



**İKİLİ TOPOLOJİK UZAYLARDA
AYIRMA AKSİYOMLARI**

Zeynep KAYA

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI**

**2021
Her hakkı saklıdır.**



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİLİ TOPOLOJİK UZAYLARDA AYIRMA AKSİYOMLARI

Zeynep KAYA

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2021

Her hakkı saklıdır

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

04 / 06 / 2021

İmzası

Zeynep KAYA

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİLİ TOPOLOJİK UZAYLARDA AYIRMA AKSİYOMLARI

Zeynep KAYA

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

Bu tezde literatürde var olan ij -ön-açık küme, ij -yarı-açık küme, ij -yarı-ön-açık küme, ij - α -açık küme, ij -yarı-kapanış kümesi, ij - α -kapanış kümesi, ij -yarı-ön-kapanış kümesi, ij -ön-kapanış kümesi, ij -genelleştirilmiş-kapalı küme, ij -genelleştirilmiş-yarı-kapalı küme, ij -yarı-genelleştirilmiş-kapalı küme, ij - α -genelleştirilmiş-kapalı küme, ij -genelleştirilmiş- α -kapalı küme, ij -genelleştirilmiş-yarı-ön-kapalı küme, ij -yarı-ön-genelleştirilmiş-kapalı küme, ij -genelleştirilmiş-ön-kapalı küme kullanılarak, ij -genelleştirilmiş-açık küme, ij -genelleştirilmiş-yarı-açık küme, ij -yarı-genelleştirilmiş-açık küme, ij - α -genelleştirilmiş-açık küme, ij -genelleştirilmiş- α -açık küme, ij -genelleştirilmiş-yarı-ön-açık küme, ij -yarı-ön-genelleştirilmiş-açık küme, ij -genelleştirilmiş-ön-açık küme tanımlanmış ve bu açık kümeler kullanılarak yeni ayırma aksiyomları elde edilmiştir.

2021, 112 sayfa

Anahtar Kelimeler: Önaçık kümeler, yarı-açık kümeler, yarı-önaçık kümeler, açık kümeler, α -açık kümeler.

ABSTRACT

MS. Thesis

SEPARATION AXIOMS IN BITOPOLOGICAL SPACES

Zeynep KAYA

Erzurum Technical University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Maths

Supervisor: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

In this thesis, it is defined ij -generalized-open set, ij -semigeneralized-open set, ij -generalizedsemi-open set, ij - α generalized-open set, ij -generalized α -open set, semipregeneralized-open set, ij -generalizedsemipre-open sets, ij -generalizedpre-open set, by using ij -preopen sets, ij -semi-open sets, ij -semi-preopen set, ij - α -open set, ij -semi closure, ij - α closure, ij -semi preclosure, ij -preclosure, ij -generalized-closed sets, ij -generalizedsemi-closed set, ij - α generalized-closed sets, ij -semigeneralized-closed set, ij -generalized α -closed set, ij -semipregeneralized-closed set, ij -generalizedpre-closed sets, ij -generalizedsemipre-closed set, ij -generalized-open sets existing in the literature. Also it is obtained new separation axiom in bitopological space with these open sets.

2021, 112 pages

Anahtar Kelimeler: Preopen sets, semi open sets, semi pre open sets, open sets, α -open sets.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Yüksek lisans eğitimim boyunca ve bu tez çalışmamı oluşturmamda bana her türlü desteğini esirgemeyen, her zaman arkamda olan çok değerli hocam Sayın Prof Dr. Ceren Sultan Elmalı'ya sonsuz teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım ve benden hiçbir desteğini esirgemeyen Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyeleri'ne teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı aileme, arkadaşlarım Merve İnanç ve Cavide Yaşar'a teşekkür ederim.

Zeynep Kaya
Haziran / 2021

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3.MATERYAL ve YÖNTEM.....	6
3.1. Topolojik Uzaylarda Yer Alan Bazı Temel Kavramlar ve Teoremler.....	6
3.2. Ayırma Aksiyomları.....	7
3.3. Önaçık (Önkapalı), Yarı-Açık (Yarı-Kapalı), α -Açık (α -Kapalı) Kümeler	9
3.4. İkili Topolojik Uzaylar ve İkili Topolojik Uzaylarda Bazı Kümeler.....	10
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	16
4.1. ij-GO Kümeler ile Ayırma Aksiyomları.....	16
4.2. ij-GSO Kümeler ile Ayırma Aksiyomları	17
4.3. ij-SGO Kümeler ile Ayırma Aksiyomları	18
4.4. ij- α GO Kümeler ile Ayırma Aksiyomları	19
4.5. ij-G α O Kümeler ile Ayırma Aksiyomları.....	20
4.6. ij-GSPO Kümeler ile Ayırma Aksiyomları.....	21
4.7. ij- SPGO Kümeler ile Ayırma Aksiyomları.....	22
4.8. ij-GPO Kümeler ile Ayırma Aksiyomları	23
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	110
KAYNAKLAR	111

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$ij\text{-}PO(X)$	X in ij -önaçık (ij -preopen) kümeler ailesi
$ij\text{-}SO(X)$	X in ij -yarı-açık (ij -semi-open) kümeler ailesi
$ij\text{-}SPO(X)$	X in ij -yarı-önaçık (ij -semi-preopen) kümeler ailesi
$ij\text{-}\alpha O(X)$	X in $ij\text{-}\alpha$ -açık ($ij\text{-}\alpha$ -open) kümeler ailesi
$ij\text{-}PC(X)$	X in ij -önkapalı (ij -preclosed) kümeler ailesi
$ij\text{-}SC(X)$	X in ij -yarı-kapalı (ij -semi-closed) kümeler ailesi
$ij\text{-}SPC(X)$	X in ij -yarı-önkapalı (ij -semi-preclosed) kümeler ailesi
$ij\text{-}\alpha C(X)$	X in $ij\text{-}\alpha$ -kapalı ($ij\text{-}\alpha$ -closed) kümeler ailesi
$ij\text{-}PO(X)$	X in ij -önaçık (ij -preopen) kümeler ailesi
$ij\text{-}scl(A)$	A kümesinin ij -yarı kapanış (ij -semi closure)
$ij\text{-}\alpha cl(A)$	A kümesinin $ij\text{-}\alpha$ kapanış ($ij\text{-}\alpha$ closure)
$ij\text{-}spcl(A)$	A kümesinin ij -yarı önkapanış (ij -semi preclosure)
$ij\text{-}pcl(A)$	A kümesinin ij -önkapanış (ij -preclosure)
$ij\text{-}SCL(X)$	X in ij -yarı kapanış (ij -semi closure) kümeler ailesi
$ij\text{-}\alpha CL(X)$	X in $ij\text{-}\alpha$ kapanış ($ij\text{-}\alpha$ closure) kümeler ailesi
$ij\text{-}SPCL(X)$	X in ij -yarı önkapanış (ij -semi preclosure) kümeler ailesi
$ij\text{-}PCL(X)$	X in ij -önkapanış (ij -preclosure) kümeler ailesi
$ij\text{-}GC(X)$	X in ij -genelleştirilmiş-kapalı (ij -generalized-closed) kümeler ailesi (ij -gc-closed)
$ij\text{-}GSC(X)$	X in ij -genelleştirilmişyarı-kapalı (ij -generalizedsemi-closed) kümeler ailesi (ij -gs-closed)
$ij\text{-}SGC(X)$	X in ij -yarıgenelleştirilmiş-kapalı (ij -semigeneralized-closed) kümeler ailesi (ij -sg-closed)
$ij\text{-}\alpha GC(X)$	X in $ij\text{-}\alpha$ genelleştirilmiş-kapalı ($ij\text{-}\alpha$ generalized-closed) kümeler ailesi ($ij\text{-}g\alpha$ -closed)
$ij\text{-}G\alpha C(X)$	X in ij -genelleştirilmiş α -kapalı (ij -generalized α -closed) kümeler ailesi ($ij\text{-}g\alpha$ -closed)
$ij\text{-}GSPC(X)$	X in ij -genelleştirilmişyarıön-kapalı (ij -generalizedsemipre-closed) kümeler ailesi (ij -gsp-closed)

$ij\text{-SPGC}(X)$	X in ij -yarıöngellenleştirilmiş-kapalı (ij -semipregeneralized-closed) kümeler ailesi ($ij\text{-spg-closed}$)
$ij\text{-GPC}(X)$	X in ij -genelleştirilmişön-kapalı (ij -generalizedpre-closed) kümeler ailesi ($ij\text{-gp-closed}$)
$ij\text{-GO}(X)$	X in ij -genelleştirilmiş-açık (ij -generalized-open) kümeler ailesi ($ij\text{-g-open}$)
$ij\text{-GSO}(X)$	X in ij -genelleştirilmişyarı-açık (ij -generalizedsemi-open) kümeler ailesi ($ij\text{-gs-open}$)
$ij\text{-SGO}(X)$	X in ij -yarıgenelleştirilmiş-açık kümeler ailesi (ij -semigeneralized-open)
$ij\text{-}\alpha\text{GO}(X)$	X in ij - α genelleştirilmiş-açık (ij - α generalized-open) kümeler ailesi ($ij\text{-}\alpha\text{ g-open}$)
$ij\text{-G}\alpha\text{O}(X)$	X in ij -genelleştirilmiş α -açık (ij -generalized α -open) kümeler ailesi ($ij\text{-g}\alpha\text{-open}$)
$ij\text{-GSPO}(X)$	X in ij -genelleştirilmişyarıön-açık (ij -generalizedsemipre-open) kümeler ailesi ($ij\text{-gsp-open}$)
$ij\text{-SPGO}(X)$	X in ij -yarıöngellenleştirilmiş-açık (ij -semipregeneralized-open) kümeler ailesi ($ij\text{-spg-open}$)
$ij\text{-GPO}(X)$	X in ij -genelleştirilmişön-açık (ij -generalizedpre-open) kümeler ailesi ($ij\text{-gp-open}$)

1. GİRİŞ

Uygulamalı matematik ve teorik matematikte çeşitli yapılarda verilen kümeler incelenmiştir. İnceleme sürecinde, herhangi bir problemi çözerken bazı durumlarda bir kümeyi belirli bir yapıda göz önüne almanın yeterli olmadığı görülmüştür. Böylece çözüme ulaşmak için, bir küme üzerine ek bazı yapıların tanımlanmasına ihtiyaç duyulmuştur. Bu ihtiyaçtan yola çıkarak topolojik uzaylarda kullanılan bazı teoriler ikili topolojik uzaylara da taşınarak bu ihtiyaç giderilmeye çalışılmıştır. İkili topolojik uzaylarda çalışmanın en büyük yararı; bir küme üzerinde iki veya ikiden fazla yapının göz önüne alınması ile matematiksel kavramların uzaylar üzerinde ayırt edilmesi sağlanır. Ayrıca, iki veya ikiden fazla yapıyı göz önünde bulundurarak, birkaç yapıda incelenmesi istenen matematiksel öğeler aynı anda çalışılabilir.

İkili topolojik uzayları, J. C. Kelly 1963 yılında yayınladığı “Bitopological Space” adlı makalesinde ilk kez incelemiştir. Kelly bu makalede, X kümesini boştan farklı herhangi bir küme olarak alıp, τ_1 ve τ_2 topolojilerini de X kümesi üzerinde herhangi iki topoloji olarak almış ve böylece bizlere ikili topolojik uzayı (X, τ_1, τ_2) sıralı üçlüsü ile tanıtmıştır. J. C. Kelly’ nin bu makalesi ikili topolojik uzaylar (iki topolojili uzaylar) üzerine yapılan ilk ve en temel çalışma olarak kabul edilir.

Sunulan bu tezde üç çalışma temel kaynak olarak ele alınmıştır.

Bunlardan ilki S. Selvanayagi ve N. Rajesh tarafından 2011 de yapılan çalışmadır. Bu çalışmada ikili topolojik uzaydan bahsedilmiş ve hemen hemen (quasi) açık kümeler, hemen hemen(quasi) kapalı kümeler, hemen hemen T_0 , hemen hemen T_1 , hemen hemen $T_{\frac{1}{2}}$, hemen hemen T_2 , hemen hemen $T_{\frac{1}{2}}^*$, hemen hemen T_D aksiyomları tanımlanmıştır.

İkinci çalışma ise Mohammad S. Sarsak tarafından 2006 da yapılan çalışmadır. Bu çalışmada da yine ikili topolojik uzaydan bahsedilmiş ve hemen hemen (quasi) açık kümeler, hemen hemen kapalı kümeler, hemen hemen yarı (semi) açık kümeler, hemen

hemen yarı kapalı kümeler, hemen hemen yarı T_0 , hemen hemen yarı T_1 , hemen hemen yarı $T_{\frac{1}{2}}$, hemen hemen yarı T_2 tanımlanmıştır.

Son olarak incelenen üçüncü çalışma ise Osama El-Tantawy ve Hasan Abu-Donia tarafından 2005 yılında yapılan çalışmadır. Bu çalışmada ise yine ikili topolojik uzaylarda *ij*-önaçık kümeler, *ij*-yarı-açık kümeler, *ij*-yarı-önaçık kümeler, *ij*- α -açık kümeler, *ij*-yarı kapanış, *ij*- α -kapanış, *ij*-yarı önkapanış, *ij*-önkapanış kümelerini hatırlatmış ve *ij*-g-kapalı kümeler, *ij*-gs-kapalı kümeler, *ij*-sg-kapalı kümeler, *ij*- α g-kapalı kümeler, *ij*-g α -kapalı kümeler, *ij*-gsp-kapalı kümeler, *ij*-spg-kapalı kümeler, *ij*-gp-kapalı kümeler tanımlanmıştır.

Sunulan bu tezde ise topolojik uzaylarda yer alan bazı temel kavramlar ve teoremlerin yanı sıra yukarıda bahsedilen çalışmalardaki kavram ve tanımlara yer verilmiştir.

Yüksek lisans çalışması olarak sunulan bu tezde *ij*-g-kapalı kümeler, *ij*-gs-kapalı kümeler, *ij*-sg-kapalı kümeler, *ij*- α g-kapalı kümeler, *ij*-g α -kapalı kümeler, *ij*-gsp-kapalı kümeler, *ij*-spg-kapalı kümeler, *ij*-gp-kapalı kümelerin tanımları göz önünde bulundurularak *ij*-g-açık kümeler, *ij*-gs-açık kümeler, *ij*-sg-açık kümeler, *ij*- α g-açık kümeler, *ij*-g α -açık kümeler, *ij*-gsp-açık kümeler, *ij*-spg-açık kümeler, *ij*-gp-açık kümeler tanımlanmış ve daha sonra da bu tanımlar kullanılarak *ij*-GO ayırma aksiyomları, *ij*-GSO ayırma aksiyomları, *ij*-SGO ayırma aksiyomları, *ij*- α GO ayırma aksiyomları, *ij*-G α O ayırma aksiyomları, *ij*-GSPO ayırma aksiyomları, *ij*-SPGO ayırma aksiyomları, *ij*-GPO ayırma aksiyomları tanımlanmış ve böylece yeni ayırma aksiyomları elde edilmiştir. Ayrıca bu ayırma aksiyomları arasındaki ilişkilerin incelendiği teoremler elde edildi.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

1963 yılında J. C. Kelly tarafından yapılan “Bitopological space” çalışması, İkili topolojik uzaylar (İki topolojili uzaylar) üzerine yapılan ilk ve en temel makaledir. (Kelly 1963).

1963 yılında N. Levine tarafından yapılan çalışmada topolojik uzaylarda yarı-açık (semi-open) küme kavramı ortaya atıldı (Levine 1963).

1971 yılında S. Crossley ve S. Hildebrand çalışmalarında yarı-kapalı kümeleri ve bir kümenin yarı-kapanışını gösterdiler (Crossley and Hildebrand 1971).

1972 te yarı-topolojik ayırma aksiyomları S. Crossley ve S. Hildebrand tarafından çalışıldı (Crossley and Hildebrand 1972).

1975 yılında N. Maheshwari ve R. Prasad yarı-açık küme kavramını göz önüne alarak yarı- T_0 , yarı- T_1 ve yarı- T_2 , yarı reguler, yarı normal olarak tanımladıkları yeni zayıf ayırma aksiyomları tanımladılar. Tanımladıkları bu aksiyomlara yarı ayırma aksiyomları ismini verdiler (Maheshwari and Prasad 1975).

1982 yılında C. Dorsett, yarı-açık ve yarı-kapalı kümeleri kullanarak yarı-regülerlik kavramını açıkladı (Dorsett 1982). Yazar 1985 yılında da yarı-açık ve yarı-kapalı kümeleri kullanarak yarı-normallik kavramını tanımladı (Dorsett 1985).

1982 de A. S. Mashhour ile arkadaşları tarafından önaçık kümeler kavramı öne sürüldü ve ön-süreklilik kavramı tanımlandı (Mashhour and El-Monsey and El-Deeb 1982).

1987 de P. Bhattacharyya ile B. K. Lahiri yarı açıklığı göz önüne alarak kapalı kümeleri yarı-genelleştirilmiş kapalı kümeler olarak genelleştirebildiler ve yarı- T_0 ve yarı- T_1 uzaylarının arasında yer alan yarı- $T_{\frac{1}{2}}$ uzay adında yeni bir ayırma aksiyomu tanımladılar (Bhattacharyya and Lahiri 1987).

1990 da A. Kar ile P. Bhattacharyya ön-açık kümelerini göz önüne alarak ön- T_0 , ön- T_1 ve ön- T_2 şeklinde gösterilen yeni başka zayıf ayırma aksiyomları tanımladılar. Bu aksiyomlara ise ön-ayırma aksiyomları ismini verdiler (Kar and Bhattacharyya 1990).

1996 da H. Maki, J. Umehara ve T. Noiri ön- $T_{\frac{1}{2}}$ uzaylarını tanımlamak için ön-açık kümelerini baz alarak kapalı kümeleri ön-genelleştirilmiş kapalı kümelere genelleştirdiler. Bu sayede ön- T_0 ve ön- T_1 uzayları arasında bulunan ön- D_1 adını verdikleri yeni bir ayırma aksiyomu tanımladılar ve özelliklerini incelediler (Maki and Umehara and Noiri 1996).

1997 de M. Caldas tarafından yarı-D kümeleri kullanılarak özellikle yarı- T_0 ve yarı- T_1 uzaylarının arasında yer alan ve yarı- D_1 adı verilen yeni bir ayırma aksiyomu tanımlanarak özellikleri incelendi (Caldas 1997).

2001 de ise M. Caldas, bu sefer de ön-D kümeleri baz alarak özellikle ön- T_0 ve ön- T_1 uzayları arasında bulunan yeni bir ayırma aksiyomu tanımladı. Tanımladığı bu aksiyoma ön- D_1 adını verdi ve özelliklerini inceledi (Caldas 2001).

2004 yılında ilk olarak Ravi ve Lellis Thivagar ikili topolojik uzaylarda özel kümeler ele almış ve birçok sonuç elde etmiştir (Ravi and Thivagar 2006).

2005 yılında Dvalishvili ikili topolojik uzaylarda ikili T_1 , T_2 , T_3 , $T_{3\frac{1}{2}}$ ve T_4 uzayları tanımlamaları yapmış ve bazı özelliklerini vermiştir (Dvalishvili 2005).

2005 yılında Osama El-Tantawy ve Hasan Abu-Donia tarafından yapılan çalışmada ise yine ikili topolojik uzaylarda *ij*-önaçık kümeler, *ij*-yarı-açık kümeler, *ij*-yarı-önaçık kümeler, *ij*- α -açık kümeler, *ij*-yarı kapanış, *ij*- α kapanış, *ij*-yarı önkapanış, *ij*-önkapanış kümelerine değinilmiş ve *ij*-g-kapalı kümeler, *ij*-gs-kapalı kümeler, *ij*-sg-kapalı kümeler, *ij*- α g-kapalı kümeler, *ij*-g α -kapalı kümeler, *ij*-gsp-kapalı kümeler, *ij*-spg-kapalı kümeler, *ij*-gp-kapalı kümeler, *ij*- Ω -kapalı kümeler tanımlanmıştır (El-Tantawy and Abu-Donia 2005).

2006 yılında Mohammad S. Sarsak tarafından yapılan çalışmada da yine ikili topolojik uzayda hemen hemen açık kümeler, hemen hemen kapalı kümeler, hemen hemen yarı açık kümeler, hemen hemen yarı kapalı kümeler, hemen hemen yarı T_0 , hemen hemen yarı T_1 , hemen hemen yarı $T_{\frac{1}{2}}$, hemen hemen yarı T_2 tanımlanmıştır (Sarsak 2006).

2011 de S. Selvanayaki ve N. Rajesh tarafından yapılan çalışmada ise hemen hemen açık kümeler, hemen hemen kapalı kümeler, hemen hemen T_0 , hemen hemen T_1 , hemen hemen $T_{\frac{1}{2}}$, hemen hemen T_2 , hemen hemen $T_{\frac{1}{2}}^*$, hemen hemen T_D aksiyomları tanımlanmıştır (Selvanayaki and Rajesh 2011).

3.MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Topolojik Uzaylarda Yer Alan Bazı Temel Kavramlar ve Teoremler

Tanım 3.1.1: X boştan farklı bir küme ve τ da X in kuvvet kümesi $\mathcal{P}(X)$ in bir alt koleksiyonu olsun.

T-1). X ve $\emptyset$ kümeleri τ ya aittir. Yani $X \in \tau$ ve $\emptyset \in \tau$ dur.

T-2). τ nun herhangi bir alt koleksiyonuna ait kümelerin bileşkesi yine τ ya aittir. Yani I herhangi bir indis kümesi ve $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$$

dur.

T-3). τ ya ait iki kümenin kesişimi yine τ ya aittir. Yani, $U, V \in \tau$ ise

$$U \cap V \in \tau$$

dur.

özellikleri sağlanıyorsa τ ya X üzerinde bir **topoloji** denir. τ koleksiyonu X üzerinde bir topoloji ise (X, τ) sıralı ikilisine bir **topolojik uzay** denir (Koçak 2015).

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. τ nun elemanlarına (X, τ) uzayının **açık kümeleri** denir (Koçak 2015).

Tanım 3.1.2: (X, τ) bir topolojik uzay ve U kümesi X in bir alt kümesi olsun. U nun X e göre tümleyeni olan $X \setminus U$ kümesi (X, τ) uzayında açıksa U ya (X, τ) uzayının **kapalı alt kümesi** denir (Koçak 2015).

Tanım 3.1.3: (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesine x **noktasının bir komşuluğu** denir. Diğer bir deyişle τ nun x noktasını içeren her elemanına x **noktasının bir komşuluğu** denir (Koçak 2015).

Tanım 3.1.4: (X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde bir U açık kümesi varsa x noktasına A nın bir iç noktası denir. A nın bütün iç noktalarının kümesine A nın **içi** denir ve A° veya $int(A)$ ile gösterilir. Yani

$$A^\circ = int(A) = \{x \in X: x \in U \subseteq A \text{ özelliğinde en az bir } U \in \tau \text{ vardır}\}$$

dır (Koçak 2015).

Tanım 3.1.5: (X, τ) bir topolojik uzay, A, X in bir alt kümesi ve $\tilde{A}$, A nın limit noktalarının kümesi olsun. $X \setminus \tilde{A}$ kümesine A kümesinin dışı denir ve $dış(A)$ ile gösterilir. $dış(A)$ kümesinin elemanlarına da A kümesinin dış noktaları denir (Koçak 2015).

Tanım 3.1.6: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini içeren tüm kapalıların kesişimine bu kümenin kapanışı denir. A kümesinin kapanışı $\bar{A}$ veya $cl(A)$ ile gösterilir (Shaum 1965).

3.2. Ayırma Aksiyomları

Tanım 3.2.1: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in her bir x, y nokta çifti için, bu noktalardan birini içeren diğerini içermeyen en az bir U açık kümesi varsa bu (X, τ) topolojik uzayına T_0 uzayı denir. Diğer bir ifade ile $x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için;

$$x \in U \in \tau, y \notin U \in \tau \text{ veya } x \notin U \in \tau, y \in U \in \tau$$

olacak şekilde en az bir U açık kümesi varsa (X, τ) topolojik uzayına T_0 uzayı denir (Koçak 2015).

Tanım 3.2.2: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in her bir x, y nokta çifti için, bu noktalardan her birinin diğer noktayı içermeyecek şekilde bir komşuluğu varsa (X, τ) topolojik uzayına T_1 uzayı denir. Diğer bir ifade ile $x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için;

$$x \in U \in \tau, y \notin U \in \tau \text{ ve } x \notin V \in \tau, y \in V \in \tau$$

olacak şekilde en az bir U ve V açık kümesi varsa (X, τ) topolojik uzayına T_1 uzayı denir (Koçak 2015).

Tanım 3.2.3: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$x \in U, y \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde U, V ayrık ve açık kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına T_2 uzayı (Hausdorff uzayı) denir (Koçak 2015).

Tanım 3.2.4: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Kapalı her $F \subseteq X$ kümesi ve $x \notin F$ özelliğindeki her $x \in X$ noktası için

$$U \cap V = \emptyset, F \subseteq V \text{ ve } x \in U$$

olacak şekilde $U, V \in \tau$ kümeleri varsa (X, τ) uzayına T_3 uzayı denir (Koçak 2015).

Tanım 3.2.5: X bir topolojik uzay olsun. $\forall p \in X$ ve p yi ihtiva etmeyen F kapalı kümesi verilsin. $p \in U, F \subset V, U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açıkları varsa X uzayına regüler uzay denir (Shaum 1965).

Tanım 3.2.6: (X, τ) topolojik uzay, F_1 ve F_2 kümeleri ayrık ve her biri bu uzayda kapalı iki küme olsun. Biri F_1 kapalı kümesini diğeri F_2 kapalı kümesini kapsayan ayrık ve açık $U, V \in \tau$ kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına normal uzay denir. Başka bir ifade ile $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olmak üzere F_1 ve F_2 kapalı kümeleri,

$$F_1 \subseteq U \text{ ve } F_2 \subseteq V$$

olacak şekilde U, V ayrık ve açık kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına normal uzay denir (Koçak 2015).

Tanım 3.2.7: (X, τ) topolojik uzayı, normal uzay olsun. Bu uzay aynı zamanda T_1 uzayı ise (X, τ) topolojik uzayına T_4 uzayı denir (Yıldız 2005).

3.3. Önaçık (Önkapalı), Yarı-Açık (Yarı-Kapalı), α -Açık (α -Kapalı) Kümeler

Tanım 3.3.1: (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \subset \text{int}(cl(A))$ ise A kümesine önaçık (preopen) küme denir (Mashour et al. 1982).

Bir önaçık kümenin tümleyenine önkapalı (preclosed) küme denir (Mashhour et al. 1982).

A kümesini kapsayan tüm önkapalı kümelerin kesişimine, A kümesinin önkapanış (preclosure) kümesi denir ve $pcl(A)$ ile gösterilir (Mashhour et al. 1982).

(X, τ) topolojik uzayındaki bütün önaçık kümelerin ailesini $PO(X)$, bir $x \in X$ noktasını içeren tüm önaçık kümelerin ailesini $PO(X, x)$ ile göstereceğiz (El-Deeb et al. 1983).

Tanım 3.3.2: (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer, $A \subset cl(\text{int}(A))$ ise, A kümesine yarı-açık (semi-open) küme denir (Levine 1963).

Bir yarı-açık kümenin tümleyenine yarı-kapalı (semi-closed) küme denir (El-Deeb et al. 1983).

A kümesini kapsayan tüm yarı-kapalı kümelerin kesişimine, A kümesinin yarı kapanış (semi closure) kümesi denir ve $scl(A)$ ile gösterilir (El-Deeb et al. 1983).

(X, τ) topolojik uzayındaki bütün yarı-açık kümelerin ailesini $SO(X)$, bir $x \in X$ noktasını içeren tüm yarı-açık kümelerin ailesini $SO(X, x)$ ile göstereceğiz (El-Deeb et al. 1983).

Tanım 3.3.3: (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer, $A \subset \text{int}(cl(\text{int}(A)))$ ise, A kümesine α -açık (α -open) küme denir (Njastad 1965).

Lemma 3.3.4: Her açık küme, α -açıktır (Beceren 1995; Njastad 1965).

Lemma 3.3.5: Her α -açık küme, önaçık kümedir (Beceren 1995; Noiri 1984).

Uyarı 3.3.6: Önaçık bir kümenin, α -açık olması gerekmez. (Noiri 1988; Beceren 1995)

Lemma 3.3.7: (X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Bu durumda A kümesinin α -açık olması için gerek ve yeter şart A kümesinin yarı-açık ve önaçık olmasıdır (Beceren 1995; Noiri 1984).

Tanım 3.3.8: (X, τ) topolojik uzayı ve $A \subseteq X$ alt kümesi verilsin. $A \subseteq U$ ve U , (X, τ) topolojik uzayında bir açık küme olmak üzere $cl(A) \subseteq U$ oluyorsa, A kümesine genelleştirilmiş kapalı küme veya g-kapalı (g-closed) küme denir (Levine 1970).

3.4. İkili Topolojik Uzaylar ve İkili Topolojik Uzaylarda Bazı Kümeler

Tanım 3.4.1: X boştan farklı bir küme olsun. τ_1 ve τ_2 X üzerinde birbirinden farklı iki topoloji olmak üzere (X, τ_1, τ_2) uzayına (sıralı üçlüsüne) ikili topolojik uzay (bitopolojik uzay) denir (Kelly 1963).

Tanım 3.4.2: (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayının A alt kümesi için, A nın τ_j ye göre kapanışının τ_i ye göre içi A nın üst kümesi oluyorsa A ya ij -önaçık (ij -preopen) küme denir. Başka bir ifadeyle ij -önaçık küme;

$$A \subset \tau_i - \text{int}(\tau_j - \text{cl}(A))$$

olur. (Sampath Kumar 1997).

Tanım 3.4.3: (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayının A alt kümesi için, A nın τ_i ye göre içinin τ_j ye göre kapanışı A nın üst kümesi oluyorsa A ya *ij*-yarı-açık (*ij*-semi-open) küme denir. Başka bir ifadeyle *ij*-yarı-açık küme;

$$A \subset \tau_j - \text{cl}(\tau_i - \text{int}(A))$$

olur (Sampath Kumar 1997).

Tanım 3.4.4: (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayının A alt kümesi için, A nın τ_j ye göre kapanışının τ_i ye göre içinin τ_j ye göre kapanışı A nın üst kümesi oluyorsa A ya *ij*-yarı-önaçık (*ij*-semi-preopen) küme denir. Başka bir ifadeyle *ij*-yarı-önaçık küme;

$$A \subset \tau_j - \text{cl}(\tau_i - \text{int}(\tau_j - \text{cl}(A)))$$

olur (Sampath Kumar 1997).

Tanım 3.4.5: (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayının A alt kümesi için, A nın τ_i ye göre içinin τ_j ye göre kapanışının τ_i ye göre içi A nın üst kümesi oluyorsa A ya *ij*- α -açık (*ij*- α -open) küme denir. Başka bir ifadeyle *ij*- α -açık küme;

$$A \subset \tau_i - \text{int}(\tau_j - \text{cl}(\tau_i - \text{int}(A)))$$

olur (Sampath Kumar 1997).

(X, τ_1, τ_2) nin *ij*-önaçık alt kümesinin (*ij*-yarı-açık, *ij*- α -açık ve *ij*-yarı-önaçık) tümleyeni *ij*-önkapalı (*ij*-yarı-kapalı, *ij*- α -kapalı ve *ij*-yarı-önkapalı) dir (El-Tantawy and Abu-Donla 2005).

Tüm i -kapalı, ij -yarı-açık, ij -yarı-kapalı, ij -önaçık, ij -önkapalı, ij - α -açık, ij - α -kapalı, ij -yarı-önaçık, ij -yarı-önkapalı (i -closed, ij -semi-open, ij -semi-closed, ij -preopen, ij -preclosed, ij - α -open, ij - α -closed, ij -semi-preopen, ij -semi-preclosed) kümelerinin sınıfı i -C(X), ij -SO(X), ij -SC(X), ij -PO(X), ij -PC(X), ij - α O(X), ij - α C(X), ij -SPO(X), ij -SPC(X) ile gösterilir (El-Tantawy and Abu-Donla 2005).

Tanım 3.4.6: (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. ij -SC(X) deki A yı içeren kapalıların arakesitinin oluşturduğu kümeye ij -yarı kapanış (ij -semi closure) kümesi denir. ij -yarı kapanış kümesi kısaca ij -scl(A) ile gösterilir. Başka bir ifadeyle

$$ij - scl(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ij - SC(X), A \subseteq F\}$$

olarak tanımlanır (Sampath Kumar 1997).

Tanım 3.4.7: (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. ij - α C(X) deki A yı içeren kapalıların arakesitinin oluşturduğu kümeye ij - α kapanış (ij - α closure) kümesi denir. ij - α kapanış kümesi kısaca ij - α cl(A) ile gösterilir. Başka bir ifadeyle

$$ij - \alpha cl(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ij - \alpha C(X), A \subseteq F\}$$

olarak tanımlanır (Sampath Kumar 1997).

Tanım 3.4.8: (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. ij -SPC(X) deki A yı içeren kapalıların arakesitinin oluşturduğu kümeye ij -yarı önkapanış (ij -semi preclosure) kümesi denir. ij -yarı önkapanış kümesi kısaca ij -spcl(A) ile gösterilir. Başka bir ifadeyle

$$ij - spcl(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ij - spc(X), A \subseteq F\}$$

olarak tanımlanır (Sampath Kumar 1997).

Tanım 3.4.9: (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $ij\text{-}PC(X)$ deki A yı içeren kapalıların arakesitinin oluşturduğu kümeye $ij\text{-}önkapanış$ ($ij\text{-}preclosure$) kümesi denir. $ij\text{-}önkapanış$ kümesi kısaca $ij\text{-}pcl(A)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle

$$ij - pcl(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ij - PC(X), A \subseteq F\}$$

dir (Sampath Kumar 1997).

Tüm $ij\text{-}yarı$ kapanış, $ij\text{-}\alpha$ kapanış, $ij\text{-}yarı$ önkapanış $ij\text{-}önkapanış$ ($ij\text{-}semi$ closure, $ij\text{-}\alpha$ closure, $ij\text{-}semi$ preclosure, $ij\text{-}preclosure$) kümelerinin sınıfı $ij\text{-}SCL(X)$, $ij\text{-}\alpha CL(X)$, $ij\text{-}SPCL(X)$, $ij\text{-}PCL(X)$ ile gösterilir (El-Tantawy and Abu-Donla 2005).

Tanım 3.4.10: A , (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. U , A yı kapsayan τ_i nin bir açığı olmak üzere A nın j ye göre kapanışı U açığının alt kümesi ise bu kümeye $ij\text{-}g\text{-kapalı}$ ($ij\text{-}g\text{-closed}$) küme denir. $ij\text{-}g\text{-kapalı}$ kümeler ailesi kısaca $ij\text{-}GC(X)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle eğer

$$A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow j - cl(A) \subset U$$

ise $ij\text{-}g\text{-kapalı}$ kümesidir (El-Tantawy and Abu-Donla 2005).

Tanım 3.4.11: A , (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. U , A yı kapsayan τ_i nin bir açığı olmak üzere A nın $ji\text{-}yarı$ kapanışı U açığının alt kümesi ise bu kümeye $ij\text{-}gs\text{-kapalı}$ ($ij\text{-}gs\text{-closed}$) küme denir. $ij\text{-}gs\text{-kapalı}$ kümeler ailesi kısaca $ij\text{-}GSC(X)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle $ij\text{-}gs\text{-kapalı}$ olması için

$$A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$$

olmalıdır (El-Tantawy and Abu-Donla 2005).

Tanım 3.4.12: A , (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. U , A yı kapsayan $ij\text{-}SO(X)$ nın bir açığı olmak üzere A nın $ji\text{-}yarı$ kapanışı U açığının alt

kümesi ise bu kümeye *ij*-sg-kapalı (*ij*-sg-closed) küme denir. *ij*-sg-kapalı kümeler ailesi kısaca *ij*-SGC(*X*) ile gösterilir. Başka bir ifadeyle *ij*-sg-kapalı olması için

$$A \subset U, U \in ij - SO(X) \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$$

olmalıdır (El-Tantawy and Abu-Donla 2005).

Tanım 3.4.13: *A*, (*X*, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. *U*, *A* yı kapsayan τ_i nin bir açığı olmak üzere *A* nın *ji*- α kapanışı *U* açığının alt kümesi ise bu kümeye *ij*- α g-kapalı (*ij*- α g-closed) küme denir. *ij*- α g-kapalı kümeler ailesi kısaca *ij*- α GC(*X*) ile gösterilir. Başka bir ifadeyle *ij*- α g-kapalı olması için

$$A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$$

olmalıdır (El-Tantawy and Abu-Donla 2005).

Tanım 3.4.14: *A*, (*X*, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. *U*, *A* yı kapsayan *ij*- α O(*X*) nin bir açığı olmak üzere *A* nın *ji*- α kapanışı *U* açığının alt kümesi ise bu kümeye *ij*-g α -kapalı (*ij*-g α -closed) küme denir. *ij*-g α -kapalı kümeler ailesi kısaca *ij*-G α C(*X*) ile gösterilir. Başka bir ifadeyle *ij*-g α -kapalı olması için

$$A \subset U, U \in ij - \alpha O(X) \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$$

olmalıdır (El-Tantawy and Abu-Donla 2005).

Tanım 3.4.15: *A*, (*X*, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. *U*, *A* yı kapsayan τ_i nin bir açığı olmak üzere *A* nın *ji*-yarı önkapanışı *U* açığının alt kümesi ise bu kümeye *ij*-gsp-kapalı (*ij*-gsp-closed) küme denir. *ij*-gsp-kapalı kümeler ailesi kısaca *ij*-GSPC(*X*) ile gösterilir. Başka bir ifadeyle *ij*-gsp-kapalı olması için

$$A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$$

olmalıdır (El-Tantawy and Abu-Donla 2005).

Tanım 3.4.16: $A, (X, \tau_1, \tau_2)$ ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. U, A yı kapsayan ji -SPO(X) nun bir açığı olmak üzere A nın ji -yarı önkapanışı U açığının alt kümesi ise bu kümeye ij -spg-kapalı (ij -spg-closed) küme denir. ij -spg-kapalı kümeler ailesi kısaca ij -SPGC(X) ile gösterilir. Başka bir ifadeyle ij -spg-kapalı olması için

$$A \subset U, U \in ji - SPO(X) \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$$

olmalıdır (El-Tantawy and Abu-Donla 2005).

Tanım 3.4.17: $A, (X, \tau_1, \tau_2)$ ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. U, A yı kapsayan τ_i nin bir açığı olmak üzere A nın ji -önkapanışı U açığının alt kümesi ise bu kümeye ij -gp-kapalı (ij -gp-closed) küme denir. ij -gp-kapalı kümeler ailesi kısaca ij -GPC(X) ile gösterilir. Başka bir ifadeyle ij -gp-kapalı olması için

$$A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - pcl(A) \subset U$$

olmalıdır (El-Tantawy and Abu-Donla 2005).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

3.4.10-17 tanımlarında yer alan ij -g-kapalı kümeler, ij -gs-kapalı kümeler, ij -sg-kapalı kümeler, ij - α g-kapalı kümeler, ij -g α -kapalı kümeler, ij -gsp-kapalı kümeler, ij -spg-kapalı kümeler, ij -gp-kapalı kümelerinin tümleyenleri alınarak ij -g-açık kümeler, ij -gs-açık kümeler, ij -sg-açık kümeler, ij - α g-açık kümeler, ij -g α -açık kümeler, ij -gsp-açık kümeler, ij -spg-açık kümeler, ij -gp-açık kümeleri elde edildi.

4.1. ij -GO Kümeler ile Ayırma Aksiyomları

Tanım 4.1.1: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -g-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow j - cl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GC(X) ve tümleyeni ij -GO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ($y \notin A$) veya $y \in A$ ($x \notin A$) olacak şekilde $A \in ij$ -GO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GO T_0 uzayı** denir.

Tanım 4.1.2: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -g-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow j - cl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GC(X) ve tümleyeni ij -GO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ($y \notin A$) ve $y \in B$ ($x \notin B$) olacak şekilde $A, B \in ij$ -GO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GO T_1 uzayı** denir.

Tanım 4.1.3: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -g-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow j - cl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GC(X) ve tümleyeni ij -GO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ve $y \in B$ olacak şekilde ayrık ($A \cap B = \emptyset$) $A, B \in ij$ -GO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GO T_2 uzayı** denir.

Tanım 4.1.4: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -g-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow j - cl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GC(X) ve tümleyeni ij -GO(X) olmak üzere $\forall p \in X$ ve p yi ihtiva etmeyen F , ij -GC(X) kapalı kümesi verilsin. $p \in A, F \subset$

$B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde A ve B ij -GO(X) açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GO regüler uzay** denir.

Tanım 4.1.5: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -g-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow j - cl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GC(X) ve tümleyeni ij -GO(X) olmak üzere F_1, F_2 kümeleri ij -GC(X) de ayrık kapalı alt kümeler olsun ($F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ve $F_1, F_2 \in ij$ -GC(X)). $F_1 \subset A, F_2 \subset B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \in ij$ -GO(X) açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GO normal uzayı** denir.

4.2. ij -GSO Kümeler ile Ayırma Aksiyomları

Tanım 4.2.1: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -gs-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GSC(X) ve tümleyeni ij -GSO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A (y \notin A)$ veya $y \in A (x \notin A)$ olacak şekilde $A \in ij$ -GSO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GSO T_0 uzayı** denir.

Tanım 4.2.2: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -gs-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GSC(X) ve tümleyeni ij -GSO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A (y \notin A)$ ve $y \in B (x \notin B)$ olacak şekilde $A, B \in ij$ -GSO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GSO T_1 uzayı** denir.

Tanım 4.2.3: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -gs-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GSC(X) ve tümleyeni ij -GSO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ve $y \in B$ olacak şekilde ayrık ($A \cap B = \emptyset$) $A, B \in ij$ -GSO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GSO T_2 uzayı** denir.

Tanım 4.2.4: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -gs-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GSC(X) ve tümleyeni ij -GSO(X)

olmak üzere $\forall p \in X$ ve p yi ihtiva etmeyen F , ij -GSC(X) kapalı kümesi verilsin. $p \in A, F \subset B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde A ve B ij -GSO(X) açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GSO regüler uzay** denir.

Tanım 4.2.5: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -gs-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GSC(X) ve tümleyeni ij -GSO(X) olmak üzere F_1, F_2 kümeleri ij -GSC(X) de ayrık kapalı alt kümeler olsun ($F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ve $F_1, F_2 \in ij$ -GSC(X)). $F_1 \subset A, F_2 \subset B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \in ij$ -GSO(X) açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GSO normal uzayı** denir.

4.3. ij -SGO Kümeler ile Ayırma Aksiyomları

Tanım 4.3.1: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -sg-kapalı; $A \subset U, U \in ij - SO(X) \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -SGC(X) ve tümleyeni ij -SGO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ($y \notin A$) veya $y \in A$ ($x \notin A$) olacak şekilde $A \in ij$ -SGO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -SGO T_0 uzayı** denir.

Tanım 4.3.2: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -sg-kapalı; $A \subset U, U \in ij - SO(X) \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -SGC(X) ve tümleyeni ij -SGO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ($y \notin A$) ve $y \in B$ ($x \notin B$) olacak şekilde $A, B \in ij$ -SGO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -SGO T_1 uzayı** denir.

Tanım 4.3.3: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -sg-kapalı; $A \subset U, U \in ij - SO(X) \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -SGC(X) ve tümleyeni ij -SGO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ve $y \in B$ olacak şekilde ayrık ($A \cap B = \emptyset$) $A, B \in ij$ -SGO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -SGO T_2 uzayı** denir.

Tanım 4.3.4: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -sg-kapalı; $A \subset U, U \in ij - SO(X) \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -SGC(X) ve tümleyeni ij -SGO(X) olmak üzere $\forall p \in X$ ve p yi ihtiva etmeyen F , ij -SGC(X) kapalı kümesi verilsin. $p \in A, F \subset B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde A ve B ij -SGO(X) açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -SGO regüler uzay** denir.

Tanım 4.3.5: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -sg-kapalı; $A \subset U, U \in ij - SO(X) \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -SGC(X) ve tümleyeni ij -SGO(X) olmak üzere F_1, F_2 kümeleri ij -SGO(X) da ayrık kapalı alt kümeler olsun ($F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ve $F_1, F_2 \in ij - GSC$). $F_1 \subset A, F_2 \subset B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \in ij$ -SGO(X) açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -SGO normal uzayı** denir.

4.4. ij - α GO Kümeler ile Ayırma Aksiyomları

Tanım 4.4.1: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij - α g-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij - α GC(X) ve tümleyeni ij - α GO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ($y \notin A$) veya $y \in A$ ($x \notin A$) olacak şekilde $A \in ij$ - α GO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij - α GO T_0 uzayı** denir.

Tanım 4.4.2: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij - α g-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij - α GC(X) ve tümleyeni ij - α GO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ($y \notin A$) ve $y \in B$ ($x \notin B$) olacak şekilde $A, B \in ij$ - α GO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij - α GO T_1 uzayı** denir.

Tanım 4.4.3: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij - α g-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij - α GC(X) ve tümleyeni ij - α GO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ve $y \in B$ olacak şekilde ayrık ($A \cap B = \emptyset$) $A, B \in ij$ - α GO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij - α GO T_2 uzayı** denir.

Tanım 4.4.4: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij - α -kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij - $\alpha GC(X)$ ve tümleyeni ij - $\alpha GO(X)$ olmak üzere $\forall p \in X$ ve p yi ihtiva etmeyen F , ij - $\alpha GC(X)$ kapalı kümesi verilsin. $p \in A, F \subset B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde A ve B ij - $\alpha GO(X)$ açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij - αGO regüler uzay** denir.

Tanım 4.4.5: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij - α -kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij - $\alpha GC(X)$ ve tümleyeni ij - $\alpha GO(X)$ olmak üzere F_1, F_2 kümeleri ij - $\alpha GO(X)$ da ayrık kapalı alt kümeler olsun ($F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ve $F_1, F_2 \in ij$ - $\alpha GC(X)$). $F_1 \subset A, F_2 \subset B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \in ij$ - $\alpha GO(X)$ açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij - αGO normal uzayı** denir.

4.5. ij - $G\alpha O$ Kümeler ile Ayırma Aksiyomları

Tanım 4.5.1: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij - $g\alpha$ -kapalı; $A \subset U, U \in ij - \alpha O(X) \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij - $G\alpha C(X)$ ve tümleyeni ij - $G\alpha O(X)$ olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ($y \notin A$) veya $y \in A$ ($x \notin A$) olacak şekilde $A \in ij$ - $G\alpha O(X)$ varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij - $G\alpha O$ T_0 uzayı** denir.

Tanım 4.5.2: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij - $g\alpha$ -kapalı; $A \subset U, U \in ij - \alpha O(X) \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij - $G\alpha C(X)$ ve tümleyeni ij - $G\alpha O(X)$ olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ($y \notin A$) ve $y \in B$ ($x \notin B$) olacak şekilde $A, B \in ij$ - $G\alpha O(X)$ varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij - $G\alpha O$ T_1 uzayı** denir.

Tanım 4.5.3: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij - $g\alpha$ -kapalı; $A \subset U, U \in ij - \alpha O(X) \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij - $G\alpha C(X)$ ve tümleyeni ij - $G\alpha O(X)$ olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ve $y \in B$ olacak şekilde ayrık ($A \cap B = \emptyset$) $A, B \in ij$ - $G\alpha O(X)$ varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij - $G\alpha O$ T_2 uzayı** denir.

Tanım 4.5.4: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij - $g\alpha$ -kapalı; $A \subset U, U \in ij - \alpha O(X) \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij - $G\alpha C(X)$ ve tümleyeni ij - $G\alpha O(X)$ olmak üzere $\forall p \in X$ ve p yi ihtiva etmeyen F , ij - $G\alpha C(X)$ kapalı kümesi verilsin. $p \in A, F \subset B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde A ve B ij - $G\alpha O(X)$ açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij - $G\alpha O$ regüler uzay** denir.

Tanım 4.5.5: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij - $g\alpha$ -kapalı; $A \subset U, U \in ij - \alpha O(X) \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij - $G\alpha C(X)$ ve tümleyeni ij - $G\alpha O(X)$ olmak üzere F_1, F_2 kümeleri ij - $G\alpha C(X)$ de ayrık kapalı altkümeler olsun ($F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ve $F_1, F_2 \in ij$ - $G\alpha C(X)$). $F_1 \subset A, F_2 \subset B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \in ij$ - $G\alpha O(X)$ açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij - $G\alpha O$ normal uzayı** denir.

4.6. ij -GSPO Kümeler ile Ayırma Aksiyomları

Tanım 4.6.1: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -gsp-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GSPC(X) ve tümleyeni ij -GSPO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A (y \notin A)$ veya $y \in A (x \notin A)$ olacak şekilde $A \in ij$ -GSPO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GSPO T_0 uzayı** denir.

Tanım 4.6.2: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -gsp-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GSPC(X) ve tümleyeni ij -GSPO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A (y \notin A)$ ve $y \in B (x \notin B)$ olacak şekilde $A, B \in ij$ -GSPO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GSPO T_1 uzayı** denir.

Tanım 4.6.3: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -gsp-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GSPC(X) ve tümleyeni ij -GSPO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak

üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ve $y \in B$ olacak şekilde ayrık ($A \cap B = \emptyset$) $A, B \in ij$ -GSPO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına ***ij*-GSPO T_2 uzayı** denir.

Tanım 4.6.4: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. *ij*-gsp-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi *ij*-GSPC(X) ve tümleyeni *ij*-GSPO(X) olmak üzere $\forall p \in X$ ve p yi ihtiva etmeyen F , *ij*-GSPC(X) kapalı kümesi verilsin. $p \in A, F \subset B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde A ve B *ij*-GSPO(X) açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına ***ij*-GSPO regüler uzay** denir.

Tanım 4.6.5: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. *ij*-gsp-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi *ij*-GSPC(X) ve tümleyeni *ij*-GSPO(X) olmak üzere F_1, F_2 kümeleri *ij*-GSPC(X) de ayrık kapalı altkümeler olsun ($F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ve $F_1, F_2 \in ij$ -GSPC(X)). $F_1 \subset A, F_2 \subset B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \in ij$ -GSPO(X) açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına ***ij*-GSPO normal uzayı** denir.

4.7. *ij*-SPGO Kümeler ile Ayırma Aksiyomları

Tanım 4.7.1: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. *ij*-spg-kapalı; $A \subset U, U \in ji - SPO(X) \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi *ij*-SPGC(X) ve tümleyeni *ij*-SPGO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ($y \notin A$) veya $y \in A$ ($x \notin A$) olacak şekilde $A \in ij$ -SPGO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına ***ij*-SPGO T_0 uzayı** denir.

Tanım 4.7.2: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. *ij*-spg-kapalı; $A \subset U, U \in ji - SPO(X) \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi *ij*-SPGC(X) ve tümleyeni *ij*-SPGO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ($y \notin A$) ve $y \in B$ ($x \notin B$) olacak şekilde $A, B \in ij$ -SPGO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına ***ij*-SPGO T_1 uzayı** denir.

Tanım 4.7.3: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. *ij*-spg-kapalı; $A \subset U, U \in ji - SPO(X) \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi *ij*-SPGC(X) ve

tümleyeni ij -SPGO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ve $y \in B$ olacak şekilde ayrık ($A \cap B = \emptyset$) $A, B \in ij$ -SPGO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -SPGO T_2 uzayı** denir.

Tanım 4.7.4: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -spg-kapalı; $A \subset U, U \in ji - SPO(X) \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -SPGC(X) ve tümleyeni ij -SPGO(X) olmak üzere $\forall p \in X$ ve p yi ihtiva etmeyen F , ij -SPGC(X) kapalı kümesi verilsin. $p \in A, F \subset B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde A ve B ij -SPGO(X) açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -SPGO regüler uzay** denir.

Tanım 4.7.5: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -spg-kapalı; $A \subset U, U \in ji - SPO(X) \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -SPGC(X) ve tümleyeni ij -SPGO(X) olmak üzere F_1, F_2 kümeleri ij -SPGC(X) de ayrık kapalı altkümeler olsun ($F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ve $F_1, F_2 \in ij$ -SPGC(X)). $F_1 \subset A, F_2 \subset B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \in ij$ -SPGO(X) açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -SPGO normal uzayı** denir.

4.8. ij -GPO Kümeler ile Ayırma Aksiyomları

Tanım 4.8.1: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -gp-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - pcl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GPC(X) ve tümleyeni ij -GPO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ($y \notin A$) veya $y \in A$ ($x \notin A$) olacak şekilde $A \in ij$ -GPO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GPO T_0 uzayı** denir.

Tanım 4.8.2: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -gp-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - pcl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GPC(X) ve tümleyeni ij -GPO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ($y \notin A$) ve $y \in B$ ($x \notin B$) olacak şekilde $A, B \in ij$ -GPO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GPO T_1 uzayı** denir.

Tanım 4.8.3: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -gp-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - pcl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GPC(X) ve tümleyeni ij -GPO(X) olmak üzere X in birbirinden farklı her x, y nokta çifti için ($x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için) $x \in A$ ve $y \in B$ olacak şekilde ayrık ($A \cap B = \emptyset$) $A, B \in ij$ -GPO(X) varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GPO T_2 uzayı** denir.

Tanım 4.8.4: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -gp-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - pcl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GPC(X) ve tümleyeni ij -GPO(X) olmak üzere $\forall p \in X$ ve p yi ihtiva etmeyen F , ij -GPC(X) kapalı kümesi verilsin. $p \in A, F \subset B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde A ve B ij -GPO(X) açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GPO regüler uzay** denir.

Tanım 4.8.5: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. ij -gp-kapalı; $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - pcl(A) \subset U$ olup bu kümelerin ailesi ij -GPC(X) ve tümleyeni ij -GPO(X) olmak üzere F_1, F_2 kümeleri ij -GPC(X) de ayrık kapalı altkümeler olsun ($F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ve $F_1, F_2 \in ij$ -GPC(X)). $F_1 \subset A, F_2 \subset B, A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \in ij$ -GPO(X) açıkları varsa (X, τ_i, τ_j) uzayına **ij -GPO normal uzayı** denir.

Örnek 4.8.5: $X = \{a, b, c\}$ kümesi verilsin. $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}$ ve $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, c\}\}$ olmak üzere (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzay olsun. Yukarıdaki tanımlarda verilen ayırma aksiyomlarını inceleyelim.

Çözüm: İlk olarak Tanım 3.4.2-17 tanımlarında yer alan açık kümeleri bulalım.

Tanım 3.4.2 de ifade edilen ij -önaçık tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-önaçık}(A): A \subset \tau_1 - int(\tau_2 - cl(A))$$

olup buradan

- $\tau_2 - cl(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{a\}) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \notin \emptyset$
- $\tau_2 - cl(\{b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{a, b\}) = \{b\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b\}$

- $\tau_2 - cl(\{c\}) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{c\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\{a, b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{a, b\}) = \{b\} \Rightarrow \{a, b\} \not\subset \{b\}$
- $\tau_2 - cl(\{a, c\}) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{a, c\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\{b, c\}) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij\text{-}PO(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.4 de ifade edilen *ij*-yarı-önaçık tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}yarı\text{-}önaçık(A): A \subset \tau_2 - cl(\tau_1 - int(\tau_2 - cl(A)))$$

olup buradan

- $\tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(\{b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{b\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \{c\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\{b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a, b\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \{a, c\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij\text{-}SPO(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.3 de ifade edilen *ij*-yarı-açık tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-yarı-açık}(A): A \subset \tau_2 - cl(\tau_1 - int(A))$$

olup buradan

- $\tau_1 - int(\{a\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(\{b\}) = \{b\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{b\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_1 - int(\{c\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(\{a, b\}) = \{b\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a, b\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_1 - int(\{a, c\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{b, c\}) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_1 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij\text{-SO}(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.5 de ifade edilen *ij- α -açık* tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}\alpha\text{-açık}(A): A \subset \tau_1 - int(\tau_2 - cl(\tau_1 - int(A)))$$

olup buradan

- $\tau_1 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(\{a, b\}) = \{b\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b\}$
- $\tau_1 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(\{a, b\}) = \{b\} \Rightarrow \{a, b\} \not\subset \{b\}$
- $\tau_1 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_1 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij-\alpha O(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.6 de ifade edilen $ij-scl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ij-scl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ij - SC(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ij\text{-yarı-açık küme: } ij-SO(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$ij\text{-yarı-kapalı küme: } ij-SC(X) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{c\}, \{a\}\}$$

- $scl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $scl(\{b\}) = X$
- $scl(\{c\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $scl(\{a, b\}) = X$
- $scl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $scl(\{b, c\}) = X$
- $scl(\emptyset) = \emptyset$
- $scl(X) = X$

$$ij-SCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.7 de ifade edilen $ij-\alpha cl(A)$ tanımını hatırlayalım

$$ij-\alpha cl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ij - \alpha C(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ij-\alpha\text{-açık küme: } ij-\alpha O(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}$$

$$ij-\alpha\text{-kapalı küme: } ij-\alpha C(X) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{a\}\}$$

- $\alpha cl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $\alpha cl(\{b\}) = X$
- $\alpha cl(\{c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $\alpha cl(\{a, b\}) = X$
- $\alpha cl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $\alpha cl(\{b, c\}) = X$
- $\alpha cl(\emptyset) = \emptyset$
- $\alpha cl(X) = X$

$$ij-\alpha CL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.8 de ifade edilen $ij\text{-}spcl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}spcl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ij\text{-}spc(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ij\text{-}yarı\text{-}önaçık küme: ij\text{-}SPO(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$ij\text{-}yarı\text{-}önkapalı küme: ij\text{-}SPC(X) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b\}, \{c\}, \{a\}\}$$

- $spc(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $spc(\{b\}) = X \cap \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\}$

- $spc(\{c\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $spc(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $spc(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $spc(\{b, c\}) = X$
- $spc(\emptyset) = \emptyset$
- $spc(X) = X$

$$ij\text{-SPCL}(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.9 de ifade edilen $ij\text{-pcl}(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-pcl}(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ij\text{-PC}(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ij\text{-önaçık küme: } ij\text{-PO}(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ij\text{-önkapalı küme: } ij\text{-PC}(X) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}\}$$

- $pcl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $pcl(\{b\}) = X \cap \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $pcl(\{c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $pcl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $pcl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $pcl(\{b, c\}) = X$
- $pcl(\emptyset) = \emptyset$
- $pcl(X) = X$

$$ij\text{-PCL}(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.2 de ifade edilen *ji*-önaçık tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}\acute{öna\acute{c}ık}(A): A \subset \tau_2 - int(\tau_1 - cl(A))$$

olup buradan

- $\tau_1 - cl(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{a\}) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(\{b\}) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \{b\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\{c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{a, c\}) = \{c\} \Rightarrow \{c\} \subset \{a, c\}$
- $\tau_1 - cl(\{a, b\}) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \{a, b\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\{a, c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{a, c\}) = \{c\} \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \{c\}$
- $\tau_1 - cl(\{b, c\}) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ji\text{-}PO(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.4 de ifade edilen *ji*-yarı-önaçık tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}yarı\text{-}\acute{öna\acute{c}ık}(A): A \subset \tau_1 - cl(\tau_2 - int(\tau_1 - cl(A)))$$

olup buradan

- $\tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \{b\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\{c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \{c\} \subset \{a, c\}$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \{a, b\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\{c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \{a, c\} \subset \{a, c\}$

- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ji\text{-}SPO(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.3 de ifade edilen *ji*-yarı-açık tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}yarı\text{-}açık(A): A \subset \tau_1 - cl(\tau_2 - int(A))$$

olup buradan

- $\tau_2 - int(\{a\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\{b\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\{c\}) = \{c\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \{c\} \subset \{a, c\}$
- $\tau_2 - int(\{a, b\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a, b\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\{a, c\}) = \{c\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \{a, c\} \subset \{a, c\}$
- $\tau_2 - int(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{b, c\}) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ji\text{-}SO(X) = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.5 de ifade edilen *ji*- α -açık tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}\alpha\text{-}açık(A): A \subset \tau_2 - int(\tau_1 - cl(\tau_2 - int(A)))$$

olup buradan

- $\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\{a, c\}) = \{c\} \Rightarrow \{c\} \subset \{c\}$
- $\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a, b\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\{a, c\}) = \{c\} \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \{c\}$
- $\tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ji-\alpha O(X) = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.6 de ifade edilen $ji-scl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ji-scl(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ji-SC(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ji\text{-}yarı\text{-}açık \text{ küme: } ji-SO(X) = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ji\text{-}yarı\text{-}kapalı \text{ küme: } ji-SC(X) = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}\}$$

- $scl(\{a\}) = X \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $scl(\{b\}) = \{a, b\} \cap \{b\} \cap X = \{b\}$
- $scl(\{c\}) = X$
- $scl(\{a, b\}) = \{a, b\} \cap X = \{a, b\}$
- $scl(\{a, c\}) = X$
- $scl(\{b, c\}) = X$
- $scl(\emptyset) = \emptyset$
- $scl(X) = X$

$$ji\text{-}SCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.7 de ifade edilen $ji\text{-}\alpha cl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}\alpha cl(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ji - \alpha C(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ji\text{-}\alpha\text{-a}\acute{c}ık\ küme: ji\text{-}\alpha O(X) = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, c\}\}$$

$$ji\text{-}\alpha\text{-k}apalı\ küme: ji\text{-}\alpha C(X) = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a\}\}$$

- $\alpha cl(\{a\}) = X \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $\alpha cl(\{b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $\alpha cl(\{c\}) = X$
- $\alpha cl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $\alpha cl(\{a, c\}) = X$
- $\alpha cl(\{b, c\}) = X$
- $\alpha cl(\emptyset) = \emptyset$
- $\alpha cl(X) = X$

$$ji\text{-}\alpha CL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.8 de ifade edilen $ji\text{-}spcl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}spcl(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ji - spc(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ji\text{-yarı-önaçık küme: } ji\text{-SPO}(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ji\text{-yarı-önkapalı küme: } ji\text{-SC}(X) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}\}$$

- $spcl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $spcl(\{b\}) = X \cap \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $spcl(\{c\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $spcl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $spcl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $spcl(\{b, c\}) = X$
- $spcl(\emptyset) = \emptyset$
- $spcl(X) = X$

$$ji\text{-SPCL}(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.9 da ifade edilen $ji\text{-pcl}(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-pcl}(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ji - PC(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ji\text{-önaçık küme: } ji\text{-PO}(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$ji\text{-önkapalı küme: } ji\text{-PO}(X) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a\}\}$$

- $pcl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $pcl(\{b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$

- $pcl(\{c\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $pcl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $pcl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $pcl(\{b, c\}) = X$
- $pcl(\emptyset) = \emptyset$
- $pcl(X) = X$

$$ji\text{-}PCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.10 de ifade edilen ij -g-kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}g\text{-}kapalı(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow j - cl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{a\}) = \{a\} \subset X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow j - cl(\{b\}) = \{a, b\} \not\subset \{b\}, \{b, c\}$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow j - cl(\{c\}) = X \not\subset \{b, c\}$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{a, c\}) = X \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow j - cl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$

$$ij\text{-}GC(X) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-}GO(X) = \{\{b, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.11 de ifade edilen ij -gs-kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}gs\text{-}kapalı(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset X \Rightarrow j - scl(\{a\}) = \{a\} \subset X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow j - scl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b\}, \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow j - scl(\{c\}) = X \not\subset \{b, c\}$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow j - scl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow j - scl(\{a, c\}) = X \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow j - scl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$

$$ij\text{-}GSC(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-}GSO(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.12 de ifade edilen $ij\text{-}sg\text{-}kapalı$ tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}sg\text{-}kapalı(A): A \subset U, U \in ij - SO(X) \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a, b\}, X \Rightarrow j - scl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a, b\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow j - scl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow j - scl(\{c\}) = X \not\subset \{b, c\}$
- $\{a, b\} \subset \{a, b\}, X \Rightarrow j - scl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset \{a, b\}, X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow j - scl(\{a, c\}) = X \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow j - scl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$

$$ij\text{-}SGC(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-SGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.13 de ifade edilen $ij\text{-}\alpha\text{g}$ -kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}\alpha\text{g}\text{-kapalı}(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a\}) = \{a\} \subset X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b\}) = \{a, b\} \not\subset \{b\}, \{b, c\}$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{c\}) = X \not\subset \{b, c\}$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, c\}) = X \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$

$$ij\text{-}\alpha\text{GC}(X) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-}\alpha\text{GO}(X) = \{\{b, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.14 de ifade edilen $ij\text{-}\alpha\text{g}$ -kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}\alpha\text{g}\text{-kapalı}(A): A \subset U, U \in ij - \alpha O(X) \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a\}) = \{a\} \subset X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b\}) = \{a, b\} \not\subset \{b\}, \{b, c\}$

- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{c\}) = X \not\subset \{b, c\}$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, c\}) = X \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$

$$ij\text{-G}\alpha C(X) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-G}\alpha O(X) = \{\{b, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.15 de ifade edilen *ij*-gsp-kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-gsp-kapalı}(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{a\}) = \{a\} \subset X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b\}, \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{c\}) = \{c\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$

$$ij\text{-GSPC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-GSPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.16 de ifade edilen *ij*-spg-kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-spg-kapalı}(A): A \subset U, U \in ji - SPO(X) \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a, b\}, \{a, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{c\}) = \{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset \{a, b\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset \{a, b\}, X$
- $\{a, c\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$

$$ij\text{-SPGC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-SPGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.17 de ifade edilen $ij\text{-gp-kapalı}$ tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-gp-kapalı}(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - pcl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{a\}) = \{a\} \subset X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{b\}) = \{a, b\} \not\subset \{b\}, \{b, c\}$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{c\}) = \{c\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$

$$ij\text{-GPC}(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-}GPO(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Şimdi sırasıyla 4.1-4.8 başlıklarında verilen ayırma aksiyomlarını inceleyelim:

Şimdi $ij\text{-}GO T_0$, $ij\text{-}GO T_1$, $ij\text{-}GO T_2$, $ij\text{-}GO$ regüler ve $ij\text{-}GO$ normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-}GO(X) = \{\{b, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad c \in \{c\} \ (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (c \notin \{b\})$

olup $ij\text{-}GO T_0$ uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (a \notin \{b\}) \text{ ve } a \in X \ (b \in X)$

olup a yı içerip b yi içermeyen açık yoktur. Dolayısıyla $ij\text{-}GO T_1$ uzayı değildir.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in X \text{ ve } b \in \{b\} \Rightarrow X \cap \{b\} = \{b\} \neq \emptyset$

olduğundan $ij\text{-}GO T_2$ uzayı değildir.

$$ij\text{-}GO(X) = \{\{b, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-}GC(X) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• b	$\{a\}$	$b \in \{b\}$	$\{a\} \subset X$	$\{b\} \cap X \neq \emptyset$

olup ij -GO regüler uzay değildir.

$$ij\text{-GO}(X) = \{\{b, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GC}(X) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• X	$\emptyset$	$X \subset X$	$\emptyset \subset \emptyset$	$X \cap \emptyset = \emptyset$

olup ij -GO normal uzaydır.

Şimdi ij -GSO T_0 , ij -GSO T_1 , ij -GSO T_2 , ij -GSO regüler ve ij -GSO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-GSO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad c \in \{c\} \ (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (c \notin \{b\})$

olup ij -GSO T_0 uzayıdır.

- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \ (c \in \{a, c\}) \text{ ve } c \in \{c\} \ (a \notin \{c\})$

olup a yı içerip c yi içermeyen açık yoktur. Dolayısıyla ij -GSO T_1 uzayı değildir.

- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\} \neq \emptyset$

olduğundan ij -GSO T_2 uzayı değildir.

$$ij\text{-GSO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GSC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• c	$\{a, b\}$	$c \in \{c\}$	$\{a, b\} \subset X$	$\{c\} \cap X \neq \emptyset$

olduğundan $ij\text{-GSO}$ regüler uzay değildir.

$$ij\text{-GSO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GSC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• $\{b\}$	$\{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$

olup $ij\text{-GSO}$ normal uzaydır.

Şimdi $ij\text{-SGO } T_0$, $ij\text{-SGO } T_1$, $ij\text{-SGO } T_2$, $ij\text{-SGO}$ regüler ve $ij\text{-SGO}$ normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-SGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad c \in \{c\} \ (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (c \notin \{b\})$

olup $ij\text{-SGO } T_0$ uzaydır.

- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \ (c \in \{a, c\}) \text{ ve } c \in \{c\} \ (a \notin \{c\})$

olup a yı içerip c yi içermeyen açık yoktur. Dolayısıyla ij -SGO T_1 uzayı değildir.

$$\bullet \quad a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\} \neq \emptyset$$

olduğundan ij -SGO T_2 uzayı değildir.

$$ij\text{-SGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-SGC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
$\bullet \quad c$	$\{a, b\}$	$c \in \{c\}$	$\{a, b\} \subset X$	$\{c\} \cap X \neq \emptyset$

olduğundan ij -SGO regüler uzay değildir.

$$ij\text{-SGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-SGC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
$\bullet \quad \{a\}$	$\{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
$\bullet \quad \{b\}$	$\{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$

olup ij -SGO normal uzaydır.

Şimdi ij - α GO T_0 , ij - α GO T_1 , ij - α GO T_2 , ij - α GO regüler ve ij - α GO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-}\alpha\text{GO}(X) = \{\{b, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad c \in \{c\} (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\})$

olup ij - α GO T_0 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (a \notin \{b\}) \text{ ve } a \in X (b \in X)$

olup a yı içerip b yi içermeyen açık yoktur. Dolayısıyla ij - α GO T_1 uzayı değildir.

$$a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in X \text{ ve } b \in \{b\} \Rightarrow X \cap \{b\} = \{b\} \neq \emptyset$$

olduğundan ij - α GO T_2 uzayı değildir.

$$ij\text{-}\alpha\text{GO}(X) = \{\{b, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-}\alpha\text{GC}(X) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• b	$\{a\}$	$b \in \{b\}$	$\{a\} \subset X$	$\{b\} \cap X \neq \emptyset$

olduğundan ij - α GO regüler uzay değildir.

$$ij\text{-}\alpha\text{GO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-}\alpha\text{GC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• $\{b\}$	$\{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$

olup ij - α GO normal uzaydır.

Şimdi ij - $G\alpha O$ T_0 , ij - $G\alpha O$ T_1 , ij - $G\alpha O$ T_2 , ij - $G\alpha O$ regüler ve ij - $G\alpha O$ normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij-G\alpha O(X) = \{\{b, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad c \in \{c\} \ (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (c \notin \{b\})$

olup ij - $G\alpha O$ T_0 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (a \notin \{b\}) \text{ ve } a \in X \ (b \in X)$

olup a yı içerip b yi içermeyen açık yoktur. Dolayısıyla ij - $G\alpha O$ T_1 uzayı değildir.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in X \text{ ve } b \in \{b\} \Rightarrow X \cap \{b\} = \{b\} \neq \emptyset$

olduğundan ij - $G\alpha O$ T_2 uzayı değildir.

$$ij-G\alpha O(X) = \{\{b, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij-G\alpha C(X) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• b	$\{a\}$	$b \in \{b\}$	$\{a\} \subset X$	$\{b\} \cap X \neq \emptyset$
• b	$\{a, c\}$	$b \in \{b\}$	$\{a, c\} \subset X$	$\{b\} \cap X \neq \emptyset$

olduğundan ij - $G\alpha O$ regüler uzay değildir.

$$ij\text{-}G\alpha O(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-}G\alpha C(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• $\{b\}$	$\{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$

olup $ij\text{-}G\alpha O$ normal uzaydır.

Şimdi $ij\text{-}GSPO T_0$, $ij\text{-}GSPO T_1$, $ij\text{-}GSPO T_2$, $ij\text{-}GSPO$ regüler ve $ij\text{-}GSPO$ normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-}GSPO(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} (b \notin \{a, c\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, b\} (c \notin \{a, b\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\})$

olup $ij\text{-}GSPO T_0$ uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} (b \notin \{a, c\}) \text{ ve } b \in \{b\} (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, b\} (c \notin \{a, b\}) \text{ ve } c \in \{c\} (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\}) \text{ ve } c \in \{c\} (b \notin \{c\})$

olup $ij\text{-}GSPO T_1$ uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \text{ ve } b \in \{b\} \Rightarrow \{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup ij -GSPO T_2 uzayıdır.

$$ij\text{-GSPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GSPC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• a	$\{b\}$	$a \in \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• a	$\{c\}$	$a \in \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• b	$\{a\}$	$b \in \{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$
• b	$\{c\}$	$b \in \{b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• b	$\{a, c\}$	$b \in \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$
• c	$\{a\}$	$c \in \{c\}$	$\{a\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$
• c	$\{b\}$	$c \in \{c\}$	$\{b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$
• c	$\{a, b\}$	$c \in \{c\}$	$\{a, b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$

olup ij -GSPO regüler uzayıdır.

$$ij\text{-GSPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GSPC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• $\{a\}$	$\{c\}$	$\{a\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• $\{b\}$	$\{c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• $\{b\}$	$\{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$
• $\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$

olup ij -GSPO normal uzayıdır.

Şimdi ij -SPGO T_0 , ij -SPGO T_1 , ij -SPGO T_2 , ij -SPGO regüler ve ij -SPGO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-SPGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} (b \notin \{a, c\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, b\} (c \notin \{a, b\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\})$

olup ij -SPGO T_0 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} (b \notin \{a, c\}) \text{ ve } b \in \{b\} (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, b\} (c \notin \{a, b\}) \text{ ve } c \in \{c\} (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\}) \text{ ve } c \in \{c\} (c \notin \{b\})$

olup ij -SPGO T_1 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \text{ ve } b \in \{b\} \Rightarrow \{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a, c\} \cap \{c\} = \emptyset$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup ij -SPGO T_2 uzayıdır.

$$ij\text{-SPGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-SPGC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• a	$\{b\}$	$a \in \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• a	$\{c\}$	$a \in \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$

• b	$\{a\}$	$b \in \{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$
• b	$\{c\}$	$b \in \{b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• b	$\{a, c\}$	$b \in \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$
• c	$\{a\}$	$c \in \{c\}$	$\{a\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$
• c	$\{b\}$	$c \in \{c\}$	$\{b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$
• c	$\{a, b\}$	$c \in \{c\}$	$\{a, b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$

olup ij -SPGO regüler uzaydır.

$$ij\text{-SPGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-SPGC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• $\{a\}$	$\{c\}$	$\{a\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• $\{b\}$	$\{c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• $\{b\}$	$\{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$
• $\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$

olup ij -SPGO normal uzaydır.

Şimdi ij -GPO T_0 , ij -GPO T_1 , ij -GPO T_2 , ij -GPO regüler ve ij -GPO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-GPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad c \in \{c\} \ (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (c \notin \{b\})$

olduğundan ij -GPO T_0 uzayıdır.

$$\bullet \quad a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a, b\} \ (b \in \{a, b\}) \text{ ve } b \in \{b\} (a \notin \{b\})$$

olduğundan ij -GPO T_1 uzayı değildir.

$$\bullet \quad a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a, b\} \text{ ve } b \in \{b\} \Rightarrow \{a, b\} \cap \{b\} \neq \emptyset$$

olduğundan ij -GPO T_2 uzayı değildir.

$$ij\text{-GPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GPC}(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
$\bullet \quad b$	$\{a\}$	$b \in \{b\}$	$\{a\} \subset \{a, b\}$	$\{a\} \cap \{a, b\} \neq \emptyset$

olduğundan ij -GPO regüler uzay değildir.

$$ij\text{-GPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GPC}(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
$\bullet \quad \{a\}$	$\{c\}$	$\{a\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$
$\bullet \quad \{c\}$	$\{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$

olup ij -GPO normal uzayıdır.

Örnek 4.8.6: $X = \{a, b, c\}$ kümesi verilsin. $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ ve $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ olmak üzere (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzay olsun. Yukarıdaki tanımlarda verilen ayırma aksiyomlarını inceleyelim.

Çözüm: İlk olarak Tanım 3.4.2-17 tanımlarında yer alan açık kümeleri bulalım.

Tanım 3.4.2 de ifade edilen *ij*-önaçık tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-önaçık}(A): A \subset \tau_1 - int(\tau_2 - cl(A))$$

olup buradan

- $\tau_2 - cl(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{a\}) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(\{b\}) = \{b, c\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_2 - cl(\{c\}) = \{c\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{c\}) = \{c\} \Rightarrow \{c\} \subset \{c\}$
- $\tau_2 - cl(\{a, b\}) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{a, b\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\{a, c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{a, c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \{a, c\} \subset \{a, c\}$
- $\tau_2 - cl(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b, c\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij\text{-PO}(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.4 de ifade edilen *ij*-yarı-önaçık tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-yarı-önaçık}(A): A \subset \tau_2 - cl(\tau_1 - int(\tau_2 - cl(A)))$$

olup buradan

- $\tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_2 - cl(\{c\}) = \{c\} \Rightarrow \{c\} \subset \{c\}$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \{a, b\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\{a, c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \{a, c\} \subset \{a, c\}$
- $\tau_2 - cl(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b, c\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij\text{-SPO}(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.3 nin de ifade edilen *ij*-yarı-açık tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-yarı-açık}(A): A \subset \tau_2 - cl(\tau_1 - int(A))$$

olup buradan

- $\tau_1 - int(\{a\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(\{b\}) = \{b\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{b\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_1 - int(\{c\}) = \{c\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{c\}) = \{c\} \Rightarrow \{c\} \subset \{c\}$
- $\tau_1 - int(\{a, b\}) = \{b\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{b\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{a, b\} \not\subset \{b, c\}$
- $\tau_1 - int(\{a, c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{a, c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \{a, c\} \subset \{a, c\}$
- $\tau_1 - int(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b, c\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_1 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij\text{-SO}(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.5 de ifade edilen ij - α -açık tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}\alpha\text{-açık}(A): A \subset \tau_1 - \text{int}(\tau_2 - cl(\tau_1 - \text{int}(A)))$$

olup buradan

- $\tau_1 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - \text{int}(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_1 - \text{int}(\{c\}) = \{c\} \Rightarrow \{c\} \subset \{c\}$
- $\tau_1 - \text{int}(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{a, b\} \not\subset \{b, c\}$
- $\tau_1 - \text{int}(\{a, c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \{a, c\} \subset \{a, c\}$
- $\tau_1 - \text{int}(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b, c\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_1 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - \text{int}(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij\text{-}\alpha O(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.6 de ifade edilen ij -scl(A) tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-scl}(A) = \cap \{F \subset X : F \in ij - SC(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ij\text{-yarı-açık küme: } ij\text{-SO}(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ij\text{-yarı-kapalı küme: } ij\text{-SC}(X) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}\}$$

- $scl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $scl(\{b\}) = X \cap \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\}$

- $scl(\{c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $scl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $scl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $scl(\{b, c\}) = X$
- $scl(\emptyset) = \emptyset$
- $scl(X) = X$

$$ij\text{-SCL}(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.7 de ifade edilen $ij\text{-}\alpha cl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}\alpha cl(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ij - \alpha C(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ij\text{-}\alpha\text{-açık küme: } ij\text{-}\alpha O(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ij\text{-}\alpha\text{-kapalı küme: } ij\text{-}\alpha C(X) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}\}$$

- $\alpha cl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $\alpha cl(\{b\}) = X \cap \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $\alpha cl(\{c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $\alpha cl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $\alpha cl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $\alpha cl(\{b, c\}) = X$
- $\alpha cl(\emptyset) = \emptyset$
- $\alpha cl(X) = X$

$$ij\text{-}\alpha CL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.8 de ifade edilen $ij\text{-}spcl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}spcl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ij - spc(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ij\text{-}yarı\text{-}önaçık\text{-}küme: ij\text{-}SPO(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ij\text{-}yarı\text{-}önkapalı küme: ij\text{-}SPO(X) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}\}$$

- $spcl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $spcl(\{b\}) = X \cap \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $spcl(\{c\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $spcl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $spcl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $spcl(\{b, c\}) = X$
- $spcl(\emptyset) = \emptyset$
- $spcl(X) = X$

$$ij\text{-}SPCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.9 de ifade edilen $ij\text{-}pcl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}pcl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ij - PC(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ij\text{-önaçık küme: } ij\text{-PO}(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ij\text{-önkapalı küme: } ij\text{-PC}(X) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}\}$$

- $pcl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $pcl(\{b\}) = X \cap \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $pcl(\{c\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $pcl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $pcl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $pcl(\{b, c\}) = X$
- $pcl(\emptyset) = \emptyset$
- $pcl(X) = X$

$$ij\text{-PCL}(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.2 de ifade edilen $ji\text{-önaçık}$ tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-önaçık}(A): A \subset \tau_2 - int(\tau_1 - cl(A))$$

olup buradan

- $\tau_1 - cl(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{a\} \subset \{a\}$
- $\tau_1 - cl(\{b\}) = \{b\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{b\}) = \{b\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b\}$
- $\tau_1 - cl(\{c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{a, c\}) = \{a\} \Rightarrow \{c\} \not\subset \{a\}$
- $\tau_1 - cl(\{a, b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{a, b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a, b\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_1 - cl(\{a, c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{a, c\}) = \{a\} \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \{a\}$
- $\tau_1 - cl(\{b, c\}) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ji\text{-}PO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.4 de ifade edilen *ji*-yarı-önaçık tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}yarı\text{-}önaçık(A): A \subset \tau_1 - cl(\tau_2 - int(\tau_1 - cl(A)))$$

olup buradan

- $\tau_1 - cl(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{a\} \subset \{a\}$
- $\tau_1 - cl(\{b\}) = \{b\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b\}$
- $\tau_1 - cl(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{c\} \not\subset \{a\}$
- $\tau_1 - cl(\{a, b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a, b\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_1 - cl(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \{a\}$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ji\text{-}SPO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.3 de ifade edilen *ji*-yarı-açık tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}yarı\text{-}açık(A): A \subset \tau_1 - cl(\tau_2 - int(A))$$

olup buradan

- $\tau_2 - int(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{a\} \subset \{a\}$
- $\tau_2 - int(\{b\}) = \{b\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{b\}) = \{b\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b\}$

- $\tau_2 - \text{int}(\{c\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - \text{cl}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - \text{int}(\{a, b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \tau_1 - \text{cl}(\{a, b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a, b\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_2 - \text{int}(\{a, c\}) = \{a\} \Rightarrow \tau_1 - \text{cl}(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \{a\}$
- $\tau_2 - \text{int}(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \tau_1 - \text{cl}(\{b, c\}) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_2 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - \text{cl}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 - \text{int}(X) = X \Rightarrow \tau_1 - \text{cl}(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ji\text{-SO}(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.5 de ifade edilen $ji\text{-}\alpha$ -açık tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}\alpha\text{-açık}(A): A \subset \tau_2 - \text{int}(\tau_1 - \text{cl}(\tau_2 - \text{int}(A)))$$

olup burdan

- $\tau_2 - \text{int}(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{a\} \subset \{a\}$
- $\tau_2 - \text{int}(\{b\}) = \{b\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b\}$
- $\tau_2 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - \text{int}(\{a, b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a, b\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_2 - \text{int}(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \{a\}$
- $\tau_2 - \text{int}(X) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_2 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 - \text{int}(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ji\text{-}\alpha\text{O}(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.6 da ifade edilen $ji\text{-scl}(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}scl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ji - SC(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ji\text{-}yarı\text{-}açık küme: ji\text{-}SO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$ji\text{-}yarı\text{-}kapalı küme: ji\text{-}SC(X) = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{a\}\}$$

- $scl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $scl(\{b\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $scl(\{c\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $scl(\{a, b\}) = X$
- $scl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $scl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $scl(\emptyset) = \emptyset$
- $scl(X) = X$

$$ji\text{-}SCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.7 de ifade edilen $ji\text{-}\alpha cl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}\alpha cl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ji - \alpha C(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ji\text{-}\alpha\text{-}açık küme: ji\text{-}\alpha O(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$ji\text{-}\alpha\text{-}kapalı küme: ji\text{-}\alpha C(X) = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{a\}\}$$

- $\alpha cl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $\alpha cl(\{b\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $\alpha cl(\{c\}) = X \cap \{b, c\} \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $\alpha cl(\{a, b\}) = X$
- $\alpha cl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $\alpha cl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $\alpha cl(\emptyset) = \emptyset$
- $\alpha cl(X) = X$

$$ji-\alpha CL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.8 de ifade edilen $ji-spcl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ji-spcl(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ji-SPC(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ji\text{-yarı-önaçık küme: } ji-SPO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$ji\text{-yarı-önkapalı küme: } ji-SPC(X) = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{a\}\}$$

- $spcl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $spcl(\{b\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $spcl(\{c\}) = X \cap \{b, c\} \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $spcl(\{a, b\}) = X$
- $spcl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $spcl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $spcl(\emptyset) = \emptyset$
- $spcl(X) = X$

$$ji\text{-}SPCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.9 da ifade edilen $ji\text{-}pcl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}pcl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ji - PC(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ji\text{-}önaçık küme: ji\text{-}PO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$ji\text{-}önkapalı küme: ji\text{-}PC(X) = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{a\}\}$$

- $pcl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $pcl(\{b\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $pcl(\{c\}) = X \cap \{b, c\} \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $pcl(\{a, b\}) = X$
- $pcl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $pcl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $pcl(\emptyset) = \emptyset$
- $pcl(X) = X$

$$ji\text{-}PCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.10 da ifade edilen $ij\text{-}g\text{-}kapalı$ tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}g\text{-}kapalı(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow j - cl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow j - cl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow j - cl(\{b\}) = \{b, c\} \not\subset \{b\}$
- $\{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X \Rightarrow j - cl(\{c\}) = \{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{a, b\}) = X \subset X$
- $\{a, c\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow j - cl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow j - cl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset \{b, c\}, X$

$$ij-GC(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij-GO(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.11 de ifade edilen *ij*-gs-kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-gs-kapalı}(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow ji - scl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - scl(\{b\}) = \{b, c\} \not\subset \{b\}$
- $\{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - scl(\{c\}) = \{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{a, b\}) = X \subset X$
- $\{a, c\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow ji - scl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - scl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset \{b, c\}, X$

$$ij-GSC(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij-GSO(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.12 de ifade edilen *ij*-sg-kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-sg-kapalı}(A): A \subset U, U \in ij - SO(X) \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow ji - scl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - scl(\{b\}) = \{b, c\} \not\subset \{b\}$
- $\{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - scl(\{c\}) = \{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{a, b\}) = X \subset X$
- $\{a, c\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow ji - scl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - scl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset \{b, c\}$

$$ij\text{-SGC}(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-SGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.13 de ifade edilen *ij-αg*-kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}\alpha g\text{-kapalı}(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b\}) = \{b, c\} \not\subset \{b\}$
- $\{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{c\}) = \{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, b\}) = X \subset X$

- $\{a, c\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset \{b, c\}, X$

$$ij-\alpha GC(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij-\alpha GO(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulur.

Tanım 3.4.14 de ifade edilen ij - $g\alpha$ -kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij-g\alpha\text{-kapalı}(A): A \subset U, U \in ij - \alpha O(X) \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b\}) = \{b, c\} \not\subset \{b\}$
- $\{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{c\}) = \{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, b\}) = X \subset X$
- $\{a, c\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset \{b, c\}, X$

$$ij-G\alpha C(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij-G\alpha O(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.15 de ifade edilen ij - gsp -kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij-gsp\text{-kapalı}(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b\}) = \{b, c\} \not\subset \{b\}$
- $\{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{c\}) = \{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{a, b\}) = X \subset X$
- $\{a, c\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset \{b, c\}, X$

$$ij\text{-GSPC}(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-GSPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.16 da ifade edilen *ij*-spg-kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-spg-kapalı}(A): A \subset U, U \in ji - SPO(X) \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b\}) = \{b, c\} \not\subset \{b\}, \{a, b\}$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{c\}) = \{c\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset \{a, b\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a, b\}) = X \not\subset \{a, b\}$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset \{b, c\}, X$

$$ij\text{-SPGC}(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-SPGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.17 de ifade edilen ij -gp-kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-gp-kapalı}(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - pcl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{b\}) = \{b, c\} \not\subset \{b\}$
- $\{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{c\}) = \{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{a, b\}) = X \subset X$
- $\{a, c\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset \{b, c\}$

$$ij\text{-GPC}(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-GPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Şimdi sırasıyla 4.1- 4.8 başlıklarında verilen ayırma aksiyomlarını inceleyelim:

Şimdi ij -GO T_0 , ij -GO T_1 , ij -GO T_2 , ij -GO regüler ve ij -GO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-GO}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} (b \notin \{a\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} (c \notin \{a\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\})$

olup ij -GO T_0 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} (b \notin \{a\}) \text{ ve } b \in \{b\} (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} (c \notin \{a\}) \text{ ve } c \in \{c\} (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\}) \text{ ve } c \in \{c\} (b \notin \{c\})$

olup ij -GO T_1 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \text{ ve } b \in \{b\} \Rightarrow \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a\} \cap \{c\} = \emptyset$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup ij -GO T_2 uzayıdır.

$$ij\text{-GO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GC}(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

- | p | F | U | V | $U \cap V$ |
|-------|------------|---------------|----------------------|-------------------------------|
| • b | $\{a, c\}$ | $b \in \{b\}$ | $\{a, c\} \subset X$ | $\{b\} \cap X \neq \emptyset$ |

olduğundan ij -GO regüler uzay değildir.

$$ij\text{-GO}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-GC}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

- | F_1 | F_2 | $F_1 \subset U$ | $F_2 \subset V$ | $U \cap V$ |
|--------------|---------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------------------|
| • $\{c\}$ | $\{a\}$ | $\{c\} \subset \{c\}$ | $\{a\} \subset \{a\}$ | $\{c\} \cap \{a\} = \emptyset$ |
| • $\{b, c\}$ | $\{a\}$ | $\{b, c\} \subset \{b, c\}$ | $\{a\} \subset \{a\}$ | $\{b, c\} \cap \{a\} = \emptyset$ |

- $\{a, b\} \quad \{c\} \quad \{a, b\} \subset \{a, b\} \quad \{c\} \subset \{c\} \quad \{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup *ij*-GO normal uzaydır.

Şimdi *ij*-GSO T_0 , *ij*-GSO T_1 , *ij*-GSO T_2 , *ij*-GSO regüler ve *ij*-GSO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-GSO}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \quad (b \notin \{a\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \quad (c \notin \{a\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \quad (c \notin \{b\})$

olup *ij*-GSO T_0 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \quad (b \notin \{a\}) \text{ ve } b \in \{b\} \quad (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \quad (c \notin \{a\}) \text{ ve } c \in \{c\} \quad (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \quad (c \notin \{b\}) \text{ ve } b \in \{b\} \quad (c \notin \{b\})$

olup *ij*-GSO T_1 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \text{ ve } b \in \{b\} \Rightarrow \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a\} \cap \{c\} = \emptyset$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup *ij*-GSO T_2 uzayıdır.

$$ij\text{-GSO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GSC}(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• b	$\{a, c\}$	$b \in \{b\}$	$\{a, c\} \subset X$	$\{b\} \cap X \neq \emptyset$

olduğundan ij -GSO regüler uzay değildir.

$$ij\text{-GSO}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-GSC}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{c\}$	$\{a\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a\} \subset \{a\}$	$\{c\} \cap \{a\} = \emptyset$
• $\{b, c\}$	$\{a\}$	$\{b, c\} \subset \{b, c\}$	$\{a\} \subset \{a\}$	$\{b, c\} \cap \{a\} = \emptyset$
• $\{a, b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup ij -GSO normal uzaydır.

Şimdi ij -SGO T_0 , ij -SGO T_1 , ij -SGO T_2 , ij -SGO regüler ve ij -SGO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-SGO}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} (b \notin \{a\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} (c \notin \{a\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\})$

olup ij -SGO T_0 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} (b \notin \{a\}) \text{ ve } b \in \{b\} (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} (c \notin \{a\}) \text{ ve } c \in \{c\} (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\}) \text{ ve } c \in \{c\} (b \notin \{c\})$

olup ij -SGO T_1 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \text{ ve } b \in \{b\} \Rightarrow \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a\} \cap \{c\} = \emptyset$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup ij -SGO T_2 uzayıdır.

$$ij\text{-SGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-SGC}(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• b	$\{a, c\}$	$b \in \{b\}$	$\{a, c\} \subset X$	$\{b\} \cap X \neq \emptyset$

olduğundan ij -SGO regüler uzay değildir.

$$ij\text{-SGO}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-SGC}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{c\}$	$\{a\} \subset \{a\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a\} \cap \{c\} = \emptyset$
• $\{b, c\}$	$\{a\}$	$\{b, c\} \subset \{b, c\}$	$\{a\} \subset \{a\}$	$\{b, c\} \cap \{a\} = \emptyset$
• $\{a, b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup ij -SGO normal uzayıdır.

Şimdi ij - α GO T_0 , ij - α GO T_1 , ij - α GO T_2 , ij - α GO regüler ve ij - α GO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij-\alpha GO(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} (b \notin \{a\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} (c \notin \{a\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\})$

olup $ij-\alpha GO$ T_0 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} (b \notin \{a\})$ ve $b \in \{b\} (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} (c \notin \{a\})$ ve $c \in \{c\} (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\})$ ve $c \in \{c\} (b \notin \{c\})$

olup $ij-\alpha GO$ T_1 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\}$ ve $b \in \{b\} \Rightarrow \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\}$ ve $c \in \{c\} \Rightarrow \{a\} \cap \{c\} = \emptyset$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\}$ ve $c \in \{c\} \Rightarrow \{b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup $ij-\alpha GO$ T_2 uzayıdır.

$$ij-\alpha GO(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

$$ij-\alpha GC(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• b	$\{a, c\}$	$b \in \{b\}$	$\{a, c\} \subset X$	$\{b\} \cap X \neq \emptyset$

olduğundan $ij-\alpha GO$ regüler uzay değildir.

$$ij-\alpha GO(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij-\alpha GC(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{c\}$	$\{a\} \subset \{a\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a\} \cap \{c\} = \emptyset$
• $\{b, c\}$	$\{a\}$	$\{b, c\} \subset \{b, c\}$	$\{a\} \subset \{a\}$	$\{b, c\} \cap \{a\} = \emptyset$
• $\{a, b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup $ij-\alpha GO$ normal uzaydır.

Şimdi $ij-G\alpha O$ T_0 , $ij-G\alpha O$ T_1 , $ij-G\alpha O$ T_2 , $ij-G\alpha O$ regüler ve $ij-G\alpha O$ normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij-G\alpha O(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \ (b \notin \{a\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \ (c \notin \{a\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (c \notin \{b\})$

olup $ij-G\alpha O$ T_0 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \ (b \notin \{a\}) \text{ ve } b \in \{b\} \ (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \ (c \notin \{a\}) \text{ ve } c \in \{c\} \ (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (c \notin \{b\}) \text{ ve } c \in \{c\} \ (b \notin \{c\})$

olup $ij-G\alpha O$ T_1 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \text{ ve } b \in \{b\} \Rightarrow \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a\} \cap \{c\} = \emptyset$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup ij - $G\alpha O$ T_2 uzayıdır.

$$ij-G\alpha O(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

$$ij-G\alpha C(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• b	$\{a, c\}$	$b \in \{b\}$	$\{a, c\} \subset X$	$\{b\} \cap X \neq \emptyset$

olduğundan ij - $G\alpha O$ regüler uzay değildir.

$$ij-G\alpha O(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij-G\alpha C(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{c\}$	$\{a\} \subset \{a\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a\} \cap \{c\} = \emptyset$
• $\{b, c\}$	$\{a\}$	$\{b, c\} \subset \{b, c\}$	$\{a\} \subset \{a\}$	$\{b, c\} \cap \{a\} = \emptyset$
• $\{a, b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup ij - $G\alpha O$ normal uzaydır.

Şimdi ij -GSPO T_0 , ij -GSPO T_1 , ij -GSPO T_2 , ij -GSPO regüler ve ij -GSPO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij-GSPO(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \quad (b \notin \{a\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \quad (c \notin \{a\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \quad (c \notin \{b\})$

olup ij -GSPO T_0 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} (b \notin \{a\}) \text{ ve } b \in \{b\} (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} (c \notin \{a\}) \text{ ve } c \in \{c\} (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\}) \text{ ve } c \in \{c\} (b \notin \{c\})$

olup ij -GSPO T_1 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \text{ ve } b \in \{b\} \Rightarrow \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a\} \cap \{c\} = \emptyset$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup ij -GSPO T_2 uzayıdır.

$$ij\text{-GSPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GSPC}(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• b	$\{a, c\}$	$b \in \{b\}$	$\{a, c\} \subset X$	$\{b\} \cap X \neq \emptyset$

olduğundan ij -GSPO regüler uzay değildir.

$$ij\text{-GSPO}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-GSPC}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{c\}$	$\{a\} \subset \{a\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a\} \cap \{c\} = \emptyset$
• $\{b, c\}$	$\{a\}$	$\{b, c\} \subset \{b, c\}$	$\{a\} \subset \{a\}$	$\{b, c\} \cap \{a\} = \emptyset$

- $\{a, b\} \subset \{c\}$ $\{a, b\} \subset \{a, b\}$ $\{c\} \subset \{c\}$ $\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup *ij*-GSPO normal uzaydır.

Şimdi *ij*-SPGO T_0 , *ij*-SPGO T_1 , *ij*-SPGO T_2 , *ij*-SPGO regüler ve *ij*-SPGO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-SPGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

- $a \subset b \rightarrow a \in \{a\} (b \notin \{a\})$
- $a \subset c \rightarrow a \in \{a\} (c \notin \{a\})$
- $b \subset c \rightarrow b \in \{b\} (c \notin \{b\})$

olup *ij*-SPGO T_0 uzayıdır.

- $b \subset c \rightarrow b \in \{b\} (c \notin \{b\})$ ve $c \in \{b, c\} (b \in \{b, c\})$

olup c yi içerip b yi içermeyen açık yoktur. Dolayısıyla *ij*-SPGO T_1 uzayı değildir.

- $b \subset c \rightarrow b \in \{b\}$ ve $c \in \{b, c\} \Rightarrow \{b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \neq \emptyset$

olduğundan *ij*-SPGO T_2 uzayı değildir.

$$ij\text{-SPGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-SPGC}(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

- | p | F | U | V | $U \cap V$ |
|-------|------------|---------------|----------------------|-------------------------------|
| • b | $\{a, c\}$ | $b \in \{b\}$ | $\{a, c\} \subset X$ | $\{b\} \cap X \neq \emptyset$ |

olup ij -SPGO regüler uzay değildir.

$$ij\text{-SPGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-SPGC}(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{c\}$	$\{a\} \subset \{a\}$	$\{c\} \subset \{b, c\}$	$\{a\} \cap \{c\} = \emptyset$
• $\{a\}$	$\{b, c\}$	$\{a\} \subset \{a\}$	$\{c\} \subset \{b, c\}$	$\{a\} \cap \{b, c\} = \emptyset$

olup ij -SPGO normal uzaydır.

Şimdi ij -GPO T_0 , ij -GPO T_1 , ij -GPO T_2 , ij -GPO regüler ve ij -GPO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-GPO}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \ (b \notin \{a\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \ (c \notin \{a\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (c \notin \{b\})$

olup ij -GPO T_0 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \ (b \notin \{a\}) \text{ ve } b \in \{b\} \ (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \ (c \notin \{a\}) \text{ ve } c \in \{c\} \ (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (c \notin \{b\}) \text{ ve } b \in \{b\} \ (c \notin \{b\})$

olup ij -GPO T_1 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \text{ ve } b \in \{b\} \Rightarrow \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$

- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a\} \cap \{c\} = \emptyset$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup ij -GPO T_2 uzayıdır.

$$ij\text{-GPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GPC}(X) = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• b	$\{a, c\}$	$b \in \{b\}$	$\{a, c\} \subset X$	$\{b\} \cap X \neq \emptyset$

olduğundan ij -GPO regüler uzay değildir.

$$ij\text{-GPO}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-GPC}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{c\}$	$\{a\} \subset \{a\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a\} \cap \{c\} = \emptyset$
• $\{b, c\}$	$\{a\}$	$\{b, c\} \subset \{b, c\}$	$\{a\} \subset \{a\}$	$\{b, c\} \cap \{a\} = \emptyset$
• $\{a, b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup ij -GPO normal uzayıdır.

Örnek 4.8.7: $X = \{a, b, c\}$ kümesi verilsin. $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ ve $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ olmak üzere (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzay olsun. Yukarıdaki tanımlarda verilen ayırma aksiyomlarını inceleyelim.

Çözüm: : İlk olarak Tanım 3.4.2-17 tanımlarında yer alan açık kümeleri bulalım.

Tanım 3.4.2 de ifade edilen *ij*-önaçık tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-önaçık}(A): A \subset \tau_1 - int(\tau_2 - cl(A))$$

olup buradan

- $\tau_2 - cl(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{a\} \subset \{a\}$
- $\tau_2 - cl(\{b\}) = \{b\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{b\}) = \{b\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b\}$
- $\tau_2 - cl(\{c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{a, c\}) = \{a\} \Rightarrow \{c\} \not\subset \{a\}$
- $\tau_2 - cl(\{a, b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{a, b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a, b\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_2 - cl(\{a, c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{a, c\}) = \{a\} \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \{a\}$
- $\tau_2 - cl(\{b, c\}) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 cl(X) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij\text{-PO}(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.4 de ifade edilen *ij*-yarı-önaçık tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-yarı-önaçık}(A): A \subset \tau_2 - cl(\tau_1 - int(\tau_2 - cl(A)))$$

olup buradan

- $\tau_2 - cl(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{a\} \subset \{a\}$
- $\tau_2 - cl(\{b\}) = \{b\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b\}$
- $\tau_2 - cl(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{c\} \not\subset \{a\}$

- $\tau_2 - cl(\{a, b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a, b\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_2 - cl(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \{a\}$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij\text{-SPO}(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.3 de ifade edilen *ij*-yarı-açık tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-yarı-açık}(A): A \subset \tau_2 - cl(\tau_1 - int(A))$$

olup buradan

- $\tau_1 - int(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{a\} \subset \{a\}$
- $\tau_1 - int(\{b\}) = \{b\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{b\}) = \{b\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b\}$
- $\tau_1 - int(\{c\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(\{a, b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{a, b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a, b\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_1 - int(\{a, c\}) = \{a\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \{a\}$
- $\tau_1 - int(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{b, c\}) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_1 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij\text{-SO}(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.5 de ifade edilen *ij*- α -açık tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}\alpha\text{-a}\check{\text{c}}\text{ık}(A): A \subset \tau_1 - \text{int}(\tau_2 - cl(\tau_1 - \text{int}(A)))$$

olup buradan

- $\tau_1 - \text{int}(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{a\} \subset \{a\}$
- $\tau_1 - \text{int}(\{b\}) = \{b\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b\}$
- $\tau_1 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - \text{int}(\{a, b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a, b\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_1 - \text{int}(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \{a\}$
- $\tau_1 - \text{int}(X) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_1 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - \text{int}(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij\text{-}\alpha O(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.6 de ifade edilen $ij\text{-}scl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}scl(A) = \cap \{F \subset X: F \in ij\text{-}SC(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ij\text{-}yarı\text{-a}\check{\text{c}}\text{ık küme: } ij\text{-}SO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$ij\text{-}yarı\text{-kapalı küme: } ij\text{-}SC(X) = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{a\}\}$$

- $scl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $scl(\{b\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $scl(\{c\}) = X \cap \{b, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $scl(\{a, b\}) = X$

- $scl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $scl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $scl(\emptyset) = \emptyset$
- $scl(X) = X$

$$ij\text{-}SCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.7 de ifade edilen $ij\text{-}\alpha cl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}\alpha cl(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ij\text{-}\alpha C(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ij\text{-}\alpha\text{-}açık\ küme: ij\text{-}\alpha O(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$ij\text{-}\alpha\text{-}kapalı\ küme: ij\text{-}\alpha C(X) = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{a\}\}$$

- $\alpha cl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $\alpha cl(\{b\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $\alpha cl(\{c\}) = X \cap \{b, c\} \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $\alpha cl(\{a, b\}) = X$
- $\alpha cl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $\alpha cl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $\alpha cl(\{\emptyset\}) = \emptyset$
- $\alpha cl(X) = X$

$$ij\text{-}\alpha CL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.8 de ifade edilen $ij\text{-}spcl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}spcl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ij - spc(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ij\text{-}yarı\text{-}önaçık küme: ij\text{-}SPO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$ij\text{-}yarı\text{-}önkapalı küme: ij\text{-}SPC(X) = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{a\}\}$$

- $spcl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $spcl(\{b\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $spcl(\{c\}) = X \cap \{b, c\} \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $spcl(\{a, b\}) = X$
- $spcl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $spcl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $spcl(\emptyset) = \emptyset$
- $spcl(X) = X$

$$ij\text{-}SPCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.9 de ifade edilen $ij\text{-}pcl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}pcl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ij - PC(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ij\text{-}önaçık küme: ij\text{-}PO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

ij-önkapalı küme: $ij\text{-PC}(X) = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{a\}\}$

- $pcl(\{a\}) = X \cap \{a\} = \{a\}$
- $pcl(\{b\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $pcl(\{c\}) = X \cap \{b, c\} \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $pcl(\{a, b\}) = X$
- $pcl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $pcl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $pcl(\emptyset) = \emptyset$
- $pcl(X) = X$

$ij\text{-PCL}(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.2 de ifade edilen *ji*-önaçık tanımını hatırlayalım:

***ji*-önaçık(A):** $A \subset \tau_2 - int(\tau_1 - cl(A))$

olup buradan

- $\tau_1 - cl(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{a\}) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(\{b\}) = \{b, c\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_1 - cl(\{c\}) = \{c\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{c\}) = \{c\} \Rightarrow \{c\} \subset \{c\}$
- $\tau_1 - cl(\{a, b\}) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \{a, b\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\{a, c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{a, c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \{a, c\} \subset \{a, c\}$
- $\tau_1 - cl(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b, c\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$ji\text{-PO}(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.4 de ifade edilen *ji*-yarı-önaçık tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}yarı\text{-}önaçık(A): A \subset \tau_1 - cl(\tau_2 - int(\tau_1 - cl(A)))$$

olup buradan

- $\tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_1 - cl(\{c\}) = \{c\} \Rightarrow \{c\} \subset \{c\}$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \{a, b\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\{a, c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \{a, c\} \subset \{a, c\}$
- $\tau_1 - cl(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b, c\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ji\text{-}SPO(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.3 de ifade edilen *ji*-yarı-açık tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}yarı\text{-}açık(A): A \subset \tau_1 - cl(\tau_2 - int(A))$$

olup buradan

- $\tau_2 - int(\{a\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\{b\}) = \{b\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{b\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_2 - int(\{c\}) = \{c\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{c\}) = \{c\} \Rightarrow \{c\} \subset \{c\}$
- $\tau_2 - int(\{a, b\}) = \{b\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{b\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{a, b\} \not\subset \{b, c\}$

- $\tau_2 - int(\{a, c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{a, c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \{a, c\} \subset \{a, c\}$
- $\tau_2 - int(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b, c\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ji\text{-}SO(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.5 de ifade edilen *ji- α -açık* tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}\alpha\text{-açık}(A): A \subset \tau_2 - int(\tau_1 - cl(\tau_2 - int(A)))$$

olup buradan

- $\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_2 - int(\{c\}) = \{c\} \Rightarrow \{c\} \subset \{c\}$
- $\tau_2 - int(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{a, b\} \not\subset \{b, c\}$
- $\tau_2 - int(\{a, c\}) = \{a, c\} \Rightarrow \{a, c\} \subset \{a, c\}$
- $\tau_2 - int(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \{b, c\} \subset \{b, c\}$
- $\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ji\text{-}\alpha O(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.6 de ifade edilen *ji-scl*(A) tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}scl(A) = \bigcap \{F \subset X: F \in ji - SC(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ji\text{-}yarı\text{-}açık\ küme: ji\text{-}SO(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ji\text{-}yarı\text{-}kapalı\ küme: ji\text{-}SC(X) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}\}$$

- $scl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $scl(\{b\}) = X \cap \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $scl(\{c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $scl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $scl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $scl(\{b, c\}) = X$
- $scl(\emptyset) = \emptyset$
- $scl(X) = X$

$$ji\text{-}SCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.7 de ifade edilen $ji\text{-}\alpha cl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}\alpha cl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ji - \alpha C(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ji\text{-}\alpha\text{-}açık\ küme: ji\text{-}\alpha O(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ji\text{-}\alpha\text{-}kapalı\ küme: ji\text{-}\alpha C(X) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}\}$$

- $\alpha cl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $\alpha cl(\{b\}) = X \cap \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\}$

- $\alpha cl(\{c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $\alpha cl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $\alpha cl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $\alpha cl(\{b, c\}) = X$
- $\alpha cl(\emptyset) = \emptyset$
- $\alpha cl(X) = X$

$$ji-\alpha CL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.8 de ifade edilen $ji-spcl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ji-spcl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ji-SPC(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ji-yarı-önaçık küme: ji-SPO(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ji-yarı-önkapalı küme: ji-SPC(X) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}\}$$

- $spcl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $spcl(\{b\}) = X \cap \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $spcl(\{c\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $spcl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $spcl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $spcl(\{b, c\}) = X$
- $spcl(\emptyset) = \emptyset$
- $spcl(X) = X$

$$ji-SPCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.9 de ifade edilen $ji\text{-}pcl(A)$ tanımını hatırlayalım:

$$ji\text{-}pcl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ji - PC(X), A \subseteq F\}$$

olup buradan

$$ji\text{-}önaçık küme: ji\text{-}PO(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ji\text{-}önkapalı küme: ji\text{-}PC(X) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}\}$$

- $pcl(\{a\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $pcl(\{b\}) = X \cap \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $pcl(\{c\}) = X \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $pcl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $pcl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $pcl(\{b, c\}) = X$
- $pcl(\emptyset) = \emptyset$
- $pcl(X) = X$

$$ji\text{-}PCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.10 de ifade edilen $ij\text{-}g\text{-}kapalı$ tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}g\text{-}kapalı(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow j - cl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, X \Rightarrow j - cl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow j - cl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow j - cl(\{c\}) = \{a, c\} \not\subset \{b, c\}$
- $\{a, b\} \subset \{a, b\}, X \Rightarrow j - cl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset \{a, b\}, X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow j - cl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$

$$ij\text{-GC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-GO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.11 de ifade edilen *ij*-gs-kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-gs-kapalı}(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, X \Rightarrow j - scl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow j - scl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow j - scl(\{c\}) = \{a, c\} \not\subset \{b, c\}$
- $\{a, b\} \subset \{a, b\}, X \Rightarrow j - scl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset \{a, b\}, X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow j - scl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow j - scl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$

$$ij\text{-GSC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-GSO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.12 de ifade edilen *ij*-sg-kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-sg-kapalı}(A): A \subset U, U \in ij - SO(X) \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, X \Rightarrow ji - scl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - scl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - scl(\{c\}) = \{a, c\} \not\subset \{b, c\}$
- $\{a, b\} \subset \{a, b\}, X \Rightarrow ji - scl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset \{a, b\}, X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - scl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$

$$ij\text{-SGC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-SGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.13 de ifade edilen *ij-αg*-kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-}\alpha g\text{-kapalı}(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{c\}) = \{a, c\} \not\subset \{b, c\}$
- $\{a, b\} \subset \{a, b\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset \{a, b\}, X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$

$$ij-\alpha GC(X)=\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},X,\emptyset\}$$

$$ij-\alpha GO(X)=\{\{b,c\},\{a,c\},\{c\},\{b\},\emptyset,X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.14 de ifade edilen ij - α -kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij-\alpha\text{-kapalı}(A): A \subset U, U \in ij - \alpha O(X) \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a,b\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a\}, \{a,b\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b,c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{c\}) = \{a,c\} \not\subset \{b,c\}$
- $\{a,b\} \subset \{a,b\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a,b\}) = \{a,b\} \subset \{a,b\}, X$
- $\{a,c\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a,c\}) = \{a,c\} \subset X$
- $\{b,c\} \subset \{b,c\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b,c\}) = X \not\subset \{b,c\}$

$$ij-G\alpha C(X)=\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},X,\emptyset\}$$

$$ij-G\alpha O(X)=\{\{b,c\},\{a,c\},\{c\},\{b\},\emptyset,X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.15 de ifade edilen ij -gsp-kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-gsp-kapalı}(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{c\}) = \{c\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset \{a, b\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset \{a, b\}, X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$

$$ij\text{-GSPC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-GSPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.16 de ifade edilen *ij*-spg-kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-spg-kapalı}(A): A \subset U, U \in ji - SPO(X) \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a, b\}, \{a, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a, b\}, \{a, c\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{c\}) = \{c\} \subset \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset \{a, b\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset \{a, b\}, X$
- $\{a, c\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset \{a, c\}, X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$

$$ij\text{-SPGC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-SPGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.17 de ifade edilen *ij*-gp-kapalı tanımını hatırlayalım:

$$ij\text{-gp-kapalı}(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - pcl(A) \subset U$$

olup buradan

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, X$
- $\{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{c\}) = \{c\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset \{a, b\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset \{a, b\}, X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$

$$ij\text{-GPC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\text{-GPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Şimdi sırasıyla 4.1- 4.8 başlıklarında verilen ayırma aksiyomlarını inceleyelim:

Şimdi *ij*-GO T_0 , *ij*-GO T_1 , *ij*-GO T_2 , *ij*-GO regüler ve *ij*-GO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-GO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad c \in \{c\} (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\})$

olup *ij*-GO T_0 uzayıdır.

$$\bullet \quad a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \ (c \in \{a, c\}) \text{ ve } c \in \{c\} (a \notin \{c\})$$

olup a yı içerip c yi içermeyen açık yoktur. Dolayısıyla ij -GO T_1 uzayı değildir.

$$\bullet \quad a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\} \neq \emptyset$$

olduğundan ij -GO T_2 uzayı değildir.

$$ij\text{-GO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
$\bullet \quad c$	$\{a\}$	$c \in \{c\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{c\} \cap \{a, c\} \neq \emptyset$

olduğundan ij -GO regüler uzay değildir.

$$ij\text{-GO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
$\bullet \quad \{a\}$	$\{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
$\bullet \quad \{b\}$	$\{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$

olup ij -GO normal uzaydır.

Şimdi ij -GSO T_0 , ij -GSO T_1 , ij -GSO T_2 , ij -GSO regüler ve ij -GSO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-GSO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad c \in \{c\} \ (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (c \notin \{b\})$

olup $ij\text{-GSO } T_0$ uzayıdır.

- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \ (c \in \{a, c\}) \text{ ve } c \in \{c\} \ (a \notin \{c\})$

olup a yı içerip c yi içermeyen açık yoktur. Dolayısıyla $ij\text{-GSO } T_1$ uzayı değildir.

- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\} \neq \emptyset$

olduğundan $ij\text{-GSO } T_2$ uzayı değildir.

$$ij\text{-GSO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GSC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

- | p | F | U | V | $U \cap V$ |
|-------|---------|---------------|--------------------------|--------------------------------------|
| • c | $\{a\}$ | $c \in \{c\}$ | $\{a\} \subset \{a, c\}$ | $\{c\} \cap \{a, c\} \neq \emptyset$ |

olduğundan $ij\text{-GSO}$ regüler uzay değildir.

$$ij\text{-GSO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GSC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
-------	-------	-----------------	-----------------	------------

- $\{a\} \quad \{b\} \quad \{a\} \subset \{a, c\} \quad \{b\} \subset \{b\} \quad \{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
- $\{b\} \quad \{a, c\} \quad \{b\} \subset \{b\} \quad \{a, c\} \subset \{a, c\} \quad \{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$

olup *ij*-GSO normal uzaydır.

Şimdi *ij*-SGO T_0 , *ij*-SGO T_1 , *ij*-SGO T_2 , *ij*-SGO regüler ve *ij*-SGO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-SGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad c \in \{c\} (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\})$

olup *ij*-SGO T_0 uzayıdır.

- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} (c \in \{a, c\}) \text{ ve } c \in \{c\} (a \notin \{c\})$

olup a yı içerip c yi içermeyen açık yoktur. Dolayısıyla *ij*-SGO T_1 uzayı değildir.

- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\} \neq \emptyset$

olduğundan *ij*-SGO T_2 uzayı değildir.

$$ij\text{-SGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-SGC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

$$p \quad F \quad U \quad V \quad U \cap V$$

- $c \quad \{a\} \quad c \in \{c\} \quad \{a\} \subset \{a, c\} \quad \{c\} \cap \{a, c\} \neq \emptyset$

olduğundan ij -SGO regüler uzay değildir.

$$ij\text{-SGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-SGC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• $\{b\}$	$\{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$

olup ij -SGO normal uzaydır.

Şimdi ij - α GO T_0 , ij - α GO T_1 , ij - α GO T_2 , ij - α GO regüler ve ij - α GO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-}\alpha\text{GO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad c \in \{c\} (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\})$

olup ij - α GO T_0 uzayıdır.

- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} (c \in \{a, c\}) \text{ ve } c \in \{c\} (a \notin \{c\})$

olup a yı içerip c yi içermeyen açık yoktur. Dolayısıyla ij - α GO T_1 uzayı değildir.

- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\} \neq \emptyset$

olduğundan $ij-\alpha GO$ T_2 uzayı değildir.

$$ij-\alpha GO(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij-\alpha GC(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• c	$\{a\}$	$c \in \{c\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{c\} \cap \{a, c\} \neq \emptyset$

olduğundan $ij-\alpha GO$ regüler uzay değildir.

$$ij-\alpha GO(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij-\alpha GC(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• $\{b\}$	$\{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$

olup $ij-\alpha GO$ normal uzaydır.

Şimdi $ij-G\alpha O$ T_0 , $ij-G\alpha O$ T_1 , $ij-G\alpha O$ T_2 , $ij-G\alpha O$ regüler ve $ij-G\alpha O$ normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij-G\alpha O(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad c \in \{c\} \ (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (c \notin \{b\})$

olup ij -G α O T_0 uzayıdır.

$$\bullet \quad a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} (c \in \{a, c\}) \text{ ve } c \in \{c\} (a \notin \{c\})$$

olup a yı içerip c yi içermeyen açık yoktur. Dolayısıyla ij -G α O T_1 uzayı değildir.

$$\bullet \quad a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\} \neq \emptyset$$

olduğundan ij -G α O T_2 uzayı değildir.

$$ij\text{-G}\alpha O(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-G}\alpha C(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
$\bullet \quad c$	$\{a\}$	$c \in \{c\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{c\} \cap \{a, c\} \neq \emptyset$

olduğundan ij -G α O regüler uzay değildir.

$$ij\text{-G}\alpha O(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-G}\alpha C(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
$\bullet \quad \{a\}$	$\{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
$\bullet \quad \{b\}$	$\{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$

olup ij -G α O normal uzaydır.

Şimdi ij -GSPO T_0 , ij -GSPO T_1 , ij -GSPO T_2 , ij -GSPO regüler ve ij -GSPO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-GSPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad c \in \{c\} (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\})$

olup ij -GSPO T_0 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} (b \notin \{a, c\}) \text{ ve } b \in \{b\} (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, b\} (c \notin \{a, b\}) \text{ ve } c \in \{c\} (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\}) \text{ ve } c \in \{c\} (c \notin \{b\})$

olup ij -GSPO T_1 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \text{ ve } b \in \{b\} \Rightarrow \{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup ij -GSPO T_2 uzayıdır.

$$ij\text{-GSPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GSPC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• a	$\{b\}$	$a \in \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• a	$\{c\}$	$a \in \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$

• b	$\{a\}$	$b \in \{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$
• b	$\{c\}$	$b \in \{b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• b	$\{a, c\}$	$b \in \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$
• c	$\{a\}$	$c \in \{c\}$	$\{a\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$
• c	$\{b\}$	$c \in \{c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• c	$\{a, b\}$	$c \in \{c\}$	$\{a, b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$

olup ij -GSPO regüler uzaydır.

$$ij\text{-GSPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GSPC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• $\{a\}$	$\{c\}$	$\{a\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• $\{b\}$	$\{c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• $\{b\}$	$\{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$
• $\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$

olup ij -GSPO normal uzaydır.

Şimdi ij -SPGO T_0 , ij -SPGO T_1 , ij -SPGO T_2 , ij -SPGO regüler ve ij -SPGO normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-SPGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad c \in \{c\} \ (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \ (c \notin \{b\})$

olup ij -SPGO T_0 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} (b \notin \{a, c\}) \text{ ve } b \in \{b\} (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, b\} (c \notin \{a, b\}) \text{ ve } c \in \{c\} (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\}) \text{ ve } c \in \{c\} (c \notin \{b\})$

olup ij -SPGO T_1 uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \text{ ve } b \in \{b\} \Rightarrow \{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup ij -SPGO T_2 uzayıdır.

$$ij\text{-SPGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-SPGC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• a	$\{b\}$	$a \in \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• a	$\{c\}$	$a \in \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• b	$\{a\}$	$b \in \{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$
• b	$\{c\}$	$b \in \{b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• b	$\{a, c\}$	$b \in \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$
• c	$\{a\}$	$c \in \{c\}$	$\{a\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$
• c	$\{b\}$	$c \in \{c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• c	$\{a, b\}$	$c \in \{c\}$	$\{a, b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$

olup ij -SPGO regülerdir.

$$ij\text{-SPGO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-SPGC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• $\{a\}$	$\{c\}$	$\{a\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• $\{b\}$	$\{c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• $\{b\}$	$\{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$
• $\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$

olup $ij\text{-SPGO}$ normal uzaydır.

Şimdi $ij\text{-GPO } T_0$, $ij\text{-GPO } T_1$, $ij\text{-GPO } T_2$, $ij\text{-GPO}$ regüler ve $ij\text{-GPO}$ normal uzay olup olmadığını inceleyelim:

$$ij\text{-GPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad c \in \{c\} (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\})$

olup $ij\text{-GPO } T_0$ uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} (b \notin \{a, c\}) \text{ ve } b \in \{b\} (a \notin \{b\})$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, b\} (c \notin \{a, b\}) \text{ ve } c \in \{c\} (a \notin \{c\})$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} (c \notin \{b\}) \text{ ve } c \in \{c\} (c \notin \{b\})$

olup $ij\text{-GPO } T_1$ uzayıdır.

- $a \quad b \quad \rightarrow \quad a \in \{a, c\} \text{ ve } b \in \{b\} \Rightarrow \{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
- $a \quad c \quad \rightarrow \quad a \in \{a, b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$
- $b \quad c \quad \rightarrow \quad b \in \{b\} \text{ ve } c \in \{c\} \Rightarrow \{b\} \cap \{c\} = \emptyset$

olup ij -GPO T_2 uzayıdır.

$$ij\text{-GPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GPC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

p	F	U	V	$U \cap V$
• a	$\{b\}$	$a \in \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• a	$\{c\}$	$a \in \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• b	$\{a\}$	$b \in \{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$
• b	$\{c\}$	$b \in \{b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• b	$\{a, c\}$	$b \in \{b\}$	$\{a, c\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$
• c	$\{a\}$	$c \in \{c\}$	$\{a\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$
• c	$\{b\}$	$c \in \{c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• c	$\{a, b\}$	$c \in \{c\}$	$\{a, b\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$

olup ij -GPO regüler uzayıdır.

$$ij\text{-GPO}(X) = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$ij\text{-GPC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X, \emptyset\}$$

F_1	F_2	$F_1 \subset U$	$F_2 \subset V$	$U \cap V$
• $\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\} \subset \{a, c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
• $\{a\}$	$\{c\}$	$\{a\} \subset \{a, b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$
• $\{b\}$	$\{c\}$	$\{b\} \subset \{b\}$	$\{c\} \subset \{c\}$	$\{b\} \cap \{c\} = \emptyset$

- $\{b\}$ $\{a, c\}$ $\{b\} \subset \{b\}$ $\{a, c\} \subset \{a, c\}$ $\{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$
- $\{c\}$ $\{a, b\}$ $\{c\} \subset \{c\}$ $\{a, b\} \subset \{a, b\}$ $\{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset$

olup ij -GPO normal uzaydır.

Örnek 4.8.8: $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi verilsin. $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, d\}\}$ ve $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ olmak üzere (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzay olsun. Yukarıdaki tanımlarda verilen ayırma aksiyomlarını inceleyelim.

Çözüm: Yukarıda verilen örneklerde verilen çözümler bu örnek içinde uygulandığında:

- ij -GO T_0 uzayıdır, ij -GO T_1 uzayıdır, ij -GO T_2 uzayıdır, ij -GO regüler uzay değildir, ij -GO normal uzay değildir.
- ij -GSO T_0 uzayıdır, ij -GSO T_1 uzayıdır, ij -GSO T_2 uzayıdır, ij -GSO regüler uzaydır, ij -GSO normal uzaydır.
- ij -SGO T_0 uzayıdır, ij -SGO T_1 uzayıdır, ij -SGO T_2 uzayıdır, ij -SGO regüler uzaydır, ij -SGO normal uzaydır.
- ij - α GO T_0 uzayıdır, ij - α GO T_1 uzayıdır, ij - α GO T_2 uzayıdır, ij - α GO regüler uzay değildir, ij - α GO normal uzaydır.
- ij - α GO T_0 uzayıdır, ij - α GO T_1 uzayı değildir, ij - α GO T_2 uzayı değildir, ij - α GO regüler uzay değildir, ij - α GO normal uzaydır.
- ij -GSPO T_0 uzayıdır, ij -GSPO T_1 uzayıdır, ij -GSPO T_2 uzayıdır, ij -GSPO regüler uzaydır, ij -GSPO normal uzaydır.
- ij -SPGO T_0 uzayıdır, ij -SPGO T_1 uzayıdır, ij -SPGO T_2 uzayıdır, ij -SPGO regüler uzaydır, ij -SPGO normal uzaydır.
- ij -GPO T_0 uzayıdır, ij -GPO T_1 uzayıdır, ij -GPO T_2 uzayıdır, ij -GPO regüler uzay değildir, ij -GPO normal uzaydır.

olduğu görülmüştür.

Teorem 4.8.9: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. Her ij -GO T_2 (ij -GSO T_2 , ij -SGO T_2 , ij - α GO T_2 , ij -G α O T_2 , ij -GSPO T_2 , ij -SPGO T_2 , ij -GPO T_2) uzay ij -GO T_1 (ij -GSO T_1 , ij -SGO T_1 , ij - α GO T_1 , ij -G α O T_1 , ij -GSPO T_1 , ij -SPGO T_1 , ij -GPO T_1) uzayıdır.

İspat: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayı ij -GO T_2 (ij -GSO T_2 , ij -SGO T_2 , ij - α GO T_2 , ij -G α O T_2 , ij -GSPO T_2 , ij -SPGO T_2 , ij -GPO T_2) olduğundan Tanım 4.1.3 (sırasıyla Tanım 4.2.3, Tanım 4.3.3, Tanım 4.4.3, Tanım 4.5.3, Tanım 4.6.3, Tanım 4.7.3, Tanım 4.8.3, Tanım 4.9.3) tanımında yer alan şartları sağlayan U ve V açıkları mevcuttur. Dolayısıyla Tanım 4.1.2 tanımında verilen açıklar elde edilmiş olur. Böylece (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayı ij -GO T_1 (ij -GSO T_1 , ij -SGO T_1 , ij - α GO T_1 , ij -G α O T_1 , ij -GSPO T_1 , ij -SPGO T_1 , ij -GPO T_1) şartını sağlar.

Teorem 4.8.10: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. Her ij -GO T_1 (ij -GSO T_1 , ij -SGO T_1 , ij - α GO T_1 , ij -G α O T_1 , ij -GSPO T_1 , ij -SPGO T_1 , ij -GPO T_1) uzayı ij -GO T_0 (ij -GSO T_0 , ij -SGO T_0 , ij - α GO T_0 , ij -G α O T_0 , ij -GSPO T_0 , ij -SPGO T_0 , ij -GPO T_0) uzayıdır.

İspat: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayı ij -GO T_1 (ij -GSO T_1 , ij -SGO T_1 , ij - α GO T_1 , ij -G α O T_1 , ij -GSPO T_1 , ij -SPGO T_1 , ij -GPO T_1) olduğundan Tanım 4.1.2 (sırasıyla Tanım 4.2.2, Tanım 4.3.2, Tanım 4.4.2, Tanım 4.5.2, Tanım 4.6.2, Tanım 4.7.2, Tanım 4.8.2, Tanım 4.9.2) tanımı gereğince $x, y \in X$ olmak üzere her $x \neq y$ nokta çifti için bu uzay aynı zamanda ij -GO T_0 (ij -GSO T_0 , ij -SGO T_0 , ij - α GO T_0 , ij -G α O T_0 , ij -GSPO T_0 , ij -SPGO T_0 , ij -GPO T_0) uzayıdır.

Örnek 4.8.5 de görüldüğü gibi her ij -GO T_0 , ij -GSO T_0 , ij -SGO T_0 , ij - α GO T_0 , ij -G α O T_0 , ij -GPO T_0 uzayının bir ij -GO T_1 , ij -GSO T_1 , ij -SGO T_1 , ij - α GO T_1 , ij -G α O T_1 , ij -GPO T_1 uzayı olması gerekmez.

Teorem 4.8.11: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. Her ij -GO T_0 (ij -GSO T_0 , ij -SGO T_0 , ij - α GO T_0 , ij -G α O T_0 , ij -GSPO T_0 , ij -SPGO T_0 , ij -GPO T_0) uzayın alt

uzayı da $ij\text{-GO } T_0$ ($ij\text{-GSO } T_0$, $ij\text{-SGO } T_0$, $ij\text{-}\alpha\text{GO } T_0$, $ij\text{-G}\alpha\text{O } T_0$, $ij\text{-GSPO } T_0$, $ij\text{-SPGO } T_0$, $ij\text{-GPO } T_0$) uzayıdır.

İspat: $Y \subseteq X$ olmak üzere alt uzay topolojisi tanımı gereğince $(\tau_i)_Y = \{A \cap Y : A \in \tau_i\}$ ve $(\tau_j)_Y = \{B \cap Y : B \in \tau_j\}$ olduğu açıktır. (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayı bir $ij\text{-GO } T_0$ ($ij\text{-GSO } T_0$, $ij\text{-SGO } T_0$, $ij\text{-}\alpha\text{GO } T_0$, $ij\text{-G}\alpha\text{O } T_0$, $ij\text{-GSPO } T_0$, $ij\text{-SPGO } T_0$, $ij\text{-GPO } T_0$) uzayı ve $(Y, (\tau_i)_Y, (\tau_j)_Y)$ bulunan bir ikili topolojik alt uzayı olsun. $x \neq y$ ve $x, y \in Y$ olsun. Bu durumda $x, y \in X$ dir. (X, τ_i, τ_j) bir $ij\text{-GO } T_0$ ($ij\text{-GSO } T_0$, $ij\text{-SGO } T_0$, $ij\text{-}\alpha\text{GO } T_0$, $ij\text{-G}\alpha\text{O } T_0$, $ij\text{-GSPO } T_0$, $ij\text{-SPGO } T_0$, $ij\text{-GPO } T_0$) uzayı olduğundan

$$x \in U, y \notin U \text{ veya } y \in V, x \notin V$$

olacak şekilde U veya $V \in ij\text{-GO}(X)$ ($ij\text{-GSO}(X)$, $ij\text{-SGO}(X)$, $ij\text{-}\alpha\text{GO}(X)$, $ij\text{-G}\alpha\text{O}(X)$, $ij\text{-GSPO}(X)$, $ij\text{-SPGO}(X)$, $ij\text{-GPO}(X)$) kümesi vardır. Buradan $(Y, (\tau_i)_Y, (\tau_j)_Y)$ uzayında

$$x \in U \cap Y, y \notin U \cap Y \text{ veya } y \in Y \cap V, x \notin Y \cap V$$

olacak şekilde $Y \cap U$ veya $Y \cap V \in ij\text{-GO}(X)$ ($ij\text{-GSO}(X)$, $ij\text{-SGO}(X)$, $ij\text{-}\alpha\text{GO}(X)$, $ij\text{-G}\alpha\text{O}(X)$, $ij\text{-GSPO}(X)$, $ij\text{-SPGO}(X)$, $ij\text{-GPO}(X)$) kümesi vardır. Böylece $(Y, (\tau_i)_Y, (\tau_j)_Y)$ ikili topolojik uzayının $ij\text{-GO } T_0$ ($ij\text{-GSO } T_0$, $ij\text{-SGO } T_0$, $ij\text{-}\alpha\text{GO } T_0$, $ij\text{-G}\alpha\text{O } T_0$, $ij\text{-GSPO } T_0$, $ij\text{-SPGO } T_0$, $ij\text{-GPO } T_0$) olduğu görülür.

Teorem 4.8.12: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. Her $ij\text{-GO } T_1$ ($ij\text{-GSO } T_1$, $ij\text{-SGO } T_1$, $ij\text{-}\alpha\text{GO } T_1$, $ij\text{-G}\alpha\text{O } T_1$, $ij\text{-GSPO } T_1$, $ij\text{-SPGO } T_1$, $ij\text{-GPO } T_1$) uzayın alt uzayı da $ij\text{-GO } T_1$ ($ij\text{-GSO } T_1$, $ij\text{-SGO } T_1$, $ij\text{-}\alpha\text{GO } T_1$, $ij\text{-G}\alpha\text{O } T_1$, $ij\text{-GSPO } T_1$, $ij\text{-SPGO } T_1$, $ij\text{-GPO } T_1$) uzayıdır.

İspat: $Y \subseteq X$ olmak üzere alt uzay topolojisi tanımı gereğince $(\tau_i)_Y = \{A \cap Y : A \in \tau_i\}$ ve $(\tau_j)_Y = \{B \cap Y : B \in \tau_j\}$ olduğu açıktır. (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayı bir ij -GO T_1 (ij -GSO T_1 , ij -SGO T_1 , ij - α GO T_1 , ij -G α O T_1 , ij -GSPO T_1 , ij -SPGO T_1 , ij -GPO T_1) uzayı ve $(Y, (\tau_i)_Y, (\tau_j)_Y)$ bulunan bir ikili topolojik alt uzayı olsun. $x \neq y$ ve $x, y \in Y$ olsun. Bu durumda $x, y \in X$ dir. (X, τ_1, τ_2) bir ij -GO T_1 (ij -GSO T_1 , ij -SGO T_1 , ij - α GO T_1 , ij -G α O T_1 , ij -GSPO T_1 , ij -SPGO T_1 , ij -GPO T_1) uzayı olduğundan

$$x \in U, y \notin U \text{ ve } y \in V, x \notin V$$

olacak şekilde U veya $V \in ij$ -GO(X) (ij -GSO(X), ij -SGO(X), ij - α GO(X), ij -G α O(X), ij -GSPO(X), ij -SPGO(X), ij -GPO(X)) kümesi vardır. Buradan $(Y, (\tau_i)_Y, (\tau_j)_Y)$ uzayında

$$x \in U \cap Y, y \notin U \cap Y \text{ ve } y \in Y \cap V, x \notin Y \cap V$$

olacak şekilde $Y \cap U$ ve $Y \cap V \in ij$ -GO(X) (ij -GSO(X), ij -SGO(X), ij - α GO(X), ij -G α O(X), ij -GSPO(X), ij -SPGO(X), ij -GPO(X)) kümesi vardır. Böylece $(Y, (\tau_1)_Y, (\tau_2)_Y)$ ikili topolojik uzayının ij -GO T_1 (ij -GSO T_1 , ij -SGO T_1 , ij - α GO T_1 , ij -G α O T_1 , ij -GSPO T_1 , ij -SPGO T_1 , ij -GPO T_1) olduğu görülür.

Teorem 4.8.13: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. Her ij -GO T_2 (ij -GSO T_2 , ij -SGO T_2 , ij - α GO T_2 , ij -G α O T_2 , ij -GSPO T_2 , ij -SPGO T_2 , ij -GPO T_2) uzayın alt uzayı da ij -GO T_2 (ij -GSO T_2 , ij -SGO T_2 , ij - α GO T_2 , ij -G α O T_2 , ij -GSPO T_2 , ij -SPGO T_2 , ij -GPO T_2) uzayıdır.

İspat: $Y \subseteq X$ olmak üzere alt uzay topolojisi tanımı gereğince $(\tau_i)_Y = \{A \cap Y : A \in \tau_i\}$ ve $(\tau_j)_Y = \{B \cap Y : B \in \tau_j\}$ olduğu açıktır. (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayı bir ij -GO T_2 (ij -GSO T_2 , ij -SGO T_2 , ij - α GO T_2 , ij -G α O T_2 , ij -GSPO T_2 , ij -SPGO T_2 , ij -GPO T_2) uzayı ve $(Y, (\tau_i)_Y, (\tau_j)_Y)$ bulunan bir ikili topolojik alt uzayı

olsun. $x \neq y$ ve $x, y \in Y$ olsun. Bu durumda $x, y \in X$ dir. (X, τ_i, τ_j) bir ij -GO T_2 (ij -GSO T_2 , ij -SGO T_2 , ij - α GO T_2 , ij -G α O T_2 , ij -GSPO T_2 , ij -SPGO T_2 , ij -GPO T_2) uzayı olduğundan

$$x \in U, y \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in ij$ -GO(X) (ij -GSO(X), ij -SGO(X), ij - α GO(X), ij -G α O(X), ij -GSPO(X), ij -SPGO(X), ij -GPO(X)) kümeleri vardır. Buradan $(Y, (\tau_i)_Y, (\tau_j)_Y)$ uzayında

$$x \in U \cap Y, y \in V \cap Y \text{ ve } (Y \cap U) \cap (Y \cap V) = \emptyset$$

olacak şekilde $Y \cap U, Y \cap V \in ij$ -GO(X) (ij -GSO(X), ij -SGO(X), ij - α GO(X), ij -G α O(X), ij -GSPO(X), ij -SPGO(X), ij -GPO(X)) kümeleri vardır. Böylece $(Y, (\tau_1)_Y, (\tau_2)_Y)$ ikili topolojik uzayının ij -GO T_2 (ij -GSO T_2 , ij -SGO T_2 , ij - α GO T_2 , ij -G α O T_2 , ij -GSPO T_2 , ij -SPGO T_2 , ij -GPO T_2) olduğu görülür.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde ilk olarak literatürde var olan pre-açık küme, semi-açık küme, semi-pre açık küme, α -açık küme, semi kapanış kümesi, α -kapanış kümesi, semi pre-kapanış kümesi, pre-kapanış kümesi, ij -g-kapalı küme, ij -gs-kapalı küme, ij -sg-kapalı küme, ij - α g-kapalı küme, ij -g α -kapalı küme, ij -gsp-kapalı küme, ij -spg-kapalı küme, ij -gp-kapalı küme kullanılarak ij -g-açık küme, ij -gs-açık küme, ij -sg-açık küme, ij - α g-açık küme, ij -g α -açık küme, ij -gsp-açık küme, ij -spg-açık küme, ij -gp-açık küme tanımlanmıştır.

İkinci olarak yukarıda bahsedilen açık kümeler kullanılarak ij -GO, ij -GSO, ij -SGO, ij - α GO, ij -G α O, ij -GSPO, ij -SPGO, ij -GPO kümeler elde edildi.

Üçüncü olarak bu elde edilen kümeler ile $n=0,1,2$ için ij -GO T_n , ij -GSO T_n , ij -SGO T_n , ij - α GO T_n , ij -G α O T_n , ij -GSPO T_n , ij -SPGO T_n , ij -GPO T_n ayırma aksiyomları ve ij -GO normallik, ij -GSO normallik, ij -SGO normallik, ij - α GO normallik, ij -G α O normallik, ij -GSPO normallik, ij -SPGO normallik, ij -GPO normallik ve son olarak ij -GO regülerlik, ij -GSO regülerlik, ij -SGO regülerlik, ij - α GO regülerlik, ij -G α O regülerlik, ij -GSPO regülerlik, ij -SPGO regülerlik, ij -GPO regülerlik tanımları yapıldı.

Dördüncü olarak her ij -GO T_2 (ij -GSO T_2 , ij -SGO T_2 , ij - α GO T_2 , ij -G α O T_2 , ij -GSPO T_2 , ij -SPGO T_2 , ij -GPO T_2) uzayın ij -GO T_1 (ij -GSO T_1 , ij -SGO T_1 , ij - α GO T_1 , ij -G α O T_1 , ij -GSPO T_1 , ij -SPGO T_1 , ij -GPO T_1) uzay olduğu gösterildi. Benzer olarak her ij -GO T_1 (ij -GSO T_1 , ij -SGO T_1 , ij - α GO T_1 , ij -G α O T_1 , ij -GSPO T_1 , ij -SPGO T_1 , ij -GPO T_1) uzayının da ij -GO T_0 (ij -GSO T_0 , ij -SGO T_0 , ij - α GO T_0 , ij -G α O T_0 , ij -GSPO T_0 , ij -SPGO T_0 , ij -GPO T_0) uzayı olduğu gösterildi.

Son olarak $n=0,1,2$ için ij -GO T_n , ij -GSO T_n , ij -SGO T_n , ij - α GO T_n , ij -G α O T_n , ij -GSPO T_n , ij -SPGO T_n , ij -GPO T_n ayırma aksiyomlarının kalıtsal özellik olduğu gösterildi.

KAYNAKLAR

Bhattacharyya, P. ve Lahiri, B. K. 1987. Semi Generalized Closed Set in Topology. Indian Journal of Mathematics, 29, 376-382.

Beceren, Y. 1995. Topolojik Uzaylarda Sürekliliğin Ayrışımı. Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 52, Konya.

Caldas, M. 1997. A separation axiom between semi- T_0 and semi- T_1 . Pro Mathematica, 9(21-22), 59-96.

Caldas, M. 2001. A Separation Axiom Between pre- T_0 and pre- T_1 . East-West Journal of Mathematics, 3(2), 171-177.

Crossley, S. ve Hildebrand, S. 1971. Semi-closure. Texas Journal of Science, 22, 99-112.

Crossley, S. ve Hildebrand, S. 1971. Semi-closed Sets and Semi-continuity in Topological Spaces. Texas Journal of Science, 22(2-3), 123-126.

Crossley, S. ve Hildebrand, S. 1972. Semi-topological Properties. Fundamenta Mathematicae, 74(3), 233-254.

Dvalishvili, B. P. 2005. Bitopological Space: Theory, Relations with Generalized Algebraic Structures and Applications. North-Holland Mathematics Studies, 199.

Dorsett, C. 1982. Semi-regular Spaces. Soochow Journal of Mathematics, 8, 45-53.

Dorsett, C. 1985. Semi-normal Spaces. Kyungpook Mathematical Journal, 25(2), 173-180.

El-Deeb, S. N., Hasanein, I. A. ve Mashaour, A. S. 1983. On p-regular Spaces. Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de la Republique Socialiste de Roumanie Studies, 27(75), 311-315.

El-Tantawy, O. ve Abu-Donia H. 2005. Generalized Separation Axioms in Bitopological Spaces. The Arabia Journal for Science and Engineering, 30(1A), 117-129.

Kar, A. ve Bhattacharyya, P. 1990. Some Weak Separation Axioms. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 82, 415-422.

Kelly, J.C. 1963. Bitopological Spaces. Proceedings of the London Mathematical Society, (3)13, 71-89.

Koçak, M. 2015. Genel Topolojiye Giriş ve Problem Çözümleri. Nisan Kitapevi Yayınları, 93, 107, 110, 199, 164, 203, 311, 316, 320, 325, 335, Eskişehir.

Yıldız, C. 2005. Genel Topoloji. Gazi Kitabevi, 247, Ankara.

Levine, N. 1963. Semi-Open Sets and Semi-Continuity in Topological Spaces. The American Mathematical Monthly, 70(1), 36-41.

Levine, N. 1970. Generalized Closed Sets in Topology. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, (2), 19, 89-96.

Lipschutz, S. 1965. Schaum's Outline of Theory and Problems of General Topology. McGraw-Hill Book Company, 68,140, ABD.

Maheshwari, S. N. ve Prasad, R. 1975. Some New Separation Axioms. Annales de la Societe scientifique de Bruxelles Série I, 89, 395-402.

Maheshwari, S. N. ve Prasad, R. 1975. On s-regular Spaces. Glasnik Matematicki Series III, 10(30), 347-350.

Maheshwari, S. N. ve Prasad, R. 1975. On s-normal Spaces. Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de la Republique Socialiste de Roumanie, T22(70), 27-30.

Maki, H. and Umehara, J. and Noiri, T. 1996. Every topological space is pre- $T_{\frac{1}{2}}$. Memoirs of the Faculty of Science Kochi University Mathematics, 17, 33-42.

Mashhour, A. S., Abd El-Monsef, M. E. ve El-Deeb, S. N. 1982. On Precontinuous and Weak Precontinuous Mappings. Proceedings of the Mathematics Physical Society Egypt Studies, 53, 47-53.

Njastad, O. 1965. On Some Classes of Nearly Open Sets. Pasific Journal of Mathematics Studies, 15, 961-70.

Noiri, T. 1984. On α -continuous Functions. Casopis Pest Mathematics, 109, 118-126.

Noiri, T. 1988. Characterizations of Extremally Disconnected Spaces. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 19, 325-329.

Ravi, O. ve Thivagar, M. L. 2006. A Bitopological $(1,2)^*$ Semi-generelised Continuous Maps. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, (2)29, 1, 79-88.

Sampath Kumar S. 1997. On a Decomposition of Pairwise Continuity. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 89, 441-446.

Sarsak, M. S. 2006. Quasi Separation Axioms. Turkish Journal of Mathematics TÜBİTAK, 30, 25-31.

Selvanayagi S. ve Rajesh N. 2011. Separation Axioms in Bitopological Spaces. International Journal of Computer Applications, 35(9), 0975-8887.