

**İKİNCİ BASAMAKTAN GECİKMELİ FONKSİYONEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI**

Behiye Ceren KARTAL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2006
ANKARA**

Behiye Ceren KARTAL tarafından hazırlanan İKİNCİ BASAMAKTAN GECİKMELİ FONKSİYONEL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. A. Okay ÇELEBİ

Üye : Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

Üye : Prof. Dr. Şeref MİRASYEDİOĞLU

Üye : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR

Tarih : 23 / 06 / 2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orjinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Behiye Ceren KARTAL

İKİNCİ BASAMAKTAN GECİKMELİ FONKSİYONEL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

(Yüksek Lisans Tezi)

Behiye Ceren KARTAL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2006

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu tezde genel olarak ikinci basamaktan yarı lineer tipten gecikmeli diferensiyel denklemlerin salınımlılığı üzerinde durulmuştur. Birinci bölümde genel olarak fonksiyonel diferensiyel denklemler tanıtılmaya çalışılmıştır. Bu anlamda, bu tip denklemlerin sınıflandırılması, başlangıç-değer problemi için varlık, teklik teoremleri ve salınımlılık tanımları üzerinde durulmuştur. İkinci bölümde

$$\left(\frac{1}{r(t)} y'(t) \right)' + p(t) \cdot y(\tau(t)) = 0$$

$$\left(r(t) |u'(t)|^{\alpha-1} u'(t) \right)' + p(t) |u(\tau(t))|^{\beta-1} u(\tau(t)) = 0$$

$$\left[r(t) |u'(t)|^{\alpha-1} u'(t) \right]' + p(t) |u(\tau(t))|^{\beta-1} u(\tau(t)) = 0$$

şeklindeki ikinci basamaktan fonksiyonel tipten denklemlerin çözümlerinin salınımlılığına ilişkin kriterler irdelenmiştir. Üçüncü bölümde de daha genel

tipten olan

$$\left(r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right)' + F(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t), x'(\tau(t))) = 0$$

denklemine ilişkin Tiriyaki [13] tarafından elde edilen salınımlılık sonuçları incelenmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.138

Anahtar Kelimeler : Fonksiyonel denklemler, yarı lineer denklemler, gecikmeli tipten denklemler, salınımlılık, salınımsızlık, salınımlılık kriterleri.

Sayfa Adedi : 60

Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Aydın TIRYAKİ

**OSCILLATIONS OF SOLUTIONS OF SECOND ORDER FUNCTIONAL
DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS**

(M.Sc. Thesis)

Behiye Ceren KARTAL

GAZI UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

June 2006

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters. The thesis is devoted to a general discussion of second order half linear functional differential equations.

The first chapter is devoted to a general discussion of functional differential equations. In this context, the classification of these types of equation, existence and uniqueness theorems for initial-value problems, and oscillation definitions have been investigated. The second chapter, criteria with second order functional type equations of the form.

$$\left(\frac{1}{r(t)} y'(t) \right)' + p(t) y(\tau(t)) = 0$$

$$\left(r(t) |u'(t)|^{\alpha-1} u'(t) \right)' + p(t) |u(\tau(t))|^{\beta-1} u(\tau(t)) = 0$$

$$\left[r(t) |u'(t)|^{\alpha-1} u'(t) \right]' + p(t) |u(\tau(t))|^{\beta-1} u(\tau(t)) = 0$$

are examined.

The third chapters provides type equations of the form which defined Tiryaki [13]. Criteria to the oscillation.

$$\left(r(t) |x'(t)|^{\alpha-1} x'(t) \right)' + F(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t), x'(\tau(t))) = 0$$

Science Code	: 204.1.138
Key Words	: Functional equations, Half-linear equations, delay type equations, Oscillation, Nonoscillation, Oscillation criteria.
Page Number	: 60
Adviser	: Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde, değerli bilgileri ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman her türlü konuda yol gösteren ve yardımcı olan, çok değerli hocam ve danışmanım Gazi Üniversitesi öğretim elemanı sayın Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ'ye katkılarından dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen canım aileme, sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	2
2.1. Adımlar Yöntemi	5
2.2. Başlangıç Değer Problemi için Varlık ve Teklik Teoremleri	7
2.3. Salınımlılık Tanımı	10
3. İKİNCİ BASAMAKTAN YARI LİNEER TİPTEN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI	13
3.1. $\left(\frac{1}{r(t)} y'(t) \right)' + p(t) \cdot y(\tau(t)) = 0$ Denkleminin İlişkin Sonuçları	13
3.2. $\left(r(t) u'(t) ^{\alpha-1} u'(t) \right)' + p(t) u(\tau(t)) ^{\beta-1} u(\tau(t)) = 0$ Denkleminin İlişkin Sonuçları	19
3.3. $\left[r(t) u'(t) ^{\alpha-1} u'(t) \right]' + p(t) u(\tau(t)) ^{\beta-1} u(\tau(t)) = 0$ Denkleminin İlişkin Sonuçları	30
4. İKİNCİ BASAMAKTAN FONKSİYONEL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI	46
4.1. $\left(r(t) x'(t) ^{\alpha-1} x'(t) \right)' + F(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t), x'(\tau(t))) = 0$ Denkleminin İlişkin Sonuçları	46
KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİŞ	60

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemlerin genel bir tipi olan fonksiyonel diferensiyel denklemler, bağımsız değişkeninin (argument) farklı değerleriyle bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun türevlerini bulunduran denklemlerdir. Rus literatüründe, "değişen argümentli diferensiyel denklemler" olarak adlandırılan denklem kavramı ilk kez onsekizinci yüzyılın ikinci yarısında Kondorse (1771) tarafından ortaya çıkmıştır. Ancak bu tür denklemler için sistematik bir çalışma daha çok yirminci yüzyılda uygulamalı bilime duyulan ihtiyaçtan dolayı yapılmaya başlanmıştır. Değişen argümentli diferensiyel denklemler; otomatik kontrol teori, salınım sistemler teorisi, roket hareketindeki ateşlemeyle bağlantılı problemlere ilişkin incelemelerde, ekonomide uzun vadeli planlamayla ilgili problemlerde ve teknolojiye olduğu gibi bilimin birçok sahasında uygulama alanına sahiptir [1]. Uygulama alanının çokluğu, değişen argument içeren diferensiyel denklemler teorisinin, hızla gelişmesini sağlamaktadır. Günümüzde bu tür denklemlerin içerdiği teori, matematiğin en hızlı gelişen dallarından biri haline gelmiştir.

Bu kesimde, bu tür denklemlerin, sınıflandırılması yapılarak, bazı özellikleri üzerinde durulacaktır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

En basit değişen (deviating) argümentli diferensiyel denklem,

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) \quad (2.1)$$

şeklindedir. Burada, zaman başlangıcı için τ gecikme (delay) sabiti pozitif varsayılacaktır.

Temel başlangıç değer problemi; Eş.2.1'e ilaveten $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ için tanımlı

$$x(t) = \phi(t) \quad (2.2)$$

başlangıç koşulundan ibarettir. Buna göre, problemin çözümü olarak, $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ için Eş.2.2'yi ve $t > t_0$ için Eş.2.1'i sağlayan bir $x(t)$ fonksiyonunu kastediyoruz. Buradaki ϕ sürekli fonksiyonu, başlangıç fonksiyonu adını alır. Başlangıç fonksiyonunun tanımlanmış olduğu $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ kapalı aralığına başlangıç kümesi adı verilir ve E_{t_0} ile gösterilir. t_0 noktasına başlangıç noktası denir.

Genellikle

$$x(t_0 + 0) = \phi(t_0)$$

olduğu varsayılmıştır.

Eş.2.1'de $\tau = \tau(t) > 0$ değişken gecikme durumunda t_0 noktasını içeren, E_{t_0} başlangıç kümesi üzerinde $t > t_0$ için bu denklemin bir çözümünü bulmak gerektiği gibi $t \geq t_0$ için t_0 dan küçük olan $t - \tau(t)$ değerleri içinde $x(t)$ çözümü, verilen $\phi(t)$ başlangıç fonksiyonu ile uyuşmalıdır. Örnek olarak,

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\cos^2 t))$$

denkleminde, $t_0 = 0$ için $\phi(t)$ başlangıç fonksiyonu $-1 \leq t \leq 0$ aralığı üzerinde verilmelidir.

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t/2))$$

denkleminde ise $t_0 = 0$ için, E_0 başlangıç kümesi $t_0 = 0$ tek noktadan ibarettir. Fakat, bu denklemde $t_0 = 1$ için E_1 başlangıç kümesi $1/2 \leq t \leq 1$ dir.

Uygulamalı problemlerde, başlangıç fonksiyonu genellikle deneyle bulunur. Başlangıç fonksiyonu, değişen argüment içermeyen başka bir denklem ile tanımlanabilir.

k değişen argümentli, n 'inci basamaktan

$$\begin{aligned} x^{(m_0)}(t) &= f(t, x(t), \dots, x^{(m_{o-1})}(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x^{(m_1)}(t - \tau_1(t)) \\ &\dots, x(t - \tau_k(t)), \dots, x^{(m_k)}(t - \tau_k(t))) \end{aligned} \quad (2.3)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada, $\tau_i(t) > 0$ ve $\max_{0 \leq i \leq k} m_i = n$ dir. Ayrıca,

$z = t - \tau_i(t)$ olmak üzere $x^{(p)}(t - \tau_i(t))$ ile z noktasında alınmış $x(z)$ fonksiyonunun p 'inci türevi ifade edilmektedir. Bundan sonra $\tau_i(t)$ sapmalarının (deviations) sürekli olduğunu varsayacağız.

Verilmiş başlangıç noktası t_0 olsun. Başlangıç kümesi, t_0 noktasını ve $t \geq t_0$ için $t - \tau_i(t) < t_0$ olacak şekilde $t - \tau_i(t)$ değerlerini içerecek biçimde her sapma bir $E_{t_0}^{(i)}$

başlangıç kümesi tanımlar. Başlangıç kümesi $E_{t_0} = \bigcup_{i=1}^k E_{t_0}^{(i)}$ ile gösterilir. $\eta = \max_{1 \leq i \leq k} m_i$

olmak üzere $p = 0, 1, \dots, \eta$ için E_{t_0} üzerinde $\phi_p(t)$ sürekli fonksiyonları verilmelidir.

Uygulamalarda, E_{t_0} üzerinde $\phi_p(t) = \phi_0^{(p)}(t)$, $p = 0, 1, \dots, \eta$ biçiminde göz önüne alınır.

$$x_0^{(p)} = \phi_p(t_0), p = 0, 1, \dots, \eta$$

olsun. Eğer, $\eta < n - 1$ ise $x_0^{\eta-1}$ sayıları da verilir.

Eş.2.3 için, temel başlangıç değer problemi,

$$\begin{aligned} x^{(p)}(t_0 + 0) &= x_0^{(p)}, \quad p = 0, 1, \dots, n-1 \\ x^{(p)}(t - \tau_i(t)) &= \phi_p(t - \tau_i(t)), \quad t - \tau_i(t) < t_0, \\ p &= 0, 1, \dots, \eta; \quad i = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (2.4)$$

koşulları altında, $t > t_0$ için Eş.2.3'ün, $(n - 1)$ kez sürekli türevlenebilir bir $x(t)$ çözümünün tanımlanmasından ibarettir.

2.1. Örnek:

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t), x(t - \cos^2 t), x(t/2)) \quad (2.5)$$

denkleminde $t_0 = 0$ için $n = 2$, $k = 2$, $\eta = 0$ dir. $E_0^{(1)}$ başlangıç kümesi $-1 \leq t \leq 0$ ve $E_0^{(2)}$ kümesinde $t_0 = 0$ olup, E_0 başlangıç kümesi, $-1 \leq t \leq 0$ aralığından oluşur. Bu küme üzerinde, $x_0^{(0)} = \phi_0(0)$ ve $x_0^{(1)}$ sayıları verilmelidir. Değişen argümentli denklemlerin bir doğal sınıflandırılması, G.A. Kamenskii [2] tarafından yapılmıştır. Eş.2.3'de, $\lambda = m_0 - \eta$ denilirse, denkleme

(i) $\lambda > 0$ durumunda gecikme (retarded) argümentli tip,

(ii) $\lambda = 0$ durumunda nötr (neutral) tip,

(iii) $\lambda < 0$ durumunda ileri (advanced) tip, diferensiyel denklem adı verilir. Her üç duruma örnek olarak,

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-r)), \quad r > 0, \quad \lambda = 1$$

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \cos^2 t)), \quad \lambda = 1$$

$$x''(t) = f(t, x(t/2), x'(t/2), x(t), x'(t)), \quad t \geq 0$$

denklemlerinden herbirinde $\lambda > 0$ olduğundan, bu denklemler gecikme argümentli denklemlerdir.

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t), x(t-1), x'(t-1), x''(t-1)),$$

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t/2), x'(t/2))$$

denklemleri $\lambda = 0$ olduğundan, nütür tipden denklemlerdir.

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-1), x'(t-1), x''(t-1)), x'$$

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\cos^2 t), x'(t-\cos^2 t), x''(t-\cos^2 t))$$

denklemleri için $\lambda < 0$ olup ileri tipten değişen argümentli denklemlerdir.

2.1. Adımlar Yöntemi

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-r))$$

$$x(t) = \phi(t), t_0 - r \leq t \leq t_0$$

şeklindeki en basit gecikme argümentli diferensiyel denkleme ilişkin başlangıç değer problemini gözönüne alalım. Burada $r > 0$ dır. Bu problem için en doğal çözüm yöntemi;

$$x'(t) = f(t, x(t), \phi_0(t-r))$$

$$x(t_0) = \phi_0(t_0), t_0 \leq t \leq t_0 + r$$

şeklindeki gecikmesiz diferensiyel denkleminde, $x(t)$ çözümünün belirlenmesinden ibaret olan “adımlar” ya da “ardışık integraller” yöntemidir. $t_0 \leq t \leq t_0 + r$ için $t-r$ argümenti $[t_0-r, t_0]$ başlangıç cümlesinde değişir ve sonuç olarak f fonksiyonunun $x(t-r)$ üçüncü argümenti $\phi_0(t-r)$ başlangıç fonksiyonuna eşittir. Varsayalım ki; $[t_0, t_0 + r]$ aralığı üzerinde bu başlangıç değer probleminin bir $x = \phi_1(t)$ çözümü mevcuttur. Benzer şekilde

$$t_0 + r \leq t \leq t_0 + 2r \text{ için}$$

$$x'(t) = f(t, x(t), \phi_1(t_0 - r))$$

$$x(t_0 + r) = \phi_1(t_0 + r)$$

.....

$$t_0 + nr \leq t \leq t_0 + (n+1)r \text{ için}$$

$$x'(t) = f(t, x(t), \phi_n(t-r))$$

$$x(t_0 + nr) = \phi_n(t_0 + nr)$$

elde edilir. Burada $\phi_j(t), t_0 + (j-1)r \leq t \leq t_0 + jr$ aralığı üzerinde gözönüne alınan başlangıç değer probleminin bir çözümüdür. Bu yöntem yardımıyla çeşitli sonlu aralıklarda çözüm tanımlanır. Ayrıca ϕ ve f , değişkenlerinin sürekli fonksiyonları ise, $(t_0, \phi(t_0))$ noktasının komşuluğu bir çözümün varlığını gösterir.

Şimdi bu yönteme ilişkin örnekler verelim.

2.2. Örnek:

$$x'(t) = 6x(t-1)$$

$$x(t) = t, 0 \leq t \leq 1$$

problemini gözönüne alalım. $0 \leq t \leq 3$ için $x(t)$ çözümünü bulalım. Adımlar yöntemi uygulanırsa

$$x'(t) = 6(t-1)$$

$$x(1) = 1, 1 \leq t \leq 2$$

elde edilir. Bu problemin çözümü

$$x(t) = 3(t-1)^2 + 1$$

dir. Benzer şekilde

$$x'(t) = 6[3(t-2)^2 + 1], 2 \leq t \leq 3$$

$$x(2) = 4$$

prbleminin çözümü

$$x(t) = 6(t-2)^3 + 6t - 8$$

dir.

Adımlar yöntemi, değişen argümentli denklemlerin integrali için de temel yöntemlerden biridir. Bu yöntemin

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-r(t))) \quad (2.6)$$

denkleminin uygulanması

$\gamma_{n-1}(t_0) \leq t \leq \gamma_n(t_0)$ için gecikmesiz

$$x'(t) = f(t, x(t), \phi_n(t-r(t))) \quad (2.7)$$

denkleminin integrasyonuna indirgenir.

Eğer Eş.2.6'ya adımlar yöntemi uygulanabiliyorsa ve Eş.2.7 herhangi bir sürekli $\phi_n(t)$ fonksiyonu için çözülebiliyorsa Eş.2.7'ye integrallenebilir denir.

Bu uygulama $x'(t) = f(t, x(t), x(t-r_1(t)), \dots, x(t-r_m(t)))$ şeklindeki denklem ve hatta daha yüksek basamaktan denklem ve sistemler için de geçerlidir.

2.2. Başlangıç Değer Problemi için Varlık ve Teklik Teoremleri

Gecikme argümentli denklemler için, başlangıç değer problemleri ile ilk defa A.D. Myshkis [3] çalışmıştır. Nötür tip için, genel teorilerin ilk teoremleri G.A. Kamenskii [2] tarafından elde edilmiştir. Uygulamada çok sık karşılaşılan denklemler, gecikme argümentli diferensiyel denklemlerdir. Değişen argümentli n'inci basamaktan denklemler, adi diferensiyel denklemlerde olduğu gibi, birinci basamaktan bir denklem sistemine dönüştürülebilir.

$$i = 1, 2, \dots, n \text{ için, } \tau_i(t) \leq t, \lim_{t \rightarrow \infty} \tau_i(t) = \infty \quad (2.8)$$

olmak üzere, bazı $T \in R$ 'ler ve bazı pozitif m tamsayıları için,

$$f \in C((T, \infty) \times R^m \times \dots \times R^m, R^m) \text{ ve } \tau_i \in C((T, \infty), R^+) \quad (2.9)$$

olacak şekilde

$$x'(t) + f(t, x(t), x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_n(t))) = 0 \quad (2.10)$$

gecikmeli (delay) diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Her $t_0 \geq T$ başlangıç noktası için, t_{-1}

$$t_{-1} = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \inf_{t \geq t_0} \tau_i(t) \right\} \quad (2.11)$$

ile tanımlansın. Eş.2.10 ve verilen $t_0 \geq T$ başlangıç noktası ile birlikte,

$\phi: (t_{-1}, t_0) \rightarrow R^m$, verilen bir başlangıç fonksiyonu olmak üzere, $t_{-1} \leq t \leq t_0$ için bir

$$x(t) = \phi(t) \quad (2.12)$$

başlangıç koşulu olacak şekilde, Eş.2.10 ve Eş.2.12 başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

2.1. Tanım:

$x: (t_{-1}, \infty) \rightarrow R^m$ fonksiyonu, $t \in (t_0, \infty)$ için sürekli türevlenebilir olsun. Her $t \in (t_0, \infty)$ için $x(t)$, Eş.2.10'u sağlıyorsa, $x(t)$ 'ye Eş.2.10'un bir çözümüdür denir. Fonksiyonel diferensiyel denklemlerinin çözümlerinin, varlık ve tekliğine ilişkin sonuçlar için, El'sgol'ts ve Norkin [1] (1973), Hale [4] (1977), Driver [5] (1977), Gyori ve Ladas [6] (1991), Bainov ve Mishev [7] (1992) kitaplarına bakılabilir.

Bununla birlikte, çözümlerin global varlığına ilişkin, üç önemli teoremi ifade edelim [8,9].

2.1. Teorem:

Eş.2.8 ve Eş.2.9'a ek olarak her $t \geq T$ için ve her

$x_i, y_i \in R^m, i = 0, 1, 2, \dots, n$ için

$$\|f(t, x_0, x_1, \dots, x_n) - f(t, y_0, y_1, \dots, y_n)\| \leq p(t) \sum_{i=0}^n \|x_i - y_i\| \quad (2.13)$$

global Lipschitz koşulu sağlanacak şekilde bir $p \in C((T, \infty), R^+)$ fonksiyonunun var olduğunu kabul edelim. $t_0 \geq T$ ve $\phi \in C((t_0, \infty), R^m)$ olmak üzere, Eş.2.10 ve Eş.2.12 başlangıç değer probleminin, (t_0, ∞) aralığında mevcut bir tek çözümü vardır. Eş.2.10'un özel durumu olan, uygulamada çok karşılaşılan

$$\left(|u'|^{\alpha-1} u'\right)' + q(t)|u|^{\beta-1} u = 0 \quad (2.14)$$

denklemini göz önüne alalım, $\alpha = \beta$ alınırsa; Eş.2.14, yarı lineer dife-rensiyel denklem adını alır. α ve β pozitif sabitler ve $q \in C(t_0, \infty)$ fonksiyon olmak üzere, Eş.2.14,

$$\left(|u'|^\alpha \operatorname{sgn} u'\right)' + q(t)|u|^\beta \operatorname{sgn} u = 0$$

şeklinde de yazılabilir. Bu denkleme ilişkin başlangıç koşulları,

$$u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_1 \quad (2.15)$$

olsun.

2.2. Teorem:

$q \in C^1(t_0, \infty)$ ve $t \in (t_0, \infty)$ için, $q(t) > 0$ olsun. Verilen u_0 ve u_1 için, Eş.2.14 - Eş.2.15 probleminin (t_0, ∞) aralığında tanımlı bir tek çözümü vardır.

2.3. Teorem:

$\alpha = \beta$ ve $q \in C(t_0, \infty)$ olsun. Verilen u_0 ve u_1 için, Eş.2.14 - Eş.2.15 probleminin, (t_0, ∞) aralığında tanımlı bir tek çözümü vardır.

2.3. Salınımlılık Tanımı

Fonksiyonel diferensiyel denklemlere ilişkin salınım teorisi adi diferensiyel denklemlerin doğal bir genellemesidir. Bu anlamda, fonksiyonel diferensiyel denkleminin bir $x(t)$ çözümünün, (T_x, ∞) aralığında mevcut ve her $T \geq T_x$ için $\sup\{|x(t)| : t \geq T\} > 0$ özelliğine sahip olduğunu kabul edelim. Bu tip bir çözüme, regüler (regular) çözüm de denir [9].

2.2. Tanım:

Regüler bir $x(t) : (t_0, \infty) \rightarrow R$ çözümü, $t \geq t_0$ için keyfi sayıda, yeterince büyük sıfırlara sahip ise yani $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ olacak şekilde, çözümün sıfırlarının bir $\{t_n\}$ dizisi mevcut ise, çözüme salınımlıdır denir.

2.3. Tanım:

$x(t)$ çözümü, salınımlı değilse salınımsızdır. Salınımsız bir $x(t)$ çözümüne, $t \geq T$ 'ler için $x(t) > 0$ ($x(t) < 0$) olacak şekilde, yeterince büyük bir reel T sayısı mevcut ise, pozitif çözüm (negatif çözüm) denir. Bir fonksiyonel diferensiyel denkleminin, tüm çözümleri salınımlı ise denkleme salınımlı denklemdir, aksi takdirde, denkleme salınımsız denklemdir adı verilir.

Adi diferensiyel denklemlerle, değişen argümentli diferensiyel denklemler arasındaki ilişkileri vurgulamak açısından, aşağıdaki örnekler üzerinde duralım:

2.3. Örnek:

$$x'(t) \pm x\left(t \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. $x_1(t) = \cos t$ ve $x_2(t) = \sin t$, bu denklemin birer salınımlı çözümleri olmasına rağmen,

$$x'(t) + x(t) = 0$$

denklemini, salınımlı bir çözüme sahip değildir.

2.4. Örnek:

$$x''(t) + x(\pi - t) = 0$$

denklemini, $x_1(t) = \sin t$ şeklinde bir salınımlı çözüme ve $x_2(t) = e^t - e^{\pi-t}$ şeklinde bir salınımsız çözüme sahiptir.

2.5. Örnek:

$$x''(t) - x(t - \pi) = 0$$

denklemini, $x(t) = \cos t$ ve $x(t) = \sin t$, salınımlı çözümlere sahip olmasına rağmen

$$x''(t) - x(t) = 0$$

denkleminin, salınımlı çözümü yoktur.

Bilindiği gibi, ikinci basamaktan,

$$x''(t) + a(t)x(t) = 0$$

lineer diferensiyel denkleminin bütün çözümleri, ya salınımlıdır ya da salınımsızdır. Ancak, Örnek 2.3, Örnek 2.4 ve Örnek 2.5'den de görüldüğü gibi, değişen argümentli denklemler için, durum böyle değildir. Örneğin;

$$x''(t) + a(t)x(\tau(t)) = 0 \quad (2.16)$$

denklemini göz önüne alırsak, aşağıdaki durumlardan biri söz konusudur;

- a) Bütün çözümleri salınımlı olabilir.
- b) Bütün çözümleri salınımsız olabilir.
- c) Denklem salınımsız bir çözüme sahip olabilir.
- d) Denklem salınımlı bir çözüme sahip olabilir.
- e) Denklem hem salınımlı hem de salınımsız çözümlere sahip olabilir.

3. İKİNCİ BASAMAKTAN YARI LİNEER TİPTEN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde ikinci basamaktan yarı lineer tipten denklemlerin salınımlılığına ilişkin literatürde yer alan bazı önemli sonuçlar irdelenecektir. Bu anlamda gözününe alınacak denklemler:

$$\left(\frac{1}{r(t)} y'(t) \right)' + p(t) \cdot y(\tau(t)) = 0 \quad (3.1)$$

$$\left(r(t) |u'(t)|^{\alpha-1} \cdot u'(t) \right)' + p(t) |u[\tau(t)]|^{\alpha-1} \cdot u(\tau(t)) = 0 \quad (3.2)$$

$$\left[r(t) |u'(t)|^{\alpha-1} \cdot u'(t) \right]' + p(t) |u(\tau(t))|^{\beta-1} \cdot u(\tau(t)) = 0 \quad (3.3)$$

denklemleridir.

Yukarıdaki denklemlerin herbirinin çözümlerinin $[t_0, \infty)$ mevcut olduğu ve $x(t)$ çözüm olmak üzere herhangi bir $t_x \geq t_0$ için $\sup \{ |x(t)| : t \geq t_x \} > 0$ özelliğine sahip olduğu kabul edilmiştir.

3.1. $\left(\frac{1}{r(t)} y'(t) \right)' + p(t) \cdot y(\tau(t)) = 0$ Denklemine İlişkin Sonuçlar:

Bu kesimde 1997 tarihinde Dzurina [10] tarafından

$$\left(\frac{1}{r(t)} y'(t) \right)' + p(t) \cdot y(\tau(t)) = 0 \quad (3.1)$$

denklemini için ifade edilen salınımlılık sonuçları üzerinde durulacaktır.

Kesim boyunca bu denklem için

$$p, r, \tau \in C([t_0, \infty)) \text{ ve } t \in [t_0, \infty) \text{ için } r(t) > 0, p(t) > 0$$

ve de

$$\tau(t) \leq t \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$$

koşullarının sağlandığı kabul edilmiştir.

3.1. Teorem:

$$t \rightarrow \infty \text{ için } R(t) = \int_{t_0}^t r(s) ds \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

$$\tau'(t) \geq 0 \quad (3.5)$$

ve

$$\int \left(R(\tau(t)) p(t) - \frac{r(\tau(t)) \cdot \tau'(t)}{4 R(\tau(t))} \right) dt = \infty \quad (3.6)$$

koşulları sağlansın.

Bu durumda Eş.3.1 salınımlıdır.

İspat:

Eş.3.1'in salınımsız bir çözümü $y(t)$ olsun. Genelliği bozmaksızın $t \geq t_1$ için $y(t) > 0, y(\tau(t)) > 0$ kabul edelim. Eş.3.1'den;

$$\left(\frac{1}{r(t)} y'(t) \right)' < 0$$

yazılabilir. Bu durumda $[t, \infty)$ aralığında ya da bunun bir yarı sonsuz alt aralığında

ya $\frac{1}{r(t)} y'(t) < 0$ yada $\frac{1}{r(t)} y'(t) > 0$ dır.

$\frac{1}{r(t)} y'(t) < 0$ olsun. Bu durumda

$\frac{1}{r(t)} y'(t) \leq -M < 0$ olacak şekilde $M > 0$ vardır.

$$-y'(t) \geq M \cdot r(t)$$

dır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının t_1 den t ye integrali alınırsa

$$y(t) \leq y(t_1) - \int_{t_1}^t M r(t) dt$$

ve yeterince büyük t değerleri için $y(t) < 0$ elde edilir. Bu ise $y(t) > 0$ kabulüyle çelişkidir.

O halde $\frac{1}{r(t)} \cdot y'(t) > 0$ dır. Şimdi z fonksiyonu

$$z(t) = \frac{R(\tau(t))}{y(\tau(t))} \cdot \left(\frac{y'(t)}{r(t)} \right) \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $z(t) > 0$ dır. Öte yandan

$$z'(t) = \frac{r(\tau(t))\tau'(t)}{y(\tau(t))} \cdot \left(\frac{y'(t)}{r(t)} \right) + \frac{R(\tau(t))}{y(\tau(t))} \cdot \left(\frac{y'(t)}{r(t)} \right)' - \frac{R(\tau(t))}{y(\tau(t))} \cdot \left(\frac{y'(t)}{r(t)} \right) \cdot \frac{y'(\tau(t)) \cdot \tau'(t)}{y(\tau(t))}$$

$$z'(t) = \frac{r(\tau(t))\tau'(t)}{R(\tau(t))} \cdot z(t) - R(\tau(t))p(t) - z(t) \cdot \left(\frac{y'(\tau(t))}{r(\tau(t))} \right) \cdot \frac{r(\tau(t))\tau'(t)}{y(\tau(t))}$$

olur.

$$\frac{1}{r(t)} \cdot y'(t) \text{ azalan olduğundan } \frac{y'(\tau(t))}{r(\tau(t))} \geq \frac{y'(t)}{r(t)} \text{ olup}$$

$$z'(t) \leq \frac{r(\tau(t))\tau'(t)}{R(\tau(t))} (z(t) - z^2(t)) - R(\tau(t)) \cdot p(t)$$

elde edilir.

$$P(z) = z - z^2 \text{ alınırsa } P(z) = z - z^2 \leq \frac{1}{4} \text{ olduğundan}$$

$$z'(t) \leq \frac{r(\tau(t))\tau'(t)}{4R(\tau(t))} - R(\tau(t)) \cdot p(t)$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki yanının t_1 den t ye integrali alınır

$$z(t) \leq z(t_1) - \int_{t_1}^t \left(R(\tau(s))p(s) - \frac{r(\tau(s))\tau'(s)}{4R(\tau(s))} \right) ds$$

olup Eş.3.6'dan den $t \rightarrow \infty$ için $z(t) \rightarrow -\infty$ elde edilir. Bu ise $z(t) > 0$ durumuyla çelişkidir. Böylece Eş.3.1 salınımlıdır.

3.1. Sonuç:

$$\tau(t) \equiv t \text{ olsun}$$

Eş.3.4 ve Eş.3.5 sağlansın. Ayrıca

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{R^2(t) p(t)}{r(t)} > \frac{1}{4} \quad (3.8)$$

olsun.

Bu durumda Eş.3.1 salınımlıdır.

İspat:

$\tau(t) \equiv t$ için Eş.3.8, Eş.3.6'yı gerektirdiğinden yani

$$\int \left(R(\tau(t)) p(t) - \frac{r(\tau(t)) \tau'(t)}{4 R(\tau(t))} \right) dt = \infty$$

sağlanacağından Teorem 3.1'den dolayı Eş.3.1 salınımlıdır.

3.2. Sonuç:

Eş.3.4 ve Eş.3.5 sağlansın. Ayrıca

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} R(\tau(t)) \int_t^\infty p(s) ds > \frac{1}{4} \quad (3.9)$$

olsun. Bu durumda Eş.3.1 salınımlıdır.

İspat:

İspat için Eş.3.9'un Eş.3.6'yı gerektirdiğini göstermek yeterlidir. Varsayalım ki Eş.3.6 sağlanmasın. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir t_1 vardır ki $t \geq t_1$ için

$$\int_t^\infty \left(R(\tau(s)) p(s) - \frac{r(\tau(s)) \tau'(s)}{4 R(\tau(s))} \right) ds < \varepsilon$$

yazılabilir.

Böylece

$$\int_t^{\infty} R(\tau(s)) \left(p(s) - \frac{r(\tau(s))(\tau'(s))}{4R^2(\tau(s))} \right) ds < \varepsilon$$

dır.

$R(\tau(t))$ azalmayan olduğundan

$$R(\tau(t)) \int_t^{\infty} \left(p(s) - \frac{r(\tau(s))\tau'(s)}{4R^2(\tau(s))} \right) ds < \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } R(\tau(t)) \int_t^{\infty} p(s) ds < \varepsilon + \frac{1}{4}$$

olur ki bu Eş.3.9'a çelişkidir. Dolayısıyla Eş.3.6 sağlanır. Yani Eş.3.9, Eş.3.6'yı gerektirir.

3.1. Örnek:

$t \geq 1$ ve $a > 0$ için

$y''(t) + \frac{a}{t\sqrt{t}} y(\sqrt{t}) = 0$ diferensiyel denklemini gözönüne alalım. Teorem 3.1'den

görülür ki $a > \frac{1}{8}$ için denklem salınımlıdır.

3.2. $\left(r(t)|u'(t)|^{\alpha-1}u'(t)\right)' + p(t)|u(\tau(t))|^{\beta-1}u(\tau(t))=0$ Denklemine İlişkin

Sonuçlar:

Bu kesimde 2003 tarihinde Dzurina [11] tarafından

$$\left(r(t)|u'(t)|^{\alpha-1}u'(t)\right)' + p(t)\left[|u(\tau(t))|^{\alpha-1}u(\tau(t))\right]=0 \quad (3.2)$$

denklemini için inşa edilen salınımlılık sonuçları üzerinde durulacaktır. Kesim boyunca

$$(H_1) \quad \alpha > 0$$

$$(H_2) \quad r(t) \in C^1(t_0, \infty), r(t) > 0, t \rightarrow \infty, R(t) := \int_{t_0}^t r^{-1/\alpha}(s) ds \rightarrow \infty$$

$$(H_3) \quad p(t) \in C^1(t_0, \infty), p(t) > 0,$$

$$(H_4) \quad \tau(t) \in C^1(t_0, \infty), \tau(t) \leq t, \lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$$

koşulları sağlansın.

3.2. Teorem:

$\alpha \geq 1$ olsun. Eğer her $k \in (0, 1)$ için

$$\int \left(R^\alpha(\tau(t)) p(t) - \frac{\alpha \tau'(t)}{4k R(\tau(t)) r^{1/\alpha}(\tau(t))} \right) dt = \infty \quad (3.10)$$

ise Eş.3.2 salınımlıdır.

İspat:

Kabul edelim ki Eş.3.2'nin salınımsız bir çözümü $u(t)$ olsun. Genelliği bozmaksızın

$t \geq t_1$ için $u(t) > 0$, $u(\tau(t)) > 0$ olsun. Eş.3.2'den,

$$\left(r(t) |u'(t)|^{\alpha-1} u'(t) \right)' = -p(t) (u(\tau(t)))^\alpha < 0 \text{ olup } r(t) |u'(t)|^{\alpha-1} \cdot u'(t) \text{ azalandır.}$$

Böylece iki durum söz konusudur. ya $u'(t) > 0$ ya da $u'(t) < 0$ dır. $u'(t) < 0$ olsun.

Bu durumda $r(t) |u'(t)|^{\alpha-1} \cdot u'(t) \leq -M < 0$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır.

Buradan

$$-u'(t) \geq \left(\frac{M}{r(t)} \right)^{1/\alpha}$$

elde edilir.

Bu eşitsizliğin her iki yanının t_1 den t ye integrali alınırsa

$$u(t) \leq u(t_1) - M^{1/\alpha} (R(t) - R(t_1))$$

$t \rightarrow \infty$ için (H_2) den $u(t) < 0$ elde edilir.

Yani $u'(t) < 0$ olamaz. $u'(t) > 0$ olur. Bu durumda $(r(t)u'(t)^\alpha)^{1/\alpha}$ artmayandır.

Herhangi bir $k_1 \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} u(\tau(t)) &\geq \int_{t_1}^{\tau(t)} u'(s) ds = \int_{t_1}^{\tau(t)} \frac{1}{r^{1/\alpha}(s)} (r^{1/\alpha}(s) u'(s)) ds \\ &\geq r^{1/\alpha}(\tau(t)) u'(\tau(t)) (R(\tau(t)) - R(t_1)) > k_1 R(\tau(t)) r^{1/\alpha}(\tau(t)) u'(\tau(t)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Şimdi W fonksiyonunu

$$W(t) = R^\alpha(\tau(t)) \frac{r(t) (u'(t))^\alpha}{(u(\tau(t)))^\alpha} \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlayalım. $W(t) > 0$ ve

$$\begin{aligned} W'(t) &= \frac{\alpha \tau'(t) R^{\alpha-1}(\tau(t))}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))} \cdot \frac{r(t)(u'(t))^\alpha}{(u(\tau(t)))^\alpha} - R^\alpha(\tau(t)) p(t) \\ &\quad - \alpha \cdot R^\alpha(\tau(t)) \frac{r(t)(u'(t))^\alpha}{(u(\tau(t)))^{\alpha+1}} \cdot u'(\tau(t)) \cdot \tau'(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

dır.

Eş.3.11'den ve $r(t) \cdot (u'(t))^\alpha$ nın monotonluğundan ve $k = k_1^{\alpha-1} \in (0,1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{u'(\tau(t))}{u(\tau(t))} &= \frac{1}{r(\tau(t))} \frac{r(\tau(t))(u'(\tau(t)))^\alpha}{u(\tau(t))^\alpha} \left(\frac{u(\tau(t))}{u'(\tau(t))} \right)^{\alpha-1} \\ &\geq \frac{r(t) \cdot (u'(t))^\alpha}{u(\tau(t))^\alpha} \cdot \frac{k R^{\alpha-1}(\tau(t))}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))} \text{ yazılabilir. Böylece Eş.3.13'den} \end{aligned}$$

$$W'(t) \leq \frac{\alpha \cdot \tau'(t)}{R(\tau(t)) r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))} \cdot W(t) - \frac{k \alpha \cdot \tau'(t)}{R(\tau(t)) r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))} \cdot W^2(t) - R^\alpha(\tau(t)) p(t)$$

elde edilir.

$$p(W) = W - kW^2 \text{ alınırsa } p(W) = W - kW^2 \leq \frac{1}{4k} \text{ olup}$$

$$W'(t) \leq \frac{\alpha \cdot \tau'(t)}{4R(\tau(t)) r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))} - R^\alpha(\tau(t)) p(t)$$

bulunur.

Eşitsizliğinin her iki yanının t_1 den t ye integrali alınır

$$W(t) \leq W(t_1) - \int_{t_1}^t \left[R^\alpha(\tau(s)) p(s) - \frac{\alpha \cdot \tau'(s)}{4 R(\tau(s)) r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(s))} \right] ds$$

olup $t \rightarrow \infty$ için Eş.3.10'dan $W(t) \rightarrow -\infty$ elde edilir. Bu durum $W(t) > 0$ 'a çelişkidir. Böylece Eş.3.2 salınımlıdır.

3.3. Sonuç:

$$\alpha \geq 1 \text{ ve } \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{R^{\alpha+1}(\tau(t)) r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t)) p(t)}{\tau'(t)} > \frac{\alpha}{4} \quad (3.14)$$

olsun. Eş.3.2 salınımlıdır.

İspat:

Gerçekten $k \in (0,1)$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere yeterince büyük t ler için

$$\begin{aligned} \frac{R^{\alpha+1}(\tau(t)) r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t)) p(t)}{\tau'(t)} &> \frac{\alpha}{4k} + \varepsilon \text{ olduğundan} \\ R^\alpha(\tau(t)) p(t) - \frac{\alpha \tau'(t)}{4k R(\tau(t)) r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))} &> \varepsilon \frac{\tau'(t)}{R(\tau(t)) r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))} \text{ elde edilir.} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Eşitsizliğinin her iki yanının t_0 dan ∞ a integrali alınır

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{\infty} \left(R^\alpha(\tau(t)) p(t) - \frac{\alpha \tau'(t)}{4k R(\tau(t)) r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))} \right) dt \\ &> \varepsilon \int_{t_0}^{\infty} \frac{\tau'(s)}{R(\tau(s)) r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(s))} ds = \varepsilon \left[\ln(R(\tau(s))) \right]_{t_0}^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon \ln(R(\tau(s))) = \infty \end{aligned}$$

bulunur. Eş.3.15 ve Eş.3.10 gözönüne alınır Eş.3.2'nin salınımlı olduğu görülür.

Eğer $r(t)$ üzerine daha kuvvetli koşul yüklenirse aşağıdaki teorem elde edilir.

3.3. Teorem:

$r'(t) > 0$ ve $\alpha \geq 1$ ayrıca $k \in (0,1)$ için

$$\int \left(R^\alpha(\tau(t)) p(t) - \frac{\alpha \tau'(t) R^{\alpha-2}(\tau(t)) r^{1-2/\alpha}(\tau(t))}{4k \tau^{\alpha-1}(t)} \right) dt = \infty \quad (3.16)$$

olsun. Eş.3.2 salınımlıdır.

İspat:

$u(t)$, Eş.3.2'nin pozitif bir çözümü olsun. Teorem 3.2'nin ispatında olduğu gibi $u'(t) > 0$ ve $r(t)(u'(t))^\alpha$ azalandır.

Öte yandan $0 > (r(t)(u'(t))^\alpha)' = r'(t)(u'(t))^\alpha + \alpha r(t)(u'(t))^{\alpha-1} \cdot u''(t)$ yazılabilir. Bu eşitsizlikten $u''(t) < 0$ bulunur. Ayrıca herhangi bir $k_1 \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} u(\tau(t)) &\geq \int_{t_1}^{\tau(t)} u'(s) ds \geq u'(s) \cdot s \Big|_{t_1}^{\tau(t)} - \int_{t_1}^{\tau(t)} u''(s) \cdot s ds \\ &\geq u'(\tau(t)) \tau(t) - u'(t) t - \int_{t_1}^{\tau(t)} u''(s) s ds \\ &\geq u'(\tau(t)) \tau(t) \geq u'(\tau(t)) (\tau(t) - t_1) \geq k_1 \tau(t) u'(\tau(t)) \end{aligned} \quad (3.17)$$

bulunur.

$W(t)$ fonksiyonu Eş.3.12'deki gibi tanımlansın. $W(t)>0$ ve Eş.3.13 ile Eş.3.17 ve $r(t)(u'(t))^\alpha$ nın azalanlığını kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{u'(\tau(t))}{u(\tau(t))} &= \frac{1}{r(\tau(t))} \frac{r(\tau(t))(u'(\tau(t)))^\alpha}{(u(\tau(t)))^\alpha} \left(\frac{u(\tau(t))}{u'(\tau(t))} \right)^{\alpha-1} \\ &\geq \frac{1}{r(\tau(t))} \frac{r(t)u'(t)^\alpha}{(u(\tau(t)))^\alpha} (k_1 \tau(t))^{\alpha-1} \end{aligned}$$

elde ederiz. Eş.3.12'den $k = k_1^{\alpha-1} \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} W'(t) &\leq \frac{\alpha \cdot \tau'(t)}{R(\tau(t)) r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))} W(t) \leq \frac{\alpha k \tau'(t) \tau^{\alpha-1}(t)}{R^\alpha(\tau(t)) r(\tau(t))} W^2(t) - R^\alpha(\tau(t)) p(t) \\ &= \frac{\alpha \tau'(t) R^{\alpha-2}(\tau(t)) r^{\frac{1-2}{\alpha}}(\tau(t))}{4 k \tau^{\alpha-1}(t)} \\ &\quad - R^\alpha(\tau(t)) p(t) - \frac{\alpha k \tau'(t) \tau^{\alpha-1}(t)}{R^\alpha(\tau(t)) r(\tau(t))} \left[W(t) - \frac{R^{\alpha-1}(\tau(t)) r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))}{2 k \tau^{\alpha-1}(t)} \right]^2 \\ W'(t) &\leq \frac{\alpha \cdot \tau'(t) R^{\alpha-2}(\tau(t)) r^{\frac{1-2}{\alpha}}(\tau(t))}{4 k \tau^{\alpha-1}(t)} - R^\alpha(\tau(t)) p(t) \end{aligned}$$

elde edilir. İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.2'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Şimdi de $r(t) \equiv 1$ olmak üzere Eş.3.2'yi gözönüne alalım

3.4. Teorem:

$\alpha \geq 1$ ve $k \in (0,1)$ için

$$\int \left(\tau^\alpha(t) p(t) - \frac{\alpha \tau'(t)}{4 k \tau(t)} \right) dt = \infty$$

olsun. $r(t) \equiv 1$ olmak üzere Eş.3.2 salınımlıdır.

İspat :

$u(t)$, Eş.3.2'nin salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın $u(t) > 0$ olsun.

$$W(t) = \left(\frac{\tau(t) u'(t)}{u(\tau(t))} \right)^\alpha$$

olmak üzere Teorem 3.2'nin (ya da Teorem 3.3) ispatına benzer şekilde teoremin ispatı yapılır.

3.4. Sonuç:

$\alpha \geq 1$ ve $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\tau^{\alpha+1}(t) p(t)}{\tau'(t)} > \frac{\alpha}{4}$ olsun. $r(t) \equiv 1$ olmak üzere Eş.3.2 salınımlıdır.

İspatı Sonuç 3.3'deki gibi yapılır.

Şimdi $0 < \alpha < 1$ durumunu inceleyelim.

3.5. Teorem:

$0 < \alpha < 1$ için

$$\tilde{P}(t) = \left(\frac{1}{r(\tau(t))} \int_t^\infty p(s) ds \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

olmak üzere

$$\int^\infty \left(R^\alpha(\tau(t)) p(t) - \frac{\alpha \tau'(t)}{4 \cdot R^{2-\alpha}(\tau(t)) r^{\frac{2}{\alpha}-1}(\tau(t)) \tilde{P}(t)} \right) dt = \infty \quad (3.18)$$

ise Eş.3.2 salınımlıdır.

İspat :

Kabul edelim ki $u(t)$, Eş.3.2'nin salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın $u(t) > 0$ alalım. Teorem 3.2'nin ispatında olduğu gibi $u'(t) > 0$ ve $r(t)(u'(t))^\alpha$ azalandır. Eş.3.2'nin t den ∞ a integrali alınırsa;

$$\left(r(t)u'(t)^\alpha \right)' + p(t)u(\tau(t))^\alpha = 0$$

$$r(t)u'^\alpha(t) \geq \int_t^\infty p(s)u(\tau(s))^\alpha ds$$

$$u'^\alpha(\tau(t))r(\tau(t)) \geq r(t)u'^\alpha(t) \geq \int_t^\infty p(s)u(\tau(s))^\alpha ds$$

$$\geq u(\tau(t))^\alpha \int_t^\infty p(s) ds$$

Böylece

$$\left(\frac{u'(\tau(t))}{u(\tau(t))} \right)^{1-\alpha} \geq \left(\frac{1}{r(\tau(t))} \int_t^\infty p(s) ds \right)^{1-\alpha/a}$$

bulunur.

Eş.3.12'den

$$W'(t) = \frac{a \cdot \tau'(t) R^{\alpha-1}(\tau(t))}{r^{1/a}(\tau(t))} \cdot \frac{r(t)(u'(t))^\alpha}{(u(\tau(t)))^\alpha} - R^a(\tau(t)) p(t) - \alpha R^\alpha(\tau(t)) \frac{r(t)u'(t)^a}{u(\tau(t))^{\alpha+1}} \cdot u'(\tau(t))\tau(t)$$

$$\begin{aligned}
\frac{u'(\tau(t))}{u(\tau(t))} &= \frac{1}{r(\tau(t))} \frac{r(\tau(t)) u'(\tau(t))^\alpha}{u(\tau(t))} \left(\frac{u'(\tau(t))}{u(\tau(t))} \right)^{1-\alpha} \geq \frac{\tilde{p}(t)}{r(\tau(t))} \frac{r(t) u'(t)^\alpha}{u(\tau(t))^\alpha} \\
W'(t) &\leq \frac{\alpha \tau'(t)}{R(\tau(t)) r^{\frac{1}{a}}(\tau(t))} W(t) - \frac{\alpha \tau'(t) \tilde{p}(t)}{R^\alpha(\tau(t)) r(\tau(t))} W^2(t) - R^\alpha(\tau(t)) p(t) \\
&\leq \frac{\alpha \tau'(t)}{4 R^{2-\alpha}(\tau(t)) r^{\frac{2}{a}-1}(\tau(t)) \tilde{p}(t)} - R^\alpha(\tau(t)) p(t) \\
&\leq \frac{\alpha \tau'(t)}{4 R^{2-\alpha}(\tau(t)) r^{\frac{2}{a}-1}(\tau(t))} [\tau(t) \tilde{p}(t) - R^\alpha(\tau(t))] p(t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Eşitsizliğin her iki yanının t den ∞ a integral alınırsa Eş.3.18'den $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = -\infty$ olup $W(t) > 0$ olmasına çelişkidir. Böylece Eş.3.2 salınımlıdır.

3.6. Teorem:

$$0 < \alpha < 1 \text{ ve } \tilde{p}_1(t) = \left(\int_t^\infty p(s) ds \right)^{(1-\alpha)/\alpha}$$

olmak üzere,

$$\int \left(\tau^\alpha(t) p(t) - \frac{\alpha \tau'(t)}{4 \tau^{2-a}(t) p_1(t)} \right) dt = \infty \quad (3.19)$$

ise $r(t) \equiv 1$ olmak üzere Eş.3.2 salınımlıdır.

Teoremin ispatı Teorem 3.3'ün ispatına benzerdir.

3.2. Örnek:

λ , α ve a lar $0 < \lambda < 1$, $\alpha \geq 1$, $a > 0$ olacak şekilde sabitler olmak üzere

$$\left(|u'(t)|^{\alpha-1} u'(t) \right)' + \frac{a}{t^{\alpha+1}} |u(\lambda t)|^{\alpha-1} \cdot u(\lambda t) = 0$$

denklemini göz önüne alalım. Sonuç 3.4'den

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (\lambda t)^{\alpha+1} \frac{a}{t^{\alpha+1} \cdot \lambda} = \lambda^\alpha \cdot a > \frac{\alpha}{4}$$

elde edilir. Eğer λ , α ve a sabitleri bu koşul sağlanacak şekilde seçilirse elde edilen denklemler salınımlıdır.

Şimdi de aynı örneği $0 < \lambda < 1$, $a > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için Teorem 3.6'yı kullanarak inceleyelim.

$$\tilde{p}_1(t) = \left(\int_t^\infty \frac{a}{t^{\alpha+1}} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = \left(\frac{a}{\alpha} t^{-\alpha} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = \left(\frac{a}{\alpha} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot t^{\alpha-1}$$

$$\int_{t_0}^\infty \left((\lambda t)^\alpha \cdot \frac{a}{t^{\alpha+1}} - \frac{\alpha \cdot \lambda}{4 (\lambda t)^{2-\alpha} \left(\frac{a}{\alpha} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot t^{\alpha-1}} \right) = \int_{t_0}^\infty \left[(\lambda^\alpha a \cdot \frac{1}{t} - \frac{\alpha \cdot \lambda}{4 \lambda^{2-\alpha} \left(\frac{a}{\alpha} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot t} \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[(\lambda^\alpha a \cdot \frac{1}{t} - \frac{\alpha \cdot \lambda}{4 \lambda^{2-\alpha} \left(\frac{a}{\alpha} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot t} \right] = \left(\lambda^\alpha a - \frac{\alpha \cdot \lambda}{4 \lambda^{2-\alpha} \left(\frac{a}{\alpha} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \right) \cdot \ln t$$

Eş.3.19'un sağlanması için

$$\lambda^\alpha a - \frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}{4 \lambda^{1-\alpha} a^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} > 0 \text{ olmalıdır. Buradan}$$

$$4 \lambda^\alpha a \lambda^{1-\alpha} a^{\frac{1}{\alpha}-1} > \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \text{ ve}$$

$$4 \lambda a^{\frac{1}{\alpha}} > \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \text{ ise } \frac{\lambda a^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} > \frac{1}{4} \text{ elde edilir.}$$

Bu durumda, bu koşul sağlanacak şekilde α, λ ve a değerleri için de denklem salınımlıdır.

3.3. $\left[r(t) |u'(t)|^{\alpha-1} u'(t) \right]' + p(t) |u(\tau(t))|^{\beta-1} u(\tau(t)) = 0$ Denklemine İlişkin Sonuçlar:

Bu kesimde 1997 tarihinde Agarwal [12] tarafından

$$\left[r(t) |u'(t)|^{\alpha-1} u'(t) \right]' + p(t) |u(\tau(t))|^{\beta-1} u(\tau(t)) = 0 \quad (3.2)$$

denklemini için inşa edilen salınımlılık sonuçları üzerinde durulacaktır. Kesim boyunca bu denklem için

- (i) α ve β pozitif sabitler;
- (ii) $p, \tau, r \in C([t_0, \infty), R)$, $r(t) > 0$
- (iii) $p(t) \geq 0$ ve $t \in [t_0, \infty)$ için $p(t) \not\equiv 0$
- (iv) $\tau(t) \leq t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$

olduğu kabul edilmiştir.

Sonuçları vermeden önce teoremlerin ispatında kullanılacak olan iki lemmayı ifade edelim:

3.1. Lemma:

Bir u fonksiyonu için

$$(A_1) \quad u(t) \in C^2[T, \infty)$$

$$(A_2) \quad \text{Her } t \geq T > 0 \text{ için } u(t) > 0, u'(t) > 0 \text{ ve } u''(t) \leq 0$$

koşulları sağlansın. Bu durumda

$$(a) \text{ Her } k_1 \in (0, 1) \text{ için } u(\tau(t)) \geq \frac{k_1}{t} \tau(t) u(t)$$

olacak şekilde en az bir $T_{k_1} \geq T$ ve

(b) Her $k_2 \in (0, 1)$ için

$$u(t) \geq k_2 t u'(t)$$

olacak şekilde en az bir $T_{k_2} \geq T$ sabitleri vardır.

3.2. Lemma:

$\alpha > 0$, $q \in C([0, \infty), R)$ olsun.

$$\left[|y'(t)|^{\alpha-1} y'(t) \right] + q(t) |y(t)|^{\alpha-1} y(t) = 0 \quad (3.20)$$

denkleminin salınımsız olması

$$g'(t) + \alpha |g(t)|^{(1+\alpha)/\alpha} + q(t) \leq 0, \quad [t_0, \infty)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $g \in C^1[t_0, \infty)$ fonksiyonunun olmasıyla eşdeğerdir.

Her $t \geq t_0$ için γ fonksiyonunu $\gamma(t) = \sup \{s \geq t_0; \tau(s) \leq t\}$ biçiminde tanımlayalım. Bu durumda $\gamma(t) \geq t$ ve $\tau(\gamma(t)) = t$ dir.

3.7. Teorem:

$\alpha = \beta$ ve $r(t) \equiv 1$ olsun.

$$(C_1) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \int_t^\infty p(s) \left(\frac{\tau(s)}{s} \right)^\alpha ds > 1$$

$$(C_2) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \int_{\gamma(t)}^{\infty} p(s) ds > 1$$

koşullarından birinin sağlanması Eş.3.3'ün salınımlı olmasıyla eşdeğerdir.

İspat:

$r(t) \equiv 1, \alpha = \beta$ olmak üzere Eş.3.3'ün salınımsız bir çözümü $u(t)$ olsun. Genelliği bozmaksızın $t \geq t_0$ için $u(t) > 0$ olsun. Bu durumda öyle bir t_1 vardır ki, $t \geq t_1$ için $u(\tau(t)) > 0$ olur. $[t_1, \infty)$ aralığında $p(t) \geq 0$ olduğundan

$$\left[|u'(t)|^{\alpha-1} \cdot u'(t) \right]' = -p(t) |u(\tau(t))|^{\alpha-1} u(\tau(t)) \leq 0 \quad (3.21)$$

dır.

Öte yandan

$|u'(t)|^{\alpha-1} \cdot u'(t)$ azalan ve $\forall T \geq 0$ için $\sup \{p(t) : t \geq T\} > 0$ olduğundan $t \geq t_1$ için $u'(t) > 0$ veya $[t_2, \infty)$ aralığında $t_2 \geq t_1$ için $u'(t) < 0$ koşullarından biri mevcuttur.

Kabul edelim ki $t_2 \geq t_1$ için $u'(t) < 0$ olsun. Bu durumda,

$$t \geq t_2 \text{ için } 0 \geq \left[|u'(t)|^{\alpha-1} \cdot u'(t) \right]' = \alpha \cdot |u'(t)|^{\alpha-1} u''(t)$$

dir.

$t \in [t_2, \infty)$ için $u''(t) \leq 0$, $t_3 > t_2$ için $u'(t) < 0$ olup $t \geq t_3$ için $u(t) \leq 0$ elde edilir. Bu $u(t) > 0$ kabulüyle çelişki oluşturduğundan $t_2 \geq t_1$ için $u'(t) < 0$ olmaz, yani

$t \geq t_1$ için $u'(t) > 0$ dır.

Eş.3.21'in t den ∞ a integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} - \int_t^\infty p(s) |u(\tau(s))|^{\alpha-1} u(\tau(s)) ds &= \int_t^\infty \left[|u'(s)|^{\alpha-1} u'(s) \right]' ds \\ &= \int_t^\infty \left([u'(s)]^\alpha \right)' ds \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} [u'(s)]^\alpha - [u'(t)]^\alpha \end{aligned}$$

elde edilir.

$t \geq t_1$ için $u'(t) > 0$ olduğundan

$$[u'(t)]^\alpha = \lim_{s \rightarrow \infty} [u'(s)]^\alpha + \int_t^\infty p(s) |u(\tau(s))|^{\alpha-1} u(\tau(s)) ds \geq \int_t^\infty p(s) [u(\tau(s))]^\alpha ds \quad (3.22)$$

eşitsizliği bulunur.

Lemma 3.1 (b) den $u(t) \geq k_2 t u'(t)$ eşitsizliği ve herhangi bir $k_2 \in (0,1)$ için bir T_{k_2} vardır öyleki

$$[u(t)]^\alpha \geq k_2^\alpha t^\alpha [u'(t)]^\alpha \geq k_2^\alpha t^\alpha \int_t^\infty p(s) [u(\tau(s))]^\alpha ds \quad (3.23)$$

Lemma 3.1 (a) dan da

$$u(\tau(t)) \geq \frac{k_1 \tau(t)}{t} \cdot u(t)$$

eşitsizliği ve herhangi bir $k_1 \in (0,1)$ için bir T_{k_1} vardır öyleki

$$[u(\tau(t))]^\alpha \geq k_1^\alpha \left(\frac{\tau(t)}{t} \right)^\alpha (u(t))^\alpha \quad (3.24)$$

eşitsizliği elde edilir. Eş.3.23 ve Eş.24'den

$$T_{k_2} \geq t_1 \quad \text{ve} \quad t \geq T_{k_1}, \quad t \geq t_4 = \max \{T_{k_1}, T_{k_2}\} \text{ için}$$

$$\begin{aligned} [u(t)]^\alpha &\geq k_2^\alpha t^\alpha \int_t^\infty p(s) [u(\tau(s))]^\alpha ds \\ &\geq k_1^\alpha \cdot k_2^\alpha t^\alpha \int_t^\infty p(s) \left(\frac{\tau(s)}{s} \right)^\alpha [u(s)]^\alpha ds \\ &\geq k^{2\alpha} t^\alpha \int_t^\infty p(s) \left(\frac{\tau(s)}{s} \right)^\alpha [u(s)]^\alpha ds \end{aligned} \quad (3.25)$$

dır.

Burada $k = \min \{k_1, k_2\}$ olarak tanımlanmıştır.

$u'(t) > 0$ olduğundan $t \geq t_4$ için

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{k^{2\alpha} t^\alpha}{[u(t)]^\alpha} \int_t^\infty p(s) \left(\frac{\tau(s)}{s} \right)^\alpha [u(s)]^\alpha ds \\ &\geq k^{2\alpha} t^\alpha \int_t^\infty p(s) \left(\frac{\tau(s)}{s} \right)^\alpha ds \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edilir.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \int_t^\infty p(s) \left(\frac{\tau(s)}{s} \right)^\alpha ds = a \quad \text{diyelim. } (C_1) \quad \text{den} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \quad \text{olacak şekilde bir}$$

$$\{s_n\} \text{ dizisi vardır ve } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^\alpha \int_{s_n}^\infty p(s) \left(\frac{\tau(s)}{s} \right)^\alpha ds = a > 1$$

dir.

En az bir $N_1 > 0$ için $\varepsilon_1 = \frac{(a-1)}{2} > 0$ alınırsa her $n > N_1$ için

$$\frac{a+1}{2} = a - \varepsilon_1 < s_n^\alpha \int_{s_n}^{\infty} p(s) \left(\frac{\tau(s)}{s} \right)^\alpha ds \quad (3.27)$$

eşitsizliği elde edilir. $\left(\frac{2}{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} < k < 1$ seçimiyle birlikte Eş.3.26 ve Eş.3.27'den

$$1 \geq k^{2\alpha} s_n^\alpha \int_{s_n}^{\infty} p(s) \left(\frac{\tau(s)}{s} \right)^\alpha ds > \left(\frac{2}{\alpha+1} \right) \left(\frac{\alpha+1}{2} \right) = 1$$

yazılabilir.

Bu eşitsizlik kabul ile çelişki oluşturduğundan (C_1) koşulu geçerli değildir.

$\gamma(t) \geq t$ olduğundan ve Eş.3.23'den

$$[u(t)]^\alpha \geq k_2^\alpha t^\alpha [u'(t)]^\alpha \geq k_2^\alpha t^\alpha \int_t^\infty p(s) [u(\tau(s))]^\alpha ds$$

olduğundan

$$[u(t)]^\alpha \geq k_2^\alpha t^\alpha \int_{\gamma(t)}^\infty p(s) [u(\tau(s))]^\alpha ds$$

bulunur.

$u(t)$ fonksiyonu artan olduğundan $t \geq T_{k_2}$, $\tau(s) \geq t$ ve $s \geq \gamma(t)$ için

$$[u(t)]^\alpha \geq k_2^\alpha t^\alpha \int_{\gamma(t)}^\infty p(s) [u(\tau(s))]^\alpha ds \geq k_2^\alpha t^\alpha [u(t)]^\alpha \int_{\gamma(t)}^\infty p(s) ds \text{ dır.}$$

Eşitsizliğin her iki tarafı $[u(t)]^\alpha$ ya bölünürse

$$k_2^\alpha \cdot t^\alpha \int_{\gamma(t)}^\infty p(s) ds \leq 1 \quad (3.28)$$

elde edilir. Şimdi de $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \int_{\gamma(t)}^\infty p(s) ds = b$ diyelim.

(C₂) den $\lim_{t \rightarrow \infty} t_n = \infty$ olacak şekilde bir $\{t_n\}$ dizisi vardır. $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^\alpha \int_{\gamma(t_n)}^\infty p(s) ds = b > 1$

olacaktır.

En az bir $N_2 > 0$ için $\varepsilon_2 = \frac{(b-1)}{2} > 0$ alınırsa her $n > N_2$ için

$$\frac{b+1}{2} = b - \varepsilon_2 < t_n^\alpha \int_{\gamma(t_n)}^\infty p(s) ds \quad (3.29)$$

eşitsizliği elde edilir.

$k_2 \in (2/(b+1))^{1/\alpha}, 1)$ seçimiyle birlikte Eş.3.28 ve Eş.3.29'dan

$$1 \geq k_2^\alpha t_q^\alpha \int_{\gamma(t_q)}^\infty p(s) ds > \frac{2}{b+1} \cdot \frac{b+1}{2} = 1$$

bulunur. Bu da kabulle çelişki oluşturduğundan (C₂) koşulu geçerli değildir.

3.3. Örnek:

$\alpha > 0$ için

$$\left[|u'(t)|^{\alpha-1} u'(t) \right]' + \frac{2^{\alpha+1} \cdot \alpha}{t^{\alpha+1}} \left| u\left(\frac{t}{2}\right) \right|^{\alpha-1} u\left(\frac{t}{2}\right) = 0$$

denklemini gözönüne alınırsa

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \int_t^\infty \frac{2^{\alpha+1} \cdot \alpha}{s^{\alpha+1}} \left(\frac{s/2}{s} \right)^\alpha ds = 2\alpha \limsup_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \int_t^\infty \frac{1}{s^{\alpha+1}} ds$$

=2 elde edilir.

Teorem 3.7'deki (C_1) koşulu sağlandığından denklem salınımlıdır.

Kabul edelim ki $\tau(t) > 0$ ve μ fonksiyonunu $\mu(t) = \left(\frac{\tau(t)}{t} \right)^\alpha$ şeklinde tanımlayalım.

3.8. Teorem:

$r(t) \equiv 1$ ve $\alpha = \beta$ $\lambda \in (0,1)$ için

$$\left[|u'(t)|^{\alpha-1} u'(t) \right]' + \lambda \mu(t) p(t) |u(\tau(t))|^{\alpha-1} u(\tau(t)) = 0 \quad (3.30)$$

denklemini salınımlı ise Eş.3.3 salınımlıdır.

İspat:

Kabul edelim ki

$$\left[|u'(t)|^{\alpha-1} u'(t) \right]' + p(t) |u(\tau(t))|^{\alpha-1} u(\tau(t)) = 0$$

denklemini salınımsız olsun. Bu denklemin salınımsız bir çözümü $u(t)$ olsun. Genelliği bozmaksızın $[t_1, \infty)$ da $u(t) > 0$ ve $u(\tau(t)) > 0$ olsun.

Teorem 3.7'nin ispatında olduğu gibi $[t_2, \infty)$ da $u''(t) \leq 0$ ve $u'(t) > 0$ dır. $\lambda \in (0, 1)$ olduğundan Lemma 3.1 (a) dan

$$u(\tau(t)) \geq \lambda^{\frac{1}{\alpha}} u(t) \frac{\tau(t)}{t}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Her iki tarafın α . kuvveti alınırsa

$$[u(\tau(t))]^\alpha \geq \lambda [u(t)]^\alpha \left(\frac{\tau(t)}{t} \right)^\alpha$$

elde edilir. ω fonksiyonunu

$$\omega(t) = \frac{|u'(t)|^{\alpha-1} u'(t)}{|u(t)|^{\alpha-1} u(t)}.$$

olarak tanımlayalım,

$$\begin{aligned} & \omega'(t) + \frac{\lambda [\tau(t)]^\alpha}{t^\alpha} p(t) + \alpha |\omega(t)|^{(1+\alpha)/\alpha} \\ &= \left[(u'(t))^\alpha \right] [u(t)]^\alpha - [u'(t)]^\alpha [u(t)]^\alpha + \frac{\lambda (\tau(t))^\alpha}{t^\alpha} p(t) + \alpha \left(\frac{[u'(t)]^\alpha}{[u(t)]^\alpha} \right)^{(1+\alpha)/\alpha} \\ &= \frac{\left[(u'(t))^\alpha \right] [u(t)]^\alpha - \alpha [u'(t)]^\alpha u'(t) [u(t)]^{\alpha-1} + \lambda [\tau(t)]^\alpha}{[u(t)]^{2\alpha}} p(t) + \frac{\alpha [u'(t)]^{1+\alpha}}{[u(t)]^{1+\alpha}} \\ &= \frac{\left[(u'(t))^\alpha \right]}{[u(t)]^\alpha} - \frac{\alpha [u'(t)]^{\alpha+1}}{[u(t)]^\alpha} + \frac{\lambda [\tau(t)]^\alpha}{t^\alpha} p(t) + \frac{\alpha [u'(t)]^{1+\alpha}}{[u(t)]^{1+\alpha}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\rho(t)|u(\tau(t))|^{\alpha-1} u(\tau(t))}{[u(t)]^\alpha} + \frac{\lambda[\tau(t)]^\alpha p(t)}{t^\alpha} \\
&= \frac{-p(t)[u(\tau(t))]^\alpha}{[u(t)]^\alpha} + \frac{\lambda[\tau(t)]^\alpha p(t)}{t^\alpha} \\
&= \frac{p(t)}{[u(t)]^\alpha} \left(\frac{\lambda[\tau(t)]^\alpha p(t)}{t^\alpha} [u(t)]^\alpha - [u(\tau(t))]^\alpha \right) \leq 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durum Lemma 3.2'ye göre Eş.3.30'un salınımsız olması demektir. Ancak, bu denklem hipoteze göre salınımlı olduğundan çelişki elde ederiz. Böylece $r(t) \equiv 1, \alpha = \beta$ olmak üzere Eş.3.3. denklemi salınımlıdır.

3.9. Teorem:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int^t p(s) \left(\frac{\tau(s)}{s} \right)^\alpha ds = \infty \quad (3.31)$$

olsun. $r(t) \equiv 1, \alpha = \beta$ olmak üzere Eş.3.3 salınımlıdır.

İspat:

$r(t) \equiv 1, \alpha = \beta$ olmak üzere Eş.3.3 salınımsız olsun. Genelliği bozmaksızın, bu denklemin salınımsız pozitif bir $u(t)$ çözümünü alalım. Teorem 3.7'nin ispatında olduğu gibi $t \geq t_1$ için $u(\tau(t)) > 0, u'(t) > 0$ ve $u''(t) \leq 0$ olacak şekilde $t_1 \geq t_0$ vardır. Lemma 3.1 (a) dan

$$(u(\tau(t)))^\alpha \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\tau(t)}{t} \right)^\alpha [u(t)]^\alpha$$

eşitsizliği elde edilir.

$t \geq t_1$ için $u'(t) > 0$ ve $u(\tau(t)) > 0$ olduğundan

$$-\left((u'(t))^\alpha\right)' = p(t)[u(\tau(t))]^\alpha \geq \frac{1}{2} p(t) \left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^\alpha [u(t)]^\alpha$$

olur.

Bu eşitsizliğin t_2 den t ye integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} [u'(t)]^\alpha - [u'(t_2)]^\alpha &\leq \frac{-1}{2} \int_{t_2}^t p(s) \left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^\alpha [u(s)]^\alpha ds \\ &\leq \frac{-1}{2} [u(t_2)]^\alpha \int_{t_2}^t p(s) \left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^\alpha ds \end{aligned}$$

bulunur.

Böylece $t \geq t_2$ için Eş.3.31'den $[u'(t)]^\alpha < 0$ elde edilir. Bu durum $u'(t) > 0$ durumuna çelişki olup

$r(t) \equiv 1, \alpha = \beta$ olmak üzere Eş.3.3. salınımlıdır.

3.4. Örnek:

$\alpha > 0$ için

$$\left[|u'(t)|^{\alpha-1} u'(t) \right] + \left| u\left(\frac{t}{2}\right) \right|^{\alpha-1} u\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \quad (3.32)$$

denklemini gözönüne alalım.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int \left(\frac{s/2}{s} \right)^\alpha ds = \frac{1}{2^\alpha} \limsup_{t \rightarrow \infty} \int ds = \infty$$

olduğundan Teorem 3.9'den Eş.3.32 salınımlıdır.

Şimdi de; $0 < \beta < \alpha$ olmak üzere Eş.3.3'ü gözönüne alalım.

3.10. Teorem:

Kabul edelim ki

$$(C_3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty, \quad R(t) := \int_{t_0}^t (r(s))^{-1/\alpha} ds$$

$$(C_4) \quad \tau \in C(R_+, R), \tau(t) \leq t, \lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$$

$$(C_5) \quad \int_{t_0}^{\infty} (R(\tau(t)))^{\beta} p(t) dt = \infty$$

şartları sağlansın. Bu durumda $0 < \beta < \alpha$ olmak üzere Eş.3.3 salınımlıdır.

İspat:

Kabul edelim ki Eş.3.3'ün salınımsız bir çözümü $u(t)$ olsun. Genelliği bozmaksızın

$[T, \infty)$ da $u(t) < 0$, $u(\tau(t)) < 0$, $[T, \infty)$ da $p(t) \geq 0$ olsun.

$[r(t)|u'(t)|^{\alpha-1}u'(t)]' \leq 0$ dır. Bu durumda iki durum söz konusudur.

Durum 1:

$[t_1, \infty)$ da $t \geq t_1 \geq T$ için $u'(t) > 0$ dır. $[r(t)|u'(t)|^{\alpha-1}u'(t)]' \geq 0$

olduğundan, $r(t)|u'(t)|^{\alpha-1} \cdot u'(t)$ artandır.

Böylece, $t \geq t_1$ için $r(t)|u'(t)|^{\alpha-1}u'(t) = r(t)(u'(t))^{\alpha}$ olur. Bu eşitliğin her iki tarafını

$r(t)$ ye bölünürse

$$(u'(t))^\alpha = |u'(t)|^{\alpha-1} u'(t) \geq \frac{r(t_1) |u'(t_1)|^{\alpha-1} u'(t_1)}{r(t)} > 0$$

elde edilir.

$t \geq t_1$ olmak üzere her iki tarafından $\frac{1}{\alpha}$. kuvveti alınır

$$u'(t) \geq \left(\frac{r(t_1) |u'(t_1)|^{\alpha-1} u'(t_1)}{r(t)} \right)^{1/\alpha}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının t_1 den t ye integral alınır

$$u(t) \geq u(t_1) + r(t_1)^{1/\alpha} u'(t_1) \int_{t_1}^t (r(s))^{-1/\alpha} ds$$

elde edilir. $t \rightarrow \infty$ için (C_3) ten $u(t) > 0$ bulunur. Bu durum kabulle çeliştiğinden *Durum 1* geçersizdir.

Durum 2:

$r(t) |u'(t)|^{\alpha-1} u'(t) < 0, [t_2, \infty)$ da $t \geq t_2 \geq T$ için $u'(t) < 0$ dır. t den s ye ye denklemin

integrali alınır

$$\int_t^s p(k) |u(\tau(k))|^{\beta-1} . u(\tau(k)) dk = -r(s) |u'(s)|^{\alpha-1} u'(s) + r(t) |u'(t)|^{\alpha-1} u'(t)$$

$s \rightarrow \infty$ için

$$\int_t^\infty p(s) |u(\tau(s))|^{\beta-1} . u(\tau(s)) ds = -\lim_{s \rightarrow \infty} r(s) |u'(s)|^{\alpha-1} u'(s) + r(t) |u'(t)|^{\alpha-1} u'(t)$$

$$\int_t^\infty p(s) |u(\tau(s))|^{\beta-1} u(\tau(s)) ds \geq r(t) |u'(t)|^{\alpha-1} u'(t)$$

elde edilir.

$$|u'(t)|^{\alpha-1} u'(t) \leq \frac{1}{r(t)} \int_t^\infty p(s) |u(\tau(s))|^{\beta-1} u(\tau(s)) ds, \quad t \geq t_2 \geq T$$

$u'(t) < 0$ olduğundan

$$-u'(t) = |u'(t)| \geq \left(\frac{-1}{r(t)} \int_t^\infty p(s) |u(\tau(s))|^{\beta-1} u(\tau(s)) ds \right)^{1/\alpha}$$

eşitsizliğin her iki yanının $\tau(t_2)$ den $\tau(t)$ ye integrali alınırsa

$$\begin{aligned} u(\tau(t)) &\leq - \int_{\tau(t_2)}^{\tau(t)} \left(\frac{-1}{r(s)} \int_s^\infty p(k) |u(\tau(k))|^{\beta-1} u(\tau(k)) dk \right)^{1/\alpha} ds \\ &\leq - \left(\int_{\tau(t_2)}^{\tau(t)} (r(s))^{-1/\alpha} ds \right) \left(- \int_{\tau(t)}^\infty p(s) |u(\tau(s))|^{\beta-1} u(\tau(s)) ds \right)^{1/\alpha} \\ &\leq -(R(\tau(t)) - R(\tau(t_2))) \left(- \int_{\tau(t)}^\infty p(s) |u(\tau(s))|^{\beta-1} u(\tau(s)) ds \right)^{1/\alpha} \end{aligned}$$

$u(\tau(t)) < 0$, $t \geq t_2$ için

$$\begin{aligned} |u(\tau(t))| &\geq (R(\tau(t)) - R(\tau(t_2))) \cdot \left(- \int_t^\infty p(s) |u(\tau(s))|^{\beta-1} u(\tau(s)) ds \right)^{1/\alpha} \\ (R(\tau(t)) - R(\tau(t_2)))^\beta |u(\tau(s))|^{-\beta} &\leq \left(- \int_t^\infty p(s) |u(\tau(s))|^{\beta-1} u(\tau(s)) ds \right)^{-\beta/\alpha} \end{aligned} \quad (3.33)$$

bulunur.

$$F(t) = - \int_t^\infty p(s) |u(\tau(s))|^{\beta-1} u(\tau(s)) ds > 0 \text{ alalım.}$$

$[t_2, t]$ da Eş.3.32'nin her iki tarafı $p(t)|u(\tau(t))|^\beta$ ile çarpılırsa

$$\int_{t_2}^t (R(\tau(s)) - R(\tau(t_2)))^\beta p(s) ds \leq \int_{t_2}^t \left(- \int_s^\infty p(k) |u(\tau(k))|^{\beta-1} u(\tau(k)) dk \right)^{-\beta/\alpha} \cdot p(s) |u(\tau(s))|^\beta ds$$

olup

$$|u(\tau(s))|^\beta = |u(\tau(s))|^{\beta-1} \cdot |u(\tau(s))|$$

yazılırsa;

$$\begin{aligned} & - \int_{t_2}^t \left(- \int_s^\infty p(k) |u(\tau(k))|^{\beta-1} u(\tau(k)) dk \right)^{-\beta/\alpha} p(s) |u(\tau(s))|^{\beta-1} u(\tau(s)) ds \\ & = - \int_{t_2}^t (F(s))^{-\beta/\alpha} dF(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} (F(t_2))^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}} - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} (F(t))^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}} < \frac{\alpha}{\alpha - \beta} (F(t_2))^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}$$

$$\int_{t_2}^t (R(\tau(s)) - (R(\tau(t_2)))^\beta \cdot p(s) ds < \infty$$

elde edilir. Bu ise (C_5) ile çelişki olup denklem salınımlıdır.

3.5. Örnek:

$0 < \beta < \alpha$ olsun.

$$\left[\left| u'(t) \right|^{\alpha-1} u'(t) \right]' + \left| u\left(\frac{t}{2}\right) \right|^{\beta-1} u\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \quad (3.34)$$

denklemini $0 < \beta < \alpha$ olmak üzere inceleyelim.

$$r(t) = 1, \quad p(t) = 1, \quad \tau(t) = \frac{t}{2}$$

$$R(t) = \int_{t_0}^t (r(s))^{\frac{1}{\alpha}} ds = t - t_0$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty} (R(\tau(t)))^{\beta} p(t) dt = \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{t}{2} - t_0 \right)^{\beta} dt = \infty$$

elde edilir. Teorem 3.10'un tüm koşulları sağlandığından Eş.3.34 salınımlıdır.

4. İKİNCİ BASAMAKTAN FONKSİYONEL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde de çok yakın zamanda Tiriyaki [13] tarafından yapılan bir çalışma irdelenecektir. Gözönüne alınacak denklem

$$(r(t)|x'(t)|^{\alpha-1} x'(t))' + F(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t), x'(\tau(t))) = 0 \quad (4.1)$$

olup bu denklem için inşa edilen salınımlılık kriterleri incelenecektir. Önceki bölümde ele alınanlardan farkı inşa edilen salınımlılık kriterlerinin $[t_0, \infty)$ aralığından ziyade bu aralığın her bir alt aralığına dayalı olmasıdır.

4.1. $(r(t)|x'(t)|^{\alpha-1} x'(t))' + F(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t), x'(\tau(t))) = 0$ Denklemine İlişkin

Sonuçlar:

$t \geq t_0 > 0$ için

$$(r(t)|x'(t)|^{\alpha-1} x'(t))' + F(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t), x'(\tau(t))) = 0 \quad (4.1)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada,

(I) $\alpha > 0$ bir sabit;

(II) $F : [t_0, \infty) \times R \times R \times R \times R \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon;

(III) $r : [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon;

(IV) $\tau : [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$;

olup, denklemin çözümlerinin $[t_0, \infty)$ aralığında mevcut olduğu ve $x(t)$ çözüm olmak üzere, her bir $t_x \geq t_0$ için $\sup \{|x(t)| : t \geq t_x\} > 0$ özelliğine sahip olduğu kabul edilmiştir.

Sonuçları vermeden önce, teoremlerin ispatında kullanılacak olan notasyonlar ve lemmalar üzerinde duralım:

$D = \{(t, s): t \geq s \geq t_0\}$ olmak üzere $H \in C(D, R)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlayan anlamında P sınıfına ait olsun:

(H_1) $t \geq t_0$ için $H(t, t) = 0$ ve $t \neq s$ olduğu zaman $H(t, s) > 0$;

(H_2) $H(t, s)$, integrallenebilir h_1 ve h_2 fonksiyonları için

$$\frac{\partial H(t, s)}{\partial t} = h_1(t, s) \sqrt{H(t, s)}, \quad \frac{\partial H(t, s)}{\partial s} = -h_2(t, s) \sqrt{H(t, s)}$$

olmak üzere D bölgesi üzerinde kısmi türevlenebilirdir.

Aşağıdaki ilk lemma, Jingfa [14] ve Ohriska [15] tarafından ikinci de Tiryaki [13] tarafından incelenmiştir.

4.1. Lemma:

$x \in C^1(T, \infty)$, $t \geq T$ için $x(t) > 0$, $x'(t) > 0$ ve $x''(t) \leq 0$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca, $\tau \in C([T, \infty))$ 'de, $\tau(t) \geq 0$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. O zaman her,

$k \in (0, 1)$ için, $\tau_*(t) = \min \{t, \tau(t)\}$ olmak üzere, $t \geq T_k$ için

$$x(\tau(t)) \geq k \frac{\tau_*(t)}{t} x(t)$$

olacak şekilde $T_k \geq T$ vardır.

4.2. Lemma:

$A_2 > 0$ olmak üzere $A_0, A_1, A_2 \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$, ve $w \in C^1$

$(t_0, \infty), \mathbb{R})$ olsun. Eğer, $s \in (a, b)$ için

$$\omega' \leq -A_0(s) + A_1(s)\omega - A_2(s)|\omega|^{\alpha+1/\alpha} \quad (4.2)$$

koşulu sağlanıyorsa, o zaman, $(a, b) \subset [t_0, \infty)$, $c \in (a, b)$ ve $H \in P$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H(c, a)} \int_a^c \left[H(s, a) A_0(s) - \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{|\phi_1(s, a)|^{\alpha+1}}{(A_2(s))^\alpha} \right] ds \\ & + \frac{1}{H(b, c)} \int_c^b \left[H(b, s) A_0(s) - \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{|\phi_2(b, s)|^{\alpha+1}}{(A_2(s))^\alpha} \right] ds \leq 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

eşitsizliği doğrudur. Burada ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları

$$\phi_1(s, a) = \frac{h_1(s, a) \sqrt{H(s, a)} + A_1(s) H(s, a)}{(H(s, a))^{\alpha/(\alpha+1)}}$$

ve

$$\phi_2(b, s) = \frac{-h_2(b, s) \sqrt{H(b, s)} + A_1(s) H(b, s)}{(H(b, s))^{\alpha/(\alpha+1)}}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat:

$t \in (a, c]$ için Eş.4.2, $H(s, t)$ ile çarpılır ve t 'den c 'ye kadar s 'ye göre integrali alınırsa,

$$\int_t^c H(s, t) A_0(s) ds \leq - \int_t^c H(s, t) \omega'(s) ds + \int_t^c H(s, t) A_1(s) \omega(s) ds$$

$$-\int_t^c H(s, t) A_2(s) |\omega(s)|^{\alpha+1/\alpha} ds \quad (4.4)$$

elde edilir. (H_1) ve (H_2) özellikleri göz önüne alınırsa,

$$\int_t^c H(s, t) \omega'(s) ds = H(c, t) \omega(c) - \int_t^c h_1(s, t) \sqrt{H(s, t)} \omega(s) ds \quad (4.5)$$

elde edilir. Eş.4.5, Eş.4.4'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \int_t^c H(s, t) A_0(s) ds &\leq -H(c, t) \omega(c) + \int_t^c h_1(s, t) \sqrt{H(s, t)} \\ &+ A_1(s) H(s, t) \omega(s) ds - \int_t^c H(s, t) A_2(s) |\omega(s)|^{\alpha+1/\alpha} ds \\ &\leq -H(c, t) \omega(c) + \int_t^c \left[|h_1(s, t) \sqrt{H(s, t)} + A_1(s) H(s, t)| |\omega(s)| \right. \\ &\left. - H(s, t) A_2(s) |\omega(s)|^{\alpha+1/\alpha} \right] ds \end{aligned} \quad (4.6)$$

eşitsizliğine ulaşılır, $t \neq s$ olacak şekilde verilen t ve s için $u > 0$ olmak üzere

$$F_1(u) := |h_1 \sqrt{H} + A_1 H| u - A_2 H_u^{(\alpha+1)/\alpha}$$

seçelim. $F_1(u)$, maksimum değerine

$$\begin{aligned} u &:= \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^\alpha \frac{|h_1 \sqrt{H} + A_1 H|^\alpha}{(A_2 H)^\alpha} \text{ noktasında ulaşır ve} \\ F_1(u) &\leq F_{\max} = \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{|h_1 \sqrt{H} + A_1 H|^{\alpha+1}}{(A_2 H)^\alpha} \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. Eş.4.7, Eş.4.6'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_t^c H(s, t) A_0(s) ds \leq -H(c, t) \omega(c) \\
& + \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \int_t^c \frac{|h_1(s, t) \sqrt{H(s, t)} + A_1(s) H(s, t)|^{\alpha+1}}{(A_2(s) H(s, t))^\alpha} ds \\
& = -H(c, t) \omega(c) + \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \int_t^c \frac{|\phi_1(s, t)|^{\alpha+1}}{(A_2(s))^\alpha} ds
\end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Benzer şekilde, $t \in [c, b)$ için Eş.4.2, $H(t, s)$ ile çarpılır ve c 'den t 'ye kadar integrali alınır,

$$\begin{aligned}
& \int_c^t H(t, s) A_0(s) ds \leq H(t, c) \omega(c) + \int_c^t [-h_2(t, s) \sqrt{H(t, s)}] \\
& + A_1(s) H(t, s)] \omega(s) ds - \int_c^t H(t, s) A_2(s) |\omega(s)|^{(\alpha+1)/\alpha} ds \\
& \leq H(t, c) \omega(c) + \int_c^t [-h_2(t, s) \sqrt{H(t, s)} + A_1(s) H(t, s)] |\omega(s)| \\
& - H(t, s) A_2(s) |\omega(s)|^{(\alpha+1)/\alpha} ds
\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir, $t \neq s$ olacak şekilde verilen t ve s için $u > 0$ olmak üzere

$F_2(u) := [-h_2 \sqrt{H} + A_1 H] u - A_2 H u^{(\alpha+1)/\alpha}$ seçelim. $F_2(u)$, maksimum değerine

$u := \left(\frac{\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \right)^\alpha \frac{|-h_2 \sqrt{H} + A_1 H|^\alpha}{(A_2 H)^\alpha}$ noktasında ulaşır ve

$$F_2(u) \leq F_{2max} = \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{|-h_2 \sqrt{H} + A_1 H|^{\alpha+1}}{(A_2 H)^\alpha} \tag{4.10}$$

elde edilir. Eş.4.10, Eş.4.9'da yerine yazılırsa,

$$\int_c^t H(t, s) A_0(s) ds \leq H(t, c) \omega(c) + \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \int_c^t \frac{|\phi_2(t, s)|^{\alpha+1}}{(A_2(s))^\alpha} ds. \tag{4.11}$$

elde edilir. Eş.4.8'de $t \rightarrow a^+$ iken ve Eş.4.11'de de $t \rightarrow b^-$ iken limit alınır ve elde edilen eşitsizlikler toplanırsa Eş.4.3 elde edilir.

4.1. Teorem:

(I) - (IV) koşulları sağlansın. Ayrıca, $\rho(t) > 0$,

(V) $t \geq t_0$ ve $x \neq 0, u, v, \omega \in R$ için

$$\frac{F(t, x, u, v, \omega)}{|x|^{\alpha-1} x} \geq q_1(t)$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H(c, a)} \int_a^c \rho(s) \left[H(s, a) q_1(s) - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} r(s) |\phi_1(s, a)|^{\alpha+1} \right] ds \\ & + \frac{1}{H(b, c)} \int_c^b \rho(s) \left[H(b, s) q_1(s) - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} r(s) |\phi_2(b, s)|^{\alpha+1} \right] ds > 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

olacak şekilde bir $(a, b) \subset [t_0, \infty)$ aralığı ve $q_1 \in C([t_0, \infty))$, $H \in P$, $\rho \in C^1([t_0, \infty))$ fonksiyonları ve $c \in (a, b)$ varsa, Eş.4.1'in her çözümü, (a, b) aralığında bir sifıra sahiptir. Burada ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları

$$\phi_1(s, a) = \frac{-h_1(s, a) \sqrt{H(s, a)} + (\rho'(s) / \rho(s)) H(s, a)}{(H(s, a))^{\alpha/(\alpha+1)}} \quad (4.13)$$

$$\phi_2(b, s) = \frac{-h_2(b, s) \sqrt{H(b, s)} + (\rho'(s) / \rho(s)) H(b, s)}{(H(b, s))^{\alpha/(\alpha+1)}}$$

olarak tanımlanıyor.

İspat:

Her $t \in (a, b)$ için $x(t) \neq 0$ olsun. $t \in (a, b)$ için

$$\omega(t) = \frac{p(t)r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)}{|x(t)|^{\alpha-1}x(t)} \quad (4.14)$$

dönüşümünü tanımlayalım. Eş.4.14'ün türevi alınır, Eş.4.1 ve (V) koşulu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \omega'(t) &= \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \omega(t) - \frac{\rho(t)F(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t)x'(\tau(t)))}{|x(t)|^{\alpha-1}x(t)} - \frac{\alpha\rho(t)r(t)|x'(t)|^{\alpha+1}}{|x(t)|^{\alpha+1}} \\ &\leq -\rho(t)q_1(t) + \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \omega(t) - \frac{\alpha|\omega(t)|^{(\alpha+1)/\alpha}}{(r(t)\rho(t))^{1/\alpha}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. Eş.4.2 ve Eş.4.15 eşitsizlikleri karşılaştırılırsa,

$$A_0(t) = \rho(t)q_1(t), A_1(t) = \rho'(t)/\rho(t) \text{ ve } A_2(t) = \alpha/r(t)\rho(t))^{1/\alpha}$$

olur. Eş.4.15'e, Lemma 4.2 uygulanırsa Eş.4.12 sağlanmaz. Bu da ispatı tamamlar.

Eğer, Teorem 4.1'in koşulları, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ olacak şekilde $\{(a_n, b_n)\}$ aralıklarının bir dizisi için sağlanıyorsa, Eş.4.1 salınımlıdır. Buradan, aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.1. Sonuç:

Verilen bir $T \geq t_0$ için Teorem 4.1'in koşulları sağlanacak şekilde bir $(a, b) \subset (T, \infty)$ aralığı varsa, Eş.4.1 salınımlıdır.

Ayrıca, aşağıdaki teorem, Teorem 4.1'in bir sonucudur:

4.2. Teorem:

(I) - (V) koşulları sağlansın. Her bir $l \geq t_0$ için ϕ_l ve ϕ_2 Eş.4.13'deki gibi tanımlanmak üzere $\rho(t) > 0$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_l^t \rho(s) \left[H(s, l) q_1(s) - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} r(s) |\phi_1(s, l)|^{\alpha+1} \right] ds > 0 \quad (4.16)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_l^t \rho(s) \left[H(t, s) q_1(s) - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} r(s) |\phi_2(t, s)|^{\alpha+1} \right] ds > 0 \quad (4.17)$$

olacak şekilde $H \in P$ ve $\rho \in C^1([t_0, \infty))$ fonksiyonları varsa, Eş.4.1 salınımlıdır.

İspat:

Bazı $t_l \geq t_0$ olacak şekilde, her $t \in [t_l, \infty)$ için $x(t) \neq 0$ olsun. Eş.4.16'da $l = a \geq t_l$ olarak alınırsa, Eş.4.16'dan

$$\int_a^c \rho(s) \left[H(s, a) q_1(s) - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} r(s) |\phi_1(s, a)|^{\alpha+1} \right] ds > 0 \quad (4.18)$$

olacak şekilde $c > a$ vardır. Benzer şekilde, Eş.4.17'de, $l = c \geq t_l$ olarak alınırsa,

$$\int_c^b \rho(s) \left[H(b, s) q_1(s) - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} r(s) |\phi_2(b, s)|^{\alpha+1} \right] ds > 0 \quad (4.19)$$

olacak şekilde $b > c$ vardır. Eş.4.18 ve Eş.4.19'dan Eş.4.12 sağlanır. Buradan da, Sonuç 4.1 kullanılarak Eş.4.1'in salınımlı olduğu gösterilir.

4.3. Teorem:

(I) - (IV) ve aşağıdaki koşullar sağlansın:

(VI) Her $t \geq t_0$, $x, u, v, \omega \in R$ ve $xu > 0$ için $\text{sgn}F(t, x, u, v, \omega) = \text{sgn}x$

(VII) (VII) $r(t)$ fonksiyonu, azalmayan, türevlenebilir bir fonksiyon ve

$$\int^{\infty} (ds / r^{1/\alpha}(s)) = \infty$$

olsun.

Ayrıca, k bir sabit, $k \in (0,1)$, $\tau_*(t) = \min\{t, \tau(t)\}$, ve ϕ_1 ve ϕ_2 , Eş.4.13'deki gibi tanımlanmak üzere $\rho(t) > 0$,

(VIII) $t \geq t_0$, $x \neq 0$, $u \neq 0$, $v, \omega \in R$ için

$$\frac{F(t, x, u, v, \omega)}{|u|^{\alpha-1} u} \geq q_1(t),$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H(c, a)} \int_a^c \rho(s) \left[H(s, a) q_1(s) \left[\frac{k \tau_*(s)}{s} \right]^\alpha - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} r(s) |\phi_1(s, a)|^{\alpha+1} \right] ds \\ & + \frac{1}{H(b, c)} \int_c^b \rho(s) \left[H(b, s) q_1(s) \left[\frac{k \tau_*(s)}{s} \right]^\alpha - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} r(s) |\phi_2(b, s)|^{\alpha+1} \right] ds > 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

olacak şekilde $(a, b) \subset [t_0, \infty)$ aralığı ve $q_1 \in C([t_0, \infty))$, $H \in P$, $\rho \in C^1([t_0, \infty))$ fonksiyonları ve $c \in (a, b)$ varsa Eş.4.1'in her çözümü (a, b) aralığında bir sıfıra sahiptir.

İspat:

$x(t)$, Eş.4.1'in salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın, $t \geq T_0 \geq t_0$ için $x(t) > 0$ ve $x(\tau(t)) > 0$ olduğunu kabul edelim. Eş.4.1 ve (VI) koşulundan, benzer şekilde $x(t) < 0$ ve $x(\tau(t)) < 0$ içinde gösterilir. (VI) koşulu kullanılırsa, Eş.4.1'den, $t \geq T_1 \geq T_0$ için

$$\left(r(t) |x'(t)|^{\alpha-1} x'(t) \right)' \leq 0$$

elde edilir.

Buradan $r(t) |x'(t)|^{\alpha-1} x'(t)$ fonksiyonu azalandır ve $x'(t)$, $t \geq T_2$ için ya $x'(t) > 0$ ya da $x'(t) < 0$ olacak şekilde $T_2 \geq T_1$ vardır. $x'(t) < 0$ durumu mümkün değildir. Gerçekten, $t \geq T_2$ için $x'(t) < 0$ olduğunu varsayalım. O zaman, son eşitsizliğin T_2 'den t 'ye kadar integrali alınır,

$$r(t) (-x'(t))^{\alpha} - r(T_2) (-x'(T_2))^{\alpha}$$

elde edilir. Eşitsizlik düzenlenip, tekrar T_2 'den t 'ye kadar integrali alınır, (III) ve (VIII) koşulları kullanılırsa

$$-x(t) + x(T_2) \geq (r(T_2))^{1/\alpha} (-x'(T_2)) \int_{T_2}^t \frac{ds}{r^{1/\alpha}(s)}$$

olur ve $t \rightarrow \infty$ iken limit alındığında $x(t) < 0$ olduğu görülür. Bu da kabulümüzle çelişir. O halde $t \geq T_2$ için $x'(t) > 0$ olur. Ayrıca, $r(t)$ pozitif azalmayan olduğundan, Eş.4.1'den $x''(t) \leq 0$ olması elde edilir. Lemma 4.1'den, herhangi $k \in (0,1)$ için

$$\tau_*(t) = \min \{t, \tau(t)\} \text{ olmak üzere, her } t \geq T_3 \text{ için}$$

$$x(\tau(t)) \geq \frac{k \tau_*(t)}{t} x(t) \quad (4.21)$$

olacak şekilde bir $T_3 \geq T_2$ vardır. Eş.4.14'deki gibi $\omega(t)$ dönüşümü tanımlansın.

Eş.4.14'ün türevi alınır, Eş.4.1, (viii) koşulu ve Eş.4.21 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \omega'(t) &= \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \omega(t) - \frac{\rho(t) F(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t), x'(\tau(t)))}{(x(t))^\alpha} - \frac{\alpha |\omega(t)|^{(\alpha+1)/\alpha}}{(r(t) \rho(t))^{1/\alpha}} \\ &= \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \omega(t) - \frac{\rho(t) F(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t), x'(\tau(t)))}{x(\tau(t))^\alpha} \left(\frac{x(\tau(t))}{x(t)} \right)^\alpha \\ &\quad - \frac{\alpha |\omega(t)|^{(\alpha+1)/\alpha}}{(r(t) \rho(t))^{1/\alpha}} \leq -\rho(t) q_1(t) \left[\frac{k \tau_*(t)}{t} \right]^\alpha + \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \omega(t) - \frac{\alpha |\omega(t)|^{(\alpha+1)/\alpha}}{(r(t) \rho(t))^{1/\alpha}} \end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin ispatının devamı, Teorem 4.1'in ispatına benzerdir.

4.2. Sonuç:

Verilen bir $T \geq t_0$ için, yukarıdaki teoremin koşulları sağlanacak şekilde bir $(a, b) \subset [T, \infty)$ aralığı varsa, Eş.4.1 salınımlıdır.

Ayrıca, aşağıdaki teorem, Teorem 4.3'ün bir sonucu olarak verilebilir.

4.3. Teorem:

(I) - (IV) ve (VI)-(VIII) koşulları sağlansın. Her bir $l \geq t_0$ için k , bir sabit, $k \in (0,1)$, $\tau_*(t) = \min \{t, \tau(t)\}$, ve ϕ_l ve ϕ_2 , Eş.4.13'deki gibi tanımlanmak üzere $\rho(t) > 0$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_l^t \rho(s) \left[H(s, l) q_1(s) \left[\frac{k \tau_*(s)}{s} \right]^\alpha - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} r(s) |\phi_1(s, l)|^{\alpha+1} \right] ds > 0$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_l^t \rho(s) \left[H(t,s) q_1(s) \left[\frac{k \tau_*(s)}{s} \right]^\alpha - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} r(s) |\phi_2(t,s)|^{\alpha+1} \right] ds > 0$$

olacak şekilde $H \in P$ ve $\rho \in C^1([t_0, \infty))$ varsa, Eş.4.1 salınımlıdır.

İspat:

Teoremin ispatı, Teorem 4.2'in ispatına benzer bir yol izlenerek yapılır.

KAYNAKLAR

1. El'sgol'ts, L.E. and Norkin, S.B., "Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments", **Academic Press, Inc**, New York, (1973).
2. Kamenskii, G.A, Existence, "Uniqueness and continuous Dependence on Initial Conditions of Differential Equations with Deviating Argument of Neutral Type", **Mat. Sb.**, 55(97): 4, 363-378, (1961).
3. Myshkis, A.D, "Linear Differential Equations with Deviating Argument", Moskow, Navuka, (1972).
4. Hale, J.K., "Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlay", New York, (1977).
5. Agarwal, R.P., Grace, S.R and Q' Regan, D., "Oscillation Theory for Second Order Dynamic Equations", **Taylor and Francis**, London, (2003).
6. Gyori, I. and Ladas, G., "Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications", **Clarendon Press**, Oxford, (1991).
7. Bainov, D.D and Mishev, D.P., "Oscillation Theory for Neutral Differential Equations with Delay", **IOP Publischings Ltd.**, Bristol UK, (1992).
8. Dosly, O. and Rehak, P., "Half-Linear Differential Equations, Elsevier", North-Holland, (2005).
9. Şahiner, Y., "Oscillation of Functional Differential Equations", **A Thesis Submitted to The Graduate Scholl of Naturaland Applied Sciences of The Middle East Technical University**, (2000).
10. Dzurina, J., "Oscillation of a second order delay Differential Equations", **Archivum mathematicum**, Tomus., 33:309-314, (1997).
11. Dzurina, J., "Oscillation Criteria for second-order delay Differential Equations", **Applied Mathematics and computation**, 140, 445-453, (2003).
12. Agarwall, R.P, "Oscillation Criteria for Second-order Retarded Differential Equations", **Mathl, Comput, Modelling**, 26 (4): 1-11, (1997).
13. Tiryaki, A., Başçı, Y. and Güleç, I., "Interval criteria for oscillation of second-order functional differential equations", **Comput. Math. Appl.**, 50: 1487-1498, (2005).

14. Jingfa, W., "Oscillation and nonoscillation theorems for a class of second order quasilinear functional differential equations", *Hiroshima Math. J.*, 27: 449-466, (1997).
15. Ohriska, J., "Oscillation of second-order delay and ordinary differential equations", *Czechoslovak Math, J.*, 34: 107-112, (1984).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KARTAL Behiye Ceren
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 16.04.1982 Ankara
Medeni Hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 443 04 48
e-mail : cerenkartal@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üniv. / Matematik Bölümü	2003
Lise	Ayrancı Lisesi	1999

Yabancı Dil

İngilizce