

**İKİNCİ BASAMAKTAN BİR DENKLEM SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN
SALINIMLILIĞI ÜZERİNE**

MUSTAFA FAHRİ AKTAŞ

133409

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MATEMATİK)**

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

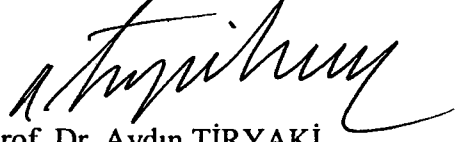
**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

133409

Haziran 2003

ANKARA

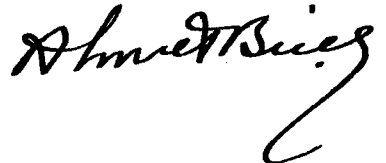
Mustafa Fahri AKTAŞ tarafından hazırlanan İKİNCİ BASAMAKTAN BİR DENKLEM SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI ÜZERİNE adlı bu tezi Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.


Prof. Dr. Aydın TIRYAKI
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan *Prof. Dr. Hüseyin Bereketoğlu*
Üye *Prof. Dr. İbrahim Ethem Anar*
Üye *Prof. Dr. Aydın Tiryaki*
Üye
Üye

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Temel Tanım ve Teoremler.....	4
3. İKİNCİ BASAMAKTAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI	12
3.1. Lineer Denklemlere İlişkin Sonuçlar.....	13
3.2. Lineer Olmayan Denklemlere İlişkin Sonuçlar.....	20
4. $(r(t)k_1(x, x'))' + p(t)k_2(x, x')x' + q(t)f(x) = 0$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI.....	34
4.1. $(r(t)k_1(x, x'))' + p(t)k_2(x, x')x' + q(t)f(x) = 0$ Denklemine İlişkin Salınımlılık Kriterleri.....	34
4.2. Örnekler.....	50
KAYNAKLAR.....	54
ÖZGEÇMİŞ.....	56

İKİNCİ BASAMAKTAN BİR DENKLEM SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Mustafa Fahri AKTAŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2003

ÖZET

Derleme niteliğindeki bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde amaca yönelik bazı önemli tanım, teorem ve sonuçlara değinilmiştir. Üçüncü bölümde ikinci basamaktan denklemlerin çözümlerinin salınımlılığına ilişkin bazı önemli sonuçlara yer verilmiştir. Dördüncü bölümde de yakın zamanda incelenen bir denklem sınıfının çözümlerin salınımlılığı ağırlıklı olarak irdelenmiştir.

Bilim Kodu : 4030600

Anahtar Kelimeler : Diferensiyel Denklem, İkinci Basamaktan Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemler, Salınımlılık, Salınımsızlık.

Sayfa Adedi : 56

Tez Yöneticisi : Prof.Dr. Aydın TİRYAKİ

**ON THE OSCILLATION OF SOLUTIONS OF A CLASS OF SECOND
ORDER EQUATION**

(M.Sc. Thesis)

Mustafa Fahri AKTAŞ

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

June 2003

ABSTRACT

This thesis, a compile of studies which have been conducted so far, consists of four chapters. The first chapter is allocated to the introduction. In the second chapter, some important definitions, theorems and results regarding the topic have been mentioned. In the third chapter, on the oscillation of solutions of second order differential equations have been given some important results. In the fourth chapter, on the oscillation of solutions of a class of equation, which has recently investigated, has been thoroughly analyzed.

Science Code : 4030600

**Key Words : Differential Equation, Second Order Nonlinear Differential
Equations, Oscillation, Nonoscillation.**

Page Number : 56

Adviser : Prof.Dr. Aydın TIRYAKİ

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşturulması esnasında engin birikimi, sabrı ve yol göstericiliği ile bu günlere ulaşmamı sağlayan çok değerli tez hocam Sayın Prof.Dr.Aydın TİRYAKİ'ye bana kazandırmaya çalıştığı tüm değerler için minnetarlığımı ve şükranlarımı bildirmeyi bir görev kabul ediyorum. Ayrıca bu çalışmalarım boyunca gösterdikleri anlayış ve yardımlar için, aileme teşekkür ediyorum.



1. GİRİŞ

Bilindiği üzere diferensiyel denklemler geniş uygulama alanına sahiptir. Bu nedenle her denklemin çözümünü bilmek istememiz doğaldır. Ancak çok az sayıdaki denklem tiplerinin elemanter çözümlerini elde edebilme gerçeği araştırmacıları, denklemin çözümünü elde etmeksizin verilen denklemden hareketle çözümlerin özelliklerini araştırmaya yöneltmiştir. Bu anlamda çözümlerin salınımlılığı, salınımsızlığı, sınırlılığı, kararlılığı ve uzun zaman davranışı gibi kalitatif incelemeler literatürde yer alan pek çok çalışmanın konusu olmuştur. İkinci basamaktan diferensiyel denklemlerinin salınımlılık ve salınımsızlık problemi son yıllarda çok ilgi duyulan bir araştırma konusu olmuş ve bu konuda yapılan bilimsel yayınlarla oldukça geniş bir literatür meydana gelmiştir.

Tezde önce, amaca yönelik temel kavramlar, daha sonra ikinci basamaktan

$$x'' + q(t)x = 0,$$

$$x'' + q(t)f(x) = 0,$$

$$(r(t)\psi(x)x')' + p(t)x' + q(t)f(x) = 0$$

ve

$$(r(t)\psi(x)k(x'))' + p(t)k(x') + q(t)f(x) = 0$$

denklemlerinin çözümlerin salınımlılığına ilişkin ortalama tekniğini içeren bir dizi önemli sonuçlar, tarihsel süreç içerisinde sistematik biçimde sunulacaktır.

Son kısımda da çok yakın zamanda Tiryaki ve Zafer tarafından ele alınan

$$(r(t)k_1(x, x'))' + p(t)k_2(x, x')x' + q(t)f(x) = 0$$

denklemleri üzerinde ağırlıklı olarak durulacak ve çalışmada yer alan sonuçlar ayrıntılı olarak tanıtılacaktır. Ayrıca konuya ilişkin örnekler irdelenecektir.



**T.C. YÖNETİM KURULU
DOKÜMANLARI MERKEZİ**

2. TEMEL KAVRAMLAR

Diferensiyel denklem kuramı, vektör fonksiyonlarının üstün yanları nedeniyle en iyi biçimde birinci basamaktan eşdeğer bir sistem ile incelenir ve irdelenir. Her basamaktan lineer denklem ve en yüksek basamaktan türevi diğerleri cinsinden ayıklanabilen her lineer olmayan diferensiyel denklem

$$x' = F(t, x) \quad [2.1]$$

biçiminde yazılır. y bilinmeyen skalar fonksiyon olmak üzere, $n \geq 1$ için n . basamaktan

$$y^{(n)} = G(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

diferensiyel denklemi,

$$x_1 = y, x_2 = y', x_3 = y'', \dots, x_n = y^{(n-1)}$$

değişken değişimi yapılırsa;

$$x'_1 = x_2, x'_2 = x_3, x'_3 = x_4, \dots, x'_{n-1} = x_n,$$

$$x'_n = y^{(n)} = G(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

sistemi elde edilir. Bu sistem

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n),$$

$$F(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), \dots, f_n(t, x))$$

olmak üzere, $x' = F(t, x)$ biçiminde yazılabilir. Ayrıca başlangıç verileri

$$x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) = (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)) = x_0$$

şeklinde yazılabileceğinden birinci basamaktan

$$x' = F(t, x); x(t_0) = x_0 \quad [2.2]$$

başlangıç değer problemine varılır.

Buna göre oldukça geniş bir denklem sınıfı içeren ve genelde $x = x(t)$ bilinmeyen n -boyutlu bir vektör fonksiyonu $F(t, x)$ ' de R^{n+1} ' in bir alt kümesinden R^n içine bir dönüşüm olmak üzere sadece birinci basamaktan $x' = F(t, x)$ denklemini göz önüne almak yetecektir. $n = 1$ olduğunda $x' = F(t, x)$ denklemi birinci basamaktan skalar diferensiyel denklem, $n > 1$ olduğunda sistem veya yüksek basamaktan denklemleri içeren vektör diferensiyel denklemdir. Bu nedenle diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğine ilişkin Varlık ve Teklik Teoremi $x' = F(t, x)$ denklemi üzerine kurulur.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu kesimde, yeri geldikçe kullanılacak bazı önemli tanım, teorem ve sonuçlar üzerinde durulacaktır (1-5).

Tanım 2.1: $\Omega \subset R^{n+1}$ açık irtibatlı bir küme olmak üzere, $(t, x(t)) \in \Omega, x(t_0) = x_0, x$ türevlenebilir ve t_0 ' ı kapsayan bir I aralığında her $t \in I$ için $x'(t) = F(t, x(t))$ denklemini özdeş olarak sağlayan $x = x(t)$ fonksiyonuna, I üzerinde [2.2]' nin bir çözümü denir.

[2.2] başlangıç değer probleminin çözümüne ilişkin olarak iki temel yapıya dayalı Varlık ve Teklik Teoremleri vardır. Bunlardan biri, bir bölgede

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} (i = 1, 2, \dots, n)$$

fonksiyonlarının sürekliliğine diğeri de aynı bölgede $F(t, x)$ fonksiyonunun Lipschitz Koşulunu sağlaması durumuna dayanır.

Tanım 2.2: $F : R^{n+1} \rightarrow R^n$ vektör değerli fonksiyonuna R^{n+1} , in $n + 1$ boyutlu,

$$D = \{(t, x) = (t, x_1, x_2, \dots, x_n) : |t - t_0| \leq r_0, |x_1 - a_1| \leq r_1, \dots, |x_n - a_n| \leq r_n\}$$

bölgesinde her $(t, x), (t, y) \in D$ için

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq k \|x - y\|$$

olacak şekilde pozitif bir k sayısı mevcut ise, D bölgesinde Lipschitz koşulunu sağlıyor denir.

Buradaki norm Euclidean Normu olabileceği gibi, amaca yönelik olmak üzere başka normlar da olabilir.

Teorem 2.1: F fonksiyonu, R^{n+1} , de kapsanan D bölgesinde sürekli ve Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda D' de her (t_0, x_0) noktasına karşılık $x' = F(t, x)$ denkleminin $x(t_0) = x_0$ koşulunu sağlayan bir tek $x = x(t)$ çözümü vardır.

Teorem 2.2: F ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ fonksiyonları, R^{n+1} , de kapsanan D

bölgesinde sürekli olsun. Bu durumda D' de her (t_0, x_0) noktasına karşılık

$x' = F(t, x)$ denkleminin $x(t_0) = x_0$ koşulunu sağlayan bir tek $x = x(t)$ çözümü vardır.

Dikkat edilirse yukarıdaki teoremler [2.2] probleminin çözümüne ilişkin Lokal Varlık ve Teklik teoremleridir. [2.2] probleminin çözümlerinin kalitatif incelenmesi içerisinde yer alan salınımlılık, kararlılık ve sınırlılığa ilişkin incelemeler için çözümlerin global varlığı, Örneğin; $t_0 \geq 0$ olmak üzere $[t_0, \infty)$ aralığında çözümlerin varlığı önemlidir. Şimdi buna ilişkin temel bazı sonuçları verelim.

Teorem 2.3: $R^+ = [0, \infty)$ olmak üzere $F \in C(R^+ \times R^n, R^n)$ ve $g \in C(R^+ \times R^+, R^+)$ olsun. Ayrıca F

$$\|F(t, x)\| \leq g(t, \|x\|), \forall (t, x) \in R^+ \times R^n$$

koşulunu sağlasın ve $g(t, u)$ 'de her sabit $t \in R^+$ için u' ya göre monoton azalmayan olsun. $u(t) = u(t, t_0, u_0)$,

$$u' = g(t, u), u(t_0) = u_0 > 0, t_0 > 0$$

probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda [2.2] probleminin $\|x(t)\| \leq u(t)$ özelliğine sahip en az bir çözümü vardır.

Sonuç 2.1: a ve b , R^+ 'da tanımlı negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun. $u(t)$ de $\|x_0\| \leq u_0, u_0 > 0$, olacak şekilde

$$u' = a(t)u + b(t), u(t_0) = u_0$$

probleminin bir çözümü olsun. F' de

$$\|F(t, x)\| \leq a(t)\|x\| + b(t)$$

olacak şekilde $R^+ \times R^n \rightarrow R^n$ e sürekli olsun. Bu durumda [2.2] başlangıç değer problemi her $t \geq t_0$ için tanımlı bir $x(t)$ çözümüne sahiptir.

Sonuç 2.2: $S = \{(t, x) \in R^2 : |t| < \infty, |x| < \infty\}$ olsun. $f : S \rightarrow R$ sürekli ve f ,

$$S_a = \{(t, x) \in R^2 : |t| < a, |x| < \infty\}$$

şerit bölgede Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda $(t_0, x_0) \in S_a$ olmak üzere

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$$

başlangıç değer problemi $-a < t < a$ aralığında tanımlı bir tek çözüme sahiptir. Eğer $a = \infty$ ise çözüm her $t \in R$ için tanımlıdır.

Bir $I \subset R$ için $a_0(t) \in C^2(I), a_1(t) \in C^1(I), a_2(t) \in C(I)$ ve I' da $a_0(t) \neq 0$ olmak üzere,

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0 \quad [2.3]$$

ikinci basamaktan lineer diferensiyel denkleminin ilişkin çözümlerin özelliklerinin incelenmesinde yerine göre kullanışlı olan iki temel (standart) form mevcuttur.

Bir $[a, b] \subset I$ aralığı üzerinde $a_0(t) \neq 0$ ise, [2.3] denklemi,

$$y(t) = x(t) \exp\left[-\frac{1}{2} \int_a^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds\right] \quad [2.4]$$

dönüşümü yardımıyla

$$x'' + c(t)x = 0 \quad [2.5]$$

şeklinde bulunan kanonik (normal) biçimine dönüştürülebilir, burada

$$c(t) = 1/a_0^2 [a_2 a_0 - (1/4)a_1^2 - (1/2)(a_1' a_0 - a_1 a_0')]$$

dır.

Belirtelim ki; üstel ifade sıfırdan farklı olduğundan [2.4] dönüşümü, [2.3] denkleminin çözümündeki köklerin sayısı ya da konumunu etkilemez.

Eğer $[a, b]$ aralığı üzerinde $a_0(t) \neq 0$, ise [2.3] denklemi

$$h(t) = 1/a_0(t) \int_a^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds$$

çarpanıyla çarpılarak,

$$(p(t)x')' + q(t)x = 0 \quad [2.6]$$

öz eşlenik forma dönüştürülebilir. Burada $p(t) = a_0 h(t)$, $q(t) = a_2 h(t)$ ' dir.

Belirtelim ki; [2.6] denklemi, [2.3] denklemine göre daha geneldir. Çünkü [2.3] denklemi [2.6] biçimine her zaman dönüştürülebildiği halde, tersinin olabilmesi için $p(t) \in C^1([a, b])$ olmalıdır. [2.5] ve [2.6] denklemlerine ilişkin önemli bir sonucu verelim.

Teorem 2.4: $r(t) > 0$ ve $r_1(t) > 0$ olmak üzere; $r(t), r_1(t) \in C^1[a, b]$ ve $q(t), q_1(t) \in C[a, b]$ olsun. Eğer

$$\begin{cases} [r_1(t)w']' + q_1(t)w = 0 \\ w(a) = w(b) \end{cases}$$

sınır-değer probleminin, (a, b) üzerinde

$$\int_a^b [(r - r_1)w'^2 - (q - q_1)w^2] dt \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan $x(t)$ ' den bağımsız bir $w(t) \neq 0$ çözümü var ise;

$$[r(t)x']' + q(t)x = 0$$

denkleminin her $x(t)$ çözümünün (a, b) aralığında bir sıfırı vardır.

Diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı, salınımsızlığı, sınırlılığı, kararlılığı ve uzun zaman davranışı gibi kalitatif incelemeler literatürde yer alan pek çok çalışmanın konusu olduğu gibi halende süregelmektedir. Biz bu tezde ikinci basamaktan denklemlerin çözümlerinin salınımlılığına ilişkin bazı çalışmalarını irdedeceğimizden konuya ilişkin temel tanımlar vermek için genel ikinci basamaktan

$$x'' = f(t, x, x') \quad [2.7]$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin çözümlerini $t_0 \geq 0$ olmak üzere $[t_0, \infty)$ aralığında mevcut olduğunu varsayalım.

Tanım 2.3: [2.7] diferensiyel denkleminin belirgin olmayan bir çözümü, $[t_0, \infty)$ aralığında keyfi sayıda yeterince büyük sıfırlara sahip ise bu aralıkta salınımlıdır. Tersine, söz konusu çözüm $[t_0, \infty)$ aralığında sonlu sayıda sıfırlara sahip ise bu aralıkta salınımsızdır.

Buna göre salınımlı bir çözüm için $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ olacak şekilde çözümün sıfırlarının bir $\{t_n\}$ dizisi mevcuttur. Çözüm salınımsız ise her $t \geq t_1 \geq t_0$ için çözüm, ya pozitif ya da negatif olacak şekilde bir t_1 sayısı mevcuttur.

Tanım 2.4: [2.7] denkleminin tüm çözümleri salınımlı ise denkleme salınımlı denklemdir.

Örnek 2.1: m reel bir sabit olmak üzere $x'' + mx = 0$ denklemini göz önüne alalım. $m > 0$ durumunda denklemin salınımlı $m < 0$ durumunda denklemin salınımsızdır. Çünkü $m > 0$ için çözümler $\sin \sqrt{m}t, \cos \sqrt{m}t$ olup salınımlıdır. $m < 0$ durumunda ise çözümler $e^{\sqrt{-m}t}, e^{-\sqrt{-m}t}$ olup salınımsız oldukları açıktır.

Örnek 2.2: $t > 0$ için

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - k^2)x = 0$$

Bessel diferensiyel denkleminin k 'nin her değeri için salınımlıdır.

Örnek 2.3: ϕ her t için $\phi(t) \geq m^2 > 0$ özelliğine sahip sürekli fonksiyon olsun.

$$x'' + \phi(t)x = 0$$

denklemin salınımlıdır. Çünkü $x'' + m^2 x = 0$ denklemin salınımlı olduğundan Teorem 2.4' dan $x'' + \phi(t)x = 0$ denkleminin de salınımlı olacağı açıktır.

Gerek elemanter düzeyde, gerekse ileri düzeyde, diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığına ilişkin inşa edilen kriterlerinin pek çoğu limit ve integral metodunu içeren testlerle ilgilidir. Tezde daha çok ortalama tekniğini içinde yer alan

H metoduna dayalı kriterler üzerinde durulacağından ilerde çok sık kullanacağımız P sınıfından H fonksiyonu tanımını ifade edelim (6,7).

Tanım 2.5: $D_0 = \{(t, s) : t > s \geq t_0\}$ ve $D = \{(t, s) : t \geq s \geq t_0\}$ olmak üzere eğer $H \in C(D, R)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyor ise H fonksiyonu P sınıfındandır denir.

(H₁) $t \geq t_0$ için $H(t, t) = 0$ ve her $(t, s) \in D_0$ için $H(t, s) > 0$ 'dır.

(H₂) H, D 'da sürekli, ikinci değişkene göre türevi mevcut ve $\frac{\partial H}{\partial s} \leq 0$ ve de

her $(t, s) \in D_0$ için

$$-\frac{\partial H}{\partial s}(t, s) = h(t, s)\sqrt{H(t, s)}$$

olacak şekilde, sürekli bir $h : D_0 \rightarrow R$ fonksiyonu vardır.

Örnek 2.4: $Q, \int_{t_0}^{\infty} \frac{dz}{Q(z)} = \infty$ özelliğine sahip $[t_0, \infty)$ aralığında pozitif sürekli bir

fonksiyon ve $n > 2$ olmak üzere

$$H(t, s) = \left[\int_s^t \frac{dz}{Q(z)} \right]^{n-1}, (t, s) \in D$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonu P sınıfından bir fonksiyondur. Özel olarak $Q(z) = 1$

seçilirse $H(t, s) = (t - s)^{n-1}$ olur. Benzer şekilde $Q(z) = z$ seçilirse $H(t, s) = (\ln \frac{t}{s})^{n-1}$

olup her ikisinin de P sınıfından olduğu kolaylıkla görülür.

3. İKİNCİ BASAMAKTAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

İkinci basamaktan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık ve salınımsızlık problemi, son yıllarda çok ilgi duyulan bir araştırma konusu olmuş ve bu konuda yapılan bilimsel yayınlarla oldukça geniş bir literatür meydana gelmiştir.

Bu bölümde ikinci basamaktan lineer denklemler için ortalama tekniği içeren bir dizi önemli sonuç ve kriter tarihsel süreç içerisinde sistematik bir biçimde sunulacaktır.

Sturm (8), 1836 yılında, $q(t) \in C([t_0, \infty), R), t_0 \geq 0$ olmak üzere,

$$x'' + q(t)x = 0 \quad [3.1]$$

lineer diferensiyel denkleminin salınımlılık davranışını araştıran ilk kişi olmuştur. $q(t)$ 'nin sonuçta negatif olmadığı durumda, pek çok salınımlılık kriterlerinin inşası Atkinson' un klasik çalışmasıyla başlamış, Moore ve Nehari, Jasny, Kurzwell, Belohorec ve Kiguradze' nin çalışmaları ile sürmüştür. Nehari' nin hemen ardından bir dizi makale halinde Coffman ve Wong tarafından, bu sonuçlar; salınımlılık konusunda birçok ilginç özelliğe sahip olan ve Emden-Fowler denklemi olarak isimlendirilen

$$x'' + q(t)|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = 0 \quad [3.2]$$

denkleminde sistematik bir davranışı kapsayacak şekilde, [3.1]' den daha genel bir denkleme genişletilmiştir (9). Eğer, [3.2]' de $q(t) = t^\lambda$ alınırsa astrofiziğin çalışma konusu olarak ortaya çıkan Emden-Fowler denklemi elde edilir. Cecchi ve Marini (10)' ninde belirttiği gibi, pek çok fiziksel problem;

$r, q : [t_0, \infty) \rightarrow R, \psi, f : R \rightarrow R$ sürekli, $\psi(t) > 0$ $r(t) > 0$ ve $q, [t_0, \infty)$ ' un herhangi bir alt aralığı üzerinde özdeş sıfır olmamak üzere;

$$[r(t)\psi(x)x']' + q(t)f(x) = 0 \quad [3.3]$$

biçimindeki ikinci basamaktan lineer olmayan diferensiyel denklemlerle modellenir. Örneğin; Thomas-Fermi ve Schrodinger-Persico denklemlerinin her ikisi de atomik alanların araştırmasında ortaya çıkan, [3.3] biçimindeki denklemdir. Ayrıca, bu tip denklemler, kuvvet alanı zamana bağlı olduğunda, “açısal momentumun korunması kanununda” olduğu gibi birçok mekanik probleminde de görülür. Bu denklemle ilgili olarak, Butler, Philos, Wintner, Wong, Yan ve Yeh’ in araştırmasına başvurulabilir (9).

3.1. Lineer Denklemlere İlişkin Sonuçlar

[3.1] lineer denklemin salınımlılığı için $q(t)$ üzerine koşulları esas alan kriterler aşağıdaki gibi sıralanabilir (9):

1. Kneser (1893) : $q(t) > 0$ ve $w = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 q(t)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda [3.1] denklemi $w > 1/4$ ise salınımlı, $w < 1/4$ ise salınımsızdır.

2. Fite (1918) : Eğer $q(t) > 0$ için $\int_{t_0}^{\infty} q(s)ds = \infty$ ise, bu durumda [3.1] denklemi salınımlıdır.

3. Wintner (1949) : Eğer $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s q(u)duds = \infty$ ise, bu durumda [3.1] denklemi salınımlıdır.

4. Hartman (1952) : Eğer

$$-\infty < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s q(u)duds < \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s q(u)duds \leq \infty$$

ise bu durumda [3.1] denklemini salınımlıdır.

5. Kamenev (1978) : $\lambda > 1$ bir sabit olmak üzere, eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_{t_0}^t (t-s)^\lambda q(s) ds = \infty$$

ise [3.1] denklemini salınımlıdır.

6. Yan (1984) : $\lambda > 1$ sabiti için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_{t_0}^t (t-s)^\lambda q(s) ds < \infty$$

olsun. Eğer $[t_0, \infty)$ üzerinde tanımlı, $t \geq t_0$ için $A_+(t) = \max\{A(t), 0\}$ ve $\int_{t_0}^{\infty} A_+^2(s) ds = \infty$ olacak şekilde sürekli bir A fonksiyonu var ve $\forall T \geq t_0$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_{t_0}^t (t-s)^\lambda q(s) ds \geq A(T)$$

ise [3.1] denklemini salınımlıdır.

7.Philos (1989) (11) : H, P sınıfında olmak üzere (Tanım 2.5) eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \{H(t, s)q(s) - \frac{1}{4}h^2(t, s)\} ds = \infty$$

ise bu durumda [3.1] denklemini salınımlıdır. [3.1] denkleminde $\delta > 0$ bir sabit olmak

T.C. YÖKÜKÜRETIM KURULU
EĞİTİM TEKNOLOJİLERİ GENEL MÜDÜRLÜĞÜ
EĞİTİM TEKNOLOJİLERİ GENEL MÜDÜRLÜĞÜ

üzere $q(t) = \frac{\delta}{t^2}$ alınırsa, yukarıdaki kriterler için,

(i)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_1^t \int_1^s q(u) du ds &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_1^t \int_1^s \frac{\delta}{u^2} du ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta}{t} \int_1^t \left[-\frac{1}{s} + 1\right] ds \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta}{t} (-\log t + t - 1) = \delta < \infty; \end{aligned}$$

(ii) $\lambda > 1$ için,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_{t_0}^t (t-s)^\lambda q(s) ds &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_1^t \frac{\delta (t-s)^\lambda}{s^2} ds \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\delta}{s^2} ds = \delta < \infty \end{aligned}$$

her $T \geq 1$ için,

$$A(T) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_T^t (t-s)^\lambda q(s) ds \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_T^t (t-s)^\lambda q(s) ds \leq \frac{\delta}{T}$$

ve $A(t)$ ve $A_+(t)$ Yan'ın teoreminde tanımlandığı gibi olmak üzere,

$$\int_1^\infty A_+^2(s) ds \leq \int_1^\infty \frac{\delta^2}{s^2} ds = \delta^2 < \infty$$

(iii) P sınıfından olan H için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,1)} \int_1^t [H(t,\xi)q(\xi) - \frac{1}{4}h^2(t,\xi)]d\xi \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\delta}{\xi^2} d\xi = \delta = \infty$$

elde edilir. Böylece yukarıdaki sözü edilen Wintner, Hartman, Kamenev, Yan ve Philos' un kriterleri,

$$u'' + \frac{\delta}{t^2}u = 0 \quad [3.4]$$

Euler diferensiyel denkleminde uygulanamaz. Bilindiği gibi, eğer $\delta > 1/4$ ise [3.4] denklemi salınımlı, $\delta \leq 1/4$ ise salınımsızdır.

Li (12), yukarıdaki Euler denkleminde de cevap verecek şekilde 1995 yılında Wintner, Hartman, Kamanev, Yan ve Philos' un yukarıda verilen salınımlılık kriterlerini $r(t) \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$ ve $q(t) \in C([t_0, \infty), R), t_0 \geq 0$ olmak üzere;

$$(r(t)x')' + q(t)x = 0 \quad [3.5]$$

ikinci basamaktan lineer diferensiyel denkleminde genişleterek, aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

Teorem 3.1: H, P sınıfından olsun. a ve ψ , $a(s) = \exp\{-2 \int f(\xi)d\xi\}$ ve

$\psi(s) = a(s)\{q(s) + r(s)f^2(s) - [r(s)f(s)]'\}$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere, eğer her $t \geq t_0$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t [H(t, s)\psi(s) - \frac{1}{4}a(s)r(s)h^2(t, s)]ds = \infty \quad [3.6]$$

sağlanacak şekilde bir $f \in C^1[t_0, \infty)$ fonksiyonu varsa bu durumda [3.5] denklemini

salınımlıdır.

Sonuç 3.1: $t \geq t_0$ için $R(t) = \int_{t_0}^t \frac{ds}{r(s)}$ ve $\lambda > 1$ bir sabit olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{R(t)^\lambda} \int_{t_0}^t [R(t) - R(s)]^\lambda q(s) ds = \infty$$

ise bu durumda [3.5] denklemini salınımlıdır.

Sonuç 3.2: $t \geq t_0$ için $Q(t) = \int_t^\infty \frac{ds}{r(s)} < \infty$ ve $\lambda > 1$ bir sabit olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [-\log Q(t)]^{-\lambda} \int_{t_0}^t \left(\log \frac{Q(s)}{Q(t)} \right)^\lambda (Q(s)q(s) - \frac{1}{4r(s)Q(s)}) ds = \infty$$

ise bu durumda [3.5] denklemini salınımlıdır.

Sonuç 3.3: $t \geq t_0$ bir sabit olmak üzere $t \geq s \geq t_0$ için $H(t, s) = (t - s)^\lambda$ olsun. a ve ψ Teorem 3.1' deki gibi olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_{t_0}^t \left\{ (t - s)^\lambda \psi(s) - \frac{\lambda^2}{4} (t - s)^{\lambda-2} a(s)r(s) \right\} ds = \infty \quad [3.7]$$

koşulu sağlanacak şekilde bir $f \in C^1[t_0, \infty)$ fonksiyonu varsa bu durumda Teorem 3.1' den [3.5] denklemini salınımlıdır.

Örnek 3.1: $\delta > \frac{1}{4}$ olmak üzere [3.4] Euler denklemini göz önüne alalım. $f(t) = -\frac{1}{2t}$

olsun. Bu durumda $a(t) = t$ ve $f'(t) = \frac{1}{2t^2}$ olur. $\lambda > 1$ için

$$(t-s)^\lambda \geq t^\lambda - \lambda s t^{\lambda-1}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım (13). [3.7]' den

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_1^t \left\{ (t-s)^\lambda s \left[\frac{\delta}{s^2} + \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{2s^2} \right] - \frac{\lambda^2}{4} (t-s)^{\lambda-2} s \right\} ds \\ &= \frac{4\delta-1}{4} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_1^t \frac{(t-s)^\lambda}{s} ds - \frac{\lambda}{4(\lambda-1)} \\ &\geq \frac{4\delta-1}{4} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_1^t \frac{t^\lambda - \lambda s t^{\lambda-1}}{s} ds - \frac{\lambda}{4(\lambda-1)} \\ &= \frac{4\delta-1}{4} \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ \log t - \frac{\lambda(t-1)}{t} \right\} - \frac{\lambda}{4(\lambda-1)} = \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Sonuç 3.3' den [3.4] Euler denklemi $\delta > 1/4$ için salınımlıdır.

Uyarı 3.1: Eğer $r(t) \equiv 1$ ve $f(t) \equiv 0$ ise Sonuç 3.3, Kamenev' in kriterini verir.

Teorem 3.2: P sınıfından H fonksiyonu

$$0 < \inf_{s \geq t_0} \{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, t_0)} \} \leq \infty \quad [3.8]$$

koşulunu sağlasın. $a(s), \psi(s)$ Teorem 3.1' deki gibi ve $A_+(s) = \max\{A(s), 0\}$

olmak üzere eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t a(s)r(s)h^2(t, s)ds < \infty, \quad [3.9]$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{A_+(s)}{a(s)r(s)} ds = \infty \quad [3.10]$$

ve her $T \geq t_0$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t [H(t, s)\psi(s) - \frac{1}{4}a(s)r(s)h^2(t, s)]ds \geq A(T) \quad [3.11]$$

koşullarını sağlayan $A \in C[t_0, \infty)$ ve $f \in C^1[t_0, \infty)$ fonksiyonları varsa bu durumda [3.5] denklemini salınımlıdır.

Sonuç 3.4: $\lambda > 1$ bir sabit olmak üzere $t \geq s \geq t_0$ için $H(t, s) = (t - s)^\lambda$ olsun. Ayrıca, her $t \geq t_0$ için ,

$$\int_{t_0}^t (t - s)^{\lambda-2} a(s)r(s)ds < \infty$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_{t_0}^t (t - s)^\lambda a(s)r(s)ds < \infty$$

koşulları sağlansın. Eğer $a(s), \psi(s)$ Teorem 3.1' deki gibi ve $A_+(s) = \max\{A(s), 0\}$ olmak üzere, her $T \geq t_0$ için [3.10],

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_T^t \left\{ (t-s)^\lambda \psi(s) - \frac{\lambda^2}{4} (t-s)^{\lambda-2} a(s)r(s) \right\} ds \geq A(T)$$

koşullarını sağlayan $A \in C[t_0, \infty)$ ve $f \in C^1[t_0, \infty)$ fonksiyonları varsa bu durumda [3.5] denklemi salınımlıdır.

Uyarı 3.2 (12): $r(t) \equiv 1$ ve $f(t) \equiv 0$ ise, bu durumda Sonuç 3.4' den Yan' ın sonucu elde edilir.

Teorem 3.3: Teorem 3.2' deki [3.9] ve [3.11] koşulları dışında diğer tüm koşullar sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) \psi(s) ds < \infty \quad [3.12]$$

ve her $T \geq t_0$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[H(t, s) \psi(s) - \frac{1}{4} a(s)r(s)h^2(t, s) \right] ds \geq A(T) \quad [3.13]$$

sağlanacak şekilde $A \in C[t_0, \infty)$ ve $f \in C^1[t_0, \infty)$ fonksiyonları varsa [3.5] denklemi salınımlıdır.

3.2. Lineer Olmayan Denklemlere İlişkin Sonuçlar

Bu kesimde

$$x'' + q(t)f(x) = 0,$$

$$(r(t)\psi(x)x')' + p(t)x' + q(t)f(x) = 0$$

ve

$$(r(t)\psi(x)k(x'))' + p(t)k(x') + q(t)f(x) = 0$$

denklemlerine ilişkin ortalama tekniğine dayalı literatürde yer alan bazı çalışmalar üzerinde durulacaktır. Her denklem tipi için çözümlerin $t_0 \geq 0$ olmak üzere $[t_0, \infty)$ aralığında mevcut olduğunu ve $x(t)$ çözüm olmak üzere, $\sup\{|x(t)| : t \geq T\} \neq 0, T \geq t_0$ özelliğine sahip olduğunu kabul edelim.

$q, [t_0, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli ve gerçel değerli bir fonksiyon f , R' de sürekli, türevlenebilir ve her $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olmak üzere ikinci basamaktan lineer olmayan

$$x'' + q(t)f(x) = 0 \quad [3.14]$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım.

Bu tip denklemlerin salınımlılık çalışması özel bir ilgi alanı olmuş ve değişken katsayının ortalama davranışını içine alan çok sayıda kriter bulunmuştur. Bu testler, genellikle Wintner' in lineer durum için bulduğu klasik ortalama kriterden ilham alarak harekete geçirilmiştir. [3.14] biçimindeki lineer olmayan ikinci basamaktan diferensiyel denklemlerin salınımlılığı için ortalama tekniklerini kullanan birçok araştırma açısından, Butler, Butler ve Erbe, Kamenev, Kura, Kwong ve Wong, Onose, Philos' un çalışmaları gösterilebilir (9).

Dikkat edilirse, $f(x) = |x|^\lambda \operatorname{sgn} x, x \in R (\lambda > 1)$ olarak alındığında lineer olmayan [3.14] denkleminin prototipi olan

$$x'' + q(t)|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = 0 \quad [3.2]$$

Emden-Fowler denklemi karşımıza çıkar.

Wong (14), [3.2] Emden-Fowler denkleminin salınımlılığı için,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t q(s) ds > -\infty \quad [3.15]$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t (t-s)q(s) ds = \infty \quad [3.16]$$

koşullarının yeterli olduğunu göstermiştir. 1984 yılında Philos (15), Wong' un bu sonucunu $f'(x) \geq 0$ olmak üzere [3.14] denklemine genişletmiştir.

Öte yandan yakın zamanda Rogovchenko (6), Philos (11)' un ve Li (12)' nin Kesim 3.1' de verilen lineer denklemler için sonuçlarını, [3.14]' in Daha geneli olan $r(t) \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$, $p(t), q(t) \in C([t_0, \infty), (-\infty, \infty))$, $f(x) \in C'((-\infty, \infty), (-\infty, \infty))$ ve $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$ olmak üzere

$$[r(t)x']' + p(t)x' + q(t)f(x) = 0 \quad [3.17]$$

denklemine genişletmiştir.

Teorem 3.4:

$$f'(x) \text{ mevcut ve } x \neq 0 \text{ için } f'(x) \geq K > 0 \quad [3.18]$$

olacak şekilde bir K sabiti ve H, P sınıfından olsun. $a(s) = \exp(-2 \int_0^s g(u) du)$ ve

$\psi(s) = K^{-1}a(s)(Kq(s)) - p(s)g(s) - (r(s)g(s))' + r(s)g^2(s)$ olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left[H(t, s) \psi(s) - \frac{a(s)r(s)}{4K} \left(h(t, s) + \frac{p(s)}{r(s)} \sqrt{H(t, s)} \right)^2 \right] ds = \infty \quad [3.19]$$

olacak şekilde $g \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$ var ise bu durumda [3.17] denklemi salınımlıdır.

Sonuç 3.5: Teorem 3.4' deki [3.19] koşulu yerine

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) \psi(s) ds = \infty$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t a(s)r(s) \left(h(t, s) + \frac{p(s)}{r(s)} \sqrt{H(t, s)} \right)^2 ds < \infty$$

şartları sağlandığında da [3.17] denklemi salınımlıdır.

Sonuç 3.6: [3.18] şartı sağlansın. $a(s)$ ve $\psi(s)$ Teorem 3.4' deki gibi olmak üzere; $n > 2$ olacak şekildeki bazı tamsayılar için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{1-n} \int_{t_0}^t \left\{ (t-s)^{n-1} \psi(s) - \frac{a(s)r(s)}{4K} (t-s)^{n-3} \left[n-1 + \frac{p(s)}{r(s)} (t-s) \right]^2 \right\} ds = \infty \quad [3.20]$$

olacak şekilde $g \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$ var ise [3.17] denklemi salınımlıdır.

Örnek 3.2: $t \in [1, \infty)$ olmak üzere

$$((1 + \sin^2 t)x')' - 3 \sin t \cos t x' + \frac{1}{1 + \cos^4 t} x(t)(1 + x^4) = 0$$

lineer olmayan denklemini ele alalım. Kolaylıkla gösterilebilir ki $f'(x)$ var ve her $x \in (-\infty, \infty)$ için

$$f'(x) = 5x^4 + 1 \geq 1$$

dir. $g(t) = -1/t$ ve $n = 3$ için Sonuç 3.6 uygulanırsa $a(t) = t^2$, dir. Her $s \in (-\infty, \infty)$ için

$$\frac{1}{1 + \cos^4 s} - \frac{9 \sin^2 s \cos^2 s}{4(1 + \sin^2 s)} > 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} \int_T^t (t-s)^2 s^2 \left[\frac{1}{1 + \cos^4 s} - \frac{3 \sin s \cos s}{s} + \left(\frac{1 + \sin s}{s} \right)' + \frac{1 + \sin^2 s}{s} \right. \\ & \quad \left. - (1 + \sin^2 s) \left(\frac{1}{t-s} - \frac{3 \sin s \cos s}{2(1 + \sin^2 s)} \right)^2 \right] ds \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} \int_T^t [(t-s)^2 s^2 \left(\frac{1}{1 + \cos^4 s} - \frac{9 \sin^2 s \cos^2 s}{4(1 + \sin^2 s)} \right) + s(t-s)(4s-t) \sin s \cos s \\ & \quad - s^2(1 + \sin^2 s)] ds = \infty \end{aligned}$$

dir. Böylece Sonuç 3.6' nin tüm şartları sağlandığı için yukarıdaki diferensiyel denklemin tüm çözümleri salınımlıdır.

Teorem 3.5: $x \neq 0$ için $f'(x) \geq K > 0$ olsun. P sınıfından H fonksiyonu

$$0 < \inf_{s \geq t_0} \{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, t_0)} \} \leq \infty \quad [3.21]$$

koşulunu sağlasın. $a(s), \psi(s)$ Teorem 3.4' deki gibi ve $A_+(s) = \max\{A(s), 0\}$ olmak üzere her $\forall T \geq t_0$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t [a(s)r(s)(h(t, s) + \frac{p(s)}{r(s)} \sqrt{H(t, s)})^2] ds < \infty, \quad [3.22]$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{A_+^2(s)}{a(s)r(s)} ds = \infty \quad [3.23]$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t [H(t, s)\psi(s) - \frac{a(s)r(s)}{4K} (h(t, s) + \frac{p(s)}{r(s)} \sqrt{H(t, s)})^2] ds \geq A(T) \quad [3.24]$$

olacak şekilde $g \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$ ve $A \in C[t_0, \infty)$ var olduğunu kabul edelim. Bu durumda [3.17] denklemi salınımlıdır.

Teorem 3.6: Teorem3.5' deki [3.22] ve [3.24] koşulları dışında diğer tüm koşullar sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s)\psi(s) ds < \infty$$

ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t [H(t, s)\psi(s) - \frac{a(s)r(s)}{4K} (h(t, s) + \frac{p(s)}{r(s)} \sqrt{H(t, s)})^2] ds \geq A(T)$$

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

ise bu durumda [3.17] denklemi salınımlıdır.

Rogovchenco ile aynı yılda Tiryaki ve Zafer (16) tarafından yapılan çalışmada [3.17] denkleminin daha geneli olan

$$(r(t)\psi(x)x')' + p(t)x' + q(t)f(x) = 0 \quad [3.25]$$

denklemi incelenmiştir. Bu denklemde r, p, q ve f üzerindeki temel varsayımlar [3.17] denklemindeki gibi olup ayrıca $\psi \in C(R, R^+)$ ' dir.

Tiryaki ve Zafer (16), Grace (17)' in çalışmasından esinlenerek Rogovchenko' nunkinden farklı aşağıdaki salınımlılık kriterlerini elde etmişlerdir. Sonuçlar daha önce literatürde yer alan bazı kriterleri kapsamaktadır.

Teorem 3.7: k, c ve c_1 pozitif reel sabitler olmak üzere

$$c \leq \psi(x) \leq c_1, \quad [3.26]$$

$$f'(x) \geq k \quad [3.27]$$

ve

$$Q(t) = q(t) - \frac{1}{4K} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c_1} \right) \frac{p^2(t)}{r(t)} \quad [3.28]$$

olsun. P sınıfından H fonksiyonu için

$$X(t, t_0) = \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) \rho(s) Q(s) ds,$$

$$Y(t, t_0) = \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t a(s) \rho(s) \left\{ \left(\frac{p(s)}{a(s)} - c_1 \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \sqrt{H(t, s)} + c_1 h(t, s) \right\}^2 ds$$

olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left[X(t, t_0) - \frac{1}{4kc_1} Y(t, t_0) \right] = \infty \quad [3.29]$$

olacak şekilde türevlenebilir $\rho: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ve $h \in C(D_0, R)$ fonksiyonları var ise bu durumda [3.25] denklemi salınımlıdır.

Sonuç 3.7: Teorem 3.7' deki [3.29] şartı yerine

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} X(t, t_0) = \infty \text{ ve } \limsup_{t \rightarrow \infty} Y(t, t_0) < \infty \quad [3.30]$$

koşulları alındığında da [3.25] denklemi salınımlıdır.

Teorem 3.8: P sınıfından H fonksiyonu

$$0 < \inf_{s \geq t_0} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, t_0)} \right\} \leq \infty \quad [3.31]$$

koşulunu sağlasın. ψ, f', Q Teorem 3.7' deki gibi ve $A_+(s) = \max\{A(s), 0\}$ olmak üzere

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} Y(t, t_0) < \infty, \quad [3.32]$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{A_+^2(s)}{a(s)\rho(s)} ds = \infty \quad [3.33]$$

ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} [X(t, T) - \frac{1}{4kc_1} Y(t, T)] \geq A(T) \quad [3.34]$$

olacak şekilde $A \in C[t_0, \infty)$ ve pozitif bir $\rho \in C^1[t_0, \infty)$ fonksiyonu varsa bu durumda [3.25] denklemi salınımlıdır.

Örnek 3.3:

$$(t^{-2}e^{2t}(1+e^{-1/x}x'))' - 4t^{-2}e^{2t}x' + 3t^{-2}e^{2t}x(1+x^2) = 0, t \geq 1$$

denklemini göz önüne alalım. $\rho(t) = e^{-2t}$ ve $H(t, s) = (t-s)^2$ şeklinde seçilirse $A(t) = \frac{1}{t}$ olup Teorem 3.8' in şartları sağlandığından denklem salınımlıdır.

Teorem 3.9: Teorem 3.8' deki [3.32] ve [3.34] koşulları dışında diğer tüm koşullar sağlansın. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} Y(t, t_0) < \infty \quad [3.35]$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [X(t, t_0) - \frac{1}{4kc_1} Y(t, T)] \geq A(T), T \geq t_0 \quad [3.36]$$

ise, bu durumda [3.25] denklemi salınımlıdır.

Teorem 3.10: Teorem 3.8' deki [3.32] koşulu dışında tüm koşullar sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} X(t, t_0) < \infty \quad [3.37]$$

ise bu durumda [3.25] denklemi salınımlıdır.

Ayanlar ve Tiryaki (18), f üzerindeki monotonluk koşulunu kaldırarak önceki denklemlerden daha genel

$$(r(t)\psi(x)k(x'))' + p(t)k(x') + q(t)f(x) = 0 \quad [3.38]$$

denklemini ele almışlardır.

Burada $r(t) \in C([t_0, \infty), (0, \infty))$, $p(t) \in C^1([t_0, \infty), (-\infty, \infty))$, $q(t) \in C([t_0, \infty), [0, \infty))$, $\psi(x) \in C((-\infty, \infty), (0, \infty))$, $f(x) \in C((-\infty, \infty), (-\infty, \infty))$, $k(y) \in C((-\infty, \infty), (-\infty, \infty))$ dir.

Ayanlar ve Tiryaki, Kesim 3.1' de yer alan Li (12)' nin çalışmalarından hareketle, ilk kez kendileri tarafından kullanılan $\rho \in C^1([t_0, \infty), R^+)$ ve $(rR) \in C^1([t_0, \infty), R)$ olmak üzere

$$\omega(t) = \rho(t) \left[\frac{r(t)\psi(x(t))k(x'(t))}{x(t)} + r(t)R(t) + \frac{\delta_1}{2} p(t) \right] \quad [3.39]$$

dönüşümü yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 3.11: c, c_1, δ ve δ_1 sabitler olmak üzere r, q, f, ψ ve k fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlasın.

- (a) $r(t) > 0, q(t) \geq 0$
- (b) $0 < c \leq \psi(x) \leq c_1$
- (c) $\frac{f(x)}{x} \geq \delta > 0, x \neq 0$
- (d) $k^2(y) \leq \delta_1 y k(y), \delta_1 > 0, y \neq 0$

Ayrıca H, P sınıfından olsun. Ve de

$$X(t, t_0) = \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) \varphi(s) \rho(s) ds,$$

$$Y(t, t_0) = \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t r(s) \rho(s) \left\{ (h(t, s) - (\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} + \frac{2}{c_1 \delta_1} R(s)) \sqrt{H(t, s)})^2 ds \right.$$

ve

$$\varphi(s) = \delta q(s) - \frac{\delta_1}{4} \frac{p^2(s)}{cr(s)} + \frac{1}{c_1 \delta_1} r(s) R^2(s) - \frac{\delta_1}{2} p'(s) - (r(s) R(s))'$$

olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [X(t, t_0) - \frac{c_1 \delta_1}{4} Y(t, t_0)] = \infty \quad [3.40]$$

olacak şekilde $\rho \in C^1([t_0, \infty), R^+)$ ve $(rR) \in C^1([t_0, \infty), R)$ varsa bu durumda [3.38] denklemini salınımlıdır.

Sonuç 3.8: Teorem 3.11' deki [3.40] koşulu yerine

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} X(t, t_0) = \infty \quad [3.41]$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} Y(t, t_0) < \infty \quad [3.42]$$

şartları alındığında da [3.38] salınımlıdır.

Teorem 3.12: P sınıfından H fonksiyonu

$$0 < \inf_{s \geq t_0} \{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, t_0)} \} \leq \infty \quad [3.43]$$

koşulunu sağlasın. ψ, f, r, q, φ ve k Teorem 3.11' deki gibi ve $A_+(s) = \max\{A(s), 0\}$ olmak üzere

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} Y(t, t_0) < \infty, \quad [3.44]$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{A_+^2(s)}{r(s)\rho(s)} ds = \infty \quad [3.45]$$

ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} [X(t, T) - \frac{c_1 \delta_1}{4} Y(t, T)] \geq A(T) \quad [3.46]$$

olacak şekilde $A \in C([t_0, \infty), R)$, $(rR) \in C^1([t_0, \infty), R)$ ve pozitif bir $\rho \in C^1([t_0, \infty), R^+)$ fonksiyonları varsa bu durumda [3.38] denklemini salınımlıdır.

Örnek 3.4:

$$\left(\frac{1}{t^2} \psi(x) k(x') \right)' + \frac{1}{t^3} k(x') + \frac{1}{t^2} f(x) = 0, t > 0$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. $\forall t \geq s \geq t_0$ için $\Phi(t) \equiv 1, R(t) \equiv 0$ ve $H(t, s) = (t - s)^2$ olsun.

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t - t_0)^2} \int_{t_0}^t \frac{4}{s^2} ds = 0$$

olup $c = 1/6$ seçersek $\varphi(s) = \frac{\delta}{s^2}$ olmak üzere $\forall T \geq t_0$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-T)^2} \int_T^t \left\{ (t-s)^2 \varphi(s) - \frac{c_1 \delta_1}{s^2} \right\} ds = \frac{\delta}{T}$$

elde edilir. $A(T) = \frac{\delta}{T}$ olduğundan $\int_{t_0}^{\infty} \frac{A_+^2(s)}{r(s)} ds = \infty$ ' dir. f ve k fonksiyonları sırası

ile (b), (c) ve (d) şartlarını sağlayacak şekilde seçilirse denklem salınımlıdır. Özel olarak;

$$\left[\frac{1}{t^2} \left(\frac{1}{6} + e^{-|x|} \right) \left(\frac{x'}{1+x'^2} \right) \right]' + \frac{1}{t^3} \frac{x'}{1+x'^2} + \frac{1}{t^2} (x+x^3) = 0$$

denklemini alındığında Teorem 3.12' un tüm şartları sağlanır. Dolayısıyla bu denklem salınımlıdır.

Teorem 3.13: Teorem 3.12' deki [3.44] ve [3.46] koşulları dışında diğer tüm koşullar sağlansın. Eğer her $t \geq t_0$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} Y(t, t_0) < \infty \quad [3.47]$$

ve her $T \geq t_0$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left[X(t, T) - \frac{c_1 \delta_1}{4} Y(t, T) \right] \geq A(T) \quad [3.48]$$

ise bu durumda [3.38] denklemini salınımlıdır.

Teorem 3.14: Teorem 3.12' daki [3.44] koşulu dışında diğer tüm koşullar sağlansın.

Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} X(t, t_0) < \infty \quad [3.49]$$

ise bu durumda [3.38] denklemini salınımlıdır.



4. $(r(t)k_1(x, x'))' + p(t)k_2(x, x')x' + q(t)f(x) = 0$ **DENKLEMİNİN**
ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde, önceki bölümde ele alınan denklem tiplerinin en geneli olan

$$(r(t)k_1(x, x'))' + p(t)k_2(x, x')x' + q(t)f(x) = 0 \quad [4.1]$$

denklemini üzerinde durulacaktır. Bu denklem çok yakın zamanda Tiryaki ve Zafer (7) tarafından ele alınıp ortalama tekniği kullanılarak denklemin çözümlerinin salınımlılığına ilişkin orijinal sonuçlar elde edildi. Yukarıdaki denklemin özel durumları daha önce pek çok araştırmacı tarafından incelenmiş ve salınımlılığa ilişkin kriterler inşa edilmiştir (3,4,6,16,18-25). Belirtelim ki aşağıda verilecek kriterlerin bir kısmı literatürde yer alan daha önceki sonuçların bir genişletmesi olduğu gibi katsayı fonksiyonlarının özel durumunda onları da kapsamaktadır.

Burada $t_0 \geq 0$ olmak üzere $p, q \in C([t_0, \infty), R)$, $r \in C([t_0, \infty), R^+)$, $k_1 \in C^1(R \times R, R)$, $k_2 \in C(R \times R, R)$ 'dır. Ayrıca $[t_0, \infty)$ aralığında [4.1] denkleminin belirgin olmayan çözümlerinin mevcut olduğunu ve $x(t)$ çözüm olmak üzere $T \geq t_0$ için $\sup\{x(t) : t \geq T\} \neq 0$ özelliğine sahip olduğunu kabul edelim.

4.1. $(r(t)k_1(x, x'))' + p(t)k_2(x, x')x' + q(t)f(x) = 0$ **Denklemine İlişkin**
Salınımlılık Kriterleri

Lemma 4.1: $B, C, D \in C([t_0, \infty), R)$ ve $w \in C^1(R, R)$ olsun. Ayrıca $C(t) > 0$ ve $\forall t \geq T \geq t_0$ için

$$w' \leq B(t)w - C(t)w^2 - D(t) \quad [4.2]$$

olsun. Eğer H, P sınıfından ise $\forall t > T \geq t_0$ için

$$\Phi(t, s) = h(t, s) - B(s)\sqrt{H(t, s)}, \quad [4.3]$$

$$J(t, T) = \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left\{ \sqrt{C(s)H(t, s)} w(s) + \frac{1}{2\sqrt{C(s)}} \Phi(t, s) \right\}^2 ds \quad [4.4]$$

olmak üzere

$$\int_T^t \left[H(t, s) D(s) - \frac{1}{4C(s)} \Phi^2(t, s) \right] ds \leq H(t, T) [w(T) - J(t, T)] \quad [4.5]$$

dır.

İspat: [4.2] eşitsizliğinin her iki yanını $H(t, s)$ ile çarpıp T ' den t ' ye integral alınırsa

$$\int_T^t H(t, s) D(s) ds \leq - \int_T^t H(t, s) w'(s) ds + \int_T^t H(t, s) B(s) w(s) ds - \int_T^t H(t, s) C(s) w^2(s) ds \quad [4.6]$$

elde edilir. H, P sınıfından olduğundan

$$\begin{aligned} \int_T^t H(t, s) D(s) ds &\leq H(t, T) w(T) - \int_T^t [C(s) H(t, s) w^2(s) + (h(t, s) \sqrt{H(t, s)} \\ &\quad - B(s) H(t, s)) w(s)] ds \end{aligned}$$

$$= H(t, T) w(T) - \int_T^t \left(\sqrt{C(s)H(t, s)} w(s) + \frac{1}{2\sqrt{C(s)}} \Phi(t, s) \right)^2 ds$$

$$+ \int_{\tau}^t \frac{1}{4C(s)} \Phi^2(t, s) ds \quad [4.7]$$

elde edilir. Buradan kolaylıkla [4.5] bulunur

Teorem 4.1: p, q, f, k_1 ve k_2 fonksiyonları

- (a) $\forall t \geq t_0$ için $p(t) \geq 0$
- (b) $\forall x \in R - \{0\}$ ve $K > 0$ için $\frac{f(x)}{x} \geq K$
- (c) $\forall t \geq t_0$ için $q(t) \geq 0$
- (d) $\forall (u, v) \in R^2$ ve $\alpha_1 > 0$ için $k_1^2(u, v) \leq \alpha_1 v k_1(u, v)$

ve

- (e) $\forall (u, v) \in R^2$ ve $\alpha_2 > 0$ için $uv k_2(u, v) \geq \alpha_2 k_1^2(u, v)$

koşullarını sağlasın.

$$Q(t, s) = h(t, s) - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \sqrt{H(t, s)}$$

olmak üzere eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t [H(t, s) \rho(s) q(s) - \frac{\alpha_1 r^2(s) \rho(s)}{4K[\alpha_1 \alpha_2 p(s) + r(s)]} Q^2(t, s)] ds = \infty \quad [4.8]$$

sağlanacak şekilde P sınıfından H ve $\rho \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$ var ise bu durumda [4.1] denklemini salınımlıdır.

İspat: $x(t)$, [4.1] denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu durumda $\forall t \geq t_1 \geq t_0$ için $x(t) \neq 0$ olacak şekilde t_1 vardır. w fonksiyonu

$$w(t) = \rho(t) \frac{r(t)k_1(x(t), x'(t))}{x(t)} \quad [4.9]$$

biçiminde tanımlansın. w 'nin türevi alınırsa [4.9] ve [4.1]'den

$$\begin{aligned} w'(t) = & \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) - \rho(t)p(t) \frac{k_2(x(t), x'(t))x'(t)}{x(t)} - \rho(t)q(t) \frac{f(x(t))}{x(t)} \\ & - \rho(t)r(t)k_1(x(t), x'(t)) \frac{x'(t)}{x^2(t)} \end{aligned} \quad [4.10]$$

elde edilir. (a)-(e) koşullarından

$$w'(t) \leq \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) - K\rho(t)q(t) - \left(\frac{\alpha_2 p(t)}{\rho(t)r^2(t)} + \frac{1}{\alpha_1 \rho(t)r(t)} \right) w^2(t) \quad [4.11]$$

olur. B, C ve D fonksiyonları

$$B(t) = \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}, C(t) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 p(t) + r(t)}{\alpha_1 \rho(t)r^2(t)}, D(t) = K\rho(t)q(t) \quad [4.12]$$

şeklinde seçilirse Lemma 4.1' den

$$\int_{t_1}^t \left[H(t,s)D(s) - \frac{1}{4C(s)} Q^2(t,s) \right] ds \leq H(t,t_1)[w(t_1) - J(t,t_1)]$$

bulunur. $J(t,t_1) \geq 0$ ve $H(t,s)$, s 'ye göre artmayan olduğundan

$$\int_{t_1}^t [H(t,s)D(s) - \frac{1}{4C(s)}Q^2(t,s)]ds \leq H(t,t_0)|w(t_1)| \quad [4.13]$$

olup bu eşitsizlik kullanılırsa

$$\frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t [H(t,s)D(s) - \frac{1}{4C(s)}Q^2(t,s)]ds \leq \int_{t_0}^t D(s)ds + |w(t_1)| \quad [4.14]$$

elde edilir. İkinci yan sınırlı olduğundan bu [4.8] kabulü ile çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1: Teorem 4.1' deki [4.8] koşulu yerine

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t H(t,s)\rho(s)q(s)ds = \infty \quad [4.15]$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t \frac{r^2(s)\rho(s)}{\alpha_1\alpha_2 p(s) + r(s)} Q^2(t,s)ds < \infty \quad [4.16]$$

koşulları alındığında da [4.1] denklemini salınımlıdır.

Teorem 4.2 : (a)-(e) koşulları sağlansın. P sınıfından H fonksiyonu için

$$0 < \inf_{s \geq t_0} [\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}] \leq \infty \quad [4.17]$$

olsun. Q , Teorem 4.1' deki gibi ve $A_+(t) = \max\{A(t), 0\}$ olmak üzere $\forall T \geq t_0$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \frac{\rho(s)r^2(s)}{\alpha_1 \alpha_2 p(s) + r(s)} Q^2(t, s) ds < \infty, \quad [4.18]$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\alpha_1 \alpha_2 p(s) + r(s)}{\rho(s)r^2(s)} A_+^2(s) ds = \infty \quad [4.19]$$

ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[H(t, s) \rho(s) q(s) - \frac{\alpha_1 r^2(s) \rho(s)}{4K[\alpha_1 \alpha_2 p(s) + r(s)]} Q^2(t, s) \right] ds \geq \frac{1}{K} A(T) \quad [4.20]$$

olacak şekilde P sınıfından $H, \rho \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$ ve $A \in C[t_0, \infty)$ fonksiyonları varsa bu durumda [4.1] denklemi salınımlıdır.

İspat: B, C ve D [4.12]' deki gibi fonksiyonlar olmak üzere Teorem 4.1 ispatındaki yol izlenirse her $t \geq T \geq t_1$ için

$$\frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[H(t, s) D(s) - \frac{1}{4C(s)} Q^2(t, s) \right] ds \leq w(T) - J(t, T)$$

olup eşitsizliğin her iki tarafının $\liminf$ ' i alınırsa

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[H(t, s) D(s) - \frac{1}{4C(s)} Q^2(t, s) \right] ds \leq w(T) - \limsup_{t \rightarrow \infty} J(t, T) \quad [4.21]$$

olur. [4.21]' de [4.20] kullanılırsa $\forall T \geq t_1$ için

$$w(T) \geq A(T) + \limsup_{t \rightarrow \infty} J(t, T) \quad [4.22]$$

elde edilir. [4.22]' den her $T \geq t_1$ için $A(T) \leq w(T)$ olup [4.19] koşulundan

$$\int_{t_1}^{\infty} C(T)w^2(T)dT = \infty \quad [4.23]$$

bulunur. Her $t \geq t_1$ için $u(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonları

$$u(t) = \frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_1}^t C(s)H(t, s)w^2(s)ds$$

$$v(t) = \frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_1}^t Q(t, s)\sqrt{H(t, s)}w(s)ds$$

biçiminde tanımlansın. [4.7]' den

$$u(t) + v(t) = J(t, t_1) - \frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_1}^t \frac{1}{4C(s)} Q^2(t, s)ds \quad [4.24]$$

dır. [4.22] koşulundan $\forall T \geq t_1$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} J(t, T) < \infty,$$

[4.18] ve [4.24] koşullarından

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [u(t) + v(t)] < \infty \quad [4.25]$$

olduğu görülür.

Diğer yandan [4.17] kabulünden

$$\mu_1 < \inf_{s \geq t_0} [\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, t_0)}] \quad [4.26]$$

olacak şekilde $\mu_1 > 0$ vardır. $\mu_2 > 0$ verilen bir reel sayı olsun. [4.23]' den her $t \geq t_2$ için

$$\int_{t_1}^t C(s)w^2(s)ds \geq \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad [4.27]$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $t_2 > t_1$ vardır.

$$u(t) = \frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_1}^t H(t, s) d\left(\int_{t_1}^s C(\xi)w^2(\xi)d\xi\right) = \frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_1}^t H(t, s) d\left(\int_{t_1}^s C(\xi)w^2(\xi)d\xi\right)$$

olup sağ tarafa kısmi integrasyon uygulanırsa H' in P sınıfından olması ve [4.27]' dan $\forall t \geq t_2$ için

$$u(t) \geq \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{H(t, t_2)}{H(t, t_1)} \quad [4.28]$$

elde edilir. [4.26] ve [4.28]' den her $t \geq t_3$ için $u(t) \geq \mu_2$ olacak şekilde $t_3 \geq t_2$ vardır. μ_2 keyfi olduğundan bu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty \quad [4.29]$$

anlamına gelir.

Şimdi $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$ olacak şekilde (t_1, ∞) aralığında keyfi bir reel sayı dizisi $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ olsun. [4.25]' e göre her $n \geq 1$ için

$$u(T_n) + v(T_n) \leq \mu \quad [4.30]$$

olacak şekilde $\mu > 0$ sabiti vardır. [4.29] ve [4.30]' dan $\lim_{n \rightarrow \infty} u(T_n) = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} v(T_n) = -\infty$ elde edilir. Buradan her $n \geq n_1$ için

$$\frac{u(T_n) + v(T_n)}{u(T_n)} \leq \frac{\mu}{u(T_n)} < \frac{1}{2}$$

olacak şekilde bir $n_1 > 0$ tamsayısı vardır ki bu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v^2(T_n)}{u(T_n)} = \infty \quad [4.31]$$

olmasını gerektirir.

Diğer yandan Schwarz eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} v^2(T_n) &= \left\{ \frac{1}{H(T_n, t_1)} \int_{t_1}^{T_n} Q(T_n, s) \sqrt{H(T_n, s)} w(s) ds \right\}^2 \\ &\leq \frac{1}{H(T_n, t_1)} \int_{t_1}^{T_n} H(T_n, s) C(s) w^2(s) ds \\ &\quad \times \frac{1}{H(T_n, t_1)} \int_{t_1}^{T_n} \frac{1}{C(s)} Q^2(T_n, s) ds \\ &= \frac{u(T_n)}{H(T_n, t_1)} \int_{t_1}^{T_n} \frac{1}{C(s)} Q^2(T_n, s) ds \end{aligned}$$

bulunur. Buradan bu eşitsizlik $u(T_n)$ ' e bölünüp, H' in monotonluk kabulü kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{v^2(T_n)}{u(T_n)} &\leq \frac{1}{H(T_n, t_1)} \int_{t_1}^{T_n} \frac{1}{C(s)} Q^2(T_n, s) ds \\ &\leq \frac{1}{H(T_n, t_0)} \int_{t_0}^{T_n} \frac{1}{C(s)} Q^2(T_n, s) ds \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın limiti alınır [4.31]' dan

$$\frac{1}{H(T_n, t_0)} \int_{t_0}^{T_n} \frac{1}{C(s)} Q^2(T_n, s) ds = \infty$$

elde edilir. $\{T_n\}$ keyfi olduğundan bu [4.18] kabulü ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3: Teorem 4.2' deki [4.18] ve [4.20] koşulları dışında diğer tüm koşullar sağlansın. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \frac{\rho(s)r^2(s)}{\alpha_1\alpha_2 p(s) + r(s)} \Phi^2(t, s) ds < \infty$$

ve $\forall T \geq t_0$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[H(t, s) \rho(s) q(s) - \frac{\alpha_1 \rho(s) r^2(s)}{4K[\alpha_1 \alpha_2 p(s) + r(s)]} Q^2(t, s) \right] ds \geq \frac{1}{K} A(T)$$

ise, bu durumda [4.1] denklemini salınımlıdır.

Teorem 4.4: Teorem 4.1, Sonuç 4.1, Teorem 4.2 ve Teorem 4.3' deki (a) ve (e) koşulları yerine

$$(a_1) \quad \forall t \geq t_0, \alpha_1 > 0 \text{ ve } \alpha_2 > 0 \text{ için } \alpha_1 \alpha_2 p(t) + r(t) > 0$$

$$(e_1) \quad \forall (u, v) \in R^2 \text{ için } uvk_2(u, v) = \alpha_2 k_1^2(u, v)$$

koşulları alındığında da [4.1] denklemi salınımlıdır.

Uyarı 4.1: Yukarıdaki teoremden açıkça görülmektedir ki p üzerinde işaret kısıtlaması yoktur. Ancak k_2 fonksiyonu üzerine koşul gelmektedir.

Teorem 4.5: (d),

$$(b_1) \quad L > 0 \text{ sabiti ve } \forall x \neq 0 \text{ için } f'(x) \geq L \text{ ve } xf'(x) \neq 0$$

ve

$$(e_2) \quad \forall (u, v) \in R^2 \text{ için } k_1(u, v) = vk_2(u, v)$$

koşulları sağlansın.

$$\Phi(t, s) = \left(\frac{p(s)}{r(s)} - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \sqrt{H(t, s)} + h(t, s) \quad [4.32]$$

olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t [H(t, s) \rho(s) q(s) - \frac{\alpha_1 \rho(s) r(s)}{4L} \Phi^2(t, s)] ds = \infty \quad [4.33]$$

olacak şekilde P sınıfından H ve $\rho \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$ fonksiyonları varsa bu durumda [4.1] denklemini salınımlıdır.

İspat: $x(t)$, [4.1] denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu durumda her $t \geq t_1 \geq t_0$ için $x(t) \neq 0$ olacak şekilde t_1 vardır. w fonksiyonu

$$w(t) = \rho(t) \frac{r(t)k_1(x(t), x'(t))}{f(x(t))} \quad [4.34]$$

biçiminde tanımlansın. w' nin türevi alınırsa [4.34] ve [4.1]' den

$$\begin{aligned} w'(t) = & -\rho(t)q(t) - \left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{p(t)}{r(t)} \right) w(t) \\ & - \rho(t)r(t)k_1(x(t), x'(t)) \frac{f'(x(t))}{f^2(x(t))} x'(t) \end{aligned} \quad [4.35]$$

dır. $f'(x) \geq L$ kabulü ve (d)' den

$$w'(t) \leq -\rho(t)q(t) - \left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{p(t)}{r(t)} \right) w(t) - \frac{L}{\alpha_1 \rho(t)r(t)} w^2(t) \quad [4.36]$$

eşitsizliğine ulaşılır. B, C ve D fonksiyonları

$$B(t) = \left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{p(t)}{r(t)} \right), C(t) = \frac{L}{\alpha_1 r(t) \rho(t)}, D(t) = \rho(t)r(t)$$

şeklinde seçilirse Lemma 4.1' den

$$\int_{t_1}^t [H(t, s) \rho(s) q(s) - \frac{\alpha_1 r(s) \rho(s)}{4L} \Phi^2(t, s)] ds \leq H(t, t_1) [w(t_1) - J(t, t_1)]$$

bulunur. Teorem 4.1' in ispatında izlenen benzer yollar takip edilerek ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2: Teorem 4.5' deki [4.33] koşulu yerine

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) \rho(s) q(s) ds = \infty$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t r(s) \rho(s) \Phi^2(t, s) ds < \infty$$

alındığında da [4.1] denklemini salınımlıdır.

Teorem 4.6: (b_1) , (d) ve (e_2) koşulları sağlansın. P sınıfından H , fonksiyonu için

$$0 < \inf_{s \geq t_0} \{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, t_0)} \} \leq \infty$$

olsun. Φ , Teorem 4.5' deki gibi ve $A_+(t) = \max\{A(t), 0\}$ olmak üzere $\forall T \geq t_0$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t r(s) \rho(s) \Phi^2(t, s) ds < \infty, \quad [4.37]$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{A_+^2(s)}{r(s) \rho(s)} ds = \infty$$

ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t [H(t, s) \Phi(s) \rho(s) - \frac{\alpha_1}{4L} r(s) \rho(s) \Phi^2(t, s)] ds \geq A(T) \quad [4.38]$$

koşullarını sağlayan P sınıfından $H, \rho \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$ ve $A \in C([t_0, \infty), (0, \infty))$ fonksiyonları varsa bu durumda [4.1] denklemi salınımlıdır.

Teorem 4.7: Teorem 4.6' daki [4.37] ve [4.38] şartları yerine

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t r(s) \rho(s) \Phi^2(t, s) ds < \infty$$

ve $\forall T \geq t_0$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t [H(t, s) \Phi(s) \rho(s) - \frac{\alpha_1}{4L} r(s) \rho(s) \Phi^2(t, s)] ds \geq A(T)$$

koşulları alındığında da [4.1] denklemi salınımlıdır.

f , üzerindeki türevlenebilirlik şartı kaldırıldığında

(a₂) p sürekli türevlenebilir

koşulu gelmektedir.

Teorem 4.8 : (a₂), (b), (c), (d) ve (e₂) koşulları sağlansın.

$$\Phi_1(s) = Kq(s) - \frac{\alpha_1}{4} \frac{p^2(s)}{r(s)} + \frac{1}{\alpha_1} r(s) \rho_2^2(s) - \frac{\alpha_1}{2} p'(s) - (r(s) \rho_2(s))',$$

$$\Phi_2(t, s) = h(t, s) - \left[\frac{\rho_1'(s)}{\rho_1(s)} + \frac{2}{\alpha_1} \rho_2(s) \right] \sqrt{H(t, s)}$$

olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t [H(t, s) \Phi_1(s) \rho_1(s) - \frac{\alpha_1}{4} r(s) \rho_1(s) \Phi_2^2(t, s)] ds = \infty \quad [4.39]$$

olacak şekilde P sınıfından $H, \rho_1 \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$ ve $(r\rho_2) \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonları varsa durumda [4.1] denklemi salınımlıdır.

İspat: $x(t)$, [4.1] denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu durumda her $t \geq t_1 \geq t_0$ için $x(t) \neq 0$ olacak şekilde t_1 vardır. w fonksiyonu

$$w(t) = \rho_1(t) \left[r(t) \frac{k_1(x(t), x'(t))}{x(t)} + r(t) \rho_2(t) + \frac{\alpha_1}{2} p(t) \right]$$

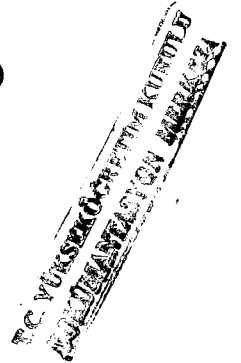
şeklinde tanımlansın. w 'nin türevi alınırsa [4.1] ve teoremin şartlarından

$$w'(t) \leq \left[\frac{\rho_1'(t)}{\rho_1(t)} + \frac{2}{\alpha_1} \rho_2(t) \right] w(t) - \frac{1}{\alpha_1 r(t) \rho_1(t)} w^2(t) - \Phi_1(t) \rho_1(t)$$

eşitsizliği elde edilir. B, C ve D fonksiyonları

$$B(t) = \frac{\rho_1'(t)}{\rho_1(t)} - \frac{2}{\alpha_1} \rho_2(t), C(t) = \frac{1}{\alpha_1 r(t) \rho_1(t)}, D(t) = \rho_1(t) \Phi_1(t)$$

şeklinde seçilirse Lemma 4.1' den



$$\int_{t_1}^t [H(t,s)\rho_1(s)\Phi_1(s) - \frac{\alpha_1 r(s)\rho_1(s)}{4} \Phi_2^2(t,s)] ds \leq H(t,t_1)[w(t_1) - J(t,t_1)]$$

bulunur. Teorem 4.1' in ispatında izlenen benzer yollar takip edilerek ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3: Teorem 4.8' deki [4.39] koşulu yerine

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t H(t,s)\rho_1(s)\Phi_1(s) ds = \infty$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t r(s)\rho_1(s)\Phi_2^2(t,s) ds < \infty$$

alındığında da [4.1] denklemini salınımlıdır.

Teorem 4.9: (a_2) , (b) , (c) , (d) ve (e_2) sağlansın. P sınıfından H fonksiyonu için

$$0 < \inf_{s \geq t_0} \{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)} \} \leq \infty$$

olsun. Φ_1 ve Φ_2 Teorem 4.8' deki gibi ve $A_+(t) = \max\{A(t), 0\}$ olmak üzere $\forall T \geq t_0$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t r(s)\rho_1(s)\Phi_2^2(t,s) ds < \infty, \quad [4.40]$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{A_+^2(s)}{r(s)\rho_1(s)} ds = \infty$$

ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t [H(t, s)\Phi_1(s)\rho_1(s) - \frac{\alpha_1}{4} r(s)\rho_1(s)\Phi_2^2(t, s)] ds \geq A(T) \quad [4.41]$$

koşullarını sağlayan P sınıfından $H, A \in C([t_0, \infty), R), \rho_1 \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$ ve $(r\rho_2) \in C^1([t_0, \infty), R)$ fonksiyonları varsa bu durumda [4.1] denklemi salınımlıdır.

Teorem 4.10: Teorem 4.9' daki [4.40] ve [4.41] şartları yerine

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t r(s)\rho_1(s)\Phi_2^2(t, s) ds < \infty$$

ve $\forall T \geq t_0$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t [H(t, s)\Phi_1(s)\rho_1(s) - \frac{\alpha_1}{4} r(s)\rho_1(s)\Phi_2^2(t, s)] ds \geq A(T)$$

koşulları alındığında da [4.1] denklemi salınımlıdır.

$\rho_2(t) = -\frac{\alpha_1}{2} \frac{p(t)}{r(t)}$ alınırsa p üzerindeki türevlenebilirlik, $f(x) = x$ alınırsa q

üzerindeki işaret koşulu kalkar.

4.2. Örnekler

$H(t, s) = (t - s)^2$, $\rho(t) = \rho_1(t) = t$ ve $\rho_2(t) \equiv 0$ olsun. Ayrıca $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ veya $1, K = L = 1$ olacak şekilde fonksiyonlar seçilsin.

Örnek 4.1: $\delta \geq 1$ ve $k_1(u, v) = \frac{u^2 v}{1 + u^2}, k_2(u, v) = \frac{u^3 v(1 + u^2 + v^2)}{(1 + u^2)^2} (\alpha_1 = \alpha_2 = 1)$,

$f(x) = x(2 + \cos x), (K = 1)$ olmak üzere

$$((3 + \sin t)k_1(x, x'))' + (\delta + \sin t)k_2(x, x')x' + \cos^2 t f(x) = 0, t \geq 1$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $\forall x \neq 0$ için $\frac{f(x)}{x} \geq 1$ fakat $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ için

$f'(x) \geq 1$ olacak şekilde L yoktur. $Q(t, s) = 3 - \frac{t}{s}$ olup [4.8]'den

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-1)^2} \int_1^t \left\{ (t-s)^2 s \cos^2 s - \frac{(3 + \sin^2 s)^2 s}{4(3 + \delta + 2 \sin s)} (3 - t/s)^2 \right\} ds = \infty$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.1' in tüm koşulları sağlandığı için yukarıdaki denklemin tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 4.2: $f(x) = x(2 + \cos x)$ alınabilir ve

$$k_1(u, v) = \frac{u^2 v}{1 + u^2}, k_2(u, v) = \frac{u^3}{(1 + u^2)^2}, (uvk_2(u, v) = k_1^2(u, v))$$

olmak üzere

$$((3 + \sin t)k_1(x, x'))' + \sin t k_2(x, x')x' + \cos^2(t) f(x) = 0, t \geq 1$$

denklemini göz önüne alalım. [4.8]' dan

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-1)^2} \int_1^t \left\{ (t-s)^2 s \cos^2 s - \frac{(3+\sin s)^2 s}{4(3+2\sin s)} \left(3 - \frac{t}{s}\right)^2 \right\} ds = \infty$$

elde edilir. Dikkat edilmelidir ki $\alpha_1 \alpha_2 p(t) + r(t) = 3 + \sin t > 0$ ' dır. Böylece Teorem 4.4' in tüm koşulları sağlandığı için yukarıdaki denklemin tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 4.3: $k(u, v)$ fonksiyonu

$$\frac{u^2 v}{1+u^2}, \frac{u^2 v^3}{1+u^2 v^2}, \frac{v}{1+u^2}, \frac{v \cos^2 u}{1+u^2} \quad (\alpha_1 = 1)$$

fonksiyonlarından herhangi biri ve $f(x)$, (b_1) şartını sağlayan herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$(t^{-1} k(x, x'))' + t^{-2} k(x, x') x' + t^2 \sin t f(x) = 0, t \geq 1$$

denklemini göz önüne alalım. Örneğin; $f(x) = x + x^3$ alınabilir. Sonuç 4.2' in sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Böylece yukarıdaki denklemin tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 4.4: β reel bir sayı, $k(u, v)$, Örnek 4.3' deki gibi ve $f(x), x=1$ için (b) koşulunu sağlayan herhangi fonksiyon olmak üzere, $\rho_1(t) = 1$ için

$$(t^{-2} k(x, x'))' + \beta t^{-3} k(x, x') + t^{-2} f(x) = 0; t \geq 1$$

denklemini göz önüne alalım. Örneğin; $f(x) = x + x^3$ alınabilir. Kolaylıkla görülebilir ki

$$\Phi_1(t) = \frac{4t^2 + \beta(6 - \beta)}{4t^4}, \Phi_2(t, s) \equiv 2, A(T) = \frac{12T^2 + \beta(6 - \beta)}{12T^3}$$

dir. Teorem 4.9' un tüm koşulları sağlandığından diferensiyel denklemin tüm çözümleri salınımlıdır.



KAYNAKLAR

1. Grace S.R., "Oscillation theorems for nonlinear differential equations of second order", *J. Math. Anal. Appl.* 171: 220-241 (1992).
2. Hartman P., "Ordinary Differential Equations", *Wiley*, New York, (1964).
3. Humi M. and Miller W., "Second course in Ordinary Differential Equations for Scientist and Engineers", *Springer-Verlag*, New York, (1988).
4. Rao R.M., "Ordinary Differential Equations", *Arnold Limited*, 53: 483-492 (1989).
5. Swanson C.A., "Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations", *Academic Press*, (1968).
6. Rogovchenko Yu.V., "Oscillation theorems for second-order equations with damping", *Nonlinear Anal.*, 41: 1005-1028 (2000).
7. Tiryaki A., Zafer A. "Oscillation of second order nonlinear differential equations with nonlinear damping", *Math. Comput. Model.*, (baskıda) (2003).
8. Sturm C., "Sur Les Equations Diffrentielles Lineaires Du Second Order", *J. Math. Pures Appl.*, 1: 106-186 (1836).
9. Ayanlar, B., "İkinci Basamaktan Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemler Çözümlerinin Salınımlılığı", Doktora Tezi, *H.Ü. Fen Bilimleri Ens.*, Ankara, (1999).
10. Cecci M. And Marini M., "Asymptotic Decay of Solutions of Nonlinear Second Order Differential Equations with Deviating Arguments", *J. Math. Anal. Appl.*, 138: 371-384 (1989).
11. Philos Ch.G., "Oscillation theorems for linear differential equations of second order", *Arc Math. (Basel)*, 53: 483-492 (1989).
12. Li H.J., "Oscillation criteria for second order linear differential equations", *J. Math. Anal Appl.*, 194: 217-234 (1995).
13. Hardy G.H., Littlewood J.E. and Polya G., "Inequalities 2nd ed.", Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, (1988).
14. Wong J.S.W., "A second Order Nonlinear Oscillation Theorem", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 40: 487-491 (1973).
15. Philos Ch.G., "A second order superlinear oscillation criterion", *Canad. Math. Bull.*, 27: 102-112 (1984).

16. Tiryaki A., Zafer A. "Ocillation criteria for second order nonlinear differential equation with damping", *Turkish J. Math.*, 24: 185-196 (2000).
17. Grace S.R., "Oscillation theorems for second order nonlinear differential equations with damping", *Math.Nachr.*, 141: 117-127 (1989).
18. Ayanlar, B., Tiryaki, A., "Oscillation theorems for nonlinear second order differential equation with damping", *Acta Math. Hungar.*, 89: 1-13 (2000).
19. Baker, J.W., "Oscillation theorems for a second order damped nonlinear equation", *SIAM J. Appl. Math.*, 19: 601-606 (1973).
20. Bobisud, L.E., "Oscillation of solutions of damped nonliear equations", *SIAM J. Appl. Math.*, 19: 601-606 (1970).
21. Grace S.R., Lalli B.S., Yeh C.C., "Oscillation theorems for nonlinear second differential equations with a nonlinear damping term", *SIAM J. Math.Anal.* 15: 1082-1093 (1984).
22. Rogovchenko S.P., Rogovchenko Yu. V., "Oscillation theorems for differential equations with damping", *J. Math. Anal. Appl.*, 279: 121-134 (2003).
23. Rogovchenko Yu.V., "Oscillation criteria for second order nonlinear perturbed differential equations", *J.Math. Anal. Appl.*, 215: 334-357 (1997).
24. Deo S.G. and Raghavendra V., "Ordinary Differential Equations and Stability Theory", *Tata Mc Graw-Hill.*, Publishing Company Limited, New Delhi, 1988.
25. Elabbasy E.M., Elsharabasy M.A., "Oscillation properties for second order nonlinear differential equations", *Kyungpook Math. J.* 37: 211-220 (1997).

ÖZGEÇMİŞ

1979 Yılında Ankara İli Şereflikoçhisar İlçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Şereflikoçhisar' da tamamladı. 1997 Yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdi. Haziran 2001 Yılında mezun oldu. Aynı yıl Gazi Üniversitesi Yüksek Lisans sınavına girerek yüksek lisans matematik öğrencisi oldu.

