



**İKİLİ TOPOLOJİK UZAYLARDA
İJ-KÜMELER**

Merve İNANÇ

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI**

**2021
Her hakkı saklıdır.**



**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**İKİLİ TOPOLOJİK UZAYLARDA
İJ-KÜMELER**

Merve İNANÇ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2021

Her hakkı saklıdır

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

04 / 06 / 2021

İmzası

Merve İNANÇ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİLİ TOPOLOJİK UZAYLARDA İJ-KÜMELER

Merve İNANÇ

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

Bu tez de ön arakesit açık, ön birleşim açık, yarı arakesit açık, yarı birleşim açık küme kavramları tanımlandı ve bu tanımlar vasıtası ile ön arakesit kapanış, ön birleşim kapanış, yarı arakesit kapanış, yarı birleşim kapanış ve i ve j ikili topolojik uzaydaki topoloji indisleri olmak üzere ij birleşim ji ön arakesit kapanış, ij arakesit ji ön arakesit kapanış, ij birleşim ji ön birleşim kapanış, ij arakesit ji ön birleşim kapanış, ij birleşim ji yarı arakesit kapanış, ij arakesit ji yarı arakesit kapanış, ij birleşim ji yarı birleşim kapanış, ij arakesit ji yarı birleşim kapanış gibi yeni kapanış kümeleri ve ij g kapalı, ij g yarı arakesit kapalı, ij g yarı birleşim kapalı, ij yarı arakesit g kapalı, ij yarı birleşim g kapalı, ij g ön arakesit kapalı, ij g ön birleşim kapalı kümeleri tanımlanmıştır. Ayrıca bu tanımlanan kümeler arasındaki ilişkiler teoremlerle ispatlanmış ve örneklerle desteklenmiştir.

2021, 74 sayfa

Anahtar Kelimeler: ij ön açık küme, ij yarı açık küme, ij ön kapanış küme, ij yarı kapanış küme, ij g açık küme, ij g ön kapalı küme, ij g yarı kapalı küme

ABSTRACT

MS. Thesis

ij -SETS IN BITOPOLOGICAL SPACE

Merve İNANÇ

Erzurum Technical University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Maths

Supervisor: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

In this thesis, it is defined the concept of pre intersection open set, pre union open set, semi intersection open set, semi union open set. By using these definition it has been defined pre intersection closure set, pre union closure set, semi intersection closure set, semi union closure set. Also, it has been defined the new closure sets such as ij union ji pre intersection closure, ij intersection ji pre intersection closure, ij union ji pre union closure, ij intersection ji pre union closure, ij union ji semi intersection closure, ij intersection ji semi intersection closure, ij union ji semi union closure, ij intersection ji semi union closure where i and j are the indices of topologies in the bitopological space. By using definitions of these closure sets, it is obtained definitions of ij g closed set, ij g semi intersection closed set, ij g semi union closed set, ij semi intersection g closed set, ij semi union g closed set, ij g intersection closed set and ij g pre union closed set. In addition, the relations between these defined sets have been proven with theorems and supported with examples.

2021, 74 page

keyword: ij pre open set, ij semi open set, ij pre closure set, ij semi closure set, ij g open, ij g pre closed set, ij g pre closed set

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Yüksek lisans eğitimim boyunca ve bu tez çalışmamı oluşturmamda bana her türlü desteğini esirgemeyen, her zaman arkamda olan çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI'ya sonsuz teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım ve benden hiçbir desteğini esirgemeyen Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyeleri'ne teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı başta eşim Ahmet Sami İnanc, ailem ve arkadaşım Zeynep Kaya'ya teşekkür ederim.

Merve İNANÇ
Haziran / 2021

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3.MATERYAL ve YÖNTEM.....	5
3.1. Topolojik Uzaylarla İlgili Bazı Tanım ve Teoremler	5
3.2. Topolojik Uzaylarda Ön Açık (Kapalı), Yarı Açık (Kapalı), α Açık (Kapalı) ve G Açık (Kapalı) Kümeler.....	7
3.3. Bitolojik Uzaylar	12
3.4. İkili topolojik Uzaylarda Ön Açık (Kapalı), Yarı Açık (Kapalı), Yarı Ön Açık (Kapalı), α Açık (Kapalı) ve G Açık (Kapalı) Kümeler	14
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	43
4.1. Ön ve Yarı Arakesit Açık.....	43
4.2. Ön ve Yarı Arakesit Kapanış	45
4.3. Genelleştirilmiş Yarı Açık Ve Genelleştirilmiş Ön Açık	49
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	72
KAYNAKLAR	73

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$ij P\dot{I}O(X)$	X 'in ij ön arakesit açık kümeler ailesi (ij pre intersection open)
$ij PUO(X)$	X 'in ij ön birleşim açık kümeler ailesi (ij pre union open)
$ij GC(X)$	X 'in ij genelleştirilmiş kapalı kümeler ailesi (ij generalized closed)
$ij GO(X)$	X 'in ij genelleştirilmiş açık kümeler ailesi (ij generalized open)
$ij GP\dot{I}C(X)$	X 'in ij genelleştirilmiş ön arakesit kapalı kümeler ailesi (ij generalized pre intersection closed)
$ij GPC(X)$	X 'in ij genelleştirilmiş ön kapalı kümeler ailesi (ij generalized pre closed)
$ij GPO(X)$	X 'in ij genelleştirilmiş ön açık kümeler ailesi (ij generalized pre open)
$ij GPUC(X)$	X 'in ij genelleştirilmiş ön birleşim kapalı kümeler ailesi (ij generalized pre union closed)
$ij GS\dot{I}C(X)$	X 'in ij genelleştirilmiş yarı arakesit kapalı kümeler ailesi (ij generalized semi intersection closed)
$ij GSC(X)$	X 'in ij genelleştirilmiş yarı-kapalı kümeler ailesi (ij generalized semi-closed)
$ij GSO(X)$	X 'in ij genelleştirilmiş yarı açık kümeler ailesi (ij generalized semi open)
$ij GSPC(X)$	X 'in ij genelleştirilmiş yarı ön kapalı kümeler ailesi (ij generalized semi pre closed)
$ij GSPO(X)$	X 'in ij genelleştirilmiş yarı ön açık kümeler ailesi (ij generalized semi pre-open)
$ij GSUC(X)$	X 'in ij genelleştirilmiş yarı birleşim-kapalı kümeler ailesi (ij generalized semi union closed)
$ij P\dot{I}C(X)$	X 'in ij ön arakesit kapalı kümeler ailesi (ij pre intersection closed)
$ij P\dot{I}CL(X)$	X 'in ij ön arakesit kapanış ailesi (ij pre intersection closure)
$ij PC(X)$	X 'in ij ön kapalı kümeler ailesi (ij pre closed)
$ij PO(X)$	X 'in ij ön açık kümeler ailesi (ij pre open)
$ij PUC(X)$	X 'in ij ön birleşim kapalı kümeler ailesi (ij pre union closed)

$ij\ PUCL(X)$	X 'in ij ön birleşim kapanış ailesi (ij pre union closure)
$ij\ S\dot{I}C(X)$	X 'in ij yarı arakesit kapalı kümeler ailesi (ij semi intersection closed)
$ij\ S\dot{I}CL(X)$	X 'in ij yarı arakesit kapanış ailesi (ij semi intersection closure)
$ij\ S\dot{I}GC(X)$	X 'in ij yarı arakesit genelleştirilmiş kapalı kümeler ailesi (ij semi intersection generalized closed)
$ij\ S\dot{I}O(X)$	X 'in ij yarı arakesit açık kümeler ailesi (ij semi intersection open)
$ij\ SC(X)$	X 'in ij yarı kapalı kümeler ailesi (ij semi closed)
$ij\ SGC(X)$	X 'in ij ön genelleştirilmiş kapalı kümeler ailesi (ij semi generalized closed)
$ij\ SGO(X)$	X 'in ij yarı genelleştirilmiş açık kümeler ailesi (ij semi generalized open)
$ij\ SO(X)$	X 'in ij yarı açık kümeler ailesi (ij semi open)
$ij\ SPC(X)$	X 'in ij yarı ön kapalı kümeler ailesi (ij semi pre closed)
$ij\ SPGC(X)$	X 'in ij yarı ön genelleştirilmiş kapalı kümeler ailesi (ij semi pre generalized closed)
$ij\ SPGO(X)$	X 'in ij yarı ön genelleştirilmiş açık kümeler ailesi (ij semi pre generalized open)
$ij\ SPO(X)$	X 'in ij yarı ön açık kümeler ailesi (ij semi pre open)
$ij\ SUC(X)$	X 'in ij yarı birleşim kapalı kümeler ailesi (ij semi union closed)
$ij\ SUCL(X)$	X 'in ij yarı birleşim kapanış ailesi (ij semi union closure)
$ij\ SUGC(X)$	X 'in ij yarı birleşim genelleştirilmiş kapalı kümeler ailesi (ij semi union generalized closed)
$ij\ SUO(X)$	X 'in ij yarı birleşim açık kümeler ailesi (ij semi union open)
$ij\ pcl(A)$	A kümesinin ij ön kapanış (ij pre closure)
$ij\ scl(A)$	A kümesinin ij yarı kapanışı (ij semi closure)
$ij\ spcl(A)$	A kümesinin ij yarı ön kapanış (ij semi pre closure)
$ij\ \alpha C(X)$	X 'in $ij\ \alpha$ kapalı kümeler ailesi ($ij\ \alpha$ closed)
$ij\ \alpha O(X)$	X 'in $ij\ \alpha$ açık kümeler ailesi ($ij\ \alpha$ open)
$ij\ \alpha cl(A)$	A kümesinin $ij\ \alpha$ kapanış ($ij\ \alpha$ closure)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. İkili topolojik uzaylardaki kapalı kümeler arasındaki ilişkiler (El-Tantawy and Abu-Donia 2005).	20
Şekil 4.1. İkili topolojik uzaylardaki yeni tanımlanan kapalı kümeler arasındaki ilişkiler	57



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. ij ön arakesit açık kümelerin elde edilişi	58
Çizelge 4.2. ij ön birleşim açık kümelerin elde edilişi.....	59
Çizelge 4.3: ij yarı arakesit açık kümelerin elde edilişi	60
Çizelge 4.4. ij yarı birleşim açık kümelerin elde edilişi.....	61



1. GİRİŞ

İkili topoloji kavramını ilk kez literatüre kazandıran kişi J.C.Kelly dir. 1963 yılında J. C. Kelly yayınladığı “Bitopological Space” adlı makalesinde iki topolojili uzayları incelemiştir. Kelly bu makalesinde, boştan farklı bir X kümesini göz önüne alarak bu küme üzerinde τ_1 ve τ_2 topolojilerini alıp ikili topolojik uzayı (X, τ_1, τ_2) üçlüsü ile tanımlamıştır. Kelly’nin ikili topolojik uzaylar teorisi üzerinde yapmış olduğu bu çalışma temel çalışma olarak kabul edilir.

İkili topolojik uzaylarda çalışmanın en büyük faydası; aynı küme üzerinde iki veya daha fazla yapıyı ele alarak, matematiksel kavramların ayırt edilmesini sağlamasıdır. Ayrıca aynı anda birkaç yapıda incelenmesi gereken matematiksel öğelerin çalışılmasını kolaylaştırır.

Günümüzde pek çok matematikçi tarafından ikili topolojik uzaylarla alakalı Kaynak özetleri kısmında detaylarını vereceğimiz çalışmalar yapılmaktadır.

Tezimiz aşağıdaki bölümlerden oluşmaktadır.

Birinci bölüm Giriş bölümü olup bu bölümde İkili topolojik uzay kavramının ilk rastlandığı makaleden bahsedilmiş, tezin başlık ve içeriği ile ilgili bilgi verilmiştir.

İkinci bölüm Kaynak Özetleri olup İkili Topolojik Uzaylarla alakalı literatür taraması şeklindedir.

Üçüncü bölüm Materyal ve Yöntem olup bu bölümde genel topolojik uzaylarda ve ikili topolojik uzaylarda yer alan temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölüm Araştırma ve Bulgular olup bu bölüm çalışmamızda elde ettiğimiz kümeler ve bu kümeler arasındaki ilişkilerden oluşmaktadır. Çalışmamızda ön arakesit açık, ön birleşim açık, yarı arakesit açık, yarı birleşim açık, ön arakesit kapalı, ön birleşim kapalı, yarı arakesit kapalı, yarı birleşim kapalı küme kavramları tanımlandı ve

bu tanımlar vasıtası ile ön arakesit kapanış, ön birleşim kapanış, yarı arakesit kapanış, yarı birleşim kapanış ve i ve j ikili topolojikk uzaydaki topoloji indisleri olmak üzere ij birleşim ji ön arakesit kapanış, ij arakesit ji ön arakesit kapanış, ij birleşim ji ön birleşim kapanış, ij arakesit ji ön birleşim kapanış, ij birleşim ji yarı arakesit kapanış, ij arakesit ji yarı arakesit kapanış, ij birleşim ji yarı birleşim kapanış, ij arakesit ji yarı birleşim kapanış gibi yeni kapanış kümeleri ve ij g kapalı, ij g yarı arakesit kapalı, ij g yarı birleşim kapalı, ij yarı arakesit g kapalı, ij yarı birleşim g kapalı, ij g ön arakesit, ij g ön birleşim kümeleri tanımlanmıştır. Ayrıca bu tanımlanan kümeler arasındaki ilişkiler teoremlerle ispatlanmış ve örnekle desteklenmiştir.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

1963 yılında J. C. Kelly tarafından İkili topolojik uzaylar ilk defa yayınladığı “Bitopolojik Uzaylar” adlı makalesinde incelenmiştir. Kelly bu makalede, X kümesini boştan farklı herhangi bir küme, τ_1 ve τ_2 topolojilerini de X üzerinde herhangi iki topoloji olarak alarak ikili topolojik uzayı (X, τ_1, τ_2) üçlüsü ile tanıtmıştır. (Kelly 1963)

1963 yılında Levine tarafından topolojik uzaylarda yarı-açık küme kavramı ortaya atıldı. (Levine 1963).

1970 yılında Reilly hazırladığı doktora tezinde iki topolojili uzaylarda ayırma aksiyomlarından bahsetmiştir. (Reilly 1970)

1971 yılında S. Crossley ve S. Hildebrand çalışmalarında yarı-kapalı kümeleri ve bir kümenin yarı-kapanışını gösterdiler. (Crossley ve Hildebrand 1971).

1975 yılında S. N. Maheshwari ve R. Prasad yarı-açık küme kavramından yola çıkarak yarı- T_0 , yarı- T_1 ve yarı- T_2 , yarı-regüler, yarı-normal olarak tanımladıkları ve yarı ayırma aksiyomları olarak adlandırılan yeni zayıf ayırma aksiyomları tanımladılar. (Maheshwari ve Prasad 1975).

1982 yılında C. Dorsett, yarı-açık ve yarı-kapalı kümeleri kullanarak yarı-regülerlik tanımladı (Dorsett 1982). Yazar 1985 yılında da yarı-açık ve yarı-kapalı kümeleri kullanarak yarı-normallik kavramını tanımladı (Dorsett 1985).

1990 da A. Kar ve P. Bhattacharyya ön-açık kümeleri kullanarak ön-ayırma aksiyomları olarak adlandırılan yeni zayıf ayırma aksiyomlarını tanımladılar. (Kar ve Bhattacharyya 1990).

1996 yılında J. Umehara, H. Maki, and T. Noiri ön- $T_{\frac{1}{2}}$ uzaylarını tanımlamak için ön-açık kümelerini kullandılar. Ön açık kümeler yardımıyla kapalı kümeleri ön-genelleştirilmiş kapalı kümelere genelleştirdiler ve ön- T_0 ve ön- T_1 uzaylarının arasında

bulunan ön- $T_{\frac{1}{2}}$ adını verdikleri yeni ayırma aksiyomu tanımladılar ve özelliklerini incelediler. (Maki ve Umehara ve Noiri 1996).

2001 yılında M. Caldas ön-D kümeleri kullanarak, ön- D_1 olarak isimlendirdiği yeni bir ayırma aksiyomunu tanımladı ve özelliklerini inceledi. (Caldas 2001).

2004 yılında Ravi ve Lellis Thivagar ikili topolojik uzaylarda yarı genelleştirilmiş kümeleri tanımlamış ve bu kümeler yardımıyla birçok sonuç elde etmiştir. (Ravi 2006)

2005 yılında O. El-Tantawy ve H. M. Abu-Donia ikili topolojik uzaylarda genelleştirilmiş ayırma aksiyomlarını ele almışlardır.(El-Tantawy ve Abu-Donia 2005)

2005 yılında Dvalishvili ikili topolojik uzaylarda ikili T_1 , T_2 , T_3 , $T_{3\frac{1}{2}}$ ve T_4 uzayları tanımlamaları yapmış ve bazı özelliklerini vermiştir. (Dvalishvili 2005)

2006 yılında ise Mohammad S. Sarsak tarafından ikili topolojik uzayda hemen hemen açık kümeler, hemen hemen kapalı kümeler, hemen hemen yarı açık kümeler, hemen hemen yarı kapalı kümeler, hemen hemen yarı T_0 , hemen hemen yarı T_1 , hemen hemen yarı $T_{\frac{1}{2}}$, hemen hemen yarı T_2 tanımlamıştır (Sarsak 2006).

2011 yılında S. Selvanayaki ve N. Rajesh ve hemen hemen açık kümeler, hemen hemen kapalı kümeler, hemen hemen T_0 , hemen hemen T_1 , hemen hemen $T_{\frac{1}{2}}$, hemen hemen T_2 , hemen hemen $T_{\frac{1}{2}}^*$, hemen hemen T_D aksiyomları tanımlanmıştır (Selvanayaki and Rajesh 2011).

3.MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Topolojik Uzaylarla İlgili Bazı Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1.1: X boş olmayan bir küme ve τ da X in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise τ sınıfına X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

$$T1) \emptyset, X \in \tau$$

T2) $G_{k_1}, G_{k_2}, \dots, G_{k_n} \in \tau$ ise $\bigcap_{i=1}^n G_{k_i} \in \tau$, yani τ sınıfı sonlu arakesiti göre kapalıdır.

T3) Her $i \in I$ için $G_{k_i} \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} G_{k_i} \in \tau$, yani τ sınıfı keyfi birleşime göre kapalıdır (Mucuk 2010).

Tanım 3.1.2: (X, τ) bir topolojik uzay ve U kümesi X in bir alt kümesi olsun. U nun X e göre tümleyenini olan $X \setminus U$ kümesi (X, τ) uzayında açıksa U ya (X, τ) uzayının kapalı alt kümesi denir (Koçak 2015).

Tanım 3.1.3: (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesine x noktasının bir komşuluğu denir. Diğer bir deyişle τ nun x noktasını içeren her elemanına x noktasının bir komşuluğu denir (Koçak 2015).

Tanım 3.1.4: (X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde bir U açık kümesi varsa x noktasına A nın bir iç noktası denir. A nın bütün iç noktalarının kümesine A nın içi denir ve A° veya $int(A)$ ile gösterilir. Yani

$$A^\circ = \{x \in X: x \in U \subseteq A \text{ özelliğinde en az bir } U \in \tau \text{ vardır}\}$$

dır (Koçak 2015).

Önerme 3.1.5: (X, τ) topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur (Mucuk 2010).

- i. $A^0 \subseteq A$
- ii. A^0 açıktır
- iii. A^0 açıktır ancak ve ancak $A^0 = A$
- iv. $(A^0)^0 = A^0$
- v. A^0, A nın kapsadığı en geniş açık kümedir.
- vi. $A \subset B$ ise $A^0 \subseteq B^0$.

Tanım 3.1.6: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye A nın kapanışı denir ve $\bar{A}$ veya $cl(A)$ ile gösterilir (Mucuk 2009).

Önerme 3.1.11: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur (Mucuk 2010).

- i. $A \subseteq \bar{A}$
- ii. $\bar{A}$ kapalıdır,
- iii. A kapalıdır ancak ve ancak $A = \bar{A}$ dır,
- iv. $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$ dır,
- v. $\bar{A}, A$ yı kapsayan en dar kapalı kümedir.
- vi. $A \subseteq B$ ise $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

Tanım 3.1.7: (X, τ) bir topolojik uzay, A, X in bir alt kümesi ve $\tilde{A}, A$ nın limit noktalarının kümesi olsun. $X \setminus \tilde{A}$ kümesine A kümesinin dışı denir ve $dış(A)$ ile gösterilir. $dış(A)$ kümesinin elemanlarına da A kümesinin dış noktaları denir (Koçak 2015).

3.2. Topolojik Uzaylarda Ön Açık (Kapalı), Yarı Açık (Kapalı), α Açık (Kapalı) ve G Açık (Kapalı) Kümeler

Tanım 3.2.1 : (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \subset \text{int}(cl(A))$ ise, A kümesine ön açık (pre open) küme denir (Mashhour et al. 1982).

Bir ön açık kümenin tümleyenine ön kapalı küme denir.

A kümesini kapsayan tüm ön kapalı kümelerin kesişimine, A kümesinin ön kapanış kümesi denir ve $pcl(A)$ ile gösterilir.

A kümesinin kapsadığı tüm ön açık kümelerin birleşimine, A kümesinin ön içi (pre int) denir ve $pint(A)$ ile gösterilir.

(X, τ) topolojik uzayındaki bütün ön açık kümelerin ailesini $PO(X)$, bir $x \in X$ noktasını içeren tüm ön açık kümelerin ailesini $PO(X, x)$ ile göstereceğiz (El-Deeb et al. 1983).

Örnek 3.2.2 : $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}\}$ topolojisi verilsin.

Bu durumda;

$PO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ olur. $\{a\}$ kümesi ön-açıktır.

Önerme 3.2.3 : (X, τ) topolojik uzay olmak üzere;

- a) ön açık kümelerin herhangi sayıda birleşimi, yine bir ön açık kümedir.
- b) ön kapalı kümelerin herhangi sayıda kesişimi, yine bir ön kapalı kümedir.

Önerme 3.2.4 : (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $x \in pcl(A)$ olması için gerek ve yeter şart, x noktasını içeren her U açık kümesi için, $U \cap A \neq \emptyset$ olmasıdır.

Tanım 3.2.5 : (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer, $A \subset cl(int(A))$ ise, A kümesine yarı-açık (semi-open) küme denir (Levine 1963).

Bir yarı açık kümenin tümleyenine yarı kapalı küme denir.

A kümesini kapsayan tüm yarı kapalı kümelerin kesişimine, A kümesinin yarı kapanış kümesi denir ve $scl(A)$ ile gösterilir.

(X, τ) topolojik uzayındaki bütün yarı açık kümelerin ailesini $SO(X)$, bir $x \in X$ noktasını içeren tüm yarı açık kümelerin ailesini $SO(X, x)$ ile göstereceğiz (El-Deeb et al.1983).

Örnek 3.2.6 : $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisi verilsin. $SO(X) = \{a\}$ olur .

Tanım 3.2.7 : (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer, $A \subset int(cl(int(A)))$ ise, A kümesine α -açık küme denir (Njastad 1965).

Örnek 3.2.8 : $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisi verilsin. Bu durumda;

$\{a, b\}$ kümesi, bir α açık kümedir.

Örnek 3.2.9 : $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{d, e\}, \{a, b, c\}, \{d, e, c\}\}$ topolojik uzayı verilsin.

α açık kümeler: $\{\emptyset, X, \{c\}, \{d, e\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{b, c, d, e\}\}$

Teorem 3.2.10 : Her açık küme, α açıktır (Njåstad 1965; Beceren 1995).

İspat: (X, τ) topolojik uzayı ve açık bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A açık olduğundan $A = \text{int}(A)$ dır. Buradan $\text{int}(A) \subset \text{int}(\text{cl}(\text{int}(A)))$ olur. O halde A kümesi, bir α açık kümedir.

Uyarı 3.2.11 : α açık bir kümenin, açık olması gerekmez (Beceren 1995).

Örnek 3.2.12 : $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisi verilsin. Bu durumda $\alpha(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ olduğu açıktır. Buradan $\{a, b\}$ kümesi, bir α -açık kümedir, fakat açık bir küme değildir (Beceren 1995).

Uyarı 3.2.13 : Her α açık küme yarı-açıktır (Noiri 1984; Beceren 1995).

Uyarı 3.2.14 : Yarı açık bir kümenin, α açık küme olması gerekmez (Beceren 1995).

Örnek; $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ topolojisi verilsin. Bu durumda

$SO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ olur. Buradan $\{a, c\}$ kümesi bir yarı açık kümedir. Fakat α açık küme değildir (Beceren 1995).

Teorem 3.2.15 : Her α açık küme, ön açık kümedir (Noiri 1984; Beceren 1995).

İspat: (X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \in \alpha(X)$ kümesi verilsin. $A \in \alpha(X)$ olduğundan $A \subset \text{int}(\text{cl}(\text{int}(A)))$ olur. Buradan $A \subset \text{int}(\text{cl}(A))$ olur. O halde A kümesi, bir ön açık kümedir.

Uyarı 3.2.16 : Ön açık bir kümenin, α açık olması gerekmez (Noiri 1988; Beceren 1995).

Teorem 3.2.17 : $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}\}$ topolojisi verilsin. Bu durumda $\alpha(X) = \{X, \emptyset, \{a, b\}\}$ ve

$PO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ olur. $\{a\}$ kümesi ön açıktır, fakat yarı açık olmadığından α açık değildir (Noiri 1988; Beceren 1995).

Teorem 3.2.18 : (X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Bu durumda A kümesinin α açık olması için gerek ve yeter şart A kümesinin yarı açık ve ön açık olmasıdır (Noiri 1984; Beceren 1995).

İspat: $\Rightarrow A$ kümesi, bir α açık küme olsun. 3.2.13. Uyarıdan her α açık küme yarı açıktır bu durumda A kümesi yarı açıktır. 3.2.15 Teoremden her α açık küme, ön açıktır. O halde A kümesi ön açıktır.

$\Leftarrow A$ kümesi yarı açık ve ön açık bir küme olsun. A kümesi yarı açık olduğundan, $A \subset cl(int(A))$ olur. Buradan $cl(A) \subset cl(cl(int(A))) = cl(int(A))$ ve dolayısıyla $int(cl(A)) \subset int(cl(int(A)))$ elde edilir. A kümesi ön açık olduğundan $A \subset int(cl(A))$ olur. O halde A kümesi α açıktır.

Tanım 3.2.19 : (X, τ) topolojik uzayı ve $A \subseteq X$ alt kümesi verilsin. $A \subseteq U$ ve U , (X, τ) topolojik uzayında bir açık küme olmak üzere $cl(A) \subseteq U$ oluyorsa, A kümesine genelleştirilmiş kapalı küme veya g kapalı küme denir (Levine 1970).

Teorem 3.2.20 : Her kapalı küme, bir g kapalıdır (Noiri 1996).

İspat. (X, τ) topolojik uzayı ve kapalı bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. $A \subset U$ ve U kümesi, X de açık olsun. A kümesi, kapalı olduğundan $cl(A) = A \subset U$ olur. O halde A kümesi, g kapalıdır (Noiri 1996).

Uyarı 3.2.21 : g kapalı bir kümenin kapalı olması gerekmez:

Gerçekten, $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisi verilsin. (X, τ) topolojik uzayında $\{a, b\}$ kümesi, g kapalıdır, fakat kapalı değildir.

Teorem 3.2.22 : (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin g kapalı olması için gerek ve yeter şart $cl(A) - A$ kümesinin boş olmayan hiçbir kapalı alt kümeyi kapsamamasıdır (Levine 1970).

İspat. $\Rightarrow$ F kümesi, $cl(A) - A$ kümesinin boş olmayan kapalı bir alt kümesi olsun. $A \subset F' \in \tau$ dir. A kümesi g kapalı olduğundan, $cl(A) \subset F'$ olur. Buradan $F \subset (cl(A))'$ dir. Dolayısıyla $F \subset cl(A) \cap (cl(A))'$ olur. Böylece $F = \emptyset$ dir.

$\Leftarrow$ $O \in \tau$ ve $A \subset O$ olsun. Eğer $cl(A) \not\subset O$ ise $cl(A) \cap O' \neq \emptyset$ kümesi, $cl(A) - A$ kümesinin kapalı bir altkümesi olur ki bu hipotezle çelişir. Böylece A kümesi, g kapalıdır.

Sonuç 3.2.23 : (X, τ) topolojik uzayı ve g kapalı bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart $cl(A) - A$ kümesinin kapalı olmasıdır (Levine 1970).

İspat. A kümesi kapalı ise $cl(A) - A = \emptyset$ ve $\emptyset$ kapalıdır. Karşıt olarak $cl(A) - A$ kümesi kapalı olsun. Buradan A kümesi g kapalı olduğundan, 3.2.22. Teorem gereğince, $cl(A) - A = \emptyset$ dir. Böylece $cl(A) = A$ olur.

Teorem 3.2.24 : (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. A ve B kümeleri, X de g kapalı ise $A \cup B$ kümesi, X de g kapalıdır (Levine 1970).

İspat: $O \in \tau$ ve $A \cup B \subset O$ olsun. A ve B kümeleri, g kapalı olduğundan $cl(A) \subset O$ ve $cl(B) \subset O$ olur. Buradan $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B) \subset O$ dir. Böylece $A \cup B$ kümesi, X de g kapalıdır.

Örnek 3.2.25 : İki g kapalı kümenin kesişimi, genellikle g kapalı değildir: Gerçekten, $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ topolojisini alalım. $A = \{a, b\}$ ve $B = \{a, c\}$ kümelerinin her biri g kapalıdır, çünkü $cl(A) = X$ ve $cl(B) = X$ dir. Fakat $A \cap B = \{a\} \subset \{a\}$ ve $cl(\{a\}) = X \not\subset \{a\}$ olduğundan, $A \cap B$ kümesi, X de g kapalı değildir (Levine 1970).

Teorem 3.2.26 : (X, τ) bir topolojik uzay ve $B \subset A \subset X$ olsun. A kümesi, X de g kapalı ve B kümesi, A da g kapalı ise B kümesi, X de g kapalıdır (Levine 1970).

İspat. $B \subset O \in \tau$ olsun. $B \subset A \cap O \in \tau_A$ dır. B kümesi, A da g kapalı olduğundan, $cl(B_A) = A \cap cl(B) \subset A \cap O$ ve $A \subset O \cup (cl(B))' \in \tau$ dir. A kümesi, X de g kapalı olduğundan $cl(A) \subset O \cup (cl(B))'$ dir. Böylece $cl(B) \subset cl(A) \subset O \cup (cl(B))' \in \tau$ ve $cl(B) \subset O$ olur.

Sonuç 3.2.27 : (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, F \subset X$ olsun. A kümesi, X de g kapalı ve F kümesi, X de kapalı ise $A \cap F$ kümesi, X de g kapalıdır (Levine 1970).

İspat. $A \cap F$ kümesi, A da kapalı olduğu açıktır. 3.2.20. Teorem gereğince her kapalı küme, bir g kapalıdır o halde, $A \cap F$ kümesi, A da g kapalıdır., $A \cap F$ kümesi, X de g kapalıdır.

Teorem 3.2.28 : (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $B \subset A \subset X$ ve B kümesi, X de g kapalı ise B kümesi, A alt uzayında g kapalıdır (Levine 1970).

İspat. $O \in \tau$ ve $B \subset A \cap O \in \tau_A$ olsun. $B \subset O$ ve B kümesi, X de g kapalı olduğundan, $cl(B) \subset O$ olur. Böylece $cl(B_A) = A \cap cl(B) \subset O \cap A$ ve B kümesi, A da g kapalıdır.

3.3. Bitolojik Uzaylar

Tanım 3.3.1 : X boş olmayan bir küme, τ_1 ve τ_2 X üzerinde farklı iki topoloji olsunlar. (X, τ_1, τ_2) sıralı üçlüsüne bir ikili topolojik (bitolojik) uzay denir (Kelly 1963).

Tanım 3.3.2 : (X, τ_1, τ_2) bir ikili topolojik uzay ve $S \subset X$ olsun. $A \in \tau_1$ ve $B \in \tau_2$ olmak üzere $S = A \cup B$ şeklinde yazılabiliyorsa S alt kümesine $\tau_1 \tau_2$ açık kümedir denir.

$\tau_1\tau_2$ açık kümenin tümleyenine de $\tau_1\tau_2$ kapalı kümedir denir (Ravi and Thivagar 2006).

Tanım 3.3.3 : (X, τ_1, τ_2) bir ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

a) A kümesini içeren tüm $\tau_1\tau_2$ kapalı kümelerin kesişimine A 'nın $\tau_1\tau_2$ kapanışı denir ve

$$\tau_1\tau_2 \text{ cl}(A) = \cap \{F : A \subset F, F \tau_1\tau_2 \text{ kapalı}\} \text{ şeklinde gösterilir.}$$

b) A kümesinin içerdği tüm $\tau_1\tau_2$ açıkların birleşimine A 'nın $\tau_1\tau_2$ içi denir ve

$$\tau_1\tau_2 \text{ int}(A) = \cup \{F : F \subset A, F \tau_1\tau_2 \text{ açık}\} \text{ şeklinde gösterilir. (Ravi and Thivagar 2006).}$$

Aşağıda $\tau_1\tau_2$ açık ve kapalı kümelere ait bir örnek verilmiştir:

Örnek 3.3.4 : $X = \{a, b, c\}, \tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ve $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ olsun. Bu durumda, $\tau_1\tau_2$ açık kümeler $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ve $\tau_1\tau_2$ kapalı kümeler $\{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}\}$ olarak elde edilir.

Önerme 3.3.5 : (X, τ_1, τ_2) bir ikili topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır:

- a)** $\tau_1 \text{ int}(A) \subset \tau_1\tau_2 \text{ int}(A)$ ve $\tau_2 \text{ int}(A) \subset \tau_1\tau_2 \text{ int}(A)$.
- b)** $\tau_1\tau_2 \text{ cl}(A) \subset \tau_1 \text{ cl}(A)$ ve $\tau_1\tau_2 \text{ cl}(A) \subset \tau_2 \text{ cl}(A)$.
- c)** $\tau_1\tau_2 \text{ cl}(A \cap B) \subset \tau_1\tau_2 \text{ cl}(A) \cap \tau_1\tau_2 \text{ cl}(B)$.
- d)** $\tau_1\tau_2 \text{ int}(A) \cup \tau_1\tau_2 \text{ int}(B) \subset \tau_1\tau_2 \text{ int}(A \cup B)$

(Ravi and Thivagar 2006).

İspat: a) $x \in \tau_1 \text{int}(A)$ olsun. Bu durumda, $x \in \bigcup \{F : F \subset A, F \in \tau_1\}$ olur. $F \in \tau_1, \emptyset \in \tau_2$ olarak seçildiğinde $F = F \cup \emptyset$ şeklinde yazılabildiğinden, F kümesi $\tau_1 \tau_2$ açık olur. O halde $x \in \bigcup \{F : F \subset A, F \tau_1 \tau_2 \text{ açık}\}$ bulunur. O halde $x \in \tau_1 \tau_2 \text{int}(A)$ dır.

Diğer önermeler de benzer şekilde ispatlanır.

Önerme 2.3.5 (a) şikkının tersinin doğru olmadığına ait bir ters örnek verelim:

3.3.7 Örnek : $X = \{a, b, c\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ve $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$

olsun. Bu durumda

$\tau_1 \tau_2$ açıklar $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ve $\tau_1 \tau_2$ kapalılar $= \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}\}$

olarak bulunur.

$$\tau_1 \tau_2 \text{int}(\{a, b\}) = \{a, b\} \text{ ve } \tau_1 \text{int}(\{a, b\}) = \{a\}$$

olduğundan,

$$\tau_1 \tau_2 \text{int}(\{a, b\}) \not\subset \tau_1 \text{int}(\{a, b\}) \text{ dır.}$$

3.4. İkili topolojik Uzaylarda Ön Açık (Kapalı), Yarı Açık (Kapalı), Yarı Ön Açık (Kapalı), α Açık (Kapalı) ve G Açık (Kapalı) Kümeler

Tanım 3.4.1 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayının A alt kümesi için, A nın τ_j ye göre kapanışının τ_i ye göre içi A nın üst kümesi oluyorsa A ya ij ön açık (ij pre open) küme denir. Başka bir ifadeyle

$$ij \text{ ön açık}(A): A \subset \tau_i - \text{int}(\tau_j - cl(A))$$

dir.

(X, τ_i, τ_j) nin ij ön açık kümesinin tümleyeni ij ön kapalı (ij pre closed) kümedir.

Tüm ij ön açık, ve ij ön kapalı kümeler ailesini $ij PO(X)$ ve $ij PC(X)$ ile göstereceğiz (Sampath Kumar 1997).

Tanım 3.4.2 : $ij PC(X)$ deki A yı içeren kapalıların arakesitinin oluşturduğu kümeye ij ön kapanış (ij pre closure) kümesi denir. ij ön kapanış kümesi kısaca $ij pcl(A)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle

$$ij pcl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ij - PC(X), A \subseteq F\}$$

dir.

Tüm ij ön kapanış kümeler ailesini $ij PCL(X)$ ile göstereceğiz (Sampath Kumar 1997).

Tanım 3.4.3 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayının A alt kümesi için, A nın τ_i ye göre içinin τ_j ye göre kapanışı A nın üst kümesi oluyorsa A ya ij yarı açık (ij semi open) küme denir. Başka bir ifadeyle

$$ij \text{ yarı açık}(A) : A \subset \tau_j - cl(\tau_i - int(A))$$

dir.

(X, τ_i, τ_j) nin ij yarı açık alt kümesinin tümleyeni ij yarı kapalı (ij semi closed) kümedir.

Tüm ij yarı açık ve ij yarı kapalı kümeler ailesini $ij SO(X)$ ve $ij SC(X)$ ile göstereceğiz (Sampath Kumar 1997).

Tanım 3.4.4 : (X, τ_i, τ_j) topolojik uzayı için ve $A \subset X$ olsun. $ij\ SC(X)$ deki A yı içeren kapalıların arakesitinin oluşturduğu kümeye ij yarı kapanış (ij semi closure) kümesi denir. ij yarı kapanış kümesi kısaca $ij\ scl(A)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle

$$ij\ scl(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ij - SC(X), A \subseteq F\}$$

olarak tanımlanır.

Tüm ij yarı kapanış kümeler ailesini $ij\ SCL(X)$ ile göstereceğiz (Sampath Kumar 1997).

Tanım 3.4.5 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayının A alt kümesi için, A nın τ_j ye göre kapanışının τ_i ye göre içinin τ_j ye göre kapanışı A nın üst kümesi oluyorsa A ya ij yarı ön açık (ij semi pre open) küme denir. Başka bir ifadeyle

$$ij\ yarı\ ön\ açık(A) : A \subset \tau_j - cl(\tau_i - int(\tau_j - cl(A)))$$

dir.

(X, τ_i, τ_j) nin ij yarı ön açık alt kümesinin tümleyeni ij yarı ön kapalı kümedir.

Tüm ij yarı ön açık ve ij yarı ön kapalı kümeler ailesini $ij\ SPO(X)$ ve $ij\ SPC(X)$ ile göstereceğiz (Sampath Kumar 1997).

Tanım 3.4.6 : (X, τ_i, τ_j) topolojik uzayı için ve $A \subset X$ olsun. $ij\ SPC(X)$ deki A yı içeren kapalıların arakesitinin oluşturduğu kümeye ij yarı ön kapanış (ij semi pre closure) kümesi denir. ij yarı ön kapanış kümesi kısaca $ij\ spcl(A)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle

$$ij\ spcl(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ij - spc(X), A \subseteq F\}$$

olarak tanımlanır.

Tüm ij yarı ön kapanış kümeler ailesini $ij SPCL(X)$ ile göstereceğiz (Sampath Kumar 1997).

Tanım 3.4.7 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayının A alt kümesi için, A nın τ_i ye göre içinin τ_j ye göre kapanışının τ_i ye göre içi A nın üst kümesi oluyorsa A ya $ij \alpha$ açık ($ij \alpha$ open) küme denir. Başka bir ifadeyle

$$ij \alpha \text{ açık}(A): A \subset \tau_i - \text{int}(\tau_j - \text{cl}(\tau_i - \text{int}(A)))$$

dir.

(X, τ_i, τ_j) nin $ij \alpha$ açık alt kümesinin tümleyeni $ij \alpha$ kapalı kümedir.

Tüm, $ij \alpha$ açık, $ij \alpha$ kapalı kümeler ailesini $ij \alpha O(X)$ $ij \alpha C(X)$ ile gösterilir (Sampath Kumar 1997).

Tanım 3.4.8 : (X, τ_i, τ_j) topolojik uzayı için ve $A \subset X$ olsun. $ij \alpha C(X)$ deki A yı içeren kapalıların arakesitinin oluşturduğu kümeye $ij \alpha$ kapanış ($ij \alpha$ kapanış) kümesi denir. $ij \alpha$ kapanış kümesi kısaca $ij \alpha \text{ cl}(A)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle

$$ij \alpha \text{ cl}(A) = \bigcap \{F \subset X: F \in ij \alpha C(X), A \subseteq F\}$$

olarak tanımlanır.

Tüm $ij \alpha$ kapanış kümeler ailesini $ij \alpha CL(X)$ ile göstereceğiz (Sampath Kumar 1997).

Tanım 3.4.9 : $A, (X, \tau_i, \tau_j)$ ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. U, A yı kapsayan τ_i nin bir açığı olmak üzere A nın j ye göre kapanışı U açığının alt kümesi ise

bu kümeye ij g kapalı (ij g closed) küme denir. ij g kapalı küme ailesi kısaca $ij GC(X)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle eğer

$$A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow j - cl(A) \subset U$$

ise ij g kapalı kümesidir (El-Tantawy and Abu-Donia 2005).

Tanım 3.4.10 : $A, (X, \tau_i, \tau_j)$ ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. U, A yı kapsayan τ_i nin bir açığı olmak üzere A nın ji yarı kapanışı U açığının alt kümesi ise bu kümeye ij gs kapalı (ij gs closed) küme denir. ij gs kapalı küme ailesi kısaca $ij GSC(X)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle ij gs kapalı olması için

$$A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$$

olmalıdır (El-Tantawy and Abu-Donia 2005).

Tanım 3.4.11 : $A, (X, \tau_i, \tau_j)$ ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. U, A yı kapsayan $ij SO$ nın bir açığı olmak üzere A nın ji yarı kapanışı U açığının alt kümesi ise bu kümeye ij sg kapalı (ij sg closed) küme denir. ij sg kapalı küme ailesi kısaca $ij SGC(X)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle ij sg kapalı olması için

$$A \subset U, U \in ij - SO(X) \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$$

olmalıdır (El-Tantawy and Abu-Donia 2005).

Tanım 3.4.12 : $A, (X, \tau_i, \tau_j)$ ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. U, A yı kapsayan τ_i nin bir açığı olmak üzere A nın $ji-\alpha$ kapanışı U açığının alt kümesi ise bu kümeye $ij \alpha$ g kapalı ($ij \alpha$ g closed) küme denir. $ij \alpha$ g kapalı küme ailesi kısaca $ij \alpha GC(X)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle $ij \alpha$ g kapalı olması için

$$A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$$

olmalıdır (El-Tantawy and Abu-Donia 2005).

Tanım 3.4.13 : $A, (X, \tau_i, \tau_j)$ ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. U, A yı kapsayan ji αO nun bir açığı olmak üzere A nın ji - α kapanışı U açığının alt kümesi ise bu kümeye ij $g\alpha$ kapalı (ij $g\alpha$ closed) küme denir. ij $g\alpha$ kapalı küme ailesi kısaca ij $G\alpha C(X)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle ij $g\alpha$ kapalı olması için

$$A \subset U, U \in ij - \alpha O(X) \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$$

olmalıdır (El-Tantawy and Abu-Donia 2005).

Tanım 3.4.14 : $A, (X, \tau_i, \tau_j)$ ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. U, A yı kapsayan τ_i nin bir açığı olmak üzere A nın ji yarı ön kapanışı U açığının alt kümesi ise bu kümeye ij gsp kapalı (ij gsp closed) küme denir. ij gsp kapalı küme ailesi kısaca ij $GSPC(X)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle ij gsp kapalı olması için

$$A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$$

olmalıdır (El-Tantawy and Abu-Donia 2005).

Tanım 3.4.15 : $A, (X, \tau_i, \tau_j)$ ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. U, A yı kapsayan ji SPO nun bir açığı olmak üzere A nın ji yarı ön kapanışı U açığının alt kümesi ise bu kümeye ij spg kapalı (ij spg closed) küme denir. ij spg kapalı küme ailesi kısaca ij $SPGC(X)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle ij spg kapalı olması için

$$A \subset U, U \in ji - SPO(X) \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$$

olmalıdır (El-Tantawy and Abu-Donia 2005).

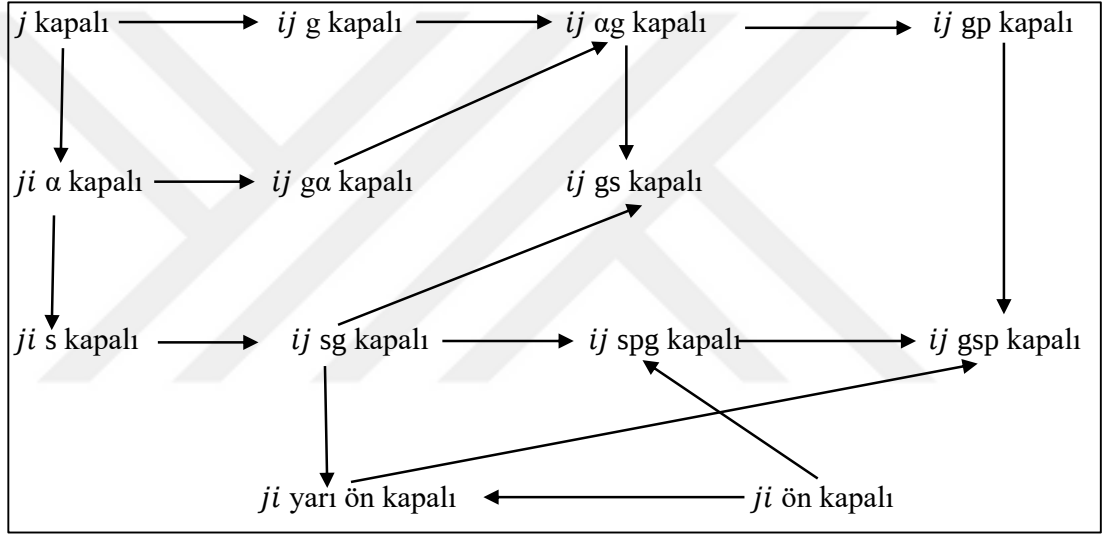
Tanım 3.4.16 : $A, (X, \tau_i, \tau_j)$ ikili topolojik uzayının alt kümesi olsun. U, A yı kapsayan τ_i nin bir açığı olmak üzere A nın ji ön kapanışı U açığının alt kümesi ise bu

kümeye ij gp kapalı (ij gp closed) küme denir. ij gp kapalı küme ailesi kısaca $ij GPC(X)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle ij gp kapalı olması için

$$A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - pcl(A) \subset U$$

olmalıdır (El-Tantawy and Abu-Donia 2005).

Teorem 3.4.17 : Yukarıdaki tanımların arasındaki ilişki aşağıdaki diyagram da verilmiştir.



Şekil 3.1. İkili topolojik uzaylardaki kapalı kümeler arasındaki ilişkiler (El-Tantawy and Abu-Donia 2005).

Örnek 3.4.18 : $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi verilsin. $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, d\}\}$ ve $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ olmak üzere (X, τ_1, τ_2) ikili topolojik uzay olsun. Yukarıdaki tanımlarda verilen ayırma aksiyomlarını inceleyelim.

Çözüm: İlk olarak Tanım 3.4.1-17 tanımlarında yer alan açık kümeleri bulalım.

Tanım 3.4.1 de yer alan ön açık küme tanımını hatırlayalım.

$$ij \text{ ön açık}(A): A \subset \tau_1 - int(\tau_2 - cl(A))$$

olur. Buna göre;

- $\tau_2 - cl(\{a\}) = \{a, b\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{a, b\}) = \{a\} \Rightarrow \{a\} \subset \{a\}$
- $\tau_2 - cl(\{b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{a, b\}) = \{a\} \Rightarrow \{b\} \not\subset \{a\}$
- $\tau_2 - cl(\{c\}) = \{c, d\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{c, d\}) = \emptyset \Rightarrow \{c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(\{d\}) = \{c, d\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{c, d\}) = \emptyset \Rightarrow \{d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(\{a, b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{a, b\}) = \{a\} \Rightarrow \{a, b\} \not\subset \{a\}$
- $\tau_2 - cl(\{a, c\}) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{a, c\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\{a, d\}) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{a, d\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\{b, c\}) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\{b, d\}) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{b, d\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\{c, d\}) = \{c, d\} \Rightarrow \tau_1 - int(\{c, d\}) = \emptyset \Rightarrow \{c, d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(\{a, b, c\}) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{a, b, c\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\{a, b, d\}) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{a, b, d\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\{b, c, d\}) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{b, c, d\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\{a, c, d\}) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{a, c, d\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \tau_1 - int(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij\ PO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.6 da yer alan yarı ön açık küme tanımını hatırlayalım

$$ij\ yarı\ ön\ açık(A): A \subset \tau_2 - cl(\tau_1 - int(\tau_2 - cl(A)))$$

olur. Buna göre

- $\tau_2 - cl(\{a\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_2 - cl(\{a\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{b\} \subset \{a, b\}$

- $\tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(\{a\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a, b\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \{a, c\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \{a, d\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \{b, c\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \{b, d\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{c, d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \{a, b, c\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \{a, b, d\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \{b, c, d\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow \{a, c, d\} \subset X$
- $\tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 - cl(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij\ SPO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.3 de yer alan yarı açık küme tanımını hatırlayalım

$$ij\ yarı\ açık(A): A \subset \tau_2 - cl(\tau_1 - int(A))$$

olur. Buna göre

- $\tau_1 - int(\{a\}) = \{a\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{a\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_1 - int(\{b\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(\{c\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(\{d\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(\{a, b\}) = \{a\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{a\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a, b\} \subset \{a, b\}$
- $\tau_1 - int(\{a, c\}) = \{a\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{a\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \{a, b\}$
- $\tau_1 - int(\{a, d\}) = \{a, d\} \Rightarrow \tau_2 - cl(\{a, d\}) = X \Rightarrow \{a, d\} \subset X$

- $\tau_1 - \text{int}(\{b, c\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - \text{cl}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b, c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - \text{int}(\{b, d\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - \text{cl}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b, d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - \text{int}(\{c, d\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - \text{cl}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{c, d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - \text{int}(\{a, b, c\}) = \{a\} \Rightarrow \tau_2 - \text{cl}(\{a\}) = \{a, b\} \Rightarrow \{a, b, c\} \not\subset \{a, b\}$
- $\tau_1 - \text{int}(\{a, b, d\}) = \{a, d\} \Rightarrow \tau_2 - \text{cl}(\{a, d\}) = X \Rightarrow \{a, b, d\} \subset X$
- $\tau_1 - \text{int}(\{b, c, d\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - \text{cl}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b, c, d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - \text{int}(\{a, c, d\}) = \{a, d\} \Rightarrow \tau_2 - \text{cl}(\{a, d\}) = X \Rightarrow \{a, c, d\} \subset X$
- $\tau_1 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - \text{cl}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - \text{int}(X) = X \Rightarrow \tau_2 - \text{cl}(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij SO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.8 de yer alan α -açık küme tanımını hatırlayalım.

$$ij \alpha \text{ açık}(A): A \subset \tau_1 - \text{int}(\tau_2 - \text{cl}(\tau_1 - \text{int}(A)))$$

olur. Buna göre

- $\tau_1 - \text{int}(\{a, b\}) = \{a\} \Rightarrow \{a\} \subset \{a\}$
- $\tau_1 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - \text{int}(\{a, b\}) = \{a\} \Rightarrow \{a, b\} \not\subset \{a\}$
- $\tau_1 - \text{int}(\{a, b\}) = \{a\} \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \{a\}$
- $\tau_1 - \text{int}(X) = X \Rightarrow \{a, d\} \subset X$
- $\tau_1 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b, c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b, d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{c, d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - \text{int}(\{a, b\}) = \{a\} \Rightarrow \{a, b, c\} \not\subset \{a\}$

- $\tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{a, b, d\} \subset X$
- $\tau_1 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b, c, d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(X) = X \Rightarrow \{a, c, d\} \subset X$
- $\tau_1 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - int(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ij \alpha O(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.5 de yer alan yarı kapanış küme tanımını hatırlayalım.

$$ij scl(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ij - SC(X)\}$$

olur. Buna göre

$$ij SC(X) = \{X, \emptyset, \{b, c, d\}, \{c, d\}, \{b, c\}, \{c\}, \{b\}\}$$

- $scl(\{a\}) = X$
- $scl(\{b\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{b, c\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $scl(\{c\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{c, d\} \cap \{b, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $scl(\{d\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{c, d\} = \{c, d\}$
- $scl(\{a, b\}) = X$
- $scl(\{a, c\}) = X$
- $scl(\{a, d\}) = X$
- $scl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $scl(\{b, d\}) = X \cap \{b, c, d\} = \{b, c, d\}$
- $scl(\{c, d\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{c, d\} = \{c, d\}$
- $scl(\{a, b, c\}) = X$
- $scl(\{a, b, d\}) = X$
- $scl(\{b, c, d\}) = X \cap \{b, c, d\} = \{b, c, d\}$

- $scl(\{a, c, d\}) = X$

$$ij\ SCL(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.9 yer alan α kapanış küme tanımını hatırlayalım.

$$ij\ \alpha\ cl(A): \cap\{F \subset X: F \in ij - \alpha\ C(X), A \subseteq F\}$$

Olur. Buna göre

$$ij - \alpha C(X): \{X, \emptyset, \{b, c, d\}, \{b, c\}, \{c\}, \{b\}\}$$

- $\alpha - cl(\{a\}) = X$
- $\alpha - cl(\{b\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{b, c\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $\alpha - cl(\{c\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{b, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $\alpha - cl(\{d\}) = X \cap \{b, c, d\} = \{b, c, d\}$
- $\alpha - cl(\{a, b\}) = X$
- $\alpha - cl(\{a, c\}) = X$
- $\alpha - cl(\{a, d\}) = X$
- $\alpha - cl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $\alpha - cl(\{b, d\}) = X \cap \{b, c, d\} = \{b, c, d\}$
- $\alpha - cl(\{c, d\}) = X \cap \{b, c, d\} = \{b, c, d\}$
- $\alpha - cl(\{a, b, c\}) = X$
- $\alpha - cl(\{a, c, d\}) = X$
- $\alpha - cl(\{a, b, d\}) = X$
- $\alpha - cl(\{b, c, d\}) = X \cap \{b, c, d\} = \{b, c, d\}$
- $\alpha - cl(\emptyset) = \emptyset$
- $\alpha - cl(X) = X$

$$ij\ \alpha CL(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.7 yer alan yarı ön kapanış küme tanımını hatırlayalım.

$$ij\ spcl(A): \cap \{F \subset X: F \in ij - spc(X), A \subseteq F\}$$

olur. Buna göre

$$ij\ SPC(X): \{X, \emptyset, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{d\}, \{c\}, \{a\}, \{b\}\}$$

- $spcl(\{a\}) = X \cap \{a, c, d\} \cap \{a, d\}, \{a, c\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $spcl(\{b\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{b, d\} \cap \{b, c\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $spcl(\{c\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{a, c, d\} \cap \{c, d\} \cap \{b, c\} \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $spcl(\{d\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{a, c, d\} \cap \{c, d\} \cap \{a, d\} \cap \{d\} = \{d\}$
- $spcl(\{a, b\}) = X$
- $spcl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c, d\}, \{a, c\} = \{a, c\}$
- $spcl(\{a, d\}) = X \cap \{a, c, d\} \cap \{a, d\} = \{a, d\}$
- $spcl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $spcl(\{b, d\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{b, d\} = \{b, d\}$
- $spcl(\{c, d\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{a, c, d\} \cap \{c, d\} = \{c, d\}$
- $spcl(\{a, b, c\}) = X$
- $spcl(\{a, b, d\}) = X$
- $spcl(\{b, c, d\}) = X \cap \{b, c, d\} = \{b, c, d\}$
- $spcl(\{a, c, d\}) = X \cap \{a, c, d\} = \{a, c, d\}$
- $spcl(\emptyset) = \emptyset$
- $spcl(X) = X$

$$ij\ SPCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.2 yer alan yarı kapanış küme tanımını hatırlayalım.

$$ij \text{ } pcl(A) : \cap \{F \subset X : F \in ij - PC(X), A \subseteq X\}$$

olur. Buna göre

$$ij \text{ } PC(X) : \{\emptyset, X, \{b, c, d\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{d\}, \{c\}, \{a\}, \{b\}\}$$

- $pcl(\{a\}) = X \cap \{a, d\} \cap \{a, c\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $pcl(\{b\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{b, d\} \cap \{b, c\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $pcl(\{c\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{b, c\} \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $pcl(\{d\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{b, d\} \cap \{a, d\} \cap \{d\} = \{d\}$
- $pcl(\{a, b\}) = X$
- $pcl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $pcl(\{a, d\}) = X \cap \{a, d\} = \{a, d\}$
- $pcl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $pcl(\{b, d\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{b, d\} = \{b, d\}$
- $pcl(\{c, d\}) = X \cap \{b, c, d\} = \{b, c, d\}$
- $pcl(\{a, b, c\}) = X$
- $pcl(\{a, b, d\}) = X$
- $pcl(\{a, c, d\}) = X$
- $pcl(\{b, c, d\}) = X \cap \{b, c, d\} = \{b, c, d\}$
- $pcl(\emptyset) = \emptyset$
- $pcl(X) = X$

$$ij \text{ } PCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, c, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.1 de yer alan ön açık küme tanımını hatırlayalım.

$$ji \text{ } \text{ön açık}(A) : A \subset \tau_2 - int(\tau_1 - cl(A))$$

olur. Buna göre

- $\tau_1 - cl(\{a\}) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \{a\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\{b\}) = \{b, c\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{b, c\}) = \emptyset \Rightarrow \{b\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(\{c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{b, c\}) = \emptyset \Rightarrow \{c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(\{d\}) = \{b, c, d\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{b, c, d\}) = \{c, d\} \Rightarrow \{d\} \subset \{c, d\}$
- $\tau_1 - cl(\{a, b\}) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \{a, b\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\{a, c\}) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \{a, c\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\{a, d\}) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \{a, d\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\{b, c\}) = \{b, c\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{b, c\}) = \emptyset \Rightarrow \{b, c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(\{b, d\}) = \{b, c, d\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{b, c, d\}) = \{c, d\} \Rightarrow \{b, d\} \not\subset \{c, d\}$
- $\tau_1 - cl(\{c, d\}) = \{b, c, d\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{b, c, d\}) = \{c, d\} \Rightarrow \{c, d\} \subset \{c, d\}$
- $\tau_1 - cl(\{a, b, c\}) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \{a, b, c\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\{a, b, d\}) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \{a, b, d\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\{b, c, d\}) = \{b, c, d\} \Rightarrow \tau_2 - int(\{b, c, d\}) = \{c, d\} \Rightarrow \{b, c, d\} \not\subset \{c, d\}$
- $\tau_1 - cl(\{a, c, d\}) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \{a, c, d\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \tau_2 - int(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ji \ PO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.6 da yer alan yarı ön açık küme tanımını hatırlayalım.

$$ji \ yarı \ ön \ açık(A): A \subset \tau_1 - cl(\tau_2 - int(\tau_1 - cl(A)))$$

Olur. Buna göre

- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \{a\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(\{c, d\}) = \{b, c, d\} \Rightarrow \{d\} \subset \{b, c, d\}$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \{a, b\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \{a, c\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \{a, d\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b, c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(\{c, d\}) = \{b, c, d\} \Rightarrow \{b, d\} \subset \{b, c, d\}$
- $\tau_1 - cl(\{c, d\}) = \{b, c, d\} \Rightarrow \{c, d\} \subset \{b, c, d\}$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \{a, b, c\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \{a, b, d\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\{c, d\}) = \{b, c, d\} \Rightarrow \{b, c, d\} \subset \{b, c, d\}$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow \{a, c, d\} \subset X$
- $\tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ji \ SPO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.3’de yer alan yarı açık küme tanımını hatırlayalım.

$$ji \ yarı \ açık(A): A \subset \tau_1 - cl(\tau_2 - int(A))$$

olur. Buna göre

- $\tau_2 - int(\{a\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\{b\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\{c\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\{d\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\{a, b\}) = \{a, b\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{a, b\}) = X \Rightarrow \{a, b\} \subset X$

- $\tau_2 - it(\{a, c\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\{a, d\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a, d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\{b, c\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b, c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\{b, d\}) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b, d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\{c, d\}) = \{c, d\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{c, d\}) = \{b, c, d\} \Rightarrow \{c, d\} \subset \{b, c, d\}$
- $\tau_2 - int(\{a, b, c\}) = \{a, b\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{a, b\}) = X \Rightarrow \{a, b, c\} \subset X$
- $\tau_2 - int(\{a, b, d\}) = \{a, b\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{a, b\}) = X \Rightarrow \{a, b, d\} \subset X$
- $\tau_2 - int(\{b, c, d\}) = \{c, d\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{c, d\}) = \{b, c, d\} \Rightarrow \{b, c, d\} \subset \{b, c, d\}$
- $\tau_2 - int(\{a, c, d\}) = \{c, d\} \Rightarrow \tau_1 - cl(\{c, d\}) = \{b, c, d\} \Rightarrow \{a, c, d\} \not\subset \{b, c, d\}$
- $\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \tau_1 - cl(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ji SO(X) = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.8 de yer alan α –açık küme tanımını hatırlayalım.

$$ji \alpha \text{ açık küme}(A): A \subset \tau_2 - int(\tau_1 - cl(\tau_2 - cl(\tau_2 - int(A))))$$

olur. Buna göre

- $\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - int(X) = X \Rightarrow \{a, b\} \subset X$
- $\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a, c\} \not\subset \emptyset$

- $\tau_2 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{a, d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b, c\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \{b, d\} \not\subset \emptyset$
- $\tau_2 - \text{int}(\{b, c, d\}) = \{c, d\} \Rightarrow \{c, d\} \subset \{c, d\}$
- $\tau_2 - \text{int}(X) = X \Rightarrow \{a, b, c\} \subset X$
- $\tau_2 - \text{int}(X) = X \Rightarrow \{a, b, d\} \subset X$
- $\tau_2 - \text{int}(\{b, c, d\}) = \{c, d\} \Rightarrow \{b, c, \} \not\subset \{c, d\}$
- $\tau_2 - \text{int}(\{b, c, d\}) = \{c, d\} \Rightarrow \{a, c, d\} \not\subset \{c, d\}$
- $\tau_2 - \text{int}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset \emptyset$
- $\tau_2 - \text{int}(X) = X \Rightarrow X \subset X$

$$ji \alpha O(X) = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.5 de yer alan yarı kapanış küme tanımını hatırlayalım.

$$ji scl(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ji - SC(X), A \subseteq F\}$$

olur. Buna göre

$$ji SC(X) = \{\emptyset, X, \{c, d\}, \{a, b\}, \{d\}, \{c\}, \{a\}\}$$

- $scl(\{a\}) = X \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $scl(\{b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $scl(\{c\}) = X \cap \{c, d\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $scl(\{d\}) = X \cap \{c, d\} \cap \{d\} = \{d\}$
- $scl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $scl(\{a, c\}) = X$
- $scl(\{a, d\}) = X$
- $scl(\{b, c\}) = X$

- $scl(\{b, d\}) = X$
- $scl(\{c, d\}) = X \cap \{c, d\} = \{c, d\}$
- $scl(\{a, b, c\}) = X$
- $scl(\{a, c, d\}) = X$
- $scl(\{a, b, d\}) = X$
- $scl(\{b, c, d\}) = X$
- $scl(X) = X$
- $scl(\emptyset) = \emptyset$

$$ji\ SCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{c, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.8 de yer alan α kapanış küme tanımını hatırlayalım.

$$ji\ \alpha\ cl(A) : \cap\{F \subset X : F \in ji - \alpha\ C(X), A \subseteq F\}$$

buna göre

$$ji\ \alpha\ C(X) = \{\emptyset, X, \{c, d\}, \{a, b\}, \{d\}, \{c\}\}$$

- $\alpha\ cl(\{a\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $\alpha\ cl(\{b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $\alpha\ cl(\{c\}) = X \cap \{c, d\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $\alpha\ cl(\{d\}) = X \cap \{c, d\} \cap \{d\} = \{d\}$
- $\alpha\ cl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $\alpha\ cl(\{a, c\}) = X$
- $\alpha\ cl(\{a, d\}) = X$
- $\alpha\ cl(\{b, c\}) = X$
- $\alpha\ cl(\{b, d\}) = X$
- $\alpha\ cl(\{c, d\}) = X \cap \{c, d\} = \{c, d\}$
- $\alpha\ cl(\{a, b, c\}) = X$

- $\alpha cl(\{a, b, d\}) = X$
- $\alpha cl(\{a, c, d\}) = X$
- $\alpha cl(\{b, c, d\}) = X$
- $\alpha cl(\emptyset) = \emptyset$
- $\alpha cl(X) = X$

$$ji \alpha CL(X) = \{X, \emptyset, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{c, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.7 de yer alan yarı ön kapanış küme tanımını hatırlayalım.

$$ji spcl(A) = \bigcap \{F \subset X : F \in ji - SPC(X), A \subseteq F\}$$

olur. Buna göre

$$ji SPC(X) = \{\emptyset, X, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{d\}, \{c\}, \{a\}, \{b\}\}$$

- $spcl(\{a\}) = X \cap \{a, b, c\} \cap \{a, c\} \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$
- $spcl(\{b\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{a, b, c\} \cap \{b, d\} \cap \{b, c\} \cap \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $spcl(\{c\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{a, b, c\} \cap \{c, d\} \cap \{b, c\} \cap \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $spcl(\{d\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{c, d\} \cap \{b, d\} \cap \{d\} = \{d\}$
- $spcl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b, c\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $spcl(\{a, c\}) = X \cap \{a, b, c\} \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $spcl(\{a, d\}) = X$
- $spcl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{a, b, c\} \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $spcl(\{b, d\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{b, d\} = \{b, d\}$
- $spcl(\{c, d\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{c, d\} = \{c, d\}$
- $spcl(\{a, b, c\}) = X \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$
- $spcl(\{a, c, d\}) = X$
- $spcl(\{b, c, d\}) = X \cap \{b, c, d\} = \{b, c, d\}$

- $spcl(\{a, b, d\}) = X$
- $spcl(\emptyset) = \emptyset$
- $spcl(X) = X$

$$ji\ spcl(A) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.2 de yer alan ön kapanış küme tanımını hatırlayalım.

$$ji\ pcl(A) : \cap \{F \subset X : F \in ji - PC(X), A \subseteq F\}$$

olur. Buna göre

$$ji\ PC(X) = \{\emptyset, X, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{d\}, \{c\}, \{b\}\}$$

- $pcl(\{a\}) = X \cap \{a, b, c\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $pcl(\{b\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{a, b, c\} \cap \{b, d\} \cap \{b, c\} \cap \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $pcl(\{c\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{a, b, c\} \cap \{c, d\} \cap \{b, c\} \cap \{c\} = \{c\}$
- $pcl(\{d\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{c, d\} \cap \{b, d\} \cap \{d\} = \{d\}$
- $pcl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b, c\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $pcl(\{a, c\}) = X \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$
- $pcl(\{a, d\}) = X$
- $pcl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{a, b, c\} \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $pcl(\{b, d\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{b, d\} = \{b, d\}$
- $pcl(\{c, d\}) = X \cap \{b, c, d\} \cap \{c, d\} = \{c, d\}$
- $pcl(\{a, b, c\}) = X \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$
- $pcl(\{a, b, d\}) = X$
- $pcl(\{b, c, d\}) = X \cap \{b, c, d\} = \{b, c, d\}$
- $pcl(\{a, c, d\}) = X$
- $pcl(\emptyset) = \emptyset$

- $pcl(X) = X$

$$ji PCL(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.10 da yer alan genelleştirilmiş kapalı küme tanımını hatırlayalım.

$$ij \text{ g kapalı}(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow j - cl(A) \subset U$$

olur. Buna göre

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a, d\}, X \Rightarrow j - cl(\{a\}) = \{a, b\} \not\subset \{a\}, \{a, d\},$
- $\{b\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{b\}) = \{a, b\} \subset X$
- $\{c\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{c\}) = \{c, d\} \subset X$
- $\{d\} \subset \{a, d\}, X \Rightarrow j - cl(\{d\}) = \{c, d\} \not\subset \{a, d\}$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{a, c\}) = X \subset X$
- $\{a, d\} \subset \{a, d\}, X \Rightarrow j - cl(\{a, d\}) = X \not\subset \{a, d\}$
- $\{b, c\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{b, c\}) = X \subset X$
- $\{b, d\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{b, d\}) = X \subset X$
- $\{c, d\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{c, d\}) = \{c, d\} \subset X$
- $\{a, b, c\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{a, b, c\}) = X \subset X$
- $\{a, c, d\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{a, c, d\}) = X \subset X$
- $\{b, c, d\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{b, c, d\}) = X \subset X$
- $\{a, b, d\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{a, b, d\}) = X \subset X$

$$ij GC(X) =$$

$$\{\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \emptyset, X\}$$

$$ij GO(X) = \{\{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{d\}, \{b\}, \{a\}, \{c\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.11 da yer alan genelleştirilmiş yarı kapalı küme tanımını hatırlayalım.

$$ij \text{ gs kapalı}(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$$

Buna göre

- $\{a\} \subset \{a, \{a, d\}, X \Rightarrow ji - scl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a, \{a, d\}, X$
- $\{b\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{b\}) = \{a, b\} \subset X$
- $\{c\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{c\}) = \{c\} \subset X$
- $\{d\} \subset \{a, d\}, X \Rightarrow ji - scl(\{d\}) = \{d\} \subset \{a, d\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{a, c\}) = X \subset X$
- $\{a, d\} \subset \{a, d\}, X \Rightarrow ji - scl(\{a, d\}) = X \not\subset \{a, d\}$
- $\{b, c\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{b, c\}) = X \subset X$
- $\{b, d\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{b, d\}) = X \subset X$
- $\{c, d\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{c, d\}) = \{c, d\} \subset X$
- $\{a, b, c\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{a, b, c\}) = X \subset X$
- $\{a, c, d\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{a, c, d\}) = X \subset X$
- $\{b, c, d\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{b, c, d\}) = X \subset X$
- $\{a, b, d\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{a, b, d\}) = X \subset X$

$$ij \text{ GSC}(X) =$$

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, d\}, X, \emptyset\}$$

$$ij \text{ GSO}(X) =$$

$$\{\{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{d\}, \{b\}, \{a\}, \{c\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.12 de da yer alan yarı genelleştirilmiş kapalı küme tanımını hatırlayalım.

$$ij \text{ sg kapalı; } A \subset U, U \in ij - SO(X) \Rightarrow ji - scl(A) \subset U$$

olur.Buna göre

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - scl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X$
- $\{b\} \subset \{a, b\}, \{a, b, d\}, X \Rightarrow ji - scl(\{b\}) = \{a, b\} \subset \{a, b\}, \{a, b, d\}, X$
- $\{c\} \subset \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - scl(\{c\}) = \{c\} \subset \{a, c, d\}, X$
- $\{d\} \subset \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - scl(\{d\}) = \{d\} \subset \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X$
- $\{a, b\} \subset \{a, b\}, \{a, b, d\}, X \Rightarrow ji - scl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset \{a, b\}, \{a, b, d\}, X$
- $\{a, c\} \subset \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - scl(\{a, c\}) = X \not\subset \{a, c, d\}$
- $\{a, d\} \subset \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, d\}, X \Rightarrow ji - scl(\{a, d\}) = X \not\subset \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, d\}$
- $\{b, c\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{b, c\}) = X \subset X$
- $\{b, d\} \subset \{a, b, d\}, X \Rightarrow ji - scl(\{b, d\}) = X \not\subset \{a, b, d\}$
- $\{c, d\} \subset \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - scl(\{c, d\}) = \{c, d\} \subset \{a, c, d\}, X$
- $\{a, b, c\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{a, b, c\}) = X \subset X$
- $\{a, c, d\} \subset \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - scl(\{a, c, d\}) = X \not\subset \{a, c, d\}$
- $\{b, c, d\} \subset X \Rightarrow ji - scl(\{b, c, d\}) = X \subset X$
- $\{a, b, d\} \subset \{a, b, d\}, X \Rightarrow ji - scl(\{a, b, d\}) = X \not\subset \{a, b, d\}$

$$ij \text{ SGC}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X, \emptyset\}$$

$$ij \text{ SGO}(X) = \{\{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{a, d\}, \{a, b\}, \{d\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.12 da yer alan α genelleştirilmiş kapalı küme tanımını hatırlayalım.

$$ij \alpha g \text{ kapalı}(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$$

olur. Buna göre

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a, d\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a\}) = \{a, b\} \not\subset \{a\}, \{a, d\}$
- $\{b\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b\}) = \{a, b\} \subset X$
- $\{c\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{c\}) = \{c\} \subset X$
- $\{d\} \subset \{a, d\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{d\}) = \{d\} \subset \{a, d\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, c\}) = X \subset X$
- $\{a, d\} \subset \{a, d\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, d\}) = X \not\subset \{a, d\}$
- $\{b, c\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b, c\}) = X \subset X$
- $\{b, d\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b, d\}) = X \subset X$
- $\{c, d\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{c, d\}) = \{c, d\} \subset X$
- $\{a, b, c\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, b, c\}) = X \subset X$
- $\{a, b, d\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, b, d\}) = X \subset X$
- $\{b, c, d\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b, c, d\}) = X \subset X$
- $\{a, c, d\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, c, d\}) = X \subset X$

$$ij \alpha GC(X) =$$

$$\{\{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, X, \emptyset\}$$

$$ij \alpha GO(X) = \{\{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{d\}, \{c\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.14 da yer alan genelleştirilmiş α kapalı küme tanımını hatırlayalım

$$ij g\alpha \text{ kapalı}(A): A \subset U, U \in ij - \alpha O(X) \Rightarrow ji - \alpha cl(A) \subset U$$

olur. Buna göre

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, d\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a\}) = \{a, b\} \not\subset \{a\}, \{a, d\}, \{a, c, d\}, X$
- $\{b\} \subset \{a, b, d\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b\}) = \{a, b\} \subset \{a, b, d\}, X$
- $\{c\} \subset \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{c\}) = \{c\} \subset \{a, c, d\}, X$
- $\{d\} \subset \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{d\}) = \{d\} \subset \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X$
- $\{a, b\} \subset \{a, b, d\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset \{a, b, d\}, X$
- $\{a, c\} \subset \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, c\}) = X \not\subset \{a, c, d\}$
- $\{a, d\} \subset \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, d\}) = X \not\subset \{a, d\}, \{a, c, d\}, \{a, c, d\}$
- $\{b, c\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b, c\}) = X \subset X$
- $\{b, d\} \subset \{a, b, d\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b, d\}) = X \not\subset \{a, b, d\}$
- $\{c, d\} \subset \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{c, d\}) = \{c, d\} \subset \{a, c, d\}, X$
- $\{a, b, c\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, b, c\}) = X \subset X$
- $\{a, b, d\} \subset \{a, b, d\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, b, d\}) = X \not\subset \{a, b, d\}$
- $\{b, c, d\} \subset X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{b, c, d\}) = X \subset X$
- $\{a, c, d\} \subset \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - \alpha cl(\{a, c, d\}) = X \not\subset \{a, b, d\}$

$$ij \text{ } G\alpha C(X) = \{\{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X, \emptyset\}$$

$$ij \text{ } G\alpha O(X) = \{\{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{a, d\}, \{a, b\}, \{d\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.15 de yer alan genelleştirilmiş yarı ön kapalı küme tanımını hatırlayalım.

$$ij \text{ } gsp \text{ } kapalı(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$$

olur.Buna göre

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a\}, \{a, d\}, X$
- $\{b\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{b\}) = \{b\} \subset X$
- $\{c\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{c\}) = \{c\} \subset X$
- $\{d\} \subset \{a, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{d\}) = \{d\} \subset \{a, d\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset X$
- $\{a, d\} \subset \{a, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a, d\}) = X \not\subset \{a, d\}$
- $\{b, c\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{b, c\}) = X \not\subset \{b, c\}$
- $\{b, d\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{b, d\}) = \{b, d\} \subset X$
- $\{c, d\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{c, d\}) = \{c, d\} \subset X$
- $\{a, b, c\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{a, b, c\}) = \{a, b, c\} \subset X$
- $\{a, b, d\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{a, b, d\}) = X \subset X$
- $\{b, c, d\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{b, c, d\}) = \{b, c, d\} \subset X$
- $\{a, c, d\} \subset X \Rightarrow ji - spcl(\{a, c, d\}) = X \subset X$

$$ij \text{ GSPC}(X) =$$

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, X, \emptyset\}$$

$$ij \text{ GSPO}(X) =$$

$$\{\{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{d\}, \{c\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.16 da yer alan yarı ön genelleştirilmiş kapalı küme tanımını hatırlayalım.

$$ij \text{ spg kapalı}(A): A \subset U, U \in ji - SPO(X) \Rightarrow ji - spcl(A) \subset U$$

olur. Buna göre

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X$

- $\{b\} \subset \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b\}) = \{b\} \subset \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X$
- $\{c\} \subset \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{c\}) = \{c\} \subset \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, X$
- $\{d\} \subset \{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{d\}) = \{d\} \subset \{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, X$
- $\{a, b\} \subset \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a, b\}) = \{b\} \subset \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X$
- $\{a, c\} \subset \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a, c\}) = \{a, c\} \subset \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, X$
- $\{a, d\} \subset \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a, d\}) = X \not\subset \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}$
- $\{b, c\} \subset \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X$
- $\{b, d\} \subset \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b, d\}) = \{b, d\} \subset \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X$
- $\{c, d\} \subset \{c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{c, d\}) = \{c, d\} \subset \{c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, X$
- $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a, b, c\}) = \{a, b, c\} \subset \{a, b, c\}, X$
- $\{a, b, d\} \subset \{a, b, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a, b, d\}) = X \not\subset \{a, b, d\}$
- $\{b, c, d\} \subset \{b, c, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{b, c, d\}) = \{b, c, d\} \subset \{b, c, d\}, X$
- $\{a, c, d\} \subset \{a, c, d\}, X \Rightarrow ji - spcl(\{a, c, d\}) = X \not\subset \{a, c, d\}$

$$ij\ SPGC(X) =$$

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X, \emptyset\}$$

$$ij\ SPGO(X) =$$

$$\{\{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{d\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.17 de yer alan genelleştirilmiş ön kapalı küme tanımını hatırlayalım.

$$ij \text{ gp kapalı}(A): A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - pcl(A) \subset U$$

olur. Buna göre

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a, d\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{a\}) = \{a, b\} \not\subset \{a\}, \{a, d\}$
- $\{b\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{b\}) = \{b\} \subset X$
- $\{c\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{c\}) = \{c\} \subset X$
- $\{d\} \subset \{a, d\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{d\}) = \{d\} \subset \{a, d\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{a, b\}) = \{a, b\} \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{a, c\}) = \{a, b, c\} \subset X$
- $\{a, d\} \subset \{a, d\}, X \Rightarrow ji - pcl(\{a, d\}) = X \not\subset \{a, d\}$
- $\{b, c\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset X$
- $\{b, d\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{b, d\}) = \{b, d\} \subset X$
- $\{c, d\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{c, d\}) = \{c, d\} \subset X$
- $\{a, b, c\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{a, b, c\}) = \{a, b, c\} \subset X$
- $\{a, b, d\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{a, b, d\}) = X \subset X$
- $\{a, c, d\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{a, c, d\}) = X \subset X$
- $\{b, c, d\} \subset X \Rightarrow ji - pcl(\{b, c, d\}) = \{b, c, d\} \subset X$

$$ij \text{ GPC}(X) =$$

$$\{\{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X, \emptyset\}$$

$$ij \text{ GPO}(X) =$$

$$\{\{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{d\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset, X\}$$

olarak bulunur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Ön ve Yarı Arakesit Açık

Tanım 4.1.1 : (X, τ_i, τ_j) bir ikili topolojik uzay olsun. $A \subset X$ kümesinin i . ve j . topolojiye göre kapanışlarının arakesitinin i . topolojiye göre içi eğer A 'nın üst kümesi oluyorsa bu kümeye ij ön arakesit açık küme (ij pre intersection open) olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle

$$ij\ pio(A): A \subset \tau_i - \text{int}[\tau_i - cl(A) \cap \tau_j - cl(A)]$$

şeklinde tanımlanır.

(X, τ_i, τ_j) nin ij ön arakesit açık kümesinin tümleyeni ij ön arakesit kapalı (ij pre intersection closed) kümedir.

Tüm ij ön arakesit açık ve ij ön arakesit kapalı kümeler ailesini $ij P\dot{I}O(X)$ ve $ij P\dot{I}C(X)$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.1.2 : (X, τ_i, τ_j) bir ikili topolojik uzay olsun. $A \subset X$ kümesinin i . ve j . topolojiye göre kapanışlarının birleşimlerinin i . topolojiye göre içi A 'nın üst kümesi oluyorsa bu küme ij ön birleşim açık (ij pre union open) kümesi olarak adlandırılır. Bu küme kısaca ij PUO ile gösterilir ve

$$ij\ puo(A)=A \subset \tau_i - \text{int}[\tau_i - cl(A) \cup \tau_j - cl(A)]$$

şeklinde tanımlanır.

(X, τ_i, τ_j) nin ij ön birleşim açık kümesinin tümleyeni ij ön birleşim kapalı (ij pre union closed) kümedir.

Tüm ij ön birleşim açık ve ij ön birleşim kapalı kümeler ailesini $ij\ PUC(X)$ ve $ij\ PUC(X)$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.1.3 : (X, τ_i, τ_j) bir ikili topolojik uzay olsun. $A \subset X$ kümesinin i . ve j . topolojiye göre içlerinin arakesitinin i . topolojiye göre kapanışı eğer A 'nın üst kümesi oluyorsa bu küme ij yarı arakesit açık (ij semi intersection open) kümesi olarak adlandırılır. Bu küme kısaca $ij\ SIO(X)$ ile gösterilir ve

$$ij\ sio(A) = A \subset \tau_i - cl[\tau_i - int(A) \cap \tau_j - int(A)]$$

şeklinde tanımlanır.

(X, τ_1, τ_2) nin ij yarı arakesit-açık alt kümesinin tümleyeni ij yarı arakesit kapalı (ij semi intersection closed) kümedir.

Tüm ij yarı arakesit açık ve ij yarı arakesit kapalı kümeler ailesini $ij\ SIO(X)$ ve $ij\ SIO(X)$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.1.4 : (X, τ_i, τ_j) bir ikili topolojik uzay olsun. $A \subset X$ kümesinin i . ve j . topolojiye göre içlerinin birleşiminin i . topolojiye göre kapanışı eğer A 'nın üst kümesi oluyorsa bu küme ij yarı birleşim açık (ij semi union open) kümesi olarak adlandırılır. Bu küme kısaca $ij\ SUO(X)$ ile gösterilir ve

$$ij\ suo(A) = A \subset \tau_i - cl[\tau_i - int(A) \cup \tau_j - int(A)]$$

şeklinde tanımlanır.

(X, τ_i, τ_j) nin ij yarı birleşim açık alt kümesinin tümleyeni ij yarı birleşim kapalı (ij semi union closed) kümedir.

Tüm ij yarı birleşim açık ve ij yarı birleşim kapalı kümeler ailesini $ij\ SUO(X)$ ve $ij\ SUC(X)$ ile göstereceğiz.

4.2. Ön ve Yarı Arakesit Kapanış

Tanım 4.2.1 : (X, τ_i, τ_j) herhangi bir ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ kümesi için A yı kapsayan ij ön arakesit kapalıdaki kapalıların arakesiti ij ön arakesit kapanış (ij pre intersection closure) kümesini oluşturur. Bu küme kısaca $ij\ picl(A)$ ile gösterilir ve

$$ij\ picl(A) : \cap \{F \subset X : F \in ij - P\dot{I}C(X), A \subseteq F\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij\ picl(A)$ kümeler ailesini $ij\ P\dot{I}CL(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.2.2 : (X, τ_i, τ_j) herhangi bir ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ kümesi için A yı kapsayan ij ön birleşim kapalıdaki kapalıların arakesiti ij ön birleşim kapanış (ij pre union closure) kümesini oluşturur. Bu küme kısaca $ij\ pucl$ ile gösterilir ve

$$ij\ pucl(A) : \cap \{F \subset X : F \in ij - PUC(X), A \subseteq F\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij\ pucl(A)$ kümeler ailesini $ij\ PUCL(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.2.3 : (X, τ_i, τ_j) herhangi bir ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ kümesi için A yı kapsayan ij yarı arakesit kapalı kümelerinin arakesiti ij yarı arakesit kapanış (ij semi intersection closure) kümesini oluşturur. Bu küme kısaca $ij\ sicl$ ile gösterilir ve

$$ij - sicl(A) : \cap \{F \subset X : F \in ij - S\dot{I}C(X), A \subseteq F\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij\ sicl(A)$ kümeler ailesini $ij - S\dot{I}CL(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.2.4 : (X, τ_i, τ_j) herhangi bir ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ kümesi için A yı kapsayan ij yarı birleşim kapalıların arakesiti ij yarı birleşim kapanış (ij semi union closure) kümesini oluşturur. Bu küme kısaca $ij\ sucl$ ile gösterilir ve

$$ij\ sucl(A) : \cap \{F \subset X : F \in ij - SUC(X), A \subseteq F\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij\ sucl(A)$ kümeler ailesini $ij\ SUCL(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.2.5 : (X, τ_i, τ_j) herhangi ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ kümesi için A yı kapsayan ij birleşim ji ön arakesit kapalı daki kapalıların arakesiti ij birleşim ji ön arakesit kapanış (ij union ji pre intersection closure) kümesini oluşturur. Bu küme kısaca $ij \cup ji\ picl$ ile gösterilir ve

$$ij \cup ji - picl(A) : \cap \{F \subset X : F \in ij \cup ji - P\dot{I}C(X), A \subseteq F\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij \cup ji\ picl(A)$ kümeler ailesini $ij \cup ji\ P\dot{I}CL(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.2.6 : (X, τ_i, τ_j) herhangi bir ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ kümesi için A yı kapsayan ij arakesit ji ön arakesit kapalı daki kapalıların arakesiti ij arakesit ji ön arakesit kapanış (ij intersection ji pre intersection closure) kümesini oluşturur. Bu küme kısaca $ij \cap ji\ picl$ ile gösterilir ve

$$ij \cap ji\ picl(A) : \cap \{F \subset X : F \in ij \cap ji - P\dot{I}C(X), A \subseteq F\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij \cap ji \text{ picl}(A)$ kümeler ailesini $ij \cap ji \text{ PİCL}(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.2.7 : (X, τ_i, τ_j) herhangi bir ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ kümesi için A yı kapsayan ij birleşim ji ön birleşim kapalı daki kapalıların arakesiti ij birleşim ji ön birleşim kapanış (ij union ji pre union closure) kümesini oluşturur. Bu küme kısaca $ij \cup ji \text{ pucl}$ ile gösterilir ve

$$ij \cup ji \text{ pucl}(A) : \cap \{F \subset X : F \in ij \cup ji - PUC(X), A \subseteq F\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij \cup ji \text{ pucl}(A)$ kümeler ailesini $ij \cup ji \text{ PUCL}(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.2.8 : (X, τ_i, τ_j) herhangi bir ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ kümesi için A yı kapsayan ij arakesit ji ön birleşim kapalı daki kapalıların arakesiti ij arakesit ji ön birleşim kapanış (ij intersection ji pre union closure) kümesini oluşturur. Bu küme kısaca $ij \cap ji \text{ pucl}$ ile gösterilir ve

$$ij \cap ji \text{ pucl}(A) : \cap \{F \subset X : F \in ij \cap ji - PUC(X), A \subseteq F\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij \cap ji \text{ pucl}(A)$ kümeler ailesini $ij \cap ji \text{ PUCL}(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.2.9 : (X, τ_i, τ_j) herhangi bir ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ kümesi için A yı kapsayan ij birleşim ji yarı arakesit birleşim kapalı daki kapalıların arakesiti ij birleşim ji yarı arakesit kapanış (ij union ji semi intersection closure) kümesini oluşturur. Bu küme kısaca $ij \cup ji \text{ sicl}$ ile gösterilir ve

$$ij \cup ji \text{ sicl}(A): \cap \{F \subset X: F \in ij \cup ji - \text{SIC}(X), A \subseteq F\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij \cup ji \text{ sicl}(A)$ kümeler ailesini $ij \cup ji \text{ SICL}(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.2.10 : (X, τ_i, τ_j) herhangi bir ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ kümesi için A yı kapsayan ij arakesit ji yarı arakesit kapalıdaki kapalıların arakesiti ij arakesit ji yarı arakesit kapanış kümesini oluşturur. Bu küme kısaca $ij \cap ji \text{ sicl}$ ile gösterilir ve

$$ij \cap ji \text{ sicl}(A): \cap \{F \subset X: F \in ij \cap ji - \text{SIC}(X), A \subseteq F\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij \cap ji \text{ sicl}(A)$ kümeler ailesini $ij \cap ji \text{ SICL}(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.2.11 : (X, τ_i, τ_j) herhangi bir ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ kümesi için A yı kapsayan ij birleşim ji yarı birleşim kapalıdaki kapalıların arakesiti ij birleşim ji yarı birleşim kapanış kümesini oluşturur. Bu küme kısaca $ij \cup ji \text{ sucl}$ ile gösterilir ve

$$ij \cup ji \text{ sucl}(A): \cap \{F \subset X: F \in ij \cup ji - \text{SUC}(X), A \subseteq F\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij \cup ji \text{ sucl}(A)$ kümeler ailesini $ij \cup ji \text{ SUCL}(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.2.12 : (X, τ_i, τ_j) herhangi bir ikili topolojik uzay ve $A \subset X$ kümesi için A yı kapsayan ij arakesit ji yarı birleşim kapalıdaki kapalıların arakesiti ij arakesit ji yarı birleşim kapanış kümesini oluşturur. Bu küme kısaca $ij \cap ji \text{ sucl}$ ile gösterilir ve

$$ij \cap ji \text{ sucl}(A): \cap \{F \subset X: F \in ij \cap ji - \text{SUC}(X), A \subseteq F\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij \cap ji \text{ sucl}(A)$ kümeler ailesini $ij \cap ji \text{ SUCL}(X)$ şeklinde göstereceğiz.

4.3. Genelleştirilmiş Yarı Açık Ve Genelleştirilmiş Ön Açık

Tanım 4.3.1 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. $A \subset X$ kümesi için A yı içeren τ_i deki açıkclar j nin kapanışının üst kümesini oluşturuyorsa bu kümeye ij g kapalı (ij g closed) kümesi denir. Bu küme kısaca ij gc ile gösterilir ve

$$ij \text{ gc}(A): \{A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow j\text{-cl}(A) \subset U\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij \text{ gc}(A)$ kümeler ailesini $ij \text{ GC}(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.3.2 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. $A \subset X$ kümesi için A yı içeren τ_i deki açıkclar ji yarı arakesit kapanış kümesinin kapanışının üst kümesini oluşturuyorsa bu kümeye ij g yarı arakesit kapalı (ij g semi closed) kümesi denir. Bu küme kısaca ij gsic ile gösterilir ve

$$ij \text{ gsic}(A): \{A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji\text{-sicl}(A) \subset U\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij \text{ gsic}(A)$ kümeler ailesini $ij \text{ GSIC}(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.3.3 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. $A \subset X$ kümesi için A yı içeren τ_i deki açıkclar ji yarı birleşim kapanış kümesinin üst kümesini oluşturuyorsa bu kümeye ij g yarı birleşim kapalı (ij g semi union closed) kümesi denir. Bu küme kısaca ij gsuc ile gösterilir ve

$$ij\ gsuc(A): \{A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji\text{-}sucl(A) \subset U\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij\ gsuc(A)$ kümeler ailesini $ij\ GSUC(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.3.4 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. $A \subset X$ kümesi için A yı içeren yarı arakesit açık kümesindeki açıklar ji yarı arakesit kapanış kümesinin üst kümesini oluşturuyorsa bu kümeye ij yarı arakesit g kapalı (ij semi intersection g closed) kümesi denir. Bu küme kısaca ij sigc ile gösterilir ve

$$ij\ sigc(A): \{A \subset U, U \in ij - SIO \Rightarrow ji\text{-}sicl(A) \subset U\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij\ sigc(A)$ kümeler ailesini $ij\ SIGC(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.3.5 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. $A \subset X$ kümesi için A yı içeren ij yarı birleşim açık kümesindeki açıklar ji yarı birleşim kapanış kümesinin üst kümesini oluşturuyorsa bu kümeye ij yarı birleşim g kapalı (ij semi union g kapalı) kümesi denir. Bu küme kısaca $ij\ sugc$ ile gösterilir ve

$$ij\ sugc(A): \{A \subset U, U \in ij - SUO \Rightarrow ji\text{-}sucl(A) \subset U\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij\ sugc(A)$ kümeler ailesini $ij\ SUGC(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.3.6 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. $A \subset X$ kümesi için A yı içeren τ_i deki açıklar ji ön arakesit kapanış kümesinin üst kümesini oluşturuyorsa bu kümeye

ij g ön arakesit kapalı (ij g pre intersection closed) kümesi denir. Bu küme kısaca ij gpi ile gösterilir ve

$$ij\ gpic(A): \{A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji\text{-}picl(A) \subset U\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij\ gpic(A)$ kümeler ailesini $ij\ GPIC(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.3.7 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzay olsun. $A \subset X$ kümesi için A yı içeren τ_i deki açıkklar ji ön birleşim kapanış (ij pre union closure) kümesinin üst kümesini oluşturuyorsa bu kümeye ij g ön birleşim (ij g pre union) kümesi denir. Bu küme kısaca $ij\ gpiuc$ ile gösterilir ve

$$ij\ gpuc(A): \{A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji\text{-}pucl(A) \subset U\}$$

şeklinde tanımlanır.

$ij\ gpuc(A)$ kümeler ailesini $ij\ GPUC(X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.3.1 Tanım 4.3.2 Tanım 4.3.3 Tanım 4.3.4 Tanım 4.3.5 Tanım 4.3.6
Tanım 4.3.7 de bulunan kümelerin tümleyenleri alınırsa açık kümeler elde edilir.

Teorem 4.3.8 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayında her j kapalı küme ij -g kapalıdır.

İspat : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayı ve j kapalı bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. $A \subset U$ ve U kümesi τ_i de açık olsun. A kümesi kapalı olduğundan $j\ cl(A) = A \subset U$ olur. O halde ij g kapalıdır.

Teorem 4.3.9 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayında her ij g kapalı küme ij g ön arakesit kapalıdır.

İspat: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayı ve j kapalı bir ij g kapalı $A \subset X$ alt kümesi verilsin. 4.3.1 Tanım gereğince $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow j - cl(A) \subset U$ olur. Buradan

$$A \subset [\tau_j - int[\tau_j - cl(A) \cap \tau_i - cl(A)]]$$

Kümesinin tümleyeni $\dot{P}C(X)$ kapalı olduğundan buradan alacağımız kapalıların arakesitide kapalıdır. O halde 4.2.1 Tanım sağlanır. Yani

$$ji \dot{P}CL(A) = \cap \{F \subset X: F \in ji - \dot{P}C(X), A \subseteq F\}$$

Olur. Buradan $ji \dot{P}CL(A) \subset U$ olur. İspat tamamlanır.

Teorem 4.3.10 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayında her ij gpi kapalı küme ij gpu kapalıdır.

İspat: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayı ve bir ij gpi kapalı, $A \subset X$ alt kümesi verilsin. 4.3.6 Tanım gereğince

$$A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji - picl(A) \subset U$$

olur.

$$ji picl(A) \subset ji pucl(A)$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. 4.1.1 Tanım dan

$$ji \dot{P}IO(X) = A \subset \tau_j - int[\tau_j - cl(A) \cap \tau_i - cl(A)]$$

olur. Buradan

$$\tau_j - \text{int}[\tau_j - cl(A) \cap \tau_i - cl(A)] \subset \tau_j - \text{int}[\tau_j - cl(A) \cup \tau_i - cl(A)]$$

bu kümeler vasıtasıyla sırasıyla $ji \dot{P}IC(X)$ ve $ji PUC(X)$ kümeleri elde edilir. 4.2.1 Tanım ve 4.2.2 Tanım gereğince bu kümelerden alacağımız elemanların arakesiti $ji \dot{P}ICL(A)$ ve $ji\text{-}PUCL(A)$ kümelerini oluşturacağından

$$ji \dot{P}ICL(A) \subset ji PUCL(A)$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.11 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayında her j kapalı küme ji yarı arakesit kapalı kümedir.

İspat: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayı ve bir $j - \text{kapalı } A \subset X$ alt kümesi verilsin. $A \subset U$ ve U kümesi $\tau_j - cl[\tau_j - \text{int}(A) \cap \tau_i - \text{int}(A)]$ da açık olsun. A kümesi ij kapalı olduğundan $\tau_j - cl[\tau_j - \text{int}(A) \cap \tau_i - \text{int}(A)]$ kümesi vasıtasıyla elde edilen $ji\text{-}\dot{S}IC(X)$ kümesi $A \subset ji - \dot{S}IC(X)$ olur. Bu durumda A kümesi yarı arakesit kapalıdır.

Teorem 4.3.12 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayında her ji yarı arakesit kapalı küme ji yarı birleşim kapalı kümedir.

İspat: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayı ve bir $ji - \dot{S}IC \ A \subset X$ alt kümesi verilsin. 4.1.3. Tanım ve 4.1.4. Tanım gereğince

$$A \subset [\tau_j - cl[\tau_j - \text{int}(A) \cap \tau_i - \text{int}(A)]] \subset \tau_j - cl[\tau_j - \text{int}(A) \cup \tau_i - \text{int}(A)]$$

olur. Bu kümeler vasıtasıyla sırasıyla $ji \dot{S}IC(X)$ ve $jiSUC(X)$ kümeleri elde edilir. Buradan

$$ji \dot{S}IC(X) \subset jiSUC(X)$$

olur. O halde her ji yarı arakesit küme ji yarı birleşim kümedir.

Teorem 4.3.13 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayında her ji yarı arakesit kapalı küme ij yarı arakesit g kapalı kümedir.

İspat: 4.1.3. Tanım ve 4.3.4. Tanımları göz önüne alınırsa ispat açıktır.

Teorem 4.3.14 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayında her ji yarı birleşim kapalı küme ij yarı birleşim g kapalı kümedir.

İspat: 4.1.4. Tanım ve 4.3.5. Tanımları göz önüne alınırsa ispat açıktır.

Teorem 4.3.15 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayında her ij yarı arakesit g kapalı küme ij yarı birleşim g kapalı kümedir.

İspat: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayı ve bir ij $\dot{S}IC$ $A \subset X$ alt kümesi verilsin. 4.3.4. Tanım gereğince

$$A \subset U, U \in ij \dot{S}IO(X) \Rightarrow ji \dot{sicl}(A) \subset U$$

Olur. $U \in ij \dot{S}IO(X)$ olup $ij \dot{S}IO(X) \subset ij \dot{SUO}(X)$ olduğundan $U \subset ij \dot{SUO}(X)$ dir. $ji \dot{sicl}(A) \subset jisucL(A)$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. 4.2.3. Tanım gereğince

$$ji \dot{S}ICL(A) = \cap \{F \subset X: F \in ji \dot{S}IC(X), A \subseteq F\}$$

olup 4.1.3. Tanımından

$$ji \dot{S}IC(X) = A \subset \tau_j - cl[\tau_j - int(A) \cap \tau_i - int(A)]$$

Olur. Buradan

$$\tau_j - cl[\tau_j - int(A) \cap \tau_i - int(A)] \subset \tau_j - cl[\tau_j - int(A) \cup \tau_i - int(A)]$$

Olup bu kümeler vasıtasıyla sırasıyla elde edilen ji -yarı arakesit kapalı ve ji -yarı birleşim kapalı olur. Dolayısıyla $ji \dot{S}IC(X) \subset ji \dot{S}UC(X)$ olur. Bu kümelerden alacağımız elemanların arakesiti de $ji \dot{S}ICL(A)$ ve $ji \dot{S}UCL(A)$ kümelerini oluşturacağından

$$ji \dot{S}ICL(X) \subset ji \dot{S}UCL(X)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.16 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayında her ij yarı arakesit g kapalı küme ij g yarı arakesit kapalı kümedir.

İspat: 4.3.4. Tanım ve 4.3.2. Tanımları göz önüne alınırsa ispat açıktır.

Teorem 4.3.17 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayında her ij yarı birleşim g kapalı küme ij g yarı birleşim kapalı kümedir.

İspat: 4.3.5. Tanım ve 4.3.3. Tanımları göz önüne alınırsa ispat açıktır.

Teorem 4.3.18 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayında her ij g kapalı küme ij g yarı arakesit kapalı kümedir.

İspat: 4.3.1. Tanım ve 4.3.2. Tanımları göz önüne alınırsa ispat açıktır.

Teorem 4.3.19 : (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayında her ji g yarı arakesit kapalı küme ji g yarı birleşim kapalı kümedir.

İspat: (X, τ_i, τ_j) ikili topolojik uzayı ve bir ji GSİC , $A \subset X$ alt kümesi verilsin.4.3.2.Tanım gereğince

$$A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji\ sicl(A) \subset U$$

dır.

$$ji\ picl(A) \subset ji\ pucl(A)$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. 4.2.3. Tanım dan

$$ji\ SİCL(A) = \cap \{F \subset X: F \in ji - SİC(X), A \subseteq F\}$$

olur ve 4.1.3. Tanım dan

$$ji\ SİC(X) = A \subset \tau_j - cl[\tau_j - int(A) \cap \tau_i - int(A)]$$

olur. Buradan

$$\tau_j - cl[\tau_j - int(A) \cap \tau_i - int(A)] \subset \tau_j - cl[\tau_j - int(A) \cup \tau_i - int(A)]$$

olup bu kümeler vasıtasıyla sırasıyla elde edilen ji-yarı arakesit kapalı ve ji- yarı birleşim kapalı olur. Dolayısıyla

$$ji\ SİC(X) \subset ji\ SUC(X)$$

olur.Bu kümelerden alacağımız elemanların arakesiti de $ji\ SİCL(A)$ ve $ji\ SUCL(A)$ kümelerini oluşturacağından

$$ji\ SİCL(X) \subset ji\ SUCL(X)$$

Çizelge 4.1. ij -ön arakesit açık kümelerin elde edilişi

$\tau_1 - cl(A)$	$\tau_2 - cl(A)$	$\tau_1 - cl(A) \cap \tau_2 - cl(A)$	$\tau_i - int[\tau_i - cl(A) \cap \tau_j - cl(A)]$
$\tau_1 - cl(\emptyset) = \emptyset$	$\tau_2 - cl(\emptyset) = \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\tau_1 - cl(X) = X$	$\tau_2 - cl(X) = X$	X	X
$\tau_1 - cl(\{a\}) = \{a\}$	$\tau_2 - cl(\{a\}) = X$	$\{a\}$	$\{a\}$
$\tau_1 - cl(\{b\}) = \{b, c\}$	$\tau_2 - cl(\{b\}) = \{b\}$	$\{b\}$	$\emptyset$
$\tau_1 - cl(\{c\}) = \{b, c\}$	$\tau_2 - cl(\{c\}) = \{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$
$\tau_1 - cl(\{a, b\}) = X$	$\tau_2 - cl(\{a, b\}) = X$	X	X
$\tau_1 - cl(\{a, c\}) = X$	$\tau_2 - cl(\{a, c\}) = X$	X	X
$\tau_1 - cl(\{b, c\}) = \{b, c\}$	$\tau_2 - cl(\{b, c\}) = \{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$

$$ij \text{ } \dot{P}iO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ij \text{ } \dot{P}iC(X) = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}\}$$

4.1.2 Tanım da ifade edilen ij -ön birleşim açık küme tanımını hatırlayalım.

ij ön birleşim açık: $A \subset \tau_i - \text{int}[\tau_i - \text{cl}(A) \cup \tau_j - \text{cl}(A)]$

Çizelge 4.2. ij ön birleşim açık kümelerin elde edilişi

$\tau_1 - \text{cl}(A)$	$\tau_2 - \text{cl}(A)$	$\tau_1 - \text{cl}(A) \cup \tau_2 - \text{cl}(A)$	$\tau_i - \text{int}[\tau_i - \text{cl}(A) \cup \tau_j - \text{cl}(A)]$
$\tau_1 - \text{cl}(\emptyset) = \emptyset$	$\tau_2 - \text{cl}(\emptyset) = \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\tau_1 - \text{cl}(X) = X$	$\tau_2 - \text{cl}(X) = X$	X	X
$\tau_1 - \text{cl}(\{a\}) = \{a\}$	$\tau_2 - \text{cl}(\{a\}) = X$	X	X
$\tau_1 - \text{cl}(\{b\}) = \{b, c\}$	$\tau_2 - \text{cl}(\{b\}) = \{b\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$
$\tau_1 - \text{cl}(\{c\}) = \{b, c\}$	$\tau_2 - \text{cl}(\{c\}) = \{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$
$\tau_1 - \text{cl}(\{a, b\}) = X$	$\tau_2 - \text{cl}(\{a, b\}) = X$	X	X
$\tau_1 - \text{cl}(\{a, c\}) = X$	$\tau_2 - \text{cl}(\{a, c\}) = X$	X	X
$\tau_1 - \text{cl}(\{b, c\}) = \{b, c\}$	$\tau_2 - \text{cl}(\{b, c\}) = \{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$

$$ij - PUO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ij - PUC(X) = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}\}$$

4.1.3 Tanım da ifade edilen ij -yarı arakesit açık küme tanımını hatırlayalım.

$$ij\text{-yarı arakesit açık: } A \subset \tau_i - cl[\tau_i - int(A) \cap \tau_j - int(A)]$$

Çizelge 4.3: ij - yarı arakesit açık kümelerin elde edilişi

$\tau_1 - int(A)$	$\tau_2 - int(A)$	$\tau_1 - int(A) \cap \tau_2 - int(A)$	$\tau_1 - cl[\tau_1 - int(A) \cap \tau_2 - int(A)]$
$\tau_1 - int(\emptyset) = \emptyset$	$\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\tau_1 - int(X) = X$	$\tau_2 - int(X) = X$	X	X
$\tau_1 - int(\{a\}) = \{a\}$	$\tau_2 - int(\{a\}) = \{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$
$\tau_1 - int(\{b\}) = \emptyset$	$\tau_2 - int(\{b\}) = \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\tau_1 - int(\{c\}) = \emptyset$	$\tau_2 - int(\{c\}) = \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\tau_1 - int(\{a, b\}) = \{a\}$	$\tau_2 - int(\{a, b\}) = \{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$
$\tau_1 - int(\{a, c\}) = \{a\}$	$\tau_2 - int(\{a, c\}) = \{a, c\}$	$\{a\}$	$\{a\}$
$\tau_1 - int(\{b, c\}) = \{b, c\}$	$\tau_2 - int(\{b, c\}) = \emptyset$	$\emptyset$	$\{b, c\}$

$$ij - SiO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}\}$$

$$ij - SiC(X) = \{X, \emptyset, \{b, c\}\}$$

4.1.4 Tanım da ifade edilen ij -yarı birleşim açık küme tanımını hatırlayalım.

$$ij\text{-yarı birleşim-açık: } A \subset \tau_i - cl[\tau_i - int(A) \cup \tau_j - int(A)]$$

Çizelge 4.4. ij - yarı birleşim açık kümelerin elde edilişi

$\tau_1 - int(A)$	$\tau_2 - int(A)$	$\tau_1 - int(A) \cup \tau_2 - int(A)$	$\tau_1 - cl[\tau_1 - int(A) \cup \tau_2 - int(A)]$
$\tau_1 - int(\emptyset) = \emptyset$	$\tau_2 - int(\emptyset) = \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\tau_1 - int(X) = X$	$\tau_2 - int(X) = X$	X	X
$\tau_1 - int(\{a\}) = \{a\}$	$\tau_2 - int(\{a\}) = X$	$\{a\}$	X
$\tau_1 - int(\{b\}) = \{b, c\}$	$\tau_2 - int(\{b\}) = \{b\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\tau_1 - int(\{c\}) = \{b, c\}$	$\tau_2 - int(\{c\}) = \{b, c\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\tau_1 - int(\{a, b\}) = X$	$\tau_2 - int(\{a, b\}) = X$	$\{a\}$	$\{a\}$
$\tau_1 - int(\{a, c\}) = X$	$\tau_2 - int(\{a, c\}) = X$	$\{a, c\}$	X
$\tau_1 - int(\{b, c\}) = \{b, c\}$	$\tau_2 - int(\{b, c\}) = \{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$

$$ij - SUO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ij - SUC(X) = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{b\}, \{a\}\}$$

4.2.1 Tanım da ifade edilen ij -ön arakesit kapanış kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij - picl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ij - PIC(X), A \subseteq F\}$$

- $pac l(\emptyset) = \emptyset$
- $pac l(X) = X$
- $pac l(\{a\}) = X \cap \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}$
- $pac l(\{b\}) = X \cap \{b\} \cap \{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$
- $pac l(\{c\}) = X \cap \{c\} \cap \{b, c\} = \{c\}$
- $pac l(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $pac l(\{a, c\}) = X = X$
- $pac l(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$

$$ij-PICL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

Benzer şekilde $ji-picl(A) = \cap F \subset X : F \in ji - PIC(X), A \subseteq F$ olup

- $pac l(\emptyset) = \emptyset$
- $pac l(X) = X$
- $pac l(\{a\}) = X$
- $pac l(\{b\}) = X \cap \{b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$
- $pac l(\{c\}) = X \cap \{c\} \cap \{b, c\} = \{c\}$
- $pac l(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $pac l(\{a, c\}) = X$
- $pac l(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$

$$ji-PICL(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$$

olur.

Tanım 4.2.2 de ifade edilen ij -ön arakesit kapanış kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij-pucl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ij - PCC(X), A \subseteq F\}$$

- $pucl(\emptyset) = \emptyset$
- $pucl(X) = X$
- $pucl(\{a\}) = X \cap \{a\} \cap \{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$
- $pucl(\{b\}) = X \cap \{b\} \cap \{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$
- $pucl(\{c\}) = X \cap \{c\} \cap \{a, c\} \cap \{b, c\} = \{c\}$
- $pucl(\{a, b\}) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$
- $pucl(\{a, c\}) = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$
- $pucl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$

$$ij - PUCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

Benzer şekilde $ji - pucl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ji - PCC(X), A \subseteq F\}$

- $pucl(\emptyset) = \emptyset$
- $pucl(X) = X$
- $pucl(\{a\}) = X$
- $pucl(\{b\}) = X \cap \{b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$
- $pucl(\{c\}) = X \cap \{c\} \cap \{b, c\} = \{c\}$
- $pucl(\{a, b\}) = X$
- $pucl(\{a, c\}) = X$
- $pucl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$

$$ji-PUCL(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\} \text{ olur.}$$

Tanım 4.2.3 de ifade edilen *ij*-yarı arakesit kapanış kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij-sicl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ij - \dot{S}IC(X), A \subseteq F\}$$

- $sicl(\emptyset) = \emptyset$
- $sicl(X) = X$
- $sicl(\{a\}) = X$
- $sicl(\{b\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $sicl(\{c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $sicl(\{a, b\}) = X$
- $sicl(\{a, c\}) = X$
- $sicl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$

$$ij-\dot{S}ICL(X) = \{X, \emptyset, \{b, c\}\}$$

Benzer şekilde $ji-sicl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ji - \dot{S}IC(X), A \subseteq F\}$

- $sicl(\emptyset) = \emptyset$
- $sicl(X) = X$
- $sicl(\{a\}) = X$
- $sicl(\{b\}) = X \cap \{b, c\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $sicl(\{c\}) = X \cap \{c\} \cap \{b, \} = \{c\}$
- $sicl(\{a, b\}) = X$
- $sicl(\{a, c\}) = X$
- $sicl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$

$$ji-\dot{S}ICL(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\} \text{ olur.}$$

Tanım 4.2.4 de ifade edilen *ij* -yarı birleşim kapanış kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij - sucl(A) = \cap \{F \subset X : F \in ij - SUC(X), A \subseteq F\}$$

- $sucl(\emptyset) = \emptyset$
- $sucl(X) = X$
- $sucl(\{a\}) = X \cap \{a\} = \{a\}$
- $sucl(\{b\}) = X \cap \{b, c\} \cap \{b\} = \{b, c\}$
- $sucl(\{c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$
- $sucl(\{a, b\}) = X$
- $sucl(\{a, c\}) = X$
- $scl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$

$$ij - SUCL(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$$

$$\text{Benzer şekilde } ji - SUCL = \cap \{F \subset X : F \in ji - SCC(X), A \subseteq F\}$$

- $sucl(\emptyset) = \emptyset$
- $sucl(X) = X$
- $sucl(\{a\}) = X \cap \{a\} = \{a\}$
- $sucl(\{b\}) = X \cap \{b, c\} \cap \{b\} = \{b\}$
- $sucl(\{c\}) = X \cap \{c\} \cap \{b, c\} = \{c\}$
- $sucl(\{a, b\}) = X$
- $sucl(\{a, c\}) = X$
- $scl(\{b, c\}) = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$

$$ji - SUCL = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\} \text{ olur.}$$

Tanım 4.2.5 de ifade edilen ij birleşim ji -ön arakesit kapanış kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij \cup ji - P\dot{I}CL = \cap \{F \subset X : F \in ij \cup ji - P\dot{I}C(X), A \subseteq F\}$$

$$ij \cup ji-P\dot{I}CL = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\} \text{ olur.}$$

Tanım 4.2.6 da ifade edilen ij arakesit ji -ön arakesit kapanış kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij \cap ji - P\dot{I}CL = \{F \subset X: F \in ij \cap ji - P\dot{I}C(X), A \subseteq F\}$$

$$ij \cap ji-P\dot{I}CL = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\} \text{ olur.}$$

Tanım 4.2.7 de ifade edilen ij -birleşim ji ön birleşim kapanış kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij \cup ji-PUCL = \{F \subset X: F \in ij \cup ji - PUC(X), A \subseteq F\}$$

$$ij \cup ji-PUCL = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\} \text{ olur.}$$

Tanım 4.2.8 de ifade edilen ij arakesit ji - ön birleşim kapanış kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij \cap ji-PUCL = \{F \subset X: F \in ij \cap ji - PUC(X), A \subseteq F\}$$

$$ij \cap ji-PUCL = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$$

Tanım 4.2.9 de ifade edilen ij -birleşim ji - yarı arakesit kapanış kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij \cup ji-S\dot{I}CL = \{F \subset X: F \in ij \cup ji - S\dot{I}C(X), A \subseteq F\}$$

$$ij \cup ji-S\dot{I}CL = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$$

Tanım 4.2.10 de ifade edilen ij arakesit ji -yarı arakesit kapanış kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij \cap ji\text{-}\dot{S}ICL = \cap \{F \subset X : F \in ij \cap ji - \dot{S}IC(X), A \subseteq F\}$$

$$ij \cap ji\text{-}\dot{S}ICL = \{X, \emptyset, \{b, c\}\}$$

Tanım 4.2.11 de ifade edilen ij birleşim ji -yarı birleşim kapanış kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij \cup ji\text{-}SUCL = \cap \{F \subset X : F \in ij \cup ji - SCC(X), A \subseteq F\}$$

$$ij \cup ji\text{-}SUCL = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$$

Tanım 4.2.12 de ifade edilen ij arakesit ji -yarı birleşim kapanış kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij \cap ji\text{-}SUCL = \cap \{F \subset X : F \in ij \cap ji - SCC(X), A \subseteq F\}$$

$$ij \cap ji\text{-}SUCL = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$$

Tanım 4.3.1 de ifade edilen ij arakesit g kapalı kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij\text{-}g \text{ kapalı } A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow j\text{-cl}(A) \subset U$$

- $\{a\} \subset \{a\}, X \Rightarrow j - cl(\{a\}) = X \not\subset \{a\}$
- $\{b\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow j - cl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow j - cl(\{c\}) = \{b, c\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{a, b\}) = \{X\} \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow j - cl(\{a, c\}) = X \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow j - cl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset \{b, c\}, X$

- $\{X\} \subset X \quad \Rightarrow \quad j - cl(\{X\}) = X \subset X$
- $\{\emptyset\} \subset \emptyset \quad \Rightarrow \quad j - cl(\{\emptyset\}) = \emptyset \subset \emptyset$

$$ij\text{-GC} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ij\text{-GO} = \{X, \emptyset, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

Tanım 4.3.2 de ifade edilen ij arakesit ij - g yarı arakesit kapalı kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij\text{-gsi kapalı } A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji\text{-sicl}(A) \subset U$$

- $\{a\} \subset \{a\}, X \quad \Rightarrow \quad ji - sicl(\{a\}) = X \not\subset \{a\}$
- $\{b\} \subset \{b, c\}, X \quad \Rightarrow \quad ji - sicl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \quad \Rightarrow \quad ji - sicl(\{c\}) = \{c\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \quad \Rightarrow \quad ji - sicl(\{a, b\}) = \{X\} \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \quad \Rightarrow \quad ji - sicl(\{a, c\}) = X \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \quad \Rightarrow \quad ji - sicl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{X\} \subset X \quad \Rightarrow \quad ji - sicl(\{X\}) = X \subset X$
- $\{\emptyset\} \subset \emptyset \quad \Rightarrow \quad ji - sicl(\{\emptyset\}) = \emptyset \subset \emptyset$

$$ij\text{-GSİC} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ij\text{-GSİO} = \{X, \emptyset, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

Tanım 4.3.3 de ifade edilen ij g yarı birleşim kapalı kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij\text{-gsu kapalı } A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow j\text{-sccl}(A) \subset U$$

- $\{a\} \subset \{a\}, X \quad \Rightarrow \quad ji - sucl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a\}, X$

- $\{b\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - sucl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - sucl(\{c\}) = \{c\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - sucl(\{a, b\}) = \{X\} \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - sucl(\{a, c\}) = X \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - sucl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{X\} \subset X \Rightarrow ji - sucl(\{X\}) = X \subset X$
- $\{\emptyset\} \subset \emptyset \Rightarrow ji - sucl(\{\emptyset\}) = \emptyset \subset \emptyset$

$$ij- GSUC = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ij- GSUO = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

Tanım 4.3.4 de ifade edilen ij -yarı arakesit g kapalı kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij- sig \text{ kapalı } A \subset U, U \in ij - SiO \Rightarrow ji-sicl(A) \subset U$$

- $\{a\} \subset \{a\}, X \Rightarrow ji - sicl(\{a\}) = X \not\subset \{a\}, X$
- $\{b\} \subset X \Rightarrow ji - sicl(\{b\}) = \{b\} \subset X$
- $\{c\} \subset X \Rightarrow ji - sicl(\{c\}) = \{c\} \subset X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - sicl(\{a, b\}) = X \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - sicl(\{a, c\}) = X \subset X$
- $\{b, c\} \subset X \Rightarrow ji - sicl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{X\} \subset X \Rightarrow ji - sicl(\{X\}) = X \subset X$
- $\{\emptyset\} \subset \emptyset \Rightarrow ji - sicl(\{\emptyset\}) = \emptyset \subset \emptyset$

$$ij-SiGC = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

$$ij- SiGO = \{X, \emptyset, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

Tanım 4.3.5 de ifade edilen ij -yarı birleşim g kapalı kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij\text{-}sug \text{ kapalı } A \subset U, U \in ij - SCO \Rightarrow ji\text{-}sucl(A) \subset U$$

- $\{a\} \subset \{a\}, \{a, c\}, X \Rightarrow ji - sucl(\{a\}) = \{a\} \subset \{a\}, \{a, c\}, X$
- $\{b\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - sucl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - sucl(\{c\}) = \{c\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - sucl(\{a, b\}) = X \subset X$
- $\{a, c\} \subset \{a, c\}, X \Rightarrow ji - sucl(\{a, c\}) = X \not\subset \{a, c\}$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - sucl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{X\} \subset X \Rightarrow ji - sucl(\{X\}) = X \subset X$
- $\{\emptyset\} \subset \emptyset \Rightarrow ji - sucl(\{\emptyset\}) = \emptyset \subset \emptyset$

$$ij \text{ SUGC} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$ij \text{ SUGO} = \{X, \emptyset, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{b\}, \{c\}\}$$

Tanım 4.3.6 da ifade edilen ij -g ön arakesit kapalı kümesinin tanımını hatırlayalım.

$$ij\text{-}gpi \text{ kapalı } A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji\text{-}picl(A) \subset U$$

- $\{a\} \subset \{a\}, X \Rightarrow ji - picl(\{a\}) = X \not\subset \{a\}$
- $\{b\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - picl(\{b\}) = \{b\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - picl(\{c\}) = \{c\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji - picl(\{a, b\}) = X \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji - picl(\{a, c\}) = X \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji - picl(\{b, c\}) = \{b, c\} \subset \{b, c\}, X$
- $\{X\} \subset X \Rightarrow ji - picl(\{X\}) = X \subset X$
- $\{\emptyset\} \subset \emptyset \Rightarrow ji - picl(\{\emptyset\}) = \emptyset \subset \emptyset$

Tanım 4.3.7 da ifade edilen ij -g ön-birleşim kümesinin tanımını hatırlayalım.

ij -gpu kapalı $A \subset U, U \in \tau_i \Rightarrow ji\text{-pucl}(A) \subset U$

- $\{a\} \subset \{a\}, X \Rightarrow ji\text{-pucl}(\{a\}) = X \not\subset \{a\}$
- $\{b\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji\text{-pucl}(\{b\}) = \{b\}, \{b, c\}, X$
- $\{c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji\text{-pucl}(\{c\}) = \{c\}, \{b, c\}, X$
- $\{a, b\} \subset X \Rightarrow ji\text{-pucl}(\{a, b\}) = X \subset X$
- $\{a, c\} \subset X \Rightarrow ji\text{-pucl}(\{a, c\}) = X \subset X$
- $\{b, c\} \subset \{b, c\}, X \Rightarrow ji\text{-pucl}(\{b, c\}) = \{b, c\}, \{b, c\}, X$
- $\{X\} \subset X \Rightarrow ji\text{-pucl}(\{X\}) = X \subset X$
- $\{\emptyset\} \subset \emptyset \Rightarrow ji\text{-pucl}(\{\emptyset\}) = \emptyset \subset \emptyset$

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde yapılan tez çalışasında elde ettiğimiz bazı sonuçlar verilecektir.

Ön açık küme, yarı açık küme, yarı ön açık küme, g açık küme tanımlarından yola çıkarak başka kümeler ele alındı.

İlk olarak ön açık ve yarı açık küme kavramlarını yeni bir küme olan ön arakesit açık ön birleşim açık, yarı arakesit açık, yarı birleşim açık kümeleri tanımlandı.

İkinci olarak yeni tanımlanan bu kümelerin kapanışları bulundu. Ayrıca bulunan i_j ve j_i kümelerinin birleşim ve arakesitleri alınarak farklı kapanışlar elde edildi.

Üçüncü olarak genelleştirilmiş kümeler göz önüne alınarak ön arakesit açık, ön birleşim açık, yarı arakesit açık, yarı birleşim açık kümeler tanımlandı.

Dördüncü olarak bulmuş olduğumuz bu kümeler arasındaki ilişkiler teoremlerle desteklendi.

Bulunan bu yeni kümeler yardımıyla ikili topolojik uzaylarda, yeni regülerlik, topolojik uzaylardaki T_0, T_1, T_2, T_3 ayırma aksiyomlarına benzeyen yeni ayırma aksiyomları tanımlanabilir. Ayrıca α –genelleştirilmiş kümeler ile arasındaki ilişkiye bakılabilir.

KAYNAKLAR

- Beceren, Y. 1995. Topolojik Uzaylarda Sürekliliğin Ayrışımı. Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 52, Konya.
- Caldas, M. 2001. A Separation Axiom Between $\text{pre-}T_0$ and $\text{pre-}T_1$. East-West Journal of Mathematics, 3(2), 171-177.
- Crossley, S. ve Hildebrand, S. 1971. Semi-closure. Texas Journal of Science, 22, 99-112.
- Crossley, S. ve Hildebrand, S. 1971. Semi-closed Sets and Semi-continuity in Topological Spaces. Texas Journal of Science, 22(2-3), 123-126.
- Dvalishvili, B. P. 2005. Bitopological Space: Theory, Relations with Generalized Algebraic Structures and Applications. North-Holland Mathematics Studies, 199.
- Dorsett, C. 1982. Semi-regular Spaces. Soochow Journal of Mathematics, 8, 45-53.
- Dorsett, C. 1985. Semi-normal Spaces. Kyungpook Mathematical Journal, 25(2), 173-180.
- El-Tantawy, O. ve Abu-Donia, H.M., 2005. Generalized Separation Axioms in Bitopological Spaces. The Arabia Journal for Science and Engineering, 30(1A), 117-129.
- El-Deeb, S. N., Hasanein, I. A. ve Mashaour, A. S. 1983. On p -regular Spaces. Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de la Republique Socialiste de Roumanie Studies, 27(75), 311-315.
- Kar, A. ve Bhattacharyya, P. 1990. Some Weak Separation Axioms. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 82, 415-422.
- Kelly, J.C. 1963. Bitopological Spaces. Proceedings of the London Mathematical Society, (3)13, 71-89.
- Koçak, M. 2015. Genel Topolojiye Giriş ve Problem Çözümleri. Nisan Kitapevi Yayınları, 93, 107, 110, 199, 164, 203, 311, 316, 320, 325, 335, Eskişehir.
- Levine, N. 1963. Semi-Open Sets and Semi-Continuity in Topological Spaces. The American Mathematical Monthly, 70(1), 36-41.
- Levine, N. 1970. Generalized Closed Sets in Topology. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, (2), 19, 89-96.
- Maheshwari, S. N. ve Prasad, R. 1975. Some New Separation Axioms. Annales de la Societe scientifique de Bruxelles Série I, 89, 395-402.
- Maheshwari, S. N. ve Prasad, R. 1975. On s -regular Spaces. Glasnik Matematicki Series III, 10(30), 347-350.

- Maheshwari, S. N. ve Prasad, R. 1975. On s-normal Spaces. Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de la Republique Socialiste de Roumanie, T22(70), 27-30.
- Maki, H. and Umehara, J. and Noiri, T. 1996. Every topological space is pre- $T_{\frac{1}{2}}$. Memoirs of the Faculty of Science Kochi University Mathematics, 17, 33-42.
- Mucuk, O. 2010. Topoloji ve Kategori. Nobel Yayın Dağıtma, 45-65, İstanbul.
- Mashhour, A. S., Abd El-Monsef, M. E. ve El-Deeb, S. N. 1982. On Precontinuous and Weak Precontinuous Mappings. Proceedings of the Mathematics Physical Society Egypt Studies, 53, 47-53.
- Njastad, O. 1965. On Some Classes of Nearly Open Sets. Pasific Journal of Mathematics Studies, 15, 961-70.
- Noiri, T. 1984. On α -continuous Functions. Casopis Pest Mathematics, 109, 118-126.
- Noiri, T. 1988. Characterizations of Extremally Disconnected Spaces. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 19, 325-329.
- Noiri, T., 1996, Mildly normal spaces and some functions, Kyungpook Math. J., 36, 183-190
- Ravi, O. ve Thivagar, M. L. 2006. A Bitopological (1,2)* Semi-generelised Continuous Maps. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, (2)29, 1, 79-88.
- Reilly, Ivan L., 1970. Quasi-Gauges, Quasi-Uniformities and Bitopological Spaces, Unpublished Ph. D. Thesis, Urbana-Champaign, III, Library, University of Illinois.
- Sampath Kumar S. 1997. On a Decomposition of Pairwise Continuity. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 89, 441-446.
- Sarsak, M. S. 2006. Quasi Separation Axioms. Turkish Journal of Mathematics TÜBİTAK, 30, 25-31.
- Selvanayaki S. ve Rajesh N. 2011. Separation Axioms in Bitopological Spaces. International Journal of Computer Applications, 35(9), 0975-8887.