

14359.

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ DERECE AKIŞKANLAR İÇİN SINIR TABAKASI

DENKLEMLERİNİN BENZERLİK ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Mehmet PAKDEMİRLİ

14359

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 3 Nisan 1991

Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Mayıs 1991

Tez Danışmanı

: Prof. Dr. Erdoğan SUHUBİ

Diğer Jüri Üyeleri

: Prof. Dr. Hilmi DEMİRAY

Prof. Dr. Attila ASKAR

MAYIS 1991

T. C.

Yükseköğretim Kurula
Dokümantasyon Merkezi

Ö N S Ö Z

Bu tez çalışmasının ortaya çıkması ancak büyük yardımlar sayesinde olmuştur. Bu yardımlardan kaynaklanan yüksek moral benim için büyük bir itici güç olmuştur. Değerli hocam ve tez danışmanım Prof.Dr. Erdoğan Şuhubi hem yüksek lisans dersleri ile gerekli önbilgiyi vermiş, hem de tez sırasındaki mükemmel yönlendirme ve katkılarıyla çalışmanın kısa bir sürede bitmesine yardımcı olmuştur. Değerli Hocamın en zor ve sıkıntılı anlardaki yardımları benim için büyük bir güç kaynağı olmuştur. Bundan sonraki çalışmalarımda kendisinden öğrendiklerim esas itibarı ile rehber olacaktır. Ayrıca nümerik çalışmalarımdeki yardımlarından dolayı Y.Doç. Dr. Gazanfer Ünal'a, danışmanımla tanışmamda aracı olan Prof. Dr. Avadis Hacınliyan'a ve tezin bilgisayarda yazılmasında büyük emeği geçen eşime de teşekkür ederim. Son olarak ailemin bilhassa Anne ve Babamın manevi desteğini ve değerli tavsiyelerini de belirtmeden geçemeyeceğim.

MEHMET PAKDEMİRLİ

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
BÖLÜM 1- GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2- NONNEWTONYEN AKIŞKANLAR.....	4
2.1- Genel Bilgiler.....	4
2.2- İkinci Derece Akışkanlar.....	6
2.3- Termodinamik Uyumluluk.....	14
BÖLÜM 3- ALAN DENKLEMLERİ.....	18
3.1- Hareket Denklemleri.....	18
3.2- Özel Koordinat Sistemine Göre Denklemler.....	22
3.3- Sınır Tabakası Denklemleri.....	32
BÖLÜM 4- BENZERLİK ÇÖZÜMLERİ.....	46
4.1- Üçüncü Mertebe Genel Denklik Denklemleri.....	46
4.2- Sınır tabakasına Uygulanışı.....	64
4.3- İzovektor Alan Denklemlerinin Çözümü.....	88
4.4- Benzerlik Çözümlerine Ait Denklemler.....	97
4.5- Ölçekleme Dönüşümü.....	100
BÖLÜM 5- ANALİTİK ve NÜMERİK ÇÖZÜMLER.....	103
5.1- Seri Çözümü.....	103
5.2- Nümerik Çözümler.....	111
5.3- Benzerlik Çözümüne Karşı Gelen Profil.....	120
SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	123
KAYNAKLAR.....	125
EK A.....	127
EK B.....	129
ÖZGEÇMİŞ.....	131

Ö Z E T

İkinci dereceden akışkanın bir cisim etrafındaki akışı incelenmiştir. Önce denklemleri cismin şeklinden bağımsız kılan özel bir koordinat sistemi için hareket denklemleri çıkartılmış, hareket denklemlerinden de sınır tabakası denklemleri elde edilmiştir. Sınır tabakası denklemleri eşdeğer dış formlarla ifade edilerek en geniş simetri grubuna ait izovektör alanı elde edilmiştir. İkinci derece akışkanlarda sınır tabakası için yalnızca ölçekleme dönüşümüne ait trivial olmayan benzerlik çözümü bulunabileceği gösterilmiştir. Bu dönüşüme ait izovektör alanından benzerlik çözümüne götüren adi diferansiyel denklemler elde edilmiştir. Bu denklemlerin başlangıç noktası etrafında seri çözümü yapılmıştır. Seri çözümünden faydalanılarak sınır değer problemi başlangıç değer problemine dönüştürülmüş ve küçük ϵ değerleri için (ϵ ikinci derece etkilerin büyüklüğünü gösteren bir parametre) denklem başlangıç değer metodları ile integre edilmiştir. Daha sonra bu bulunan çözümler sonlu farklar yönteminde kullanılarak daha büyük ϵ değerleri için çözümler elde edilmiş ve ikinci derece etkilerin artmasının sınır tabakasını kalınlaştırdığı görülmüştür.

SIMILARITY SOLUTIONS OF BOUNDARY LAYER EQUATIONS FOR SECOND ORDER FLUIDS

SUMMARY

Navier Stokes theory is adequate to describe the mechanical behaviour of lots of fluids especially those with low molecular weight. The fluids for which the theory is applicable are called Newtonian fluids. For these fluids there is a linear relationship between the stress and velocity gradient. Nonnewtonian fluids are then described as the fluids for which there is a nonlinear relationship between the stress and velocity gradient of the fluid. Lots of models have been proposed for the constitutive equation of nonnewtonian fluids. One such model which has gained much support from both theorists and experimenters is the second order fluid model. In this model the constitutive equation is given by the following relation

$$t = -pI + \mu A_1 + \alpha_1 A_1 A_2 + \alpha_2 A_2 A_1 \quad (1)$$

where t is the stress tensor, p pressure, μ viscosity, A_1 and A_2 are the first two Rivlin-Ericksen tensors and α_1 and α_2 are the material coefficients which may or may not depend on the temperature. For our study we choose this as a model for an incompressible nonnewtonian fluid.

In Chapter 2 taking the starting point as the thermomechanical materials we first derive equation (1) using the constitutive theory following [12]. Then we apply Clausius-Duhem inequality to (1) to see the restrictions arising from thermodynamics. Following [2] we showed that for (1) to be compatible with thermodynamics the coefficients should satisfy the conditions

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \mu \geq 0 \quad (2)$$

In Chapter 3 we first derived the equation of motion of a second order fluid in vectorial notation and then nondimensionalize the field equations. We then

derived the equation of motion for a special coordinate system. The coordinate system is the network of potential lines ($\phi = \text{const.}$) and streamlines ($\psi = \text{const.}$) corresponding to the potential flow around the object. Hence the equations, being an original contribution, are independent of the body shape immersed into the flow which enables us to solve the equations for an arbitrary body shape. Concentrating our attention to the boundary layer we write an inner and outer expansion corresponding to the inside and outside of the boundary layer respectively. We then derived the boundary layer equations and boundary conditions which are written below.

$$W_\phi \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} + \left(W_\phi^2 - 1 \right) Q'_B + W_\psi \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} = \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} + \kappa \left\{ W_\psi \frac{\partial^3 W_\phi}{\partial \psi^3} + W_\phi \frac{\partial^3 W_\phi}{\partial \psi^2 \partial \phi} + \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \phi \partial \psi} \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} + 4 Q'_B W_\phi \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} - 2 Q'_B \left[\frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} \right]^2 \right\} \quad (3)$$

$$\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial W_\psi}{\partial \psi} = 0 \quad (4)$$

In equation (3) $\kappa=0$ corresponds to the Navier-Stokes case, the terms in the left of equality are the acceleration terms. Equation (4) is due to incompressibility, W_ϕ and W_ψ are the boundary layer velocities in the ϕ and ψ coordinates respectively and $\kappa = kq_B^2$ where q_B is the velocity distribution of potential flow very close to the boundary and k is the ratio of the second order coefficient to the first order coefficient. Q_B is equal to $\log q_B$. The boundary conditions for the equations are

$$W_\phi(\phi, 0) = W_\psi(\phi, 0) = 0 \quad (5)$$

$$W_\phi(\phi, \infty) = 1, \quad \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi}(\phi, \infty) = 0 \quad (6)$$

Boundary conditions (5) denote that velocity components are zero at the boundary and (6) are derived by matching the inner and outer expansions.

In Chapter 4 we look for the similarity solutions of equation (3) and (4). Exterior forms are used in finding the solutions. In 4.1 we write the general third order balance equation in exterior form language and then derive the equations leading to the components of isovector fields. In 4.2 we put our boundary layer equations to the form of a balance equation and using the general results of previous section determined the equations for isovector fields. In 4.3 we solved these equations and found all isovectors of the boundary layer equation which are shown below:

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial \phi}, q_B = \text{const.} \quad (7)$$

$$V_2 = \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + W_\phi \frac{\partial}{\partial W_\phi}, q_B = \text{const.} \quad (8)$$

$$V_3 = c(\phi) \frac{\partial}{\partial \psi} + c'(\phi) W_\phi \frac{\partial}{\partial W_\psi}, q_B = \text{const.} \quad (9)$$

$$V_4 = 2\phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \psi \frac{\partial}{\partial \psi} - W_\psi \frac{\partial}{\partial W_\psi}, q_B = \alpha \phi^{1/2} \quad (10)$$

The first three vectors correspond to $q = \text{const.}$ or flow around a parallel plate. V_1 represents a coordinate transformation in ϕ direction which gives no useful information. V_2 is a scaling transformation for ϕ and W_ϕ . V_3 has an arbitrary function as its components which again is not interesting as a solution. The only case where $q_B \neq \text{const.}$ supplies new information leading to similarity solution of the boundary layer equation. The similarity solution is then found by making the inner product of V_4 with the forms and equating to zero which leads to the equations

$$\frac{d\phi}{2\phi} = \frac{d\psi}{\psi} = \frac{dW_\phi}{0} = \frac{dW_\psi}{-W_\psi} \quad (11)$$

Taking the first two terms we define the similarity variable as

$$\xi = \frac{\psi}{\phi^{1/2}} \quad (12)$$

and the velocity components are defined as

$$W_\phi = f(\xi) \quad , \quad W_\psi = \frac{g(\xi)}{\phi^{1/2}} \quad (13)$$

Substituting (12) and (13) into boundary layer equations (3) and (4) we obtain ordinary differential equations in terms of the similarity variable

$$f^2 - 1 + 2gf' - \xi ff' = 2f'' + \kappa [2gf''' - \xi ff'''' + 2ff''' - f'^2] \quad (14)$$

$$\xi f' - 2g' = 0 \quad (15)$$

and the boundary conditions are

$$f(0) = 0 \quad g(0) = 0 \quad (16)$$

$$f(\infty) = 1 \quad f'(\infty) = 0 \quad (17)$$

In the last section of chapter 4 we found V_4 directly by using scaling transformation.

Chapter 5 is devoted to the solutions of equations (14) and (15) subject to the conditions (16) and (17). In the first section we made a series solution near the origin as follows

$$f(\xi) = a_0 \xi + \left[\frac{\kappa a_0^2 - 1}{4} \right] \xi^2 + \frac{1}{48} a_0^2 \xi^4 + \dots \quad (18)$$

$$g(\xi) = \frac{1}{4} a_0 \xi^2 + \left[\frac{\kappa a_0^2 - 1}{12} \right] \xi^3 + \frac{1}{120} a_0^2 \xi^5 + \dots \quad (19)$$

The coefficients are in terms of an arbitrary parameter a_0 . Using the series solution by eliminating a_0 between the derivatives of f we can define a relation between the initial conditions

$$f''(0) = \frac{\kappa (f'(0))^2 - 1}{2} \quad (20)$$

Hence we have reduced the two unknown initial conditions to one. In the following section we look for a numerical solution of equations (14) and (15). We first reduced the equations into a system of first order differential equations by defining $f_1=f$, $f_2=g$, $f_3=f'$, $f_4=f''$, as follows:

$$f_1' = f_3 \quad (21)$$

$$f_2' = \xi f_3 / 2 \quad (22)$$

$$f_3' = f_4 \quad (23)$$

$$f_4' = ((f_1^2 - 1 - \xi f_1 f_3 + 2f_2 f_3 - 2f_4) / \kappa - 2f_1 f_4 + f_3^2) / (2f_2 - \xi f_1) \quad (24)$$

In equation (24) the denominator is zero initially and for f_4' to be finite the numerator should be zero which yields exactly the same result as (20). The adaptive step size Runge-Kutta method failed to solve the above differential equations so a more specialized initial value method namely Gear method (a subroutine DGEAR from IMSL library) was used to integrate the equations. The one remaining arbitrary initial condition was determined by shooting. We saw that initial value methods don't work when $\kappa > 0.001$. So we used finite difference methods (a subroutine named DVCPR from IMSL library) to solve the equations for larger κ . Due to high nonlinearities the initial estimated values should be good to maintain convergence. We use the solutions found from the initial value methods corresponding to $\kappa = 0.001$ as initial estimates of the finite difference program. The program computed the solutions for various κ values. We see that for $\kappa \geq 100$ the program fails to converge for the given boundary conditions. We assumed initially that κ was of order 1 so a large value may have no physical interpretation. The solutions for various κ values are shown in figures (3-8). We conclude that increasing κ increases the thickness of the boundary layer. In the last section of chapter 5 we outline the general method for finding the profile corresponding to

the boundary velocity distribution $q_b = \alpha \phi^{1/2}$ and give a special example for this case namely the stagnation flow. We have to mention that the derivation of the boundary layer equations for the special coordinate system and the solutions are original contributions to the literature.

B Ö L Ü M 1

G İ R İ Ş

Navier-Stokes teorisinin bazı akışkanların hareketini incelemedeki yetersizliği lineer olmayan teorilerin geliştirilmesine yol açmıştır. Teknolojideki artan ihtiyacı karşılamak üzere teorici ve deneyciler tarafından birçok modeller öne sürülmüş ve uygulanmıştır. Bu modellerden yaygın kullanıma sahip bir tanesi de ikinci derece akışkan modelidir. Bu model birçok değişik akış tipine uygulanmış, teorik olarak geçerliliği ve termodinamikle uyumlu olması için gerekli şartlar çıkarılmıştır.

Bir nonnewtonyen akışkan modeli olarak ikinci derece akışkanlar ilk defa Coleman ve Noll [1] tarafından ortaya atılmıştır. Bu akışkan için bünye denklemi

$$t = -pI + \mu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2 \quad (1)$$

şeklindedir. Burada t gerilme tansörü, p basınç, A_1, A_2 ilk iki Rivlin-Ericksen tansörleri, μ viskozite katsayısı, α_1, α_2 malzeme sabitleri olup sıcaklığa bağımlı olabilme özelliğine sahiptir. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ alındığında Newtonyen akışkanlar özel bir hal olarak ortaya çıkar. Dunn ve Fosdick [2] bu akışkanın termodinamikle uyumlu ve çözümlerin kararlı olabilmesi için

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \mu \geq 0 \quad (2)$$

şartlarını sağlaması gerektiğini göstermiştir. Bu modelle ilgili literatürde birçok çalışma yapılmış olup değişik akış tipleri için çözümler elde edilmiştir. İkinci derece akışkanlarla ilgili çok fazla çalışma yapıldığı için burada hepsinden bahsetmek imkansız gibidir. Ancak bu konuda bazı örnekler verebiliriz:

Mishra [3] sıcak dik bir plaktan geçen ikinci derece akışkanın serbest konveksiyon akımını incelemiştir. Srivastava ve Maiti [4] simetrik silindir etrafındaki akışı hesaplamış, akışın ayrılma noktasını bulmuştur. Srivastava ve Sarma [5] dönmekte olan bir diske karşı zorlama akımını incelemişlerdir. Fosdick ve Rajagopal [6] daimi akım için sürüklenmeyi incelemişlerdir. Mishra ve Panda [7] kanalın giriş bölgesinde enjeksiyonun akıma etkilerini incelemişlerdir. Rajagopal ve Gupta [8] ikinci derece akışkanların hareket denklemleri için bazı tam çözüm sınıflarını vermişlerdir. Yine Rajagopal ve Gupta [9] çakışık olmayan eksenlerde dönen iki paralel plak arasındaki akım ve kararlılığını incelemişlerdir. Siddiqui ve Kaloni [10] ikinci derece akışkanlar için bazı ters çözümleri göstermişlerdir. İnjesiyon ve emmenin Falkner-Skan akışına olan etkilerini Massoidi ve Ramezan [11] incelemiştir.

Bu çalışmamızda ikinci derece akışkan için sınır tabakası problemi incelenmiştir. Bölüm 2'de önce nonnewtonyen akışkanlarla ilgili genel bilgiler verilmiş, daha sonra ikinci derece akışkanlar için bünye denklemleri referans [12] takip edilerek çıkarılmıştır. Son kısımda ise ikinci derece akışkanın termodinamikle uyumlu olabilmesi için gerekli şartlar [2] kaynak alınarak gösterilmiştir.

Bölüm 3'de ikinci derece akışkan için sınır tabakası denklemleri çıkarılmıştır. Sınır tabakası denklemleri ilk defa [3] tarafından kartezyen koordinatlar için çıkarılmıştır. Bizim çalışmamızda ise denklemleri, akış içine yerleştirilen cismin şeklinden bağımsız kılan özel bir koordinat sistemi seçilmiştir. Bu koordinat sistemi Kaplun [13] tarafından ortaya atılmış, Kevorkian [14] tarafından ise bu koordinat sisteminde Navier-Stokes denklemleri ve bu denklemlere ait sınır tabakası denklemleri elde

edilmiştir. İkinci derece akışkanlar için ise ilk defa bu çalışmada bu koordinat sistemine ait denklemler çıkarılmıştır. Kaynak [7],[11],[15], ve [16]'da ikinci derece akışkanlar için sınır tabakası denklemleri verilmiştir. Burada verilen denklemler bizim denklemlerimizdeki genellikten yoksundur.

Bölüm 4'de elde edilen sınır tabakası denklemlerinin dış formlar yardımı ile benzerlik çözümleri araştırılmıştır. Dış formlarla kısmi türevli diferansiyel denklem çözümleri için [17],[18],[19] kaynak olarak gösterilebilir. Sınır tabakası denklemleri için en geniş simetri grubu araştırılmış, denklemlerin sadece ölçekleme dönüşümü altında trivial olmayan benzerlik çözümü bulunabileceği gösterilmiş, bu dönüşüme ait adi diferansiyel denklemler orijinal denklemlerden elde edilmiştir.

Bölüm 5'de benzerlik çözümlerine götüren adi diferansiyel denklemlerin sıfır civarında bir seri çözümü yapılmış ve sınır değer problemi başlangıç değer problemine dönüştürülmüştür. Başlangıç değer problemi küçük α parametreleri için çözülmüş daha sonra büyük α değerlerine ait çözümlerin bulunması için sonlu farklar metodu kullanılmıştır. Sonlu farklar metodu için gerekli tahmini değerler başlangıç değer probleminden sağlanmıştır. Son kısımda ise benzerlik çözümünden elde edilen hız dağılımına karşılık gelen profil incelenmiştir.

BÖLÜM 2

NONNEWTONYEN AKIŞKANLAR

2.1-GENEL BİLGİLER

Birçok gerçek akışkanın, özellikle düşük moleküler ağırlığa sahip olanların mekanik davranışları Navier-Stokes teorisi tarafından doğru olarak belirlenmektedir. Bu teorinin uygulanabildiği akışkanlar Newtonyen akışkanlar olarak adlandırılmaktadır. Newtonyen akışkanlar gerilme ile hızın konuma bağlı değişimi (hız gradyanı) arasında lineer bir ilişki olan akışkanlar olarak tanımlanabilir. Akışkan yoğunluktaki değişimler önemli olmadığında orantı katsayısı viskozite olarak adlandırılır. Viskozite verilen bir sıcaklık ve basınç için malzemeye ait bir sabittir. Nonnewtonyen akışkanlar ise verilen bir sıcaklık ve basınçtaki gerilme ile hız gradyanı arasındaki bağıntısı lineer olmayan akışkanlardır.

Newtonyen akışkanlar mekaniği bu yüzyılın başında bir değişime maruz kalmıştır. Bunun ana sebeplerinden birisi 1904'de Prandtl tarafından ortaya atılan sınır tabakası kavramı ve uçak endüstrisi olmuştur. Uçak endüstrisi sayesinde bir cismin etrafında hareket eden akış için geniş çalışmalar yapılmış, bu akış ile ilgili çeşitli tasarım metodları geliştirilmiştir. Bunun aksine nonnewtonyen akış mekaniği daha yakın zamanda gelişmeye başlamıştır. Esas itibarı ile madde akışı ile moleküler yapı arasında bir bağ kurmak isteyen fiziksel kimyacıların polimerik malzeme testleri bu konuda öncü rolü oynamıştır. Polimerik malzemelerin ticari olarak önem kazanması bu konudaki araştırmaları arttırmıştır. Özellikle kimyacılar şekil değiştirmeye maruz polimerik

sistemlerdeki gerilme davranışları ile klasik akışkanlar mekaniği arasındaki bağı kurarak nonnewtonyen akışkanlar için temel teşkil etmişlerdir.

Madde akışını inceleyen bir bilim dalı olan reoloji nonnewtonyen akış davranışlarının birçok çeşidini belli sınıflandırmalara tabi tutmuştur. Bu sınıflandırmalara gerek vardı, çünkü nonnewtonyen terimi birşeyin ne olduğunu değil ne olmadığını ifade eden bir terimdi.

Akışkan deyince aklımıza hemen hava ve su gibi newtonyen akışkanlar gelse de nonnewtonyen akışkanlar da günlük hayatımızda her zaman karşılaşılabileceğimiz tiptendir. Mutfaktan örnekler verirsek bal, hamur, sulandırılmış nişasta, yumurta akı, bitkisel yağlar bu gruba girer. Heryerde kullanılan boya aslında bir nonnewtonyen akışkandır. Bu akışkanın mekanik özellikleri ile ilgili birçok test yapılmış ve ne çok sulu olup yüzeyi kaplayamama ne de çok koyu olup fırça izlerini belli etmemesi için uygun özellikte tipler imal edilmiştir. Ayrıca günlük hayatta karşılaşılabileceğimiz asfalt, zift, tutkal gibi maddeler de Newtonyen olmayan akışkanlardır.

Nonnewtonyen davranış tipik olarak konsantre süspansiyonlarda ve yüksek moleküler ağırlıktaki maddelerde görülür. Endüstride karşılaşılabileceğimiz tipler erimiş polimerler, polimer, protein ve özel sabun eriyikleridir. Biyolojik yönden önemli olan akışkanların hemen hemen hepsi yüksek moleküler ağırlıkta sıvılardır ve dolayısıyla nonnewtonyendir. Bunlardan birisi olan kanın reolojisi üzerinde birçok çalışma yapılmıştır. %40 hacmi alyuvarlardan teşkil etmiş bir süspansiyon olması yanında süspansiyonu oluşturan sıvı da yüksek moleküler yapıda proteinlerden oluşmaktadır. Solunum sistemi için çok önemli olan mukus sıvısı nonnewtonyen yapıdadır.

Nonnewtonyen akışkanlar genelde viskoelastik terimi ile ifade edilirler. Çünkü bu sıvılar hem viskoziteli akışkan hem de elastik katı davranışını birlikte gösterirler. Newtonyen akışkanlardan alışık olduğumuz bazı özellikleri bu akışkanlar göstermezler. Bunlara birkaç örnek verelim: Normalde bir borudan aşağıya doğru akan bir sıvının çapı yere yaklaştıkça momentum korunumundan dolayı azalır. Halbuki nonnewtonyen akışkanlarda tam tersi olmakta, yani çap, boru çıkışını müteakip artmaktadır. Bunun sebebi de elastik kuvvetlerin çıkışta serbest kalması ve genleşmeyi sağlamasıdır. Ayrıca nonnewtonyen akışkanlarda jet stabilitesi Newtonyen akışkanlara göre şaşırtıcı oranda daha fazladır. Türbülanslı akımda ise tam anlaşılamayan sebeplerden ötürü yüzey sürtünmesi de büyük ölçüde azalmaktadır.

Teorici ve deneyçiler tarafından büyük destek gören ve elastik bileşen içermeyen önemli bir nonnewtonyen akışkan modeli Rivlin-Ericksen modelidir. Bu modelde akışkanın gerilme tansörü, deformasyon tansörü ve onun zamana göre türevlerini içeren bir fonksiyon tarafından belirlenmektedir. Rivlin-Ericksen akışkanları içerisinde ise çok iyi bilinen özel bir grup ikinci derece akışkanlar olarak adlandırılır. Bu çalışmada sınır tabakası akışı için ikinci dereceden akışkan model olarak alınmıştır. Takip eden kısımda ikinci derece akışkanın bünye denklemi ve bünye denklemleri üzerindeki termodinamikten gelen kısıtlar üzerinde duracağız.

2.2-İKİNCİ DERECE AKIŞKANLAR

Bu kısımda ikinci derece akışkanlar için bünye denklemlerinin çıkarılışı gösterilecektir. Başlangıç noktası olarak termomekanik malzemeler alınacaktır. Bünye değişkenlerini yalnız hareket ve sıcaklığın oluşturduğu malzemeler termomekanik malzemelerdir. Bünye

teorisindeki nedensellik, determinizm, eşbulunma aksiyomlarının sağlandığı varsayılırsa bünye denklemleri bu malzemeler için şöyle yazılabilir.

$$t(X,t) = \mathcal{F} [x(X',t'), \theta(X',t'); X,t] \quad (2.2.1)$$

$$q(X,t) = Q [x(X',t'), \theta(X',t'); X,t] \quad (2.2.2)$$

$$e(X,t) = \mathcal{E} [x(X',t'), \theta(X',t'); X,t] \quad (2.2.3)$$

$$\eta(X,t) = \mathcal{H} [x(X',t'), \theta(X',t'); X,t] \quad (2.2.4)$$

Burada t gerilme tansörü, q ısı vektörü, e iç enerji yoğunluğu, η entropi yoğunluğudur. Bundan sonraki analizde sadece gerilme örnek olarak alınacaktır. Denklem (2.2.1)'de $\mathcal{F}$, hareket $\langle x \rangle$ ve sıcaklığın $\langle \theta \rangle$ tansör değerli bir fonksiyoneli, bünye değişkenini hesaplamak istediğimiz parçacığın ve zamanın ise fonksiyonudur. X ve t gerilmenin hesaplandığı parçacığı ve zamanı göstermektedir. X' bu referans konumunda $\mathcal{R}$ bölgesinin bir elemanını, t' ise $(-\infty, t]$ aralığına ait zamanı gösterir.

(2.2.1) üzerine önce objektivite aksiyomunu uygulayalım. Bu aksiyoma göre bünye fonksiyonelleri uzaysal koordinat takımının rijid hareketlerinde form-invaryant kalmalıdır. Böyle bir rijid hareket genel olarak

$$\bar{x}(X', \bar{t}') = Q(t') \cdot x(X', t') + b(t') \quad (2.2.5)$$

şeklinde ifade edilebilir. $\bar{t}' = t' - a$ ve Q ortogonal keyfi bir tansör, a ise yine keyfi bir skalerdir. Önce üç özel durum üzerinde duralım:

a) Uzaysal Koordinatların Rijid Ötelemesi:

Bu durum için $Q=I$, $a=0$ $\bar{x}(X', \bar{t}') = x(X', t') + b(t')$ olur.

Özel olarak $b(t') = -x(X, t')$ seçersek genellikle bir kaybımız olmaz. Fonksiyonel bu transformasyon altında aynı kalmalıdır:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [\bar{x}(X', \bar{t}'), Q(X', \bar{t}'); X, \bar{t}] &= \mathcal{F} [x(X', t') - x(X, t'), Q(X', t'); X, t] \\ &= \mathcal{F} [x(X', t'), Q(X', t'); X, t] \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

b) Zaman Kaydırması:

Bunun için $Q(t') = I$, $b(t') = 0$, $a = t$ alalım. Bu durumda $\bar{x}(X', \bar{t}') = x(X', t')$ $\bar{t}' = t' - t$ $-\infty \leq \bar{t}' \leq 0$ olur. Elde edilen gerilme tansörü

$$t = \mathcal{F} [x(X', \bar{t}' + t), \theta(X', \bar{t}' + t); X, 0] \quad (2.2.7)$$

(2.2.6) ile karşılaştırıldığında bünye değişkenlerinin eksplisit olarak zamana bağımlı olmadığı çıkar. $\tau = t - t' \geq 0$ tanımlarsak $0 \leq \tau \leq \infty$ arasında olur ve (2.2.6)'ya yerleştirilirse

$$t(X, t) = \mathcal{F} [x(X', t - \tau) - x(X, t - \tau), \theta(X', t - \tau); X] \quad (2.2.8)$$

Dolayısı ile $\mathcal{F}$ fonksiyoneli şu andan geriye doğru relatif hareketlerin ve sıcaklığın geçmişi ile alakalıdır.

c) Uzaysal Sistemin Rijid Dönmesi:

$Q(t')$ keyfi, $b = 0$, $a = 0$ bu duruma karşılık gelir. Gerilme bu transformasyon sayesinde

$$\bar{t}(X, t) = Q(t) t(X, t) Q^T(t) \quad (2.2.9)$$

halini alır. (2.2.8)e elde ettiklerimiz yerleştirilirse

$$Q(t) \mathcal{F} [x(X', t-\tau) - x(X, t-\tau), \theta(X', t-\tau), X] Q^T(t) = \mathcal{F} (Q(t-\tau) [x(X', t-\tau) - x(X, t-\tau)], \theta(X', t-\tau), X] \quad (2.2.10)$$

(2.2.10) $\mathcal{F}$ 'in objektif olması için getirilen kısıttır. Böylece termomekanik malzemeler için en genel hali (2.2.10) şartını sağlayan (2.2.8) denklemi olarak alabiliriz. Tabi ki (2.2.8)'in geriye kalan maddesel simetri, yöresellik, bellek ve uygunluk aksiyomlarını sağlaması gerekir.

Maddesel simetri şu şekilde karakterize edilebilir.

$$\bar{X} = SX + B \quad (2.2.11)$$

S ortogonal bir transformasyon grubunu, B ise X' 'den ötelemeyi temsil etmektedir. Bu durumda gerilme fonksiyoneli (2.2.8)den

$$\mathcal{F} [x(X', t-\tau) - x(X, t-\tau), \theta(X', t-\tau), x] = \mathcal{F} [x(SX' + B, t-\tau) - x(SX + B, t-\tau), \theta(SX' + B, t-\tau), SX + B] \quad (2.2.12)$$

(2.2.12)de B'ye bağımlılık yoksa bu, cismin homojen olduğunu gösterir. Homojen cisimlerde gerilme X' 'e açık (eksplisit) olarak bağımlı değildir. S tam ortogonal grup ise malzeme izotropdur, yani doğrultu değişikliklerinin bünye fonksiyoneli üzerinde etkisi yoktur.

Şimdi $x(X', t-\tau), \theta(X', t-\tau)$ fonksiyonlarının $X' = X$ 'de Taylor serisine açabildiğimizi varsayalım. Bu durumda bünye denklemleri şu hali alır:

$$t(X, t) = F[x_{K_1}(t-\tau), x_{K_1 K_2}(t-\tau), \dots, x_{K_1 K_2 \dots K_p}(t-\tau), \theta_{K_1}(t-\tau), \dots, \theta_{K_1 K_2 \dots K_q}(t-\tau); D_K, X] \quad (2.2.13)$$

$$(k_1, k_2, \dots, k_p, \dots, k_Q, \dots = 1, 2, 3, \dots)$$

D_K terimleri Taylor açılımından gelen $X' - X$ terimlerinden dolayı alınmıştır. Fonksiyonelin seçilen baz sistemi ile değişebileceğini gösteren vektörlerdir. Malzemenin izotrop olduğunu varsayarsak bunlar atılabilir. (2.2.13) bünye denklemine sahip olan maddeler basit olmayan maddeler olarak adlandırılır. Bu maddeler için mekanik olarak P. mertebeden, ısı olarak ise Q. mertebededir diyebiliriz. Herhangi bir noktada bünye denklemleri eğer sadece çok yakın noktaların etkisi altında kalıyorsa, yani $|X' - X|$ çok küçükse sadece birinci gradyanları almak yeterli olabilir. Hem mekanik hem de ısı yönünden 1. mertebeden olan malzemeler basit malzemeler olarak adlandırılır. Basit malzemeler için bünye denklemleri

$$t = \mathcal{F} [x_{,K}(t-\tau), \theta(t-\tau), \theta_{,K}(t-\tau); X] \quad (2.2.14)$$

olur.

Simdi yeni bir fonksiyonel tanımlayalım.

$$F_{KL} = x_{,K,K}(X,t) x_{,L,L}(X,t) \mathcal{F}_{K,L} \quad (2.2.15)$$

F_{KL} objektif bir fonksiyoneldir. Cauchy'nin teoremlerinden birisine göre argümanları $x_{,K_1}, x_{,K_1 K_2}, \dots, \theta_{,K_1}, \theta_{,K_1 K_2}$ ($K_\alpha = 1, 2, 3$) olan tek değerli bir fonksiyon F_{KL} bu vektörlerin ikişer ikişer skaler çarpımlarının bir fonksiyonu haline gelir. Basit malzemeler için bu çarpımlar

$$C_{KL}(t-\tau) \equiv \delta_{KL} x_{,K,K}(t-\tau) x_{,L,L}(t-\tau) \quad (2.2.16)$$

$$\det |x_{,K,K}(t-\tau)| = [\det C_{KL}(t-\tau)]^{1/2} = \frac{\rho_0}{\rho(t-\tau)} \quad (2.2.17)$$

şeklindedir. Böylece basit malzemeler için bünye

denklemleri

$$t_{kl}(X,t) = F_{KL} [C_{MN}(t-\tau), \rho^{-1}(t-\tau), \theta(t-\tau), \theta_{,K}(t-\tau); X] X_{K,k} X_{L,l} \quad (2.2.18)$$

şeklini alır.

Şimdi düzgün bellek aksiyomunun getirdiği sonuçları inceleyelim. Bu durumda malzeme belli bir tarihten eskisini hatırlamaz. Bu durumda x 'i taylor serisine açabiliriz.

$$x(X,t-\tau) = x(X,t) - \dot{x}(X,t)\tau + \frac{1}{2}\ddot{x}(X,t)\tau^2 \dots \quad (2.2.19)$$

Fonksiyonelin τ 'ye bağımlılığı kalkıp τ 'nin katsayılarının bir fonksiyonu olur. Denklem (2.2.18) şöyle yazılabilir:

$$t_{kl}(X,t) = F_{KL} (C_{MN}, \dot{C}_{MN}, \ddot{C}_{MN}, \dots, C_{MN}^{(p)}, \rho^{-1}, \dot{\rho}, \ddot{\rho}, \dots, \rho^{(p)}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dots, \theta^{(q)}, \theta_{,K}, \dot{\theta}_{,K}, \dots, \theta_{,K}^{(r)}, X) X_{K,k} X_{L,l} \quad (2.2.20)$$

Son olarak uygunluk aksiyomunu uygulayalım. Süreklilik denklemini yazarsak

$$\frac{\rho_0}{\rho(X',t')} = \det \frac{\partial x_k(X',t')}{\partial X'_K} \quad (2.2.21)$$

ρ^{-1} 'in C_{KL} içerisine yerleştirilebileceğini görürüz. Böylece F_{KL} kütle korunumu ile uygunluk arzeder. Isı iletimini de ihmal edersek genel şekil değiştirme hızına bağlı malzemeler için bünye denklemlerini

$$t_{kl} = j^{-1} x_{k,K} x_{l,L} T_{KL} (C, \dot{C}, \ddot{C}, \dots, C^{(p)}, \theta, X) \quad (2.2.22)$$

olarak yazabiliriz.

Şimdi denklem (2.2.22)'nin akışkanlar için alacağı hali inceleyelim. Seçeceğimiz koordinat seçimi yoğunluğu jakobyene bağlı olarak hesaplama imkanı vermediğinden ρ ayrı bir bünye değişkeni olarak argümanlara sokulmuştur. Akışkan tanımına göre ρ 'yu değiştirmeyen her konum referans konumu olarak seçilebilir ve cismin davranışını etkilemez. Dolayısı ile her t anında $x = X$ seçebiliriz. Yani her hangi bir t anında akışkan parçacıklarının uzaysal konumlarının maddesel koordinatları belirlediğini düşünebiliriz. Dolayısı ile her t anı için

$$j=1, \quad x_{k,K} = \delta_{k,K}, \quad C = I \quad (2.2.23)$$

$$\dot{C} = 2F^T d F = 2d = A_1 \quad (2.2.24)$$

$$C^{(r)} = F^T A_r F = A_r \quad r = 1, 2, \dots, p \quad (2.2.25)$$

yazabiliriz. Böylece şekil değiştirme hız tansörleri C Rivlin-Ericksen tansörleri olur. Rivlin-Ericksen tansörleri bir yay elemanının zamana göre maddesel türevleri alınarak elde edilir.

$$\frac{D^r}{Dt^r} (ds^2) = dx^T A_r dx \quad (2.2.26)$$

Tansörler simetrik olup yay elemanının r . türevi r . Rivlin-Ericksen tansörüne karşılık gelir. İlk türev ise şöyledir:

$$\frac{D}{Dt} (ds^2) = dx^T (2d) dx \quad (2.2.27)$$

Buradan ilk Rivlin-Ericksen tansörü deformasyon tansörünün iki katı olarak bulunur.

$$A_1 = 2d \quad (2.2.28)$$

Ardışık türevler alınarak Rivlin-Ericksen tansörleri arasındaki şu bağıntıyı gösterebiliriz.

$$\dot{A}_{r+1} = \dot{A}_r + L A_r + A_r L^T \quad (2.2.29)$$

Burada $L = \text{grad } v$ olarak tanımlanmıştır.

Şimdi (2.2.22) bünye denklemini (2.2.23), (2.2.24) ve (2.2.25)'i kullanarak yeniden yazarsak

$$t = T (A_1, A_2, A_3, \dots, A_r, \rho, \theta, x) \quad (2.2.30)$$

şeklini alır. Bünye denklemleri (2.2.30) ile verilen akışkanlar Rivlin-Ericksen akışkanlarıdır. Akışkanlar izotrop olacaklarından

$$T (Q A_1 Q^T, \dots, Q A_r Q^T, \rho, \theta, x) = Q T (A_1, A_2, \dots, A_r, \rho, \theta, x) Q^T \quad (2.2.31)$$

bağıntısı sağlanmalıdır. Aynı zamanda (2.2.31) objektivite ilkesinin de bir sonucudur.

(2.2.30)'da r . dereceye kadar olan Rivlin-Ericksen tansörleri alınmıştır. Bunun özel bir durumu olan ilk iki Rivlin-Ericksen tansörü alınırsa ve akışkan homojen kabul edilirse

$$t = T (A_1, A_2, \rho, \theta) \quad (2.2.32)$$

şeklinde yazılabilir. t düzgün davranan bir fonksiyon ise A_1 ve A_2 'nin polinomları şeklinde yazılabilir. [20]

$$\begin{aligned} t = & -pI + \alpha_1 I + \alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_2 + \alpha_4 A_1^2 + \alpha_5 A_2^2 + \alpha_6 (A_1 A_2 + A_2 A_1) + \alpha_7 (A_1^2 A_2 + A_2 A_1^2) \\ & + \alpha_8 (A_1 A_2^2 + A_2^2 A_1) \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

Katsayı fonksiyonları ise A_1 ve A_2 matrislerinin invaryantlarına bağlı olarak

$$\alpha_i = \alpha_i (\text{tr} A_1, \text{tr} A_1^2, \text{tr} A_1^3, \text{tr} A_2, \text{tr} A_2^2, \text{tr} A_2^3, \text{tr} A_1 A_2, \text{tr} A_1^2 A_2, \text{tr} A_1 A_2^2, \text{tr} A_1^2 A_2^2, \rho, \theta) \quad (2.2.34)$$

şeklindedir. (2.2.33)'ün iyi bilinen ve çok kullanılan özel bir durumu ise ikinci derece akışkanlardır ve bu akışkan için bünye denklemleri

$$t = -pI + \mu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2 \quad (2.2.35)$$

şeklinde verilir. μ, α_1, α_2 sabit veya sıcaklığın bir fonksiyonu olabilir. Biz bundan sonraki çalışmamızda nonnewtonyen akışkan olarak bu modeli kullanacağız. Açıktır ki $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ alınırsa nonnewtonyen akışkanlar özel hal olarak elde edilir.

2.3-TERMODİNAMİK UYUMLULUK

İkinci derece akışkanlar için elde ettiğimiz gerilmenin, denklem (2.2.35)'in termodinamik uyumlu olabilmesi için sağlaması gereken şartları inceleyelim. Önce daha genel bir hal olan aşağıdaki bünye denklemlerini ele alalım.

$$t = -pI + \hat{t} (\theta, g, L, \dot{L}) \quad (2.3.1)$$

$$q = q (\theta, g, L, \dot{L}) \quad (2.3.2)$$

$$\epsilon = \epsilon (\theta, g, L, \dot{L}) \quad (2.3.3)$$

$$\eta = \eta (\theta, g, L, \dot{L}) \quad (2.3.4)$$

Yukarıda t gerilme tansörü, q ısı vektörü, ϵ iç enerji yoğunluğu, η entropi yoğunluğudur. $g = \text{grad } \theta$, $L = \text{grad } v$ olarak tanımlanmıştır. Clausius-Duhem

eşitsizliğini

$$\rho (\dot{\epsilon} - \dot{\eta} \dot{\theta}) - t.L + \frac{q.g}{\theta} \leq 0 \quad (2.3.5)$$

olarak yazabiliriz. Helmholtz serbest enerjisini

$$\psi = \epsilon - \theta \eta \quad (2.3.6)$$

şeklinde yazarsak (2.3.5) şu şekle girer.

$$\rho (\dot{\psi} + \dot{\eta} \dot{\theta}) - t.L + \frac{q.g}{\theta} \leq 0 \quad (2.3.7)$$

Önce serbest enerjinin zamana göre türevini hesaplayalım.

$$\dot{\psi} = \psi_{\theta} \dot{\theta} + \psi_g \dot{g} + \psi_L \dot{L} + \psi_L \ddot{L} \quad (2.3.8)$$

(2.3.1), (2.3.2), (2.3.4), (2.3.8) denklemleri (2.3.7)'ye yerleştirilirse

$$\rho (\psi_{\theta} \dot{\theta} + \psi_g \dot{g} + \psi_L \dot{L} + \psi_L \ddot{L}) - t.L + \frac{q.g}{\theta} \leq 0 \quad (2.3.9)$$

(2.3.9) eşitsizliği $\dot{\theta}$, $\dot{g}$, $\ddot{L}$ cinsinden lineerdir. Bu durumda eşitsizliğin korunabilmesi için bu terimlerin keyfi değişimlerine müsaade edilmemelidir. Böylece

$$\psi_g = 0, \quad \psi_L = 0, \quad \psi_{\theta} + \eta = 0 \quad (2.3.10)$$

elde edilir. (2.3.10)'dan

$$\psi = \psi (\theta, L) \quad (2.3.11)$$

$$\eta = -\psi_{\theta} (\theta, L) \quad (2.3.12)$$

sonuçları kolayca elde edilir. Geriye ise

$$\rho \psi_L \ddot{L} - t.L + \frac{q.g}{\theta} \leq 0 \quad (2.3.13)$$

eşitsizliği kalmıştır. İkinci derece akışkanlar için gerilme, denklem (2.2.35)'den

$$t = \mu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2 \quad (2.3.14)$$

şeklinde yazılır. A_1 ve A_2 iki Rivlin-Ericksen tansörü L ve L cinsinden [2]

$$A_1 = L + L^T = 2d \quad (2.3.15)$$

$$A_2 = \dot{A}_1 + A_1 L + L^T A_1 = \dot{L} + \dot{L}^T + L^2 + L^{T^2} + 2L^T L \quad (2.3.16)$$

şeklinde yazılabilir. α_1, α_2, μ sıcaklığın bir fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$t(\theta, g, L, \dot{L}) = \mu(\theta) (L + L^T) + \alpha_1(\theta) (\dot{L} + \dot{L}^T + L^2 + L^{T^2} + 2L^T L) + \alpha_2(\theta) (L^2 + L^{T^2} + L L^T + L^T L) \quad (2.3.17)$$

Şimdi (2.3.17) (2.3.13)'e yerleştirilir ve bazı düzenlemeler yapılırsa

$$\rho \psi_L(\theta, L) \cdot \dot{L} - \alpha_1(\theta) [\dot{L} + \dot{L}^T] \cdot L - \mu(\theta) [L + L^T] \cdot L - (\alpha_1(\theta) + \alpha_2(\theta)) [L^2 + L^{T^2} + 2L L^T] \cdot L + \frac{q(\theta, g, L, \dot{L}) \cdot g}{\theta} \leq 0 \quad (2.3.18)$$

(2.3.18)'de $g = 0$ hali için eşitsizliğin sağlanması gerekir. Bu durumda L terimleri lineer olduğu için bu terimlerin olduğu kısmın kaybolması gerekmektedir. Dolayısı ile

$$\psi_L(\theta, L) \cdot \dot{L} = \frac{\alpha_1(\theta)}{\rho} (\dot{L} + \dot{L}^T) \cdot L \quad (2.3.19)$$

elde edilir. Geriye kalan eşitsizliğin sağlanması için L cinsinden kübik olan terimlerin yok olması gerekmektedir.

$$(\alpha_1(\theta) + \alpha_2(\theta)) [L^2 + L^{T^2} + 2L L^T] \cdot L = 0 \quad (2.3.20)$$

Geriye ise

$$\mu(\theta) [L + L^T] \cdot L \geq 0 \quad (2.3.21)$$

denklemini kalır. (2.3.20) ve (2.3.21)'in her keyfi L tansörü için sağlanması ancak ve ancak

$$\alpha_1(\theta) + \alpha_2(\theta) = 0 \quad (2.3.22)$$

$$\mu(\theta) \geq 0 \quad (2.3.23)$$

şartları ile olabilir. Böylece herhangi bir ikinci derece akışkanın termodinamik ile uyumlu olabilmesi için gerekli şartları elde etmiş olduk. Bu kısımda elde edilen sonuçlar tamamen kaynak [21]'ye dayanmaktadır.

BÖLÜM 3

ALAN DENKLEMLERİ

Bu bölümde ikinci dereceden bir akışkanın hareket denklemleri vektörel olarak çıkarılacaktır. Hareket denklemleri boyutsuzlaştırıldıktan sonra seçilen özel koordinat sistemine göre yeniden yazılacaktır. Seçilen koordinat sisteminin en önemli özelliği hareket denklemlerini akış içine yerleştirilen cismin şeklinden bağımsız kılmasıdır. Daha sonra çıkan denklemlerden ise sınır tabakası denklemleri elde edilecektir.

3.1-HAREKET DENKLEMLERİ

Hareket denklemleri lokal olarak

$$\text{div } t + \rho b = \rho \dot{v} \quad (3.1.1)$$

şeklinde yazılır. Burada t gerilme tansörü, b birim kütle başına düşen kütle kuvveti, ρ yoğunluk, v hız vektörü ve $\dot{v}$ hızın zamana göre maddesel türevi veya ivmedir. Akışkanın sıkıştırılamaz olduğu kabul edildiğinde

$$\text{div } v = 0 \quad (3.1.2)$$

olur. İkinci derece akışkan için geçen bölümde çıkarılan bünye denklemi (2.2.35) yazılırsa

$$t = -p I + \mu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2 \quad (3.1.3)$$

şeklinde olur. Burada p basınç, μ viskozite katsayısı, α_1, α_2 sıcaklığa bağlı olabilen gerilme modülleri A_1 ve A_2 ilk iki Rivlin-Ericksen tansörüdür. Bu tansörler geçen bölümde

$$A_1 = L + L^T \quad (3.1.4)$$

$$A_2 = \dot{A}_1 + A_1 L + L^T A_1 \quad (3.1.5)$$

olarak çıkarılmıştı. Burada $L = \text{grad } v$ 'dir. Akışkanın termodinamikle uyumlu olabilmesi için geçen bölümde çıkarılan $\mu \geq 0$, $\alpha_2 = -\alpha_1$ bağıntıları ve (3.1.4), (3.1.5) ifadeleri (3.1.3)'e yerleştirilirse

$$t = -pI + \mu A_1 + \alpha (\dot{A}_1 + A_1 W - W A_1) \quad (3.1.6)$$

elde edilir. Burada antisimetrik spin tansörü $W = (L - L^T)/2$ olarak tanımlanmıştır. Ayrıca sıkışmazlık koşulu (3.1.2) nedeni ile

$$\text{div } A_1 = \nabla^2 v \quad (3.1.7)$$

$$\dot{A}_1 = (A_1)_t + (\text{grad } A_1)v \quad (3.1.8)$$

eşitlikleri hemen yazılabilir. Şimdi yukarıdaki iki bağıntıda kullanılarak (3.1.6)'nın diverjansı alınırsa

$$\text{div } t = -\text{grad } p + \mu \nabla^2 v + \alpha \nabla^2 v_t + \alpha \text{div} [(\text{grad } A_1)v + A_1 W - W A_1] \quad (3.1.9)$$

elde edilir. v_t hızın zamana göre türevidir.

Parantez içindeki terimin hesaplanabilmesi için endis notasyonunu kullanalım ve terimleri ayrı ayrı hesaplayalım:

$$(\text{grad } A_1)v = (\nu^i_{;j} + \nu^i_{;j};^i)_{;k} \nu^k = \nu^i_{;jk} \nu^k + \nu^i_{;j};^i \nu^k_{;k} \quad (3.1.10)$$

$$A_1 W - W A_1 = A^i_{1k} W^k_j - W^i_k A^k_j = \nu^i_{;k};^i \nu^k_{;j} - \nu^i_{;j};^i \nu^k_{;k} \quad (3.1.11)$$

(3.1.10) ve (3.1.11)'in diverjanslarını alıp toplarsak

$$\text{div}(\langle \text{grad } A_1 \rangle v + A_1 W - W A_1) = v^i_{;jk} v^k_{;i} + v^i_{;j} v^k_{;ki} + v^i_{;k} v^k_{;j} + v^i_{;j} v^k_{;k} + v^i_{;k} v^k_{;j} + v^i_{;j} v^k_{;k} + v^k_{;ji} \quad (3.1.12)$$

elde ederiz. $v^i_{;k} v^k_{;j} v^i$ terimini (3.1.12)'ye ekler ve çıkarırsak

$$\text{div}(\) = v^k [v^i_{;j} v^i_{;ki} - v^i_{;k} v^i_{;j} + [v^i_{;k} v^k_{;i} + v^i_{;j} v^k_{;k} + v^i_{;j} v^k_{;i} + v^k_{;ji} v^i_{;k} + v^i_{;jk} v^k_{;i}]] \quad (3.1.13)$$

buluruz. (3.1.13)'de ilk parantez $2(\nabla^2 W)v$, ikinci parantez $\text{grad}(v \cdot \nabla^2 v)$, üçüncü parantez ise $\text{grad}|A_1|^2/4$ olur. Böylece

$$\text{div}(\) = 2(\nabla^2 W)v + \text{grad}(v \cdot \nabla^2 v) + (\text{grad}|A_1|^2)/4 \quad (3.1.14)$$

yazılabilir. $w = \text{rot } v$, W tansörünün aksenel vektörünün iki katı olur ve (3.1.14) ise

$$\text{div}(\) = \nabla^2 w \times v + \text{grad}(v \cdot \nabla^2 v + |A_1|^2/4) \quad (3.1.15)$$

şekline gelir. (3.1.15) (3.1.9)'da yerine yazılırsa

$$\text{div } t = -\text{grad } p + \mu \nabla^2 v + \alpha \nabla^2 v_t + \alpha \nabla^2 w \times v + \alpha \text{grad}(v \cdot \nabla^2 v + |A_1|^2/4) \quad (3.1.16)$$

elde edilir. İvme vektörel olarak

$$\ddot{v} = v_t + w \times v + \text{grad } |v|^2/2 \quad (3.1.17)$$

şeklinde yazılır, (3.1.16) (3.1.17) başlangıçtaki hareket denkleminde (3.1.1) yerleştirilir ve $b=0$ alınırsa

$$\rho(v_t + \text{grad}|v|^2/2 + w \times v) = -\text{grad } p + \mu \nabla^2 v + \alpha [\nabla^2 v_t + \nabla^2 w \times v + \text{grad}(v \cdot \nabla^2 v + |A_1|^2/4)] \quad (3.1.18)$$

denklemini elde edilir.

Denklem (3.1.18)'i boyutsuzlaştırmak için bütün uzunlukları bir karakteristik uzunluk L ile ve bütün hızları da bir karakteristik hız U ile bölelim ve

$$q = v / U \quad (3.1.19)$$

tanımlayalım. Basınç ve zaman ise şu şekilde boyutsuzlaştırılır:

$$p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad t^* = \frac{tU}{L} \quad (3.1.20)$$

Diğer terimler ise

$$\begin{aligned} \nabla v &= \frac{U}{L} \nabla q, \quad \nabla^2 v = \frac{U}{L^2} \nabla^2 q, \quad \text{rot } v = \frac{U}{L} \text{rot } q \\ (A_1)_t &= \frac{U}{L} (A_1^*)_t, \quad w = \frac{U}{L} w^*, \quad \nabla^2 w = \frac{U}{L^3} \nabla^2 w^* \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

şeklinde yazılır. Elde edilen (3.1.19), (3.1.20), (3.1.21) terimleri (3.1.18)'e yerleştirilirse

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{U^2}{L} q_{t^{**}} + \frac{U^2}{L} \nabla(|q|^2/2) + \frac{U^2}{L} (w^* \times q) \right] &= -\rho \frac{U^2}{L} \nabla p^* + \\ \mu \frac{U}{L^2} \nabla^2 q + \alpha \left[\frac{U^2}{L^3} (\nabla^2 q)_t + \frac{U^2}{L^3} (\nabla^2 w^* \times q) + \frac{U^2}{L^3} \nabla(q \cdot \nabla^2 q) \right. \\ &\left. + \frac{U^2}{L^3} \nabla(|A_1^*|^2/4) \right] \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

bulunur. (3.1.22) $L/\rho U^2$ ile çarpılırsa boyutsuz denklemler

$$\begin{aligned} q_t + \nabla(|q|^2/2) + (w \times q) &= -\nabla p + \varepsilon \nabla^2 q + \varepsilon_1 [(\nabla^2 q)_t + \nabla^2 w \times q + \\ \nabla(q \cdot \nabla^2 q) + \nabla|A_1|^2/4] \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

şeklinde elde edilir. (*) işareti kolaylık açısından terimlerin üzerinden kaldırılmıştır. Burada ϵ ve ϵ_1 katsayıları

$$\epsilon = \frac{1}{Re} = \frac{\mu}{\rho UL} \quad (3.1.24)$$

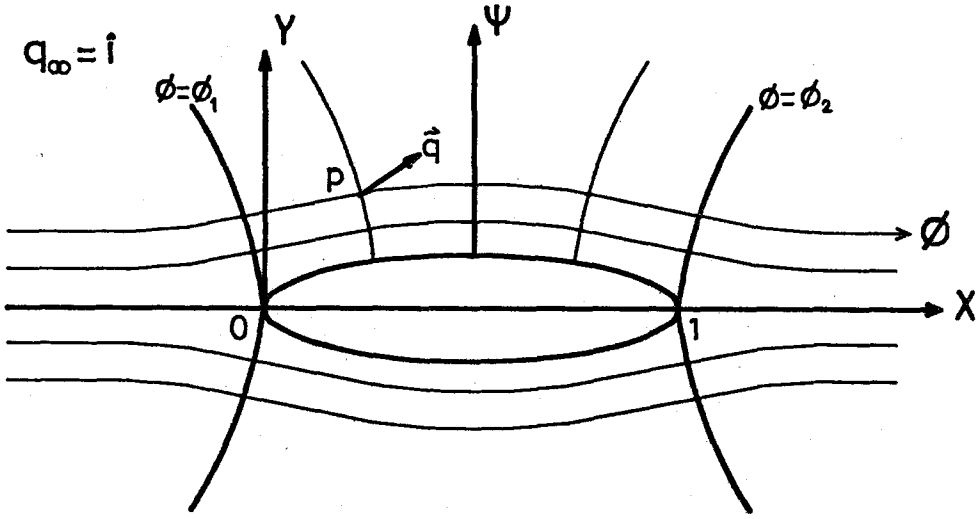
$$\epsilon_1 = \frac{\alpha}{\rho L^2} \quad (3.1.25)$$

olarak tanımlanmıştır.

Elde edilen denklemler herhangi bir ikinci derece akışkanın hareket denklemleri olup koordinat sisteminden bağımsız vektörel formdadır. Gelecek bölümde ise özel bir koordinat sistemi seçilip denklemler bu koordinat sistemine göre yazılacaktır.

3.2-ÖZEL KOORDİNAT SİSTEMİNE GÖRE DENKLEMLER

Önce Kaplun [13] tarafından ortaya atılan iki boyutlu özel koordinat sistemi için denklemler yazılacak, daha sonra akım içine yerleştirilen bir cisim için sınır tabakası denklemleri çıkarılacaktır. Sınır tabakasını etkin bir şekilde inceleyebilmek için cisim etrafındaki akım çizgilerine uygun bir koordinat sistemi seçmenin çok yararlı olacağı açıktır. Ancak böyle bir koordinat sistemi yalnız gözönüne alınan belirli bir cisim için geçerli olacaktır. Böyle bir koordinat sisteminin akım içine yerleştirilen cisimden bağımsız olması her cisim için geçerli hareket denklemlerini elde etmemize yarayacaktır. Bu amaçla şekil 1'de gösterildiği gibi bir cisim etrafında potansiyel bir akım olduğunu farzedelim. Bu durumda cisim etrafında akım çizgileri ve bu çizgilere dik potansiyel çizgiler oluşacaktır. Bir eğrisel koordinat takımını ϕ =sabit ve ψ =sabit çizgileri ile tanımlayalım.



Şekil 1-Özel koordinat sistemi

$\psi=0$ bu koordinat sisteminde akım içine yerleştirilen cismin sınırını verecektir. q_0 potansiyel akım için kompleks hız dağılımı olarak kabul edilirse kartezyen koordinatlarda $q_0 = u_0 i + v_0 j$ olarak ifade edilebilir ve analitik bir fonksiyon ile gösterilebilir:

$$F'(z) = u_0 - i v_0 \quad z = x + i y \quad (3.2.1)$$

Basınç Bernoulli denkleminde

$$p_0 = \frac{1}{2} (1 - q_0^2) \quad p_0(\infty) = 0 \quad (3.2.2)$$

olarak elde edilir. Ayrıca potansiyel akımda şu tanımlarda gereklidir:

$$F(z) = \phi + i \psi \quad u_0 = \phi_x = \psi_y \quad v_0 = \phi_y = -\psi_x \quad (3.2.3)$$

Viskositenin sıfır olmadığı durumdaki hız bileşenlerini (q_ϕ, q_ψ) ile gösterelim. Koordinat sisteminin özelliğinden

$$dz = \frac{dF}{F'} \quad (dx)^2 + (dy)^2 = \frac{(d\phi)^2 + (d\psi)^2}{|F'(z)|^2} = \frac{(d\phi)^2 + (d\psi)^2}{q_0^2} \quad (3.2.4)$$

yazabiliriz. Hız bileşenlerini

$$w_\phi = \frac{q_\phi}{q_0} \quad w_\psi = \frac{q_\psi}{q_0} \quad (3.2.5)$$

şeklinde tanımlamak denklemlerde nisbeten bir sadeleşme yapmaktadır. Hız vektörü ve gradyan operatörünü şimdi şöyle yazabiliriz:

$$q = q_0 (w_\phi i_\phi + w_\psi i_\psi) \quad (3.2.6)$$

$$\nabla = \left[q_0 \frac{\partial}{\partial \phi}, q_0 \frac{\partial}{\partial \psi} \right] \quad (3.2.7)$$

Ayrıca akımın zamandan bağımsız olduğunu kabul edersek (3.1.23)'deki birinci ve altıncı terimler sıfır olarak alınır. Şimdi (3.1.23)'deki terimlerin tek tek hesaplanması gerekmektedir.

$$|q|^2 = q_\phi^2 + q_\psi^2 \quad (3.2.8)$$

$$\nabla |q|^2 = q_0 \frac{\partial}{\partial \phi} (q_\phi^2 + q_\psi^2) i_\phi + q_0 \frac{\partial}{\partial \psi} (q_\phi^2 + q_\psi^2) i_\psi \quad (3.2.9)$$

(3.2.5)'deki ifadeleri kullanarak türevleri alırsak

$$\nabla \left[\frac{|q|^2}{2} \right] = q_0^3 \left\{ \left[\frac{\partial Q}{\partial \phi} (w_\phi^2 + w_\psi^2) + w_\phi \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + w_\psi \frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} \right] i_\phi + \right.$$

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial \psi} (w_\phi^2 + w_\psi^2) + w_\phi \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} + w_\psi \frac{\partial w_\psi}{\partial \psi} \right] i_\psi \} \quad (3.2.10)$$

elde ederiz. Burada $Q = \log q_0$ olarak alınmıştır. Metrik $ds^2 = h_1^2 d\phi^2 + h_2^2 d\psi^2 + h_3^2 dz^2$ şeklinde verildiğinde bir vektörün rotasyoneli

$$\text{rot } q = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 i_\phi & h_2 i_\psi & h_3 k \\ \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \psi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_1 q_\phi & h_2 q_\psi & h_3 q_z \end{vmatrix} \quad (3.2.11)$$

şeklinde yazılır. Kullanılan metrik için $h_1 = h_2 = \frac{1}{q_0}$, $h_3 = 1$ ifadelerini yerleştirir ve $q_z = 0$ alırsak

$$w = \text{rot } q = q_0^2 \begin{vmatrix} \frac{i_\phi}{q_0} & \frac{i_\psi}{q_0} & k \\ \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \psi} & 0 \\ \frac{q_\phi}{q_0} & \frac{q_\psi}{q_0} & 0 \end{vmatrix} = q_0^2 \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) k \quad (3.2.12)$$

olur. $w = \omega k$ olarak alınırsa

$$w \times q = \begin{vmatrix} i_\phi & i_\psi & k \\ 0 & 0 & \omega \\ q_0 w_\phi & q_0 w_\psi & 0 \end{vmatrix} = -q_0 \omega w_\psi i_\phi + q_0 \omega w_\phi i_\psi \quad (3.2.13)$$

veya

$$w \times q = q_0^3 \left[-w_\psi \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) i_\phi + w_\phi \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) i_\psi \right] \quad (3.2.14)$$

olur. Basınç gradyanı ise

$$\nabla p = q_o \frac{\partial p}{\partial \phi} i_\phi + q_o \frac{\partial p}{\partial \psi} i_\psi \quad (3.2.15)$$

şeklinde yazılır. Akım sıkışmaz olduğu için hız vektörünün laplasiyeni şu şekilde hesaplanabilir.

$$\nabla^2 q = -\text{rot}(\text{rot } q) = -\text{rot } w = -q_o \frac{\partial \omega}{\partial \psi} i_\phi + q_o \frac{\partial \omega}{\partial \phi} i_\psi \quad (3.2.16)$$

(3.2.16)'da ω 'nın türevleri hesaplanıp yerine yerleştirilirse

$$\begin{aligned} \nabla^2 q = q_o^3 \left\{ \left[\frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \psi^2} - 2 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) \right] i_\phi + \right. \\ \left. \left[\frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \psi^2} + 2 \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) \right] i_\psi \right\} \quad (3.2.17) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.23)'de ε_1 katsayısının önündeki terimlerin hesaplanması gerekmektedir. w 'nin laplasiyeni

$$\nabla^2 w = -\text{rot}(\text{rot } w) = q_o^2 \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi^2} \right] k \quad (3.2.18)$$

olur. (3.2.18)'de ikinci türevler hesaplanıp yerine yerleştirilirse

$$\begin{aligned} \nabla^2 w = q_o^4 \left\{ \frac{\partial^3 w_\psi}{\partial \phi^3} + 2 \frac{\partial^3 w_\psi}{\partial \psi^2 \partial \phi} - \frac{\partial^3 w_\phi}{\partial \psi^3} + 4 \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \phi \partial \psi} \right) \right. \\ \left. + 4 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi \partial \psi} - \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \psi^2} \right) + 4 \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \psi} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right\} k \quad (3.2.19)$$

olur. (3.2.19) hız vektörü ile vektörel olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \nabla^2 w \times q = q_o^5 \left\{ \left[-w_\psi \left(\frac{\partial^3 w_\psi}{\partial \phi^3} + 2 \frac{\partial^3 w_\psi}{\partial \psi^2 \partial \phi} - \frac{\partial^3 w_\phi}{\partial \psi^3} + 4 \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \phi \partial \psi} \right) + 4 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi \partial \psi} - \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \psi^2} \right) + 4 \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \psi} \right)^2 \right] \right. \right. \\ \left. \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) \right] i_\phi + \left[w_\phi \left(\frac{\partial^3 w_\psi}{\partial \phi^3} + 2 \frac{\partial^3 w_\psi}{\partial \psi^2 \partial \phi} - \frac{\partial^3 w_\phi}{\partial \psi^3} + 4 \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \phi \partial \psi} \right) + 4 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi \partial \psi} - \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \psi^2} \right) + 4 \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \psi} \right)^2 \right] \right. \right. \\ \left. \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) \right] i_\psi \right\} \quad (3.2.20) \end{aligned}$$

elde edilir. Hız ile hızın laplasiyenini skaler olarak çarparsak

$$\begin{aligned} q \cdot \nabla^2 q = q_o^4 \left\{ w_\phi \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \phi^2} + w_\phi \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \psi^2} - 2 \frac{\partial Q}{\partial \psi} w_\phi \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) \right. \\ \left. + w_\psi \frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi^2} + w_\psi \frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \psi^2} + 2 \frac{\partial Q}{\partial \phi} w_\psi \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) \right\} \quad (3.2.21) \end{aligned}$$

elde ederiz. Original denklemlerimiz için (3.2.21)'in gradyanının alınması gerekmektedir:

$$\nabla(q \cdot \nabla^2 q) = q_o \left\{ \left[4q_o^3 \frac{\partial q_o}{\partial \phi} \left\{ w_\phi \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \phi^2} + w_\phi \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \psi^2} - 2w_\phi \frac{\partial Q}{\partial \psi} \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left[\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right] + w \psi \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + w \psi \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} + 2w \psi \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left[\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right] \right\} \\
 & + q_0^4 \left\{ \frac{\partial w}{\partial \phi} \phi \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + w \phi \frac{\partial^3 w}{\partial \phi^3} + \frac{\partial w}{\partial \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} + w \phi \frac{\partial^3 w}{\partial \psi^2 \partial \phi} - 2 \frac{\partial w}{\partial \phi} \phi \right. \\
 & \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left[\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right] - 2w \phi \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi \partial \psi} \left[\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right] - 2w \phi \frac{\partial Q}{\partial \psi} \\
 & \left. \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \psi - \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial \psi} \phi \right] + \frac{\partial w}{\partial \phi} \psi \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + w \psi \frac{\partial^3 w}{\partial \phi^3} + \frac{\partial w}{\partial \phi} \psi \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \right. \\
 & w \psi \frac{\partial^3 w}{\partial \psi^2 \partial \phi} + 2 \frac{\partial w}{\partial \phi} \psi \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left[\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right] + 2w \psi \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi^2} \left[\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \right. \\
 & \left. \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right] + 2 w \psi \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \psi - \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial \psi} \phi \right] \left. \right\} i \phi + \left[4q_0^3 \frac{\partial q_0}{\partial \psi} \left\{ w \phi \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right. \right. \\
 & + w \phi \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - 2w \phi \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left[\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right] + w \psi \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + w \psi \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} + 2w \psi \\
 & \left. \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left[\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right] \right\} + q_0^4 \left\{ \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + w \phi \frac{\partial^3 w}{\partial \phi^2 \partial \psi} + \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right. \\
 & \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} + w \phi \frac{\partial^3 w}{\partial \psi^3} - 2 \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left[\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right] - 2w \phi \frac{\partial^2 Q}{\partial \psi^2} \\
 & \left. \left[\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right] - 2w \phi \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial \psi} \psi - \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \phi \right] + \frac{\partial w}{\partial \psi} \psi \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \right. \\
 & w \psi \frac{\partial^3 w}{\partial \phi^2 \partial \psi} + \frac{\partial w}{\partial \psi} \psi \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} + w \psi \frac{\partial^3 w}{\partial \psi^3} + 2 \frac{\partial w}{\partial \psi} \psi \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left[\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \right. \\
 & \left. \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right] + 2w \psi \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi \partial \psi} \left[\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right] + 2w \psi \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial \psi} \psi - \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \phi \right] \\
 & \left. \left. \right\} i \psi \right\}
 \end{aligned}$$

Hesaplamamız gereken son terim ise $\text{grad}|A_1|^2/4$ terimidir. Bunun için

$$A_l^k A_k^l = 2(v^k; l v^l; k + v^k; l v_k; l) = 2q_o^4 (v_{k;l} v_{l;k} + v_{k;l} v_{k;l}) \quad (3.2.23)$$

$$|A_1|^2 = 2q_o^4 \left[4 \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial \psi} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \left(\frac{\partial w}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2 \right] \quad (3.2.24)$$

yazalım. Bu ifadenin gradyanının alınıp 4'e bölünmesi ile

$$\begin{aligned} \nabla |A_1|^2/4 = q_o^5 \left\{ \left[8 \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2 + 4 \frac{\partial Q}{\partial \phi} \frac{\partial w}{\partial \psi} \frac{\partial w}{\partial \phi} + 2 \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial w}{\partial \psi} \right)^2 + 2 \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2 + 4 \frac{\partial Q}{\partial \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial \psi} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial \psi} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{\partial w}{\partial \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial \psi} + \frac{\partial w}{\partial \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \right] i_\phi + \left[8 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2 + 4 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \frac{\partial w}{\partial \psi} \frac{\partial w}{\partial \phi} + 2 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial w}{\partial \psi} \right)^2 + 2 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2 + 4 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial \psi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial \psi} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial \psi} + \frac{\partial w}{\partial \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} + \frac{\partial w}{\partial \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial \psi} \right] i_\psi \right\} \quad (3.2.25) \end{aligned}$$

bulunur. (3.1.23) için hesaplanan bütün terimlerin yani (3.2.10), (3.2.14), (3.2.15), (3.2.17), (3.2.20), (3.2.22) ve (3.2.25)'in (3.1.23)'e yerleştirilmesi ve ϕ bileşenleri ile ψ bileşenleri için denklemlerin ayrı ayrı eşitlenmesi gerekmektedir. Bu işlemler sonucu

ϕ bileşeni yönünde hareket denklemi

$$\begin{aligned}
 q_o^3 \left(w_\phi \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + (w_\phi^2 + w_\psi^2) \frac{\partial Q}{\partial \phi} + w_\psi \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) = -q_o \frac{\partial p}{\partial \phi} + \varepsilon q_o^3 \left[\frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \phi^2} \right. \\
 + \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \psi^2} - 2 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) \Big] + \varepsilon_1 q_o^5 \left[-w_\psi \frac{\partial^3 w_\psi}{\partial \phi^3} - 2w_\psi \right. \\
 \frac{\partial^3 w_\psi}{\partial \psi^2 \partial \phi} + w_\psi \frac{\partial^3 w_\phi}{\partial \psi^3} - 4w_\psi \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \phi \partial \psi} \right) - 4w_\psi \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi \partial \psi} \right. \\
 \left. - \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \psi^2} \right) - 4w_\psi \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \psi} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) + 4w_\phi \frac{\partial Q}{\partial \phi} \\
 \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \phi^2} + 4w_\phi \frac{\partial Q}{\partial \phi} \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \psi^2} - 8w_\phi \frac{\partial Q}{\partial \phi} \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) + 6w_\psi \\
 \frac{\partial Q}{\partial \phi} \frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi^2} + 6w_\psi \frac{\partial Q}{\partial \phi} \frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \psi^2} + 8w_\psi \left(\frac{\partial Q}{\partial \phi} \right)^2 \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) \\
 + \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \phi^2} + w_\phi \frac{\partial^3 w_\phi}{\partial \phi^3} + \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \psi^2} + w_\phi \frac{\partial^3 w_\phi}{\partial \psi^2 \partial \phi} - 2 \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} \\
 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) - 2w_\phi \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi \partial \psi} \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) - 2w_\phi \frac{\partial Q}{\partial \psi} \\
 \left(\frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \phi \partial \psi} \right) + \frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi^2} + w_\psi \frac{\partial^3 w_\psi}{\partial \phi^3} + \frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \psi^2} \\
 + w_\psi \frac{\partial^3 w_\psi}{\partial \psi^2 \partial \phi} + 2 \frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) + 2w_\psi \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi^2} \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} \right. \\
 \left. - \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right) + 8 \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} \right)^2 + 4 \frac{\partial Q}{\partial \phi} \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} + 2 \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right)^2 \\
 + 2 \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} \right)^2 + 4 \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \phi \partial \psi} \frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} + \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi^2}
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial \psi} + \frac{\partial w}{\partial \phi} \psi \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \Big] \quad (3.2.26)$$

ψ bileşeni yönünde hareket denklemi

$$\begin{aligned} q_o^3 \left(w_{\psi} \frac{\partial w}{\partial \psi} + (w_{\phi}^2 + w_{\psi}^2) \frac{\partial Q}{\partial \psi} + w_{\phi} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) &= -q_o \frac{\partial p}{\partial \psi} + \varepsilon q_o^3 \left[\right. \\ &\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \psi + \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \phi + 2 \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right) \Big] + \varepsilon_1 q_o^5 \left[w_{\phi} \frac{\partial^3 w}{\partial \phi^3} \psi + \right. \\ &2 w_{\phi} \frac{\partial^3 w}{\partial \psi^2 \partial \phi} + 4 w_{\phi} \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \psi - \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial \psi} \phi \right) + 4 \frac{\partial Q}{\partial \psi} w_{\phi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial \psi} \psi - \right. \\ &\left. \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \phi \right) + 4 w_{\phi} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \psi} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right) + 6 w_{\phi} \frac{\partial Q}{\partial \psi} \\ &\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \phi + 6 w_{\phi} \frac{\partial Q}{\partial \psi} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \phi - 8 w_{\phi} \left(\frac{\partial Q}{\partial \psi} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right) + 4 w_{\psi} \frac{\partial Q}{\partial \psi} \\ &\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \psi + 4 w_{\psi} \frac{\partial Q}{\partial \psi} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \psi + 8 w_{\psi} \frac{\partial Q}{\partial \phi} \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right) + \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \\ &\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \phi + w_{\phi} \frac{\partial^3 w}{\partial \phi^2 \partial \psi} + \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - 2 \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right) \\ &- 2 w_{\phi} \frac{\partial^2 Q}{\partial \psi^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right) + \frac{\partial w}{\partial \psi} \psi \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + w_{\psi} \frac{\partial^3 w}{\partial \phi^2 \partial \psi} + \frac{\partial w}{\partial \psi} \psi \\ &\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \psi + w_{\psi} \frac{\partial^3 w}{\partial \psi^3} + 2 \frac{\partial w}{\partial \psi} \psi \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right) + 2 w_{\psi} \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi \partial \psi} \\ &\left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi - \frac{\partial w}{\partial \psi} \phi \right) + 2 w_{\psi} \frac{\partial Q}{\partial \phi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial \psi} \psi - \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \phi \right) + 8 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +4 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} + 2 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \right)^2 + 2 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \left(\frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} \right)^2 + 4 \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} \\
 & \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \phi \partial \psi} + \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \psi^2} \frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} + \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi \partial \psi} + \frac{\partial w_\phi}{\partial \psi} \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial w_\psi}{\partial \phi} \\
 & \frac{\partial^2 w_\psi}{\partial \phi \partial \psi} \Big] \quad (3.2.27)
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Sıkışmazlık koşulu ise

$$\frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial w_\psi}{\partial \psi} = 0 \quad (3.2.28)$$

şeklindedir. (3.2.26), (3.2.27), (3.2.28) denklemleri seçtiğimiz özel koordinat sisteminde herhangi bir ikinci derece akışkanın hareketini belirleyen denklemlerdir.

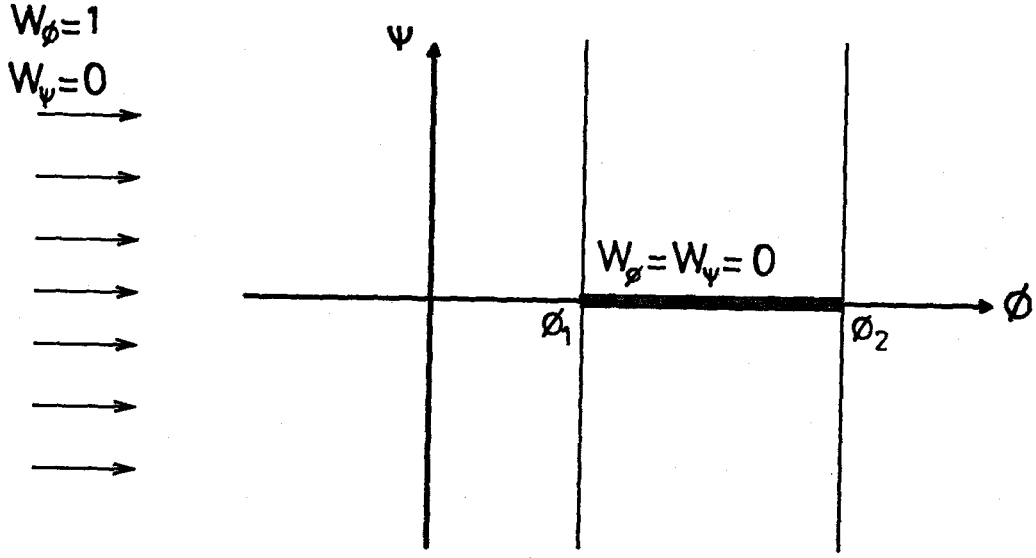
3.3-SINIR TABAKASI DENKLEMLERİ

Önce (ϕ, ψ) koordinatlarında sınır şartlarının çıkarılması gerekmektedir. (ϕ, ψ) düzleminde problem şekil 2'de gösterilmiştir. Cisim ϕ koordinatı olarak $\phi_1 < \phi < \phi_2$ aralığında, ψ koordinatı olarak ise $\psi = 0$ 'dadır. (ϕ, ψ) koordinat eğrilerinin sonsuzda (x, y) koordinat eğrileri ile çakıştığı ve sonsuzdan gelen akımın x doğrultusunda üniform olduğu varsayılırsa

$$w_\phi = 1 \quad w_\psi = 0 \quad \phi \rightarrow -\infty \quad (3.3.1)$$

sınır koşulları elde edilir. Cisim yüzeyinde kayma olmayacağına göre diğer sınır koşulları

$$w_\phi = w_\psi = 0 \quad \psi = 0 \quad \phi_1 < \phi < \phi_2 \quad (3.3.2)$$



Şekil 2- (ϕ, ψ) Düzleminde Sınır Değer Problemi

şeklinde olur. Sınır tabakası içerisinde bir iç açılım, sınır tabakası dışında ise bir dış açılım yapılması gerekmektedir. Tabii ki bu iki açılımın birbiriyle uyum sağlaması gerekir. Önce dış açılımı gözönüne alalım. Dış açılım viskositesiz ve irrotasyoneldir. Limit akış bu durumda

$$w_\phi = 1 \quad w_\psi = 0 \quad p = (1 - q_0^2)/2 \quad (\text{Bernoulli denklemi}) \quad (3.3.3)$$

olur. Dış açılım olarak ilk terimler limit akış terimleri ve diğer terimler ise sınır tabakası akışından kaynaklanan düzeltmeler olarak görülecektir. Dış açılımın genel şeklini aşağıdaki gibi alalım:

$$w_\phi(\phi, \psi; \varepsilon) = 1 + \beta(\varepsilon) w_\phi^{(1)}(\phi, \psi) + \dots \quad (3.3.4)$$

$$w_\psi(\phi, \psi; \varepsilon) = \beta(\varepsilon) w_\psi^{(1)}(\phi, \psi) + \dots \quad (3.3.5)$$

$$p(\phi, \psi; \varepsilon) = (1 - q_0^2)/2 + \beta(\varepsilon) p^{(1)}(\phi, \psi) + \dots \quad (3.3.6)$$

ε (3.1.24)'den $1/Re$ olarak tanımlanmıştı. İç ve dış açılımları yazarken $Re \rightarrow \infty$ veya $\varepsilon \rightarrow 0$ olduğu varsayılmıştır. (3.1.25)'de tanımlanan ε_1 için ise

$$\varepsilon_1 = k \varepsilon \quad (3.3.7)$$

tanımını yapalım. Bu tanımda k 'nin 1 mertebesinde olduğunu belirtmekte yarar vardır. β katsayıları dış açılımda ε parametresine bağlı olup $\varepsilon=0$ için $\beta(0)=0$ olur. α ile işaretlenen bütün terimler sonsuzda sıfırlanacak olan terimlerdir. Bu terimler için sınır şartlarını yazabilmek için iç açılımın da yapılması gerekmektedir. Sınır tabakası kalınlığı δ ile gösterelim. ψ koordinatı yerine daha uygun olarak ψ^* koordinatını

$$\psi^* = \frac{\psi}{\delta(\varepsilon)} \quad (3.3.8)$$

bağıntısı ile tanımlayalım. İç açılımı şimdi aşağıdaki gibi alalım:

$$w_\phi(\phi, \psi; \varepsilon) = W_\phi^{(1)}(\phi, \psi^*) + \delta(\varepsilon) W_\phi^{(2)}(\phi, \psi^*) + \dots \quad (3.3.9)$$

$$w_\psi(\phi, \psi; \varepsilon) = \delta(\varepsilon) W_\psi^{(1)}(\phi, \psi^*) + \delta^2(\varepsilon) W_\psi^{(2)}(\phi, \psi^*) + \dots \quad (3.3.10)$$

$$p(\phi, \psi; \varepsilon) = P^{(1)}(\phi, \psi^*) + \delta(\varepsilon) P^{(2)}(\phi, \psi^*) + \dots \quad (3.3.11)$$

Bu açılımlar yazılırken şunlar gözönüne alınmıştır. Akım çizgileri boyunca hızın ϕ bileşeni merteye olarak birdir, böylece dış açılıma uyum sağlamaktadır. Hızın ψ bileşeninin bu durumda δ mertebesinde olması lazımdır ki uygun bir süreklilik denklemi ortaya çıkabilsin.

Dış açılım ile uyum sağlayabilmek için (3.3.11)'de basınç için yazılan ilk terim merteye olarak birdir. Sürtünmesiz hız da sınır tabakası içerisinde

sürtünmesiz yüzey hızına yakınsayacaktır. Dolayısı ile

$$q_0(\phi, \psi) = q_0(\phi, \delta(\epsilon)\psi^*) = q_0(\phi, 0) + \delta(\epsilon)\psi^* \frac{\partial q_0}{\partial \psi}(\phi, 0) + \dots \quad (3.3.12)$$

veya

$$q_0(\phi, \psi) = q_B(\phi) + O(\delta(\epsilon)) \quad (3.3.13)$$

olacaktır. Burada $q_B(\phi)$ sürtünmesiz yüzey hız dağılımıdır ve yalnızca ϕ değişkenine bağlıdır. Bundan sonraki analizde kolaylık açısından (3.3.8) bağıntısı geçerli olmak kaydı ile (*) işareti terimlerin üzerinden kaldırılacaktır. Sınır tabakası denklemlerini elde edebilmek için (3.2.26) ve (3.2.27) denklemlerinin içerisindeki her terime seri açılımını uygulamamız gerekir. Burada $Q = \log q_0$ olduğu hatırlanırsa Q terimlerininde sınır tabakası içerisinde $Q_B(\phi)$ 'ye yakınsayacağı ve dolayısı ile $\partial Q / \partial \psi = 0$ olacağı açıktır.

Önce (3.2.26) ele alınarak her terim seriye açılır:

$$\begin{aligned} & q_B^3 \left\{ (W_\phi + \delta W_\phi^{(1)} + \dots) \left[\frac{\partial W}{\partial \phi} + \delta \frac{\partial W}{\partial \phi} + \dots \right] + \left[(W_\phi + \delta W_\phi^{(1)} + \dots)^2 + (\delta W_\psi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta^2 W_\psi^{(1)} + \dots)^2 \right] \frac{dQ_B}{d\phi} + (\delta W_\psi + \delta^2 W_\psi^{(1)} + \dots) \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial W}{\partial \psi} + \delta \frac{\partial W}{\partial \psi} + \dots \right] \right\} \\ & = -q_B \left[\frac{\partial P}{\partial \phi} + \delta \frac{\partial P^{(1)}}{\partial \phi} + \dots \right] + \epsilon q_B^3 \left\{ \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \delta \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \dots \right] + \frac{1}{\delta^2} \right. \\ & \left. \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} + \delta \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} + \dots \right] \right\} + \epsilon_1 q_B^5 \left\{ -(\delta W_\psi + \delta^2 W_\psi^{(1)} + \dots) \left[\delta \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^3} + \delta^2 \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^3} + \dots \right] - 2(\delta W_\psi + \delta^2 W_\psi^{(1)} + \dots) \frac{1}{\delta^2} \left[\delta \frac{\partial^3 W}{\partial \psi^2 \partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \psi^2 \partial \phi} + \dots \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\delta W_\psi + \delta^2 W_\psi^{(1)} + \dots) \frac{1}{\delta^3} \left[\frac{\partial^3 W_\phi}{\partial \psi^3} + \delta \frac{\partial^3 W_\phi^{(1)}}{\partial \psi^3} + \dots \right] - 4 \frac{dQ_B}{d\phi} (\delta W_\psi + \delta^2 W_\psi^{(1)} + \dots) \\
 & + \dots \left[\left(\delta \frac{\partial^2 W_\psi}{\partial \phi^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 W_\psi^{(1)}}{\partial \phi^2} + \dots \right) - \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \phi \partial \psi} + \delta \frac{\partial^2 W_\phi^{(1)}}{\partial \phi \partial \psi} + \dots \right] \right] \\
 & - 4 (\delta W_\psi + \delta^2 W_\psi^{(1)} + \dots) \left[\frac{dQ_B}{d\phi} \right]^2 \left[\left(\delta \frac{\partial W_\psi}{\partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial W_\psi^{(1)}}{\partial \phi} + \dots \right) - \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} + \delta \frac{\partial W_\phi^{(1)}}{\partial \psi} + \dots \right] \right] \\
 & + \delta \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} + \dots \left] + 4 \frac{dQ_B}{d\phi} (W_\phi + \delta W_\phi^{(1)} + \dots) \left[\frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \phi^2} + \delta \frac{\partial^2 W_\phi^{(1)}}{\partial \phi^2} + \dots \right] + 4 \\
 & \frac{dQ_B}{d\phi} (W_\phi + \delta W_\phi^{(1)} + \dots) \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} + \delta \frac{\partial^2 W_\phi^{(1)}}{\partial \psi^2} + \dots \right] + 6 \frac{dQ_B}{d\phi} (\delta W_\psi + \delta^2 W_\psi^{(1)} + \dots) \\
 & W_\psi + \dots \left[\delta \frac{\partial^2 W_\psi}{\partial \phi^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 W_\psi^{(1)}}{\partial \phi^2} + \dots \right] + 6 \frac{dQ_B}{d\phi} (\delta W_\psi + \delta^2 W_\psi^{(1)} + \dots) \frac{1}{\delta^2} \\
 & \left[\delta \frac{\partial^2 W_\psi}{\partial \psi^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 W_\psi^{(1)}}{\partial \psi^2} + \dots \right] + 8 \left[\frac{dQ_B}{d\phi} \right]^2 (\delta W_\psi + \delta^2 W_\psi^{(1)} + \dots) \left[\left(\delta \frac{\partial W_\psi}{\partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial W_\psi^{(1)}}{\partial \phi} + \dots \right) - \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} + \delta \frac{\partial W_\phi^{(1)}}{\partial \psi} + \dots \right] \right] \\
 & + \left[\frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} + \delta \frac{\partial W_\phi^{(1)}}{\partial \psi} + \dots \right] + \left[\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} + \delta \frac{\partial W_\phi^{(1)}}{\partial \phi} + \dots \right] \\
 & \left[\frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \phi^2} + \delta \frac{\partial^2 W_\phi^{(1)}}{\partial \phi^2} + \dots \right] + (W_\phi + \delta W_\phi^{(1)} + \dots) \left[\frac{\partial^3 W_\phi}{\partial \phi^3} + \delta \frac{\partial^3 W_\phi^{(1)}}{\partial \phi^3} + \dots \right] + \\
 & \left[\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} + \delta \frac{\partial W_\phi^{(1)}}{\partial \phi} + \dots \right] \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} + \delta \frac{\partial^2 W_\phi^{(1)}}{\partial \psi^2} + \dots \right] + (W_\phi + \delta W_\phi^{(1)} + \dots) \\
 & \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{\partial^3 W_\phi}{\partial \psi^2 \partial \phi} + \delta \frac{\partial^3 W_\phi^{(1)}}{\partial \psi^2 \partial \phi} + \dots \right] + \left[\delta \frac{\partial W_\psi}{\partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial W_\psi^{(1)}}{\partial \phi} + \dots \right] \left[\delta \frac{\partial^2 W_\psi}{\partial \phi^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 W_\psi^{(1)}}{\partial \phi^2} + \dots \right] + \\
 & \delta^2 \frac{\partial^2 W_\psi}{\partial \phi^2} + \dots + (\delta W_\psi + \delta^2 W_\psi^{(1)} + \dots) \left[\delta \frac{\partial^3 W_\psi}{\partial \phi^3} + \delta^2 \frac{\partial^3 W_\psi^{(1)}}{\partial \phi^3} + \dots \right] + \left[\delta \frac{\partial W_\psi}{\partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial W_\psi^{(1)}}{\partial \phi} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\delta^2 \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \phi} + \dots \Big] \frac{1}{\delta^2} \left[\delta \frac{\partial^2 W_{\psi}}{\partial \psi^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 W_{\psi}}{\partial \psi^2} + \dots \right] + (\delta W_{\psi} + \delta^2 W_{\psi} + \dots) \\
 & \frac{1}{\delta^2} \left[\delta \frac{\partial^3 W_{\psi}}{\partial \psi^2 \partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial^3 W_{\psi}}{\partial \psi^2 \partial \phi} + \dots \right] + 2 \frac{dQ_B}{d\phi} \left[\delta \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \phi} + \dots \right] \\
 & \left[\delta \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \phi} + \dots - \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial W_{\phi}}{\partial \psi} + \delta \frac{\partial W_{\phi}}{\partial \psi} + \dots \right] \right] + 2 \frac{d^2 Q_B}{d\phi^2} (\delta W_{\psi} + \\
 & + \delta^2 W_{\psi} + \dots) \left[\left(\delta \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \phi} + \dots \right) - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial W_{\phi}}{\partial \psi} + \delta \frac{\partial W_{\phi}}{\partial \psi} + \dots \right) \right] \\
 & + 8 \frac{dQ_B}{d\phi} \left[\frac{\partial W_{\phi}}{\partial \phi} + \delta \frac{\partial W_{\phi}}{\partial \phi} + \dots \right]^2 + 4 \frac{dQ_B}{d\phi} \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial W_{\phi}}{\partial \psi} + \delta \frac{\partial W_{\phi}}{\partial \psi} + \dots \right] \\
 & \left(\delta \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \phi} + \dots \right) + 2 \frac{dQ_B}{d\phi} \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{\partial W_{\phi}}{\partial \psi} + \delta \frac{\partial W_{\phi}}{\partial \psi} + \dots \right]^2 + 2 \\
 & \frac{dQ_B}{d\phi} \left[\delta \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \phi} + \dots \right]^2 + 4 \left[\frac{\partial W_{\phi}}{\partial \phi} + \delta \frac{\partial W_{\phi}}{\partial \phi} + \dots \right] \left[\frac{\partial^2 W_{\phi}}{\partial \phi^2} + \right. \\
 & \left. \delta \frac{\partial^2 W_{\phi}}{\partial \phi^2} + \dots \right] + \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial^2 W_{\phi}}{\partial \phi \partial \psi} + \delta \frac{\partial^2 W_{\phi}}{\partial \phi \partial \psi} + \dots \right] \left[\delta \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \phi} + \dots \right] \\
 & + \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial W_{\phi}}{\partial \psi} + \delta \frac{\partial W_{\phi}}{\partial \psi} + \dots \right] \left[\delta \frac{\partial^2 W_{\psi}}{\partial \phi^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 W_{\psi}}{\partial \phi^2} + \dots \right] + \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{\partial W_{\phi}}{\partial \psi} \right. \\
 & \left. + \delta \frac{\partial W_{\phi}}{\partial \psi} + \dots \right] \left[\frac{\partial^2 W_{\phi}}{\partial \phi \partial \psi} + \delta \frac{\partial^2 W_{\phi}}{\partial \phi \partial \psi} + \dots \right] + \left[\delta \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial W_{\psi}}{\partial \phi} + \dots \right] \\
 & \left[\delta \frac{\partial^2 W_{\psi}}{\partial \phi^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 W_{\psi}}{\partial \phi^2} + \dots \right] \Big\} \tag{3.3.14}
 \end{aligned}$$

(3.3.14) denklemindeki terimler 1, δ , δ^2 mertebelerine göre yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
 q_B^3 & \left\{ \left[W_\phi \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} + W_\phi^2 \frac{dQ_B}{d\phi} + W_\psi \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} \right] + \delta \left[W_\phi^{(1)} \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} + W_\phi \frac{\partial W_\phi^{(1)}}{\partial \phi} + 2W_\phi \frac{\partial W_\phi^{(1)}}{\partial \phi} \right. \right. \\
 & \left. \left. W_\phi^{(1)} \frac{dQ_B}{d\phi} + W_\psi \frac{\partial W_\phi^{(1)}}{\partial \psi} + W_\psi^{(1)} \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} \right] + \delta^2 (\dots) + \dots \right\} = -q_B \frac{\partial P}{\partial \phi} \\
 & -q_B \delta \frac{\partial P}{\partial \phi} - \dots + q_B^3 \left\{ \frac{\varepsilon}{\delta^2} \left(\frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} \right) + \frac{\varepsilon}{\delta} \left(\frac{\partial^2 W_\phi^{(1)}}{\partial \psi^2} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \phi^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\partial^2 W_\phi^{(2)}}{\partial \psi^2} \right) + \varepsilon \delta (\dots) + \dots \right\} + q_B^5 \left\{ \frac{\varepsilon_1}{\delta^2} \left[W_\psi \frac{\partial^3 W_\phi}{\partial \psi^3} + 4Q_B' W_\phi \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} + W_\phi \frac{\partial^3 W_\phi}{\partial \psi^2 \partial \phi} + 2Q_B' \left(\frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \phi \partial \psi} \right] + \frac{\varepsilon_1}{\delta} \right. \\
 & \left. \left[W_\psi \frac{\partial^3 W_\phi^{(1)}}{\partial \psi^3} + W_\psi^{(1)} \frac{\partial^3 W_\phi}{\partial \psi^3} + 4Q_B' W_\phi \frac{\partial^2 W_\phi^{(1)}}{\partial \psi^2} + 4Q_B' W_\phi \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} + W_\phi \frac{\partial^3 W_\phi^{(1)}}{\partial \psi^2 \partial \phi} \right. \right. \\
 & \left. \left. + W_\phi \frac{\partial^3 W_\phi^{(1)}}{\partial \psi^2 \partial \phi} + 4Q_B' \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} \frac{\partial W_\phi^{(1)}}{\partial \psi} + \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} \frac{\partial^2 W_\phi^{(1)}}{\partial \phi \partial \psi} + \frac{\partial W_\phi^{(1)}}{\partial \psi} \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \phi \partial \psi} \right] + \varepsilon_1 (\dots) + \varepsilon_1 \delta (\dots) + \dots \right\} \quad (3.3.15)
 \end{aligned}$$

bulunur.

Aynı analizin denklem (3.2.27) için de yapılması gerekmektedir. Herbir terime seri açılımı yaparsak

$$\begin{aligned}
 q_B^3 & \left\{ (\delta W_\psi + \delta^2 W_\psi^{(1)} + \dots) \frac{1}{\delta} \left[\delta \frac{\partial W_\psi}{\partial \psi} + \delta^2 \frac{\partial W_\psi^{(1)}}{\partial \psi} + \dots \right] + (W_\phi + \delta W_\phi^{(1)} + \dots) \right. \\
 & \left. \left[\delta \frac{\partial W_\psi}{\partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial W_\psi^{(1)}}{\partial \phi} + \dots \right] \right\} = \frac{1}{\delta} \left[-q_B \frac{\partial P}{\partial \psi} - q_B \delta \frac{\partial P}{\partial \psi} - \dots \right] + \varepsilon q_B^3 \\
 & \left\{ \left[\delta \frac{\partial^2 W_\psi}{\partial \phi^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 W_\psi^{(1)}}{\partial \phi^2} + \dots \right] + \frac{1}{\delta^2} \left[\delta \frac{\partial^2 W_\psi}{\partial \psi^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 W_\psi^{(1)}}{\partial \psi^2} + \dots \right] + 2 \frac{dQ_B}{d\phi} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left[\left(\delta \frac{\partial W}{\partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial W}{\partial \phi} + \dots \right) - \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial W}{\partial \psi} + \delta \frac{\partial W}{\partial \psi} + \dots \right] \right] \right\} + \epsilon_1 q_B^5 \\
 & \left\{ (W_\phi + \delta W_\phi + \dots) \left[\delta \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^3} + \delta^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^3} + \dots \right] + 2(W_\phi + \delta W_\phi + \dots) \frac{1}{\delta^2} \right. \\
 & \left[\delta \frac{\partial^3 W}{\partial \psi^2 \partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \psi^2 \partial \phi} + \dots \right] + 4(W_\phi + \delta W_\phi + \dots) \frac{dQ_B}{d\phi} \left[\left(\delta \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \delta^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \dots \right) - \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \psi} + \delta \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \psi} + \dots \right] \right] + 4(W_\phi + \delta W_\phi + \dots) \\
 & \left(\frac{dQ_B}{d\phi} \right)^2 \left[\left[\left(\delta \frac{\partial W}{\partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial W}{\partial \phi} + \dots \right) - \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial W}{\partial \psi} + \delta \frac{\partial W}{\partial \psi} + \dots \right] \right] + \right. \\
 & \left. \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial W}{\partial \psi} + \delta \frac{\partial W}{\partial \psi} + \dots \right] \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \delta \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \dots \right] + (W_\phi + \delta W_\phi + \dots) \right. \\
 & \left. \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial^3 W}{\partial \phi^2 \partial \psi} + \delta \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^2 \partial \psi} + \dots \right] + \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial W}{\partial \psi} + \delta \frac{\partial W}{\partial \psi} + \dots \right] \frac{1}{\delta^2} \right. \\
 & \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} + \delta \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} + \dots \right] + \frac{1}{\delta} \left[\delta \frac{\partial W}{\partial \psi} + \delta^2 \frac{\partial W}{\partial \psi} + \dots \right] \left[\delta \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \right. \\
 & \left. \delta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \dots \right] + (\delta W_\psi + \delta^2 W_\psi + \dots) \frac{1}{\delta} \left[\delta \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^2 \partial \psi} + \delta^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^2 \partial \psi} + \dots \right] + \\
 & \frac{1}{\delta} \left[\delta \frac{\partial W}{\partial \psi} + \delta^2 \frac{\partial W}{\partial \psi} + \dots \right] \frac{1}{\delta^2} \left[\delta \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} + \dots \right] + \\
 & (\delta W_\psi + \delta^2 W_\psi + \dots) \frac{1}{\delta^3} \left[\delta \frac{\partial^3 W}{\partial \psi^3} + \delta^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \psi^3} + \dots \right] + \frac{2}{\delta} \left[\delta \frac{\partial W}{\partial \psi} + \right. \\
 & \left. \delta^2 \frac{\partial W}{\partial \psi} + \dots \right] \frac{dQ_B}{d\phi} \left[\left[\left(\delta \frac{\partial W}{\partial \phi} + \delta^2 \frac{\partial W}{\partial \phi} + \dots \right) - \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial W}{\partial \psi} + \delta \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial W}{\partial \psi} \phi + \dots \right] + 2(\delta W_{\psi} + \delta^2 W_{\psi}^{(1)} + \dots) \frac{dQ_B}{d\phi} \left[\frac{1}{\delta} \left(\delta \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \psi} + \delta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \psi} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \dots \right) - \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \phi + \delta \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \phi + \dots \right) \right] + 4 \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \phi + \delta \frac{\partial W}{\partial \phi} \phi + \dots \right) \frac{1}{\delta} \\
 & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \psi} \phi + \delta \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \psi} \phi + \dots \right) + \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \phi + \delta \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \phi + \dots \right) \left(\delta \frac{\partial W}{\partial \phi} \psi + \right. \\
 & \left. \delta^2 \frac{\partial W}{\partial \phi} \psi + \dots \right) + \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial W}{\partial \psi} \phi + \delta \frac{\partial W}{\partial \psi} \phi + \dots \right) \frac{1}{\delta} \left(\delta \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \psi} + \delta^2 \right. \\
 & \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \psi} + \dots \right) + \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial W}{\partial \psi} \phi + \delta \frac{\partial W}{\partial \psi} \phi + \dots \right) \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \phi + \delta \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \phi \right. \\
 & \left. + \dots \right) + \left(\delta \frac{\partial W}{\partial \phi} \psi + \delta^2 \frac{\partial W}{\partial \phi} \psi + \dots \right) \frac{1}{\delta} \left(\delta \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \psi} + \delta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \psi} + \dots \right) \left. \right\} \\
 & \quad \quad \quad (3.3.16)
 \end{aligned}$$

buluruz. (3.3.16)'da terimler $1/\delta$, 1 , δ , δ^2 mertebelerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}
 & Q_B^3 \left\{ \delta \left(W_{\psi} \frac{\partial W}{\partial \psi} \psi + W_{\phi} \frac{\partial W}{\partial \phi} \psi \right) + \delta^2 \left(W_{\psi}^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \psi} \psi + W_{\psi} \frac{\partial W}{\partial \psi} \psi + W_{\phi} \frac{\partial W}{\partial \phi} \psi + \right. \right. \\
 & \left. \left. W_{\phi}^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \phi} \psi \right) + \delta^3 (\dots) + \dots \right\} = -Q_B \left[\frac{1}{\delta} \frac{\partial P}{\partial \psi} + \frac{\partial P}{\partial \psi} \right] + Q_B^3 \left\{ \frac{\epsilon}{\delta} \right. \\
 & \left. \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \psi - 2Q_B' \frac{\partial W}{\partial \psi} \phi \right) + \epsilon \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \psi - 2Q_B' \frac{\partial W}{\partial \psi} \phi \right) + \epsilon \delta (\dots) + \dots \right\} + \\
 & Q_B^5 \left\{ \frac{\epsilon_1}{\delta^3} \left(2 \frac{\partial W}{\partial \psi} \phi \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \phi \right) + \frac{\epsilon_1}{\delta^2} \left(2 \frac{\partial W}{\partial \psi} \phi \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \phi + 2 \frac{\partial W}{\partial \psi} \phi \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \phi \right) + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \left(\dots \right) + \varepsilon_1 \left(\dots \right) + \dots \right\} \quad (3.3.17)$$

Denklem (3.3.15)'deki 1 mertebesindeki ivme terimleriyle sürtünme terimlerinin uyumlu olabilmesi için ε ve ε_1 katsayılarının δ^2 mertebesinde olduğunu varsayarsak

$$\delta = \varepsilon^{1/2} \quad (3.3.18)$$

olur. Ayrıca $\varepsilon_1 = k\varepsilon$ olduğunu hatırlayalım. Bu durumda (3.3.15)'de en büyük terimler 1 mertebesinde (3.3.17)'de ise $1/\delta$ mertebesinde. Diğer terimlerin bu terimler yanında çok küçük olduğunu gözönüne alarak denklemleri yeniden yazalım:

ϕ bileşeni

$$\begin{aligned} W_\phi \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} + W_\phi^2 Q'_B + W_\psi \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} = - \frac{1}{q_B^2} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} + k q_B^2 \left[W_\psi \right. \\ \left. \frac{\partial^3 W_\phi}{\partial \psi^3} + W_\phi \frac{\partial^3 W_\phi}{\partial \psi^2 \partial \phi} + \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \phi \partial \psi} \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} + 4 Q'_B W_\phi \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} \right. \\ \left. + 2 Q'_B \left(\frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

ψ bileşeni

$$0 = -q_B \frac{\partial P}{\partial \psi} + 2k q_B^5 \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} \quad (3.3.20)$$

Sıkışmazlık şartı

$$\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial W_\psi}{\partial \psi} = 0 \quad (3.3.21)$$

Denklem (3.3.20) şu şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left[P - kq_B^4 \left(\frac{\partial W}{\partial \psi} \phi \right)^2 \right] = 0 \quad (3.3.22)$$

Yeni bir basınç fonksiyonu

$$P^* = P - kq_B^4 \left(\frac{\partial W}{\partial \psi} \phi \right)^2 \quad (3.3.23)$$

ile tanımlanırsa bu durumda

$$\frac{\partial P^*}{\partial \psi} = 0 \quad (3.3.24)$$

elde edilir. Yani $P^* = P^*(\phi)$ olur. P^* basıncının ϕ 'ye göre türevini alırsak

$$\frac{dP^*}{d\phi} = \frac{\partial P}{\partial \phi} - 4kq_B^4 Q_B' \left(\frac{\partial W}{\partial \psi} \phi \right)^2 - 2kq_B^4 \frac{\partial W}{\partial \psi} \phi \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \psi} \quad (3.3.25)$$

$\frac{\partial P}{\partial \phi}$ terimi (3.3.25)'den çekilirse

$$\frac{\partial P}{\partial \phi} = \frac{dP^*}{d\phi} + 4kq_B^4 Q_B' \left(\frac{\partial W}{\partial \psi} \phi \right)^2 + 2kq_B^4 \frac{\partial W}{\partial \psi} \phi \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \psi} \quad (3.3.26)$$

bulunur. Dış açılımla uyum sağlaması gerektiğinden dolayı $P^* = (1 - q_B^2)/2$ olduğu gözönüne alınarak

$$\frac{dP^*}{d\phi} = -q_B^2 Q_B' \quad (3.3.27)$$

olur. (3.3.27) 3.3.26)'ya yerleştirilir ve (3.3.26) ise (3.3.19)'a yerleştirilirse sonuçta

$$\begin{aligned}
 W_\phi \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} + (W_\phi^2 - 1) Q'_B + W_\psi \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} &= \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} + k Q_B^2 \left\{ W_\psi \frac{\partial^3 W_\phi}{\partial \psi^3} + W_\phi \right. \\
 \frac{\partial^3 W_\phi}{\partial \psi^2 \partial \phi} + \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \phi \partial \psi} \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} &+ 4 Q'_B W_\phi \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} - 2 Q'_B \\
 \left. \left[\frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} \right]^2 \right\} & \quad (3.3.28)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial W_\psi}{\partial \psi} = 0 \quad (3.3.29)$$

elde edilir. Böylece sınır tabakası denklemleri (3.3.28) ve (3.3.29) ile son şeklini almış olur. Bu denklemler için sınır koşullarının yazılması gerekmektedir. İlk iki sınır koşulu cisim üzerinde kayma olmayacağından $\psi = 0$ 'da hız bileşenlerinin sıfır olması gerektiğidir:

$$W_\phi(\phi, 0) = W_\psi(\phi, 0) = 0 \quad \phi_1 < \phi < \phi_2 \quad (3.3.30)$$

Diğer koşullar ise iç ve dış açılımların uyum sağlaması ile elde edilir. Bunun için normal limitteki kadar yüzeye hızlı yakınsamayan bir ara limit tanımlayalım:

$$\psi_\eta = \frac{\psi}{\eta(\epsilon)} \quad (\phi \text{ sabit}) \quad (3.3.31)$$

Burada η

$$\epsilon^{1/2} \ll \eta \ll 1 \quad (3.3.32)$$

şeklindedir. Böylece ara limitte

$$\psi = \eta \quad \psi_{\eta} \rightarrow 0 \quad , \quad \psi^* = \frac{\eta}{\varepsilon^{1/2}} \quad \psi_{\eta} \rightarrow \infty \quad (3.3.33)$$

olduğunu görürüz. Basınç fonksiyonunun uyum sağlayabilmesi için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ (1 - q_0^2(\phi, \eta \psi_{\eta})) / 2 + \beta(\varepsilon) p^{(1)}(\phi, \eta \psi_{\eta}) + \dots - P^*(\phi) - \dots \} = 0 \quad (3.3.34)$$

şartının sağlanması gerekir. Buradan $P^* = (1 - q_B^2) / 2$ bulunur. Bu bağıntıyı basınç fonksiyonunu elimine ederken kullanmıştık.

Akım çizgileri boyunca hız vektörünün iç ve dış açılım bileşenlerinin ara değişkenler cinsinden uyum sağlaması gerekmektedir. (3.3.4) ve (3.3.9) ara değişkenlerle ifade edilip uyum sağlaması şartından

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ (1 + \beta(\varepsilon) w_{\phi}^{(1)}(\phi, \eta \psi_{\eta}) + \dots - w_{\phi}(\phi, \eta / \varepsilon^{1/2} \psi_{\eta}) - \dots \} = 0 \quad (3.3.35)$$

sınır koşulu olarak

$$w_{\phi}(\phi, \infty) = 1 \quad (3.3.36)$$

elde edilir. (3.3.36) sınır koşulu sınır tabakasının hemen üstündeki akımın viskositesiz akım olduğunu belirtir.

Ayrıca sınır tabakasında w_{ϕ} hız bileşeninin iç ve dış açılımlarının düzgün olarak birleştiği kabul edilirse (3.3.4) ve (3.3.9)'un türevlerinin ara değişkenlerle ifade edilmesi halinde

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \beta(\varepsilon) \frac{\partial w_{\phi}^{(1)}}{\partial \psi}(\phi, \eta \psi_{\eta}) + \dots - \frac{\partial w_{\phi}}{\partial \psi}(\phi, \frac{\eta}{\varepsilon^{1/2}} \psi_{\eta}) - \dots \} = 0 \quad (3.3.37)$$

veya

$$\frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} (\phi, \infty) = 0 \quad (3.3.38)$$

diğer bir sınır koşulu olarak elde edilir.

Hızın ψ bileşenine ait iç ve dış açılımlarında uyum sağlaması gerekmektedir. Bu durumda

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \beta(\varepsilon) w_\psi^{(1)}(\phi, \eta \psi_\eta) + \dots - \varepsilon^{1/2} W_\psi(\phi, \eta / \varepsilon^{1/2} \psi_\eta) - \dots \} = 0 \quad (3.3.39)$$

$$\beta(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \quad (3.3.40)$$

ve

$$w_\psi^{(1)}(\phi, 0) = W_\psi(\phi, \infty) \quad \phi > \phi_1 \quad (3.3.41)$$

şartları elde edilir.

(3.3.30), (3.3.36), (3.3.38) şartları kullanılarak sınır tabakası denklemleri (3.3.28) ve (3.3.29) çözülüp W_ϕ, W_ψ bulunabilir. Bulunan bu değerden faydalanılarak (3.3.41) şartıyla dış açılıma ait akış terimleri de hesaplanabilir.

BÖLÜM 4

BENZERLİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde (3.3.28) ve (3.3.29) sınır tabakası denklemlerinin benzerlik çözümlerini bulacağız. Denklemlerin çözümünde dış formları kullanacağız. Dış formlarla kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümüne ait geniş bilgi [17], [18], [19] referanslarından elde edilebilir. Önce genel denklik denklemine dış formları uygulayacak, daha sonra ise özel denklemlerimiz için işlemleri devam ettireceğiz. İzovektör alanını bulduktan sonra benzerlik çözümüne yol açan adi diferansiyel denklemleri çıkaracağız.

4.1-ÜÇÜNCÜ MERTEBE GENEL DENKLİK DENKLEMLERİ

Bu kısımdaki analiz, kaynak [21]'de n. mertebeden denklik denklemleri için verilen çalışmanın üçüncü mertebeye indirilmesi ile elde edilmiştir. Üçüncü mertebeden bir denklik denklemini şu şekilde yazabiliriz:

$$\frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial x^i} + \Sigma^\alpha = 0 \quad \begin{aligned} \Sigma^{i\alpha} &= \Sigma^{i\alpha}(x^k, u^\gamma, u^\gamma_{,k}, u^\gamma_{,kl}) \\ \Sigma^\alpha &= \Sigma^\alpha(x^k, u^\gamma, u^\gamma_{,k}, u^\gamma_{,kl}) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Burada x^k ($k=1, \dots, n$) bağımsız değişkenler, u^γ ($\gamma=1, \dots, N$) ise bağımlı değişkenlerdir. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir açık bölge olmak üzere $x \in \Omega$ olarak tanımlanmıştır. $\Sigma^{i\alpha}$ ve Σ^α fonksiyonları ise bağımlı değişkenlerin en fazla ikinci türevlerini argüman olarak kabul etmektedirler. Denklem (4.1.1)'de x^i 'ye göre türevleri açık olarak yazarsak

$$\frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial u^\beta_{,jk}} u^\beta_{,ijk} + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial u^\beta_{,j}} u^\beta_{,ij} + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial u^\beta} u^\beta_{,i} + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial x^i} + \Sigma^\alpha = 0 \quad (4.1.2)$$

olur. (4.1.2)'yi birinci mertebeden bir denklem sistemi halinde yazalım.

$$v_{ij}^{\alpha} = u_{,ij}^{\alpha} \quad v_i^{\alpha} = u_{,i}^{\alpha} \quad (4.1.3)$$

$$\frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial v_{jk}^{\beta}} v_{jk,i}^{\beta} + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial v_j^{\beta}} v_{j,i}^{\beta} + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial u^{\beta}} v_i^{\beta} + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial x^i} + \Sigma^{\alpha} = 0 \quad (4.1.4)$$

Yeni tanımlanan değişkenlere göre uygunluk koşulu ise

$$v_{i,j}^{\alpha} = v_{j,i}^{\alpha} \quad (4.1.5)$$

şeklinde olur. $K = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{n^2N}$ boyutlu bir katmanı $(x^k, u^{\gamma}, v_i^{\gamma}, v_{ij}^{\gamma})$ koordinat örtüsü ile tanımlayalım. Aslında $v_{ij}^{\gamma} - v_{ji}^{\gamma} = 0$ olduğundan, göz önüne alacağımız katman, K'nın aynı boyutlu bir alt katmanı olacaktır. K katmanı üzerinde aşağıdaki formları tanımlayalım:

$$\sigma^{\alpha} = du^{\alpha} - v_i^{\alpha} dx^i \quad (4.1.6)$$

$$\sigma_i^{\alpha} = dv_i^{\alpha} - v_{ij}^{\alpha} dx^j \quad (4.1.7)$$

$$d\sigma^{\alpha} = -dv_i^{\alpha} \wedge dx^i \quad (4.1.8)$$

$$d\sigma_i^{\alpha} = -dv_{ij}^{\alpha} \wedge dx^j \quad (4.1.9)$$

$$\omega^{\alpha} = d\Sigma^{i\alpha} \wedge \mu_i + \Sigma^{\alpha} \mu \quad (4.1.10)$$

Burada μ hacim formu olup

$$\mu = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (4.1.11)$$

şeklinde tanımlanır. $\mu_i = \frac{\partial}{\partial x^i} J \mu$ 'dır. J ise formun

herhangi bir vektör ile kontraksiyonunu gösteren iç çarpımdır. Bir $\phi : \Omega \Rightarrow K$ dönüşümü $u^\gamma = u^\gamma(x)$, $v_i^\gamma = v_i^\gamma(x)$, $v_{ij}^\gamma = v_{ij}^\gamma(x)$ ile tanımlansın. Bu dönüşüm dış cebri üzerinde bir $\phi^* \Lambda(K) \Rightarrow \Lambda(\Omega)$ dönüşümü üretir. ϕ^* dönüşümü altında formların orijinal denklemlerimizi verip vermediğine bakalım, [19]:

$$\phi^* \sigma^\alpha = (u_{,i}^\alpha - v_i^\alpha) dx^i \quad (4.1.12)$$

$$\phi^* \sigma_i^\alpha = (v_{i,j}^\alpha - v_{ij}^\alpha) dx^j \quad (4.1.13)$$

$$\phi^* d\sigma^\alpha = -v_{i,j}^\alpha dx^j \wedge dx^i \quad (4.1.14)$$

$$\phi^* d\sigma_i^\alpha = -v_{ij,k}^\alpha dx^k \wedge dx^j \quad (4.1.15)$$

x^i değişkenlerinin form sisteminden bağımsız olması şartını getirirsek (4.1.12)-(4.1.15) denklemlerinde katsayıların sıfır olması gerekir ki bu ise (4.1.3) ve (4.1.5) denklemlerini elde etmemizi sağlar. Son olarak ω^α formuna ϕ^* dönüşümünü uygularsak

$$\phi^* \omega^\alpha = \left[\frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial v_{jk}^\beta} v_{jk,i}^\beta + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial v_j^\beta} v_{j,i}^\beta + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial u^\beta} u_{,i}^\beta + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial x^i} + \Sigma^\alpha \right] \mu \quad (4.1.16)$$

katsayının sıfırlanması ile orijinal denklemlerimizi elde ederiz. Formlarla oluşturduğumuz ideal eğer kapalı ise çözüm garantilenmiş olur. Aksi halde ek formlar tanımlayarak ideali kapalı hale getirmemiz gerekecektir, [19]. Denklik denklemlerinde ideal her zaman kapalı olmaktadır, [21]. (4.1.6)-(4.1.10) form sisteminin

kapalı bir ideal oluşturduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi bütün bağımlı ve bağımsız değişkenlerle bir izovektör alanı tanımlayalım.

$$V = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + v^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + V_i^\alpha \frac{\partial}{\partial v_i^\alpha} + V_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial v_{ij}^\alpha} \quad (4.1.17)$$

Bir noktadaki çözümden, başka bir noktadaki çözüme ulaştığımızda denklemlerin invaryant kaldığını kabul ederek bunu sağlayabilecek izovektör alanını bulmaya çalışacağız. Bunun için idealin üreteçlerinin bir izovektöre göre Lie türevinin yine idealin içinde kalması gerekmektedir. İdeal kapalı olduğuna göre herhangi bir formun bu vektör doğrultusundaki Lie türevinin, boyut olarak kendisine eşit ve küçük olan formların lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilmesi gerekir, [19]. (4.1.6) ve (4.1.7) formları bu durumda 1-form olduğu için bunların Lie türevi idealdeki 1-formların lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilmelidir:

$$\mathcal{L}_V \sigma^\alpha = \lambda_\beta^\alpha \sigma^\beta + \lambda_{\beta}^{i\alpha} \sigma_i^\beta \quad (4.1.18)$$

$$\mathcal{L}_V \sigma_i^\alpha = \mu_{\beta i}^\alpha \sigma^\beta + \mu_{i\beta}^{\alpha j} \sigma_j^\beta \quad (4.1.19)$$

Lie türevini hesaplarken

$$\mathcal{L}_V \sigma^\alpha = V \rfloor d\sigma^\alpha + d(V \rfloor \sigma) \quad (4.1.20)$$

bağıntısını sık sık kullanacağız. Burada d dış türev operatörünü göstermektedir. (4.1.6)'nın (4.1.20) yardımı ile Lie türevi

$$\mathcal{L}_V \sigma^\alpha = -V_i^\alpha dx^i + v_i^\alpha dv_i^\alpha + d(v_i^\alpha - v_i^\alpha v^i) = -V_i^\alpha dx^i + dv_i^\alpha - v_i^\alpha dv^i \quad (4.1.21)$$

yazılabilir. (4.1.21)'de dış türevleri açık olarak yazarsak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V \sigma^\alpha = & \left[\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i} - v_i^\alpha \frac{\partial v^j}{\partial x^i} - V_i^\alpha \right] dx^i + \left[\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\beta} - v_i^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial u^\beta} \right] du^\beta \\ & + \left[\frac{\partial v^\alpha}{\partial v_j^\beta} - v_i^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial v_j^\beta} \right] dv_j^\beta + \left[\frac{\partial v^\alpha}{\partial v_{jk}^\beta} - v_i^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial v_{jk}^\beta} \right] dv_{jk}^\beta \quad (4.1.22) \end{aligned}$$

buluruz. (4.1.6) (4.1.7) (4.1.18)'e yerleştirilir ve (4.1.22)'ye eşitlenirse

$$\lambda_\beta^\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\beta} - v_i^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial u^\beta} \quad (4.1.23)$$

$$\lambda_\beta^{i\alpha} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial v_i^\beta} - v_j^\alpha \frac{\partial v^j}{\partial v_i^\beta} \quad (4.1.24)$$

katsayıları bulunur ve bunların elimine edilmesi ile de

$$\begin{aligned} V_i^\alpha = & \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\beta} v_i^\beta - v_j^\alpha \left[\frac{\partial v^j}{\partial x^i} + v_i^\beta \frac{\partial v^j}{\partial u^\beta} \right] + v_{ji}^\beta \left[\frac{\partial v^\alpha}{\partial v_j^\beta} - v_k^\alpha \right. \\ & \left. \frac{\partial v^k}{\partial v_j^\beta} \right] \quad (4.1.25) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial v_{jk}^\beta} - v_i^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial v_{jk}^\beta} = 0 \quad (4.1.26)$$

sonuçları elde edilir.

$$F^\alpha = V \rfloor \sigma^\alpha = v^\alpha - v_i^\alpha v^i \quad (4.1.27)$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + v_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (4.1.28)$$

tanımları yapılırsa (4.1.25), (4.1.26) daha basit bir şekilde yazılabilir:

$$V_i^\alpha = \left[D_i + v_{ji}^\beta \frac{\partial}{\partial v_j^\beta} \right] F^\alpha + v_{ji}^\alpha v^j \quad (4.1.29)$$

$$\frac{\partial F^\alpha}{\partial v_{jk}^\beta} = 0 \quad (4.1.30)$$

Şimdi aynı işlemleri σ_i^α formu için yapalım.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V \sigma_i^\alpha &= V \rfloor d\sigma_i^\alpha + d(V \rfloor \sigma_i^\alpha) = -V_{ij}^\alpha dx^j + v^j dv_{ij}^\alpha + d(V_i^\alpha - \\ &v_{ij}^\alpha v^j) = dV_i^\alpha - V_{ij}^\alpha dx^j - v_{ij}^\alpha dv^j \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

Bu ifadeyi açık şekilde yazarsak

$$\mathcal{L}_V \sigma_i^\alpha = \left[\frac{\partial V_i^\alpha}{\partial x^j} - v_{ik}^\alpha \frac{\partial v^k}{\partial x^j} - V_{ij}^\alpha \right] dx^j + \left[\frac{\partial V_i^\alpha}{\partial u^\beta} - v_{ij}^\alpha \frac{\partial v^j}{\partial u^\beta} \right] du^\beta$$

$$+ \left[\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial v_j^\beta} - v_{ik}^\alpha \frac{\partial v^k}{\partial v_j^\beta} \right] dv_j^\beta + \left[\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial v_{jk}^\beta} - v_{il}^\alpha \frac{\partial v^l}{\partial v_{jk}^\beta} \right] dv_{jk}^\beta \quad (4.1.32)$$

elde ederiz. σ_i^α ve σ^α (4.1.19)'da yerine yazılır ve (4.1.32) ile eşitlenirse keyfi katsayılar

$$\mu_{\beta i}^\alpha = \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial u^\beta} - v_{ij}^\alpha \frac{\partial v^j}{\partial u^\beta} \quad (4.1.33)$$

$$\mu_{i\beta}^\alpha = \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial v_j^\beta} - v_{ik}^\alpha \frac{\partial v^k}{\partial v_j^\beta} \quad (4.1.34)$$

olarak elde edilir ve bunların elimine edilmesi ile de

$$\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial v_{jk}^\beta} - v_{il}^\alpha \frac{\partial v^l}{\partial v_{jk}^\beta} = 0 \quad (4.1.35)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x^j} - v_{ik}^\alpha \frac{\partial v^k}{\partial x^j} + v_j^\beta \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial u^\beta} - v_{ik}^\alpha v_j^\beta \frac{\partial v^k}{\partial u^\beta} + v_{kj}^\beta \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial v_k^\beta} - v_{kj}^\beta \\ & v_{il}^\alpha \frac{\partial v^l}{\partial v_k^\beta} - v_{ij}^\alpha = 0 \end{aligned} \quad (4.1.36)$$

sonuçları elde edilir. (4.1.35)'in v_{mn}^γ 'e göre türevini alırsak

$$\frac{\partial^2 v_i^\alpha}{\partial v_{jk}^\beta \partial v_{mn}^\gamma} - v_{il}^\alpha \frac{\partial^2 v^l}{\partial v_{jk}^\beta \partial v_{mn}^\gamma} - \delta_\gamma^\alpha \delta_i^m \frac{\partial v^n}{\partial v_{jk}^\beta} = 0 \quad (4.1.37)$$

(4.1.37)'de ilk iki terim v_{jk}^β ve v_{mn}^γ 'e göre türevlerin

sirasından bağımsızdır. Dolayısı ile denklemden $\beta \rightarrow \gamma$ $j \rightarrow m$
 $k \rightarrow n$ alırsak

$$\delta_{\gamma}^{\alpha} \delta_i^m \frac{\partial v^n}{\partial v_{jk}^{\beta}} = \delta_{\beta}^{\alpha} \delta_i^j \frac{\partial v^k}{\partial v_{mn}^{\gamma}} \quad (4.1.38)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik üzerinde bazı
kontraksiyonlar yapalım. $\alpha = \gamma$, $m = i$ alırsak

$$N_n \frac{\partial v^n}{\partial v_{jk}^{\beta}} = \frac{\partial v^k}{\partial v_{jn}^{\beta}} \quad (4.1.39)$$

elde ederiz. (4.1.39)'u (4.1.38)'de sağ tarafa
yerleştirirsek

$$\delta_{\gamma}^{\alpha} \delta_i^m \frac{\partial v^n}{\partial v_{jk}^{\beta}} = \delta_{\beta}^{\alpha} \delta_i^j N_n \frac{\partial v^n}{\partial v_{mk}^{\gamma}} \quad (4.1.40)$$

buluruz. Yukarıda $\alpha = \beta$, $j = i$ alırsak

$$N^2 n^2 \frac{\partial v^n}{\partial v_{mk}^{\gamma}} = \frac{\partial v^n}{\partial v_{mk}^{\gamma}} \quad (4.1.41)$$

sonucunu elde ederiz. Buradan da

$$(N^2 n^2 - 1) \frac{\partial v^n}{\partial v_{mk}^{\gamma}} = 0 \quad (4.1.42)$$

çıkar. $Nn \neq 1$ durumunu alırsak, yani bağımlı ve bağımsız
değişkenler birer tane değilse

$$\frac{\partial v^n}{\partial v_{mk}^\gamma} = 0 \quad (4.1.43)$$

şartını elde ederiz. (4.1.43) (4.1.35)'e yerleştirilirse

$$\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial v_{jk}^\beta} = 0 \quad (4.1.44)$$

elde edilir. (4.1.43)'ü (4.1.26)'ya yerleştirirsek

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial v_{jk}^\beta} = 0 \quad (4.1.45)$$

elde edilir. (4.1.29)'un v_{jk}^β 'ya göre türevi (4.1.44)'den dolayı sıfırdır. Dolayısıyla

$$\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial v_{mn}^\gamma} = \delta_\gamma^\beta \delta_j^m \delta_i^n \frac{\partial F^\alpha}{\partial v_j^\beta} + \delta_\gamma^\alpha \delta_j^m \delta_i^n v^j = 0 \quad (4.1.46)$$

veya

$$\delta_i^n \left[\frac{\partial F^\alpha}{\partial v_j^\beta} + \delta_\gamma^\alpha v^m \right] = 0 \quad (4.1.47)$$

elde edilir. F^α 'nın türevini (4.1.27)'yi kullanarak hesaplar ve (4.1.47)'ye yerleştirirsek sonuçta

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial v_m^\gamma} - v_i^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial v_m^\gamma} = 0 \quad (4.1.48)$$

denklemini elde ederiz. (4.1.48)'in getireceği kısıtlara bakalım. v_k^β 'ya göre tekrar türetirsek

$$\frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial v_m^\gamma \partial v_k^\beta} - v_i^\alpha \frac{\partial^2 v^i}{\partial v_m^\gamma \partial v_k^\beta} - \delta_\beta^\alpha \delta_i^k \frac{\partial v^i}{\partial v_m^\gamma} = 0 \quad (4.1.49)$$

Bu ifadede türevler sıraya bağımlı değil. Dolayısı ile

$\begin{pmatrix} \gamma \\ m \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \beta \\ k \end{pmatrix}$ endisleri yer değiştirebilir. Bu ise

$$\delta_\beta^\alpha \delta_i^k \frac{\partial v^i}{\partial v_m^\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \delta_i^m \frac{\partial v^i}{\partial v_k^\beta} \quad (4.1.50)$$

veya

$$\delta_\beta^\alpha \frac{\partial v^k}{\partial v_m^\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \frac{\partial v^m}{\partial v_k^\beta} \quad (4.1.51)$$

verir. $\alpha = \gamma$ alırsak

$$\frac{\partial v^k}{\partial v_m^\beta} = N \frac{\partial v^m}{\partial v_k^\beta} \quad (4.1.52)$$

olur. (4.1.52) denklemi (4.1.51)'e yerleştirilirse

$$\delta_\beta^\alpha \frac{\partial v^k}{\partial v_m^\gamma} = \delta_\gamma^\alpha N \frac{\partial v^k}{\partial v_m^\beta} \quad (4.1.53)$$

bulunur. Yine $\alpha = \gamma$ alırsak sonuçta

$$(N^2 - 1) \frac{\partial v^k}{\partial v_m^\beta} = 0 \quad (4.1.54)$$

denklemini elde ederiz. $N \neq 1$ durumu için

$$\frac{\partial v^k}{\partial v_m^\beta} = 0 \quad (4.1.55)$$

çıkar. (4.1.55) denklemi (4.1.48)'e yerleştirilirse

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial v_m^\gamma} = 0 \quad (4.1.56)$$

sonucu kolayca elde edilir. (4.1.56) (4.1.55) (4.1.45) (4.1.43)'ün en önemli sonucu izovektörlerin ilk iki bileşenlerinin v_m^γ , v_{mn}^γ değişkenlerinden bağımsız olmasıdır. Bu durumda

$$v^i = \omega^i(x, u), \quad v^\alpha = \Omega^\alpha(x, u) \quad (4.1.57)$$

yazabiliriz.

Geriye kalan V_i^α , V_{ij}^α izovektör bileşenleri ise ω^i ve Ω^α cinsinden yazılabilir. (4.1.29)'dan

$$V_i^\alpha = \left[D_i + v_{ji}^\beta \frac{\partial}{\partial v_j^\beta} \right] F^\alpha + v_{ji}^\alpha v^j \quad (4.1.58)$$

$$= D_i F^\alpha - v_{ji}^\beta \delta_\beta^\alpha \delta_k^j v^k + v_{ji}^\alpha v^j = D_i F^\alpha \quad (4.1.59)$$

buluruz. (4.1.28) (4.1.27) tanımlarını kullanır ve (4.1.57)'ye göre yeniden düzenlersek

$$V_i^\alpha = \left[\frac{\partial}{\partial x^i} + v_i^\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta} \right] (\Omega^\alpha - v_j^\alpha \omega^j) \quad (4.1.60)$$

veya

$$V_i^\alpha = \frac{\partial \Omega^\alpha}{\partial x^i} - v_m^\alpha \frac{\partial \omega^m}{\partial x^i} + v_i^\gamma \frac{\partial \Omega^\alpha}{\partial u^\gamma} - v_i^\gamma v_m^\alpha \frac{\partial \omega^m}{\partial u^\gamma} \quad (4.1.61)$$

elde ederiz. (4.1.61)'de bulduğumuz sonuç (4.1.36)'ya yerleştirilir, türevler alınıp bazı terimler sadeleştirilirse sonuçta

$$\begin{aligned}
 V_{ij}^{\alpha} &= \frac{\partial^2 \Omega^{\alpha}}{\partial x^i \partial x^j} - v_k^{\alpha} \frac{\partial^2 \omega^k}{\partial x^i \partial x^j} + v_i^{\beta} \frac{\partial^2 \Omega^{\alpha}}{\partial x^j \partial u^{\beta}} + v_j^{\beta} \frac{\partial^2 \Omega^{\alpha}}{\partial x^i \partial u^{\beta}} + v_{ij}^{\beta} \\
 &\frac{\partial \Omega^{\alpha}}{\partial u^{\beta}} - v_{ik}^{\alpha} \frac{\partial \omega^k}{\partial x^j} - v_{kj}^{\alpha} \frac{\partial \omega^k}{\partial x^i} - v_i^{\beta} v_k^{\alpha} \frac{\partial^2 \omega^k}{\partial x^j \partial u^{\beta}} - v_j^{\beta} v_k^{\alpha} \frac{\partial^2 \omega^k}{\partial x^i \partial u^{\beta}} \\
 &+ v_i^{\gamma} v_j^{\beta} \frac{\partial^2 \Omega^{\alpha}}{\partial u^{\beta} \partial u^{\gamma}} - (v_j^{\beta} v_{ik}^{\alpha} + v_k^{\alpha} v_{ij}^{\beta} + v_i^{\beta} v_{kj}^{\alpha}) \frac{\partial \omega^k}{\partial u^{\beta}} - v_i^{\gamma} \\
 &v_k^{\alpha} v_j^{\beta} \frac{\partial^2 \omega^k}{\partial u^{\beta} \partial u^{\gamma}}
 \end{aligned} \tag{4.1.62}$$

elde ederiz. Böylece izovektör alanı üzerinde önemli kısıtlar getirilmiş oldu. Şimdi ise ω^{α} formunun Lie türevini hesaplayalım. (4.1.10)'u tekrar yazalım ve dış türevini de hesaplayalım:

$$\omega^{\alpha} = d\Sigma^{i\alpha} \wedge \mu_i + \Sigma^{\alpha} \mu \tag{4.1.63}$$

$$d\omega^{\alpha} = d\Sigma^{\alpha} \wedge \mu \tag{4.1.64}$$

$$\mathcal{L}_V \omega^{\alpha} = V \lrcorner d\omega^{\alpha} + d(V \lrcorner \omega^{\alpha}) \tag{4.1.65}$$

(4.1.65)'deki terimleri ayrı ayrı hesaplayalım:

$$V \lrcorner d\omega^{\alpha} = V(\Sigma^{\alpha}) \mu - \omega^i d\Sigma^{\alpha} \wedge \mu_i \tag{4.1.66}$$

(4.1.66)'da $V(\Sigma^{\alpha})$ şu şekilde tanımlanmıştır:

$$V(\Sigma^{\alpha}) = \omega^i \frac{\partial \Sigma^{\alpha}}{\partial x^i} + \Omega^{\beta} \frac{\partial \Sigma^{\alpha}}{\partial u^{\beta}} + v_i^{\beta} \frac{\partial \Sigma^{\alpha}}{\partial v_i^{\beta}} + v_{ij}^{\beta} \frac{\partial \Sigma^{\alpha}}{\partial v_{ij}^{\beta}} \tag{4.1.67}$$

$$V \lrcorner \omega^\alpha = V(\Sigma^{i\alpha}) \mu_i - \omega^j d\Sigma^{i\alpha} \wedge \mu_{ji} + \omega^i \Sigma^\alpha \mu_i \quad (4.1.68)$$

(4.1.68)'in dış türevini alırsak

$$\begin{aligned} d(V \lrcorner \omega^\alpha) &= dV(\Sigma^{i\alpha}) \wedge \mu_i - d\omega^j \wedge d\Sigma^{i\alpha} \wedge \mu_{ji} + \Sigma^\alpha d\omega^i \wedge \mu_i \\ &+ \omega^i d\Sigma^\alpha \wedge \mu_i \end{aligned} \quad (4.1.69)$$

(4.1.69) ve (4.1.66) (4.1.65)'e yerleştirilirse

$$\mathcal{L}_V \omega^\alpha = V(\Sigma^\alpha) \mu + \left[dV(\Sigma^{i\alpha}) + \Sigma^\alpha d\omega^i \right] \wedge \mu_i - d\omega^j \wedge d\Sigma^{i\alpha} \wedge \mu_{ji} \quad (4.1.70)$$

veya

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V \omega^\alpha &= \left[V(\Sigma^\alpha) + \frac{\partial V(\Sigma^{i\alpha})}{\partial x^i} + \Sigma^\alpha \frac{\partial \omega^i}{\partial x^i} \right] \mu + \left[\frac{\partial V(\Sigma^{i\alpha})}{\partial u^\beta} + \Sigma^\alpha \frac{\partial \omega^i}{\partial u^\beta} \right] \\ &du^\beta \wedge \mu_i + \frac{\partial V(\Sigma^{i\alpha})}{\partial u_j^\beta} du_j^\beta \wedge \mu_i + \frac{\partial V(\Sigma^{i\alpha})}{\partial u_{jk}^\beta} du_{jk}^\beta \wedge \mu_i - \left[\frac{\partial \omega^j}{\partial x^k} \right. \\ &dx^k + \frac{\partial \omega^j}{\partial u^\beta} du^\beta \left. \right] \wedge \left[\frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial x^l} dx^l + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial u^\gamma} du^\gamma + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial u_l^\gamma} du_l^\gamma + \right. \\ &\left. \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial u_{lm}^\gamma} du_{lm}^\gamma \right] \wedge \mu_{ji} \end{aligned} \quad (4.1.71)$$

buluruz. Son dış çarpımın yapılabilmesi için şu bağıntıların bilinmesi gerekmektedir, [19]:

$$dx^j \wedge \mu_i = \delta_i^j \mu \quad (4.1.72)$$

$$dx^k \wedge \mu_{ji} = \delta_j^k \mu_i - \delta_i^k \mu_j \quad (4.1.73)$$

$$dx^k \wedge dx^l \wedge \mu_{ji} = (\delta_i^k \delta_j^l - \delta_j^k \delta_i^l) \mu = \delta_{ij}^{kl} \mu \quad (4.1.74)$$

Bu bağıntılar göz önüne alınarak işlemler yapılırsa

sonuçta ω^α 'nın Lie türevi şöyle olur:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V \omega^\alpha &= A^\alpha_\mu + A^\alpha_{\beta\gamma} du^\beta \wedge \mu_i + A^{\alpha i}_{\beta} dv_j^\beta \wedge \mu_i + A^{\alpha ijk}_{\beta} dv_{jk}^\beta \wedge \\ &\mu_i + A^{\alpha i}_{\beta\gamma} du^\beta \wedge du^\gamma \wedge \mu_{ji} + A^{\alpha jk}_{\beta\gamma} dv_k^\beta \wedge du^\gamma \wedge \mu_{ji} + A^{\alpha jkl}_{\beta\gamma} \\ &dv_{kl}^\beta \wedge du^\gamma \wedge \mu_{ji} \end{aligned} \quad (4.1.75)$$

(4.1.75)'deki her bir katsayı ise şu şekilde tanımlanmıştır:

$$A^\alpha = V(\Sigma^\alpha) + \frac{\partial V(\Sigma^{i\alpha})}{\partial x^i} + \left[\Sigma^\alpha + \frac{\partial \Sigma^{j\alpha}}{\partial x^j} \right] \frac{\partial \omega^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial x^j} \frac{\partial \omega^j}{\partial x^i} \quad (4.1.76)$$

$$\begin{aligned} A^\alpha_{\beta} &= \frac{\partial V(\Sigma^{i\alpha})}{\partial u^\beta} + \Sigma^\alpha \frac{\partial \omega^i}{\partial u^\beta} + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial u^\beta} \frac{\partial \omega^j}{\partial x^j} - \frac{\partial \Sigma^{j\alpha}}{\partial u^\beta} \frac{\partial \omega^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial x^j} \\ &\frac{\partial \omega^j}{\partial u^\beta} + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial x^j} \frac{\partial \omega^i}{\partial u^\beta} \end{aligned} \quad (4.1.77)$$

$$A^{\alpha i}_{\beta} = \frac{\partial V(\Sigma^{i\alpha})}{\partial v_j^\beta} + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial v_j^\beta} \frac{\partial \omega^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Sigma^{k\alpha}}{\partial v_j^\beta} \frac{\partial \omega^i}{\partial x^k} \quad (4.1.78)$$

$$A^{\alpha ijk}_{\beta} = \frac{\partial V(\Sigma^{i\alpha})}{\partial v_{jk}^\beta} + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial v_{jk}^\beta} \frac{\partial \omega^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Sigma^{l\alpha}}{\partial v_{jk}^\beta} \frac{\partial \omega^i}{\partial x^l} \quad (4.1.79)$$

$$A^{\alpha i}_{\beta\gamma} = \frac{\partial \Sigma^{[i|\alpha}}{\partial u^{|\beta}} \frac{\partial \omega^{j]}}{\partial u^{\gamma]} = -A^{\alpha ji}_{\beta\gamma} = -A^{\alpha i}_{\gamma\beta} \quad (4.1.80)$$

$$A^{\alpha ijk}_{\beta\gamma} = \frac{\partial \Sigma^{[i|\alpha}}{\partial v_k^{|\beta}} \frac{\partial \omega^{j]}}{\partial u^{\gamma]} = -A^{\alpha jik}_{\beta\gamma} \quad (4.1.81)$$

$$A^{\alpha i jkl}_{\beta\gamma} = \frac{\partial \Sigma^{[i|\alpha}}{\partial v_{kl}^{|\beta}} \frac{\partial \omega^{j]}}{\partial u^{\gamma]} = -A^{\alpha j ikl}_{\beta\gamma} \quad (4.1.82)$$

Simdi ω^α 'nın Lie türevinin idealin içinde kalma şartını yazalım.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v \omega^\alpha = & \mu_\beta^\alpha \omega^\beta + \lambda_{\beta}^{\alpha i} \sigma^\beta \wedge \mu_i + \lambda_{\beta}^{\alpha i j} \sigma_j^\beta \wedge \mu_i + \lambda_{\beta \gamma}^{\alpha i j} d\sigma^\beta \wedge \sigma^\gamma \\ & \wedge \mu_{ji} + \lambda_{\beta \gamma}^{\alpha i j k} \sigma_k^\beta \wedge \sigma^\gamma + \Lambda_\beta^\alpha \wedge d\sigma^\beta + \Lambda_\beta^{\alpha i} \wedge d\sigma_i^\beta \end{aligned} \quad (4.1.83)$$

Buradaki keyfi katsayıların hesaplanabilmesi çok zordur. Bu zorluktan kurtulmak için başlangıçtaki idealimizdeki formlarda biraz değişiklik yapacağız. yani ω^α 'nın yerine öyle bir ω'^α seçeceğiz ki yine aynı ideali elde etmiş ve dolayısı ile aynı denklemlere yol açacak formları bulmuş olacağız. Sadece ω^α yerine ω'^α almakla oluşan idealin ilk ideale eşit olabilmesi için ω'^α 'nın şu formda olması gerekir:

$$\omega'^\alpha = a_\beta^\alpha \omega^\beta + A_\beta^\alpha \wedge \sigma^\beta + B_\beta^\alpha \wedge d\sigma^\beta + A_{\beta}^{\alpha i} \wedge \sigma_i^\beta + B_{\beta}^{\alpha i} \wedge d\sigma_i^\beta \quad (4.1.84)$$

$$(\det a_\beta^\alpha \neq 0)$$

(4.1.84)'den ω^α 'yı çözersek

$$\begin{aligned} \omega^\alpha = & a_\beta^{-1\alpha} \omega'^\beta - a_\beta^{-1\alpha} A_\gamma^\beta \wedge \sigma^\gamma - a_\beta^{-1\alpha} B_\gamma^\beta \wedge d\sigma^\gamma - a_\beta^{-1\alpha} A_\gamma^{\beta i} \wedge \sigma_i^\gamma \\ & - a_\beta^{-1\alpha} B_\gamma^{\beta i} \wedge d\sigma_i^\gamma \end{aligned} \quad (4.1.85)$$

Simdi (4.1.6) ve (4.1.7)'yi şöyle yazalım:

$$du^\alpha = \sigma^\alpha + v_i^\alpha dx^i \quad (4.1.86)$$

$$dv_i^\alpha = \sigma_i^\alpha + v_{ij}^\alpha dx^j \quad (4.1.87)$$

(4.1.10)'dan ω^α 'yı (4.1.86) ve (4.1.87)'yi kullanarak açık şekilde yazarsak

$$\omega^\alpha = \left[\frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial v_\beta} v_{ji}^\beta + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial u_\beta} v_i^\beta + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial x^i} + \Sigma^\alpha \right] \mu + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial v_\beta} dv_{jk}^\beta$$

$$\wedge \mu_i + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial u^\beta} \sigma^\beta \wedge \mu_i + \frac{\partial \Sigma^i}{\partial v_j^\beta} \sigma_j^\beta \wedge \mu_i \quad (4.1.88)$$

buluruz. ω'^α 'yı şöyle tanımlayalım:

$$\omega'^\alpha = \left[\frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial v_j^\beta} v_{ji}^\beta + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial u^\beta} v_i^\beta + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial x^i} + \Sigma^\alpha \right] \mu_i + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial v_{jk}^\beta} dv_{jk}^\beta \wedge \mu_i \quad (4.1.89)$$

Bu durumda

$$\omega^\alpha = \omega'^\alpha + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial u^\beta} \sigma^\beta \wedge \mu_i + \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial v_j^\beta} \sigma_j^\beta \wedge \mu_i \quad (4.1.90)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan ω'^α 'yı çekersek

$$\omega'^\alpha = \omega^\alpha + (-1)^n \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial u^\beta} \mu_i \wedge \sigma^\beta + (-1)^n \frac{\partial \Sigma^{i\alpha}}{\partial v_j^\beta} \mu_i \wedge \sigma_j^\beta \quad (4.1.91)$$

elde edilir.

ω'^α (4.1.84)'ün özel bir durumu olup ideali değiştirmeyen bir formdur.

ω'^α 'nın Lie türevi ile ω^α 'nın Lie türevi arasında şu bağıntı kurulabilir:

$$\mathcal{L}_v \omega'^\alpha = \lim_{\substack{\sigma_j^\beta \rightarrow 0 \\ \sigma_i^\beta \rightarrow 0}} \mathcal{L}_v \omega^\alpha \quad (4.1.92)$$

Burada $\sigma_j^\beta \rightarrow 0$ $\sigma_i^\beta \rightarrow 0$ yerine $du_j^\beta \rightarrow v_j^\beta dx^j$, $dv_j^\beta \rightarrow v_{jk}^\beta dx^k$ yazabiliriz. Bu ifadeleri (4.1.75)'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v \omega'^\alpha &= A^\alpha_\mu + A^{\alpha i}_\beta v_i^\beta \mu + A^{ij}_\beta v_j^\beta \mu + A^{\alpha jk}_\beta dv_{jk}^\beta \wedge \mu_i + A^{\alpha i j}_{\beta \gamma} \\ &v_k^\beta v_l^\gamma dx^k \wedge dx^l \wedge \mu_{ji} + A^{\alpha jk}_{\beta \gamma} v_{kl}^\beta v_m^\gamma dx^l \wedge dx^m \wedge \mu_{ji} + \\ &A^{\alpha jkl}_{\beta \gamma} v_m^\gamma dv_{kl}^\beta \wedge dx^m \wedge \mu_{ji} \end{aligned} \quad (4.1.93)$$

sonucunu elde ederiz. (4.1.73) ve (4.1.74)'ü kullanıp toplam endisleri üzerinde gerekli değişiklikleri yaparsak sonuçta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v \omega'^\alpha &= \left[A^\alpha + A^{\alpha i}_\beta v_i^\beta + 2A^{\alpha ij}_{\beta \gamma} v_i^\beta v_j^\gamma + (A^{\alpha i j}_\gamma + 2A^{\alpha ikj}_{\gamma \beta} v_k^\beta) v_{ji}^\gamma \right] \\ &\mu + (A^{\alpha jk}_\beta + 2A^{\alpha i jk}_{\beta \gamma} v_l^\gamma) dv_{jk}^\beta \wedge \mu_i \end{aligned} \quad (4.1.94)$$

elde ederiz. Şimdi ω'^α 'nin Lie türevinin idealin içinde kalma şartını yazarsak

$$\mathcal{L}_v \omega'^\alpha = \mu^\alpha_\beta \omega'^\beta + \Lambda^\alpha_\beta \wedge d\sigma^\beta + \Lambda^{\alpha i}_\beta \wedge d\sigma^\beta_i \quad (4.1.95)$$

$$= \mu^\alpha_\beta \omega'^\beta - \Lambda^\alpha_\beta \wedge dv_i^\beta \wedge dx^i - \Lambda^{\alpha i}_\beta \wedge dv_{ij}^\beta \wedge dx^j \quad (4.1.96)$$

(4.1.96) ile (4.1.94) karşılaştırılırsa

$$\Lambda^\alpha_\beta = 0, \quad \Lambda^{\alpha i}_\beta = \lambda^{\alpha ikl}_\beta \mu_{lk}, \quad \lambda^{\alpha ikl}_\beta = -\lambda^{\alpha ilk}_\beta \quad (4.1.97)$$

elde edilir. Burada $\lambda^{\alpha ikl}_\beta$ keyfi katsayılarıdır. (4.1.96)'da son terim, (4.1.97) kullanılır ve (4.1.73) göz önüne alınırsa sonuçta $2\lambda^{\alpha jki}_\beta dv_{jk}^\beta \wedge \mu_i$ olur. Sonuç olarak (4.1.96), (4.1.89)'ü da kullanarak şu şekli alır:

$$\mathcal{L}_v \omega'^\alpha = \mu^\alpha_\beta \left[\frac{\partial \Sigma^{i\beta}}{\partial v_j^\gamma} v_{ji}^\gamma + \frac{\partial \Sigma^{i\beta}}{\partial v_i^\gamma} v_j^\gamma + \frac{\partial \Sigma^{i\beta}}{\partial x^i} + \Sigma^\beta \right] \mu + \mu^\alpha_\beta \frac{\partial \Sigma^{i\beta}}{\partial v_{jk}^\gamma}$$

$$dv_{jk}^\gamma \wedge \mu_i + 2\lambda^{\alpha jki}_\gamma dv_{jk}^\gamma \wedge \mu_i \quad (4.1.98)$$

(4.1.94) ile (4.1.98)'i karşılaştırırsak

$$A^\alpha + A^\alpha_{\beta} v_i^\beta + 2A^\alpha_{\beta\gamma} v_i^\beta v_j^\gamma + \left[A^\alpha_{\gamma} + 2A^\alpha_{\gamma\beta} v_k^\beta \right] v_{ji}^\gamma = \mu^\alpha_{\beta} \left[\frac{\partial \Sigma^{i\beta}}{\partial v_j^\gamma} v_{ji}^\gamma + \frac{\partial \Sigma^{i\beta}}{\partial v_i^\gamma} v_i^\gamma + \frac{\partial \Sigma^{i\beta}}{\partial x^i} + \Sigma^\beta \right] \quad (4.1.99)$$

$$A^\alpha_{\gamma} + 2A^\alpha_{\gamma\beta} v_l^\beta = \mu^\alpha_{\beta} \frac{\partial \Sigma^{i\beta}}{\partial v_{jk}^\gamma} + 2\lambda^\alpha_{\gamma} \quad (4.1.100)$$

buluruz. (4.1.97)'den λ^α_{β} kl endisine göre antisimetrik olduğu için (4.1.100)'den şu şekilde elimine edebiliriz. (4.1.100)'de k ve i indisleri yer değiştirirse

$$4\lambda^\alpha_{\gamma} = A^\alpha_{\gamma} - A^\alpha_{\gamma} + 2 \left[A^\alpha_{\gamma\beta} - A^\alpha_{\gamma\beta} \right] v_l^\beta - \mu^\alpha_{\beta} \left[\frac{\partial \Sigma^{i\beta}}{\partial v_{jk}^\gamma} - \frac{\partial \Sigma^{k\beta}}{\partial v_{ji}^\gamma} \right] \quad (4.1.101)$$

çıkar. (4.1.100) ile (4.1.101) arasında λ^α_{γ} katsayıları elimine edilirse

$$\mu^\alpha_{\beta} \left[\frac{\partial \Sigma^{i\beta}}{\partial v_{jk}^\gamma} + \frac{\partial \Sigma^{k\beta}}{\partial v_{ji}^\gamma} \right] = A^\alpha_{\gamma} + A^\alpha_{\gamma} + 2 \left[A^\alpha_{\gamma\beta} + A^\alpha_{\gamma\beta} \right] v_l^\beta \quad (4.1.102)$$

buluruz. (4.1.99) ve (4.1.102) izovektör alanımızı belirleyen sonuç denklemleridir. Buradan daha ileriye gidebilmek için $\Sigma^{i\alpha}$ ve Σ^α yapılarının verilmesi gerekmektedir.

4.2-SINIR TABAKASINA UYGULANIŞI

Geçen kısımda üçüncü mertebeden denklik denklemleri için elde ettiğimiz sonuçları sınır tabakası denklemlerine uygulayacağız. Notasyon kolaylığı sağlamak için şu tanımları yapalım ve gösterilim kolaylığını sağlamak amacı ile kartezyen endis notasyonunu kullanalım:

$$x_1 = \phi \quad x_2 = \psi \quad u_1 = W_\phi \quad u_2 = W_\psi \quad q = q_B(x_1) \quad Q = \log q_B \quad (4.2.1)$$

$$v_{11} = \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} \quad v_{12} = \frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} \quad v_{21} = \frac{\partial W_\psi}{\partial \phi} \quad v_{22} = \frac{\partial W_\psi}{\partial \psi} \quad (4.2.2)$$

$$v_{111} = \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \phi^2} \quad v_{112} = v_{121} = \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \phi \partial \psi} \quad v_{122} = \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2} \quad (4.2.3)$$

$$v_{211} = \frac{\partial^2 W_\psi}{\partial \phi^2} \quad v_{212} = v_{221} = \frac{\partial^2 W_\psi}{\partial \phi \partial \psi} \quad v_{222} = \frac{\partial^2 W_\psi}{\partial \psi^2}$$

Yeni notasyonda (3.3.28) ve (3.3.29) şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} & \frac{u_1}{q^2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{(u_1^2 - 1)}{q^2} Q' + \frac{u_2}{q^2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{1}{q^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + k \left[u_2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_2^3} \right. \\ & + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + u_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 4u_1 Q' \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - 2Q' \\ & \left. \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad Q' = \frac{dQ}{dx_1} \quad (4.2.5)$$

Bu denklemleri bir denklik denklemi olarak yazmak istiyoruz. (4.1.1)'i $\alpha=1$ olduğunu gözönüne alarak tekrar

yazarsak

$$\frac{\partial \Sigma_i}{\partial x_i} + \Sigma = 0 \quad (4.2.6)$$

olur. Üçüncü mertebeden türevleri olan iki terim şöyle yazılabilir:

$$u_2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_2^3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \quad (4.2.7)$$

$$u_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.2.8)$$

(4.2.7), (4.2.8) (4.2.4)'e yerleştirilir, terimler düzenlenirse sonuçta

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_2} \left[k (u_2 v_{122} + u_1 v_{112}) \right] + k \left[2v_{11} v_{122} - 2v_{12} v_{112} + 4Q' u_1 \right. \\ & \left. v_{122} - 2Q' v_{12}^2 \right] + \frac{1}{q^2} v_{122} - \frac{1}{q^2} u_1 v_{11} + \frac{(1-u_1^2)}{q^2} Q' - \frac{1}{q^2} u_2 v_{12} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

elde edilir. Buradan Σ_i ve Σ için şu tanımları yapabiliriz:

$$\Sigma_i = k (u_2 v_{122} + u_1 v_{112}) \delta_{i2} \quad (4.2.10)$$

$$\Sigma = k (2v_{11} v_{122} - 2v_{12} v_{112} + 4Q' u_1 v_{122} - 2Q' v_{12}^2) + \frac{1}{q^2} v_{122} - \frac{u_1}{q^2} v_{11}$$

$$+ \frac{(1-u_1^2)}{q^2} Q' - \frac{u_2}{q^2} v_{12} \quad (4.2.11)$$

Denklem (4.2.6) formunda verildiğinde izovektör alanını bulmak için geçen bölümde elde ettiğimiz (4.1.99) ve (4.1.102) denklemlerinde $\alpha=1$ $\beta=1$ alırsak

$$\mu \left(\frac{\partial \Sigma_i}{\partial v_{\gamma jk}} + \frac{\partial \Sigma_k}{\partial v_{\gamma ji}} \right) = A_{\gamma ijk} + A_{\gamma kji} + 2(A_{\gamma \beta i l j k} + A_{\gamma \beta k l j i}) v_{\beta l} \quad (4.2.12)$$

$$A + A_{\beta i} v_{\beta i} + 2A_{\beta \gamma i j} v_{\beta i} v_{\gamma j} + (A_{\gamma i j} + 2A_{\gamma \beta i k j} v_{\beta k}) v_{\gamma j i} = \mu \left(\frac{\partial \Sigma_i}{\partial v_{\gamma j}} v_{\gamma j i} + \frac{\partial \Sigma_i}{\partial u_{\gamma}} v_{\gamma i} + \frac{\partial \Sigma_i}{\partial x_i} + \Sigma \right) \quad (4.2.13)$$

çözmemiz gereken denklemler olarak ortaya çıkar. Önce (4.2.12)'deki terimleri tek tek hesaplayıp izovektör alanı üzerinde getirdiği kısıtlara bakalım. (4.2.10)'un $v_{\gamma jk}$ 'ya göre türevini alırsak

$$\frac{\partial \Sigma_i}{\partial v_{\gamma jk}} = k(u_2 \delta_{\gamma 1} \delta_{j2} \delta_{k2} + u_1 \delta_{\gamma 1} \delta_{j1} \delta_{k2}) \delta_{iz} \quad (4.2.14)$$

$$\frac{\partial \Sigma_i}{\partial v_{\gamma jk}} = k u_j \delta_{\gamma 1} \delta_{k2} \delta_{iz} \quad (4.2.15)$$

elde ederiz. Şimdi denklemin sağ tarafındaki A katsayılarını hesaplayalım. (4.1.79)'dan

$$A_{\gamma ijk} = \frac{\partial V(\Sigma_i)}{\partial v_{\gamma jk}} + \frac{\partial \Sigma_i}{\partial v_{\gamma jk}} \frac{\partial \omega_l}{\partial x_l} - \frac{\partial \Sigma_l}{\partial v_{\gamma jk}} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_l} \quad (4.2.16)$$

(4.2.16)'nın ilk terimini hesaplamak için (4.1.67)'den faydalanalım:

$$V(\Sigma_i) = \omega_j \frac{\partial \Sigma_i}{\partial x_j} + \Omega_\beta \frac{\partial \Sigma_i}{\partial u_\beta} + V_{\beta j} \frac{\partial \Sigma_i}{\partial v_{\beta j}} + V_{\beta j k} \frac{\partial \Sigma_i}{\partial v_{\beta j k}} \quad (4.2.17)$$

Σ_i, x_j ve $v_{\beta j}$ değişkenlerine bağlı olmadığı için birinci ve üçüncü terimler sıfır olur. İkinci terim ise şöyledir:

$$\frac{\partial \Sigma_i}{\partial u_\beta} = k(\delta_{\beta 2} v_{122} + \delta_{\beta 1} v_{112}) \delta_{i2} = k v_{1\beta 2} \delta_{i2} \quad (4.2.18)$$

(4.2.18) ve (4.2.15) bağıntıları (4.2.17)'ye yerleştirilirse

$$V(\Sigma_i) = k \delta_{i2} (\Omega_\beta v_{1\beta 2} + V_{1j2} u_j) \quad (4.2.19)$$

olur. Bu ifadenin türevini alırsak,

$$\frac{\partial V(\Sigma_i)}{\partial v_{\gamma j k}} = k \delta_{i2} \left(\Omega_j \delta_{\gamma 1} \delta_{k2} + \frac{\partial V_{1m2}}{\partial v_{\gamma j k}} u_m \right) \quad (4.2.20)$$

buluruz. (4.2.20)'de son terimin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için (4.1.62)'de $\alpha=1, i=m, j=2$ alırsak

$$V_{1m2} = \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_m \partial x_2} - v_{1k} \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial x_m \partial x_2} + v_{\beta m} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2 \partial u_\beta} + v_{\beta 2} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_m \partial u_\beta} + v_{\beta m 2} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_\beta} - v_{1m1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - v_{112} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_m} - v_{\beta m} v_{1k} \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial x_2 \partial u_\beta} - v_{\beta 2} v_{11} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_m \partial u_\beta}$$

$$+v_{\gamma m} v_{\beta z} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} - (v_{\beta z} v_{1m} + v_{1l} v_{\beta m} + v_{\beta m} v_{1l}) \frac{\partial \omega_l}{\partial u_\beta} - v_{\gamma m} v_{1k} v_{\beta z} \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} \quad (4.2.21)$$

yazılabilir. (4.2.21)'in $v_{\gamma jk}$ 'ya göre türevini alırsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{1m2}}{\partial v_{\gamma jk}} &= \delta_{mj} \delta_{kz} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_\gamma} - \delta_{\gamma 1} \delta_{mj} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_2} - \delta_{\gamma 1} \delta_{kz} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_m} - \delta_{\gamma 1} \delta_{jm} \frac{\partial \omega_k}{\partial u_\beta} v_{\beta z} - v_{1l} \delta_{jm} \delta_{kz} \frac{\partial \omega_l}{\partial u_\gamma} - \delta_{\gamma 1} \delta_{kz} \frac{\partial \omega_j}{\partial u_\beta} v_{\beta m} \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

olur. (4.2.22)'yi (4.2.20)'ye yerleştirir sonra (4.2.20) ve (4.2.15) (4.2.16)'ya yerleştirilirse

$$\begin{aligned} A_{\gamma ijk} &= k \delta_{iz} \left[\Omega_j \delta_{\gamma 1} \delta_{kz} + u_m \left(\delta_{mj} \delta_{kz} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_\gamma} - \delta_{\gamma 1} \delta_{mj} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_2} - \delta_{\gamma 1} \delta_{kz} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_m} - \delta_{\gamma 1} \delta_{jm} \frac{\partial \omega_k}{\partial u_\beta} v_{\beta z} - v_{1l} \delta_{jm} \delta_{kz} \frac{\partial \omega_l}{\partial u_\gamma} - \delta_{\gamma 1} \delta_{kz} \frac{\partial \omega_j}{\partial u_\beta} v_{\beta m} \right) \right] \\ &+ k \delta_{\gamma 1} \delta_{kz} u_j \left(\delta_{iz} \frac{\partial \omega_l}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

elde edilir. Şimdi denklem (4.2.12)'deki diğer katsayıyı hesaplayalım. (4.1.82) bağıntısına göre

$$A_{\beta \gamma ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Sigma_i}{\partial v_{\beta kl}} \frac{\partial \omega_j}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial \Sigma_j}{\partial v_{\beta kl}} \frac{\partial \omega_i}{\partial u_\gamma} \right) \quad (4.2.24)$$

şeklinde verilmiştir. (4.2.15) (4.2.24)'e

yerleştirilirse sonuçta

$$A_{\beta\gamma ikl} = \frac{1}{2} k_{u_k} \delta_{\beta i} \delta_{l2} \left(\delta_{i2} \frac{\partial \omega_j}{\partial u_\gamma} - \delta_{j2} \frac{\partial \omega_i}{\partial u_\gamma} \right) \quad (4.2.25)$$

çıkar.

(4.2.12)'nin bütün terimleri bulunmuş oldu. Endislere dikkat ederek (4.2.15), (4.2.23), (4.2.25) denklem (4.2.12)'ye yerleştirilir ve sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} 2\mu u_j \delta_{\gamma i} \delta_{k2} \delta_{i2} &= \delta_{i2} \left[\Omega_j \delta_{\gamma i} \delta_{k2} + u_m \left(\delta_{mj} \delta_{k2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_\gamma} - \delta_{\gamma i} \delta_{mj} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_2} - \right. \right. \\ &\delta_{\gamma i} \delta_{k2} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_m} - \delta_{\gamma i} \delta_{jm} \frac{\partial \omega_k}{\partial u_\beta} v_{\beta 2} - v_{11} \delta_{jm} \delta_{k2} \frac{\partial \omega_l}{\partial u_\gamma} - \delta_{\gamma i} \delta_{k2} \frac{\partial \omega_j}{\partial u_\beta} \\ &\left. \left. v_{\beta m} \right] \right] + \delta_{\gamma i} \delta_{k2} u_j \left(\delta_{i2} \frac{\partial \omega_l}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2} \right) + \delta_{k2} \left[\Omega_j \delta_{\gamma i} \delta_{i2} + u_m \left(\delta_{mj} \delta_{i2} \right. \right. \\ &\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_\gamma} - \delta_{\gamma i} \delta_{mj} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2} - \delta_{\gamma i} \delta_{i2} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_m} - \delta_{\gamma i} \delta_{jm} \frac{\partial \omega_i}{\partial u_\beta} v_{\beta 2} - v_{11} \\ &\left. \left. \delta_{jm} \delta_{i2} \frac{\partial \omega_l}{\partial u_\gamma} - \delta_{\gamma i} \delta_{i2} \frac{\partial \omega_j}{\partial u_\beta} v_{\beta m} \right] \right] + \delta_{\gamma i} \delta_{i2} u_j \left(\delta_{k2} \frac{\partial \omega_l}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x_2} \right) \\ &+ u_j \delta_{\gamma i} \left[\delta_{k2} \left(\delta_{i2} \frac{\partial \omega_l}{\partial u_\beta} - \delta_{l2} \frac{\partial \omega_i}{\partial u_\beta} \right) + \delta_{i2} \left(\delta_{k2} \frac{\partial \omega_l}{\partial u_\beta} \right. \right. \\ &\left. \left. - \delta_{l2} \frac{\partial \omega_k}{\partial u_\beta} \right) \right] v_{\beta l} \end{aligned} \quad (4.2)$$

bağıntısını elde ederiz.

Yukarıdaki denklemlerde i, j, k, γ serbest endisler

olup 1, 2 değerlerini alabilirler. Bu durumda 16 denklem elde edilmesi gerekir. (i,j,k,γ) endisleri $(1,1,2,1)$, $(1,2,2,1)$, $(2,1,1,1)$, $(2,2,1,1)$ seçildiğinde aynı denklem çıkmaktadır:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_1}{\partial u_1} v_{12} + \frac{\partial \omega_1}{\partial u_2} v_{22} = 0 \quad (4.2.27)$$

Endisler $(2,1,2,2)$, $(2,2,2,2)$ olarak seçilirse

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} - v_{11} \frac{\partial \omega_1}{\partial u_2} - v_{12} \frac{\partial \omega_2}{\partial u_2} = 0 \quad (4.2.28)$$

denklemleri elde edilir. $(2,1,2,1)$ için

$$\begin{aligned} \mu u_1 = \Omega_1 + u_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - u_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - 2u_1 v_{12} \frac{\partial \omega_2}{\partial u_1} - u_1 v_{22} \frac{\partial \omega_2}{\partial u_2} \\ - u_1 v_{11} \frac{\partial \omega_1}{\partial u_1} - u_2 v_{12} \frac{\partial \omega_1}{\partial u_1} - u_2 v_{22} \frac{\partial \omega_1}{\partial u_2} \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

$(2,2,2,1)$ için ise

$$\begin{aligned} \mu u_2 = \Omega_2 + u_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - 2u_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - u_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - 3u_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial u_1} v_{12} \\ - u_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial u_2} v_{22} - u_1 v_{11} \frac{\partial \omega_2}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial u_2} v_{21} - u_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial u_2} v_{22} + u_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \\ + u_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial u_2} v_{21} \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

denklemleri elde edilir. Diğer 8 denklem ise $0=0$ şeklinde

özdeşliktir. Dolayısı ile bu denklem sisteminden bağımsız 4 denklem elde edebildik.

Şimdi (4.2.27)-(4.2.30) denklemlerinin getireceği sonuçlara bakalım. (4.2.27)'de eşitlik v_{12} , v_{22} cinsinden bir polinomdur. Bu polinomun sıfır olması için bütün katsayıları sıfır olmalıdır. Buradan kolayca

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial u_1} = 0 \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial u_2} = 0 \quad (4.2.31)$$

sonucunu elde ederiz. Bu ise ω_1 'in u_1 , u_2 , x_2 'den bağımsız olduğunu gösterir:

$$\omega_1 = \omega_1(x_1) \quad (4.2.32)$$

(4.2.28) v_{11} , v_{12} cinsinden bir polinomdur. Dolayısı ile

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} = 0 \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial u_2} = 0 \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial u_2} = 0 \quad (4.2.33)$$

elde ederiz. Bu ise Ω_1 ve ω_2 'deki bağımsız değişkenleri azaltır:

$$\Omega_1 = \Omega_1(x_1, x_2, u_1) \quad (4.2.34)$$

$$\omega_2 = \omega_2(x_1, x_2, u_1) \quad (4.2.35)$$

(4.2.32) (4.2.34) ve (4.2.35) geriye kalan (4.2.29) ve (4.2.30)'a uygulanırsa

$$\mu u_1 = \Omega_1 + u_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - 2u_1 v_{12} \frac{\partial \omega_2}{\partial u_1} \quad (4.2.36)$$

$$\begin{aligned} \mu u_2 = \Omega_2 + u_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - 2u_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - u_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - 3u_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial u_1} v_{12} - u_1 v_{11} \frac{\partial \omega_2}{\partial u_1} \\ + u_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

buluruz. Yukarıdaki denklemlerde μ elimine edilirse v_{12} cinsinden bir polinom elde edilir. v_{12} 'nin katsayısı sıfır olmalıdır.

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial u_1} = 0 \quad \omega_2 = \omega_2(x_1, x_2) \quad (4.2.38)$$

(4.2.37) de böylece

$$\mu u_2 = \Omega_2 + u_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - 2u_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - u_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \quad (4.2.39)$$

şeklinde yazılır.

Şimdi sıkışmazlık koşulu olan $v_{11} + v_{22} = 0$ denkleminin izovektör alanı üzerine getireceği kısıtlara bakalım. Bu kısıt izovektör alanında

$$V_{11} + V_{22} = 0 \quad (4.2.40)$$

olmasını sağlar. (4.1.61)'den

$$V_{\alpha i} = \frac{\partial \Omega_{\alpha}}{\partial x_i} - v_{\alpha m} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_i} + v_{\gamma i} \frac{\partial \Omega_{\alpha}}{\partial u_{\gamma}} - v_{\gamma i} v_{\alpha m} \frac{\partial \omega_m}{\partial u_{\gamma}} \quad (4.2.41)$$

yazabiliriz. (4.2.41)'de son terim yeni bulduğumuz sonuçlarla sıfırdır. Denklemden $\alpha=1, i=1, \alpha=2, i=2$

alırsak

$$V_{11} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} - \nu_{11} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} - \nu_{12} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \nu_{11} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} \quad (4.2.42)$$

$$V_{22} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} - \nu_{22} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \nu_{12} \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} + \nu_{22} \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} \quad (4.2.43)$$

elde ederiz. Bu iki terim (4.2.40)'a yerleştirilirse

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} - \nu_{11} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} - \nu_{12} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \nu_{11} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} + \nu_{11} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \\ & + \nu_{12} \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} - \nu_{11} \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

çıkar. (4.2.44) yazılırken $\nu_{22} = -\nu_{11}$ bağıntısı kullanılmıştır. Bu denklem ν_{11} , ν_{12} cinsinden polinomdur. Sırasıyla sabit terimler, ν_{12} katsayıları ve ν_{11} katsayıları sıfırdır:

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} = 0 \quad (4.2.45)$$

$$- \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} = 0 \quad (4.2.46)$$

$$- \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} = 0 \quad (4.2.47)$$

Buraya kadarki sonuçlar şöyle özetlenebilir:

$$\omega_1 = \omega_1(x_1) \quad (4.2.48)$$

$$\omega_2 = \omega_2(x_1, x_2) \quad (4.2.49)$$

$$\Omega_1 = \Omega_1(x_1, x_2, u_1) \quad (4.2.50)$$

$$\Omega_2 = \Omega_2(x_1, x_2, u_1, u_2) \quad (4.2.51)$$

$$\mu u_1 = \Omega_1 + u_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \quad (4.2.52)$$

$$\mu u_2 = \Omega_2 + u_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - 2u_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - u_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \quad (4.2.53)$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} = 0 \quad (4.2.54)$$

$$- \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} = 0 \quad (4.2.55)$$

$$- \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} = 0 \quad (4.2.56)$$

Simdi (4.2.13) denkleminde dönelim:

$$\begin{aligned} A + A_{\beta i} v_{\beta i} + 2A_{\beta \gamma i j} v_{\beta i} v_{\gamma j} + (A_{\gamma i j} + 2A_{\gamma \beta i k j} v_{\beta k}) v_{\gamma j i} = \mu \left[\frac{\partial \Sigma_i}{\partial v_{\gamma j}} v_{\gamma j i} \right. \\ \left. + \frac{\partial \Sigma_i}{\partial u_{\gamma}} v_{\gamma i} + \frac{\partial \Sigma_i}{\partial x_i} + \Sigma \right] \end{aligned} \quad (4.2.57)$$

Sağ tarafı incelersek (4.2.10)'daki Σ_i tanımından hemen

$$\frac{\partial \Sigma_i}{\partial v_{\gamma j}} = 0 \quad \frac{\partial \Sigma_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.2.58)$$

sonucunu çıkarırız. İkinci terim ise önceden hesaplanmıştı. (4.2.18)'den

$$\frac{\partial \Sigma_i}{\partial u_{\gamma}} = k v_{1\gamma 2} \delta_{i2} \quad (4.2.59)$$

sonucunu hemen yazabiliriz. Sol taraftaki A katsayılarının hesaplanması gerekmektedir. (4.1.81)'den

$$A_{\beta \gamma ijk} = \frac{\partial \Sigma_{ii}}{\partial v_{\beta k}} \frac{\partial \omega_{jj}}{\partial u_{\gamma}} = 0 \quad (4.2.60)$$

bulunur. (4.2.60)'ın sıfır olması (4.2.58)'in ilk denkleminde dolayısıdır. (4.1.80)'den

$$A_{\beta \gamma ij} = \frac{\partial \Sigma_{ii}}{\partial u_{i\beta}} \frac{\partial \omega_{jj}}{\partial u_{\gamma}} = 0 \quad (4.2.61)$$

çıkar. (4.2.61)'in sıfır olması ω 'ların u değişkeninden bağımsız olmasından dolayısıdır. Geriye kalan sıfır olmayan üç katsayıyı yani $A_{\beta i j}$, $A_{\beta i}$, A'yı inceleyelim. (4.1.78) (4.2.58) gözönüne alınarak yazılırsa

$$A_{\beta i j} = \frac{\partial V(\Sigma_i)}{\partial v_{\beta j}} \quad (4.2.62)$$

olur. (4.2.19)'u tekrar yazalım:

$$V(\Sigma_i) = k\delta_{i2} (\Omega_{\beta 1\beta 2} v_{1m2} + V_{1m2} u_m) \quad (4.2.63)$$

Bu ifadeyi $v_{\beta j}$ 'ye göre türetirsek

$$\frac{\partial V(\Sigma_i)}{\partial v_{\beta j}} = k\delta_{i2} u_m \frac{\partial V_{1m2}}{\partial v_{\beta j}} \quad (4.2.64)$$

buluruz. V_{1m2} 'yi (4.2.48) (4.2.51) şartlarını kullanarak yeniden yazalım:

$$V_{1m2} = \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_m \partial x_2} - v_{12} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_m \partial x_2} + v_{1m} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2 \partial u_1} + v_{12} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_m \partial u_1} + v_{1m2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - v_{1m2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - v_{112} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_m} + v_{1m} v_{12} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} \quad (4.2.65)$$

Yukarıdaki ifadeyi $v_{\beta j}$ 'ye göre türetilip (4.2.64)'e yerleştirir, sonrada bulunanı (4.2.62)'ye yerleştirirsek

$$A_{\beta i j} = k\delta_{i2} \delta_{\beta 1} u_m \left[-\delta_{j2} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_m \partial x_2} + \delta_{jm} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2 \partial u_1} + \delta_{j2} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_m \partial u_1} + \delta_{jm} v_{12} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} + \delta_{j2} v_{1m} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} \right] \quad (4.2.66)$$

çıkar. Şimdi Σ_i 'nin x_j 'den, ω_i 'nin de u_β 'dan bağımsız olduğunu gözönüne alarak (4.1.77)'den $A_{\beta i}$ şöyle yazılabilir:

$$A_{\beta i} = \frac{\partial V(\Sigma_i)}{\partial u_\beta} + \frac{\partial \Sigma_i}{\partial u_\beta} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \Sigma_j}{\partial u_\beta} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \quad (4.2.67)$$

(4.2.63) tekrar yazılırsa

$$V(\Sigma_i) = k\delta_{i2} (\Omega_\alpha v_{1\alpha 2} + V_{1m2} u_m) \quad (4.2.68)$$

olur. (4.2.68)'in u_β 'ya göre türevini alalım:

$$\frac{\partial V(\Sigma_i)}{\partial u_\beta} = k\delta_{i2} \left[\frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial u_\beta} v_{1\alpha 2} + \delta_{\beta m} V_{1m2} + u_m \frac{\partial V_{1m2}}{\partial u_\beta} \right] \quad (4.2.69)$$

(4.2.65)'in u_β 'ya göre türevini alıp (4.2.69)'a yerleştirirsek

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\Sigma_i)}{\partial u_\beta} = k\delta_{i2} & \left[\frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial u_\beta} v_{1\alpha 2} + \delta_{\beta m} \left(\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_m \partial x_2} - v_{12} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_m \partial x_2} + v_{1m} \right. \right. \\ & \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2 \partial u_1} + v_{12} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_m \partial u_1} + v_{1m2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - v_{1m2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - v_{112} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_m} + v_{1m} \\ & \left. \left. v_{12} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} \right) + u_m \left(\frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial x_m \partial x_2 \partial u_\beta} + v_{1m} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial x_2 \partial u_1 \partial u_\beta} + v_{12} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial x_m \partial u_1 \partial u_\beta} \right. \right. \\ & \left. \left. + v_{1m2} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial u_\beta} + v_{1m} v_{12} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^2 \partial u_\beta} \right) \right] \quad (4.2.70) \end{aligned}$$

buluruz. (4.2.59), (4.2.70), (4.2.67)'ye yerleştirilir ve terimler düzenlenirse

$$\begin{aligned} A_{\beta i} = k\delta_{i2} & \left[\frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial u_\beta} v_{1\alpha 2} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_\beta \partial x_2} - v_{12} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_m \partial x_2} + v_{1\beta} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2 \partial u_1} + v_{12} \right. \\ & \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_\beta \partial u_1} + v_{1\beta 2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - v_{1\beta 2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - v_{112} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_\beta} + v_{1\beta} v_{12} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} + \end{aligned}$$

$$u_m \left[\frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial x_m \partial x_2 \partial u_\beta} + v_{1m} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial x_2 \partial u_1 \partial u_\beta} + v_{12} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial x_m \partial u_1 \partial u_\beta} + v_{1m2} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial u_\beta} \right. \\ \left. + v_{1m} v_{12} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^2 \partial u_\beta} \right] + k \left[v_{1\beta 2} \delta_{i2} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} - v_{1\beta 2} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2} \right] \quad (4.2.71)$$

elde edilir. Son olarak A katsayısını hesaplayalım. (4.1.76)'dan $\partial \Sigma_i / \partial x_j = 0$ alınarak

$$A = V(\Sigma) + \frac{\partial V(\Sigma_i)}{\partial x_i} + \Sigma \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \quad (4.2.72)$$

bulunur. Ortadaki terim (4.2.63)'ün türevi alınarak hesaplanabilir:

$$\frac{\partial V(\Sigma_i)}{\partial x_i} = k \left[\frac{\partial \Omega_\beta}{\partial x_2} v_{1\beta 2} + \frac{\partial V_{1m2}}{\partial x_2} u_m \right] \quad (4.2.73)$$

(4.2.65)'de V_{1m2} 'nin x_2 'ye göre türevi alınıp (4.2.73)'e yerleştirilirse

$$\frac{\partial V(\Sigma_i)}{\partial x_i} = k \left[\frac{\partial \Omega_\beta}{\partial x_2} v_{1\beta 2} + u_m \left[\frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial x_m \partial x_2^2} - v_{12} \frac{\partial^3 \omega_2}{\partial x_m \partial x_2^2} + v_{1m} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2^2} \right. \right. \\ \left. v_{12} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_m \partial x_2} + v_{1m2} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} - v_{1m2} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} - v_{122} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_m \partial x_2} + v_{1m} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^2 \partial x_2} \right] \right] \quad (4.2.74)$$

olur. Şimdi $V(\Sigma)$ 'yi hesaplayalım:

$$V(\Sigma) = \omega_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial x_1} + \Omega_\beta \frac{\partial \Sigma}{\partial u_\beta} + V_{\beta i} \frac{\partial \Sigma}{\partial v_{\beta i}} + V_{\beta i j} \frac{\partial \Sigma}{\partial v_{\beta i j}} \quad (4.2.75)$$

İlk terimde $\partial \Sigma / \partial x_2 = 0$ olur. (4.2.11)'den Σ 'nin türevlerini hesaplırsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial x_1} &= k(4Q'' u_1 v_{122} - 2Q'' v_{12}^2) - \frac{2}{q^3} q' (v_{122} - u_1 v_{11} + (1-u_1)^2 \\ &Q' - u_2 v_{12}) + (1-u_1^2) \frac{Q''}{q^2} \end{aligned} \quad (4.2.76)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial u_\beta} = 4kQ' \delta_{\beta 1} v_{122} + \frac{1}{q^2} (-\delta_{\beta 1} v_{11} - 2u_1 \delta_{\beta 1} Q' - \delta_{\beta 2} v_{12}) \quad (4.2.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial v_{\beta i}} &= k(2\delta_{\beta 1} \delta_{i 1} v_{122} - 2\delta_{\beta 1} \delta_{i 2} v_{112} - 4Q' v_{12} \delta_{\beta 1} \delta_{i 2}) + \frac{1}{q^2} (-u_1 \\ &\delta_{\beta 1} \delta_{i 1} - u_2 \delta_{\beta 1} \delta_{i 2}) \end{aligned} \quad (4.2.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial v_{\beta i j}} &= k(2v_{11} \delta_{\beta 1} \delta_{i 2} \delta_{j 2} - 2v_{12} \delta_{\beta 1} \delta_{i 1} \delta_{j 2} + 4Q' u_1 \delta_{\beta 1} \delta_{i 2} \delta_{j 2} + \frac{1}{q^2} \\ &\delta_{\beta 1} \delta_{i 2} \delta_{j 2} \end{aligned} \quad (4.2.79)$$

elde ederiz. (4.2.76)-(4.2.79) ifadeleri (4.2.75)'e yerleştirilir, (4.2.75) ve (4.2.74) (4.2.72)'ye yerleştirilirse sonuçta

$$A = \omega_1 \left[k(4Q'' u_1 v_{122} - 2Q'' v_{12}^2) - \frac{2}{q^3} q' (v_{122} - u_1 v_{11} + (1-u_1)^2 \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left[Q' - u_2 v_{12} + (1 - u_1^2) \frac{Q''}{q^2} \right] + \Omega_1 \left[4kQ' v_{122} - \frac{v_{11}}{q^2} - 2 \frac{u_1}{q^2} Q' \right] - \Omega_2 \frac{v_{12}}{q^2} \\
 & + \left[\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} - v_{1j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} + v_{1i} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} \right] \left[k (2\delta_{i1} v_{122} - 2\delta_{i2} v_{112} - 4Q' v_{12} \right. \\
 & \left. \delta_{i2}) - \frac{1}{q^2} (u_1 \delta_{i1} + u_2 \delta_{i2}) \right] + \left[\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_i \partial x_2} - v_{12} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_i \partial x_2} + v_{1i} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2 \partial u_1} \right. \\
 & \left. + v_{12} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_i \partial u_1} + v_{1i2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - v_{1i2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - v_{1i2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} + v_{1i} v_{12} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} \right. \\
 & \left. \right] \left[-2k v_{12} \delta_{i1} + (2k v_{11} + 4kQ' u_1 + \frac{1}{q^2}) \delta_{i2} \right] + k \left[\frac{\partial \Omega_\beta}{\partial x_2} v_{1\beta 2} + u_m \right. \\
 & \left[\frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial x_m \partial x_2^2} - v_{12} \frac{\partial^3 \omega_2}{\partial x_m \partial x_2^2} + v_{1m} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2^2} + v_{12} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_m \partial x_2} \right. \\
 & \left. + v_{1m2} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} - v_{1m2} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} - v_{122} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_m \partial x_2} + v_{1m} v_{12} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^2 \partial x_2} \right] \\
 & + \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \left[k \left(2v_{11} v_{122} - 2v_{12} v_{112} + 4Q' u_1 v_{122} - 2Q' (v_{12})^2 \right) + \frac{1}{q^2} \right. \\
 & \left. \left[v_{122} - u_1 v_{11} + (1 - u_1^2) Q' - u_2 v_{12} \right] \right] \quad (4.2.80)
 \end{aligned}$$

olur. Böylece (4.2.57)'deki bütün terimler hesaplanmış

durumdadır. (4.2.52)'den μ 'yu (4.2.59)'dan $\frac{\partial \Sigma_i}{\partial u_\gamma}$ 'yı,

(4.2.11)'den Σ 'yı, (4.2.66)'dan $A_{\beta ij}$ 'yi (4.2.71)'den

$A_{\beta i}$ 'yi ve son olarak da (4.2.80)'den A 'yı (4.2.57)'ye yerleştirir. terimleri düzenler, indisleri açarsak sonuçta aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\Omega_1}{u_1} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right] \left[k \left(v_{11} v_{122} - v_{12} v_{112} + 4 Q' u_1 v_{122} - 2 Q' \right. \right. \\ & \left. \left. (v_{12})^2 \right) + \frac{1}{q^2} \left(v_{122} - u_1 v_{11} + (1-u_1^2) Q' - u_2 v_{12} \right) \right] = \omega_1 \left[k \left(4 \right. \right. \\ & \left. \left. Q'' u_1 v_{122} - 2 Q'' (v_{12})^2 \right) - 2 \frac{q'}{q^3} \left(v_{122} - u_1 v_{11} + (1-u_1^2) Q' - u_2 \right. \right. \\ & \left. \left. v_{12} \right) + (1-u_1^2) \frac{Q''}{q^2} \right] + \Omega_1 \left[4k Q' v_{122} - \frac{v_{11}}{q^2} - \frac{2u_1}{q^2} Q' \right] - \Omega_2 \\ & \frac{v_{12}}{q^2} + 2k v_{122} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} - 2k v_{122} v_{11} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + 2k v_{11} v_{122} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} \\ & - \frac{u_1}{q^2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{u_1}{q^2} v_{11} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{u_1}{q^2} v_{12} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{u_1}{q^2} v_{11} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} \\ & - 2k v_{112} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} + k v_{112} v_{12} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - 4k Q' v_{12} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} + 4k Q' (v_{12})^2 \\ & \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - 4k Q' (v_{12})^2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - \frac{u_2}{q^2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} + \frac{u_2}{q^2} v_{12} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - \frac{u_2}{q^2} \\ & v_{12} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - 2k v_{12} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1 \partial x_2} + k (v_{12})^2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_1 \partial x_2} - 2k v_{12} v_{11} \\ & \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2 \partial u_1} - 2k (v_{12})^2 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1 \partial u_1} - 2k v_{12} v_{112} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + k v_{12} v_{112} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \\ & + k v_{12} v_{112} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} - 2k v_{11} (v_{12})^2 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} + k v_{11} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2^2} - k v_{11} v_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} + 4k v_{11} v_{12} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} + k v_{11} v_{122} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - 2k v_{11} v_{122} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \\
 & 2k v_{11} (v_{12})^2 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} + \left[4k Q' u_1 + \frac{1}{q^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2^2} - v_{12} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} + 2v_{12} \right. \\
 & \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} + v_{122} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - 2v_{122} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + (v_{12})^2 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} + \frac{1}{q^2} \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right] (v_{122} - u_1 v_{11} + (1 - u_1^2) Q' - u_2 v_{12}) + k \left[\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} v_{112} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right. \\
 & v_{122} + u_1 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} - u_1 v_{12} \frac{\partial^3 \omega_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} + u_1 v_{11} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2^2} + 2u_1 v_{12} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_1 \partial x_2} \\
 & + u_1 v_{112} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} - u_1 v_{112} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} - u_1 v_{122} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_1 \partial x_2} + u_1 v_{11} v_{12} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^2 \partial x_2} \\
 & + u_2 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial x_2^3} - u_2 v_{12} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^3} + 3u_2 v_{12} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2^2} + u_2 v_{122} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} - 2u_2 \\
 & v_{122} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} + u_2 (v_{12})^2 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^2 \partial x_2} + \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right] (v_{11} v_{122} - v_{12} \\
 & v_{112} + 4Q' u_1 v_{122} - 2Q' (v_{12})^2) + v_{12} \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} v_{122} + v_{22} v_{122} \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} + v_{12} \\
 & \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1 \partial x_2} + v_{22} v_{12} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} + (v_{12})^2 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_1} - v_{12} v_{122} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + u_1 v_{12} \\
 & v_{11} \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^2 \partial x_2} + u_1 (v_{12})^2 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^2 \partial x_1} + u_1 v_{12} v_{112} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} + u_1 v_{11} (v_{12})^2 \\
 & \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^3} + 2u_2 (v_{12})^2 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^2 \partial x_2} + u_2 v_{12} v_{122} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} + u_2 (v_{12})^3 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -v_{22}v_{122} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - u_1v_{122} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_1 \partial x_2} + u_1v_{112} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} + u_1v_{122} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_1} \\
 & + u_1v_{12}v_{112} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} + u_1v_{11}v_{122} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} - u_2v_{122} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} + 2u_2v_{122} \\
 & \left[\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} + 2u_2v_{12}v_{122} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} \right] \quad (4.2.81)
 \end{aligned}$$

(4.2.81) v_{ij} ve v_{ijk} cinsinden bir polinomdur. Dolayısı ile katsayılarının sıfır olması gerekmektedir. Tek tek her değişken için katsayıların sıfır olması şartını yazalım. Aşağıda her bir değişken ve ona ait katsayı denklemi sırası ile yazılmıştır:

$$((v_{12})^3) \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^3} = 0 \quad (4.2.82)$$

$$(v_{12}v_{11}) 2u_1 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} = 0 \quad (4.2.83)$$

$$(v_{11}(v_{12})^2) \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^3} = 0 \quad (4.2.84)$$

$$(v_{112}) 2u_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} - u_1 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} = 0 \quad (4.2.85)$$

$$(v_{12}v_{112}) 2u_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + \frac{\Omega_1}{u_1} = 0 \quad (4.2.86)$$

$$(v_{11}v_{122}) u_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} + 2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} - \frac{\Omega_1}{u_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} = 0 \quad (4.2.87)$$

$$(\nu_{12} \nu_{122}) \quad 3u_2 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} = 0 \quad (4.2.88)$$

$$(\nu_{11}) \quad ku_1 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2^2} + k \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2^2} - 2 \frac{u_1}{q^2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + 2 \frac{q'}{q^3} u_1 \omega_1 = 0 \quad (4.2.89)$$

$$(\text{sabitler}) \left(\frac{\Omega_1}{u_1} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right) \frac{1}{q^2} (1-u_1)^2 Q' = -2 \frac{q'}{q^3} \omega_1$$

$$\begin{aligned} & (1-u_1)^2 Q' + \omega_1 (1-u_1)^2 \frac{Q''}{q^2} - 2 \frac{u_1}{q^2} Q' \Omega_1 - \frac{u_1}{q^2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} - \frac{u_2}{q^2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \\ & + \left(4kQ' u_1 + \frac{1}{q^2} \right) \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{q^2} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right) (1-u_1^2) Q' + ku_1 \\ & \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + ku_2 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial x_2^3} \end{aligned} \quad (4.2.90)$$

$$\begin{aligned} & (\nu_{122}) \quad 3ku_2 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} + ku_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_1} + 4kQ' u_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} - 3ku_2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} - \\ & 2ku_1 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_1 \partial x_2} + k \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} + \frac{1}{q^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + 2k \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} - 2 \frac{q'}{q^3} \omega_1 + 4kQ'' \\ & \omega_1 u_1 - \frac{1}{q^2} \frac{\Omega_1}{u_1} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.91)$$

$$\begin{aligned} & (\nu_{12}) \quad 3ku_2 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2^2} + 2ku_1 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_1 \partial x_2} - ku_2 \frac{\partial^3 \omega_2}{\partial x_2^3} - ku_1 \frac{\partial^3 \omega_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \\ & 2 \left(4kQ' u_1 + \frac{1}{q^2} \right) \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} - \left(4kQ' u_1 + \frac{1}{q^2} \right) \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} - k \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \end{aligned}$$

$$\frac{u_2}{q^2} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right) - 4kQ' \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} + \frac{u_1}{q^2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\Omega_2}{q^2} + 2 \frac{q'}{q^3}$$

$$u_2 \omega_1 + \frac{u_2}{u_1} \frac{\Omega_1}{q^2} = 0 \quad (4.2.92)$$

$$((\omega_{12})^2) 3ku_2 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^2 \partial x_2} + ku_1 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^2 \partial x_1} + \left(4kQ' u_1 + \frac{1}{q^2} \right) \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2}$$

$$-k \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_1} - 2kQ' \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + k \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_1 \partial x_2} - 2kQ' \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - 2kQ'' \omega_1 + 2kQ'$$

$$\frac{\Omega_1}{u_1} = 0 \quad (4.2.93)$$

Böylece en baştan itibaren elde ettiğimiz sonuçları ve bağımsız denklemleri şöyle özetleyebiliriz:

$$\omega_1 = \omega_1(x_1) \quad \omega_2 = \omega_2(x_1, x_2) \quad \Omega_1 = \Omega_1(x_1, x_2, u_1)$$

$$\Omega_2 = \Omega_2(x_1, x_2, u_1, u_2) \quad (4.2.94)$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \quad (4.2.95)$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} = 0 \quad (4.2.96)$$

$$- \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} = 0 \quad (4.2.97)$$

$$\frac{u_2}{u_1} \Omega_1 = \Omega_2 - u_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - u_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \quad (4.2.98)$$

$$\frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^3} = 0 \quad (4.2.99)$$

$$2u_1 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2 \partial u_1} - \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} = 0 \quad (4.2.100)$$

$$2u_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} - u_1 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} = 0 \quad (4.2.101)$$

$$2u_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + \frac{\Omega_1}{u_1} = 0 \quad (4.2.102)$$

$$u_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} + 2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} - \frac{\Omega_1}{u_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} = 0 \quad (4.2.103)$$

$$3u_2 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} = 0 \quad (4.2.104)$$

$$ku_1 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2^2} + k \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2^2} - 2 \frac{u_1}{q^2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + 2 \frac{q'}{q^3} u_1 \omega_1 = 0 \quad (4.2.105)$$

$$\left[\frac{\Omega_1}{u_1} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right] \frac{1}{q^2} (1-u_1)^2 Q' = -2 \frac{q'}{q^3} \omega_1 (1-u_1^2) Q' + \omega_1$$

$$(1-u_1)^2 \frac{Q''}{q^2} - 2 \frac{u_1}{q^2} Q' \Omega_1 - \frac{u_1}{q^2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} - \frac{u_2}{q^2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} + \left[4kQ' u_1 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{q^2} \right] \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{q^2} \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right] (1-u_1^2) Q' + ku_1 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + ku_2$$

$$\frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial x_2^3} \quad (4.2.106)$$

$$\begin{aligned} & 3ku_2 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} + ku_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_1} + 4kQ' u_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} - 3ku_2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} - 2ku_1 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ & + k \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} + \frac{1}{q^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + 2k \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} - 2 \frac{q'}{q^3} \omega_1 + 4kQ'' \omega_1 u_1 - \frac{1}{q^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\Omega_1}{u_1} = 0 \quad (4.2.107)$$

$$\begin{aligned} & 3ku_2 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^2 \partial x_2} + ku_1 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1^2 \partial x_1} + \left(4kQ' u_1 + \frac{1}{q^2} \right) \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} - k \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_1} - 2kQ' \\ & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + k \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_1 \partial x_2} - 2kQ' \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - 2kQ'' \omega_1 + 2kQ' \frac{\Omega_1}{u_1} = 0 \quad (4.2.108) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3ku_2 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2^2} + 2ku_1 \frac{\partial^3 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_1 \partial x_2} - ku_2 \frac{\partial^3 \omega_2}{\partial x_2^3} - ku_1 \frac{\partial^3 \omega_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \\ & 2 \left(4kQ' u_1 + \frac{1}{q^2} \right) \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1 \partial x_2} - \left(4kQ' u_1 + \frac{1}{q^2} \right) \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} - k \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \\ & \frac{u_2}{q^2} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right) - 4kQ' \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} + \frac{u_1}{q^2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\Omega_2}{q^2} + 2 \frac{q'}{q^3} \\ & u_2 \omega_1 + \frac{u_2}{u_1} \frac{\Omega_1}{q^2} = 0 \quad (4.2.109) \end{aligned}$$

4.3-İZOVEKTÖR ALAN DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu kısımda geçen kısmın sonunda özetlediğimiz denklemleri çözerek izovektör alanını bulmaya çalışacağız. (4.2.95)'i u_1 ve u_2 'ye göre türetirsek

$$\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial u_1 \partial u_2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial u_1^2} = 0 \quad (4.3.1)$$

sonuçlarını elde ederiz. (4.2.96)'yı u_2 'ye göre türetirsek $\Omega_1 = \Omega_1(x_1, x_2, u_1)$ 'den dolayı

$$\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_2 \partial u_2} = 0 \quad (4.3.2)$$

olur. (4.2.97)'yi yine u_2 'ye göre türetirsek

$$\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial u_2^2} = 0 \quad (4.3.3)$$

elde ederiz. (4.3.3)'den hemen Ω_2 için

$$\Omega_2 = A(x_1, x_2, u_1) u_2 + B(x_1, x_2, u_1) \quad (4.3.4)$$

yazabiliriz. (4.3.1)'deki ikinci denkleme koyarsak

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u_1^2} u_2 + \frac{\partial^2 B}{\partial u_1^2} = 0 \quad (4.3.5)$$

Yukarıdaki ifade u_2 cinsinden bir polinomdur. Dolayısı ile katsayılarının sıfır olması gerekmektedir. Buradan

$$A = C(x_1, x_2) u_1 + D(x_1, x_2) \quad (4.3.6)$$

$$B = E(x_1, x_2) u_1 + F(x_1, x_2) \quad (4.3.7)$$

sonuçlarını çıkarabiliriz. (4.3.6) ve (4.3.7), (4.3.4)'e yerleştirilirse

$$\Omega_2 = C(x_1, x_2)u_1u_2 + D(x_1, x_2)u_2 + E(x_1, x_2)u_1 + F(x_1, x_2) \quad (4.3.8)$$

buluruz. Bu ifadeyi (4.3.1)'deki birinci denkleme yerleştirirsek

$$C(x_1, x_2) = 0 \quad (4.3.9)$$

çıkar. Böylece Ω_2 'nin yapısı

$$\Omega_2 = D(x_1, x_2)u_2 + E(x_1, x_2)u_1 + F(x_1, x_2) \quad (4.3.10)$$

olur. (4.3.10) (4.3.2)'ye yerleştirilirse

$$\frac{\partial D}{\partial x_2} = 0 \quad (4.3.11)$$

$$\Omega_2 = D(x_1)u_2 + E(x_1, x_2)u_1 + F(x_1, x_2) \quad (4.3.12)$$

elde edilir. (4.3.97)'yi u_1 'e göre türetirsek

$$\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_1^2} = 0 \quad (4.3.13)$$

elde ederiz. Buradan Ω_1 'in u_1 cinsinden lineer olması gerektiğini görebiliriz:

$$\Omega_1 = G(x_1, x_2)u_1 + H(x_1, x_2) \quad (4.3.14)$$

Şimdi (4.3.14) ve (4.3.10)'da verilen Ω_1 ve Ω_2 için yapıları (4.2.98)'e yerleştirirsek u_1 ve u_2 cinsinden bir polinom elde ederiz:

$$G(x_1, x_2)u_1u_2 + H(x_1, x_2)u_2^2 = D(x_1)u_1u_2 + E(x_1, x_2)u_1^2 + F(x_1, x_2)u_1 -$$

$$u_1u_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - u_1^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + u_1u_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \quad (4.3.15)$$

Polinomun her keyfi u_1, u_2 için eşitlenebilmesi için katsayılarınının eşit olması gerekmektedir:

$$(u_1^2) \quad E(x_1, x_2) - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} = 0 \quad (4.3.16)$$

$$(u_2) \quad H(x_1, x_2) = 0 \quad (4.3.17)$$

$$(u_1) \quad F(x_1, x_2) = 0 \quad (4.3.18)$$

$$(u_1, u_2) \quad G(x_1, x_2) = D(x_1) - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \quad (4.3.19)$$

(4.2.99) denklemi ise kendiliğinden sağlanmaktadır. Böylece ilk beş denklemden elde ettiğimiz sonuçları özetlersek

$$\omega_1 = \omega_1(x_1) \quad (4.3.20)$$

$$\omega_2 = \omega_2(x_1, x_2) \quad (4.3.21)$$

$$\Omega_1 = G(x_1, x_2)u_1 \quad (4.3.22)$$

$$\Omega_2 = D(x_1)u_2 + E(x_1, x_2)u_1 \quad (4.3.23)$$

$$E(x_1, x_2) = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \quad (4.3.24)$$

$$G(x_1, x_2) = D(x_1) - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \quad (4.3.25)$$

olur. Yukarıdaki sonuçları (4.2.100)'e yerleştirirsek

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} = 0 \quad (4.3.26)$$

$$G(x_1, x_2) = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + I(x_1) \quad (4.3.27)$$

sonucuna varırız. (4.3.27), (4.3.25)'e yerleştirilip x_2 'ye göre türetilirse

$$\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} = 0 \quad (4.3.28)$$

$$\omega_2 = c_1(x_1)x_2 + c_2(x_1) \quad (4.3.29)$$

bulunur. (4.3.29), (4.3.27)'ye yerleştirilirse

$$G(x_1) = c_1(x_1) + I(x_1) \quad (4.3.30)$$

olur. Böylece Ω_1, x_2 'den bağımsız çıkar:

$$\Omega_1 = \Omega_1(x_1, u_1) = G(x_1)u_1 \quad (4.3.31)$$

(4.3.31), (4.2.101)'e yerleştirilirse sonuçta

$$\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2^2} = 0 \quad (4.3.32)$$

elde edilir. Bu ise (4.3.28)'de verilen bilginin aynısıdır. (4.2.102) de bize yeni bir bilgi vermemektedir. (4.2.103)'e elde edilen yapılar yerleştirilirse

$$2G(x_1) - D(x_1) - G(x_1) - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + c_1(x_1) = 0 \quad (4.3.33)$$

$$G(x_1) - D(x_1) + c_1(x_1) = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \quad (4.3.34)$$

elde edilir. (4.2.104) denklemi bize yeni bilgiler vermemektedir. (4.2.105)'den

$$\omega_1 = \frac{c_1(x_1)}{Q'} \quad (4.3.35)$$

elde edilir. Böylece ilk 11 denklem için sonuçlar şöyle özetlenebilir:

$$\omega_1 = \frac{c_1(x_1)}{Q'} \quad (4.3.36)$$

$$\omega_2 = c_1(x_1)x_2 + c_2(x_1) \quad (4.3.37)$$

$$\Omega_1 = G(x_1)u_1 \quad (4.3.38)$$

$$\Omega_2 = D(x_1)u_2 + E(x_1, x_2)u_1 \quad (4.3.39)$$

$$E(x_1, x_2) = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \quad (4.3.40)$$

$$G(x_1) - D(x_1) + c_1(x_1) = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \quad (4.3.41)$$

Bu bulduğumuz sonuçları (4.2.106)'ya yerleştirirsek

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^2} \left[2G(x_1) - c_1(x_1) \right] (1-u_1^2)Q' &= -2 \frac{q'}{q^3} c_1(x_1) (1-u_1^2) + \frac{c_1(x_1)}{Q'} \\ (1-u_1^2) \frac{Q''}{q^2} - 2 \frac{u_1^2}{q^2} Q' G(x_1) - \frac{u_1^2}{q^2} \frac{dG(x_1)}{dx_1} &+ \frac{1}{q^2} \left[\left(\frac{c_1}{Q'} \right)' + c_1 \right] \\ (1-u_1^2)Q' & \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

buluruz. (4.3.42) u_1 'e göre polinomdur. Dolayısı ile katsayıların sıfır olması gerekmektedir:

$$\frac{1}{q^2} \left[2G(x_1) - c_1(x_1) \right] Q' = -2 \frac{q'}{q^3} c_1(x_1) + \frac{c_1(x_1)}{Q'} \frac{Q''}{q^2} + \frac{1}{q^2}$$

$$\left[\left[\frac{c_1}{Q'} \right]' + c_1 \right] Q' \quad (4.3.43)$$

$$\begin{aligned} (u_1^2) - \frac{1}{q^2} \left[2G(x_1) - c_1(x_1) \right] Q' &= 2 \frac{q'}{q^3} c_1(x_1) - \frac{c_1(x_1)}{Q'} \frac{Q'}{q^2} \\ - \frac{1}{q^2} \left[\left[\frac{c_1}{Q'} \right]' + c_1 \right] Q' - \frac{2}{q^2} Q' G(x_1) &= \frac{1}{q^2} \frac{dG(x_1)}{dx_1} \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

(4.3.43) ve (4.3.44) denklemlerini toplarsak

$$\frac{dG(x_1)}{dx_1} + Q' G(x_1) = 0 \quad (4.3.45)$$

çıkar. $Q' = \frac{q'}{q}$ olduğu hatırlanırsa (4.3.45)'in integre edilmesi ile

$$G(x_1) = \frac{c_3}{q} \quad (4.3.46)$$

elde edilir. (4.3.46), (4.3.43)'e yerleştirilirse

$$c_1' = 2c_3 \frac{q'}{q^2} \quad (4.3.47)$$

sonucu çıkar.

Şu ana kadar elde ettiğimiz sonuçları (4.2.108)'e yerleştirip sadeleştirmeleri yaparsak

$$c_1' = c_3 \frac{q'}{q^2} \quad (4.3.48)$$

sonucunu elde ederiz. Bu durumda (4.3.48) ile (4.3.47)'nin eşit olması gerekmektedir:

$$2c_3 \frac{q'}{q^2} = c_3 \frac{q'}{q^2} \quad (4.3.49)$$

Bu ise iki şekilde mümkündür. a) $q' = 0$ b) $c_3 = 0$
Her iki durum için de c_1 bir sabit olmaktadır. İki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

a) $q' = 0$ veya $q = \text{sabit}$.

İlk on denklem sonuçlarını yeniden yazarsak

$$\omega_1 = \omega_1(x_1) \quad (4.3.50)$$

$$\omega_2 = c_1(x_1)x_2 + c_2(x_1) \quad (4.3.51)$$

$$\Omega_1 = G(x_1)u_1 \quad (4.3.52)$$

$$\Omega_2 = D(x_1)u_2 + E(x_1, x_2)u_1 \quad (4.3.53)$$

$$E(x_1, x_2) = c'_1 x_2 + c'_2 \quad (4.3.54)$$

$$G(x_1) - D(x_1) + c_1(x_1) = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \quad (4.3.55)$$

Onbirinci denklemden yani (4.2.105)'den

$$-2 \frac{u_1}{q^2} c_1(x_1) = 0 \quad (4.3.56)$$

elde ederiz. Böylece $c_1(x_1) = 0$ sonucunu hemen görebiliriz.
(4.2.106)'dan

$$0 = - \frac{u_1}{q^2} G' u_1 \quad (4.3.57)$$

Buradan da $G' = 0$ veya $G = \text{sabit}$ sonucunu çıkarabiliriz.
(4.2.107)'den

$$\frac{d\omega_1}{dx_1} = G \quad (4.3.58)$$

$$\omega_1 = Gx_1 + H \quad (4.3.59)$$

bulunur. Buraya kadar bulunan sonuçlar son iki denklemi sağlamakta ve yeni bilgi vermemektedir. Dolayısı ile $q = \text{sabit}$ hali için izovektör alanı son hali ile şöyledir:

$$\omega_1 = Gx_1 + H \quad (4.3.60)$$

$$\omega_2 = c_2(x_1) \quad (4.3.61)$$

$$\Omega_1 = G u_1 \quad (4.3.62)$$

$$\Omega_2 = c'_2(x_1) u_1 \quad (4.3.63)$$

Şimdi ikinci hal olan $c_3 = 0$ 'ı inceleyelim.

b) $c_3 = 0$

$c_3 = 0$ c_1 'in (4.3.48)'den dolayı sabit olmasını gerektiriyor. Bu durum için elde edilen bilgiler özetlenirse

$$\omega_1 = \frac{c_1}{Q'} \quad (4.3.64)$$

$$\omega_2 = c_1 x_2 + c_2(x_1) \quad (4.3.65)$$

$$\Omega_1 = 0 \quad (4.3.66)$$

$$\Omega_2 = D(x_1)u_2 + c'_2(x_1)u_1 \quad (4.3.67)$$

olur. (4.3.64)- (4.3.67) kullanılmayan (4.2.107)'ye yerleştirilirse q için

$$q''q + q'^2 = 0 \quad (4.3.68)$$

denklemini çıkar. (4.3.68) integre edilirse

$$q = \alpha (x_1 + \beta)^{1/2} \quad (4.3.69)$$

sonucunu elde ederiz. Burada α, β sabitleridir. $x_1 = 0$ 'da $q = 0$ şartını alırsak akışkanın durma noktasını $\phi = 0$ alırız ki bu da genellikle bir kayba sebep olmaz:

$$q = \alpha(x_1)^{1/2} \quad (4.3.70)$$

En son denklem (4.2.109)'u kullanırsak

$$D = -c_1 \quad (4.3.71)$$

sonucunu elde ederiz. Böylece ikinci hal için şu sonuçlar elde edilmiş olur:

$$\omega_1 = 2c_1 x_1 \quad (4.3.72)$$

$$\omega_2 = c_1 x_2 \quad (4.3.73)$$

$$\Omega_1 = 0 \quad (4.3.74)$$

$$\Omega_2 = -c_1 u_2 \quad (4.3.75)$$

$$q = \alpha(x_1)^{1/2} \quad (4.3.76)$$

$c_2(x_1)$ keyfi katsayıları $q = \text{sabit}$ durumunda görünmekteydiler. $\beta = 0$ alarak bu hali göz önüne almadığımız için $q = \alpha(x_1)^{1/2}$ için son durumu yukarıdaki gibi yazdık. Böylece (4.3.60)-(4.3.63) ve (4.3.72)-(4.3.76) en genel izovektör alanı olur. Bu izovektör alanından birbirinden bağımsız izovektörleri yazalım:

$$(V_1) \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad q = \text{sabit} \quad (4.3.77)$$

$$(V_2) \quad \omega_1 = x_1, \quad \omega_2 = 0, \quad \Omega_1 = u_1, \quad \Omega_2 = 0, \quad q = \text{sabit} \quad (4.3.78)$$

$$(V_3) \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = c_2(x_1), \quad \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = c_2'(x_1)u_1, \quad q = \text{sabit} \quad (4.3.79)$$

$$(V_4) \quad \omega_1 = 2x_1, \quad \omega_2 = x_2, \quad \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = -u_2 \quad q = \alpha(x_1)^{1/2} \quad (4.3.80)$$

(4.3.77)'de birinci izovektör $q=\text{sabit}$ hali için x_1 koordinatı yönünde öteleme yapabileceğimizi gösterir. $q=\text{sabit}$ düz plak'a karşılık gelmekteydi. Dolayısıyla bize yeni bir bilgi vermez. (4.3.78) x_1 ve u_1 için bir ölçekleme getirmektedir. Buradan kullanabileceğimiz bir çözüm çıkmamaktadır. (4.3.79)'daki izovektörde görülen keyfi fonksiyon ise yine kullanabileceğimiz bir çözüme götürmemektedir. (4.3.80) ise bizi trivial olmayan benzerlik çözümlerine götürecek bir izovektördür.

4.4-BENZERLİK ÇÖZÜMLERİNE AİT DENKLEMLER

Bu bölümde benzerlik çözümlerine götüren adi diferansiyel denklemleri çıkaracağız. Önce (4.3.80) izovektörünü kısım 4.2'de verilen eski notasyona çevirirsek

$$V_4 = 2\phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \psi \frac{\partial}{\partial \psi} - W_\psi \frac{\partial}{\partial W_\psi} \quad (4.4.1)$$

elde edriz. V_4 izovektöründen benzerlik çözümlerini elde edbilmek için bu vektörü formlarla çarpıp sıfıra eşitlememiz gerekir, [19]. Sadece σ^1 , σ^2 formlarının alınması yeterli olmaktadır.

$$V_4 \lrcorner \sigma^1 = 0, \quad V_4 \lrcorner \sigma^2 = 0 \quad (4.4.2)$$

(4.4.2)'den şu sonuçları elde ederiz:

$$\frac{d\phi}{2\phi} = \frac{d\psi}{\psi} = \frac{dW_\phi}{0} = \frac{dW_\psi}{-W_\psi} \quad (4.4.3)$$

İlk iki terim alınırsa

$$\frac{d\phi}{2\phi} = \frac{d\psi}{\psi} \quad (4.4.4)$$

bağımsız değişkenleri arasında

$$\xi = \frac{\psi}{(\phi)^{1/2}} \quad (4.4.5)$$

bağıntısını kurabiliriz. ξ integrasyon sabiti olup benzerlik değişkeni olarak alınacaktır.

$$\frac{dW_\phi}{d\phi} = \frac{d\phi}{2\phi}, \quad \frac{dW_\psi}{d\psi} = \frac{d\phi}{2\phi} \quad (4.4.6)$$

denklemlerinin integrasyonu ise

$$W_\phi = f(\xi) \quad (4.4.7)$$

$$W_\psi = \frac{g(\xi)}{(\phi)^{1/2}} \quad (4.4.8)$$

sonuçlarını elde etmemizi sağlar. Bu sonuçları sınır tabakası denklemlerine yerleştirirsek denklemler ϕ , ψ bağımsız değişkenlerinden kurtulup sadece ξ benzerlik değişkenine bağlı adi diferansiyel denklemler haline gelecektir. Sınır tabakası denklemleri için gerekli olan türevleri yazalım:

$$\frac{d\xi}{d\phi} = \frac{-\psi}{2\phi^{3/2}} \quad (4.4.9)$$

$$\frac{d\xi}{d\psi} = \frac{1}{(\phi)^{1/2}} \quad (4.4.10)$$

$$\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} = \frac{-\psi}{2\phi^{3/2}} f' \quad (4.4.11)$$

$$\frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} = \frac{f'}{(\phi)^{1/2}} \quad (4.4.12)$$

bağımsız değişkenleri arasında

$$\xi = \frac{\psi}{(\phi)^{1/2}} \quad (4.4.5)$$

bağıntısını kurabiliriz. ξ integrasyon sabiti olup benzerlik değişkeni olarak alınacaktır.

$$\frac{dW_\phi}{0} = \frac{d\phi}{2\phi}, \quad \frac{dW_\psi}{-W_\psi} = \frac{d\phi}{2\phi} \quad (4.4.6)$$

denklemlerinin integrasyonu ise

$$W_\phi = f(\xi) \quad (4.4.7)$$

$$W_\psi = \frac{g(\xi)}{(\phi)^{1/2}} \quad (4.4.8)$$

sonuçlarını elde etmemizi sağlar. Bu sonuçları sınır tabakası denklemlerine yerleştirirsek denklemler ϕ , ψ bağımsız değişkenlerinden kurtulup sadece ξ benzerlik değişkenine bağlı adi diferansiyel denklemler haline gelecektir. Sınır tabakası denklemleri için gerekli olan türevleri yazalım:

$$\frac{d\xi}{d\phi} = \frac{-\psi}{2\phi^{3/2}} \quad (4.4.9)$$

$$\frac{d\xi}{d\psi} = \frac{1}{(\phi)^{1/2}} \quad (4.4.10)$$

$$\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} = \frac{-\psi}{2\phi^{3/2}} f' \quad (4.4.11)$$

$$\frac{\partial W_\phi}{\partial \psi} = \frac{f'}{(\phi)^{1/2}} \quad (4.4.12)$$

$$\frac{\partial W_{\psi}}{\partial \psi} = \frac{g'}{\phi} \quad (4.4.13)$$

$$\frac{\partial^2 W_{\phi}}{\partial \psi^2} = \frac{f''}{\phi} \quad (4.4.14)$$

$$\frac{\partial^2 W_{\phi}}{\partial \phi \partial \psi} = \frac{-\psi}{2\phi^2} f''' - \frac{1}{2\phi^{3/2}} f' \quad (4.4.15)$$

$$\frac{\partial^3 W_{\phi}}{\partial \psi^3} = \frac{f'''}{\phi^{3/2}} \quad (4.4.16)$$

$$\frac{\partial^3 W_{\phi}}{\partial \psi^2 \partial \phi} = \frac{-\psi}{2\phi^{5/2}} f'''' - \frac{1}{\phi^2} f'' \quad (4.4.17)$$

(4.4.9)-(4.4.17), sınır tabakası denklemleri (3.3.28) ve (3.3.29)'a yerleştirilirse ve terimler düzenlenirse

$$f^2 - 1 + 2gf' - \xi ff' = 2f'' + \kappa [2gf''' - \xi ff'''' + 2ff'' - (f')^2] \quad (4.4.18)$$

$$\xi f' - 2g' = 0 \quad (4.4.19)$$

denklemleri elde edilir. Burada $\kappa = k \alpha^2$ olarak tanımlanmıştır. Sınır koşulları (3.3.30), (3.3.36) ve (3.3.38) ise şu şekilde ifade edilebilir:

$$f(0) = 0 \quad (4.4.21)$$

$$g(0) = 0 \quad (4.4.22)$$

$$f(\infty) = 1 \quad (4.4.23)$$

$$f'(\infty) = 0 \quad (4.4.24)$$

(4.4.1) izovektörüne ait bulduğumuz benzerlik çözümü aslında ölçekleme dönüşümünden kaynaklanmaktadır.

Dolayısı ile sınır tabakası denklemlerimizin yalnızca ölçekleme dönüşümü için yararlanabileceğimiz bir simetri grubu vardır diyebiliriz. Bundan sonraki kısımda ise bulduğumuz çözümlerin, ölçekleme dönüşümü ile de bulunabileceğini göstereceğiz.

4.5- ÖLÇEKLEME DÖNÜŞÜMÜ

Ölçekleme dönüşümü özel bir simetri grubudur. Bütün değişkenlere infinitesimal bir öteleme verirsek yeni değişkenler

$$\bar{\phi} = \lambda^a \phi \quad \bar{\psi} = \lambda^b \psi \quad \bar{W}_\phi = \lambda^c W_\phi \quad \bar{W}_\psi = \lambda^d W_\psi \quad (4.5.1)$$

şeklinde yazılabilir. Denklemlerin bu öteleme altında invaryant kalabilmesi için a,b,c,d katsayılarının ve q fonksiyonunun ne olması gerektiğini araştırıyoruz. (4.5.1) sınır tabakası denklemleri (3.3.28) ve (3.3.29)'a yerleştirilirse

$$\begin{aligned} & \lambda^{a-2c} \bar{W}_\phi \frac{\partial \bar{W}_\phi}{\partial \phi} + \frac{(\lambda^{-2c} \bar{W}_\phi^2 - 1)}{q_B (\lambda^{-a} \phi)} q'_B (\lambda^{-a} \phi) + \lambda^{b-c-d} \bar{W}_\psi \frac{\partial \bar{W}_\psi}{\partial \psi} = \\ & \lambda^{2b-c} \frac{\partial^2 \bar{W}_\phi}{\partial \psi^2} + k \left[q_B (\lambda^{-a} \phi) \right]^2 \left[\lambda^{3b-c-d} \bar{W}_\psi \frac{\partial^3 \bar{W}_\phi}{\partial \psi^3} + \lambda^{a+2b-2c} \right. \\ & \left. \frac{\partial \bar{W}_\phi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \bar{W}_\phi}{\partial \psi^2} + \lambda^{a+2b-2c} \bar{W}_\phi \frac{\partial^3 \bar{W}_\phi}{\partial \psi^2 \partial \phi} - \lambda^{a+2b-2c} \frac{\partial \bar{W}_\phi}{\partial \psi} \frac{\partial^2 \bar{W}_\phi}{\partial \phi \partial \psi} + \right. \\ & \left. 4\lambda^{2b-2c} \frac{q'_B (\lambda^{-a} \phi)}{q_B (\lambda^{-a} \phi)} \bar{W}_\phi \frac{\partial^2 \bar{W}_\phi}{\partial \psi^2} - 2\lambda^{2b-2c} \frac{q'_B (\lambda^{-a} \phi)}{q_B (\lambda^{-a} \phi)} \left[\frac{\partial \bar{W}_\phi}{\partial \psi} \right]^2 \right] \quad (4.5.2) \end{aligned}$$

$$\lambda^{a-c} \frac{\partial \bar{W}_\phi}{\partial \phi} + \lambda^{b-d} \frac{\partial \bar{W}_\psi}{\partial \psi} = 0 \quad (4.5.3)$$

elde edilir. (4.5.2)'yi λ^{a-2c} 'ye (4.5.3)'ü λ^{a-c} 'ye böler, λ 'ların üslerinin sıfır olmasını ve keyfi fonksiyonların eşitliğini yazarsak birbirinden bağımsız şu denklemlere ulaşırız:

$$c+b-a-d = 0 \quad (4.5.4)$$

$$c+2b-a = 0 \quad (4.5.5)$$

$$c = 0 \quad (4.5.6)$$

$$\frac{\lambda^{-a} q'_B(\lambda^{-a}\bar{\phi})}{q_B(\lambda^{-a}\phi)} = \frac{q'_B(\bar{\phi})}{q_B(\phi)} \quad (4.5.7)$$

$$\left[q_B(\lambda^{-a}\bar{\phi}) \right]^2 \lambda^{2b} = q_B^2(\bar{\phi}) \quad (4.5.8)$$

$$q_B(\lambda^{-a}\bar{\phi}) q'_B(\lambda^{-a}\bar{\phi}) = q'_B(\phi) q_B(\phi) \quad (4.5.9)$$

(4.5.4)-(4.5.6)'dan

$$a = 2b \quad (4.5.10)$$

$$b = b \quad (4.5.11)$$

$$c = 0 \quad (4.5.12)$$

$$d = -b \quad (4.5.13)$$

sonuçları hemen elde edilir. Geriye kalan üç denklem ise q_B fonksiyonunun yapısını verecektir. (4.5.9) denklemi (4.5.7) ve (4.5.8)'den elde edilebilecek bir denklemdir. Dolayısı ile çözmemiz gereken sadece (4.5.7) ve (4.5.8)'dir. (4.5.8)'i $a=2b$ yazarak alalım:

$$\left[q_B (\lambda^{-\alpha} \bar{\phi}) \right]^2 \lambda^\alpha = q_B^2 (\bar{\phi}) \quad (4.5.14)$$

(4.5.14)'ün λ 'ya göre türevini alırsak

$$2q_B (\lambda^{-\alpha} \bar{\phi}) \frac{dq_B}{d\phi} \cdot (-\alpha \lambda^{-\alpha-1} \bar{\phi}) \lambda^\alpha + \left[q_B (\lambda^{-\alpha} \bar{\phi}) \right]^2 \alpha \lambda^{\alpha-1} = 0 \quad (4.5.15)$$

$\phi = \lambda^{-\alpha} \bar{\phi}$ olduğu hatırlanırsa denklem

$$\frac{dq_B}{d\phi} \phi - \frac{1}{2} q_B = 0 \quad (4.5.16)$$

şekline girer. Bu denklem ise rahatça integre edilip

$$q_B = \alpha(\phi)^{1/2} \quad (4.5.17)$$

sonucu bulunur. (4.5.17) çözümü (4.5.7) ve (4.5.9)'u sağlar. Dolayısı ile ölçekleme dönüşümü

$$\phi = \lambda^2 \bar{\phi} \quad , \quad \bar{\psi} = \lambda \psi \quad , \quad \bar{W}_\phi = W_\phi \quad , \quad \bar{W}_\psi = \lambda^{-1} W_\psi \quad (4.5.18)$$

olur. (4.5.18)'e karşılık gelen izovektör ise

$$V = 2\phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \psi \frac{\partial}{\partial \psi} - W_\psi \frac{\partial}{\partial W_\psi} \quad (4.5.19)$$

şeklinde yazılır. (4.5.17) ve (4.5.19) nihai çözümleri bir önceki bölümde elde ettiğimiz sonuçlardır.

BÖLÜM 5

ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLER

Bu bölümde geçen bölümde benzerlik çözümleri için elde edilen adi diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri araştırılacaktır. Önce ilk kısımda başlangıç koşullarındaki eksikliği telafi etmek için başlangıç noktası civarında bir seri çözümü yapılacak, daha sonra ikinci kısımda nümerik çözümler gösterilecektir. Üçüncü kısımda ise benzerlik çözümüne karşı gelen profil üzerinde durulacaktır.

5.1-SERİ ÇÖZÜMLERİ

Bölüm 4.4'de elde edilen denklemleri ve sınır koşullarını yeniden yazalım :

$$f''^2 - 1 + 2gf' - \xi ff' = 2f'''' + \kappa [2gf''' - \xi ff''' + 2ff'' - f'^2] \quad (5.1.1)$$

$$\xi f' - 2g' = 0 \quad (5.1.2)$$

$$f(0) = 0 \quad (5.1.3)$$

$$g(0) = 0 \quad (5.1.4)$$

$$f(\infty) = 1 \quad (5.1.5)$$

$$f'(\infty) = 0 \quad (5.1.6)$$

(5.1.1) ve (5.1.2) denklemlerinin $\xi=0$ civarında çözümlerine bakmak istiyoruz. Bu durumda sonsuzdaki sınır koşullarını çözümlerimize uygulamak mümkün

değildir. Fakat ilk iki başlangıç koşulu seri çözümlerince sağlanmalıdır. f ve g fonksiyonları için bir β derecesinde teklik olduğu varsayılırsa fonksiyonlar

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{k+\beta} \quad g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \xi^{k+\beta} \quad (5.1.7)$$

şeklinde yazılabilir. (5.1.7)'yi önce (5.1.2) denkleminde yerleştirelim. Türevlerini alırsak ve yerleştirirsek

$$f' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\beta) a_k \xi^{k+\beta-1} \quad g' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\beta) b_k \xi^{k+\beta-1} \quad (5.1.8)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+\beta) a_k \xi^{k+\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+\beta) b_k \xi^{k+\beta-1} \quad (5.1.9)$$

elde ederiz. Üsleri ve endisleri eşitleyip bir tarafa toplayalım :

$$2\beta b_0 \xi^{\beta-1} + \sum_{k=1}^{\infty} [2(k+\beta) b_k - (k+\beta-1) a_{k-1}] \xi^{k+\beta-1} = 0 \quad (5.1.10)$$

Buradan şu sonuçları yazabiliriz:

$$2\beta b_0 = 0 \quad (5.1.11)$$

$$2(k+\beta) b_k - (k+\beta-1) a_{k-1} = 0 \quad (5.1.12)$$

(5.1.11)'de denklemin tekiliğinden dolayı $\beta \neq 0$ halini alırsak $b_0 = 0$ olur. b katsayıları ile a katsayıları arasındaki bağıntı ise (5.1.12)'den

$$b_k = \frac{(k+\beta-1)}{2(k+\beta)} a_{k-1} \quad k=1,2,3,\dots \quad (5.1.13)$$

Şimdi (5.1.7)'yi (5.1.1)'e yerleştirelim:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{k+\beta} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{k+\beta} \right]^{-1+2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} b_k \xi^{k+\beta} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\beta) \xi^{k+\beta-1} \right] \\ & - \xi \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{k+\beta} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\beta) \xi^{k+\beta-1} \right] = 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\beta) (k+\beta-1) \xi^{k+\beta-2} \\ & + 2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} b_k \xi^{k+\beta} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\beta) (k+\beta-1) (k+\beta-2) \xi^{k+\beta-3} \right] \\ & - \xi \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{k+\beta} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\beta) (k+\beta-1) (k+\beta-2) \xi^{k+\beta-3} \right] + 2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{k+\beta} \right] \\ & \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\beta) (k+\beta-1) \xi^{k+\beta-2} \right] - \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\beta) \xi^{k+\beta-1} \right]^2 \quad (5.1.14) \end{aligned}$$

Yukarıda seri çarpımlarını yaparak yeniden yazalım:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_n a_{k-n} \xi^{k+2\beta-1+2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_n (n+\beta) b_{k-n} \xi^{k+2\beta-1} \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_n (n+\beta) a_{k-n} \xi^{k+2\beta} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\beta) (k+\beta-1) \xi^{k+2\beta-2} + \end{aligned}$$

$$x \left[2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_n (n+\beta) (n+\beta-1) (n+\beta-2) b_{k-n} \xi^{k+2\beta-3} \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_n (n+\beta) (n+\beta-1) (n+\beta-2) a_{k-n} \xi^{k+2\beta-2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_n (n+\beta) \right.$$

$$\left. (n+\beta-1) a_{k-n} \xi^{k+2\beta-2} - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_n (n+\beta) a_{k-n} (k-n+\beta) \xi^{k+2\beta-2} \right] \quad (5.1.15)$$

Bütün terimler $\xi^{k+2\beta}$ mertebesinde, yalnızca eşitliğin sağındaki ilk terim $\xi^{k+\beta}$ mertebesinde. Eğer β tamsayı değilse k 'daki artmalarla bu terimin diğer terimlerle uyumu sağlanamaz. Bu durumda $a_k = 0$ kaçınılmaz bir şart olarak ortaya çıkar ki, bu ise istenilmeyen bir çözümdür. Dolayısı ile β 'nın tamsayı olduğu kabulünü yapıyoruz. Üsleri birbirine eşitlersek,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-2} a_n a_{k-2-n} \xi^{k+2\beta-2} - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-1} 2a_n (n+\beta) b_{k-1-n} \xi^{k+2\beta-2}$$

$$- \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-2} a_n (n+\beta) a_{k-2-n} \xi^{k+2\beta-2} = 2 \sum_{k=-\beta}^{\infty} a_{k+\beta} (k+2\beta) (k+2\beta-1)$$

$$\xi^{k+2\beta-2} + x \left[2 \sum_{k=-1}^{\infty} \sum_{n=0}^{k+1} a_n (n+\beta) (n+\beta-1) (n+\beta-2) b_{k+1-n} \xi^{k+2\beta-2} \right.$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_n (n+\beta) (n+\beta-1) (n+\beta-2) a_{k-n} \xi^{k+2\beta-2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_n (n+\beta)$$

$$(n+\beta-1) a_{k-n} \xi^{k+2\beta-2} - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_n (n+\beta) a_{k-n} (k-n+\beta) \xi^{k+2\beta-2} \quad (5.1.16)$$

buluruz. k için en küçük değer $-\beta$ 'dir. $k=-\beta$ için eşitliğin sağ tarafındaki ilk terimin katsayısının sıfır olması gerekir:

$$2a_0 \beta (\beta-1) \xi^{\beta-2} = 0 \quad (5.1.17)$$

Burada $a_0 \neq 0$ alırsak, $\beta \neq 0$ olduğuna göre $\beta=1$ bulunur. α 'dan sonraki ilk terimde $\xi^{\beta-2}$ 'nin katsayısı $b_0=0$ olduğu için (5.1.17)'yi etkilemez. (5.1.16)'yı $k=0$ ve $k=1$ için açarsak kalan bütün terimler $k=2$ 'den başlayacaktır. Dolayısı ile katsayıların sıfır olması şartını yazabiliriz:

$$\alpha a_0^2 - 4 a_1 = 1 \quad (k=0) \quad (5.1.18)$$

$$2a_0 b_0 = 12a_2 + \alpha (12a_2 b_0) \quad (k=1) \quad (5.1.19)$$

$$\sum_{n=0}^{k-2} a_n a_{k-2-n} + \sum_{n=0}^{k-1} 2a_n (n+1) b_{k-1-n} - \sum_{n=0}^{k-2} a_n (n+1) a_{k-2-n} =$$

$$2 a_{k+1} (k+2) (k+1) + \alpha \left[2 \sum_{n=0}^{k+1} a_n (n+1) n (n-1) b_{k+1-n} - \sum_{n=0}^k a_n (n+1) \right]$$

$$n(n-1)a_{k-n} + 2 \sum_{n=0}^k a_n (n+1)na_{k-n} - \sum_{n=0}^k a_n (n+1)(k-n+1)a_{k-n} \Big] \\ (k=2,3,4,\dots) \quad (5.1.20)$$

(5.1.20)'de b katsayıları yerine (5.1.13)'den a cinsinden eşitleri yazılıp terimler düzenlenirse şu sonucu elde ederiz:

$$\sum_{n=0}^{k-1} 2a_n (n+1) \frac{(k-1-n)}{2(k-n)} a_{k-n-2} - \sum_{n=0}^{k-2} a_n na_{k-2-n} = 2a_{k+1} (k+2)(k+1) \\ + \kappa \left[\sum_{n=0}^{k+1} 2a_n (n+1)n(n-1) \frac{(k+1-n)}{2(k+2-n)} a_{k-n} + \sum_{n=0}^k a_n a_{k-n} (n+1) \right. \\ \left. (-n^2+4n-1-k) \right] \quad k=2,3,4, \quad (5.1.21)$$

(5.1.21)'de k=2 ve k=3 alınırsa

$$\frac{a_0^2}{2} = 24 a_3 \quad (k=2) \quad (5.1.22)$$

$$\frac{2}{3} a_0 a_1 = 40 a_4 + \kappa (4a_3 a_0) \quad (k=3) \quad (5.1.23)$$

elde edilir. (5.1.18)'den a_1 bulunur:

$$a_1 = \frac{(\kappa a_o^2 - 1)}{4} \quad (5.1.24)$$

(5.1.19)'dan $b_o = 0$ olduğu için

$$a_2 = 0 \quad (5.1.25)$$

olur. (5.1.22)'den

$$a_3 = \frac{1}{48} a_o^2 \quad (5.1.26)$$

bulunur. (5.1.23)'den a_1 ve a_3 terimlerinde yerleştirilirse

$$a_4 = \frac{1}{480} \kappa a_o^3 - \frac{1}{240} a_o \quad (5.1.27)$$

elde edilir. a katsayılarına karşılık gelen b katsayıları (5.1.13)'e yerleştirilerek kolayca bulunur:

$$b_1 = \frac{1}{4} a_o \quad (5.1.28)$$

$$b_2 = \frac{\kappa a_o^2 - 1}{12} \quad (5.1.29)$$

$$b_3 = 0 \quad (5.1.30)$$

$$b_4 = \frac{1}{120} a_o^2 \quad (5.1.31)$$

$$b_5 = \frac{1}{1152} \kappa a_o^3 - \frac{1}{576} a_o \quad (5.1.32)$$

Bulduğumuz a ve b katsayılarını seri çözümüne yerleştirirsek f ve g fonksiyonlarını buluruz:

$$f(\xi) = a_0 \xi + \frac{\kappa a_0^2 - 1}{4} \xi^2 + \frac{1}{48} a_0^2 \xi^4 + \left[\frac{1}{480} \kappa a_0^3 - \frac{1}{240} a_0 \right] \xi^5 + \dots \quad (5.1.33)$$

$$g(\xi) = \frac{1}{4} a_0 \xi^2 + \frac{\kappa a_0^2 - 1}{12} \xi^3 + \frac{1}{120} a_0 \xi^5 + \left[\frac{1}{1152} \kappa a_0^3 - \frac{1}{576} a_0 \right] \xi^6 + \dots \quad (5.1.34)$$

Dikkat edilirse (5.1.33) ve (5.1.34) çözümleri ilk iki şartı ($f(0)=0, g(0)=0$) sağlamaktadır. Problemimizi bir başlangıç değer problemi olarak düşünseydik bu durumda ilk iki şarta ilaveten f fonksiyonunun türevlerinden kaynaklanan

$$f'(0) = a_0 \quad (5.1.35)$$

$$f''(0) = \frac{\kappa a_0^2 - 1}{2} \quad (5.1.36)$$

şartları gelecektir. Dikkat edilirse $f'(0)$ ve $f''(0)$ arasında

$$f''(0) = \frac{\kappa (f'(0))^2 - 1}{2} \quad (5.1.37)$$

bağıntısı olduğu için başlangıç koşulları keyfi tek a_0 parametresine bağlı olmalıdır. Bu ise başlangıç değer problemi olarak düşünüldüğünde "shooting" metodu için büyük kolaylık sağlamaktadır.

5.2-NÜMERİK ÇÖZÜMLER

Denklem (5.1.1) ve (5.1.2) nin nümerik çözümlerini yapmak için önce birinci mertebeden denklemlere indirgeyelim. Bunun için şu tanımları yapalım :

$$f_1(\xi) = f(\xi) \quad (5.2.1)$$

$$f_2(\xi) = g(\xi) \quad (5.2.2)$$

$$f_3(\xi) = f'(\xi) \quad (5.2.3)$$

$$f_4(\xi) = f''(\xi) \quad (5.2.4)$$

Bunları denklemlerimize yerleştirirsek

$$f'_1 = f_3 \quad (5.2.5)$$

$$f'_2 = \xi f_3 / 2 \quad (5.2.6)$$

$$f'_3 = f_4 \quad (5.2.7)$$

$$f'_4 = ((f_1^2 - 1 - \xi f_1 f_3 + 2f_2 f_3 - 2f_4) / \kappa - 2f_1 f_4 + f_3^2) / (2f_2 - \xi f_1) \quad (5.2.8)$$

elde ederiz. Bu denklemler için başlangıç ve sınır koşulları şöyledir :

$$f_1(0) = 0 \quad (5.2.9)$$

$$f_2(0) = 0 \quad (5.2.10)$$

$$f_1(\infty) = 1 \quad (5.2.11)$$

$$f_3(\infty) = 0 \quad (5.2.12)$$

Denklem (5.2.8)'e dikkat edersek başlangıç noktası $\xi=0$ 'da bir tekillik olduğu hemen gözlenebilir.

f'_4 teriminin sonlu olabilmesi için payın da başlangıç noktasında sıfır olması gerekmektedir. (5.2.8)'de $f_1(0)=0$, $f_2(0)=0$ alırsak

$$(-1 - 2f_4(0)) / \kappa + (f_3(0))^2 = 0 \quad (5.2.13)$$

elde edilir. Buradan $f_4(0)$ başlangıç koşulunu $f_3(0)$ cinsinden

$$f_4(0) = (\kappa (f_3(0))^2 - 1) / 2 \quad (5.2.14)$$

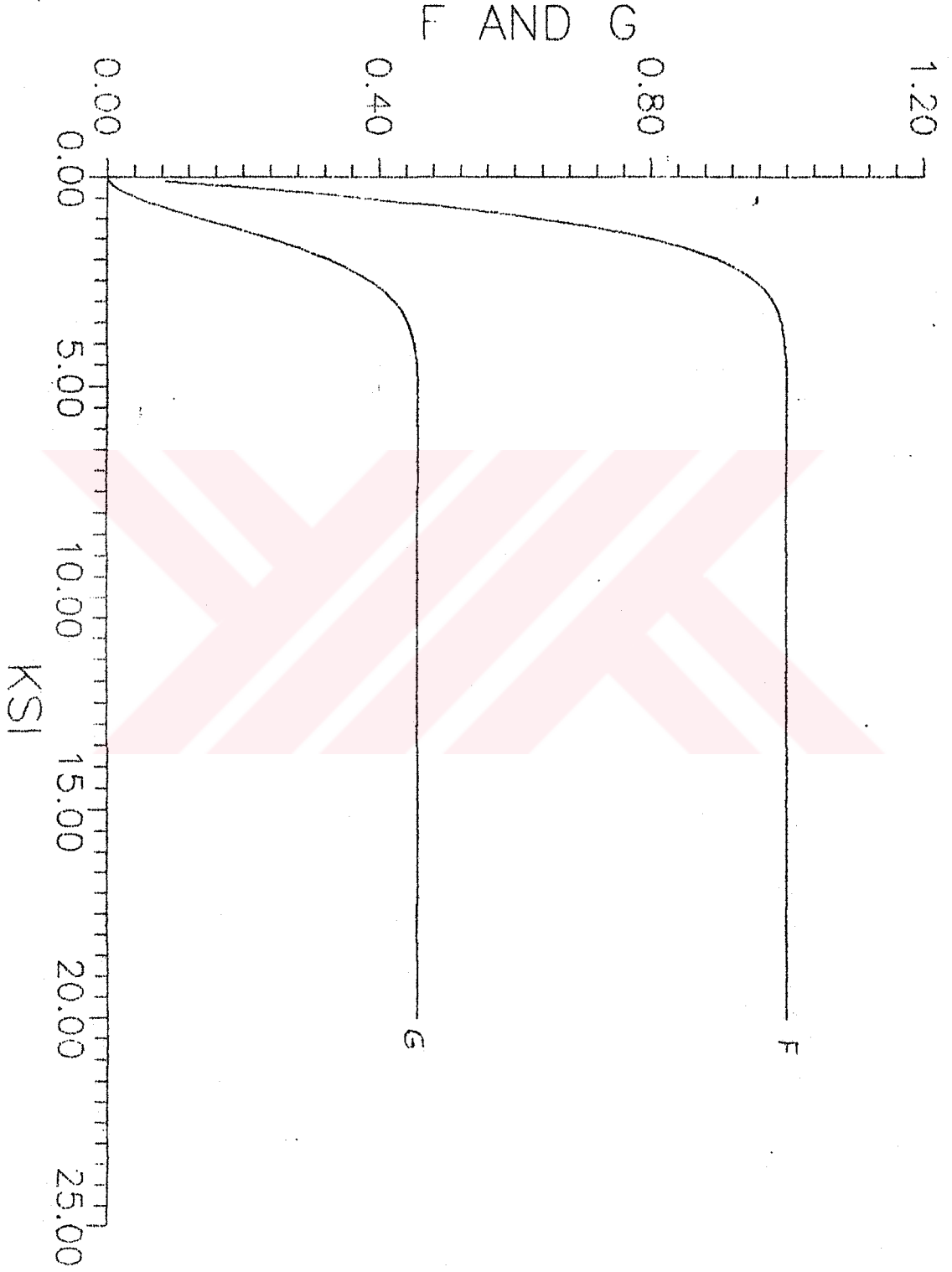
olarak buluruz. Dikkat edilecek önemli bir nokta bu sonucun seri çözümünden elde edilen (5.1.37) koşulu ile aynı olmasıdır.

Denklemleri çözmek için ilk girişimimizde problemimizi başlangıç değer problemine dönüştürdük. Bunun için eksik olan iki başlangıç değeri, yani $f_3(0)$ ve $f_4(0)$ 'dan $f_3(0)$ keyfi bir sayı olarak alınıyor, $f_4(0)$ (5.2.14)'den hesaplanıyor ve sonsuzda sınır şartlarının sağlanıp sağlanmadığına bakılıyordu. Sonsuza giderken fonksiyonun aldığı değerlere bakılarak $f_3(0)$ için yeni tahminler yapılıyor ve bu şekilde doğru başlangıç şartı elde edilmeye çalışılıyordu. Önce denklemleri integre etmek için değişken adımlı özel bir Runge-Kutta programı kullanıldı. Bu program Navier-Stokes denklemlerini ((5.1.1)'de $\kappa = 0$ alınız) kolayca çözebilmektedir. Şekil 3'de f ve g fonksiyonlarının nümerik çözümleri gösterilmiştir. Fiziksel olarak κ 'nın negatif değerleri anlamsızdır. κ 'yı $+10^{-7}$ mertebesinde bile alsak bu program çözümlere ulaşamamakta idi. Bu yüzden daha gelişmiş bir başlangıç değer programı denedik. IMSL kütüphanesinden DGEAR altprogramını kullanan bir program yazdık (Ek A). Kaynak [22]'de verilen bu altprogram özellikle "stiff" denklemler için hazırlanmış bir programdır. "Stiff" denklemleri şöyle tanımlayabiliriz : Çözümünde eksponansiyel terimler olan ve başlangıç

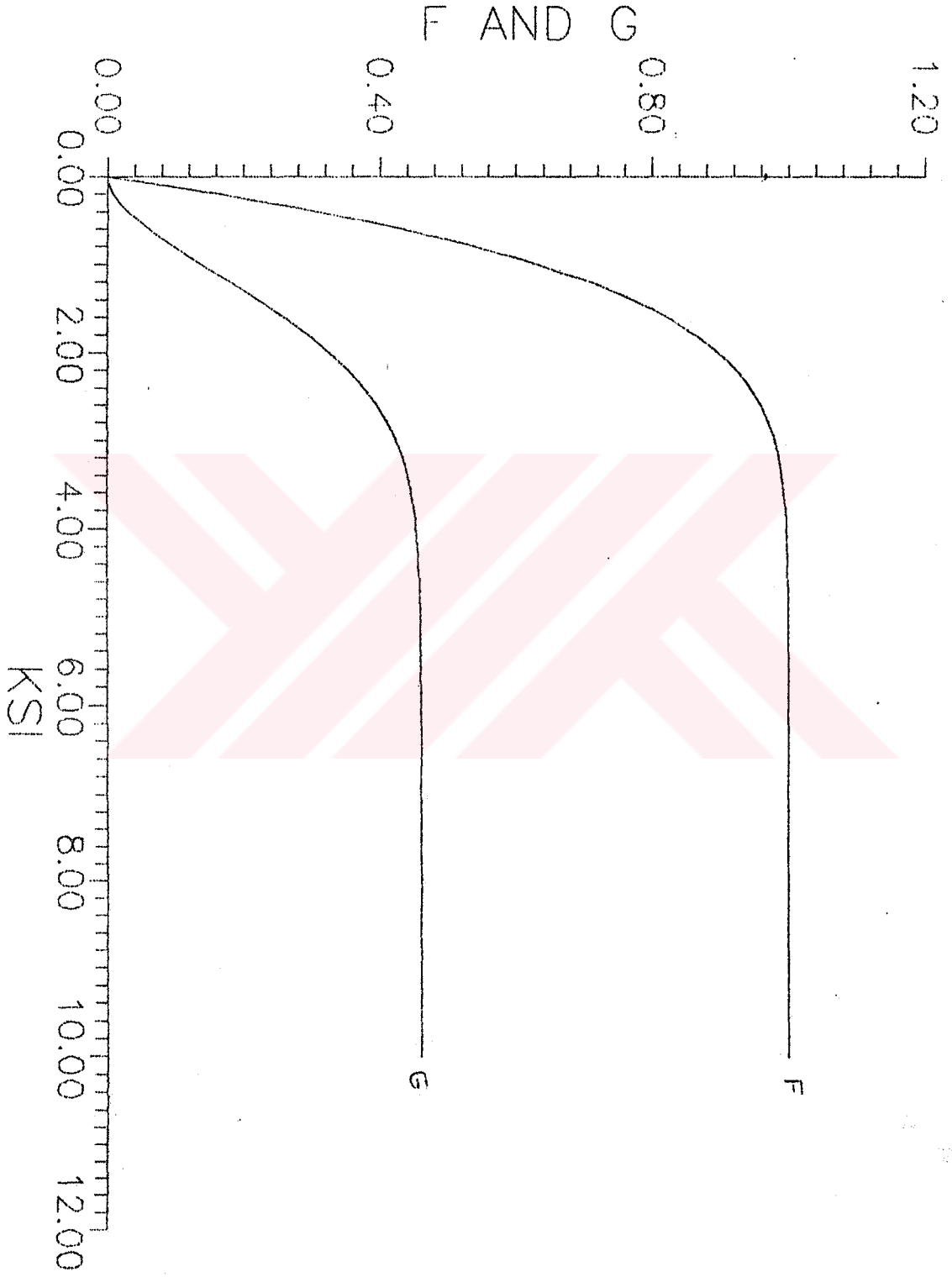
koşullarından dolayı eksponansiyel terimlerinden bazılarının katsayılarının sıfır olduğu denklemlerdir. DGEAR altprogramı $\alpha \leq 0.001$ hali için çözüm vermesine rağmen bundan büyük değerlerde çözümden büyük sapmalar göstermekteydi. $\alpha = 0.001$ durumu için çözümler şekil 4'te verilmiştir.

Eksponansiyel büyüyen terimlerin varlığında sönmekte olan bir eksponansiyel çözüm ararken başlangıç değer metodlarının yerine "relaxation" metodlarının kullanılması gereği literatürde zikredilmektedir [23]. α 'nın büyük değerleri için çözüm elde etmede sonlu farklar metodunu denedik. IMSL kütüphanesinden DVCPR altprogramını kullanan bir program yazdık (Ek B). Sonlu farklar metodunun uygulanabilmesi için başlangıçta belli aralıklarla fonksiyonların tahmini değerlerinin verilmesi gerekmektedir. Bu tahmini değerler ne kadar iyi olursa yakınsama ihtimali de o kadar artmakta veya çözümlere yakınsamak için kullanılan bilgisayar zamanı azalmaktadır. Başlangıçtaki tahmini değerler için DGEAR altprogramından $\alpha = 0.001$ için elde ettiğimiz çözümleri kullandık. Şekil 5'de f' 'nin , şekil 6'da g 'nin , şekil 7'de f' 'nin , şekil 8' de ise f'' 'nin değişik α değerleri için karşılaştırmalı grafikleri verilmiştir. $\alpha = 0.1$ çözümlerinin $\alpha = 0.001$ çözümlerine olan yakınlığı dikkat çekicidir.

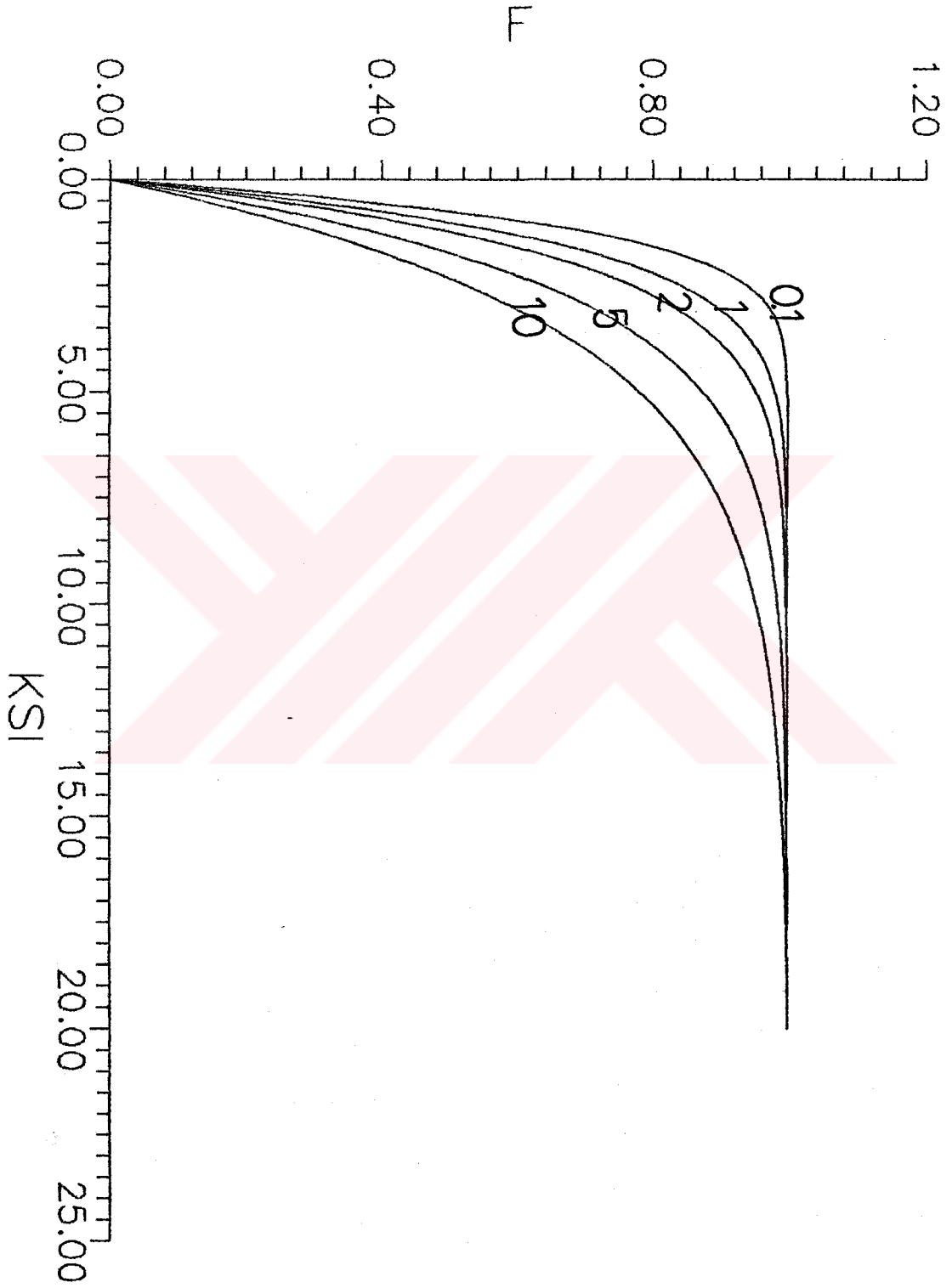
α 'nın çok küçük olduğu hallerde çözümlerin Navier-Stokes çözümlerine yakınsadığı kolayca görülebilmektedir. α 'nın büyük değerlerinde ise $\alpha \geq 100$ DVCPR programında yakınsama problemleri ortaya çıkmaktadır. α 'nın ikinci derecede akışkanlara ait katsayının viskozite katsayısına oranı olduğunu hatırlarsak α 'nın artan değerleri ikinci derece akışkanlara ait özelliklerin artması anlamına gelmektedir. Denklemlerimizi çıkarırken bu oranın 1 mertebesinde olduğu varsayımını kullandığımız için α 'nın



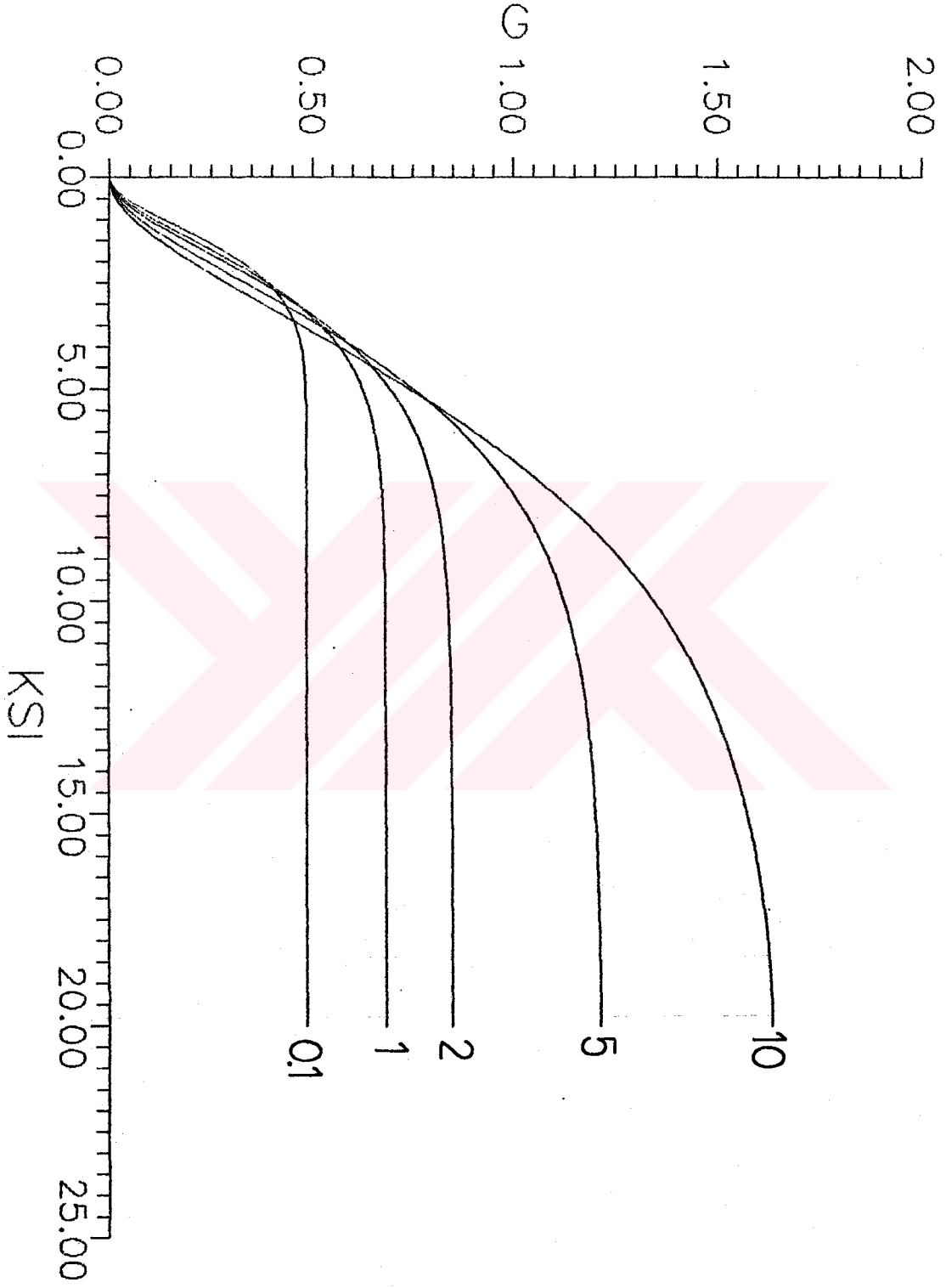
SEKIL 3- Navier-Stokes Çözümleri ($\alpha = 0$)



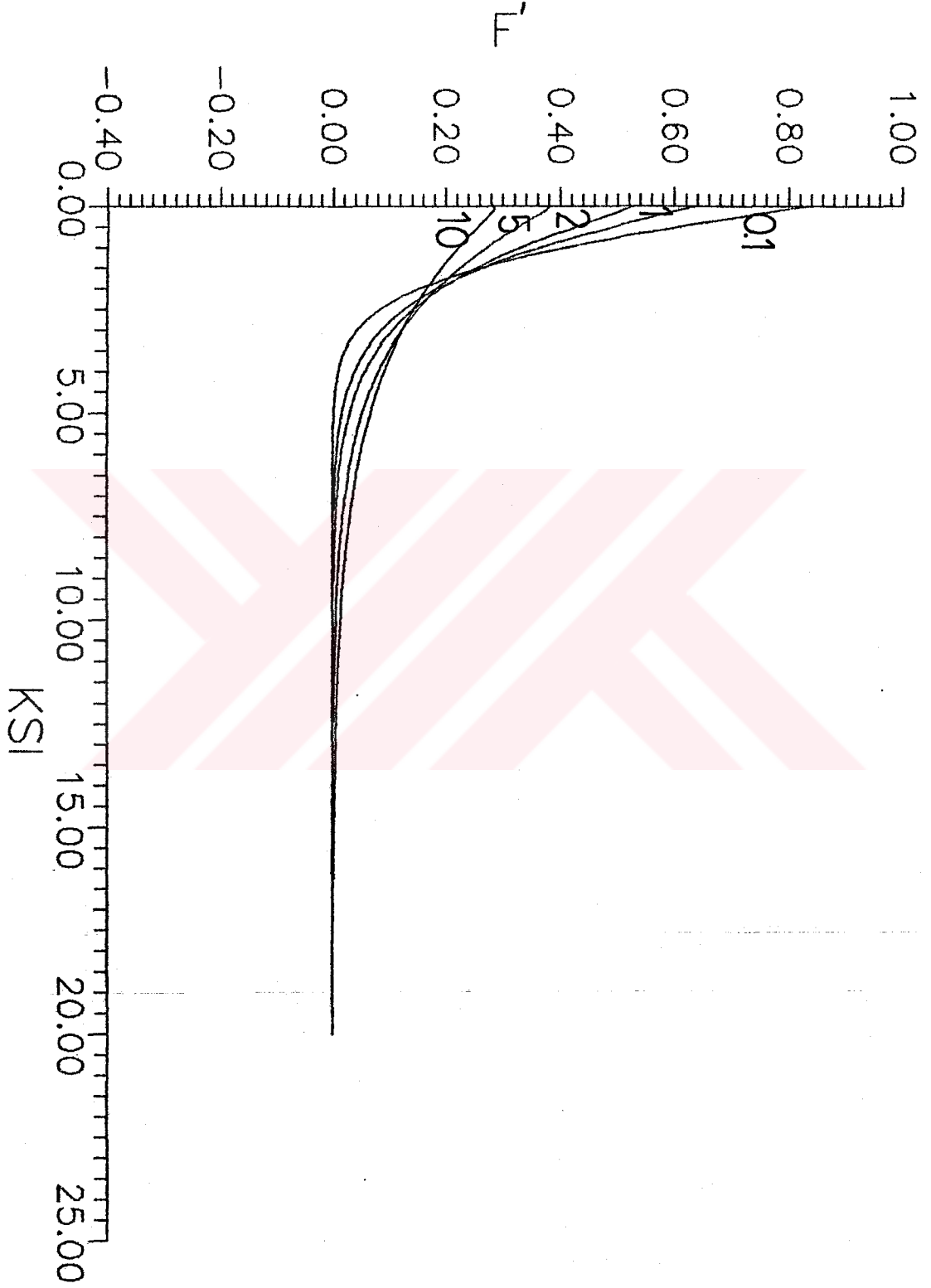
SEKİL 4- $\mu = 0.001$ için çözümler



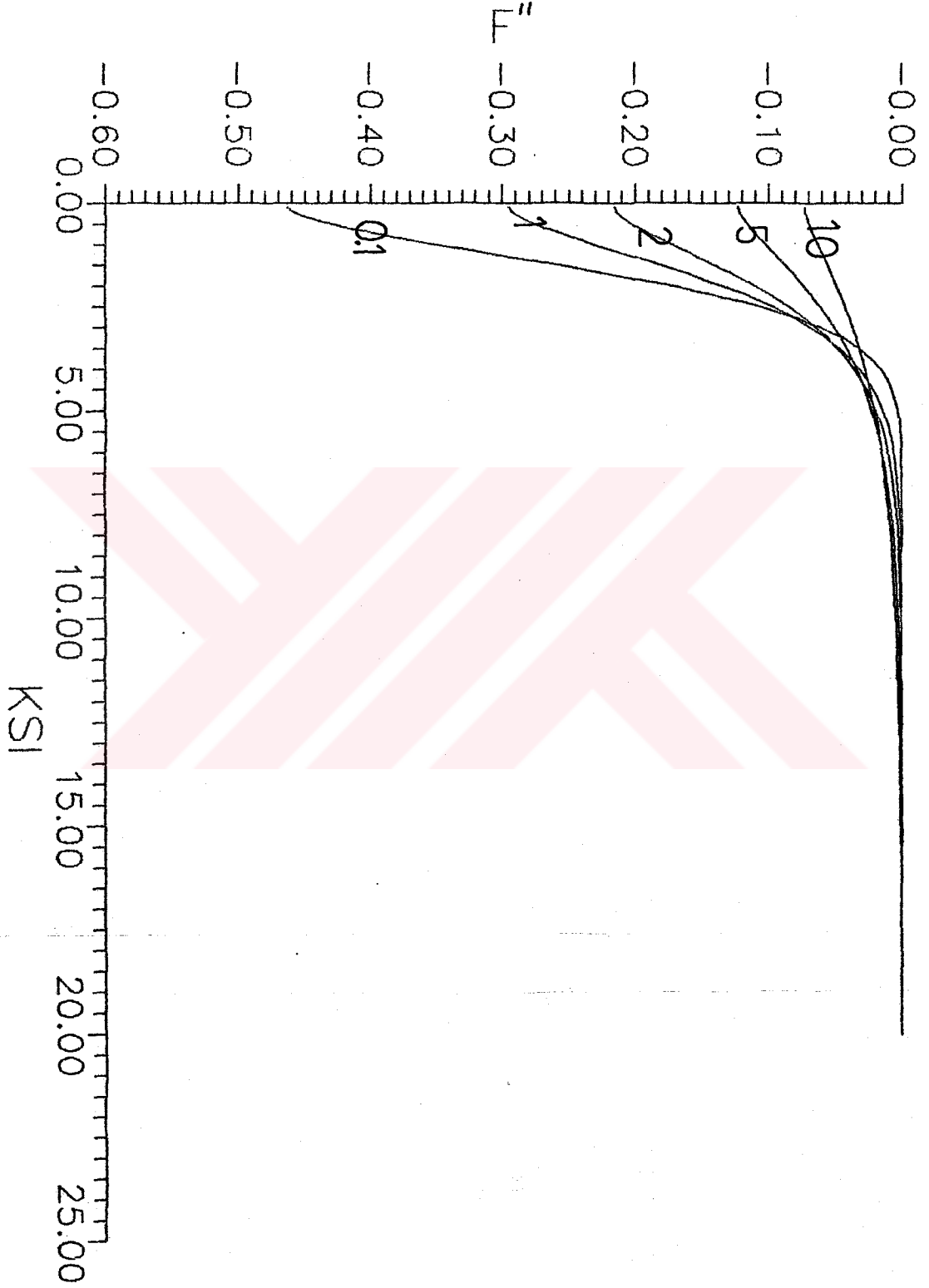
ŞEKİL 5- Değişik α Değerleri İçin f Fonksiyonu
(α değerleri eğrilerin üzerindedir)



SEKİL 6- Değişik α Değerleri İçin g Fonksiyonu
(α değerleri eğrilerin üzerindedir)



ŞEKİL 7- Değişik α Değerleri İçin f' 'in Türevi
(α değerleri eğrilerin üzerindedir)



SEKİL 8- Değişik α Değerleri İçin f 'in İkinci Türevi
(α değerleri eğrilerin üzerindedir)

çok büyümesine karşılık gelen fiziksel durumu göstermede denklemlerimiz yetersiz kalmakta, sınır şartları sağlatılamamaktadır.

Şekil 5' de dikkat edilecek bir nokta aynı ξ değerleri için, hızın ϕ bileşeninin küçük α değerleri için daha yüksek olduğudur. Fakat şekil 6'dan da görülebileceği gibi aynı ξ değerleri için hızın ψ bileşenleri önceki durumun tam tersine α 'nın artması ile artmaktadır. Bu durumda ikinci derece etkilerin artmasının hızın ϕ bileşenini azaltıcı, ψ bileşenini arttırıcı rolü vardır diyebiliriz. Çıkarılabilecek diğer bir sonuç da hızın bileşenlerinin küçük α değerlerinde daha kolay şekilde sonsuzdaki değerlerine yakınsamasıdır. Böylece α 'nın büyümesinin veya ikinci derece etkilerin artmasının sınır tabakasını kalınlaştırdığını söyleyebiliriz.

5.3 BENZERLİK ÇÖZÜMÜNE KARŞI GELEN PROFİL

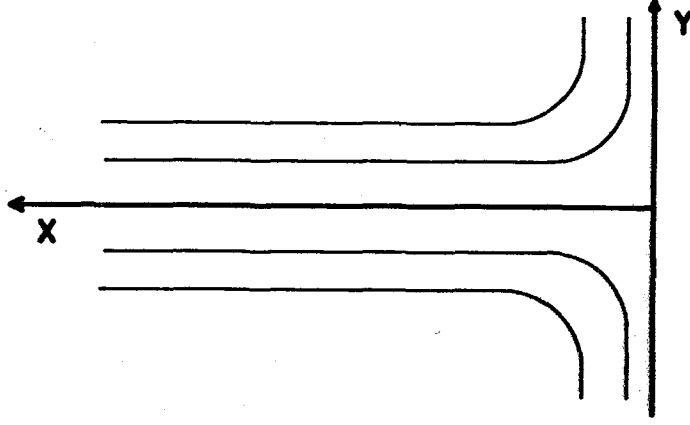
Bu kısımda benzerlik çözümü için elde ettiğimiz denklem (4.5.17)'de verilen hız dağılımına

$$q_B = \alpha \phi^{1/2} \quad (5.3.1)$$

karşılık gelen profillerden bir tanesini örnek olarak vereceğiz. En genel çözümü elde etmenin bazı zorluklarından dolayı özel bir örneği vermekle yetineceğiz. Vereceğimiz örnek stagnation akımıdır. Bu akım için profil, akıma dik bir plaktır (şekil 9). $x = 0$ dik plağı vermektedir. Bu akım için ϕ ve ψ koordinatları x ve y cinsinden şöyle verilebilir :

$$\phi = (\alpha^2 / 4) (y^2 - x^2) \quad (5.3.2)$$

$$\psi = - (\alpha^2 / 2) x y \quad (5.3.3)$$



Şekil 9-Stagnation akımı

x ve y yönündeki hızlar potansiyel akım için

$$u_o = \phi_x = \psi_y \quad (5.3.4)$$

$$v_o = \phi_y = -\psi_x \quad (5.3.5)$$

şeklindedir. (5.3.4) ve (5.3.5) den

$$u_o = (-\alpha^2/2) x \quad (5.3.6)$$

$$v_o = (-\alpha^2/2) y \quad (5.3.7)$$

$$q_o = (u_o^2 + v_o^2)^{1/2} = (\alpha^2/2) (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (5.3.8)$$

bulunur. Elde ettiğimiz q_o teriminden q_B bulunabilir. Stagnation akımı için q_o 'da $x = 0$ alırsak

$$q_B = (\alpha^2/2) y \quad (5.3.9)$$

(5.3.9)'un $x = 0$ 'da $\alpha \phi^{1/2}$ 'ye eşit olduğu kolayca

gösterilebilir. Dolayısı ile stagnation akımı benzerlik çözümünü kabul eden profillerden birisidir diyebiliriz.

Bu çözümün küt simetrik profiller etrafındaki akımlarda durak noktası etrafındaki durumu yaklaşık olarak ifade ettiğini de söyleyebiliriz.

$q_B(\phi) = \alpha\phi^{1/2}$ koşulunu sağlayan profilleri genel olarak belirleme problemini şöyle ifade edebiliriz. Akımın kompleks potansiyeli

$$F(z) = \phi + i\psi \quad (5.3.10)$$

olsun. Profil sınırında $\psi = 0$ olduğundan $F(z)|_B = \phi$ olur. Buradan profil sınır koordinatları formel olarak

$$z = F^{-1}(\phi)|_B = h(\phi) \quad (5.3.11)$$

denklemleri ile belirlenir. Profil kenarında hızın büyüklüğü

$$q_B = |F'(z)| \quad (5.3.12)$$

olduğundan

$$|F'(h(\phi))| = q_B(\phi) = \alpha\phi^{1/2} \quad (5.3.13)$$

fonksiyonel denklemini sağlayan kompleks potansiyeller ön gördüğümüz koşulu gerçekler. Bu tür bir fonksiyonel denklemin çözümü için analitik bir yöntem bilinmemektedir. Ciddi bir analiz yapılmadan uygulanacak bir sayısal yöntemin de yakınsaması kuşkuludur.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada önce ikinci derece akışkanlar için hareket denklemleri özel bir koordinat sistemine göre çıkarılmıştır. Bu koordinat sisteminin en önemli özelliği akış içine yerleştirilen cismin şeklinin denklemleri etkilememesidir. Böylece herbir özel durum için ayrı ayrı denklem çıkarmak gerekmemekte, bütün özel durumlara genel denklemlerin çözülmesi ve koordinat dönüşümü ile ulaşılabilmektedir. Daha sonra hareket denklemlerinden sınır tabakası denklemleri elde edilmiştir. Dış formlar kullanılarak sınır tabakası denklemlerinin en genel izovektör alanı bulunmuştur. Sadece ölçekleme dönüşümüne ait izovektörden trivial olmayan bir benzerlik çözümü elde edilebileceği gösterilmiştir. Bu izovektör kullanılarak benzerlik çözümüne götüren adi diferansiyel denklemler elde edilmiştir. Bu denklemlerin nümerik ve seri çözümleri gösterilmiştir. İkinci derece etkilerin büyüklüğünü ölçen κ parametresine bağlı yapılan nümerik çözümlerden κ 'nın artmasının sınır tabakasını kalınlaştırdığı gösterilmiştir. κ 'nın artması ayrıca hızın ϕ bileşenini azaltırken ψ bileşenini arttırıcı rol oynamaktadır. κ 'nın çok küçük değerleri ise Navier-Stokes çözümlerine götürmektedir. κ değerlerinin çok artması durumunda denklemlerin nümerik integrasyonu zorlaşmakta sonlu farklar yönteminin yakınsaması sağlanamamaktadır. Başlangıçta sınır tabakası denklemleri çıkarılırken κ 'nın 1 mertebesinde bir değere sahip olduğu önkabulü yapılmıştı. Dolayısı ile κ 'yı çok büyütmenin fiziksel olmayan bazı sonuçlara götürmesi beklenebilir. Ayrıca benzerlik çözümünü kabul eden profillerden bir tanesi örnek olarak gösterilmiştir. Paralel düz plak hali için ise denklemler benzerlik çözümünü kabul etmemektedir.

Tabii ki burada yapılan çalışmalar ilerletilebilir.

Örneğin üçüncü derece akışkanlar için daha genel çözümler elde edilebilir. Çalışmada ısı alış verişi ihmal edilmiştir. İleriki bir çalışma olarak ısı alış verişi de hesaba katılabilir. Elde ettiğimiz sınır tabakası denklemleri için benzerlik çözümünden farklı çözüm grupları da araştırılabilir. Sınır tabakası denklemlerinin direkt olarak nümerik integrasyonu yapılabilir. Ayrıca bu konuda yapılacak deneysel çalışmalar da yararlı olacaktır. Elde ettiğimiz hareket denklemleri kullanılarak değişik tipte akışlar incelenebilir.

K A Y N A K L A R

- [11] COLEMAN, B.D., NOLL, W., An Approximation Theorem for Functionals with Applications in Continuum Mechanics., Arch Ration. Mech. Analysis, Vol 6, pp 355-370, 1960.
- [12] DUNN J.E., FOSDICK R.L, Thermodynamics Stability and Boundedness of Fluids of Complexity 2 and Fluids of Second Grade, Arch. Ration. Mech. Analysis, Vol 56, pp 191-252, 1974.
- [13] MISHRA S.P., Free Convection Flow of a Second Order Fluid Past a Hot Vertical Plate, Proc. Ind. Acad. Sciences LXIV, 291-303, 1966.
- [14] SRIVASTAVA A.C., MAITI M.K, Flow of a Second Order Fluid Past a Symmetrical Cylinder, The Physics of Fluids, Vol 9(3), pp 462-465, 1966.
- [15] SRIVASTAVA A.C., SARMA G.C, Forced Flow of a Second Order Fluid Against a Rotating Disk, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol 5, pp 525-532, 1970.
- [16] FOSDICK R.L., RAJAGOPAL K.R., Uniqueness and Drag For Fluids of Second Grade in Steady Motion, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol 13, pp 131-137, 1978.
- [17] MISHRA S.P., PANDA T. CH., Effect of Injection on the Flow of Second Order Fluid in the Inlet Region of a Channel, Acta Mechanica, Vol 32, pp 11-17, 1979.
- [18] RAJAGOPAL K.R., GUPTA A.S., On a Class of Exact Solutions to the Equations of Motion of a Second Grade Fluid, Int. J. Engg. Science, Vol 19, pp 1009-1014, 1981.
- [19] RAJAGOPAL K.R., GUPTA A.S., Flow and Stability of a Second Grade Fluid between two Parallel Plates Rotating about Noncoincident Axes, Int. J. Engg. Science, Vol 19, pp 1401-1409, 1981.
- [10] SIDDIQUI A. M. , KALONI P. N., Certain Inverse Solutions of a Nonnewtonian Fluid, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol 21 (6), pp 459-473, 1986.
- [11] MASSOUDI M., RAMEZAN M., Effect of Injection or Suction on the Falkner-Skan Flows of Second Grade Fluids, Int. J. Non-Linear Mechanics,

Vol 24(3), pp 221-227, 1989.

- [12] ERINGEN A.C., Mechanics of Continua, John Wiley and Sons, 1967.
- [13] KAPLUN S., The Role of Coordinate Systems in Boundary Layer Theory, ZAMP, Vol 2, pp 111-135, 1954.
- [14] KEVORKIAN J., COLE J.D., Perturbation Methods in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York Inc., 1981.
- [15] RAJAGOPAL K.R., GUPTA A.S., NA T.Y., A Note on the Falkner-Skan Flows of a Nonnewtonian Fluid, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol 18, pp 313-320, 1983.
- [16] SRIVASTAVA A.C., SAROA M.S, Phenemon of Seperation in Second Order Fluids, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol 6, pp 607-614, 1970.
- [17] SUHUBI E.S, Some Applications of Exterior Differential Forms in Continuum Mechanics, Mathematical Inst. Napoli Univ., Lecture Notes, 1989.
- [18] HARRISON B.K., ESTABROOK F.B., Geometric Approach to Invariance Groups and Solution of Partial Differential Systems, J. Math. Physics, Vol 12 (4), pp 653-666, 1971.
- [19] EDELEN D., Applied Exterior Calculus, John Wiley and Sons, 1985.
- [20] SCHOWALTER W.R., Mechanics of Nonnewtonian Fluids, Pergamon Press, 1979.
- [21] SUHUBI E.S., Isovector Fields and Similarity Solutions for General Balance Equations, Int. J Engg. Science, Vol 29(1), pp 133-150, 1991.
- [22] GEAR C.W., Difsub for Solution of Ordinary Differential Equations, Comm. of the ACM, Vol 14(3), 1971.
- [23] PRESS W.H., FLANNERY B.P., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T., Numerical Recipes, Cambridge Univ. Press, 1989.

EK A

GEAR METODU İLE NÜMERİK İNTEGRASYON YAPAN PROGRAM

```
PROGRAM STIFF (INPUT, OUTPUT, TAPE5 = INPUT, TAPE6
&= OUTPUT)
  REAL X,H,Y(4),TOL,XEND,WK(100),APA
  INTEGER N,METH,MITER,INDEX,IER,IWK(4),L
  EXTERNAL FCN
  EXTERNAL FCNJ
  COMMON/ALFA/APA
C DENKLEM SAYISI
  110 N=4
C SONUÇ ÇÖZÜMLERİNİN YAZILDIĞI DOSYA
  OPEN (7,FILE='KAPA')
C ADIM ARALIĞI
  WRITE (6,*)'H='
  READ (5,*)H1
C BAŞLANGIÇ DEĞERLERİ VE KAPA'NIN VERİLMESİ
  X=0.
  Y(1)=0.
  Y(2)=0.
  WRITE (6,*)'L='
  READ(5,*)L
  WRITE (6,*)'KAPA='
  READ (5,*)APA
  WRITE (6,*)'Y(3)='
  READ (5,*)Y(3)
  Y(4)=(APA*Y(3)**2-1.)/2.
C ÇÖZÜMLERİN HASSASIYETİNİN (TOL) VERİLMESİ
  WRITE (6,*)'TOL='
  READ (5,*)TOL
C DGEAR İÇİN BAZI PARAMETRELER
  METH=2
  MITER=2
  INDEX=1
  WRITE (6,22)
  WRITE (6,33)X,Y(1),Y(2),Y(3),Y(4)
  WRITE (7,33)X,Y(1),Y(2),Y(3),Y(4)
  DO 11 K=1,L
    H=H1
    XEND=FLOAT(K)*H
C IMSL'DEN DGEAR ALTPROGRAMININ ÇAĞRILMASI
    CALL DGEAR (N, FCN, FCNJ, X, H, Y, XEND, TOL, METH,
&MITER, INDEX, IWK, WK, IER)
C XEND BAĞIMSIZ DEĞİŞKENİ VE ÇÖZÜM VEKTÖRÜNÜN YAZILMASI
    WRITE (6,33)XEND,(Y(I),I=1,N)
    WRITE (7,33)XEND,(Y(I),I=1,N)
  11 CONTINUE
  REWIND 7
  22 FORMAT(6X,'X',12X,'Y(1)',13X,'Y(2)',13X,'Y(3)',13X,
&'Y(4)',/)
  33 FORMAT(3X,F7.4,4(4X,D13.6))
  GO TO 110
  STOP
  END
```

C DENKLEMLERİMİZİN VERİLDİĞİ ALTPROGRAM

```
SUBROUTINE FCN(N,X,Y,YPRIME)
REAL Y(N),YPRIME(N),X
COMMON/ALFA/APA
YPRIME(1)=Y(3)
YPRIME(2)=X*Y(3)/2.
YPRIME(3)=Y(4)
AA=Y(1)**2-1.-X*Y(1)*Y(3)+2.*Y(2)*Y(3)-2.*Y(4)
BB=-2.*Y(1)*Y(4)+Y(3)**2
CC=2.*Y(2)-X*Y(1)
YPRIME(4)=0.
IF(CC.NE.0.)YPRIME(4)=(AA/APA+BB)/CC
RETURN
END
```

C SEÇTİĞİMİZ PARAMETRELER İÇİN JAKOBYEN HESABI

```
C GEREKMEMEKTE
SUBROUTINE FCNJ(N,X,Y,PD)
REAL Y(N),PD(N,N),X
INTEGER N
RETURN
END
```

E K B
SONLU FARKLAR METODUNU
KULLANAN PROGRAM

```
PROGRAM FNTDIF (INPUT,OUTPUT,TAPES=INPUT,  
&TAPES=OUTPUT)  
  REAL ABT(4),PAR(5),Y(4,201),WORK(19000),X(201)  
  INTEGER N,NGMAX,NGRID,IP,IR,IY,IWORK(3000)  
  EXTERNAL FCNI,FCNJ,FCNB  
  COMMON/ALFA/APA  
C GEAR METODUNDAN ELDE EDİLEN DEĞERLERİN BULUNDUĞU DOSYA  
  OPEN(2,STATUS='OLD',FILE='FK01')  
C YENİ ÇÖZÜMLERİN YAZILACAĞI DOSYA  
  OPEN(7,FILE='FK10')  
C DENKLEM SAYISI (n)  
  N=4  
C KAPA PARAMETRESİNİN OKUNMASI  
  WRITE(5,*)'KAPA='  
  READ(5,*)APA  
  WRITE(6,22)  
C NÜMERİK İNTEGRASYON İÇİN ARALIK SAYISI  
  NGRID=201  
  DO 44 I=1,NGRID  
C İLK DEĞERLERİN GEAR METODUNDAN ELDE EDİLEN DOSYADAN  
  OKUNMASI  
  READ(2,*)X(I),(Y(J,I),J=1,N)  
  44 WRITE(6,*)X(I),(Y(J,I),J=1,N)  
C NÜMERİK İNTEGRASYON İÇİN XA BAŞLANGIÇ ve XB BİTİŞ  
  DEĞERLERİ  
  XA=0.  
  XB=20.  
C MAKSİMUM ARALIK SAYISI  
  NGMAX=401  
C DVCPR İÇİN PARAMETRELER  
  IP=2  
  IR=0  
C ÇÖZÜM HASSASİYETİ  
  TOL=0.000001  
  IY=4  
C DENKLEMLERİN KARAKTERİ ve SONUÇLARIN TİPİ İLE İLGİLİ  
  PARAMETRELER  
  PAR(1)=1.  
  PAR(2)=0.  
  PAR(3)=1.  
  PAR(4)=1.  
  PAR(5)=0.  
C IMSL'DEN DVCPR ALTPROGRAMININ ÇAĞIRILMASI  
  CALL DVCPR(N,FCNI,FCNJ,FCNB,XA,XB,NGMAX,NGRID,IP,  
  &IR,TOL,X,Y,IY,ABT,PAR,WORK,IWORK,IER)  
  DO 11 I=1,NGRID  
C SONUÇLARIN YAZILMASI  
  WRITE(7,33)X(I),(Y(J,I),J=1,N)  
  11 WRITE(6,33)X(I),(Y(J,I),J=1,N)  
  22 FORMAT(6X,'X',12X,'Y(1)',13X,'Y(2)',13X,'Y(3)',13X,  
  &'Y(4)',/)  
  33 FORMAT(3X,F7.4,4(4X,D13.6))
```

```
STOP
END
C DENKLEMLERİN VERİLDİĞİ ALTPROGRAM
SUBROUTINE FCNI (N,X,Y,YPRIME)
REAL Y (N),YPRIME (N)
COMMON/ALFA/APA
YPRIME (1)=Y (3)
YPRIME (2)=X*Y (3)/2.
YPRIME (3)=Y (4)
AA=Y (1)**2-1.-X*Y (1)*Y (3)+2.*Y (2)*Y (3)-2.*Y (4)
BB=-2.*Y (1)*Y (4)+Y (3)**2
CC=2.*Y (2)-X*Y (1)
YPRIME (4)=0.
IF (CC.NE.0.)YPRIME (4)=(AA/APA+BB)/CC
RETURN
END
C DENKLEMLERİN JAKOBYENİNİN VERİLDİĞİ ALTPROGRAM
SUBROUTINE FCNJ (N,X,Y,PD)
REAL Y (N),PD (N,N)
COMMON/ALFA/APA
PD (1,1)=0.
PD (1,2)=0.
PD (1,3)=1.
PD (1,4)=0.
PD (2,1)=0.
PD (2,2)=0.
PD (2,3)=X/2.
PD (2,4)=0.
PD (3,1)=0.
PD (3,2)=0.
PD (3,3)=0.
PD (3,4)=1.
AA=Y (1)**2-1.-X*Y (1)*Y (3)+2.*Y (2)*Y (3)-2.*Y (4)
BB=-2.*Y (1)*Y (4)+Y (3)**2
CC=2.*Y (2)-X*Y (1)
IF (CC.EQ.0.)GO TO 27
PD (4,1)=((2.*Y (1)-X*Y (3))/APA-2.*Y (4))
&*CC+(AA/APA+BB)*X)/CC**2
PD (4,2)=2.*Y (3)/APA*CC-(AA/APA+BB)*2.)/CC**2
PD (4,3)=((-X*Y (1)+2.*Y (2))/APA+2.*Y (3))/CC
PD (4,4)=(-2./APA-2.*Y (1))/CC
GO TO 30
27 PD (4,1)=1.E10
PD (4,2)=1.E10
PD (4,3)=1.E10
PD (4,4)=1.E10
30 RETURN
END
C BAŞLANGIÇ DEĞERLERİNİN VERİLDİĞİ ALTPROGRAM
SUBROUTINE FCNB (N,YA,YB,F)
REAL YA (N),YB (N),F (N)
F (1)=YA (1)
F (2)=YA (2)
F (3)=YB (1)-1
F (4)=YB (3)
RETURN
END
```

Ö Z G E Ç M İ S

1963'de Ankara'da doğdu. 1974'de Bornova (İzmir) Anadolu Lisesi'ne girdi. 1981'de bu liseden mezun oldu. Aynı yıl TÜBİTAK'ın liseler arası matematik yarışmasında Ege Bölgesi birinciliğini aldı. Yine 1981'de Üniversite Giriş Sınavı ikinci basamağında fen puanında Türkiye genelinde 37. oldu ve Boğaziçi Üniversitesi Makina Mühendisliği bölümüne girdi. 1982'de TÜBİTAK bursu kazandı ve bu burs lisans ve yüksek lisans öğrenimi boyunca devam etti. 1985'de onur öğrencisi olarak Boğaziçi Üniversitesi Makina Mühendisliği bölümünden mezun oldu. 1987 yılında ise Boğaziçi Üniversitesinden Makina yüksek lisans derecesini aldı. Aynı yıl Boğaziçi Üniversitesi'nin Makina bölümünde doktora programına başladı ve bu üniversitenin Matematik bölümü'nde araştırma görevlisi oldu. 1988'de doktora öğrenimini Boğaziçi Üniversitesi'nden İstanbul Teknik Üniversitesi'ne transfer etti. Halen Boğaziçi Üniversitesi Matematik bölümünde araştırma görevlisidir.