İspat Verilen

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$$

matrisi Ω -ters simetrik matris olsun. Bu durumda $T^t \Omega = -\Omega T$ olduğundan

$$\begin{bmatrix} 2Bt_{21} + 2At_{11} & Bt_{11} + Bt_{22} + At_{12} + Ct_{21} \\ Bt_{11} + Bt_{22} + At_{12} + Ct_{21} & 2Bt_{12} + 2Ct_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Elde edilen

$$Bt_{21} + At_{11} = 0$$

$$Bt_{12} + Ct_{22} = 0$$

$$Bt_{11} + Bt_{22} + At_{12} + Ct_{21} = 0$$

denklem sistemini düzenleyelim. $\lambda \in \mathbb{R}$ için $t_{21} = \lambda A$ ise $t_{11} = -\lambda B$ olur. Denklem sisteminde yerine yazılırsa yeni denklem sistemi

$$Bt_{12} + Ct_{22} = 0$$

$$Bt_{12} + At_{22} = \lambda (B^2 - AC)$$

bulunur. Son denklem sisteminde $t_{12} = -C\lambda$ ve $t_{22} = B\lambda$ elde edilir. Böylece istenen matris elde edilir. $\square$

$\mathcal{B}_\Omega$ -dönme matrisi elde edebilmek için $\lambda = \frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}$ alınacaktır. Bundan sonra Ω -ters simetrik matrisleri

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{B}{\sqrt{AC-B^2}} & -\frac{C}{\sqrt{AC-B^2}} \\ \frac{A}{\sqrt{AC-B^2}} & \frac{B}{\sqrt{AC-B^2}} \end{bmatrix}$$

şeklinde kullanılacaktır. Elde edilen T matrisleri $T^t \Omega = -\Omega T$ gerek ve yeter şartını sağlar. T matrisinin karakteristik polinomu

$$P(x) = x^2 + 1$$

dir. T matrisi krakteristik polinomun kökü olduğundan $T^2 = -I_2$ elde ederiz. Böylece Rodrigues formülünü kullanılabilir.

Teorem 2.58. $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında tanımlanan

$$R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega} = \begin{bmatrix} \cos \theta - \frac{B \sin \theta}{\sqrt{AC-B^2}} & -\frac{C \sin \theta}{\sqrt{AC-B^2}} \\ \frac{A \sin \theta}{\sqrt{AC-B^2}} & \cos \theta + \frac{B \sin \theta}{\sqrt{AC-B^2}} \end{bmatrix}$$

matrisi merkezi orijin olan $\mathcal{B}_\Omega$ -çemberi üzerinde θ açısı kadar bir dönme veren bir $\mathcal{B}_\Omega$ -dönme matrisidir.(Çolakoğlu vd. 2023)

İspat T matrisi Ω -ters simetrik olsun. Bu durumda $T^2 = -I_2$ eşitliği kullanılarak $R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega}$ dönme matrisi

$$\begin{aligned} R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega} &= e^{\theta T} = I_2 + (\sin \theta) T + (1 - \cos \theta) T^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (\sin \theta) \begin{bmatrix} -\frac{B}{\sqrt{AC-B^2}} & -\frac{C}{\sqrt{AC-B^2}} \\ \frac{A}{\sqrt{AC-B^2}} & \frac{B}{\sqrt{AC-B^2}} \end{bmatrix} + (1 - \cos \theta) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta - \frac{B \sin \theta}{\sqrt{AC-B^2}} & -\frac{C \sin \theta}{\sqrt{AC-B^2}} \\ \frac{A \sin \theta}{\sqrt{AC-B^2}} & \cos \theta + \frac{B \sin \theta}{\sqrt{AC-B^2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. □

$R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega}$ matrisinin matrisinin karakteristik polinomu

$$P(x) = x^2 - (2 \cos \theta) x + 1$$

şeklindedir. Buradan hareketle $R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega}$ matrisinin özdeğerleri $P(x)$ polinomunun kökleri olan

$$\lambda_{1,2} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

değerleridir.

Örnek 2.59. Merkezi orijinde ve yarıçapı 4 olan $\mathcal{B}_\Omega$ -çemberi

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$$

tanımlansın. $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpımının ilişkilendirilmiş matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

ve $\sqrt{AC - B^2} = 4$ olarak bulunur. $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$ denklemi Öklidyen anlamda bir elipstir ve bu elipsin parametrik denklemi

$$\alpha(t) = (2 \cos \theta - \sin \theta, 2 \cos \theta + \sin \theta)$$

şeklindedir. Elips üzerinde bulunan $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerini

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= (2, 2) = \mathbf{u} \\ \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) &= (-1, 1) = \mathbf{v}\end{aligned}$$

şeklinde verilir ve bu vektörlerin aralarındaki açının Ω -ölçüsü $\frac{\pi}{2}$ dir. Buradan, $R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega}$ dönme matrisi

$$\begin{aligned}R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega} &= \begin{bmatrix} \cos \theta - \frac{B \sin \theta}{\sqrt{AC-B^2}} & -\frac{C \sin \theta}{\sqrt{AC-B^2}} \\ \frac{A \sin \theta}{\sqrt{AC-B^2}} & \cos \theta + \frac{B \sin \theta}{\sqrt{AC-B^2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta + \frac{3}{4} \sin \theta & -\frac{5}{4} \sin \theta \\ \frac{5}{4} \sin \theta & \cos \theta - \frac{3}{4} \sin \theta \end{bmatrix}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $\theta = \frac{\pi}{2}$ için $R_{\frac{\pi}{2}}^{\mathcal{B}_\Omega}$ dönme matrisi

$$R_{\frac{\pi}{2}}^{\mathcal{B}_\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak

$$R_{\frac{\pi}{2}}^{\mathcal{B}_\Omega} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}$$

olduğu görülür.

2.5.2. Cayley dönüşümü kullanılarak

Ters simetrik bir T matrisi için $C = (I + T)(I - T)^{-1}$ matrisi bir ortogonal matristir. Bu bölümde Cayley dönüşümünü kullanarak dönme matrislerini oluşturacağız. Ters simetrik bir T matrisi için, $(I_2 - T)$ matrisi 2×2 türünden tersinir bir olsun. Bu durumda $(I_2 + T)(I_2 - T)^{-1}$ matrisi bir dönme matrisi verir. Bu formül trigonometrik fonksiyonlar içermez. Her ters simetrik T matrisi için

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &: \mathfrak{so}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(2) \\ \mathcal{C}(T) &= (I_2 + T)(I_2 - T)^{-1}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme Cayley dönüşümü denir. Burada $\mathfrak{so}(2)$ ile 2×2 ters simetrik matrislerin kümesi ve $\mathbf{SO}(2)$ ile determinantı 1 olan ortogonal matrislerin kümesi gösterilir. Cayley dönüşümü $\mathfrak{so}(2)$ ve $\mathbf{SO}(2)$ arasında bir izomorfizmdir. Önceki bölümde, $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında Ω -ters simetrik matrislerini

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{B}{\sqrt{AC-B^2}} & -\frac{C}{\sqrt{AC-B^2}} \\ \frac{A}{\sqrt{AC-B^2}} & \frac{B}{\sqrt{AC-B^2}} \end{bmatrix}$$

şeklinde olduğu görülmüştür. Bu sayede Cayley dönüşümüyle $\mathbb{R}_\Omega^2$ uzayındaki dönme dönüşümleri incelenebilecektir.

Teorem 2.60. $AC - B^2 \neq 0$ olmak üzere

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{B}{\sqrt{AC-B^2}} & -\frac{C}{\sqrt{AC-B^2}} \\ \frac{A}{\sqrt{AC-B^2}} & \frac{B}{\sqrt{AC-B^2}} \end{bmatrix}$$

Ω -ters simetrik matrisi için tanımlanan

$$R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega} = (I_2 + \theta T)(I_2 - \theta T)^{-1}$$

matrisi merkezi orijin ve yarıçapı r olan $\mathcal{B}_\Omega$ -çember üzerinde bir dönme belirtir. Bununla birlikte,

$$R_{\theta'}^{\mathcal{B}_\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} - \frac{2\theta}{1+\theta^2} \frac{B}{\sqrt{AC-B^2}} & -\frac{2\theta}{1+\theta^2} \frac{C}{\sqrt{AC-B^2}} \\ \frac{2\theta}{1+\theta^2} \frac{A}{\sqrt{AC-B^2}} & \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} + \frac{2\theta}{1+\theta^2} \frac{B}{\sqrt{AC-B^2}} \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve $R_{\theta'}^{\mathcal{B}_\Omega}$ dönme matrisinin dönme açısı $\theta' = \arctan\left(\frac{2\theta}{1-\theta^2}\right)$ dir. (Çolakoğlu vd. 2023)

İspat T matrisi $\mathcal{B}_\Omega$ -ters simetrik matris olduğundan $T^t \Omega = -\Omega T$ doğrudur. Bu durumda

$$(I_2 + \theta T)^t \Omega = \Omega (I_2 - \theta T)$$

$$(I_2 - \theta T)^t \Omega = \Omega (I_2 + \theta T)$$

eşitlikleri kullanılarak

$$(R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega})^t \Omega (R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega}) = ((I_2 + \theta T)(I_2 - \theta T)^{-1})^t \Omega ((I_2 + \theta T)(I_2 - \theta T)^{-1}) = \Omega$$

$R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega}$ matrisinin $\mathcal{B}_\Omega$ -ortogonal matris olduğu görülür. Ayrıca $\det(I_2 + \theta T) = 1 + \theta^2$ ve $\det(I_2 - \theta T) = \frac{1}{1+\theta^2}$ olduğundan $\det R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega} = 1$ elde edilir. Yani $R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega}$ matrisi dönme

matrisidir. Dönme matrisi

$$R_{\theta}^{\mathcal{B}_{\Omega}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\theta}{\sqrt{AC-B^2}} \begin{bmatrix} -B & -C \\ A & B \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} -B & -C \\ A & B \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} - \frac{2\theta}{1+\theta^2} \frac{B}{\sqrt{AC-B^2}} & -\frac{2\theta}{1+\theta^2} \frac{C}{\sqrt{AC-B^2}} \\ \frac{2\theta}{1+\theta^2} \frac{A}{\sqrt{AC-B^2}} & \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} + \frac{2\theta}{1+\theta^2} \frac{B}{\sqrt{AC-B^2}} \end{bmatrix}$$

hesaplamalarıyla elde edilir. □

$R_{\theta'}^{\mathcal{B}_{\Omega}}$ dönme matrisinin karakteristik polinomu

$$P(x) = x^2 - 2 \left(\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} \right) x + 1$$

olarak bulunur. Buradan hareketle $R_{\theta'}^{\mathcal{B}_{\Omega}}$ matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} \pm \frac{2\theta}{1+\theta^2} \mathbf{i}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.61. Bir önceki örnekte kullanılan

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$$

$\mathcal{B}_{\Omega}$ -çemberi ve bu çember üzerinde

$$\alpha(0) = (2, 2) = \mathbf{u}$$

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 1) = \mathbf{v}$$

olacak şekilde $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri alınsın.

$$\Omega = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinden

$$R_{\theta}^{\mathcal{B}_{\Omega}} = \begin{bmatrix} \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} - \frac{2\theta}{1+\theta^2} \frac{B}{\sqrt{AC-B^2}} & -\frac{2\theta}{1+\theta^2} \frac{C}{\sqrt{AC-B^2}} \\ \frac{2\theta}{1+\theta^2} \frac{A}{\sqrt{AC-B^2}} & \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} + \frac{2\theta}{1+\theta^2} \frac{B}{\sqrt{AC-B^2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} + \frac{\theta}{1+\theta^2} \frac{3}{2} & -\frac{\theta}{1+\theta^2} \frac{5}{2} \\ \frac{\theta}{1+\theta^2} \frac{5}{2} & \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} - \frac{\theta}{1+\theta^2} \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

dönme matrisi elde edilir. $R_{\theta'}^{\mathcal{B}_\Omega}$ dönme matrisi $\theta = 1$ için $\theta' = \frac{\pi}{2}$ dönme açısı için

$$R_{\frac{\pi}{2}}^{\mathcal{B}_\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

bulunur. Sonuç olarak dönme matrisi

$$R_{\frac{\pi}{2}}^{\mathcal{B}_\Omega} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}$$

elde edilir.

2.5.3. Householder dönüşümü kullanılarak

Householder dönüşümü, n -boyutlu bir vektör uzayında, sıfırdan farklı her $\mathbf{u}$ vektörü için, bu vektöre dik olan ve orijinden geçen n -boyutlu hiperdüzleme göre yansımayı belirten

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}}\mathbf{v}$$

dönüşümüdür. Burada $\mathcal{H}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ vektörü, $\mathbf{v}$ vektörünün $\mathbf{u}$ vektörüne dik olan ve orijinden geçen n -boyutlu hiperdüzleme göre yansımasıdır. Bu yansımaya iki boyutlu uzayda bir doğruya göre yansımaya, üç boyutlu uzayda da bir düzleme göre yansımaya belirtir. Cartan-Dieudonné teoreminde her ortogonal dönüşümün çift sayıda yansımaya dönüşümlerinin bileşimi olarak yazılabildiğini bilinir. Buna göre, düzlem üzerinde iki yansımının bileşimi orijin etrafında bir dönme verir. $\mathbb{R}_\Omega^2$ uzayında Householder dönüşümü kullanarak bir doğruya göre yansımaya dönüşümünün matrisini belirlenebilir. Buradan hareketle, iki yansımaya matrisinin çarpımıyla da dönme matrisini elde edilecektir.

Tanım 2.62. $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında Householder dönüşümü, $\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0$ olmak üzere her $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ vektörü için

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}}\mathbf{v}$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşüme $\mathcal{B}_\Omega$ -Householder dönüşümü denir. $\mathcal{B}_\Omega$ -Householder dönüşümünün matrisi

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega} = \left(I_2 - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}} \right)$$

şeklindedir. (Çolakoğlu vd. 2023)

(i) $\mathcal{B}_\Omega$ -Householder dönüşüm matrisi

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_u^{\mathcal{B}_\Omega})^t \Omega &= \left(I_2 - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}} \right)^t \Omega = \left(I_2 - \left(\Omega \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}} \right) \right)^t \Omega \\ &= \Omega - \Omega \left(\frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}} \right) = \Omega \left(I_2 - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}} \right) = \Omega (\mathcal{H}_u^{\mathcal{B}_\Omega}) \end{aligned}$$

olduğundan $\otimes$ -simetrik matristir.

(ii) $\mathcal{B}_\Omega$ -Householder dönüşüm matrisi

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_u^{\mathcal{B}_\Omega})^t \Omega \mathcal{H}_u^{\mathcal{B}_\Omega} &= \Omega (\mathcal{H}_u^{\mathcal{B}_\Omega})^t \mathcal{H}_u^{\mathcal{B}_\Omega} = \Omega \left(I_2 - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}} \right) \left(I_2 - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}} \right) \\ &= \Omega \left(I_2 - \frac{4\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}} + \frac{4(\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega)(\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega)}{(\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u})^2} \right) = \Omega \end{aligned}$$

$\otimes$ -ortogonaldir.

$\mathcal{B}_\Omega$ -Householder dönüşümünün matrisi, daha açık bir şekilde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_u^{\mathcal{B}_\Omega} &= \frac{1}{\|\mathbf{u}\|_\Omega^2} \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}\|_\Omega^2 - 2(Au_1^2 + Bu_1u_2) & -2(Bu_1^2 + Cu_1u_2) \\ -2(Bu_1^2 + Au_1u_2) & \|\mathbf{u}\|_\Omega^2 - 2(Cu_2^2 + Bu_1u_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{Au_1^2 - Cu_2^2}{Au_1^2 + 2Bu_1u_2 + Cu_2^2} & -\frac{2(Bu_1^2 + Cu_1u_2)}{Au_1^2 + 2Bu_1u_2 + Cu_2^2} \\ -\frac{2(Bu_2^2 + Au_1u_2)}{Au_1^2 + 2Bu_1u_2 + Cu_2^2} & \frac{Au_1^2 - Cu_2^2}{Au_1^2 + 2Bu_1u_2 + Cu_2^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathcal{H}_u^{\mathcal{B}_\Omega}$ matrisi için $\det(\mathcal{H}_u^{\mathcal{B}_\Omega}) = -1$ olduğu görülebilir. $\mathcal{H}_u^{\mathcal{B}_\Omega}$ dönüşümü ortogonal dönüşüm olduğu için Ω -normu korur. Yani $\mathcal{H}_u^{\mathcal{B}_\Omega}$ dönüşümü $\mathcal{B}_\Omega$ -çember üzerindeki herhangi bir noktayı yine $\mathcal{B}_\Omega$ -çember üzerindeki noktaya götürür. $\mathcal{H}_u^{\mathcal{B}_\Omega}$ dönüşümü, bir Ω -yansımadır; daha açık olarak, $\mathbf{u}$ vektörüne Ω -ortogonal ve orijinden geçen doğruya göre yansımadır.

Örnek 2.63. Merkezi orijinde ve yarıçapı 4 olan $\mathcal{B}_\Omega$ çemberi

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$$

dir. $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpımının ilişkilendirilmiş matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

dir. $\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_{\Omega}}$ dönüşümünün matrisi $\mathbf{u} = (2, 1)$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_{\Omega}} &= \begin{bmatrix} -\frac{Au_1^2 - Cu_2^2}{Au_1^2 + 2Bu_1u_2 + Cu_2^2} & -\frac{2(Bu_1^2 + Cu_1u_2)}{Au_1^2 + 2Bu_1u_2 + Cu_2^2} \\ -\frac{2(Bu_2^2 + Au_1u_2)}{Au_1^2 + 2Bu_1u_2 + Cu_2^2} & \frac{Au_1^2 - Cu_2^2}{Au_1^2 + 2Bu_1u_2 + Cu_2^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{15}{13} & \frac{4}{13} \\ -\frac{14}{13} & \frac{15}{13} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Elips üzerinde alınan $\mathbf{a} = (1, -1)$ vektörünün $\mathbf{u}$ vektörüne ortogonal olan ve orijinden geçen $7x - y = 0$ doğrusuna göre $\mathcal{B}_{\Omega}$ -yansıması

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_{\Omega}}(\mathbf{a}) &= \begin{bmatrix} -\frac{15}{13} & \frac{4}{13} \\ -\frac{14}{13} & \frac{15}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \left(-\frac{19}{13}, -\frac{29}{13} \right)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse $\|\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_{\Omega}}(\mathbf{a})\|_{\Omega} = \|\mathbf{a}\|_{\Omega} = 4$ tür.

Teorem 2.64. $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$, $\mathbb{R}_{\Omega}^2$ iç çarpım uzayında $\|\mathbf{v}\|_{\Omega} = \|\mathbf{w}\|_{\Omega}$ olacak şekilde sıfırdan farklı iki vektör olsun. Eğer $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ ise

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_{\Omega}}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

eşitliği doğrudur. (Çolakoğlu vd. 2023)

İspat Doğrudan hesaplamalarla

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^t \Omega \mathbf{u} &= \mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \\ &= 2\|\mathbf{v}\|_{\Omega}^2 - 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}2\mathbf{u}\mathbf{u}^t \Omega \mathbf{v} &= 2(\mathbf{v} - \mathbf{w})(\mathbf{v} - \mathbf{w})^t \Omega \mathbf{v} \\ &= 2(\mathbf{v} - \mathbf{w})(\mathbf{v}^t \Omega \mathbf{v} - \mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{w})(2\|\mathbf{v}\|_{\Omega}^2 - 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v})\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan hareketle

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_{\Omega}}(\mathbf{v}) &= \mathbf{v} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t \Omega \mathbf{v}}{\mathbf{u}^t \Omega \mathbf{u}} \\ &= \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{w})(2\|\mathbf{v}\|_{\Omega}^2 - 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v})}{(2\|\mathbf{v}\|_{\Omega}^2 - 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v})} \\ &= \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{w}\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 2.65. $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$, $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında $\|\mathbf{v}\|_\Omega = \|\mathbf{w}\|_\Omega$ olacak şekilde sıfırdan farklı iki vektör olsun. Eğer $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ ise

$$\mathcal{H}_\mathbf{u}^{\mathcal{B}_\Omega}(\mathbf{v}) = -\mathbf{w}$$

eşitliği doğrudur. (Çolakoğlu vd. 2023)

İspat İspat, bir önceki teoremin ispatına benzer şekilde yapılır:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^t \Omega \mathbf{u} &= \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ &= 2 \|\mathbf{v}\|_\Omega^2 + 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 2\mathbf{u} \mathbf{u}^t \Omega \mathbf{v} &= 2(\mathbf{v} + \mathbf{w})(\mathbf{v} + \mathbf{w})^t \Omega \mathbf{v} \\ &= 2(\mathbf{v} + \mathbf{w})(\mathbf{v}^t \Omega \mathbf{v} + \mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{v} + \mathbf{w})(2 \|\mathbf{v}\|_\Omega^2 + 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v}) \end{aligned}$$

sonuçlarından

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\mathbf{u}^{\mathcal{B}_\Omega}(\mathbf{v}) &= \mathbf{v} - \frac{2\mathbf{u} \mathbf{u}^t \Omega \mathbf{v}}{\mathbf{u}^t \Omega \mathbf{u}} \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} + \mathbf{w})(2 \|\mathbf{v}\|_\Omega^2 + 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v})}{(2 \|\mathbf{v}\|_\Omega^2 + 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v})} \\ &= \mathbf{v} - (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = -\mathbf{w} \end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Ek olarak,

$$\mathcal{H}_\mathbf{v}^{\mathcal{B}_\Omega}(-\mathbf{v}) = -\mathbf{v} + \frac{2\mathbf{v} \mathbf{v}^t \Omega \mathbf{v}}{\mathbf{v}^t \Omega \mathbf{v}} \mathbf{v} = -\mathbf{v} + \frac{2\mathbf{v}(\mathbf{v}^t \Omega \mathbf{v})}{\mathbf{v}^t \Omega \mathbf{v}} = \mathbf{v}$$

dir. Buradan hareketle $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında herhangi $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörleri için tanımlanan

$$R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega}(\mathbf{v}) = \mathcal{H}_\mathbf{v}^{\mathcal{B}_\Omega} \mathcal{H}_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}^{\mathcal{B}_\Omega}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

dönüşümü, $\mathbf{v}$ vektörünü $\mathbf{w}$ vektörüne götüren $\mathcal{B}_\Omega$ -dönme dönüşümüdür. Dönme açısının Ω -ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{v}\|_\Omega \|\mathbf{w}\|_\Omega}$$

formülünden bulunur.

Örnek 2.66. Merkezi orijinde ve yarıçapı 4 olan $\mathcal{B}_\Omega$ -çemberi

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$$

elipsidir. Bu elips üzerindeki $\mathbf{a} = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, 0\right)$ vektörünü $\mathbf{b} = \left(0, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ vektörüne götüren $\mathcal{B}_\Omega$ -dönme dönüşümünün matrisini bulmak önce $\mathcal{H}_\mathbf{b}^{\mathcal{B}_\Omega}$ ve $\mathcal{H}_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}^{\mathcal{B}_\Omega}$ matrisleri bulunmalıdır. Hesaplamalar sonucu

$$\mathcal{H}_\mathbf{b}^{\mathcal{B}_\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{6}{5} & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathcal{H}_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}^{\mathcal{B}_\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Sonuç olarak, $\mathcal{B}_\Omega$ -dönme matrisini

$$R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega} = \mathcal{H}_\mathbf{b}^{\mathcal{B}_\Omega} \mathcal{H}_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}^{\mathcal{B}_\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde ederiz. Burada $R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ olduğu görülebilir. Dönme açısının Ω -ölçüsü de, yaklaşık olarak

$$\theta = \arccos \frac{3}{5} \cong 53.13$$

dir.

2.6. Üç Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen Uzayda Dönme Dönüşümü

$\mathcal{B}_\Omega$ -iç çarpımıyla tanımlanan $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında küreler Öklidyen anlamda birer elipsoid belirtir. Çünkü, $\mathbb{R}_\Omega^3$ te $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ için

$$\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Ax_1y_1 + Bx_2y_2 + Cx_3y_3 + D(x_1y_2 + x_2y_1) + E(x_1y_3 + x_3y_1) + F(x_2y_3 + x_3y_2)$$

iç çarpımı kullanılırsa, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ için, $\sqrt{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \|\mathbf{x}\|_\Omega = r$ denkleminde sahip olan r yarıçaplı kürenin denkleminin

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = r^2$$

olduğu görülür ki bu denklem, Ω nın özellikleri dolayısıyla bir elipsoid belirtir. Bu kürelere $\mathcal{B}_\Omega$ -küre de denebilir. Verilen

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

konikoidi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(h, k, t) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(h, k, t) = 0 \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial z}(h, k, t) = 0$$

olacak şekilde $(-h, -k, -t)$ vektörüyle ötelenirse

$$f(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + f(h, k, t) = 0$$

denklemini bulunur. Bu denklem

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}$$

için $\mathbb{R}_{\otimes}^3$ iç çarpım uzayında merkezi orijin ve yarıçapı $r = \sqrt{-f(h, k, t)}$ olan $\mathcal{B}_{\Omega}$ -kürenin denklemdir. Dolayısıyla, verilen her elipsoidi küre kabul eden bir $\mathcal{B}_{\Omega}$ -iç çarpımı vardır.

Bu kısımda, Öklidyen dönme dönüşümüne benzer olarak, genelleştirilmiş Öklidyen dönme dönüşümü ele alınacaktır. Bu dönüşüm üç boyut için, yalnızca bir doğruyu sabit bırakan ve noktalar arası Ω -uzaklıkları değiştirmeyen bir dönüşüm olacaktır. Ayrıca, sabit doğru haricindeki her bir nokta bir elipsoid (Ω -küre) etrafında hareket eder. Noktaların hareketleri bir elips üzerinde olacağından bu dönüşüme eliptik dönme dönüşümü denmektedir. Bu dönüşüm, $\mathbb{R}_{\Omega}^3$ uzayının bir izometrisidir ve (Çolakoğlu vd. 2023) çalışmasında tanıtılmış; Rodrigues, Cayley, Householder ve birim kuaterniyon yöntemleri kullanılarak incellenmiştir. Bu kısmın oluşturulmasında (Çolakoğlu ve Özdemir 2023b) ve (Çolakoğlu ve Özdemir 2023a) çalışmalarından yararlanılmıştır.

2.6.1. Rodrigues formülü kullanılarak

$\mathbb{R}_{\Omega}^3$ iç çarpım uzayında Rodrigues formülünü elde etmek için Ω -ters simetrik matrisler kullanılacaktır. Genelleştirilmiş Öklidyen vektörel çarpım kısmında Ω -ters simetrik matrisler $\Delta = \sqrt{\det \Omega}$, $\Delta_1 = (AB - D^2)/\Delta$, $\Delta_2 = (AC - E^2)/\Delta$, $\Delta_3 = (BC - F^2)/\Delta$, $\Delta_4 = (DE - AF)/\Delta$, $\Delta_5 = (DF - BE)/\Delta$, $\Delta_6 = (EF - CD)/\Delta$ için

$$T = \begin{bmatrix} \Delta_6 x_3 - \Delta_5 x_2 & \Delta_5 x_1 - \Delta_3 x_3 & \Delta_3 x_2 - \Delta_6 x_1 \\ \Delta_2 x_3 - \Delta_4 x_2 & \Delta_4 x_1 - \Delta_6 x_3 & \Delta_6 x_2 - \Delta_2 x_1 \\ \Delta_4 x_3 - \Delta_1 x_2 & \Delta_1 x_1 - \Delta_5 x_3 & \Delta_5 x_2 - \Delta_4 x_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilmiştir. Bir Ω -ters simetrik T matrisi için tanımlanan $e^{\theta T}$ matrisi elipsoid üzerindeki bir vektörü θ açısı kadar döndürür. $e^{\theta T}$ ortonormal bir matristir yani iç çarpımı dolayısıyla uzunluğu korur. Bu ise elipsoid üzerindeki vektörün dönüşüm altında yine elipsoid üzerinde kalması anlamına gelir. Buradan hareketle dönme matrisini elde edilebilir.

Teorem 2.67. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ birim vektörü için $\alpha = 1 - \cos \theta$, $\sigma'_{x_i} = x_i (Ax_1 + Dx_2 + Ex_3)$, $\sigma''_{x_i} = x_i (Dx_1 + Bx_2 + Fx_3)$, $\sigma'''_{u_i} = x_i (Ex_1 + Fx_2 + Cx_3)$, $\Lambda'_{i,j} = (\Delta_i x_3 - \Delta_j x_2)$, $\Lambda''_{i,j} = (\Delta_i x_1 - \Delta_j x_3)$ ve $\Lambda'''_{i,j} = (\Delta_i x_2 - \Delta_j x_1)$ için

$$R_\theta^{\Omega, \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \cos \theta + \sigma'_{u_1} \alpha + \Lambda'_{6,5} \sin \theta & \sigma''_{u_1} \alpha + \Lambda''_{5,3} \sin \theta & \sigma'''_{u_1} \alpha + \Lambda'''_{3,6} \sin \theta \\ \sigma'_{u_2} \alpha + \Lambda'_{2,4} \sin \theta & \cos \theta + \sigma''_{u_2} \alpha + \Lambda''_{4,6} \sin \theta & \sigma'''_{u_2} \alpha + \Lambda'''_{6,2} \sin \theta \\ \sigma'_{u_3} \alpha + \Lambda'_{4,1} \sin \theta & \sigma''_{u_3} \alpha + \Lambda''_{1,5} \sin \theta & \cos \theta + \sigma'''_{u_3} \alpha + \Lambda'''_{5,4} \sin \theta \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega}$ matrisi elipsoid üzerindeki vektörleri θ açısı kadar $\mathbf{x}$ vektörü etrafında döndürür. (Çolakoğlu ve Özdemir 2023b)

İspat $\mathcal{B}_\Omega$ -ters simetrik T matrisini $\Lambda'_{i,j} = (\Delta_i x_3 - \Delta_j x_2)$, $\Lambda''_{i,j} = (\Delta_i x_1 - \Delta_j x_3)$ ve $\Lambda'''_{i,j} = (\Delta_i x_2 - \Delta_j x_1)$ için

$$T = \begin{bmatrix} \Lambda'_{6,5} & \Lambda''_{5,3} & \Lambda'''_{3,6} \\ \Lambda'_{2,4} & \Lambda''_{4,5} & \Lambda'''_{6,2} \\ \Lambda'_{4,1} & \Lambda''_{1,5} & \Lambda'''_{5,4} \end{bmatrix}$$

ve T^2 matrisini $\sigma'_{x_i} = x_i (Ax_1 + Dx_2 + Ex_3)$, $\sigma''_{x_i} = x_i (Dx_1 + Bx_2 + Fx_3)$ ve $\sigma'''_{u_i} = x_i (Ex_1 + Fx_2 + Cx_3)$ kullanarak

$$T^2 = \begin{bmatrix} \sigma'_{x_1} - 1 & \sigma''_{x_1} & \sigma'''_{u_1} \\ \sigma'_{x_2} & \sigma''_{x_2} - 1 & \sigma'''_{u_2} \\ \sigma'_{x_3} & \sigma''_{x_3} & \sigma'''_{u_3} - 1 \end{bmatrix}$$

kısaltılırsa. dönme matrisi $\alpha = 1 - \cos \theta$ için

$$\begin{aligned} R_\theta^{\Omega, \mathbf{x}} &= e^{T\theta} = I_3 + (\sin \theta) T + (1 - \cos \theta) T^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} \Lambda'_{6,5} & \Lambda''_{5,3} & \Lambda'''_{3,6} \\ \Lambda'_{2,4} & \Lambda''_{4,5} & \Lambda'''_{6,2} \\ \Lambda'_{4,1} & \Lambda''_{1,5} & \Lambda'''_{5,4} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \sigma'_{x_1} - 1 & \sigma''_{x_1} & \sigma'''_{u_1} \\ \sigma'_{x_2} & \sigma''_{x_2} - 1 & \sigma'''_{u_2} \\ \sigma'_{x_3} & \sigma''_{x_3} & \sigma'''_{u_3} - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta + \sigma'_{u_1} \alpha + \Lambda'_{6,5} \sin \theta & \sigma''_{u_1} \alpha + \Lambda''_{5,3} \sin \theta & \sigma'''_{u_1} \alpha + \Lambda'''_{3,6} \sin \theta \\ \sigma'_{u_2} \alpha + \Lambda'_{2,4} \sin \theta & \cos \theta + \sigma''_{u_2} \alpha + \Lambda''_{4,6} \sin \theta & \sigma'''_{u_2} \alpha + \Lambda'''_{6,2} \sin \theta \\ \sigma'_{u_3} \alpha + \Lambda'_{4,1} \sin \theta & \sigma''_{u_3} \alpha + \Lambda''_{1,5} \sin \theta & \cos \theta + \sigma'''_{u_3} \alpha + \Lambda'''_{5,4} \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hesaplamalarıyla elde edilir. Elde edilen $R_{\theta}^{\Omega, \mathbf{x}}$ dönme matrisinin öz değerleri sırasıyla $\lambda_1 = e^{i\theta}$, $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ ve $\lambda_3 = 1$ dir. Dönme eksenini $\lambda_3 = 1$ özdeğerine karşılık gelen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ özvektörüyle belirlenen doğrudur. $\square$

Örnek 2.68. Verilen

$$6x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 2xy - 8xz = 1$$

elipsoidin parametrik denklemi $\theta \in [0, \pi)$ ve $\beta \in [0, 2\pi)$ için

$$\alpha(\theta, \beta) = \left(\sin \theta + \cos \theta \sin \beta, \frac{1}{3} \cos \theta \cos \beta + \frac{1}{3} \cos \theta \sin \beta, \sin \theta - \frac{1}{3} \cos \theta \cos \beta + \frac{5}{3} \cos \theta \sin \beta \right)$$

şeklindedir. Bu elipsoidi küre kabul eden iç çarpım uzayının ilişkili matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Elipsoid üzerinde

$$\begin{aligned} \alpha\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) &= \left(\frac{\sqrt{3}+2}{4}, \frac{\sqrt{3}+3}{12}, \frac{5\sqrt{3}+3}{12} \right) = \mathbf{a} \\ \alpha\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) &= \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}+1}{12}, \frac{7\sqrt{3}-5}{12} \right) = \mathbf{b} \end{aligned}$$

iki vektör alınabilir. $\mathbf{a}$ vektörünü $\mathbf{b}$ vektörüne dönüştüren $R_{\theta}^{\Omega, \mathbf{x}}$ dönme dönüşümünün eksenini $\mathbf{x} = \mathbf{a} \times_{\Omega} \mathbf{b}$ vektörüdür. İç çarpımın ilişkili matrisi için $\Delta = 3$, $\Delta_1 = \frac{35}{3}$, $\Delta_2 = \frac{2}{3}$, $\Delta_3 = 6$, $\Delta_4 = \frac{4}{3}$, $\Delta_5 = 8$ ve $\Delta_6 = 1$ bulunur. Dönme eksenini genelleştirilmiş Öklidyen vektörel çarpımla

$$\mathbf{a} \times_{\Omega} \mathbf{b} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{6}, -\frac{5\sqrt{3}+1}{6} \right)$$

şeklinde bulunur. $\mathbf{a} \times_{\Omega} \mathbf{b}$ vektörü $\mathbb{R}_{\Omega}^3$ iç çarpım uzayında birim vektörüdür. İki vektör arasındaki açının, elipsoidin parametrik denkleminde $\frac{\pi}{2}$ olduğu görülebilir. $R_{\frac{\pi}{2}}^{\Omega, \mathbf{x}}$ dönme matrisi

$$R_{\frac{\pi}{2}}^{\Omega, \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-9}{4} & \frac{2\sqrt{3}+7}{4} & \frac{7-\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{2\sqrt{3}+3}{6} & \frac{7-\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{3}+2}{6} \\ \frac{2\sqrt{3}-21}{6} & \frac{\sqrt{3}+29}{12} & \frac{16-\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. $R_{\frac{\pi}{2}}^{\Omega, \mathbf{x}}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ olduğu görülebilir. Gerçekleşen dönme $\mathbf{a}$ vektörünü $\mathbf{b}$ vektörüne $\mathbf{x}$ vektörüne ortgonal orijinden geçen düzlem ile elipsoidin kesişimi olan büyük elips üzerinde $\mathbf{x}$ vektörü etrafında $\frac{\pi}{2}$ açısı kadar dönderir. Dönmenin gerçekleştiği düzlem

$$(\sqrt{3} + 1)x + (2 - \sqrt{3})y - (\sqrt{3} + 1)z = 0$$

denklemini sağlar.

2.6.2. Cayley dönüşümü kullanılarak

Bu kısımda Cayley dönüşümünü kullanarak dönme matrislerini oluşturacağız. Bu formül trigonometrik fonksiyonlar içermez. Ω -ters simetrik bir T matrisi için, $(I_3 - T)$ matrisi tersinir olsun. Bu durumda $(I_3 + T)(I_3 - T)^{-1}$ bir $\mathcal{B}_\Omega$ -dönme matrisi verir. Diğer yandan, Ω -ters simetrik T matrisleri için

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &: \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbf{SO}(3) \\ \mathcal{C}(T) &= (I_3 + T)(I_3 - T)^{-1} \end{aligned}$$

tanımlanan dönüşüme Cayley dönüşümü denir, burada $\mathfrak{so}(3)$ ile 3×3 ters simetrik matrislerin kümesi ve $\mathbf{SO}(3)$ ile determinantı 1 olan ortogonal matrislerin kümesini gösterilir. Cayley dönüşümü $\mathfrak{so}(3)$ ve $\mathbf{SO}(3)$ arasında bir izomorfizmdir. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathcal{B}_\Omega$ -ters simetrik matrislerini önceki bölümde

$$T = \begin{bmatrix} \frac{(DF-BE)u_2 - (EF-CD)u_3}{\Delta} & \frac{(BC-F^2)u_3 - (DF-BE)u_1}{\Delta} & \frac{(EF-CD)u_1 - (BC-F^2)u_2}{\Delta} \\ \frac{(DE-AF)u_2 - (AC-E^2)u_3}{\Delta} & \frac{(EF-CD)u_3 - (DE-AF)u_1}{\Delta} & \frac{(AC-E^2)u_1 - (EF-CD)u_2}{\Delta} \\ \frac{(AB-D^2)u_2 - (DE-AF)u_3}{\Delta} & \frac{(DF-BE)u_3 - (AB-D^2)u_1}{\Delta} & \frac{(DE-AF)u_1 - (DF-BE)u_2}{\Delta} \end{bmatrix}$$

şeklinde belirlenmiştir. Bu durum Cayley dönüşümüyle $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında dönme dönüşümünün incelenebilmesini sağlar.

Teorem 2.69. T matrisi $\mathcal{B}_\Omega$ -ters simetrik olsun Bu durumda, $\sigma'_{x_i} = x_i (Ax_1 + Dx_2 + Ex_3)$, $\sigma''_{x_i} = x_i (Dx_1 + Bx_2 + Fx_3)$, $\sigma'''_{u_i} = x_i (Ex_1 + Fx_2 + Cx_3)$, $\Lambda'_{i,j} = (\Delta_i x_3 - \Delta_j x_2)$, $\Lambda''_{i,j} = (\Delta_i x_1 - \Delta_j x_3)$ ve $\Lambda'''_{i,j} = (\Delta_i x_2 - \Delta_j x_1)$ için

$$R_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_\Omega} = (I_3 + A)(I_3 - A)^{-1}$$

tanımlanan

$$R_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_\Omega} = \frac{1}{1 + \|\mathbf{x}\|_\Omega^2} \begin{bmatrix} 1 - \|\mathbf{x}\|_\Omega^2 + 2(\sigma'_{u_1} + \Lambda'_{6,5}) & 2(\sigma''_{u_1} + \Lambda''_{5,3} \sin \theta) & 2(\sigma'''_{u_1} + \Lambda'''_{3,6} \sin \theta) \\ 2(\sigma'_{u_2} + \Lambda'_{2,4} \sin \theta) & 1 - \|\mathbf{x}\|_\Omega^2 + 2(\sigma''_{u_2} + \Lambda''_{4,6} \sin \theta) & 2(\sigma'''_{u_2} + \Lambda'''_{6,2} \sin \theta) \\ 2(\sigma'_{u_3} + \Lambda'_{4,1} \sin \theta) & 2(\sigma''_{u_3} + \Lambda''_{1,5} \sin \theta) & 1 - \|\mathbf{x}\|_\Omega^2 + 2(\sigma'''_{u_3} + \Lambda'''_{5,4} \sin \theta) \end{bmatrix}$$

matrisi r yarıçaplı $\mathcal{B}_\Omega$ -küre üzerinde $\mathbf{u}$ eksenini etrafında dönme belirtir. (Çolakoğlu ve Özdemir 2023b)

İspat T matrisi $\mathcal{B}_\Omega$ -ters simetrik matris olduğundan $T^t \Omega = -\Omega T$ olur. Bu durumda

$$(I_3 + \theta T)^t \Omega = \Omega (I_3 - \theta T)$$

$$(I_3 - \theta T)^t \Omega = \Omega (I_3 + \theta T)$$

eşitlikleri kullanılarak

$$(R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega})^t \Omega (R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega}) = ((I_3 + \theta T)(I_3 - \theta T)^{-1})^t \Omega ((I_3 + \theta T)(I_3 - \theta T)^{-1}) = \Omega$$

elde edilir. Ayrıca

$$\det(I_3 + T) = 1 + \|\mathbf{x}\|_\Omega^2 \text{ ve } \det(I_3 - T) = \frac{1}{1 + \|\mathbf{x}\|_\Omega^2}$$

olduğundan $\det R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega} = 1$ olduğu görülür. Yani $R_\theta^{\mathcal{B}_\Omega}$ matrisi dönme matrisidir. Dönme matrisini uzun hesaplamalarla elde edilir. $\square$

$R_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega}$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_{1,2} = \left(\frac{1 - \|\mathbf{u}\|_\Omega^2}{1 + \|\mathbf{u}\|_\Omega^2} \pm \frac{2\|\mathbf{u}\|_\Omega}{1 + \|\mathbf{u}\|_\Omega^2} i \right)$ ve $\lambda_3 = 1$ dir. Dönme eksenini $\lambda_3 = 1$ özdeğerine karşılık gelen $\mathbf{u}$ vektörüdür. $R_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega}$ matrisi elipsoid üzerindeki $\mathbf{v}$ vektörünü

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = \|\mathbf{v}\|_\Omega^2$$

$\mathbf{u}$ eksenini etrafında

$$\theta = \arctan \left(\frac{2\|\mathbf{u}\|}{1 - \|\mathbf{u}\|_\Omega^2} \right)$$

açısı kadar dönderir.

Örnek 2.70. Bir önceki kısımda verilen

$$6x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 2xy - 8xz = 1$$

elipsoidi ve $\mathbf{u} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{6}, -\frac{5\sqrt{3}+1}{6}\right)$ birim vektörü vektörü için dönme matrisi

$$R_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-9}{4} & \frac{2\sqrt{3}+7}{4} & \frac{7-\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{2\sqrt{3}+3}{6} & \frac{7-\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{3}+2}{6} \\ \frac{2\sqrt{3}-21}{6} & \frac{\sqrt{3}+29}{12} & \frac{16-\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matris bir önceki kısımda bulununan ve dönme açısı $\frac{\pi}{2}$ olan matristir.

2.6.3. Householder dönüşümü kullanılarak

Bu kısımda, $\mathbb{R}_\Omega^2$ uzayına benzer şekilde, $\mathbb{R}_\Omega^3$ uzayında Householder dönüşümü kullanılarak dönme dönüşümleri verilecektir.

Tanım 2.71. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında Householder dönüşümü, $\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0$ olmak üzere her $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ vektörü için

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}}\mathbf{v}$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşüme $\mathcal{B}_\Omega$ -Householder dönüşümü denir. $\mathcal{B}_\Omega$ -Householder dönüşümünün matrisi

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega} = \left(I_3 - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}}\right)$$

şeklindedir. (Çolakoğlu ve Özdemir 2023b)

$\mathcal{B}_\Omega$ -Householder dönüşüm matrisi

(i)

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega})^t \Omega &= \left(I_3 - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}}\right)^t \Omega = \left(I_3 - \left(\Omega \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}}\right)\right)^t \Omega \\ &= \Omega - \Omega \left(\frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}}\right) = \Omega \left(I_3 - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}}\right) = \Omega (\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega}) \end{aligned}$$

olduğundan Ω -simetrik,

(ii)

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega})^t \Omega \mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega} &= \Omega (\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega})^t \mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega} = \Omega \left(I_3 - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}}\right) \left(I_3 - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}}\right) \\ &= \Omega \left(I_3 - \frac{4\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}} + \frac{4(\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega)(\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega)}{(\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u})^2}\right) = \Omega \end{aligned}$$

olduğundan Ω -ortogonaldır.

$\mathcal{B}_\Omega$ -Householder dönüşümünün matrisi, $\sigma'_{x_i} = x_i (Ax_1 + Dx_2 + Ex_3)$, $\sigma''_{x_i} = x_i (Dx_1 + Bx_2 + Fx_3)$ ve $\sigma'''_{x_i} = x_i (Ex_1 + Fx_2 + Cx_3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega} &= I_3 - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{u}\|_\Omega^2} \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}\|_\Omega^2 - 2\sigma'_{x_1} & -2\sigma''_{x_1} & -2\sigma'''_{x_1} \\ -2\sigma'_{x_2} & \|\mathbf{u}\|_\Omega^2 - 2\sigma''_{x_2} & -2\sigma'''_{x_2} \\ -2\sigma'_{x_3} & -2\sigma''_{x_3} & \|\mathbf{u}\|_\Omega^2 - 2\sigma'''_{x_3} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega}$ matrisi için $\det(\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega}) = -1$ olduğu görülebilir. $\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega}$ dönüşümü ortogonal dönüşüm olduğu için Ω -normu korur. Yani $\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega}$ dönüşümü $\mathcal{B}_\Omega$ -küre üzerindeki herhangi bir noktayı yine $\mathcal{B}_\Omega$ -küre üzerindeki noktaya götürür. $\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega}$ dönüşümü $\mathbf{u}$ vektörüne Ω -ortogonal ve orijinden geçen düzleme göre yansımadır.

Örnek 2.72. Merkezi orijinde ve yarıçapı 1 olan $\mathcal{B}_\Omega$ -küresi

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - zy = 1$$

tanımlansın. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpımının ilişkilendirilmiş matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. $\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega}$ dönüşümünün matrisi $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega} &= I_3 - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega}{\mathbf{u}^t\Omega\mathbf{u}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

bulunur. Elipsoid üzerinde alınan $\mathbf{a} = (\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$ vektörünün $\mathbf{u}$ vektörüne Ω -ortogonal olan $y + z = 0$ düzlemine göre yansıması

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega}(\mathbf{a}) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \left(0, -\frac{1}{2}, -1\right)\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\|\mathcal{H}_{\mathbf{u}}^{\mathcal{B}_\Omega}(\mathbf{a})\|_\Omega = 1$ olduğu görülebilir.

Teorem 2.73. $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$, $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\|\mathbf{v}\|_\Omega = \|\mathbf{w}\|_\Omega$ özelliğinde sıfırdan farklı iki vektör olsun. Eğer $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ ise

$$\mathcal{H}_\mathbf{u}^{\mathcal{B}_\Omega}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

dir. (Çolakoğlu ve Özdemir 2023b)

İspat Doğrudan

$$\mathbf{u}^t \Omega \mathbf{u} = \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) = 2 \|\mathbf{v}\|_\Omega^2 - 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v}$$

ve

$$2\mathbf{u}^t \Omega \mathbf{v} = 2(\mathbf{v} - \mathbf{w}) (\mathbf{v}^t \Omega \mathbf{v} - \mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v}) = (\mathbf{v} - \mathbf{w}) (2 \|\mathbf{v}\|_\Omega^2 - 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v})$$

hesaplamalarıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\mathbf{u}^{\mathcal{B}_\Omega}(\mathbf{v}) &= \mathbf{v} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t \Omega \mathbf{v}}{\mathbf{u}^t \Omega \mathbf{u}} = \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{w}) (2 \|\mathbf{v}\|_\Omega^2 - 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v})}{(2 \|\mathbf{v}\|_\Omega^2 - 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v})} \\ &= \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{w} \end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Teorem 2.74. $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$, $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\|\mathbf{v}\|_\Omega = \|\mathbf{w}\|_\Omega$ özelliğinde sıfırdan farklı iki vektör olsun. Eğer $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ ise

$$\mathcal{H}_\mathbf{u}^{\mathcal{B}_\Omega}(\mathbf{v}) = -\mathbf{w}$$

dir. (Çolakoğlu ve Özdemir 2023b)

İspat Doğrudan

$$\mathbf{u}^t \Omega \mathbf{u} = \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = 2 \|\mathbf{v}\|_\Omega^2 + 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v}$$

ve

$$2\mathbf{u}^t \Omega \mathbf{v} = 2(\mathbf{v} + \mathbf{w}) (\mathbf{v}^t \Omega \mathbf{v} + \mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) (2 \|\mathbf{v}\|_\Omega^2 + 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v})$$

hesaplamalarıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\mathbf{u}^{\mathcal{B}_\Omega}(\mathbf{v}) &= \mathbf{v} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t \Omega \mathbf{v}}{\mathbf{u}^t \Omega \mathbf{u}} = \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} + \mathbf{w}) (2 \|\mathbf{v}\|_\Omega^2 + 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v})}{(2 \|\mathbf{v}\|_\Omega^2 + 2\mathbf{w}^t \Omega \mathbf{v})} \\ &= \mathbf{v} - (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = -\mathbf{w} \end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Ek olarak

$$\mathcal{H}_{\mathbf{v}}^{\mathcal{B}_{\Omega}}(-\mathbf{v}) = -\mathbf{v} + \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\Omega}{\mathbf{v}^t\Omega\mathbf{v}}\mathbf{v} = -\mathbf{v} + \frac{2\mathbf{v}(\mathbf{v}^t\Omega\mathbf{v})}{\mathbf{v}^t\Omega\mathbf{v}} = \mathbf{v}$$

dir. Buradan hareketle, $\mathbb{R}_{\Omega}^3$ iç çarpım uzayında herhangi $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörleri için tanımlanan

$$R_{\theta}^{\mathcal{B}_{\Omega}} = \mathcal{H}_{\mathbf{w}}^{\mathcal{B}_{\Omega}}\mathcal{H}_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}^{\mathcal{B}_{\Omega}}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

dönüşümü $\mathbf{v}$ vektörünü $\mathbf{w}$ vektörüne götüren $\mathcal{B}_{\Omega}$ -dönme dönüşümüdür ve bu dönüşümün dönme açısı

$$\cos \theta = \frac{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{v}\|_{\Omega} \|\mathbf{w}\|_{\Omega}}$$

formülünden bulunur.

Örnek 2.75. Merkezi orijinde ve yarıçapı 1 olan $\mathcal{B}_{\Omega}$ -küresi

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - zy = 1$$

elipsoididir. Bu elipsoid üzerindeki $\mathbf{a} = (\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$ vektörünü $\mathbf{b} = (-1, -1, 0)$ vektörüne götüren $\mathcal{B}_{\Omega}$ -dönme dönüşümünün matrisini bulmak için önce $\mathcal{H}_{\mathbf{b}}^{\mathcal{B}_{\Omega}}$ ve $\mathcal{H}_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}^{\mathcal{B}_{\Omega}}$ matrisleri bulunmalıdır. Hesaplamalar sonucu

$$\mathcal{H}_{\mathbf{b}}^{\mathcal{B}_{\Omega}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathcal{H}_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}^{\mathcal{B}_{\Omega}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

bulunur. Sonuç olarak $\mathcal{B}_{\Omega}$ -dönme matrisini

$$R_{\theta}^{\mathcal{B}_{\Omega}} = \mathcal{H}_{\mathbf{b}}^{\mathcal{B}_{\Omega}}\mathcal{H}_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}^{\mathcal{B}_{\Omega}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde ederiz. $R_{\theta}^{\mathcal{B}_{\Omega}}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ olduğu görülebilir. Dönme açısı

$$\theta = \arccos \frac{3}{5} \cong 53.13$$

olarak bulunur.

2.6.4. Genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlar kullanılarak

Bir $q = \cos \theta + \varepsilon \sin \theta$ birim kuaterniyonu için tanımlanan $q\mathbf{v}q^{-1}$ çarpımı, $\mathbf{v}$ pür kuaterniyonunun ε eksenini etrafında 2θ kadar dönmesiyle elde edilen pür kuaterniyonu verir. Bu kısımda, benzer bir sonuç, (Çolakoğlu ve Özdemir 2023a) çalışmasından yararlanılarak, genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlar için verilecektir.

Teorem 2.76. $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ birim genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonunun kutupsal formu $q = \cos \theta + \varepsilon \sin \theta$ olsun. Bu durumda tanımlanan

$$\begin{aligned} R_\theta^q(\mathbf{v}) &: \mathbb{H}_\Omega^0 \rightarrow \mathbb{H}_\Omega^0 \\ R_\theta^q(\mathbf{v}) &= q\mathbf{v}q^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümü her $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_\Omega^3$ vektörünü ε eksenini etrafında 2θ açısı kadar döndürür. $R_\theta^q(\mathbf{v})$ dönüşümünün matrisi $\sigma'_{q_i} = q_i(Aq_1 + Dq_2 + Eq_3)$, $\sigma''_{q_i} = q_i(Dq_1 + Bq_2 + Fq_3)$, $\sigma'''_{q_i} = q_i(Eq_1 + Fq_2 + Cq_3)$, $\Lambda'_{i,j} = (\Delta_i q_3 - \Delta_j q_2)$, $\Lambda''_{i,j} = (\Delta_i q_1 - \Delta_j q_3)$ ve $\Lambda'''_{i,j} = (\Delta_i q_2 - \Delta_j q_1)$ olmak üzere

$$R_\theta^q = \begin{bmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2(\sigma'_{q_1} + q_0\Lambda'_{6,5}) & 2(\sigma''_{q_1} + q_0\Lambda''_{5,3}) & 2(\sigma'''_{q_1} + q_0\Lambda'''_{3,6}) \\ 2(\sigma'_{q_2} + q_0\Lambda'_{2,4}) & 2q_0^2 - 1 + 2(\sigma''_{q_2} + q_0\Lambda''_{4,6}) & 2(\sigma'''_{q_2} + q_0\Lambda'''_{6,2}) \\ 2(\sigma'_{q_3} + q_0\Lambda'_{4,1}) & 2(\sigma''_{q_3} + q_0\Lambda''_{1,5}) & 2q_0^2 - 1 + 2(\sigma'''_{q_3} + q_0\Lambda'''_{5,4}) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. (Çolakoğlu ve Özdemir 2023)

İspat R_θ^q dönüşümünün normu koruyan bir lineer dönüşüm olduğu görülebilir. Ayrıca $N_q = 1$ olduğundan $R_\theta^q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}q^{-1} = q\mathbf{v}\bar{q}$ olduğu görülür. Böylece soldan çarpım matrisleri yardımıyla $R_\theta^q(\mathbf{i})$, $R_\theta^q(\mathbf{j})$ ve $R_\theta^q(\mathbf{k})$ genelleştirilmiş kuaterniyonları aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} R_\theta^q(\mathbf{i}) &= (2q_0^2 - 1 + 2(\sigma'_{q_1} + q_0\Lambda'_{6,5}))\mathbf{i} + 2(\sigma'_{q_2} + q_0\Lambda'_{2,4})\mathbf{j} + 2(\sigma'_{q_3} + q_0\Lambda'_{4,1})\mathbf{k} \\ R_\theta^q(\mathbf{j}) &= 2(\sigma''_{q_1} + q_0\Lambda''_{5,3})\mathbf{i} + (2q_0^2 - 1 + 2(\sigma''_{q_2} + q_0\Lambda''_{4,6}))\mathbf{j} + 2(\sigma''_{q_3} + q_0\Lambda''_{1,5})\mathbf{k} \\ R_\theta^q(\mathbf{k}) &= 2(\sigma'''_{q_1} + q_0\Lambda'''_{3,6})\mathbf{i} + 2(\sigma'''_{q_2} + q_0\Lambda'''_{6,2})\mathbf{j} + (2q_0^2 - 1 + 2(\sigma'''_{q_3} + q_0\Lambda'''_{5,4}))\mathbf{k} \end{aligned}$$

Buradan R_θ^q dönüşüm matrisi teoremde ifade edildiği şekilde elde edilir. R_θ^q matrisi için $\det R_\theta^q = 1$ ve $(R_\theta^q)^t \Omega R_\theta^q = \Omega$ için Ω -ortogonal olduğu görülebilir. Yani R_θ^q matrisi $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = r^2$ elipsoidi üzerinde bir dönme matrisidir.

Ayrıca $\mathbf{v}_q \parallel \varepsilon$ olduğundan $\mathbf{v}_q \times_{\Omega} \varepsilon = \varepsilon \times_{\Omega} \mathbf{v}_q = 0$ ve $q\varepsilon = \varepsilon q$ elde edilir. Bu durumda $R_{\theta}^q(\varepsilon) = q\varepsilon q^{-1} = \varepsilon q q^{-1} = \varepsilon$ olduğu görülür. Yani ε vektörü R_{θ}^q dönme dönüşümü eksenidir. $\{\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \}$ kümesi, elemanları

$$\varepsilon_1 \times_{\Omega} \varepsilon = \varepsilon_2 \quad \varepsilon_2 \times_{\Omega} \varepsilon = \varepsilon_1 \quad \text{ve} \quad \varepsilon_1 \times_{\Omega} \varepsilon_2 = \varepsilon$$

sağlayan bir $\mathcal{B}_{\Omega}$ -ortonormal küme olsun. ε_0 vektörü ε ve ε_1 vektörlerinin gerdiği düzlemde ise

$$\varepsilon_0 = \varepsilon \cos \alpha + \varepsilon_1 \sin \alpha$$

yazılabilir. ε vektörünün R_{θ}^q dönüşümüyle değişmediğini biliyoruz. ε_1 vektörünün R_{θ}^q dönüşümüyle nasıl değiştiğini bulmalıyız. $\varepsilon = -1$ ve $\varepsilon\varepsilon_1 = -\varepsilon_1\varepsilon = \varepsilon_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} R_{\theta}^q(\varepsilon_1) &= q\mathbf{v}\bar{q} \\ &= (\cos \theta + \varepsilon \sin \theta) \mathbf{v} (\cos \theta - \varepsilon \sin \theta) \\ &= \varepsilon_1 \cos^2 \theta - (\varepsilon_1\varepsilon) \cos \theta \sin \theta + (\varepsilon\varepsilon_1) \sin \theta \cos \theta - (\varepsilon\varepsilon_1)\varepsilon \sin^2 \theta \\ &= \varepsilon_1 \cos^2 \theta - (\varepsilon_1\varepsilon) \cos \theta \sin \theta - (\varepsilon_1\varepsilon) \sin \theta \cos \theta + (\varepsilon_1\varepsilon^2) \sin^2 \theta \\ &= \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \cos \theta \sin \theta - \varepsilon_2 \sin \theta \cos \theta - \varepsilon_1 \sin^2 \theta \\ &= \varepsilon_1 \cos 2\theta + \varepsilon_2 \sin 2\theta \end{aligned}$$

Böylece ε_0 vektörünün R_{θ}^q dönüşümüyle ε vektörü eksen etrafında 2θ açısı döndüğünü gösterilir. $\square$

Sonuç 2.77. Her birim genelleştirilmiş eliptik kuaterniyon elipsoid üzerinde bir Ω -dönme belirtir. Diğer yandan herhangi bir elipsoid üzerinde gerçekleşen her Ω -dönme, Ω ile tanımlanan genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonla tanımlanabilir.

Örnek 2.78. A, B, C pozitif reel sayıları ve $D = E = F = 0$ için tanımlanan sayı sistemine eliptik kuaterniyonlar denir. Eliptik kuaterniyonlar için dönme matrisi

$$R_{\theta}^q = \begin{bmatrix} q_0^2 + Aq_1^2 - Bq_2^2 - Cq_3^2 & 2(Bq_1q_2 - \frac{q_0q_3\Delta}{A}) & 2(Cq_1q_3 + \frac{q_0q_2\Delta}{A}) \\ 2(Aq_1q_2 + \frac{q_0q_3\Delta}{B}) & q_0^2 + Aq_1^2 - Bq_2^2 - Cq_3^2 & 2(Cq_2q_3 - \frac{q_0q_1\Delta}{B}) \\ 2(Aq_1q_3 - \frac{q_0q_2\Delta}{C}) & 2(Bq_2q_3 + \frac{q_0q_1\Delta}{C}) & q_0^2 + Aq_1^2 - Bq_2^2 - Cq_3^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Elde edilen dönme matrisi eliptik iç çarpım uzayında dönme matrisidir. (Özdemir 2016)

$p, q \in \mathbb{H}_\Omega$ birim genelleştirilmiş eliptik kuaterniyoları, aynı Ω matrisiyle tanımlandığından R_θ^p ve R_θ^q dönme matrisleri aynı elipsoid üzerinde Ω -dönme matrisleridir. R_θ^p ve R_θ^q dönme matrisleri, $\mathbf{v}$ vektörünü

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = \|\mathbf{v}\|_\Omega^2$$

elipsoidi üzerinde döndürür. Bu iki dönme dönüşümünden elde edilen qp kuaterniyonu yine aynı elipsoid üzerinde gerçekleşen bir Ω -dönme dönüşümüdür. Yani, $R_{\theta_p}^p(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ ve $R_{\theta_q}^q(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ ise

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= R_{\theta_q}^q(\mathbf{v}) = R_{\theta_q}^q(R_{\theta_p}^p(\mathbf{u})) = q(R_{\theta_p}^p(\mathbf{u}))q^{-1} = q(p\mathbf{u}p^{-1})q^{-1} \\ &= (qp)\mathbf{u}(p^{-1}q^{-1}) = (qp)\mathbf{u}(qp)^{-1} = R_{\theta_{qp}}^{qp}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

dir. Diğer yandan $p \in \mathbb{H}_{\Omega_1}$ ve $q \in \mathbb{H}_{\Omega_2}$ için $\Omega_1 \neq \Omega_2$ ise R_θ^p ve R_θ^q dönme dönüşümünün bileşimi, her iki kuaterniyonda çarpma işlemi farklı tanımlandığından bir genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonla tanımlanamaz.

3. MATERYAL VE METOT

Bu tezde matematiksel ispat yöntemleri kullanılarak, iki ve üç boyutlu uzaylarda Öklidyen yansıma dönüşümü genelleştirilmiştir ve analitik geometride iyi bilinen uzaklık formüllerinin genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzaylarındaki karşılıkları belirlenmiştir. Uygulanan yöntemler doğrudan ispat, dolaylı ispat ve olmayana ergi gibi matematiksel yöntemlerdir. Tez içinde, önceden bilinen ve kaynak taramasında tanımları verilen genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım, genelleştirilmiş Öklidyen vektörel çarpım, genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlar, Öklidyen yansıma dönüşümü ve uzaklık formülleri materyal olarak kullanılmıştır. Bununla birlikte, bu teze kaynak teşkil eden en önemli materyaller bu konuda daha önce yapılmış olan ve kaynaklarda belirtilen çalışmalardır. Bunların da en önemlileri (Çolakoğlu vd. 2023), (Çolakoğlu ve Özdemir 2023a) ve (Çolakoğlu ve Özdemir 2023b) kaynaklarıdır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde kaynak taramasında verilen tanımlar ve teoremler kullanılarak iki ve üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayında yansıma dönüşümü ve uzaklık formülleri incelenecektir. İki boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayında yansıma dönüşümü (Çolakoğlu vd. 2023) kaynağında verilmiştir. Ancak öncesinde Öklidyen geometride iyi bilinen bazı kavramların iki ve üç boyutlu Öklidyen iç çarpım uzaylarındaki karşılıkları ele alınacaktır.

4.1. İki ve Üç Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen Uzaylarda Uygulamalar

Bu kısımda iki ve üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayında analitik geometride iyi bilinen dik iz düşüm, açı, alan ve hacim formülleri incelenecektir.

4.1.1. İç çarpımla ilgili geometrik uygulamalar

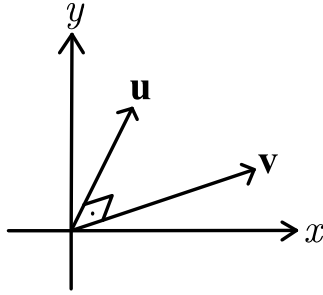
Genelleştirilmiş Öklidyen uzaylarda açı kavramının dolayısıyla diklik kavramının farklı olduğu açıktır. Daha açık olarak, $\mathbb{R}_\Omega^2$ veya $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzaylarında herhangi iki $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri arasındaki dar açının kosinüsü

$$\cos \theta = \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|_\Omega \|\mathbf{y}\|_\Omega}$$

eşitliği ile bulunur ve bu uzaylarda açı ölçüsü bu fonksiyon yardımıyla tanımlanabilir. Örneğin, matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

olan $\mathbb{R}_\Omega^2$ uzayında $\mathbf{u} = (1, 2)$ ve $\mathbf{v} = (3, 1)$ vektörleri Ω -ortogonal veya Ω -diktir. Başka bir deyişle, bu iki vektörün arasında açının Ω -ölçüsü $\frac{\pi}{2}$ dir. Bu vektörler $\mathbb{R}^2$ de Şekil 4.1'deki gibi görünür. Dikkat edilirse, bu iki vektörün dış açısının Ω -ölçüsü de $\frac{\pi}{2}$ olacaktır.



Şekil 4.1. $\mathbb{R}_\Omega^2$ de Ω -dik $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri

Basit bir hesaplamayla herhangi bir üçgenin iç açılarının Ω -ölçüleri toplamının π ye eşit olduğu kolayca görülebilir. Bunun gibi, $\mathbb{R}_\Omega^2$ uzayında bir çok özellik belirlenebilir. Örneğin, bu uzayda Pisagor teoremi geçerlidir. Bunu görmek için, aralarındaki açının Ω -ölçüsü $\frac{\pi}{2}$ olan $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri ve $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ vektörü göz önüne alınabilir. Bu vektörler bir dik üçgen oluşturacaktır. Buradan

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_\Omega^2 &= \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= \|\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \|\mathbf{v}\|_\Omega^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Pisagor teoreminin genelleştirilmiş Öklid uzayı için geçerli olduğu görülür. Benzer şekilde trigonometrik fonksiyonların dik üçgen özelliklerinin sağladığı görülebilir. Sonraki kısımlarda kullanılmak üzere, bir kaç kavramın daha karşılıkları aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 4.79. İki veya üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayında sıfırdan farklı $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri alınsın. Bu uzaylarda $\mathbf{u}$ vektörünün $\mathbf{v}$ vektörü üzerine Ω -dik izdüşümü

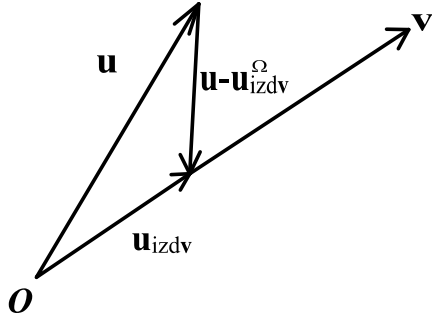
$$\mathbf{u}_{izdv}^\Omega = \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \mathbf{v} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Dikkat edilirse,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Omega((\mathbf{u} - \mathbf{u}_{izdv}^\Omega), \mathbf{v}) &= \mathcal{B}_\Omega\left(\mathbf{u} - \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \mathbf{v}, \mathbf{v}\right) \\ &= \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Yani, her $\mathbf{u}$ vektörü için, $\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{izdv}}^{\Omega}$ vektörü $\mathbf{v}$ vektörüne Ω -diktir. Bu durumda aşağıdaki temsili şekil ortaya çıkacaktır (Bkz. Şekil 4.2).



Şekil 4.2. $\mathbf{u}$ vektörünün $\mathbf{v}$ vektörüne Ω -dik izdüşüm vektörü

Örnek 4.80. $\mathbb{R}_{\Omega}^2$ iç çarpım uzayının matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

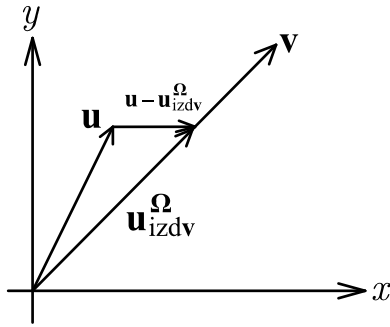
olsun. Bu durumda $\mathbf{u} = (1, 2)$ vektörünün $\mathbf{v} = (3, 3)$ vektörüne Ω -dik izdüşüm vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{izdv}}^{\Omega} &= \frac{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \mathbf{v} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}} (3, 3) \\ &= (2, 2) \end{aligned}$$

dir (Bkz. Şekil 4.3). Dikkat edilirse, $\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{izdv}}^{\Omega}$ vektörünün $\mathbf{v}$ vektörüne dik olduğu

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{izdv}}^{\Omega}, \mathbf{v}) &= \mathcal{B}_{\Omega}((-1, 0), (3, 3)) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde görülebilir.

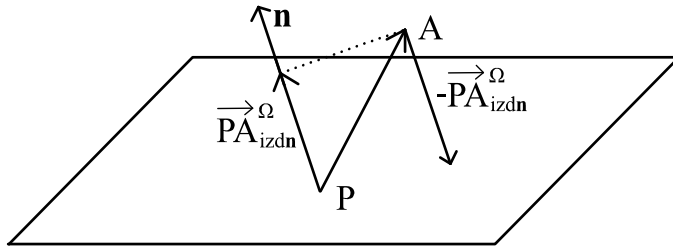


Şekil 4.3. $\mathbf{u} = (1, 2)$ nun $\mathbf{v} = (3, 3)$ ye Ω -dik izdüşüm vektörü

$\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında Ω -normali $\mathbf{n}$ vektörü olan ve P noktasından geçen düzlem ile bu düzlem üzerinde olmayan bir A noktası alınsın (Bkz. Şekil 4.4). Bu durumda, $\overrightarrow{PA}$ vektörünün $\mathbf{n}$ vektörüne Ω -dik izdüşüm vektörü $\overrightarrow{PA}_{izdn}^\Omega$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Omega \left(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PA}_{izdn}^\Omega, \mathbf{n} \right) &= \mathcal{B}_\Omega \left(\overrightarrow{PA} - \frac{\mathcal{B}_\Omega \left(\overrightarrow{PA}, \mathbf{n} \right)}{\mathcal{B}_\Omega (\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n}, \mathbf{n} \right) \\ &= \mathcal{B}_\Omega \left(\overrightarrow{PA}, \mathbf{n} \right) - \frac{\mathcal{B}_\Omega \left(\overrightarrow{PA}, \mathbf{n} \right)}{\mathcal{B}_\Omega (\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathcal{B}_\Omega (\mathbf{n}, \mathbf{n}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durum $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında Ω -dik izdüşümünden elde edilen $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PA}_{izdn}^\Omega$ vektörünün düzleme dik olduğu anlamına gelir. $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PA}_{izdn}^\Omega$ vektörünün Ω -normu hesaplanarak bir noktanın düzleme uzaklığı ilerleyen bölümlerde elde edilecektir.



Şekil 4.4. $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PA}_{izdn}^\Omega$ vektörünün düzleme Ω -dik olması

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında aralarındaki açı θ olan $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanının

$$\text{Alan}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}$$

olduğu bilinmektedir. Aynı şekilde iki ve üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayında aralarındaki açı olan $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın Ω -alanını

genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım için

$$Alan_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - \mathcal{B}_{\Omega}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \quad (4.2)$$

olarak tanımlanabilir. Buna göre aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 4.81. $\mathbb{R}_{\Omega}^2$ iç çarpım uzayında; köşe noktalarının koordinatları $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ ve $Z = (z_1, z_2)$ olan bir üçgenin Ω -alanı, $\Delta = \sqrt{AC - B^2}$ iç çarpım sabitini göstermek üzere,

$$Alan_{\Omega}(X, Y, Z) = \frac{\Delta}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{bmatrix} \right| \quad (4.3)$$

değerine eşittir.

İspat Köşe noktalarının koordinatlarından $\mathbf{a} = \overrightarrow{XY} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$ ve $\mathbf{b} = \overrightarrow{XZ} = (z_1 - x_1, z_2 - x_2)$ vektörlerini inşa edelim. Bu durumda $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın Ω -alanının yarısı istenen üçgenin Ω -alanını verecektir. Üçgenin Ω -alanı

$$\begin{aligned} Alan_{\Omega}(X, Y, Z) &= \frac{Alan_{\Omega}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - \mathcal{B}_{\Omega}^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(AC - B^2) (x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_1 z_2 + x_2 z_1 + y_1 z_2 - y_2 z_1)^2} \\ &= \frac{\Delta}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \right| \end{aligned}$$

değerine eşittir. □

Teorem 4.82. $\mathbb{R}_{\Omega}^2$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarının taban Ω -uzunluğu $\|\mathbf{y}\|_{\Omega}$ ve Ω -yüksekliği $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{izdy}^{\Omega}\|_{\Omega}$ olmak üzere paralelkenarın Ω -alanı

$$Alan_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y}\|_{\Omega} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{izdy}^{\Omega}\|_{\Omega}$$

fomülüyle de bulunur.

İspat Önce $\mathbf{x} - \mathbf{x}_{izdy}^\Omega$ vektöründe $\mathbf{x}_{izdy}^\Omega$ yerine $\frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \mathbf{y}$ yazarak $\mathbf{x} - \mathbf{x}_{izdy}^\Omega$ vektörünün normunu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{izdy}^\Omega\|_\Omega &= \left\| \mathbf{x} - \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \mathbf{y} \right\|_\Omega \\
 &= \sqrt{\mathcal{B}_\Omega \left(\mathbf{x} - \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \mathbf{y}, \mathbf{x} - \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \mathbf{y} \right)} \\
 &= \sqrt{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2 \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \left(\frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \right)^2 \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \\
 &= \sqrt{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2 \frac{\mathcal{B}_\Omega^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y})} + \frac{\mathcal{B}_\Omega^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y})}} \\
 &= \sqrt{\frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \mathcal{B}_\Omega^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y})}}.
 \end{aligned}$$

Buradan, $\|\mathbf{y}\|_\Omega \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{izdy}^\Omega\|_\Omega$ çarpımı, paralelkenarın Ω -alanını verir:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{y}\|_\Omega \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{izdy}^\Omega\|_\Omega &= \sqrt{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \sqrt{\frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \mathcal{B}_\Omega^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y})}} \\
 &= \sqrt{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \mathcal{B}_\Omega^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}.
 \end{aligned}$$

□

Sonuç 4.83. Elde edilen formül Öklid uzayında X, Y ve Z noktaları için

$$\text{Alan}(X, Y, Z) = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{bmatrix} \right\|$$

şeklindedir. $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında bulduğumuz Ω -alanı, Öklid uzayındaki Ω -alanın iç çarpım sabiti Δ katıdır. Yani

$$\text{Alan}_\Omega(X, Y, Z) = \Delta \text{Alan}(X, Y, Z)$$

dir.

Örnek 4.84. İlişkili matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

olan $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında köşe noktalarının koordinatları $X = (1, 1)$, $Y = (3, 1)$ ve $Z = (2, 3)$ olan üçgenin Ω -alanı, $\Delta = \sqrt{5}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \text{Alan}_\Omega(X, Y, Z) &= \left| \frac{\sqrt{5}}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right| \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Verilen bir düzleme Ω -dik olan her vektöre o düzlemin Ω -normali denir.

Teorem 4.85. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında verilen $ax + by + cz + d = 0$ düzleminin bir normali

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{\Delta} (a\Delta_3 + b\Delta_6 + c\Delta_5) \\ n_2 &= \frac{1}{\Delta} (a\Delta_6 + b\Delta_2 + c\Delta_4) \\ n_3 &= \frac{1}{\Delta} (a\Delta_5 + b\Delta_4 + c\Delta_1) \end{aligned} \quad (4.4)$$

olmak üzere, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ vektörüdür.

İspat $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $A = (a_1, a_2, a_3)$ noktasından geçen ve Ω -normali $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ olan düzlemin denklemi, düzlem üzerindeki değişken bir nokta $X = (x, y, z)$ olmak üzere,

$$\mathcal{B}_\Omega(\overrightarrow{AX}, \mathbf{n}) = 0$$

eşitliğinden, $K \in \mathbb{R}$ için,

$$(An_1 + Dn_2 + En_3)x + (Dn_1 + Bn_2 + Fn_3)y + (En_1 + Fn_2 + Cn_3)z + K = 0$$

olarak bulunur. Buradan hareketle, verilen $ax + by + cz + d = 0$ düzleminin normali,

$$An_1 + Dn_2 + En_3 = a$$

$$Dn_1 + Bn_2 + Fn_3 = b$$

$$En_1 + Fn_2 + Cn_3 = c$$

denklem sisteminin çözümünden, $\Delta = \sqrt{\det \Omega}$, $\Delta_1 = (AB - D^2)/\Delta$, $\Delta_2 = (AC - E^2)/\Delta$, $\Delta_3 = (BC - F^2)/\Delta$, $\Delta_4 = (DE - AF)/\Delta$, $\Delta_5 = (DF - BE)/\Delta$ ve $\Delta_6 =$

$(EF - CD)/\Delta$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{\Delta} (a\Delta_3 + b\Delta_6 + c\Delta_5) \\ n_2 &= \frac{1}{\Delta} (a\Delta_6 + b\Delta_2 + c\Delta_4) \\ n_3 &= \frac{1}{\Delta} (a\Delta_5 + b\Delta_4 + c\Delta_1) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. □

Örnek 4.86. Örneğin $3x + 2y + z = 0$ düzleminin

$$\Omega = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisiyle tanımlanan $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında Ω -normali, $\Delta = 3$, $\Delta_1 = \frac{35}{3}$, $\Delta_2 = \frac{2}{3}$, $\Delta_3 = 6$, $\Delta_4 = \frac{4}{3}$, $\Delta_5 = 8$, $\Delta_6 = 1$ olduğundan $\mathbf{n} = \left(\frac{28}{3}, \frac{17}{9}, \frac{115}{9}\right)$ olarak bulunur. Düzlemdeki $\mathbf{a} = (1, 1, -5)$ vektörü için

$$\mathcal{B}_\Omega \left((1, 1, -5), \left(\frac{28}{3}, \frac{17}{9}, \frac{115}{9} \right) \right) = 0$$

olduğu görülür.

4.1.2. Vektörel çarpımla ilgili geometrik uygulamalar

Öklid uzayından bilinen $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörleri için verilen

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{x}$$

formülü $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayı için verilebilir.

Teorem 4.87. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörleri için

$$(\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}) \times_\Omega \mathbf{z} = \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathbf{y} - \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \mathbf{x} \quad (4.4)$$

eşitliği doğrudur.

İspat Uzun hesaplamalar sonucu eşitliğin doğruluğu görülebilir. □

Üç boyutlu Öklid uzayında karma çarpım $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörleri için $\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ olarak tanımlanır.

Tanım 4.88. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörleri için tanımlanan $\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}, \mathbf{z})$ çarpımına **genelleştirilmiş Öklidyen karma çarpım** denir. Bu çarpım $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]_\Omega$ ile gösterilir.

Teorem 4.89. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörleri için tanımlanan $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]_\Omega$ karma çarpımı, $\Delta = \sqrt{ABC + 2FDE - AF^2 - CD^2 - BE^2}$ iç çarpım sabitini göstermek üzere,

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]_\Omega = \Delta \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (4.5)$$

dir.

İspat Doğrudan hesaplamalarla

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]_\Omega &= \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y})^t \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \Delta^2 (x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1) \\ &= \Delta \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Sonuç 4.90. Standart Öklidyen iç çarpım uzayında

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

eşitliği sağlanırken, $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]_\Omega = \Delta \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 4.91. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında ilişkili matris

$$\Omega = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisi olsun. O halde $\Delta = 3$ dir. Buradan, $\mathbf{x} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{y} = (2, 1, 1)$ ve $\mathbf{z} = (0, 3, 2)$ vektörleri için

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x} \times_{\Omega} \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \mathcal{B}_{\Omega}\left(\left(-17, -\frac{7}{3}, -\frac{77}{3}\right), (0, 3, 2)\right) \\ &= -9\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]_{\Omega} &= 3 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= -9\end{aligned}$$

dir. Görüldüğü üzere, $\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x} \times_{\Omega} \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \Delta \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ dir.

Teorem 4.92. $\mathbb{R}_{\Omega}^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörleri için

$$\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x} \times_{\Omega} \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y} \times_{\Omega} \mathbf{z}) \quad (4.6)$$

eşitliği doğrudur.

İspat Determinant özellikleri ve $\mathcal{B}_{\Omega}$ iç çarpımın simetrik olmasından

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x} \times_{\Omega} \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \Delta \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &= -\Delta \det(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) \\ &= -\Delta \det(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}) \\ &= \mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{y} \times_{\Omega} \mathbf{z}, \mathbf{x}) \\ &= \mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y} \times_{\Omega} \mathbf{z})\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. □

Örnek 4.93. $\mathbb{R}_{\Omega}^3$ iç çarpım uzayı

$$\Omega = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisi ile tanımlı olsun. $\mathbf{x} = (1, 2, 1), \mathbf{y} = (2, 1, 1), \mathbf{z} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}_\Omega^3$ için

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y} &= \left(-17, -\frac{7}{3}, -\frac{77}{3} \right) \\ [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]_\Omega &= \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}, \mathbf{z}) = -3\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan $\Delta = 3$ olduğu için

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]_\Omega = \Delta \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

olduğu görülür.

Üç boyutlu Öklid uzayında sağlanan

$$\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \times \mathbf{w} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle & \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle \end{vmatrix}$$

eşitliğine Lagrange özdeşliği denir. Lagrange özdeşliği $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında kullanılabılır.

Teorem 4.94. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ve $\mathbf{w}$ vektörleri için

$$\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}, \mathbf{z} \times_\Omega \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{z}) & \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \\ \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{z}) & \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

eşitliği doğrudur.

İspat $\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y} = \mathbf{a}$ olsun Bu durumda (4.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}, \mathbf{z} \times_\Omega \mathbf{w}) &= \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{z} \times_\Omega \mathbf{w}) \\ &= \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{a} \times_\Omega \mathbf{z}, \mathbf{w}) \\ &= \mathcal{B}_\Omega((\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}) \times_\Omega \mathbf{z}, \mathbf{w})\end{aligned}$$

bulunur. (4.4) özelliğinden

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}, \mathbf{z} \times_\Omega \mathbf{w}) &= \mathcal{B}_\Omega((\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}) \times_\Omega \mathbf{z}, \mathbf{w}) \\ &= \mathcal{B}_\Omega(\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathbf{y} - \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \mathbf{x}, \mathbf{w}) \\ &= \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{w}) - \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{z}) & \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \\ \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{z}) & \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Teorem 4.95. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri arasındaki açının Ω -ölçüsü θ olsun. Bu durumda

$$\|\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}\|_\Omega = \|\mathbf{x}\|_\Omega \|\mathbf{y}\|_\Omega \sin \theta$$

eşitliği doğrudur.

İspat (4.7) eşitliğinden ve $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri arasındaki açı θ olduğundan

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}\|_\Omega^2 &= \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}, \mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}) \\ &= \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x}\|_\Omega^2 \|\mathbf{y}\|_\Omega^2 - (\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|_\Omega^2 \|\mathbf{y}\|_\Omega^2 - \|\mathbf{x}\|_\Omega^2 \|\mathbf{y}\|_\Omega^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\mathbf{x}\|_\Omega^2 \|\mathbf{y}\|_\Omega^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|\mathbf{x}\|_\Omega^2 \|\mathbf{y}\|_\Omega^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.96. $\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}$ vektörünün normu bir önceki teorem ve (4.7) eşitliğinden

$$\|\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}\|_\Omega = \sqrt{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

olarak elde edilir. Yani $\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}$ vektörünün normu $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörü ile inşa edilen paralelkenarın Ω -alanıdır. Diğer yandan $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörü ile inşa edilen paralelkenarın Ω -alanı

$$\|\mathbf{x}\|_\Omega \|\mathbf{y}\|_\Omega \sin \theta$$

değerine eşit olur.

4.1.3. Karma çarpımla ilgili geometrik uygulamalar

Öklid uzayında köşeleri X, Y, Z ve W noktaları olan üçgen piramidin hacmi

$$Hacim(X, Y, Z, W) = \frac{1}{6} \left| \det \left(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}, \overrightarrow{XW} \right) \right|$$

dir. Aynı özellik genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayında gösterilebilir. Bunun için önce hacim kavramının üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayındaki

karşılığını göz önüne almak gerekir. Öklidyen uzayda olduğu gibi, kenarlarının Ω -uzunlukları a , b ve c olan bir Ω -dikdörtgenler prizmasının Ω -hacmini abc olarak tanımlanabilir. Böylece, bir paralelyüzün Ω -hacminin $(\text{tabanın } \Omega\text{-alanı}) \times (\Omega\text{-yükseklik})$ ve bir üçgen piramitin Ω -hacminin $\frac{1}{6} (\text{tabanın } \Omega\text{-alanı}) \times (\Omega\text{-yükseklik})$ olduğu görülebilir.

Teorem 4.97. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında köşe noktaları X, Y, Z ve W olan paralelyüzünün Ω -hacmi

$$Hacim_\Omega(X, Y, Z, W) = \Delta \left| \det \left(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}, \overrightarrow{XW} \right) \right|$$

değerine eşittir.

İspat Genelliği kaybetmeden paralelyüzün tabanı kenarları $\overrightarrow{XY}$ ve $\overrightarrow{XZ}$ vektörleri olarak alınabilir. Bu vektörle oluşturulan paralakenarın Ω -alanı

$$\left\| \overrightarrow{XY} \times_\Omega \overrightarrow{XZ} \right\|_\Omega$$

değerine eşittir. Taban düzlemine dik olan $\overrightarrow{XY} \times_\Omega \overrightarrow{XZ}$ vektörüyle $\overrightarrow{XW}$ vektörü arasındaki açının Ω -ölçüsü θ olsun. $\overrightarrow{XW}$ vektörünün $\overrightarrow{XY} \times_\Omega \overrightarrow{XZ}$ vektörüne Ω -dik izdüşüm vektörünün Ω -normu $\left\| \overrightarrow{XW} \right\|_\Omega \cos \theta$ üçgen piramidin Ω -yüksekliği olur. Bu durumda, paralelyüzünün Ω -hacmi

$$(\text{tabanın } \Omega\text{-alanı}) \times (\Omega\text{-yükseklik})$$

değerine eşit olduğundan

$$\begin{aligned} Hacim_\Omega(X, Y, Z, W) &= \left\| \overrightarrow{XY} \times_\Omega \overrightarrow{XZ} \right\|_\Omega \left\| \overrightarrow{XW} \right\|_\Omega \cos \theta \\ &= \mathcal{B}_\Omega \left(\overrightarrow{XY} \times_\Omega \overrightarrow{XZ}, \overrightarrow{XW} \right) \\ &= \Delta \left| \det \left(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}, \overrightarrow{XW} \right) \right| \end{aligned}$$

olarak bulunur. □

Sonuç 4.98. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında bir üçgen piramitin Ω -hacmi, bir paralelyüzünün Ω -hacminin 6 da 1 i olduğundan, $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörlerinin belirlediği üçgen piramitin Ω -hacmi

$$Hacim_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{\Delta}{6} |\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})|$$

formülüyle belirlidir.

Örnek 4.99. Matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olan $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında köşe noktaları $X(1, 0, 3)$, $Y(2, 2, 4)$, $Z(3, 1, 4)$ ve $W(2, 1, 4)$ olan üçgen piramidin Ω -hacmi, $\Delta = 3$ olduğu için

$$\begin{aligned} \text{Hacim}_\Omega(X, Y, Z, W) &= \frac{\Delta}{6} \left| \det \left(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}, \overrightarrow{XW} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

dir.

4.2. Üç Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen Uzayda Yansıma Dönüşümü

n -boyutlu Öklid uzayında bir yansıma dönüşümü, sabit bıraktığı noktalar kümesi $(n-1)$ -boyutlu hiperdüzlem olan bir izometridir. Bu yansıma dönüşümünün sabit bıraktığı $(n-1)$ -boyutlu hiperdüzlem yansıma hiperdüzlemi denir. Bu düzlem iki boyutta bir doğru belirtirken üç boyutta bir düzlem belirtir. Bu dönüşümler lineer olduklarından bir matris gösterimine daima sahiptirler. Yansımalar, ters yönlendirmeli ortogonal dönüşümler olduğundan, determinantları -1 'e eşit olan ortogonal matrisler olarak da tanımlanabilirler. Yani, n -boyutlu Öklid uzayında $\mathcal{L}$ yansıma dönüşümleri, bu dönüşümün matrisi L olmak üzere,

$$Y(n) = \{ \mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \in O(n) \mid \det L = -1 \}$$

şeklinde verilebilir. Bu dönüşümlerin matrisleri

$$\{ L \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid L^T L = I_n, \det L = -1 \}$$

kümesinin elemanlarıdır ve bu matrislerin özdeğerleri $1, 1, 1, \dots, 1, -1$ olan simetrik ortogonal matrislerdir. Ortogonal matrisler kümesi bir grup oluşturduğundan iki yansıma matrisinin çarpımının bir dönme dönüşümü oluşturacağı kolayca gözlenebilir. Ancak,

birim dönüşüm bu matrisler arasında yer almadığı veya kapalılık özelliği sağlanmadığı için bu matrisler veya dönüşümler bir grup oluşturmazlar.

İki boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen uzayda bir doğruya göre yansıma dönüşümü Householder dönüşümü kullanarak bölümde incelenmiştir. Bu kısımda, üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayında yansımalar iki farklı yaklaşımla incelenecektir: İlk olarak, genelleştirilmiş eliptik yansımaların matris temsilleri (Erdoğan ve Özdemir 2015) çalışmasındaki yaklaşım dikkate alınarak belirlenmiştir. Daha sonra, genelleştirilmiş eliptik yansımalar pür genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlarla incelenmiştir.

4.2.1. Genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım kullanılarak

Üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen uzayda yansıma veya $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma, genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpımı kullanarak tanımlanır. Sıfırdan farklı $\mathbf{n} \in \mathbb{R}_\Omega^3$ vektörü için tanımlanan

$$\mathbf{n}^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_\Omega^3 \mid \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{n}, \mathbf{y}) = 0\}$$

kümesinin geometrik yeri $\mathbf{n}$ vektörüne Ω -dik olan ve orijinden geçen düzlemdir. Sıfırdan farklı $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri için, $\mathbf{y}$ vektörünün $\mathbf{n}^\perp$ düzlemine Ω -dik iz düşümü, $\mathbf{y} - r\mathbf{n} \in \mathbf{n}^\perp$ şartını sağlayan $r \in \mathbb{R}$ sayısı için, $\mathbf{y} - r\mathbf{n}$ vektörüdür. Böylece, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{y} - r\mathbf{n}$ vektörlerinin Ω -dikliğinden

$$\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{n}, \mathbf{y} - r\mathbf{n}) = 0$$

dir ve r değeri

$$r = \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{n}, \mathbf{y})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{n}, \mathbf{n})}$$

olarak bulunur. Buradan hareketle, bir $\mathbf{x}$ vektörünün $\mathbf{n}^\perp$ düzlemine göre $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma dönüşümü

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2r\mathbf{n} = \mathbf{x} - 2\frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{n}, \mathbf{x})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\mathbf{x} \in \mathbf{n}^\perp$ ise, $\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = 0$ ve dolayısıyla $Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ elde edilir. Yani, $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma dönüşümü düzlem üzerindeki vektörleri sabit bırakır. Genelleştirilmiş

Öklidyen iç çarpım özelliklerinden, herhangi bir $\mathbf{x}$ vektörü için

$$\begin{aligned} Y_{\mathbf{n}}(Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})) &= Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x} - 2r\mathbf{n}) = (\mathbf{x} - 2r\mathbf{n}) - 2\frac{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{x} - 2r\mathbf{n})}{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n} \\ &= (\mathbf{x} - 2r\mathbf{n}) - 2\frac{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) - 2r\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{n})}{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n} \\ &= (\mathbf{x} - 2r\mathbf{n}) - 2\frac{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) - 2r\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{n})}{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n} \\ &= \mathbf{x} - 2r\mathbf{n} - 2r\mathbf{n} + 4r\mathbf{n} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

dir. Yani, $\mathcal{B}_{\Omega}$ -yansıma dönüşümünün tersi kendisine eşittir. Ek olarak,

$$\|Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\|_{\Omega}^2 = \mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x} - 2r\mathbf{n}, \mathbf{x} - 2r\mathbf{n}) = \mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 4r\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + 4r^2\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{n})$$

eşitliğinde $r = \frac{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{x})}{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{n})}$ olduğu göz önünü alınırsa,

$$\|Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\|_{\Omega} = \left(\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 4\frac{(\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{x}))^2}{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{n})} + 4\frac{(\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{x}))^2}{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \right)^{1/2} = \|\mathbf{x}\|_{\Omega}$$

olduğu görülür. Buna göre, $\mathcal{B}_{\Omega}$ -yansıma dönüşümü ortogonaldır ve elipsoid üzerindeki her vektörü yine elipsoid üzerindeki bir vektöre götürür.

Teorem 4.100. $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$, $\mathbb{R}_{\Omega}^3$ iç çarpım uzayında $\|\mathbf{v}\|_{\Omega} = \|\mathbf{w}\|_{\Omega}$ özelliğinde sıfırdan farklı iki vektör olsun. Eğer $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ ise

$$Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

eşitliği doğrudur.

İspat Doğrudan hesaplamalarla

$$\begin{aligned} Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) &= Y_{\mathbf{v}-\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\frac{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{v}-\mathbf{w}, \mathbf{v})}{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{v}-\mathbf{w}, \mathbf{v}-\mathbf{w})}(\mathbf{v}-\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{v} - 2\frac{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{w}, \mathbf{v})}{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - 2\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{w})}(\mathbf{v}-\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{v} - \frac{2(\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{w}, \mathbf{v}))}{2\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - 2\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{w})}(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = \mathbf{w} \end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Dikkat edilirse

$$Y_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\frac{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

dir.

Teorem 4.101. $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$, $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ ve $\|\mathbf{v}\|_\Omega = \|\mathbf{w}\|_\Omega$ olacak şekilde iki vektör olsun. Bu durumda $Y(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olacak şekilde bir $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma dönüşümü vardır ve tektir.

İspat $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma dönüşümü, bir önceki teorem ve $Y_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ sonucundan, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörleri için

$$Y(\mathbf{x}) = \begin{cases} Y_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}), & \mathbf{v} = -\mathbf{w} \\ Y_{\mathbf{v}-\mathbf{w}}(\mathbf{x}), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde inşa edilebilir. Yani özellikleri $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ için, $Y(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olacak şekilde bir Y yansıma dönüşümü vardır. Bu inşa $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ vektörleri için tanımlandığından yansıma dönüşümü tektir. $\square$

Bir $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_\Omega^3$ için $Y(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ şartını sağlayan $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma dönüşümü tek türlü belirli değildir. Başka bir ifadeyle, verilen bir $\mathbf{u}$ vektörünü sabit bırakan sonsuz çoklukta $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma dönüşümü vardır. $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma dönüşümünün standart tabana göre matrisi aşağıdaki şekilde bulunur:

Teorem 4.102. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ vektörü için $\mathbf{n}^\perp$ düzlemine göre $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma matrisi, $\sigma'_{n_i} = n_i(An_1 + Dn_2 + En_3)$, $\sigma''_{n_i} = n_i(Dn_1 + Bn_2 + Fn_3)$ ve $\sigma'''_{n_i} = n_i(En_1 + Fn_2 + Cn_3)$ olmak üzere,

$$Y_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\|\mathbf{n}\|_\Omega^2} \begin{bmatrix} \|\mathbf{n}\|_\Omega^2 - 2\sigma'_{n_1} & -2\sigma''_{n_1} & -2\sigma'''_{n_1} \\ -2\sigma'_{n_2} & \|\mathbf{n}\|_\Omega^2 - 2\sigma''_{n_2} & -2\sigma'''_{n_2} \\ -2\sigma'_{n_3} & -2\sigma''_{n_3} & \|\mathbf{n}\|_\Omega^2 - 2\sigma'''_{n_3} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

İspat $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının standart tabanı olsun. $Y_{\mathbf{n}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü lineer olduğundan, dönüşümün matrisi $Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{e}_i)$ vektörleriyle belirlenebilir. Buradan, teoremden ifade edilen matris, $\sigma'_{n_i} = n_i(An_1 + Dn_2 + En_3)$, $\sigma''_{n_i} = n_i(Dn_1 + Bn_2 + Fn_3)$

ve $\sigma'''_{n_i} = n_i(E n_1 + F n_2 + C n_3)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_1 - 2 \frac{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1)}{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n} \\
 &= \left(1 - 2 \frac{\sigma'_{n_1}}{\|\mathbf{n}\|_{\Omega}^2} n_1, -2 \frac{\sigma'_{n_2}}{\|\mathbf{n}\|_{\Omega}^2} n_2, -2 \frac{\sigma'_{n_3}}{\|\mathbf{n}\|_{\Omega}^2} n_3 \right) \\
 Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_2 - 2 \frac{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2)}{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n} \\
 &= \left(-2 \frac{\sigma''_{n_2}}{\|\mathbf{n}\|_{\Omega}^2} n_1, 1 - 2 \frac{\sigma''_{n_2}}{\|\mathbf{n}\|_{\Omega}^2} n_2, -2 \frac{\sigma'''_{n_2}}{\|\mathbf{n}\|_{\Omega}^2} n_3 \right) \\
 Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_3 - 2 \frac{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_3)}{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n} \\
 &= \left(-2 \frac{\sigma'''_{n_1}}{\|\mathbf{n}\|_{\Omega}^2} n_1, -2 \frac{\sigma'''_{n_2}}{\|\mathbf{n}\|_{\Omega}^2} n_2, 1 - 2 \frac{\sigma'''_{n_3}}{\|\mathbf{n}\|_{\Omega}^2} n_3 \right)
 \end{aligned}$$

hesaplamalarıyla bulunur. □

Sonuç 4.103. $Y_{\mathbf{n}}$ dönüşüm matrisi için $\det(Y_{\mathbf{n}}) = -1$ olduğu görülebilir. Ayrıca $Y_{\mathbf{n}}$ matrisi

$$(Y_{\mathbf{n}})^t \Omega Y_{\mathbf{n}} = \Omega$$

eşitliğini sağladığından Ω -ortogondur. Sonuç olarak $Y_{\mathbf{n}}$ matrisi bir $\mathcal{B}_{\Omega}$ -yansımaya matrisidir. $Y_{\mathbf{n}}$ dönüşüm matrisinin özdeğerleri -1 ve 1 olarak bulunur. Ayrıca -1 özdeğerine karşılık gelen özvektör, $\mathcal{B}_{\Omega}$ -yansımaya düzleminin Ω -normali $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ dir.

Örnek 4.104. $\mathbb{R}_{\Omega}^3$ iç çarpımının ilişkilendirilmiş matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ vektörü için $Y_{\mathbf{n}}$ dönüşümünün matrisi

$$Y_{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bir $\mathbf{a} = (\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$ vektörünün $\mathbf{u}$ vektörüne Ω -dik olan ve orijinden geçen $y + z = 0$ düzlemine göre $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıması

$$\begin{aligned} Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \left(0, -\frac{1}{2}, -1\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse, $\|Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})\|_\Omega = \|\mathbf{a}\|_\Omega = 1$ dir ve ek olarak $\mathbf{a}$ ve $Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})$

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - yz + z^2 = 1$$

elipsoidi üzerindedir.

Bir vektörün orijinden geçen bir doğruya göre $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıması bir dönüşüm olarak tanımlanabilir. Ancak üç boyutta bir doğruya göre $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma, daha önce tanımladığımız $\mathcal{B}_\Omega$ -yansımadan farklıdır. $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma dönüşümü üç boyutta sadece bir düzleme göre tanımlı bir dönüşümdür. Bu sebeple, bir doğruya göre $\mathcal{B}_\Omega$ -yansımayı bir doğruya göre $\mathcal{B}_\Omega$ -simetri dönüşümü olarak ifade etmek uygun olacaktır. Zaten, dikkat edilirse bir doğruya göre $\mathcal{B}_\Omega$ -simetri dönüşümü bir $\mathcal{B}_\Omega$ -yarı dönme oluşturur. Başka bir ifadeyle, üç boyutlu uzayda bir doğruya göre $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma dönüşümü, doğrunun bir doğrultu vektörü etrafında, dönme açısının Ω -ölçüsü π olan dönme dönüşümüdür. Dolayısıyla, üç boyutlu uzayda $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma dönüşümlerinin determinantları -1 iken bir doğruya göre $\mathcal{B}_\Omega$ -simetri dönüşümünün determinantı 1 olacaktır. Benzer durum iki boyutlu uzay için de geçerlidir: İki boyutlu uzayda $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma dönüşümü bir doğruya göre $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma dönüşümüdür ve bu dönüşümlerin determinantları -1 dir. Ancak bir noktaya göre $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma dönüşümleri, -ki bunları bir noktaya göre $\mathcal{B}_\Omega$ -simetri dönüşümü olarak ifade etmek daha uygundur- bir nokta etrafında $\mathcal{B}_\Omega$ -yarı dönme dönüşümüdür ve bu dönüşümlerin determinantları 1 'dir.

Bilindiği gibi, sıfırdan farklı $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{u}$ vektörleri için, $\mathbf{x}$ vektörünün $\mathbf{u}$ vektörüne Ω -dik iz düşüm vektörü

$$\frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u}$$

şeklindedir. Buradan hareketle, doğrultmanı $\mathbf{u}$ olan ve orijinden geçen $\ell_{\mathbf{u}}$ doğrusuna göre

$\mathcal{B}_\Omega$ -simetri dönüşümü, her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_\Omega^3$ için

$$Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = 2 \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u} - \mathbf{x}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\mathbf{x} \parallel \ell_{\mathbf{u}}$ ise $Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ olduğu tanımdan kolayca elde edilir. Orijinden geçen bir doğruya göre $\mathcal{B}_\Omega$ -simetri dönüşümleri doğruya paralel olan vektörleri sabit bırakır. Her $\mathbf{x}$ vektörü için genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım özelliklerinden

$$\begin{aligned} Y_{\mathbf{u}}(Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) &= Y_{\mathbf{u}}\left(2 \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u} - \mathbf{x}\right) \\ &= 2 \frac{\mathcal{B}_\Omega\left(\mathbf{u}, \left(2 \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u} - \mathbf{x}\right)\right)}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u} - \left(2 \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u} - \mathbf{x}\right) \\ &= 2 \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u} - \left(2 \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u} - \mathbf{x}\right) \\ &= \mathbf{x} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani, orijinden geçen bir doğruya göre $\mathcal{B}_\Omega$ -simetri dönüşümünün tersi kendisidir. Genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım özelliklerinden bu dönüşümün Ω -ortogonal olduğu da

$$\begin{aligned} \|Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\|_\Omega^2 &= \mathcal{B}_\Omega\left(2 \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u} - \mathbf{x}, 2 \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u} - \mathbf{x}\right) \\ &= 4 \left(\frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})}\right)^2 \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - 4 \frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \\ &= \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_\Omega^2 \end{aligned}$$

şeklinde görülebilir. Simetri dönüşümünün matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

Teorem 4.105. Doğrultmanı $\mathbf{u}$ vektörü olan ve orijinden geçen ℓ doğrusuna göre $\mathcal{B}_\Omega$ -simetri dönüşümünün matrisi, $\sigma'_{u_i} = u_i(Au_1 + Du_2 + Eu_3)$, $\sigma''_{u_i} = u_i(Du_1 + Bu_2 + Fu_3)$ ve $\sigma'''_{u_i} = u_i(Eu_1 + Fu_2 + Cu_3)$ olmak üzere,

$$Y_{\mathbf{u}} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|_\Omega^2} \begin{bmatrix} 2\sigma'_{u_1} - \|\mathbf{u}\|_\Omega^2 & 2\sigma''_{u_1} & 2\sigma'''_{u_1} \\ 2\sigma'_{u_2} & 2\sigma''_{u_2} - \|\mathbf{u}\|_\Omega^2 & 2\sigma'''_{u_2} \\ 2\sigma'_{u_3} & 2\sigma''_{u_3} & 2\sigma'''_{u_3} - \|\mathbf{u}\|_\Omega^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

İspat $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının standart tabanı olsun. $Y_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü lineer olduğundan, dönüşümün matrisi $Y_u(e_i)$ vektörleriyle belirlenebilir. Buradan, teoremden ifade edilen matris, $\sigma'_{u_i} = u_i(Au_1 + Du_2 + Eu_3)$, $\sigma''_{u_i} = u_i(Du_1 + Bu_2 + Fu_3)$ ve $\sigma'''_{u_i} = u_i(Eu_1 + Fu_2 + Cu_3)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} Y_u(e_1) &= 2 \frac{\mathcal{B}_\Omega(u, e_1)}{\mathcal{B}_\Omega(u, u)} u - e_1 \\ &= \left(2 \frac{\sigma'_{u_1}}{\|u\|_\Omega^2} u_1 - 1, 2 \frac{\sigma'_{u_2}}{\|u\|_\Omega^2} u_2, 2 \frac{\sigma'_{u_3}}{\|u\|_\Omega^2} u_3 \right) \\ Y_u(e_2) &= 2 \frac{\mathcal{B}_\Omega(u, e_2)}{\mathcal{B}_\Omega(u, u)} u - e_2 \\ &= \left(2 \frac{\sigma''_{u_1}}{\|u\|_\Omega^2} u_1, 2 \frac{\sigma''_{u_2}}{\|u\|_\Omega^2} u_2 - 1, 2 \frac{\sigma''_{u_3}}{\|u\|_\Omega^2} u_3 \right) \\ Y_u(e_3) &= 2 \frac{\mathcal{B}_\Omega(u, e_3)}{\mathcal{B}_\Omega(u, u)} u - e_3 \\ &= \left(2 \frac{\sigma'''_{u_1}}{\|u\|_\Omega^2} u_1, 2 \frac{\sigma'''_{u_2}}{\|u\|_\Omega^2} u_2, 2 \frac{\sigma'''_{u_3}}{\|u\|_\Omega^2} u_3 - 1 \right) \end{aligned}$$

hesaplamalarıyla bulunur. □

Sonuç 4.106. Y_u dönüşüm matrisinin determinantının 1 ve özdeğerlerinin de $-1, -1$ ve 1 olduğu görülebilir. Ayrıca Y_u matrisi

$$(Y_u)^t \Omega Y_u = \Omega$$

eşitliğini sağladığından Ω -ortogondur. Sonuç olarak, Y_u matrisi bir $\mathcal{B}_\Omega$ -dönme matrisidir. Bununla birlikte, dönme açısının Ω -ölçüsü de π dir. Simetri eksenini, 1 özdeğerine karşılık gelen $u = (u_1, u_2, u_3)$ vektörüyle belirlenir.

Örnek 4.107. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpımının ilişkilendirilmiş matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Doğrultmanı $u = (1, 1, 1)$ olan doğruya göre $\mathcal{B}_\Omega$ -simetri matrisi

$$Y_u = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ vektörü için $Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = (4, 3, 2)$ bulunur. $Y_{\mathbf{u}}$ matrisi, determinantı 1 olan Ω -ortogonal bir matristir. Ayrıca $\|\mathbf{x}\|_{\Omega} = \|Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\|_{\Omega}$ olduğu görülebilir.

4.2.2. Genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlar kullanılarak

Birim genelleştirilmiş eliptik kuaterniyonlar kullanarak eliptik dönme dönüşümü tanımlanabildiğini kaynak taramasında vermiştik. Bu kısımda, yine eliptik kuaterniyonlar kullanarak eliptik $\mathcal{B}_{\Omega}$ -yansıma dönüşümünün de tanımlanabileceği görülecektir. Burada, genelleştirilmiş eliptik kuaterniyon yerine kısaca Ω -kuaterniyon denir. Ayrıca, bir $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ vektörünü $\mathbf{p} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$ pür Ω -kuaterniyonuyla temsil edilir. Pür Ω -kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{H}_{\Omega}^0$ ile gösterilir. Çarpma işlemi $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ pür Ω -kuaterniyonları için

$$\mathbf{pq} = -\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \mathbf{p} \times_{\Omega} \mathbf{q}$$

şeklinde dir. Birim Ω -küre üzerinde bulunan $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ birim vektörleri arasındaki açının Ω -ölçüsü θ olsun. Bu durumda, $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ birim pür Ω -kuaterniyonları için

$$\cos \theta = \mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{pq} + \mathbf{qp})$$

yazılabilir. Böylece birbirine Ω -dik iki $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ birim vektörleri için

$$\mathbf{pq} + \mathbf{qp} = 0$$

eşitliğinin doğru olduğu görülür. Herhangi bir $\mathbf{q}$ birim Ω -kuaterniyonu için $\mathbf{q}^2 = -1$ dir. Elde edilen denklemde her iki taraf $\mathbf{q}$ Ω -kuaterniyonuyla çarpılıp düzenlenirse Ω -diklik şartı için

$$\mathbf{p} = \mathbf{qpq}$$

eşitliği elde edilir. Bununla birlikte

$$\overline{\mathbf{qpq}} = \overline{\mathbf{qpq}} = -\mathbf{qpq}$$

olduğundan $\mathbf{qpq}$ çarpımı yine bir pür Ω -kuaterniyondur. Bu durumda, $\mathbf{n}$ birim pür Ω -kuaterniyonu için tanımlanan

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{nxn} = \mathbf{x}$$

dönüşümü, Ω -normu korur ve $\mathbf{n}$ vektörüne Ω -dik olan vektörleri, yani Ω -normali $\mathbf{n}$ olan düzlem üzerindeki vektörleri sabit bırakır. Ayrıca $Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}^3 = -\mathbf{n}$ olduğundan Ω -normalin yönünü ters çevirir. Sonuç olarak, Ω -kuaterniyonlarıyla tanımlanan dönüşüm bir yansıma dönüşümüdür.

Teorem 4.108. *Bir $\mathbf{n}$ birim pür Ω -kuaterniyonu için tanımlanan*

$$Y_{\mathbf{n}} : \mathbb{H}_{\Omega}^0 \rightarrow \mathbb{H}_{\Omega}^0$$

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{n}$$

$\mathcal{B}_{\Omega}$ -yansıma dönüşümü Ω -normu koruyan bir lineer dönüşümdür. Ayrıca $Y_{\mathbf{n}}$ dönüşümünün tersi kendisine eşittir.

İspat Norm koruduğu, Ω -kuaterniyonlarda norm özelliklerinden

$$N_{Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})} = N_{\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{n}} = N_{\mathbf{n}}N_{\mathbf{x}}N_{\mathbf{n}} = N_{\mathbf{n}}N_{\mathbf{n}}N_{\mathbf{x}} = N_{\mathbf{x}}$$

şeklinde görülür. Her $a \in \mathbb{R}$ ve her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}_{\Omega}^0$ için

$$Y_{\mathbf{n}}(a\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{n}(a\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{n} = \mathbf{n}(a\mathbf{x})\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{y}\mathbf{n}$$

$$= a(\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{n}) + (\mathbf{n}\mathbf{y}\mathbf{n}) = aY_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) + Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{y})$$

olduğundan $Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ dönüşümü bir lineer dönüşümdür. $Y_{\mathbf{n}}$ dönüşümünü için $\mathbf{n}^2 = -1$ olduğundan,

$$Y_{\mathbf{n}}(Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})) = \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{n}^2\mathbf{x}\mathbf{n}^2 = \mathbf{x}$$

elde edilir. Böylece $Y_{\mathbf{n}}$ dönüşümünün tersinin yine $Y_{\mathbf{n}}$ dönüşümü olduğu gösterilmiş olur.

□

$\mathcal{B}_{\Omega}$ -yansıma dönüşümü birim olmayan $\mathbf{n}$ pür kuaterniyonu için

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_{\mathbf{n}}^2}\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{n}$$

kullanılarak hesaplanabilir. $Y_{\mathbf{n}}$ dönüşümünün matrisini aşağıdaki şekilde verilir.

Teorem 4.109. *Bir $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ birim pür Ω -kuaterniyonu için $Y_{\mathbf{n}}$ dönüşümünün matrisi, $\sigma'_{n_i} = n_i(A n_1 + D n_2 + E n_3)$, $\sigma''_{n_i} = n_i(D n_1 + B n_2 + F n_3)$ ve $\sigma'''_{n_i} = n_i(E n_1 +$*

$Fn_2 + Cn_3$) olmak üzere,

$$Y_{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 1 - 2\sigma'_{n_1} & -2\sigma''_{n_1} & -2\sigma'''_{n_1} \\ -2\sigma'_{n_2} & 1 - 2\sigma''_{n_2} & -2\sigma'''_{n_2} \\ -2\sigma'_{n_3} & -2\sigma''_{n_3} & 1 - 2\sigma'''_{n_3} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

İspat Bir $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ birim pür Ω -kuaterniyonu için $Y_{\mathbf{n}}$ dönüşümünün matrisi, $\sigma'_{n_i} = n_i (An_1 + Dn_2 + En_3)$, $\sigma''_{n_i} = n_i (Dn_1 + Bn_2 + Fn_3)$ ve $\sigma'''_{n_i} = n_i (En_1 + Fn_2 + Cn_3)$ olmak üzere,

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{i}) = \mathbf{i}(1 - 2\sigma'_{n_1}) + \mathbf{j}(-2\sigma'_{n_2}) + \mathbf{k}(-2\sigma'_{n_3})$$

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{j}) = \mathbf{i}(-2\sigma''_{n_1}) + \mathbf{j}(1 - 2\sigma''_{n_2}) + \mathbf{k}(-2\sigma''_{n_3})$$

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{k}) = \mathbf{i}(-2\sigma'''_{n_1}) + \mathbf{j}(-2\sigma'''_{n_2}) + \mathbf{k}(1 - 2\sigma'''_{n_3})$$

hesaplamalarıyla bulunur. □

Sonuç 4.110. $Y_{\mathbf{n}}$ matrisi,

$$(Y_{\mathbf{n}})^t \Omega Y_{\mathbf{n}} = \Omega$$

eşitliğini sağladığından Ω -ortogonaldır ve ek olarak, $\det Y_{\mathbf{n}} = -1$ olduğu için bir $\mathcal{B}_{\Omega}$ -yansıma matrisidir. Ayrıca $Y_{\mathbf{n}}$ matrisinin özdeğerleri -1 ve 1 'dir. Bu dönüşümün yansıma düzleminin Ω -normali, -1 özdeğerine karşılık gelen $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ özvektörüdür.

Örnek 4.111. $\mathbb{R}_{\Omega}^3$ iç çarpımının ilişkilendirilmiş matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bir $\mathbf{x} = (1, 2, 1)$ vektörünün birim Ω -normali $\mathbf{n} = (0, -\frac{1}{2}, -1)$ olan düzleme göre $\mathcal{B}_{\Omega}$ -yansımasının matrisi

$$Y_{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Matrisin determinantı -1 değerine eşittir. $\mathbf{x}$ vektörünün $\mathcal{B}_{\Omega}$ -yansıması $Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = (1, \frac{3}{4}, -\frac{3}{2})$ olarak bulunur. Ayrıca $\|\mathbf{x}\|_{\Omega} = \|Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\|_{\Omega} = 2$ olduğu görülebilir.

$\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında, doğrultmanı bilinen ve orijinden geçen bir doğruya göre $\mathcal{B}_\Omega$ -simetri dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Teorem 4.112. *Bir $\mathbf{x}$ vektörünün, doğrultu vektörü $\mathbf{u}$ birim vektörü olan ve orijinden geçen $\ell_{\mathbf{u}}$ doğrusuna göre $\mathcal{B}_\Omega$ -simetri dönüşümü,*

$$Y_{\mathbf{u}} : \mathbb{H}_\Omega^0 \rightarrow \mathbb{H}_\Omega^0$$

$$Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}\mathbf{x}\mathbf{u}$$

Ω -kuaterniyon çarpımıyla tanımlanır. Bu dönüşüm Ω -normu koruyan bir lineer dönüşümdür. Ayrıca $Y_{\mathbf{u}}$ dönüşümünün tersi kendisine eşittir.

İspat $\mathbf{x}$ vektörü; $\ell_{\mathbf{u}}$ doğrusuna paralel olan $\mathbf{x}_{\parallel}$ vektörü ve doğruya, yani $\mathbf{n}$ vektörüne dik olan $\mathbf{x}_{\perp}$ vektörünün toplamı olarak

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}$$

şeklinde yazılsın. Bu durumda

$$Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}(\mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp})\mathbf{u}$$

$$= -\mathbf{u}\mathbf{x}_{\parallel}\mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{x}_{\perp}\mathbf{u}$$

olur. $\mathbf{u}\mathbf{x}_{\parallel}\mathbf{u}$ ve $\mathbf{u}\mathbf{x}_{\perp}\mathbf{u}$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\mathbf{x}_{\parallel}\mathbf{u} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_{\parallel}\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{u}(-\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}_{\parallel}, \mathbf{u}) + \mathbf{x}_{\parallel} \times_\Omega \mathbf{u}) \\ &= -\mathbf{u}\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}_{\parallel}, \mathbf{u}) \\ &= -\mathbf{u} \|\mathbf{x}_{\parallel}\|_\Omega \|\mathbf{u}\|_\Omega \cos 0 \\ &= -\mathbf{x}_{\parallel} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\mathbf{x}_{\perp}\mathbf{u} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_{\perp}\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{u}(-\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}_{\perp}, \mathbf{u}) + \mathbf{x}_{\perp} \times_\Omega \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_{\perp} \times_\Omega \mathbf{u}) \\ &= -\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{x}_{\perp} \times_\Omega \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times_\Omega (\mathbf{x}_{\perp} \times_\Omega \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{u} \times_\Omega (\mathbf{x}_{\perp} \times_\Omega \mathbf{u}) \\ &= \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \mathbf{x}_{\perp} - \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{x}_{\perp}) \mathbf{u} = \mathbf{x}_{\perp} \end{aligned}$$

hesaplamalarından

$$Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}\mathbf{x}_{\parallel}\mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{x}_{\perp}\mathbf{u} = \mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}_{\perp}$$

elde edilir. O halde, $Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ vektörü, $\mathbf{x}$ vektörünün $\ell_{\mathbf{u}}$ doğrusuna göre $\mathcal{B}_{\Omega}$ -simetriğidir. $\mathcal{B}_{\Omega}$ -simetri dönüşümü $Y_{\mathbf{u}}$ için

$$N_{Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})} = N_{-\mathbf{u}}N_{\mathbf{x}}N_{\mathbf{u}} = N_{\mathbf{u}}N_{\mathbf{u}}N_{\mathbf{x}} = N_{\mathbf{x}}$$

eşitliği sağlandığından Ω -norm korunur. $Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ dönüşümünün lineer olduğu, $a \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}_{\Omega}^0$ için

$$\begin{aligned} Y_{\mathbf{u}}(a\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= -\mathbf{u}(a\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{u} = -\mathbf{u}(a\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{y}\mathbf{u} \\ &= -a(\mathbf{u}\mathbf{x}\mathbf{u}) + \mathbf{u}\mathbf{y}\mathbf{u} = -aY_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

ile görülür. $Y_{\mathbf{u}}$ dönüşümünü $\mathbf{u}^2 = -1$ olduğundan

$$Y_{\mathbf{u}}(Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) = -\mathbf{u}(-\mathbf{u}\mathbf{x}\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{u}^2\mathbf{x}\mathbf{u}^2 = \mathbf{x}$$

bulunur. O halde $Y_{\mathbf{u}}$ dönüşümünün tersi kendisine eşittir.. $\square$

$Y_{\mathbf{u}}$ simetri dönüşümünün standart tabana göre matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

Teorem 4.113. Bir $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ birim pür Ω -kuaterniyonu için $Y_{\mathbf{u}}$ dönüşümünün matrisi, $\sigma'_{u_i} = u_i(Au_1 + Du_2 + Eu_3)$, $\sigma''_{u_i} = u_i(Du_1 + Bu_2 + Fu_3)$ ve $\sigma'''_{u_i} = u_i(Eu_1 + Fu_2 + Cu_3)$ olmak üzere,

$$Y_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 2\sigma'_{u_1} - 1 & 2\sigma''_{u_1} & 2\sigma'''_{u_1} \\ 2\sigma'_{u_2} & 2\sigma''_{u_2} - 1 & 2\sigma'''_{u_2} \\ 2\sigma'_{u_3} & 2\sigma''_{u_3} & 2\sigma'''_{u_3} - 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

İspat Bir $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ birim pür Ω -kuaterniyonu için $Y_{\mathbf{u}}$ dönüşümünün matrisi $\sigma'_{u_i} = u_i(Au_1 + Du_2 + Eu_3)$, $\sigma''_{u_i} = u_i(Du_1 + Bu_2 + Fu_3)$ ve $\sigma'''_{u_i} = u_i(Eu_1 + Fu_2 + Cu_3)$ olmak üzere

$$Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{i}) = (2\sigma'_{u_1} - 1)\mathbf{i} + 2\sigma'_{u_2}\mathbf{j} + 2\sigma'_{u_3}\mathbf{k}$$

$$Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{j}) = 2\sigma''_{u_1}\mathbf{i} + (2\sigma''_{u_2} - 1)\mathbf{j} + 2\sigma''_{u_3}\mathbf{k}$$

$$Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = 2\sigma'''_{u_1}\mathbf{i} + 2\sigma'''_{u_2}\mathbf{j} + (2\sigma'''_{u_3} - 1)\mathbf{k}$$

hesaplamalarıyla bulunur ve istenilen matrisi elde edilir. $\square$

Sonuç 4.114. $Y_{\mathbf{u}}$ matrisi

$$(Y_{\mathbf{u}})^t \Omega Y_{\mathbf{u}} = \Omega$$

eşitliğini sağladığından $\mathcal{B}_{\Omega}$ -ortogonaldir ve ek olarak $\det Y_{\mathbf{u}} = 1$ olduğu için aslında bir $\mathcal{B}_{\Omega}$ -dönme matrisidir. Ayrıca $Y_{\mathbf{u}}$ matrisinin özdeğerlerinin $-1, -1$ ve 1 olduğu görülebilir ve $\mathcal{B}_{\Omega}$ -simetri eksenini 1 özdeğerine karşılık gelen $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vektörüdür.

Örnek 4.115. $\mathbb{R}_{\Omega}^3$ iç çarpım uzayının ilişkilendirilmiş matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bir $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$ vektörünün birim doğrultmanı $\mathbf{u} = (0, -\frac{1}{2}, -1)$ vektörü olan doğrusuna göre $\mathcal{B}_{\Omega}$ -simetriğini bulalım. Simetri matrisi

$$Y_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = (-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ve $\|\mathbf{x}\|_{\Omega} = \|Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\|_{\Omega} = 1$ olduğu görülebilir.

4.3. İki Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen Uzayda Uzaklık Formülleri

Bu kısımda iki boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen uzayda nokta ve doğruyla ilgili uzaklık formülleri elde edilecektir. Burada uzaklıkla kastedilen tabi ki, genelleştirilmiş Öklidyen uzaklıktır ve kısaca Ω -uzaklık olarak belirtilecektir.

4.3.1. İki nokta arasındaki Ω -uzaklık

Her iç çarpımın bir norm ve her normun bir metrik belirlediği bilinmektedir. Genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpımdan elde edilen norm, $A + C > 0$ ve $\det \Omega > 0$ özelliklerine sahip bir

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

matrisi için, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ olmak üzere,

$$\|\mathbf{x}\|_{\Omega} = \sqrt{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2}$$

şeklinde ve bu normdan elde edilen metrik; $X = (x_1, x_2)$ ve $Y = (y_1, y_2)$, sırasıyla $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin uç noktaları olmak üzere,

$$\begin{aligned} d_{\Omega}(X, Y) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\Omega} = \sqrt{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ &= \sqrt{A(x_1 - y_1)^2 + 2B(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + C(x_2 - y_2)^2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Standart Öklid uzaylarında olduğu gibi, burada da iki küme arasındaki Ω -uzaklık

$$d_{\Omega}(X, Y) = \min_{P \in X, Y \in Q} \{d_{\Omega}(P, Q)\}$$

şeklinde alınır.

4.3.2. Bir noktanın bir doğruya olan Ω -uzaklığı

$\mathbb{R}_{\Omega}^2$ iç çarpım uzayında doğrular Öklid düzleminde olduğu gibi tanımlanır. Buna göre, $\mathbb{R}_{\Omega}^2$ iç çarpım uzayında doğruların denklemleri standart Öklid uzayında olduğu gibi aşağıdaki yöntemlerle belirlenir:

1. $\mathbb{R}_{\Omega}^2$ iç çarpım uzayında; geçtiği nokta $P = (p_1, p_2)$ ve doğrultmanı $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ vektörü olan doğrunun denklemi, doğru üzerindeki değişken nokta $X = (x, y)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\overrightarrow{PX} = \lambda \mathbf{a}$ eşitliğinden

$$\frac{x - p_1}{a_1} = \frac{y - p_2}{a_2}$$

olarak bulunur.

2. $\mathbb{R}_{\Omega}^2$ iç çarpım uzayında; geçtiği noktalar $P = (p_1, p_2)$ ve $Q = (q_1, q_2)$ olan doğrunun denklemi, doğru üzerindeki değişken nokta $X = (x, y)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\overrightarrow{PX} = \lambda \overrightarrow{PQ}$ eşitliğinden

$$\frac{x - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{q_2 - p_2}$$

olarak bulunur.

Buradan kolayca görülebilir ki, düzlemde her doğru $ax + by + c = 0$ şeklinde bir denkleme sahiptir. Ek olarak, düzlemde bir doğru $ax + by + c = 0$ denklemiyle veriliyorsa doğrunun doğrultmanı $\mathbf{x} = (-b, a)$ vektörü ve geçtiği bir nokta da $P = (0, -\frac{c}{b})$ noktasıdır.

Öklid düzleminde bir noktanın bir doğruya olan uzaklığı noktanın doğruya olan dik uzaklığıdır. Aynı zamanda bu uzaklık doğrunun doğrultmanı ve nokta ile doğru üzerindeki başka bir noktadan elde edilen vektör yardımıyla inşa edilen paralelkenarın yüksekliğidir. Aynı yöntemleri $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında uygulayarak bir noktanın bir doğruya olan Ω -uzaklığı aşağıdaki gibi bulunabilir:

Teorem 4.116. $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında bir A noktasının, P noktasından geçen ve doğrultmanı $\mathbf{x}$ vektörü olan doğruya Ω -uzaklığı

$$h = \frac{\sqrt{\|\mathbf{x}\|_\Omega^2 \|\overrightarrow{PA}\|_\Omega^2 - \mathcal{B}_\Omega^2(\overrightarrow{PA}, \mathbf{x})}}{\|\mathbf{x}\|_\Omega}$$

veya

$$h = \left\| \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PA}_{\text{izd}\mathbf{x}}^\Omega \right\|_\Omega$$

formülü ile bulunur.

İspat $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında bir A noktası ve doğrunun geçtiği P noktasıyla $\overrightarrow{PA}$ vektörünü inşa edelim. Bu durumda $\overrightarrow{PA}$ ve $\mathbf{x}$ vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarın Ω -alanı 4.2 tanımından

$$\begin{aligned} \text{Alan}_\Omega(\overrightarrow{PA}, \mathbf{x}) &= \sqrt{\mathcal{B}_\Omega(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA}) \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \mathcal{B}_\Omega^2(\overrightarrow{PA}, \mathbf{x})} \\ &= \sqrt{\|\mathbf{x}\|_\Omega^2 \|\overrightarrow{PA}\|_\Omega^2 - \mathcal{B}_\Omega^2(\overrightarrow{PA}, \mathbf{x})} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Tabanı $\mathbf{x}$ vektörü olan paralelkenarın Ω -yüksekliği

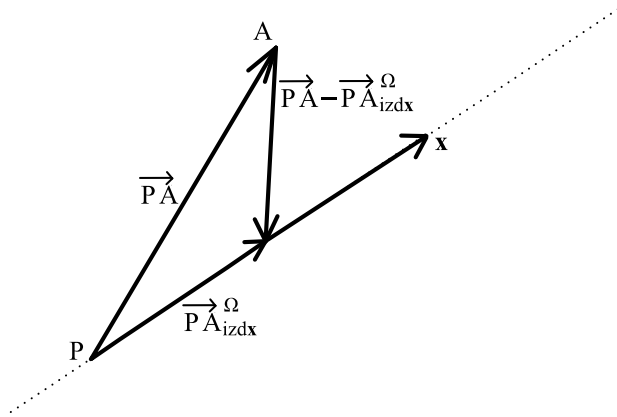
$$\begin{aligned} h &= \frac{\text{Alan}_\Omega(\overrightarrow{PA}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|_\Omega} \\ &= \frac{\sqrt{\|\mathbf{x}\|_\Omega^2 \|\overrightarrow{PA}\|_\Omega^2 - \mathcal{B}_\Omega^2(\overrightarrow{PA}, \mathbf{x})}}{\|\mathbf{x}\|_\Omega} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu da istenilen Ω -uzaklığını verecektir. Diğer formül yukarıda elde edilen formülden elde edilebilir. $\overrightarrow{PA}$ ve $\overrightarrow{PA}_{\text{izd}\mathbf{x}}^\Omega$ vektörleri için $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PA}_{\text{izd}\mathbf{x}}^\Omega$ vektörü

doğruya diktir (Bkz. Şekil 4.5). Bu durumda $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PA}_{izdx}^\Omega$ vektörünün Ω -normu istenilen uzaklığı verecektir. Bu norm $\overrightarrow{PA}_{izdx}^\Omega = \frac{\mathcal{B}_\Omega(\overrightarrow{PA}, \mathbf{x})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \mathbf{x}$ olduğu göze alınırsa

$$\begin{aligned}
 h &= \left\| \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PA}_{izdx}^\Omega \right\|_\Omega \\
 &= \sqrt{\mathcal{B}_\Omega \left(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PA}_{izdx}^\Omega, \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PA}_{izdx}^\Omega \right)} \\
 &= \sqrt{\mathcal{B}_\Omega \left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA} \right) - 2\mathcal{B}_\Omega \left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA}_{izdx}^\Omega \right) + \mathcal{B}_\Omega \left(\overrightarrow{PA}_{izdx}^\Omega, \overrightarrow{PA}_{izdx}^\Omega \right)} \\
 &= \sqrt{\left\| \overrightarrow{PA} \right\|_\Omega^2 - 2 \frac{\mathcal{B}_\Omega \left(\overrightarrow{PA}, \mathbf{x} \right)}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \mathcal{B}_\Omega \left(\overrightarrow{PA}, \mathbf{x} \right) + \frac{\mathcal{B}_\Omega^2 \left(\overrightarrow{PA}, \mathbf{x} \right)}{\mathcal{B}_\Omega^2(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \\
 &= \sqrt{\left\| \overrightarrow{PA} \right\|_\Omega^2 - 2 \frac{\mathcal{B}_\Omega^2 \left(\overrightarrow{PA}, \mathbf{x} \right)}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})} + \frac{\mathcal{B}_\Omega^2 \left(\overrightarrow{PA}, \mathbf{x} \right)}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})}} \\
 &= \frac{\sqrt{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \left\| \overrightarrow{PA} \right\|_\Omega^2 - \mathcal{B}_\Omega^2 \left(\overrightarrow{PA}, \mathbf{x} \right)}}{\sqrt{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})}} \\
 &= \frac{\sqrt{\left\| \mathbf{x} \right\|_\Omega^2 \left\| \overrightarrow{PA} \right\|_\Omega^2 - \mathcal{B}_\Omega^2 \left(\overrightarrow{PA}, \mathbf{x} \right)}}{\left\| \mathbf{x} \right\|_\Omega}
 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Paralelkenar Ω -alanıyla elde edilen uzaklık formülüyle, izdüşüm kullanarak elde edilen formül aynı alanı verdiği görülür. $\square$



Şekil 4.5. $\overrightarrow{PA}$ vektörünün doğruya Ω -dik izdüşümü

Örnek 4.117. $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayının ilişkili matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

olsun. Bir $\ell : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1}$ doğrusunun geçtiği nokta $A = (3, 1)$ ve doğrultmanı $\mathbf{x} = (2, 1)$ vektörüdür. Buna göre, bir $P = (1, 2)$ noktası için $\overrightarrow{PA} = (2, -1)$ dir ve P noktasının ℓ doğrusuna olan uzaklığı

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sqrt{\|\mathbf{x}\|_{\Omega}^2 \|\overrightarrow{PA}\|_{\Omega}^2 - \mathcal{B}_{\Omega}^2(\overrightarrow{PA}, \mathbf{x})}}{\|\mathbf{x}\|_{\Omega}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Aynı uzaklık

$$h = \left\| \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PA}_{\Omega}^{\text{izd}\mathbf{x}} \right\|_{\Omega}$$

formülüyle elde edilebilir. Bunun için

$$\overrightarrow{PA}_{\Omega}^{\text{izd}\mathbf{x}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

değeri hesaplanır ve

$$\begin{aligned} h &= \left\| (2, -1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\|_{\Omega} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\mathbb{R}_{\Omega}^2$ iç çarpım uzayında bir noktanın, denklemi $ax + by + c = 0$ olan doğruya Ω -uzaklığı aşağıdaki elde edilen formülle bulunur

Teorem 4.118. $\mathbb{R}_{\Omega}^2$ iç çarpım uzayı

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

matrisiyle tanımlı olsun. Bir $A = (x_0, y_0)$ noktasının, denklemi $ax + by + c = 0$ olan doğruya Ω -uzaklığı, Δ iç çarpım sabiti olmak üzere,

$$h = \frac{\Delta |ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{Ca^2 - 2Bab + Ab^2}}$$

formülü ile bulunur.

İspat Denklemi $ax + by + c = 0$ olan doğrunun doğrultmanı $\mathbf{x} = (-b, a)$ vektörü ve geçtiği bir nokta $P = (0, -\frac{c}{b})$ noktasıdır. Bu durumda $\overrightarrow{AP} = (-x_0, -\frac{c}{b} - y_0)$ bulunur. Önceki teoreme göre P noktasının verilen doğruya Ω -uzaklığı

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sqrt{\|\mathbf{x}\|_{\Omega}^2 \|\overrightarrow{AP}\|_{\Omega}^2 - \left(\mathcal{B}_{\Omega}(\overrightarrow{AP}, \mathbf{x})\right)^2}}{\|\mathbf{x}\|_{\Omega}} \\ &= \frac{\sqrt{(AC - B^2)(c + ax_0 + by_0)^2}}{\sqrt{Ca^2 - 2Bab + Ab^2}} \\ &= \frac{\Delta |ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{Ca^2 - 2Bab + Ab^2}} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. □

Örnek 4.119. Aynı parametrelerle, bir önceki örneği göz önüne alınsın. $A = (1, 2)$ noktasının $\ell : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1}$ doğrusuna Ω -uzaklığı bulunmuştu. ℓ doğrusunun kapalı formu $x - 2y - 1 = 0$ şeklindedir. Son teoremdeki formül kullanılarak, $\Delta = \sqrt{5}$ için Ω -uzaklık

$$\begin{aligned} h &= \frac{\Delta |ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{Ca^2 - 2Bab + Ab^2}} \\ &= \frac{\sqrt{5} |-4|}{\sqrt{3 + 4 + 8}} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

şeklinde, yine aynı değer olarak bulunur.

$\mathbb{R}_{\Omega}^2$ de bir noktanın bir doğruya olan Ω -uzaklığı formülü kullanılarak paralel iki doğru arasındaki uzaklık da aşağıdaki gibi kolayca elde edilebilir:

Teorem 4.120. $\mathbb{R}_{\Omega}^2$ de $\ell_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $\ell_2 : a_1x + b_1y + c_2 = 0$ paralel doğruları arasındaki uzaklık, Δ iç çarpım sabiti olmak üzere,

$$h = \frac{\Delta |c_2 - c_1|}{\sqrt{Ca_1^2 - 2Ba_1b_1 + Ab_1^2}}$$

formülü ile bulunur.

İspat Denklemi $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ olan doğrunun geçtiği nokta $P = (p_1, p_2)$ ise $a_1p_1 + b_1p_2 = -c_1$ olur. ℓ_2 doğrusunun doğrultman vektörü $\mathbf{x} = (-b_1, a_1)$ için iki paralel

doğru arasındaki uzaklık

$$\begin{aligned} h &= \frac{\Delta |a_1 p_1 + b_1 p_2 + c_2|}{\sqrt{Ca_1^2 - 2Ba_1 b_1 + Ab_1^2}} \\ &= \frac{\Delta |a_1 p_1 + b_1 p_2 + c_2|}{\sqrt{Ca_1^2 - 2Ba_1 b_1 + Ab_1^2}} \\ &= \frac{\Delta |c_2 - c_1|}{\sqrt{Ca_1^2 - 2Ba_1 b_1 + Ab_1^2}} \end{aligned}$$

olarak bulunur. □

Örnek 4.121. $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayının ilişkili matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

olsun. Paralel $\ell_1 : x - 2y - 1 = 0$ ve $\ell_2 : 3x - 6y - 4 = 0$ doğruları arası uzaklık, $\Delta = \sqrt{5}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} h &= \frac{\Delta |c_2 - c_1|}{\sqrt{Ca_2^2 - 2Ba_2 b_2 + Ab_2^2}} \\ h &= \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{135}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

4.4. Üç Boyutlu Genelleştirilmiş Öklidyen Uzayda Uzaklık Formülleri

Bu kısımda üç boyutta önce doğrularla, daha sonra da düzlemlerle ilgili uzaklık formülleri elde edilecektir.

4.4.1. İki nokta arasındaki Ω -uzaklık

Üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayında, pozitif tanımlı simetrik matris

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ için norm

$$\|\mathbf{x}\|_\Omega = \sqrt{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Dx_1x_2 + 2Ex_1x_3 + 2Fx_2x_3}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan hareketle üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayında metrik: $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$, sırasıyla $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin uç noktaları olmak üzere,

$$\begin{aligned} d_{\Omega}(X, Y) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\Omega} = \sqrt{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ &= \sqrt{A(x_1 - y_1)^2 + B(x_2 - y_2)^2 + C(x_3 - y_3)^2 + 2D(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \\ &\quad + 2E(x_1 - y_1)(x_3 - y_3) + 2F(x_2 - y_2)(x_3 - y_3)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

4.4.2. Bir noktanın bir doğruya olan Ω -uzaklığı

Üç boyutlu standart Öklid uzayında bir P noktasının, A noktasından geçen ve doğrultmanı $\mathbf{x}$ vektörü olan bir doğruya olan uzaklığı iç çarpım veya vektörel çarpım kullanılarak bulunabilir. İç çarpımla elde edilen formül, bir önceki kısımda kullanılan paralelkenar yöntemiyle

$$h = \frac{\text{Alan}_{\Omega}(\mathbf{x}, \overrightarrow{AP})}{\|\mathbf{x}\|_{\Omega}} = \frac{\sqrt{\|\mathbf{x}\|_{\Omega}^2 \|\overrightarrow{AP}\|_{\Omega}^2 - (\mathcal{B}_{\Omega}(\overrightarrow{AP}, \mathbf{x}))^2}}{\|\mathbf{x}\|_{\Omega}}$$

şeklinde elde edilebilir. Bir noktanın bir doğruya Ω -uzaklığı vektörel çarpım kullanarak elde edilebilir.

Teorem 4.122. $\mathbb{R}_{\Omega}^3$ iç çarpım uzayında, P noktasının, A noktasından geçen ve doğrultmanı $\mathbf{u}$ olan doğruya Ω -uzaklığı

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times_{\Omega} \mathbf{u}\|_{\Omega}}{\|\mathbf{u}\|_{\Omega}}$$

formülü ile bulunur.

İspat $\overrightarrow{AP}$ ve $\mathbf{u}$ vektörü ile oluşturulan paralelkenarın Ω -alanı $\|\overrightarrow{AP} \times_{\Omega} \mathbf{u}\|_{\Omega}$ olduğunu biliyoruz. Aranılan Ω -uzaklık, bu paralelkenarın $\mathbf{u}$ tabanına ait Ω -yüksekliği olduğundan, P noktasının verilen doğruya olan Ω -uzaklığı

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times_{\Omega} \mathbf{u}\|_{\Omega}}{\|\mathbf{u}\|_{\Omega}}$$

formülü elde edilir. □

Örnek 4.123. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında ilişkili matris

$$\Omega = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda $P = (1, 1, 1)$ noktasının, $A = (-2, 0, -1)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $\mathbf{u} = (2, 2, 1)$ olan doğruya olan Ω -uzaklığı, $\overrightarrow{AP} = (3, 1, 2)$ olduğundan, elde edilen formül kullanılarak,

$$\begin{aligned} h &= \frac{\|\overrightarrow{AP} \times_\Omega \mathbf{u}\|_\Omega}{\|\mathbf{u}\|_\Omega} \\ &= \frac{\|(15, 3, 24)\|_\Omega}{\|(2, 2, 1)\|_\Omega} \\ &= \frac{\sqrt{162}}{\sqrt{27}} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

şekilde bulunur.

4.4.3. Bir noktanın bir düzleme olan Ω -uzaklığı

$\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında bir noktanın, Ω -normali verilen bir düzleme olan uzaklığı aşağıdaki gibi bulunur:

Teorem 4.124. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında, bir $P = (p_1, p_2, p_3)$ noktasının, $A = (a_1, a_2, a_3)$ noktasından geçen ve Ω -normali $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ olan düzleme Ω -uzaklığı

$$h = \frac{|\mathcal{B}_\Omega(\overrightarrow{AP}, \mathbf{n})|}{\|\mathbf{n}\|_\Omega}$$

formülü ile bulunur.

İspat A ve P noktalarıyla $\overrightarrow{AP}$ vektörü oluşturulsun. $\overrightarrow{AP}$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri arasındaki açının Ω -ölçüsü θ olsun. $\overrightarrow{AP}$ vektörünün $\mathbf{n}$ vektörü üzerine Ω -dik izdüşüm vektörünün Ω -normu istenen Ω -uzaklığı verecektir. Bu durumda istenilen Ω -uzaklık, izdüşüm vektörü

$$\overrightarrow{AP}_{izd\mathbf{n}} = \frac{\mathcal{B}_\Omega(\overrightarrow{AP}, \mathbf{n})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n}$$

olduğundan istenilen

$$\begin{aligned}
 h &= \left\| \overrightarrow{AP}_{\text{izd}\mathbf{n}} \right\|_{\Omega} \\
 &= \left| \frac{\mathcal{B}_{\Omega}(\overrightarrow{AP}, \mathbf{n})}{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \right| \|\mathbf{n}\|_{\Omega} \\
 &= \frac{|\mathcal{B}_{\Omega}(\overrightarrow{AP}, \mathbf{n})|}{\|\mathbf{n}\|_{\Omega}^2} \|\mathbf{n}\|_{\Omega} \\
 &= \frac{|\mathcal{B}_{\Omega}(\overrightarrow{AP}, \mathbf{n})|}{\|\mathbf{n}\|_{\Omega}}
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. □

Örnek 4.125. $\mathbb{R}_{\Omega}^3$ iç çarpım uzayı

$$\Omega = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisiyle tanımlansın. $3x + 2y + z = 0$ düzlemini sağlayan bir nokta olarak, $A = (1, 1, -5)$ alınabilir. Ek olarak, düzlemin Ω -normali de (4.4) formülü kullanılarak, $\Delta = 3$, $\Delta_1 = \frac{35}{3}$, $\Delta_2 = \frac{2}{3}$, $\Delta_3 = 6$, $\Delta_4 = \frac{4}{3}$, $\Delta_5 = 8$, $\Delta_6 = 1$ olduğundan, $\mathbf{n} = (\frac{28}{3}, \frac{17}{9}, \frac{115}{9})$ olarak alınabilir. Buna göre, $P = (1, 1, 1)$ noktasının $3x + 2y + z = 0$ düzlemine olan Ω -uzaklığı,

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{|\mathcal{B}_{\Omega}(\overrightarrow{AP}, \mathbf{n})|}{\|\mathbf{n}\|_{\Omega}} \\
 &= \frac{|\mathcal{B}_{\Omega}((0, 0, 6), (\frac{28}{3}, \frac{17}{9}, \frac{115}{9}))|}{\|(\frac{28}{3}, \frac{17}{9}, \frac{115}{9})\|_{\Omega}} \\
 &= \frac{18}{401} \sqrt{401}
 \end{aligned}$$

değerine eşittir.

$\mathbb{R}_{\Omega}^3$ iç çarpım uzayında bir noktanın denklemi $ax + by + cz + d = 0$ olan düzleme Ω -uzaklığı aşağıdaki formülle bulunur.

Teorem 4.126. $\mathbb{R}_{\Omega}^3$ iç çarpım uzayında, verilen bir $P = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının $ax + by + cz + d = 0$ düzlemine olan Ω -uzaklığı

$$h = \frac{\sqrt{\Delta} |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{\Delta_3 a^2 + \Delta_2 b^2 + \Delta_1 c^2 + 2\Delta_6 ab + 2\Delta_5 ac + 2\Delta_4 bc}}$$

formülüyle bulunur.

İspat (4.4) formülünden; $ax + by + cz + d = 0$ düzlemin normali, $\Delta = \sqrt{\det \Omega}$, $\Delta_1 = (AB - D^2)/\Delta$, $\Delta_2 = (AC - E^2)/\Delta$, $\Delta_3 = (BC - F^2)/\Delta$, $\Delta_4 = (DE - AF)/\Delta$, $\Delta_5 = (DF - BE)/\Delta$ ve $\Delta_6 = (EF - CD)/\Delta$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{\Delta} (a\Delta_3 + b\Delta_6 + c\Delta_5) \\ n_2 &= \frac{1}{\Delta} (a\Delta_6 + b\Delta_2 + c\Delta_4) \\ n_3 &= \frac{1}{\Delta} (a\Delta_5 + b\Delta_4 + c\Delta_1) \end{aligned}$$

$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ vektörüdür. $A = (a_1, a_2, a_3)$ düzlem üzerindeki bir nokta olarak alınırsa, $\overrightarrow{AP} = (x_0 - a_1, y_0 - a_2, z_0 - a_3)$ dir ve A noktası düzlem denklemini sağlayacağından

$$aa_1 + ba_2 + ca_3 = -d$$

dir. Buna göre, $P = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının $ax + by + cz + d = 0$ düzlemine olan Ω -uzaklığı $\overrightarrow{AP}$ nin $\mathbf{n}$ vektörüne Ω -dik izdüşüm vektörünün normu olacağından

$$\begin{aligned} h &= \frac{|\mathcal{B}_\Omega(\overrightarrow{AP}, \mathbf{n})|}{\|\mathbf{n}\|_\Omega} \\ &= \frac{\Delta |(ax_0 + by_0 + cz_0 - a_1 - ba_2 - ca_3)|}{\sqrt{\Delta (\Delta_3 a^2 + \Delta_2 b^2 + \Delta_1 c^2 + 2\Delta_6 ab + 2\Delta_5 ac + 2\Delta_4 bc)}} \\ &= \frac{\sqrt{\Delta} |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{\Delta_3 a^2 + \Delta_2 b^2 + \Delta_1 c^2 + 2\Delta_6 ab + 2\Delta_5 ac + 2\Delta_4 bc}} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. □

Örnek 4.127. Aynı parametrelerle, önceki örneği göz önüne alınabilir. $3x + 2y + z = 0$ düzleminin Ω -normali, (4.4) formülü yardımıyla, $\Delta = 3$, $\Delta_1 = \frac{35}{3}$, $\Delta_2 = \frac{2}{3}$, $\Delta_3 = 6$, $\Delta_4 = \frac{4}{3}$, $\Delta_5 = 8$, $\Delta_6 = 1$ olduğundan $\mathbf{n} = (\frac{28}{3}, \frac{17}{9}, \frac{115}{9})$ olarak bulunur. Buna göre, $P = (1, 1, 1)$ noktasının $3x + 2y + z = 0$ düzlemine olan Ω -uzaklığı

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sqrt{\Delta} |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{(\Delta_3 a^2 + \Delta_2 b^2 + \Delta_1 c^2 + 2\Delta_6 ab + 2\Delta_5 ac + 2\Delta_4 bc)}} \\ &= \frac{18}{401} \sqrt{401} \end{aligned}$$

şeklinde yine aynı değere eşittir.

Uzayda bir noktanın bir düzleme olan Ω -uzaklığı formülü kullanılarak, iki paralel düzlem arasındaki Ω -uzaklık da kolayca aşağıdaki gibi bulunabilir.

Teorem 4.128. $\mathbb{R}_\Omega^3$ uzayında, $d_1 \neq d_2$ olmak üzere, birbirine paralel $D_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$ ve $D_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$ düzlemleri arasındaki Ω -uzaklık

$$h = \frac{\sqrt{\Delta} |d_2 - d_1|}{\sqrt{\Delta_3 a^2 + \Delta_2 b^2 + \Delta_1 c^2 + 2\Delta_6 ab + 2\Delta_5 ac + 2\Delta_4 bc}}$$

formülü ile bulunur.

İspat $P = (x_0, y_0, z_0)$ noktası D_2 düzleminde olsun. Bu durumda $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d_2$ yazılabilir. Buna göre, P noktasının D_1 düzlemine olan Ω -uzaklığı

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sqrt{\Delta} |ax_0 + by_0 + cz_0 + d_1|}{\sqrt{\Delta_3 a^2 + \Delta_2 b^2 + \Delta_1 c^2 + 2\Delta_6 ab + 2\Delta_5 ac + 2\Delta_4 bc}} \\ &= \frac{\sqrt{\Delta} |d_2 - d_1|}{\sqrt{\Delta_3 a^2 + \Delta_2 b^2 + \Delta_1 c^2 + 2\Delta_6 ab + 2\Delta_5 ac + 2\Delta_4 bc}} \end{aligned}$$

olarak bulunur. □

Örnek 4.129. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayı

$$\Omega = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisiyle tanımlansın. $D_1 : 3x + 2y + z + 5 = 0$ ve $D_2 : 3x + 2y + z + 3 = 0$ verilen iki paralel düzlem olsun. Bu düzlemlerin Ω -normali, (4.4) formülü kullanılarak, $\Delta = 3$, $\Delta_1 = \frac{35}{3}$, $\Delta_2 = \frac{2}{3}$, $\Delta_3 = 6$, $\Delta_4 = \frac{4}{3}$, $\Delta_5 = 8$, $\Delta_6 = 1$ olduğundan, $\mathbf{n} = (\frac{28}{3}, \frac{17}{9}, \frac{115}{9})$ şeklinde bulunur. Bu durumda aranan Ω -uzaklık

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sqrt{\Delta} |d_2 - d_1|}{\sqrt{\Delta_3 a^2 + \Delta_2 b^2 + \Delta_1 c^2 + 2\Delta_6 ab + 2\Delta_5 ac + 2\Delta_4 bc}} \\ &= \frac{6}{401} \sqrt{401} \end{aligned}$$

değerine eşittir.

4.4.4. Aykırı iki doğru arasındaki Ω -uzaklık

Üç boyutlu standart Öklid uzayında paralel olmayan ve kesişmeyen doğruya aykırı doğrular denir. Genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayında iki aykırı doğru arasındaki Ω -uzaklık, standart Öklid uzayına benzer olarak aşağıdaki şekilde incelenebilir:

Teorem 4.130. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında; P noktasından geçen ve doğrultmanı $\mathbf{u}$ olan doğru ile Q noktasından geçen ve doğrultmanı $\mathbf{v}$ olan doğru arasındaki Ω -uzaklık

$$h = \frac{\Delta \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{PQ})}{\|\mathbf{u} \times_\Omega \mathbf{v}\|_\Omega}$$

formülü ile bulunur.

İspat Verilen P ve Q noktalarından $\overrightarrow{PQ}$ vektörü oluşturulsun. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ve $\overrightarrow{PQ}$ vektörleriyle oluşturulan paralelyüzün hacmi

$$|\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{PQ})|$$

değerine eşittir. Oluşturulan paralelyüzün tabanı, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenar olarak düşünüldüğünde; bu paralelyüzün Ω -yüksekliği, P noktasının, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleriyle oluşturulan tabana -yani, bu vektörlerin gerdiği düzleme- olan Ω -uzaklığına eşittir. Bu Ω -uzaklık paralelyüzün yüksekliği olduğundan en kısa uzaklıktır. Paralelyüzün Ω -yüksekliği ve tabanın Ω -alanı $\|\mathbf{u} \times_\Omega \mathbf{v}\|_\Omega$ için

$$h = \frac{|\Delta \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{PQ})|}{\|\mathbf{u} \times_\Omega \mathbf{v}\|_\Omega}$$

şeklinde bulunur. □

Örnek 4.131. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayı

$$\Omega = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisiyle tanımlansın. Bu durumda $P(2, 1, -1)$ noktasının doğrultu vektörü $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ olan doğrunun $Q(3, 2, 0)$ noktasından geçen ve doğrultusu $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$ doğruya olan uzaklığı Bu durumda $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 1)$ $\Delta = 3$ için Ω -hacim

$$|\Delta \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{PQ})| = 3$$

olarak bulunur. Tabanın Ω -alanı, $\mathbf{u} \times_{\Omega} \mathbf{v} = (-17, -\frac{7}{3}, -\frac{77}{3})$ için,

$$\|\mathbf{u} \times_{\Omega} \mathbf{v}\|_{\Omega} = \sqrt{173}$$

dir. Sonuç olarak, verilen iki doğru arasındaki en kısa Ω -uzaklık

$$\frac{\Omega\text{-hacim}}{\Omega\text{-taban alanı}} = \frac{3}{\sqrt{173}}$$

değerine eşittir.



5. SONUÇLAR

$\mathbb{R}^2$ vektör uzayında $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ vektörleri ve reel girdili, simetrik ve pozitif tanımlı

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

matrisi için, genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım veya $\mathcal{B}_\Omega$ -iç çarpım

$$\mathcal{B}_\Omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{x}^T \Omega \mathbf{y} \\ &= Ax_1y_1 + B(x_1y_2 + x_2y_1) + Cx_2y_2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu iç çarpımla birlikte tanımlanan $\mathbb{R}^2$ iç çarpım uzayına iki boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayı veya kısaca genelleştirilmiş Öklidyen uzay denir ve $\mathbb{R}_\Omega^2$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında da benzer olarak, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri ve reel girdili, simetrik ve pozitif tanımlı

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}$$

matrisi için, genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım veya $\mathcal{B}_\Omega$ -iç çarpım

$$\mathcal{B}_\Omega : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{x}^T \Omega \mathbf{y} \\ &= Ax_1y_1 + Bx_2y_2 + Cx_3y_3 + D(x_1y_2 + x_2y_1) + E(x_1y_3 + x_3y_1) + F(x_2y_3 + y_2x_3) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu iç çarpımla birlikte tanımlanan $\mathbb{R}^3$ iç çarpım uzayına üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayı veya kısaca genelleştirilmiş Öklidyen uzay denir ve $\mathbb{R}_\Omega^3$ ile gösterilir. Genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpımının sabiti, iki boyut için

$$\Delta = \sqrt{\det \Omega} = \sqrt{AC - B^2},$$

ve üç boyut için

$$\Delta = \sqrt{\det \Omega} = \sqrt{ABC + 2FDE - AF^2 - CD^2 - BE^2}$$

şeklinde elde edilir.

Bu tez çalışmasında, yukarıda tanımlanan iki ve üç boyutlu genelleştirilmiş Öklidyen uzaylarda elde edilen sonuçlar özetle aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Genelleştirilmiş Öklidyen iç çarpım uzayında $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın Ω -alanı

$$Alan_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - \mathcal{B}_{\Omega}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

olarak tanımlıdır.

2. $\mathbb{R}_{\Omega}^2$ iç çarpım uzayında; köşe noktalarının koordinatları $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ ve $Z = (z_1, z_2)$ olan bir üçgenin Ω -alanı, $\Delta = \sqrt{AC - B^2}$ iç çarpım sabitini göstermek üzere,

$$Alan_{\Omega}(X, Y, Z) = \frac{\Delta}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{bmatrix} \right|$$

değerine eşittir. Dikkat edilirse bu alan, Öklid uzayındaki alanın Δ ile çarpımına eşittir. Yani,

$$Alan_{\Omega}(X, Y, Z) = \Delta Alan(X, Y, Z)$$

dir.

3. $\mathbb{R}_{\Omega}^3$ iç çarpım uzayında verilen $ax + by + cz + d = 0$ düzleminin bir Ω -normali,

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{\Delta} (a\Delta_3 + b\Delta_6 + c\Delta_5) \\ n_2 &= \frac{1}{\Delta} (a\Delta_6 + b\Delta_2 + c\Delta_4) \\ n_3 &= \frac{1}{\Delta} (a\Delta_5 + b\Delta_4 + c\Delta_1) \end{aligned}$$

olmak üzere, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ vektörüdür.

4. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörleri için

$$(\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}) \times_\Omega \mathbf{z} = \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathbf{y} - \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \mathbf{x}$$

eşitliği doğrudur.

5. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörleri için tanımlanan $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]_\Omega$ karma çarpımı,
 $\Delta = \sqrt{ABC + 2FDE - AF^2 - CD^2 - BE^2}$ iç çarpım sabitini göstermek üzere,

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]_\Omega = \Delta \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

dir.

6. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörleri için

$$\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y} \times_\Omega \mathbf{z})$$

eşitliği doğrudur.

7. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ ve $\mathbf{w}$ vektörleri için

$$\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}, \mathbf{z} \times_\Omega \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{z}) & \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \\ \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{z}) & \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \end{vmatrix}$$

eşitliği doğrudur.

8. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri arasındaki açının Ω -ölçüsü θ olsun. Bu durumda

$$\|\mathbf{x} \times_\Omega \mathbf{y}\|_\Omega = \|\mathbf{x}\|_\Omega \|\mathbf{y}\|_\Omega \sin \theta$$

eşitliği doğrudur. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleriyle inşa edilen paralelkenarın Ω -alanı

$$\|\mathbf{x}\|_\Omega \|\mathbf{y}\|_\Omega \sin \theta$$

değerine eşittir.

9. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında X , Y , Z ve W noktalarıyla elde edilen $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{XZ}$ ve $\overrightarrow{XW}$ vektörlerinin oluşturduğu paralelyüzlünün Ω -hacmi

$$Hacim_\Omega(X, Y, Z, W) = \Delta \left| \det(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}, \overrightarrow{XW}) \right|$$

değerine eşittir. Ek olarak, $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörlerinin belirlediği üçgen piramitin Ω -hacmi, bu vektörlerin belirlediği paralelyüzlünün Ω -hacminin 6'da 1'i olduğundan, üçgen piramitin Ω -hacmi

$$Hacim_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{\Delta}{6} |\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})|$$

formülüyle belirlidir.

10. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında bir $\mathbf{y}$ vektörünün $\mathbf{x}^\perp$ düzlemine göre yansıma dönüşümü

$$Y_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - 2r\mathbf{x} = \mathbf{y} - 2\frac{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})}\mathbf{x}$$

şeklinde tanımlanır.

11. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında birbirinden ve sıfırdan farklı $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörleri için $\|\mathbf{v}\|_\Omega = \|\mathbf{w}\|_\Omega$ ise $Y(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olacak şekilde bir Y yansıma dönüşümü vardır ve tektir. Bu yansıma dönüşümü, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörleri için

$$Y(\mathbf{x}) = \begin{cases} Y_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}), & -\mathbf{v} = \mathbf{w} \\ Y_{\mathbf{v}-\mathbf{w}}(\mathbf{x}), & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde inşa edilir.

12. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ vektörü için $\mathbf{n}^\perp$ düzlemine göre yansıma matrisi $\sigma'_{n_i} = n_i(An_1 + Dn_2 + En_3)$, $\sigma''_{n_i} = n_i(Dn_1 + Bn_2 + Fn_3)$ ve $\sigma'''_{n_i} = n_i(En_1 + Fn_2 + Cn_3)$ olmak üzere

$$Y_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\|\mathbf{n}\|_\Omega^2} \begin{bmatrix} \|\mathbf{n}\|_\Omega^2 - 2\sigma'_{n_1} & -2\sigma''_{n_1} & -2\sigma'''_{n_1} \\ -2\sigma'_{n_2} & \|\mathbf{n}\|_\Omega^2 - 2\sigma''_{n_2} & -2\sigma'''_{n_2} \\ -2\sigma'_{n_3} & -2\sigma''_{n_3} & \|\mathbf{n}\|_\Omega^2 - 2\sigma'''_{n_3} \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. $Y_{\mathbf{n}}$ dönüşüm matrisi için $\det(Y_{\mathbf{n}}) = -1$ olduğu görülebilir. Ayrıca $Y_{\mathbf{n}}$ matrisi

$$(Y_{\mathbf{n}})^t \Omega Y_{\mathbf{n}} = \Omega$$

eşitliğini sağladığından Ω -ortogonaldır. Sonuç olarak $Y_{\mathbf{n}}$ matrisi bir $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma matrisidir. $Y_{\mathbf{n}}$ dönüşüm matrisinin özdeğerleri -1 ve 1 olarak bulunur. Ayrıca -1 özdeğerine karşılık gelen özvektör, $\mathcal{B}_\Omega$ -yansıma düzleminin Ω -normali $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ dir.

13. Sıfırdan farklı $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{u}$ vektörleri için $\mathbf{x}$ vektörünün, doğrultusu $\mathbf{u}$ vektörü olan $L_{\mathbf{u}}$ doğrusuna göre $\mathcal{B}_{\Omega}$ -simetri dönüşümünün matrisi $\sigma'_{u_i} = u_i (Au_1 + Du_2 + Eu_3)$, $\sigma''_{u_i} = u_i (Du_1 + Bu_2 + Fu_3)$ ve $\sigma'''_{u_i} = u_i (Eu_1 + Fu_2 + Cu_3)$ olmak üzere

$$Y_{\mathbf{u}} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|_{\Omega}^2} \begin{bmatrix} 2\sigma'_{u_1} - \|\mathbf{u}\|_{\Omega}^2 & 2\sigma''_{u_1} & 2\sigma'''_{u_1} \\ 2\sigma'_{u_2} & 2\sigma''_{u_2} - \|\mathbf{x}\|_{\Omega}^2 & 2\sigma'''_{u_2} \\ 2\sigma'_{u_3} & 2\sigma''_{u_3} & 2\sigma'''_{u_3} - \|\mathbf{x}\|_{\Omega}^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. $Y_{\mathbf{u}}$ dönüşüm matrisi için $\det(Y_{\mathbf{u}}) = 1$ dir. $Y_{\mathbf{u}}$ dönüşüm matrisinin özdeğerleri 1, 1 ve -1 değerleridir. Simetri dönüşümünün gerçekleştiği doğrunun doğrultmanı 1 özdeğerine karşılık gelen $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ özvektörüdür.

14. Bir $\mathbf{n}$ birim pür Ω -kuaterniyonu için tanımlanan

$$Y_{\mathbf{n}} : \mathbb{H}_{\Omega}^0 \rightarrow \mathbb{H}_{\Omega}^0$$

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{n}$$

dönüşümü bir yansıma dönüşümüdür. Bu yansıma dönüşümü birim normali $\mathbf{n}$ olan düzleme göre bir yansımadır. Yansıma dönüşümü birim olmayan $\mathbf{n}$ kuaterniyonu için

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_{\mathbf{n}}^2} \mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{n}$$

kullanılarak hesaplanabilir.

15. Bir $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ birim pür Ω -kuaterniyonu için $Y_{\mathbf{n}}$ dönüşümünün matrisi $\sigma'_{n_i} = n_i (An_1 + Dn_2 + En_3)$, $\sigma''_{n_i} = n_i (Dn_1 + Bn_2 + Fn_3)$ ve $\sigma'''_{n_i} = n_i (En_1 + Fn_2 + Cn_3)$ olmak üzere

$$Y_{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 1 - 2\sigma'_{n_1} & -2\sigma''_{n_1} & -2\sigma'''_{n_1} \\ -2\sigma'_{n_2} & 1 - 2\sigma''_{n_2} & -2\sigma'''_{n_2} \\ -2\sigma'_{n_3} & -2\sigma''_{n_3} & 1 - 2\sigma'''_{n_3} \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. Elde edilen $Y_{\mathbf{n}}$ matrisi için $\det Y_{\mathbf{n}} = -1$ dir. Ayrıca $Y_{\mathbf{n}}$ matrisini özdeğerleri -1 ve 1 olarak bulunur. Yansımanın gerçekleştiği düzlemin normali -1 özdeğerine karşılık gelen $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ özvektörüdür.

16. Bir $\mathbf{x}$ vektörünün doğrultusu $\mathbf{u}$ birim vektörü olan orijinden geçen $L_{\mathbf{u}}$ doğrusuna göre $\mathcal{B}_{\Omega}$ -yansıma dönüşümü

$$Y_{\mathbf{u}} : \mathbb{H}_{\Omega}^0 \rightarrow \mathbb{H}_{\Omega}^0$$

$$Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}\mathbf{x}\mathbf{u}$$

Ω -kuaterniyon çarpımıyla tanımlanır. Bu dönüşüm normu koruyan bir lineer dönüşümdür. Ayrıca $Y_{\mathbf{u}}$ dönüşümünün tersi kendisine eşittir. $\mathcal{B}_{\Omega}$ -yansıma dönüşümü birim olmayan $\mathbf{u}$ kuaterniyonu için

$$Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{N_{\mathbf{u}}^2} \mathbf{u}\mathbf{x}\mathbf{u}$$

kullanılarak hesaplanabilir.

17. Bir $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ birim pür Ω -kuaterniyonu için $Y_{\mathbf{u}}$ $\mathcal{B}_{\Omega}$ -simetri dönüşümünün matrisi $\sigma'_{u_i} = u_i(Au_1 + Du_2 + Eu_3)$, $\sigma''_{u_i} = u_i(Du_1 + Bu_2 + Fu_3)$ ve $\sigma'''_{u_i} = u_i(Eu_1 + Fu_2 + Cu_3)$ olmak üzere

$$Y_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 2\sigma'_{u_1} - 1 & 2\sigma''_{u_1} & 2\sigma'''_{u_1} \\ 2\sigma'_{u_2} & 2\sigma''_{u_2} - 1 & 2\sigma'''_{u_2} \\ 2\sigma'_{u_3} & 2\sigma''_{u_3} & 2\sigma'''_{u_3} - 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. $Y_{\mathbf{u}}$ dönüşüm matrisi için $\det(Y_{\mathbf{u}}) = 1$ dir. $Y_{\mathbf{u}}$ dönüşüm matrisinin özdeğerleri 1, 1 ve -1 değerleridir. $\mathcal{B}_{\Omega}$ -simetri dönüşümünün gerçekleştiği doğrunun doğrultmanı 1 özdeğerine karşılık gelen $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ özvektörüdür.

18. $\mathbb{R}_{\Omega}^2$ uzayında $X = (x_1, x_2)$ ve $Y = (y_1, y_2)$ noktaları arasındaki Ω -uzaklık

$$d_{\Omega}(X, Y) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\Omega} = \sqrt{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})}$$

$$= \sqrt{A(x_1 - y_1)^2 + 2B(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + C(x_2 - y_2)^2}$$

şeklinde bulunur.

19. $\mathbb{R}_{\Omega}^3$ uzayında $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$ noktaları arasındaki Ω -uzaklık

$$d_{\Omega}(X, Y) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\Omega} = \sqrt{\mathcal{B}_{\Omega}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})}$$

$$= \sqrt{A(x_1 - y_1)^2 + B(x_2 - y_2)^2 + C(x_3 - y_3)^2 + 2D(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + 2E(x_1 - y_1)(x_3 - y_3) + 2F(x_2 - y_2)(x_3 - y_3)}$$

şeklinde bulunur.

20. $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayında bir A noktasının, P noktasından geçen ve doğrultmanı $\mathbf{u}$ vektörü olan doğruya Ω -uzaklığı

$$h = \frac{\sqrt{\|\mathbf{x}\|_\Omega^2 \left\| \overrightarrow{PA} \right\|_\Omega^2 - \mathcal{B}_\Omega^2 \left(\overrightarrow{PA}, \mathbf{u} \right)}}{\|\mathbf{u}\|_\Omega}$$

veya

$$h = \left\| \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PA}_{\text{izdx}}^\Omega \right\|_\Omega$$

formülüyle bulunur.

21. $\mathbb{R}_\Omega^2$ iç çarpım uzayı

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

matrisiyle tanımlı olsun. Bir $A = (x_0, y_0)$ noktasının, denklemi $ax + by + c = 0$ olan doğruya Ω -uzaklığı, Δ iç çarpım sabiti olmak üzere,

$$h = \frac{\Delta |ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{Ca^2 - 2Bab + Ab^2}}$$

formülüyle bulunur.

22. $\mathbb{R}_\Omega^2$ de $\ell_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $\ell_2 : a_1x + b_1y + c_2 = 0$ paralel doğruları arasındaki uzaklık, Δ iç çarpım sabiti olmak üzere,

$$h = \frac{\Delta |c_2 - c_1|}{\sqrt{Ca_1^2 - 2Ba_1b_1 + Ab_1^2}}$$

formülüyle bulunur.

23. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında, P noktasının, A noktasından geçen ve doğrultmanı $\mathbf{u}$ olan doğruya Ω -uzaklığı

$$h = \frac{\left\| \overrightarrow{AP} \times_\Omega \mathbf{u} \right\|_\Omega}{\|\mathbf{u}\|_\Omega}$$

formülüyle bulunur.

24. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında, P noktasının, A noktasından geçen ve Ω -normali $\mathbf{n}$ olan düzleme Ω -uzaklığı

$$h = \frac{\left| \mathcal{B}_\Omega \left(\overrightarrow{AP}, \mathbf{n} \right) \right|}{\|\mathbf{n}\|_\Omega}$$

formülüyle bulunur.

25. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında, $P = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının $ax + by + cz + d = 0$ düzlemine olan Ω -uzaklığı

$$h = \frac{\sqrt{\Delta} |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{\Delta_3 a^2 + \Delta_2 b^2 + \Delta_1 c^2 + 2\Delta_6 ab + 2\Delta_5 ac + 2\Delta_4 bc}}$$

formülüyle bulunur.

26. $\mathbb{R}_\Omega^3$ uzayında, $d_1 \neq d_2$ olmak üzere, birbirine paralel $D_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$ ve $D_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$ düzlemleri arasındaki Ω -uzaklık

$$h = \frac{\sqrt{\Delta} |d_2 - d_1|}{\sqrt{\Delta_3 a^2 + \Delta_2 b^2 + \Delta_1 c^2 + 2\Delta_6 ab + 2\Delta_5 ac + 2\Delta_4 bc}}$$

formülüyle bulunur.

27. $\mathbb{R}_\Omega^3$ iç çarpım uzayında; P noktasından geçen ve doğrultmanı $\mathbf{u}$ olan doğru ile Q noktasından geçen ve doğrultmanı $\mathbf{v}$ olan aykırı iki doğru arasındaki Ω -uzaklık

$$h = \frac{\Delta \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{PQ})}{\|\mathbf{u} \times_\Omega \mathbf{v}\|_\Omega}$$

formülüyle bulunur.

6. KAYNAKLAR

- Aragón-González, G., Aragón, J.L. and Rodríguez-Andrade, M.A. 2006. The decomposition of an orthogonal transformation as a product of reflections. *Journal of Mathematical Physics*, 47(53): 13509.
- Aragón-González, G.; Aragón, J.L.; Rodríguez-Andrade, M.A.; Verde-Star, L. 2009. Reflections, rotations, and Pythagorean numbers. *Adv. Appl. Clifford Algebr*, 19: 1–14.
- Çolakoğlu, H.B. 2019. On the distance formulae in the generalized taxicab geometry. *Turk. J. Math*, 43(3): 1578-1594.
- Çolakoğlu, H.B. 2020. A generalization of the Minkowski distance and new definitions of the central conics. *Turk. J. Math*, 44(1): 319-333.
- Çolakoğlu, H.B., Özdemir, M. 2023a. Generalized elliptical quaternions with some applications. *Turk. J. Math*, 47: 351-371.
- Çolakoğlu, H.B., Özdemir, M. 2023b. On elliptical motions on a general ellipsoid. *Mediterr. J. Math.*, 20(3): 130.
- Çolakoğlu, H.B., Öztürk, İ. and Özdemir, M. 2023. Non-parabolic conical rotations. *J. of Computational and Applied Mathematics*, 420: 1-15.
- Çolakoğlu H.B. 2018. The Generalized Taxicab Group. *International Electronic J. of Geometry*, 11(2): 83-89.
- Coxeter H. S. M. 1946. Quaternions and Reflections *The American Mathematical Monthly*, 53(3): 136-146.
- Erdoğan, M., Özdemir, M. 2015. On reflections and rotations in Minkowski 3-space of physical phenomena. *J. Geom. Symmetry Phys*, 39: 1–16.
- Erdoğan, M. 2019. Reflections with respect to line and hyperplane from quaternionic point of view. *Iğdır Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 9(3): 1612-1621.
- Gallier, J.H. 2011. Geometric Methods And Applications. Springer, New York, 680 p.

Mackey, D.S., Mackey, N. and Tisseur, F. 2004. G-reflectors: analogues of Householder transformations in scalar product spaces. *Linear Algebra and Its Applications*, 385: 187–213.

Özdemir, M., Ergin, A.A. 2006. Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space. *Journal of Geometry and Physics*, 56(2): 322–336.

Özdemir, M. 2016. An alternative approach to elliptical motion. *Advances In Applied Clifford Algebras*, 26 (1): 279-304.

Özdemir, M. 2020. Kuaterniyonlar ve Geometri. Altın Nokta Yayınevi, İzmir.

Özdemir, M. 2021. Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler. Altın Nokta Yayınevi, İzmir.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet DURU

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2022-2023	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya.
Lisans 2016-2020	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya.