

İKİ VE ÜÇ BOYUTLU LİE CEBİRLERİ

Yüksek Lisans Tezi

İsmail BOZTAŞ

Eskişehir 2019

İKİ VE ÜÇ BOYUTLU LİE CEBİRLERİ

İSMAİL BOZTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Tezli Yüksek Lisans Programı

Danışman: Prof. Dr. Nülfir ÖZDEMİR

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Temmuz 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

İsmail BOZTAŞ'ın “İki ve Üç Boyutlu Lie Cebirleri” başlıklı tezi 12/07/2019 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek “Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği”nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Unvanı-Adı Soyadı

İmza

Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR	
Üye	: Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU	
Üye	: Doç. Dr. Fatih KARABACAK	

Prof. Dr. Murat TANIŞLI

Enstitü Müdürü

ÖZET

İKİ VE ÜÇ BOYUTLU LİE CEBİRLERİ

İsmail BOZTAŞ

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Temmuz 2019

Danışman : Prof. Dr. Nülfir ÖZDEMİR

Bu çalışmada 2 boyutlu ve 3 boyutlu Lie cebirleri ele alınmıştır. Bunun için 2 boyutlu ve 3 boyutlu birbirine izomorf olmayan Lie cebirlerinin kaç türlü yazılabileceği incelenmiştir. Öncelikle cebirle ilgili bazı ön bilgiler verilmiş, Lie cebri tanımı ifade edilerek temel özellikler incelenmiştir. 2 boyutlu ve 3 boyutlu birbirine izomorf olmayan Lie cebirlerini elde etmek için kullanılan bir Lie cebrinin bir ideali, türetilmiş Lie cebri, Lie cebrinin merkezi ve derivasyon gibi kavramlar verilmiştir. Ayrıca yine birbirine izomorf olmayan Lie cebirlerini elde etmekte gerekli olan simetrik bi-lineer formlar da ele alınmıştır. Simetrik bi-lineer forma simetrik bir matris karşılık getirilerek, simetrik matrislerin köşegenleştirilebilir oldukları kanıtlanmıştır. Bu ön bilgilerden sonra bir boyutlu Lie cebirlerinin abelyen olduğu gösterilmiştir. İzomorf Lie cebirlerinin merkezleri ve türetilmiş Lie cebirleri de izomorf olduklarından, birbirine izomorf olmayan, 2 boyutlu ve 3 boyutlu Lie cebirlerinin belirlenmesinde bu Lie cebirlerinin merkezleri ve türetilmiş Lie cebirleri kullanılmıştır. 2 boyutlu abelyen olmayan bir Lie cebrinin tek türlü belirli olduğu ve 3 boyutlu birbirine izomorf olmayan sonsuz tane Lie cebri olduğu görülmüştür.

Anahtar Sözcükler: Cebir, Lie cebri, Türetilmiş cebir, Braket işlemi, İzomorf Lie cebirleri

ABSTRACT

TWO AND THREE DIMENSIONAL LIE ALGEBRAS

İsmail BOZTAŞ

Department of Mathematics

Eskisehir Technical University, Institute of Graduate Programs, July 2019

Supervisor: Prof. Dr. Nülfir ÖZDEMİR

In this thesis, 2 and 3 dimensional Lie algebras are considered. To this end, it is examined in how many different ways 2 dimensional and 3 dimensional non-isomorphic Lie algebras can be constructed. First, some preliminary concepts of algebra are introduced, and its fundamental properties are investigated. Then, the notions of an ideal of a Lie algebra, derived Lie algebra, the center of a Lie algebra and its derivation are introduced in order to obtain 2 and 3 dimensional non-isomorphic Lie algebras. In addition, symmetric bi-linear forms, necessary in the mentioned construction, are also given. It is proved by designating a symmetric matrix to a symmetric bi-linear form that symmetric matrices are diagonalizable. Having introduced the preliminary notions, it is shown that any 1 dimensional Lie algebra is abelian. Since the centers and derived Lie algebras of isomorphic Lie algebras are isomorphic, these notions are used to determine the non-isomorphic 2 dimensional and 3 dimensional Lie algebras. Finally, it is shown that a 2 dimensional non-abelian Lie algebra is uniquely determined whereas in 3 dimensions there are infinitely many non-isomorphic Lie algebras.

Keywords: Algebra, Lie algebra, Derived algebra, Bracket operation, Isomorphic Lie algebras.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emekleri olan ve her türlü desteklerini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Nülfir ÖZDEMİR'e, Dr. Öğr. Üyesi Şirin AKTAY'a ve yüksek lisans çalışmam boyunca maddi manevi yanımda olan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İsmail BOZTAŞ

Temmuz 2019

12/07/2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

İsmail BOZTAŞ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1 Simetrik Bi-lineer Formlar	10
3. BOYUTU 2 OLAN LİE CEBİRLERİ.....	16
4. BOYUTU 3 OLAN LİE CEBİRLERİ.....	18
4.1 L' Alt Cebrinin Boyutu 1 ise.....	18
4.2 L' Alt Cebrinin Boyutu 2 ise.....	20
4.3 L' Alt Cebrinin Boyutu 3 ise.....	25
KAYNAKÇA.....	31
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

G	: Grup
R	: Halka
F	: Cisim
V_F	: F cismi üzerinde vektör uzayı
L	: Lie Cebri
$boy(L)$	: L Lie cebrinin vektör uzayı boyutu
D	: Derivasyon
$[,]$	: Lie braket
$Z(L)$	: L Lie cebrinin merkezi
$A \oplus B$	: A ve B uzaylarının direkt toplamı
L'	: Türetilmiş Lie cebri
ad_x	: Adjoint dönüşüm

1. GİRİŞ

Lie cebirlerinin kökeni Sophus Lie'nin 1873'teki çalışmasına dayanmaktadır. Günümüzde Lie cebirleri matematik ve teorik fizikte pek çok uygulama alanına sahiptir. Çeşitli boyutlarda birbirine izomorf olmayan Lie cebirlerinin sınıflandırılması pek çok araştırmacı tarafından çalışılan bir konudur. Kompleks basit Lie cebirlerinin sınıflandırılması W.Killing, E.Cartan ve L.Bianchi tarafından tamamlanmıştır. Herhangi bir cisim üzerinde tanımlı 3 ve 4 boyutlu solvable Lie cebirleri W.De Graaf tarafından sınıflandırılmıştır. Allegra Fowler - Wright'ın tezinde ise 3 boyutlu Lie cebirlerinin sınıflandırılması W.De Graaf'tan farklı bir yöntemle yapılmıştır.

Bu tezde öncelikle Lie cebirlerini tanımlamak için gerekli kavramlar verildikten sonra Lie cebri tanımı ifade edilmiş, 2 ve 3 boyutlu Lie cebirlerinin sınıflandırılmasında kullanılan teoremler verilmiştir. Ayrıca sınıflandırmada kullanılan simetrik bi-lineer formlar kavramı da incelenmiştir.

Daha sonra ise 2 boyutlu ve 3 boyutlu birbirine izomorf olmayan Lie cebirleri ele alınmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

İlk olarak temel cebirsel yapılar olan grup, halka, cisim, vektör uzayı ve cebir tanımları verilecektir.

Tanım 2.1 (Grup). G boş olmayan bir küme ve bu küme üzerinde bir ikili işlem " $\star$ " olsun. Buna göre eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(G, \star)$ cebirsel yapısına bir grup denir [1, 2].

$$(G_1) \forall a, b \in G \text{ için } a \star b \in G \text{ (Kapalılık şartı)}$$

$$(G_2) \forall a, b, c \in G \text{ için } a \star (b \star c) = (a \star b) \star c \text{ (Birleşme özelliği)}$$

$$(G_3) \forall a \in G \text{ için}$$

$$a \star e = e \star a = a$$

olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (Birim elaman)

$$(G_4) G \text{ kümesinde ki her bir } a \text{ için } e, G \text{'nin birim elamanı olmak üzere}$$

$$a \star a' = a' \star a = e$$

olacak şekilde $a' \in G$ vardır. (Ters elaman)

Tanım 2.2 (Değişmeli Grup). $(G, \star)$ bir grup olmak üzere; her $a, b \in G$ için

$$a \star b = b \star a$$

koşulu sağlanıyorsa $(G, \star)$ grubuna değişmeli grup denir.

Tanım 2.3 (Halka). R boştan farklı bir küme olsun. R üzerinde

$$+ : R \times R \longrightarrow R, (a, b) \rightarrow (a + b),$$

$$\cdot : R \times R \longrightarrow R, (a, b) \rightarrow (a.b)$$

iki işlem tanımlansın.

$$(H_1) (R, +) \text{ değişmeli grup.}$$

$$(H_2) \forall a, b, c \in R \text{ için } a.(b.c) = (a.b).c$$

$$(H_3) \forall a, b, c \in R \text{ için } a.(b + c) = a.b + a.c \text{ ve } (a + b).c = a.c + b.c$$

koşulları sağlanıyorsa $(R, +, \cdot)$ yapısına bir halka denir [1, 2].

Eğer $(R, +, \cdot)$ halkasında her $a, b \in R$ için

$$a.b = b.a$$

ise R halkasına değişmeli halka, her $a \in R$ için $a.1_R = 1_R.a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ elemanı varsa R halkasına birimli halka denir. $1_R \in R$ elemanına da R halkasının birim elemanı denir.

Tanım 2.4 (Cisim). $(F, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli halka olsun. $0_R \in R$ toplamanın birim elemanını göstermek üzere; her $a \in F^* = F - \{0_R\}$ elemanının " $\cdot$ " (çarpma) işlemine göre bir tersi varsa $(F, +, \cdot)$ halkasına bir cisim denir.

Tanım 2.5 (Vektör uzayı). V boştan farklı bir kümesi ve F bir cisim olsun. V kümesi üzerinde tanımlı

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

ikili işlemi ve

$$\cdot : F \times V \rightarrow V, \quad (\alpha, v) \rightarrow \alpha \cdot v$$

dönüşümü

(V₁) $(V, +)$ değişmeli bir gruptur.

(V₂) $\forall \alpha \in F$ ve $\forall u, v \in V$ için $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$

(V₃) $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V$ için $(\alpha + \beta).v = \alpha.v + \beta.v$

(V₄) $\forall \alpha, \beta \in F$ ve $v \in V$ için $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$

(V₅) $1, F$ cisminin birim elemanı olmak üzere; $\forall v \in V$ için $1.v = v$ 'dir.

koşullarını sağlıyorsa V kümesine F cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

Tanım 2.6 (Cebir). A kümesi bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\cdot : A \times A \longrightarrow A$$

$$(a, b) \rightarrow a.b$$

ikili işlemi $\forall a, b, c \in A, \quad \lambda \in F$ olmak üzere;

$$(C_1) (\lambda a).b = \lambda.(a.b) = a.(\lambda b)$$

$$(C_2) (a + b).c = a.c + b.c$$

$$(C_3) \ a.(b + c) = a.b + a.c$$

koşulları sağlanıyorsa A vektör uzayına F cismi üzerinde bir cebir denir.

Tanım 2.7 (Lie Cebri). L , bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$[\ , \] : L \times L \longrightarrow L, (x, y) \rightarrow [x, y]$$

dönüşümü

(L_1) $[\ , \]$ dönüşümü bi-lineerdir.

(L_2) $\forall x \in L$ için $[x, x] = 0$.

(L_3) (Jacobi eşitliği) $\forall x, y, z \in L$ için

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

koşullarını sağlıyorsa L uzayına F cismi üzerinde bir Lie cebri denir [3, 4].

Eğer L Lie cebrinde her $a, b \in L$ için

$$[a, b] = 0$$

ise bu Lie cebrine değişmeli (abelyen) Lie cebri denir.

Lie cebrinde her $x \in L$ için $[x, x] = 0$ olduğundan, x yerine $x + y$ alındığında

$$0 = [x + y, x + y] = \underbrace{[x, x]}_{=0} + [x, y] + [y, x] + \underbrace{[y, y]}_{=0} = [x, y] + [y, x]$$

eşitliğinden

$$[x, y] = -[y, x] \tag{2.1}$$

elde edilir. Tersine eğer F cisminin karakteristiği 2'den farklı ise ve (2.1) eşitliği sağlanıyorsa bu eşitlikte $x = y$ alındığında

$$[x, x] = -[x, x]$$

ve

$$2[x, x] = 0$$

bulunur. F cisminin karakteristiği 2'den farklı olduğundan her $x \in L$ için

$$[x, x] = 0$$

olur. L bir Lie cebri ve $K \subset L$ bir alt vektör uzayı olsun. Her $a, b \in K$ için

$$[a, b] \in K$$

ise K alt uzayına L Lie cebrinin bir alt Lie cebri denir. Eğer her $a \in L$ ve $k \in K$ için

$$[a, k] \in K$$

ise K alt vektör uzayına L Lie cebrinin bir ideali denir.

Önerme 2.8. I ve J , L Lie cebrinin idealleri ise

$$I + J := \{a + b : a \in I, b \in J\}$$

$$[I, J] := \{a_1[x_1, y_1] + \cdots + a_n[x_n, y_n] : a_1, \cdots, a_n \in F, \\ x_1, \cdots, x_n \in I, y_1, \cdots, y_n \in J\}$$

olarak tanımlana kümeler de L Lie cebrinin idealleridirler.

$I = J = L$ olarak alındığında

$$L' := [L, L]$$

olarak gösterilir ve bu ideale L Lie cebrinin türetilmiş cebri denir. Herhangi bir L Lie cebrinin merkezi

$$Z(L) := \{x \in L \mid [x, y] = 0, \forall y \in L\}$$

olarak tanımlıdır. $Z(L)$, L Lie cebrinin bir idealidir: $x, y \in Z(L)$ ise her $z \in L$ için $[x, z] = 0$ ve $[y, z] = 0$ olduğundan

$$[x + y, z] = [x, z] + [y, z] = 0 + 0 = 0$$

eşitliğinden $x + y \in Z(L)$ bulunur. Jacobi özdeşliği kullanıldığında,

$$[[x, y], z] = -[[y, z], x] - [[z, x], y] = -[0, x] - [0, y] = 0$$

eşitliğinden $[x, y] \in Z(L)$ elde edilir. Böylece $Z(L)$ kümesi L Lie cebrinin bir ideali olur.

L bir F cismi üzerinde bir Lie cebri olsun. $D : L \rightarrow L$ lineer dönüşümü her $a, b \in L$ için

$$D([a, b]) = [D(a), b] + [a, D(b)] \quad (2.2)$$

eşitliğini sağlıyorsa D dönüşümüne bir derivasyon denir [3,6]. Örneğin; herhangi bir $a \in L$ elemanı için $ad_a : L \rightarrow L$, $ad_a(b) := [a, b]$ ele alındığında; her $b, c \in L$ için

$$\begin{aligned} ad_a([b, c]) &= [a, [b, c]] \\ &= -[b, [c, a]] - [c, [a, b]] \\ &= [b, ad_a(c)] + [ad_a(b), c] \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Böylece her $a \in L$ için ad_a dönüşümü bir derivasyon olur.

Tanım 2.9. $D : L \rightarrow L$ derivasyonu için $D = ad_a$ olacak şekilde en az bir $a \in L$ varsa D derivasyonuna iç (inner) derivasyon denir.

Önerme 2.10. L_2 boyutu 2 olan bir Lie cebri, $\{x, y\}$ kümesi L_2 Lie cebri için bir taban ve $[x, y] = x$ ise L_2 Lie cebrinin tüm derivasyonları iç derivasyondur.

Kanıt. $[x, y] = x$ olduğundan $\{x\}$ elemanı L'_2 için bir taban olur. $D : L_2 \rightarrow L_2$ herhangi bir derivasyon olmak üzere; L'_2 bir ideal olduğundan $D(L'_2) \subseteq L'_2$ olur. $D(L'_2) \subseteq L'_2$ olduğundan $D(x) = \lambda x$ olacak şekilde $0 \neq \lambda \in F$ elemanı vardır. $N := ad_{\lambda y} + D$ olarak tanımlanan N dönüşümü bir derivasyondur: $x, y \in L_2$ taban

elemanları için

$$\begin{aligned}
[N(x), y] + [x, N(y)] &= [(ad_{\lambda y} + D)(x), y] + [x, (ad_{\lambda y} + D)(y)] \\
&= [ad_{\alpha y}(x), y] + [D(x), y] + [x, \underbrace{ad_{\lambda y}(y)}_{=0}] + [x, D(y)] \\
&= [[\lambda y, x], y] + [D(x), y] + [x, D(y)] \\
&= [\lambda y, [x, y]] + D([x, y]) \\
&= (ad_{\lambda y} + D)([x, y]) \\
&= N([x, y])
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca x taban elemanı için

$$N(x) = ad_{\lambda y}(x) + D(x) = [\lambda y, x] + \lambda x = -\lambda \underbrace{[x, y]}_{=x} + \lambda x = 0$$

bulunur. N dönüşümü bir derivasyon olduğundan

$$\underbrace{[N(x), y]}_{=0} + [x, N(y)] = N([x, y]) = N(x) = 0$$

ve

$$[x, N(y)] = 0$$

elde edilir. Buradan $N(y)$ elemanının x 'in bir katı olduğu görülür. Böylece

$$N(y) = \beta x$$

olacak şekilde en az bir $\beta \in F$ olduğu görülür. $ad_{\beta x}$ dönüşümünün $\{x, y\}$ taban elemanlarına verdiği resme bakılırsa

$$ad_{\beta x}(x) = 0, \quad ad_{\beta x}(y) = [\beta x, y] = \beta[x, y] = \beta x$$

olduğundan $N = ad_{\beta x}$ elde edilir. Buradan

$$ad_{\beta x} = N = ad_{\lambda y} + D$$

ve

$$D = ad_{\beta x} - ad_{\lambda y} = ad_{\beta x - \lambda y}$$

bulunur ki bu D derivasyonunun bir iç derivasyon olduğunu gösterir. $\square$

Önerme 2.11. L_2 bir önceki önermede tanımlanan Lie cebri olmak üzere; L_2 cebri bir L Lie cebrinin ideali olsun.

$$M = Z_L(L_2) := \{x \in L \mid [x, y] = 0, \forall y \in L_2\}$$

olmak üzere;

$$L = L_2 \oplus M$$

olur.

Kanıt. İlk olarak $M = Z_L(L_2)$ kümesinin L Lie cebrinin bir ideali olduğu gösterilecektir: $x, y \in M$ olsun. Bu durumda her $a \in L_2$ için $[x, a] = 0$ ve $[y, a] = 0$ olur. Buradan her $a \in L_2$ için

$$[x + y, a] = [x, a] + [y, a] = 0 + 0 = 0$$

olduğundan $x + y \in M$ olur. Jacobi özdeşliği kullanıldığında

$$[[x, y], a] = -[[y, a], x] - [[a, x], y] = -[0, x] - [0, y] = 0$$

olduğundan $[x, y] \in M$ elde edilir ve böylece M kümesinin bir ideal olduğu gösterilmiş olur. Herhangi bir $a \in L$ elemanı için; L_2, L Lie cebrinin bir ideali olduğundan $b \in L$ olmak üzere; $ad_a : L \rightarrow L$, $ad_a(b) = [a, b]$ dönüşümünün L_2 idealine kısıtlanmış

$$ad_a|_{L_2} : L_2 \rightarrow L_2$$

olur ve $ad_a|_{L_2}$ dönüşümü L_2 idealinin bir derivasyonudur. L_2 'nin herhangi bir derivasyonu bir iç derivasyon olduğundan

$$ad_a|_{L_2} = ad_b$$

olacak şekilde $b \in L_2$ elemanı vardır. Böylece her $z \in L_2$ elemanı için

$$ad_a|_{L_2}(z) = ad_b(z),$$

$$[a, z] = [b, z] \quad \text{ve} \quad [a - b, z] = 0$$

elde edilir. $Z_L(L_2)$ idealinin tanımını gereği

$$m := a - b \in Z_L(L_2)$$

olur. Böylece herhangi bir $a \in L$ elemanı

$$a = b + m, \quad b \in L_2, \quad m \in Z_L(L_2)$$

olarak yazıldığından $L = L_2 + Z_L(L_2)$ olur.

$$L_2 \cap Z_L(L_2) = Z_{L_2}(L_2) \text{ ve } Z_{L_2}(L_2) = 0 \text{ olduğundan}$$

$$I \cap Z_L(L_2) = \{0\}$$

olduğundan

$$L = I \oplus Z_L(I)$$

elde edilmiş olur. □

L_1 ve L_2 Lie cebirleri ve vektör uzayı olarak

$$L := L_1 \oplus L_2$$

olsun. L_1 ve L_2 Lie cebirlerindeki braketler kullanılarak; $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L$ olmak üzere; L direk toplam uzayı üzerindeki braket

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] := ([x_1, y_1], [x_2, y_2])$$

olarak tanımlandığında L uzayı bir Lie cebri olur ve L Lie cebrine L_1 ve L_2 Lie cebirlerinin direk toplamı denir [3, 5, 6].

Önerme 2.12. $L = L_1 \oplus L_2$ ise

$$Z(L) = Z(L_1) \oplus Z(L_2)$$

ve

$$L' = L'_1 \oplus L'_2,$$

olur [3, 6].

2.1. Simetrik Bi-lineer Formlar

V bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $f : V \times V \rightarrow F$ olsun. Eğer her $x, y, z \in V$ ve $\lambda \in F$ için

- $f(\lambda x + y, z) = \lambda f(x, z) + f(y, z)$
- $f(x, y) = f(y, x)$

koşulları sağlanıyorsa F dönüşümüne simetrik bi-lineer form denir [7–9]. V vektör uzayının boyutu n olmak üzere; $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ kümesi V vektör uzayı için bir taban ise bu taban kullanılarak f bi-lineer formuna

$$\begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ f(e_1, e_2) & f(e_2, e_2) & \cdots & f(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_1, e_n) & f(e_2, e_n) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

simetrik matrisi karşılık getirilir. Herhangi $x, y \in V$ elemanları $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tabanına göre

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \quad \text{ve} \quad y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n$$

olarak ifade edilirse

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \cdots & f(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n, e_1) & f(e_n, e_2) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

olur. Böylece herhangi bir simetrik bi-lineer forma bir simetrik matris karşılık getirilebilir. Tersine herhangi bir simetrik matrise ise yukarıdaki eşitlikten dolayı bir simetrik bi-lineer form karşılık getirilebilir.

$f : V \times V \rightarrow F$ simetrik bi-lineer bir dönüşüm, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ kümeleri de V vektör uzayı için farklı tabanlar olsunlar.

$$e_i = \sum_{k=1}^n P_{ki} f_k$$

olmak üzere; taban değişim matrisi

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

olsun. f simetrik bi-lineer dönüşümünün $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tabanını göre matrisi A ($A_{ij} = f(e_i, e_j)$) ve $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ tabanını göre matrisi B ($B_{ij} = f(f_i, f_j)$) olsun.

Buradan

$$\begin{aligned} A_{ij} &= f(e_i, e_j) = f\left(\sum_{k=1}^n P_{ki} f_k, \sum_{\ell=1}^n P_{\ell j} f_\ell\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n P_{ki} P_{\ell j} f(f_k, f_\ell) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n P_{ki} P_{\ell j} B_{k\ell} \end{aligned}$$

olduğundan

$$A = P^t B P$$

elde edilir.

Tanım 2.1.1. V ve W , F cismi üzerinde vektör uzayları ve

$$f_1 : V \times V \rightarrow F,$$

$$f_2 : W \times W \rightarrow F$$

simetrik bi-lineer formlar olsunlar. Eğer bir $T : V \rightarrow W$ izomorfizmi her $v_1, v_2 \in V$ için

$$f_2(T(v_1), T(v_2)) = f_1(v_1, v_2)$$

eşitliğini sağlıyor ise f_1 ve f_2 simetrik bi-lineer formlarına izometriktir denir.

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesi V vektör uzayı için bir taban ve $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ kümesi W vektör uzayı için bir taban olsun. f_1 simetrik bi-lineer formunun $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tabanına göre matrisi A ve f_2 simetrik bi-lineer formunun $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ tabanına göre matrisi B olsun. Bu durumda

$$A = P^t B P$$

olacak şekilde tekil olmayan P matrisi vardır. f_1 simetrik bi-lineer formunun $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tabanına göre matrisi $A_{ij} = f_1(v_i, v_j)$ ve f_2 simetrik bi-lineer formunun $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ tabanına göre matrisi $B_{ij} = f_2(w_i, w_j)$ ve

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{n1}w_n \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{n2}w_n \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{nn}w_n \end{aligned}$$

olmak üzere; $T : V \rightarrow W$ lineer dönüşümünün bu tabanlara göre matrisi

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= f_1(v_i, v_j) \\
&= f_2(T(v_i), T(v_j)) \\
&= f_2(p_{1i}w_1 + p_{2i}w_2 + \cdots + p_{ni}w_n, p_{1j}w_1 + p_{2j}w_2 + \cdots + p_{nj}w_n) \\
&= [p_{1i}f_2(w_1, w_1) + p_{2i}f_2(w_2, w_1) + \cdots + p_{ni}f_2(w_n, w_1)]p_{1j} \\
&\quad + \cdots + [p_{1i}f_2(w_1, w_n) + p_{2i}f_2(w_2, w_n) + \cdots + p_{ni}f_2(w_n, w_n)]p_{nj} \\
&= (P^tBP)_{ij}
\end{aligned}$$

olduğundan $A = P^tBP$ eşitliği elde edilmiş olur.

Simetrik matrislerin en önemli özelliklerinden birisi aşağıdaki teoremden ifade edilmiştir.

Teorem 2.1.2. *Simetrik bir matris köşegenleştirilebilirdir [8].*

Kanıt. A , $n \times n$ tipinde sıfır matrisinden farklı simetrik bir matris olsun. V , karakteristiği sıfır olan bir F cismi üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ kümesi V vektör uzayı için bir taban olmak üzere; A matrisi kullanılarak

$$f : V \times V \rightarrow F, \quad f(e_i, e_j) := A_{ij}$$

simetrik bi-lineer formu tanımlansın. $n = 1$ ise teorem açık olarak sağlanır. $n > 1$ ise A matrisi sıfır matrisinden farklı olduğundan

$$f(\alpha, \alpha) \neq 0$$

olacak şekilde en az bir $\alpha \in V$ vektörü vardır. V vektör uzayının α vektörü tarafından gerilen alt uzayı W ile gösterilsin ve

$$W^\perp : \{\beta \in V : f(\alpha, \beta) = 0\}$$

alt uzayı tanımlansın. Bu tanımlama ile $V = W \oplus W^\perp$ olur: $c \in F$ olmak üzere; eğer $c\alpha \in W^\perp$ olsaydı

$$0 = f(c\alpha, c\alpha) = c^2 f(\alpha, \alpha)$$

eşitliğinden ve $f(\alpha, \alpha) \neq 0$ olduğundan $c = 0$ olurdu. Bu durumda $W \cap W^\perp = \{0\}$

olur. Diğer taraftan herhangi $\gamma \in V$ vektörü kullanılarak

$$\beta := \gamma - \frac{f(\gamma, \alpha)}{f(\alpha, \alpha)}\alpha$$

vektörü tanımlandığında f simetrik olduğundan

$$f(\alpha, \beta) = f(\alpha, \gamma) - \frac{f(\gamma, \alpha)}{f(\alpha, \alpha)}f(\alpha, \alpha) = 0$$

olur. Böylece $\beta \in W^\perp$ elde edilir. Buradan herhangi bir $\gamma \in V$ elemanı

$$\gamma = \beta + \frac{f(\gamma, \alpha)}{f(\alpha, \alpha)}\alpha$$

olarak yazılabildiğinden $V = W + W^\perp$ olur.

Bu adımda f simetrik bi-lineer formu $W^\perp$ alt uzayına kısıtlandığında f formu $W^\perp$ uzayı üzerinde bir simetrik bi-lineer form ve $W^\perp$ uzayının boyutu $n - 1$ olur. Yukarıda yapılan işlem $W^\perp$ uzayı için tekrarlanırsa, $\alpha = \alpha_1$ olmak üzere; V vektör uzayı için

$$f(\alpha_i, \alpha_i) \neq 0, \quad f(\alpha_i, \alpha_j) = 0, 1 \leq i \neq j \leq n$$

olacak şekilde $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ tabanı elde edilmiş olur. Bu ise A matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterir. $\square$

Herhangi bir $a \in L$ elemanı için $ad_a : L \rightarrow L$, $ad_a(b) := [a, b]$ olarak tanımlana dönüşüm kullanılarak

$$\kappa : L \times L \rightarrow F, \quad \kappa(x, y) := iz(ad_x \circ ad_y)$$

dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm simetrik ve bi-lineerdir: Her $x, y, z \in L$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \kappa(x, y) &= iz(ad_x \circ ad_y) \\ &= iz(ad_y \circ ad_x) = \kappa(y, x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa(x+y, z) &= iz(ad_{(x+y)} \circ ad_z) \\
&= iz((ad_x + ad_y) \circ ad_z) \\
&= iz(ad_x \circ ad_z + ad_y \circ ad_z) \\
&= iz(ad_x \circ ad_z) + iz(ad_y \circ ad_z) \\
&= \kappa(x, z) + \kappa(y, z)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\kappa(\lambda x, y) &= iz(ad_{(\lambda x)} \circ ad_y) \\
&= iz(\lambda ad_x \circ ad_y) \\
&= \lambda \cdot \kappa(x, y)
\end{aligned}$$

özellikleri sağlanır. Bu forma L Lie cebirinin Killing formu denir.

3. BOYUTU 2 OLAN LİE CEBİRLERİ

L, F cismi üzerinde 1 boyutlu bir Lie cebri ve $\{e\}$ kümesi L Lie cebri için bir taban olsun. Her $x, y \in L$ için $x = \alpha e$ ve $y = \beta e$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in F$ elemanları vardır.

$$[x, y] = [\alpha e, \beta e] = \alpha\beta[e, e] = \alpha\beta \cdot 0 = 0$$

olduğundan boyutu 1 olan bir Lie cebri değişmelidir.

L Lie cebrinin boyutu 2 ve $\{e_1, e_2\}$ kümesi bu Lie cebri için bir taban olsun. Lie cebri tanımından

$$[e_1, e_1] = [e_2, e_2] = 0 \quad \text{ve} \quad [e_2, e_1] = -[e_1, e_2]$$

olduğundan L Lie cebrinin türetilmiş cebri L' sadece $[e_1, e_2]$ elemanı tarafından gerilir. Böylece L' türetilmiş cebrinin boyutu ya 0 ya 1 olur, 2 olamaz. L' türetilmiş cebrinin boyutu 0 ise $[e_1, e_2] = 0$ olur. Bu durumda her $a, b \in L$ için $a = a_1 e_1 + a_2 e_2$ ve $b = b_1 e_1 + b_2 e_2$ olacak şekilde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F$ elemanları vardır ve $[\cdot, \cdot]$ işlemi bi-lineer olduğundan

$$[a, b] = [a_1 e_1 + a_2 e_2, b_1 e_1 + b_2 e_2] = a_1 b_1 [e_1, e_1] + (a_1 b_2 - a_2 b_1) [e_1, e_2] + a_2 b_2 [e_2, e_2] = 0$$

bulunur ve L Lie cebri değişmeli olur.

Eğer L' türetilmiş cebrinin boyutu 1 ise sıfırdan farklı en az bir $x \in L$ elemanı vardır öyleki $\{x\}$ kümesi L' türetilmiş cebrinin bir tabanı olur. Bu durumda $\{x, \bar{y}\}$ L Lie cebri için taban olacak şekilde en az bir $\bar{y} \in L$ elemanı vardır. L' türetilmiş cebrinin tanımından

$$[x, \bar{y}] \in L'$$

bulunur, diğer bir ifadeyle $[x, \bar{y}] = \alpha x$ olacak şekilde bir $0 \neq \alpha \in F$ elemanı vardır. $y := \alpha^{-1} \bar{y}$ olarak alındığında $\{x, y\}$ kümesi L Lie cebri için bir taban olur ve

$$[x, y] = x$$

olduğundan L Lie cebri tamamen belirlenmiş olur.

Çalışmanın bundan sonrasında, 2 boyutlu değişmeli olmayan bu Lie cebri L_2 ile gösterilecektir.



4. BOYUTU 3 OLAN LİE CEBİRLERİ

L' Lie cebrinin boyutu 0 ise her $x, y \in L$ için

$$[x, y] = 0$$

olduğundan L Lie cebri değişmeli olur.

4.1. L' Alt Cebri Boyutu 1 ise

Bu durum $L' \subseteq Z(L)$ ve $L' \not\subseteq Z(L)$ olmak üzere iki kısımda incelenecektir:

$L' \subseteq Z(L)$ ise: L' türetilmiş cebri boyutu 1 olduğundan

$$[x, y] \neq 0$$

olacak şekilde $0 \neq x, y \in L$ elemanları vardır ve $[x, y]$ elemanı L' türetilmiş cebri gerer. $z := [x, y]$ olsun. Bu durumda $\{x, y, z\}$ kümesi lineer bağımsızdır: $L' \subseteq Z(L)$ olduğundan her $w \in L$ için $[z, w] = 0$ olur. Buradan $0 = \alpha x + \beta y + \delta z$ ise

$$0 = [0, x] = [\alpha x + \beta y + \delta z, x] = \alpha[x, x] + \beta[y, x] + \delta[z, x] = -\beta z$$

olacağından $\beta = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $0 = [0, y]$ eşitliğinden $\alpha = 0$ bulunur. Ve $0 = \delta z$ ve $z \neq 0$ olduğundan $\delta = 0$ elde edilir. Böylece $\{x, y, z\}$ kümesi lineer bağımsızdır ve L Lie cebri için bir taban olur. Bu taban için Lie cebri

$$[x, y] = z, \quad [x, z] = 0, \quad [y, z] = 0$$

braketleri ile tamamen belirlenmiş olur. Bu Lie cebrine Heisenberg Lie cebri denir [3, 10]. Bu cebir örneklenecek olursa;

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a_{12}, a_{13}, a_{23} \in F \right\}$$

Lie cebri için

$$X := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tabanı ele alındığında

$$[X, Y] = XY - YX = Z, \quad [X, Z] = 0, \quad [Y, Z] = 0$$

olduğu görülür.

$L' \not\subseteq Z(L)$ ise:

L' alt cebrinin boyutu 1 ($L' \neq \{0\}$) ve $L' \not\subseteq Z(L)$ olduğundan $x \notin Z(L)$ olacak şekilde $0 \neq x \in L'$ elemanı vardır. $x \notin Z(L)$ olduğundan en az bir $y \in L$ için

$$[x, y] \neq 0$$

olur, ayrıca x ve y elemanları lineer bağımsızdır. $x \in L'$ elemanı L' türetilmiş cebirini gerdiğinden $[x, y]$ braketi x elemanının bir katı olacağından $[x, y] = \alpha x$ olacak şekilde $0 \neq \alpha \in F$ elemanı vardır. $\bar{y} := \alpha^{-1}y$ olarak alındığında

$$[x, \bar{y}] = x$$

olur (ayrıca $[x, y] \neq 0$ olduğundan $[x, \bar{y}] = \alpha^{-1}[x, y] \neq 0$ dir). Böylece x ve $\bar{y}$ tarafından gerilen alt uzayı L Lie cebrinin değişmeli olmayan 2 boyutlu L_2 Lie cebri olur. Önerme 2.11 kullanıldığında

$$L = L_2 \oplus Z_L(L_2)$$

olur. Herhangi bir $0 \neq z \in Z_L(L_2)$ elemanı için $\{x, \bar{y}, z\}$ kümesi L Lie cebrinin bir tabanıdır ve L Lie cebirindeki taban elemanlarının braketleri

$$[x, \bar{y}] = x, \quad [x, z] = 0, \quad [y, z] = 0$$

olarak bulunur.

4.2. L' Alt Cebrinin Boyutu 2 ise

L' bir Lie cebri ve boyutu 2 olduğundan ya değişmeli Lie cebridir ya da L_2 Lie cebridir. Ancak $L' = L_2$ olamaz: Eğer $L' = L_2$ olsaydı Önerme 2.11 kullanıldığında $L = L_2 \oplus Z_L(L_2)$ ve buradan

$$L' = L'_2 \oplus (Z_L(L_2))' \cong L'_2$$

olurdu. $L' = L_2$ olduğundan $L_2 \cong L'_2$ elde edilir. Bu durumda ise L'_2 Lie cebrinin 1 boyutlu olması L_2 Lie cebrinin 2 boyutlu olmasıyla çelişir.

$\{x, y\}$ kümesi L' için bir taban ve $\{x, y, z\}$ kümesi de L Lie cebri için bir taban olsun. L değişmeli olmayan bir Lie cebri ve L' değişmeli bir Lie cebri olduğundan

$$[x, y] = 0, \quad [z, x] = ax + by, \quad [z, y] = cx + dy$$

olur. Burada a ve b cisim elemanlarından en az birisi ve c ve d cisim elemanlarından en az birisi sıfırdan farklıdır. Eğer hepsi sıfır olsaydı L Lie cebri değişmeli olurdu. L' Lie cebri $\{[x, y], [z, x], [z, y]\}$ elemanları tarafından üretildiğinden, $[x, y] = 0$ olduğundan ve L' Lie cebrinin boyutu 2 olduğundan $[z, x], [z, y]$ elemanları L' Lie cebri için bir taban olur. Bu durumda ad_z dönüşümünün görüntü uzayının boyutu 2 olduğundan $ad_z : L' \rightarrow L'$ dönüşümü bir izomorfizmdir ve ad_z dönüşümünün matrisi tekil değildir.

L ve $\bar{L}$, $boy L = boy \bar{L} = 3$, $boy L' = boy \bar{L}' = 2$, L' ve $\bar{L}'$ abelyen olmak üzere izomorf iki Lie cebri olsun. $\{x, y\}$ kümesi L' cebri için bir taban; $\{x, y, z\}$ kümesi L Lie cebri için bir taban olsun. Benzer şekilde $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ kümesi $\bar{L}'$ cebri için bir taban; $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ kümesi $\bar{L}$ Lie cebri için bir taban olsun. $\phi : L \rightarrow \bar{L}$ bu iki Lie cebri arasında bir izomorfizm olsun. Bu durumda kısıtlanmış olan dönüşüm

$$\phi|_{L'} : L' \longrightarrow \bar{L}'$$

bir izomorfizmdir. Ayrıca $[x, y] = 0$ olduğundan

$$0 = \phi(0) = \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$$

olur. $\alpha \neq 0$ olmak üzere; $\phi(z) = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \delta\bar{z}$ taban elemanlarının lineer toplamı şeklinde ifade edilebilir. Burada $\delta \neq 0$ olmak zorundadır: Eğer $\delta = 0$ olsaydı $\phi(z) = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \bar{L}'$ olurdu. ϕ bir izomorfizm olduğundan $\{\phi(x), \phi(y), \phi(z)\}$ kümesi de $\bar{L}$ Lie cebri için bir tabandır. $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ olduğundan $\{[\phi(x), \phi(z)], [\phi(y), \phi(z)]\}$ kümesi $\bar{L}'$ alt cebri için bir tabandır. $\phi(z) \in \bar{L}'$ olduğundan

$$\phi(z) = k_1[\phi(x), \phi(z)] + k_2[\phi(y), \phi(z)]$$

olacak şekilde $k_1, k_2 \in F$ elemanları vardır. ϕ bir Lie cebri izomorfizmi olduğundan

$$\phi(z) = \phi(k_1[x, z] + k_2[y, z])$$

olarak ifade edilebilir. ϕ dönüşümü bire-bir olduğundan

$$z = k_1[x, z] + k_2[y, z]$$

ve $z \in L'$ bulunur. Bu ise $\{x, y, z\}$ kümesinin lineer bağımsızlığı ile çelişir. Bu durumda $\delta = 0$ varsayımımız yanlıştır, $\delta \neq 0$ olmalıdır.

Herhangi bir $v \in L'$ elemanı için

$$[\phi(v), \phi(z)] = \phi([v, z]) = \phi(ad_z(v)) = (\phi \circ ad_z)(v)$$

ve

$$\begin{aligned} [\phi(v), \phi(z)] &= [\phi(v), \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \delta\bar{z}] \\ &= \underbrace{[\phi(v), \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}]}_{=0} + [\phi(v), \delta\bar{z}] \\ &= \delta[\phi(v), \bar{z}] = \delta ad_{\bar{z}}(\phi(v)) \\ &= (ad_{\delta\bar{z}} \circ \phi)(v) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\phi \circ ad_z = ad_{\delta\bar{z}} \circ \phi$$

elde edilir. Böylece L ve $\bar{L}$ Lie cebirleri, $\text{boy}L = \text{boy}\bar{L} = 3$, $\text{boy}L' = \text{boy}\bar{L}' = 2$, L' ve $\bar{L}'$ abelyen olmak üzere izomorf ise ad_z ve $ad_{\delta\bar{z}}$ dönüşümlerinin benzer olduğu görülür.

2×2 tipinde girdileri F cisminden olan matrislerin kümesi $M_2(F)$ ile gösterilsin. Herhangi bir tekil olmayan $M \in M_2(F)$ matrisi için, $a, b \in F^*$ olmak üzere; mümkün rasyonel kanonik formlar

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

şeklinde [7–9].

Eğer ad_z dönüşümünün matrisi

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

ise $ad_z(x) = [z, x] = ax$ ve $ad_z(y) = [z, y] = ay$ olur. $a \in F^*$ olduğundan

$$[a^{-1}z, x] = x \quad \text{ve} \quad [a^{-1}z, y] = y$$

olarak ifade edilebilir. $\{x, y, z\}$ bir taban olduğundan z taban elemanı yerine $\tilde{z} := a^{-1}z$ seçilebilir. Böylece $\{x, y, \tilde{z}\}$ kümesi de L için bir tabandır ve bu tabana göre $ad_{\tilde{z}}$ dönüşümünün matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

Eğer ad_z dönüşümünün matrisi

$$A_{2,a} := \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

formunda ise $ad_z(x) = [z, x] = y$ ve $ad_z(y) = [z, y] = ax$ olur.

Eğer ad_z dönüşümünün matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

formunda ise $ad_z(x) = [z, x] = y$ ve $ad_z(y) = [z, y] = ax + by$ olur. ad_z dönüşümü bir izomorfizm olduğundan $a \in F^*$ dır. Eğer $b = 0$ alınırsa ad_z dönüşümünün matrisi bir önceki duruma dönüşeceğinden $b \in F^*$ alınacaktır.

$$[z, y] = ax + by \text{ eşitliğinden}$$

$$b^{-1}[z, y] = b^{-1}ax + y \quad \text{ve} \quad [b^{-1}z, y] = (b^{-1}a)x + y$$

olur. $\tilde{z} := b^{-1}z$ ve $c := ab^{-1}$ alındığında

$$[\tilde{z}, y] = cx + y$$

olur. $\tilde{x} := cx$ olarak yeniden isimlendirildiğinde $[\tilde{z}, y] = \tilde{x} + y$ elde edilir. Ayrıca $[z, x] = y$ eşitliğinden

$$[b\tilde{z}, c^{-1}\tilde{x}] = y = (c^{-1}b)[\tilde{z}, \tilde{x}]$$

ve $d := b^{-1}c$ olmak üzere

$$[\tilde{z}, \tilde{x}] = (b^{-1}c)y = dy$$

bulunur. Böylece $\{\tilde{x}, y, \tilde{z}\}$ kümesi L Lie cebri için bir taban olduğundan $ad_{\tilde{z}}$ dönüşümünün matrisi

$$A_{3,d} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ d & 1 \end{bmatrix}$$

haline indirgenir.

Tüm durumlar göz önüne alındığında L Lie cebrinin en az bir $\{x, y, z\}$ tabanı vardır öyleki ad_z dönüşümünün bu tabana göre matrisi

$$I_{2 \times 2}, \quad A_{2,a}, \quad A_{3,d}$$

matrislerinden birisi olur. Bu durumda ad_z dönüşümünün mümkün karakteristik

polinomları

$$f(x) = (x - 1)^2, \quad f(x) = x^2 - a, \quad f(x) = x^2 - x - d$$

olarak bulunur.

Ayrıca ad_z dönüşümünün mümkün matrisleri dikkate alındığında elde edilen Lie cebirlerindeki braketler şu şekildedir:

$$\begin{aligned} L_1 \quad \text{Lie cebri} \quad : \quad [x, y] &= 0, \quad [z, x] = x, \quad [z, y] = y. \\ L_{2,a} \quad \text{Lie cebri} \quad : \quad [x, y] &= 0, \quad [z, x] = y, \quad [z, y] = ax. \\ L_{3,d} \quad \text{Lie cebri} \quad : \quad [x, y] &= 0, \quad [z, x] = dy, \quad [z, y] = x + y. \end{aligned}$$

Bu adımda yukarıda verilen Lie cebirlerinin hangilerinin izomorf olduğu belirlenecektir: Yukarıdaki tartışmadan dolayı iki Lie cebri izomorf iseler ad_z ve $ad_{\delta z}$ dönüşümleri benzer olacaklarından karakteristik polinomları aynı olur. Buradan L_1 cebirinin $L_{2,a}$ ya da $L_{3,d}$ cebrine, $L_{2,a}$ cebirinin L_1 ya da $L_{3,d}$ cebrine ve $L_{3,d}$ cebirinin L_1 ya da $L_{2,a}$ cebrine izomorf olamayacağı sonucuna ulaşılır.

ad_z dönüşümünün matrisi A ile, $ad_{\delta z}$ dönüşümünün matrisi δB ile gösterilsin. Yukarıdaki açıklamalardan, L ve L' Lie cebirlerinin izomorf olması için gerek ve yeter koşul A ve δB matrislerinin benzer olması sonucuna ulaşılır. A matrisinin karakteristik polinomu

$$(x - 1)^2, \quad x^2 - a, \quad x^2 - x - d$$

polinomlarından birisi, δB matrisinin karakteristik polinomu

$$(x - \delta)^2, \quad x^2 - \delta^2 a, \quad x^2 - \delta x - \delta^2 d$$

polinomlarından birisi olacağından ve iki matris benzer ise karakteristik polinomları aynı olacağından;

- Eğer $A = B = A_1$ ise A ve δB matrisleri benzer ise $(x - 1)^2 = (x - \delta)^2$ eşitliğinden $\delta = 1$ olur.
- $A = A_{2,a}$ ve $B = A_{2,b}$ olmak üzere; A ve δB matrisleri benzer ise $x^2 - a =$

$x^2 - \delta^2 b$ eşitliğinden $a = \delta^2 b$ elde edilir. Tersine $a = \delta^2 b$ ise

$$P = \begin{bmatrix} 0 & d\delta^{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere; $PAP^{-1} = \delta B$ eşitliği sağlandığından A ve δB matrisleri benzerdir.

- $A = A_{3,d}$ ve $B = A_{3,e}$ olmak üzere; A ve δB matrislerinin benzer olması için gerek yeter koşul $\delta = 1$ ve $d = e$ olmasıdır.

durumları elde edilir. Böylece L Lie cebrinin boyutu 3 ve L' iki boyutlu değişmeli bir Lie cebri ise aşağıdaki Lie cebirlerinden birisine izomorftur:

- L_1
- $L_{2,a}, \quad a \in F^*$
- $L_{3,d}, \quad d \in F^*$

4.3. L' Alt Cebri Boyutu 3 ise

L' alt cebri boyutu 3 ise açık olarak $L = L'$ olur. Bu durumda $\{x, y, z\}$ kümesi L Lie cebri için bir taban ise $\{[x, y], [x, z], [y, z]\}$ kümesi de L Lie cebri için bir tabandır ve $\{[y, z], [z, x], [x, y]\}$ sıralı tabanını $\{x, y, z\}$ tabanına dönüştüren taban değişim matrisi tekil değildir. Bu matris $M_{x,y,z}$ ile gösterilsin. $M_{x,y,z}$ matrisi simetrik bir matristir:

$$\begin{aligned} [y, z] &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ [z, x] &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ [x, y] &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned}$$

olsun.

Jakobi eşitliği kullanıldığında,

$$[[y, z], x] + [[z, x], y] + [[x, y], z] = 0,$$

$$[a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, x] + [a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, y] + [a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, z] = 0,$$

$$a_{12}[y, z] + a_{13}[z, x] + a_{21}[x, y] + a_{23}[z, y] + a_{31}[x, z] + a_{32}[y, z] = 0$$

ve

$$(a_{21} - a_{11})[x, y] + (a_{13} - a_{31})[z, x] + (a_{32} - a_{23})[y, z] = 0$$

elde edilir. $\{[y, z], [z, x], [x, y]\}$ kümesi L Lie cebri için bir taban olduğundan lineer bağımsızdır. Dolayısıyla

$$a_{21} - a_{11} = 0, a_{13} - a_{31} = 0, a_{32} - a_{23} = 0$$

elde edilir. Bu ise $M_{x,y,z}$ matrisinin simetrik olduğunu gösterir.

$\tilde{L}$, L Lie cebrine izomorf bir Lie cebri ve $\varphi : \tilde{L} \rightarrow L$ bir izomorfizm olsun. $\{x, y, z\}$ kümesi L Lie cebri için bir taban, $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$ kümesi de $\tilde{L}$ Lie cebri için bir taban olsun. Bu durumda $\{\varphi(\tilde{x}), \varphi(\tilde{y}), \varphi(\tilde{z})\}$ kümesi de L Lie cebri için bir tabandır. Ayrıca

$$\begin{aligned}\varphi(\tilde{x}) &= ax + by + cz, \\ \varphi(\tilde{y}) &= dx + ey + fz, \\ \varphi(\tilde{z}) &= gx + hy + iz\end{aligned}$$

olarak yazılabilir ve

$$A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. $\{\varphi(\tilde{x}), \varphi(\tilde{y}), \varphi(\tilde{z})\}$ kümesi L Lie cebri için bir taban ve $L' = L$ olduğundan $\{[\varphi(\tilde{y}), \varphi(\tilde{z})], [\varphi(\tilde{z}), \varphi(\tilde{x})], [\varphi(\tilde{x}), \varphi(\tilde{y})]\}$ kümesi de L Lie cebri için bir tabandır.

$$\begin{aligned}[\varphi(\tilde{y}), \varphi(\tilde{z})] &= [dx + ey + fz, gx + hy + iz] \\ &= (ei - fh)[y, z] + (fg - di)[z, x] + (dh - ge)[x, y],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\varphi(\tilde{z}), \varphi(\tilde{x})] &= [gx + hy + iz, ax + by + cz] \\ &= (hc - ib)[y, z] + (ia - gc)[z, x] + (gb - ha)[x, y]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[\varphi(\tilde{x}), \varphi(\tilde{y})] &= [ax + by + cz, dx + ey + fz] \\
&= (bf - ce)[y, z] + (cd - af)[z, x] + (ae - bd)[x, y]
\end{aligned}$$

olduğundan $\{[\varphi(\tilde{y}), \varphi(\tilde{z})], [\varphi(\tilde{z}), \varphi(\tilde{x})], [\varphi(\tilde{x}), \varphi(\tilde{y})]\}$ tabanını $\{[y, z], [z, x], [x, y]\}$ tabanına dönüştüren taban değişim matrisi

$$P = \begin{pmatrix} ei - fh & hc - ib & bf - ce \\ fg - di & ia - gc & cd - af \\ dh - ge & gb - ha & ae - bd \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$A^t P = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A)I$$

bulunur. Bu eşitlik kullanılarak

$$P = \det(A) (A^t)^{-1},$$

$$M_{x,y,z} P = \det(A) M_{x,y,z} (A^t)^{-1}$$

ve

$$A^{-1} M_{x,y,z} P = \det(A) A^{-1} M_{x,y,z} (A^t)^{-1}$$

elde edilir. $A^{-1} M_{x,y,z} P$ matrisi $\{[\varphi(\tilde{y}), \varphi(\tilde{z})], [\varphi(\tilde{z}), \varphi(\tilde{x})], [\varphi(\tilde{x}), \varphi(\tilde{y})]\}$ tabanından $\{\varphi(\tilde{x}), \varphi(\tilde{y}), \varphi(\tilde{z})\}$ tabanına taban değişim matrisidir.

$$\begin{array}{ccc}
\{[\varphi(\tilde{y}), \varphi(\tilde{z})], [\varphi(\tilde{z}), \varphi(\tilde{x})], [\varphi(\tilde{x}), \varphi(\tilde{y})]\} & \xrightarrow{P} & \{[y, z], [z, x], [x, y]\} \\
M_{\varphi(\tilde{x}), \varphi(\tilde{y}), \varphi(\tilde{z})} \downarrow & & \downarrow M_{x,y,z} \\
\{\varphi(\tilde{x}), \varphi(\tilde{y}), \varphi(\tilde{z})\} & \xrightarrow{A} & \{x, y, z\}
\end{array}$$

Bu durumda $A^{-1}M_{x,y,z}P = M_{\varphi(\tilde{x}),\varphi(\tilde{y}),\varphi(\tilde{z})}$ olur ve buradan

$$M_{\varphi(\tilde{x}),\varphi(\tilde{y}),\varphi(\tilde{z})} = \det(A)A^{-1}M_{x,y,z}(A^t)^{-1} \quad (4.1)$$

bulunur.

$M_{x,y,z}$ matrisi simetrik olduğundan α, β sıfırdan farklı cisim elemanları olmak üzere; $M_{x,y,z}$ matrisi

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formunda bir matrise benzerdir. Bu nedenle

$$M_{x,y,z} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak alındığında

$$[x, y] = z, \quad [y, z] = \alpha x, \quad [z, x] = \beta y$$

olur. Bu Lie cebri $L_{\alpha,\beta}$ ile gösterilsin. Bu adımda $L_{\alpha,\beta}$ Lie cebrinin Killing formu hesaplanacaktır. $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in F$ olmak üzere; herhangi $u = u_1x + u_2y + u_3z, v = v_1x + v_2y + v_3z \in L_{\alpha,\beta}$ elemanları için $\{x, y, z\}$ tabanına göre ad_u ve ad_v dönüşümlerinin matrisleri

$$ad_u = \begin{pmatrix} 0 & -u_3\alpha & u_2\alpha \\ u_3\beta & 0 & -u_1\beta \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad_v = \begin{pmatrix} 0 & -v_3\alpha & v_2\alpha \\ v_3\beta & 0 & -v_1\beta \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$ad_u ad_v = \begin{pmatrix} -\alpha(u_2v_2 + u_3v_3\beta) & u_2v_1\alpha & u_3v_1\alpha\beta \\ u_1v_2\beta & -\beta(u_3v_3\alpha + u_1v_1) & u_3v_2\alpha\beta \\ u_1v_3\beta & u_2v_3\alpha & -(u_1v_1\beta + u_2v_2\alpha) \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\kappa_{\alpha,\beta}(u, v) &= \text{tr}(ad_u ad_v) \\
&= -\alpha(u_2 v_2 + u_3 v_3 \beta) - \beta(u_3 v_3 \alpha + u_1 v_1) - (u_1 v_1 \beta + u_2 v_2 \alpha) \\
&= -2u_1 v_1 \beta - 2u_2 v_2 \alpha - 2u_3 v_3 \alpha \beta \\
&= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olur. $\kappa_{\alpha,\beta}$ simetrik bi-lineer formuna karşılık gelen matris

$$D_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha\beta \end{pmatrix}$$

olsun. Bu veriler kullanılarak aşağıdaki teorem ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 4.3.1. $\alpha, \beta, \theta, \nu$ sıfırdan farklı cisim elemanları olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

- $\kappa_{\alpha,\beta}$ ve $\kappa_{\theta,\nu}$ formları izometriktir.
- $L_{\alpha,\beta}$ ve $L_{\theta,\nu}$ Lie cebirleri izomorftir.

Kanıt. $\kappa_{\alpha,\beta}$ ve $\kappa_{\theta,\nu}$ formları izometrik ise

$$D_{\alpha,\beta} = P D_{\theta,\nu} P^t$$

olacak şekilde tekil olmayan P matrisi vardır. Bu eşitliğin tersi alındığında

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{2\beta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2\alpha\beta} \end{pmatrix} = (P^t)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2\nu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2\theta\nu} \end{pmatrix} P^{-1}$$

ve bu eşitliğin her iki tarafı $\frac{\alpha\beta}{\theta\nu}$ ile çarpıldığında

$$\begin{pmatrix} \frac{-\alpha}{2\theta\nu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\beta}{2\theta\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2\theta\nu} \end{pmatrix} = (P^t)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{-\alpha\beta}{2\theta\nu^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\alpha\beta}{2\theta^2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha\beta}{2\theta^2\nu^2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

ve

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\alpha\beta}{\theta\nu} (P^t)^{-1} \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} \quad (4.2)$$

bulunur. Buradan

$$(\det P)^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{\theta^2\nu^2}$$

elde edilir. (4.1) eşitliği dikkate alındığında bu iki Lie cebrinin izomorf olması için gerek ve yeter koşul $\det P = \frac{\alpha\beta}{\theta\nu}$ olarak bulunur.

Eğer $\det P = -\frac{\alpha\beta}{\theta\nu}$ ise (4.2) eşitliğinde P yerine $-P$ alındığında da istenen elde edilmiş olur.

Tersine $L_{\alpha,\beta}$ ve $L_{\theta,\nu}$ Lie cebirleri izomorf ise her $a, b \in L_{\alpha,\beta}$ için

$$\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$$

olacak şekilde en az bir $\varphi : L_{\alpha,\beta} \rightarrow L_{\theta,\nu}$ Lie cebri izomorfizmi vardır. $\{x, y, z\}$ kümesi $L_{\alpha,\beta}$ Lie cebri için bir taban ise $\{\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)\}$ kümesi de $L_{\theta,\nu}$ Lie cebri için bir tabandır.

$$[x, y] = z \quad [x, z] = -\beta y \quad [y, z] = \alpha x$$

ve φ bir Lie cebri izomorfizmi olduğundan

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi(z) \quad [\varphi(x), \varphi(z)] = -\beta\varphi(y) \quad [\varphi(y), \varphi(z)] = \alpha\varphi(x)$$

elde edilir. Bu durumda aynı adjoint matrislere sahip olurlar. Bunun sonucu olarak Killing formları aynı olur.

□

KAYNAKÇA

- [1] Jacobson,N. (2009). *Basic Algebra I*(Second edition). New York: Dover Publications.
- [2] Jacobson,N. (2009). *Basic Algebra II*(Second edition). New York: Dover Publications.
- [3] Erdmann, K. and Wildon, M. J.(2000). *Introduction to Lie Algebras*. New York: Springer.
- [4] Hall, B.(2015). *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary introduction*. Switzerland: Springer.
- [5] Gilmore, R. (2006). *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*. New York: Dover Publications.
- [6] Jacobson, N. (1979). *Lie Algebras*. New York: Dover Publications.
- [7] Anton, H., Busby, B. C. (2003). *Contemporary Linear Algebra*. USA: John Wiley and Sons.
- [8] Hoffman, K., Kunze R.(1971). *Linear Algebra*. New Jersey: Prentice Hall.
- [9] Kolman, B., Hill, D. R. (2005). *Introductory Linear Algebra An Applied First Course*. USA: Pearson Prentice Hall.
- [10] Grove, L. (2002). *Classical Groups and Geometric Algebra*. USA: American Mathematical Society.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : İsmail BOZTAŞ
Yabancı Dil : İNGİLİZCE
Doğum Yeri ve Yılı : Manavgat - 1992
E-Posta : ismailboztas@eskisehir.edu.tr

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2016-2019, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans
- 2016-2019, Matematik Öğretmeni, Elit Özel Öğretim Kursu
- 2015-2016, Matematik Öğretmeni, Küçük Hasan Ortaokulu
- 2014-2015, Matematik Öğretmeni, Evliya Çelebi Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi
- 2010-2014, Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi , Matematik Bölümü
- 2006-2010, Manavgat Anadolu Lisesi, Fen Bilimleri