

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

**İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLARA İLİŞKİN
VARSAYIMSAL ÖĞRENME YOLLARININ VE
ÖĞRETİM DİZİSİNİN TASARLANMASI**

Aytuğ ÖZALTUN ÇELİK

**İZMİR
2018**

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

**İKİNCİ DERECE DEN FONKSİYONLARA
İLİŞKİN VARSAYIMSAL ÖĞRENME
YOLLARININ VE ÖĞRETİM DİZİSİNİN
TASARLANMASI**

Aytuğ ÖZALTUN ÇELİK

Danışman

Prof. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL

İZMİR

2018

Yemin Metni

Doktora tezi olarak sunduğum “İkinci Dereceden Fonksiyonlara İlişkin Varsayımsal Öğrenme Yollarının Ve Öğretim Dizisinin Tasarlanması” adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurulmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin Kaynak Dizininde gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

09/03/2018



Aytuğ ÖZALTUN ÇELİK

Değerlendirme Kurulu Üyeleri

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İşbu çalışma, jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Programında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL

Üye : Prof. Dr. Adnan BAKI

Üye : Prof. Dr. Adem ÇELİK

Üye : Doç. Dr. Gülseren KARAGÖZ AKAR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aysun Nüket ELÇİ

Onay

Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

09/03/2018

Prof. Dr. Süha YILMAZ
Enstitü Müdürü V.



Teşekkür

Doktora tez çalışmamla birlikte akademik anlamda hayatımın önemli süreçlerinden birini tamamlamış bulunuyorum. Bu uzun ve yoğun çalışma döneminde yanımda olan herkese teşekkür ediyorum.

Öncelikle tez çalışmamın niteliğinin artması için değerli fikirlerini benimle paylaşan ve bakış açımı genişleten tez değerlendirme kurulundaki saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Adnan BAKİ'ye Prof. Dr. Adem ÇELİK'e, Doç. Dr. Gülseren KARAGÖZ AKAR'a ve Yrd. Doç. Dr. Aysun Nüket ELÇİ'ye çok teşekkür ederim. Bu süreçteki desteği benim için önemli olan sayın hocam Doç. Dr. Necdet GÜNER'e ve zamanını ayırarak verdiği dönütleriyle tezime katkı sağlayan ve bana destek olan arkadaşım Dr. Zekiye ÖZGÜR'e çok teşekkür ederim. Çalışmama katılan ve yüksek motivasyonla çalışan katılımcı öğrencilere de teşekkür ederim. Ayrıca doktora öğrenciliğim boyunca beni maddi olarak destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Programı'na teşekkür ediyorum.

Doktora sürecimin tüm aşamasında yanımda olan ve pozitif enerjisiyle motivasyonumu arttıran değerli danışman hocam Prof. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL'e minnetle teşekkürlerimi sunuyorum. Canım hocam, engin bilgilerinizi benimle paylaştığınız ve bana güvenip inandığınız için çok mutluyum. Öğrenciniz olmanın ve birlikte çalışmanın her zaman gururunu hissedeceğim.

Varlıklarıyla en büyük destekçilerim olan annem Yurdagül ÖZALTUN'a, babam Ali ÖZALTUN'a ve abim Hüseyin ÖZALTUN'a sonsuz sevgimle teşekkür ediyorum. Tez sürecinin başından sonuna kadar bana verdiğiniz gücün ve gösterdiğiniz sabrın karşılığı yok. İyi ki varsınız.. Üzerimdeki emeği çok olan canım anneannem ve dedem esirgemediğiniz sevginiz için tüm kalbimle teşekkür ediyorum.

Son olarak, başlangıcından bitişine kadar bu süreci benimle birlikte yaşayan ve zorlu süreçlerimi kolaylaştıran eşim Sercan'a teşekkür etmek istiyorum. Çalışmamı başarıyla tamamlayabilmemde özverinin, desteğinin ve en önemlisi varlığının katkısı çok büyük. İyi ki varsın...

İçindekiler

Yemin Metni	i
Değerlendirme Kurulu Üyeleri	ii
Yüksek Öğretim Kurulu Dokümantasyon Merkezi Tez Veri Formu.....	iii
Teşekkür.....	iv
İçindekiler	v
Tablo Listesi.....	vii
Özet	x
Abstract	xiii
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
Problem Durumu	7
Amaç ve Önem	10
Problem Cümlesi	15
Alt Problemler	15
Sayıtlar	15
Sınırlılıklar.....	15
Tanımlar	16
Kısaltmalar	16
BÖLÜM II.....	17
İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR	17
Fonksiyonlar	17
Fonksiyonlara Yönelik Yapılan Araştırmalar	20
İkinci Dereceden Fonksiyonlar.....	26
Öğrencilerin İkinci Dereceden Fonksiyonları Anlamalarına Yönelik Yapılan Araştırmalar.....	30
Öğrencilerin İkinci Dereceden Fonksiyonlara İlişkin Güçlüklerine Yönelik Yapılan Araştırmalar.....	43
İkinci Dereceden Fonksiyonlara Yönelik Yapılan Diğer Araştırmalar	47
Nicel Muhakeme.....	51
Nicel Muhakemeye Yönelik Yapılan Araştırmalar	54
Kavramsal Çerçeve.....	62
Matematiği Öğrenmeye İlişkin Perspektifler	63
Matematiği Öğretmeye İlişkin Perspektifler	67
BÖLÜM III	79
YÖNTEM.....	79
Tasarım Tabanlı Araştırma	80

Tasarım Tabanlı Araştırmanın Tasarım Aşaması.....	91
Tasarım Tabanlı Araştırmanın Uygulama Aşaması	100
Araştırmanın Katılımcıları	102
Veri Toplama Süreci	105
Veri Çözümleme Teknikleri.....	111
Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği	120
Araştırmacının Rolü	121
BÖLÜM IV	123
BULGULAR VE YORUMLAR.....	123
I. Alt Probleme Yönelik Bulgular ve Yorumlar	123
Birinci Döngü Kapsamında Öğrencilerin Gerçekleştirdikleri Zihinsel Eylemlere	
Yönelik Bulgular	124
İkinci Döngü Kapsamında Öğrencilerin Gerçekleştirdikleri Zihinsel Eylemlere Yönelik	
Bulgular.....	146
II. Alt Probleme Yönelik Bulgular	246
Etkinlik 1-Dünya'nın Dibi (1. Aşama).....	250
Etkinlik 1-Dünya'nın Dibi (2. Aşama).....	254
Etkinlik 2-El Castillo (1.Aşama).....	257
Etkinlik 2-El Castillo (2. Aşama).....	262
Ölçme-Değerlendirme I Etkinliği.....	269
Ölçme-Değerlendirme II Etkinliği	271
Etkinlik 3-En Uzun Basketbol Atışı (1.Aşama)	272
Etkinlik 3-En Uzun Basketbol Atışı (2.Aşama)	275
Ölçme-Değerlendirme III Etkinliği	279
Etkinlik 4-Parabolik Uçuş (1. Aşama)	280
Etkinlik 4-Parabolik Uçuş (2. Aşama)	283
Ölçme-Değerlendirme IV Etkinliği.....	285
BÖLÜM V	290
SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....	290
Matematiksel Modelleme Etkinliklerinin Öğrencilerin Nicel Muhakemelerini	
Desteklemesi.....	290
Doğrusal Fonksiyona İlişkin Öğrenci Öğrenmeleri.....	295
Öğrencilerin İki Doğrusal Fonksiyonun Çarpımıyla İkinci Dereceden Fonksiyonun ve	
Grafığının Oluşturulması Sürecindeki Zihinsel Eylemleri	299
İkinci Dereceden Fonksiyonun Tepe Noktası ve Simetri Eksenine İlişkin Öğrenci	
Öğrenmeleri.....	305
İkinci Dereceden Fonksiyonun Farklı Gösterimlerine İlişkin Öğrenci Öğrenmeleri	309
İkinci Dereceden Fonksiyonun Katsayılarına ve Parabolün Öteleme Hareketlerine İlişkin	
Öğrenci Öğrenmeleri	311
KAYNAKÇA.....	316
EKLER.....	333

Tablo Listesi

Tablo 1	Nicel Operasyonlar ve Örnekleri (Thompson, 1990).....	52
Tablo 2	Tasarım Tabanlı Araştırmalar ve Deneysel Araştırmalar Arasındaki Farklılıklar.....	84
Tablo 3	İkinci Dereceden Fonksiyonlara İlişkin Varsayımsal Öğrenme Süreci	96
Tablo 4	Pilot Çalışmaya Katılan Matematik Öğretmeni Adaylarına İlişkin Bilgiler.....	98
Tablo 5	Araştırmanın Döngülerinin Gerçekleştirilme Tarihleri ve Periyotları.....	101
Tablo 6	Birinci Döngünün Çalışma Grubuna İlişkin Bilgiler	103
Tablo 7	Geriye Dönük Analiz Sürecinden Bir Kesit.....	117
Tablo 8	Birinci Döngü Aşamasında Dünya'nın Dibi Etkinliğinde Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler.....	125
Tablo 9	Birinci Döngüdeki Öğrencilerin Dünya'nın Dibi Etkinliğinde Karşılaştıkları Güçlükler.....	129
Tablo 10	Birinci Döngü Aşamasında El Castillo Etkinliğinde Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler.....	132
Tablo 11	Birinci Döngüdeki Öğrencilerin El Castillo Etkinliğinde Karşılaştıkları Güçlükler.....	134
Tablo 12	Birinci Döngü Aşamasında En Uzun Basketbol Atışı Etkinliğinde Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler.....	138
Tablo 13	Birinci Döngüdeki Öğrencilerin En Uzun Basketbol Atışı Etkinliğinde Karşılaştıkları Güçlükler.....	140
Tablo 14	Birinci Döngü Aşamasında Parabolik Uçuş Etkinliğinde Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler.....	143
Tablo 15	Can'ın İkinci Dereceden Fonksiyonların Genel Özellikleri ve Doğrusal Fonksiyonlarla İlişkisi İle İlgili Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular.....	230
Tablo 16	Can'ın Değişim Miktarlarına İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular.....	228
Tablo 17	Can'ın Tepe Noktasına İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular.....	230
Tablo 18	Can'ın Katsayılarla İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular.....	232
Tablo 19	Can'ın Ötelemeye İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular.....	234

Tablo 20	Alp'in İkinci Dereceden Fonksiyonların Genel Özellikleri ve Doğrusal Fonksiyonlarla İlişkisi İle İlgili Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular.....	236
Tablo 21	Alp'in Değişim Miktarlarına İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular.....	239
Tablo 22	Alp'in Tepe Noktasına İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular.....	241
Tablo 23	Alp'in Katsayılarla İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular.....	243
Tablo 24	Alp'in Ötelemeye İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular.....	245
Tablo 25	Öğretim Dizisine Hazırlık Aşamasının İçeriği.....	249
Tablo 26	İkinci Dereceden Fonksiyonlara İlişkin Öğretim Dizisinin İçeriği....	287

Şekil Listesi

Şekil 1	Matematiği Öğretme Döngüsü (Simon, 1995, s. 136).....	72
Şekil 2	Tasarım Tabanlı Araştırmaların Üç Temel Çıktısı (McKenney, Nieveen ve van den Akker, 2006, s. 73).....	82
Şekil 3	Sistemik Tasarım Döngüleri (Plomp, 2013, s.17).....	86
Şekil 4	Tasarım Tabanlı Araştırma Yaklaşımı (Reeves, 2000, s. 9).....	87
Şekil 5	Tasarım Tabanlı Araştırmaların Aşamaları (Stephan, 2015, s.906)...	88
Şekil 6	Tasarım ve Deneyler Arasındaki Yansıtıcı İlişki ve Mikro ve Makro Tasarım Döngüleri (Gravemeijer ve Cobb, 2006, s.85).....	88
Şekil 7	Tasarım Tabanlı Araştırmanın Döngüsel Süreci (McKenney ve van den Akker, 2005, s. 49).....	90
Şekil 8	Tez Çalışmasındaki Tasarım Tabanlı Araştırmanın Üç Aşaması.....	91
Şekil 9	Özgür'ün İkinci Dereceden Fonksiyonlara İlişkin Zihin Haritası.....	95
Şekil 10	Tasarım Tabanlı Araştırma Kapsamında Gerçekleştirilen Ardıl Döngüler.....	102
Şekil 11	Kuram Oluşturma Çalışmasının Ortak ve Farklı Prensipleri.....	112
Şekil 12	Kuram Oluşturma Deseninde Kodlama Süreci (Charmaz, 2008b)...	115
Şekil 13	Birinci Döngüdeki Öğrenci Anlamalarının Nicel Muhakemeleri Bağlamında Geriye Dönük Analiz Akış Şeması.....	118
Şekil 14	İkinci Döngüdeki Öğrenci Anlamalarının Nicel Muhakemeleri Bağlamında Geriye Dönük Analiz Akış Şeması.....	119
Şekil 15	El Castillo'nun Alt ve Üst Tabanlarının İlişkisi.....	258
Şekil 16	Kat-Kenar Uzunluğu İlişkinin Grafiksel Gösterimi.....	260
Şekil 17	Basamak ve Kenar Uzunluğu İlişkinin Grafiksel Gösterimi.....	261
Şekil 18	Kat-Alan İlişkinin Grafiksel Gösterimi.....	264
Şekil 19	Basamak-Alan İlişkinin Grafiksel Gösterimi.....	265
Şekil 20	Basamak-Alan İlişkinin Genişletilen Tanım Aralığındaki Grafiksel Gösterimi.....	266
Şekil 21	Yükseklik-Alan İlişkinin Genişletilmiş Tanım Aralığındaki Grafiksel Gösterimi.....	266
Şekil 22	Simetri Eksenini ile Aynı Yükseklikte Bulunan Noktaların İlişkisi...	275
Şekil 23	Parabolik Uçuşun 20, 10 ve 5 Saniyede Tamamlanması Durumundaki Uçağın Hareketlerinin Grafiksel Gösterimi.....	282
Şekil 24	Uçağın Farklı Saniyelerde Gerçekleştirdiği Hareketlerin Grafiksel Gösterimleri.....	283

Özet

İKİNCİ DERECEDEDEN FONKSİYONLARA İLİŞKİN VARSAYIMSAL ÖĞRENME YOLLARININ VE ÖĞRETİM DİZİSİNİN TASARLANMASI

Öğrencilerin karşılaştıkları doğrusal olmayan fonksiyon ailelerinden ilki ikinci dereceden fonksiyonlardır ve bu fonksiyonlara ilişkin güçlü bir anlama matematiğin birçok konusunda başarılı olmak için temeldir. İkinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesinin önemli olmasının yanında bu alanla ilgili alanyazın öğrencilerin karşılaştıkları zorlukları ve anlamalarına ilişkin engelleri ortaya koymaktadır. Nicel ilişkilere yönelik akıl yürütme süreçleri öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlar konusunu kavramsal öğrenmelerini desteklemektedir. Buna karşın, matematik eğitimi alanyazında ikinci dereceden fonksiyonların öğretilmesi için öğrencilerin anlamalarını ve akıl yürütme yollarını tanımlayan araştırma tabanlı bir çerçeve geliştirilmemiştir. Bu doğrultuda doktora tez çalışmasının amacı, onuncu sınıf öğrencilerinin zihinsel eylemlerini tetikleyerek ikinci dereceden fonksiyonları kavramsal öğrenmelerini sağlayacak bir öğretim dizisi tasarlamak ve bu süreçte öğrencilerin anlamalarının gelişiminin nicel muhakeme bağlamında nasıl şekillendiğini ortaya çıkarmaktır.

Doktora tez çalışmasında temel olarak öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları kavramsal öğrenmelerini destekleyecek bir öğretim modelini ortaya koymak amaçlandığı için, çalışma döngüsel bir süreç olan tasarım tabanlı araştırma modeline dayandırılmıştır. Uygulanan tasarım tabanlı araştırma, tasarı, uygulama ve analiz olacak şekilde üç aşamada gerçekleştirilmiştir. Tasarım aşamasında alanyazın taraması, bir matematik öğretmenin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin öğretiminin gözlemlenmesi, matematik öğretmenleri ve matematik öğretmen adayları ile görüşmeler yapılması ve on birinci sınıf öğrenciyle klinik mülakat gerçekleştirilmesi sonucunda varsayimsal öğrenme süreci oluşturulmuştur. Bu sürece uygun dört gerçek yaşam bağlamı, mantıksal-matematiksel öğrenme etkinliği ve bu etkinliklerin sonrasında uygulanacak dört ölçme-değerlendirme etkinliği tasarlanmıştır.

Tasarım tabanlı araştırmanın uygulama aşaması iki ardıl döngüyü kapsamıştır. İlk döngü, öğretim dizisinin bir sınıf ortamındaki farklı öğrencilerin öğrenmelerini destekleyip desteklemediğini değerlendirmek amacıyla uygulanmıştır. Bu döngüde öğrencilerin ikiye kişilik gruplar halinde etkinlikler üzerinde çalışmaları sonucunda

ortaya çıkan öğrenci anlamaları doğrultusunda öğretim dizisi tekrar revize edilmiştir. Ardından ikinci döngü uygulaması iki onuncu sınıf öğrencisinin öğretim dizisi üzerine grup olarak çalışmalarıyla gerçekleştirilmiştir. Çalışmadaki veri toplama araçları öğretim deneyleri boyunca alınan video kamera kayıtları, araştırmacı gözlem notları, öğrencilerle yapılan klinik mülakatlar ve öğrencilerin yansıtıcı günlükleridir.

Çalışmanın veri analiz sürecinde veri toplama süreci ile eş zamanlı bir şekilde sürekli karşılaştırmalı olarak devam eden analizler yapılmıştır. Tüm süreç içerisinde yapılandırılmamış bir şekilde devam eden bu analizlerde öğrenci anlamaları bağlamında etkinliklere, ortaya çıkan ya da çıkması beklenen çokluklara ve nicel operasyonlara odaklanılmıştır. Kuram oluşturma sürecinde ise geriye dönük analiz olarak gerçekleştirilmiştir. Birinci ve ikinci döngülerin sonunda ise öğrencilerin nicel muhakemeleri bağlamında geriye dönük analizler yapılmıştır.

Yapılan analizler doğrultusunda ikinci dereceden fonksiyonların öğretimine yönelik öğretim dizisinin nihai hali ortaya koyulmuştur. Gerçek yaşam bağlamlı etkinlikler dinamik durumları içerdiği için öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri anlamlandırmalarına ve fonksiyonun eş zamanlı değişim fikrini oluşturmalarına imkan vermiştir. Öğrenciler problem durumları içerisinde yer verilen değişkenleri ve değişkenlerin değişim miktarlarını sürekli çarpımsal olarak karşılaştırmışlardır. Öğrenciler ikinci dereceden fonksiyonu bir karenin alanı fikrinden yararlanarak iki doğrusal fonksiyonu çarpımı yolu ile oluşturmuşlardır. Alan fonksiyonunda Δx değeri ile Δy değeri arasında sabit bir değişim oranı olduğunu fark etmeleri ve ifade etmeleri nicel muhakemelerinin güçlü bir göstergesi olmuştur. Öğrenciler ikinci dereceden fonksiyonun tepe noktası, simetri eksenini gibi çoklukları, atılan bir topun izlediği yol ile ilişkilendirerek oluşturmuşlardır. Tepe noktasının apsisine karşılık gelen $-\frac{b}{2a}$ ile bu değer fonksiyonda karşılık geldiği y değerinin eşleşmesi sonucu elde edilen sıralı ikili olduğunu anlamlandırabilmişlerdir. Bu süreçte ortaya koyulan öğretim dizisinin onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin kavramsal anlamalarını desteklediği düşünülmektedir. Matematik öğretmenlerinin öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları öğrenmelerini desteklemek amacıyla kendi sınıf ortamlarına uygun şekilde revize ederek kullanmaları önerilmektedir. Ek olarak, bu

çalışmadaki temel prensipleri diğer matematiksel kavramların öğretimine ilişkin bir öğrenme ortamı tasarlamada dikkate almaları etkili olabilecektir.

Tasarım tabanlı araştırmalar öğretimsel ürünlerin ya da bir programın tasarlanmasına, geliştirilmesine ve niteliğinin artırılmasına ya da yaratıcı ve dikkatli bir şekilde tasarlanmaları halinde katılımcıların mesleki gelişimlerine katkı sağlamaktadırlar. Bu sebeple öğretmenlerin de bu tür tasarım tabanlı araştırma süreçlerine dahil edilmeleri de önemli görülmektedir.



Abstract

Designing Hypothetical Learning Trajectories and Instructional Sequences Related to Quadratic Functions

Quadratic functions are one of the nonlinear functions that students encounter first and a strong understanding of quadratic functions is foundational to be successful at many mathematical concepts. Along with the importance of acquiring the quadratic functions, the related literature indicates the difficulties faced by the students and the limitations regarding their understanding. The reasoning process about quantitative relations supports the students' conceptual learning related to the quadratic functions. However, in the literature of mathematics education, a research-based framework defining the students' understanding and reasoning of the quadratic functions was not designed. In this direction, the purpose of this PhD dissertation is to design an instructional sequence for students to learn the quadratic functions conceptually by triggering their cognitive actions, and to reveal how the students' understanding is shaped in the context of quantitative reasoning.

As the main purpose of this dissertation is to develop an instructional model that will support students' conceptual understanding of quadratic functions, the study was conducted as a design-based research, following a cyclical process. The study consisted of three phases: the design, implementation, and analysis phases. During the design phase, a hypothetical learning trajectory was developed through a review of the related literature on quadratic functions, observations of a mathematics teacher's instruction of quadratic functions, a clinical interview conducted with an 11th grade student, and interviews with pre-service and in-service mathematics teachers. Then, based on real-life contexts, four logico-mathematical learning tasks were developed, with accompanying assessment tasks to evaluate the students' understanding.

The implementation phase of this design-based research consisted of two consecutive cycles. The first cycle was carried out to evaluate the success of the instructional sequence in supporting student learning in a class. Following the implementation of the instructional sequence in the class, the instructional sequence

was further revised based on the students' understanding of the concepts. In the second cycle of the implementation phase, two 10th grade students worked on the revised set of tasks in pair. Hence, the video recordings taken during the teaching experiments, the researchers' observation notes, the clinical interviews, and the students' reflective journals constituted the data sources of the study.

In the data analysis process of the study, the constant comparison method simultaneously conducted with the data collection process was used. The data analysis process included two types of analysis. First, concurrent to the data collection, an *ongoing analysis* was conducted by using constant comparison method. Throughout the data analysis process, the focus was on the students' understanding in the context of the tasks, the quantities that were constructed or that were expected to be constructed, and the quantitative operations in the unstructured analyses. Second, a *retrospective analysis* of the teaching experiment data was conducted, with a focus on students' quantitative reasoning.

As a result of the data analysis, the instructional sequence for quadratic functions was finalized. Because the tasks were grounded in real-life contexts involving dynamic situations, they contributed to the students' understanding of functional relations and helped them construct the idea of covarying change in the functions. The students continually performed multiplicative comparisons between the variables and the amounts of changes in the variables in the context of the tasks. In addition, the students constructed the quadratic function through multiplication of two linear functions by drawing on the idea of finding the area of a square. The students showed evidence of strong quantitative reasoning, as indicated by their recognition of and expression that there was a constant rate of change between Δx and Δy values in the area function. The students constructed the quantities such as vertex and axis of symmetry of a quadratic function with respect to the path a ball follows. Furthermore, the students were able to understand that the vertex is an ordered pair formed by matching the value of the x-axis with the y-value corresponding to the that x-value in the function, instead of viewing it as just the value of $-\frac{b}{2a}$. Hence, the instructional sequence designed in this study seemed to have supported the participant students'

conceptual understanding of quadratic functions. Therefore, the instructional sequence may be a helpful resource for mathematics teachers in supporting their students' understanding of quadratic functions, provided that they revise the instructional sequence according to their own classroom context. In addition, mathematics teachers may also take into account the main principles of this study when designing a learning environment for teaching other mathematical concepts, as well.

Design-based research studies contribute to the design, development and improvement of instructional products or an instructional program, as well as contributing to the participant teachers' professional development when they are creatively and carefully designed. Therefore, it is considered crucial for teachers to participate in this kind of design-based research studies.

BÖLÜM I

GİRİŞ

Matematiğin günlük yaşam durumları ile ilişkili olması ve öğrencilere tanıdık gelmesi (Freudental, 1977) fikrine dayalı olarak gerçek bağlamların kullanılması matematik eğitiminin belirleyici özelliklerinden biridir (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Öğrencilerin kendi informel bilgilerini anlamalarını destekleyecek matematik öğretimi yaklaşımında öğrencilerin öğretme-öğrenme sürecine dahil edilmesi gerekmektedir (Gravemeijer ve Doorman, 1999). Gravemeijer ve Doorman (1999) geleneksel öğretime karşın bu alternatif öğretim yaklaşımında öğrencilerin hipotezler geliştirerek ve bu hipotezleri test ederek temel fikirler üzerine çalışabilecekleri bir öğrenme ortamı yaratılacağını ve kendi anlamalarına temel oluşturabilecek kavramları geliştirmelerine imkan verileceğini ifade etmektedirler. Bu sayede öğrenciler kendi informel bilgilerini matematiksel kavramlarla ilişkilendirebilmektedirler. Bu doğrultuda, matematik eğitimi için ihtiyaç duyulan şey, öğrencilerin var olan düşünme yollarının daha karmaşık matematiksel düşünme yolları geliştirmelerine yardımcı olan bir öğretim tasarlamak olduğunu vurgulayan Gravemeijer (2004) bu amacı Hollanda’da ortaya koyulan Gerçekçi Matematik Eğitimi (GME) ile ilişkilendirmektedir. Somut durumlardan yararlanarak bilgiyi yapılandırma, somuttan soyuta doğru ilerleyen matematiksel araçları geliştirme, bağımsız sonuçlara ulaşmaya ve yansıtmaya teşvik etme, etkileşim yoluyla öğrenenleri sosyal etkinliklere teşvik etme prensipleri etrafında düzenlenen GME yapılandırmacılık bilgi kuramına dayanan pedagojik bir yaklaşımdır (Simon, 2000).

Yapılandırmacılık bilgi kuramına göre, bilgi bilenden bilmeyene doğrudan aktarılamaz, birey kendi deneyimlerini yorumlayarak bilgisini yaşadığı dünya içerisinde şekillendirmekte ve aktif olarak oluşturmaktadır (von Glasersfeld, 1982). Radikal yapılandırmacılığı savunan von Glasersfeld (1998) bilginin deneyimlerimizin dışındaki dünyayı temsil etmediğini aslında deneyimlediğimiz dünyamızın içinde bir araç olduğunu ifade etmektedir. Bu teoriyi göz önüne aldığımızda, bir öğrencinin matematiksel bilgilerini oluşturması sırasında kendi zihinsel süreçlerinin ön plana çıktığını ve sunulan matematiksel kavramlara kendi oluşturduğu anlamları yüklediğini söyleyebiliriz. Öğrencilerin var olan bilgileri ve anlamları onların karşılaştıkları yeni kavramları yorumlayabilme durumlarını etkilemekte ve öğrenmelerine yön vermektedir. Piaget (1980) kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesinde oldukça önemli bir yere sahip olan yansıtıcı soyutlamaya vurgu yapmakta ve yansıtıcı soyutlamayı, yeni ve daha gelişmiş kavramların var olan kavramlardan ortaya çıktığı bir süreç olarak açıklamaktadır (Simon, Tzur, Heinz ve Kinzel, 2004). Bireyler zihinlerinde var olanlarla yaşadıkları çevreye uyum sağlamaya çalışırken aynı zamanda sosyal çevreleriyle etkileşim kurarak ve paylaşımlarda bulunarak bilgilerini düzenlemekte ve matematiksel kavramlara ilişkin anlayışlar oluşturmaktadırlar. Bireylerin psikolojik bir araç olan dil yardımıyla oluşturdukları sosyal etkileşimler yoluyla zihinsel eylemlerinde değişiklikler ortaya çıkmaktadır (Vygotsky, 1978). Vygotsky'e göre öğrenme, bireyin kendi dünyasında kurduğu etkileşimlerle fikirlerin tartışılması ve paylaşılması sonucunda gerçekleşmektedir. Vygotsky bu etkileşimde *Yaklaşık Öğrenme Eşiği* (Zone of Proximal Development) yapısına vurgu yapmaktadır.

Bağımsız olarak problem çözme ile belirlenen gerçek gelişim düzeyi ve yetişkin rehberliği ya da daha yeterli akran işbirliği altında problem çözme ile belirlenen potansiyel gelişim düzeyi arasındaki farktır (1978, s. 86).

Vygotsky'nin ortaya koyduğu bu yapı göz önüne alındığında, öğrenenlerin kendi mevcut bilgi düzeylerinin ötesindeki matematiksel anlamaları geliştirmelerini tetikleyen matematiksel etkinlikler öğrenme sürecinde önemli hale gelmektedir. Bu etkinlikler aracılığıyla kendi bilgi ve deneyimlerinden yararlanarak yeni kavramlara ilişkin matematiksel anlamalarını oluşturabilmektedirler. Matematiksel anlama, belirli bir örüntünün ya da ilişkinin/ilişkilerin mantıksal gerekliliğinin öğrenilmiş bir öngörüsüdür (Simon, 2003). Anlamanın matematik eğitimi kapsamında en temel terim

olduğunu ifade eden Thompson (2008) anlamaya dikkat edilmemesinin öğrencilerin öğrenmeleri ile ilgili birçok probleme yol açtığını vurgulamaktadır. Amerika Birleşik Devletleri Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi [National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)] (2001) anlayarak öğrenmenin öğrencilerin karşılaşacakları yeni problemleri çözmeleri için gerekli olduğunu açıklamakta ve kavramsal anlamayı matematiğin öğrenilmesi boyunca öğrencilerin yeterliğe ulaşmalarında önemli bir bileşen olarak ele almaktadır. Eğitimciler öğrencilerin kavramların yanı sıra işlemleri de öğrenmelerinin önemli olduğu konusunda fikir birliği içerisindeyler (Philip ve Vincent, 2003). Bir başka deyişle, matematiksel anlamının kavramsal anlamadan sonra ya da kavramsal anlamayla eş zamanlı bir şekilde ele alınacak bir diğer yönü işlemleri etkili ve akıcı bir şekilde kullanabilme becerisi olarak düşünülebilir. Bu doğrultuda, kavramları anlama hem onların altında yatan temel fikirlere sahip olma hem de kavramları etkili bir şekilde kullanabilir yeterliğe ulaşma olarak ifade edilebilir. Thompson (1995) karmaşık durumların kavranmasının nicel ilişki ağlarının yapılandırılmasıyla gerçekleştirildiğine değinmektedir. Öğrencilerin gerçekleştirdikleri zihinsel eylemler onların farklı kavramlar arasındaki ilişkilendirmeleri yapmalarını sağlamakta ve durumları nicel yapılar içerisinde değerlendirmelerine imkan vererek nicel muhakeme ile kavramsal öğrenmelerini desteklemektedir. Ellis (2011) çoklukları içeren durumları yorumlamanın öğrencilerin dinamik olarak değişen olaylarla ilgili esnek bir şekilde akıl yürütme becerilerini geliştirdiğini ifade etmektedir.

Öğrencilerin çoklukları ilişkilendirmeleri ve anlamaları onlar üzerinde nicel muhakemeler yapmaları ile mümkün olmaktadır. Bu bağlamda, kavramsal anlama için öğrencilerin nicel muhakemeleri bir başka deyişle zihinsel eylemleri gerekmektedir. Kavramlara yönelik gerçekleştirilebilecek zihinsel eylemler matematiksel kavramlar ele alınırken farklı şekillerde ortaya çıkabilirler. Örneğin bölme işlemini yapan bir öğrenci zihinsel olarak grupta ya da eş paylaşırma gibi zihinsel eylemleri gerçekleştirebilmektedir. Fonksiyon kavramını düşünen öğrencilerin zihinsel eylemleri ise eşleştirme veya eş zamanlı değişim fikrini içermektedir. Eş zamanlı değişim fikrini içeren fonksiyon kavramı matematikteki karmaşık ve soyut yapılardan biridir. Dünyamızdaki birçok ilişkiyi ifade etmenin güçlü bir yolu olan fonksiyonel

düşünme iki ya da daha fazla değişen çokluk arasındaki ilişkilere odaklanan gösterimsel düşünmenin bir türüdür (Wilkie, 2016a). İlişkisel düşünmeyi gerektiren fonksiyonların iyi bir şekilde anlaşılması üst düzey matematiksel akıl yürütmeyi desteklemekte ve birçok üst düzey matematiksel kavramın öğrenilmesine temel hazırlamaktadır. Paralel olarak, fonksiyonların matematiğin diğer gelişmiş alanları için temel olduğunu ifade eden Leinhardt, Zaslavsky ve Stein (1990) öğrencilerin fonksiyonları ve grafikleri öğrenme süreçlerinin diğer alanlardaki anlamlarını geliştirmek için sembolik sistemi kullandıkları kritik anlarından biri olarak açıklamaktadırlar. NCTM'de (2000, s.296) cebir öğrenme alanı içerisinde 9-12. sınıf düzeyindeki öğrencilerin örüntülere, ilişkilere ve fonksiyonlara ilişkin sahip olmaları beklenen yaklaşımlar şu şekilde ifade edilmiştir:

- Öğrenciler ilişkileri ve fonksiyonları anlamalı ve onlara ilişkin çeşitli gösterimleri seçebilmeli, kullanabilmeli ve gösterimler arası esnek bir şekilde geçiş yapabilmelidirler.
- Değişim oranını, x ve y eksenlerini kesen noktaları, asimptotları ve noktasal ve genel davranışlarını inceleyerek bir değişkenli fonksiyonları analiz edebilmelidirler.
- Yaygın olarak kullanılan fonksiyonları aritmetik olarak birleştirme, oluşturma ve ters çevirme gibi dönüşümleri anlamalı ve uygulamalı ve bu tür işlemleri daha karmaşık sembolik ifadeler üzerinde uygulamak için teknolojiyi kullanabilmelidirler.
- Polinom, rasyonel, üstel, logaritmik ve periyodik fonksiyonları içeren fonksiyon sınıflarının özelliklerini anlamalı ve karşılaştırabilmelidirler.
- İki değişkenli fonksiyonların gösterimlerini yorumlayabilmelidirler.
- Matematiksel ilişkileri göstermek ve açıklamak için sembolik cebiri kullanabilmelidirler.
- Bir durumdaki gerekli nicel ilişkileri tanımlayabilmeli ve bu ilişkileri modelleyebilecek fonksiyon sınıfını ya da sınıflarını belirleyebilmelidirler.
- Grafiksel ve sayısal verilerden değişim oranını tahmin edebilmeli ve yorumlayabilmelidirler.

Bu beklentiler göz önüne alındığında, öğrencilerin günlük yaşamlarındaki problemlerde fonksiyonel ilişkileri fark edebilmeleri, farklı fonksiyonları birbirleriyle ilişkilendirebilmeleri, gösterimler arası geçişleri yaparken gösterimlerin kendine özgü özelliklerini yorumlayabilmeleri ve fonksiyonu her özelliği ile bir bütün olarak kavrayabilmeleri öğretim süreçlerinde göz önüne alınması gereken hususlar olarak karşımıza çıkmaktadır. Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2018) incelendiğinde, öğrencilerin fonksiyon kavramı ile ilk olarak 9.sınıf düzeyinde karşılaştıkları görülmektedir. Bu sınıf düzeyinde öğrencilerden fonksiyonu tanım kümesi, değer kümesi, bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişki gibi özellikleri açısından ele almaları ve birim fonksiyon, sabit fonksiyon, birebir, örten fonksiyon gibi fonksiyon türleri üzerine çalışmaları beklenmektedir. Fonksiyon ailelerinden ise programda doğrusal fonksiyon ile ilgili incelemeler ele alınmaktadır. Doğrusal fonksiyonların öğrenilmesinden sonra diğer fonksiyon sınıflarından ilk olarak ikinci dereceden fonksiyonların öğretimi gerçekleştirilmektedir. Yeni öğrenilen ve doğrusal fonksiyondan farklı davranış sergileyen ikinci dereceden fonksiyonu anlamlandırmalarında öğrencilerin ön bilgileriyle ilişkilendirme yapmaları önem taşımaktadır. Movshovitz-Hadar (1993) doğrusal fonksiyonlara ilişkin bilgilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin bilgilerin yapılandırılması için gerekli temelleri oluşturduğunu ifade etmektedir. Benzer şekilde, Nielsen (2015) öğrencilerin ikinci dereceden denklemleri ve fonksiyonları kavramsal anlamaları için sahip oldukları ön bilgilerinin kritik rol oynadığını belirtmektedir.

Ülkemizdeki matematik öğrenimi süresince fonksiyon olarak 10.sınıf düzeyinde ele alınan ikinci dereceden fonksiyon kavramı ile ilgili Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programında (MEB, 2013) aşağıdaki kazanımlara yer verilmektedir (s. 26).

- İkinci dereceden bir değişkenli fonksiyonu açıklar ve grafiğini çizer.
 - o Fonksiyonun grafiğinin tepe noktası, eksenleri kestiği noktalar ve simetri eksenini buldurulur.
 - o Fonksiyonun grafiğinin tepe noktası ile fonksiyonun en küçük ya da en büyük değeri ilişkilendirilir.
 - o Grafiğin x-eksenini kestiği noktalar ile denklemin kökleri ilişkilendirilir.

- o Fonksiyonun katsayılarındaki değişimin fonksiyonun grafiği üzerine etkisi bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılarak incelenir.
- o $y = a(x - r)^2 + k$ ve $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ şeklinde verilen ikinci dereceden fonksiyonların grafikleri çizilir.
- o Tepe noktası ile grafiği üzerindeki bir noktası verilen ya da grafiği birisi y-eksenini kesmek şartıyla herhangi üç noktadan geçen ikinci dereceden fonksiyon oluşturulur.
- o Grafiği verilen ikinci dereceden denklemin cebirsel ifadesi bulunur.
- o Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılabilir.
- İkinci derece denklem ve fonksiyonlarla modellenen problemleri çözer.
- o Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılabilir.

Buna karşın 2018 yılı itibarıyla kullanılmaya başlanan güncel Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (MEB, 2018) ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin daha sınırlı kazanımların yer verildiği görülmektedir (s. 34).

- İkinci dereceden bir değişkenli fonksiyonun grafiğini çizerek yorumlar.
- o Fonksiyonun grafiğinin tepe noktası, eksenleri kestiği noktalar ve simetri eksenini buldurulur.
- o Fonksiyonun grafiğinin tepe noktası ile fonksiyonun en küçük ya da en büyük değeri ilişkilendirilir.
- o Fonksiyonun katsayılarındaki değişimin, fonksiyonun grafiği üzerine etkisi bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılarak yorumlanır.
- o Biri tepe noktası olmak üzere iki noktası verilen veya biri y ekseninde olmak üzere üç noktası verilen ikinci dereceden fonksiyon oluşturulur.
- o Bir doğru ile bir parabolün birbirine göre durumları incelenir.
- İkinci dereceden fonksiyonlarla modellenen problemleri çözer.

Kazanımlar incelendiğinde, sadece ikinci dereceden fonksiyonun özelliklerinin vurgulandığı ve ikinci dereceden denklem ile ilişkilendirilmesine yer verildiği görülmektedir. Dikkat çeken bir husus ise doğrusal fonksiyonlarla ilgili olarak herhangi bir fikre değinilmemiş olduğudur. Programdaki kazanımlar ikinci dereceden

fonksiyonların farklı gösterimlerine dikkat çekerken bu gösterimlerin ilişkilendirilmesine vurgu yapmamaktadır.

Bu tez çalışması kapsamında, yapılandırmacılık bilgi kuramına uygun olarak öğrencilerin zihinsel eylemleri dikkate alınarak ikinci dereceden fonksiyonların öğretilmesine yönelik bir öğretim dizisi tasarlanmış ve tasarım tabanlı araştırma kapsamında uygulanmıştır.

Öğretim dizisinde yer alan etkinlikler öğrencilerin nicel muhakemelerini tetikleyerek yansıtıcı soyutlama yapmalarını destekleyeceği varsayımıyla gerçek yaşam bağlamı olacak şekilde tasarlanmıştır. Öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları öğrenme sürecine doğrusal fonksiyonlara ilişkin bilgilerini kullanarak başlamalarının anlamlı olacağı düşünülerek öğretim dizisindeki ilk etkinlik doğrusal fonksiyon kavramının öğrenilmesine yönelik hazırlanmıştır. Sonrasındaki her etkinliğin öğrencilerin bir önceki etkinlik kapsamında kazandıkları fikirleri kullanarak ve gerçekleştirdikleri nicel muhakemelerden yararlanarak yeni anlamları oluşturmalarını destekleyecek şekilde olması göz önünde bulundurulmuştur. Etkinliklerin uygulanması sürecinde ise öğrencilerin birlikte çalışarak, birbirlerinin fikirlerinden yararlanarak kendi anlamlarını yapılandıracakları süreci ileri süren sosyal yapılandırmacılık perspektifi benimsenmiştir.

Problem Durumu

Fonksiyon kavramının oldukça karmaşık bir kavram olduğunu belirten Dreyfus ve Eisenberg (1982) bu durumun gerekçelerini fonksiyonun diğer kompleks matematiksel kavramlarla ilişkili olması, çeşitli alt kavramları ve matematik alanını bir araya getirmesi, doğası gereği bütünleştirici olması ve pek çok farklı gösterimlerle ortaya çıkması olarak göstermektedirler. Thompson (1994) öğrencilerin eş zamanlı değişim, nicel gösterimler, sayısal ilişkiler ve bu ilişkiler ile ilgili akıl yürütürerek soyutlamalar gerçekleştirmeleri halinde fonksiyon kavramını öğreneceklerini dile getirmektedir. Benzer şekilde, Ellis (2011) alanyazında önemine vurgu yapılan eş zamanlı değişim fikrinin birbiriyle ilişkili çokluklardaki değişimi göstermenin bir yolu olarak fonksiyon anlamını geliştirmede güçlü bir mekanizma olduğunu belirtmektedir.

Okul müfredatı ve öğretimi kapsamında öğrencilerin eş zamanlı değişim fikrini anlamalarına, eş zamanlı değişimin çoklu gösterimlerine daha fazla odaklanmalarına ve aynı fonksiyonun çoklu gösterimlerini vurgulayan farklı fonksiyon türlerini deneyimlemelerine fırsat verilmesi gerekliliği ön plana çıkmaktadır (Oerthman, Carlson ve Thompson, 2008). Bununla birlikte, fonksiyonun eşleme anlamının matematikçilerin ortaya çıkan problemleri çözmelerine yardımcı olmasına rağmen, bu anlam okul matematiğinde öğrencilerin fonksiyonun gerekliliğini anlamaları için yetersiz kalmaktadır (Thompson ve Carlson, 2017).

Öğrenciler çeşitli fonksiyonlara ilişkin akıl yürütme biçimlerini etkileyen ikinci dereceden ilişkilerle ortaokuldan itibaren karşılaşmalarına rağmen, fonksiyon olarak lise düzeyinde incelemeler yapmaktadırlar. Bu düzeylerde fonksiyon öğretiminde genel olarak iki çokluğun eş zamanlı değişim fikrine ve aralarındaki ilişkilere odaklanmak yerine geleneksel bir bakış açısıyla ele alınan fonksiyon kavramının farklı gösterimleri birbirinden bağımsız olarak sunulmaktadır. Bu sebeple de öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyon ve parabol ile ilişkili zorlukları ortaya çıkmaktadır. Benzer şekilde, Kotsopoulos (2007) lise matematik öğrencilerinin öğretim müfredatının kavramsal olarak zorlayıcı yönlerinden birini ikinci dereceden ilişkiler olarak belirttiklerine değinmektedir. Matematik eğitimi alanyazında ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin öğrencilerin anlamalarına (Ellis ve Grinstead, 2008; Eraslan, 2007; Hohensee, 2016; Lobato, Hohensee, Rhodehamel, ve Diamond, 2012; Metcalf, 2007; Sevim, 2011) ve güçlüklerine (Eraslan, 2005; Mitchelmore ve Cavanagh, 2000; Zaslavsky, 1997; Zazkis, Liljedahl ve Gadowsky, 2003) ilişkin bir takım çalışmalar yürütülmüştür. Ortaya çıkan sonuçlar, öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlar ve doğrusal fonksiyonlar arasında uygun ilişkilendirmeler yapamadıklarını ve öğrencilerin zihinsel süreçlerinin öğrenmelerini sağlayacak şekilde olmadığını göstermektedir. İkinci dereceden fonksiyonları öğrenirlerken doğrusal fonksiyonlarla ilişkilendirerek öğrenmelerine imkan vermek önemli hale gelmektedir. Doğrusal fonksiyonu öğrenmiş olan öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları iki doğrusal fonksiyonun çarpımı fikriyle düşünmeleri fonksiyonun karakteristik özelliklerini anlamlandırmaları için fırsat verecektir. Bu sayede iki çokluk arasındaki ilişkiyi kavrayarak değişim oranlarının sabit olmadığını ve değişim miktarlarının

değişiminin sabit olduğu sonucuna ulaşabileceklerdir. Kare alma ilişkilerinden kaynaklanan gerçek yaşam olayları ikinci dereceden fonksiyonlarla modellenebilmekte ve öğrenciler iki terimlilerin nasıl çarpılacağını öğrendikçe ve ikinci dereceden fonksiyonları keşfettikçe karşılaştıkları gerçek yaşam ilişkilerini anlamlandırarak yorumlamada ikinci dereceden fonksiyonları kullanabilmektedirler (Nielsen, 2015). Ellis (2011) nicel ilişkilere yönelik akıl yürütme süreçlerinin öğrencilerin farklı fonksiyon yaklaşımları arasındaki esnek düşüncelerini ikinci dereceden fonksiyonlar konusunda da destekleyebileceğini ifade etmektedir. Bunun yanı sıra öğrencilerin anlamalarını ve zihinsel eylemlerini gerçek sınıf ortamlarında ve etkinlikler üzerinde çalışırken incelemek onların öğrenmeleri için ihtiyaç duydukları fikirleri ortaya çıkarmada etkilidir. Öğrenmenin öğrencinin zihninde gerçekleştiği düşünüldüğünde, hazırlanan etkinliklerin öğretim programının sunduğu ve öğretmenin beklentileri doğrultusunda olmasından öte öğrencilerin amaçları, zihinsel yapıları ve deneyimleri ile tutarlı olması gerekmektedir. Oerthman, Carlson ve Thompson (2008) geçmişteki müfredat geliştirme projelerinin ve eğitimsel araştırma alanyazının öğrencilerin fonksiyon anlamalarını geliştirmek için öğretimsel müdahalelere işaret ettiğini vurgulamaktadırlar.

İkinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesinin önemli olmasının yanında bu alanla ilgili alanyazın öğrencilerin karşılaştıkları zorlukları ve anlamalarına ilişkin engelleri ortaya koymaktadır. Öğrenciler genel olarak ezbere bir öğretim sürecine dahil edildiği ve ikinci dereceden fonksiyonları diğer fonksiyonlarla ilişkilendirmeden izole bir şekilde inceledikleri için zengin düşünme süreçleri gerçekleştirememektedirler. Ülkemizdeki matematik öğretmenleri öğretim süreçlerini planlamada büyük problemler yaşamakta ve genellikle ders kitaplarına ya da belirledikleri yardımcı kitaplara paralel öğretim gerçekleştirmektedirler. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının 2015 - 2016 öğretim yılından itibaren beş yıl süreyle 10. sınıfların matematik dersinde kullanılmak üzere ders kitabı olarak belirlediği kitap incelendiğinde, ikinci dereceden fonksiyonların büyük oranda kurallara dayalı bir şekilde yer aldığı görülmektedir. İkinci dereceden fonksiyonların tanımı ve ardından özellikleri verilerek bunlara yönelik uygulamalara yönlendiren kitabın içeriğinde kavramsal anlamının değil, işlemsel bilginin kazanılmasının ön

planda olduğu gör÷lmektedir. Ortaya koyulan öğrenci güçlüklerinin giderilmesinin bu gibi öğretim süreçleri yerine varsayımsal öğrenme süreçlerine uygun tasarlanmış öğretim dizisi ile mümkün olabileceği düşünülmektedir. Öğrencilere sunulan bilgilerin onlara anlamlı gelmesi kavramsal öğrenmeleri için gerekli bir başlangıç noktası olacaktır. Bu sebeple gerçek yaşam durumlarını içeren matematiksel öğrenme etkinliklerinin öğrencilerin yansıtıcı soyutlama yapmaları için zihinsel eylemlerini tetikleyebileceği ve farklı kavramlar ve gösterimler arasındaki ilişkilendirmelerini destekleyeceği söylenebilir. Tasarlanan etkinliklerin öğrencilerin nicel muhakemelerini güçlendirmesi için onların öğrenme süreçlerine uygun şekilde sunulması gerekmektedir. Böyle bir tasarım süreci deneysel araştırma yöntemlerinin ötesinde öğrencilerin öğrenme modellerini ortaya çıkaracak ve aynı zamanda onların öğrenmelerini sağlayacak tasarım tabanlı araştırmalarla mümkün olacaktır.

Amaç ve Önem

İki çokluğun birbirine bağılı nasıl değiştiğine ilişkin bir görüntü okul matematiği için temeldir, bu yüzden öğrencilerin eş zamanlı değişime yönelik akıl yürütme gibi düşünme yollarını kullanma ve fonksiyonu düşünme yollarını tanımlama etkili öğretimsel dizilerin oluşumu için kritiktir (Weber, 2012). Cebirsel akıl yürütme için fonksiyonların önemine yönelik yaygın bir fikir birliği, cebir içeriğini fonksiyon yaklaşımının etrafında düzenlemenin önemi ve daha üst düzey matematiksel ve bilimsel araştırmalar için fonksiyonun derin bir anlayışının gerekliliği göz önüne alındığında, öğrencilerin başarılı bir şekilde fonksiyonel ilişkileri anlamalarına yardımcı olacak yollar geliştirmenin önemi ortaya çıkmaktadır (Ellis, 2011). Carlson ve Oerthman (2005) fonksiyonun, üst düzey ve modern matematik için temel, bilimin pek çok alanı için gerekli ve geleceğin bilim insanları, mühendisleri ve matematikçilerinin gelişimi için de kritik bir kavram olduğunu vurgulamaktadırlar. Benzer olarak, Eisenberg (1992), öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamalarının lise ve üniversite öğretimi için oldukça önemli olduğunu ifade etmektedir. Wilkie (2016a) fonksiyonların pek çok gerçek yaşam uygulamalarını modellemek için kullanıldığını ve fonksiyonel düşünmenin sonraki okul yıllarında cebir ve analiz için temel olduğunu ifade etmektedir. Matematik eğitimi alanyazında lise ve üniversite matematiğinde özellikle de fonksiyon kavramında öğrenci öğrenmelerini desteklemek için nicel

muhakemenin önemine de giderek daha fazla vurgu yapılmaktadır (Moore, 2014). Genel fonksiyon kavramının öğretiminde vurgulanması gereken eş zamanlı değişim, eşleme, dönüşüm gibi zihinsel eylemlere tez çalışmasının odak kavramı olan ikinci dereceden fonksiyonların öğretiminde de vurgu yapılması önemlidir. Çalışma kapsamında öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlar üzerine çalışmaları sırasında bu kavramı fonksiyon olarak anlamlandırmalarını sağlamaya çalışmak öğrencilerin süreç boyunca edindikleri düşünceleri daha üst düzey kavramları yorumlarken kullanmalarını destekleyebilecektir.

Öğrencilerin karşılaştıkları doğrusal olmayan fonksiyon ailelerinden ilki ikinci dereceden fonksiyonlar olup bu fonksiyonlara ilişkin güçlü bir anlama matematiğin birçok konusunda başarılı olmak için temeldir (Nielsen, 2015). Metcalf (2007) ikinci dereceden fonksiyonların özelliklerinin birçoğunun polinom fonksiyonlara ve diğer fonksiyonlara aktarılacağı için öğrenilmesinin büyük önem taşıdığını belirtmektedir. Buna karşın, ikinci dereceden fonksiyonlara matematik eğitimi araştırmaları kapsamında yeteri kadar yer verilmemiş ve öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları anlamalarına yönelik çok az araştırma yapılmıştır. Sevim (2011) ikinci dereceden fonksiyonun 6-12. sınıf öğretim müfredatında en sık kullanılan kavramlardan biri ve içerdiği gerçek yaşam uygulamaları ile cebir ve analizin önemli bir kısmını oluşturması sebebiyle araştırmacıların ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin öğrenci anlamalarını derinlemesine incelemenin önemli olduğunu ifade etmektedir. Buna karşın, Sevim (2011) yapılan çalışmaların öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonların belirli özellikleri arasında nasıl ilişkilendirmeler yaptıklarına, ne düşündüklerine ve nasıl düşündüklerine ilişkin bilgi ve anlayış sağlamanın yanında birden fazla özelliği ele almadığına değinmektedir. Nielsen (2015) matematik eğitiminin öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlarla ilgili ne anladıklarını derinlemesine odaklanan çalışmalara ihtiyacı olduğunu ifade etmektedir. Matematiğin öğrenimi için önemli olmasına karşın öğretimi için ne tür müdahalelerin yapılması gerektiğini gösteren bulguların azlığı ikinci dereceden fonksiyonların öğretime yönelik eksikliği ortaya çıkarmaktadır. Öğrencilerin düşüncelerini ve öğrenme yollarını irdelerek onlara uygun bir öğretim dizisi geliştirmek ve bu öğretim dizisinin öğrencilerin zihinsel eylemlerini nasıl tetiklediğini analiz ederek düzenlemek ve alanyazına sunmak büyük

önem taşımaktadır. Sevim (2011) Piaget'in öğrenme prensipleri ile tutarlı olan, öz düzenlemeleri ve ardışık yaklaşımları yardımıyla geri bildirim süreçleri ile yönlendirilen ve sosyal etkileşimlerle düzenlenen matematiksel etkinliklerin öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonların temel ilişkilerini oluşturmalarında temel bir rol oynayacağını vurgulamaktadır. Öğrenme ve öğretme süreçlerinin öğrencilerin süreç içerisindeki yaklaşımları göz önüne alınarak düzenlenmesi ve geliştirilmesi matematiksel anlamaların ilerlemesinde etkilidir. Bu bağlamda, ikinci dereceden fonksiyon kavramına ilişkin ortaya çıkan güçlüklerle odaklanmanın yanında bu güçlüklerin arkasında yatan sebeplerin ve öğrencilerin başlangıçtan itibaren düşüncelerindeki ve akıl yürütmelerindeki ilerlemenin nasıl olduğunun bilinmesi söz konusu matematiksel kavramın öğretimi sırasında öğrencilere tasarlanan öğrenme ortamının, etkinliklerin ve etkileşimlerin düzenlenmesi açısından gereklidir. Sunulan etkinlikler öğrencilere anlamlı gelen ya da fikir üretebilecekleri durumlar olduğunda öğrenciler var olan bilgilerini daha etkili bir şekilde kullanabileceklerdir. Thompson (1994) fonksiyonu öğrenmek için uygun bir başlangıç noktasının fonksiyonun çeşitli gösterimlerinden hareket etmek olmadığını bunun yerine fonksiyonu içeren anlamlı bir bağlam olduğunu açıklamaktadır. Benzer şekilde, Simon ve Tzur, (2004) sınıfta öğrencilerin bilinen bir yöntemin uygulandığı alıştırmalardan farklı olarak bilişsel olarak rutin olmayan etkinlikleri gerektiren çalışmalara daha fazla katılmalarını destekleyerek onlara düşünme ve öğrenme fırsatları verilmiş olacağını ifade etmektedirler. Oerthman, Carlson ve Thompson (2008) kavramların derin anlayışını geliştirmek için hazırlanan etkinlikler olmadan gerçekleştirilen öğretimin fonksiyonun anlamlı bir şekilde yorumlanmasına ve kullanılmasına imkan veren temel fonksiyon anlayışlarını oluşturmada etkili olmadığını vurgulamakta ve dinamik değişimi modelleyen gerçek yaşam durumlarıyla fonksiyon kavramının anlaşılmasının geliştirilmesinin ileri doğru matematikte başarılı olmak için önemli bir köprü oluşturacağını belirtmektedirler. Tez çalışması kapsamında hazırlanan etkinlikler gerçek yaşam durumlarının modellenmesini gerektirdiği için öğrencilerin iki değişken arasındaki fonksiyonel ilişkiyi düşünmeye teşvik etmekte tetikleyici rol oynayacaktır. Öğrenciler bağımsız değişken ile ona bağlı olarak eş zamanlı değişen değişken arasındaki ilişkiyi gerçek yaşam durumuna yükledikleri anlamlardan yararlanarak oluşturabilecekler ve matematiksel soyutlamayı anlamlı geçişlerle

gerçekleştirebileceklerdir. Modelleme fen bilimlerinde, matematikte ve mühendislikte bir sistemin davranışını açıklayan ve yordayan bir fonksiyon tanımlayarak sistemdeki değişimi karakterize etmeye odaklanır ve bu da fonksiyonun belirli düşünme yollarını gerektirmektedir (Weber, 2012). Bu doğrultuda, tez çalışmasında öğrencilerin kavramlara matematiksel modelleme yoluyla ulaşmalarını ve oluşturdukları modelleri yorumlayarak kavramların temel fikirlerini kazanmalarını sağlayacak etkinlikler kavramsal öğrenme için olumlu ortamlar hazırlayacaktır. Modelleme sürecinde sürekli olarak yorumlama ve doğrulamaya yönlendiren durumlar ile öğrenciler kavramların anlamlarına ilişkin mantıksal çıkarımlar yapabileceklerdir. Lesh ve Doerr (2003) önemli matematiksel kavramların ve fikirlerin sezgiselden formele doğru, uygun problemler ve gerçek yaşam durumları aracılığıyla öğretilmesi gerektiğini belirtmektedirler.

Kavram öğretimi sırasında öğrencilerin düşüncelerinin ve eylemlerinin gerekliliğini vurgulayan ve var olan bilgilerinin üzerine yansıtıcı soyutlamalar yaparak yeni kavramları inşa etmelerini sağlayan etkinliklerin gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Bu etkinliklerin öğrencilerin ardışık soyutlamalar yapabilmelerine fırsat verecek şekilde hazırlanması ve zihinlerinde var olan yapıları tetiklemesi önemlidir. Simon'un (2006) *mantıksal-matematiksel* olarak belirttiği bu etkinlikler öğrenenlerin bir amaç belirlemeleri, o amacı yerine getirmek için mevcut etkinlik ya da etkinlikler dizisi üzerinde çalışmaları, etkinliklerin etkileriyle ilgilenmeleri ve yansıtıcı soyutlama yaparak yeni bir kavram öğrenmelerini kapsamaktadır (Simon, 2003). Bu etkinlikler öğrencilerin zihinsel eylemlerini içermektedir. Tez çalışması kapsamında tasarlanan etkinlikler radikal yapılandırmacılık bilgi kuramı doğrultusunda öğrencilerin yansıtıcı soyutlamalarını sağlayacak mantıksal-matematiksel etkinlikler olarak tasarlanmıştır. Bu etkinlikler üzerine çalışan öğrencilerin ne tür anlamalara sahip olduklarının hem süreç içerisindeki sürekli analizlerle hem de öğretim deneyleri sonrasındaki geriye dönük analizlerle ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Bu yansıtıcılarla tasarlanan öğretim dizisi revize edilerek ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin kavramsal öğrenmeyi destekleyen öğrenme ortamı öğrencilerin nicel muhakemelerinin göstergeleriyle sunulmaktadır.

Etkinliklerin öğrencilerin ön bilgilerine ve zihinsel yapılarına uygun tasarlanabilmesi için onların düşüncelerinin gelişimini içeren varsayımsal öğrenme sürecinin belirlenmesi gerekmektedir. Son 20 yıl içinde, öğrenme üzerine yapılan araştırmalar öğrencilerin nasıl düşündüğünü ve düşüncelerin zamanla nasıl daha gelişmiş hale geldiğini anlamaya odaklanmaktadır (Mojica,2010). Amerikan Ulusal Araştırma Konseyi [National Research Council (NCR)] (2007) çocukların geniş bir zaman içerisinde bir konuyu öğrendikçe ve o konu üzerinde çalışmalar yaptıkça konu ile ilgili birbirini izleyen ve birbirine dayanan düşünme yollarına dikkat çekmektedir. Simon (1995) varsayımsal öğrenme yolunun “öğrenci düşüncelerinin ve anlayışlarının öğrenme etkinlikleri bağlamında nasıl gelişeceğine ilişkin bir tahmin” içerdiğini ve bu tahminlerin bir ders boyunca karar vermeyi de yönlendirdiğini açıklamaktadır. Öğrenme etkinliklerinin varsayımsal öğrenme sürecine uygun olmasının yanı sıra bu etkinlikler gerçekleştirilirken öğrencilerin anlamalarının gelişimine yönelik varsayımlarda değişiklikler olabilmektedir. Mousley, Sullivan ve Zevenbergen (2007) öğretmenlerin sınıf etkinliklerinde öğrenci performanslarını sürekli değerlendirmeleri halinde öğrencilerin anlamalarının farklı yönlerini ve düzeylerini daha açık hale getirebileceklerini ifade etmektedirler. İkinci dereceden fonksiyonların öğretme ve öğrenme süreçlerinin irdelenerek öğrenme yollarının tasarlanması ve tasarıların öğrencilerin düşünceleri bağlamında geliştirilmesinin etkili öğrenme için gerekli olduğu düşünülmekte ve birtakım çalışmalarla öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin varsayımsal öğrenme süreçleri belirlenmektedir. Nielsen (2015) matematik eğitimcilerinin ikinci dereceden fonksiyonların öğretilmesi için öğrencilerin anlamalarını ve akıl yürütme yollarını belirleyen ve tanımlayan araştırma tabanlı bir çerçeve geliştirmediklerini dile getirmektedir. Tez çalışması kapsamında öğrencilerin düşüncelerine paralel olarak gerçekleştirilen uzun dönemli yürütülen araştırmanın alanyazında var olan eksikliğin giderilmesine katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Bu tez çalışmasının amacı, onuncu sınıf öğrencilerinin zihinsel eylemlerini tetikleyerek ikinci dereceden fonksiyonların kavramsal öğrenmelerini sağlayacak bir öğretim dizisi tasarlamak ve bu süreçte öğrencilerin anlamalarının gelişiminin nicel muhakeme bağlamında nasıl şekillendiğini ortaya çıkarmaktır. Çalışma, ikinci

dereceden fonksiyonların öğrenilmesinde öğretmenlere ve matematik eğitimcilerine bakış açısı sunacak ve alanyazına önemli bir katkı sağlayacaktır.

Problem Cümlesi

Onuncu sınıf öğrencilerinin zihinsel eylemlerini tetikleyerek ikinci dereceden fonksiyonların kavramsal öğrenmelerini sağlayacak öğretim dizisi nasıldır ve bu süreçte öğrencilerin anlamalarının gelişimi nicel muhakeme bağlamında nasıl şekillenmektedir?

Alt Problemler

1. İkinci dereceden fonksiyonlara yönelik öğretim dizisi boyunca öğrencilerin nicel muhakeme bağlamında hangi zihinsel eylemleri ortaya çıkmaktadır?
2. Onuncu sınıf öğrencilerinin nicel muhakeme yoluyla ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin kavramsal anlamalarını sağlayan öğretim dizisi nasıl şekillenmektedir?

Sayıtlar

- Öğrencilerin uygulama sürecine samimiyetle katıldığı ve tüm süreçteki etkinliklere düşüncelerini açık bir şekilde dile getirdikleri düşünülmektedir.
- Öğrencilerin etkinlikler üzerinde çalışırken grup arkadaşlarıyla etkili iletişim kurdukları varsayılmaktadır.

Sınırlılıklar

- Araştırma süresi 2015 – 2016 öğretim yılı Kasım-Aralık ve Ocak-Mart ayları ve 2016-2017 öğretim yılı Ocak-Şubat ayları ile sınırlıdır.
- Araştırmanın katılımcıları uygulamanın gerçekleştiği iki farklı fen lisesinde okuyan onuncu sınıf öğrencileri ile sınırlıdır.
- Uygulanan sınıf öğretim deneylerinden elde edilen verilerde araştırmacıların dahil olmadığı bölümler öğrencilerin grup içerisinde gerçekleştirdikleri söylemleri ile sınırlıdır.

Tanımlar

Mantıksal-Matematiksel Etkinlik: Öğrenenler bir amaç belirleyerek ve belirledikleri amaca yönelik üzerinde çalıştıkları, amaçları ile ilişkili bir şekilde etkilerini dikkate alarak bir takım zihinsel yapılar oluşturdıkları ve yansıtıcı soyutlama yaptıkları süreçtir.

Nicel Muhakeme: Bir durum ile ilgili çoklukları çokluklar ve nicel ilişkileri kullanarak akıl yürütme ve o durumlarla ilgili sonuçlar çıkarma ve genellemeler yapma sürecidir (Thompson, 1990).

Öğretim Deneyi: Öğrencilerin matematiksel bilgilerini ve matematiğin öğretilmesi bağlamında nasıl öğrenilebileceğini araştırmak için tasarlanan bir tekniktir (Cobb ve Steffe, 1983, Hunting, 1983, Steffe, 1984'den aktaran Steffe, 1991).

Öğretim Dizisi: Bir öğrenme hedefine ulaşmak için öğrenenlerin üzerinde çalıştıkları kendi düşünme süreçlerine uygun olarak tasarlanan ve revize edilen etkinlikler dizisidir.

Varsayımsal Öğrenme Yolu: Öğretmenlerin öğrenme amacını, öğrenme etkinliklerini ve öğrenci düşüncelerinin ve anlamlarının öğrenme aktiviteleri bağlamında nasıl gelişeceğine ilişkin bir tahmin olan varsayımsal öğrenme sürecini içeren öğrenmenin ilerleyebileceği yollara ilişkin tahminleridir (Simon, 1995).

Kısaltmalar

CCSSM: Common Core State Standards for Mathematics

DBRC: Design-Based Research Collective

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

NCR: National Research Council

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics

BÖLÜM II

İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde tez çalışmasının şekillenmesinde temel olan kavramlar ve bu kavramlara yönelik yapılan araştırmalara yer verilmektedir. İlk olarak fonksiyonun ne olduğu ve temel fikirleri kısaca açıklanmakta ve genel fonksiyon kavramına yönelik yapılan bazı çalışmalara yer verilmektedir. Ardından tez çalışmasında öğretim dizisinin gerçekleştirildiği kavram olan ikinci dereceden fonksiyon kavramının ne olduğu açıklanmaktadır. İkinci dereceden fonksiyonlara yönelik yapılan çalışmalar, öğrenci anlamalarına yönelik yapılan araştırmalar, öğrenci zorluklarına yönelik yapılan araştırmalar ve bu kategorilerin dışındaki diğer araştırmalar olarak üç başlıkta ele alınmaktadır. Bölümün devamında nicel muhakemenin ne olduğu açıklanmakta ve özellikle fonksiyon kavramı bağlamında nicel muhakeme üzerine yapılan araştırmalara yer verilmektedir.

Fonksiyonlar

Değişim kavramını ve birbiriyle ilişkili olarak değişen çoklukları anlamayı içeren (Wilkie, 2016a) fonksiyonlar cebirin kritik bir yönünü oluşturmaktadır (NCTM, 2000). Smith (2008) fonksiyonel düşünmeyi değişen iki ya da daha fazla çokluğun arasındaki ilişkileri gösteren gösterimsel düşünmenin bir türü olarak tanımlamıştır. 3700 yıldır matematikçiler ve bilim insanları iki çokluğun değişimi fikrini düşünmekte ancak önemli bir husus olan “birlikte değişim” fikrinin nasıl sunulacağını bilmemektedirler (Thompson, 2013). Bu bağlamda, bir çokluk değişirken bu çokluk ile ona bağlı olarak oluşan yeni bir çokluğun arasındaki ilişki fonksiyon kavramı ile ifade edilebilmektedir. Sadece matematiğin içerisinde değil gerçek dünyada da birbiriyle bağlantılı olarak değişen birçok olgu ya da olayın varlığı düşünüldüğünde, birlikte değişimin açıklanmasının matematiğin ötesinde diğer bilim dalları için de

önemi ortaya çıkmaktadır. Carlson ve Oerthman (2005) fonksiyon kavramının üniversite matematiği ve modern matematik için temel olduğunu ve fonksiyon kavramına ilişkin güçlü bir anlamının geleceğin bilim insanları, matematikçileri ve mühendisleri için önemli bir ders olan Analizin anlaşılmasında gerekli olduğunu vurgulamışlardır. Matematik alanı içerisinde özellikle de Cebir ve İleri Düzey Analiz için temel bir kavram olan fonksiyonu kavramsal olarak anlamak öğrencilerin matematikte ilerlemelerini destekleyecektir. Selden ve Selden (1992) fonksiyonların matematiğin tüm alanlarında ortaya çıktığını ve çok farklı yollarla kullanıldığını belirtmişlerdir. Örnek olarak, iki kümenin aynı kardinaliteye sahip olup olmadığını veya iki topolojinin homomorfik olup olmadığını anlamak için fonksiyonlardan yararlanıldığını ifade etmişlerdir. Pek çok matematik eğitimcisi ve matematik öğretmeni lise ve üniversite matematiğini öğrenmede fonksiyonların önemli bir kavram olduğu konusunda hem fikirdirler (Selden ve Selden, 1992; Wang, Barmby ve Bolden, 2017). Clement (2001) fonksiyon kavramının matematik müfredatında önemli bir rolü olduğunu ve öğrencilerin değişkenler arasındaki değişimin ilişkilerini tanımlayabilmelerine, katsayıların değişimlerini açıklayabilmelerine, grafikleri yorumlayabilmelerine ve analiz edebilmelerine temel olduğunu ifade etmiştir. Benzer şekilde Musgrave ve Thompson (2014) fonksiyonun matematiksel akıcılığın sağlanmasında önemli bir kavram olduğuna değinmişler ve fonksiyonun notasyonunun ortaokuldan sonra yaygın olarak ele alınıyor olmasına rağmen öğrencilerin kavramla ortaokul yıllarının başlarından itibaren karşılaştıklarını belirtmişlerdir.

Fonksiyonun standart tanımı değişimlerdeki eşlemeyi vurgulamaktadır ve bir kümedeki öğelerin diğer kümedeki öğelerle eşlenmesi olarak ifade edilmektedir (Thompson, 1994). Eşleme, A tanım kümesi ve B değer kümesi olmak üzere, A'daki her bir x için B'de yalnız ve ancak bir y olduğu anlamına gelen iki küme arasındaki ilişki olarak fonksiyonun soyut ve oldukça dar bir tanımına dayanmaktadır (Confrey ve Smith, 1995). Öğrencilerin fonksiyonu anlayabilmeleri için temel olarak eşleme fikri ile eş zamanlı değişim fikrini kavramaları gerekmektedir. Thompson ve Carlson (2017) fonksiyonun eş zamanlı değişim fikrini şu şekilde açıklamışlardır:

Eş zamanlı değişim olarak bir fonksiyon, bir kişinin düşüncesinde bir çokluğun her bir değerinin diğer çokluğun değerini belirlemesi şeklinde

değerler arasında değişmez bir ilişkinin olduğu eş zamanlı bir şekilde değişen iki çokluğa ilişkin bir kavrayıştır.

Bu fikir öğrencilerin değişim oranı açısından durumları tanımlamalarına imkan verecektir (Confrey ve Smith, 1995). Eş zamanlı akıl yürütme fonksiyonun modern tanımına yol açan kavramların keşfedilmesinde kritik bir rol oynamış ve öğrencilerin ve öğretmenlerin fonksiyonlara ilişkin yararlı ve güçlü kavrayışlar geliştirmelerini desteklemiştir (Thompson ve Carlson, 2017).

Geçmişteki müfredat geliştirme projeleri ve eğitimsel araştırma alanyazın öğrencilerin fonksiyonlara ilişkin anlamalarını geliştirmek için öğretimsel müdahalelere işaret etmekte ve okul müfredatının ve öğretiminin öğrencilerin eş zamanlı değişim fikirlerini anlamalarına, eş zamanlı değişimin çoklu gösterimlerine daha fazla odaklanmalarına ve aynı fonksiyonun çoklu gösterimlerini vurgulayan farklı fonksiyon türlerini deneyimlemelerine imkan vermesi gerektiği önerilmektedir (Oerthman, Carlson ve Thompson, 2008).

Öğrenciler fonksiyonlara ilişkin öğretimleri sırasında fonksiyon konusu kapsamında ilk olarak doğrusal fonksiyonlarla karşılaşmaktadırlar (Leinhardt, Zaslavsky ve Stein, 1990). Birbiriyle ilişkili iki değişkeni ilk olarak doğrusal fonksiyonlarla incelemeye başlayan öğrenciler bu kavramı öğrenme süreçlerinde matematiksel gelişimleri için önemli bir geçiş noktasında bulunmaktadır (Pierce, 2005). Öğrenciler doğrusal fonksiyonu incelemeye başladıkça fonksiyonun iki değişken arasında birbirine bağlı bir ilişki olduğunu fark etmektedirler (Wang, Barmby ve Bolden, 2017). Fonksiyonun eş zamanlı değişim fikri ile doğrusal fonksiyonlardaki değişim artışlarının birbiriyle orantılı olduğu açık bir şekilde görülebilir (Confrey ve Smith, 1995). Fonksiyonun değerleri arasındaki değişimin girdi değerleri arasındaki değişime oranını incelemeye yönlendirilen öğrenciler bu oranın sabit olduğunu fark edeceklerdir. Bu sayede doğrusal fonksiyonu iki çokluğun eş zamanlı değişimi ile incelemeleri onlara eğim kavramını ve bu sayede cebirsel ve grafiksel gösterimler arasındaki geçişleri anlamlandırmaları sağlanacaktır.

Fonksiyonlara Yönelik Yapılan Araştırmalar

Schwarz ve Hershkowitz (1999) kavramsal öğrenmeyi sağlayan iki temel yaklaşımdan birinin klasik yaklaşım diğerinin olasılıksal yaklaşım olduğunu ifade etmişlerdir. Klasik yaklaşımda bir kavramın kritik özelliklerini ya da kavramın öğrenilmesini engelleyen fikirleri ele alan tanımlara, olasılıksal yaklaşımda ise öğrenmek için daha temel olan belirli özelliklere vurgu yapmışlardır. Örneğin, bir doğrusal fonksiyonda, tanım kümesindeki bir elemanın iki görüntüsü olmaması fonksiyonun kritik bir özelliği olarak ifade edilirken, grafiğinin doğru olması, doğrunun iki noktayla belirlenebilmesi, değişim oranının sabit olması ve değerlerin interpolasyon ya da ekstrapolasyon ile elde edilebilmesi kendine has özellikleri olarak açıklanmıştır. Benzer şekilde, ikinci dereceden bir fonksiyonun grafiğinin parabol olması ve $y = ax^2 + bx + c$ ifadesinde $a > 0$ ve $b^2 - 4ac < 0$ olduğunda fonksiyonun pozitif olması kendine has özellikleridir. Araştırmacılar, kavramsal öğrenme süreçleri sonunda kavramın bireyin zihnine yansıtılmasıyla kavram imajı haline dönüşmesinin bu yaklaşımla benzerlik gösterdiğini eklemişlerdir. Kavram imajı ile ilgili olarak hangi fonksiyonların kullanıldığını ve nasıl kullanıldığını gösteren prototip özelliği, farklı gösterimler arası ilişkilendirmeyi gösteren parça-bütün muhakemesi ve fonksiyonların özelliklerinin farkında olmayı gösteren özellik anlama bileşenlerini ele almışlardır. Bu üç kavram imajı bileşenini inceledikleri çalışmalarında uzun süreli bir dönemde üç döngüde geliştirilen bir öğretim programını dikkate almışlardır. Bu öğretim programının gelişimindeki ilk döngüde fonksiyonlar alt kavramlar, gösterimler ve işlemler öğretmen tarafından ve ders kitabı aracılığıyla öğrencilere sunulmuştur. İkinci döngüde, doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonları geliştirmek amacıyla farklı fonksiyon örneklerine yer verilmiş ve farklı gösterimleri ele alınmıştır. Son döngüde ise, öğrencilerin problem durumlarını inceleyerek fonksiyonları oluşturmaları istenmiş ve grafik hesap makinelerinden ve çoklu gösterimleri içeren yazılımlardan yararlanılmıştır. Çalışmada, öğrencilerin çoklu gösterimlere imkan veren yazılımı kullanarak ve interaktif bir ortamda açık uçlu etkinlikler üzerine çalışarak fonksiyona ilişkin kavram imajlarını tanımlamak amaçlanmış ve yarı deneysel desenden yararlanılmıştır. Onuncu sınıf öğrencileri biri ikinci döngü müfredatına ve diğeri üçüncü döngü müfredatına dayanan öğretimin gerçekleştirildiği iki gruba ayrılmıştır ve öğrencilere sekiz soruluk bir anket

uygulanmıştır. İlk iki soruda öğrencilere verilen iki noktadan ya da üç noktadan bir fonksiyon çizmeleri ve çizilebilecek farklı fonksiyon sayılarını ifade ederek nedenlerini açıklanmaları istenmiştir. Üçüncü soruda iki farklı sıcaklıkta bakteri sayısını dikkate alarak iki sıcaklık değeri arasında ya da dışında bakteri sayılarını bulmaları istenmiştir. Dördüncü soruda, bir fonksiyonun tanım kümesinin üç alt aralığındaki grafikleri verilerek fonksiyonun tamamını çizmeleri ve beşinci soruda iki alt tanım aralığı ile bütünü karşılaştırmaları beklenmiştir. Diğer sorular ise, öğrencilerin fonksiyonların gösterimleri ile ilgili özellikleri ilişkilendirmelerini gerektirmiştir. Ek olarak, öğrencilerin düşüncelerini analiz ederken yazılı gerekçelendirmelerinden yararlanmışlardır. Her iki gruptaki öğrenciler ağırlıklı olarak doğrusal fonksiyonu çizmelerine karşın, sonsuz sayıda fonksiyon olabileceği fikrini de göstermişlerdir. İnteraktif öğrenme ortamındaki öğrencilerin geleneksel öğrenme ortamındaki öğrencilerden daha zengin kavram imajları olduğu görülmüştür. Belirli kısımları verilen grafikleri tanımlamada daha başarılı olmalarına ek olarak, özellikleri örneklemek için doğrusal, ikinci dereceden ve diğer fonksiyonları kullanmışlardır. Bulgulara dayalı olarak araştırmacılar, öğrencilerin kavram imajlarının oluşumunda özel öğrenme ortamlarının rolünün sınırlı olmadığı ve açık uçlu durumlar üzerine öğrencilerin çalışmalarının ve sınıf tartışmalarının sınıf kültürlenmesini kolaylaştırdığı sonucuna ulaşmışlardır.

Cebirsel bir formülü olan her ifadenin bir fonksiyon olmadığını ya da cebirsel olarak ifade edilmemiş bir durumun fonksiyon olabileceğini belirten Clement (2001) öğrencilerin fonksiyonun matematiksel tanımına karşılık fonksiyonlara ilişkin geliştirdikleri kavram imajlarını ortaya çıkarmak amacıyla yirmi sekiz maddelik bir değerlendirmeyi okul yılının sonunda bir lisedeki otuz beş öğrenciyle gerçekleştirmiştir. Ardından, bu değerlendirmede yüksek düzeyde olan iki öğrenci, orta düzeydeki iki öğrenci ve düşük düzeydeki iki öğrenci ile görüşme yapmıştır. Yapılan değerlendirmelerde, bir ifadenin fonksiyon olup olmadığını incelerken düşey doğru testini kullanan öğrenciler grafiksel gösterimi verilmediğinde ifadenin fonksiyon olmayacağını düşünmüşlerdir. Çoğu öğrencinin sürekli olmayan fonksiyonların grafiklerini dikkate almadıkları diğer bir sonuç olmuştur. Çalışmadaki

bir grup öğrencinin fonksiyona ilişkin süreklilik şartını bir grup öğrenci de analitik gösterim şartını içeren bir kavram imajına sahip oldukları görülmüştür.

Oerthman, Carlson ve Thompson (2008) fonksiyon kavramının okul müfredatı kapsamında belirli türdeki fonksiyonlar doğrultusunda öğretilmesi sebebiyle öğrencilerin öğrenme süreçlerinde bir takım güçlüklerinin ve yanlış anlamalarının olmasının şaşırtıcı olmadığı ifade etmişlerdir. Dinamik değişimi modelleyen gerçek yaşam durumunu ele alarak fonksiyonun anlamını geliştirmenin ileri düzey matematikte başarılı olmak için önemli bir köprü olduğunu vurgulayan araştırmacılar dinamik olarak değişen durumlarla ilgili esnek bir şekilde akıl yürütmeyi içeren düşünmeyi, eş zamanlı değişimi beş ayrı zihinsel eyleme ayırarak karakterize etmişlerdir. İlk zihinsel eylem, bir değişkeni bağımlı olduğu diğer bir değişken ile koordine etme, ikincisi, bir değişkenin değişim yönünü diğer değişkendeki değişimlerle koordine etme, üçüncüsü bir değişkenin değişim miktarını diğer değişkendeki değişim miktarı ile koordine etme, dördüncüsü, fonksiyonun ortalama değişim oranını girdi değişkeninin değişiminin düzgün artışı ile koordine etme, beşincisi, fonksiyonun anlık değişim oranını fonksiyonun tanım kümesindeki tüm bağımsız değişkenlerdeki sürekli değişimle koordine etme olarak betimlemişlerdir. Araştırmacılar bu çerçevede doğrultusunda birçok analiz öğrencisini gözlemlemişlerdir. 3., 4. ve 5. aşamalar arasında esnek bir şekilde hareket edebilme yeteneğinin öğrenciler için önemli olmadığını görmüşler ve birçok öğrencinin de dinamik bir fonksiyon durumunun grafiğini oluştururken 1. ve 2. aşamada oldukları sonucuna ulaşmışlardır.

Tanışlı (2011) fonksiyon tablolarına ilişkin öğrencilerin fonksiyonel düşünme yollarını araştırmayı amaçladığı çalışmada, 5.sınıf düzeyinde iki kız iki erkek öğrenci ile etkinlik temelli görüşme yapmıştır. Görüşmelerde öğrencilere toplam 16 etkinlik yöneltilmiş ve bu etkinliklerde öğrencilere farklı cebirsel ifadeleri olan değerleri tablo ile sunmuştur. Tablolardaki bağımsız ve bağımlı değişken için herhangi bir harf kullanmamış üçgen ve kare sembollerinden yararlanmıştır. Araştırmacı ve bir uzman verileri bağımsız olarak analiz etmiştir. Analizler sonucunda, öğrencilerin fonksiyon tablolarını incelerken tekrarlayan bir örüntü aradıkları görülmüştür. Öğrencilerin fonksiyonel düşünceleri için ilk olarak ayrı ayrı değişkenlere karşılık gelen değişimi

ve ikinci olarak bağımlı-bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi bulmaları gerektiğini ifade eden araştırmacı öğrencilerin tekrarlayan örüntü arama yaklaşımlarının onların fonksiyonel düşüncelerini engelleyeceğini dile getirmiştir. Ancak tablolaradaki bağımsız değişkenin birer birer artması öğrencilerin bağımlı değişkeni bu yaklaşımla ele almalarına neden olmuştur. Bunun yanında, öğrenciler çokluklar arasındaki ilişkileri hem çarpımsal hem de toplamsal olarak tanımlamışlardır.

Musgrave ve Thompson (2014) öğretmenlerin matematiksel anlamalarının öğrencilerin anlamlarını etkilediği düşüncesiyle öğretmenlerin fonksiyona ilişkin anlamlarını incelemek amacıyla etkinlikler geliştirdikleri geniş çaplı bir değerlendirmenin parçası olarak öğretmenlerin fonksiyon notasyonuna ilişkin oluşturdukları anlamların araştırmacıların sahip oldukları anlamlarla aynı olup olmadığına odaklanmışlardır. Bu çalışma kapsamında 100 lise öğretmenine iki kısımdan oluşan bir etkinlik sormuşlardır. Etkinliğin ilk kısmının birinci aşamasında öğretmenlerden boşluk doldurarak fonksiyon tanımını tamamlamaları istenmiştir. İkinci aşamasında ise, öğrencilerin oluşturdukları bir fonksiyon ifadesindeki bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasındaki uyumsuzluğu öğretmenlerin ele alma yaklaşımlarının ortaya çıkarılması çalışılmıştır. Etkinliğin ikinci kısmında, atılan bir taşın zamanla oluşturduğu dalganın yarıçapının giderek arttığı ifade edilmiş ve geçen zamana bağlı olarak dalganın alanını fonksiyon olarak yazmaları istenmiştir. Bu etkinlik ile öğretmenlerin fonksiyonu tanımlayan kuralda fonksiyon notasyonunu kullanma eğilimlerinin değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Yapılan analizler doğrultusunda öğretmenlerin fonksiyon ifadesinde bir değişken kullanıldığının farkında oldukları ancak bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişkinin farkında olmadıkları görülmüştür. Öğretmenlerin sadece eşitlik simgesinin sağ tarafını fonksiyon ile ilişkilendirdikleri sonucuna ulaşılmıştır.

Acevedo Nistal, Van Dooren ve Verschaffel (2014) gösterimlerin beş duyu organımız ile algılanabilen dışsal gösterimler ve nörobiyolojik ölçümler kullanılarak gözlemlenebilen ya da kaydedilebilen içsel gösterimler olarak farklılaştığını ifade etmektedirler ve matematiğin sembolik, dilsel ya da grafiksel olarak sunulabilmesi sebebiyle matematiksel kavramların dışsal gösterimlerinin varlığının oldukça olağan

olduğunu açıklamışlardır. Bu bağlamda etkinliğe uygun olan gösterimleri seçme, bir başka deyişle, gösterimsel esnekliğe değinerek, öğrencilerin doğrusal fonksiyon problemlerinde esnek gösterimsel tercihler yapma becerilerine odaklanmışlardır. Doğrusal fonksiyona ilişkin problemlerde öğrencilerin gösterimsel esnekliklerinin gelişiminin bir gösterimin ne zaman kullanılabileceği ve belirli durumlarda herhangi bir gösteriminin kullanımının neden daha uygun olabileceği sorularını sistematik bir şekilde ele alan öğretim ile sağlanabileceğini varsayarak deneysel bir araştırma yürütmüşlerdir. 25'i deney grubunda 24'ü kontrol grubunda olmak üzere bir lisedeki üç sınıftaki toplam 49 öğrenci ile çalışmışlardır ve öğrencilerin gösterimsel esnekliklerini dört katsayı bağlamında incelemişlerdir. Bunlar, gösterimsel repertuar, gösterimsel tercih sıklığı, gösterimsel etkililik ve gösterimsel esnekliktir. Müdahale öncesinde her öğrenciye bilgisayar ortamında üçü eğim ile ilgili, üçü kesenlerle ilgili ve üçü iki doğrusal fonksiyonun kesişimi ile ilgili olmak üzere dokuz gösterim seçimi yapmalarını gerektiren problem ve her birinden ikişer tane olmak üzere toplam altı tane seçim yapmadan çözecekleri problem verilmiştir. Ardından deney grubundaki öğrenciler gösterimsel esnekliğini arttırmak için altı bölümü olan tek bir oturumda gerçekleştirilen bir öğretim sürecine dahil edilmişlerdir. Ön test sonuçları ile her iki gruptaki öğrencilerin gösterimsel repertuarlarının tablo, grafik ve formül açısından herhangi bir farklılık göstermediği ve en çok tablo ile gösterimin tercih edildiği görülmüştür. Öğrenciler eğim problemlerinde kesen ve kesişim problemlerine göre çok daha başarılı olmuşlardır. Farklı problem türleri ile gösterimler arasındaki ilişki incelendiğinde, eğim problemlerinde tablo gösterimi, kesişim problemlerinde grafik gösterimi daha doğru sonuçlar verirken, kesen problemlerinde farklılık olmamıştır. Müdahalenin ardından iki grup karşılaştırıldığında, gösterimsel repertuar ve seçim sıklığı açısından iki grubun da benzer değişimler sergilediği ve müdahalenin bir etkisinin olmadığı görülmüştür. Ancak gösterimleri etkili ve hızlı bir şekilde kullanmada deney grubundaki öğrenciler daha başarılı olmuşlardır. Bir başka deyişle, öğrencilere fonksiyonların farklı gösterimlerini düşünmeye ve kullandıkları gösterimleri gerekçelendirmeye teşvik eden öğretim onların gösterimleri esnek bir şekilde kullanabilmelerini geliştirmiştir.

Genişleyen bir örüntünün ya da gerçek yaşam senaryosunun uygun grafiksel gösterimlerle ilişkilendirilmesinin etkili bir şekilde olmadığını ifade eden Wilkie (2016b) çalışmasında öğrencilerin örüntüleri genelleştirmeyi farklı bağlamlardaki değişkenleri ve çoklu gösterimleri kullanma becerileri ile nasıl ilişkilendirdiklerini ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Bu amaçla, ortaokul seviyesinin ilk yılında olan 12-13 yaşlarındaki öğrencilerden oluşan altı sınıfta bir tarama çalışması gerçekleştirmiş ve öğrencilere etkinlikler sunmuştur. Elde ettiği farklı türdeki verileri içerik analizi yöntemi ile analiz etmiş ve analiz sürecinde Excel ile nitel analiz yazılımı olan NVivo 10 programından yararlanmıştır. Örüntülerin açık kuralını bulan öğrencilerin yarısının iki değişken arasındaki ilişkiyi anladıklarını görmüştür. Bağlamsal ve sembolik genelleştirmeler yapan öğrenciler grafiksel gösterimi tam olarak oluşturamamışlardır. Genişleyen örüntülerin şekilsel, yazılı ve sembolik gösterimleri ile grafiksel gösterimleri arasındaki ilişkinin gelişmediği ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin geleneksel sembolleri önceden bilmeleri fonksiyonel ilişkileri sembolik ifadeler ile gösterebilmelerini sağlamıştır. Bununla birlikte, cebirsel düşünme sergilemeyen öğrenciler gerçek-yaşam bağlamı fonksiyonel ilişkiyi tanımlamada doğru sembolik ilişkiler kullanmışlardır.

Wang, Barmby ve Bolden (2017) “Doğrusal fonksiyonu anlama düzeyleri açısından ders kitaplarındaki örnekler nelere vurgu yapmaktadır? ve “Her düzey için ileri sürülen örneklerin yanı sıra örnek ifadelerinde farklılıklar var mı?” araştırma sorularına yanıt aramak için İngiltere’de üç okuldan toplam 7 farklı ders kitabını ve Şangay’daki ders kitabını incelemişlerdir. Bu incelemeyi, doğrusal fonksiyonu anlamaya ilişkin ifade ettikleri düşük düzeyden üst düzeye doğru beş hiyerarşik düzey doğrultusunda gerçekleştirmişlerdir. Bu düzeyleri, (1) bağımlı ilişki, (2) gösterimleri ilişkilendirme, (3) kısmi özellikleri fark etme (4) nesne analizi ve (5) keşfetme olarak ifade etmişlerdir. Ders kitaplarını iki aşamada analiz eden araştırmacılar ilk olarak her düzeydeki örnek sayısını ardından bu örneklerin doğrusal fonksiyon konusundaki bütün örnekler açısından yüzdelarını belirlemişlerdir. Örneklerin düzeyini belirlerken, çizim, kesen, eğim, paralel, dik, ve orta nokta gibi her bir düzeye özgü anahtar kelimeleri kullanmışlardır. İngiltere ve Şangay bölgelerindeki ders kitaplarında yer alan örneklerdeki vurgunun farklı anlama düzeylerinde olduğu görülmüştür. Doğrusal

fonksiyonun daha soyut anlaşıldığını gösteren nesne analizi düzeyindeki örneklerin Şangay ders kitabından farklı olarak İngiltere'deki ders kitaplarındaki örneklerin büyük oranının kısmi özellikleri fark etme düzeyinde olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

İkinci Dereceden Fonksiyonlar

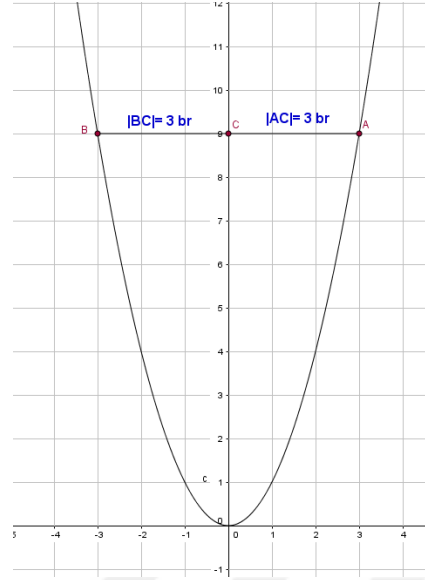
NCTM (2001) cebir öğrenme alanına ilişkin standartlar kapsamında lise öğrencilerinin farklı fonksiyon sınıflarının özelliklerini keşfetmeleri için önemli deneyimler yaşamaları gerektiğini (s. 299) vurgulamakta ve fonksiyon sınıflarını incelemeleri ve her birinin özelliklerini öğrenmeleri ve dolayısıyla bu fonksiyon sınıflarının her birinin önemli özelliklerini keşfetmeleri sebebiyle fonksiyonları doğrusal, ikinci dereceden ya da üstel olarak sınıflamanın anlamlı olduğunu anlayacaklarını (s. 300) belirtmektedir. Doğrusal fonksiyonların ötesine uzanan ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin öğrencilerin fikirleri ve düşünceleri onların fonksiyon aileleri boyunca inceleyecekleri genellemelere bir ortam hazırlamaktadır (Ellis ve Grinstead, 2008). İkinci dereceden fonksiyonlara ilişkin kavramlar ve özellikler diğer fonksiyonların öğrenilmesinde öğrenciler için temel yapıtaşları olup bu fonksiyonların özelliklerine ilişkin anlamlar polinom fonksiyonların yanı sıra diğer yapıdaki fonksiyonlara da aktarılacaktır (Metcalf, 2007).

İkinci dereceden fonksiyonlar cebirsel olarak $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde ifade edilen özel bir polinom fonksiyon olup grafiği parabol olarak adlandırılmaktadır. Eş zamanlı değişimi ve değişim oranı fikrini içeren ikinci dereceden fonksiyonlar için önemli bir hususun belirli aralıklardaki değişim oranının sabit olmayacağı olduğunu ifade eden Hohensee (2016, s.73) ikinci dereceden fonksiyon ile doğrusal fonksiyon arasındaki ilişkiyi iki şekilde açıklamaktadır:

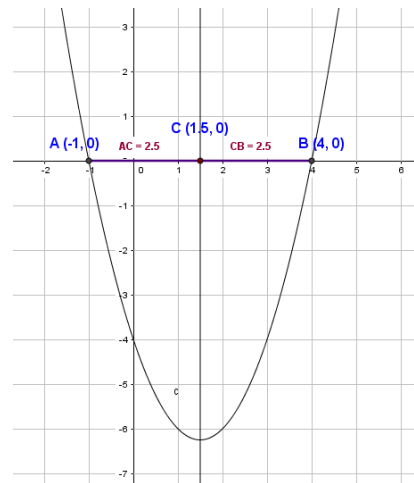
1. İkinci dereceden fonksiyonun belirli bir aralığı boyunca ortalama değişim oranı o aralıkta bir doğrusal fonksiyon tanımlar. Bir başka deyişle ikinci dereceden fonksiyona parçalı tanımlanmış doğrusal fonksiyonlar ile yaklaşılabilir.
2. Bir ikinci dereceden fonksiyonun ardışık eş boyutlu aralıklarındaki ortalama değişim oranları sabit bir miktarda değişir ve bu yüzden ikinci dereceden fonksiyonlar için değişim miktarlarının değişimi doğrusal fonksiyon tanımlar.

Fonksiyonun eş zamanlı değişim fikrini ikinci dereceden fonksiyonlar bağlamında incelemek ve doğrusal fonksiyonunun değişim oranının sabit olması fikrinden bu incelemede yararlanmak eşlenen iki çokluk arasındaki ilişkinin belirlenmesinde ve genellemeler yapılmasında etkili olacaktır. Bir başka bakış açısıyla, iki doğrusal fonksiyonun çarpımının ikinci dereceden bir fonksiyon olduğu vurgulanmaktadır (Movshovitz-Hadar, 1993). $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ fonksiyonu ile $c \neq 0$ olmak üzere $g(x) = cx + d$ fonksiyonunun çarpımı sonucunda $h(x) = Ax^2 + Bx + C$ ifadesi elde edilmektedir. Bir bağımsız değişkene bağlı olarak ifade edilen doğrusal fonksiyonun aynı bağımsız değişkene bağlı olarak ifade edilen başka bir doğrusal fonksiyon ile çarpılması bu çarpımlar sonucu oluşan yeni ilişkideki bağımsız değişkenin bir değişimine karşılık bağımlı değişkenlerin değişim miktarının giderek büyüyeceği ya da küçüleceği çarpmanın doğası gereği anlaşılabilmektedir. Nielsen (2015) ikinci dereceden eşitliklerin iki doğrusal iki terimlinin çarpımı olarak yazılabileceğini ve ikinci dereceden fonksiyonların bu çarpımsal doğası gereği, doğrusal ve diğer fonksiyonlardan farklı değişim örüntülerine sahip olduğunu ve bu örüntülerin ve değişim oranının ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadelerinde, grafiklerinde ve tablo değerlerinde görülebileceğini belirtmektedir.

İkinci dereceden fonksiyonların cebirsel ifadesinin sunduğu fikirlerin yanında grafiksel gösterimi de fonksiyonun genel olarak nasıl davrandığına ilişkin önemli fikirler sunmaktadır. Öğrenciler farklı gösterimler arasında geçiş yapmalarını sağlayan etkinlikler ile bu fikirleri ilişkilendirebilmektedirler. Fonksiyonun cebirsel ifadesi x^2 'li bir terim içerdiği için grafiği bir doğruya göre simetrik olup simetri eksenini olarak adlandırılan bu doğru $x = -\frac{b}{2a}$ 'dır. Grafiğin üzerindeki aynı y değerine karşılık gelen her iki x değeri simetri eksenine göre eşleşmekte ve simetri ekseninden uzaklıkları eşit olmaktadır.



Şekildeki $y = x^2$ fonksiyonunun grafiği üzerinde alınan A ve B noktaları, parabol $x=0$ doğrusu boyunca katlandığında biri biri ile eşleşmektedir ve her iki noktanın $x=0$ eksenine uzaklıkları 3 birimdir. $x = -\frac{b}{2a}$ ifadesi grafik x eksenini iki farklı noktada kestiği durumda bir başka deyişle $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin iki farklı çözümü olduğunda grafiksel gösterimde anlamlı olabilmektedir. Ancak öğretim sırasında öğrencilere bu ifade doğrudan verildiğinde öğrenciler simetri ekseninin y değeri aynı olan her iki x değerinin orta noktası ile ilişkilendiremeyebilir. Cebirsel ifade ile ilişkili olarak görünen bu ifade x eksenlerini iki farklı noktada kesen bir fonksiyon grafiğiyle kolaylıkla görülebilmektedir.



$f(x) = x^2 - 3x - 4$ fonksiyonunun grafiği çizildiğinde, $y = (x - 4)(x + 1)$ olarak çarpanlara ayrılmış formda yazıldığında $(x - 4)(x + 1) = 0$ denkleminin kökleri $x_1 =$

4 ve $x_2 = -1$ olarak bulunmaktadır. Grafikte ikisinin orta noktasının simetri ekseninin üzerinde olduğu ve köklerin toplamının yarısı olduğu görülebilmektedir. Ayrıca tepe noktasının apsisi de $x = -\frac{b}{2a}$ değeri olmaktadır.

Fonksiyonun cebirsel ifadesindeki a, b ve c katsayılarının grafiğin davranışını nasıl etkilediğinin incelenmesi de grafiksel gösterim için bir diğer önemli husustur. Grafiğin a katsayısı kolların yönünü ve kollarının açıklığını belirleyen bir ifadedir. $a > 0$ olması halinde parabolün kolları yukarı doğru açılmakta, $a < 0$ olması halinde ise aşağıya doğru açılmaktadır. $|a|$ ifadesinin değeri büyüdükçe kolların açıklığı küçülecek yani değişim miktarları giderek daha fazla artacaktır.



$f(x) = x^2$ fonksiyonu için (1,1) ve (2,4) noktalarını ve $g(x) = 2x^2$ fonksiyonu için (1,2) ve (2,8) noktalarını incelediğimizde $x = 1$ ve $x = 2$ noktalarının arasındaki değişime karşılık gelen değişim miktarının $g(x) = 2x^2$ fonksiyonunda daha fazla olduğunu ve dolayısıyla kollarının açıklığının küçüldüğünü söyleyebiliriz.

Fonksiyon ifadesindeki c katsayısı (0,c) noktası olarak grafiğin y eksenini kestiği noktayı yorumlama imkanı verirken, b ise a katsayısına göre tepe noktasının yerini belirlemektedir.

Fonksiyonun x ve y değerlerini veren tablo gösterimi de fonksiyonun değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğunu fikrinin açık bir şekilde görülmesini sağlamaktadır. Benzer şekilde, Nielsen (2015) bir ikinci dereceden fonksiyonun tablo değerlerini inceleyerek öğrencilerin fonksiyonda doğrusal fonksiyonlardaki gibi farkların eşit olmadığını, ikinci farkların ise sabit olduğunu fark edeceklerini ifade etmektedir.

Öğrencilerin İkinci Dereceden Fonksiyonları Anlamalarına Yönelik Yapılan Araştırmalar

Knuth (2000) öğrencilerin fonksiyonların cebirsel ve grafiksel gösterimleri arasındaki ilişkilere yönelik anlamalarını inceleyen bir çalışmanın sonuçlarını ortaya koymak ve öğrencilerin yetersiz ve eksik ilişkilendirmelerinin nedenlerini tartışmak amacıyla 284 lise öğrencisine fonksiyonların iki gösterimine yönelik sorular sormuştur. Hazırlanan on sorudan beşinin yanıtlarının değerlendirildiği bu çalışmadaki dört soru doğrusal fonksiyonlarla, bir soru ise ikinci dereceden fonksiyonlara ilgili olmuştur. Bu uygulamalar esnasında bir sınıftaki her üç öğrenciye bir soru sorulmuş bir başka deyişle bu 10 soru 30 kişilik bir sınıftaki öğrencilere farklı farklı sorulduğunda her bir soruyu üç kişi yanıtlamıştır. Öğrenci yanıtları cebirsel çözüm metotları ve grafiksel çözüm metotları olarak iki kategori altında sınıflandırılmıştır. İkinci dereceden fonksiyon ile ilgili soruda öğrencilere grafik üzerinde verilen bir noktanın fonksiyonun cebirsel ifadesinin bir çözümü olup olmadığı ve aynı fonksiyon ifadesi için verilen bir x değerine karşılık gelen y değerinin ne olduğu soruları sorulmuştur. 37 öğrencinin yanıtladığı bu soruda öğrencilerin %47'si parabol üzerindeki herhangi bir noktanın verilen denklemi sağladığı yanıtını vermiştir. Cebirsel metodu kullanan öğrencilerden bazıları seçtikleri tahmini belirledikleri noktaların koordinat değerlerinin fonksiyon ifadesini sağlamadığını ifade etmişlerdir. Buna ek olarak, bir noktanın fonksiyon ifadesini sağlaması için söz konusu grafiğin x eksenini kestiği noktalardan olması gerektiğini söyleyen öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonu ikinci dereceden denklem gibi düşünmüş olabileceklerini ifade etmiştir. Verilen x değerinin fonksiyondaki karşılığının bulunmasının istendiği soruda öğrencilerden %11'i grafiksel çözüm metodunu kullanmıştır. Öğrencilerin çoğu ise, verilen x değerini fonksiyon ifadesinde yerine yazarak y değerine ulaşmışlardır. Sonuç

olarak, hem doğrusal fonksiyonlar hem ikinci dereceden fonksiyonlar için öğrencilerin grafiksel gösterimi gerekli görmedikleri sonucuna ulaşılabilceğini ifade etmiştir.

Colunga Cavazos (2001) dokuzuncu sınıftan üniversite düzeyine kadar olan öğrencilerin doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonları öğrenmeleri süreçlerindeki bilişsel gelişimlerini işlemsel-yapısal öğrenme modeli açısından incelemeyi amaçlamıştır. Öğrencilerin süreçten nesneye geçişlerini daha iyi anlamak için Sfard'ın (1991) içselleştirme, yoğunlaşma ve nesneleştirme olarak ifade ettiği üç aşamalı modelden yararlanmıştır. Çalışmaya 29'u onuncu sınıf düzeyinde, 39'u mühendislik ilk döneminde, 35'i mühendislik dördüncü döneminde ve 29'u mühendislik son döneminde olmak üzere dört farklı akademik düzeyde 132 öğrenci katılmıştır. Nicel ve nitel araştırma yöntemlerinden yararlanılan çalışmada nicel yöntem olarak gelişimsel araştırma kategorisinde yer alan kesitsel çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte öğrencilere doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin farklı gösterimleri ve geçişleri içeren problemler sorulmuştur. Akademik düzey, kavramsal gelişim aşamaları ve fonksiyon türü olarak üç bağımsız değişken belirlenerek, bunlar arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Her madde için Sfard'ın modeline dayalı olarak üç puanlı rubrik geliştirilmiş ve bu doğrultuda kodlamalar yapılmıştır. Bu problemlere verilen yazılı yanıtlara bağlı olarak her düzeyden dörder öğrenci olmak üzere toplam 16 öğrenci ile görüşmeler yapılmıştır. Yapılan analizler doğrultusunda lise düzeyindeki öğrenci ile üniversite öğrencilerinin fonksiyonu anlama aşamalarında önemli farklılıklar olduğu ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte, öğrencilerin onuncu sınıftan üniversite son döneme kadar olan uzun bir dönemde bile doğrusal fonksiyon ve ikinci dereceden fonksiyon kavramını zihinsel bir nesne haline getirmede zorluk yaşadıkları görülmüştür. Öğrencilerin doğrusal fonksiyona ilişkin anlamaları daha derin olmasına karşın, her iki fonksiyonda da benzer yaklaşımlar sergiledikleri görülmüş ve bu durumda alan yazında var olan doğrusal fonksiyonlara ilişkin düşüncelerin aşırı genellemesi ile ilişkilendirilmiştir.

Borgen ve Manu (2002) çalışmalarında matematik sınavlarında başarılı olan öğrencilerin çözümlerinin arkasındaki matematiği anlayıp anlamadıklarını ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Öğrenci anlamalarını değerlendirmek için Schoenfeld'in

(1989) bir öğrencinin bilgisi ile standart öğretim programında kavram ile ilgili bilgileri karşılaştırmada yararlandığı yapısal yaklaşımı ve Pirie ve Kieren'in (1992a) matematiksel anlamının gelişimi ile ilgili olan dinamik teorisini temel almışlardır. Araştırma kapsamında uygun işlemsel yöntemleri kullanarak doğru sonuca ulaşan bir öğrencinin başka bir öğrenci ile etkileşimi incelenerek kavrama ilişkin matematiksel temelleri anlamadığı ve kavram yanlışlarına sahip olduğu ortaya koyulmaya çalışılmıştır. İki öğrenciye $y = 2x^2 - x + 1$ fonksiyonu verilerek bu fonksiyonun tepe noktasını ve bu noktanın maksimum ya da minimum noktasını olduğunu belirlemeleri istenmiştir. Öğrencilerden biri fonksiyonun $y = -x + 1$ ifadesini içermesi sebebiyle soldan sağa azaldığını ifade etmiştir. Fikirleri arasında ilişkilendirme yapamayan öğrencinin cebirsel gösterim ile grafiksel gösterim arasındaki geçişte kafa karışıklıklarının olduğu ve tepe noktasını hesaplamak için gerekli işlemleri bilmesine rağmen tepe noktasını grafiğin bir parçası olarak görmediğini belirtmiştir. Çalışmada öğrencinin kavramın altında yatan temel anlamları bilmemesine rağmen uygun işlemler yapılabildiği sonucuna ulaşmıştır.

Eraslan, Aspinwall, Knott ve Evitts (2007) bir öğrencinin ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesini grafiksel gösterime ve grafiksel gösterimi cebirsel ifadeye nasıl dönüştürdüğünü incelemek amacıyla görüşmeler yapmışlardır. Görüşmelerde öğrencinin düşüncelerini ortaya çıkarmak amacıyla dört etkinlik geliştirmişlerdir. İlk etkinlikte, $y = -x^2 - 3x + 5$ fonksiyonunun grafiğini çizmesi ve tepe noktası, y-eksenini kesen noktasını ve simetri eksenini bulması istenmiştir. Öğrenci bu süreçte fonksiyonun her bir terimi ayrı ayrı düşünmüştür ve tepe noktasını $(-3,5)$ noktası olarak belirlemiştir. İkinci etkinlikte $y = (x - 2)^2 + 5$ fonksiyonunun grafiğini çizmesi istendiğinde, öğrenci ilk olarak cebirsel ifadeyi standart forma dönüştürmüştür ve benzer şekilde x'in katsayı ile sabit terimi, tepe noktasının koordinatları olarak belirlemiştir. Verilen bir parabolün fonksiyon ifadesini yazmasının istendiği üçüncü etkinlikte, öğrenci tepe noktasının koordinatlarını kullanmış ve tepe noktasının apsisini ikinci terimin katsayısı ve ordinatını sabit terim olarak yazmıştır. Parabolün kollarının yukarı doğru olması sebebiyle de x^2 'nin katsayısını 1 olarak belirlemiştir. Son etkinlik olarak ise öğrencinin $y = (x + 2)^2$ fonksiyonun grafiğini çizmesi istenmiştir. Öğrencinin her bir etkinlikte benzer fikirleri

kullandığı görülmüş ve cebirsel gösterim ile grafiksel gösterim arasındaki geçişleri doğru yapabilmesi için uygun anlamlara sahip olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Eraslan (2007) çalışmasında onuncu sınıf öğrencisi olan Richard'ın bir ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinden cebirsel ifadesine geçiş yapma ve parabolün simetri eksenini, tepe noktasını ve x-kesenlerini belirleme üzerine çalışmasını analiz etmiş ve bu süreçte ortaya çıkan bölümlendirme [compartmentalization] kavramını tartışmıştır. Bölümlendirmenin varlığına kanıt olarak, öğrenenlerin aynı matematiksel kavramı tutarsız bir şekilde ele almalarının, öğrenenlerin zihninde durum ile ilgisi az olan şemaların ya da düşünce süreçlerinin olmasının ve öğrenenlere ipuçları verilmediğinde belirli bir kavram ile ilgili açık olmayan bilgileri kullanmayacaklarının dikkate alındığını ifade etmiştir. Çalışmada Richard'ın üç etkinliğe verdiği yanıtları bölümlendirme kavramı altında yorumlamıştır. Richard verilen bir parabolün cebirsel ifadesi oluşturma etkinliğinde, üç noktaya ihtiyacı olduğunu söylemiş olmasına rağmen sadece tepe noktasına odaklanarak standart formda bu değerleri yerine yazmış ancak cebirsel ifadeye geçiş yapamamıştır. İkinci etkinlikte sadece sabit terimleri farklı olan iki fonksiyonun simetri eksenleri, tepe noktaları ve x eksenini kesen noktaların karşılaştırılması istenmiştir. Öğrenci bu etkinlikte grafiksel gösterimi doğru bir şekilde ele alarak simetri eksenlerinin aynı olduğunu belirtmiş ancak cebirsel ifadeyi yorumlarken tepe noktalarının aynı olacağını ve sabit terimin etkisinin olmayacağını açıklamıştır. Sonrasında x eksenini kesenleri grafik üzerinden doğru bir şekilde yorumlamıştır. Richard'ın yanıtları değerlendirildiğinde, cebirsel ve grafiksel gösterimlere ilişkin sahip olduğu tutarsız fikirleri bölümlendirmenin kanıtları olarak ortaya çıkmıştır. Bölümlendirmenin parabolün tepe noktasına ilişkin cebirsel ve grafiksel düşünme arasında eksik ilişkilendirmeye neden olan bilişsel bir engel ortaya çıkardığı sonucuna ulaşılmıştır.

Metcalf (2007) öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin düşüncelerini ve ikinci dereceden eşitliklerin çözümlerine yönelik ilişkilendirmelerini derinlemesine tanımlamayı amaçlamıştır. Bu amaçla, “Öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonların grafiksel ve cebirsel gösterimlerine ilişkin anlamalarının doğası nedir?”, “Bu iki gösterim ve ikinci dereceden eşitliklerin çözümleri arasındaki

ilişkilendirmelere yönelik anlamaları nedir?” ve “Öğrencilerin ikinci dereceden eşitliklerle ilgili ön bilgileri ve anlamaları, eğer varsa, anlamalarını ne ölçüde etkilemektedir?” sorularına yanıt aramıştır. Durum çalışması deseninden yararlanan ve üç Analiz dersi öğrencisi ile çalışmasını yürüten araştırmacı ilk olarak öğrencilerle ön görüşmeler yapmıştır. Bu görüşme ile sonraki görüşmeler için öğrencilere görüşme ortamı oluşturmuş ve sesli düşünme ile ilgili kuralları açıklamıştır. Öğrenci anlamalarının doğasını araştırmak için, üç etkinlik türü geliştirmiştir. İlk etkinlikte, öğrencilerden verilen ifadeleri kullanarak bir kavram haritası oluşturmalarını istemiştir. Kart sınıflama etkinliği olan ikinci etkinlikte dokuz farklı fonksiyonun cebirsel ifadesinin ve grafiğinin ya da tablo ile x ve y değerlerinin yer aldığı kartları sınıflamalarını istemiştir. Bu iki etkinlik boyunca ikinci görüşmesini gerçekleştirmiştir. Son olarak beş rutin olmayan problemi çözmelerini isteyerek bu süreçte görüşmelerini gerçekleştirmiştir. İlk problemde, tablo ile x ve y değerlerini vererek fonksiyon ifadesini yazmalarını, ikinci problemde, $ax^2 + bx + c$ ifadesinde x yerine 1 yazıldığına pozitif bir değer, x yerine 6 yazıldığında negatif bir değer olması durumunda $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kaç çözümü olduğunu açıklamalarını, üçüncü ve dördüncü problemde grafiği verilen bir fonksiyonun ifadesini grafiğin x eksenini kestiği noktaları ilişkilendirerek yazmalarını istemiştir. Son problemde ise, $ax^2 + bx + c = y$ ifadesinin grafiğini çizerek a , b ve c katsayılarının değerlerinin pozitif, negatif ya da sıfır olup olamayacağını açıklamaları istenmiştir. Birinci görüşme boyunca ses kaydı, ikinci ve üçüncü görüşme boyunca hem ses hem de video kaydı yapmıştır. Ek olarak, öğrencilerin bulunduğu Analiz dersinin iki bölümünü gözlemlemiştir. Veri analizinde ses kayıtlarının ve kamera kayıtlarının transkriptlerinden yararlanarak, öğrencilerin yaptıklarını, yazdıklarını ve söylediklerini analiz etmiştir. Öğrencilerden birinin araçsal anlamasının kuvvetli olduğu ve ilişkisel anlamasında güçlüklerinin olduğu ortaya çıkmıştır. Diğer iki öğrenci ise, ilişkisel anlamının ayrı ayrı bileşenlerini sergilemişlerdir. Kavram haritası oluştururlarken, öğrencilerin hepsi çoklu gösterimler arası ilişkilendirmeleri yapmışlar ancak biri diğerlerinden farklı olarak tablo değerleri ile fonksiyon ifadesini ilişkilendirmiş ve tablodaki x değerlerinin $ax^2 + bx + c = y$ ifadesindeki x yerine koyulması ile tablodaki y değerlerinin elde edileceğini açıklamıştır.

Eraslan (2008) ikinci dereceden fonksiyonların farklı gösterimler arasındaki dönüşümlere ilişkin öğrencilerin yanıtlarına odaklandığı çalışmasını öğrencilerin zihinsel eylemlerini analiz etmeye yardımcı olan soyutlamanın indirgenmesi teorisine dayandırmıştır. Daha geniş kapsamlı bir araştırmasının bir bölümü olan bu çalışmada iki onuncu sınıf öğrencisinin etkinlik temelli görüşmelerde verdiği yanıtları analiz etmiştir. Öğrencilerle ikinci dereceden fonksiyonların üç haftalık öğretiminin hemen sonunda yarı-yapılandırılmış görüşmeler yapmış ve bu görüşmeleri kayıt altına almıştır. Görüşmelerde öğrencilere ikinci dereceden bir fonksiyonun grafiğini çizmelerini ve ötelenen fonksiyonların grafiklerinin karşılaştırmalarını gerektiren sorular yöneltilmiştir. Öğrencilerin verdikleri yanıtları “düşünülen nesne ve düşünen kişi arasındaki ilişkilerin niteliği” ve “nesne-süreç ikiliğinin yansıtılması” olarak soyutlama kavramı açısından yorumlamıştır. Öğrencilerden biri verilen fonksiyonun grafiğini çizerken $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonundaki birinci ve ikinci terimin katsayılarından tepe noktasını (a, b) olarak ifade ederek yararlanmıştır. Öğrenci bu süreçte beklenen soyutlamayı yapamamış ve tepe noktasından yararlanılarak yazılan cebirsel ifadeye ilişkin düşüncesini yanlış bir şekilde standart forma genellemiştir. Bir başka deyişle, $y = (x - h)^2 + k$ şeklinde ifade edilen fonksiyonda (h, k) tepe noktası olması sebebiyle $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunu $y = x(ax + b) + c$ olarak düşünerek yanlış ilişkilendirme yapmıştır. Diğer öğrenci ise $y = (x + 2)^2$ fonksiyonu ile $y = x^2 + 2$ fonksiyonunun grafiklerini doğru bir şekilde çizmiş ancak yaptıklarının nedenlerini açıklayamamıştır. Soyutlamanın indirgenmesi yaklaşımı öğrencinin doğru grafiksel gösterimleri yapmasına yardımcı olmasına karşın yaptıklarının nedenlerini açıklayamaması öğrencinin sadece işlemleri uygulayabildiğini ancak ilişkisel anlamasının olmadığını göstermiştir.

Ellis ve Grinstead (2008) öğrencilerin $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonundaki a , b ve c katsayılarına ilişkin oluşturdukları genellemeleri ortaya çıkarmaya çalışmışlardır. Araştırmaları kapsamında NCTM standartlarını dikkate alan ve projeye karşı ilgili olan bir öğretmenin sınıfında ikinci dereceden fonksiyonlar ünitesi boyunca gerçekleştirdiği öğretimini gözlemlemişler ve bu öğretime ilişkin toplam 16 gün video kaydı verilerini elde etmişlerdir. Çalışmanın diğer verilerini yapılan küçük sınavlar, testler ve ev ödevlerini içeren öğrencilerin yazılı çalışmaları ve sınıftan seçtikleri 8

öğrenci ile öğretim süreci içerisinde ve öğretim sürecinden sonra yapılan görüşmeler oluşturmuştur. Verilerin analizinde ilk olarak, birinci görüşme çözümlemelerini incelemişler ve öğrencilerin genellemeleri ile ilgili kategoriler geliştirmeye çalışmışlardır. Araştırmacılar ortak kodların ortaya çıkmasının ardından ikinci görüşmeleri analiz etmişler ve gerektiğinde belirledikleri kodları yeniden düzenlemişlerdir. Bu sürecin sonrasında sınıf uygulamalarını ve öğrencilerin yazılı çalışmalarını analiz eden araştırmacılar bu süreçte gömülü teoride kullanılan sürekli karşılaştırmalı analiz metodundan yararlanmışlardır. Öğrenciler, c katsayısına ilişkin y eksenini kesen değer olma, x eksenini kesen değer olma, grafiği öteleme ve tepe noktasını etkileme genellemelerinde bulunmuşlardır. b katsayısına ilişkin olarak, tepe noktasını etkileme, grafiği öteleme, grafiğin genişliği ifade etme, x eksenini kesen değer olma, eğimi ifade etme genellemelerini yaparlarken a katsayısına ilişkin olarak, grafiğin şeklini etkileme, grafiği esnetme, grafiğin yukarı ya da aşağı olmasını belirleme ve eğimi ifade etme genellemelerini yapmışlardır. Yapılan genellemelerden b ve a katsayısını eğim olarak ifade etmeleri çalışmanın şaşırtıcı bulgularından olmuştur. Araştırmacılar bunun sebebinin doğrusal fonksiyonlara ilişkin anlamalardan kaynaklanan genellemeler olduğunu ifade etmişlerdir.

Swanepoel ve Grekal (2010) Eritre ülkesindeki 11.sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonları öğrenmelerine MS Excel ve RJS Graph yazılım programlarının etkisinin ne olduğu sorusunu yanıtlamak için deneysel bir çalışma yürütmüşlerdir. İlk olarak öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin genel bilgilerinin benzer olup olmadığını araştırmak için dört soruluk bir ön test yapmışlardır. Ardından dört haftalık yaklaşık 20 saati içeren öğretim sürecini gerçekleştirmişlerdir. Bu süreçte, deney grubundaki (15 öğrenci) her öğrenciye kişisel bilgisayar verilerek ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin bilgisayar uygulamaları yapılırken, kontrol grubundaki öğrencilere geleneksel öğretim yapılmıştır. Uygulama tamamlandıktan sonra her iki gruba alt sorular olan 7 temel soru sorularak son test uygulanmıştır. Ek olarak, deney grubundaki öğrencilerin bilgisayar ile çalışmalarının ikinci dereceden fonksiyonları öğrenmeye yönelik eğilimlerini etkileyip etkilemediğini ortaya çıkarmak amacıyla on sorudan oluşan kapalı uçlu bir anket ve öğrenme sürecinde bilgisayar kullanımına ilişkin deneyimlerinin nasıl olduğunu

anlamak amacıyla beş açık uçlu soruyu içeren görüşme yapılmıştır. Verilerin analizi sonucunda deney grubundaki öğrencilerin ortalama puanlarının kontrol grubundaki öğrencilerden büyük ölçüde yüksek olduğu sonucu ortaya çıkarılmıştır. Bunun yanı sıra, öğrencilerin bilgisayar kullanımının öğretme ve öğrenme sürecinin sıkıcılığını azalttığı ve zaman tasarrufu sağladığı fikirlerine sahip oldukları görülmüştür. Yapılan görüşmelerden de, öğrencilerin bilgisayar kullanmalarının onları ikinci dereceden fonksiyonları öğrenirken motive olmalarını desteklediği ve öğretmen-öğrenci, öğrenci-öğrenci etkileşimlerini, sınıf tartışmalarını, grup çalışmalarını ve katılımı kolaylaştırdığı sonuçlarına ulaşılmıştır.

Sevim (2011) öğrencilerin bireysel olarak ikinci dereceden artış, ikinci dereceden eşitlik, grafikler, tepe noktası, x-kesenleri, y-kesenleri, simetri eksen, katsayılar ve ikinci dereceden denklemler gibi ikinci dereceden fonksiyonlarla ilgili çeşitli kavramları nasıl anladıklarını ortaya çıkarmayı amaçladığı doktora tez çalışmasında durum çalışması deseninden yararlanmıştır. Üçü üniversite öğrencisi biri lise öğrencisi olan dört öğrencinin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin düşüncelerini, akıl yürütmelerini ve anlamalarını bütüncül bir şekilde derinlemesine incelemiştir. Araştırmasında öncelikli veri toplama aracı yarı yapılandırılmış klinik mülakatlar olmuştur. 12 etkinliği öğrencilerin temposuna göre iki kısma ayırarak her öğrenci ile bu etkinlikler üzerine iki mülakat gerçekleştirmiştir. Bu mülakatlar araştırmacıya öğrencilerin problem durumlarını çözmeleri için ikinci dereceden fonksiyon kavramına ilişkin kavrayışlarını ve anlamalarını spontane olarak nasıl uyguladıklarını ortaya çıkarma imkanı sağlamıştır. Çalışmanın diğer verilerini, öğrencilerin etkinliklere verdikleri yazılı yanıtlar, kendi oluşturdukları şekiller ve matematiksel ifadeler, bireysel matematik geçmişine yönelik ankete verdikleri yanıtlar ve araştırmacının gözlemleri olmuştur. Verilerin analizinde, örnek olarak iki öğrencinin detaylı tanımlamaları yapıldıktan sonra, tematik nitel veri analiz tekniklerinden yararlanılmıştır. İki öğrencinin derinlemesine analizi diğer öğrencilere yönelik geçici modellerin ve hipotezlerin oluşturulmasını sağlamıştır. Öğrencilerden biri ikinci dereceden fonksiyonu y için bir x değeri olan bir denklem olarak, bir diğeri x 'in her değeri için grafik üzerinde sadece bir y değeri olan bir grafik türü olarak yorumlamıştır. Ek olarak dört öğrenci de fonksiyonun bölümlendirilmiş şekilde ele

almışlar ve çoklu gösterimlerin bir araya gelmesi olarak düşünmüşlerdir. Bu öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyona ilişkin eylem anlamına sahip oldukları ortaya çıkmıştır.

Lobato, Hohensee, Rhodehamel, ve Diamond (2012), çalışmalarında Simon'un (2006) temel gelişimsel anlama [key developmental understanding] diye adlandırdığı genel yaklaşımının ikinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesine ve öğretilmesine uyarlanması üzerine odaklanmışlar ve öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlarda gelişmiş bir anlama oluşturmaları için temel olan kavrayışları ve anlamının yönlerini vurgulamak amacıyla “temel aracı anlamlar (pivotal intermediate conception)” yapısını ve bununla ilişkili olarak kavramsal öğrenme amacını ileri sürmüşlerdir. Temel aracı anlamlarını, öğrencilerdeki matematiksel gelişimi güçlendirebilen geçiş düşünceleri olarak ifade eden araştırmacılar bu kavramı iki anlamda kullanmışlardır. Birincisi, öğrencilerin problemler ya da daha kompleks fikirlere ilişkin akıl yürütmeleri için kavrayışlarının güçlendirilmesi, ikincisi ise, bir grup öğrencinin fikirlerini ve düşüncelerini içermesidir. 24 sekizinci sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilen çalışmada araştırmacılar bu düzeydeki öğrencilerin gelişmiş bir ikinci dereceden fonksiyon anlamını kazanmaları için temel olan hızlanma fikrini oran (türev) ve birikim (integral) olarak iki yolla ileri sürmüşlerdir. Oran yaklaşımında, öğrenciler belirli bir ikinci dereceden fonksiyonun parçalı doğrusal yaklaşımı üzerine çalışarak ikinci dereceden fonksiyonlara ulaşmaktadırlar. Örneğin, konum-zaman fonksiyonu eşit aralıklara ayrıldığında, öğrenciler her bir aralıkta ortalama hızı incelemekte ve hızlanmanın ölçüldüğü aralıkları belirleyerek hızlanmayı anlamlandırmaktadırlar. Birikim yaklaşımında ise, ikinci dereceden fonksiyonlarda olduğu gibi konum-zaman ilişkisinde ortalama hızlanma anlık hıza eşit olduğu için öğrenciler ortalama hızlanmayı hız-zamana ilişkin doğrusal fonksiyonun eğimi olarak dikkate almaktadırlar. Çalışma kapsamında ikinci dereceden fonksiyonlarla ilgili herhangi bir formal öğretim olmadan 7-9 kişilik üç öğretimsel oturum gerçekleştirilmiş ve bu oturumlardan ikisinde oran yaklaşımı diğerinde birikim yaklaşımından yararlanılmıştır. Her öğretimsel oturum okul sonrasında 15 saatlik bir öğretimi içermiş ve her bir öğrenci ile 75 dakika süren klinik mülakatlar gerçekleştirilmiş ve bu görüşmeler kayıt altına alınmıştır. Verilerin analizinde, araştırmacılar bir hareket

bağlamında ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin temel aracı anlamlar kapsamında beş tema ortaya çıkarmışlardır. Birincisi, çokluklar olarak geçen mesafeyi düşünme, ikincisi geçen zamanı düşünme ve bu zamanı alınan mesafe ile eşleme, üçüncüsü, alınan mesafenin geçen zamana oranı olarak hızı düşünme, dördüncüsü, hızı hızdaki değişimi zihinsel olarak karşılaştırabilen çokluk olarak düşünme ve sonuncusu hızdaki değişimin zamana oranı olarak hızlanma kavramına ulaşma ve ikinci dereceden konum-zaman ilişkisinde hızlanmanın sabit olduğunu anlamadır. Yapılan analizlerle farklı öğrencilerin beş farklı düzey düşünceleri etkinlik çözümlerine yansıttıkları görülmüştür.

Childers ve Vidakovic (2014) öğrencilerin bir ikinci dereceden fonksiyonun tepe noktasını nasıl anladıkları ortaya çıkarmak ve tepe noktası kavramına ilişkin kişisel anlamalarını bir cebir problemi ve bir gerçek yaşam problemi bağlamında tepe noktasını bulma becerileri ile nasıl ilişkilendirdiklerini belirlemek amacıyla 66 öğrenciye iki soru yönetmişlerdir. Birinci soruda verilen bir fonksiyonun grafiğinin kollarının yukarı ya da aşağıya olup olmadığını belirlemeleri, tepe noktasını sıralı ikili olarak yazmaları ve tepe noktasının maksimum ya da minimum değer olup olmadığını ifade etmeleri ve bir ürünün kar miktarını ifade eden bir ikinci dereceden fonksiyon ifadesi verilerek maksimum değeri bulmaları istenmiştir. İkinci soruda ise tepe noktasının ne anlama geldiği ve nerede olduğu sorulmuştur. Öğrencilerin yazılı yanıtları APOS teorisi bağlamında analiz edilmiştir. Yapılan analizler doğrultusunda öğrencilerin tepe noktasına ilişkin altı farklı kategori bağlamında yanıtlarının olduğu görülmüştür. Öğrenciler tepe noktasını maksimum ya da minimum nokta, başlangıç ya da dönüm noktası, kesen nokta, kesişim noktası olarak ifade etme, simetri eksenini ile ilişkilendirme olarak ele almışlardır. Öğrenciler rutin olmayan problemlerde güçlükler yaşamışlardır ve gerçek yaşam probleminde maksimum değeri bulmadaki en yaygın hatalardan biri fonksiyonun değerinin 0 olduğu noktaları bulmaları olmuştur. Yanlış anlayışlara sahip öğrencilerin her iki problemde de yanlış yanıtlar verdikleri görülmüştür.

Nielsen (2015) doktora tez çalışmasında, Cebir ve ilk Analiz derslerini tamamlayan öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin neler anladıkları,

cebirsel ifadeleri ve grafikleri arasında ne gibi ilişkilendirmeler yaptıkları, ikinci dereceden denklemleri nasıl çözdükleri ve ikinci dereceden fonksiyonları öğrenme ve anlama süreçlerinde hangi bilişsel destekler ve engellerle karşılaştıkları sorularına yanıt aramıştır. Bu amaçla, 9, 10 ve 11. sınıf düzeylerindeki 27 öğrenci ile derslerin son ayında bilişsel mülakatlar gerçekleştirmiştir. Mülakatlar kapsamında, ikinci dereceden fonksiyonların ne olduğu ve fonksiyonlarla ilişkileri, $y = x^2$ fonksiyonu, farklı biçimlerde sunulan denklemlerin çözülmesi, standart form, çarpanlara ayrılmış form ve kanonik formdaki fonksiyonların grafiklerini çizme ve grafik inceleme ile ilgili sorulara yer vermiştir. Yaklaşık 40 dakika sürede bireysel olarak yaptığı yarı yapılandırılmış görüşmeleri ses kaydı ve kamera kaydına almıştır. Verilerin analiz sürecini ilk görüşmeyle birlikte başlatan araştırmacı görüşmeleri transkript etmiş ve dört aşamada analizini gerçekleştirmiştir. Birinci aşamada, bireysel olarak öğrencilere odaklanmış, ikinci aşamada problemlere odaklanmış, üçüncü aşamada tüm öğrencileri incelemiş ve dördüncü aşamada problemleri tekrar ele almıştır. Öğrenciler $y = x^2$ fonksiyonunun simetri eksenini anlamlandırmalarına rağmen neden simetrik olduğuna ilişkin tutarlı açıklamalar yapamamışlardır. İkinci dereceden denklemleri çözerlerken doğrusal denklemlerde öğrenmiş oldukları stratejileri kullanmışlardır ancak ikinci dereceden fonksiyonları düşünürlerken büyük ölçüde doğrusal fonksiyonlarla ilgili bilgilerine dayalı yorumlar yapmışlardır. Bu sebeple a katsayısını eğim olarak yorumlayan öğrenciler olmuştur. Öğrenciler c katsayısının grafiğin y eksenini kestiği nokta olduğuna ilişkin güçlü anlayışları olmalarına rağmen bunun nedenini açıklamada yetersiz kalmışlardır.

Hohensee (2016) öğrencilerin farkında olmalarını bir başka deyişle yeni öğrendikleri kavramlar ile önceden öğrendikleri kavramları ilişkilendirip ilişkilendirmediklerini ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Öğrencilerin farkında olmalarını bireysel yön ve sosyal yön olarak iki boyutta ele alan araştırmacı farkında olmanın zihinde gerçekleştiğini vurgulayan bireysel boyutta kompleks bir algısal ve/veya kavramsal alandan belirli özellikleri zihinsel olarak ayırt etme, seçilen özelliklerin zihinsel kayıtlarını oluşturma ve yeniden sunma ve bu özelliklerin düzenliliğini ya da düzensizliğini, özelliklerini ve kavramsal nesneleri tanımlama eylemlerini ele almıştır. Sosyal boyutunu ise etkileşimlere odaklanma, farkında

olmaya ilişkin normlar ve öğretimsel etkinliklerin özellikleri olarak ifade etmiştir. Bu çerçevede öğrencilerin doğrusal fonksiyonlara ilişkin akıl yürütmelerinin ikinci dereceden fonksiyonlara yönelik gerçekleştirilen öğretim ile değişip değişmediğini ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Bu süreçte doğrusal fonksiyon kavramının önemli fikri olarak değişim oranının sabit olması, ikinci dereceden fonksiyonun önemli fikrini ise değişim miktarının sabit bir şekilde değişmesi olarak belirtmiştir. Tasarım tabanlı bir çalışma gerçekleştiren araştırmacı bir ortaokulda yedi öğrenci ile yaz döneminde çalışmıştır. İlk olarak öğrencilerin doğrusal fonksiyona ilişkin akıl yürütmelerini anlamak amacıyla uygulamadan önce klinik mülakatlar yapmıştır. 16 dersi içeren 8 günlük bir uygulama sürecinin ardından öğrencilere ilk mülakattaki etkinliklere paralel olarak belirlediği etkinliklerle tekrar klinik mülakatlar gerçekleştirmiştir. Veri analizinin ilk aşamasında öğrencilerin doğrusal fonksiyona ilişkin akıl yürütmelerine odaklanmış ve bu sebeple ön ve son görüşmeleri kodlayarak karşılaştırmalar yapmıştır. İkinci dereceden fonksiyonlara ilişkin öğretimlerin kamera kayıtlarını inceleyerek potansiyel olarak zengin durumları tanımlamış ve tanımlayıcı bir şekilde ayrıntılandırmıştır. Bu süreçte farkında olmanın bireysel boyutunu ortaya koyan öğrencilerin sözel ifadelerini, el ve kol hareketlerini ve yazılı çalışmalarını incelemek amacıyla açık kodlama ile matematiksel odak merkezini kategorize etmeye çalışmıştır. Sosyal boyutu incelemek için ise etkileşimlere odaklanma bileşenini kategorize etmiştir. Yapılan analizler doğrultusunda ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin yapılan öğretim yedi öğrenciden beşinin doğrusal fonksiyonlara ilişkin akıl yürütmelerini etkilediği görülmüştür. $f(x) = ax + b$ fonksiyonunda $b \neq 0$ olması halinde doğrusal ilişkiyi fark edemeyen bir öğrenci öğretim sonucunda benzer ilişkiyi fark edebilmiştir. Görüşmeye ilişkin bulgularla sınıf bulguları karşılaştırıldığında, ikinci dereceden fonksiyonlardaki çokluklardaki değişimleri fark eden öğrenciler doğrusal fonksiyonlara ilişkin akıl yürütme biçimlerinde en büyük değişiklikler olan öğrenciler olmuştur. Ek olarak, öğrencilerin öğretim boyunca odak merkezlerinin sosyal süreçlerle yakından ilişkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Kobak Demir ve Gür (2016) öğretmen adaylarının ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin zorluklar yaşadıklarını ifade ederek öğretmen adaylarının parabol konusuna ilişkin bilgiyi oluşturma süreçlerini ve bu süreçte öğretmenin rolünü

incelemeyi amaçlamışlardır. Durum çalışması desenine dayalı olan araştırmalarını bir üniversitenin kimya öğretmenliği birinci sınıfında öğrenim görmekte olan 17 öğrenci ve matematik dersini yürüten bir öğretim elamanı ile gerçekleştirmişlerdir. 7 ders saatinde yürütülen çalışmanın verilerini ders gözlemleri, öğrencilerin ders notları, öğretim elemanının tahtaya yazdığı bilgiler oluşturmuştur. Öğrencilerin bilgiyi oluşturma süreçleri RBC+C teorisindeki tanıma, kullanma, oluşturma ve pekiştirme eylemleri açısından incelenerek veriler betimsel olarak analiz edilmiştir. Buna ek olarak, kuramsal yapıdan farklı olabilecek durumları ortaya çıkarmak için içerik analizinden de yararlanılmıştır. Öğretmen kendisinin aktif olduğu ilk derste öğrencilerin ikinci dereceden denklemlere ilişkin ön bilgilerini sorgulamış ve ikinci dereceden fonksiyonun tanımını vermiştir. İkinci derste öğrencilerin $y = x^2$ grafiğini noktalar belirleyerek çizmelerini istemiş ve sonrasında çember tanımını sorarak parabolün tanımına ulaşmalarını sağlamıştır. Öğrencilerin parabol tanımına ulaşmalarında çembere ilişkin ön bilgilerinin tam olması etkili olmuştur. Bunun yanında, öğrencilerin kendi aralarında ve öğretmenle kurdukları etkileşimler de bilgiyi oluşturmalarında destekleyici nitelikte olmuştur. Üçüncü derste $y = ax^2$ ifadesindeki a katsayısına göre parabolün durumunu tartışan öğretmen dördüncü derste $y = x^2 + c$ tipindeki paraboller ve $y = (x + k)^2$ ifadesinde k 'nın değişimine göre parabollerin durumunu ele almıştır. a katsayısının değişimi sırasındaki etkileşimler öğrencilerin bilgiyi oluşturdıklarını gösterirken $y = (x + k)^2$ ifadesinde diyalogların sınırlı olmasından dolayı öğrencilerin bilgiyi oluşturma süreçleri yorumlanamamıştır. Beşinci derste $y = ax^2 + bx + c$ ifadesinin grafiğini çizmelerini ve altıncı derste grafiği verilen ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesini x eksenini kesen noktalar yardımıyla yazmalarını isteyen öğretmen bu derslerde sunuş yoluyla öğretimi gerçekleştirdiği için öğrencilerin bilgiyi oluşturma süreçleri incelenememiştir. Son derste öğretmen simetri eksenine ilişkin sorular sorduğunda öğrenciler tepe noktası ile ilişkilendirmeler yapmışlardır. Çalışma kapsamında elde edilen sonuçlar, öğrencilerin, parabol, tepe noktası, simetri eksenini, parabolün grafiğini çizme, grafiği verilen bir parabolün denklemini yazma bilgilerini kısmen oluşturabilmişlerdir. Öğrencinin bilgiyi oluşturmada ön bilgilerinin yeterli olmasının yanı sıra öğretmenin kendilerini ifade etmelerine imkan tanıyan tartışma ortamları oluşturmaları ve ön

bilgilerinden hareketle öğrencinin bilgiye ulaşmasını sağlayan amaçlı ve doğru sorular seçmiş olması da etkili olmuştur.

Öğrencilerin İkinci Dereceden Fonksiyonlara İlişkin Güçlüklerine Yönelik Yapılan Araştırmalar

Fonksiyonları anlamaya yönelik yapılan çoğu çalışmanın ya fonksiyonun formal tanımına ya da özel olarak doğrusal fonksiyonlara odaklandığını ifade eden Zaslavsky (1997) öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin anlamalarını engelleyebilecek kavramsal engelleri ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Bu amaçla, İsrail’de 8 lisedeki ikinci dereceden fonksiyonların öğretiminin gerçekleştirildiği toplam 25 sınıfta bulunan 800’den fazla 10. ve 11. sınıf öğrenci ile çalışmasını yürütmüştür. Veri toplama sürecinde ilk olarak sınıf gözlemleri yapmış ve öğrencilerin defterlerini incelemiştir. Ardından bu verilerin sonuçlarına dayalı olarak problemler oluşturmuştur. Öğrencilerin bu problemlere verdikleri yazılı yanıtlarından öğrencilerin kavram yanılgılarını ortaya çıkarma potansiyeli olacak problemleri tanımlamak amacıyla yararlanmıştır. Üçüncü aşamada araştırmacı daha az problemi daha çok öğrenciye uygulamış ve ikinci ve üçüncü aşamadaki öğrenci yanıtlarının analizlerini bu çalışmasında ele almıştır. Öğrencilere sunacağı problemleri hazırlarken, öğrencilerin ezbere ya da rutin işlemleri yapmalarını engellemeyi, mantıksal çıkarımlar yapmalarını güçlendirmeyi ve onları yanıtlarını gerekçelendirmeleri konusunda teşvik etmeyi amaçlamıştır. Ek olarak, sonuçların nesnelliğini arttırmak amacıyla da çoktan seçmeli şeklinde hazırlamıştır. Öğrencilerin yanıtlarını incelerken ilk olarak, her probleme verilen yanlış yanıtları tanımlamış ve doğru yanıtların sıklığı ile karşılaştırmalar yapmış, ardından yanlış yanıtlara verilen yazılı açıklamaları incelemiştir. Araştırmacı bu analizler sonucunda ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin beş temel kavramsal engel olduğunu ortaya çıkarmıştır. Birincisinin, grafiksel bilginin yorumlanması ile ilgili engeller olduğunu ifade ederek, bu kategori altında öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonun grafiğini, sonsuz tanım kümesi olmasına rağmen, çizilen kısmı ile sınırlıymış gibi düşündüklerini ve grafiğin herhangi bir asimptotunun olmamasına rağmen düşey asimptotu varmış gibi ele aldıklarını belirtmiştir. İkinci engeli, öğrencilerin ikinci dereceden denklem ile ikinci dereceden fonksiyonun ilişkisi ile ilgili olduğunu ortaya çıkarmıştır. Bu engeli açıklarken öğrencilerin ikinci

dereceden denklemdeki terimlerin katsayılarının bir sayı ile genişletilmesi halinde oluşan denklemin ilk denkleme eşit olduğu fikrini ikinci dereceden fonksiyonun katsayıları bir sayı ile çarpıldığında yine aynı fonksiyon olacağı fikrine genellediklerini ifade etmiştir. İkinci dereceden fonksiyon ile doğrusal fonksiyon arasındaki karşılaştırma ile ilgili olan üçüncü engel, öğrencilerin bir parabolün üzerindeki herhangi üç noktanın doğrusal olacağını düşünmeleri olmuştur. Ek olarak, $y = ax^2 + bx + c$ ifadesindeki a ve b katsayıları ile $y = ax + b$ ifadesindeki a ve b katsayılarını aynı ele almışlardır. Örneğin, a katsayısını eğim olarak düşünmüşler ve a katsayısını bulmaya çalışırken iki noktadan eğim bulma yaklaşımını sergilemişlerdir. Bir başka örnek olarak $y = x^2 - 3$ ifadesinde b katsayısını -3 olarak ele almışlardır. Dördüncü kavramsal engel kapsamında, b ve c katsayılarından birinin sıfır olduğu ikinci dereceden fonksiyonların $y = ax^2 + bx + c$ ifadesi ile ilgili olmadığını düşündüklerini ve herhangi bir katsayının değerini sıfır olarak düşünmek yerine yokmuş gibi ele aldıklarını belirtmiştir. Son kavramsal engel olarak öğrenciler belirli noktaların sadece bir koordinatını ele almışlardır. Örneğin, tepe noktasını belirlerken sadece apsis değerini dikkate almışlar, eğer apsis değeri aynı ise ordinat değerleri farklı olmasına rağmen aynı noktaymış gibi düşünmüşlerdir. Ek olarak, öğrenciler simetri eksenini bulabilmelerine rağmen, doğrudan simetri eksenine odaklanmaya yönlendirilmediklerinde onlara verilen simetri eksenini ile ilgili bilgileri kullanamadıkları görülmüştür. Öğrenciler problemlerin çözümlerinde kanonik form ve çarpanlara ayrılmış form yerine standart formunu kullanmayı tercih etmişlerdir. Bulgular öğrencilerin görsel olarak akıl yürütmeye yönelik isteksiz olduklarını ve grafiksel ve cebirsel gösterimler arasındaki geçişlerde zorluklarla karşılaştıklarını göstermiştir.

Mitchelmore ve Cavanagh (2000) öğrencilerin doğrusal fonksiyonların ve ikinci dereceden fonksiyonlarının grafiklerini grafik hesap makinelerinde çizerken yaşadıkları zorlukları incelemişlerdir. Klinik mülakat yöntemi ile gerçekleştirilen çalışmadaki 25 katılımcı öğrencinin çoğu teknoloji kullanımında deneyimsiz olup grafik hesap makinelerini sadece doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların grafiklerini çizmek amacıyla kullanmışlardır. Öğrencilere mülakatlar kapsamında sekiz tane farklı doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyon verilerek grafiklerini çizmeleri

istenmiştir. Her bir öğrenci ile üç ayrı oturumda ve her biri iki hafta aralıklarla 50 dakikalık görüşmeler yapılmıştır. Öğrencilerden sadece sekizinin ikinci dereceden fonksiyonun grafiğini doğru bir şekilde çizebildikleri kalanlarının ise parabol yerine doğru çizdikleri görülmüştür. x-eksenini kesmeyen bir grafiği olan ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin x-eksenini kestiği noktaların ve tepe noktalarının bulunmasının istendiği bir soruda tüm öğrenciler fonksiyonun grafiğini yakınlaştırarak bulmaya çalışmışlardır. Sadece üç öğrenci denklemin köklerinin irrasyonel olması sebebiyle tam olarak bulunamayacağını ifade etmiştir. Çalışmanın sonucunda öğrencilerin hem grafik hesap makinesini uygun bir şekilde kullanmadıkları hem de fonksiyonun farklı gösterimleri arasındaki geçişlerde büyük güçlükler yaşadıkları ortaya çıkarılmıştır.

Zazkis, Liljedahl ve Gadowsky (2003) öğrencilerin ve öğretmenlerin ikinci dereceden fonksiyonların yatay ötelenmesi ile ilgili zorluklarla nasıl başa çıktıklarını araştırmak ve bu zorlukların üstesinden gelmenin ya da en azından azaltmanın nasıl mümkün olacağını ortaya çıkarmak amacıyla 15 öğretmen adayı, 16 öğretmen ve 10 öğrenci ile çalışmışlardır. Katılımcıların $y = x^2$ ve $y = (x - 3)^2$ arasındaki ilişkiyi tahmin etmelerini, kontrol etmelerini ve açıklamalarını istemişler ve veri toplama sürecinde klinik mülakat yönteminden yararlanmışlardır. Görüşmelerin ses kayıtlarını çözümleyerek açıklamalardaki yaygın eğilimleri, algılanan tutarsızlıklara yönelik davranışları ve katılımcı grupları arasındaki farklılıkları ortaya çıkarmaya çalışarak analiz etmişlerdir. Analizler sonucunda, öğrencilerin yarısının görüşmenin başında $y = (x - 3)^2$ fonksiyonunun konumunu yanlış tahmin ettikleri görülmüştür. Öğrenciler açıklama yapmaları istendiğinde, önceden öğrenmiş oldukları kuralları hatırlamaya çalışmışlar ve örüntülerden elde ettikleri genellemeleri sunmuşlardır. Öğretmenler fonksiyon grafiğini doğru bir şekilde çizmişler ancak bu süreçte bilgilerini hatırlama eğilimi sergileyerek çaba harcamamışlardır. Öğretmenler açıklamalarında kurallara değinme, noktalar belirleyerek grafiği çizme, $y = 0$ ve tepe noktasını bularak diğer noktaları simetri ekseninden yararlanma ile bulma yaklaşımlarından yararlanmışlardır. Öğretmen adayları ise, birkaç dakika düşünme ve kontrol etme ihtiyacı hissetmişlerdir. Öğretmenler ile öğretmen adayları arasında önemli bir farklılık olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Eraslan (2005) öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları öğrenme süreçlerindeki bilişsel engellerini ortaya çıkarmak amacıyla durum çalışması gerçekleştirmiştir. Bu amaçla iki cebir öğrencisiyle birebir görüşmeler gerçekleştirmiş ve görüşmelerde öğrencilerin çözüm süreçlerini ve yazılı yanıtlarını Schoenfeld'in matematiksel analiz düzeylerine ve Tall ve Vinner'ın kavram ve kavram imajı çerçevesine göre analiz etmiştir. Öğrencilerden biri tepe noktası verilen grafiği cebirsel ifadeye dönüştürmede güçlükler yaşamış ve grafiğin ötelenmesi ile ilgili durumlarda ilişkilendirmeler yapmadan ezbere bir işlem uygulamıştır. Buna rağmen, a, b ve c katsayılarını doğru bir şekilde yorumlamış ve verilen grafik y eksenini kesmemiş olsa bile grafiğin y eksenini keseceğini ifade etmiştir. Diğer öğrenci ise, grafikteki tepe noktasının değerlerini $y = ax^2 + bx + c$ ifadesindeki b ve c olarak ele almıştır ve y eksenini parabolün asimptotu olarak ifade etmiştir. Ayrıca öğrencilerin her ikisi de fonksiyonun kanonik formu yerine daha çok standart formunu kullanma eğilimi göstermişlerdir.

Koklu ve Topcu (2012) çalışmalarında matematik yazılım programlarından Cabri destekli öğretimin öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişki kavram yanlışlarına etkisini incelemeyi amaçlamışlardır. Yarı deneysel yöntemden yararlandıkları araştırmada 20'si deney grubu 24'ü kontrol grubu olarak 44 onuncu sınıf öğrencisi ile çalışmışlardır. Beş maddelik iki aşamalı test öğrencilerin önceden belirlenmiş kavram yanlışlarını test etmek amacıyla öğretmenlerin yardımıyla araştırmacılar tarafından hazırlanmıştır. Test maddelerinden ilk üçü $f(x) = ax^2 + bx + c$ genel formundaki sabit c teriminin tepe noktasını etkilemediğine ilişkin kavram yanlışlığı ile ilgili, diğer ikisi a'nın ya da b'nin parabolün eğimi olabileceğine ve ikinci dereceden bir fonksiyonun herhangi bir noktasından geçen teğet doğrusunun eğiminin sabit olacağına ilişkin kavram yanlışları ile ilgilidir. Araştırmacılar deney ve kontrol grubunda haftalık 4 saat olarak iki haftada öğretimlerini tamamlamışlardır. Kontrol grubunda öğretmenin ders anlatımını, iyi seçilmiş problemler üzerinde kuralların ve teoremlerin uygulanmasını, formüllerin tartışılmasını ve öğrenilenlerin özetlenmesini içeren bir öğretim gerçekleştirilirken, deney grubunda benzer süreçler Cabri destekli bir ortamda yapılmıştır. Uygulamaların sonunda her iki gruba beş maddelik test uygulanmıştır. İki aşamalı olarak gerçekleştirilen veri analizinde ilk olarak,

öğrencilerin önceki sınav puanları, kavram yanlışlığı testine ilişkin puanlar ve başarı puanları betimsel olarak karşılaştırılmış ve sonrasında regresyon analizi yapılmıştır. Analizler sonucunda, Cabri destekli öğretimin öğrencilerin kavram yanlışlıkları üzerinde önemli ölçüde etkilerinin olmadığı görülmüştür. Grupların başarı puanları karşılaştırıldığında, deney grubunun puanlarının kontrol grubundaki öğrencilerden yüksek olduğu ortaya çıkmıştır. Bir başka deyişle, Cabri destekli öğretimin öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin başarılarını arttırdığı söylenebilir.

İkinci Dereceden Fonksiyonlara Yönelik Yapılan Diğer Araştırmalar

Huang, Li ve An (2012) Çin'deki öğretmenlerin öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonları noktasal ve genel yaklaşımla öğrenmelerine yardımcı olmak için stratejilerini nasıl kullandıklarını incelemeyi amaçlamışlardır. Noktasal yaklaşımda, fonksiyonun ayrı noktalarını belirleme ve ayrı noktaları dikkate alma davranışlarını sergileyen öğrenciler genel yaklaşımda, fonksiyonun özelliklerini genel olarak ele almaktadırlar. Araştırmacılar öğretim süreçlerinde öğrencilerin fonksiyon kavramına ilişkin işlemsel ve kavramsal anlamalarının desteklenmesi ve farklı gösterimler arası geçişleri etkili bir şekilde yapabilmelerinin sağlanması için bu iki yaklaşımı güçlü yaklaşımlar olarak değerlendirmişlerdir. Çalışmada bir öğretmenin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin dersleri gözlemlenmiş ve her ders sonrasında öğretmen ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmeler boyunca öğretmene sınıftaki güçlüklerin neler olduğu, öğrencilerin nerelerde zorluk yaşayacakları ve nedenleri ve öğrencilerin içeriği anlamalarına yardımcı olmak için hangi stratejileri kullandığı soruları yöneltilmiştir. Öğretmenin dersleri ve görüşmeler video kamera ile kaydedilmiş ve bu kayıtlar analiz sürecinde çözümlenmiştir. Öğretmen noktasal yaklaşım bağlamında fonksiyon grafiklerini çizme, hareket eden grafiklerin özelliklerini açıklama, ötelenmiş fonksiyonların cebirsel ifadelerini bulma kategorileri altında yaklaşımlar sergilerken, genel yaklaşım bağlamında varsayımlar oluşturma ve cebirsel ifadelere göre grafikleri çizme yaklaşımları sergilemiştir. Öğretmenin bu stratejileri, amacının öğrencilerinin matematiği anlamalarını sağlamak olduğunu göstermiştir.

An, Mintos ve Yigit (2013) ikinci dereceden denklemlere ve ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin öğrenme beklentilerinin benzerliklerini ve farklılıklarını karşılaştırmak için dört ülkenin öğretim programlarını incelemişlerdir. Ekonomik, sosyal, kültürel ve coğrafi açılarından farklılık gösteren Karayip, Çin, Türkiye ve Amerika olarak belirledikleri dört ülkenin hem eğitim sistemlerinin yapısının ve tarihinin hem de eğitim politikalarının ve öğretim programlarının uygulanmasının farklılık gösterdiğini ifade etmişlerdir. Öğretim programlarını içerik, matematiksel akıl yürütme ve bilişsel beklenti olarak değerlendiren araştırmacılar, içerik boyutu kapsamında ikinci dereceden denklemlere ve fonksiyonlara ilişkin programlarda yer verilen konuları ve kavramları karşılaştırmışlardır. Bu karşılaştırmada matematiksel akıl yürütme boyutu kapsamında, NCTM'in (2009) "fonksiyonların çoklu gösterimlerini kullanma", "fonksiyon ailelerinden yararlanarak modelleme yapma" ve "katsayıların etkisini analiz etme" olarak vurguladığı önerilerini dikkate almışlardır. Bilişsel beklenti boyutunda ise, öğrencilerin kavramı nasıl öğreneceklerine ilişkin beklentileri, bu süreçte neler yapmaları gerektiği ve anladıklarını nasıl gösterecekleri gibi faktörlere odaklanmışlar ve Bloom taksonomisinden yararlanmışlardır. Yapılan analizler doğrultusunda, Karayip öğretim programında fonksiyonu göstermek için sembollerin kullanımına ve grafiklerin çizilmesine ve yorumlanmasına, isteğe bağlı olarak da simetri ekseninin bulunmasına ve öneminin anlaşılmasına yer verilmiştir. Türkiye ve Çin öğretim programları benzer içeriğe sahip olmakla birlikte, Çin programı fonksiyonların özelliklerine daha fazla değinmiştir. Amerika'nın programı olan Common Core State Standards (CCSSM) farklı yöntemler kullanarak ikinci dereceden denklemlerin çözülmesini, grafiksel, cebirsel ve tablo gibi çoklu gösterimlerin kullanımını, ikinci dereceden fonksiyonlar ile diğer fonksiyonların karşılaştırılmasını, gerçek bağlamlarda problem çözmeyi ve modellemeyi içermiştir. Matematik akıl yürütme bağlamında, Karayip ve Türkiye'nin benzer niteliklere sahip olduğu ortaya çıkarılmıştır. Çoklu gösterimleri kullanımına yer verilmesine karşın teknoloji vurgusu yer almamıştır. Çin ve Amerika programları ise teknoloji kullanımına değinmişlerdir. Fonksiyonların kullanılarak modelleme yapılması ve gerçek yaşam durumlarına yer verilmesi Çin ve Amerika programlarında yer verilirken Türkiye'de modellemeye ilişkin örneklerle değinilmiş ancak modelleme için özel bir hedef belirlenmemiştir. Bilişsel beklenti olarak programdaki etkinliklerin genel olarak

uygulama düzeyinde olduğu görülmekle birlikte, Çin ve Amerika'nın değerlendirme düzeyinde etkinliklere yer verdiği ortaya çıkarılmıştır.

Kutluca (2013) ikinci dereceden fonksiyonların öğretimine ilişkin Excel yazılımı yardımıyla bilgisayar destekli öğretim materyali geliştirmiştir. Bu çalışmada geliştirdiği materyali tanıtmayı ve bu materyale ilişkin öğrenci görüşlerini belirlemeyi amaçlayan araştırmacı durum çalışması deseninden yararlanmıştır. Materyal geliştirmeden önce ikinci dereceden fonksiyonlar konusunda öğrenci zorluklarına ve kavram yanlışlarına ilişkin alan yazını taramış ve bu doğrultuda Excel yazılımından yararlanarak etkinlikler tasarlanmıştır. Oluşturulan materyaller kapsamında, öğrencilerin grafiği ekranda verilen bir ikinci dereceden fonksiyonun $y = ax^2 + bx + c$ formundaki a , b ve c katsayılarını belirlemeleri istenmiştir. Bir diğer materyal olarak, verilen parabolün kolları arasında ve parabolün kolları dışında bulunan noktaların kollarının aşağı ya da yukarı yönde olması durumunda $f(x)$ ile $ax^2 + bx + c$ arasındaki ilişkiyi incelemeye yönlendirilmişlerdir. Ek olarak, katsayıların değişimleri ile grafiksel gösterimdeki değişimi fark etmelerini sağlamayı amaçlayan materyale yer verilmiştir. Materyallere ilişkin öğrencilerin ifadeleri incelendiğinde, materyallerin öğrencilerin konuyu anlamalarını desteklediği, derse katılımlarını ve farklı ve zevkli bir öğretim süreci geçirmelerini sağladığı gibi olumlu görüşlerinin yanı sıra, işlem kabiliyetlerinin azalmasına neden olabileceği gibi olumsuz görüşlerinin de olduğu görülmüştür.

Matematik öğretiminde etkili bir araç olarak çalışma yapraklarının kullanılmasının gerekliliğine vurgu yapan Kutluca ve Baki (2013) ikinci dereceden fonksiyonlar konusunun öğretimine ilişkin geliştirdikleri çalışma yapraklarına yönelik onuncu sınıf öğrencilerinin görüşlerini ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Araştırmacılar öğrencilerin yapmaları gerekenleri ve işlem basamaklarını içeren, bilgilerini kullanmalarını, matematiğin yazılmasını ve tartışılmasını gerektiren ve tüm öğrencilerin katılımını sağlayacak nitelikte olan Coypu, Derive ve Excel (CODEX) yazılımları yardımıyla bilgisayar destekli 24 çalışma yaprağı tasarlamışlardır. Geliştirilen çalışma yapraklarının pilot uygulamasında öğrenciler bilgisayar laboratuvarında ikiye bölünmüş gruplar halinde çalışmışlardır. Uygulamanın ardından

öğrencilerin çalışma yaprakları ile ilgili görüşlerini değerlendirmek için hazırlanmış 25 maddelik anketi 37 öğrencinin yanıtlaması istenmiştir. Öğrencilerin yanıtları anketteki bilişsel öğrenme, duyuşsal öğrenme, matematiksel düşünme becerisi ve etkileşim kategorileri altında değerlendirilmiştir. Öğrencilerin tamamı çalışma yaprakları ile bir parabolün tepe noktasını bulabildiklerini, ikinci dereceden fonksiyonun en küçük ya da en büyük değerini hesaplayabildiklerini ve simetri eksenini bulabildiklerini belirtmişlerdir. Sekiz öğrenci ise, çalışma yapraklarının ikinci dereceden fonksiyonlar ile ilgili bilgi ve becerilerini artırmadığını ifade etmişlerdir. Duyuşsal öğrenme ile ilgili öğrenci görüşleri arasında dersin zevkli olduğu ve matematiğe önem vermeleri gerektiği gibi olumlu görüşlerin yanı sıra, bu şekilde gerçekleştirilen dersin zaman kaybı olduğu gibi olumsuz görüşler yer almıştır. Öğrencilerin matematiksel ilişkilendirmelerini kolaylaştırma, genelleme yapabilmelerini ve yorumlamaları daha iyi anlamalarını destekleme gibi çalışma yapraklarının matematiksel düşünme becerilerine katkı sağladığı görüşleri olmuştur. Ek olarak, öğrencileri birlikte çalışmaya teşvik etme ve öğrencilerin birbirlerine destek vermelerini kolaylaştırma yönleriyle sınıf içerisindeki etkileşimler bağlamında çalışma yapraklarına yönelik olumlu görüşler belirtmişlerdir.

Kutluca (2017) onuncu sınıf öğrencilerinin matematiğe ilişkin başarı, öz değerlendirme, matematiğe ve ikinci dereceden fonksiyonlara yönelik tutumlar arasındaki ilişkileri belirlemeyi amaçladığı çalışmasında ilişkisel tarama modelinden yararlanmıştır. Rastgele örneklem ile seçtiği 30 onuncu sınıf öğrencisine kendisinin geliştirmiş olduğu ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin başarı testi, tutum anketi ve öz değerlendirme formu ile Aşkar'ın (1986) geliştirdiği matematik dersine yönelik tutum ölçeği uygulamıştır. Toplanan verileri Pearson Momentler Çarpımı Korelasyon analizi yöntemiyle analiz etmiştir. Çalışmanın bulguları kapsamında, öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara yönelik öz değerlendirmeleri ile başarılarının birbiriyle paralel olduğu görülmüştür. Ayrıca konuya yönelik tutum puanları ile öz değerlendirme puanları arasında pozitif bir ilişki ortaya çıkmıştır. Ek olarak, öğrencilerin matematik dersine yönelik tutum puanları artarken, ikinci dereceden fonksiyonlara yönelik tutum puanlarının azaldığı sonucuna ulaşılmıştır.

Nicel Muhakeme

NCTM (2000) standartları kapsamında Cebir öğrenme alanı içerisinde çokluklar arasındaki ilişkilere, matematiksel ilişkilerin gösterim biçimlerine ve değişimin analizine vurgu yapılmaktadır (s. 37). Paralel olarak birçok araştırmacı (Ellis, 2011; Johnson, 2013; Lobato ve Siebert, 2002; Moore, 2014; Moore, Carlson ve Oerthman, 2009; Oerthman, Carlson ve Thompson, 2008; Thompson, 1994) fonksiyonel ilişkilerde çokluklara değinmiş ve çokluklara ilişkin akıl yürütmelerin kavramların öğrenilmesinde önemli olduğunu dile getirmiştir.

Thompson'a göre (1990) çokluk, herhangi bir şeyin bir takım ölçme süreçlerinden geçirilerek birey tarafından algılanan niteliğidir. Thompson (1994) çokluğun, bir nesne, nesnenin niteliği/özelliği, niteliğin uygun birim ya da boyut ile ölçülebilirliği ve niteliğin ölçülebilirliğini belirten sayısallaştırma sürecinden oluştuğunu ifade etmektedir. Thompson nesnelerin niteliklerini doğrudan ya da dolaylı ölçme ile gerçekleştirilen bu sayısallaştırma sürecini nicelleştirme olarak adlandırmakta ve bir kişinin, bir nesnenin niteliğini ve bu niteliğin ölçülebilirliğini düşünüp ölçümlerini nicelleştirdiğinde çokluk kavramını algılayacağını belirtmektedir. Thompson (1990) çoklukları ve çokluklar arası ilişkileri içeren nicel muhakemenin öğretimin bir amacı olarak ele alınması gerektiğini ifade ederek nicel muhakemenin gerçekleşmesini sağlayan zihinsel operasyonların ve kavramsal yapıların detaylandırılmasını gerekli görmektedir. Bir kavramı anlamlandırırken birden fazla çokluk üzerine incelemeler yapılabilir. İncelenen bir çokluk yeni çoklukların üretilmesini tetiklemektedir. Bir çokluktan yeni bir çokluk elde etme sürecinde iki çokluk arasında gerçekleştirilen zihinsel eylemleri Thompson (1990) nicel operasyon olarak ifade etmektedir ve sekiz nicel operasyonu aşağıdaki Tablo 1'de görüldüğü gibi tanımlamakta ve örneklemektedir (s. 11-12).

Tablo 1
Nicel Operasyonlar ve Örnekleri (Thompson, 1990)

Nicel operasyon	Örneği
İki çokluğu toplamsal birleştirmek	İki kümeyi birleştirmek, iki bölgeyi bir olarak düşünmek.
İki çokluğu toplamsal kıyaslamak	“Bundan ne kadar daha fazla (az) vardır?”
İki çokluğu çarpımsal olarak birleştirmek	Momenti elde etmek için mesafeyi ve gücü birleştirmek; bölgeleri elde etmek için doğrusal boyutları birleştirmek; işi elde etmek için uygulanan gücü ve alınan mesafeyi birleştirmek.
İki çokluğu çarpımsal kıyaslamak	“Bu ondan kaç kat daha büyüktür?” “Bu (çarpımsal olarak) bunun ne kadarıdır?” “Bunun içinde bunlardan kaç tane vardır?”
Oranı genelleştirmek	“Bu karşılaştırmanın genel olarak geçerli olduğunu varsayalım (Bir başka deyişle, aynı oranda devam edeceğini varsayalım).”
Oranı içselleştirmek	“Saatte 50 mil olacak şekilde 3 saat gidin.” “1 mili 5 saatte giderseniz 6 mili kaç saatte gidersiniz?”
İki durumsal oranı birleştirmek	“Jim’in Sally’den 3 kat fazla bilyesi vardır; Sally’nin Fred’den 4 kat fazla bilyesi vardır; Jim’in Fred’den çok daha fazla bilyesi vardır.”
İki içselleştirilmiş oranı birleştirmek	“Bir Alman markı 75.53 Japon yeni. Bir Amerikan doları 1.88 mark. Bir dolar bir miktar yendir.”

Thompson (1994) nicel operasyonların, zihinsel eylemlerde meydana geldiğini ifade etmekte ve şu şekilde örneklemektedir (s.185-186).

- İki çokluğun toplamsal birleştirilmesindeki nicel operasyon, bir araya getirerek bir bütün yapma ve bir bütünü parçalarına ayırmadan meydana gelir.
- İki çokluğun toplamsal karşılaştırılmasındaki nicel operasyon, fazlalık ya da eksiklik belirlemek amacı ile iki çokluğun eşleştirilmesinden meydana gelir.
- İki çokluğun çarpımsal karşılaştırılmasındaki nicel operasyon, eş paylaşırma amacı ile çoklukların eşleştirilmesi ve tekrar parçalara ayrılmasından meydana gelir.

Thompson (1990) bir durumu çokluklar ve nicel ilişkiler ağı olan nicel bir yapı içerisinde analiz etmeyi nicel muhakeme olarak tanımlamaktadır. Weber, Ellis, Kulow ve Özgür (2014) nicel muhakemeyi matematiksel bir durumu anlayan, duruma ilişkin

çoklukları oluşturan, problem durumunu anlamlı hale getirmek için bu çoklukları ilişkilendiren, düzenleyen ve kullanan bir öğrencinin zihinsel eylemlerini tanımlamanın bir yolu olarak açıklamaktadırlar. Smith ve Thompson (2008) nicel muhakemenin büyük oranda günlük deneyimlere dayandığını ve karmaşık problemlerin çözümünde matematiksel notasyonların gücünden yararlanılabilmesi için bu notasyonların temelinde yatan anlamları kazandırdığını belirtmektedirler. Ortak Eyalet Standartları Girişimi de (2010) [The Common Core State Standarts Initiative (CCSSI)] öğrencilerin problem durumlarındaki çoklukları ve ilişkileri anlamlandırmaları gerektiğini ifade ederek nicel muhakemeyi gerekli bir matematiksel uygulama olarak tanımlamıştır.

Öğrencilerin nicel muhakeme yaparken, durumu anlamaya yardımcı olabilecek karşılaştırma ya da koordine etme gibi zihinsel eylemlerde bulunmaları gerekmektedir (Johnson, 2012). Ek olarak Johnson (2013) öğretmenlerin öğrencilerin nicel muhakemelerini desteklemek için iki çokluğu ilişkilendirirken eş zamanlı değişim fikrini içeren etkinlikler sunmalarını önermektedir (Johnson, 2013). Öğrencilerin çokluklar arasındaki fonksiyonel ilişkileri ve eş zamanlı değişim fikrini kavramsallaştırdıkları bilişsel süreç onların muhakemeleri ile ilgili önemli bilgiler sunmaktadır (Moore, Carlson ve Oerthman, 2009). Bu bağlamda öğrencilerin matematiksel kavramları anlamaları için çokluklara ilişkin anlayışlarının kritik olduğu ve öğretmenlerin öğrencilerinin zihinlerindeki çoklukları fark etmelerinin gerekli olduğu söylenebilir. Öğrencilerin matematiksel kavramları oluşturlarken ve yorumlarken ilgili durumlardaki çokluklara ilişkin sahip oldukları anlamlar ve gerçekleştirdikleri zihinsel eylemler bir başka deyişle nicel muhakemeleri onların öğrenmelerini belirleyen temel etkidir.

Weber ve diğer. (2014) öğrencileri nicel muhakemeye teşvik etmenin onların gerçek yaşam durumlarının matematiksel modellerini geliştirmelerine, keşfetmelerine ve anlamalarına yardımcı olacağını ifade etmekte ve nicel muhakemeyi modellemenin temel alındığı sınıf ortamlarına dahil edebilmek için altı prensibi şu şekilde açıklamaktadırlar:

1. Öğrencilere problemin çözümüyle ilgili olduğuna inandıkları çoklukları tanımlamaları için bir problem durumu ya da soru yazınız.
2. Öğrencilerin belli çoklukları tanımlamayı neden seçeceklerini ve bu çoklukları ölçmeyi nasıl amaçladıklarına ya da düşündüklerine odaklanan bir problem ile ilgili sorular sorunuz.
3. Ölçecekleri çokluklar arasındaki ilişkileri tanımlamalarını ve test etmelerini sağlayınız. Bu ilişkilerin her zaman neden olacağını ya da olmayacağını gerekçelendirmeye yönlendiriniz.
4. Öğrenciler bir model oluşturduklarında, değişen çoklukların modeldeki diğer çoklukları nasıl etkilediğini belirlemelerini isteyiniz.
5. Bütün çokluklardan ve çokluklar arası ilişkilerden oluşan modelledikleri durumun bir gösterimini (fiziksel, görsel gibi) geliştirmelerini sağlayınız.
6. Öğrencilerin modellerinin doğru olmayan yönlerini düzeltmelerini ve tekrar değerlendirmelerini sağlayınız.

Nicel Muhakemeye Yönelik Yapılan Araştırmalar

Thompson (1994) öğrencilerin hız, ortalama hız ve oran çokluklarını nasıl oluşturduklarını araştırmak amacıyla bir öğretim deneyi yürütmüştür. Öğretim deneyinde bilgisayar ortamında bir etkinlik sunmuştur. Bu etkinlik, sayı doğrusu üzerinde ilerleyen bir kaplumbağayı ve tavşanı göstermiştir. Bilgisayar ekranında kaplumbağaya gidiş ve dönüş için farklı olacak şekilde iki hız değeri atanırken, tavşana da bir hız değeri verilmiştir. İki hayvanın birbirinden ayrı ayrı ya da eş zamanlı olarak koşturulabilecekleri, yarışmayı durdurmak için duraklat düğmesine basılabileceği ve yarış durdurulduğunda ekranda hayvanların aldıkları mesafelerin görülebileceği belirtilmiştir. Thompson 10 yaşındaki beşinci sınıf düzeyinde bir öğrenci ile her biri yaklaşık 55 dakika süren sekiz oturum gerçekleştirmiştir. Bir oturumdaki etkinlikler öğrencinin bir önceki oturumdaki ilerlemesine dayandırılmıştır. Araştırmacı öğretim deneyini üç aşamada ele almıştır. Birinci aşamada öğrencinin hız kavramını geliştirmesine, ikinci aşamada ortalama hızı anlamak için gerekli olan şeyleri içerecek şekilde öğrencinin hız kavramını geliştirmesine ve son aşamada özümsemeleri genelleştirme süreciyle ve ardışık yansıtımlarla öğrencinin hız kavramını oran kavramına genişletmesi için fırsatlar sağlamaya odaklanmıştır. Öğrenci ilk olarak 40

fit/saniye hızın bir saniyede 40 fit koştığı olarak doğru bir şekilde yorumlamıştır. Zaman miktarının hareket etme ile olduğu ve toplam mesafe ile hızı karşılaştırarak ulaşılabildiği anlayışına sahip olduğu görülmüştür. Öğrencinin hıza ve zamana ilişkin kavrayışı onun hız, mesafe ve zamana yönelik oluşturduğu yollarla sınırlı olduğu ve hızı mesafe olarak gördüğü fikrinin baskın olduğu görülmüştür. Sonrasında, öğrenci gidilecek mesafeyle ilişkili olarak bölümlendirilmiş toplam süreyi ve bölümlendirilmiş sürenin bölümlendirilmiş mesafeye bağlı olduğunu düşünmeye başlamıştır. Bu aşamada, bir parçayı küçük eş parçalara ayırma ile bölme sayısal operasyonu arasında güçlü bir ilişki oluşturmuştur. Öğrenci devamında, mesafenin ve zamanın eş zamanlı değişimine ilişkin sezgilerinden yararlanarak zaman kavramını soyutlamış ve sonuç olarak hız kavramını, mesafe ve zaman arasındaki orantısal eşleme olarak oluşturmuştur. Öğrencinin ilk olarak hızı alınan mesafe ve süre arasındaki çarpımsal karşılaştırmanın sonucu olarak oluşturması gerekli görülmüştür. Öğrencinin zamanı kapsamlı bir çokluk olarak oluşturması harekete ilişkin sezgilerinden zamanı ve mesafeyi soyutlaması hızı oran olarak kavramasını desteklemiştir. Hızı bir oran olarak oluşturabilmesi bir ilişkideki çoklukları değerlendirmek için uygun aritmetik işlemlerini belirlemede esnek muhakeme yapmasını sağlamıştır.

Lobato ve Siebert (2002) bilişsel süreçleri içeren ve tekrar düşünmeyi destekleyen transferi “geleneksel transfer” ve “eylemi gerçekleştiren kişiye yönelik transfer” olarak iki şekilde ele almışlardır. Geleneksel transferi öğrenilen bilginin bir durumdan diğer duruma uygulanması olarak tanımlamışlar, eylemi gerçekleştiren kişiye yönelik transferi ise etkinlikler arası benzerlik ilişkilerinin kişisel oluşturulması olarak tanımlamışlardır. Araştırmacılar beş yıllık bir araştırma projesi kapsamında öğrencilerin durumları niceliksel olarak transfer etmede başarılı olmalarının doğasını anlamak için nicel muhakemelerini geliştirebilecek bir öğretim deneyi yürütmüşlerdir. Belirli aralıklarla her biri yaklaşık 45 dakika süren üç yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirmişlerdir. Öğrencilerin nicel muhakemelerindeki değişiklikleri değerlendirmek için ilk ve son görüşmede üç rampa etkinliği üzerine görüşme yapmışlardır. Görüşmelerin tüm video kayıtları ve öğretim oturumları transkript edilmiş ve sürekli karşılaştırmalı ve yorumlayıcı yöntemlerle analiz edilmiştir. Söz konusu çalışmalarında ise, gerçekleştirilen öğretim deneyinde en fazla ilerlemeyi

gerçekleştiren ve görüşmelerinin nicel muhakemeyi detaylı bir şekilde inceleme fırsatı veren bir öğrencinin çalışmalarına odaklanmışlardır. Öğrenci ilk görüşmede rampanın dikliğini sadece yükseklik çokluğu ile ilişkilendirmiş ve tabanının uzunluğunu yüksekliğe bağlı olarak değişen bir çokluk olarak düşünmüştür. Araştırmacının sorularıyla ve öğretimsel oturumlarda yüksekliği diklikten ayırmaya ve bir rampanın başka bir rampadan daha kısa olması halinde daha dik olabileceğini zihninde canlandırmaya başlamıştır. Üçüncü görüşmede yükseklikteki ve taban uzunluğundaki değişiklikleri birbiriyle ilişkilendirmeye başlayarak dikliğin nasıl sabit kalabileceğini keşfetmiş ve uzunluğun da rampanın eğimi için önemli bir çokluk olduğunu fark etmiştir. Yüksekliği ve uzunluğu eş zamanlı değişen çokluklar olarak düşünen öğrenci aralarındaki çarpımsal ilişkiyi oluşturmuştur. Araştırmacılar öğretimsel oturumlarda orantısal akıl yürütmeyi sergileyen öğrencinin öğretim sürecinde kodladığı deneyimlerini son görüşmedeki rampa etkinliğine doğrudan transfer ettiğinin ve dolayısıyla bu transferin oldukça durağan olduğunun düşünebileceğini ancak bu şekilde gerçekleşmediğini ve çok daha dinamik bir süreç olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrenci son görüşmede nicel ilişkileri tekrar oluşturmuş ve benzerlikler arası ilişkileri basit bir şekilde algılamadan yapılandırmıştır. Öğrencilerin transfer durumlarının doğasını iyi bir şekilde anlamanın, onların muhakeme becerilerini geliştirmeye yardımcı olmada önemli olduğu vurgulanmıştır. Bununla birlikte, öğrencilerin özellikleri ayırma, çeşitli çoklukların özellikleri nasıl etkileyeceğini belirleme ve test etme ve çokluklar arası ilişkileri oluşturma olarak ifade ettikleri üç yönü içeren niceliksel olarak karmaşık durumlarla başa çıkma süreçlerini öğrenebileceklerini dile getirmişlerdir.

Moore, Carlson ve Oehrtman (2009) öğrencilerin nicel ve kovaryasyonel (eş zamanlı değişime yönelik) muhakemelerini anlamak amacıyla geliştirdikleri etkinlikler bağlamında altı öğrenci ile klinik mülakatlar gerçekleştirmişlerdir. Toplanan veriler durumları nicelleştirme ile ilgili ortaya çıkan davranışları tanımlamak amacıyla açık kodlama ile analiz edilmiştir. Öğrencinin düşüncelerini modellemek ve anlamak amacıyla matematiksel yapılar ve öğrenci ve görüşmeci arasında gerçekleşen etkileşimler incelenmiş ve iki etkinliğe ilişkin analizler sunulmuştur. Bu etkinliklerden birincisi, bir dikdörtgen kağıdın köşelerinden eşit büyüklükte karelerin kesilmesiyle

elde edilen kutunun hacmini hesaplamayı gerektirmiştir. Öğretmen tarafından basit bir bağlam olarak yorumlanabilen bu durumda öğrenciler için kavramsal zorluklar ortaya çıkmıştır. Öğrenciler etkinliklerde çalışmaya ve görüşmeciden destek almaya devam ettikçe, duruma ilişkin imgelerini düzeltmişler ve böylelikle düşündükleri çokluklar ve bu çokluklar arasındaki ilişkileri işaret ederek hacim formülünü doğru olarak belirlemede ve bu formülü tanımlamada daha az zorluklar yaşamışlardır. İkinci etkinlikte ise öğrencilerin bir dönme dolapta toplam mesafeyi bulmaları ve yerden yüksekliği gösteren grafiği çizmeleri beklenmiştir. Öğrencileri algılanan çoklukların eş zamanlı değişiminin grafiksel gösterimlerini oluşturmaya ve açıklamaya teşvik etmek onların çokluklara ve değerlerine ilişkin dinamik bir şekilde muhakeme becerilerini daha fazla anlamayı sağlamıştır. Öğrencilerin etkinlik durumlarına yönelik oluşturdukları imgeler onların sonraki eylemlerini ve ürünlerini etkilemiştir. Durum ile ilgili ilk imgeleri amaçlanan durum ile tutarlı olmamasına rağmen, doğru çözümler yapmak ve çoklukların ve ilişkilerin anlamlı tanımlamalarını sağlamak için imgelerini sürekli olarak düzenleyebilmişlerdir.

Castillo-Garsow, Johnson ve Moore (2013) öğrencilerin değişimi kavramsallaştırma mekanizmalarının oluşturdukları matematiği etkilediğini ileri sürmüşler ve bu doğrultuda öğrencilerin farklı zihinsel işlemleri içeren değişime yönelik imgeleri arasındaki farklılıkları ortaya koymuşlardır. Bir öğretim deneyi kapsamında gerçekleştirilen etkinliğe yönelik iki öğrencinin çalışmasını incelemişlerdir. Etkinlikte bir kişinin bankada bulunan dolar hesabının yıllık belirli miktarda faiz kazandığı ifade edilerek öğrencilerin hesaptaki dolar miktarına bağlı olarak yıllık dolar hesabındaki artışı gösteren grafiği çizmeleri ve sonrasında bu grafiği kullanarak zamana bağlı dolar hesabındaki miktarı gösteren yeni bir grafik çizmeleri istenmiştir. Öğrenciler hesaptaki dolar miktarına bağlı yıllık dolar miktarının artışı gösteren grafiği doğrusal olarak çizmişlerdir. Zamana bağlı grafiği ise, öğrencilerden biri noktasal olarak çizmiştir. Bu süreçte, bir saniyedeki dolar miktarını, onda bir saniyedeki dolar miktarını hesaplamadan önce bulmuş ve onda bir saniyedeki dolar miktarını hesaplamak için bir saniyedeki dolar miktarından yararlanmıştır. Öğrenci bu süreçte belirlediği aralıkları aralık boyunca düşünmek yerine, bu aralıkların uç noktalarına odaklanmıştır. Araştırmacılar, öğrencinin gerçekleştirdiği zihinsel

eylemlerde olduğu gibi ortaya çıkan noktasal yaklaşımların fonksiyonların grafiklerinin çizilmesinde yardımcı olmasına rağmen, bu yaklaşımla ilgili ortaya çıkan problemin aralık boyutlarının grafiği çizmeden önce belirlenmesi gerekliliği olduğunu dile getirmişlerdir. Diğer öğrenci ise zamana bağlı olarak dolar miktarını gösteren grafiği sürekli olarak üstel bir artışı gösterecek şekilde çizmiştir. Öğrencinin bu süreçteki düşüncesi değişimin sürekli arttığını içermekte ve değişimin bir başlangıç noktasının olmasına karşın bitiş noktasının olmadığı fikrine sahip olduğunu göstermiştir. Aralıklar şeklinde düşünme sonucunda ortaya çıkan ürünler birbirinden ayrı ve sayılabilirken, süreklilik düşüncesiyle sayılabilen ürünler oluşturulamamaktadır. Araştırmacılar aralıkların uçlarını düşünme ile sürekliliği düşünmenin temel olarak birbirinden farklı olmasına karşın, birbiriyle ilişkili olduğunu vurgulamışlar ve sürekli düşünmenin aralıklar halinde düşünmeyi gerektirdiğini ifade etmişlerdir.

Johnson (2013) analiz dersi öğretimini gerçekleştirmeden dersi almamış öğrencilerin değişen değişim oranları ile ilgili soruları nasıl yanıtlayacaklarını ortaya çıkarmak amacıyla, 6 lise öğrencisinin her biri ile beş bireysel görüşme oturumları gerçekleştirmiştir. Görüşmelerin son oturumunda şişe doldurma etkinliği olarak yüksekliğe bağlı hacim grafiğini vermiş ve öğrencilerin şişedeki sıvının yüksekliği arttıkça sıvının hacminin nasıl değişeceğini ifade etmelerini ve grafiği karşılayacak şişeyi çizmelerini istemiştir. Bu çalışması kapsamında ikisi ileri cebir dersini diğeri geometri dersini tamamlamış üç öğrencinin şişe doldurma etkinliğine yönelik yanıtlarını değerlendirmiştir. Öğrencilerden biri bir noktayı referans noktası kabul ederek bu noktaya göre şişenin dar ya da geniş olup olamayacağını nasıl yorumlanacağını açıklamış ve şişeyi iki bölüme ayırarak çizmiştir. Diğer bir öğrenci, şişenin farklı şekilde dolduğu bölümleri tanımlayarak hacim ve yükseklik miktarlarını karşılaştırmıştır. Johnson, bu iki öğrencinin eş zamanlı-bağımsız muhakemeyi gerçekleştirdiklerini ifade etmiştir. Bu muhakeme sürecinde, değişim miktarlarının karşılaştırılması için aralıklar kullanılmış ve yapılan karşılaştırmalar miktarların büyüklükleri arasında olmuştur. Geometri dersini tamamlamış üçüncü öğrenci ise, değişime bağlı muhakeme sergilemiştir. Bu muhakemeyi yapan öğrenci bir çokluktaki değişimi diğer çokluktaki değişim ile koordine etmiştir. Araştırmacı, eş zamanlı-

bağımsız muhakemenin yararlı olmasıyla birlikte sınırlarının olduğunu ifade etmiş ve öğretmenlerin öğrencilerinin değişime bağlı muhakeme kullanımlarını güçlendirerek değişim oranlarındaki değişimi anlamlandırmalarını desteklemeleri gerektiğini vurgulamıştır.

Moore (2014) nicel muhakemeye dayalı açı ölçü anlamlarının sinüs fonksiyonunun gelişimi için temel düşünme yollarını nasıl sağlayabileceğini göstermiş ve bu amaçla “Bir öğrenci nicel ve eş zamanlı değişim muhakemesini vurgulayan bir öğretim dizisi boyunca sinüs fonksiyonunun hangi anlamlarını geliştirmektedir?” ve “Bir öğrencinin ölçü birimi olarak radyanı içeren açı ölçü anlamları onun sinüs fonksiyonu anlamlarını nasıl etkilemektedir?” sorularına yanıt aramıştır. Geniş bir araştırmaya dayalı bu çalışma öğretim deneyi kapsamında çalışmalarını gerçekleştiren bir öğrenciye odaklanmıştır. Öğretim deneyi dördü öğretimsel oturum ve sonuncusu görüşme oturumu olacak şekilde beş oturum olarak yürütülmüştür. İlk dört oturumda öğrenci ile birlikte iki arkadaşı sürece dahil olmuş, tüm oturumlar video kamera ile kaydedilmiştir. Süreç içerisinde devam eden analizlerle ve sonrasında geriye dönük analizlerle öğrencinin muhakeme süreçleri analiz edilmiştir. Öğrenci sürecin başında değişim oranları ya da değişim miktarları ile ilgili herhangi bir muhakeme sergilememiştir. Öğrencinin çizmiş olduğu grafik değişim miktarlarının değiştiğini göstermiş olsa bile, grafiği şekil ve fiziksel hareket açısından ele almış ve başlangıçta çokluklar arası ilişkileri değişim oranları açısından yorumlayamamıştır. Öğretim deneyi boyunca araştırmacının sorularıyla fiziksel durumun nicel olmayan özelliklerine güvenmek yerine, çoklukların eş zamanlı olarak nasıl değiştiği ile ilgili muhakemeye geçiş yapmıştır. Son görüşmede ise, öğrenci araştırmacıdan bağımsız olarak bir grafiği oluşturmak için iki çokluk arasındaki değişim oranlarını, değişim miktarlarını, değişim yönünü koordine edebilmiştir. Bir dairenin yarıçapını uygun bir ölçme birimi olarak algılayan öğrenci dik üçgenin hipotenüsünün üçgenin kollarını ölçmek için bir birim olduğunu kavramsallaştırdı. Sinüs fonksiyonuna ilişkin öğrencinin oluşturduğu anlamlara temel bir bileşen olan eş zamanlı değişim ile ilgili ilişki belirli bir birimi olan sayısal değerlere bağlı değil çoklukları ölçmek için seçilen birime bakmaksızın oluşturulmuştur.

Johnson (2015) öğrencilerin eş zamanlı değişen çoklukların gösterimlerini içeren etkinlikler üzerine çalışmaları sürecinde değişim oranı ile ilgili çokluklara yönelik nasıl akıl yürüttükleri sorusuna yanıt aramak amacıyla üç lise öğrencisi ile çoklu durum çalışması yürütmüştür. Bu çalışmasında öğrencilerin oran kavramını özdeş gruplar olarak çoklukların bir araya gelmesi şeklinde ya da ölçme anlamıyla tek bir çokluk şeklinde kavradıklarını ifade etmiş ve oranı tek bir çokluk şeklinde anlamanın daha güçlü bir anlayış olduğunu vurgulamıştır. Bu kavrayışın öğrencilerin eğitim gibi diğer matematiksel kavramlara ilişkin derin anlayışlar kazanmalarını destekleyeceğini açıklamıştır. Gerçekleştirdiği durum çalışmasında durumu öğrencilerin farklı bağlamları ve gösterimleri içeren etkinlikler üzerine çalışırken değişim oranı ile ilgili çokluklara yönelik muhakemeleri olarak tanımlamış ve gömülü teori metoduyla analizini gerçekleştirmiştir. Öğrencilere 4 farklı soda şişesi vererek soda şişenin doldurulması sırasında yüksekliğin değişmesi ile hacminin nasıl değişeceğini tanımlamalarını ve bir grafik vererek şişelerden biri ile bu grafiği eşlemelerini istemiştir. Öğrencilerden biri grafiği çokluklardaki değişim miktarlarının birleştirilmesi olarak yorumlamıştır. Araştırmacı bu yorumlamanın öğrencilerin bilmedikleri bir grafiği bir durumun resmi olarak değil değişen çoklukların ilişkilendirilmesi olarak anlamlandırmalarını destekleyeceğini açıklamıştır. Diğer bir öğrenci sabit değişim oranını doğrusal fonksiyon grafiği ile göstermek için tek bir sayı kullanmıştır. Bu yaklaşım ile ilişkili olarak, iki çokluğu bir araya getirmenin değişen çokluklar arasındaki ilişkinin temelinde olması halinde, öğrencilerin değişim oranını tek bir kavram olarak algılayamayacakları ifade edilmiştir. Öğrencilerden ikisi grafiğin bir kesiti boyunca yükseklik ve hacimdeki değişimin sürekli bir süreç halinde gerçekleştiğini düşünmelerine rağmen, her kesitin sonunda ortaya çıkan değişim miktarlarına odaklanmışlardır. Çokluklardaki değişim miktarları arasındaki daha az, daha çok, aynı şeklindeki karşılaştırmalar kesitlerdeki seçimlerini etkilemiştir. Öğrencilerin bu muhakemeleri onların anlık değişim oranını nasıl anlayacaklarını etkileyecektir.

Belue, Overman Cavey ve Kinzel (2017) gerçek yaşam durumlarını kullanma, öğrencilerin çokluklarla matematiksel muhakeme becerilerini geliştirme ve kavramsal anlamaya dayalı olarak işlemsel akıcılık oluşturmaya odaklanan bir öğretim

modelini incelemişlerdir. Deneysel olarak gerçekleştirdikleri çalışmada 37 öğrenci deney grubunda 34 öğrenci kontrol grubunda olmak üzere toplam 71 öğrenci yer almıştır. Bu öğrenciler yerleştirme sınav puanlarına dayalı olarak başlangıç seviyesindeki cebir derslerinde yer almışlardır. Deney grubundaki öğretimlerde öğretmenin gerçek yaşam bağlamı iki değişkenli kavramlarda çokluk ve doğrusal denklemi açıklama ve öğrencilerin anlamasına yardımcı olma ve sonrasında öğrencilerin muhakeme becerilerinin daha fazla gelişmesi için öğrencileri etkinliklere dahil etmesini içeren nicel muhakeme yaklaşımı benimsenmiştir. Kontrol grubunda gerçekleştirilen öğretimler ise, öğretmenin rutin bağlamsal olmayan bir problemi çözme yöntemlerini adım adım açıklamasını, öğrencilere çözüm yöntemini göstermesini ve sonrasında öğrencilere uygulama yaptırmasını içeren geleneksel yaklaşıma dayandırılmıştır. Her iki gruptaki dört günlük öğretimlerin ardından 10 maddesi işlemsel anlamayı 10 maddesi kavramsal anlamayı değerlendirecek şekilde 20 maddelik bir değerlendirme uygulaması yapılmıştır. Bu 20 soruya verilen yanıtlar önceden hazırlanmış bir değerlendirme rubriği doğrultusunda nicel olarak analiz edilmiştir. Ek olarak, maddelerden ikisine verilen yanıtlar doğrusal denklemleri belirleme aşamasında ortaya çıkan muhakeme türlerine dayandırılarak ve bu doğrultuda kategoriler oluşturularak nitel olarak analiz edilmiştir. Bu kategoriler eş zamanlı değişime dayalı muhakeme, eşlemeye dayalı muhakeme, başlangıç düzeyinde nicel muhakeme, nicel olmayan muhakeme şeklinde ortaya çıkarılmıştır. Nicel analizler doğrultusunda, grupların işlemsel performanslarında istatistiksel olarak herhangi bir farklılık olmadığı ancak deney grubunun kavramsal problemlerde daha başarılı performanslarının olduğu görülmüştür. Ayrıca işlemsel becerinin daha düşük kavramsal anlamayla sonuçlandığına ulaşılmıştır. Nitel analizlere dayalı olarak, deney grubunun eş zamanlı değişime dayalı muhakemeyi kontrol grubuna göre daha fazla gerçekleştirdiği sonucuna ulaşılmıştır. Ancak eşlemeye dayalı muhakemenin iki grupta benzer olduğu görülmüştür. Buna bulgulara dayalı olarak, nicel muhakemeye dayalı öğretim yaklaşımının eşlemeye dayalı muhakemeyi desteklemede sınırlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin iki değişken arasında doğrudan var olan bir ilişkinin doğrusallığı gösterdiği ve sabit oranın değişen çokluk olduğu gibi kavram yanılgılarına sahip oldukları ortaya çıkarılmıştır. Çalışma sonuçlarına dayalı olarak nicel muhakemeye dayalı öğretim yaklaşımının öğrencilerin gerçek yaşam

durumlarında sabit olan ve değişen çoklukları fark etmelerini ve oranın sabit olduğunu anlamlandırmalarını destekleyecek şekilde geliştirilmesi gerektiği ifade edilmiştir.

Kavramsal Çerçeve

Bu bölümde tez çalışmasının dayandırıldığı perspektifler açıklanmaktadır. Temel alınan perspektifler matematiği öğrenmeye ilişkin perspektifler ve matematiği öğretmeye ilişkin perspektifler olarak iki şekilde ayrıntılandırılmaktadır. Hem matematiği öğrenmeye hem de matematiği öğretmeye ilişkin bu perspektiflerde birbiri ile ilişkili olarak bilgiyi edinme modeli olan yapılandırmacılık temel alınmaktadır.

Yapılandırmacılık bilginin ne olduğu ve nasıl geliştiğine ilişkin büyük bir teorik gelişimi göstermektedir (Simon, 2000). Yapılandırmacılığı savunanlar kökeni Socrates'e kadar dayanan bilginin öğretim yoluyla pasif bir şekilde alınmadığı, aksine öğrenenin eylemlerinin sonucunda oluştuğu fikrinin izlerini sürdürmektedirler (von Glasersfeld, 2002). Bilginin başkaları tarafından aktarılması yerine aktif olarak birey tarafından oluşturularak elde edilmesini vurgulayan epistemolojik bir bakış açısı olan (Applefield, Huber ve Moallem, 2000) yapılandırmacılık, bilişsel psikolojiye ve 1930'larda bilişsel gelişim teorisini ve zihinsel şema kavramını ortaya atan Piaget'in çalışmalarına dayanmaktadır (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2010). Piaget'in yapılandırmacılığının kökenleri evrimsel bir biyolojik metaforudur ve evrimleşen organizmanın hayatta kalabilmek için kendi çevresine uyum sağlaması gerekmektedir (Ernest, 1994). Ernest (1994) epistemolojik olarak, Piaget'in yapılandırmacılık bilgi kuramında, "bilmenin" gerçekleştirildiği ve dünya ile etkileşimi kapsadığı görüşünün ve çelişkilerle karşılaşarak gelişen/değişen bireyin ya da grubun bilgisini tarihsel ve evrimsel olarak gören genetik epistemolojinin büyük önem taşıdığını ifade etmektedir.

Piaget (1970) Genetik Epistemoloji kitabında bir nesneyi bilmenin onu kopyalamak olmadığını aksine nesnenin üzerinde eylemlerde bulunmak anlamına geldiğini ifade etmiştir.

Bilginin tamamı eylemlere bağlanmaktadır ve bir nesneyi ya da bir olayı bilme onu bir eylem şemasına özümseyerek kullanmaktır. Bu, en baştaki duygusal motor aşamasından en yüksek mantıksal-matematiksel işleme kadar olan tüm süreç için geçerlidir (Piaget'den aktaran von Glasersfeld, 1982, s. 613).

Piaget'in modelinde yer alan adaptasyon ve dengede olma, özümseme ve uyumsama olarak ifade ettiği birbirini tamamlayan iki biyolojik süreç yardımıyla içsel düzenleme mekanizması olarak tanımlanmıştır (Bodner, 1986). Özümseme, yeni bir kavram eski bilgilerle uyumlu olduğunda ortaya çıkmakta ve yeni bilgi ile var olan şemalar genişlemekteyken, uyumsama yeni kavram var olan bilgilerle uyumlu olmadığında ortaya çıkmakta, bu durumda ise zihin var olan şemaları yeniden düzenlemektedir (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2010).

Tez çalışmasında öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyon kavramını öğrenme aşamalarında özümseme ve/veya uyumsama süreçlerinden geçerek oluşturdukları kavramsal yapılara odaklanılmıştır. Oluşturulan kavramsal yapıların birbiriyle ilişkilendirilerek geliştirilmesinde öğrencilerin kendi zihinsel süreçlerinin yönlendirici olduğu ve öğrencilerin matematiğinin araştırmacıların matematiğinden farklılaşabileceği bakış açısı göz önünde bulundurulmuştur.

Matematiği Öğrenmeye İlişkin Perspektifler

Bilişsel canlı her şeyden önce deneyimlerini yorumlayan ve bu şekilde yapılandırılmış bir dünyaya dönüştüren bir düzenleyicidir (von Glasersfeld, 1982). von Glasersfeld (1998) Piaget'in "yapılandırmacılık" teriminin eğitim çevrelerinde tartışılmaya başlanmasıyla birlikte karıştığını ve bu tartışmalar sonucunda çocukların yetişkinlerin bilgisini doğrudan almayıp onu oluşturmak zorunda oldukları gibi ifadelerin ortaya çıktığını belirtmektedir. von Glasersfeld (1998) tüm insanların bilgisinin, bağımsız olarak var olan ya da ontolojik gerçekliğin az ya da çok "gerçek" temsiline yaklaştığını ya da yaklaşabileceğini savunan geleneksel düşünce biçiminden ayrılmanın gerekli olduğunu belirtmektedir. 'Gerçek' temsil arayışı, iki buçuk bin yıldır Batı felsefesine egemen olan geleneğin önemli bir özelliği olmuştur (Thompson, 2000). von Glasersfeld (1989), bilginin pasif bir şekilde alınmadığını, kişinin kendisi tarafından aktif bir şekilde oluşturulduğunu ve bilişin işlevinin ontolojik gerçekliği keşfetmeyi değil deneyim dünyasını düzenlemeyi sağladığını vurgulamaktadır. Bilgi kelimesi, Batı felsefi geleneğinin temel görüşünün aradığı, gözlemciden bağımsız bir dünyanın nesnel temsilinden radikal bir şekilde farklılaşan şeyleri, bir başka deyişle,

bireylerin düşünce ve dil gelenekleri içindeki mevcut deneyimleri göz önüne alındığında, adapte olabilir olduğunu düşündükleri kavramsal yapıları ifade etmektedir (von Glasersfeld, 1989). Richard ve von Glasersfeld (1980) ve von Glasersfeld'in (1981) çalışmalarına dayalı olarak bireylerin eylemleri ve eylemlerinin yansımaları aracılığıyla kendi gerçeklerini oluşturdukları fikri ortaya çıkmıştır (Steffe ve Kieren, 1994). Matematik eğitiminde, bireyler kendi deneyimlerinin içerisinde matematiksel gerçeğin oluşumunu incelemektedirler (Steffe ve Kieren, 1994).

Tez çalışması kapsamında öğrenciler ikinci dereceden fonksiyon kavramının öğrenilmesine yönelik etkinlikler üzerine çalışmışlardır. Bu süreçte öğrencilerin belirlenen kavramlara ve fikirlere ilişkin anlamalarını değerlendirmek amaç olarak görülmektedir. Bir başka deyişle etkinliklerin içerisine gömülen kavramlara ve fikirlere ulaşp ulaşamadıklarını ortaya çıkarmak odak noktası olarak ele alınmamaktadır. Önemli olan öğrencilerin bu süreçte hangi fikirlerinin ortaya çıktığını belirlemek ve gerçekleşen zihinsel eylemlerinin hangi anlamalarının sonucu olduğunu ve hangi anlamalara yön verebileceğini kanıtlarıyla sunmaktır. Öğrencilerin süreç boyunca ulaştıkları fikirler doğru ya da kesin olmamakla birlikte onların ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin anlamalarını gösteren en uygun modeldir.

Simon (2000) öğrenmenin uyum sağlayıcı değişimleri içerdiğini ve öğrenenlerin aktif bir şekilde mevcut bilgilerine dayalı olarak yeni bilgilerini oluşturduklarını ve düzenlediklerini ifade etmektedir. Bir başka ifadeyle, matematiği öğrenme bir kişinin (kavramları) bilme ve gerçekleştirme yollarının dönüştürülmesi sürecidir (Simon, Tzur, Heinz ve Kinzel, 2004). Öğrenenlerin daha gelişmiş anlayışlar geliştirmeleri için mevcut anlayışlarını dönüştürmeye teşvik etmek matematiğin öğretilmesinin problemleri bir yönü olup kavramsal yapılardaki değişikliklerin gerçekleşmesi sürecinin açıklanması yansıtıcı soyutlama yapısı ile açıklanmaktadır (Simon ve diğer., 2004). Konold ve Johnson (1991) Piaget'in yansıtıcı soyutlama yapısının matematiksel düşüncenin gelişiminin yapılandırmacı uygulamalarında önemli bir rol oynadığını ifade etmektedir. Benzer şekilde, Thompson (1991) yapılandırmacılık bilgi kuramında, yansıtıcı soyutlamanın uyumsama mekanizmasının aracı ve bu sebeple de öğrenmenin aracı olduğunu dile getirmektedir. Levin (1991)

yansıtıcı soyutlamayı, bilen bir kişinin bilişsel etkinliğinin oluşturulması ve sistemleştirilmesi süreci olarak açıklamakta ve iki döngü içerdiğini ifade etmektedir. Birinci döngüde, bilişsel yapının daha genel bir şekilde kullanılabilen anlamadan daha üst seviyedeki anlamaya yansıtılması gerekmektedir. İkinci döngüde ise, bilen kişinin bilişsel sisteminin bu anlamaya uygun olacak şekilde ilgili kısımlarının zihinsel olarak yeniden düzenlenmesi ya da yeniden oluşturulması gerekmektedir. Thompson (1994) da yansıtıcı soyutlamanın Piaget'in teorisinde iki yönünün olduğunu ifade etmektedir. Eylemlerin ilerledikçe deneyimlere daha az bağlı olması için yeniden oluşturulması sürecini içeren birinci yönü öğrenme olarak düşünülen şeylerle daha yakından ilişkilidir. İkincisi ise, daha üst düzey düşünmeye yönelik özümseme olup kavrama olarak düşünülenler ile yakından ilişkilidir.

Yansıtıcı soyutlamanın yapılabilmesi için öğrencilerin karşılaştıkları örüntülerin oluşturulma sebeplerinin iç yüzünü, bir başka deyişle mantıksal gerekliliğini anlamaları gerekmektedir (Simon, 2003). Simon ve diğer. (2004) yansıtıcı soyutlamayı mantıksal-matematiksel yapılarla şu şekilde ilişkilendirmektedir:

Tüm yeni bilgiler, tekrardan düzenlemeyi içermesine rağmen, yeni bilgi önceden var olan bazı gerçekliklerden kendi öğelerini düzenlediği için ve bu yüzden asla tamamen bir başlangıç oluşturmadığı için soyutlamayı önceden varsaymaktadır. (s. 89)... Yansıtıcı soyutlama tek başına mantıksal-matematiksel yapıların mükemmel yapısını desteklemekte ve canlandırmaktadır. (s. 92).

von Glasersfeld (1989) öğrenmeyi öz düzenleme olarak tanımlamasına rağmen, bu yapılandırmacı aktivitenin bireyin bir topluluğun diğer üyeleri ile etkileşimde bulunması sürecinde oluştuğunu açıklamakta ve bireylerin anlamalarının toplumsal ve kültürel doğasına dikkat çekmektedir (Cobb, 2000). Öğrenmenin sosyal bir yapı olarak görülmesi sadece başkalarıyla olan etkileşimlerin bireylerin kavramsal gelişimleri için bir katalizör görevi görmesi sebebiyle değil, öğrenme ürünlerinin tümüyle sosyal olmasından kaynaklanmaktadır (Cobb, 2000). Bu perspektife dayalı olarak Cobb ve arkadaşları ikinci sınıftaki çocukların yapılandırmacılık bilgi kuramı ile uyumlu öğretim etkinlikleri üzerine çalışmaları sürecinde matematiği öğrenmelerini araştıran 3 yıllık bir araştırma ve geliştirme projesi kapsamında 20

kişilik bir sınıfta bir öğretim deneyi gerçekleştirmişlerdir. Öğretim deneyi araştırmacının çocukların hem kavramsal eylemlerini araştırmak hem de öğrenmesine rehber olmaya çalışmak için çocuklarla etkileşim kurduğu yapılandırmacı öğretim deneyi olan sınıf öğretiminin sosyal içeriğini genişletmektedir (Cobb ve Steffe, 1983'den aktaran Yackel, Cobb ve Wood, 1991). Araştırmacılar projeye öncelikle öğrenmeye bilişsel bir perspektifi temel alan yapılandırmacılık ile odaklanmaya çalışmalarının yanı sıra, sınıftaki deneyimleri anlamlandırmaya çalıştıkça, matematiksel etkinlikler üzerine sosyolojik bir bakış açısı geliştirerek yorumlayıcı duruşlarını genişletme gerekliliği hissetmişlerdir (Yackel ve Cobb, 1996). Bu gereklilik için Bauersfeld, Krummheuer ve Voigt (1988) matematik eğitimi için geliştirdikleri sembolik etkileşimcilik ve etnometodolojiden türeyen yapıları ele almışlardır (Cobb, 2000).

Sembolik etkileşimcilik Cooley ve Mead tarafından yirminci yüzyılın başlarında geliştirilen sosyal psikolojik bir teoridir ve teorinin gerçek adı, Mead'ın öğrencilerinden biri olan Blumer'den gelmektedir (Tattis ve Koleza, 2002). Blumer'e (1986) göre bu teori, anlam, dil ve düşünce olmak üzere üç temel prensibe dayanmaktadır. Blumer'in vurgu yaptığı bu üç prensip bizi Vygotsky'nin üzerinde durduğu kavramlara götürmektedir. Bu bağlamda sembolik etkileşimciliğin sosyal süreçleriyle bir başka deyişle sosyal etkileşimcilikle ilişkili olduğu görülmektedir. Bununla birlikte, bu etkileşimciliğin altında yatan varsayımları Blumer (1986) şu şekilde ifade etmiştir:

Sembolik etkileşimcilik son analizlerde üç temel öncüle dayanmaktadır. İlk öncül, insanların şeylere ilişkin sahip oldukları anlamlara dayalı olarak onlara yaklaşma biçimleridir. Bu şeyler, ağaçlar ya da sandalyeler gibi fiziksel objeleri; anne ya da mağaza müdürü gibi diğer insanları; arkadaşlar ya da düşmanlar gibi insan kategorilerini; bir okul ya da hükümet gibi kuruluşları; bireysel bağımsızlık ya da dürüstlük gibi temel fikirleri; başkalarının yorumları ya da istekleri gibi onların aktivitelerini ya da bireyin günlük yaşamında karşılaştığı durumlar gibi dünyasında olabilecek herşeyi içermektedir. İkinci öncül, bu tür şeylerin anlamlarının kişinin çevresindeki kişilerle yaptığı etkileşimden kaynaklandığıdır. Üçüncü öncül, bu anlamların kişinin karşılaştığı şeyleri ele alarak gerçekleştirdiği yorumlayıcı süreçte kullanılması ve düzenlenmesidir (Blumer, 1986, s. 2).

Sembolik etkileşimcilikte şeylerin ya da sembollerin bireyler tarafından taşıdığı anlamlarının etkileşimlerde önemli olduğu söylenebilir. Bireylerin bu sembollere ilişkin sahip oldukları anlamların ortak olması halinde birbirleriyle daha

anlamli ve olumlu etkileşimler gerçekleştirmektedirler. Cobb ve arkadaşlarının çalışmalarında sembolik etkileşimciliği teorik bir mercek olarak almalarının iki nedeni bulunmaktadır. Birincisi, bireysel öğrenmeye ilişkin yapılan araştırmanın teorik temeli olan psikolojik yapılandırmacılıkla uyumlu olmasıdır (Cobb ve Bauersfeld, 1995). İkincisi, hem bireylerin anlamlandırma süreçlerine hem de herhangi birine öncelik vermeden sosyal süreçlere vurgu yapması sebebiyle Voigt'in (1996) de ifade ettiği gibi, özellikle öğrencilerin matematik derslerini sorgulama ile öğrenmeye çalıştıklarında yararlı olması fikridir (Yackel, 2001).

Etnometodolojide ise, anlam iletişimle daha az bağlantılıdır ve bireysel hale gelmektedir. Anlam, bireylerin “içsel” deneyimleri, “derin yapılar” ya da toplumun üyelerinin işlemleri ile oluşturulmaktadır. Bu görüşte, her zihin bir nesnenin anlamını tek başına kavramaktadır; zihin eylem sırasını tahmin ederek, tipikleştirmelere dayalı yanıt dağarcıklarını derleyerek eylemleri yönlendirmektedir (Gallant ve Kleiman, 1983). Sembolik etkileşimciliği savunanlar sosyal eylemleri yorumlamayı araştırırken etnometodoji ile ilgilenenler araştırma için bir olgu olarak yorumlayıcı sürecin kendisini düşünmektedirler (Wilson, 1970'den aktaran Gallant ve Kleiman, 1983).

Tez çalışması kapsamında öğrencilerin kavramları oluşturma süreçleri sosyal yapılandırmacılık bilgi kuramına dayandırılmaktadır. Öğrencilerin öğrenme etkinlikleri üzerine grup arkadaşlarıyla çalışarak birbirlerinin fikirlerini destekleyebilecekleri ve ortak fikirlere dayalı olarak kendi bilişsel anlamalarına ulaşacakları düşünülmektedir. Ek olarak, öğrenme etkinliklerine yönelik uygulamaların grup olarak gerçekleştirilmesi öğrencilerin zihinsel süreçlerini daha işlevsel yapacaktır.

Matematiği Öğretmeye İlişkin Perspektifler

Matematik öğretiminde çarpıcı etkilere sahip olan yapılandırmacılık bir bilgi kuramı olarak öğrencilere daha güçlü matematiksel yapıların nasıl oluşturulacağı hakkında bize bir yol haritası sunmaktadır (Confrey, 1990). Bu kuramda bir öğretmenin öğrencisine baktığında gördüğü şeyin mutlaka öğretmenin deneyiminin

parçası ve algılanan şeyi öğretmenin algılama ve kavramsallaştırma yollarının ve araçlarının sonucu olduğu önerisi çok fazla önemsenmemektedir (von Glasersfeld, 2002). Confrey (1990) bir öğretmenin, matematiksel problemleri ve kavramları oluşturmak, keşfetmek, çözmek ve gerekçelendirmek için güçlü matematiksel yapıların bulunduğunu sınıfındaki her bir öğrencisini geliştirmeye teşvik etmesi ve öğrencileri oluşturdukları matematiksel yapıların niteliklerini yansıtmaya ve değerlendirme kapasitelerini geliştirmeye çalışması gerektiğini ifade etmektedir. Bu amaca ulaşabilmesi için üç varsayımın kabul edilmesi gerektiğini savunmaktadırlar (s.112).

1. Öğretmenler öğrencilerin matematiği anlamalarına ilişkin modellerini oluşturmalıdırlar. Bunu yapmak için, bir öğrencinin oluşturduğu yapıların gücünü değerlendirmek amacıyla mümkün olduğunca çok kanıt toplayacak yollar üretmelidirler. Sonuç, bir öğretmenin her bir öğrenciye yönelik "durum çalışması" oluşturması olacaktır.
2. Öğretim öğrencilerin konu alanı bilgilerine yönelik onlarla gerçekleştirilen etkileşimler yoluyla temel olarak etkileşimlidir. Öğretmenler, öğrencilerin kabul edilmiş matematik bilgileri ile daha uyumlu bir matematiksel fikir oluşturmaları için ilerleyebilecekleri bir yol oluşturmaktadırlar. Bununla birlikte, öğretmenler, öğrencilerin yapılarının kendilerinin yapılarıyla uyumlu olmama olasılığına karşı önceden hazırlıklı olmalıdırlar ve öğrencilerin inançlarını anlamak için öğrencilerini inançlarını ifade etmeye teşvik etmelidirler. Öğretmenler daha sonra kendi inançlarını gözden geçirmeye veya ortak olarak kabul edilebilir bir alternatif bulmak için öğrencileriyle görüşmeye hazır olmalıdırlar (matematiksel uygulamaların eğilimleri uygun olabilir veya olmayabilir). Öğrenci, açık bir şekilde yeterli argümandan yoksun bir çözüm önerirse, öğretmenlerin, kararlarında öğrencinin duruşunun geçerliğinin olmadığını belirtmeleri gerekecektir.
3. Sonuçta, öğrenci oluşturduğu yapının yeterliğine karar vermelidir.

Öğrenciler yansımalarla kavramları oluşturdukları için öğretmenlerin bu oluşumu teşvik etmek için bazı araçlardan yararlanması gerekmekte ve bu araçların en kolayı da öğrencilerin düşündükleri üzerine konuşmalarını sağlamaktır (von

Glaserfeld, 2002). Bu süreçte öğrencilere yaklaşık öğrenme eşiklerine uygun onlara anlamlı gelen problem durumları sunmak onların fikirleri üretmelerini ve bu fikirleri üzerine konuşmalarını desteklemektedir. Tez çalışmasında hem öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları anlamalarına ilişkin modelleri oluşturmak hem de bu doğrultuda öğretim dizisi tasarlamak amaçlandığı için onları aktif bir şekilde sürece dahil olmaya teşvik edecek durumlara odaklanılmıştır.

Gerçekçi Matematik Eğitimi.-Genetik epistemoloji, yapılandırmacılık, sosyokültürel yaklaşımlar gibi temel teoriler matematik eğitimindeki tasarım tabanlı araştırma yaklaşımlarının temeli olarak görev yapmaktadırlar ve araştırmacıları öğrencilerin katılacağı zengin fırsatlar sağlayan sınıf ortamları tasarlamaya zorlamaktadır (Prediger, Gravemeijer ve Confrey, 2015). Tasarım tabanlı araştırmalarda gerçekleştirilecek eylemler için çerçeve sunan teoriler bulunmaktadır. Bu teorilerden biri de Gerçekçi Matematik Eğitimidir [GME] (Realistic Mathematics Education). GME, kökleri 1970li yılların başlarına dayanan matematik eğitimi alanına özgü bir öğretme teorisidir (Gravemeijer, 1994). GME bakış açısına göre öğrenme sürecinin gerçek durumlara dayandırılması gerekmektedir. Gerçek yaşama özgü durumlar, öğrencilerin zihninde hayal edebileceği, gerçeğe dönüştürebileceği ve anlamlandırabileceği problem durumlarını ifade etmekte ve geniş bir anlam taşımaktadır (van den Heuvel-Panhuizen ve Drijvers, 2014). Öğrenciler kendilerine sunulan matematiği ancak zihinlerinde canlandırdıkları ve anlamlar yükledikleri etkinlikler yoluyla yaparak yaşayarak öğrenebilmektedirler (Baki, 2018). Matematiği bir insan aktivitesi olarak düşünen Freudenthal matematiğin gerçekliği matematiksel hale getirerek öğrenilmesi gerektiğini düşünmüştür (van den Heuvel-Panhuizen ve Drijvers, 2014). Freudenthal önce gerçek yaşamın matematikselleştirildiğini arkasından da formal matematik bilginin elde edildiğini söylemektedir (Baki, 2018). Treffer (1987) matematikselleştirmeyi yatay ve dikey matematikselleştirme olarak iki şekilde ayırmış, yatay matematikselleştirmede, öğrenciler gerçek yaşam bağlamı bir problemi düzenlemek ve çözmek için matematiksel araçlara ulaşmaktadırlar, dikey matematikselleştirmede ise, matematiksel sistemi kendi içerisinde yeniden düzenlemekte ve işlemler yapmaktadırlar (van den Heuvel-Panhuizen, 1996).

Tez çalışmasında oluşturulan öğretim dizisi kapsamında gerçek yaşam durumlarını ve farklı disiplinleri içeren matematiksel modelleme problemleri tasarlanmıştır. Öğrencilerin gerçek yaşam bağlamlarını incelemeleri ve bu durumları sistematik hale getirerek matematiksel kavramlarla ilişkilendirmeleri beklenmiştir. İlişkilendirdikleri fikirler ve kavramlardan yararlanarak gerçek yaşam bağlamını matematiksel olarak açıklamaları teşvik edilmiştir. Sonrasında oluşturdukları matematiksel modelleri değerlendirerek matematiksel genellemelere ulaşmaları istenmiştir. Gerçek yaşam durumları öğrencilerin hiç bilmedikleri durumlar ve kavramlara ilişkin zihinsel eylemlerini tetiklediği için öğrencilerin öğrenmelerini destekleyeceği düşünülmektedir.

Gerçekçi matematik eğitimi “yönlendirilmiş yeniden keşfetme”, “didaktik fenomenoloji” ve “modellerin kullanılması” ilkelerini içermektedir. Yönlendirilmiş yeniden keşfetme, öğrenenlerin bilgileri kendi özel bilgileri ya da sorumlu oldukları bilgileri olarak görmeye başlamalarına imkan vermektedir (Gravemeijer ve Doorman, 1999). GME kapsamındaki öğretimsel kaynaklar öğrencilerin matematiksel fikirleri dikkatli bir şekilde sıralanmış problemler ve araçlar kullanarak ve öğretmen rehberliği ile kısa zaman içerisinde yeniden keşfetmelerine yardımcı olacaktır. Bu yeniden keşfetme yaklaşımında, matematiksel kavramlar öğrencilere geleneksel yaklaşımda olduğu gibi doğrudan verilmemekte, öğrencilerin öğretimsel diziye katılmaları sırasında kavramların ortaya çıkması için öğrenme yolu tasarlanması gerekmektedir (Stephan, Underwood-Gregg ve Yackel, 2014). Bu ilke tasarımı gerçekleştirenlerin bir öğrenme yolu oluşturmalarına yardımcı olmakta ve potansiyel engelleri, çıkmaz durumları ve ilerlemeyi sağlayan dönüm noktalarını vurgulamaktadır (Gravemeijer, Cobb, Bowers ve Whitenack, 2000). Öğretme süreci açısından bakıldığında, öğrencilere belirli bir öğrenme sürecine dayalı kendi matematiksel bilgilerini oluşturma fırsatları verilmeli ve bununla ilişkili olarak, öğrencilerin matematikselleştirme süreçlerinin gelişmesi için deneysel olarak gerçek bağlamlar sunulmalıdır (Gravemeijer, 1999).

İkinci ilke olan didaktik fenomenoloji, matematikselleştirmenin ilerlemesini destekleyen problemlerin geliştirilmesine rehberlik etmede kritik bir rol oynamakta ve

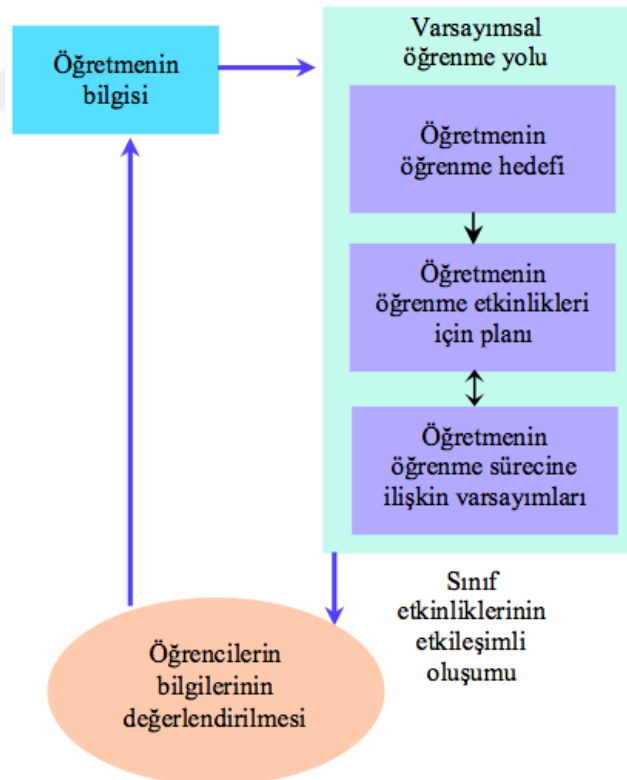
öğrencilerin katılacakları bireysel etkinlikleri ve sınıf tartışmalarını destekleyebilecek öğretimsel etkinlikler geliştirmenin yollarını sunmaktadır (Gravemeijer ve diğerleri, 2009). Öğretimsel etkinliklerden oluşan bir dizinin geliştirilmesi için, araştırmacılar ilk olarak öğrencilerin öğrenme yollarını tasarlamak amacıyla düşünce deneyi ile ilgilenmektedirler (Gravemeijer, 2004). Confrey (2006) öğretimsel etkinlikler dizisi geliştirmek için tasarımı yapan kişinin ilk olarak sınıfın kavramları keşfedebileceği bir yol tasarlamak için düşünce deneyine katılması ve öğrencilerin öğrenmeleri için kavramsal geçitleri yani varsayımsal öğrenme yollarını açıklaması gerektiğini ifade etmektedir.

Üçüncü olarak, modellerin kullanılması ilkesi, hem gerçekçi matematik eğitimi içerisinde modellerin ortaya çıkması sürecini hem de bu modellerin formal matematiksel bilginin oluşumunu destekleyen süreci ifade etmektedir (Gravemeijer, 1999). Bir başka deyişle, öğrencilerin matematiksel etkinliklere ilişkin modellerini oluşturmalarına yardımcı olma ile ilgilidir (Stephan, 2015). Gerçekçi matematik eğitimi teorisi tasarıma ve araştırmalara rehberlik etmektedir (Gravemeijer, 1999). Gerçekleştirilen tasarım tabanlı araştırma gerçekçi matematik eğitiminin üç ilkesi olan “yönlendirilmiş yeniden keşfetme”, “didaktif fenomenoloji” ve “modellerin kullanılması” ilkelerini bir araya getirmektedir.

Tez çalışması kapsamında öğretim dizisinin tasarlanmasında ve uygulanmasında GME teorisinin bu üç ilkesine de odaklanılmıştır. Yapılan çalışmalar ve ön araştırmalar doğrultusunda öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin varsayımsal öğrenme süreçleri belirlenmiştir (bkz. s. 98) ve bu yollar doğrultusunda öğrencilerin daha önceden deneyimlemiş oldukları ya da deneyimlemeseler bile anlamlar yükleyebilecekleri durumları içeren öğretim dizisi tasarlanmıştır. Öğrencilerin varsayımsal öğrenme süreçlerinin hazırlanmasının onların mantıksal bir sırada öğretim dizisine katılmalarına ve gerçek yaşam durumları içerisindeki matematiksel anlamları oluşturmalarına imkan vereceği düşünülmüştür. Öğrencilerin gerçek yaşam durumlarının modellerini oluşturma sürecinde aktif bir zihinsel katılım sağlamaları gerekeceği ve bu aşamada nicel muhakemelerinin destekleneceği düşüncesi göz önünde tutulmuştur.

Varsayımsal Öğrenme Yolu.-Son 20 yıl içinde, öğrenme üzerine yapılan araştırmalar öğrencilerin nasıl düşündüğünü ve düşüncelerin zamanla nasıl daha gelişmiş hale geldiğini anlamaya odaklanmaktadır (Mojica, 2010). NCR(2007) öğrencilerin bir konuya ilişkin birbirini izleyen ve birbirine dayanan düşünme yollarına dikkat çekmektedir. Öğrenme yolları Simon'un (1995) "varsayımsal öğrenme yolu" na ilişkin tanımına dayanmaktadır. Simon (1995) varsayımsal bir öğrenme yolunun; öğrenme hedefi, öğrenme etkinlikleri ve öğrenci düşüncelerinin ve anlamalarının öğrenme etkinlikleri bağlamında nasıl gelişeceğine ilişkin bir tahmin olan varsayımsal öğrenme süreci olarak üç bileşenden oluştuğunu ifade etmektedir. Bu varsayımsal öğrenme yolunun matematiği öğretme döngüsüne ilişkin modelin (bkz. Şekil 1) merkezi bir parçası olduğunu dile getirmiştir.

Şekil 1
Matematiği Öğretme Döngüsü (Simon, 1995, s. 136)



Varsayımsal öğrenme yolu yapılandırmacılık üzerine temellendirilmiş bilişsel bir araçtır (Clements ve Sarama, 2004). Confrey, Maloney, Nguyen, Wilson ve Mojica

(2008), öğrenme yolunu, temsillerin, ifadelerin ve yansıtmının ardışık olarak geliştirilmesi ile öğrencilerin zamanla informal fikirlerden daha karmaşık kavramlara doğru ilerlemeleri amacıyla araştırmacı varsayımına dayanan, öğrencinin öğretim yoluyla karşılaştığı sıralı yapılar ağı (etkinlikler, görevler, araçlar, etkileşim biçimleri ve değerlendirme yöntemleri gibi) olarak tanımlamaktadırlar. Maloney ve Confrey (2010) öğrenme yollarının doğrusal ya da gelişigüzel, bilişin ilerlemesini temsil ettiğini ileri sürmektedirler. Öğretmenlerin öğrencilerin öğrenme sürecindeki olası bütün yolların tamamını tanımlamaları öğrencilerin düşüncelerinin farkında olmaları açısından oldukça önemlidir. Simon (1995) varsayımsal öğrenme sürecinin gelişimiyle öğrenme etkinliklerini gelişiminin ilişkili olduğuna dikkat çekerek, öğretmenin öğrencilerinin düşüncelerinin gelişimi ile ilgili varsayımlarının öğretme etkinliklerine ilişkin fikirlerine yön verdiğini vurgulamaktadır.

Simon ve Tzur (2004) etkinliklerin öğrenme süreçleri ile ilgili varsayımlara bağlı olarak seçildiğini ve öğrenme süreçlerine ilişkin varsayımların da etkinliklere dayandığını ifade etmekte ve bu süreç ile ilgili aşağıdaki kabulleri dile getirmektedirler.

1. Bir varsayımsal öğrenme yolunun oluşumu öğrencilerin mevcut bilgilerine ilişkin anlayışa dayanmaktadır.
2. Bir varsayımsal öğrenme yolu belirli matematiksel kavramlara ilişkin öğrenmenin planlanması için bir araçtır.
3. Matematiksel etkinlikler belirli matematiksel kavramlara ilişkin öğrenmeyi teşvik etmek için araçlar sağlamakta ve bu nedenle öğretimsel sürecin temel kısmı olarak görülmektedir.
4. Bu sürecin varsayımsal, ve doğası gereği belirsiz, olmasından dolayı, öğretmen düzenli olarak varsayımsal öğrenme yolunun her yönünü düzenleme ile ilgilenmektedir.

Tez çalışması kapsamında, etkinlikler varsayımsal öğrenme sürecine uygun olarak tasarlanmıştır. Varsayımsal öğrenme sürecini ortaya çıkarmak için öncelikle alanyazın taraması, ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin kavramsal analiz ve farklı matematik öğretmenlerinin ders gözlemlerini içeren çalışmalar gerçekleştirilmiştir.

Dolayısıyla öğretim sürecine yön verecek etkinlikleri içeren öğretim dizisi de öğrencilerin düşünceleri doğrultusunda hazırlanmış ve süreç içerisinde de revize edilmiştir. Bu sürece uygun etkinlikler tasarlanırken öğrencilerin nicel muhakemelerini tetikleyerek yansıtıcı soyutlama yapmalarını destekleyen mantıksal-matematiksel yapılar göz önünde bulundurulmuştur.

Mantıksal-Matematiksel Etkinlikler.-Simon ve Tzur (2004) amaca yönelik etkinliklerin yeni ve daha gelişmiş kavramların oluşumunu nasıl destekleyeceğine ilişkin bir tanımlama yaparak ve etkinlik-etki ilişkisini açıklayarak Piaget'in yansıtıcı soyutlama yapısını ayrıntılandırmakta ve bu süreci şu şekilde ifade etmektedirler: Süreç öğrenenlerin amaçlar belirlemeleri ile başlamaktadır. Öğretim boyunca, öğrenenlerin amaç belirlemeleri genellikle öğretmen tarafından sunulan bir etkinlikle ilişkilidir ve belirleyebilecekleri amaçlar onların mevcut kavramlarının bir fonksiyonu olmaktadır. Öğrenenler bir amaç belirleyerek, o amacı yerine getirmek için mevcut etkinliğe ya da etkinlikler dizisine başvurmaktadırlar. Bu amaca yönelik çalışarak ve amaçları ile ilişkili olarak etkinliklerin etkilerini dikkate alarak bir takım zihinsel kayıtlar oluşturmaktadırlar. Zihinsel olarak kaydedilen deneyimler, etkisi ile ilişkili etkinliğin bir tekrarı olmaktadır. Öğrenenler tanımlayıcı modellere yol açan etkinlik ve etkileri arasındaki ilişkileri sınıflandırmakta ve karşılaştırmaktadırlar. Yeni bir etkinlik-etki ilişkisinin bu yansıtıcı soyutlaması yeni bir kavramın oluşturulduğu bir mekanizma olmaktadır.

Simon (2006) öğretimsel tasarım bağlamında yansıtıcı soyutlamanın amaca yönelik etkinlik ve yansıtma olarak iki alt yapısına vurgu yapmaktadır. Amaca yönelik etkinliğin hem zihinsel hem de fiziksel etkinlikleri içerdiğini ifade etmekte ve bu etkinlikler kapsamında öğrenenlerin hem hatırlayacakları hem de ilgilenecekleri ve fark edebilecekleri bilgileri belirlemeleri söz konusu olduğu için amaca yönelik etkinlik kavramının önemli olduğunu belirtmektedir. Yansıtma da genellikle bilinçli olmayan, kişinin deneyimleri kapsamındaki özellikleri ayırmayı ve ilişkilendirmeyi ifade etmektedir. Simon, Saldanha, McClintock, Karagoz Akar, Watanabe ve Zembat (2010) öğrenenlerin kendi matematiksel aktiviteleri yoluyla matematiksel kavramsal anlamaları üzerine yaptıkları araştırmalarında yansıtıcı soyutlama yapısının üç

prensibini ele almaktadırlar. Birincisini öğrenenlerin öğrenme sürecindeki etkinliklerinin önemi, ikincisini öğrenenlerin öğrenme sürecindeki yansıtımalarının önemi ve üçüncüsü de yansıtıcı soyutlamalar ve deneysel öğrenme süreçleri arasındaki ayrım olarak açıklamaktadırlar.

Tez çalışmasında, öğrencilerin mantıksal-matematiksel yapıları oluşturmaları çalışacakları etkinliklerin varsayımsal öğrenme süreçleri doğrultusunda ayrıntılı bir şekilde tasarlanmasına dayandırılmaktadır. Etkinliklerin her bir adımında öğrencilerin deneyimledikleri durumların ve bu sayede oluşturdıkları zihinsel yapıların bir sonraki adımdaki fikirlerini oluşturmaları için önemli olduğu düşünülmektedir. Bu sebeple, öncelikle öğrencilerin etkinliklerdeki fikirlere ilişkin belirli durumlara ve örneklere yönelik sonuçlar çıkarmaları, ardından belirli bir duruma özgü olmadan genel olarak fikirlere ve kavramlara ilişkin çıkarımlar ve genellemeler yapmaları beklenmiştir. Hem tasarım prensipleri hem de uygulama süreci bağlamında yansıtıcı soyutlamaya odaklanılmıştır. Etkinliklere gömülen fikirlerle öğrenciler kendi zihinsel eylemlerini gerçekleştirmelerine ve kavramlara ilişkin fikirlerini oluşturmalarına yönelik desteklenmeye çalışılmıştır. Etkinlikler yansıtıcı soyutlama göz önünde bulundurulduğu için sadece öğrencilerin belirli durumlar üzerine çalışarak onlara ilişkin sonuçlar çıkarmaları değil aynı zamanda tüm durumları içerecek genellemelere de ulaşmalarını gerektiren eylemlere yönlendirecek şekilde tasarlanmıştır. Etkinliklerin tasarlanmasında öğrencilerin varsayımsal öğrenme süreçlerinin de belirlenmesinde yol gösterici olan kavramsal analiz sonuçları önemli olmuştur.

Kavramsal Analiz.-Tasarım tabanlı araştırmalarda temel alınan alana özgü öğretim teorileri hem ardışık akıl yürütmelerin hem de bunların gerçekleşmesini destekleyen araçların tanımlanması ile birlikte alanla ilgili fikirlerin kavramsal analizini gerektirmektedir (diSessa ve Cobb, 2004). Thompson (2008) kavramsal analizin müfredat gelişiminde rehber olma ya da kazandırılması hedeflenen fikirlerin anlaşılmasının yolunu tanımlamak için gerçekleştirilebileceğini ifade etmiş ve dört şekilde kullanılabileceğini açıklamıştır:

1. Öğrencilerin belirli durumlarda neler bildiklerini ve ne anladıklarına ilişkin modeller oluşturmak.

2. Öğrencilerin matematiksel öğrenmeleri için uygun olabilecek yolları tanımlamak
3. Öğrencilerin önemli fikirleri anlamasını engelleyebilecek ve bazı durumlarda problem oluşturabileceği bilinen yolları tanımlamak
4. Fikirlerin temellerinin anlaşılmasında çeşitli yolların tutarlılığını ve uygunluğunu analiz etmek

Kavramsal analiz kavramla ilgili diğer kavramların farkında olmada ve öğrenci düşüncelerini tam olarak belirlemede kritik bir rol oynamaktadır. Öğrencilerin kavramsal anlamaları için onlara sunulacak etkinliklerin tasarlanmasında araştırmacıların ve öğretmenlerin kavramsal analiz yapması gerekmektedir. Öğretim dizisi oluşturmadan önce öğretilecek kavramın yapısı ve özellikleri incelenerek ayrıntılı olarak açıklanmalıdır.

Tez çalışmasında gerçekleştirilen kavramsal analizde ikinci dereceden fonksiyonların hangi fikirleri içerdiğini ve hangi kavramlarla ilişkili olduğunu belirlemek için alanyazın taraması yapılmıştır. Alanyazın taramasında öğrencilerin karşılaşabilecekleri zorluklar, sahip olabilecekleri yanlış anlamalar, kavrama yükledikleri anlamlar gibi kavramın öğretiminde değinilmesi gereken hususlar da ortaya çıkarılmıştır. Bu kavramsal analiz sonuçlarından hem varsayımsal öğrenme sürecini hem de etkinliklerin tasarlanmasında ele alınacak çoklukları ve fikirleri belirlemede yararlanılmıştır.

Etkinliklerin tasarlanmasında, uygulanmasında ve revize edilmesinde temel alınan perspektif öğrencilerin nicel muhakemeleri ve nicel muhakemelerini destekleyecek yapılar olmuştur.

Nicel Muhakeme.-Moore, Carlson ve Oehrtman (2009) nicel muhakemeyi öğrencilerin formülleri ve grafikleri anlamlaştırabilmeleri için gerekli olan zihinsel gösterimleri işe koşmaya imkan veren gerekli bir akıl yürütme biçimi olarak ifade etmektedirler. Nicel Muhakeme GME gibi öğretimin tasarlanmasında ve değerlendirmesinde tamamlayıcı bir odak sağlamaktadır (Thompson, 2002). Nicel

muhakeme öğrencilerin sahip olması beklenen ve sahip oldukları matematiksel anlamaların ve öğrencilerin anlamalarını eylem veya iletişim biçiminde nasıl ifade edebileceklerinin tanımlanmasına imkan vermektedir (Thompson, 2002). Matematik İçin Ortak Eyalet Standartları (2010) soyut ve niceliksel olarak akıl yürütme olarak adlandırılan Matematiksel Uygulama Standardını (Standart for Mathematical Practice) şu şekilde detaylandırmaktadır (s. 6):

Matematiksel olarak yeterli olan öğrenciler problem durumlarındaki çoklukları ve çoklukların ilişkilerini anlamlandırır. Niceliksel ilişkileri içeren problemlerde birbirini tamamlayan iki beceriden yararlanır: bağlamından bağımsız inceleyebilme becerisi-verilen durumu soyutlamak ve onu sembolik olarak göstermek, sembollerin temsil ettikleri durumlarla ilgilenmeden kendi yaşamlarına sahipmiş gibi semboller düzenlemek- ve kavramsallaştırma, kullanılan sembollerin temsil ettikleri durumları derinlemesine incelemek için düzenleme sürecinde gerektiğinde durabilme becerisi. Nicel muhakeme eldeki problemin tutarlı bir gösterimini oluşturmayı; ilgili birimleri dikkate almayı; çoklukların sadece nasıl hesaplanacağı ile değil anlamları ile ilgilenmeyi; işlemlerin ve nesnelerin farklı özelliklerini bilmeyi ve esnek bir şekilde kullanmayı gerektirir.

Öğretime yönelik nicel muhakeme yaklaşımı değişen çoklukların yeni bir çokluğun oluşturulmasını nasıl etkilediğini öğrencilerle keşfetmeyi, öğrencilere problem bağlamları üzerine yansıtma yapmaları için zaman vermeyi ve ölçülebilir özelliğin adıyla bir çokluğu tanımlamalarına destek olmayı kapsamaktadır (Belue, Overman Cavey ve Kinzel, 2017). Ellis (2007) öğrencilerin çokluklara odaklanmalarını teşvik eden öğretim yaklaşımlarının durumlar arasındaki ilişkilere ve dinamik olaylara ilişkin anlamlı genellemelere ulaşabilmelerini desteklediğini vurgulamaktadır.

Tez çalışmasında öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları öğrenirlerken onların nicel muhakemelerinin öğrenmelerini tetikleyeceği düşünülmüştür. İkinci dereceden fonksiyonların öğretim dizisini tasarlarken ve öğrencilerin uygulamalar boyunca gelişen anlamalarını değerlendirirken nicel muhakemenin yapısı temel alınmıştır. Etkinlikler tasarlanırken ele alınan kavramların öğrenilmesi için hangi çoklukların ele alınması ve öğrencilerin hangi nicel operasyonları gerçekleştirmeleri gerektiği belirlenmiştir. İkinci dereceden fonksiyon kapsamında değişim miktarlarının

değişiminin sabit olduğunu fark etmeleri için eş zamanlı değişim ve eşleme fikrine dayalı çarpımsal karşılaştırma, fonksiyonun grafiğinin noktalarını eşleme ve bir eksen doğrultusunda grafiği katlama, aynı yüksekliğe sahip noktaların simetri eksenine olan uzaklıklarını toplamsal karşılaştırma, noktaları aralarındaki uzaklıkları koruyarak taşıma gibi nicel operasyonlar göz önünde bulundurulmuştur. Bu sayede ikinci dereceden fonksiyonların öğretiminde yararlanılabilecek etkinliklerin içeriği ayrıntılandırılmıştır. Etkinliklerin uygulanması aşamasında da öğrencilerin hangi operasyonları gerçekleştirdikleri, hangi çokluklara ulaştıkları ve gerçekleştirdikleri nicel muhakemeleri doğrultusunda anlamalarının modelleri ortaya çıkarılmıştır.



BÖLÜM III

YÖNTEM

Onuncu sınıf öğrencilerinin zihinsel eylemlerini tetikleyerek ikinci dereceden fonksiyonları kavramsal öğrenmelerini sağlayacak bir öğretim dizisi tasarlamının amaçlandığı tez çalışması tasarım tabanlı araştırmaya dayandırılmıştır.

Bu bölümde, tez çalışmasının tasarım, uygulama ve değerlendirme aşamalarının daha iyi anlaşılmasını sağlamak amacıyla ilk olarak tasarım tabanlı araştırmanın temellerine ve sürecine değinilmektedir. Sonrasında “Araştırmanın Tasarımı” başlığı altında tez çalışmasındaki tasarım tabanlı araştırmanın aşamaları ayrıntılı olarak açıklanmakta ardından tasarım tabanlı çalışma kapsamında çalışmanın veri toplama ve veri analiz sürecine yer verilmektedir.

İkinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesine ilişkin gerçekçi matematik eğitimi temel alan ve öğrencilerin nicel muhakemelerini destekleyerek olası güçlüklerinin önüne geçen bir süreci içeren yeni bir öğretim modelinin geliştirilmesi ve öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin öğrenme yollarının ortaya çıkarılması amaçlandığı için ikinci dereceden fonksiyonlara yönelik öğretim dizisi geliştirilmesi amaçlanmıştır. Nicel muhakemeyi destekleyerek kavramsal öğrenmeyi sağlayan ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin bir öğretim modelinin mevcut alanyazın kapsamında var olmaması sebebiyle, farklı gruplar arasındaki değerlendirmelerin gözden geçirilerek öğretim dizilerinin revize edilmesinin önemli olduğu düşünülmüştür. Bu amaçla ve döngüsel bir süreç olması sebebiyle tasarım tabanlı araştırma modeline gerek duyulmuştur. Ek olarak, hem öğretim dizisinin ortaya çıkarılması hem de öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin

modelleri gerçek yaşam bağlamlı uygulamalar kapsamındaki etkinlikler boyunca gerçekleştirdikleri zihinsel eylemlerinin incelenmesi ile daha etkili bir şekilde ortaya çıkarılabileceği düşünüldüğü için araştırmanın amaçları bir tasarım tabanlı araştırmayı gerçekleştirmeye yönlendirmiştir.

Tasarım Tabanlı Araştırma

Eğitim uygulamalı bir alandır ve bilim insanları, bilimin gerçekleşmesi aşamasına öğrencileri dahil etme, mesleki gelişim için çevrimiçi topluluklar kurma ya da öğrencileri ırk, cinsiyet ya da sınıf ile ilgili var olan inançlarla yüzleştiren tarihi sınıflar oluşturma gibi belirli sonuçlara ulaşmak için yaptıkları araştırmalarını gündeme getirmektedirler (Barab ve Squire, 2004). Eğitimsel araştırmalar kapsamlı olarak beşeri yaklaşımlar, bilimsel yaklaşımlar ve mühendislik yaklaşımları olmak üzere üç grupta kategorize edilmekte olup beşeri yaklaşımlar eleştirel yorumlar aracılığıyla yeni anlayışlar üreten bilimsel çalışmaları içerirken, bilimsel yaklaşımlar dünyanın nasıl işlediğini daha iyi anlamak için olayların analiz edilmesinin gerektirmektedir (Swan, 2014). Mühendislik yaklaşımları ise sadece mevcut durumu anlamaya çalışmayan aynı zamanda uygulanabilir problemlere sistematik olarak yüksek nitelikli çözümler geliştirmek için var olan bilgiyi kullanma girişimleri olarak ele alınmaktadır (Swan, 2014).

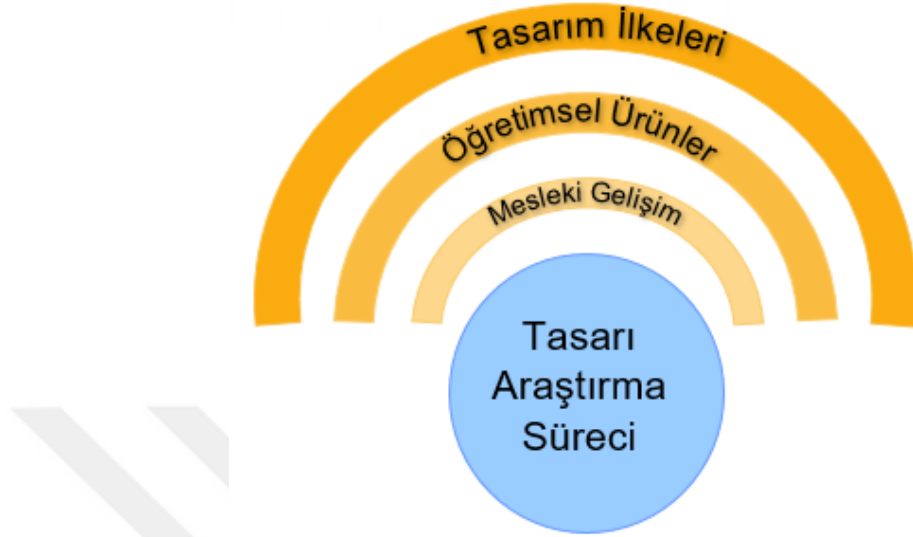
Mühendislik yaklaşımlardan biri başlangıcı Brown (1992) ve Collins'e (1992) atfedilen tasarım tabanlı araştırmalardır. Tasarım araştırmaları [design research] (Bakker, 2004), tasarım deneyleri [design experiment] (Brown, 1992; Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer ve Schauble, 2003; Collins, 1992; Reeves, 2000), gelişimsel araştırma [development research] (van den Akker, 1999) ve tasarım tabanlı araştırma yöntemleri [design based research] (Barab ve Squire, 2004; Design-Based Research Collective [DBRC], 2003] olarak farklı şekillerde Türkçe diline çevrilmiş bu yöntem tez çalışması kapsamında “*tasarım tabanlı araştırma*” olarak ifade edilmektedir.

Tasarım tabanlı araştırmalar Brown (1992) ve Collins (1992) ile çok yakından ilişkili olmasının yanında, pedagojik tasarısı bir yüzyıldan fazla zamandır öğretim teorilerinin gelişimini bilgilendirmektedir (Cobb ve diğer., 2003). Uygulamadan

ayrılan eğitimsel araştırmalar bağlamların etkisini, sonuçların ortaya çıkan ve kompleks olan doğasını ve faktörlerin tahminlerde bulunmak için uygun olduğuna ilişkin bilginin eksikliğini açıklayamayabilir (Robinson, 1998'den akt. DBRC, 2003). Başarı, yapılan bir müdahalenin öğrencilerin öğrenmesini desteklediğine emin olmak anlamına geliyorsa, söz konusu ortamlardaki müdahalelerin dikkatli bir şekilde incelenmesi gerekmektedir (DBRC, 2003).

Tasarım tabanlı araştırmalar, sistematik bir tasarı ile öğrenmenin ve öğretimsel stratejilerin ve araçların incelenmesi için geliştirilen bir paradigmadır (DBRC, 2003). Bu paradigma öğrenmeyi kendi bağlamında, belirli öğrenme yollarının, stratejilerin ve eğitimsel araçların belirli formlarını tasarlayarak ve sistematik olarak inceleyerek analiz etmeyi amaçlamaktadır (Molina, Castro ve Castro, 2007). Kökeni müfredat yenileme geleneğine dayanan tasarım tabanlı araştırmalar öğretimsel tasarılarla eğitimsel araştırmaları birleştirmektedir (Prediger, Gravemeijer ve Confrey, 2015). Öğrencilerin hangi kaynakları ve ön bilgilerini etkinliklere taşıdıklarını, öğrencilerle öğretmenlerin nasıl etkileşim kurduklarını, kanıtların nasıl oluşturulduğunu, kavramların nasıl ortaya çıktığını ve değiştiğini, hangi kaynakların kullanıldığını, öğretimin dersler boyunca nasıl gerçekleştirildiğini, öğrenci çalışmaları, video kayıtları ve sınıf değerlendirmelerini inceleyerek belgelemeye çalışılan tasarım tabanlı araştırmaları, klinik mülakat çalışmalarından ve öğretim deneyinden pek çok özellik almaktadır (Confrey, 2006). Tasarım tabanlı araştırmalar sadece belirli müdahaleleri tasarlayanın ve test etmenin ötesine geçmekte (DBRC, 2003) ve hem öğrenmenin belirli formlarını “düzenleme”yi hem de bu öğrenme formlarını destekleme aracılığıyla tanımlanan kavramlar içerisinde sistematik olarak “inceleme” yi gerektirmektedir (Cobb ve diğer., 2003). McKenney, Nieveen ve van den Akker (2006) tasarım tabanlı araştırmaların üç temel çıktısını tasarı prensipleri, öğretimsel ürünler ve mesleki gelişim olarak ifade etmektedirler (bkz. Şekil 2).

Şekil 2
Tasarım Tabanlı Araştırmaların Üç Temel Çıktısı (McKenney, Nieveen ve van den Akker, 2006, s. 73)



Tasarım ilkeleri ile başarılı olmanın yollarını ortaya koymak değil başkalarının kendi ortamlarında belirli tasarım ve etkinlikler için en uygun kavramsal ve işlemsel bilgiyi seçmelerine ve uygulamalarına yardımcı olmak amaçlanmaktadır (McKenney, Nieveen ve van den Akker, 2006). Buna ek olarak, tasarım tabanlı araştırmalar öğretimsel ürünlerin ya da bir programın tasarlanmasına, geliştirilmesine ve niteliğinin artırılmasına katkı sağlamasının yanı sıra yaratıcı ve dikkatli bir şekilde tasarlanmaları halinde katılımcıların mesleki gelişimlerine de katkı sağlamaktadırlar.

Farklı çalışmalarda (Cobb ve diğer., 2003; DBRC, 2003; Prediger, Gravemeijer ve Confrey, 2015) tasarım tabanlı araştırmaların şu özelliklerine değinilmektedir.

1. Tasarım tabanlı araştırmalar yeni öğretim biçimlerini oluşturma ve bu öğretim biçimlerini inceleme amacı taşıdıkları için natüralist olmak yerine müdahalecidirler (Cobb ve diğer., 2003; Prediger, Gravemeijer ve Confrey, 2015).
2. Teori ve deney arasındaki ilişki olası ve yansıtıcı olacak şekilde iki yönlüdür. Teori tasarı deneyinin tasarımı hakkında olası bir şekilde bilgi vermekte ve beklenen ve gözlemlenen öğrenme süreçleri arasındaki sapmalar üzerine

yapılan geriye dönük yansımalarla ve yeniden düzenlemelerle gelişmektedir (Cobb ve diğer., 2003; Prediger, Gravemeijer ve Confrey, 2015).

3. Tasarım tabanlı araştırmalar tasarım, uygulama, analiz ve tekrar tasarlama döngüleri ile gerçekleştirilen müdahale ve revizyon döngüleridir (Cobb ve diğer., 2003; DBRC, 2003; Prediger, Gravemeijer ve Confrey, 2015).
4. Tasarımlar üzerine yapılan araştırmalar yoluyla uygulayıcılara ve diğer eğitim tasarımcılarına öğrenme süreci ve öğrenmeyi destekleyen araçlar ile ilgili çıkarımları ileten paylaşılabılır teoriler üretmektedir (Cobb ve diğer., 2003; Prediger, Gravemeijer ve Confrey, 2015).
5. Tasarım sonuçlarının etkililiğini açıklayan alana özgü teori ortaya çıkmaktadır (Cobb, 2003).
6. Araştırmanın tasarımın gerçek ortamlarda nasıl işlediğini açıklaması gerekmektedir. Sadece başarıyı ve başarısızlığı belgelememeli aynı zamanda ilgili öğrenme konularına ilişkin anlayışı geliştiren etkileşimlere odaklanmalıdır (DBRC, 2003).
7. Tasarlanan öğrenme ortamlarının ve geliştirilen teorilerin merkezi amaçları ya da öğrenmenin “ilk teorileri” iç içe geçirilmektedir (DBRC, 2003).

Bu özellikler dikkate alındığında, tasarım tabanlı araştırmaların birçok özelliği ile deneysel araştırmalardan farklılaştığı söylenebilmektedir. Barab ve Squire (2004) tasarım tabanlı araştırmaların deneylerden farklılaştığı noktaları Tablo 2’de gibi ele almaktadırlar.

Tablo 2
Tasarım Tabanlı Araştırmalar ve Deneysel Araştırmalar Arasındaki
Farklılıklar

Kategori	Deneysel araştırma	Tasarım araştırması
Araştırmanın gerçekleştiği yer	Laboratuvar ortamlarında yürütülme	En fazla öğrenmenin meydana geldiği karmaşık gerçek yaşam ortamlarında gerçekleştirilme
Değişkenlerin karmaşıklığı	Sıklıkla tek ya da iki bağımlı değişken içerme	Ortam değişkenleri (öğrenenler arasında işbirliği, mevcut kaynaklar gibi), sonuç değişkenleri (içeriğin öğrenilmesi, aktarılması gibi) ve sistem değişkenleri (yayılma, süreklilik gibi) birden çok birbirine bağlı değişkenleri içerme
Araştırmanın odağı	Birkaç değişkeni tanımlamaya ve onları sabit tutmaya odaklanma	Çoğunun deneyden önce olmadığı tüm karmaşıklığı ile durumu karakterize etmeye odaklanma
İşlemlerin gerçekleşmesi	Sabit işlemler kullanma	Uygulamadaki başarılarına bağlı gözden geçirilen deneme olarak ilk durumun olduğu esnek tasarı revizyonunu içerme
Sosyal etkileşim	Etkileşimleri kontrol etmek için öğrenenleri izole etme	Fikirleri paylaşma, birbirlerinin dikkatini dağıtma vs. gibi katılımcılarla sosyal etkileşimleri içerme
Bulguları karakterize etme	Hipotezleri test etmeye odaklanma	Tasarımın çoklu yönlerine bakmayı ve uygulamadaki tasarımı karakterize eden bir profil geliştirmeyi içerme
Katılımcıların rolü	Katılımcılara denekler olarak davranma	Tasarımı oluşturmada ve analiz etmede ayrı uzmanları bir araya getirmek için tasarıda farklı katılımcıların olması

Bu farklılıklar değerlendirildiğinde tasarım tabanlı çalışmaların öğrenmenin ve araştırmanın birlikte ele alındığı, bireylerin ve sürecin tüm karmaşık bileşenlerinin yansıtıldığı bir süreci kapsadığı açıktır. Geleneksel deneysel araştırmalarda belirli bir

işlemin uygulanması sonrasında gruplar arası farklılıklar değerlendirilmekte ve odak tasarımın kendisi olarak alınmaktayken, tasarım tabanlı çalışmalarda analiz için odak noktası öğrenciler olarak belirlenmektedir. Tez çalışması kapsamında ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin öğretim dizisi öğrencilerin nicel muhakemeleri doğrultusunda ortaya koyulmaya çalışıldığı için öğrencilerinin gerçek öğrenme ortamlarındaki karmaşık düşüncelerinin incelenmesi gerekli görülmüştür. Öğrenme ortamlarından oluşan uygulamalardan elde edilen verilere dayalı olarak araştırmacılar birlikte ikinci dereceden fonksiyonların öğretimi için alanyazında mevcut olmayan ve öğretim programına alternatif bir öğretim modeli ortaya koymaya çalışmışlardır. Bu amaçlar göz önüne alınarak çalışmada tasarım tabanlı araştırma sürecinden yararlanılmıştır.

Confrey (2006) tasarım tabanlı araştırmaların öğrencilerin düşüncelerini anlamaya çalışmak amacıyla gerçekleştirildiğini vurgulamaktadır. Tez çalışmasında öğrencilerin öğretim etkinlikleri boyunca nicel muhakemeleri ortaya çıkarılmaya çalışılmış ve aynı zamanda gerçekleştirdikleri nicel muhakemelerine göre öğretim dizisinde değişiklikler yapılmıştır. Benzer şekilde, Collins, Joseph ve Bielaczyc (2004) tasarım tabanlı araştırmaların öğrenmeyi incelemeyi merkezine alan

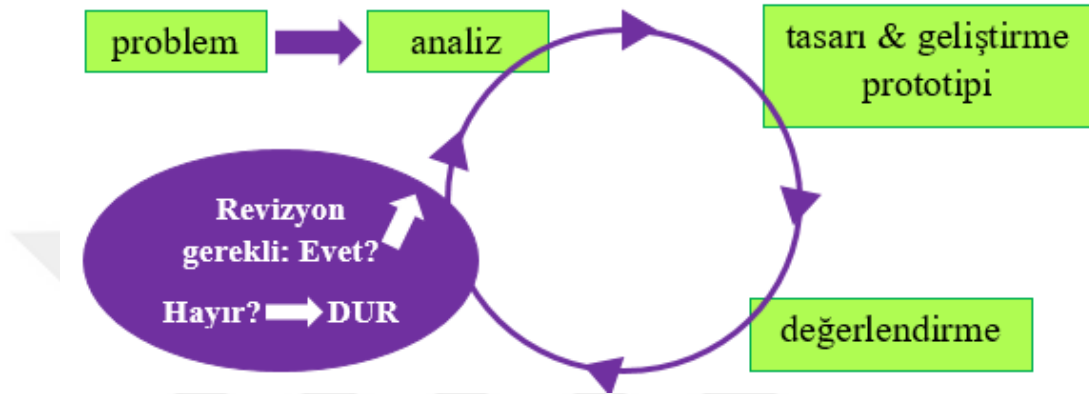
- bağlam içinde öğrenmenin doğası ile ilgili teorik sorulara değinme gerekliliği,
- laboratuvar yerine gerçek ortamda öğrenmeyi inceleme yaklaşımlarının gerekliliği,
- öğrenmenin sınırlı/dar ölçümlerinin ötesine gitme gerekliliği
- araştırma bulgularını biçimsel değerlendirmelerden elde etme gerekliliği

gibi bir takım konuları vurgulamak için geliştirildiğini ifade etmektedirler. Araştırmacıların belirttiği hususların tez çalışmasının gerçek yaşam etkinliklerindeki öğrencilerin muhakemelerini ve öğrenmelerini ortaya çıkarmaya çalışma, bu öğrenmeleri gerçek ortamlarda ve farklı öğrencilerin çalışmaları doğrultusunda inceleme ve tüm uygulama süreci boyunca öğrencilerin zihinsel eylemlerini ve öğrenmelerini değerlendirme gibi yaklaşımların olması ile tutarlı olduğu görülmektedir.

Plomp (2013) tasarım tabanlı araştırmaların amacı ne olursa olsun, araştırma sürecinin Şekil 3’de gösterildiği gibi her zaman sistematik eğitimsel tasarı süreçlerini içermesi gerektiğini vurgulamaktadır.

Şekil 3

Sistematik Tasarım Döngüleri (Plomp, 2013, s.17)

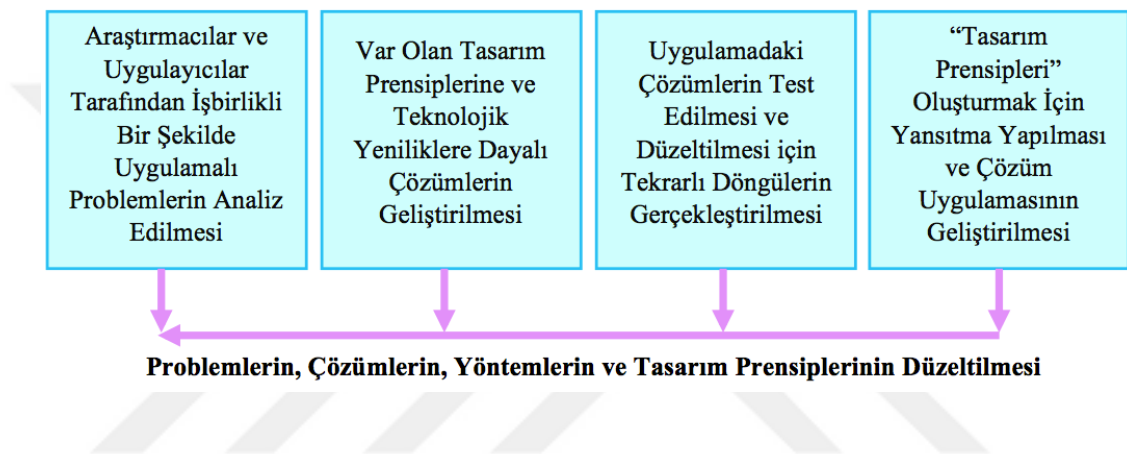


Plomp’un (2013) bu döngüsü tasarım tabanlı araştırmanın uygulanmasına yönelik genel bir fikir sağlamaktadır. Bu döngüde tasarımın oluşturulması ve geliştirilmesine ilişkin süreçlerle ilgili ayrıntılı bilgiler sunulmamakla birlikte bir tasarım tabanlı araştırma yürütmek isteyen araştırmacıların izleyecekleri yollar genel haliyle şematik hale getirilmiştir. Yapılan doktora tez çalışmasında bu döngü hem tüm araştırma süreci hem de ayrı ayrı öğretim deneyleri bağlamında dikkate alınmıştır. Öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin anlamalarına yönelik ortaya koyulan problemler doğrultusunda öğrencilerin yansıtıcı soyutlamalarını destekleyecek öğrenme etkinlikleri tasarlanmış ve tasarlanan etkinlikler öğretim deneyleri yoluyla uygulanmıştır. Öğretim deneylerindeki gözlemlerle anlık olarak gerçekleştirilen analizlere ve etkinlikteki fikirlere ilişkin öğrenci anlamalarını ortaya çıkarmayı amaçlayan ölçme ve değerlendirme etkinliklerinin analizlerine dayalı olarak etkinlikler üzerine gerekli revizyonlar yapılmış ve sonraki öğretim deneyi uygulamasına geçilmiştir. Tüm öğretim deneylerinin gerçekleştirilip bir döngünün tamamlanmasının ardından yapılan geriye dönük analizlerle tüm sürecin revize edilmesi ve yapılan revizyonlar doğrultusunda tekrar bir uygulama sürecine geçilmesi araştırmanın tüm sürecinde de Plomp’un (2013) bakış açısından yararlanıldığını göstermektedir.

Tasarım tabanlı araştırmaların uygulama sürecinde gerçekleştirilen aşamalar araştırmacılar tarafından farklı şekillerde ifade edilmektedir. Reeves (2000) tasarım tabanlı araştırma yoluyla öğretimsel teknoloji araştırmalarının gerçekleştirilmesinin önemine değindiği çalışmasında tasarım tabanlı araştırmanın sürecini Şekil 4’deki gibi göstermektedir.

Şekil 4

Tasarım Tabanlı Araştırma Yaklaşımı (Reeves, 2000, s. 9)

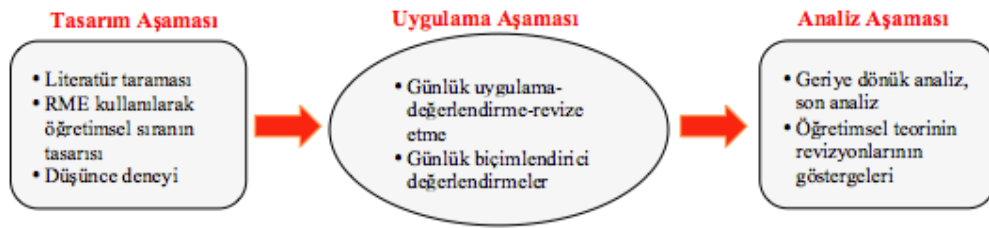


Reeves’in (2000) sunduğu modelde araştırmacıların ve uygulayıcıların işbirliği ile problemlerin analizine vurgu yapılmakta ve tasarı prensiplerinde teknolojik yeniliklere yer verilmektedir. Gerçekleştirilen doktora tez çalışması kapsamında özellikle problemlerin belirlenmesi aşamasında araştırmacıların matematik öğretmenlerinin uygulamalarından ve fikirlerinden yararlanmaları bu modelin yansımalarının en belirgin kısmı olmuştur. Bununla birlikte vurgulanan teknolojik yeniliklere doktora tez çalışmasının içeriğinde yer verilmemiş, bunun yerine matematiksel modelleme etkinliklerinin öğretimde yararlanılması gibi ülkemiz için yenilikçi bir uygulama olarak ifade edilebilecek bir içerik oluşturulmuştur.

Stephan (2015) tasarım tabanlı araştırmaların üç aşamada gerçekleştirildiğini belirtmektedir (bkz. Şekil 5). Stephan aşamaları tasarı, uygulama ve analiz aşaması olarak ayırırken bu üç aşama için nelerin ele alınacağını açıklamaktadır.

Şekil 5

Tasarım Tabanlı Araştırmaların Aşamaları (Stephan, 2015, s.906)

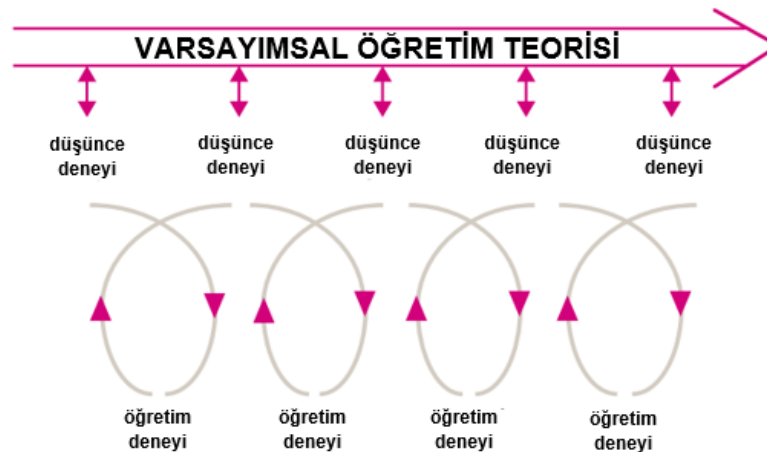


Stephan'ın (2015) sunduğu modelin doktora tez çalışmasının araştırma sürecinin içeriğini şekillendiren model olduğu ifade edilebilir. İçeriğin oluşturulmasında, uygulamasında ve analizlerde ne gibi durumların göz önünde bulundurulması gerektiği hususunda bu modelden yararlanılmıştır. Modelde tasarım tabanlı araştırmayı doğrusal bir süreç gibi gösterse de, aslında döngüsel bir araştırma sürecidir. Ancak süreç içerisinde yer alan üç temel aşamayı göstermesi ve ayrıntılandırılması sebebiyle kolaylıklar sağlamıştır.

Gravemeijer ve Cobb (2006) tasarım tabanlı bir araştırmanın düşünce ve öğretim deneylerinden oluşan küçük döngüler içerdiğini ve düşünce deneyleri ile öğretim deneyleri arasında yansıtıcı bir ilişki olması halinde öğretim teorisinin geliştirilebileceğini ifade etmişlerdir (bkz. Şekil 6).

Şekil 6

Tasarım ve Deneyler Arasındaki Yansıtıcı İlişki ve Mikro ve Makro Tasarım Döngüleri (Gravemeijer ve Cobb, 2006, s.85)

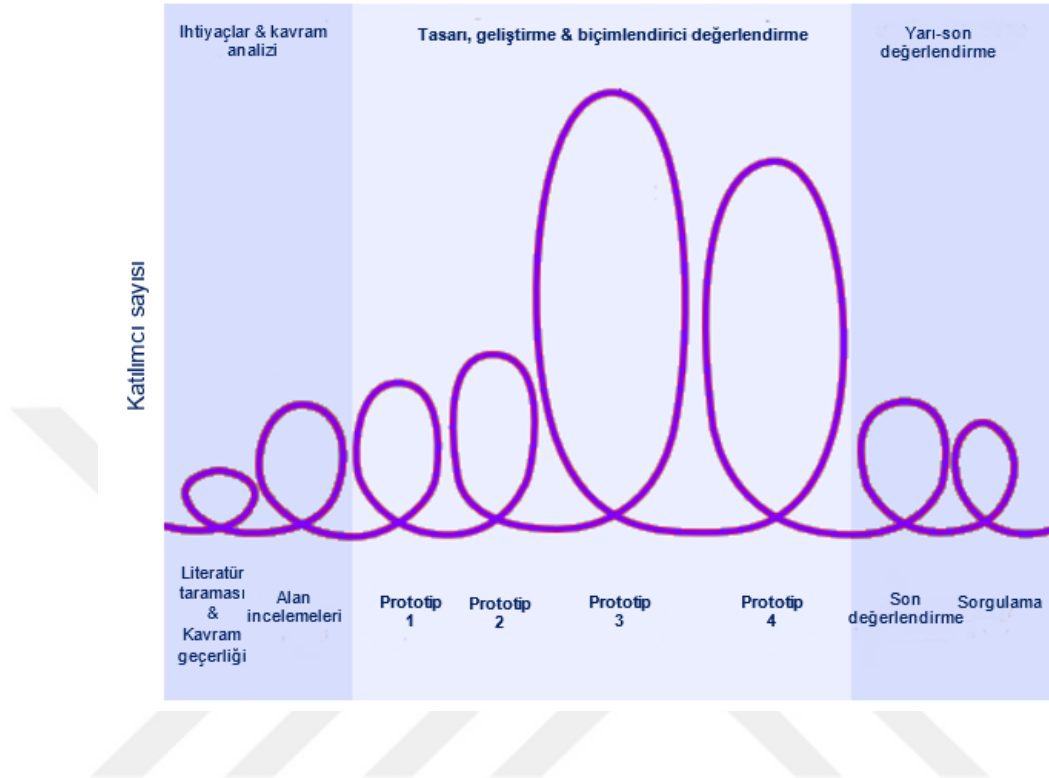




Gravemeijer ve Cobb (2006) ortaya koydukları modelde mikro döngüleri düşünce deneyleri doğrultusundaki öğretim deneyleri olarak belirtmektedirler. Varsayımsal öğretim teorisi kapsamındaki tüm öğretim deneylerinin uygulanmasının ardından yeniden tüm öğretim deneylerinin uygulandığını şematik olarak göstermekte ve bu öğretim deneylerinin tamamının uygulandığı süreci uzun dönemli makro döngü olarak ifade etmektedirler. Gerçekleştirilen doktora tez çalışmasında da bu model göz önüne alınarak varsayımsal öğrenme yolları doğrultusunda öğretim deneyleri gerçekleştirilmiş ve bu öğretim deneyleri boyunca ve sonrasında yapılan revizyonlara dayalı tüm süreç döngüsel olarak tekrar uygulanmıştır.

McKenney ve van den Akker (2005) ise lise düzeyinde matematik ve fen eğitimin kapsamındaki müfredat materyallerinin gelişimini desteklemek için bilgisayarın potansiyelini ortaya çıkarmak amacıyla yürüttükleri tasarım tabanlı çalışmada Şekil 7'deki modelden yararlanmışlardır:

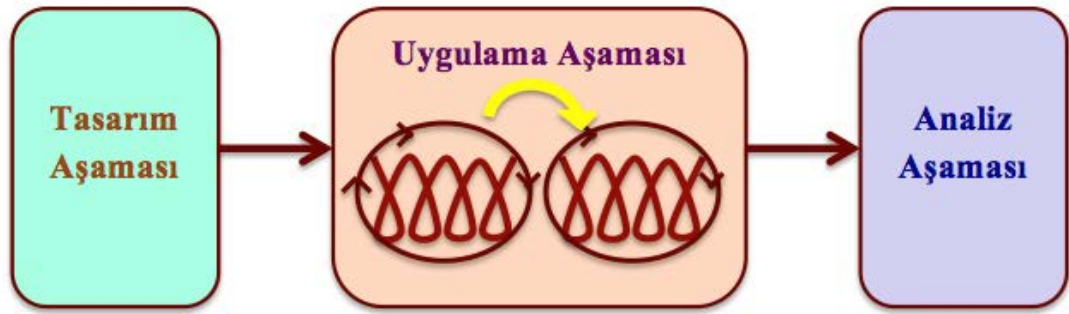
Şekil 7
Tasarım Tabanlı Araştırmanın Döngüsel Süreci (McKenney ve van den Akker, 2005, s. 49)



McKenney ve van den Akker'in (2005) modeli kapsamında tasarımın geliştirilmesi öncesinde alanyazın taraması ve alan uygulamaları yardımıyla problemlerin ortaya çıkarılması ve kavram analizinin yapılmasına değinilmektedir. Bu sürecin ardından uygulanacak olan tasarımın oluşturulması, bu tasarımın geliştirilmesi ve değerlendirmesi süreçlerin döngüsel olarak gerçekleştirilmesi şematik olarak sunulmaktadır. Söz konusu doktora çalışmasında bu modelden kavram analizinin ve ihtiyaç analizinin yapılması ve sürecin sürekli olarak döngüsel olarak devam ettirilmesi bağlamında yararlanılmıştır.

Bölümün devamında doktora tez çalışmasında gerçekleştirilen tasarım tabanlı araştırma süreci, tasarım aşaması, uygulama aşaması ve analiz aşaması olmak üzere üç bölümde açıklanmaktadır. (bkz. Şekil 8).

Şekil 8
Tez Çalışmasındaki Tasarım Tabanlı Araştırmanın Üç Aşaması



Tasarım Tabanlı Araştırmanın Tasarım Aşaması

Tez çalışmasında yürütülen tasarım tabanlı araştırmanın tasarımı aşamasında sırasıyla,

1. fonksiyonlara ve ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin alanyazın taramasının yapılması,
2. ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin kavramsal analiz yapılması,
3. ikinci dereceden fonksiyonların gerçek sınıf ortamlarında bir öğretmen tarafından gerçekleştirilen öğretim süreçlerinin gözlemlenmesi,
4. onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonları öğrenme süreçlerine yönelik varsayımsal öğrenme sürecinin tasarlanması,
5. matematik öğretmenleri ile ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin varsayımsal öğrenme sürecine yönelik görüşmelerin yapılması,
6. matematik öğretmeni adayları ile ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin varsayımsal öğrenme sürecine yönelik görüşmelerin yapılması,
7. bir on birinci sınıf öğrencisi ile ikinci dereceden fonksiyonlar üzerine klinik mülakat gerçekleştirilmesi,
8. yapılan çalışmalar doğrultusunda varsayımsal öğrenme sürecinde revizyonların gerçekleştirilmesi,
9. Varsayımsal öğrenme sürecine paralel olarak öğretim dizisinin tasarlanması ve varsayımsal öğrenme yollarının oluşturulması,
10. Öğretim dizisindeki etkinliklerin pilot uygulamasının ve bu doğrultuda gerekli revizyonların yapılması çalışmalarını yürütülmüştür.

Tasarım aşamasında öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları öğrenme süreçlerindeki varsayımsal öğrenme süreçlerini belirleyebilmek amacıyla ilk olarak doğrusal fonksiyonlara ve ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin alanyazın taraması yapılmıştır. Alanyazın taramasında doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyon kavramlarının ilişkili olduğu fikirleri ve kavramları, gerçek yaşamda içerisinde bulunduğu durumları, kavramlara yönelik öğrencilerin karşılaşılabilecekleri güçlükleri, öğrenme süreçlerindeki yanlış anlayışları, kavramların öğretimleri sırasında öğretmenlerin farklı yaklaşımları ve bu yaklaşımlar doğrultusundaki öğrenci öğrenmeleri gibi hususları açıklayan ve örnekleyen araştırmalar incelenmiştir. Alanyazın taraması kapsamında, ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin değişim miktarlarının değişiminin sabit olması (Eraslan, Aspinwall, Knott ve Evitts, 2007; Nielsen, 2015; Hohensee, 2016), iki doğrusal fonksiyonun çarpımı olarak ifade edilmesi (Movshovitz-Hadar, 1993; Nielsen, 2015), farklı gösterimler arası ilişkilendirmelerin yapılması (Zaslavsky, 1997; Metcalf, 2007; Eraslan, 2008), tepe noktasının ve simetri ekseninin anlamlandırılması (Borgen ve Manu, 2002; Eraslan, Aspinwall, Knott ve Evitts, 2007; Childers ve Vidakovic, 2014), katsayıların anlamlandırılması (Zaslavsky, 1997; Ellis ve Grinstead, 2008) ve ötelemelerin yorumlanması (Zazkis, Liljedahl ve Gadowsky, 2003) ile ilgili çalışmalar ön plana çıkmıştır. Ek olarak, ülkemizdeki ve farklı ülkelerdeki matematik öğretim programlarında hangi kapsamda ele alındığı ortaya çıkarılmıştır.

Tez çalışmasında amaç hem öğrencilerin düşüncelerine uygun olarak bir öğretim dizisi tasarlamak hem de öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin düşüncelerinin modellerini oluşturmak olduğu için ilk olarak ikinci dereceden fonksiyonların hangi kavramlarla ilişkili olduğunu ortaya koymanın gerekli olduğu düşünülmüştür. Alanyazın incelemesinden yararlanarak ikinci dereceden fonksiyon kavramına yönelik gerçekleştirilen kavramsal analiz sonucunda ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin,

- fonksiyonun eş zamanlı değişim, eşleme ve dönüşüm fikirlerini içermesi,
- doğrusal fonksiyonlarda değişim oranının sabit olması,
- değişim oranı ile eğimin ilişkilendirilmesi,

- doğrusal iki fonksiyonun çarpımının ikinci dereceden fonksiyon fikrine götürmesi, bir başka deyişle $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = ax^2 + bx + c = f(x)$ olarak ifade edilebilmesi,
 - $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun iki doğrusal fonksiyonun çarpımı olması sebebiyle değişim oranları sabit olmazken değişim miktarlarının değişiminin sabit olması,
 - ikinci dereceden bir fonksiyonun grafiği üzerindeki noktaların y değerlerinin ikinci dereceden fonksiyonu oluşturan iki doğrusal fonksiyondaki aynı x'e karşılık gelen y değerlerinin çarpımı olması,
 - grafiğinin $x = \frac{-b}{2a}$ doğrusuna göre simetrik olması ve bu doğruya göre aynı y değeri olan noktaların x değerlerinin eşleşmesi ve bu noktaların $x = \frac{-b}{2a}$ doğrusuna eşit uzaklıkta olması,
 - fonksiyonun grafiğinin x eksenini kesmediği durumlarda bu fonksiyonun reel sayılar kümesinde tanımlanan iki doğrusal fonksiyonun çarpımı şeklinde yazılamaması
- temel fikirleri ortaya çıkarılmıştır.

Kavramsal analizin tamamlanmasının ardından bir matematik öğretmenin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin öğretimi gözlemlenmiştir. Gözlemi araştırmacı yapmış ve ek olarak öğretim sürecini video kamera ile kayıt etmiştir. Bu aşamanın ardından ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin taslak bir varsayımsal öğrenme süreci oluşturulmuştur. Oluşturulan varsayımsal öğrenme süreci ile ilgili fikirlerini almak amacıyla yaklaşık 14-15 yıllık deneyime sahip dört matematik öğretmeni ile görüşme yapılmıştır. İkinci dereceden fonksiyon kavramının öğretimi ve bu süreçlerdeki farklı öğrenci eğilimlerini birçok kez deneyimlemiş olan öğretmenlerin görüşlerinin varsayımsal öğrenme sürecinin geliştirilmesinde önemli olduğu düşünülmüştür. Belirlediğimiz varsayımsal öğrenme sürecine ilişkin fikirlerinin ne olduğunu, ikinci dereceden fonksiyonların öğretimini nasıl gerçekleştirdiklerini, bu süreçlerde öğrencilerinin karşılaştıkları güçlüklerin ve kolaylıkla anlamlandırdıkları kavramların neler olduğunu ortaya çıkarmak amacıyla öğretmenlerle yapılan görüşmeler, öğretmenlerin görev yaptıkları okullarda, kendilerini rahat hissedecekleri bir ortamda

gerçekleştirilmiştir. Görüşmeler öncesinde öğretmenlerle tanışma ve görüşmenin amacını açık bir şekilde ifade edilmesi, öğretmenlerin görüşmeler sırasında fikirlerini rahatlıkla dile getirebilmelerine imkan vermiştir.

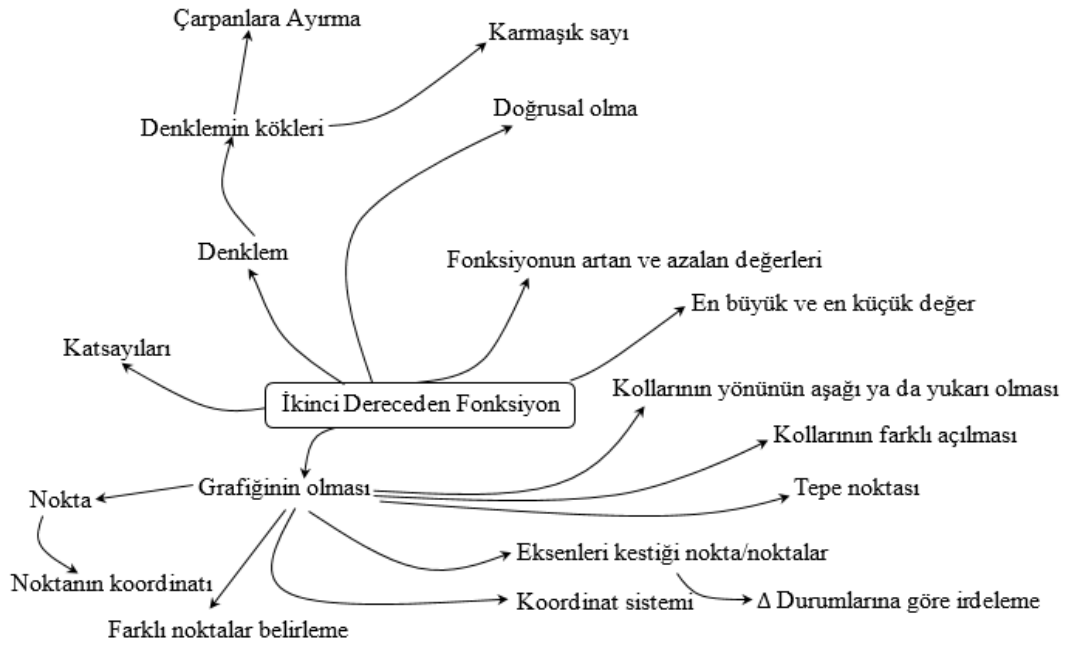
Taslak olarak hazırlanan varsayımsal öğrenme sürecine yönelik son sınıf matematik öğretmeni adaylarıyla da görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının matematik öğretimine yönelik dersleri tamamlamaları, bu dersler kapsamında lise matematik öğretim programını incelemeleri, Okul Deneyimi dersi kapsamında farklı öğretmenlerin derslerini ve bu derslerdeki öğrencileri gözlemlemeleri nedeniyle varsayımsal öğrenme sürecine yönelik fikirlerinin önemli olacağı düşünülmüştür. Öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmeler araştırmacı tarafından tez danışmanının üniversitedeki odasında yürütülmüştür.

Son olarak, bir anadolu lisesinde öğrenim görmekte olan on birinci sınıf öğrencisinin (Özgür) ikinci dereceden bir fonksiyonu analiz edip grafiğini çizerken zihninde oluşan kavramları ve bu kavramlara ilişkin düşüncelerinin altında yatan sebepleri ortaya çıkarmak amacıyla öğrenciye “ $f(x) = x^2 + 2x - 3$ nasıl bir fonksiyondur? Bu fonksiyonun grafiğini çizmek istesen nasıl bir yol izlersin?” sorusu sorulmuş ve bu soruyu yanıtlarken öğrencinin düşüncelerini anlamak amacıyla klinik mülakat yönteminden yararlanılmıştır (Özaltun Çelik ve Bukova Güzel, 2017). Özgür’ün seçilmesinin nedeni öğretmenlerinden alınan bilgiler doğrultusunda başarılı bir öğrenci olarak değerlendirilmiş olması ve bu sebeple klinik mülakat sorusuna araştırmacılara yol gösterecek fikirler üretebileceğinin düşünülmüştür. Özgür’ün bu fikirlerinin varsayımsal öğrenme sürecini belirlemeye yönelik yapılan diğer çalışmaları destekleyeceği, varsayımsal öğrenme süreci için anlamlı fikirler sağlayacağı ve öğretim dizisi kapsamında hazırlanan etkinliklere yön vereceği düşünülmüştür.

Özgür’ün ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin ne gibi ön bilgilere sahip olduğu, ön bilgilerinin ikinci dereceden fonksiyona yönelik düşüncelerini nasıl etkilediği, kavrama ilişkin kritik noktalara ne gibi anlamlar yüklediği incelenmiştir. Tepe noktasına ilişkin ne gibi düşüncelerinin olduğu, simetri eksenine ne şekilde

ilişkilendirdiği, grafiğinin nasıl olduğu, grafiğinin eksenleri kestiği noktaları nasıl ele aldığı, fonksiyonun cebirsel ifadesini grafiksel gösterime nasıl dönüştürdüğü, a, b ve c katsayılarına ne gibi anlamlar yüklediği ortaya çıkarılmıştır. Özgür'ün ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin klinik mülakatı boyunca zihninde ilişkilendirdiği ve şekillendirdiği kavramlar Şekil 9'daki gibidir.

Şekil 9
Özgür'ün İkinci Dereceden Fonksiyonlara İlişkin Zihin Haritası



Özgür ikinci dereceden fonksiyon ifadesi ile karşılaştığında, grafiğinin parabol olacağı ve parabolün kollarının aşağıya ya da yukarıya doğru olacağı düşüncesine sahip olmasına karşın cebirsel gösterim ile grafiksel gösterim arasındaki ilişkiyi kuramamıştır. Özgür'ün bu noktada yaşadığı güçlüğüün sebebinin öğrencinin fonksiyon ve fonksiyonun grafiğini çizmek için sahip olduğu eksik anlayışlardan kaynaklandığı görülmüştür. Özgür geleneksel bir perspektif ile öğrenme sürecine dahil edildiği için sürekli olarak bilgilerini hatırlamaya çalışmıştır. Bu durumun Özgür'ün süreçte yaşadığı birçok zorluğunun temel nedeni olduğu düşünülmüştür. Özgür ikinci dereceden bir fonksiyonun a, b ve c katsayılarındaki değişikliklerde fonksiyonun grafiğinde de değişikliklerin olacağının farkında olsa da öğretim sürecinde işlemsel bilgilerinin ötesine geçememiştir. Bunlara paralel olarak, Özgür'ün oldukça önemli bir

kavram olan simetri eksen ve tepe noktası arasında hiçbir ilişki kuramamış olması kavramsal anlamasında problemlerinin olduğunu göstermiştir. Bu sonuca dayalı olarak ikinci dereceden fonksiyonların kavramsal öğrenmesine ilişkin bir öğretim dizisi tasarlanmasının gerekliliği ortaya çıkmıştır.

Yapılan bu araştırmalar doğrultusunda onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin varsayımsal öğrenme süreci revize edilmiş ve Tablo 3’de gösterildiği gibi belirlenmiştir. Belirlenen bu varsayımsal öğrenme süreci öğretim dizisini oluşturan etkinliklerin tasarlanmasında yol gösterici olmuştur. Varsayımsal öğrenme sürecine uygun olarak öğretim dizisi kapsamındaki gerçek yaşam temelli etkinlikler çalışmanın kuramsal yapısına paralel olarak öğrencilerin yansıtıcı soyutlama yapmalarına imkan veren mantıksal-matematiksel öğrenme etkinlikleri çerçevesine dayalı olarak tasarlanmıştır.

Tablo 3

İkinci Dereceden Fonksiyonlara İlişkin Varsayımsal Öğrenme Süreci

Varsayımsal öğrenme süreci adımları	İçeriği
Doğrusal fonksiyonu açıklar.	- Fonksiyonun bağımsız ve bağımlı değişkeni içeren bir kural olduğunu bilir. - Fonksiyon çeşitlerinden birinin doğrusal fonksiyon olduğunu ifade eder - Doğrusal fonksiyonda değişim oranının sabit olduğunu ve grafiksel olarak eğime karşılık geldiğini ifade eder. - Doğrusal fonksiyonların tablo ile gösterimlerini, cebirsel gösterimlerini, sözel gösterimlerini ve grafiksel gösterimlerini birbiriyle ilişkilendirir. $ax + b = 0$ denklemini $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kestiği noktalarla ilişkilendirir. $ax + b = 0$ ve $k \cdot ax + k \cdot b = 0$ aynı denklemi ifade ettiğini açıklar. - Değişken ve katsayıların anlamlarını açıklar. $f(x) = ax + b$ fonksiyonu ile $f(x) = k \cdot ax + k \cdot b$ fonksiyonunun farklı olduğunu açıklar.
İki doğrusal fonksiyonun çarpımının ikinci dereceden fonksiyon olduğunu ifade eder.	İki doğrusal fonksiyonu çarpar ve oluşan fonksiyonun ikinci dereceden fonksiyon olduğunu açıklar.
İkinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesine bağlı oluşturduğu sıralı ikilileri analitik düzleme yerleştirerek ve noktaları sıklaştırarak ikinci dereceden	- Çarpım sonucunda oluşan fonksiyonun grafiğinin doğrudan farklı olduğunu ifade eder. - Bir noktanın grafik üzerinde olup olmadığının nasıl araştırılacağını açıklar. - Sezgisel olarak noktanın grafik üzerinde olabileceği düşüncesi yerine noktanın fonksiyonun kuralını sağlaması gerektiği fikriyle incelemeler yapar.

fonksiyonun grafiğinin yapısını sezer.	• Parabol üzerinde seçilen herhangi iki noktadan geçen doğrunun üzerindeki diğer noktaların parabol üzerinde olamayacağını açıklar. • Grafik üzerinde sonsuz nokta olduğunu fark eder. • Reel sayılar kümesinde tanımlanan fonksiyona ait parabolün kollarının sonsuza kadar devam ettiğini ve parabolün sınırlı olmadığını ifade eder.
$f(x) = ax^2 + bx + c$ grafiğinin simetri eksenini ve tepe noktasını keşfeder.	• $f(x) = ax^2 + c$ fonksiyonu için tepe noktasının apsis değerinin 0 olduğunu keşfeder ve tepe noktasının her parabol için var olduğunu ifade eder. • İki farklı parabolün tepe noktasının apsisi aynı iken ordinatlarının farklı olabileceğini ve dolayısıyla tepe noktalarının farklı olabileceğini açıklar.
Grafiği verilen ikinci dereceden fonksiyonların farklı cebirsel gösterimlerini (kanonik form, çarpımsal form ve standart form) yazar ve aralarında geçiş yapar.	• Her bir cebirsel gösterimde kullanılan özellikleri grafiksel gösterim ile ilişkilendirir. • $f(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden fonksiyonunda b ve c katsayılarının 0 olabileceğini ancak a katsayısının sıfır olamayacağını açıklar. • $\Delta \geq 0$ için üç cebirsel form arasından hangilerine geçiş yapılacağını açıklar ve geçiş yapar. • $\Delta < 0$ için üç cebirsel form arasından hangilerine geçiş yapılacağını açıklar ve geçiş yapar.
$f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesine ilişkin a katsayısının değişimine göre çıkarımlarda bulunur.	• $f(x) = ax^2$; $a > 0$ parabolün kollarının yukarı ve $y = ax^2 + bx + c$; $a < 0$ parabolün kollarının aşağıya olacağı şeklinde a katsayısını anlamını yorumlar. • $f(x) = ax + b$ doğrusal fonksiyonunda a'nın eğim olmasından farklı olarak parabolde eğim olmadığını açıklar.
$f(x) = ax^2 + c$ ifadesine ilişkin c katsayısının değişimine göre çıkarımlarda bulunur.	• $f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesine ilişkin c katsayısına göre çıkarımlarda bulunur. • $c=0$ olması durumunda parabolün y eksenini (0,0) noktasında keseceğini yorumlar. • Parabolün x eksenine paralel olarak yukarı ya da aşağıya ötelenmesi sonucunda cebirsel ifadede c katsayısında değişim olduğunu fark eder ve oluşan yeni grafiğin cebirsel ifadesini yazar.
Tepe noktasını belirleyen katsayıların farklı durumlarını inceler ve çıkarımlarda bulunur.	• Parabolün y eksenine paralel ötelenmesini tepe noktası ile ilişkilendirir ve b katsayısındaki değişimlerin olacağını açıklar.

Amaçlara ve varsayımsal öğrenme sürecine uygun olarak öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları öğrenmeleri için GME prensipleri doğrultusunda öğrencilerin yansıtıcı soyutlama yapmalarını sağlayacak dört mantıksal-matematiksel öğrenme etkinliği tasarlanmıştır. Etkinlikler tasarlanırken öğrencilerin gerçek yaşam durumlarını matematikselleştirerek elde ettikleri modellere dayalı kavramlar üzerine soyutlamalar yapmalarını sağlayacak zihinsel eylemleri göz önüne alınmıştır.

Etkinlikler tasarlandıktan sonra matematik öğretmenliği birinci sınıfta Analiz I dersine devam etmekte olan 12 matematik öğretmeni adayı ile pilot uygulama gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının araştırmacılar için kolay ulaşabilir ve

istenilen zaman dilimlerinde rahatlıkla uygulamaların yapılmasına imkan sağlayan bir örneklem olmaları ve etkinliklerin pilot uygulamasının amaçlanması matematik öğretmeni adaylarının seçilmesine yönlendiren etkenler olmuştur. Pilot uygulama 2015-2016 öğretim yılının Güz döneminde yürütülmüştür. Öğretmen adayları başka bir çalışma kapsamında Analiz I dersinin başlangıcında derste kullanılmak üzere matematiksel modelleme sürecine ilişkin uygulamalar yapmışlardır. Bu sebeple onlara sunulan etkinliklerin uygulamasında güçlüklerle karşılaşmalarının önüne geçilmiştir. Öğretmen adayları çalışmalar boyunca etkinlikler üzerinde üçer kişilik gruplar halinde çalışmışlardır. Öğrencilerin gruplara göre dağılımları ve cinsiyetleri Tablo 4’de gösterilmektedir.

Tablo 4
Pilot Çalışmaya Katılan Matematik Öğretmeni Adaylarına İlişkin Bilgiler

Grup No	Öğretmen Adayının Kodu	Cinsiyet
Grup 1	ÖA1	Kız
	ÖA2	Kız
	ÖA3	Erkek
Grup 2	ÖA4	Kız
	ÖA5	Kız
	ÖA6	Kız
Grup 3	ÖA7	Erkek
	ÖA8	Erkek
	ÖA9	Erkek
Grup 4	ÖA10	Kız
	ÖA11	Erkek
	ÖA12	Erkek

Pilot uygulamanın temel amacı, öğretim dizisindeki etkinliklerin öğrenciler için anlaşılır olup olmadığını, öğrenci öğrenmelerini nasıl desteklediğini ve hangi soruların öğrenme sürecince yanlış anlamalara neden olabileceğini ortaya çıkararak etkinlikleri düzenlemek olmuştur. Bu süreçte boyunca öğretmen adayları üniversitede U şeklinde oturma düzeninin olduğu bir sınıf ortamında üçer kişilik gruplar halinde çalışmalarını yürütmüşlerdir. Bu öğrencilerin tez danışmanının yürüttüğü Analiz I dersini almakta olmaları sebebiyle süreçte öğrenciler ve araştırmacılar birbirleriyle rahatlıkla iletişim kurabilmişlerdir. Etkinlikler üzerine çalışan öğretmen adayları etkinliklerdeki bazı soruları değerlendirirken bazen grup olarak farklı algılamışlar

bazen de hem fikir olmalarıyla birlikte soruları araştırmacıların düşündüklerinden farklı şekillerde ele almışlardır. Bununla birlikte, sorulardan bazılarının öğrencilerin kavramı öğrenmeleri için yönlendirici olmadığı, bazılarının da eksik bilgi içerdiği görülmüştür. Etkinliklerin uygulamaları sırasında ve uygulamalardan sonra problem durumunu sunan metnin içeriği, etkinliklerdeki soruların anlaşılabilirliği, soruların yansıtıcı soyutlamayı destekleyip desteklemediği, öğretmenlerin öğretim deneyi süresince öğrencileri destekleyecekleri aşamalar yönüyle öğretim dizisi değerlendirilmiş ve etkinlikler amaçları doğrultusunda revize edilmiştir.

Öğretim dizisi kapsamında tasarlanan etkinlikler Dünya'nın Dibi, El-Castillo, En Uzun Basketbol Atışı ve Parabolik Uçuş etkinlikleridir.

“Dünya'nın Dibi” isimli etkinlikte (bkz. Ek 1) öğrencilere ilk olarak “..derinliklere inildiğinde her 10 metrede basıncın 1 ATM artması..” şeklinde derinlik ve basınç ilişkisinin sözel ifadesi verilerek onların iki değişken arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak yazmaları istenmiştir. Ardından basınç ve basınca bağlı olarak vücuttaki oksijen çözünme miktarlarına ilişkin veriler tablo ile sunularak öğrencilerin bu iki değişkenin ilişkisini matematiksel olarak ifade etmeleri beklenmiştir. Bu etkinlik kapsamında öğrencilerin nicel muhakemeler yoluyla doğrusal fonksiyondaki temel çoklukları düşünmeleri, yeni çokluklar oluşturmaları ve farklı gösterimler arasında ilişkilendirmeler yapmaları amaçlanmıştır.

“El Castillo” isimli etkinlik (bkz. Ek 2) ile öğrencilerin ilk olarak kare piramit yapının sırasıyla katlarına, basamaklarına ve herhangi bir yüksekliğine bağlı tabana paralel oluşan kesitlerin kenar uzunluklarını gösteren matematiksel ifadeyi oluşturmaları istenmiştir. Sonrasında karenin alan fikrinden yararlanarak iki kenar çarpımından ve dolayısıyla iki doğrusal fonksiyonun çarpımından hareketle ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesini elde etmeleri beklenmiştir. Etkinlikte yer alan sorularla doğrusal fonksiyonun kritik özelliklerinden farklı olarak ikinci dereceden fonksiyonun ne gibi fikirleri içerdiğini anlamlandırmaları ve grafiğine ilişkin başlangıç fikirleri oluşturmaları amaçlanmıştır.

“En Uzun Basketbol Atışı” isimli etkinlik (bkz. Ek 3) ile öğrencilerin grafiği verilen bir ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesini oluşturmaları için gerekli çoklukların neler olduğunu fark etmeleri, grafiksel gösterimde önemli olan çoklukları belirlemeleri ve bu çoklukların hem cebirsel gösterimde hem de grafiksel gösterimde ne gibi anlamları olduğunu anlamlandırmaları amaçlanmıştır. Bu amaçlarla, ilk olarak fonksiyonda aynı değere sahip noktaları ele alarak çıkarımlarda bulunmaları ve simetri doğrusunu sezmeleri sağlanmıştır. Sonrasında simetri doğrusu ile cebirsel ifade arasındaki ilişkinin kurulmasına yönelik sorular sorulmuştur. Bununla birlikte, ikinci dereceden fonksiyonun üç farklı cebirsel gösterimi birbirleriyle ve grafiksel gösterim ile ilişkilendirmeleri beklenmiştir. Her bir cebirsel gösterime ilişkin çıkarımlarda bulunmaları ve bu çıkarımlarını genelleştirmeleri amaçlanmıştır.

“Parabolik Uçuş” isimli etkinlik (bkz. Ek 4) ile öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesindeki katsayıların anlamlarına ilişkin çıkarımlarda bulunmaları ve farklı öteleme hareketleri ile hem cebirsel gösterim hem de grafiksel gösterim ile ilgili olan değişiklikleri anlamlandırmaları ve birbirleriyle ilişkilendirmeleri amaçlanmıştır. Bu amaçla ilk olarak a katsayısının değerinin farklılaşmasının grafiksel gösterimde ne gibi değişikliklere neden olduğunu anlamalarına yönelik sorulara yer verilmiştir. Sonrasında parabolün x eksenine paralel olarak hareket ettirilmesinin ve y eksenine paralel olarak hareket ettirilmesinin fonksiyonun cebirsel ifadesinde ne gibi değişikliklere neden olduğunu anlamlandırmaları ve ötelemeye ilişkin genelleme yapmaları beklenmiştir.

Öğretimsel teori olarak GME teorisine dayandırılan tez çalışmasında GME teorisi ve tasarım tabanlı araştırma süreci doğrultusunda ilk olarak varsayımsal öğrenme yolu belirlenmiştir. Oluşturulan varsayımsal öğrenme yolu doğrultusunda tasarım çalışmanın uygulama aşaması gerçekleştirilmiştir.

Tasarım Tabanlı Araştırmanın Uygulama Aşaması

İki döngüden oluşan tasarım tabanlı araştırmanın uygulama aşamasının tarihleri ve periyotları Tablo 5’de gösterilmektedir. Tez çalışmasının temel uygulaması

üç ardıl döngüden oluşan bir tasarı araştırması kapsamında dört dönem devam eden bir süre içerisinde gerçekleştirilmiştir.

Tablo 5

Araştırmanın Döngülerinin Gerçekleştirilme Tarihleri ve Periyotları

1.Döngü	2.Döngü
13 Oturum	17 Oturum
18 Ocak-29 Mart, 2016	23 Ocak-3 Şubat, 2017

Tasarım tabanlı araştırmanın birinci döngüsü bir sınıf ortamında onuncu sınıf öğrencilerinin etkinlikler üzerine ikişer kişilik gruplar halinde çalışmaları ile gerçekleştirilmiştir. Öğretim dizisinin bir sınıf ortamında gerçekleştirilmesiyle birden fazla onuncu sınıf öğrencisine ulaşarak farklı anlamaları değerlendirmek, bu doğrultuda öğrenme sürecinin ve etkinliklerin nasıl olduğunu ve öğrenci gruplarının ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin anlamalarının gelişiminin bu süreç ile nasıl desteklendiğini ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Uygulamalar okuldaki ek çalışmaların yürütüldüğü ve bazı seçmeli derslerin gerçekleştirildiği bir sınıfta yapılmıştır. Öğrencilerin çalışmaları sırasında öğretmenleri sınıf ortamında bulunmamış sadece iki araştırmacı uygulamayı yürütmüştür. Öğrencilerin grup arkadaşlarıyla etkili şekilde çalışabilecekleri ve diğer gruptaki öğrencileri rahatsız etmeyecekleri şekilde sınıf ortamı düzenlenmiştir. Sınıfta sıraların dışında akıllı tahta, beyaz tahta ve öğrenci dolapları bulunuyordu.

Araştırmanın ikinci döngüsü ise ilk döngünün gerçekleştirildiği okuldan farklı bir okuldaki iki onuncu sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. İlk döngüye dayalı olarak revize edilen öğretim dizisinin iki öğrenciye uygulanmasının amacı, onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonlara yönelik tasarlanan öğrenme etkinlikleri kapsamındaki kavramlara ilişkin anlamalarını ve düşüncelerini daha ayrıntılı bir şekilde analiz etmektir. Ek olarak, ölçme ve değerlendirme etkinliklerini klinik mülakatlarla uygulayarak öğrenme süreçlerinde ulaştıkları anlamaların nasıl olduğunu derinlemesine inceleyerek zihinsel eylemlerini ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Öğrencilerle yapılan tüm çalışmalar araştırmacının çalıştığı üniversitenin bir seminer odasında gerçekleştirilmiştir. Seminer odasında U düzeninde

masa, beyaz tahta ve projeksiyon bulunmaktaydı. Öğrenciler çalışmalarını yürütürlerken masanın seçtikleri bir yerinde yan yana oturmuşlar araştırmacı ise öğrenci çalışmalarını görecektir şekilde konumlanmıştır.

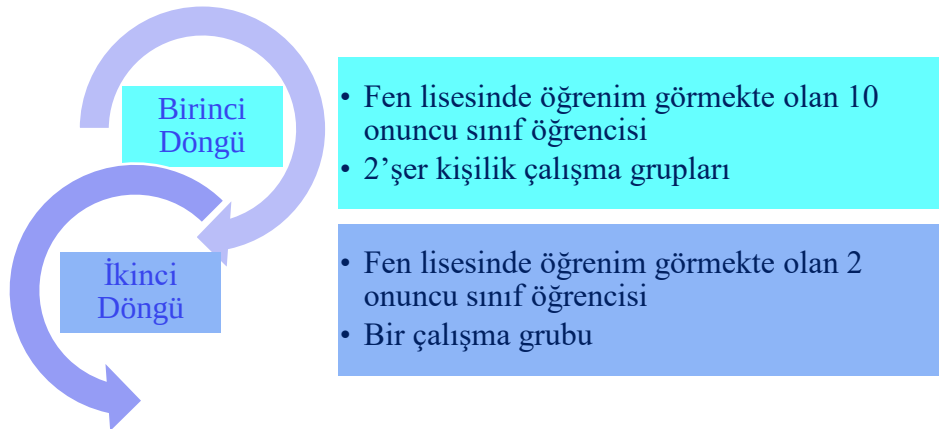
Araştırmada onuncu sınıf öğrencileriyle sınıf ortamında çalışabilmek ve öğrencilerin çalışmalarını araştırmanın verileri olarak kullanabilmek için Milli Eğitim Bakanlığı'ndan Etik Kurul İzni (bkz Ek 5) alınmıştır. Bu sürecin ikinci döngüsüne kadar olan sürede araştırmacı takımı olarak tez çalışmasını yürüten araştırmacı ve tez danışmanı araştırmacı-gözlemci olarak birlikte çalışmışlar ve süreç boyunca öğrencilerin düşüncelerine odaklanmışlardır. Üçüncü döngüdeki uygulamaları ise sadece araştırmacı gerçekleştirmiştir.

Araştırmanın Katılımcıları

Onuncu sınıf öğrencilerinin zihinsel eylemlerini tetikleyerek ikinci dereceden fonksiyonları kavramsal öğrenmelerini sağlayacak bir öğretim dizisi tasarlamak amacıyla gerçekleştirilen tez çalışması iki döngü ve iki ayrı katılımcı grubu ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın iki ardıl döngüsü Şekil 10'da gösterilmektedir.

Şekil 10

Tasarım Tabanlı Araştırma Kapsamında Gerçekleştirilen Ardıl Döngüler



Birinci Döngünün Çalışma Grubu.-Birinci döngü kapsamında gerçekleştirilen öğretim deneyleri 2015-2016 öğretim yılının Ocak-Şubat-Mart aylarında bir fen lisesinin Seçmeli Matematik dersi kapsamındaki onuncu sınıf

öğrencileri ile yürütülmüştür. Uygulamanın yürütüldüğü okulun Fen Lisesi olarak seçilmesinin nedenleri şu şekilde söylenebilir: Çalışmanın felsefi bakış açısı doğrultusunda, öğrencilerin yeni bir kavramı öğrenebilmeleri için kavrama ilişkin ön kavramları öğrenmiş olmaları gerekmektedir. Bu doğrultuda diğer okullardaki öğrencilerle karşılaştırıldığında, fen lisesi öğrencilerinin ön bilgilerinin daha güçlü olduğu varsayımı fen lisesinde öğrenimi sürdürmekte olan onuncu sınıf öğrencilerinin çalışma grubu olarak belirlenmesinde etkili olmuştur. Tasarlanan etkinliklerin farklı disiplinlerdeki içerikleri kapsayan matematiksel modelleme etkinlikleri olması da fen lisesi öğrencilerinin seçilmesinde bir diğer etken olmuştur. Öğrencilerin tasarlanan gerçek yaşam bağlamı etkinlikleri uygulayabilmeleri ve modellere dayalı olarak yansıtıcı soyutlama yapabilmeleri için matematiksel modelleme sürecine kısa süre içerisinde uyum sağlayabilmeleri ve fizik, kimya gibi içerikleri olan etkinliklere ilişkin akıl yürütebilmeleri önemliydi. Fen lisesi öğrencilerinin matematiksel modelleme sürecine daha hızlı adapte olabilecekleri düşünülmüştür. Ek olarak, Fen lisesindeki onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin formal bir öğretim sürecine dâhil olmamaları ölçüt olarak belirlenmiştir. Bu sebepler doğrultusunda amaçlı örnekleme türlerinden kolay erişilebilir örnekleme ve ölçüt örnekleme ile İzmir ilindeki bir Fen Lisesi seçilmiştir. Çalışma grubunu ise haftada 2 ders saati olarak ders programında yer alan Seçmeli Matematik dersini seçen üçü kız, yedisi erkek olmak üzere 10 öğrenci oluşturmuştur. Gruplardaki öğrencilerin takma isimleri ve cinsiyetleri Tablo 6’da verilmiştir.

Tablo 6
Birinci Döngünün Çalışma Grubuna İlişkin Bilgiler

Grup No	İsim	Cinsiyet
Grup 1	Emre	Erkek
	Onur	Erkek
Grup 2	Enis	Erkek
	Asya	Kız
Grup 3	Furkan	Erkek
	Zeynep	Kız
Grup 4	Ece	Kız
	Umut	Erkek
Grup 5	Meriç	Erkek
	Mete	Erkek

İkinci Döngünün Çalışma Grubu.-İkinci döngü, 2016-2017 eğitim-öğretim yılının ara tatilinde farklı bir Fen Lisesinin onuncu sınıfında öğrenimini sürdürmekte olan iki öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin bulundukları okuldaki bir matematik öğretmeni öğrencilerden birinin matematiğe ilgisinin olduğunu ve öğrencinin çalışmaya katılma konusunda istekli olabileceğini belirterek araştırmacıları yönlendirmiştir. Söz konusu bu öğrenci ile konuşularak çalışma hakkında bilgilendirme yapılmış ve öğrenci çalışmaya gönüllü olarak katılmayı kabul etmiştir. Öğrenciye çalışma kapsamındaki uygulamaları bir arkadaşı ile birlikte gerçekleştirecekleri söylendiğinde bir arkadaşının ismini belirterek gönüllü çalışabileceğini söylemiştir. Bu sayede diğer öğrenci ile görüşülüp çalışmaya katılımı konusunda gönüllü olup olmadığı sorulmuş ve öğrencinin olumlu görüşü doğrultusunda iki öğrenci çalışmanın katılımcıları olarak belirlenmiştir. İkisi de erkek olan öğrencilerin çalışma öncesinde de birbirleriyle iletişimleri oldukça iyi olup birlikte çeşitli çalışmalar gerçekleştirdikleri öğrenilmiştir. İki öğrenciden elde edilen verilere yönelik bulgular sunulurken iki öğrencinin de isimleri gizli tutularak onlara verilen takma isimler (Alp ve Can) kullanılmıştır.

Alp isimli öğrencinin matematiğe karşı ilgisi oldukça yüksekti. Fizik, matematik gibi dersler kapsamında projeler üzerine çalışıyordu. Kavramları farklı şekilde sorgulayan ve öğrendikleri ile yeni karşılaştığı durumları ilişkilendirmeye çalışan bir öğrenciydi. Farklı alanlara yönelik araştırmalar yapan Alp aynı zamanda haftanın bir günü Bilim ve Sanat Merkezinde gerçekleştirilen derslere katılıyordu. Araştırma yapma ve farklı konular ile ilgili yeni bilgiler öğrenme konusunda içsel motivasyonu oldukça yüksekti.

Can da benzer şekilde matematiğe karşı ilgiliydi. Ancak yeni bir şeyler öğrenmek konusunda motivasyonunu artırmak için Alp'e göre daha çok dışsal faktörlere ihtiyacı olan bir öğrenciydi. Kavramlar üzerine daha kompakt düşünüyor ve ayrıntıları çok fazla önemsemiyordu. Bir başka deyişle Alp ile karşılaştırıldığında daha sonuç odaklı bir öğrenciydi. Buna ek olarak, Alp'e göre daha az konuşuyordu ve düşüncelerini daha az açıklıyordu. Sosyal yönden olumlu ilişkiler kurabilen

öğrencilerin birbirleriyle iletişimlerinin oldukça etkili olması verimli bir çalışmanın gerçekleşip gerçeklemeyeceğine yönelik tereddütleri ortadan kaldırmıştı.

Veri Toplama Süreci

Tasarım tabanlı araştırmaya dayalı tez çalışmasının veri toplama aşaması nitel paradigmaya dayandırılmıştır. Veri toplama sürecinde öğrenciler etkinlikler üzerine çalışırken gerçekleştirilen öğretim deneyleri boyunca alınan video kamera kayıtları, araştırmacıların gözlem notları, öğrencilerle yapılan klinik mülakatlar, öğrencilerin yansıtıcı günlükleri ve kavramsal analiz testi veri toplama araçlarıdır. Bu bölümde veri toplama araçlarından ne amaçla ve nasıl yararlanılacağı ayrıntılı bir şekilde açıklanmaktadır.

Öğretim Deneyi.-Öğretim deneyleri tasarımı araştırmalarının içerisinde yer alan en temel aşama olarak ifade edilmektedir. Öğretim deneyi klinik mülakat yöntemine dayandırılmakta ancak, öğrencilerin bilgilerini etkileme yollarını ve araçlarını deneyimlemeyi içermesi sebebiyle klinik mülakattan daha fazlası olarak görülmektedir (Steffe, 2002). Klinik mülakat öğrencilerin mevcut bilgilerini anlamayı amaçlarken, tüm araştırma sürecinin yanı sıra, her öğretim olayı boyunca hipotezleri ve varsayımları test etmek ve üretmek için yapılan ve geniş bir süreç içerisinde öğrencilerin ilerlemelerini anlamaya yönelik öğretim deneyleri 1970 yılına kadar matematik eğitiminde kabul edilen bir araştırma yöntemi olarak düşünülmemekteydi (Steffe ve Thompson, 2000). Öğretim deneyleri “öğrencilerin matematiklerini” gösteren modellerin matematik eğitimi dışında geliştirilmesi ve araştırma uygulamaları ve öğretme uygulamaları arasındaki büyük boşluğun ortadan kaldırılması olmak üzere iki nedenle ortaya çıkmıştır (Steffe ve Thompson, 2000).

Steffe ve Thompson, (2000) öğretimle sağlanan deneyimler olmadan, öğrencilerin oluşturacakları güçlü matematiksel kavramları ve işlemleri anlamının ve bu kavramların ve işlemlerin araştırmacılarındakinden farklı olduğunu ortaya koyabilmelerinin mümkün olmayacağını dile getirmektedirler. Bir öğretim deneyinde, araştırmacının rolü nesnel bilimsel gerçekleri oluşturmayı amaçlayan bir gözlemciden kendi eylemleri ile ilgili olan modelleri yapılandırmayı amaçlayan bir

aktöre doğru değişiklik gösterebilmektedir (Steffe, 2002). Tez çalışmasında araştırmacı öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin öğrenme yollarını öğrencilerin çalışmalarına dayalı olarak modellemeye çalışmıştır. Bu sebeple öğretim deneylerinde nesnel bir gözlemci olduğu söylenebilir.

Gerçekleştirilen ilk döngü boyunca yürütölen öğretim deneyleri onuncu sınıf öğrencilerinin ikişer kişilik gruplar halinde çalışmaları ile gerçekleştirilmiştir. Öğretim deneyi uygulamaları haftanın bir gününde iki ders saatinde yürütöldüğü için öğrenciler bir etkinliğin ilk aşamasının çözümünü iki ders saati, ikinci aşamasının çözümünü ise bir sonraki haftanın iki ders saati olarak toplam iki hafta ve dört ders saati süresince tamamlamışlardır. Öğrenciler etkinlikler üzerine çalışırken araştırmacılar grupların çözümlerini gözlemlemişler ve gerektiğinde sorularla öğrencilerin düşüncelerini anlamaya çalışmışlardır. Bu süreçte her bir gruba bir kamera yerleştirilerek grupların çalışmaları ve aralarındaki etkileşimler kayıt altına alınmıştır. Dört ayrı etkinlikle gerçekleştirilen dört ayrı öğretim deneyinin video kamera kayıtları ve grupların etkinliklere yönelik yazılı çözüm kağıtları çalışmanın diğer verilerini oluşturmuştur.

İkinci döngü kapsamındaki öğretim deneyleri iki öğrencinin birlikte etkinlikler üzerine çalışması ile gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler ara tatil döneminde uygulamaları gerçekleştirdikleri için öğretim dizisi ikinci döngüdeki sınıf uygulamasına göre daha kısa sürede tamamlanmıştır. Dört etkinlikten üçü aynı gün içinde sabah ve öğleden sonra olacak şekilde iki oturum halinde uygulanmıştır. Öğrenciler sabah oturumunda etkinliğin ilk aşaması üzerine öğleden sonraki oturumunda ise ikinci aşaması üzerine çalışmışlardır. Diğer etkinlik ise iki ayrı günün sabah oturumunda tamamlanmıştır. Öğrenciler etkinlikler üzerinde çalışırken süreç video kamera ile kaydedilmiştir. Öğretim deneylerinin video kamera kayıtları ve etkinliğe yönelik öğrencilerin yazılı çözüm kağıtları çalışmanın bir diğer verilerini oluşturmuştur.

Klinik Mülakat.-Piaget (1976) öğrencilerin akıl yürütme biçimlerini ve işlevlerini anlamak için klinik mülakatı geliştirmiştir (Mojica, 2010). Piaget'e göre klinik mülakatın temel görevi, çocukların özgür görüşlerini-önceden oluşmuş şemalarını, zihinsel eğilimlerini, düşünsel alışkanlıklarını ortaya çıkarmak olup

seksenli yılların sonunda klinik mülakat öğretim deneyi içerisinde olgunlaşmıştır (Confrey, 2006). Piaget klinik mülakatı öğrencilerin belirli bir konu ile ilgili kavram yanlışlarının temelini anlama imkanı veremeyen standart testlere alternatif olarak kullanmıştır (Pablopulos ve Carolina, 2015). Paralel olarak Hunting (1997) klinik mülakatın öğrencilerin düşüncelerini ve matematiksel öğrenmelerini değerlendirmenin alternatif bir yolu olarak ifade etmektedir. Ginsburg (1981) klinik mülakatta üç amacı vurgulamaktadır. Birincisi, öğrencinin bilişsel süreçlerini keşfetmek, ikincisi bilişsel süreçlerinin temellerini tanımlamak ve üçüncü öğrencinin yeterliliğini belirlemektir. Klinik mülakatta odak noktası çözülecek bir problem, açıklanacak bir fikir ya da düşünülecek bir şey olabilmektedir (diSessa, 2007). Mülakatın gerçekleştirdiği duruma ya da kavrama yönelik öğrencinin verdiği yanıtlar tüm mülakat boyunca ayrıntılı ele alınır ve ne düşündüğü ve düşüncelerinin kaynağının neler olduğu ayrıntılı sorgulanır. Mülakatların sonucu, öğretmene öğrencilerin belirli kavramları nasıl gördüklerine ve hangi alternatif açıklamaların öğrencilere verilmesinin beklenildiğine ilişkin daha iyi bir anlayış sağlanarak ortaya çıkan sonuçlar öğrenme ortamına aktarılmaktadır (Engelhardt, Corpuz, Ozimek ve Rebello, 2003).

Tez çalışmasının veri toplama araçlarından bir diğeri klinik mülakatlardır. Araştırmanın farklı aşamalarında klinik mülakat yönteminden yararlanılmış ve süreç içerisinde gerçekleştirilen tüm klinik mülakatlar video kamera ile kaydedilmiştir. İlk olarak, tasarı aşamasında gerçekleştirilen klinik mülakat varsayımsal öğrenme sürecini şekillendirmek için on birinci sınıfta öğrenim görmekte olan bir öğrencinin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin sahip olduğu fikirleri ve anlamları ortaya çıkarmak amacıyla klinik mülakat yapılmıştır. Söz konusu klinik mülakat " $f(x) = x^2 + 2x - 3$ nasıl bir fonksiyondur? Bu fonksiyonun grafiğini çizmek istesen nasıl bir yol izlersin?" sorusu kapsamında gerçekleştirilmiştir. Öğrencinin yazılı olarak verilen soruyu sesli düşünmesi istenmiş ve bu süreçte araştırmacı öğrencinin düşüncelerini ve altında yatan nedenleri ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Yaklaşık 75 dakika süren klinik mülakat video kamera ile kaydedilmiştir.

Klinik mülakat yöntemi ikinci döngüdeki öğrencilerle üç farklı şekilde gerçekleştirilmiştir. İlk olarak öğretim dizisine başlamadan önce öğrencilerin fonksiyonlara ve doğrusal fonksiyonlara ilişkin ön bilgilerinin ne olduğunu anlamak için öğrencilerle bireysel klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler bu soruları (bkz. Ek 6) yanıtlarlarken onların ne düşündüklerini ve nasıl düşündüklerini daha ayrıntılı ortaya çıkarmak amacıyla klinik mülakat uygulanmıştır. Bu klinik mülakatların her biri ortalama 20 dakika sürmüştür.

Öğrenme etkinliklerinin ardından öğrencilerin ilgili kavramları anlayıp anlamadıklarını, hangi fikirlere sahip olduklarını ve öğrenmelerini değerlendirmek amacıyla ölçme ve değerlendirme etkinlikleri uygulanmıştır. İlk olarak Dünya'nın Dibi ve El Castillo etkinliklerinin tamamlanmalarının ardından öğrencilere bireysel olarak yazılı bir şekilde iki ölçme-değerlendirme etkinliği verilmiştir. Bu etkinliklerden birincisinde (bkz. Ek 7) farklı kağıt boyutlarının en ve boy uzunlukları verilerek, öğrencilerin en ve boy uzunlukları arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyonu ve kağıtların bir boyutuna bağlı olarak alanlarını gösteren fonksiyonu yazmaları istenmiştir.

İkinci etkinlikte (bkz. Ek 8), farklı kenar uzunluklarına sahip kare şeklindeki kağıtların bir kenarı boyunca 1 cm diğer kenarı boyunca 3 cm'lik şeritler kesilmesi durumunda oluşan dikdörtgensel bölgelerin kenarları arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyonu ve karenin kenar uzunluğuna bağlı olarak dikdörtgensel bölgelerin alanlarını gösteren fonksiyonu yazmaları istenmiştir. Öğrenciler birinci etkinliği tamamladıktan sonra ikinci etkinlik verilmiştir. Bu iki etkinlik boyunca süren klinik mülakatların her biri ortalama 80 dakika sürmüştür.

Ölçme-değerlendirme etkinlikleri kapsamındaki ikinci klinik mülakat uygulaması En Uzun Basketbol Atışı Etkinliği'nin tamamlanmasından sonra gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere Angry Birds oyununun tanıtımını yapan bir problem durumu verilip onların dört kuşun oyundaki domuzları vurması için atılmasıyla oluşturdukları parabolik yolun cebirsel ifadelerini yazmaları istenmiştir (bkz. Ek 9). Bu süreçte de Basketbol Etkinliğinde öğrenmeleri amaçlanan fikirleri ne şekilde

öğrendikleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu etkinlik üzerine yapılan klinik mülakatlar ortalama 50 dakika sürmüştür.

Bir sonraki klinik mülakat uygulaması, Parabolik Uçuş Etkinliği'nin tamamlanmasının ardından yazılı olarak verilerek gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin sahillerdeki güvenlik amacıyla bulunan parabolik kesitler şeklindeki zincirlerin cebirsel ifadelerini ve bir parabolün cebirsel ifadesine bağlı olarak diğer parabollerin cebirsel ifadelerini de oluşturmaları istenmiştir (bkz. Ek 10). Bu klinik mülakat ile öğrencilerin parabollerin ötelenmesine ilişkin anlamalarını değerlendirmek amaçlanmıştır. Bu klinik mülakatların her biri ortalama 40 dakika sürmüştür.

Son olarak öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin kavramsal anlamalarını ortaya çıkarmak amacıyla 20 açık uçlu sorudan oluşan kavramsal anlama testi (bkz. Ek 11) klinik mülakat yöntemi ile uygulanmıştır. Kavramsal anlama testinde ikinci dereceden fonksiyonlar ile doğrusal fonksiyonların farklılıklarına, benzerliklerine ve ilişkilerine $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun a , b ve c katsayılarının anlamlarına, ikinci dereceden fonksiyonun grafiksel ve farklı cebirsel gösterimlerine, çeşitli öteleme hareketlerine ilişkin soruların yanı sıra verilen tablo değerlerini kullanarak fonksiyon ifadesi oluşturmayı gerektiren sorulara ve bakterilerin üremesi ile ilgili gerçek yaşam bağlamı bir soruya yer verilmiştir. Öğrenciler soruları yanıtlarlarken ne düşündükleri ayrıntılı olarak ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu klinik mülakatlar her bir öğrenci için ortalama iki buçuk saat sürmüştür.

Gözlem Notları.-Gözlem, araştırmacının herhangi bir ortamda oluşan bir davranışa ilişkin ayrıntılı, kapsamlı ve zamana yayılmış bir resim elde etmek istemesi halinde kullanabileceği bir yöntemdir (Bailey, 1992'den akt. Yıldırım ve Şimşek, 2011).

Çalışma kapsamında gerçekleştirilen grup çalışmaları boyunca öğrencilerin etkinlikleri ele alma yaklaşımları, çözümleri, birbirleriyle etkileşimleri ve fikirlerinin belirlenmesi amacıyla araştırmacılar gözlemler yapmışlar ve bu gözlemler esnasında

önceden belirledikleri amaçlar ve tahminler doğrultusunda gözlem notları almışlardır. Araştırmacılar sınıf çalışmaları boyunca gruplar arası dolaşarak etkinliklere ve öğrencilerin anlamalarına ilişkin belirledikleri kritik durumları not almışlardır.

Araştırmanın pilot uygulaması kapsamında gerçekleştirilen uygulamalarda gözlemlerin odak noktası etkinliğin yapısının öğrencilerin anlamalarını ne ölçüde destekleyeceği olmuştur. Bu bağlamda söz konusu gözlemler ile etkinlikte yer verilen ifadelerin anlaşılabilirliğine, etkinliğe gömülen soruların öğrencilerden beklenen zihinsel eylemleri tetikleyip tetiklemediğine ve yeniden düzenlemesinin gerekli olup olmadığına dikkat edilmiştir.

Birinci döngü kapsamındaki gözlemler ile etkinliklerde yapılan değişikliklerin öğretim sürecindeki amaçlara ulaşmayı destekleyip desteklemediğini, tüm süreçte revize edilmesi gereken kısımların olup olmadığını, varsayımsal öğrenme sürecinin planlandığı doğrultuda ilerleyip ilerlemediğini, öğretim dizisinin onuncu sınıf öğrencilerinin zihinsel eylemlerini tetikleyip tetiklemediğini ve etkinliklerdeki soruların öğrencilerin çalışmalarını destekleyip desteklemediğini belirlemek amaçlanmıştır.

İkinci döngüdeki gerçekleştirilen gözlemler boyunca öğrencilerin bireysel olarak düşünceleri ortaya çıkarılmaya çalışılmış, öğrencilerin tüm süreçteki fikirlerinin kendi içerisinde tutarlılığı ve yapılan değişikliklerin varsayımsal öğrenme yolları doğrultusunda uygunluğunun belirlenmesi amaçlanmıştır.

Yansıtıcı Günlükler.-Uygulamanın ikinci döngüsünde öğrencilerden gerçekleştirdikleri süreci her yönüyle değerlendirmeleri için yansıtıcı günlükler yazmaları istenmiştir. İki öğrencinin çalışma yaptıkları her günün ardından bireysel olarak yansıtıcı günlük yazmaları istenmiştir. Öğrenciler yansıtıcı günlüklerini evlerinde A4 kağıdına yazarak bir sonraki çalışma gününde teslim etmişlerdir.

Öğrenciler yansıtıcı günlükler yoluyla matematiksel modelleme etkinliklerine, sınıf içerisinde gerçekleştirilen etkileşimlere ve arkadaşlarıyla katıldıkları öğrenme

süreçlerine ilişkin edindikleri kazanımlarını ve fikirlerini yazarak bilişsel, duyuşsal ve sosyal yönlerden araştırmacılara dönütler vermişlerdir. Öğrencilerin yansıtıcı günlükleri taranarak bilgisayar ortamına aktarılmış ve çalışmanın diğer verilerinden elde edilen bulgulara destek olarak yararlanılmıştır.

Veri Çözümleme Teknikleri

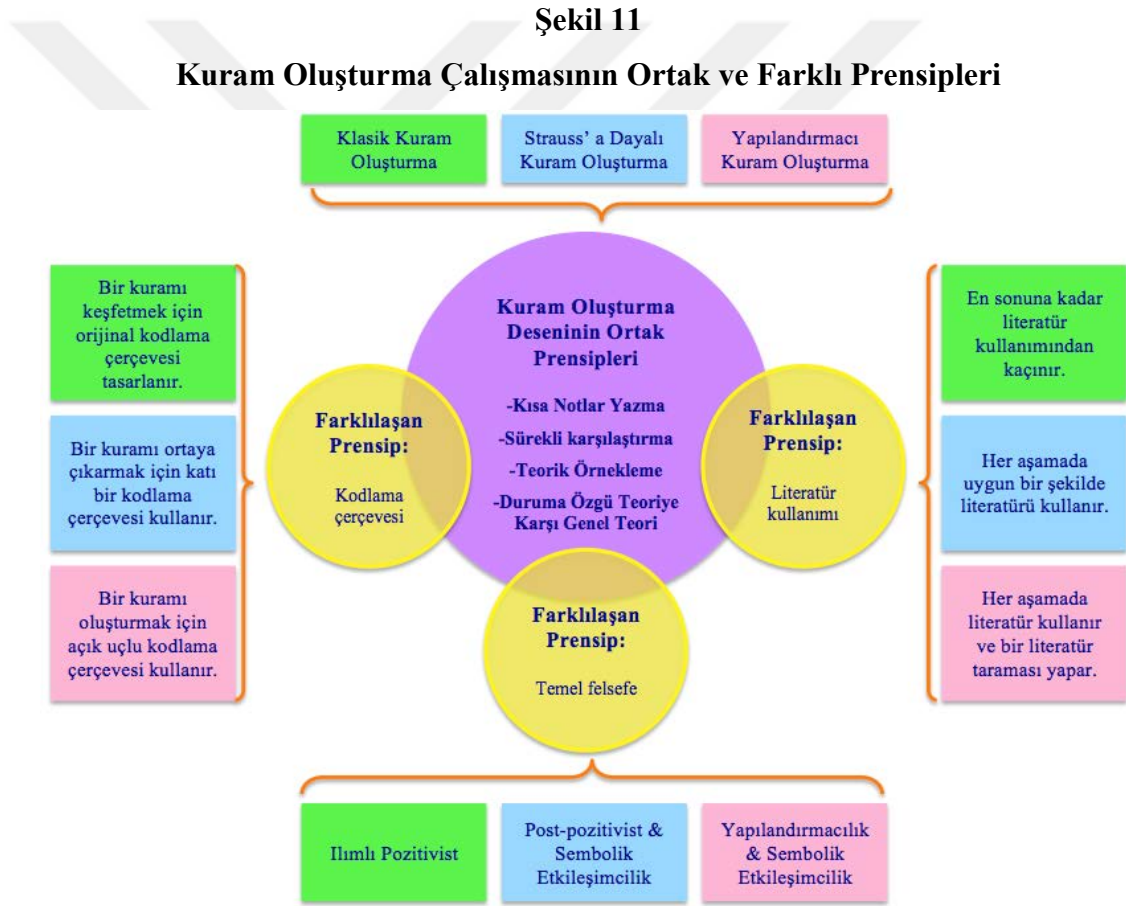
Onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonların öğretime yönelik tasarlanan öğretim dizisi boyunca gerçekleştirdikleri zihinsel eylemleri belirlemek ve ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin anlamalarının modellerini ortaya koymak amaçlandığı için elde edilen veriler kuram oluşturma deseni yardımıyla analiz edilmiştir.

Kuram oluşturma sistematik olarak toplanmış ve analiz edilmiş verilerde gömülü olan teorinin geliştirilmesi yaklaşımıdır (Strauss ve Corbin, 1994). Hem “neden” sorularıyla hem de “ne” ve “nasıl” sorularıyla ilgilenen ve uzun bir geçmişi bulunan (Charmaz, 2008a) kuram oluşturma desenini sosyolog olan Barney Glaser ve Anselm Strauss sosyal süreçlerin teorik açıklamalarını oluşturmak için ortaya koymuşlardır (Strauss ve Corbin, 1998). Kuram oluşturma deseni uygulamaları

- veri toplama ve analizinin eş zamanlı gerçekleştirilmesi,
- önceden ortaya koyulan hipotezler yerine verilerden analitik kodların ve kategorilerin oluşturulması,
- analizin her aşaması boyunca karşılaştırmalar yapmayı içeren sürekli karşılaştırmalı yöntemin kullanılması,
- veri toplama ve analiz sürecinin her aşaması boyunca teori gelişiminin ilerletilmesi,
- kategorileri ayrıştırılandırarak, özelliklerini belirlemek, kategoriler arasındaki ilişkileri tanımlamak ve boşlukları belirlemek için kısa notların yazılması,
- popülasyon temsil edilebilirliği yerine teori oluşturma amacıyla örneklem belirlenmesi,
- bağımsız analizin ardından alanyazın taramasının yapılması aşamalarını

içermektedir (Glaser ve Strauss (1967)'den akt. Charmaz, 2006).

Kuram oluşturma deseni Klasik Kuram Oluşturma (Glaser ve Strauss, 1967), Strauss'a Dayalı (Straussian) Kuram Oluşturma (Strauss ve Corbin, 1990) ve Yapılandırmacı Kuram Oluşturma (Charmaz, 2000) olacak şekilde ayrılmakta ve orijinal yöntemsel tekniklerin izlerini devam ettirmelerine karşın kodlama yöntemi, felsefik bakış açısı ve alanyazın kullanım yönleriyle birbirlerinden farklılaşmaktadırlar (Kenny ve Fourie, 2015). Kenny ve Fourie (2015) bu desenleri aşağıdaki gibi şematize etmişlerdir (bkz. Şekil 11).



Şekil 11'de görüldüğü gibi kuram oluşturma deseninde kısa notlar alma, sürekli karşılaştırma, teorik örnekleme ve duruma özgü teoriye karşı genel teori temel prensipler olarak ifade edilmektedir.

Kısa notlar alma, kuram oluşturma deseninin yöntemsel uygulamaları ve prensipleri için gerekli olup araştırmacının verileri teoriye dönüştürdüğü aşama boyunca damıtma süreci yani yöntemsel bir bağlantıdır (Lempert, 2007). Kuram oluşturma deseninde kısa notlara ilişkin (1) sınıflamak ve saklamak kısa notları isimlendirme, (2) tüm araştırma süreci boyunca kısa notlar alma, (3) verilerde bulunan özellikleriyle kodları ve kategorileri tanımlama, (4) kodların ya da kategorilerin ortaya çıkması, tekrarlanması ve değişmesi halindeki şartları betimleme, (5) kodu ya da kategoriye diğer kodlarla ya da kategorilerle kıyaslama, (6) kodun ya da kategorinin türetildiği verileri kısa notlara ekleme, (7) kodun ya da kategorinin sonuçlarını özetleme ve (8) verilerdeki boşlukları not etme ve ilgili çıkarımlarda bulunma gibi prensiplere vurgu yapılmaktadır (Charmaz,2008b).

Sürekli karşılaştırma verilerle verileri, verilerle kategorileri, kategorilerle kategorileri ve kategorilerle kavramları çıkarımsal karşılaştırma ile art arda daha soyut kavramları ve teorileri oluşturan analiz metodudur (Bryant ve Charmaz, 2007). Glaser ve Holton (2004) sistematik ve belirgin kodlama ve analitik süreçler yoluyla teori üretmeyi sağlayan sürekli karşılaştırma sürecinin üç tür karşılaştırmayı içerdiğini belirtmektedirler. Bu süreci şu şekilde açıklamaktadırlar: Temel benzerliği ve bu benzerliğin değişen koşullarını oluşturmak için durumlar durumlarla karşılaştırılır. Benzerlik ve şartlar oluşturulan kavramlar ve hipotezler haline gelir. Sonrasında, kavramlar yeni teorik özelliklerini oluşturmak ve yeni hipotezler üretmek amacıyla daha çok durumla karşılaştırılır. Amaç, kavramların özelliklerinin teorik ayrıntılandırılması, doyumsamaya ulaşma ve kavramların doğrulanması ve yoğunlaştırılmasıdır. Son olarak, kavramlar kavramlarla karşılaştırılır. Bu açıklamalar doğrultusunda sürekli karşılaştırma prensibinden kuram oluşturma deseninin tüm sürecinde yararlanıldığı ifade edilebilir. Tez çalışmasında öğrencilerin her bir etkinlikteki öğretim deneylerinde gerçekleştirdikleri nicel operasyonlar ve bu operasyonlar yoluyla oluşturdıkları çokluklar sürekli olarak birbiriyle karşılaştırılmıştır. Belirli kategoriler altında ele alınan çokluklar birbiriyle ilişkilendirilerek öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin zihinsel modelleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Glaser ve Strauss (1967) karşılaştırmalı analizin duruma özgü ve genel teori olmak üzere iki teori üretmek için kullanılabileceğini ifade etmektedirler. Duruma özgü teorinin deneysel araştırma alanı için ve aynı alan içerisindeki gruplar arasında karşılaştırmalı analiz yapılarak geliştirildiğini belirtmektedirler. Buna karşın, genel teorinin kavramsal sosyolojik alan için ve genel alan içindeki farklı türdeki durumlarda karşılaştırmalı analiz yapılarak geliştirildiğini dile getirmektedirler. Genel teori duruma özgü bir teoriden üretilen temel kategorinin genel göstergeleri ile ilgilidir (Glaser, 2007). Tez çalışmasında aynı sınıf ortamında farklı öğrenci gruplarının zihinsel eylemleri karşılaştırılarak nicel muhakemeleri ortaya çıkarılmaya çalışmış ve duruma özgü sonuçlar ortaya çıkarılmıştır. Sonrasında bu sonuçlar başka bir öğrenci grubunun etkinlikler boyunca gerçekleştirdikleri zihinsel eylemleri ile karşılaştırılarak onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonu kavramsal öğrenme süreçlerindeki zihinsel eylemlerinin modelleri oluşturulmuştur.

Teorik örnekleme ise teorik kategorilerin gelişimi için verilerin seçilmesi yöntemidir (Charmaz, 2008b). Amacı kategorilerin açıklanmasına yardımcı olacak verilerin elde edilmesi olan teorik örnekleme analizin kavramsal ve teorik gelişimine imkan vermektedir (Charmaz, 2006). Nicel araştırmacılar örnekleme ile ilgili evrene ilişkin çıkarımlar yapmayı hedeflerlerken, kuram oluşturma deseninden yararlananlar veriler ile ortaya çıkan teorileri ilişkilendirmeyi hedeflemektedirler (Charmaz, 2006). Araştırmacılar verilerin olası tüm teorik anlamalarının göz önüne alarak, geçici yorumlamalar yapmakta ve sonrasında oluşturdukları kategorileri kontrol etmek ve revize etmek için daha fazla veri toplamaktadırlar (Charmaz, 2008b). Teorik örneklemenin bu süreci doyum noktasına ulaşana kadar devam etmektedir (Kenny ve Fourie, 2015). Tez çalışmasında farklı katılımcılar üzerinde çalışılarak ortaya koyulan zihinsel modellerin farklı verilerle desteklenmesi sağlanmıştır. Farklı liselerden farklı öğrenciler oluşturulan modelin geçerli olmasını artmıştır.

Doktora tez çalışmasında bu perspektiflerle birlikte yapılandırmacılık bilgi kuramına dayanan ve açık uçlu kodlama çerçevesiyle bir kuram “oluşturma” amacı taşıyan Charmaz’ın (2000) ortaya koyduğu Yapılandırmacı Kuram Oluşturma deseni göz önünde bulundurulmuştur. Çünkü diğer iki bakış açısıyla karşılaştırıldığında,

yorumlayıcı bir sürece vurgu yapmakta ve ilgilenilen durumların içeriği araştırmayı ve analizin yönünü şekillendirmektedir (Charmaz, 2008c). Kuram oluşturma sürecinde ilk analitik bakış kodlama sürecine götürmekte ve araştırmacılar verileri topladıkça kodlama yapmaktadırlar (Charmaz, 2006). Charmaz (2008b) kuram oluşturmadaki kodlama sürecini ayrıntılandırmaktadırlar (bkz. Şekil 12).

Şekil 12

Kuram Oluşturma Deseninde Kodlama Süreci (Charmaz, 2008b)



Araştırmacılar ilk kodlamayı olayları karşılaştırarak ya da kelime kelime, satır satır ya da paragraf paragraf kodlayarak yürütmektedirler. Charmaz (2008b) bu süreçte ortaya çıkarma, tanımla, hissetme gibi isim-fiillerle kodlama yapmanın verilerin bir kısmında gerçekleşenleri tanımlamaya yardımcı olacağını ifade etmektedir. Ek olarak, “canlı kod” olarak ifade ettiği katılımcıların doğrudan ifadelerini içeren kodların katılımcıların anlamalarını ve ortaya çıkan eylemleri açıklamada araştırmacılara destek olacağını açıklamaktadır. Bu ilk kodlamanın ardından araştırmacılar odak ya da seçici kodlamayı gerçekleştirmektedirler. Durumu en iyi şekilde açıklayan ya da yorumlayan şeyleri değerlendirmek için odak kodları ayırt etmektedirler. Bu kodları teorik örnekleme, teorik doyum ve kısa notlar yazma ile geliştirmektedirler. Bu süreçlerin ardından bir kuram oluşturma gibi verilere dayalı elde ettikleri sonuçları ortaya koymaktadırlar.

Çalışmanın Veri Çözümleme Süreci.-Doktora tez çalışmasında gerçekleştirilen veri analiz sürecinde veri toplama süreci ile eş zamanlı bir şekilde sürekli karşılaştırmalı olarak “devam eden analizler” yapılmıştır. Tüm süreç içerisinde yapılandırılmamış bir şekilde devam eden bu analizlerde öğrenci anlamaları bağlamında etkinliklere, ortaya çıkan ya da çıkması beklenip çıkmayan çokluklara ve nicel operasyonlara odaklanmış ve bu doğrultuda veri toplama sürecinin de şekillenmesine fırsat oluşturulmuştur.

Kuram oluşturma desenine dayanan bir analiz sürecinde bir diğer analiz ise geriye dönük analizler olarak ortaya ckmıştır. Bu analiz sürecine yn verebilmek için tüm ğretim deneyleri ve klinik mülakatlar birebir yazıya aktarılarak transkript metinleri oluşturulmuştur. Buna ek olarak, öğrencilerin yazılı yanıtları taranarak bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Steffe (2002) ğretim deneylerinde kamera kaydına alınan ve kaydedilen her bir ğretim sürecinin ğretim deneyinin ardından geriye dönük olarak incelendiğini vurgulamaktadır. Geriye dönük analizlerle ğretim deneylerindeki mikro tasarı döngülerinden elde edilenlere dayalı olarak geliştirilmiş ğretim teorisinin yeniden yapılandırılması amaçlanmaktadır (Gravemeijer ve van Eerde, 2009).

Çalışma kapsamında birinci ve ikinci döngülerin sonunda öğrencilerin nicel muhakemeleri bağlamında geriye dönük analizler gerçekleştirilmiştir. Geriye dönük analizlerle öğrencilerin anlamaları ayrıntılandırılmaya çalışılmıştır. Öğrenci anlamaları doğrultusunda çalışmanın tasarımı aşamasında ortaya koyulan varsayımsal öğrenme yolu revize edilmiştir. Ek olarak varsayımsal olarak belirlen öğrencilerin öğrenme süreçlerinin öğrencilerin etkinlikler boyunca ortaya ckan düşüncelerine ve zihinsel eylemlerine dayalı olarak kapsamlı bir şekilde açıklamak amaçlanmıştır. Bu süreçte ilk olarak öğrencilerin çokluklara değindikleri, çokluklara ulaşmalarını tetikleyen söylemlerin yer aldığı ya da nicel operasyonları gerçekleştirmelerini sağlayan etkileşimlerin olduğu transkriptteki bölümleri belirlenmiştir. Belirlenen bu transkript bölümleri ilk olarak zihinsel eylemler açısından sürekli karşılaştırılarak açık kodlama yöntemiyle analiz edilmiştir. Tüm transkript incelendikten sonra her biri ayrıntılı olarak nicel muhakeme bağlamında odak kodlama ile analiz edilmiş ve her transkript bölümü karşılaştırılarak öğrencilerin muhakemelerine ilişkin notlar alınmıştır. Bu analizler tablolar halinde düzenlenmiştir. Tablo 7’de analiz sürecinden bir kesit gösterilmektedir.

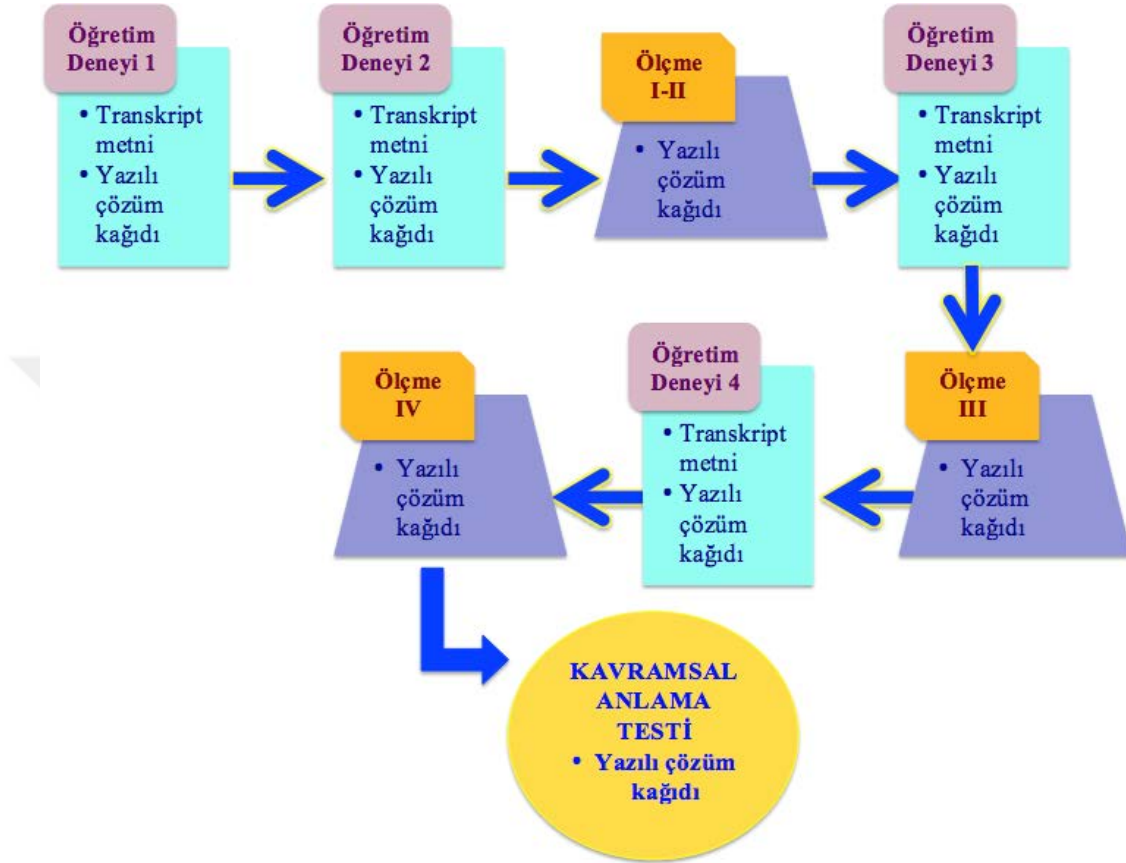
Tablo 7
Geriye Dönük Analiz Sürecinden Bir Kesit

Transkript Bölümü	Ortaya Çıkan Çokluklar	Gerçekleştirilen Nicel Operasyonlar	Genel Değerlendirme
1 Alp: x bir artarken y 'nin 2 artış miktarı gittikçe 3 düşüyor, şurada sıfır 4 oluyor [parabolün tepe 5 noktasını gösteriyor.] 6 şurada sıfırdan aşağıya 7 oluyor, düşmeye 8 başlıyor, o zaman 9 başladıkları ve 10 bitirdikleri nokta aynı 11 ve x in miktarı aynı 12 olunca direkt simetriği 13 oluyor, aynı miktarda 14 artıyor, aynı miktarda 15 azalıyor.	• Değişim miktarı • Değişim oranı • Nokta • Tepe noktası	• Çarpımsal karşılaştırma • Toplamsal karşılaştırma	Parabol üzerindeki iki nokta arasındaki y değişimleri ile x değişimleri çarpımsal olarak karşılaştırıyor ve iki değişim oranının miktarını toplamsal karşılaştırarak simetri çokluğuna ulaşıyor.

İlk döngü süresince toplanan verilerin geriye dönük analiz aşamasında ele alınan analiz birimleri gerçekleştirilen öğretim deneyleri boyunca öğrencilerin konuşmalarını içeren transkript metinleri ve grupların yazılı çözüm kağıtları, her bir öğretim deneyinin ardından öğrencilere verilen ölçme ve değerlendirme amaçlı etkinliklere yönelik öğrencilerin verdikleri yazılı çözüm kağıtları ve öğretim dizisinin sonunda uygulanan kavramsal anlama testine verdikleri yazılı çözüm kağıtları olarak belirlenmiştir. Araştırmacı gözlem notları ve öğrencilerin yansıtıcı günlükleri bu analizlerin sonuçlarına destek olarak yararlanılmıştır. Birinci döngüde elde edilen verilerin geriye dönük analiz akış şeması Şekil 13'de gösterilmektedir.

Şekil 13

**Birinci Döngüdeki Öğrenci Anlamalarının Nicel Muhakemeleri Bağlamında
Geriye Dönük Analiz Akış Şeması**

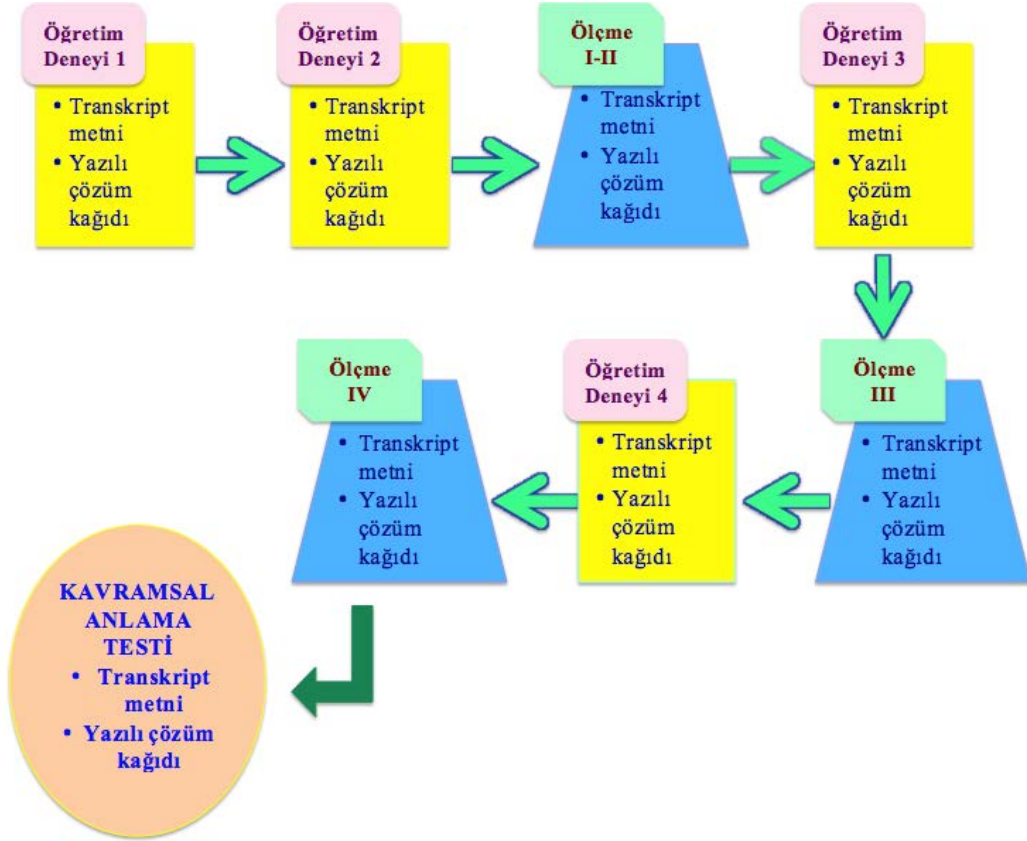


İkinci döngü kapsamında toplanan verilerin geriye dönük analiz sürecinde analiz birimleri gerçekleştirilen öğretim deneyleri boyunca öğrencilerin konuşmalarını içeren transkript metinleri ve yazılı çözüm kağıtları, her bir öğretim deneyinin ardından öğrencilere verilen değerlendirme amaçlı etkinliklere yönelik klinik mülakatların transkript metinleri ve öğrencilerin verdikleri yazılı çözüm kağıtları, ve öğretim dizisinin sonunda uygulanan kavramsal anlama testine verdikleri yazılı çözüm kağıtları ve bu sürece ait transkript metinleri olarak belirlenmiştir. İkinci döngüde elde edilen verilerin geriye dönük analiz akış şeması Şekil 14’de gösterilmektedir.

Şekil 14

İkinci Döngüdeki Öğrenci Anlamalarının Nicel Muhakemeleri Bağlamında

Geriye Dönük Analiz Akış Şeması



Kavramsal Anlama Testinin Analizi.-Kavramsal anlama testinin pilot uygulamasından elde edilen sonuçlar ve ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin alanyazın dikkate alınarak rubrik oluşturulmuştur. Kavramsal anlama testindeki yirmi soru beş farklı kategoriye ayrılmıştır. İlk kategori (bkz. Ek 12) genel fonksiyonlara, doğrusal fonksiyonlara ve ikinci dereceden fonksiyonlara ve her birinin kendine özgü özelliklerine, birbirleriyle ilişkilerine, farklı gösterimlerine ilişkin anlamaları gerektiren soruları içermiştir. İkinci kategoride (bkz. Ek 13), doğrusal fonksiyonların ve ikinci dereceden fonksiyonların değişim miktarlarını yorumlamayı gerektiren, üçüncü kategori (bkz. Ek 14) ikinci dereceden fonksiyonların tepe noktasına ve simetri eksenine ilişkin anlamaları gerektiren, dördüncü kategori (bkz. Ek 15) ikinci dereceden fonksiyonların katsayılarının anlamlarını bilmeyi gerektiren soruları içermiştir. Beşinci kategoride (bkz. Ek 16) ise parabolün ötelenmesine ilişkin

yorumlamaları gerektiren sorulara yer verilmiştir. 4 puanlı rubrik kapsamındaki ölçütler doğrultusunda öğrencilerin yanıtları analiz edilmiştir.

Araştırmanın Geçerliliği ve Güvenirliği

Araştırmacıların ve uygulamacıların işbirliğiyle gerçek ortamlarda yinelemeli olarak yürütülen tasarım tabanlı araştırma yapmak oldukça zordur ve dikkatli bir araştırma tasarımı gerektirmektedir (Plomp, 2010). McKenney, Nieveen ve van den Akker (2006) tasarım tabanlı araştırmayı yürütürken akademik titizliği sağlamak için ifade ettikleri bazı yönergelerin inandırıcı, güvenilir ve mantıklı tasarım ilkeleri oluşturmada yardımcı olacağını açıklamaktadırlar:

- Kavramsal çerçevenin açıklanması
- Uyumlu çalışma tasarımının yapılması
- Çeşitleme
- Tümevarımsal ve tümdengelsel veri analizi
- Ayrıntılı açıklama
- Katılımcı kontrolü

Araştırmacılar kavramsal çerçeveyi ayrıntılı bir şekilde açıklamanın başka araştırmacılara analitik genellemeler yapma imkanı vereceğini başka bir deyişle de çalışmanın dış geçerliğini destekleyeceğini belirtmişlerdir. Tez çalışmasının kuramsal çerçevesi kapsamında araştırmanın tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi aşamalarında temel alınan felsefe, teoriler ve ilkeler ayrıntılı olarak ortaya koyulmuş ve dayanak kabul edilen farklı yapıların birbiriyle ilişkisi açıklanmıştır. Tasarım tabanlı araştırmalarda tasarlanan öğretim dizisi çalışma grubundaki öğrencilerin düşüncelerine göre değerlendirilip yorumlandığı için çalışmanın genellenebilirliği konusunda sınırlılıkları bulunmaktadır. Bu bağlamda tez çalışmasında yapılan ayrıntılı açıklamalar sonuçların hangi durumlara genellebileceğine, hangi bağlamalarda ve ortamlarda yorumlanabileceğine ilişkin fikirler sunmuştur.

McKenney, Nieveen ve van den Akker (2006) çalışmada önceki araştırmalar, teoriler, araştırma soruları, araştırmanın tasarımı, veri analizi ve sonuçları arasındaki açık ve güçlü ilişkilerin gösterilmesi gerektiğini ifade etmektedirler. Tez çalışmasında

ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin alanyazında yapılan vurgunun öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları kavramsal anlamalarını destekleyecek bir öğretim dizisi boşluğu olduğu ayrıntılı ortaya koyulmuştur. Dolayısıyla araştırmada yanıt aranacak problemlerin var olan eksiklikleri gidermeye yönelik olduğu kanıtlanmıştır. Bu amaçlarla uygulanacak yöntemin tasarım tabanlı araştırma olmasının gerekçesi yeni bir öğretim modeli ve etkinlikleri ortaya koyma olduğu açıkça dile getirilmiştir. Çalışmadaki süreçlerin birbirine nasıl bağlı olduğunun ve uyumlu olduğunun ifade edilmesiyle birlikte bir gereklilik olarak ifade edilen çalışmaya yönelik ayrıntılı açıklamaların yapılmasıyla tez çalışmasının hem iç geçerliği hem de dış geçerliği artırılmaya çalışılmıştır.

Cobb ve diğer. (2003) yapılan geriye dönük analizlerin titizlikle ve deneysel olarak temellendirilmiş iddialarla sonuçlanmasında çoklu veri kaynaklarının önemli olduğunu ifade etmektedirler. Tez çalışması kapsamında öğretim deneyleri boyunca öğrencilerin yazılı çalışmaları, video kamera kayıtları, öğretim deneyleri sonrasında gerçekleştirilen klinik mülakatlar, öğrencilerin yansıtıcı günlükleri gibi farklı veri kaynaklarının kullanılması bulguların geçerliğini desteklemiştir.

Ek olarak, çalışmada gerçekleştirilen döngüsel süreçlerde farklı gruplarla çalışılması ve sonuçların farklı gruplardan elde edilen verilerin analizi ile ortaya koyulması araştırmanın geçerliğini ve güvenilirliği arttıran bir etken olmuştur.

Araştırmacının Rolü

Doktora tez çalışmasında araştırmacı ilk olarak yaptığı literatür çalışması doğrultusunda ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin kavramsal analiz gerçekleştirmiştir. Tasarı aşamasında matematik öğretmenleri, bir on birinci sınıf öğrencisi ve matematik öğretmeni adayları ile görüşmeler gerçekleştirmiştir. Bu çalışmalar doğrultusunda tez danışmanının rehberliğinde varsayımsal öğrenme sürecini belirlemiştir.

Uygulama aşamasında ilk olarak, ilk döngü kapsamındaki öğrencilerle çalışmak için matematik öğretmeni ve okul yönetimi ile görüşülmüş ve Milli Eğitim

Bakanlığından gerekli izinler alınmıştır. Çalışmanın başında öğrencilere sürece yönelik bilgilendirmeler yaparak onların motivasyonları arttırılmaya çalışılmıştır. Araştırmacı uygulama boyunca her hafta ders saatinden önce sınıfa gelerek çalışma öncesinde sınıf ortamını grupların birbirinden ayrı olacak ve her bir grubun kendi içerisinde etkili çalışabilecekleri şekilde düzenlemiş ve beş grup için kameraları yerleştirmiştir. Gerçekleştirilen öğretim deneylerinde grupların çalışmalarını gözlemlemiş ve gözlem notları almıştır. Hem öğrencilerin düşüncelerini anlamak için hem de öğrenmelerini desteklemek için gerektiğinde müdahaleci sorular sormuştur. Bu süreçte tez danışmanı da araştırmacı-gözlemci olarak sınıfta bulunmuş, öğrencilerin düşüncelerini ayrıntılandırmak için öğrencilere sorular sormuş ve araştırmacıya destek sağlamıştır.

İkinci döngü için de öğrencilerin matematik öğretmenleri ve okul yönetimi ile görüşülmüş ve öğrencilerle çalışmaların yürütülmesi için Milli Eğitim Bakanlığından gerekli izinler alınmıştır. Sonrasında araştırmacı öğrencilerle çalışma zamanlarına yönelik planlamalar yapmıştır. Uygulama süreci boyunca çalışmalar başlamadan önce kamerayı kuran araştırmacı çalışma süreçleri boyunca öğrencilerin fikirlerini anlamaya çalışmış ve süreç boyunca iki öğrencinin birbirleriyle etkileşim içinde çalışmalarını desteklemiştir. Gerektiğinde öğrenmelerini destekleyecek sorular yöneltilmiş ve öğrencileri hem etkinliğe yönelik hem de birbirlerinin fikirlerine yönelik sorgulamalar yapmaya itmiştir. Bunlara ek olarak, tüm tasarım tabanlı araştırma sürecindeki video kamera kayıtlarını birebir çözümlemiş, öğrenci yazılı çalışmalarını bilgisayar ortamına aktarmıştır.

Çalışmada toplanan verilerin analizi araştırmacıdan bağımsız olarak tez danışmanı tarafından da yapılarak kodlamalar karşılaştırılmıştır. Böylece araştırmanın geçerliği arttırılmaya çalışılmıştır.

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde toplanan verilerin analizi sonucunda elde edilen bulgulara alt problemler doğrultusunda yer verilmektedir. Bu amaçla birinci alt probleme yönelik bulgular kapsamında ilk olarak sınıf ortamında gerçekleştirilen öğretim dizisi boyunca onuncu sınıf öğrencilerinin gerçekleştirdikleri zihinsel eylemlere ilişkin bulgular özetlenmektedir. Ardından ikinci döngü kapsamında iki onuncu sınıf öğrencisinin etkinlikler boyunca gerçekleştirdikleri zihinsel eylemlere ilişkin bulgular daha kapsamlı olarak sunulmaktadır. İkinci döngüde onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin zihinsel eylemlerini ve anlamalarını daha iyi açıklamak amacıyla öğretim deneylerine ek olarak klinik mülakatlar da gerçekleştirildiği için elde edilen veriler birinci döngüdeki öğrencilerden elde edilen verileri ayrıntılı hale getirmektedir. İkinci alt probleme yönelik bulgular kapsamında ise tasarım tabanlı araştırma süreciyle geliştirilen ikinci dereceden fonksiyonların kavramsal öğrenilmesini destekleyecek öğretim dizisi ayrıntılı açıklanmaktadır.

I. Alt Probleme Yönelik Bulgular ve Yorumlar

İkinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesine ilişkin sınıf ortamında gerçekleştirilen öğretim deneyleri boyunca etkinlikler üzerine çalışan onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin anlamaları etkinlikler bağlamında ele alınmış ve öğrenciler etkinlikler üzerine çalışırken ortaya çıkan zihinsel eylemler tablolar halinde özetlenmiştir. Ortaya çıkan zihinsel eylemler öğrencilerin çalışmaları boyunca alınan kamera kayıtlarının transkriptlerden ve çalışma kağıtlarından alınan kesitlerle desteklenmiştir. Sonrasında her etkinlikte öğrencilerin karşılaştıkları

güçlükler sunulmuştur. Bu güçlükler öğretim dizisinin revize edilmesinde yol gösterici olmuştur.

İlk döngü ile ilgili bulguların sunulmasının ardından iki onuncu sınıf öğrencisinin ilk olarak öğretim deneyleri öncesinde fonksiyonlara ve doğrusal fonksiyonlara ilişkin var olan ön bilgilerini ortaya çıkarmak amacıyla gerçekleştirilen klinik mülakatlardan elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Sonrasında öğretim deneyleri boyunca etkinlikler üzerine çalışan iki onuncu sınıf öğrencisinin her bir öğretim deneyi boyunca sahip oldukları anlamaları ortaya çıkarılmıştır. Devamında öğrenme etkinliklerinin ardından yapılan ölçme-değerlendirme etkinlikleri üzerine bireysel olarak gerçekleştirilen klinik mülakatlarda elde edilen öğrenci anlamaları sunulmuştur. Bu aşamalarda öğrencilerin etkinlikler üzerine çalışmaları boyunca ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin gerçekleştirdikleri zihinsel eylemleri ayrıntılı açıklanmıştır. İki öğrencinin zihinsel eylemlerine ilişkin bulguların daha iyi anlaşılmasını sağlamak için öğrencilerin etkinliklere yönelik yazılı çözümlerinden ve çalışmaları sırasındaki kamera kayıtlarının transkriptlerinden alınan kesitlerle kanıtlar sunulmuştur. Öğrenci konuşmalarını gösteren kesitler satır satır numaralandırılarak verilmiş ve ardından verilen öğrenci ifadeleri metin içerisinde satır numaraları yardımıyla gösterilerek yorumlanmıştır. Örneğin [1,6] şeklinde ifade edilen aralık konuşma metninde birinci satır ile altıncı satır arasındaki öğrenci ifadelerini kapsamıştır.

Birinci Döngü Kapsamında Öğrencilerin Gerçekleştirdikleri Zihinsel Eylemlere Yönelik Bulgular

Bu bölümde, öğrencilerin üzerinde çalıştıkları dört etkinlik boyunca ortaya çıkan zihinsel eylemleri tablolar halinde sunulmuş ve ilgili zihinsel eylemler transkript kesitleriyle örneklendirilmiştir. Transkript kesitlerinde “Araştırmacı 1” tez öğrencisini, “Araştırmacı 2” tez danışmanına karşılık gelmiştir. Zihinsel eylemlerle birlikte öğrencilerin bu süreçlerde yaşadıkları güçlüklerle de yer verilmiştir.

Dünya’nın Dibi Etkinliği Kapsamında Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler.-

Dünya’nın Dibi etkinliği öğrencilerin doğrusal fonksiyona ilişkin eksik anlamaları

varsa onları ortadan kaldırmak amacıyla gerçekleştirilmiştir. Bu etkinlik öğrencilerin uygulama aşamasında üzerinde çalıştıkları ilk mantıksal-matematiksel öğrenme etkinliği olmasına karşın öğrenciler yüksek motivasyonla çalışmışlardır. Bu etkinlik kapsamında grupların ortaya çıkan zihinsel eylemleri Tablo 8’de verilmektedir.

Tablo 8
Birinci Döngü Aşamasında Dünya’nın Dibi Etkinliğinde Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler

Grupların Zihinsel Eylemleri	Grup Numaraları
Değişim yönünü belirleme	G1, G2, G3, G4, G5
İki çokluğu eşleme	G1, G2, G3, G4, G5
Eş zamanlı değişim	G1, G2, G3, G4, G5
Çoklukları bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile eşleme	G1, G2, G3, G4, G5
Değişim miktarlarını toplamsal karşılaştırma	G3, G4, G5
Değişim miktarlarını çarpımsal karşılaştırma	G3, G4, G5
İki çokluğun değişim oranının sabit olduğunu belirleme	G3, G4, G5
Çoklukları analitik düzlemin eksenleri ile eşleme	G1, G2, G3, G4, G5
Çoklukların değerlerini eşleyerek analitik düzlemde noktalar oluşturma	G1, G2, G3, G4, G5

Tablo 8 incelendiğinde, grupların tamamı iki çokluk arasındaki ilişkiyi incelerlerken çoklukların değişimlerinin yönünü belirlemişler ve ilişkili çoklukları birbiriyle eşlemişlerdir. Dinamik olarak değişen iki çokluğun ilişkisini incelemeye başladıklarında bir çokluk değişirken diğ erinin de eş zamanlı olarak değiştiğini ifade etmişlerdir. Eş zamanlı değişim fikri gerçek yaşam bağlamı içerisinde yer alan çoklukları incelerken doğ ası gereği ortaya çıkmıştır. İkinci gruptaki öğrenciler etkinlik kapsamında derinlik-basınç ilişkisini temsil eden grafiği çizmeye çalışırken değişimin yönünü dikkate almışlar ve eş zamanlı değişim fikrini grafiklerine yansıtmışlardır.

1	Asya:	Basınçla derinlik arasındaki ilişki.
2	Enis:	Grafiği çiziniz diyor.

3 Asya: Basınç artarsa derinlik de artar.



Öğrenciler grafik çizerlerken değişimin yönüne odaklanmışlar [3] ve analitik düzlemde x eksenini derinlik ve y eksenini basınç ile eşlemişlerdir. Öğrenciler hem sözel ifadelerinde [3] hem de grafiklerinde eş zamanlı değişim fikrini yansıtmışlardır. Bu fikir grafiksel gösterimde çoklukların değerlerini analitik düzlemin eksenlerindeki değerlerle eşlerlerken ortaya çıkmıştır [4-10]. Öğrencilerin bağlama ait fonksiyonun grafiğini çizerlerken bağlamı da yorumladıkları görülmüştür. Derinlikteki değişimle birlikte basınçta meydana gelen düzenli değişim iki çokluk arasındaki ilişkinin grafiğinin doğru olacağı fikrini vermiştir.

Bununla birlikte, üç gruptaki öğrenciler değişim miktarlarını dikkate alarak çoklukların değişim miktarlarını toplamsal ve çarpımsal olarak karşılaştırmışlardır. Üçüncü gruptaki öğrenciler tablo değerlerini yorumlarken ve bu değerler arasındaki ilişkiyi belirlemeye çalışırken değişim miktarlarını dikkate almışlardır.

1 Zeynep: Normal ortam verilerine göre oksijenin

2 çözünmesi ile basınç arasında nasıl bir ilişki

3 olduğunu düşünelim. Önce sözel ifade edelim,

4 sonra sayısal ifade ederiz zaten.

5 Furkan: Basınç arttıkça çözünürlük artacak ama nasıl

6 olacak?

7 Zeynep: [yazıyor]

8 Furkan: Ben de onu dedim ya başta, basınç artıyor

9 çözünme de artmış ama birbiri ile oranlı artmamış

10 onu bir formülle gösteremeyiz yani.

11 Zeynep: Öyle diyorsun..

12 Furkan: Dedim ya işte, burada 1'e 0,31 iken 1,3'e 0,46

13 1,5'e 0,56 yani orantılı artmamış o yüzden bunu

14 nasıl cebirsel ifade ile gösteririz bilmiyorum. O

15 Zeynep: Hiç böyle düşünmemiştim. Bence orantılı artmış

16 ya bir daha hesaplayalım. 1 atmosfer basınçta 0,31

- 17 artıyormuş, 2 atmosferde kaç artar diye
 18 hesaplayalım. 0,4 de kaç arttı.
 19 Furkan: 0,3 artışta 25 artmış 2,1 7 katı, [hesaplama
 20 yapıyor kendi] doğru oranlar doğru ama nasıl
 21 doğru biliyor musun? 1 de 0,31 1.3 de 0,46
 22 şeklinde değil. Mesela 1'den 1.3'e geçerken 0, 15
 23 artmış, 1'den 3.1 e geçtiğinde 2.1 arttığında 1.05
 24 artmış. 7 katı iken 7 katı olmuş bunu yapacağız.
 25 Zeynep: Bunu anladın mı? Ben anlamadım. Yani eklemiş
 26 üstüne diyorsun katı değil.
 27 Furkan: Kat değil, eklemeler oranlar.

Öğrenciler iki değişken arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade etmeden önce sözel olarak ifade etmenin kendilerine kolaylık sağlayacağını düşünmüşlerdir. Bu süreçte ilk olarak değişimin yönünü dikkate aldıklarını gösteren açıklamalarda bulunmuşlar [5-8]. Furkan iki değişken arasında herhangi bir kat bulamadıkları için [11-13] iki çokluk arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade edemeyeceklerini belirtmiştir [9]. Ancak Zeynep sezgisel olarak iki değişkenin orantılı olarak değiştiği fikri ile tablodaki verileri tekrar incelemeye yönelmiştir. Bu aşamada bağımlı değişkende 2 birimlik artışa karşılık bağımlı değişkende ne kadarlık bir artış olduğun sorusuna yanıt aramış ve değişim miktarlarını çarpımsal karşılaştırmıştır [16-18.]. Furkan da Zeynep'in bu fikrine dayalı olarak tablodaki değerlerin değişiminin toplamsal karşılaştırmıştır [19-24] ve böylelikle öğrenciler iki değişkenin değişimleri arasında bir ilişki olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Doğrusal fonksiyonun kavramsal öğrenilmesi için önemli olan değişim oranının sabit olduğu fikrini belirleyen gruplar da değişkenler arasındaki değişim miktarlarını toplamsal ve çarpımsal olarak karşılaştıran gruplar olmuştur. Dördüncü gruptaki öğrenciler basınç ve kandaki oksijenin çözünme miktarı arasındaki matematiksel ilişkiyi oluşturmaya çalışırken değişim yönünü dikkate almışlar ve değişim miktarlarını incelemişlerdir.

- 1 Umut: Basınç arttıkça bu da artıyor. Nasıl matematiksel
 2 olarak, şimdi biraz yarısından biraz az gibi değil
 3 Ece: 1,5'a bakalım, 1'e bakalım mesela, yarım arttığı
 4 zaman ne kadar artmış bu?
 5 Umut: 25 artmış.

- 6 Ece: 0,25 artmış
 7 Umut: Bence 1'de bir istisna vardı. Gerisi düz geliyordur
 8 mesela.
 9 Ece: Bakalım, 1,3'e bakalım.
 10 Umut: Şuradaki arasıyla [1-2], şuradaki [2-3] arasına
 11 bakalım. Burada 15 var, burada 10 var. Evet, evet
 12 1'de yine bir istisna var. Evet, evet, bitti soru bitti.
 13 Ece: Şurada mesela 2 artmış, 0,2 artmış [1-2], şurada
 14 da 0,2 artmış [2-3] değil mi, ama şurada 15,
 15 şurada 10 artmış
 16 Umut: Hayır burada 3 [1-2], bitti bitti., soru bitti.
 17 Ece: Dur, şurada 9 mu artmış, [3-4],
 18 Umut: Burada 2 ATM de 0,10 artıyor,
 19 Ece: Şuna bak. Burada 9 artmış, yani 0.9 artmış. Şunun
 20 üç katı artmış dimi.
 21 Umut: Evet, Evet yine 45
 22 Ece: Ne 45 i, 5 artmış.
 23 Umut: Ne 5i, 45 işte.
 24 Ece: Pardon.
 25 Umut: Bak burada 7, burada 35, tamam bitti, soru bitti
 26 şuan.
 27 Şimdi artık anladık. Fonksiyon gelsin şimdi. Yine
 1+ var, 1+kesin var.
 28 Ece: [yazıyor] x'in 5 katı dimi her zaman. O zaman 5x
 29 olacak, şuradaki x de basınç artış miktarı.
 30 Umut: 5 katı değil, 2'ye bölünmüş hali.
 31 Ece: Hı doğru, bekle dur.
 32 Umut: $x/2$ bence.
 33 Ece: Evet, evet, bir dakika.
 34 Umut: Çünkü bak, 0,1 arttığında, 0,05 artıyor.

Ece ve Umut ilk olarak eş zamanlı değişen iki çokluğun değişim yönünü belirlemişler ve basınç arttıkça oksijenin çözünme miktarının arttığını ifade etmişlerdir [1]. Ardından tablodaki değerleri $y = mx$ fikrine dayalı olarak incelemeye başlamışlardır [3-4]. Ancak bu fikrin üzerinde çok durmayıp değişim miktarlarını incelemeye karar vermişlerdir. Basınç değerlerinin artışına karşılık oksijenin çözünme miktarında ne kadar bir değişim olduğunu hesaplamaya çalışmışlar ve bu süreçte ilk olarak değişim miktarlarını toplamsal olarak karşılaştırmışlardır [11-17]. Değişim miktarlarının sabit olduğunu fark eden öğrenciler değişim oranını $\frac{1}{2}$ olarak hesaplamışlardır [32-36]. Bu orana dayalı olarak doğrusal fonksiyonun cebirsel ifadesini aşağıdaki gibi oluşturmuşlardır.

$$f(x) = 0,31 + \frac{x-1}{2}$$

$x = \text{Basınç}$

Öğrencilerin bu etkinlik boyunca karşılaştıkları güçlükler Tablo 9'da görülmektedir.

Tablo 9
Birinci Döngüdeki Öğrencilerin Dünya'nın Dibi Etkinliğinde Karşılaştıkları
Güçlükler

İki çokluğun değişimin miktarlarını belirlememe/belirleyememe
İki çokluğun değişim oranı belirlememe/belirleyememe
Doğrusal ilişkiyi temsil eden cebirsel ifadeyi $f(x) = mx$ olarak düşünme
Grafiği eğri olarak çizme
Fonksiyonun başlangıç noktasını grafiksel gösterimde dikkate almama
Cebirsel ifadede yer alan katsayıları anlamlandıramama
Çoklukları ve aralarındaki ilişkiyi bağlamdan bağımsız düşünme
Farklı gösterimleri ilişkilendirmeme/ilişkilendirememe

Çoklukların değişim miktarlarını irdelemeyen, değişim oranına odaklanmayan ve sabit değişim miktarını belirleyemeyen grupların bu etkinlikte iki çokluk arasındaki doğrusal ilişkiyi oluşturmada güçlükler yaşadıkları görülmüştür. Bu öğrenciler doğrusal fonksiyonun sadece $f(x) = mx$ formuna uygun olarak oluşturulabileceği düşüncesiyle bağımlı değişkenin bağımsız değişkenin doğrudan bir katı olduğu gösteren m değerini bulmaya çalışmışlardır. Bu doğrultuda ilişkiyi temsil eden grafiği doğru olarak değil eğri olarak çizmişlerdir. İkinci gruptaki öğrenciler basınç ve oksijenin çözünme miktarına ilişkin tablodaki verileri incelerlerken bu yaklaşımı sergilemişler ve doğrusal fonksiyon ilişkisini oluşturamamışlardır.

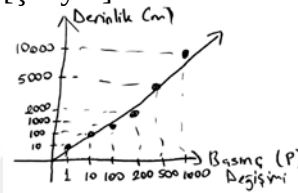
1	Asya:	Ben hepsini oranladım. Yaklaşık bir değer bulmak lazım. 100/31, 130/46, 150/56 hepsini
2		oranlayalım diye düşündüm. Bunu oranlasak
3		65/23, 75/28 [hepsini oranlayarak bir kat bulmaya
4		çalışıyor.]
5	Enis:	Direkt şöyle yapsak, olmuyor ki.

- 6 Asya: Yaklaşığı işte.
 7 Enis: Bu [0,31] bunun [1] katı gibi duruyor ya 3'te biri
 8 gibi duruyor ya, şurada durmuyor işte, [1.36-3.1
 9 kıyaslıyor] iki katı kadar duruyor.
 10 Asya: 3 kat.
 11 Enis: Bunların ortak katını bulacağız. Yani ortak
 12 bölenini
 13 Asya: 2.5 olsun. 2.5, 3 katı. 2.5 diyeyim. 3 de olabilir.
 14 Enis: Acaba parabolik bir şey olabilir mi, dimdik bir şey
 15 aramıyoruz da grafikte. Hani çünkü mesela. Şu
 16 şunun 3 katı ya üçte biri kadar. Böyle düşünelim.
 17 Şurada da iki katına yakın bir değer oluyor yani
 18 git gide eşitlenmeye başlıyor sonra geçmeye
 19 başlıyor. Hep 3 katı kadar sabit kalmıyor, şurada
 20 [sonraki diğerleri tabloda gösteriyor] iki oluyor.

Öğrenciler basınç ile oksijenin çözünme miktarı ile ilgili verilen değerleri incelerlerken hem normal ortam için hem de hiperbarik ortam için bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi $f(x) = mx$ formunda düşünerek her bir satırdaki basınç ile oksijenin çözünmesine ilişkin değerler arasında bir oran bulmaya çalışmışlardır [1-4]. Her satırdaki veriler arasında farklı bir oran çıkması sebebiyle ilişkiyi gösteren grafiğin parabolik olabileceğini ifade etmişlerdir. Bu yaklaşımları öğrencilerin bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki oranın her değer için sabit olmasının doğrusal grafik için bir gösterge olduğunu düşündüklerini göstermiştir [17-20]. Grafiğin doğrudan farklı olacağını düşünmelerine karşın ilişkinin cebirsel ifadesini $f(x) = mx$ olarak ele almışlardır. Bu ifade için m değerini oranların yaklaşık değerlerini tahmin ederek hepsini temsil edeceğini düşündükleri bir ara değer belirlemişlerdir [7-12].

Öğrencilerin bir bağlamı temsil eden farklı gösterim şekilleri arasındaki geçişi yapamadıkları görülmüştür. Grafiksel gösterimde başlangıç noktasını dikkate almama, cebirsel gösterimdeki katsayıların grafiksel gösterimde karşılıklarını ifade etmeme gibi güçlükleri ortaya çıkmıştır. Bu güçlüklerin öğrencilerin her bir gösterimi ayrı ayrı birbirleriyle ilişkilendirmeksizin incelemelerinden kaynaklandığı söylenebilir. Birinci gruptaki öğrenciler derinlik ve basınç arasındaki ilişkinin grafiğini çizerlerken cebirsel ifadeyi göz önüne almamışlardır.

- 1 Onur: Tekrar çizeceğiz grafik.
 2 Emre: Tamam da basınç ve derinlik arasında diyor, burada
 3 [tabloyu gösteriyor] bunu veriyor.
 4 Onur: Oksijenin normal ortamda hiperbarik ortamda
 5 çözünmesi
 6 Emre: Evet işte, 10 metrede azalmasını çizeceğiz, 10 yaz
 7 100 yaz 1000 yaz.
 8 Onur: 10, 20 30,100, 1000
 9 Emre: O zaman 10, 20 30 100 yaz.
 10 Onur: Basınç aşağıda mı yukarıda mı? [x eksenini ya da y
 11 eksenine mi yazacağını soruyor.]
 12 Emre: Fark etmez.
 13 Onur: [çiziyor]



Doğrusal grafiği çizerlerken derinlik için farklı değerler alarak bu derinliklere karşılık gelen basınç değerleri ile eşleme yapmışlardır [5-8]. Öğrenciler grafik çizerlerken ilk olarak derinliğe değerler atamışlar ve buna bağlı olarak basınç değerlerini bulmuş olsalar da grafiği bir fonksiyonun gösterimi olarak düşünmedikleri için bağımlı ve bağımsız değişkenleri anlamlandırmadan eksenlere rastgele yerleştirmişlerdir. Ayrıca başlangıç değeri olan (0,1) noktasını da dikkate almadan (0,0) noktasından geçecek şekilde bir başka deyişle $f(x) = mx + n$ şeklindeki fonksiyonu $f(x) = mx$ olarak düşünerek grafiği çizmişler [13-18] ve deniz seviyesini göz ardı etmişlerdir. Bu yaklaşımları öğrencilerin çoklukları ve ilişkilerini bağlamdan bağımsız bir şekilde düşündüklerini göstermiştir.

El Castillo Etkinliği Kapsamında Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler.-El Castillo etkinliğinde öğrencilerin ilk olarak farklı bağımsız değişkenlere bağlı kenar uzunluklarını temsil edecek doğrusal ilişkiyi oluşturmaları ve ardından kenar uzunluğuna ilişkin oluşturdıkları fonksiyonlardan alan fonksiyonlarına geçiş yapmaları beklenmiştir. Bu süreçte öğrenciler matematiksel modelleme sürecinde fazla zaman harcadıkları için etkinliğin ilk aşamasında motivasyon kaynaklı güçlükler yaşamışlardır. Grupların etkinlik sürecinde ortaya çıkan zihinsel eylemleri Tablo 10'da gösterilmektedir.

Tablo 10
Birinci Döngü Aşamasında El Castillo Etkinliğinde Ortaya Çıkan Zihinsel
Eylemler

	Grupların Zihinsel Eylemleri	Grup Numaraları
Kenar Uzunluğu Fonksiyonunu Oluşturma	Çoklukların değişim yönünü belirleme	G1, G2, G3, G4
	İki çokluğu eşleme	G1, G2, G3, G4, G5
	İki çokluğun eş zamanlı değişim fikrine sahip olma	G1, G2, G3, G4, G5
	Çoklukları bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile eşleme	G1, G2, G5
	Çoklukları analitik düzlemin eksenleri ile eşleme	G1, G2, G5
	Çoklukların değişim miktarlarının sabit olduğunu belirleme	G1, G2, G5
	Çoklukların değerlerini eşleyerek analitik düzlemde noktalar oluşturma	G1, G2, G3, G4, G5
Alan Fonksiyonunu Oluşturma	Çoklukların değişim yönünü belirleme	G1, G2, G3, G4, G5
	İki çokluğu eşleme	G1, G2, G3, G4, G5
	İki çokluğun eş zamanlı değişim fikrine sahip olma	G1, G2, G3, G4, G5
	Çoklukları bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile eşleme	G1, G2, G3, G4, G5
	Çoklukları analitik düzlemin eksenleri ile eşleme	G1, G2, G3, G4, G5
	Çoklukların değişim miktarlarını toplamsal karşılaştırarak sabit olmadığını belirleme	G2
	Doğrusal iki fonksiyonun çarpımı ile ikinci dereceden fonksiyon oluşturma	G1, G2, G3, G4, G5

Tablo 10 incelendiğinde, grupların hem kenar uzunluğu fonksiyonlarını hem de alan fonksiyonlarını oluşturma süreçlerinde eş zamanlı değişen çoklukları birbirleriyle eşleme, çoklukları bağımsız ve bağımlı değişkenlerle eşleme ve analitik düzlemin eksenleri ile eşleme zihinsel eylemlerini gerçekleştirdikleri görülmektedir. Gruplardan ikisi kenar uzunlukları ile ilgili fonksiyonları oluşturmamışlar ve grafiklerini çizmemişlerdir. Bu süreçte modelleme aşamasını tamamlayarak kenar uzunlukları değerlerini bulmalarının yanı sıra değişim miktarlarını incelemedikleri için fonksiyonun cebirsel ifadelerini yazamamışlardır. İkinci aşamada ise sadece bir grup alan fonksiyonunu temsil eden ikinci dereceden fonksiyon için değişim miktarlarının sabit olmadığını belirlemiştir.

- 1 Enis: Şunlar [analitik düzlemde eşlediği noktalar için]
- 2 bu kadar birbirine yakın, eşit aralıklarda değiller
- 3 uzaklıkları.
- 4 Araştırmacı 1: Neye göre eşit aralıklarda değiller?
- 5 Enis: Kareleri oldukları için aralarındaki fark gittikçe
- 6 artıyor.
- 7 Araştırmacı 1: Öyle düşünüyorsun peki o zaman nasıl olur?
- 8 Enis: O zaman azalarak artar, şöyle bir şey olur,
- 9 [eliyle eğriyi gösteriyor.]

Enis alan fonksiyonunu temsil eden grafiğin eğri olacağını belirtmiştir. Bu ifadesini gerekçelendirirken fonksiyon ifadesinin x^2 'li bir terimi içermesi sebebiyle noktaların aralarındaki farkın giderek artacağını [5-6; 8-9] açıklamıştır. Bir başka deyişle, bağımsız değişkenin değerlerindeki artış sabit iken bağımlı değişkenin değerlerindeki artışın sabit olmamasını grafiğin eğri olmasının gerekçesi olarak sunmuştur. Buna karşın, Enis alan değerlerinin artışının azalarak artacağını ifade ederek hatalı bir açıklama yapmıştır. El Castillo etkinliği kapsamında öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonun değişim miktarlarının sabit olmadığını ve değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğunu anlamlandırmaları beklenmiştir. Öğrencilerin alan fonksiyonunda değişim miktarlarına odaklanmamaları veya değişim miktarlarını yanlış yorumlamaları etkinlikte revizyona gidilmesi gerekliliğini ortaya çıkarmıştır.

Etkinlik kapsamında sunulan bağlam öğrencilere anlamlı geldiği için öğrenciler iki doğrusal fonksiyonun çarpımıyla ikinci dereceden bir fonksiyon oluşturabilmişlerdir. Sonrasında ulaştıkları fonksiyon kavramını bağlamı düşünmeksizin genelleylebilmişler ve böylelikle yansıtıcı soyutlamayı gerçekleştirmişlerdir.

- 1 Araştırmacı 1: Siz böyle bir ifade için genel bir şey söyleyebilir
- 2 misiniz?
- 3 Onur: İkinci dereceden bir fonksiyon.
- 4 Araştırmacı 1: İkinci dereceden bir fonksiyon bu, peki bu
- 5 fonksiyona nasıl ulaştınız?
- 6 Emre: Birinci dereceden fonksiyonu ikinci dereceden
- 7 fonksiyona şey yaptık.
- 8 Araştırmacı 1: Nasıl yaptınız onu?

- 9 Onur: Derece büyölterek.
 10 Araştırmacı 1: Sadece büyöttünüz mü? Ne yaptınız?
 11 Onur: Çarparak
 12 Emre: Çarptık.
 13 Araştırmacı 1: Neyi çarptınız?
 14 Onur: $(ax + b)(ax + b)$
 15 Araştırmacı 1: Gibi mi?
 16 Onur: $(ax + b)(cx + d)$
 17 Araştırmacı 1: O zaman bu sizi nereye götürüyor?
 18 Onur: İki tane birinci dereceden fonksiyonu çarptığımız
 19 zaman ikinci dereceden bir fonksiyon elde etmiş
 20 oluruz.

Öğrenciler ikinci dereceden fonksiyonu önce birinci dereceden fonksiyonun derecesinin büyölülmesi ile elde ettiklerini ifade etmişlerdir [9]. Araştırmacı dereceyi hangi işlem ile arttırdıklarını sorduğunda öğrenciler bir doğrusal fonksiyonu kendisiyle çarptıklarını cebirsel olarak açıklamışlardır [14]. Sonrasında birbirinden farklı iki doğrusal fonksiyonun çarpımıyla ikinci dereceden fonksiyon oluştuğunu cebirsel [16] ve sözel olarak [18-19] belirtmişlerdir.

Öğrencilerin bu etkinlik boyunca karşılaştıkları güçlükler Tablo 11’de gösterilmiştir.

Tablo 11
Birinci Döngüdeki Öğrencilerin El Castillo Etkinliğinde Karşılaştıkları
Güçlükler

Değişim yönünü cebirsel ifade ile ilişkilendirememe
Farklı gösterimleri ilişkilendirmeme/ilişkilendirememe
Noktasal grafiğı bir fonksiyonun grafik olarak düşünmeme
Grafiğı ve cebirsel ifadeyi bağlamdan ve bağlamdaki çokluklardan bağımsız düşünme
İkinci dereceden fonksiyon için değişim miktarının değişiminin sabit olduğunu belirmeme/belirleyememe
Bağımlı değişken aynı çokluk ile eşlenirken bağımsız değişkenin ilişkili başka bir bağımsız değişken ile değiştirilmesiyle yeni fonksiyonun cebirsel ifadesindeki değişim oranını önceki fonksiyonun değişim oranından yararlanarak belirleyemem

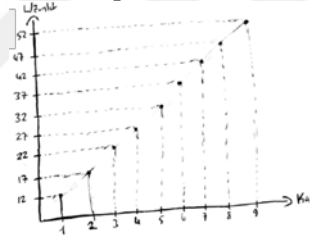
Öğrenciler iki çokluğun ilişkisini oluşturmak için ilk olarak çoklukların değişim yönünü belirlemelerine karşın bu etkinlik kapsamında beşinci grup çoklukların değişim yönünü belirleyememişlerdir. Bir önceki etkinlikten farklı olarak bağımsız değişkenin değeri arttıkça bağımlı değişkenin değerinin azalması öğrencilerin kafa karışıklığı yaşamalarına neden olmuştur.

- 1 Araştırmacı 1: Bunlar kat, değil mi?
- 2 Mete: Evet.
- 3 Araştırmacı 1: Birinci katın uzunluğu ne oluyor?
- 4 Mete: Uzunluğu 12 oluyor.
- 5 Araştırmacı 1: İkinci katta? Birinci katı en tepedeki mi aldınız?
- 6 Mete: Evet.
- 7 Araştırmacı 1: Peki en alt alsanız?
- 8 Mete: O zaman çıkaracağız bir şeyler.
- 9 Araştırmacı 1: Ne çıkacak?
- 10 Mete: Kat. Neden en alttaki alıyoruz?
- 11 Araştırmacı 1: En alttaki birinci kat değil mi?
- 12 Mete: Ama bizim bütün grafikler falan öyle oldu.

Araştırmacı bağlam içerisinde en üst kat olmasına rağmen öğrencilerin en üst katı en alt kat olarak ele almalarının nedenini sorduğunda, bütün grafiklerin bu şekilde olduğunu ifade etmişlerdir [12]. Dünya'nın Dibi etkinliğinde iki değişkenin de eş zamanlı olarak artmasına vurgu yapılmasının öğrencilerin bu etkinlikte de değişimi artış olarak düşünmeye yönlendirdiği düşünülmektedir. En alttaki katı 1.kat olarak düşünmeleri durumunda nasıl bir fonksiyon elde edecekleri sorulduğunda ise, öğrenciler bu azalma için katın çıkarılacağını ifade etmişlerdir [8]. Ancak bu çıkarma işleminin nasıl yapılacağına yönelik herhangi bir açıklama yapmamışlar ve bağlamla ilişkili düşünmedikleri için en alt katı birinci kat olarak almak anlamsız gelmiştir [10].

Öğrencilerin bu etkinlik kapsamında bazı zihinsel eylemlerinin ikinci dereceden fonksiyon kavramını anlamaları için uygun şekillerde gerçekleşmemesinin yanı sıra farklı güçlüklerinin de olduğu görülmüştür. Bu güçlüklerden biri öğrencilerin noktasal grafik fikrine sahip olmamalarından kaynaklanmıştır. Beşinci gruptaki öğrenciler kat-alan ilişkisini temsil eden noktasal grafiği çizerlerken tanım kümesinin tam sayılardan oluşmasını grafiksel gösterime yansıtmada zorluk yaşamışlardır.

- 1 Araştırmacı 1: İkinci kat aldınız, ikinci katın uzunluğu bu
2 [grafikte gösteriyor.] Peki bununla bunun
3 arasında bir değer var mı? [birinci-ikinci kat
arasını gösteriyor.]
- 4 Mete: Hayır kat yok.
- 5 Araştırmacı 1: Ama burada var. [çizdiği grafiği göstererek] O
6 zaman bu fonksiyon nasıl bir fonksiyon olacak?
7 Grafiği nasıl olacak bu fonksiyonun?
- 8 Mete: Sabit mi olacak?
- 9 Araştırmacı 1: Sabit mi? Burada birinci katta bu, ikinci katta
10 bu, üçüncü katta bu, değil mi?
- 11 Mete: Arada kat yok zaten.
- 12 Araştırmacı 1: Arada kat yok, o zaman bunu böyle birleştirmem
13 doğru mu?
- 14 Mete: Değil mi? Sütun grafiği mi yapacağız?
15 ooo
- 16 Mete: Sütun çizeceğiz, ya da birleştirmeyeceğiz?
- 17 Araştırmacı 1: Sence? Meriç sence? Demek istediğimi anladın
mı?
- 18 Meriç: Anladım.
- 19 Araştırmacı 1: Nasıl olacak?
- 20 Meriç: Sütun yapabiliriz.
- 21 Mete: Olmaz. [noktalar arası doğru parçalarını sildi]
- 22
- 23
- 24
- 25
- 26
- 27
- 28
- 29 Araştırmacı 1: Bu şekilde değil mi?
- 30 Mete: Bu grafik oluyor mu?
- 31 Araştırmacı 1: Bu nasıl bir grafik?
- 32 Mete: Çizgi yok ki nasıl grafik olacak?
- 33 Araştırmacı 1: Noktasal grafik.



Araştırmacı öğrencilerin çizmiş oldukları grafik üzerine düşünmeye teşvik edecek sorular sormuştur. Birinci kat ve ikinci kat arasında bir kat olup olmadığı sorusuyla bu grafik kapsamında öğrencilerin grafiğin sürekli olup olmadığını düşünmeye yönlendirmiştir. Bağlam doğrultusunda fonksiyonun tanım kümesinde olmayan bir değer fonksiyonla ilişkili grafiksel gösterimde de olmaması gerektiğini fark ettirmeye çalışmıştır. Ancak öğrenciler buldukları noktaları birleştirmeksizin sadece noktaların grafik için yeterli olacağını düşünmemişler ve süreksizliğe karşılık gelecek grafiğin sütun grafiği olacağını belirtmişlerdir[16; 20]. Bu aşamada ilerleme

gösteremeyen öğrencileri araştırmacı noktasal grafiğe yönlendirmiştir. Öğrencilerin ifadelerinden yaşadıkları sorunların sadece noktaların yer aldığı grafiğin bir grafik olmayacağı fikrinden kaynakladığı görülmüştür [32].

Öğrencilerin bir diğer güçlükleri ise bağımsız değişkenin kat olması durumundaki kenar uzunluğu fonksiyonunu bağımsız değişkenin basamak ya da yükseklik olması durumundaki kenar uzunluğu fonksiyonuna dönüştürürlerken yeni fonksiyonların değişim oranlarını var olan önceki değişim oranını dikkate alarak belirleyememelerinden kaynaklanmıştır.

En Uzun Basketbol Atışı Etkinliği Kapsamında Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler.-En Uzun Basketbol Atışı etkinliğinde öğrenciler bir parabolün simetri eksenine ilişkin etkili fikirler oluşturmuşlardır. Öğrencilerin bu aşamada yaşadıkları zorluklar önceki konulardaki eksik bilgilerinden ya da yanlış genellemelerinden ortaya çıkmıştır. Gruplar etkinlik üzerinde çalışırken ortaya çıkan zihinsel eylemler Tablo 12’de gösterilmektedir.

Tablo 12

Birinci Döngü Aşamasında En Uzun Basketbol Atışı Etkinliğinde Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler

Grupların Zihinsel Eylemleri	Grup Numaraları
Topun düşeyde aldığı yol ile yatayda aldığı yolu çokluklar olarak belirleme ve değişkenlerle eşleme	G1, G2, G3, G4, G5
Topun başlangıç ve bitiş noktalarını eşleme	G1, G2, G3, G4, G5
Parabol üzerindeki farklı noktaları simetri eksenine göre eşleme	G1, G2, G3, G4, G5
Topun bulunduğu noktaları analitik düzlemdeki sıralı ikililer ile eşleme	G1, G2, G3, G4, G5
Aynı y değerine sahip iki noktanın simetri eksenine uzaklıklarını toplamsal karşılaştırma	G1, G2, G3, G4, G5
Aynı y değerine sahip iki nokta arasındaki uzaklığı eş parçalama	G1, G2, G3, G4, G5
Parabolü simetri eksenine göre katlama	G1, G2, G3, G4, G5
Simetri eksenini fonksiyonun x eksenini kestiği noktalar ile ilişkilendirme	G2, G2, G3, G5

Etkinlikte öğrenciler basketbol topunun atılması olayına anlam yükleyebildikleri için üzerinde çalışırken parabolün kavram öğrenilmesi için uygun muhakemeler gerçekleştirmişlerdir. Basketbol topunun çıkabileceği maksimum yüksekliği referans alarak aynı yükseklikte bulunduğu noktaları karşılaştırmışlar ve simetri eksenini çokluğunu oluşturmuşlardır.

1 Ece:

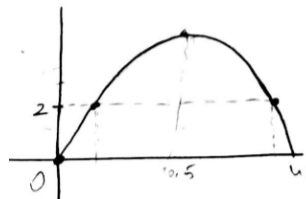
2

3

4

5

6



7 Araştırmacı 2: Burası kaç metre? [parabol üzerinde koyduğu bir noktanın yüksekliğini soruyor]

8 Ece: 2 metre işte.

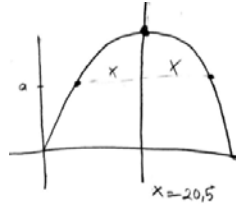
10 Araştırmacı 2: Peki kaç nokta var?

11 Ece: İki.

12 Araştırmacı 2: Bu iki nokta için ne söyleyebilirim? Nasıl iki noktadır bunlar?

14 Ece: Bunlar topun en yüksek olduğu noktaya simetrik. Uzaklıkları eşittir.

15



Basketbol topunun atışını gösteren matematiksel model oluşturulurken varsayımlar doğrultusunda yerden 2 metre yükseklik x eksenini olarak belirlendiği için öğrenciler topun yerden 4 metre olduğu yüksekliğin 2 metreye karşılık geleceğini ifade etmişlerdir [9]. Sonrasında topun 2 metre yükseklikte bulunduğu iki nokta olduğunu ifade etmişler ve bu noktaları parabol üzerinde göstermişlerdir [11]. Bu iki noktayı tepe noktasına göre karşılaştırmışlar ve simetrik olduğunu açıklamışlardır [14]. Ek olarak, bu noktaların uzaklıklarının eşit olduğunu dile getirmişlerdir [15]. Noktaların nereye göre uzaklıklarının eşit olduğu ifadelerinde açık olmasa da parabol çizimleri simetri eksenini referans aldıklarını göstermiştir. Aynı zamanda bu çizimler iki noktanın tepe noktasına göre değil tepe noktasından x eksenine dik olarak çizilen doğruya göre simetrik olduğu sonucuna ulaştıklarını göstermiştir. Parabol üzerinde simetri eksenini çizmişler ve iki nokta arasındaki uzaklığı iki eş parçaya ayırmışlardır.

Öğrencilerin bu fikri simetri ekseninin ikinci dereceden fonksiyonun x eksenini kestiği noktaların orta noktası olduğu sonucuna ulaşmalarını desteklemiştir. Bu sayede ikinci dereceden fonksiyonun x eksenini kestiği noktaları olan ikinci dereceden denklemin kökleri ile ilişkilendirebilmişlerdir. Üçüncü gruptaki öğrenciler $x^2 - 41x = 0$ denkleminin köklerini 0 ve 41 olarak bulduktan sonra simetri ekseninin geçtiği 20,5 değerinin 0 ile arasındaki uzaklığın 41 ile arasındaki uzaklığa eşit olduğunu ifade etmişlerdir.

1	Araştırmacı 1:	20,5 ile kökler arasında bir ilişki var mı?
2	Zeynep:	Var.
3	Araştırmacı 1:	Nasıl bir ilişki var?
4	Zeynep:	20.5 tam ortada. 0'a geliyoruz 20.5 var, 41 ile
5		arasında da 20.5 var.
6		ooo
7	Araştırmacı 1:	Diyelim ki burası 0'dan başlamasaydı da 10'dan
8		başlasaydı, 10 ile 51 olsaydı?

- 9 Zeynep: Yine aynı olmayacak mıydı?
 10 Araştırmacı 1: Neden peki?
 11 Zeynep: Çünkü...
 12 Araştırmacı 1: Ne yapıyorsunuz? Nasıl buluyorsunuz?
 13 Aralarında bir ilişki var mı?
 14 Furkan: Toplayıp ikiye bölüyoruz.
 15 Zeynep: Aynen toplayıp ikiye bölüyoruz.
 16 Zeynep: $\frac{x_1+x_2}{2}$
 17 Furkan: Tepe noktasının x eksenini.
 18 Zeynep: Evet doğru. Genelleme yazarız.
 19 ooo
 20 Zeynep: $\frac{-b}{a}$ kökler toplamı. $\frac{-b}{2a}$ ise tepe noktasının x'i.

Öğrenciler ilk olarak denklemin köklerinin simetri eksenine olan uzaklıklarını toplamsal karşılaştırmışlardır [4-5]. Bunun üzerine araştırmacı noktaların 0 ve 41 yerine 10 ve 51 olması durumunda simetri eksenini ile ilişkisinin nasıl olacağını sormuştur [7-8]. Öğrenciler bu soruya uzaklıklar yerine noktalara odaklanarak yanıt vermişler ve sonrasında kökler toplamı ile simetri ekseninin ilişkisini cebirsel olarak da genellemişlerdir [16-20].

Öğrencilerin bu etkinlik boyunca karşılaştıkları güçlükler Tablo 13'de gösterilmiştir.

Tablo 13
Birinci Döngüdeki Öğrencilerin En Uzun Basketbol Atışı Etkinliğinde
Karşılaştıkları Güçlükler

Basketbol topunun potaya girdikten sonraki düşüşünü dikkate alma
Farklı cebirsel gösterimleri oluştururken $f(x) = ax^2 + bx + c$ cebirsel ifadedeki katsayıları görmezden gelme
Parabolün eğimi olduğunu ve $f(x) = ax^2 + bx + c$ cebirsel ifadesinde a katsayısına karşılık geldiğini düşünme
$f(x) = a(x - r)^2 + k$ kanonik formundaki k ile tepe noktasının ordinatını eşlememe
$x^2 - 41x = 0$ denkleminin kökleri ile $f(x) = \frac{-1}{260}(x^2 - 41x)$ fonksiyonun grafiğini ilişkilendirme aşamasında $f(x) = x^2 - 41x$ fonksiyonun grafiğini çizme

Öğrenciler ikinci dereceden fonksiyonun standart gösterimini kanonik ve çarpanlara ayrılmış forma dönüştürürlerken çarpanlara ayırma konusuna ilişkin bilgilerini kullanmışlardır. Bu konudaki eksikliklerinin olması ve $ax^2 + bx + c$ standart formundaki a katsayısını göz önüne almamaları sebebiyle eksik çıkarımlar yapmışlardır. Örneğin beşinci gruptaki öğrenciler $f(x) = -\frac{1}{260}(x^2 - 41x)$ ifadesini çarpanlarına kolaylıkla ayırmışlar ve parabolün x eksenini kestiği noktalarla ilişkilendirmişlerdir. Buna karşın, ifadeyi tamkare ifade içerecek şekilde düzenlemede problemler yaşamışlardır. Bunun üzerine araştırmacı $x^2 - 2x$ ifadesini tamkare içerecek şekilde nasıl düzenleyeceklerini sormuştur. Öğrenciler 41'in yarısının karesini eklemek ve çıkarmak gerektiğini fark etmişler ve ifadeyi düzenlemişlerdir. Ancak a katsayısını parantez içerisine dağıtmadıkları için oluşturdukları cebirsel ifadeyi grafiksel gösterimde sadece tepe noktasının apsisi ile ilişkilendirebilmişlerdir.

$$-\frac{1}{260}[(x - 20,5)^2 - 20,5^2]$$

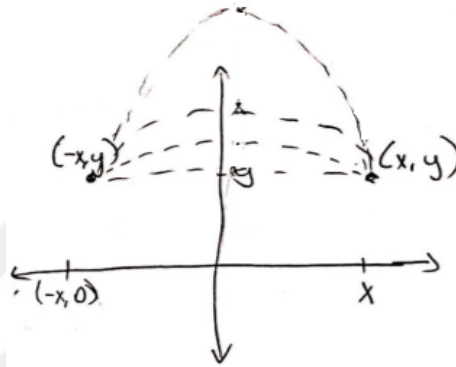
Birinci gruptaki öğrenciler de farklı cebirsel gösterimleri oluşturma süreçlerinde benzer güçlüklerle karşılaşmışlardır.

1	Onur:	$x^2 - 41x +$
2		20,5'un karesi kaçtı, yazmıştık. [41'in yarısını alıyor.]
3	Emre:	420,25
4	Onur:	$x^2 - 41x + 420,25$
5	Araştırmacı 1:	Ama bunu ekledin şu an sen.
6	Onur:	$x^2 - 41x + 420,25 - 420,25$
7	Araştırmacı 1:	Evet, bir de eksi koyman gerekiyor.
8	Onur:	Evet $(x - 20,5)^2$
9	Araştırmacı 1:	Tamam, o zaman şimdi bunu tam kare olarak yaz.
10	Onur:	$(x - 20,5)^2 - 20,5^2$
11	Araştırmacı 1:	Şimdi grafikte bu değerleri görebiliyor musunuz?
12	Onur:	20,5 var, bir de 0 var.
13	Araştırmacı 1:	20,5 ne burada?
14	Onur:	Tepe noktası.

Öğrenciler fonksiyonun tam kareyi içermesi durumunu terim ekleme ve çıkarma yöntemiyle $f(x) = (x - 20,5)^2 - 20,5^2$ şeklinde ifade etmişlerdir [1-10].

Ancak standart formdaki a katsayısı olan $\frac{-1}{260}$ sayısını çarpmadıkları için elde ettikleri kanonik formu sadece paraboldeki tepe noktasının apsis değeri ile ilişkilendirebilmişlerdir.

Öğrencilerin bu etkinlikte ortaya çıkan bir yanlış anlamaları ise parabolün eğiminin olduğunu ve bu eğimin de standart formdaki a katsayısına karşılık geldiğini düşünmeleri olmuştur. Birinci gruptaki öğrenciler farklı parabolleri karşılaştırırken eğimlerinin farklı olduğunu ifade etmişlerdir.



1	Araştırmacı 1:	Bu topların yolları birbirine benziyor mu?
2	Emre:	Benziyor.
3	Araştırmacı 1:	Ne farkı var acaba?
4	Emre:	İşte aynı şeyde değiller.
5	Onur:	Eğimde.
6	Araştırmacı 1:	Aynı eğim ne?
7	Onur:	Çizeriz eğimi, şey çizmeyecek miyiz, kırılma doğrusu.
8		
9	Araştırmacı 1:	İkinci dereceden fonksiyonlarda eğim var mı acaba?
10		
11	Onur:	Var.
12	Araştırmacı 1:	Nasıl?
13	Onur:	x^2 olmuyor mu?

Öğrenciler bu parabolleri karşılaştırırken eğimlerinin farklı olduğunu belirtmişlerdir [6-7]. Öğrencilerin eğimin çizilebileceğini belirtmiş olmaları eğim çokluğuna doğrunun anlamını yüklediklerini göstermiştir [7-8]. Eğimi parabolere çizilen kırılma doğrusu olarak ifade etmeleri de öğrencilerin parabolere çizilen teğet doğrularının eğimlerinden bahsettiklerini düşündürmüştür [7-8]. Bu varsayım ile parabollerin eğiminin olup olmadığı sorulduğunda x^2 teriminin katsayısı olan a'ya işaret etmişlerdir [11].

Öğrencilerden bazıları $x^2 - 41x = 0$ denkleminin kökleri ile $f(x) = \frac{-1}{260}(x^2 - 41x)$ fonksiyonun grafiğini ilişkilendirme aşamasında $f(x) = x^2 - 41x$ fonksiyonun grafiğini çizerek hatalı yaklaşım sergilemişlerdir. Öğrencilerin etkinlik boyunca yaşadıkları güçlükler göz önüne alınarak etkinlik sorularında revizyonlar yapılmıştır.

Parabolik Uçuş Etkinliği Kapsamında Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler.-

Parabolik Uçuş etkinliğinde öğrenciler etkili bir şekilde çalışmışlar ve diğer etkinliklere göre daha az güçlkle karşılaşmışlardır. Grupların etkinlik üzerine çalışırken gerçekleştirdikleri zihinsel eylemler Tablo 14’de gösterilmektedir.

Tablo 14
Birinci Döngü Aşamasında Parabolik Uçuş Etkinliğinde Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler

Grupların Zihinsel Eylemleri	Grup Numaraları
Parabolün sınırlarına karşılık gelen noktaların apsislerini simetri eksenine göre toplamsal karşılaştırma ve orta noktayı belirleme	G1, G2, G3, G4, G5
Parabol üzerinde belirlenen noktaları cebirsel formda x ve $f(x)$ değişkenleri ile eşleme	G1, G2, G3, G4, G5
Analitik düzlemde sonsuz nokta eşleme ve parabolün kollarını fonksiyonun tanım kümesi ile ilişkilendirme	G1, G3, G4, G5
Parabol üzerinde verilen noktalar arası uzaklıkları toplamsal olarak karşılaştırma ve bu karşılaştırmaya dayalı olarak noktaları yeni noktalarla eşleme	G1, G3, G4, G5
Uçağın uçuş süresini gösteren aralığı analitik düzlemde daraltma	G1, G2, G3, G4, G5

Öğrenciler parabolik uçuşu gösteren grafikte parabole karşılık gelen parçaları dikkate alarak cebirsel ifadelerini yazmışlardır. Parabollerin tepe noktalarının ordinat değerleri grafikte doğrudan görüldüğü için cebirsel ifadeyi yazarlarken kanonik formdan yararlanmışlardır. Parabolün sınır noktalarının apsislerini dikkate alarak orta noktayı bulmuşlardır.

- 1 Ece: Bence tepe noktasından gidelim. Şurası 30 olmaz
 2 mı?
 3
- 
- 4 Umut: Parabol çünkü simetriktir.
 5 Ece: Evet şimdi tepe noktamız ne yapıyor (30, 8500)
 6 tamam, $a(x - 30)^2 + 8500$

Öğrenciler 20. ve 40. saniyeler arasını temsil eden parabolün 20. ve 40. saniyede aynı y değerine sahip olduğunu grafik üzerinde göstererek 20 ve 40 değerlerinin orta noktasının tepe noktasının apsisine karşılık geleceğini ifade etmişlerdir [1-3]. Grafik üzerinde parabolün maksimum değeri verildiği için öğrenciler 30 değeri ile maksimum yükseklik olan 8500 değerini kolaylıkla eşlemişler [5] ve kanonik formu yazmışlardır [6].

Öğrencilerin sınırlı olarak verilen parabollerin reel sayılar kümesinde tanımlanması durumunda kollarının sonsuza gidebileceği fikrine sahip oldukları görülmüştür. Beşinci grupta yer alan Mete'nin ifadeleri reel sayılarda tanımlı bir ikinci dereceden fonksiyonun kollarının devam edeceği fikrine sahip olduğu göstermiştir.

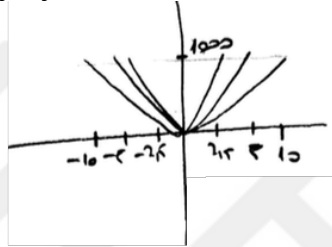
- 1 Araştırmacı 1: Peki bu parabolün kolları aşağıya kadar gidiyor
 2 mu bir yerde kesiliyor mu? Sonsuza gidiyor mu?
 3 Mete: Reel sayılarda olması için sonsuza gitmesi
 4 gerekiyor.

Mete ikinci dereceden fonksiyonun reel sayılar kümesinde tanımlı olması için parabolün kollarının sonsuza gideceğini belirtmiştir [3-4]. Öğrenci için parabolün kollarının devam etmesi ya da sınırlı olarak kalması tanım kümesi ile doğrudan ilişkilidir. Dolayısıyla sınırlı gibi görünen bir parabolün kollarının tanım kümesi doğrultusunda devam edeceğini düşünmüştür.

Parabolik Uçuş etkinliği kapsamında öğrenciler a katsayısına ilişkin çıkarımlar yapmışlardır. Bu süreçte uçağın uçuş süresini gösteren aralığı analitik düzlemde

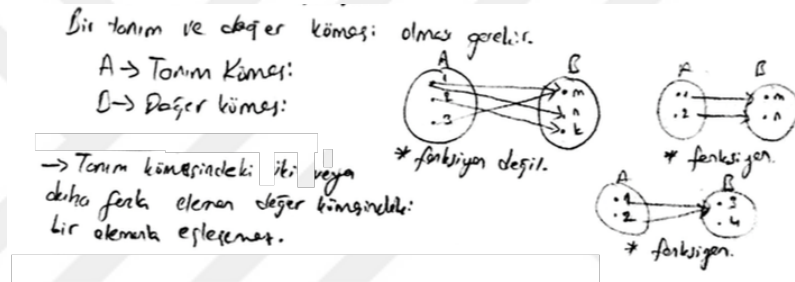
daraltarak noktaları eşlemişlerdir. Etkinlikte farklı sürelerde tamamlanan uçuşların aynı analitik düzleme taşınmasının istenmesi öğrencilerin çıkarımlarını desteklemiştir.

- 1 Asya: Burada x'ler farklı, x'i şurada değer aldığı
 2 noktalar farklı [süreyi tamamlama
 3 durumlarından kaynaklı -10 10, -5 5 gibi]
 4 Araştırmacı 1: Peki aynı grafikte bunları çizersen aynı analitik
 5 düzlemde nasıl olur?
 6 Asya: Daralma genişleme var.
 7 Araştırmacı 1: Üst üste gelir mi?
 8 Asya: Üst üste gelmiyor.
 9 Araştırmacı 1: Ne oluyor?
 10 Asya: [çiziyor.]



İkinci Döngü Kapsamında Öğrencilerin Gerçekleştirdikleri Zihinsel Eylemlere Yönelik Bulgular

Can'ın Ön Bilgilerine Yönelik Bulgular.- Can ön değerlendirme kapsamında fonksiyonu ilk olarak bir makine ile ilişkilendirmiştir. Bu ilişkiyi açıklarken bir değer başka bir değere dönüştürülmesi fikrine değinmiştir. Bir kümedeki değerlerin bir kural ile başka değere dönüşmesi ve bu değerlerin birbiri ile eşleşmesi olarak dile getirmiştir. A kümesini tanım kümesi ve B kümesini değer kümesi olarak ifade ederek $f: A \rightarrow B$ $f(x) = y$ olarak fonksiyonu tanımlamıştır. İki çokluk arasındaki ilişkinin fonksiyon olabilmesi için gerekli şartları belirtirken tanım kümesindeki elemanlarla değer kümesindeki elemanların eşleşme kurallarını ifade etmiştir.



Can'ın yazılı çözüm kağıdından alınan kesitte de görülebileceği gibi sözel olarak yanlış ifade etmesine karşın şematik olarak uygun şekillerde örnekleme yapmıştır. Can'a verdiği yanıt üzerine bir ilişkinin fonksiyon olması için başka bir gereklilik olup olmadığı sorulmuştur.

1	Araştırmacı:	Başka var mı? Burada mesela ne yazmışsın, tanım
2		kümesindeki iki veya daha fazla eleman değer
3		kümesindeki bir elemanla eşlenemez. Peki başka
4		bir gereklilik var mıdır fonksiyon olması için?
5	Can:	Değer kümesinde eleman kalmaması gerekiyor,
6		hepsinin eşlenmiş olması gerekiyor, çünkü zaten
7		eleman kalırsa ya aslında değer kümesi demek,
8		tanım kümesindeki elemanların dönüşmüş hali
9		demek. Eğer orada eleman kalıyorsa
10		dönüşmemiştir, dönüşmemişse o fonksiyon
		olmamıştır.

Can şematik gösterimle birlikte açıklamış olduğu ifadelerine ek olarak bir ilişkinin fonksiyon olabilmesi için değer kümesinde de eleman kalmaması gerektiğini

eklemiştir. Değer kümesinde eşleşmeyen bir elemanın kalmasının tanım kümesinde dönüşüme uğramayan elemanların olduğu anlamına geldiği ifadesi ile gerekçelendirmiştir [5-10]. Can'a göre tanım kümesindeki tüm elemanların eşleştiğinin göstergesi değer kümesindeki elemanların da tamamının eşleşmiş olmasıdır. Bu düşüncesi Can'ın fonksiyon kavramında yanlış ya da eksik anlamalarının olduğunu göstermiştir.

Can $f(x) = y$ ifadesinde x 'in tanım kümesindeki bir elemana, y 'nin x 'in dönüşmüş bir haline, f 'in ise bu iki çokluğu birbiri ile bağlantılı hale getiren ve aralarındaki uygulanan işlemi gösteren sembole karşılık geldiğini belirtmiştir. Bir fonksiyon örneği olarak $f(x) = 2x + 2$ doğrusal fonksiyonunu veren Can bu fonksiyon üzerinden cebirsel ifadeyi grafik ile ilişkilendirmiştir. Aldığı x değerlerini analitik düzlemdeki apsisler ile, bu x değerlerinin $2x + 2$ işlemine göre dönüşmüş hali olan y değerlerini ise ordinatlar ile eşleyerek grafiğin çizileceğini açıklamıştır. Doğrusal fonksiyonu açıklarken grafiği ile ilişkilendirmiştir.

1	Can:	Hep bir doğru üzerinde devam eden ve hiç doğru
2		üzerinde sapma olmayan bir fonksiyon, yani $ax+b$
3		oluyor, x 'in bir katsayısı ve sabit sayıdan oluşan
4		fonksiyon ve herhangi iki nokta arasındaki
5		eğimler birbirine eşit oluyor.
6		ooo
7	Can:	Aslında basit bir fonksiyon, direkt dümdüz.
8	Araştırmacı:	Var mı peki başka doğrusal fonksiyon ile ilgili?
9		Mesela tanım kümesi hakkında konuşabilir misin
10		doğrusal fonksiyonun? Herhangi bir doğrusal
11		fonksiyonun?
12	Can:	Tanım kümesindeki değerler arasında da bir ilişki
13		var. Çünkü değerler arasında bir ilişki var, onlara
14		bağlı olarak değer kümesindeki değerler arasında
15		da bir ilişki olunca o aslında doğruyu sağlamış
16		oluyor, mesela diyoruz ki işte 1,2,3,4 işte birer
17		birer artmış, bunlara bağlı olarak 6,8,10,12
18		bunlarda belirli bir düzen içerisinde arttığı için
		doğrusal diyoruz.

Doğrusal fonksiyonun noktalarının bir doğru üzerinde olduğunu ve herhangi iki nokta arasındaki eğimin eşit olduğunu belirtmiştir [3-5]. Yazdığı $f(x) = 2x + 4$

doğrusal fonksiyon örneği doğrultusunda da doğrusal bir fonksiyonda artışların düzenli olduğunu farklı x ve y değerlerini belirterek açıklamıştır [16-18].

Ön değerlendirmeye yönelik klinik mülakattan elde edilen bulgular doğrultusunda, Can'ın fonksiyona ilişkin eşleme, dönüşüm, kural, işlem fikirlerinin olduğu görülmüştür. Tanım ve değer kümelerindeki elemanların belirli koşullar altında birbiri ile eşlendiğini açıklasa da bu eşleme kuralları ile ilgili yanlış ifadeleri ortaya çıkmıştır. Doğrusal fonksiyonlarda tanım kümesindeki ve değer kümesindeki değerlerin değişimin birbirlerine bağlı olarak düzenli olmasını fonksiyonun doğrusal olmasının gerekçesi olarak düşündüğü belirlenmiş ve eğimi grafik açısından yorumladığı görülmüştür. Bu doğrultuda Can'ın değişim miktarları ile ilgili açıklamalar yapmasına karşın değişim miktarlarının oranı fikrine ilişkin herhangi bir açıklama yapmadığı belirlenmiştir.

Alp'in Ön Bilgilerine Yönelik Bulgular.-Alp ilk olarak fonksiyon kavramının bir kurala dayalı işlem olduğunu ifade etmiştir. Bu işlemi açıklarken iki kümede yer alan çoklukların birbiri ile eşleme yapıldığını belirtmiştir [1-3].

1	Alp:	İşlem, yapılan bir işleme göre değerleri, tanım ve
2		değeri birbirine eşleyen desem, işte oradaki
3		işleme fonksiyon denir.

Alp bir ilişkinin fonksiyon olmasına ilişkin koşulları açıklarken tanım ve değer kümelerine vurgu yapmış ve tanım kümesindeki elemanların sağlaması gereken şartları açıklamıştır. Bu açıklamalarında matematik dili kullanımına da özen gösterdiği görülmüştür. Bunun yanı sıra, Alp'in yazılı çözüm kağıdından alınan kesitte de görülebileceği gibi fonksiyon olma şartlarına ters fonksiyona ilişkin açıklamalarını da eklemiş ve fonksiyonların ters fonksiyonunun olması gerektiğini belirtmiştir.

$A \rightarrow$ Tanım kümesi	$x \in A$	$a \in B$
$B \rightarrow$ Değer kümesi	$y \in B$	
I) $f(x) \neq y$ ise f fonksiyon değildir. x 'in bir değere gitmesi gerekir.		
II) $f(x) = y \vee f(x) = a$ ise f fonksiyon değildir. x birden fazla değere gidebilir.		
III) $f(x) = y$ ise $f'(y) = x$ olmalıdır.		

Araştırmacı Alp'in bir fonksiyonun tanımlanabilmesi için tersinin de tanımlı olması gerekliliğine ilişkin fikirlerinin temelinde yatanları ortaya çıkarmak amacıyla sorular sorduğunda, Alp değer kümesi ile görüntü kümesi arasındaki farklılığa değinmiştir. Bu sorulara verdiği yanıtlar doğrultusunda Alp'in fonksiyona ilişkin eşleme ve kural olarak ifade ettiği işlem fikirlerine sahip olduğu görülmüştür. Bir fonksiyon örneği olarak doğrusal fonksiyon yazmış ve grafiğini çizebilmiştir.

Doğrusal fonksiyonun ne olduğuna yönelik soruda Alp fonksiyonun genel formunu yazmış ve doğrunun tüm noktalarında eğimin eşit olduğunu ifade etmiştir.

7. Doğrusal fonksiyon deyince aklınıza ne gelmektedir?

$$f: A \rightarrow B$$

$f(x) = ax + b$ şeklindeki fonksiyonlara doğrusal fonksiyon denir.

Doğrunun tüm noktalarında eğim eşittir.

Bu ifadeleri ile açıklamak istediği düşüncelerini daha iyi anlamak için Alp'in doğrunun tüm noktalarında eğiminin eşit olması ile ne demek istediği sorulmuştur.



1	Araştırmacı:	Tüm noktada eğim eşit ne demek?
2	Alp:	Şu noktayla şu noktanın farkı ile şu nokta ile şu
3		noktanın farkının oranları birbirine eşit [grafik
4		üzerinde herhangi iki nokta belirleyip y ve x
5		değişimlerini gösteriyor.]
6	Araştırmacı:	Her noktanın eğimi mi demek istedin?
7	Alp:	Yok noktanın eğimi değil. İki nokta arasındaki
8		değişim.

Alp doğru üzerinde iki nokta belirlemiş ve bu noktaların y değerlerinin arasındaki farkın x değerleri arasındaki farka oranının eşit olduğunu açıklamıştır [2-5]. Öğrenci noktaların değerlerine değil değişimin önemli olduğuna vurgu yapmıştır [7-8]. Bu ifadeleriyle Alp'in grafiksel gösterim bağlamında değişim oranının sabit olduğu fikrine sahip olduğu görülmüştür.

Alp örneklelediği doğrusal fonksiyondaki değişkenlerin anlamlarını açıklarken, fonksiyonun dönüşüm olduğuna değinmiştir. Mülakatın başlarında ifade ettiği fonksiyonun işlem olduğu fikriyle tutarlı olarak dönüşüm fikrine sahip olduğu görülmüştür. Yazmış olduğu $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$ fonksiyon örneğinde $\frac{2}{3}$ 'ün x 'in katsayısı olduğunu belirtmiş, bu değerin değişim oranı olduğuna ya da grafikte eğime karşılık geldiğine ilişkin herhangi bir açıklama yapmamıştır. Sabit katsayı olan 4 sayısının da x ile bir ilişkisi olmadığını eklemiştir. Alp'e bu fonksiyonun grafiğini neden doğrusal olarak çizdiği sorulduğunda, artışın $\frac{2}{3}$ 'ün katları olacağını ifade etmiştir. Bu ifadesi öğrencinin doğrusal fonksiyonda belli oranda değişim olduğunu sezdiği sonucuna götürmüştür. Ancak Alp cebirsel gösterimdeki değişim oranının anlamı ile grafiksel gösterimdeki değişim oranını ilişkilendiren bir açıklama yapmamıştır.

Ön değerlendirme ile elde edilen bulgular doğrultusunda, Alp'in fonksiyon kavramına ilişkin eşleme, dönüşüm, işlem, kural fikirlerine sahip olduğu ve tanım, görüntü ve değer kümelerinin fonksiyonu tanımlamada önemli olduğunu vurguladığı ortaya çıkmıştır. Buna ek olarak, doğrusal fonksiyonlarda değişimin belirli katlar ile gerçekleştiği ve buna bağlı olarak grafiğinin bir doğru olduğu bilgilerine sahip olduğu görülmüştür. Bir başka deyişle, Alp değişim oranının sabit olduğunu açık bir şekilde ifade edememiş olsa bile söylemleri bu fikri doğrusal fonksiyon ile ilişkilendirdiğini ortaya çıkarmıştır.

Elde edilen sonuçlara dayalı olarak, Can ve Alp'in doğrusal fonksiyona ilişkin sabit bir değişim fikrine sahip oldukları ancak değişim oranı fikrini açık bir şekilde ortaya koymadıkları görülmüştür. Bu doğrultuda Dünya'nın Dibi etkinliği ile var olan bilgilerini birbiriyle etkili şekilde ilişkilendirerek doğrusal fonksiyona ilişkin temel çoklukları daha iyi açıklayacakları ya da eksik olan kavramları oluşturacakları düşünülmüştür.

Dünya'nın Dibi Etkinliği Kapsamında Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler.-

Öğrenciler etkinlik kapsamında ilk olarak problem durumundaki 10 metrede 1 ATM basınç artışını dikkate almışlardır. Bu ifadenin derinlik çokluğu ile basınç çokluğu arasındaki ilişkiyi belirlemek için içerdiği önemli bilgiyi fark etmişler ve derinlikteki

10 metre değişimin basınçta her zaman 1 ATM basınç değişimine neden olacağını vurgulamışlardır.

1 Alp:

2

3

4

5

6 Can:

7 Alp:

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17 Araştırmacı:

18

19 Can:

20



Kaç metrede bir ne kadar artıyordu?

10 metrede bir basınç 1 ATM.

O zaman derinliklere göre

1 ATM+10. Mesela 1 metre gidiyorsa 10 metre gittiğinde 1 atmosfer artacak.

$1 \text{ ATM} + \frac{1}{10} \text{ derinlik}$

Denizin altına indikçe, denizin üstünde 1 ATM basınç olacak deniz seviyesinde ve her alta indiğinde 10 metre alta inerse 1 ATM daha artacak. 100 metre alta inerse 11 atmosfer olacak. Derinlik arttıkça basınç artıyor.

ooo

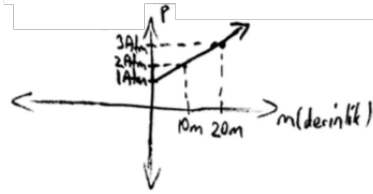
Neden $\frac{1}{10}$?

Mesela 10 metrede 1 olması için.

O zaman 2 atmosfer oluyor mesela 10 olunca 1 arttırıyor.

Öğrenciler basınç ile derinlik değişiminin dikkate alarak iki çokluk arasındaki ilişkiyi yazarlarken derinliğin katsayısını $\frac{1}{10}$ olarak belirlemişlerdir [4-8]. Bu aşamada öğrenciler 10 metrelik derinlik değişiminin 1 ATM basınç değişimine neden olacağını cebirsel olarak derinlik değerlerini $\frac{1}{10}$ ile çarparak açıklamışlardır. Eş zamanlı olarak derinliğin ve basıncın değişmesini dikkate alarak farklı derinlik değerlerine karşılık gelecek basınç değerlerini hesaplamışlardır [12-15]. Derinliğin katsayısını $\frac{1}{10}$ olarak yazmalarının sebebini açıklarlarken iki çokluğun artış miktarlarını toplamsal olarak karşılaştırdıkları görülmüştür [18-20]. Bir başka deyişle, bağımsız değişkeni başlangıç seviyesinden 10 metre arttırdıklarında bağımlı değişkenin 1 artacağını açıklayarak ulaştıkları sonucu gerekçelendirmişlerdir. Ek olarak, öğrenciler başlangıç noktası olan deniz seviyesindeki basınç değerini de dikkate alarak derinliğe bağlı basıncı gösteren ilişkiyi ifade etmişlerdir. Cebirsel ifadeyi yazan öğrenciler derinlik-basınç ilişkisini temsil eden grafiği çizmişlerdir.

- 1 Alp: 1 atmosferden başlayacak. Denizin üstünde bir
 2 basınç olduğu için 1 atmosferden başlayacak her
 3 10 metrede bir, burada 2 atmosfer olacak. 1
 4 atmosferde başlıyor ve doğrusal bir şekilde 20
 5 metrede 3 atmosfer oluyor.



- 11 Araştırmacı: Tamam, peki bu şekilde mi devam ediyor?
 12 [grafiğin doğrusallığını gösteriyor.]
 13 Alp: Hıhı.
 14 Araştırmacı: Bunu bu şekilde doğrusal çizdiniz. Neden?
 15 Alp: Çünkü her 10 metrede bir 1 artıyor hani belirli bir
 16 şeye göre artıyor.
 17 Araştırmacı: Sen ne düşünüyorsun Can?
 18 Can: Mantık uyuyor.

Elde ettikleri derinlik-basınç ilişkisini gösteren grafiği çizerlerken ilk olarak başlangıç noktasını belirlemişlerdir [1-2]. Ardından, derinlik ve basınç değerlerinin eş zamanlı değişimine dikkat ederek elde ettikleri değerleri birbiri ile eşlemişler ve sıralı ikililer haline getirmişlerdir [2-4]. Bu sıralı ikilileri analitik düzlemdeki noktalarla eşlemişler ve belirledikleri noktaları kullanarak doğrusal bir grafik çizmişlerdir. Grafiğin doğrusal olmasının basınçtaki artışın derinliğin belirli artış miktarına göre aynı olmasından kaynaklandığını belirtmişlerdir [15-16]. Öğrenciler artışın sürekli olarak aynı oranda olmasını doğru grafiği çizimiyle göstermelerine karşın bu sabit artış oranının grafikte eğim çokluğuna karşılık geldiğini belirtmemişler ve açıklamalarında eğime ilişkin herhangi bir açıklama yapmamışlardır.

Etkinliğin bir sonraki sorusunda basınç ve basınca bağlı oksijenin çözünme miktarına ilişkin tabloda sunulan verileri incelemeye başlamışlardır. İki değişkenin değişimlerinin yönünü belirledikten sonra iki değişken arasında $f(x) = mx$ eşitliğine uygun bir ilişki aramışlar ve değişkenlerin değerleri arasında sabit bir kat değeri bulamadıkları için basınç ve oksijenin çözünme miktarı arasındaki ilişkinin doğru orantılı olmadığını ve kandaki oksijenin çözünme miktarındaki artışın sabit ivmeli olmadığını ifade etmişlerdir.

- 1 Alp: Sabit ivmeli değil o yüzden böyle çıkacak
2 
3
4
5 Çünkü hocam mesela şu ikisinin [ilk ikisinin]
6 farkını aldım, 0,15 çözünme oranı artmış, şu en
7 üstteki ile en alttakinin farkını aldım, yine katları
8 çıktığı için, 2,1 fark 1,05 artmış, mesela bunu
9 oranladığımızda 7 ile çarptığımızda şey, çıkıyor
10 mu, bir dakika [hesaplıyor] çıkıyor, tamam tamam
11 oranlı.
12 ooo
13 Alp: Aradaki oranları bulduk.
14 Araştırmacı: Oraya nereden gittiniz?
15 Alp: Şu ikisinin arasındaki oksijen çözünme farkı ile 1
16 ile 3,1 arasındaki oksijen çözünme farkını aldım,
17 neden o ikisini aldım, mesela 0,3 çıkıyor, bu da
18 2,1 çıkıyor 7 katı diğerlerinde işte kesirlerle
19 uğraşmak zorunda kalacaktım.
20 Araştırmacı: Peki, bu fikre nereden vardınız bu aralarındaki
21 artışa bakmaya?
22 Alp: İşte ivmeli mi doğrusal mı olduğunu bulmak için
23 artış değerlerine bakmamız gerekiyor, orada
24 fizığe falan girdik yani asıl o neden oldu.
25 Can: Aslında sayılar biraz böyle ne bileyim karmaşık
26 gelince biz daha çok doğru orantılı değildir diye
27 düşündük işte grafik böyledir [eğrisel olarak
28 gösteriyor eliyle] falan diye düşündük, sonra
29 grafiği çizince de garip bir şey çıktı sonra biraz
daha doğru orantıyla uğraştık.

Doğru orantılı olmayan bu artışın ne şekilde olduğunu bulmaya çalışmaları ve bu artışı temsil edecek cebirsel ifadeyi yazmada güçlükler yaşamaları onları ilişkiyi gösteren grafiği çizmeye yönlendirmiştir. Basıncı bağımsız değişken olarak x eksenini ve oksijenin çözünme miktarını bağımlı değişken olarak y eksenini eşledikten sonra eğrisel bir grafik çizmişlerdir. Ancak Alp bu grafiği açıklamaya çalışırken değişim miktarları ve bunlar arasındaki ilişkiyi fark etmiş ve iki çokluğun değişim miktarları arasında sabit bir oran olduğu sonucuna ulaşmıştır [5-10]. Öğrencileri tablodaki veriler arası değişimi incelemeye fizikteki ivme kavramına ilişkin bilgileri yönlendirmiştir. Artışı hızdaki değişim gibi düşünmeleri ve artışın ivmeli olup olmadığını araştırmak için basınç değerleri arasındaki artış ile oksijenin çözünme miktarları arasındaki artışı incelemişlerdir [21-23]. Tablodaki değerlerin ondalık gösterimler ile verilmesi

öğrencilerin iki değişken arasındaki doğrusal ilişkiyi belirleyememelerine ve bu sebeple doğru orantılı olmayan bir ilişki olduğu sonucuna ulaşmalarına neden olmuştur [24-27]. Sonrasında ulaştıkları yanlış sonucu açıklamaya çalışmaları çokluklar arasındaki ilişkiyi keşfetmelerini desteklemiştir. Bu aşamada öğrenciler ilk olarak iki çokluk arasındaki doğrusal fonksiyon ilişkisi için $f(x) = mx$ eşitliği düşünmelerine karşın tablo değerleri üzerine incelemeleri sonucunda değişim miktarlarının arasındaki ilişkinin belirleyici olduğunu anlamlandırmışlardır. Öğrenciler ilişkinin doğrusal olduğunu belirledikten sonra cebirsel ifadesini $0,31 + 0,05(p - 1)$ olarak yazmışlardır.

1	Araştırmacı:	En son ulaştığınız ifade matematiksel ifade ne şu durumda?
2		
3	Alp:	Şu [Yazmış oldukları $0,31 + 0,05(p - 1)$ ifadesini gösteriyor].
4		
5	Araştırmacı:	Bu neye eşit peki şu an?
6	Alp:	Bir basınçtaki,
7	Can:	Normal ortamdaki oksijen çözünmesine eşit.
8	Araştırmacı:	Bir yazar mısınız?
9	Alp:	$NO\ O_2\text{çözünmesi} = 0,31 + (p - 1)0,05$

Tablodaki verileri inceleyerek 0,1 basınç artışının oksijenin çözünme miktarını 0,05 değerinde değiştirdiğini hesaplamışlardır. Ancak bu aşamada basınçtaki 1 birimlik değişimin oksijenin çözünme miktarını ne kadar değiştirdiğini düşünmeden iki değişken arasındaki ilişkinin cebirsel ifadesini yazmaya çalışmışlardır. Öğrenciler iki çokluk arasındaki ilişkinin cebirsel ifadesini yazmaya çalışırken 0,05 değerini ve başlangıç değeri olarak 1 ATM basınçta oksijenin çözünme miktarı olan 0,31 değerini dikkate almışlardır [3-9]. Öğrenciler bu eşitliği yazdıktan sonra tablodaki farklı değerlerden yararlanarak ifadenin doğruluğunu araştırmışlar ve bu aşamada ulaştıkları $NO\ O_2\text{çözünmesi} = 0,31 + (p - 1)0,05$ eşitliğinin yanlış olduğunu fark etmişlerdir. Bu ifadeyi düzeltmek için deneme yanılma yöntemini kullanarak 0,05 sayısını 10 ile çarpmanın uygun olacağı sonucuna ulaşmışlardır.

1	Araştırmacı:	Çarpı 10 niye?
2	Alp:	Herhangi derinlikle alakalı olabilir. Ama farklı etkinliğe geçtik, nasıl diyeyim hocam şey yaptım işte
3		
4		$0,31 + (p - 1)$ çıkarttığımız için bulduk falan, $7/10$
5		olması gerekirsene $7/100$ çıkıyordu yani 10 ile

- 6 çarparsak sonuç oluyor, nereden geldi kanıtlanması
7 var ama o da yok işte.
8 Araştırmacı: Sen ne düşünüyorsun Can?
9 Can: Ben de öyle düşünüyorum.
10 Araştırmacı: Niye 10 ile çarpmış olabiliriz?
11 Can: Niye 10 ile çarpmış olabiliriz, 10 atmosfer 10 metre 1
12 basınç... [düşünüyor].
13 Alp: Neden 10 ile çarpıyoruz? [düşünüyorlar]. Şimdi 0,31
14 başlangıç onunla ilgili bir sorun yok.
15 Can: (p – 1) ile de bir sorun yok.
16 Alp: İkisinin şeyi 0,3. 0,3 çarpı $\frac{1}{20}$ olunca böyle
17 yazmayayım $\frac{5}{100}$ yazayım. İşte $\frac{5}{10}$ şeyden olabilir. Yani
18 10 ile çarpmamızın nedeni, biz hocam şey yaptık, 0,05
19 ile çarptık sonra 10 ile çarptık ama mesela şey
20 yapabiliriz, burada mesela 0,1 0,05 artış değerine göre
21 bu bunun 2 katı, onu boşverip biz önce 20'ye böldük
22 sonra 10 ile çarptık, o yüzden 10 oldu yani aslında
23 önemli olan 2. $\frac{0.1}{0.05}$ bu da 1 atmosfer basınçta artış
24 değeri.
25
26

Öğrencilerin 10 ile çarpmalarının gerekçesini açıklamaları istendiğinde, öğrenciler değişim miktarı ya da değişim oranı fikrini ifade etmeyip işlemsel olarak ulaştıkları ifadeyi bağlamla ilişkilendirmeye çalışmışlardır [2-3]. Aslında doğru ifadeyi deneyerek ulaştıkları için gerekçesini kendilerine soru sorulması üzerine düşünmüşlerdir. Gerekçe sunmak için yaptıkları açıklamalar kendilerine de mantıklı gelmeyince düşünmeye devam etmişler ve böylelikle aslında 1 atmosferlik basıncın oksijenin çözünmesinde yol açtığı değişim miktarının önemli olduğu sonucuna ulaşmışlardır [21-26]. Öğrencilerin zihinden hesaplamalarla ulaştıkları eşitliğin nedeninin sorgulanması ve ısrarla gerekçelendirmelerinin istenmesi ile öğrenciler doğrusal ilişkide bağımsız değişkendeki 1 birimlik artışın bağımlı değişkende yol açacağı değişimin bir başka deyişle değişim oranının önemli olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Bu süreçte öğrencilerin zihinsel olarak çarpımsal karşılaştırma yapmaları bu çokluğa ulaşmalarını sağlamıştır.

İki değişken arasındaki ilişkinin elde edilmesinin ardından öğrencilerin bu ilişkinin matematiksel olarak bir fonksiyona karşılık geldiğini belirlemeleri ve bir fonksiyonu ifade etmede gerekli olan tanım ve değer kümesini düşünmeleri istenmiştir. Öğrencilerin yazmış oldukları iki doğrusal fonksiyona ait tanım ve değer

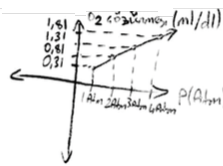
kümelerini belirlemelerinde sunulan bağlam etkili olmuştur. Basınç ve derinlik üzerine kolaylıkla yorum yapabilen öğrenciler yazmış oldukları ifadelerin hangi değerler için geçerli olacağı üzerine tartışmışlardır. Bunun yanı sıra öğrenciler yazmış oldukları bu ifadelerin matematiksel olarak denklem olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrencilerin sözel olarak denklem kavramını kullanmaları üzerine araştırmacı denklem ve fonksiyon için zihinlerindeki anlamları ortaya çıkarmaya çalışmıştır.

1	Araştırmacı:	Denklemden neler yapıyorsunuz?
2	Can:	Neler yapıyoruz?
3	Araştırmacı:	Denklem versem ben size?
4	Alp:	Ama denklemde bilinmeyen oluyor.
5	Can:	Burada da bu bilinmeyen mesela [Normal ortamda oksijen çözünmesini gösteriyor.]
6	Alp:	Öyle diyebilir miyiz?
7	Can:	Diyemez miyiz?
8	Araştırmacı:	Burada bu mu bilinmeyen, bu biliniyor mu [basıncı gösteriyor]?
9	Alp:	O değişken, yani şeye göre değişiyor basınca göre.
10	Can:	O da değişken o da basınca göre değişiyor,
11	Alp:	Denklem deyince o çözdüğümüz sorularda falan hep x i buluyoruz, burada ama bulunacak bir şey yok,
12		bulmamız gereken bu [oksijen çözünmesi] o da buna göre [p] değişiyor.
13		ooo
14	Araştırmacı:	Biraz önce sen denklem için ne dedin? Denklemlerle karşılaşınca ne yapıyoruz dedin?
15	Can:	x ve y'yi bulmaya çalışıyoruz.
16	Alp:	x ve y'yi buluyoruz evet.
17	Araştırmacı:	Buradaki fikir ne peki? Ne yapıyorsunuz burada? [Öğrencilerin yazmış oldukları ilişkileri gösteriyor.]
18	Alp:	İşte basınca göre çözünme miktarını bulmaya çalışıyoruz.

Araştırmacının sorusu üzerine Can denklem ve fonksiyon kavramlarının her ikisinde de değişkenlerin kullanıldığı konusunda ısrarcı ifadelerde bulunurken [5-6; 12], Alp denklemde belirli bir x değerinin bulunmaya çalışıldığını, fonksiyonda ise eş zamanlı değişen iki çokluk olduğunu açıklamıştır [13-16]. Alp'in açıklamaları doğrultusunda öğrenciler ulaşmış oldukları ifadelerde x değiştikçe y değişkeninin farklı bir değerinin olduğunu ancak denklem ifadelerinde sadece belirli değerlerin söz konusu eşitliği sağladığını açıklamışlardır [4-12, 18-25]. Bu sonuçlara ulaşmalarında sunulan bağlamların öğrencilerin düşüncelerini desteklediği görülmüştür [11-12].

Öğrenciler fonksiyona yönelik eş zamanlı değişim ve eşleme fikirlerine, denkleme yönelik ise belirli bir y değerinin belirli bir x değeri ile eşleştiği fikrine sahip olmuşlardır.

Fonksiyon kavramı üzerine konuştuktan sonra öğrenciler fonksiyonun farklı gösterimleri arasında ilişkilendirmeler yapmışlardır. İlk olarak basınç ve oksijenin çözünme miktarı arasındaki ilişkiyi temsil eden grafiği çizmişlerdir. Bu grafiği çizerken basıncı x eksenine ile oksijen çözünme miktarını y eksenine eşlemişler ve belirledikleri noktaları birleştirerek bir doğru grafiği oluşturmuşlardır.



Ulaştıkları cebirsel ifade, grafik ve tablo değerlerini birbiri ile ilişkilendirmeleri istenen öğrenciler, tabloda verilen iki sütundaki değerlerin değişim oranının grafiksel gösterimde eğime karşılık geldiği, cebirsel gösterimde ise $f(x) = ax + b$ ifadesindeki a katsayısına karşılık geldiği sonucuna ulaşmışlardır. Böylelikle doğrusal fonksiyona ilişkin kritik bir çokluk olan değişim oranını üç farklı gösterim açısından yorumlamışlardır. Sonrasında basınç ile hiperbarik ortamdaki oksijenin çözünme miktarı arasındaki ilişkiyi kolaylıkla yazabilmişlerdir.

1	Araştırmacı:	Şimdi peki grafiğini çizdiniz, ifadeyi de yazdınız bu
2		şekilde, peki şimdi grafiği bu ifadeyle [cebirsel ifadeyi
3		gösteriyor.] ve bir de şu tablodaki [etkinlikteki tabloyu
4		gösteriyor.] değerlerle inceleyin, neler
5		çıkartabilirsiniz? Neler yorumlayabilirsiniz?
6	Alp:	Mesela 1 ile 2 arasında 0,56 artıyor 1 ile 1,5 arasında
7		0,25 artıyor. Tabloyla karşılaştırdığımızda.
8	Araştırmacı:	İnceleyin bakalım.
9	Can:	Bu y bu x değil mi [grafikte eksenleri söylüyor]?
10	Alp:	Evet. Şimdi 1 atmosferden başlıyor, bu da 1
11		atmosferden başlıyor, zaten bunu [grafiği] buna
12		[tablo] göre yaptık. Tek şunları değiştirdik, [diğer
13		değerleri] o da fonksiyonumuza göre bulduk.
14	Can:	Daha doğrusu denklemi ona göre bulduk, grafiği
15		denkleme göre yaptık.
16	Alp:	Fonksiyonu.
17	Can:	Hıh işte.

- 18 Alp: Fonksiyonu buna göre yapık, tabloya göre, grafiği de
19 fonksiyona göre.
20 $f(x) = \frac{x-1}{2} + 0.31$
- 21 Can: Fonksiyon $ax + b$ işte.
22 Alp: Doğrusal fonksiyon.
23 Araştırmacı: Başka peki? Grafiği inceleyin biraz, grafikte neler
24 üzerine konuşabilirsiniz?
25 Alp: Eğimini bulsak. İki nokta arası
26 Şurası 0,51 [y eksenindeki iki değer arası] şurası 1 [x
27 eksenindeki iki değer arası]
28 Araştırmacı: Şurası kaç?
29 Alp: 0,51 şu ikisinin arası.
30 Can: 50
31 Alp: 50 pardon.
32 Can: İşte eğim a olduğu için.
33 Alp: $O \frac{1}{2}$ çıkıyor.
34 Araştırmacı: Peki, o tabloda neydi?
35 Alp: O ezbereydi hocam mesela $ax + b$ 'de eğim a'dır, $ax +$
36 $by + c$ 'de $\frac{-b}{a}$ dır. O mesela onu burada görüyoruz
37 direkt katsayısına eşit olduğunu.
38 Araştırmacı: Peki, tabloda o ne?
39 Can: Hangisi?
40 Araştırmacı: Bulduğunuz değeri tabloyla karşılaştırın tabloda ne
41 peki?
42 [tabloyu inceliyorlar]
43 Can: $\frac{1}{2}$ tabloda. Bu değerleri ama aynısı çıkıyor.
44 Araştırmacı: Nasıl?
45 Alp: 1'den çıkartıyorduk bu değerleri.
46 Araştırmacı: Sadece $\frac{1}{2}$ ne?
47 Can: Orada da aynı şey.
48 Araştırmacı: Ne peki?
49 Can: $\frac{1}{2}$ bunun [ikinci sütunun] artış miktarının bunun [ilk
50 sütun] artış miktarına bölümü.

Öğrenciler elde ettikleri doğrusal grafiğindeki noktalar arası değişimlerin tablo değerlerindeki değişimlerle aynı olduğunu [6-7] çünkü grafiği çizerken tabloda verilen değerlerinden yararlandıklarını [11-13] ifade etmişlerdir. Sonrasında grafiksel gösterimde eğimin değerini bularak bu değerlin cebirsel ifadede x'in katsayısına [25-31] tabloda ise bağımlı değişkendir artış miktarının bağımsız değişkendir artış miktarına bölümüne [49-50] karşılık geldiğini belirtmişlerdir. Öğrenciler bu etkinlik ile fonksiyon kavramı ile ilgili kritik noktalara ilişkin fikirlere ulaşmışlar ve eş zamanlı

değişim, eşleme, değişim miktarları, değişim oranı, dönüşüm gibi zihinsel eylemleri çözümlerine yansıtmışlardır.

Etkinliğin ikinci aşamasında ilk olarak $f(x) = ax + b$ ifadesini yazmışlardır. a katsayısının eğim olduğunu b katsayısının ise orijinden geçen $f(x) = ax$ fonksiyonun grafiğinin b birim kadar ötelenmesine neden olduğunu açıklamışlardır. Bu aşamada araştırmacı öğrencilerin b katsayısının aynı zamanda doğrunun y eksenini kesen noktayı gösterdiği fikrine ulaşmaları amacıyla sorular yöneltilmiştir. Etkinlikteki bağlamlar kapsamında doğrusal fonksiyonların grafiklerinin başlangıç noktasının $(0,b)$ olması sebebiyle öğrenciler b katsayısının doğrunun başlangıcını belirttiğini ifade etmişlerdir. Bunun üzerine araştırmacı öğrencileri farklı doğrusal fonksiyonlar üzerine çalışmaya yönlendirerek b katsayısının aynı zamanda doğrunun y eksenini kestiği nokta olduğu sonucuna ulaşmalarını desteklemiştir. Ardından öğrencilerin a katsayısının anlamına ilişkin düşüncelerini ortaya çıkarmak amacıyla sorular yöneltilmiştir.

1	Araştırmacı:	Eğim dediğiniz ne?
2	Alp:	Herhangi iki nokta arasındaki değişimin miktarı.
3	Araştırmacı:	Değişim miktarı mı?
4	Can:	$\tan \alpha$
5	Alp:	Direkt öyle demeyelim $\tan \alpha$.
6	Araştırmacı:	Ne olabilir?
7	Alp:	Uzunluğu değildir,
8	Can:	Doğrunun y eksenini kestiği noktanın orijine
9		uzaklığının x eksenini kestiği noktanın orijine
10		uzaklığına bölümü
11	Araştırmacı:	Yani şurada sen eğimi bulmak için 5'ten 0'ı çıkarıp,
12		burada da 0'dan -5 çıkarıp buluyorsun sonra
13		bölüyorsun.
14	Can:	Evet.
15	Araştırmacı:	Peki neden orijini alıyorsunuz? Orijin dışında bir
16		noktayı alamaz mıyız?
17	Alp:	Alabiliriz.
18	Can:	Niye orijini referans olarak almıyor muyuz?
19	Araştırmacı:	Niye orijini mi alırsanız sadece?
20	Alp:	Mesela şu noktayla şu noktayı da alabiliyorduk.
21		[doğru üzerinde iki nokta gösteriyor]. Dik üçgen
22		olduğu her yerde alamıyor muyuz?
23	Araştırmacı:	Neden peki? Neyi bulmaya çalışıyorsunuz orada?
24	Alp:	Burada şu uzunlukla şu uzunluğun
25	Araştırmacı:	O uzunluklar ne?

- 26 Alp: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
 27 ooo
 28 Araştırmacı: Eğim tam manası ne, ne anlama geliyor eğim
 29 dediğiniz? Genel olarak düşünün tablodaki değerleri
 30 düşünün.
 31 Alp: İşte artış miktarları.
 32 Araştırmacı: Ama mesela artış miktarlarını buluyorsunuz, artış
 33 miktarlarının nesini buluyorsunuz?
 34 Alp: Mesela birinde 0,1 bulmuştuk, diğerinde 0,05
 35 bulmuştuk, bu ikisini oranladık 2 bulduk.
 36 Araştırmacı: O iki ne işte?
 37 Alp: Ters oranlarsak işte 1/2
 38 Araştırmacı: O ½ ne şu durumda?
 39 Alp: ½ yani buradan şey yaparsak y nin ne kadar arttığı ile
 40 x in ne kadar arttığı şeyi.
 41 Araştırmacı: ½ ye baktığınızda x ne kadar artarken y ½ artıyor?
 42 Alp: x 1 artarken y 2 artıyor.
 43 ooo
 44 Alp: x'in 1 artarken y ne kadar artıyorsa o eğime eşittir.

Öğrenciler a katsayısının değerinin değişmesi ile doğrunun dikliğinin değiştiğini örnekler üzerinden açıklamışlardır. Bu açıklamaların ardından araştırmacı eğimin ne anlama geldiğini sorgulatmıştır. Öğrenciler grafik üzerinden düşünerek y'lerin değişim miktarının x'lerin değişim miktarına oranı olan $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ifadesini açıklamışlardır [8-10]. Cebirsel ifade ile ilişkilendirmeleri istenen öğrenciler bağımsız değişkendeki 1 birimlik değişime karşılık bağımlı değişkende gerçekleşen değişim miktarının grafiksel gösterimde eğime karşılık geldiği sonucuna ulaşmışlardır [39-44].

Öğrenciler eğim üzerine konuştuktan sonra fonksiyon ile denklem arasındaki ilişkiyi tartışmışlardır. Cebirsel olarak denklem kavramında x'in tek bir değerinde eşitliğin sağlandığını, doğrusal fonksiyonda ise birçok x değeri için f(x)'lerin var olduğunu açıklamışlardır. Grafiksel olarak ise, denklemin tek bir nokta olduğu ve bu noktanın denklemle ilişkili olarak oluşturulan doğrusal fonksiyonun grafiğinin üzerinde bir nokta olduğunu ifade etmişlerdir. Araştırmacı yönelttiği sorularla öğrencilerin denklemin kökünün fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği noktaya karşılık geldiğini anlamlandırdıklarını ortaya çıkarmıştır. Ek olarak, öğrenciler bir denklemin farklı sabit sayılarla çarpılması durumunda çözüm kümesinin değişmediği ve oluşturulan fonksiyonların farklı oldukları sonuçlarına ulaşmışlardır.

- 1 Alp: $[f(x) = 3x + 2$ ve $f(x) = 6x + 4$ fonksiyonlarını
 2 karşılaştırıyor.] Mesela birinde x 1 artarken y 3 artmış,
 3 diğerinde x 1 artarken y 6 artmış.
 4 Araştırmacı: Yani artışı daha hızlı, dolayısıyla daha dik değil mi?
 5 Alp: Evet.
 6 Araştırmacı: Başka?
 7 Alp: b leri farklı birazcık daha solda bir şey, bu noktaya eşit
 8 olması için, ve bu bunun katı.
 9 Can: $2f(x) = g(x)$ desek olur.
 10 Araştırmacı: Bu $[g(x)]$ bunun $[f(x)]$ katı.
 11 Can: Bu ifadeyi $[f(x) = 3x + 2]$ ikiyle çarptık.
 12 Araştırmacı: Aynen bu ifadeyi ikiyle çarptınız, evet peki bunların
 13 ortak olan şeyleri ne?
 14 Can: a 'ların ve b 'lerin oranı.
 15 Araştırmacı: Evet başka?
 16 Can: x eksenini kestiği yer aynı.

Öğrenciler yazmış oldukları $f(x) = 3x + 2$ ve $f(x) = 6x + 4$ fonksiyonlarını karşılaştırmışlar ve bu karşılaştırmada değişim oranlarının değiştiğini belirtmişlerdir [1-3]. Bu fonksiyonların grafiklerinin eğimlerinin değiştiğini ancak x eksenini kesen noktalarının değişmediğini açıklamışlardır [1-3; 14-16].

Dünya'nın Dibi etkinliğinde öğrenciler doğrusal fonksiyonun öğrenilmesini tetikleyen zihinsel eylemlerde bulunmuşlar ve eşleme, toplamsal karşılaştırma gibi nicel operasyonlar gerçekleştirerek yaptıkları nicel muhakemeler yoluyla kavrama ilişkin soyutlamalara ulaşmışlardır.

Can bu etkinliğin ardından yazmış olduğu yansıtıcı günlüğünde eğimin tanımına değinmiştir. Eğimi x 'in 1 birim artması durumunda y 'nin değişimi olarak ifade etmiştir. Bu sözel ifadeyi de cebirsel olarak $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{1}$ şeklinde belirtmiştir.

$$-X, \text{ bir birim artarken } y \text{ 'deki değişim eğimi verir. } \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{1} \right]$$

Alp öğretim deneyinin ardından yazdığı yansıtıcı günlüğünde eğimin anlamını yorumlamıştır. Eğimi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ olarak ifade etmesi iki çokluğun değişim oranı olarak düşündüğünü göstermiştir. Ek olarak, denklem ve fonksiyon arasındaki farklılığa değinirken bir denklemin herhangi bir sayı ile çarpılması durumunda denklemin

değişmeyeceğini ancak fonksiyonun herhangi bir sayı ile çarpılması durumunda değişeceğini ifade etmiştir.

$\propto$ x bir birim değişirken y 'nin değişim miktarı $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dir.
 $\propto$ Fonksiyon tanım kümesindeki değerleri diğer kümesindeki değerlere eşler, x 'i y 'ye dönüştürür.
 $\propto$ $ax+b=0$ ile $k(ax+b)=0$ denklemleri birbirine eşittir. Ama;
 $f(x)=ax+b$ ile $h(x)=k(ax+b)$ birbirine eşit değildir.

El Castillo Etkinliği Kapsamında Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler.-El

Castillo etkinliğinde öğrenciler ilk olarak verilen fotoğraflardan yapının özelliklerini incelemeye başlamışlardır.

1	Alp:	Şurada [yapının bir yüzündeki basamakları
2		gösteriyor.] 91 tane var.
3	Can:	Tamam.
4	Alp:	Ben şu cetveli çıkartayım. Şimdi kalınlıkları eşit gibi
5		şu iki kat arasındaki diimi?
6	Can:	Eşit, aynen.
7	Alp:	Azalarak gitmiyor. Yükseklikleri mesela şöylece
8		sayılmaz ki bir katta kaç var. Oran eşitse 91 merdiven
9		varsa ve dokuz kat varsa 10 merdiven toplamda her
10		birinde.

Etkinliğin ilk sorusunda yapının katlarına bağlı taban uzunluklarını gösteren ilişkinin matematiksel ifadesinin yazılması istendiği için öğrenciler yapının basamak ve kat özelliklerine odaklanmışlardır [4-5]. Yapının katlarının birbirleriyle eşit yükseklikte olmasına dikkat çekerek her bir kattaki basamak sayısının eşit olduğunu belirlemişlerdir [3-4; 6-7]. Bu incelemeler ile yapının katlarındaki taban uzunluklarının da düzgün bir şekilde değiştiğini sezmeye başlamışlardır.

Öğrenciler verilen fotoğraflardaki insanlardan yararlanarak yapının alt taban uzunluğunu 2940 cm ve üst taban uzunluğunu 1170 cm olarak hesaplamışlardır. İlk olarak yapının alt taban uzunluğu ile üst taban uzunluğu arasında toplamsal karşılaştırma yaparak alt tabandan üst tabana kadar olan azalma miktarını hesaplamışlardır. Sonrasında yapının düzgün olmasını göz önüne alarak alt taban uzunluğu ve üst taban uzunluğu arasındaki farkı eş parçalayarak ardışık iki katın taban

uzunlukları arasındaki değişim miktarını belirlemişlerdir. Ancak buradaki değişimi belirlerken toplam değişim miktarını dokuz eş parçaya ayırmak yerine sekiz eş parçaya ayırmışlardır. Ancak yaptıkları bu yanlış işlem öğrencilerin kazanmaları beklenen fikirlerin önüne geçmemiştir.

$$\begin{aligned} 1. \text{ Katın taban uzunluğu} &= 29 \text{ m } 40 \text{ cm} \\ 9. \text{ Katın } &= 11 \text{ m } 77 \text{ cm} \end{aligned}$$

• Yukarıdaki etkinlikte I. ve IX. katlarını bulmuştuk.
 Fikisi: arasındaki fark $\rightarrow 17,63$
 • Arada 8 kat var:
 $17,63 \overline{) 2,20375} \Rightarrow \text{Her kattaki uzunluk ortası.}$

Bu değişim miktarının ardışık her kat arasında aynı olduğunu ve katın taban uzunluğunun katın sayısına bağlı değiştiğini ifade etmişlerdir.

1	Alp:	Bak bu x bu y, x 1 artarken bu [y] bu kadar [2,20375]
2		artıyor.
3	Araştırmacı:	Ne yapıyorsunuz?
4	Alp:	Fonksiyon oluşturacağız.
5	Araştırmacı:	Fonksiyon mu ifade ediyormuş?
6	Alp:	Hıhı.
7	Araştırmacı:	Her kat için oluşan karelerin kenar uzunluklarını
8		buldunuz.
9	Alp:	Hıhı.
10	Araştırmacı:	Niye bir fonksiyon olduğunu düşünüyorsunuz?
11	Alp:	Mesela bunun artışına [kat sayısı] göre bunun artışı
12		[katların taban uzunlukları] değişiyor. Mesela 4.katın
13		uzunluğu, önce yaptığımız gibi, taban artış miktarı,
14		mesela bu eğim çıkıyor, bu 1 artarken bunlar bu kadar
15		[2,20375] artıyor.
16	Araştırmacı:	Fonksiyon olduğunu niye düşündünüz?
17	Alp:	İşte dediğim gibi, bunlar x bunlar y, x'e göre y'ler
18		değişiyor.
19	Araştırmacı:	O yüzden bir fonksiyon dediniz. Fonksiyonun nasıl bir
20		fonksiyon olduğunu düşünüyorsunuz?
21	Alp:	Doğrusal.

Kat sayısına bağlı olarak katların taban uzunluklarının değişim miktarının sabit olması sebebi ile iki çokluk arasında doğrusal ilişki olduğu sonucuna ulaşmışlar ve eğimin var olduğunu ifade etmişlerdir [10-14]. Buna ek olarak, öğrenciler bu iki çokluk arasındaki ilişkinin matematiksel ifadesinin fonksiyon olmasının gerekçesini

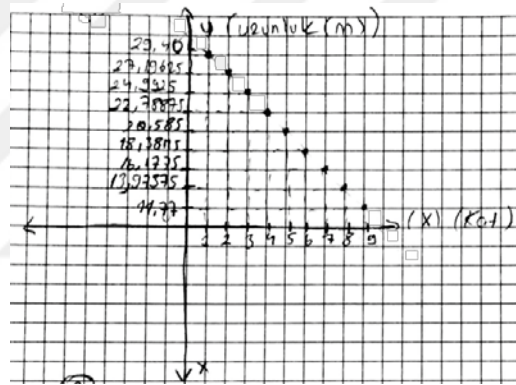
katların sayısına karşılık gelen x değerlerine bağlı olarak katların taban uzunluklarına karşılık gelen y değerlerinin değişmesi olarak açıklamışlardır. Öğrenciler taban uzunluklarının bulunduğu kat sayısına bağlı olarak eş zamanlı değiştiği fikrine sahip olarak fonksiyon kavramına odaklanmışlardır [15-17].

Oluşturdukları fikirleri doğrultusunda doğrusal fonksiyonun cebirsel ifadesini $f(x) = 29,40 - 2,20375(x - 1)$ olarak yazdıktan sonra grafiğini çizmişlerdir. Grafiği doğrusal fonksiyon ifadesini oluşturmak için belirledikleri noktalar yardımıyla çizmeye başlamışlardır.

1	Can:	[x eksenindeki 1, 2, 3,... gösteriyor] Bunlar 9, 8, 7, 6
2	Alp:	Direkt şu noktaları sıralayabilirsin.
3	Araştırmacı:	Bu mu grafik peki?
4	Alp:	Evet, ama doğru olur mu? Daha da yukarı gitmiyor
5		aşağıya gitmiyor
6	Can:	[sildi uzayan uçlarını]
7	Araştırmacı:	Bu şekilde mi olacak peki? Böyle niye birleştirdiniz
8		noktaları?
9	Can:	Şunları mı?
10	Araştırmacı:	Şurada noktaları sonradan birleştirdiniz ya? [doğru
11		yaptıklarını ifade ediyor]
12	Alp:	Doğru mesela şöyle gitmiyor şöyle gitmiyor sürekli bir
13		azalma yok mesela 11.77den direk 13'e çıkıyor 12, 13
14		olmuyor.
15	Araştırmacı:	Peki, siz bu fonksiyonu neye bağlı yazdınız?
16	Alp:	Tanım kümesi ve değer kümesi mi diyorsunuz?
17	Araştırmacı:	Yani bu $f(x)$ neye bağlı?
18	Alp:	Neye bağlı derken
19	Can:	11.77 ile 29.40 arasındaki şeye iki nokta
20	Araştırmacı:	Yani neye göre değişiyor fonksiyonunuz?
21	Alp:	Katlara göre
22	Araştırmacı:	Kata göre değişiyor.
23	Can	Tanım kümesini yazalım. [tanım kümesini ve değer
24		kümesini yazıyorlar]
25	Araştırmacı:	Peki, bu 1 ile 9 arasındaki tüm her şey olabiliyor mu o
26		zaman şu durumda?
27	Alp:	Reel sayılar olmuyor tam sayılar olması lazım onu nasıl
28		[düşünüyor] şey, bir ile dokuz arasında elemanıdır tam
29		sayı desek olur mu?
30	Can:	[düşünüyor]
31	Araştırmacı:	Öyle olduğunu mu düşünüyorsunuz?
32	Alp:	Hıhı yani 1,2,3,4,5,6,7,8,9 da geçerli, tam sayı doğal
33		sayı fark etmez. $[1,9] \in \mathbb{N}$ yazdı]
34	Araştırmacı:	Peki, o zaman bu grafik karşılıyor mu onu?

35 Alp: Şu şeyler olmaması gerekiyor [aradaki çizgileri siliyor
36 sadece noktalar kalıyor.]

İlk olarak x eksenine 1, 2, 3, ..., 9 olarak kat sayılarını ve y eksenine bu katların taban uzunluklarını yazmışlar ve x ve y değerlerini eşleyerek analitik düzleme yerleştirmişlerdir. Belirledikleri dokuz noktayı birleştirerek sınırlı bir aralık için doğru grafiği çizmişlerdir. Araştırmacının öğrencilerin çizmiş oldukları grafiğin gerekçesini açıklamalarını istemesi üzerine öğrenciler ilk olarak yazmış oldukları fonksiyonun tanım kümesi üzerine tartışmışlar ve tanım kümesinin reel sayılar olmayacağı sonucuna ulaşmışlardır [27-33]. Yapının katlarının sürekli azalmadığını dolayısıyla en alt taban ile en üst taban uzunluğu arasında yaptıkları parçalamanın grafiksel olarak da sonlu miktarda olduğunu gösterebilmek için noktasal bir grafik çizmeleri gerektiği sonucuna ulaşmışlardır [12-14, 35-36].



Katlara bağlı olarak taban uzunluklarına ilişkin fonksiyonu yazan öğrenciler sonraki soruda yapının basamaklarına bağlı basamaklardan tabana paralel olarak alınan kare şeklindeki kesitlerin kenar uzunluklarını gösteren fonksiyon üzerine düşünmüşlerdir.

1 Alp: Kare hepsini alırsak kare tabana paralel alırsak oluşan
2 kesitlerin uzunlukları basamağa göre değişimini istiyor
3 mesela bu en alt taban desek şurası [resim üzerinde
4 gösteriyor] 12. oluyor burası şöyle birazcık daha küçük
5 oluyor yani 10 cm değişim oluyor yükseklikte.
6 Araştırmacı: O değişim ne kadar olur?
7 Alp: 10 merdiven bir kata eşit oluyor bir kattaki değişim bu
8 kadar o zaman bir merdivendeki değişim bunun 10'da
9 biri.
10 Can: Aynen, 0.220375

- 11 Alp: 2 m 20 cm değişiyor merdiven başına küçülüyor, bu
12 daha zor.

Ardışık iki kat arasında 10 basamak olması sebebiyle ardışık iki kat arasındaki taban uzunluğunu eş parçalama fikri ile 10 eşit parçaya ayırmışlar ve böylelikle katlar arasındaki taban uzunluklarının değişim miktarını ardışık iki basamak arasındaki değişim miktarına dönüştürmüşlerdir. Bu aşamada yapının basamakları arasında eşit mesafe olması öğrencilerin değişim oranının sabit olduğunu düşünmelerini desteklemiştir [1-12]. Merdiven basamaklarını birinci çokluk ve bu basamaklardan tabana paralel olarak oluşturulan kare kesitlerin kenar uzunluklarını ikinci çokluk olarak düşünerek iki çokluk arasında doğrusal ilişkiyi oluşturmuşlardır. Bir önceki aşamada katlara bağlı oluşturdukları doğrusal fonksiyon ifadesinden yararlanmışlar ve tanım kümesini $[1,90] \in \mathbb{N}$ şeklinde ifade etmişlerdir. Bu ilişkinin grafiğini ise katlara bağlı taban uzunluklarına ilişkin çizilen grafikten yola çıkarak yorumlamışlardır. Dokuz noktadan oluşan grafikte birbirini takip eden iki nokta arasındaki mesafeyi daraltmışlar ve noktaları birbirine yaklaştırarak benzer şekilde noktasal bir grafik çizmişlerdir.

Bir sonraki soruda yapının herhangi bir yüksekliğinden tabana paralel olarak çizilen kesit karelerin kenar uzunluklarını bulundukları yüksekliğe bağlı olarak ifade eden fonksiyon üzerine tartışmışlardır.

- 1 Alp: Herhangi bir yüksekliğinde tabana paralel olacak
2 şekilde hani mesela yükseklik dediği şurası şurası
3 şurası şurası [eliyle fotoğrafta herhangi bir yükseklik
4 gösteriyor.]
5 Can: Mesela şey yükseklik buranın şeyi o kesitin uzunluğu.
6 Tüm merdivenlerin uzunluğu kaç cm di?
7 Alp: 18 m 20 cm bulduk. Ama şey diyor galiba tabana
8 paralel diyor ya atıyorum bu noktayı seçtik, şöyle bir
9 şey çiziyoruz, kenarı uzunlukları. Herhangi bir
10 yükseklik dediğinde çizmemiz gerekiyor bence çünkü
11 merdivenlere veya katlara ayırmıyoruz.
12 Can: Mesela merdivenin ortasında da çizilebilir.
13 Alp: Şunun birleşmiş hali olması gerekiyor.
14 Araştırmacı: Peki yine doğrusal olduğunu düşünüyor musunuz?
15 Onu yazacak olursanız bu sefer nasıl yazarsınız
16 cebirsel olarak?
17 Can: Burada bir x verdik.

- 18 Alp: O x mesela merdivendi, kattı, burada merdivene kata
 19 göre değil, herhangi bir noktaya göre diyoruz. Nasıl
 20 yapabiliriz, şey yapabiliriz mesela şurası bilinirse
 21 Araştırmacı: Hani grafiği az çok seziyor musunuz? Grafiğin nasıl
 22 olacağını, nasıl olacak grafiği?
 23 Alp: O noktalar arası noktalar olacak, o noktalar arası
 24 noktalar olacak. Sonsuz nokta gibi oluyor, ne kadar
 25 fazla küçültürseniz o kadar fazla nokta, o da bir
 26 doğruya eşit değil mi sonsuz noktalar

Oluşacak kareleri düşünürlerken yapının üzerinde sonsuz nokta belirleyebileceklerini ifade etmişlerdir. Ardışık iki basamak arasında yapılacak eş parçalamanın sonsuz miktarda olduğu ve bu sebeple çizilecek grafiğin noktasal olmayacağı sonucuna ulaşmışlardır [23-26]. Yapının düzgün olması nedeniyle herhangi iki yüksekliğe bağlı oluşan karelerin kenar uzunluklarının değişim oranı sabit olacağı fikriyle doğrusal bir grafik olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Öğrenciler oluşturdukları üç kenar uzunluğunu gösteren fonksiyonun da doğrusal fonksiyon olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Özellikle fonksiyonların grafiklerini çizerlerken eş parçalama fikrine sahip oldukları görülmüştür. Dolayısıyla kata bağlı kenar uzunluğu fonksiyonunu oluşturduktan sonra sırasıyla basamağa ve yüksekliğe bağlı fonksiyonların cebirsel ifadelerini oluşturmada ve grafiklerini çizmede problem yaşamamışlardır. Bu süreçte kata, basamağa ve son olarak yüksekliğe bağlı fonksiyonlar üzerine çalışmaları sürekli fonksiyon fikrine geçiş yapabilmelerini desteklemiştir.

Etkinliğin ikinci aşamasında öğrencilerden doğrusal fonksiyon fikirlerinden yararlanarak alan fonksiyonunu temsil eden ikinci dereceden fonksiyon kavramına ulaşmaları beklenmiştir. Öğrenciler katlara bağlı taban alanı fonksiyonlarını ifade etmek için ilk olarak bütün katların taban alanlarını hesaplamışlar ve bir azalmanın olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrenciler aralarında doğrusal ilişkiden farklı bir ilişkinin söz konusu iki çokluğun değişimin yönünü belirlemişlerdir.

- 1 Alp: Hani kenar uzunlukları orantılı şekilde gidiyorsa
 2 alanları da orantılı gitmek zorundadır.
 3 Can: Evet.
 4 Alp: Ve orantılı bir şekilde çıkarttık
 5 Araştırmacı: O orantı nasıl bir orantı peki?

- 6 Alp: Yani şey olacak $841 - 90.(x - 1)$ [en alt taban
7 uzunluğunu olan 29 metrenin karesini alarak 841
8 buldular.] mesela bunun için, yine $ax + b$, mesela
9 üçten bir 90 ile çarpılır oluyor. [$f(x) = 841 -$
10 $90(x - 1)$ 90 yazdılar]
11 Araştırmacı: Bu mu sizce o zaman mesela ikinci katın alanı?
12 Alp: [hesaplıyorlar] 751
13 Araştırmacı: Peki, ikinci katın bir kenarının uzunluğu kaçtı?
14 Alp: Sayılar farklı olduğu için burada kök 751 çıkar.
15 Mesela kök 751 kaç çeşit 27'ye yakın bir değer olması
16 gerekiyor. [hesaplıyorlar] o da yuvarladığımız için .

Ancak bu alan ifadeleri kenar uzunluklarına bağlı olduğu gerekçesiyle ardışık iki katın taban alanları arasındaki değişimin sabit olduğunu düşünmüşler ve doğrusal fonksiyon olarak ifade edebileceklerini belirtmişlerdir [1-2]. Cebirsel ifadeyi yazarlarken kenar uzunluğu fonksiyonunu oluşturma sürecindeki yaklaşımlarına benzer olarak en alt tabanın alanından en üst tabanın alanını çıkarıp sekize bölerek sabit değişim miktarını hesaplamışlar ve alan fonksiyonunu $f(x) = 841 - 90.(x - 1)$ olarak yazmışlardır [6-10]. Araştırmacının öğrencilerden bu fikirlerine dayalı olarak oluşturdukları doğrusal fonksiyon ifadesini kullanarak herhangi bir katın taban alanını hesaplamalarını istemesi üzerine öğrenciler fonksiyondan yararlanarak elde ettikleri alan değerleri ile gerçek alan değerleri arasında bir sapma olduğunu anlamışlardır [12-16]. Ardından bu sapmanın nedenini bulmaya çalışmışlardır.

- 1 Alp : O sapma neden? [hesaplama yapıyorlar farklı değerler
2 arasında ve karşılaştırma yapıyorlar] Bakalım belki
3 buradan bir şey çıkar [herhangi iki kat uzunluğunun
4 karelerinin farklarına bakıyorlar] Burada kaç artmış
5 10,125 şeyi bulduk alanlar her seferinde mesela bu
6 ikisinin farkıyla bu ikisinin farkı bu bundan 10,125
7 fazla.
8 Araştırmacı: Neyine baktınız, neyi buldunuz şu an?
9 Alp: Kenarları böyle yazdık, karelerini aldık ama
10 karelerinin farkları var işte,
11 Araştırmacı: Bu sefer farkları oranlı değil mi?
12 Alp: Şimdi kesin konuşmak istemiyorum ama
13 Araştırmacı: Farkları oranlı çıkmadı mı?
14 Alp: Oranlı çıkmadı evet. Mesela burası 54,5625 çıktı gene
15 oranlı oluyor değil mi evet.
16 Can: Bunu bununla toplayınca yine oranlı çıkıyor.
17 Araştırmacı: Nasıl şimdi bunların 54 buldunuz. Bunların farkını?
18 Alp: 64,6875 bundan 10,125 fazla
19 Araştırmacı: Peki bu?

- 20 Alp: Bu da 74,8125
 21 Araştırmacı: Bu peki?
 22 Can: Mesela bunlar [karelerin alanları arası] arasındaki fark
 23 da 84,9375 Bu ikisi arasındaki fark da 10.125 olması
 24 lazım.
 25 000
 26 Alp: Ben şeyi fark ettim hocam 2,25'te bu kadar artıyor 1'de
 27 bu kadar artıyor ikincide bundan 4,5 fazla artıyor ama
 28 4,5 bunun iki katı kenarların artış miktarı alanların
 29 artış miktarının farkının iki katı

$$\begin{array}{rcl}
 29 & \rightarrow & 841 \\
 26,75 & & \\
 24,50 & \rightarrow & 600,25 \\
 22,25 & & \\
 20 & \rightarrow & 400 \\
 17,75 & & \\
 15,50 & & \\
 13,25 & \rightarrow & 175,625 \\
 11 & \rightarrow & 121
 \end{array}$$

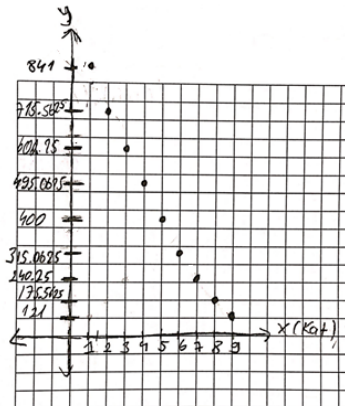
Kenar uzunluğu ile ilgili fonksiyonları oluştururken kenar uzunlukları arasındaki değişime bakan öğrenciler benzer şekilde taban alanları arasındaki değişimi incelemeye başlamışlardır. Ardışık katların taban alanları arasındaki değişimleri yazmışlar ve hepsinin birbirinden farklı olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Bir sütun olarak değişimleri yazmaları değişimler arasındaki değişim miktarlarının sabit olduğunu fark etmelerini desteklemiştir [17-29]. Katların taban alanların değişim miktarlarının değişimlerinin sabit olduğunu fark eden öğrenciler doğrusal fonksiyondaki fikirlerini genellemeleri nedeniyle kat sayısı ile katların taban alanların değişim miktarları arasında doğrusal bir ilişki olduğu sonucuna ulaşarak kata bağlı taban alanların değişim miktarlarına ilişkin fonksiyonu oluşturmaya çalışmışlardır. Ancak istenilen matematiksel ifade için bu ilişkinin anlamlı olmadığını düşünerek taban alanlarına ilişkin fonksiyonu tekrar ele almışlardır.

- 1 Can: Şey gibi oluyor, $g(x) = f^2(x)$ [$f(x)$ kenar uzunluğu
 2 fonksiyonu]
 3 Alp: $g(x) = [29 - 2.25(x - 1)]^2$ iki kenar uzunluğunun
 4 çarpımı burada ipucu vermiş [soruyu göstererek]

$$\begin{array}{rcl}
 29 & \rightarrow & 841 \\
 26,75 & & \\
 24,50 & \rightarrow & 600,25 \\
 \vdots & & \\
 22,25 & & \\
 20 & \rightarrow & 400 \\
 17,75 & & \\
 15,50 & & \\
 13,25 & \rightarrow & 175,625 \\
 11 & \rightarrow & 121
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 g(x) &= [29 - 2,25 \cdot (x-1)]^2 \\
 g: [1,9] \in \mathbb{N} &\rightarrow [121, 841] \in \mathbb{R} \\
 g(x) &= [29 - 2,25 \cdot (x-1)] \cdot [29 - 2,25 \cdot (x-1)]
 \end{aligned}$$

Bu aşamada araştırmacının “Alanı bilmek için neye ihtiyacınız var?” sorusu öğrencileri kenar uzunluklarının çarpımına yönlendirmiştir. Öğrenciler bu fikre dayalı kata bağlı taban uzunluklarının karesini alarak taban alanına ilişkin fonksiyonu oluşturabileceklerini ifade etmişlerdir [1-4]. Öğrenciler burada oluşan yeni fonksiyonun $f(x) = ax + b$ fonksiyonundan farklı olduğunu görmüşler ve bu fonksiyonun değişim miktarlarının sabit olmadığını ancak değişim miktarlarının değişiminin 10,125 olarak sabit olduğunu keşfetmişlerdir. Bu ilişkinin grafiğini çizerlerken kat sayılarını her katın taban alanının değeri ile eşleyerek oluşturdukları noktaları kareli kağıda çizdikleri analitik düzleme yerleştirmişlerdir. Öğrencilerin çizmiş oldukları grafik aşağıdaki gibidir:



- 1 Araştırmacı: Bu grafik için ne söyleyebilirsiniz?
- 2 Alp: Doğrusal değil.
- 3 Can: Doğrusal değil.
- 4 Araştırmacı: Peki, bu noktaların tümünden geçen bir doğru var mıdır?
- 5
- 6 Alp: Şöyle bir doğru mu [doğruların üzerinden çiziyor gibi gösteriyor]?
- 7
- 8 Araştırmacı: Hıhıhı. Tümünden geçen bir doğru?
- 9 Can:
- 10
- 11

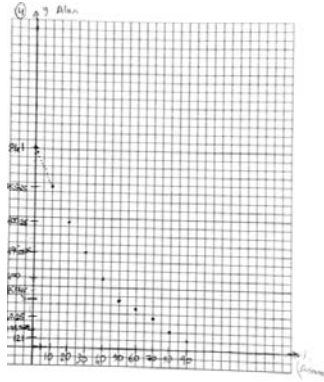


Bu doğru mu mesela?

- 12
 13 Araştırmacı: Doğru olması için ne olması gerekiyor?
 14 Alp: Düz olması gerekiyor.
 15 Araştırmacı: Yani daha matematiksel söyleyecek olursanız?
 16 Alp: Eğiminin her noktasında eşit olması gerekiyor.
 17 Araştırmacı: Peki, bunların hepsinden geçen bir doğru var mı
 18 hepsinden birden?
 19 Alp: Hepsinden birden yoktur.
 20 Araştırmacı: Neden?
 21 Alp: Çünkü mesela hani bunları birleştirdiğimizde şöyle
 22 oluyor [eğri çiziyor] atıyorum şöyle yaparsak
 23 [doğrusal] ikisinden üçünden geçebilir ama
 24 hepsinden geçmez.
 25 Araştırmacı: İkisinden üçünden geçer mi?
 26 Can: Geçmez.
 27 Alp: İkisinden üçünden de geçmez en fazla ikisinden
 geçer.
 28 Araştırmacı: İkisinden geçer mi?
 29 Alp: 
 30
 31
 32 Şöyle düşünersek geçebilir.

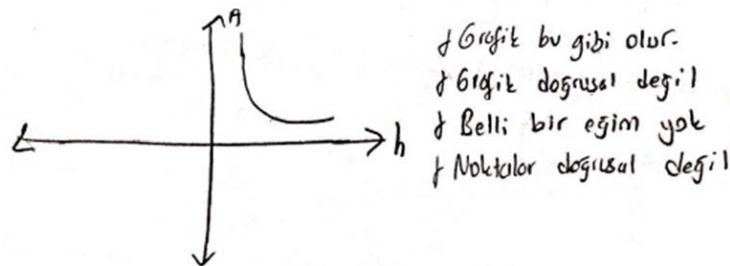
Öğrencilere bu çizmiş oldukları grafiğin yapısının nasıl olduğu sorulduğunda öğrenciler doğrusal olmadığını ifade etmişlerdir [1-3]. Grafiğin doğrusal olmamasının nedenini ise noktaları birleştirdiklerinde bir eğri oluşması ve oluşan grafiğin her noktasında eğiminin eşit olmaması olarak gerekçelendirmişlerdir [14-16]. Ek olarak, bu noktaların tümünden bir doğru geçmediğine ilişkin uygun fikirlere sahip oldukları ifadelerinden görülmüştür.

Öğrenciler bunu tamamladıktan sonra basamaklara bağlı tabana paralel olan kare kesitlerin alanlarına ilişkin matematiksel ifadeyi doğrudan söz konusu karelerin kenar uzunluklarına ilişkin fonksiyonun karesini alarak yazmışlardır. Grafiğini ise benzer şekilde kareli kağıda çizmiş oldukları analitik düzlemde ilk iki kat arasındaki basamakları gösterecek şekilde çizmişlerdir. Öğrencilerin oluşturdukları basamaklara bağlı her basamaktan tabana paralel çizilen karelerin alanlarına ilişkin fonksiyonun grafiği şu şekildedir:



1	Araştırmacı:	Nasıl olacak grafiği nasıl olacak seziyor musunuz?
2	Alp:	Yani şurada çizdiğimiz grafiğin biraz daha..
3	Can:	Noktaları sıkıştırdığımızı düşünelim.
4	Araştırmacı:	Neden peki öyle?
5	Alp:	Çünkü gene aynı şeyde aynı sayılarda aynı artış
6		miktarlarında düşerek aynı şekilde her şey aynı
7		şekilde gerçekleşir sadece birazcık daha irdeledik
8		basamakta ve aynı olması bekleniyor

Çizmiş oldukları grafiğin önceki grafikteki noktaların sıkıştırılması ile elde edildiğini ifade etmişlerdir [3]. Kata bağlı taban uzunluğundan basamağa bağlı taban uzunluğuna geçiş yaparlarken ortaya çıkan fikirlerinden yararlanarak kata bağlı alan fonksiyonun grafiğinden basamağa bağlı alan fonksiyonun grafiğine geçiş yapmışlardır [5-8]. Öğrenciler herhangi bir yüksekliğe bağlı tabana paralel kare kesitlerinin alanlarına ilişkin fonksiyonu cebirsel olarak kenar uzunluklarına ilişkin fonksiyonun karesi şeklinde doğrudan yazmışlardır. Grafiğini çizerken ise sonsuz noktanın olduğu sürekli bir grafik olacağı sonucuna ulaşmışlardır. Grafiğin doğrusal olmadığı ve eğiminden bahsedilemeyeceği çıkarımlarını yapmışlardır.



Oluşturdıkları alan grafiği ile kenar uzunluğu grafiğini karşılaştırırken alan fonksiyonunun ikinci dereceden fonksiyon olduğu, uzunlukların çarpılmasından dolayı x^2 'li terim olduğu ve bu fonksiyonun doğrusal olmadığını ifade etmişlerdir.

<u>Kesitin Kenar Uzunluğu</u>	<u>Alanı</u>
$f(x) = ax + b$	$g(x) = (ax + b), (ax + b)$
$\neq$ I. dereceden fonksiyon	$g(x) = [f(x)]^2$
$\neq$ Kareli ifade yok	$g(x) = a^2x^2 + 2abx + b^2$
$\neq$ Doğrusal	$\neq$ II. dereceden fonksiyon.
$\neq$ Bir eğim var.	$\neq$ Kareli ifade var. (Görpme işlenmiş de olsa)
	$\neq$ Doğrusal değil

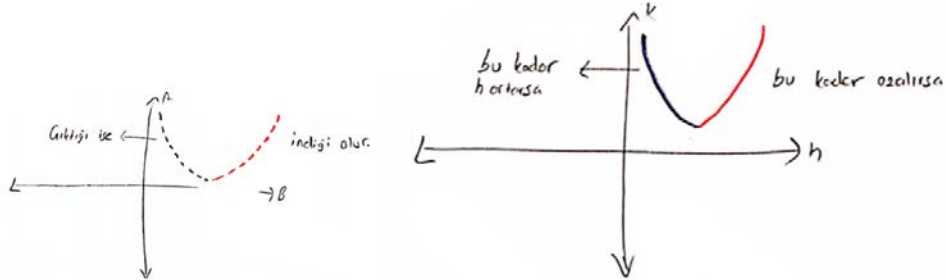
Bu ifadelerini açıklarlarken her iki fonksiyon için de çokluklar arasındaki değişimleri yorumlamışlardır.

1	Can:	Birisi doğrusal birisi değil
2	Araştırmacı:	Başka?
3	Alp:	Doğrusalın özelliği artış miktarı hep sabit, bir artıyorsa
4		hep bir artıyor, burası sürekli yukarıdan baktığımızda
5		artış miktarı hep azalıyor.
6	Araştırmacı:	Peki, hani ilk buna ortaya çıkarmaya çalışırken nelere
7		ulaştınız?
8	Can:	Aralarındaki artış miktarının sabit olmadığı
9	Alp:	Hep 4,5 çıkmıştı, 4,5 fazlası, kenar artış miktarı hep
10		2,25 ti.
11	Araştırmacı:	Orada neye ulaştınız? 4,5?
12	Can:	4,5 artış miktarlarının farkı.
13	Araştırmacı:	Hıhı, o hep aynı mıydı?
14	Alp:	O hep aynıydı.
15		Kattan başladık doğrusal olduğunu düşündük,
16		sonradan şey yaptık artış miktarlarının aynı
17		olmadığını, artış miktarları arasındaki farkın aynı
18		olduğunu. O da şeyi mi gösterir acaba, hani böyle
20		gidiyor ya birazcık daha düzgün bir şekil olduğunu,
21		çünkü mesela birisi 1 artıyorsa diğeri 2 artıyor, 3, 4, 8
22		gibi, artış miktarları arasındaki fark aynı. Birazcık
23		daha düzgün bir şekil ortaya çıkıyor galiba.

Doğrusal fonksiyonlarda değişim miktarının her zaman sabit olduğunu [3-4], ikinci dereceden fonksiyonlarda ise değişim miktarlarının sabit olmadığını, ve değişim miktarlarının değişiminin aynı olduğunu ifade etmişlerdir [8-12]. Değişim miktarları arasındaki değişimin aynı olmasının çizilen eğrinin düzgün bir eğri olmasına neden olabileceği çıkarımını yapmışlardır [18-23].

Etkinliğin son sorusunda öğrencilerin tapınağın en üst basamağına çıkıp tekrar inmeleri sırasındaki basamak sayılarını toplam basamak olarak bir başka deyişle, 91, 92, 93, ... olarak devam edeceğini düşünmeleri durumunda herhangi basamağa bağlı alınan basamaklardan tabana paralel kare kesitlerin alanlarını gösteren fonksiyonun grafiğini çizmeleri istenmiştir. Sonrasında da basamağın en üst yüksekliğe kadar çıkıp tekrar inmeleri halinde benzer düşünceyle yüksekliğe bağlı tabana paralel kare kesitlerin alanlarını gösteren fonksiyonun grafiğini çizmeleri istenmiştir.

1	Alp:	En altta kesit alanı en büyük, şu zaten inmeye
2		başladığında o zaman kesit alanı orantısız bir şekilde
3		artmaya başlıyor böyle olabilir mi?
4		
5		Şu tepe noktası dersek?
6		Peki, bunlar nasıl?
7	Araştırmacı:	Bak, burası 841,
8	Alp:	Sonra geri gelince yine buradan inmiş olmuyor mu?
9	Can:	[Aynı grafiği gösteriyor tersine doğru çizerek]
10	Alp:	Zaman ve basamaklar farklı.
11	Araştırmacı:	Buradan geliyor tekrar aşağı inecek.
12	Alp:	Burası 841, burası 841, indiğinde 841 olur. Aynı
13		yerden inerse.
14	Can:	Mesela şuradaki gibi indi sonra çıktı.
15	Alp:	Evet, ben simetrik olduğunu göstermek için.



Öğrenciler bu aşamada yapının en yüksek kısmına kadar çıkılırken elde edilen karelerin alanlarını temsil eden grafik ile inilirken elde edilen karelerin alanlarını temsil eden grafiğin birbiri ile simetrik olduğunu fark etmişlerdir [1-6; 16-17].

El Castillo etkinliği kapsamında öğrenciler doğrusal fonksiyonun kritik özelliklerinden yararlanarak ikinci dereceden fonksiyonu oluşturabilmişlerdir. Değişimler arasında karşılaştırmalar yaparak çoklukların değişim miktarlarının değişimlerine ilişkin çıkarımları yapabilmişlerdir. Grafikselsel olarak eğim olmadığını

anlamlandırmalarına ek olarak eğrinin herhangi iki noktası arasındaki değişim miktarlarına ilişkin karşılaştırmaları da uygun şekillerde yapabilmişlerdir. Noktasal olarak çizmeye başladıkları grafiklerdeki noktalar arası mesafeleri eş parçalamalar ile ardışık iki nokta arasındaki mesafeleri yaklaştırmışlar ve sürekli grafikleri elde etmişlerdir. Ayrıca ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin eğri olduğu ve bu eğrinin simetrik olacağı sonuçlarına ulaşmışlardır.

Can El Castillo etkinliğinde öğrenecekleri kavramları fark etmeden etkinlik üzerine çalışarak öğrendiklerini dile getirmiştir. İkinci dereceden fonksiyonlarla doğrusal fonksiyonların farklılıklarının olduğunu ve bu farklılığın özellikle grafiksel gösterimde görüldüğünü belirtmiştir. Ayrıca ikinci dereceden fonksiyonun grafiksel gösteriminin kavramın özelliklerini netleştirdiğini ifade etmiştir.

İşin bu kadarı da bir hiç, bilginiz olmadıkça grafik felsefe çizilebilir.
En son bulduğumuz, yaptığımız şeyleri tanımlıyoruz. Yani ne yaptığımızı anlıyoruz.
Daha doğru ne olduğunu anlıyoruz.
İ. dereceden ve II. dereceden fonksiyonlar;
- Faktörler
- Özellikle grafikleri
İ Grafik doğru şeyi netleştiriyor.

Alp yansıtıcı günlüğünde iki doğrusal fonksiyonun çarpımıyla ikinci dereceden fonksiyon oluşturulduğunu ifade etmiştir. Ek olarak, ikinci dereceden fonksiyonların değişim miktarlarının sabit olmadığını değişim miktarlarının değişimin sabit olduğunu belirtmiştir.

İki tane aynı şekildeki doğrusal fonksiyonun çarpımı 2. dereceden fonksiyona eşittir.
2. derece fonksiyonların artış miktarları farklıdır, artış miktarının değişim miktarları eşittir.

Can'ın Ölçme-Değerlendirme I ve Ölçme-Değerlendirme II Etkinliklerindeki Kavramlara İlişkin Anlamaları.- Ölçme-Değerlendirme I kapsamındaki DIN-A formundaki kağıtların en ve boy uzunlukları arasındaki ilişkiyi oluşturmak için Can ilk olarak en uzunluğunun boy uzunluğuna oranını ya da artış miktarlarını hesaplaması gerektiğini düşünmüştür. Ancak kağıtların boyutlarının

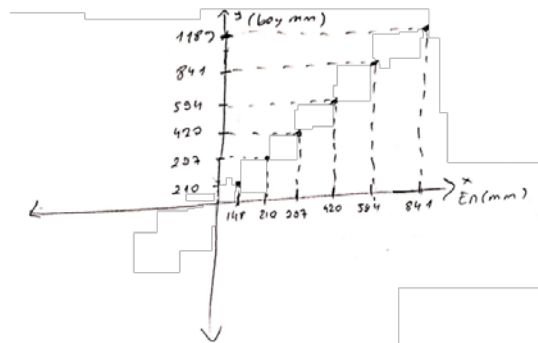
değerleri arasında farklı eşitlikler olduğu için boyutların değişim oranına odaklanamamıştır. Ardışık kağıt türlerinin enlerine karşılık gelen değerler arasındaki farkla bu kağıt türlerinden küçük boyuttaki kağıdın boyu ve eni arasındaki farkın eşit olduğunu ifade etmiştir. Bu eşitlikten herhangi bir şekilde yararlanamayacağı için tüm kağıt türlerinin boy ve en değerleri arasındaki farkı hesaplamıştır. Can elde ettiği değerlerin bir ilişkiyi açıklayamadığı fikriyle tekrar tablodaki değerler üzerine düşünmüştür. Dünya'nın Dibi ve El Castillo etkinliklerinde değişim miktarlarını hesapladıkları için Can bu etkinlikte bir fark hesaplamaya çalışmış ancak başlangıçta $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oranına odaklanmamıştır. Sonrasında kağıt türlerinin en değerlerindeki değişime ve boy değerlerindeki değişimleri bulmuştur. Değişim değerlerinden doğrudan sabit bir oran göremediği için ilişkiyi fark edememiştir. Can'ın iki değişken arasındaki doğrusal ilişki için sabit bir değişim oranının olması gerektiği fikrine sahip olduğu ancak tablodaki değerlerden değişim oranını hesaplayamadığı görülmüştür.

- 1 Araştırmacı: Ne arıyorsun?
- 2 Can: İlişki. Yani o sabit bir oran arıyorum.
- 3 Araştırmacı: O sabit dediğin oranı ne ile ne arasında bakıyorsun?
- 4 Can: En ve boy arasındaki farklara bakıyorum.
- 5 Araştırmacı: O oran ne? O orana ne diyorsun sen, yine grafiği
- 6 düşünerek hareket edebilirsin.
- 7 Can: O oranı yine matematiksel bir ifade oluşturursak x'in
- 8 katsayısı diyoruz, yani eğim oluyor.
- 9 Araştırmacı: Eğim dediğin şey ne? Bir yazar mısın eğimi, yani
- 10 eğimi bulurken neye bakıyorsun?
- 11 Can: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
- 12 Araştırmacı: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. peki buradaki Δy ne?
- 13 Can: Şey de diyebiliriz aslında, x 1 birim artıyorken y deki
- 14 artış direkt.
- 15 Araştırmacı: Peki Δy dediğin burada neye karşılık geliyor? Ya da
- 16 hangisini x hangisini y kabul ediyorsan.
- 17 Can: Mesela buna [en] x, buna [boy] y desek.
- 18 Araştırmacı: Δy ne?
- 19 Can: Mesela A4 ve A5'i kabul etsek, $\Delta y = 87$ oluyor.
- 20 Araştırmacı: Δx ne oluyor?
- 21 Can: Δx de 62 oluyor.
- 22 Araştırmacı: O arasındaki oran mı? Sabit olup olmadığını nasıl
- 23 buluyorsun?
- 24 Can: Diğerlerindeki orana bakarak.
- 25 Araştırmacı: Baksan peki?
- 26 Can: Mantıklı. Mesela A4 ile A5 i kıyaslarsak $\frac{87}{62}$. İııı $\frac{123}{87}$

27		174
28		123
29		Mesela bunlar arasındaki oran sabit midir? Bakayım mı?
30		
31	Araştırmacı:	Bak. Eğer sabit olursa ne olacak onu da düşün.
32	Can:	[hesaplıyor.] Değil.
33	Araştırmacı:	Burada kaç?
34	Can:	1,4 ama 4'ten sonra kayboluyor., bu da 1,4 den sonra kayboluyor. 1.,4 kabul etsek olur evet.
35		

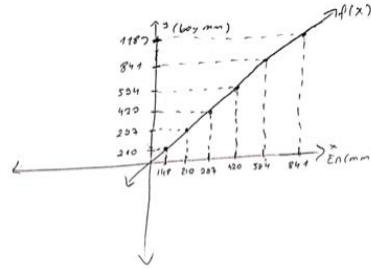
Araştırmacının soruları yardımıyla değişim oranının grafiksel gösterimde eğime karşılık geldiğini düşünerek tablodaki değerlerle grafiği ilişkilendirmiş ve böylelikle değişim miktarları arasındaki oranı dikkate almıştır [5-11]. Ek olarak, öğrencinin değişim oranının x değişkeninin 1 birim değişmesi durumunda y değişkeninin değişim miktarına karşılık geldiği düşüncesine sahip olduğu ortaya çıkarılmıştır [13-14]. Can bu fikirlerine dayalı olarak DIN-A kağıtlarının boyutları arasındaki değişim oranını hesaplayabilmiş ve kağıtların en ve boy uzunlukları arasındaki ilişkinin doğrusal olduğu sonucuna ulaşmıştır [19-35].

Can değişim oranını bulup iki değişken arasındaki ilişkinin matematiksel modelinin doğrusal fonksiyon olduğuna karar verdikten sonra herhangi bir kağıdın enine bağlı olarak boyunun eş zamanlı değiştiğini düşünmüş ve x 'i en ve y 'yi boy olarak eşlemiştir. $f(x) = 1,4x + b$ fonksiyonu için herhangi bir kağıt boyutunun değerlerini cebirsel ifadede eşleyerek b değerini 3 olarak hesaplamıştır. Bağlam kapsamında fonksiyonu değerlendirdiğinde belirli kağıt türleri olması sebebiyle tanım ve değer kümelerini milimetre olarak düşünerek tamsayı şeklinde yazmıştır. Fonksiyonun grafiği ise noktasal bir grafik olarak çizmiştir.



Bu grafiği çizdikten sonra Can farklı bir değer alarak yeni bir kağıt türü elde edeceğini ifade ederek oluşturduğu grafiğin sürekli olması durumunu açıklamıştır.

- 1 Can: Peki şey diyeceğim, işte 148 210 mesela eni 150 olan
 2 bir kağıt olabilir, ama ismi yok, ismi biz koyarız.
 3 Araştırmacı: Öyle olursa nasıl olur?
 4 Can: Öyle olursa doğrusal olur. şey yani noktalar birleşik
 5 olur.
 6 Araştırmacı: Tamam onu da istiyorsan çiz.
 7 Can:



Tabloda verilen değerlerden farklı olarak eni 150 cm değerinde olan bir kağıt boyutunun olabileceği düşüncesiyle sürekli bir grafik olabileceğini açıklamıştır [1-5]. Buna bağlı olarak fonksiyonun grafiğinin doğru göstereceğini belirtmiş ve grafiği çizmiştir [7-16]. Etkinlikteki en ve boy arasındaki doğrusal ilişkiyi belirledikten sonra herhangi bir boyuta bağlı kağıtların alanlarını gösteren ilişki üzerine çalışmıştır.

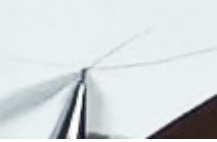
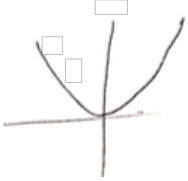
- 1 Araştırmacı: Peki alan için ne gerekli senin için?
 2 Can: İki kenarın çarpımı
 3 Araştırmacı: Ene x diyorsan boy da gerekiyor mu senin için?
 4 Can: Boy da gerekiyor evet.
 5 Araştırmacı: Boy ne oluyor peki?
 6 Can: 14 boy da $g(x) = 1,4x + 3$ oluyor. yani $g(x) =$
 7 $x(1,4x + 3)$ oluyor.
 8 Araştırmacı: Mantıklı mı?
 9 Can: Evet.
 10 Araştırmacı: Neden niye böyle bir sonuca ulaştın?
 11 Can: Şöyle yazalım mesela. Şimdi $g(x)$ dersek $x.f(x)$
 12 $g(x)$ bir enin uzunluğu, mesela x yerine eni koyacağız.
 13 Mesela 148 koyduğumuzda x yerine 148 koymuş
 14 olacağız 148 koyunca bu bize boyu verecek, x
 15 dediğimiz şey en zaten $g(x)$ bize direkt alanı vermiş
 16 olacak. En çarpı boydan. Yani yapmış oluyoruz şuan
 17

İlk olarak alanı ene bağlı olarak yazılan boy fonksiyonun karesi olduğunu ifade etmiştir. Araştırmacının kağıtların kare olmadığına dikkat çekmesi ve alanı hesaplamada iki kenarın çarpımından yararlanması gerektiğini sezdirmesi [1-3] ile

öğrenci iki farklı doğrusal fonksiyon belirlemiş ve bu doğrusal fonksiyonları çarparak ene bağlı alan fonksiyonunu elde etmiştir [6-7]. Sonrasında da herhangi bir kağıt türünün boyutlarından yararlanarak elde ettiği modelin doğru olup olmadığını kontrol etmiştir [13-17].

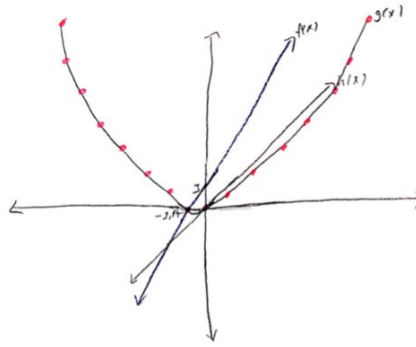
Alan fonksiyonda değerler arasındaki artışın sabit bir şekilde değil giderek artan bir şekilde artması sebebiyle grafiğin doğrusal bir yaklaşım sergilemediğini ifade etmiş ve altı noktayı analitik düzlemde eşleyerek eğrisel yaklaşım gösteren bir grafik çizmiştir. Verilen kağıt boyutlarından farklı boyutların olduğunu düşündüğünde ise sürekli bir grafik çizmiştir.

Araştırmacı fonksiyonun tanım kümesinin genişletilmesi durumunda grafiğin ne şekilde devam edeceğine ilişkin Can'ın düşüncelerini ortaya çıkarmaya çalışmıştır.

1	Araştırmacı:	Diyelim ki kenar uzunluğu olarak düşünmeseydin, bu
2		grafiğin devamı nasıl gelecekti? Negatif değerler için
3		de?
4	Can:	Mesela burada artacak arttıkça alan da artacak o
5		yüzden mesela şöyle düştü. [sağdan sola doğru
6		gösteriyor]
7		
8		sonra yine artış alacağı için yine artacak. [Sağdan
9		sola doğru grafiğin artacağını gösteriyor.]
10		
11		y'deki değerler sabit olduğu için burada da bunun
12		x'deki değerler de sabittir, o zaman simetrik olur.
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

Can grafiğin x ekseninin negatif tarafına doğru devam etmesi halinde, bir başka deyişle bağımsız değişkenin giderek küçülen negatif değerler alması halinde de alan değerlerinin giderek artacağını ifade etmiştir [4-12]. Grafikte aynı y değerlerine karşılık iki x değerinin olduğu düşüncesiyle grafiğin simetrik olacağını belirtmiş [19-20] ve bir parabol çizmiştir.

Alan fonksiyonunu iki doğrusal fonksiyonun çarpımı şeklinde yazan Can bu fonksiyonun ikinci dereceden bir fonksiyon olduğunu belirtmiş ve $h(x) = x$, $f(x) = 1,4x + 3$ ve $g(x) = h(x).f(x)$ şeklinde yazmış olduğu üç fonksiyonun grafiğini aynı analitik düzlemde çizmiştir. Doğrusal fonksiyonların grafiklerinin eksenleri kestiği noktaları bulduktan sonra ikinci dereceden fonksiyonun eksenleri kestiği noktaları bulmak için $g(x)=0$ eşitliğini sağlayan x değerlerini elde etmeye çalışmıştır. Bu aşamada araştırmacının sorularıyla Can ikinci dereceden fonksiyonun bu iki doğrusal fonksiyonun çarpımı ile elde edilmesi sebebiyle doğruların x eksenini kestiği noktaların aynı zamanda parabolün x eksenini kestiği noktalar olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ek olarak herhangi bir x değerine karşılık gelen alan değerinin iki doğrusal fonksiyonda karşılık gelen değerlerinin çarpımına eşit olduğu çıkarımını yapmıştır.

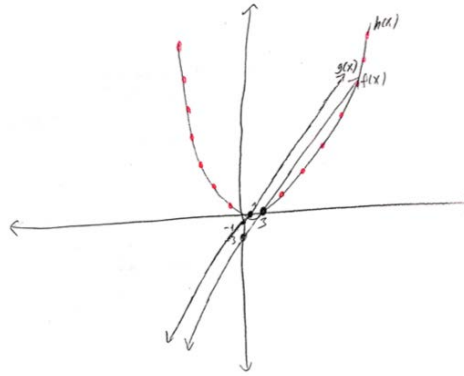


Ölçme-Değerlendirme II etkinliğinde bir karenin kenarına bağlı oluşan dikdörtgenlerin enine, boyuna ve alanına ilişkin fonksiyonları oluşturmaya çalışmıştır. Bir önceki ölçme ve değerlendirme etkinliğinde doğrusal fonksiyonlarla ikinci dereceden fonksiyonu ilişkilendirme sorularını uygun yaklaşımlarla tamamladığı için bu etkinlik üzerine çalışırken herhangi bir problem yaşamamış ve kolaylıkla çıkarımlarda bulunabilmiştir. İki çokluğun ilişkisini bağımsız ve bağımlı değişkenleri belirleyerek cebirsel olarak ifade etmiştir.

1	Can:	a-3 olur. a-3 yazsak sonra 3 desek. Yani a – 3 olur.
2		direkt bu.
3		$f(x) = x - 3$ $x > 3$
4		[tanım kümesini ve değer kümesini yazıyor]
5		$f: (3, \infty) \rightarrow [1$
6	Araştırmacı:	1 mi oluyor?
7	Can:	Evet.

- 8 Araştırmacı: 1'den küçük olamaz mı?
 9 Can: Reel sayıysa olabilir, o zaman şey deriz, 0 açık aralık.
 10 $f: (3, \infty) \rightarrow (0, \infty)$

Bir karenin kenarına a değişkeni vererek dikdörtgenin enini $f(a) = a - 3$ şeklinde yazmış [1-3] ve bu fonksiyonun tanım ve değer kümelerini belirlemiştir. Karenin kenarının 3'ten büyük olması gerektiği fikri ile karenin kenar uzunluklarına karşılık gelen dikdörtgenin en uzunluklarını belirleyerek tanım ve görüntü kümelerini oluşturmuştur [9-10]. Karenin kenarına bağlı oluşan dikdörtgenin boy uzunluklarının fonksiyonunu da oluşturduktan sonra alan fonksiyonunu $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ olarak $h(x) = (x - 3)(x - 1)$ şeklinde oluşturmuştur. Üç fonksiyonun grafiklerini aynı analitik düzlemde aşağıdaki gibi çizmiştir ve bu grafikleri karşılaştırmıştır.



- 1 Araştırmacı: Peki bunların özellikleri neler? Farklılıkları
 2 benzerlikleri var mı? Nasıl açıklarsın?
 3 Can: Önceki yaptığımız gibi zaten, yani $h(x)$ $f(x)$ ve $g(x)$ 'in
 4 çarpımından oluşuyor. O da $h(x)$ 'in x eksenini kestiği
 5 noktaların $f(x)$ 'in ve $g(x)$ 'in x eksenini kestiği
 6 noktalardan oluştuğu kanıya varmamızı da
 7 sağlayabilir. Bunlar için mesela değerler verdiğimiz
 8 zaman onlar bizi kestiği noktalara da götürebilir, değer
 9 verdiğimiz zaman $f(x)$ ve $g(x)$ in çarpımı $h(x)$ 'deki
 10 sonuca varmamızı sağlıyor.
 11 Araştırmacı: Başka peki?
 12 Can: $f(x)$ ve $g(x)$ paralel.
 13 Araştırmacı: Neden?
 14 Can: x 'in katsayıları aynı çünkü. Onun dışında eğimleri 1.
 15 Araştırmacı: Peki bu x^2 niye doğrusal çıkmadı? Niye doğrusal
 16 değil, parabol şeklinde.
 17 Can: Çünkü belli bir eğim yok, mesela buradaki [x eksen]
 18 artarken buradaki [y eksen] artış düzenli değil.
 19 Miktarlar arasında çok fark oluyor.

Can $h(x)$ fonksiyonun değerlerinin $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonun değerlerinin çarpımı ile elde edildiğini grafiksel gösterime dayalı olarak ifade etmiştir [3-10]. Ek olarak doğrusal fonksiyonların aynı eğime sahip olduğunu, parabolün ise eğiminin olmadığını artış miktarlarının sabit olmadığı gerekçesiyle açıklamıştır [17-19].

Ölçme-Değerlendirme I ve Ölçme-Değerlendirme II kapsamında Can'ın düşünceleri değerlendirildiğinde doğrusal fonksiyona ilişkin eşleme, eş zamanlı değişim, değişim miktarı, sabit değişim oranı, eğim gibi çoklukların zihninde yer aldığı görülmüştür. Can iki değişken arasındaki ilişkiyi incelemede değişkenlerin artış miktarları arasındaki oranları incelemiştir. Matematiksel modeli oluştururken fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini de göz önüne almıştır. Öğrencinin doğrusal fonksiyonla ilgili etkinliklerde uygun fikirlere sahip olduğu ve kavramı öğrendiği düşünülmektedir.

İkinci dereceden fonksiyonlarla ilişkili olarak grafiğinin sabit bir değişim göstermeyen bir eğri olduğunu ve bu eğrinin simetrik olduğunu ifade etmiştir. İki doğrusal fonksiyonun çarpımı ile ikinci dereceden fonksiyonun elde edilmesi fikrine sahip olarak ikinci dereceden fonksiyonda herhangi bir x değerine karşılık gelen y değerinin bu fonksiyonu oluşturan doğrusal fonksiyonlardaki değerlerin çarpımı olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ölçme etkinlikleri kapsamında Can ikinci dereceden fonksiyonlarda değişim miktarının değişiminin sabit olduğuna ilişkin herhangi bir açıklama yapmamıştır.

Alp'in Ölçme-Değerlendirme I ve Ölçme-Değerlendirme II Etkinliklerindeki Kavramlara İlişkin Anlamaları.-Alp Ölçme-Değerlendirme I kapsamındaki DIN-A formundaki kağıtların enlerinin ve boylarının verildiği tabloyu incelerken doğrudan artış miktarlarını dikkate almıştır. Kağıtların enlerinin artışı ile boylarının artışının birbirinden farklı olduğu gerekçesiyle aralarındaki ilişkinin doğrusal olmayacağını ifade etmiştir. Doğrusal ilişkinin var olması için iki değişken arasında ne olması gerektiği sorusuna karşılık Alp'in değişim oranı fikrine sahip olduğu görülmüştür.

- 1 Alp: Doğrusal olması için, şu arasındaki miktarların eşit
2 olması gerekiyor.
3 Araştırmacı: Nasıl miktarların eşit?
4 Alp: Yaptığımız gibi x 1 artarken y 1 artıyorsa ikincisinde
5 de x 1 artarken y 1 artması gerekiyor.
6 Araştırmacı: Burada nasıl peki?
7 Alp: 148 62 artmışken, bakalım bir, şey.. 87 artmış. Diğeri
8 123 artmışken, 123 değil 87 artmışken diğeri 123
9 artmış.
10 $\frac{87.87}{63} = 123$ eşit midir, değildir.
11
12 Araştırmacı: Neden? Eşit çıkmıyor mu?
13 Alp: 87'nin karesi ...49 dersek bunu 62'ye böldüğümüzde,
14 rakamlar doğru
15 O zaman doğrusal değildir diyorum.
16 Araştırmacı: Tamam nasıl bir ilişki vardır peki? Şurada ne yaptın?
17 Neyine baktın aslında? [oranladığı kısmı soruyor.]
18 Alp: 62 mm artmışken eni boyu 87 artmış. Eni 87 mm
19 arttığında boyu 123 mm artmış. Oranlı mıdır diye
20 baktım.

Boylar arasındaki değişimin enler arasındaki değişime oranını doğrudan görememesi Alp'in bu iki değişken arasında doğrusal ilişki olmadığı sonucuna ulaşmasına yol açmıştır. Buna karşın, Alp x değişkeninin 1 birim artması durumunda y'nin her zaman aynı miktarda değişmesinin doğrusal ilişki için önemli olduğunu vurgulamıştır [4-5]. Değişimlerin oranlarını incelemiş ancak oranlar 1,4 ten sonra farklılaştığı için sabit bir değişim oranı olmadığını ifade etmiştir [7-15]. Alp değişim oranı bulamayınca artış miktarlarının artışını hesaplamaya çalışmıştır. Öğrencinin doğrusal fonksiyona ilişkin önemli fikirlere sahip olduğu ancak ayrıntılı düşünmesi sebebiyle bu incelemeye yöneldiği söylenebilir. Bu aşamada araştırmacı Alp'in değişim oranını 1,4 olarak yuvarlaması halinde nasıl bir model oluşturabileceğini sorarak öğrenciyi doğrusal fonksiyona yönlendirmiştir.

- 1 Alp: f(x) dediğimiz boy. Boyu bulmak istiyoruz.
2 Araştırmacı: Şimdi şunu düşünebilirsin. 1.4 dediğin ne?
3 Alp: x 1 artarken y 1.4 artıyor.
4 Araştırmacı: Tamam.
5 Alp: x 148 olduğunda y
6 $148 \cdot \frac{14}{10} = 207.2$ burada 210 demiş o da virgülden
7 kaynaklanıyor.
8 Araştırmacı: O zaman bu şekilde nasıl oluşturursun?
9 Alp: Şey diyebiliriz, direkt 1.4x
10 Araştırmacı: Oldu mu peki şu an?

- 11 Alp: 148 koyduğumuzda bu [207] çıkıyor. 210
 12 koyduğumuzda buna yakın diğer çıkacak, 297
 13 koyduğumuzda buna yakın bir değer çıkacak. Oldu
 14 bence. Mesela 420 koyarsak, $42 \cdot 14 = 588$
 15 594'e yakın bir değer, bence oldu.

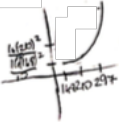
Alp bağımlı ve bağımsız değişkenleri düşünerek en ve boy değerlerini eşlemiştir. $f(x) = 1,4x$ şeklinde düşündüğü modelde elde ettiği boy değerlerini karşılaştırmış [5-9] ve değerlerin tabloda eşleşen değerlere yakın çıkması sebebiyle modelin ilişkiyi göstereceği sonucuna ulaşmıştır. Tablodaki farklı değerler için de oluşturduğu modelin doğrulamasını yapmıştır [11-15]. Elde etmiş olduğu fonksiyonun grafiğini doğrusal olarak çizmiş ve bu çizmiş olduğu doğrunun üzerindeki herhangi bir noktanın verilen kağıt boyutları ile eşleşmediğini sadece fonksiyonun grafiğini göstermek için bu şekilde doğrusal çizdiğini açıklamıştır. Bağlamı düşündüğünde ise elde edilecek sıralı ikililerin sonlu sayıda olduğunu bilen Alp eşlediği en ve boy değerleriyle elde ettiği noktaları analitik düzleme yerleştirerek grafiği oluşturmuştur.

Etkinliğin devamında kağıtların alanını bir kenarının fonksiyonu olarak yazarken bağımsız değişkeni en olarak belirlemiş ve kolaylıkla alan fonksiyonunu oluşturmuştur. Önceki boy fonksiyonu ile farklı olduğunu göstermek amacıyla da $g(x)$ olarak yazmıştır.

- 1 Alp: Bir kenar uzunluğu dediği en boy, ikisinin çarpımı
 2 zaten $1,4x^2$ oluyor.
 3 Araştırmacı: Bir kenar uzunluğuna, sen istersen onu en seçebilirsin,
 4 istersen boy seçebilirsin.
 5 Alp: Ene göre yapacağım.
 6 Araştırmacı: Tamam o zaman ne olur?
 7 Alp: $\frac{14}{10}x^2$ zaten şey oluyor, x'e x, y'ye de $1,4x$ dersek
 8 direkt oluyor zaten.
 9 $\frac{14}{10}x^2 = f(x)$
 10 $\frac{14}{10}x^2 = f(x)$
 11 Şimdi düşüneyim, alan ikisinin çarpımı, bu $1,4$ katı
 12 tamam oldu. $f(x)$ değil $g(x)$ yazayım alan olduğu için.
 13 $\frac{14}{10}x^2 = g(x)$
 14

Alp ene bağlı en fonksiyonunu birim fonksiyon olarak, boy fonksiyonu $1,4x$ olarak alıp alan fonksiyonunu iki fonksiyonun çarpımıyla oluşturmuştur [11-14]. Elde

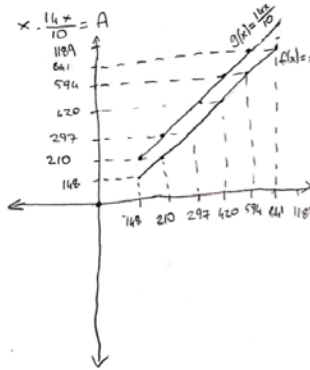
ettiği alan fonksiyonun grafiğinin eğrisel olacağını ifade etmiş ve eğrisel grafiğin ne şekilde olacağını düşünmüştür. y değerlerinin artışının giderek artmasının ya da giderek azalmasının grafiğin ne şekilde çizileceğini belirleyeceğini düşünmüştür.

- 1 Alp: Şimdi şöyle mi olur(şöyle mi olur?)
- 2 Araştırmacı: Sence nasıl olur?
- 3 Alp: Belli bir değerden başlıyor o değer gittikçe artıyor,
- 4 yani mesela x 1, 2, 4 diye düşünüyem, bunu sadece
- 5 düşünüyem çıkartmak için.
- 6 
- 7
- 8
- 9 Böyle olduğunu düşünüyorum.
- 10 Araştırmacı: Böyle olduğunu düşünüyorsun? 1,2, 4 Peki bunlar
- 11 neye karşılık geliyor?
- 12 Alp: Onları düzenleyeceğim, burası 148 olduğunda.
- 13 Araştırmacı: Bu 1, 2, 4 ya niye 1,2, 4 yazdın?
- 14 Alp: Bu bildiğim bir ikinci dereceden fonksiyon,
- 15 Araştırmacı: 1, 2, 4 mü?
- 16 Alp: x^2 y değerleri.
- 17 Araştırmacı: Bir daha incele istersen, sen bundan yararlanarak
- 18 bunu anlamaya çalışıyorsun nasıl olacağını.
- 19 Alp: Grafiğini tahmin etmeye.
- 20 Araştırmacı: Nasıl peki sence? Mesela x^2 yi düşündüğünde, düşün
- 21 Alp: x^2 böyle oluyor,
- 22 
- 23
- 24
- 25 Doğru böyle,
- 26 Araştırmacı: Niye öyle sence?
- 27 Alp: Niye böyle? [düşünüyor]
- 28 Araştırmacı: Bununla [önce çizdiği] bunun [x^2 için çizdiği] farkı
- 29 ne?
- 30 Alp: Bunda y 'nin artışı azalıyor, bunda y 'nin artışı artıyor.
- 31 Araştırmacı: Peki burada artar mı azalır mı [$g(x) = 1.4x^2$] y nin
- 32 artışı?
- 33 Alp: Artar. Mantıklı, [çiziyor]
- 34 
- 35
- 36
- 37

Alp eğrinin ne şekilde olacağı ile ilgili çıkarım yapabilmek için bildiği bir ikinci dereceden fonksiyonun noktalarını düşünerek grafiği incelemiştir [3-8]. $f(x) = x^2$ fonksiyonun y değerlerindeki değişimine odaklanarak ve bu değişimlerin grafikte nasıl ortaya çıktığını inceleyerek $g(x) = 1.4x^2$ fonksiyonunun grafiği ile ilgili

sonuçlara ulaşmıştır. İlk çizdiği giderek azalan grafiğin bu fonksiyonu temsil etmediğini ikinci çizmiş olduğu grafiğin alan fonksiyonunda elde edilecek noktaları temsil edeceğini yorumlamıştır [30-37]. Alp'in bu sonuca ulaşmasında eğrinin artış miktarlarının değişimini karşılaştırabilmesi etkili olmuştur.

Alp en, boy ve alan fonksiyonlarının reel sayılar kümesinde tanımlandığını düşünerek grafiklerini çizmiş ve bu üç fonksiyonu birbiri ile karşılaştırmıştır. En fonksiyonunun $f(x) = x$ olduğunu ifade ederek grafiğini doğru olarak çizmiştir. Boy fonksiyonunun grafiğinin biraz daha dik olacağını eliyle göstermiş ve bu iki fonksiyonun birbiriyle orijinde kesişecekleri sonucuna ulaşmıştır. Bunun sebebini her iki fonksiyonu $ax + b$ şeklinde düşündüğünde b katsayılarının 0 olması ve dolayısıyla iki grafiğinde orijinden geçecek olması ile ilişkilendirmiştir.



Alp Ölçme-Değerlendirme II kapsamındaki etkinlikte karelerden dikdörtgenler oluşturabilmek için karelerin kenar uzunluklarından elde edilecek en ve boy değişkenlerinin değerlerini birlikte düşünerek karenin bir kenarının 4'ten başlayacağını ve doğal sayı olacağını ifade ederek başlamıştır.

1	Alp:	Boyunu düşünmezsek karenin kenarı 1'den büyük
2		olmak zorunda, sadece eni kessek boyu kesmesek,
3		ama bunları arka arkaya yaptığımız için hepsinin
4		düşünmemiz gerekiyor. $[4, \infty) \in \mathbb{N}$
5	Araştırmacı:	Doğal sayı olmak zorunda mı?
6	Alp:	Kareyi düşünürsek, değil.
7	Araştırmacı:	Niye doğal sayı diye düşündün?
8	Alp:	Aslında çok düşünmedim doğal sayıyı yazarken,
9		düşünmediğim için doğal sayı yazdım, 4,5 falan da
10		olabilir. [yazıyor]
11		$[4, \infty) \rightarrow [3, \infty)$ bu $f(x)$ için

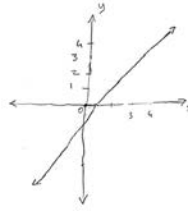
- 12 Boyu için de aynı, çünkü bunları düşünerek enini
 13 tanımladık.
 14 Araştırmacı: Peki alan için?
 15 Alp: Alan için şu değişir [görüntü kümesini]
 16 Araştırmacı: Boyu için değişmez mi?
 17 Alp: Boyu için de değişir. Tanım kümeleri aynı değer
 18 kümeleri
 19 $[4, \infty) \rightarrow [1, \infty)$
 20 $[4, \infty) \rightarrow [3, \infty)$
 21 Araştırmacı: Tanım kümeleri de değişir mi?
 22 Alp: Tanım kümeleri değişmez.
 23 Araştırmacı: Peki bir şey soracağım, mesela burayı niye 4'ten
 24 başlattın?
 25 Alp: Şey de olabilir, şöyle de yapabiliriz aslında, tam sayı
 26 olmak zorunda değil,
 27 $(3, \infty)$ 3.0001 olabilir.
 28 Araştırmacı: 3'ten büyük olacak ama 3 olmayacak.
 29 Alp: Hıhı. Burası da mesela 2 mi olur? [görüntü kümesini
 30 düşünüyor.]
 31 3 mesela 0.0001 oldu
 32 $\rightarrow (0, \infty)$
 33 Burası $(0, \infty)$

Karenin kenarına bağlı dikdörtgenin enini gösteren fonksiyon ile boyunu gösteren fonksiyonun tanım ve değer kümelerini birbirlerine bağlı olarak oluşturmuş ve her iki fonksiyon için tanım ve değer kümelerini eşlemiştir. Bağımsız değişken hem en hem de boy fonksiyonunda karenin kenar uzunluğu olduğu için ikisinde de tanım kümesinin aynı olduğunu ancak tanım kümesindeki değerlere karşılık gelen değerlerin ve dolayısıyla görüntü kümesinin farklı olduğunu açıklamıştır [12-20]. Fonksiyon ifadelerini kolaylıkla oluşturan Alp'in tanım ve değer kümelerinin reel sayılar kümesinin bir alt aralığında tanımlanabileceği düşüncesine sahip olduğu araştırmacının sorularıyla ortaya çıkmıştır.

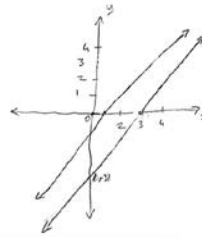
Fonksiyonların tanım ve değer kümeleri üzerine konuşan Alp $f(x) = x - 1$ ve $g(x) = x - 3$ olarak ifade ettiği fonksiyonların grafiklerini çizerken ikisini de doğrusal olarak çizmiş ve iki fonksiyonun grafiğinin birbirine paralel olduğunu ifade etmiştir.

- 1 Araştırmacı: Burada $f(x)$ ile $g(x)$ arasında bir ilişki var mı sence?
 2 Alp: Paralel olduğunu düşünüyorum.
 3 Araştırmacı: Neden?
 4 Alp: Çünkü $x-1$ $x-3$ sadece sabit sayıları değiştiriyor. a 'lar
 5 sabit değişim miktarları değişim oranları.
 6 Araştırmacı: Peki, reelden reele çizseydin?

7 Alp: [çiziyor.] mesela 4'e kadar çizeyim. Şöyle olurdu
8 mesela $x-1$ fonksiyonu,



15 1'de 0, 2'de 1, 3'de 2.
16 $x-3$ doğrusu da şöyle olurdu. 3'te 0 oluyor.
17 0'da -3 oluyor, mesela şurası $(0,-3)$ noktası oluyor.

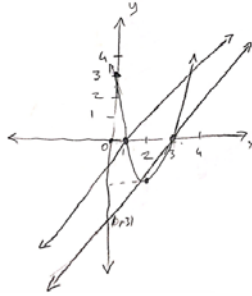


27 Araştırmacı: Diğeri peki?

28 Alp: $x^2 - 4x + 3$ mesela y 'yi kestiği ama öyle
29 bulmayayım. Burada şöyle bir şey bulduk. y burada
30 alan oluyor, x 0 olduğunda 3'te oluyor.

31 Araştırmacı: Evet

32 Alp: x 3 olduğunda 0'da olması gerekiyor. x 3 olduğunda
33 0'da oluyor. $(3,0)$ noktası. x 1 olduğunda 1'de de 0
34 oluyor. şöyle bir şey oluyor, mesela 2 olduğunda -1
35 olması gerekiyor. Şöyle bir döneri oluyor.



Doğruların paralel olmasının nedenini değişim oranlarının aynı olması ile açıklamıştır [2-5]. $l(x) = (x - 1)(x - 3)$ alan fonksiyonun grafiğini ise parabol şeklinde çizmiştir. Bu fonksiyonları reel sayılar kümesinde çizdiğinde ise herhangi bir x değerine en ve boy fonksiyonlarında karşılık gelen değerlerin çarpımının alan fonksiyonunda karşılık gelen değere eşit olduğu sonucuna ulaşmıştır. Tepe noktasının grafik için bir dönme noktası olduğunu da ifadelerine eklemiştir [35-44].

Ölçme-Değerlendirme I kapsamında Alp'in fikirleri değerlendirildiğinde doğrusal fonksiyon için değişim oranı çokluğunu anlamlandırdığı görülmüştür. Doğrusal ilişki olduğunun göstergesinin sabit değişim oranı olduğunu etkinlik boyunca ifade etmiştir. Parabolde ise y değişkeninin artış miktarlarının değiştiğini ve eğimden bahsedilemeyeceğini açıklamıştır. Artış miktarlarının giderek azalmasının ya da artmasının grafiğin eğriliğinin yönünü belirlediği fikrine sahip olduğu görülmüştür. Alp'in değişim oranını farklı fonksiyonlar için etkili bir şekilde yorumlayabileceği düşünülmektedir. Doğrusal fonksiyona ilişkin oran, değişim oranı, eğim çokluklarını kullanarak analitik düzlemdeki farklı doğrusal grafikleri birbiri ile karşılaştırmış ve ilişkilendirmiştir.

İkinci etkinlik kapsamında da Alp bir fonksiyonu ifade edebilmek için tanım kümesinin gerekli olduğunu ifade etmiştir. Tanım kümesi, görüntü kümesi kavramlarını birbiri ile eşleyerek fonksiyonları incelemiş ve sınırlı tanım kümesi olması halinde grafiklerinin de sınırlı olarak çizerek farklı gösterimler arası dönüşümleri uygun şekilde gerçekleştirebilmiştir. İki doğrusal fonksiyonun çarpımından oluşan ikinci dereceden fonksiyonun değerlerini doğrusal fonksiyonlardaki aynı bağımsız değişkene karşılık gelen değerlerle ilişkilendirebilmiştir.

En Uzun Basketbol Atışı Etkinliği Kapsamında Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler.-İkinci dereceden fonksiyonun grafiğinin parabol olduğunu El Castillo etkinliğinde anlamlandıran öğrencilerin En Uzun Basketbol Atışı etkinliği üzerine çalışmaları ile parabolün kritik özelliklerini öğrenmeleri ve parabol ile fonksiyonun farklı cebirsel gösterimleri arası geçişi yapabilmeleri beklenmiştir. Öğrenciler ilk olarak bir potadan diğer potaya doğru atılan basketbol topunun izlediği yolu temsil eden grafikleri çizmişlerdir.

- 1 Alp-Can:
- 2
- 3



Bu grafikleri çizerlerken topun hareketini dikkate alarak başlangıç ve bitiş noktalarını eşlemişler ve simetrik olmasını göz önünde bulundurmışlardır. Topun çıkabileceği maksimum yüksekliğe göre noktaları birebir eşlemişlerdir. Topun farklı atılma durumlarına göre çıkabileceği maksimum yüksekliğin büyüyeceği ya da küçüleceği ve buna bağlı olarak maksimum noktanın bir doğru üzerinde hareket edeceğini ifade etmişlerdir. Çizdikleri farklı grafiklerin benzer ya da farklı yönlerini açıklamaları istendiğinde öğrencilerin grafiksel gösterime ilişkin özelliklere odaklandıkları görülmüştür.

1	Alp:	Bu çizimleri yaparken işte atma durumuna dikkat
2		ettik, düşüşünü şey yaptık, yani topa göre mesela
3		direkt azalan veya direkt artan değil.
4	Araştırmacı:	Nasıl peki?
5	Alp:	Gittiği mesafeye göre yükselen veya azalan. Mesela
6		ortasına öyle bir yere atıyor ki sahanın en ortasında en
7		yüksek noktasına geliyor, oraya kadar artıyor ondan
8		sonra azalıyor.
9	Araştırmacı:	O zaman nasıl atışlar?
10	Can:	Nasıl?
11	Alp:	Eğimi önce artıyor sonra azalıyor.
12	Can:	Eğimi?
13	Araştırmacı:	Eğimi?
14	Alp:	Eğimi yok, noktaların artış miktarları
15	Can:	Değişim miktarları önce artıyor
16	Alp:	Mesela x sürekli artıyor, ama y bir yere kadar artıyor
17		sonra azalmaya başlıyor,
18	Can:	Ve x deki artış tüm atışta sabit.
19	Alp:	x 1 artarken 0.5 artmış, x 1 artarken 0.3 artmış, x 1
20		artarken 0.2 artmış, x 1 artarken 0.1 artmış, x 1
21		artarken -0.1 artmış. [topun yükseldiği kısım ile
22		düştüğü kısımda belirlediği simetrik parçaların aynı
23		olduğunu gösteriyor.]

Grafiğin sürekli azalma ya da sürekli artma eğiliminde olan doğrusal bir grafik olmadığını ifade etmişlerdir [1-3]. Grafiği yorumlamalarında öğrencilerin sahip oldukları gerçek yaşam bilgilerinin de onları yönlendirdiği görülmüştür. Sahanın ortasına kadar topun yükselmesini ve sonra düşmesini dikkate alarak topun yükselirken bulunduğu noktalarla düşerken bulunduğu noktaları sahanın ortasına göre eşlemişlerdir [5-6]. Bu eşledikleri noktaların sahanın ortasına olan uzaklıklarının da birbirine eşit olduğu fikrinin zihinlerinde yer aldığı sonucuna ulaşılmıştır. Öğrenciler önceki etkinliklerde eğim ve değişim oranı üzerine fikirler ürettikleri için bu grafikleri

yorumlarken da bu çoklukları dikkate almışlardır. Topun yükselme durumundaki hareketini eşit aralıklara bölerek x ve y değişimlerini incelemişlerdir ve değişim oranlarını karşılaştırmışlardır [19-21]. Değişim oranlarını incelemeleri ile hareketin hızının zamanla azalarak artan olduğunu ve düşme sırasında da artarak azalan olduğunu belirlemişlerdir. Ek olarak, birbirine simetrik olan parçaların değişim oranlarının birbiri ile aynı olduğunu açıklamışlardır [19-21]. Öğrenciler bu aşamada değişim oranına ve simetrikliğe ilişkin fikirlerini kullanarak sonuçlara ulaşmışlardır. Öğrenciler grafiğin simetrik olmasını yorumlarken ilk önce simetri eksenini ile ilgili çıkarımda bulunamamışlardır.

1	Alp:	Topun geldiği en yüksek noktaya göre mesela şöyle simetrik oluyor.
2		
3		
4		
5		
6	Araştırmacı:	[Can'ın düşündüğünü fark ediyor.] Can ne düşünüyorsun?
7		
8	Can:	Simetrik oluyor mu ya? Yani bu atış için falan oluyor da her atış için oluyor mu acaba? Mesela top böyle düşemez mi? [topun ani düşüşünü gösteriyor.]
9		
10		
11		
12		
13		
14	Alp:	Düşemez ki.
15	Can:	Niye düşemesin?
16	Alp:	Nasıl attıysa o kadar düşecek. Neden düşsün ki?
17	Araştırmacı:	Bir silgiyi atsana yavaş bir hızla
18	Alp:	Yukarı çıkarken iyice yavaşlıyor en yavaşladığı nokta ondan sonra düşmeye başlıyor, hızı yavaşlıyor gittikçe.
19		
20	Can:	Ama şey diyebiliriz mesela, doğru ya mesela fizikte de diyoruz potansiyelle
21		
22	Alp:	Kinetik potansiyel.
23	Can:	Mesela şuradaki potansiyel fark, şuradaki kinetik artışı [ilk atışındakini gösteriyor.] Doğru ya. Eşit olması gerekiyor.
24		
25		

Topun çıktığı maksimum yüksekliği dikkate alarak o yükseklikten bir doğru çizmişler ancak ifadelerinde hareketin simetrikliğini maksimum yükseklik ile eşleşen noktaya göre açıklamışlardır [1-2]. Buna karşın, açıklamaları simetrikliği zihinlerinde var olan simetri doğrusu çokluğuna göre yaptıklarını göstermiştir [3-5]. Simetri

doğrusuna eşit uzaklıkta seçtikleri aralıklardaki değişim miktarlarının aynı olmasının nedenini de topun hareketin simetrik olması ile ilişkilendirmişlerdir. Bu ilişkilendirmede fizik bilgilerinden de yararlanarak sonuçlara ulaşmışlardır.

Öğrenciler topun hareketini temsil eden parabol ile ilgili çıkarımlar yaparlarken simetrik olmasına vurgu yapmışlardır.

1	Alp:	Simetrik dedik, orta noktasından, işte bir parabol
2		olduğunu, işte x bir artarken y'nin artış miktarı gittikçe
3		düşüyor, şurada sıfır oluyor [en üst noktayı
4		gösteriyor.], şurada sıfırdan aşağıya oluyor, düşmeye
5		başlıyor ve başladıkları ve bitirdikleri nokta aynı, o
6		zaman başladıkları ve bitirdikleri nokta aynı ve x in
7		miktarı aynı olunca direkt simetriği oluyor, aynı
		miktarda artıyor, aynı miktarda azalıyor.

Top yukarı çıkarken x'in bir birim artması halinde y'nin değişimi ile aşağı inerken x'in bir birim artması halinde y'nin değişiminin yönden bağımsız aynı olabileceği düşüncesiyle topun atışını temsil eden grafiğin simetrik olma durumunu açıklamışlardır [1-5]. Belirli aralıklardaki değişim oranlarını karşılaştırmışlar ve en üst noktada değişim oranının sıfır olduğunu ifade etmişlerdir [1-6].

Parabol ile ilgili kritik özellikler üzerine tartışan öğrenciler en uzun basketbol atışının hareketini modellemeye çalışmışlardır. Bu amaçla, ilk olarak bir potayı, adamın topu attığı noktayı ve topun çıkabileceği maksimum yüksekliği analitik düzlemdeki noktalarla eşleme yaparak ve simetrik olmasını göz önüne alarak çizmişlerdir. Çizimde hız ile zaman çokluklarını ilişkilendirerek topun hareketini anlamlandırmışlar ve hızın sıfır olduğu andan itibaren topun yukarıya çıktığı şekilde aşağıya düşeceğini ifade etmişlerdir.

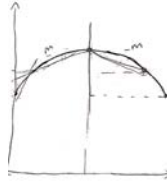
1	Araştırmacı:	Nasıl bir şey olabilir bunun [çizmiş oldukları grafiği
2		gösteriyor.] matematiksel ifadesi? Cebirsel olarak?
3	Alp:	$ax^2 + bx + c$
4	Araştırmacı:	Neden?
5	Alp:	Parabol olduğunu düşünüyorum.
6	Araştırmacı:	Sen ne düşünüyorsun, öyle bir şey mi çıkacak?
7	Can:	Hıııı.

- 8 Araştırmacı: $ax^2 + bx + c$ gibi bir ifade olduğunu düşünüyorsunuz
9 ama oradaki a'yı, b'yi ve c'yi nasıl bulacaksınız?
10 Alp: a nedir? b nedir? Şimdi başlangıç 3'ten başlıyor.
11 Can: Aynen
12 Alp: O c olabilir.
13 Can: Aynen.
14 Alp: x sıfırken.
15 ooo
16 Alp: 33 metre de var.
17 Araştırmacı: 33 metreyi kullanabilir misiniz?
18 Alp: Mesela şurası 33 metre ise [topun atıldığı ve düştüğü
19 yer mesafesi]
20 Araştırmacı: 33 metre neresi?
21 Alp: Şu, tamamı [topun atıldığı ve düştüğü yer mesafesi]
22 Araştırmacı: Hıhı.
23 Can: Mesela bu nokta,
24 Alp: Şey diyebiliriz hani simetrik demiştik.
25 Araştırmacı: O nokta?
26 Can: Mesela x 33 iken y 3 oluyor. [33 metreyi pota
27 yüksekliği ile eşlediler.]
28 Alp: Evet. x 33 iken y 3, x 0 iken y 3
29 Şey diyebiliriz, bu bunun yarısı, 16.5.
30 ooo
31 Alp: Evet yazalım,
32 $-0,03x^2 + 0,96x + 3 = f(x)$

Analitik düzleme parabol olarak taşıdıkları grafiğin cebirsel olarak matematiksel modelinin $f(x) = ax^2 + bx + c$ formunda olacağını belirtmişlerdir [2-5]. Bu cebirsel ifadeyi söyleyebilmelerinin nedeni bir önceki etkinlikte ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin yapısını sezmeleri olmuştur. Grafik üzerindeki noktaların cebirsel ifadede $(x, f(x))$ olarak eşleneceği fikrine dayalı olarak a, b ve c katsayılarının değerlerini elde etmek için üç nokta belirlemişler ve topun hareketinin matematiksel modeline ulaşmaya çalışmışlardır.

Matematiksel modeli elde eden öğrenciler tepe noktası ve simetri eksenini ile ilgili çıkarım yapmayı gerektiren sorular üzerine çalışmışlardır. Topun yerden 4 metre yükseklikte olduğu iki noktayı karşılaştırdıkları aynı yükseklikte olduklarını göstermek için bu noktalardan geçen x eksenine paralel bir doğru çizmişlerdir. Bu noktaları tepe noktasına göre karşılaştırmışlardır.

- 1 Alp: En yüksek noktaya bir doğru çizdiğimizde ve buraya
2 bir doğru çizdiğimizde, mesela buranın eğimi m ise,
3 buranın eğimi $-m$ oluyor,



- 4
5
6
7
8
9
10
11 Araştırmacı: Neden?
12 Can: Çünkü biri sağa yatık, biri sola yatık. Birindeki x böyle
13 artıyor, birindeki böyle artıyor, yani birindeki x deki
14 artış 1 birim ise birinde -1 birim oluyor.
15 Araştırmacı: Peki, neden o 1 birim diğeri -1 birim?
16 Can: Mesela burası [tepe noktasını göstererek] 0 kabul
17 edersek burası -1 olmuş oluyor.
18 Araştırmacı: -1 neresi?
19 Alp: Sola gittiği için.
20 Araştırmacı: Yani hangi değişim -1 ?
21 Alp: x 1 birim sola gidiyor, y 1 birim yukarı gidiyor.
22 Can: Evet.
23 Araştırmacı: Peki başka? Neden bu 1 birim ise, bu -1 ? O 1 iken, o -
24 2 olamaz mı mesela?
25 Can: Simetrik
26 Alp: Simetrik, aynı nokta.
27 Araştırmacı: Nasıl?
28 Can: Bu iki noktanın bu üçüncü noktaya uzaklığı eşit.

Tepe noktasına göre noktaları karşılaştırılırken bu noktalardan birinden ve tepe noktasından geçen doğrunun eğimi ile, diğer noktadan ve tepe noktasından geçen doğrunun eğiminin değerinin aynı olduğunu sadece birinin pozitif iken diğerinin negatif olduğunu ifade etmişlerdir [1-10]. Eğimlerinin değerlerinin birbiri ile aynı olmasının gerekçesini ise çizdikleri doğruların değişim oranlarının aynı olması ile açıklamışlardır [12-14]. Grafiğin simetrik olmasını tepe noktasına göre açıklamışlar ancak simetri doğrusu ile ilişkilendirmemişlerdir.

- 1 Can: Bunun [grafik üzerindeki bir nokta] buraya [tepe
2 noktası] olan uzaklığı, bunun [aynı y değerine sahip
3 diğer nokta] buraya [tepe noktası] olan uzaklığına
4 eşit.
5 Araştırmacı: O eşitlik nereden geliyor?
6 Can: Çünkü çıkıyor dedik, en uç nokta simetrik olarak
7 bölüyor dedik.

- 8 Alp: Eşit miktarda artıyor, eşit miktarda azalıyor. Mesela
 9 şöyle katlarsak [burada katlamayı simetri doğrusu
 10 olarak gösteriyor] bu doğrular üst üste geliyor.
 11 Araştırmacı: Siz bu doğruları karşılaştırdınız, yani buradaki nokta
 12 ile buradaki noktadan bir doğru çizdiniz, buradaki
 13 noktadan buradaki noktaya bir doğru çizdiniz, eğer
 14 buradaki noktayı düşünmemiş olsaydı, bu iki
 15 noktanın [simetrik noktaları gösteriyor.] ilişkisi için
 16 ne söyleyebilirsiniz?
 17 Can: Mesela x eksenine uzaklıkları eşit.
 18 Araştırmacı: Nasıl?
 19 Alp: Yükseklikleri.
 20 Araştırmacı: İkisi de 4 metre, başka?
 21 Alp: Mesela şu bulduğumuz fonksiyondan $y=4$ olarak
 22 burayı bulsak, sonra burayı bulsak ikisini çıkarsak şu
 23 uzunluğu bulabiliriz [noktalar arasındaki doğru
 24 parçasının uzunluğunu ifade ediyor]
 25 Araştırmacı: İkisini çıkarırsanız o uzunluğu bulabilirsiniz, tamam.
 26 Bir sonraki soruda 5 metre yükselmesi durumunda
 27 eğer 5 metre yükselirse top grafik üzerinde bu 5
 28 metrede topun bulunması hangi noktalara karşılık
 29 gelir?
 30 Alp: Rastgele şurasıyla, şurası. [topun tepe noktasına
 31 ulaşmadan önce 5 metre yükseklikte olduğunu
 32 düşündüğü bir nokta ile düşerken 5 metre yükseklikte
 33 olduğunu düşündüğü nokta gösteriyor.]
 34 Araştırmacı: Peki bu iki noktayı düşününce? [gösterdiği noktaları]
 35 Alp: Simetrik.
 36 Araştırmacı: Nereye göre simetrik?
 34 Alp: Orta noktaya göre simetrik. x eksenine dik
 35 çizdiğimizde
 36 Araştırmacı: O zaman o simetrik noktası mı oluyor?
 37 Alp: Simetri doğrusu.

Öğrenciler ifadelerinde tepe noktasını dikkate almalarına karşın bu ifadelerini gerekçelendirirlerken simetri doğrusuna göre noktaları eşledikleri görülmüştür [8-10]. Araştırmacı öğrencilerin bu fikirlerini fark ettikten sonra simetri doğrusu olarak ifadelerini düzeltmeleri için tepe noktasını düşünmeden simetrik olan noktaları karşılaştırmalarını istemiştir. Farklı simetrik noktalar üzerine düşünmelerini isteyerek öğrencilerin noktaları simetri eksenine göre eşlemelerini desteklemiştir. Öğrenciler ilk olarak simetrik iki nokta arasındaki uzaklığın hesaplanabileceğini ifade etmişlerdir [21-24]. Bu uzaklık üzerine düşündüklerinde iki noktanın bu uzaklığın orta noktasına göre simetrik olduğunu belirtmişlerdir [33]. Öğrenciler bu aşamada belirledikleri iki noktayı x eksenine tepe noktasından çizilen doğruya göre toplamsal

karşılaştırmışlardır. Böylelikle simetri eksenini çokluğunu zihinlerinde anlamlandırabilmişlerdir.

Etkinliğin ikinci kısmında öğrencilerin grafik ile cebirsel ifadeyi ilişkilendirmelerini gerektiren çıkarımlar yapmaları beklenmiştir. Kendi oluşturdukları matematiksel model beklenen ilişkilendirmeleri desteklemede çok uygun olmadığı için araştırmacıların oluşturdukları matematiksel model olan $f(x) = -\frac{1}{33}(x^2 - 33x)$ fonksiyon ifadesi ve grafiği öğrencilere sunulmuş ve bu model üzerinde çalışmaları istenmiştir. Öğrenciler bu fonksiyonun grafiğini çizmişler ve $x^2 - 33x = 0$ denkleminin köklerini bulmuşlar. Grafik ile buldukları kökleri ilişkilendirmeye çalışmışlardır.

1	Can:	Grafik üzerinde x_1 ve x_2 arasında bir ilişki var. Kesiş noktalarında.
2		
3	Alp:	İkisi de sıfır [çarpanlarına ayırdığı halini gösteriyor]
4	Can:	Hayır, oradan buluruz tamam da buradan [grafik üzerinden] bulacağız bak görürsün.
5		
6	Alp:	İkisi de 0, y'leri eşit, orta noktaya olan uzaklıkları eşit.
7		Toplamda 33 galiba, 0'dan başlarsak.
8	Can:	Grafikte
9	Alp:	Birisi (0,0) diğeri (33,0) İkisinin de y'leri eşit olduğu için orta noktaya olan uzaklıkları eşit ve sıfır olduğu için x ekseninde uzaklığı bunun yarısının iki katı o da 33 oluyor. Şu mesafe 33.
10		
11		
12		
13		ooo
14	Can:	Yani iki kökle x noktasını buluyoruz, zaten x noktasını bulduğumuzda, x noktasından y noktasını buluyoruz.
15		
16	Araştırmacı:	x noktasını o köklerden hareketle nasıl buldunuz?
17	Can:	Eşit uzaklık dedik yarısını aldık.
18	Alp:	İkiye böldük. 33'i iki ise 1'i 16.5
19	Araştırmacı:	Bir genellemeye ulaşacak olsanız peki ne dersiniz?.
20	Alp:	x eksenini kesen nokta.
21	Can:	$\frac{x_1+x_2}{2}$
22	Alp:	Evet.
23	Araştırmacı:	Ne oluyor peki $\frac{x_1+x_2}{2}$?
24	Can:	$((-b)/a)/2$
25	Alp:	Bu da $(-b)/2a$
26	Araştırmacı:	Toparlayın birlikte.
27	Can:	Şuna bir nokta diyelim mesela, A diyelim, (m,n) desek
28		[tepe noktası için A(m,n)] işte
29		$m = (x_1 + x_2)/2 = ((-b)/a)/2 = (-b)/2a$

Bulmuş oldukları x değerlerine karşılık gelen y değerlerinin ikisi de 0 olduğu için bu noktaların orta noktaya olan uzaklıklarının eşit olduğu sonucuna ulaşmışlardır [7]. Bu aşamada öğrenciler tepe noktasının x değerini referans olarak kabul etmişler ve $(x_1, 0)$ ve $(x_2, 0)$ noktalarını eşlemişlerdir. Bu iki noktanın x değerlerinin orta noktasının tepe noktasına karşılık geleceği fikri ile kökler ile tepe noktası arasındaki ilişkiyi oluşturabilmişler ve grafiksel gösterimle karşılaştırmışlardır [16-29]. Matematiksel model bu aşamada öğrencilerin grafiksel gösterimde de doğrudan iki noktanın orta noktası olduğunu görebilmelerini sağlayarak öğrencilerin çıkarım yapmalarını desteklemiştir. Kökler toplamı ile tepe noktasını ilişkilendirme aşamasında Alp kökler farkı ile de aynı sonuca ulaştığını ifade ederek bunun üzerine düşünmüştür.

1	Alp:	Farklı noktalar versek 0'dan farklı, 36 3 desek
2		topladık, 39 ikiye böldük 19,5 kayma olduğu için
3		burada 16,5 bulmuştuk.
4	Araştırmacı:	Neyi düşündün?
5	Alp:	Benim aklıma burada çıkartsak da oluyor o geldi,
6		33'den 0 çıkaralım 33, 16,5 baştaki şey var işte onu da
7		eklememiz gerek, toplayınca çıkıyor.

Öğrenci köklerin 0 ve 33 olmasını yerine 3 ve 36 olması halinde tepe noktasının apsisinin 19.5 olup olmayacağını incelemiş ve kökler farkı alındığında orijine yakın olan kök ile toplayarak tepe noktasının apsis değerine ulaşabileceği sonucuna ulaşmıştır [1-7]. Bu çıkarımları kendisinin yapması öğrencinin ilgili çoklukları uygun şekilde kullanabilir olduğunu göstermiştir.

Tepe noktası ile ilgili ilişkilere ve özelliklere ilişkin çıkarımları yapan öğrenciler farklı cebirsel gösterimleri yazmaya çalışmışlardır. İlk olarak $f(x) = -\frac{1}{33}x(x - 33)$ formunu elde etmek için fonksiyonun cebirsel ifadesinde incelemeler yapmışlardır. Çarpanlarına ayırdıktan sonra grafikle ilişkili olarak yorumlama aşamasında x_1 değerinin 0 olduğunu açıklamada problem yaşamışlardır. Bu süreçte araştırmacı soruları ile öğrencilerin iki kökün de çarpanlara ayrılmış formda açık bir şekilde görüldüğünü fark etmelerini sağlamıştır.

- 1 Alp Köklere hemen ulaşıyoruz çarpanlarına ayırdığımız
2 için. Birinci çarpanı x , ikinci çarpanı $(x-33)$
3 Araştırmacı: 0'ı görüyor musunuz burada? 33'i görüyorsunuz.
4 Can: Bunun sıfır olması için bunun da sıfır olması
5 gerekiyor.
6 Alp: Aynen. Çarpan halinde olduğu için.
7 Can: O da görünüyor ya.
8 Araştırmacı: Peki sıfır olmasaydı o? Mesela 0'da kesmeseydi?
9 Alp: Mesela 1diyelim.
10 Araştırmacı: 1'de kesseydi?
11 ooo
12 Can: Bu seferde 1 koyacağız x 'e. Yok 1'de kesince, mesela
13 33'de kesince 33 koyuyoruz oradan 0 çıkıyor.
14 Alp: O $x-33$ den kaynaklanıyor.
15 Can: Tamam işte. 1 koyunca da
16 Alp: 1 koyunca çıkacak mı?
17 ooo
18 Araştırmacı: Mesela 33'de kesseydi $(x-33)$ sağlıyor muydu yine?
19 Alp: Sağlayacaktı.
20 Araştırmacı: O zaman 1 nasıl sağlayacaktı?
21 Alp: 1 koyduğumuzda sıfır olması gerekiyor, o zaman
22 Can: $(x-1)$
23 Araştırmacı: Nasıl olurdu o zaman?
24 Alp: $(x-1)(x-33)$
25 ooo
26 Can: Şey desek mesela, $(x - a) \cdot (x - b) x_1 = a, x_2 = b$

Öğrenciler ikinci dereceden fonksiyonun çarpanlara ayrılmış formunu genellemeye çalışırken 0'dan farklı bir kök üzerine düşünmüşler ve bu sayede genel formu yazabilmişlerdir [15-26]. İkinci dereceden fonksiyonun $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ cebirsel formunu fonksiyonun x eksenini kestiği noktalarla ilişkilendiren öğrenciler $f(x) = ax^2 + bx + c$ formundaki a , b ve c katsayılarını çarpanlara ayrılmış formda incelemişlerdir.

- 1 Can: Çarptıktan sonra b ve c doğuyor.
2 Araştırmacı: Nasıl doğuyor?
3 Can: $a(x - x_1)(x - x_2)$
4 $= ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2$
5 $= ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2$
6 $x_1 + x_2 = -b/a$ ve $x_1x_2 = c/a$ olduğu için
7 $= ax^2 + bx + c$

Elde edilen cebirsel gösterimde a katsayısının var olduğunu ancak b ve c katsayılarının çarpma işlemi ile elde edildiğini belirtmişlerdir [1-7]. Farklı katsayıları olan fonksiyon ifadeleri üzerine çalışmaları öğrencilerin bu süreçte çıkarım yapmalarını desteklemiştir.

Öğrenciler bir diğer cebirsel form olan tepe noktasının kullanılarak elde edildiği $f(x) = a(x - r)^2 + k$ formu için fonksiyonun cebirsel formunu istenilen şekilde tam kare halinde yazmaya çalışmışlardır.

1	Araştırmacı:	Tam kare ne demekti?
2	Alp:	$(x + a)^2$ gibi bir şey.
3	Araştırmacı:	Bu ifadeyi düşündüğünüzde neyin karesi olabilir?
4	Alp:	Şey diyebiliriz. $(x - 33)^2 + 33x - 33^2$
5	Araştırmacı:	x'li terimleri içeren tam kare ifadeyi nasıl yazabilirsiniz?
6		
7	Alp:	Şey de yapabiliriz, birinci ile ikincinin çarpımının iki katı -33x yapacak.
8		
9		$(x - 16.5)^2 - 16.5^2$ ne çıktı?
10		$-\frac{1}{33}[(x - 16.5)^2 - 16.5^2]$
11		
12	Can:	Sağlıyor mu?
13	Alp:	16.5 daha önce nerede görmüştük, yarısı 33'den.
14	Araştırmacı:	Soruda ne istiyor?
15	Alp:	Grafik ile karşılaştırm.
16	Araştırmacı:	Karşılaştırm.
17	Alp:	Tepe noktasının x değerine eşit.
18	Can:	Hıhı.
19	Alp:	Şöyle diyebilir miyiz?
20		$[x - (\frac{x_1+x_2}{2})]^2 - (\frac{x_1+x_2}{2})^2$
21		

Fonksiyonun standart formunda c katsayısının değeri 0 olduğu için tam kare şeklinde yazdıklarında kolaylıkla grafiksel gösterim ile ilişkilendirebilmişlerdir. Buna karşın a katsayısı ile tam kare oluştuğunda kalan sayıyı çarpmadıkları için eksik genelleme yapmışlardır.

Can bu etkinlikten sonra yazmış olduğu yansıtıcı günlüğünde parabolü anlamlandırdığını ve grafik çizimini daha iyi yapabildiğini ifade etmiştir. Etkinliğin sıkıcı olmadığını ve önceki etkinliklere göre daha rahat çözüm yapabildiklerini

belirtmiştir. Ek olarak parabolün farklı cebirsel gösterimleri arası geçiş yapma aşamasını da güzel bulduğunu dile getirerek üç farklı cebirsel formu yazmıştır.

Bu etkinlikte parabol iyice anlaşıldı diyebilirim.
 Farklılık grafiklerini daha iyi seziyorum.
 Herşeyin parabolün grafiğini ele alabiliriz.
 Onun için ele 2 nokta kullanarak oarı da çözebiliriz.
 Etkinlik silikçe değildi.
 Birazcık hafif bir gündü.

$f(x) = ax^2 + bx + c$
 $a(x - x_1)(x - x_2)$
 $a(x - m)^2 + n$ (T: m, n)

Alp ise yansıtıcı günlüğüne tepe noktası ve simetri eksenini ile ilgili ifadelerle yer vermiştir. Parabol üzerinde yükseklikleri eşit olan herhangi iki noktanın simetri eksenine olan uzaklıklarının eşit olduğunu belirtmiştir.

Bir parabolün yükseklikleri eşit olan noktaların tepe noktasının simetri doğrusuna olan uzaklıkları eşittir.

Can'ın Ölçme-Değerlendirme III Etkinliğindeki Kavramlara İlişkin Anlaması.-Angry Birds etkinliğinde Can atışları gösteren parabolleri çizerken kuşların bulunduğu konum ile belirlediği domuzun bulunduğu konum arasındaki mesafeyi dikkate almıştır.

1 Can:

2

3

4 Araştırmacı:



Nasıl çizdin?

5 Can:

6

7

8 Araştırmacı:

9 Can:

10

11

Mesela bu birincisi, yüksekliği burası, ikincisi, üçüncüsü dördüncüsü. [Çizdiği parabolleri sırasıyla gösteriyor.]

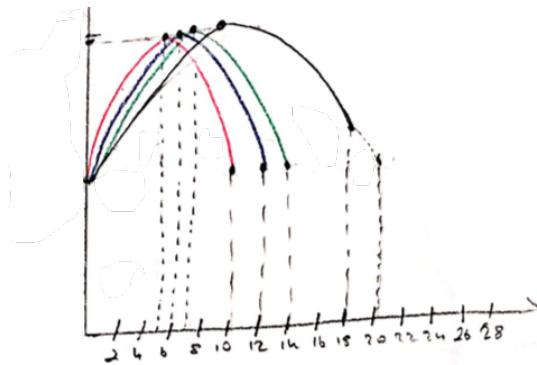
Neleri göz önünde bulundurdun bunları çizerken?

Yani ikisi arasındaki mesafe ve belirli bir yükseklik belirledim işte orta mesafe oluşturdum, yine belirli bir yükseklik belirledim, oluşturdum.

Kuşların bulunduğu konum ile belirlediği domuzun bulunduğu konum arasındaki mesafeyi iki eş parçaya ayırmış ve belirlediği orta nokta ile kuşun çıkabileceği maksimum noktayı eşlemiştir [9-11]. Domuz ve kuş arasındaki mesafe arttıkça mesafenin orta noktası sağa doğru kayacağı için kuşun çıkabileceği

maksimum yükseklik de buna bağlı olarak sağa doğru kaymıştır. Dört domuz için de benzer fikirle resim üzerinde atışların hareketini göstermiştir.

Bu çizimleri analitik düzleme taşıırken kuşların bulunduğu yeri y ekseninde ve üç domuzu aynı yükseklikte dördüncü domuzu diğer üçünden biraz daha yukarıda olacak şekilde konumlandırmıştır. Kuşlara en yakın olan domuza yapılacak atışı temsil eden parabolü uzaklığı iki eş parçaya ayırarak analitik düzleme taşımıştır. Diğer domuzlar için gerçekleşecek atışları temsil eden parabollerin tepe noktalarını ilk parabolün tepe noktasını sağa doğru kaydırarak belirlemiştir. İlk domuz ile kuş arasındaki mesafeyi 10 cm, ikinci domuz için 12 cm, üçüncü domuz için 14 cm ve dördüncü domuz için 18 cm olarak rastgele belirlemiştir. Tepe noktalarının apsis değerini ise ilk üç domuza yapılan atış için 5, 6 ve 7 olarak yazmıştır. Kuşun atıldığı konum ile dördüncü domuzun bulunduğu konum aynı y değerine sahip olmadığı için bu domuzu vurmak için yapılan atışı temsil eden parabolü domuzun bulunduğu konumdan çizmeye devam etmiştir. Domuzun bulunduğu konuma eklediği parabol parçasını simetriği olan parça ile karşılaştırarak belirleyebileceğini düşünmüştür. Bu aşamada geometri bilgilerinden yararlanmak istemiş ancak hiç bir sayısal değer bilmediği için bu bilgilerini kullanamamış ve çözüme ulaşamamıştır. Sonuç olarak kendisi noktanın apsisini 20 olarak belirlemiş ve böylelikle dördüncü domuzu vuracak şekilde yapılan atışı temsil eden parabolün tepe noktasının apsisini 10 olarak yazmıştır.



Dört parabolün tepe noktasını belirledikten sonra cebirsel ifadelerini yazma aşamasına geçmiştir. Can tepe noktalarını bildiği için tepe noktasından yararlanılan kanonik formu kullanmak istemiştir. Bu formu yazdıktan sonra hem tepe noktalarının ordinat değerlerine hem de ikinci bir noktaya ihtiyacı olduğunu fark etmiştir. Bu

süreçte kendi verdiği uzunluk değerlerini cetvelle oranlama yaparak kuşun bulunduğu noktayı (0, 15,38) olarak tepe noktasının yükseklik değerini ise 30 olarak hesaplamıştır. Dört parabolün yükseklikleri aynı olduğu için sırasıyla (5, 30), (6,30), (7, 30) ve (10,30) olarak tepe noktalarını eşlemiştir. Bu noktalar yardımıyla dört parabolik atışın cebirsel ifadelerini belirleyebilmiştir.

$$\begin{aligned} f(x) &= -0,5848(x-5)^2 + 30 \\ g(x) &= -0,4067(x-6)^2 + 30 \\ h(x) &= -0,2983(x-7)^2 + 30 \\ k(x) &= -0,1462(x-10)^2 + 30 \end{aligned}$$

Her bir parabolün cebirsel ifadesini yazdıktan sonra parabolleri ve cebirsel ifadelerini karşılaştırmıştır.

1	Araştırmacı:	Burada değişenler neler? Grafikte ikisini birlikte
2		yorumlayarak söyleyebilirsin, bu fonksiyonlarda
3		değişmeyenler neler?
4	Can:	Yüksekliği sabit tuttuğumuz için değişmeyenler her
5		bir fonksiyon için fonksiyonun tepe noktasının y
6		değerleri değişmiyor çünkü yüksekliği sabit
7		tutuyoruz, a değerleri değişiyor, çünkü şeyler
8		değişiyor, tepe noktalarının x değerleri değişiyor, ona
9		bağlı olarak a'lar değişiyor, fonksiyonları biraz
		açıyoruz, aslında öteleyerek de açıyoruz.
10	Araştırmacı:	Başka değişmeyen var mı sence? Grafiğe de
11		bakabilirsin. Üçünde de dördünde de aynı olan başka
12		bir şey var mı?
13	Can:	Tam kare var hepsinde.
14	Araştırmacı:	Grafiğine baktığında peki değişmeyen?
15	Can:	Hepsi y'de.
16	Araştırmacı:	O neye karşılık gelecek peki?
17	Can:	Şey ifadeleri verdiğimiz zaman 10, 12, 14, 20
18		verdiğimiz zaman 15.38 alacağız.
19	Araştırmacı:	Başka peki başka bir yerde görebilecek miyiz burada
20		onları? Şu parabolde nereye karşılık geliyor 15.38?
21	Can:	Ona ne diyebiliriz, y eksenini kesiyor.
22	Araştırmacı:	Peki cebirsel ifade de y eksenini kesen nokta neydi?
23	Can:	Sabit sayı.

Can karşılaştırma yaparken a katsayılarının ve tepe noktalarının apsislerinin değiştiğini, tepe noktasının ordinat değerinin değişmediğini ifade etmiştir [4-9; 15; 17-

18]. Öğrenci a katsayısına ilişkin henüz incelemeler yapmadığı için a katsayısının değişimini tepe noktasının apsisinin değişimi ile ilişkilendirmiştir. Can'ın Angry Birds etkinliğine yönelik çözümü ve bu süreçteki fikirleri değerlendirildiğinde, bir parabolün üç farklı cebirsel gösterimine ilişkin bilgileri öğrendiği görülmüştür. Parabol için kritik olan simetri eksen ve tepe noktası çokluklarına ilişkin uygun yorumlamalar yapmıştır. Simetri eksenini dikkate alarak y değerleri aynı olan noktaları birbiri ile eşlemiştir. Tepe noktasının ordinatının parabol için maksimum değere karşılık geldiğini düşünerek çıkarımlarını yapmış ve bu maksimum noktayı parabolün orta noktası ile ilişkilendirmiştir. Öğrencinin En Uzun Basketbol Atışı etkinliğinden öğrenmesi gereken fikirlerin zihninde olduğu bu etkinlik ile ortaya çıkarılmıştır.

Alp'in Ölçme-Değerlendirme III Etkinliğindeki Kavramlara İlişkin

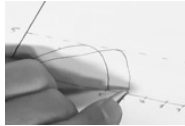
Anlaması.-Alp Angry Birds etkinliğinde başlangıçta kuşların domuzları vuracağı şekilde parabolik atışları çizmiştir. Her bir kuşun aynı yüksekliğe çıkarak domuzları vurmasını dikkate alarak parabolleri göstermiştir.

1 Alp: [analitik düzleme çiziyor]
 2 Önemli olan aynı yükseklikte, başlangıç noktaları aynı,
 3 0'dan başlatırsak. Birisi 5,6,7,8 yapabiliriz.
 4 Birincisine 5 diyeyim, ikincisine 6, 7 diğerine de 9
 5 diyeyim. En fazla çıkacakları yüksekliğe de şöyle kaç
 6 olsun, 5 olsun mesela. Mesela birincisi



10 Araştırmacı: Hıhı

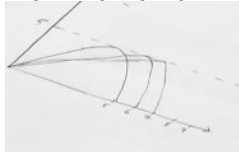
11 Alp: İkincisi



15 Mesela şu mesafe 1 birim mi olur? [tepe noktaları
 16 arasını gösteriyor.]

18 Araştırmacı: Düşün bakalım.

19 Alp: [üçüncüyü çiziyor.]



24 Mesela şuraya 2.5 desek [birinci parabolün tepe
 25 noktasının apsisi], şurası 3 oluyor [ikinci parabolün
 26 apsisi]

27

- 28 tepe noktasının apsisi] yarısı oldu, 1 değil yarısı, çünkü ikiye bölünüyor.
- 29 Araştırmacı: Nasıl? Bir daha söyler misin? Ne dedin? Önce 1 birim
30 olduğunu düşündün?
- 31 Alp: Öyle olabilir mi demiştin, sonra düşündüm, bu 3
32 oluyor, bu 2.5 oluyor, ortalaması, x ikisinin toplamının
33 yarısıydı. Yarım birim oldu.

Bu parabolleri analitik düzleme taşıırken kuşların atıldığı konumu (0,0) noktası ile eşlemiştir. Dört domuzun da aynı yükseklikte olduğunu varsayarak domuzların konumlarını sırasıyla (5,0), (6,0), (7,0) ve (9,0) noktaları ile eşlemiş ve kuşların çıkabileceği maksimum yüksekliğin değerini 5 olarak belirlemiştir [2-6]. Alp ilk iki domuz arasındaki mesafe 1 birim olduğu için tepe noktalarının arasında da bir birim olup olmayacağını düşünmüş ancak sonrasında tepe noktasından çizilen doğru parabolü iki eş parçaya ayırdığı için uzaklığın 0,5 birim olacağı sonucuna ulaşmıştır [25-28]. Bu aşamada öğrencinin tepe noktası ile simetri eksenini ilişkilendirdiği söylenebilir. Alp atışları temsil eden parabolleri analitik düzleme taşıdıktan ve belli noktalarla eşleme yaptıktan sonra cebirsel ifadelerini yazmaya çalışmıştır.

- 1 Araştırmacı: Peki bunların cebirsel ifadelerini yazmak istersen?
2 Mesela birinci kuş için olan atış.
- 3 Alp: Birinci, eksenleri kestiği noktaları biliyoruz. (0,0),
4 (5,0) burası da (2.5, 5).
5 Eksenleri kesen noktalar
6 $a(x - x_1)(x - x_2)$
7 $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{2}$
8 $a(x - 0)\left(x - \frac{5}{2}\right) = y$
9
- 10 Araştırmacı: Bunlar ne şu an?
- 11 Alp: Eksenleri kestiği noktalar.
12 $a(x - 0)\left(x - \frac{5}{2}\right) = 5$
13 Şu 5/2 değil 5 olacak.
14 $a(x - 0)(x - 5) = 5$
- 15 Araştırmacı: Şu an bu 5 ne?
- 16 Alp: Şu nokta için [diğer kestiği noktayı gösteriyor.] x de
17 5/2 olacak.
- 18 Araştırmacı: Şu an bu yazdığın ne oluyor? $a(x - x_1)(x - x_2)$ bu
19 5'e mi eşit her zaman?
- 20 Alp: Her zaman değil, şu nokta için, tepe noktası için.
- 21 Araştırmacı: Bunun eşitliğine ne diyebilirsin o zaman?

22 Alp: Yani 5/2 5 oluyor.
 23 ooo
 24 Birincisi için,
 25 $f(x) = \frac{-10}{25}x(x - 5)$

Kuşların atıldığı ve domuzların bulunduğu konumları x ekseninde aldığı için ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesi için çarpanlara ayrılmış formdan yararlanmayı tercih etmiştir. Eksenleri kestiği noktalarla birlikte tepe noktalarını da üçüncü nokta olarak kullanmış ve böylelikle a katsayısının değerini de hesaplamıştır. İlk kuşun atışını gösteren parabol için tepe noktasının karşılık geldiği noktayı (5/2, 5) şeklinde yazmış ve cebirsel ifadeye ulaşmıştır. Diğer üç kuşun atışını gösteren parabollerin cebirsel ifadelerini benzer şekilde bulan Alp bu parabolleri ve cebirsel ifadelerini karşılaştırmıştır.

1 Alp: Hani mesela daha uzakta olunca daha oval geliyor,
 2 daha yakında olunca mesela şöyle bir şey olabilir.
 3 
 4
 5 Bunu mesela artış miktarlarını karşılaştırdığımızda
 6 daha fazla artıyor, hani x 1 birim artarken mesela aynı
 7 noktada en fazla artış gösteren birinci, en az artış
 8 gösteren sonuncu.

Parabollerde artış miktarlarının değiştiğini, en yakın domuzun vurulduğunu gösteren parabolün en fazla artış gösterdiğini, en uzaktaki domuzun vurulduğunu gösteren parabolün ise en az artış gösterdiğini ifade etmiştir [5-8]. Alp cebirsel ifadeleri bulmak için çarpanlara ayrılmış formun dışında kanonik formdan da yararlanabileceğini dile getirmiş ve bir parabolün tepe noktasını kullanarak cebirsel ifadesini elde etmiş ve ilk ulaştığı cebirsel ifadeyi doğrulamıştır.

1 Araştırmacı: Bir şey fark etti mi? [çarpanlara ayrılmış ve kanonik
 2 formu kullanma için soruyor.]
 3 Alp: Mesela ilkinin [çarpanlara ayrılmış formdan
 4 bahsediyor.] yaptığımızda şeyi fark ettik, burası 1
 5 birim arttı [iki parabolün x eksenini kestiği noktayı
 6 gösteriyor.], burada 1 birim artışı gördük, mesela bunu
 7 yaparsak [tepe noktası ile] şuradaki [tepe noktaları]
 8 artış değerlerini, yarım birim arttığını ikinci ile üçüncü
 9 arası onu görebiliriz.

Bu iki formu kullanmanın farklı açılardan yorumlama yapma imkanı verdiğini dile getiren Alp çarpanlara ayrılmış formun farklı parabollerin x eksenini kestiği noktaları karşılaştırmayı, kanonik formun ise tepe noktaları arasındaki ilişkiye yönelik çıkarımlara ulaşmayı desteklediğini ifade etmiştir [3-9]. Buna karşın tepe noktasını kullanmış olsaydı üç nokta yerine iki noktaya ihtiyacı olacağını eklemiştir.

Alp'in Angry Birds etkinliğindeki çözümü ve fikirleri değerlendirildiğinde, ikinci dereceden fonksiyonun farklı cebirsel gösterimleri ve grafiksel gösterimi arasındaki geçişlerde uygun yaklaşımlar sergilediği görülmüştür. Tepe noktası, simetri eksen ve artış miktarı gibi çokluklara ilişkin anlamalarının güçlü olduğunu gösteren yorumlar yapabilmıştır. Aynı yüksekliğe sahip parabollerin kollarının birbirine daha yakın olması durumunda y değerlerindeki artışın daha fazla olduğunu dile getirmiştir. Ek olarak, parabolün x eksenini kestiği noktalar ile tepe noktasının apsisini uygun bir şekilde ilişkilendirmiştir. Alp önceki etkinliklerde öğrenmiş olduğu çoklukları bu etkinlik çözümü boyunca etkili bir şekilde kullanmıştır.

Parabolik Uçuş Etkinliği Kapsamında Ortaya Çıkan Zihinsel Eylemler.-

Parabolik uçuş etkinliğinde öğrenciler ikinci dereceden fonksiyonun farklı cebirsel gösterimleri arası geçişi grafiksel gösterimle ilişkili olarak gerçekleştirmişlerdir. Etkinlikte ilk olarak öğrencilerin grafiksel gösterimleri cebirsel olarak yazmaları beklenmiştir. Sonrasında bu gösterimleri kullanarak $f(x) = ax^2 + bx + c$ formundaki katsayılarla ilişkin çıkarımları yapmaları ve grafiklerin farklı şekillerde ötelenmeleri durumunda cebirsel ifadelerinde meydana gelen değişikliklere ilişkin sonuçlara ulaşmaları istenmiştir.

Etkinlikte ilk olarak öğrenciler kolları aşağı doğru devam eden bir parabolün verilen parçasını analitik düzleme taşımışlar ve reel sayılar kümesinde tanımlanacak şekilde fonksiyonun cebirsel formunu yazmışlardır. Parabolün tepe noktasının koordinatları belli olduğu için bu koordinatları eşleyerek bu nokta yardımıyla cebirsel ifadeyi yazmışlardır. Parabolün a katsayısını bulmak için ikinci bir noktaya ihtiyaç duyan öğrenciler bu nokta için parabolün x eksenini kestiği noktaları belirlemeye çalışmışlar ancak verilen grafikte doğrudan bu noktaları göremedikleri için

belirleyememişlerdir. Bu sebeple parabol üzerinde farklı bir noktayı düşünmüşlerdir. Öğrenciler a katsayısını bulduktan sonra söz konusu ikinci dereceden fonksiyonun grafiğini analitik düzlemde reel sayılar kümesi kapsamında noktaları eşleyerek çizmişlerdir. Tanım aralığını genişletilmesi halinde parabolün kollarının sonsuza gideceği ve parabolün sınırlılığının ortadan kalacağı fikrine sahip oldukları görülmüştür. Kanonik formu elde eden öğrenciler fonksiyonun standart formuna ve çarpanlarına ayrılmış formuna da geçiş yapmışlardır. Bu geçişlerde öğrenciler çarpanlarına ayrılmış formdaki x_1 ve x_2 değerlerinin grafiğin x eksenini kestiği noktalara karşılık geleceği fikrini dikkate almışlardır. Cebirsel ifadede elde ettikleri köklerin grafiğin eksenleri kestiği noktalarla tutarlı olduğunu yorumlayarak elde ettikleri çarpanlara ayrılmış formu da doğrulamışlardır.

Kolları aşağıya doğru devam eden parabolün farklı cebirsel gösterimleri üzerine düşünen öğrenciler her parabole ilişkin üç cebirsel gösterimin de yazılabileceğini ifade etmişlerdir. Bunun ardından kolları yukarı doğru devam eden parabole ilişkin cebirsel ifadeyi yazmalarını gerektiren sorulara geçmişlerdir. Grafik x eksenini kesmediği için öncelikle öğrenciler y değerleri aynı olan herhangi iki nokta belirleyip bu noktaların orta noktasını bulmaya çalışmışlardır. Tepe noktası yardımıyla parabolün cebirsel ifadesini oluşturmuşlardır.

1	Alp:	Mesela tepe noktasının koordinatlarını biliyoruz.
2	Can:	(50,6500) [yazıyorlar]
3	Araştırmacı:	Ne yapıyorsunuz?
4	Alp:	Tepe noktasını bildiğimiz için ve bir nokta daha bildiğimiz için direkt iki nokta ile uyguluyoruz. 40
5		noktasını mı uygulayacaksın?
6		
7	Can:	[x eksenindeki 40 ile y eksenindeki 7500'ü eşleyerek
8		(40, 7500) noktasını cebirsel ifadede kullanıyorlar.]
9		$g(x) = a(x - 50)^2 + 6500$
10		$7500 = 100a + 6500$
11		$1000 = 100a$
12		$10 = a$
12		$g(x) = 10(x - 50)^2 + 6500$
14		Açalım.
15	Alp:	$g(x) = 10x^2 - 1000x + 2500 + 6500$
16		$g(x) = 10x^2 - 1000x + 9000$

Tepe noktasını belirledikten sonra kanonik form yardımıyla cebirsel ifadeye dönüştürmeye çalışmışlar ve bilinmeyen a katsayısı için parabol üzerindeki bir noktayı kullanmışlardır [9-12]. Ulaştıkları $g(x) = 10x^2 - 1000x + 9000$ ifadesinden yararlanarak farklı cebirsel formları oluşturmak istemişlerdir. Bu amaçla ilk olarak ikinci dereceden fonksiyon ifadesini çarpanlara ayırmaya çalışmışlardır.

1	Alp:	Şimdi çarpanlarına ayıracağız. [çarpanlarına ayırmaya çalışıyorlar]
2		
3	Araştırmacı:	Ne yapmaya çalışıyorsunuz?
4	Alp:	Direkt çarpanlarına ayırmaya çalışıyoruz. [biri $b^2 - 4ac$ yardımıyla yapmaya çalışıyor, diğeri doğrudan çarpanlarına ayırmaya çalışıyor.]
5		
6		
7		ooo
8		[bu aşamada kökleri bulmaya çalışıyorlar ve iki kök buluyorlar.]
9		
10	Alp:	y'si 0 olduğunda ona eşitledik, o yüzden çarpanlarına ayırdık ama grafikte y'si sıfır olan yok.
11		
12	Araştırmacı:	Ama buldunuz, nasıl buldunuz?
13	Alp:	Şu şöyle devam etse [parabolü aşağıya doğru simetriğini alıyor gibi gösteriyor] olmaz herhalde. Ama mesela devam ettiğini düşünsek tanım kümesini, değer kümesini, yine aynı kural
14		
15		ooo
16		
17		
18	Can:	[tekrar işlemlerini kontrol ediyorlar.] Yap bir daha. [Standart formda hata yaptıklarını fark ettiler]
19		
20		$g(x) = 10x^2 - 1000x + 31500$
21		[$b^2 - 4ac$ hesaplıyorlar]
22	Alp:	Eksi çıkması gerekiyor.
23	Can:	Eksi çıkıyor zaten bir dakika. Eksi.
24	Alp:	Ne eksi?
25	Can:	Δ
26	Alp:	İşte iyi.
27	Can:	O yüzden yok.
28		ooo
29	Araştırmacı:	O zaman nasıl ilişkilendirirsiniz grafikte?
30	Can:	x'i kesmiyorsa yoktur.

Ulaştıkları kanonik formu standart forma dönüştürdükten sonra çarpanlara ayrılmış forma dönüştürmeye çalışmışlardır [1-2]. İlk olarak standart formda c değerinde yanlış hesaplama yaptıkları için Δ 'yı pozitif bir değer olarak bulmuşlar ve kökleri hesaplamışlardır. Ancak buldukları kökleri grafik ile ilişkilendirirlerken köklere karşılık gelen herhangi bir nokta olmadığını fark etmişlerdir [10-11]. Yaptıkları işlemleri tekrar gözden geçirerek fonksiyonun standart formunu

yazarlarken hata yaptıklarını görmüşler ve $g(x) = 10x^2 - 1000x + 31500$ olarak düzeltmişlerdir [18-20]. Bu ifadeyi çarpanlara ayırma yöntemlerini kullanarak çarpanlarına doğrudan ayıramadıklarından grafiğin x eksenini kestiği noktaları bulmak için Δ 'nın değerini hesaplamışlardır. Negatif bir değere ulaşmaları nedeniyle ve bu grafiğin reel sayılar kümesinde çizilmiş olduğunu göz önüne alarak çarpanlara ayrılmış formu yazamayacakları sonucuna ulaşmışlardır [26-30]. Sonuç olarak her parabolün kanonik ve standart formunun yazılabileceğini ancak çarpanlarına ayrılmış formunun yazılamayacağı çıkarımını yapabilmişlerdir. Öğrencilere grafiğin kollarının yukarı doğru olduğu ve x eksenini kesmediği durumlarda fonksiyonun cebirsel olarak çarpanlara ayrılmış formda yazılıp yazılamayacağı sorulmuştur. Bu soruyla öğrencilerin çıkarımlarının nedenleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

1	Araştırmacı:	Her böyle grafikte bu şekilde mi olacak peki?
2	Alp:	x'i kesmiyor, x'i kesen bir noktası varsa reel düzlemde
3		olur.
4	Araştırmacı:	Yani mesela yine böyle kolları yukarı bakan bir grafik
5		olduğunda, bu grafiğin eksenleri kestiği nokta olmaz
6		mı?
7	Can:	Çekeriz böyle.
8		
9		
10		
11	Alp:	Evet böyle olur.

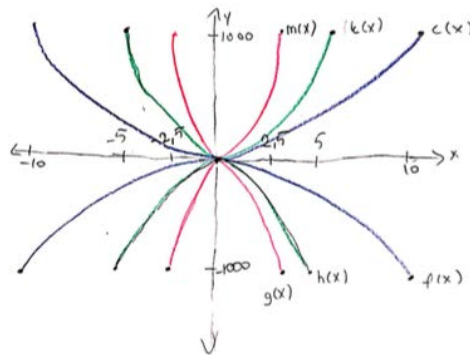
Öğrenciler kolları yukarı doğru olan devam eden ve x eksenini kesmeyen grafiklerin aşağıya doğru ötelenmesi halinde eksenleri keseceğini ve dolayısıyla çarpanlara ayrılmış formunun yazılacağını belirtmişlerdir [7-11].

Cebirsel gösterimler ve grafiksel gösterimler arası geçişteki ilişkilendirmeleri uygun şekilde yapan öğrenciler a katsayısına ilişkin çıkarımları gerektiren sonraki soruya geçmişlerdir. Belirli değerleri dikkate alarak grafiği analitik düzleme çizerlerken noktaları birebir eşlemişler ve uçağın yükselme miktarını aynı tutacak şekilde uçuşun 20 saniyede tamamlandığını göstermişlerdir. Uçağın bulunduğu en yüksek noktayı orijine taşıdıklarında simetri ekseninin $x=0$ doğrusu olduğunu dikkate alarak $(-10, -1000)$ ve $(10, -1000)$ noktalarını belirlemişlerdir. Kanonik formun genel ifadesinden yararlanarak parabolik uçuşu gösteren ikinci dereceden fonksiyonun

$f(x) = -10x^2$ olduğuna ulaşmışlardır. Bir sonraki soruda uçağın hareketi ilk olarak alçalıp sonra yükseldiği için en alçak noktasını orijine taşıdıklarında y eksenine göre noktaları birebir eşlemişler ve $x=0$ noktasına göre simetrik olduğunu ifade etmişlerdir. $(-10, 1000)$ ve $(10, 1000)$ noktalarını kullanarak uçuşun matematiksel modelinin $f(x) = 10x^2$ olduğunu bulmuşlardır. Bu iki fonksiyonun hem grafiksel hem de cebirsel gösterimlerini göz önüne alarak karşılaştırdıklarında a katsayısının parabolün kollarının aşağıya ya da yukarıya doğru açıldığını temsil ettiği sonucuna ulaşmışlardır.

1	Can:	Bir nevi a'lar yönü belirliyor diyebiliriz.
2	Araştırmacı:	O zaman buradan nasıl bir şey söyleyebilirsiniz?
3	Can:	a negatif olunca kollar aşağıya, a pozitif olunca kollar yukarı.
4		
5	Araştırmacı:	Gerçekten diğerlerinde böyle bir şey var mı?
6	Alp:	Diğerlerinde de var.
7	Araştırmacı:	Baktınız mı?
8	Alp:	Hıhı.
9	Can:	Mesela bu $f(x)$ a negatif kollar aşağıya $g(x)$ a pozitif kollar yukarı. [genellemelerini yazdılar]
10		

a katsayısının işaretinin pozitif ya da negatif olmasının parabolün kollarının yönünü etkilediği sonucuna ulaşmışlardır [1-4]. Sonraki sorularda a katsayısının değerinin değişmesinin parabolü nasıl değiştirdiği üzerine çalışmışlardır. Uçağın ilk hareketinde aldığı yüksekliği farklı saniyelerde alması durumlarını çizmişler ve bu parabollerin cebirsel ifadelerini elde etmeye çalışmışlardır.



Bu aşamada uçağın aldığı yüksekliği analitik düzlemde y ekseninde taşıyarak başlangıç ve bitiş saniyelerini bulurlarken toplam süreyi iki eş parçaya ayırarak yüksekliklerle eşlemişlerdir. $(-5, -1000)$ ve $(5, -1000)$ ilk uçuş için eşledikleri noktalar ve $(-2.5, -1000)$ ve $(2.5, -1000)$ noktaları ikinci uçuş için eşledikleri noktalar olmuştur. Bu sayede $f(x) = -10x^2$, $g(x) = -160x^2$ ve $h(x) = -40x^2$ fonksiyonlarını elde

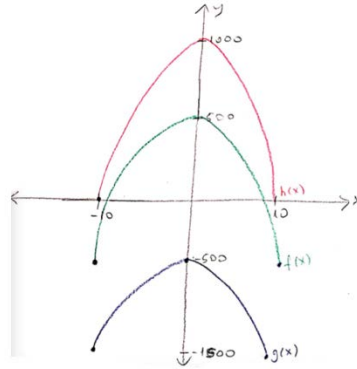
etmişlerdir. a katsayısının negatif olması durumunda küçülmesiyle parabolün kollarının birbirine yaklaştığı sonucuna ulaşmışlardır. a katsayısının pozitif olması durumunda da benzer işlemleri yaparak elde ettikleri üç parabolün cebirsel ifadesini bulmuşlardır. $c(x) = 10x^2$, $m(x) = 160x^2$ ve $k(x) = 40x^2$ fonksiyonlarına ulaşarak a katsayısının pozitif olması halinde değerinin büyümesiyle parabolün kolları birbirine yaklaşacağını ifade etmişlerdir. Hem negatif hem de pozitif olması durumunu düşünerek a katsayısının mutlak değer olarak büyümesinin kollarının birbirine yaklaşacağı çıkarımını yapmışlardır. Bu çıkarımlarını grafiksel olarak da x 'in alacağı değerlere bağlı olarak y 'nin alacağı değerlerinin analitik düzlemdeki değişimini açıklayarak yorumlamışlardır.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda a katsayısının hem cebirsel olarak hem de grafiksel olarak kollarının yönü ve açıklığını belirlediği sonucuna ulaşmışlardır. Bu çıkarımların ardından araştırmacı öğrencilere ikinci dereceden fonksiyonun a katsayısına $f(x) = ax + b$ formundaki doğrusal fonksiyonlardaki a katsayısı ile ilgili anlamları yükleyip yüklemediklerini ortaya çıkarmaya yönelik sorular sormuştur.

1	Araştırmacı:	Bir şey soracağım doğrusal fonksiyon dediğimiz şey neydi?
2		
3	Alp:	$ax + b$
4	Araştırmacı:	Oradaki a neydi?
5	Alp:	x 'in 1 artış miktarındaki y 'nin değişim miktarı.
6	Araştırmacı:	Değişimi. Grafiksel durumda neydi?
7	Alp:	Herhangi iki noktanın arasındaki y bölü x . Herhangi
8		iki nokta arasında, y_2 'den y_1 'i çıkartıyoruz.
9	Araştırmacı:	y_2 'den y_1 'i çıkartıyorsunuz. Ne deniyordu ona?
10	Alp:	$\tan a$
11	Can:	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
12	Araştırmacı:	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Doğrunun nesi?
13	Can:	Eğim.
14	Araştırmacı:	Eğim. Peki şimdi a ikinci dereceden fonksiyondaki
15		x^2 'nin katsayısı olan a için böyle bir şey söyleyebilir
16		misiniz?
17	Can:	Eğim yok ki.
18	Alp:	Evet. Her noktanın ayrı eğimi var ama parabolün
19		eğiminden bahsedemeyiz.
20	Araştırmacı:	Her noktanın ayrı eğimi var. Noktanın eğimi mi var?
21	Alp:	Noktanın değil. Noktadan çizilen doğrunun.

Öğrenciler $f(x) = ax + b$ formundaki doğrusal fonksiyonlarda a katsayısının değişim oranı ve doğrunun eğimi olduğunu [11-13] ancak parabolde a katsayısının eğimle ilişkili olmadığını ifade etmişlerdir. Parabolde eğimden bahsedilemeyeceğini sadece parabolün üzerinde alınan noktalardan parabole teğet doğrularının eğimlerinden bahsedilebileceğini açıklamışlardır [17-21].

Etkinliğin devamında $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonun c katsayısına ilişkin çıkarımlar yapmaya çalışmışlardır. Etkinlikte verilen ilk uçuşu temsil eden parabolün (30, 8500) noktasına karşılık gelen tepe noktasını (0, 500) noktasına taşımışlar ve yükselme değerini koruyarak diğer noktaları analitik düzlemde eşlemişlerdir. Bu parabolün cebirsel ifadesini $f(x) = -5x^2 + 500$ olarak bulmuşlardır. Sonrasında da (0,1000) ve (0,-500) noktalarına taşımışlar ve bu parabollerin cebirsel ifadelerini yazmışlardır. Bu üç fonksiyonu ve grafiklerini karşılaştırarak tepe noktasının ve dolayısıyla fonksiyonun alacağı en büyük değer c 'ye bağlı değiştiği sonucuna ulaşmışlardır.



Çizmiş oldukları parabolleri incelerlerken ilk olarak parabollerin kollarının devam etmesi durumunda bir değerden sonra kesişeceği fikrini ifade etmişlerdir.

1	Araştırmacı:	Bu parabollerin özellikleri neler? Aynı parabol mü
2		bunlar şekil olarak?
3	Alp:	Hıhı.
4	Araştırmacı:	Yani devam etse nasıl olur mesela?
5	Can:	Kolları çakışır.
6	Araştırmacı:	Çakışır mı?
7	Alp:	Çakışır mı?
8	Can:	Şu şekilde düşündüm ben ama
9		

10
11



12 Araştırmacı: Niye o şekilde düşündün?
13 Alp: Bizimkiler bunlar, kolları devam etse

14
15
16
17



18 Araştırmacı: Evet ne düşünüyorsunuz?
19 Alp: Mesela üçü de -10'da farklı değerler almış. 0'da
20 farklı değerler almış. x'i ne olursa olsun farklı
21 değerler almayacak mı?
22 Araştırmacı: Öyle mi olacak?
23 Can: Evet, çünkü farklı şeylerde oluyor.
24 Alp: Şunu şöyle ötelesek aynı oluyor kolları ama yukarıda
25 olunca daha geniş, aynı x için farklı değerler alıyor.
26 Araştırmacı: Aynı mı o zaman, yukarı doğru ötelendiğinde mesela
27 o mavi çizdiğiniz parabol yukarı doğru ötelediğinizde
28 yeşilinizi üstüne koyduğunuzda birebir çakışır mı?
29 Alp: Çakışır.
30 Can: [düşünüyor kısa bir süre] Çakışır.
31 Araştırmacı: Kırmızı peki?
32 Can: Kısa kalır.
33 Alp: Kırmızıda da çakışmaz mı, o çizimden
34 kaynaklanıyor. Sonuçta a'ları eşit, sadece değişen c.
35 Can: Aynen, aynen.

İlk olarak Can bu parabollerin kesişeceğini ifade etmiştir [5; 8-12]. Alp seçtiği farklı x değerleri için karşılık gelen y değerlerini karşılaştırmış ve eşleşen (x, y) ikililerinin birbirinden farklı olduğu dolayısıyla parabollerin hiçbir zaman kesişmeyeceği sonucuna ulaşmıştır [20-22]. Araştırmacının sorusu ile iki parabolün ötelenmesi halinde çakışacağını iki nokta arasında toplamsal karşılaştırma yaparak açıklamıştır. Ayrıca bu parabolere karşılık gelen a katsayılarının aynı c katsayılarının farklı olduğunu ancak ötelenmesi halinde aynı olacağını ifade etmişlerdir [35-36]. Bu çıkarımlarının ardından araştırmacı öğrencilere c katsayısının anlamını sormuştur.

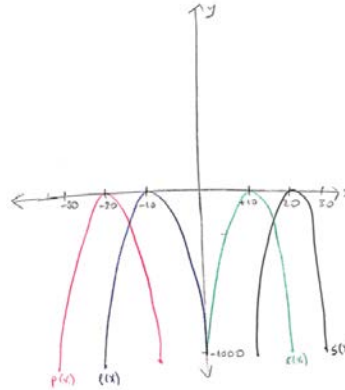
1 Araştırmacı: O zaman c için ne söyleyebilirsiniz?
2 Alp: Parabolü yukarı ya da aşağıya
3 Can: Parabolün y eksenindeki konumunu belirliyor.
4 Araştırmacı: Başka? Mesela aynı kaldı burada c'ler değişti.
5 Parabol ne şekilde değişiyor bu cebirsel ifadelere
bağlı olarak?
6 Can: Bu altta kalıyor, bu üstte kalıyor.

- 7 Alp: Yani c ne kadar yüksekse değeri o kadar da yukarı da
8 olur.
- 9 Can: Yani negatif olunca fonksiyon x ekseninin üzerine
10 çıkamıyor.
- 11 Araştırmacı: Tepe noktası olduğu için, yani tepe noktası şu an siz
12 tepe noktanız sizin çünkü c değeri,
- 13 Alp: Tepe noktası orijin olan parabolde c eklendiğinde
14 tepe noktası (0,c) noktası olur.
- 15 ooo
- 16 Araştırmacı: İlgilendiğiniz fonksiyonların genel hali ne?
- 17 Alp: $ax^2 + c$
- 18 Araştırmacı: Nasıl?
- 19 Can: $ax^2 + c$
- 20 Araştırmacı: $ax^2 + c$ fonksiyonu
- 21 Can: b sıfır olduğu için.
- 22 Araştırmacı: Hepsinde b sıfır, b'nin 0 olması neyi sağlıyor?
- 23 Can: Sağa sola kaymamasını.
- 24 Alp: Tepe noktasının y'nin üzerinde olmasını.
- 25 Araştırmacı: Niye?
- 26 Can: Çünkü b olunca mesela bir değer veriyoruz, sonra o
27 burada karşılanıyor, [y'de bir değeri olacağından
28 bahsediyor] bir dakika
- 29 Alp: Tepe noktası $\frac{-b}{2a}$ b'si sıfırsa direkt 0.
- 30 Can: Mantıklı.
- 31 Araştırmacı: $\frac{-b}{2a}$ tepe noktası mı?
- 32 Can: Tepe noktasının x'i.

Öğrenciler c katsayısının y eksenindeki konumunu belirlediğini [3], c değeri ne kadar yüksekse parabolün o kadar yukarıda olacağını yorumlamışlardır [7-8]. $f(x) = ax^2$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktasının orijinde olduğunu, $f(x) = ax^2 + c$ fonksiyonunun grafiğinin ise $f(x) = ax^2$ fonksiyonun grafiğinin c birim yukarı ya da aşağıya ötelenmiş hali olduğunu belirtmişlerdir [11-14]. Kolları yukarıya doğru açılan paraboller için c katsayısı ile ilgili sonuçlara ulaşmışlardır. Bu süreçte b katsayısının 0 olmasının parabolün tepe noktasının apsis değerinin 0 olması ile ilişkilendirmişlerdir. Öğrencilerin parabollerin x eksenine yukarı ya da aşağıya ötelenmesi durumlarında cebirsel ifadelerindeki değişimlerle ilgili uygun çıkarımları yaptıkları görülmüştür.

Ardından parabollerin y eksenine paralel olarak ötelenmelerinin cebirsel ifadelerinde ne gibi değişikliklere yol açtığı ile ilgili sonuçlara ulaşmaları beklenen sorular üzerine çalışmışlardır. Tepe noktaları (-20, 0), (-10, 0), (10, 0) ve (20, 0) olacak şekilde çizilmeleri istenen parabolleri çizmişler ve cebirsel ifadelerini sırasıyla $p(x) =$

$-10x^2 - 400x - 4000$), $l(x) = -10x^2 - 200x - 1000$, $m(x) = -10x^2 - 200x - 1000$ ve $s(x) = -10x^2 - 400x - 4000$ olarak elde etmişlerdir.



Parabolik uçuşları temsil eden fonksiyonların cebirsel ifadelerine ulaştıklarında a katsayısında herhangi bir değişiklik olmadığını, b ve c katsayısının değiştiğini gözlemlemişlerdir. Tepe noktasının farklı bir noktaya taşınması durumunda fonksiyonu temsil edecek cebirsel ifadeye yönelik çıkarımları yapmışlardır.

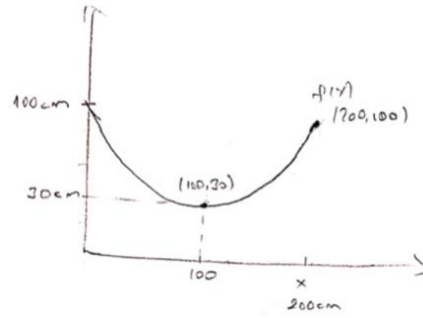
1	Araştırmacı:	Nelere ulaştınız?
2	Alp:	Mesela 30'u baz alarak yapmış olsaydık. $-10x^2 + 600x - 9000$ olacaktı.
3		
4	Araştırmacı:	Neden öyle olacaktı?
5	Alp:	Çünkü bunu hareket ettirdiğimizde $(x - 30)^2$ olacaktı.
6	Araştırmacı:	Neden öyle olacaktı?
7	Can:	Bir daha söyle.
8	Alp:	Bir de şuraları şey mi yaptık. Bunlar - mi olacak + mi olacak?
9		
10		ooo
12	Alp:	Evet, mesela atıyorum bu hangisiymiş $l(x)$, $l(x)$ 'e baktığımızda -10 [tepe noktasının apsisi için], $(x - (-10))^2$ oluyor. $(x + 10)^2$ oluyor.
13		
14		
15		ooo
16	Alp:	Tepe noktasını kullandığımız $a(x - r)^2$ olanda. Yani r zaten x, x değiştikçe mesela diğerinde y'yi değiştirmiştik kare yoktu. $a(x - 0)^2$ çıkıyordu hep, y'yi değiştirdiğimizde, burada kare var, birincinin karesi, birinciyle ikincinin çarpımının iki katı ve ikincinin karesi, üçlü bir şey çıkıyor, bir de katsayısı var, katsayısıyla çarptığımızda c doğuyor.
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23	Araştırmacı:	O değişimi genel olarak nasıl gösterirsiniz?
24		ooo

- 25 Alp: Şimdi tepe noktasını düşünürsek, veya mesela
 26 ötelediğimiz kadarı $r_2 - r_1$ kadar ötelemiş oluyoruz.
 27 Şuan ki tepe noktası,
 28 Mesela şey olacaktı
 29 $a(x - 10000)^2$ buradaki r ,
 30 Can: Buradaki r ,
 31 Alp: O r de, hani r_1 0
 32 $(r_2 - r_1)$ diyebilir miyiz?
 33 Can: $x - (r_2 - r_1)$ mi?
 34 Alp: Mesela 2 birim sağa yaptığımızda,
 35 Can: Deriz bence.
 36 $a(x - (r_2 - r_1))^2$

Genellemeye ulaşma sürecinde ilk olarak r değerinin 30 olması durumunu incelemişlerdir [2-5]. r 'nin değerinin değişiminin cebirsel ifadede de artı ya da eksi olması durumuna karar vermek için negatif değer olması halindeki cebirsel ifadeyi ele almışlardır [12-13]. Bu sayede bir parabolün tepe noktasını referans alarak değişimi genelleylebilmişlerdir [25-36].

Farklı fonksiyonlar üzerine çalışan öğrenciler bu fonksiyonları birbiri ile karşılaştırınca b katsayısının parabolün tepe noktasını değiştirdiği sonucuna ulaşmışlardır. Öğrencilerin grafikleri aynı analitik düzleme çizimleri çıkarımlarını desteklemiş ve genellemeye ulaşmalarını kolaylaştırmıştır.

Can'ın Ölçme-Değerlendirme IV Etkinliğindeki Kavramlara İlişkin Anlaması.-Parabollerin ötelenmesi ile ilgili ölçme ve değerlendirme kapsamında Can ilk olarak İstinye ve Tarabya sahillerindeki korkulukların özelliklerini incelemiş ve bu zincirlerin uzunluklarının ve başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki uzaklıklarının birbirine eşit olduğuna dikkat çekmiştir. Fotoğraftaki zincirlerin en solundakini analitik düzleme taşımış ve bağlam doğrultusunda bazı noktalarla analitik düzleme çizdiği parabol noktalarını eşlemiştir.



Noktaları belirledikten sonra ikinci dereceden fonksiyonun kanonik formu yardımıyla en soldaki zinciri temsil eden parabolün cebirsel ifadesine $\frac{10}{1003}(x - 100)^2 + 30$ olarak ulaşmıştır.

1	Can:	$\frac{10}{1003}(x - 100)^2 + 30$ diye yazabiliriz.
2	Araştırmacı:	Bu şimdi neyi buldun?
3	Can:	Bir zincirin oluşturduğu parabolün ikinci dereceden
4		fonksiyon halinde yazımı ki hepsi aynı zaten.
5	Araştırmacı:	Hepsi aynı, peki bunların farkları ne?
6	Can	Mesela birisi burada birisi burada [yanına çiziyor gibi
7		yapıyor] yani x eksenini üzerinde ötelenmiş halleri
8		oluyorlar.
9	Araştırmacı:	Peki hepsini kapsayacak bir fonksiyon yazabilir misin?
10	Can:	Hepsini kapsayacak. Mesela bu 200 olduğu zaman bu
11		400 olacak. Tepe noktaları yine aynı olacak.
12	Araştırmacı:	Nasıl tepe noktaları aynı olacak?
13	Can:	y'si aynı olacak. O zaman tepe noktasının r'si
14		değişecek. Yani aslında biz burayla oynayacağız [r'yi
15		gösteriyor.].
16	Araştırmacı:	Öyle mi?
17	Araştırmacı:	O zaman hepsinin genel halini nasıl oluşturabilirsin?
18	Can:	Evet, onu düşünüyorum. Aslında şey desek, x eksi
19		değişim miktarı direkt. Mesela 200 kayıyor, x-200
20		oluyor,
21	Araştırmacı:	Mesela buradaki fonksiyonun ifadesini oluşturmak
22		istesen ne yapacaksın? [ötelenmiş]
23	Can:	Şey olacak, işte burası 300 olacak
24		$(x - 300)^2 + 30$ olacak.

İlk zincire karşılık gelen parabolün cebirsel ifadesini bulduktan sonra diğer zincirlere karşılık gelen parabollerin cebirsel ifadeleri üzerine düşünmesi istenmiştir [5]. Diğer zincirlerin de bu zincirle aynı olduğunu sadece x ekseninde ötelenmiş durumda olduğu belirtmesinin [4-8] üzerine araştırmacı hepsini temsil edecek bir cebirsel ifade yazmasını istemiştir. Can değişkenlerin neler olduğunu düşünmüş ve ilk

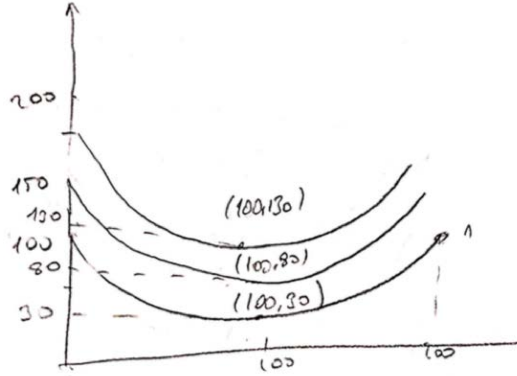
olarak tepe noktasının apsisi ile a'nın değişeceğini belirtmiştir [13-15]. Zincirlerin durumlarını incelediğinde x ekseninde ötelenme olması sebebiyle $f(x)$ 'in $f(x + d)$ olacağını dile getirmiştir. Ancak bu ifadenin üzerine düşündükten sonra bu değişim miktarının $f(x-d)$ şeklinde fonksiyonun cebirsel ifadesinde belirtileceğine karar vermiştir [18-24].

Parabolün y eksenine paralel bir şekilde x ekseni boyunca ötelenmesi durumunda değişikliğin tepe noktasının apsis değerinde olacağını ifade eden Can'ın genelleme yapıp yapamayacağını ortaya çıkarmak için araştırmacı ona bir soru yöneltmiştir. Bu soruda yan yana 100 tane korkuluk olduğu varsayarak, 100. korkuluğu temsil eden parabolün cebirsel ifadesini nasıl yazabileceğini sormuştur.

1	Araştırmacı:	Mesela sahil boyunca 1000 tane var, 100 tane var. 100
2		tane olunca nasıl yapacaksın? 100 tane çiçek misin?
3	Can:	[düşünüyor.] Nasıl yazabilirim?
4	Araştırmacı:	Ne düşünüyorsun?
5	Can:	Nasıl yazabileceğimi. Mesela birincisi $x-100$ oluyor,
6		ikincisi $x-300$ oluyor direkt, $x-500$ oluyor, $x-700$, $x-$
7		900 [genel ifadeyi yazmaya çalışıyor.] oldu sanırım,
8		$x-100-(n-1)200$ desek,
9		mesela 5.korkuluk, 4- $800-900$, ikinci korkuluk
10		$200,300$. Evet.
11	Araştırmacı:	Ne düşündün onu buldun?
12	Can:	Yani hep 200 miktar artış oluyor, 200 ile çarpacağız
13		bir nevi aslında. Beşinci değer dedik, 200 ile
14		çarpsaydık 1000 olacaktı ama biz 800 bulduk, bir
15		sayı eksiği oluyor aslında, yani 1 koyunca da direkt
16		kendisine ulaşması gerekiyor. O yüzden bu çıkıyor
17		yani.
18	Araştırmacı:	En son fonksiyon ifadesini yazabilir misin?
19		ooo
20	Can:	$\frac{10}{1003} [x - 100 - (n - 1)200]^2 + 30 = f(x)$

Can doğrudan görebileceği ötelemelerdeki parabollerin cebirsel ifadelerini düşünerek [5-7] genel bir ifade yazmış ve bu ifadeyi ötelenen bir parabol değerinden yararlanarak doğrulamıştır [8-10]. Bu sonuçlara dayalı olarak da x ekseni boyunca ötelenen parabollerin cebirsel ifadesine ilişkin genellemeyi yapabilmektedir.

Bu öteleme hareketinin ardından y ekseninde parabollerin ötelenmesini içeren Sarıyer sahilindeki korkuluklara ilişkin soruya geçiş yapmıştır. Benzer şekilde ilk olarak zincirleri analitik düzleme taşımış ve tepe noktalarını ve başlangıç ile bitiş yerlerine karşılık gelecek noktaları belirlemiştir.



Bu parabollerden tepe noktasını $(100, 30)$ olarak belirlediği parabolün cebirsel ifadesini $\frac{7}{1000}(x - 100)^2 + 30$ olarak yazmıştır. Diğer parabolleri de bu parabole bağlı olarak ifade etmiştir.

1	Can:	O zaman mesela birincisi, $\frac{7}{1000}(x - 100)^2 + 30$
2	Araştırmacı:	İkincisi?
3	Can:	$\frac{7}{1000}(x - 100)^2 + 80$. Üçüncüsü de
4		$\frac{7}{1000}(x - 100)^2 + 130$
5		
6	Araştırmacı:	Peki böyle böyle devam etseydi?
7	Can	$30 + (n-1)50$ oluyor.
8	Araştırmacı:	Onu yazabilir misin? Daha da fazla olsaydı üst üste
9		olsaydı?
10	Can:	$g(x) = \frac{7}{1000}(x - 100)^2 + 30 + (n - 1)50$
11	Araştırmacı:	Bu 50 ne?
12	Can:	Artış miktarı.

Parabollerin ötelenmesiyle tepe noktasının ordinat değerinde değişikliğin olacağını ifade ederek bu değişikliği kanonik form da göz önüne alarak genel ifadeyi kolaylıkla yazabilmiştir [7-10]. Bu öteleme hareketinin genel ifadesine ulaşmasının üzerine araştırmacı bir parabolün hem x eksenine hem de y ekseninde ötelenmesi durumunda cebirsel ifadesinin nasıl değişeceği sorusunu yöneltmiştir.

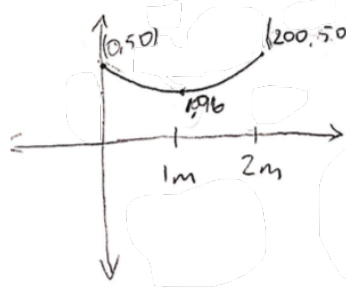
- 1 Araştırmacı: Peki buraya baktığında üst üste üç tane var, bunlar da hep yan
2 yana, yan yana olmuş, ben sana deseydim ki sen şunu birinci
3 olarak düşün, 15.korkuluğun ortadaki zinciri ifade etmeni
4 isteseydim?
5 Can: Arkadaki ile [x eksenine ötelemeye ilişkin genelleme] bunu [y
6 ekseninde ötelemeye ilişkin genelleme] birleştiresek olur mu?
7
8 Araştırmacı: Nasıl birleştireceksin?
9 Can: Mesela 15.nin ikinci oluyor dimi, o zaman sağa doğru kayıyor,
10 o zaman bunu ele alacağız, en alttakini birinci alacağım, burası
11 14 oluyor, 14.200 falan, çıkıyor
12 Araştırmacı: Peki sen en alttakini buldun, ikinci için?
13 Can: O da mesela ikinci diyoruz, o zaman da burası iki koyuyoruz,
14 o zaman burası n_1 n_2 olsun,
15 O zaman ben bunu yazayım mı?
16 Araştırmacı: Yaz.
17 Can:
$$\frac{2}{1000} (x-100-(n-1)-200)^2 + 50 + (m-1).50 = y(x)$$

18
19 $n = x$ eksenindeki değişim
20 $m = y$ eksenindeki değişim
21

Can parabolün x eksenini boyunca ötelenmesi ile ilgili ulaştığı genelleme ile y eksenini boyunca ötelenmesi ile ilgili ulaştığı genellemeyi iki katsayı yardımıyla birleştirerek istenen genellemeyi kolaylıkla yazabilmiştir.

Can'ın ölçme ve değerlendirme etkinliğine yönelik çözümü ve ifadeleri değerlendirildiğinde, parabollerin cebirsel ifadelerini kolaylıkla yazabildiği görülmüştür. Bu etkinlik boyunca öteleme hareketlerine ilişkin uygun açıklamalar yapmış ve parabolün ötelenmesi durumunda açıklığın ve dolayısıyla a katsayısının değişmeyeceğini ifade etmiştir. Ek olarak yapılan öteleme hareketinin cebirsel ifadeyi nasıl değiştirdiğini açıklayabilmiş ve tüm genellemelere ulaşabilmiştir.

Alp'in Ölçme-Değerlendirme IV Etkinliğindeki Kavramlara İlişkin Anlaması.-Ölçme ve değerlendirme IV etkinliğinde Alp de Can gibi ilk olarak verilen korkulukların özelliklerini incelemiş ve en soldaki zinciri analitik düzleme taşıyarak bitiş ve başlangıç yerlerine ilişkin noktaları cetvel ile oranlayarak (0,50) ve (200,50) olarak ve tepe noktasını (100,16) olarak belirlemiştir.



Belirlediği noktaları $f(x) = ax^2 + bx + c$ cebirsel ifadesinde eşleyerek üç denklem yardımıyla parabolün cebirsel ifadesine $\frac{68}{3 \cdot 10^4}x^2 - \frac{136}{100}x + 50 = f(x)$ olarak ulaşmıştır. Bu ilk parabole bağlı olarak diğer parabollerin cebirsel ifadelerini yazmıştır.

1	Alp:	2 metre sağa ötelendiğinde $a(x - r + 2)^2$ diyoruz,
2		bunda da aynı şeyi yapabiliriz. Mesela 1.2 50 ise, şu
3		mesafe 160 cm tepe noktası 160 oynuyor, 100 iken
4		260, 420, 580
5	Araştırmacı:	Bunu nasıl yazabilirsin peki?
6	Alp:	$\frac{68}{3 \cdot 10^4}(x + 100$
7		Buraya birinci dersek buraya ikinci dersek, buraya
8		üçüncü dersek, buraya taşırken 1 tane 160 ekliyoruz,
9		buraya taşırken 2 tane 160 ekliyoruz,
10		O yüzden sayısına n diyelim.
11		$\frac{34}{10^4}[x - (100 - (n - 1)160)]^2 + 16$

Alp x eksenini boyunca ötelenmesi halinde ise tepe noktasının apsis değerlerini toplamsal karşılaştırma ile ne kadar değişeceğini belirlemiş ve bu değişim miktarından yararlanarak ulaştığı cebirsel ifadeyi kullanmak yerine kanonik form [1] doğrultusunda ötelenen parabollerin cebirsel ifadesini yazmıştır [6-11].

Parabolün x eksenini boyunca ötelenmesi ile ilgili genellemelere kolaylıkla ulaşan Alp y ekseninde ötelenmesi durumunu incelemeye başlamıştır.

1	Alp:	Şunu dedik, şurası buradan 50 cm yukarıda [iki
2		parabolün tepe noktalarının ordinatını karşılaştırıyor],
3		burası da 50 cm yukarıda toplamda 100 cm yukarıda.
4		Burası (0, 100) noktası burası (200, 100) noktası
5		olacak. Burası (100, 16) iken burası (100, 66) olacak.
6		Çünkü 50 cm değişim var. Ve bu da şey olacak, aynı
7		sırada şey yaparsak,

$$g(x) = \frac{34}{10^4} (x - 100)^2 + 16 -$$

Mesela bu birincisi, birincisinde sadece 16, başlangıcı
ikincisinde (m-1) tamam

$$g_m(x) = \frac{34}{10^4} (x - 100)^2 + (6 + (m-1) \cdot 50)$$

En alttaki parabolün cebirsel ifadesini $f(x) = \frac{34}{10^4} [x - 100]^2 + 16$ olarak kabul etmiştir. Tepe noktasının ordinatlarını toplamsal karşılaştırarak değişimlerine odaklanmış [4-7] ve bu sayede genel ifadesine kolaylıkla ulaşmıştır [11-13].

Alp iki farklı öteleme hareketi ile ilişkili olarak parabollerin genel ifadesine ulaştıktan sonra araştırmacı x eksenini üzerinde hem de y eksenini üzerinde ötelenmesi durumunda parabolün cebirsel ifadesindeki değişimi nasıl genel olarak ifade edeceğini sormuştur. Bu aşamada Alp hiç düşünmeden ulaştığı iki farklı genel ifadeyi iki katsayı yardımıyla birleştireceğini belirtmiş ve genel ifadeyi yazmıştır.

$$h_{n,m}(x) = \frac{34}{10^4} [x - (100 + (n-1)160)]^2 + 16 + (m-1)50$$

Etkinliklerin tamamlanmasının ardından Can tüm süreci değerlendirdiğinde yansıtıcı günlüğünde, etkinliklerde ilk aşamalarda zorlandıklarını ama bu etkinlikler üzerine çalışmanın hoşuna gittiğini ifade etmiştir. El Castillo etkinliğinde kavrama ilişkin temelleri attıklarını diğer etkinliklerde ise pekiştirmeler yaptıklarını belirtmiştir.

İlk başta etkinlikler zor gelmişti. Ama yine de benim hesuma gidi-yordu. Fortlı bir yöntemle yani şeyler öğretilirdi.
El Castillo eslinde tem etkinlikleri yapı. Ondan sonra tem olarak çalıştık.
Temelleri attık, diğebilirim.
Sonraki etkinlikler de her şeyi pekiştirdi bence.

Ek olarak, yapılan bireysel ölçme-değerlendirme süreçlerinin öğrenmelerini desteklediğini ve sorumluluklarını arttırdığını belirtmiştir. Ancak grup olarak çalışmanın bu süreçte önemli olduğunu ve tek başına etkinlikleri başarıyla tamamlayamayacağını dile getirmiştir.

Çiğirsel gelişmeleriniz de öğrenmeyi etkiliyor bençe. İnsan kendinde bir sorumluluk hissediyor bençe. Çarp gelişmesini ise daha rahat ediyor. İnsan emniyetini değil yapabileceğine inanıyor. Sonra gelmeden de.

Alp de benzer şekilde El Castillo etkinliğini geçiş etkinliği olduğunu ve bu etkinlikte noktaların sıklaşması ile parabol geçişin ilk sürecinin gerçekleştirdiklerini ifade etmiştir. Bu etkinlikte yoğun bir zihinsel çalışma yaptıklarını ve sonrasındaki etkinliklerde rahatlıkla çözüme ulaşabildiklerini belirtmiştir.

El Castillo tam geçiş etkinliği. Kendine göre bir zorluğu vardı. Noktaların sürekliliğini bulmak ve parabol ile ille adını almak o gün bir çok şeyi öğrenmesini sağladı. Ailece eve gidince başını baya ağrıtmıştı. O etkinlikten sonra, her şey çarp sükutu gibi geldi.

Ek olarak, daha önce gerçekleştirmedikleri bir çalışma olması sebebiyle başlangıçta stresli ve gergin olduklarını, sonrasında giderek alıştıklarını ve birlikte çalışmanın bu süreçte önemli olduğunu eklemiştir.

İkinci Dereceden Fonksiyonlarla İlişkin Kavramsal Anlama Testine Yönelik Bulgular.-Bu bölümde Can ve Alp'in kavramsal anlama testine verdikleri yanıtların analizlerine yönelik bulgulara yer verilmektedir. Bulgular Can ve Alp için ayrı ayrı sunulmakta ve rubrikteki temel beş kategori bağlamında ele alınmaktadır. Ek olarak, öğrencilerin yanıtları kavramsal anlamaları ile ilgili kritik durumlar bağlamında ve gerekli görüldüğü durumlarda klinik mülakatlara yönelik kamera kayıtlarının transkriptlerden alınan kesitlerle desteklenmektedir.

Can'ın İkinci Dereceden Fonksiyonlara İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular.-Can'ın öğretim deneylerinin ardından gerçekleştirilen kavramsal anlama testine verdiği yanıtların analizine dayalı bulgular beş kategori bağlamında ele alınmaktadır.

Can'ın ikinci dereceden fonksiyonun genel özelliklerine ve doğrusal fonksiyonlarla ikinci dereceden fonksiyonların ilişkisine yönelik sorulara verdiği yanıtlar değerlendirildiğinde, doğrusal fonksiyon ve ikinci dereceden fonksiyon için eş zamanlı değişim ve eşleme fikirlerinin olduğu görülmüştür. Ön bilgilerini ortaya çıkarmak için öğretim dizisi öncesi yapılan klinik mülakat kapsamında eş zamanlı

değişim fikrine yönelik kanıtlar görülmezken kavramsal anlama testi kapsamında eş zamanlı değişim fikrini yansıttığı ortaya çıkmıştır. İki doğrusal fonksiyonun çarpımı ile ikinci dereceden fonksiyonun oluşturulabileceğini bilen Can doğrusal fonksiyonun grafiğinin eğiminin varlığından söz edilebileceğini ancak parabolün eğiminden söz edilemeyeceğini açıklamıştır. İkinci dereceden fonksiyonun tepe noktasının olduğunu ve bu tepe noktasının fonksiyonun maksimum ya da minimum değeri ile ilişkili olduğunu dile getirmiştir. Reel sayılar kümesinde tanımlı bir ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin kollarının sonsuza doğru gideceğini ve eksi ya da artı sonsuza gidip gitmeyeceğini a katsayısının belirlediğini ifade etmiştir. Yapılan klinik mülakat ile ikinci dereceden fonksiyonun kritik özelliklerine ilişkin anlamalarının uygun olduğu, kavramın farklı temsilleri arasındaki geçişleri yapabildiği, farklı temsillerinin özelliklerini yorumlayabildiği ve doğrusal fonksiyon ile ilişkilendirebildiği ortaya çıkmıştır. Tablo 15’de Can’ın ikinci dereceden fonksiyonların genel özellikleri ve doğrusal fonksiyon ile ilişkisi ile ilgili kavramsal anlamasına yönelik bulgular gösterilmektedir.

Tablo 15

Can'ın İkinci Dereceden Fonksiyonların Genel Özellikleri ve Doğrusal Fonksiyonlarla İlişkisi İle İlgili Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular

Soru	Puan	Puan Ölçütü	Öğrenci Yanıtından Kesit
1	4	• Tepe noktasının tüm özelliklerini ifade etme • Süreklilik ve sonsuzluk özelliklerini ifade etme • Değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğunu ifade etme	
2	4	• Değişim miktarlarını açıklama • İkinci dereceden fonksiyonun iki doğrusal fonksiyonun çarpımı olarak ifade etme • Eşleme	
3	4	• y'nin x'e bağlı değişeceğini ifade etme • Farklı gösterimler arası ilişkilendirmeleri yapma • Tepe noktasını ifade etme ve tepe noktasını x eksenini kesen noktalarla ilişkilendirme	
6	4	• $\mathbb{R}$'de her zaman olamayacağını sebepleriyle açıklama	
8	4	• Grafiklerini çizme • Cebirsel ifadelerinin aynı olduğunu belirtme • Tanım ve değer kümeleri farklı olduğunu ifade etme • İlk fonksiyonun sadece y ekseninde sınırlı ve minimum noktası olduğunu açıklama • İkinci fonksiyonun x ve y'de sınırlı olduğunu açıklama	
20	4	• $f(0)=c$ olması nedeniyle c'nin parabolün y eksenini kestiği noktayı belirlediğini ifade etme • İkinci dereceden fonksiyonlarda sabit bir değişim oranı olmadığı için eğimin olmadığını ifade	

etme, b'nin eğim olmadığını
açıklama

Can 8. soruda tanım kümesi reel sayılar kümesi olan ikinci dereceden fonksiyon ile tanım kümesi reel sayıların bir alt aralığı olan ikinci dereceden fonksiyonu karşılaştırmıştır. Bu karşılaştırmada grafiğin farklı yönlerinden değerlendirmiştir.

1	Can:	Yani buradaki [sınırlı tanım aralığı için]1, 2, 3
2		değerleri için aldığı değerler burada da [reel sayılar
3		kümesinde tanımlı fonksiyon için] yine aynı. Ama
4		burada -2'den küçük 3'den büyük herhangi bir değer
5		için bir şey yok, değer yok ama burada var.
6	Araştırmacı:	Yani bu böyle devam ediyor mu?
7	Can:	Evet.
8	Araştırmacı:	Nereye kadar?
9	Can:	Sonsuza kadar.
10	Araştırmacı:	Ne kadar?
11	Can:	Sonsuz.
12	Araştırmacı:	Bu peki?
13	Can:	O etmiyor.
14	Araştırmacı:	Böyle kalıyor bu.
15	Can:	Evet.
16	Araştırmacı:	Peki, benzeyen ve benzemeyen yönleri?
17	Can:	-2 ve 3 kapalı aralığında aldığı değerler bunda da aynı
18		bunda da aynı, yani 3 için bunda da 12 alıyor bunda da
19		12 alıyor, ama işte -3 için ki burası -3 bu 0 alıyor bu
20		almıyor bir şey. -3 için yok bir şey.
21	Araştırmacı:	Niye -3 için yok bir şey?
22	Can:	Çünkü burada -3 yok.
23	Araştırmacı:	Yok. Hıhı.
24		Var mı başka?
25	Can:	Mesela şuradan alsak şu iki noktanın için simetri
26		ekseni olabiliyor ama bu noktanın simetrisi yok.
27		
28		
29		
30		

Fonksiyonun reel sayılar kümesinde tanımlı olması durumunda grafiğinin sonsuza doğru devam edeceğini ifade etmiştir [7-11]. Ancak, belli bir alt kümesinde tanımlı olması durumunda, kollarının devam etmeyeceğini [13] ve simetri ekseninin olmayacağını [25-26] belirtmiştir. Bunun gerekçesini ise parabolün herhangi bir

noktasının y değerine karşılık gelen başka bir x değeri olmaması ile açıklamıştır [25-30].

Can 20. soru kapsamında ikinci dereceden fonksiyonların grafiklerinin eğimi olmadığını uygun gerekçelerle açıklamıştır.

1	Araştırmacı:	Niye eğim yok?
2	Can:	Çünkü ikinci dereceden bir fonksiyon ve yok yani,
3		belli bir, doğrusal değil, yani eğim söz konusu değilse
4		b değerinin fonksiyonun grafiğini eğimi olduğunu
5		söylememiz söz konusu olamaz.
6	Araştırmacı:	Peki eğim neydi?
7	Can:	y 'deki iki nokta arasındaki artışın x 'deki iki nokta
8		arasındaki artışa bölümü.
9	Araştırmacı:	O hep sabit mi?
10	Can:	Varsa sabit.
11	Araştırmacı:	Burada sabit mi?
12	Can:	Değil.
13	Araştırmacı:	O yüzden yok mu?
14	Can:	Yok.

İkinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesindeki b katsayısının eğime karşılık gelmediğini, çünkü fonksiyonun grafiğinin eğiminin olmadığını belirtmiştir [2-5]. Bunun nedenini ise y değerlerindeki artışın x değerlerindeki artışa oranının sabit olmadığı ile açıklamıştır [7-8].

Can gerçek yaşam bağlamı içeren sorularda uygun muhakemeler yardımıyla çözüme ulaşmıştır. Tablo değerlerinde x ve y değerlerindeki değişim miktarlarını incelemiş ve sabit değişim olması durumunda iki değişken arasında doğrusal ilişki olduğunu ifade etmiştir. Değişim miktarlarının yorumlanmasını gerektiren ve gerçek yaşam durumlarını içeren sorulara yönelik Can'ın verdiği yanıtlar Tablo 16'da gösterilmektedir.

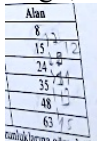
Tablo 16

Can'ın Değişim Miktarlarına İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular

Soru	Puan	Puan Ölçütü	Öğrenci Yanıtından Kesit																																										
16	4	Değişim miktarlarının değişimini inceleyerek $ax^2 + bx + c$ olduğunu belirleme ve grafiğini çizme	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>4</td><td>10</td></tr> <tr><td>5</td><td>18</td></tr> <tr><td>6</td><td>28</td></tr> <tr><td>7</td><td>40</td></tr> <tr><td>8</td><td>54</td></tr> <tr><td>9</td><td>70</td></tr> </tbody> </table>	x	y	4	10	5	18	6	28	7	40	8	54	9	70																												
x	y																																												
4	10																																												
5	18																																												
6	28																																												
7	40																																												
8	54																																												
9	70																																												
17	4	$f(x) = 2x$ ve $f(x) = x(x - 2)$ olarak belirleme - Birinci fonksiyon doğrusal fonksiyon ve değişim oranlarının sabit olduğunu açıklama - Birinde sadece boyun değişmesi alanının değişmesini etkilediği için doğrusal fonksiyon olduğunu açıklama - Diğerinde enin ve boyun değişmesinin alanı değiştirmesi sebebiyle ikinci dereceden fonksiyon olarak açıklama - Tanım ve değer kümelerini belirleme	<table border="1"> <thead> <tr> <th>En</th><th>Boy</th><th>Alan</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr> <tr><td>2</td><td>5</td><td>10</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td>12</td></tr> <tr><td>2</td><td>7</td><td>14</td></tr> </tbody> </table> Tablo 1. Birinci dikdörtgenin kenar uzunluklarına göre değişen alan <table border="1"> <thead> <tr> <th>En</th><th>Boy</th><th>Alan</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>15</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td>24</td></tr> <tr><td>5</td><td>7</td><td>35</td></tr> <tr><td>6</td><td>8</td><td>48</td></tr> <tr><td>7</td><td>9</td><td>63</td></tr> </tbody> </table>	En	Boy	Alan	2	2	4	2	3	6	2	4	8	2	5	10	2	6	12	2	7	14	En	Boy	Alan	2	4	8	3	5	15	4	6	24	5	7	35	6	8	48	7	9	63
En	Boy	Alan																																											
2	2	4																																											
2	3	6																																											
2	4	8																																											
2	5	10																																											
2	6	12																																											
2	7	14																																											
En	Boy	Alan																																											
2	4	8																																											
3	5	15																																											
4	6	24																																											
5	7	35																																											
6	8	48																																											
7	9	63																																											
18	4	a, b ve c seçeneklerinin tamamını yapma																																											

Can iki çokluğun değerlerinin tablo olarak verilmesi ve bu iki çokluğun ilişkisinin ifade edilmesinin istenmesi durumunda ilk olarak bağlam içerisinde değişkenlerin değişim yönünü belirlemiş ve sonrasında aralarındaki ilişkiyi incelemeye başlamıştır.

1	Can:	En hep sabit aslında, boy arttıkça alan artıyor buna
2		bakıyoruz bu 2 bu 1 2 1 eğim sabit doğrusal, Buna
3		bakıyoruz [17.sorudaki ikinci tablo] en artıyor boy
4		artıyor alan artıyor. Bunlar arasındaki oranlar sabit
5		değil. Doğrusal değil.
6	Araştırmacı:	Peki ne?
7	Can:	Peki ne? Bu sefer böyledir büyük ihtimal [eğri
8		çiziyor.] bakıyorum, onu grafikte nasıl göstereceğiz
9		ya?
10	Araştırmacı:	Şimdi bunların arasında artışlar nasıl?

- 11 Can: 7, 8, 11
 12 Araştırmacı: Burası 8 mi?
 13 Can: Değil, 9, 13 [yazıyor.]
 14 
 15
 16
 17
 18 artışların artışları sabit yani.
 19 Araştırmacı: Kaç artışların artışı?
 20 Can: 2. evet.
 21 Araştırmacı: O zaman nasıl ilişki bunlar arasında alanla kenarlar
 22 arasında nasıl bir ilişki var?
 23 Can: Doğrusal bir ilişki yok.
 24 Araştırmacı: Nasıl bir ilişki var artışların artışları sabitse?
 25 Can: İkinci dereceden fonksiyon olmuş oluyor o zaman.

Can y değişkeni ile eşlediği çokluğun değişim miktarlarını incelemiştir [1-5; 10-17]. Bu değişim miktarlarının x'in aynı değişimine karşılık sabit kalması durumunda iki çokluk arasında doğrusal bir ilişki olduğunu açıklamıştır. Buna karşın değişim miktarlarının sabit olmaması ancak değişim miktarlarının değişiminin sabit olması durumunda iki çokluğun ilişkisinin ikinci dereceden fonksiyon ile ifade edileceğini belirtmiştir [21-25].

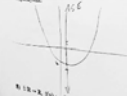
Can'ın ikinci dereceden fonksiyonların tepe noktasına ilişkin sorulara verdiği yanıtlar incelendiğinde, tepe noktasının cebirsel ve grafiksel gösterimlerine ilişkin uygun açıklamalar yaptığı görülmüştür. Tepe noktasının apsisini grafiğin simetri eksenine ile ilişkilendirmiş ve ordinat değerinin a katsayısına dayalı olarak fonksiyonun maksimum ya da minimum değerine karşılık geldiğini açıklamıştır. Tablo 17'de Can'ın tepe noktasının yorumlanması gerekene sorulara verdiği yanıtlara yönelik bulgulara yer verilmektedir.

Tablo 17

Can'ın Tepe Noktasına İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular

Soru	Puan	Puan Ölçütü	Öğrenci Yanıtından Kesit
7	4	• Maksimum ya da minimum değeri olduğunu açıklama • Tepe noktasına göre fonksiyonun artan iken azalan olduğunu ya da azalan iken artan olduğunu açıklama • Simetri eksenine ile tepe noktasını ilişkilendirme	
11	4	• $a > 0$ ve $b < 0$ olduğunu yorumlama • $a < 0$ ve $b > 0$ olduğunu yorumlama • grafikleri çizme • tepe noktasının bölgelerini belirleme	
12	4	• a katsayısının iki durumunu inceleyerek $a > 0$ olduğunda minimum ve $a < 0$ olduğunda maksimum değer olabileceğini açıklama • $-\frac{b}{2a}$ ve $f(r)$ olduğunu ifade etme	
18	4	• a, b ve c seçeneklerinin tamamını yapma	
19	4	• $ax^2 + c$ durumunu inceleme ve tepe noktasının $(0, c)$ noktası olduğunu ifade etme • $ax^2 + bx$ durumunu incelerken tüm durumları ele alma ve grafiksel olarak gösterme	

Can ikinci dereceden fonksiyonlar için tepe noktasının ve simetri ekseninin önemini ifade ederken, simetri ekseninin oluşmasının nedenini tepe noktasına dayandırmıştır.

- 1 Can: Evet, şimdi buraya tepe noktası diyelim, işte r'ye k
2 falan. Simetri eksenini zaten tepe noktasından dolayı
3 oluyor. İşte şurası da
4 
- 5
6 Araştırmacı: Simetri ekseninin özelliği ne?
7 Can: Mesela, y'leri eşit parabolün, yani mesela burada bir
8 nokta, burada bir nokta, şuna uzaklıkları eşit oluyor
9 her zaman.
10 
- 11 y'leri eşit iki noktanın simetri eksenine olan uzaklıkları
12 eşit oluyor. Ama farklı kollarda.
13 Araştırmacı: Bu önemli bir şey mi?
14 Can: Önemli tabi. Aynen y'leri eşit iki noktanın simetri
15 eksenine olan uzaklıkları eşit
16 Araştırmacı: Her noktanın eşit midir?
17 Can: y'leri eşit her noktanın eşit
18 Araştırmacı: Hıhı eşittir. Peki başka önemi nedir sence?
19 Zeynel [Çıkarımını yazıyor.]
20 Araştırmacı: Peki başka var mıdır önemi?
21 Can: Şurası x_1 olsa şurası x_2 olsa denklemin kökleri bunu
22 kesiyor demiştik.
23 
- 24 işte şu r değeri hani tam ortası olduğu için $\frac{x_1+x_2}{2}$
25 oluyor. Şurası da $[x_1 + x_2] \frac{-b}{a}$ oradan $\frac{-b}{2a}$ oluyor.
26 r x_1 ve x_2 sayesinde tanımlanıyor aslında.

Parabol üzerindeki y değerleri eşit olan herhangi iki noktanın apsislerinin simetri eksenine uzaklıklarının eşit olduğunu açıklamış [8-15] ve bu özelliğine dikkat ederek tepe noktasının apsis değerini parabolün x eksenini kestiği noktalarla cebirsel olarak ilişkilendirmiştir. Bu ilişkilendirmede iki noktanın orta noktası olduğunu grafiksel olarak göstermiş [24-30] ve ikinci dereceden denklem bilgisine dayalı olarak tepe noktasının apsisinin parabolün x eksenini kesen noktalarla nasıl ifade edileceğini belirtmiştir [30-34].

Bakterilerle ilgili bağlamı içeren soruda, bakterilerin sayısının giderek artacağını ve bir süre sonra ilacın etkisini göstermemesi nedeniyle durup azalmaya başlayacağını dile getirmiştir.

- 1 Can: Önce çıkar çıkar çıkar sonra bir yerde durur, sonra
 2 inmeye başlar. Bu durma noktası tepe noktası. Burası
 3 $-\frac{b}{2a}$. İşte hmmm [hesaplıyor..] 5.

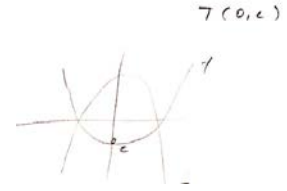
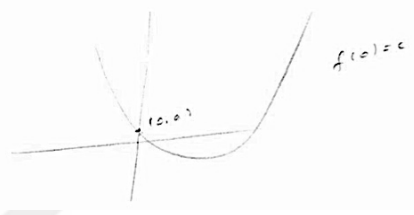
Bu durumun süreye bağlı bakteri sayısını temsil eden ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin tepe noktası ile açıklanacağını ifade ederek bakterilerin sayısının azalmaya başlayacağı süreyi bulmak için $-\frac{b}{2a}$ 'dan yararlanmıştır.

Can katsayıların yorumlanmasını gerektiren sorularda a katsayısının parabolün kollarının açıklığını ve tepe noktasını, b katsayısının tepe noktasını ve c katsayısının parabolün y eksenini kestiği noktayı belirlediğini ifade etmiştir. Can'ın katsayılarla ilişkin sorulara verdiği yanıtlara yönelik bulgular Tablo 18'de görülmektedir.

Tablo 18

Can'ın Katsayılarla İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular

Soru	Puan	Puan Ölçütü	Öğrenci Yanıtından Kesit
9	4	• a, b ve c katsayılarının tamamını açıklama • a katsayısının parabolün kollarının yönünü ve açıklığını belirlediğini ifade etme • a ve b katsayılarının tepe noktasını belirlediğini ifade etme • c katsayısının y eksenini kestiği nokta olduğunu ifade etme	
10	4	• a'nın yönü açıklığı ve tepe noktasını değiştirdiğini ifade etme • b'nin tepe noktasını değiştirdiğini ifade etme • c'nin y eksenini kesen noktayı değiştirdiğini ifade etme	

11	4	• $a > 0$ ve $b < 0$ olduğunu yorumlama • $a < 0$ ve $b > 0$ olduğunu yorumlama • grafikleri çizme • tepe noktasının bölgelerini belirleme	
19	4	• $ax^2 + c$ durumunu inceleme ve tepe noktasının $(0, c)$ noktası olduğunu ifade etme • $ax^2 + bx$ durumunu incelerken tüm durumları ele alma ve grafiksel olarak gösterme	
20	4	• $f(0)=c$ olması nedeniyle c'nin parabolün y eksenini kestiği noktayı belirlediğini ifade etme • İkinci dereceden fonksiyonlarda sabit bir değişim oranı olmadığı için eğimin olmadığını ifade etme, b'nin eğim olmadığını açıklama	

Can a ve b katsayılarının işaretine göre tepe noktasının konumuna yönelik çıkarımlarını sistematik bir şekilde yapmıştır.

- 1 Can: a. b 0 olması durumu ya biri 0 ya diğeri 0.
- 2 Araştırmacı: 0'dan küçük olması?
- 3 Can: Ya biri negatif ya biri negatif,
- 4 Araştırmacı: Hıhı.
- 5 Can: Eğer a negatif ise, kollar aşağıya, ya biri negatif ya biri
- 6 negatif olunca, evet, tepe noktası r 'si pozitif olmuş
- 7 oluyor, çünkü r si $\frac{-b}{2a}$ oluyor, b negatif olunca pozitif
- 8 oluyor veya a negatif olunca pozitif oluyor.
- 9 Araştırmacı: O zaman mesela nasıl çizebilirsin a negatif olması
- 10 halinde?
- 11 Can: Şurada oluyor ya da şurada bir yerde,
- 12 
- 13
- 14
- 15 Birinci ya da dördüncü bölgede olmuş oluyor.

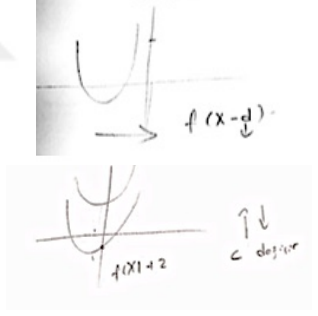
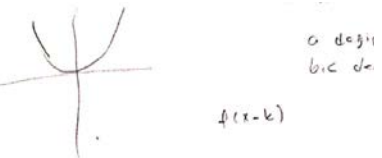
Öncelikle a katsayısının işaretine göre parabolün kollarının aşağıya ya da yukarıya doğru gittiğine karar vermiştir. Sonrasında a katsayısını göz önüne alarak $\frac{-b}{2a}$

sonucunun işaretini belirlemiş [5-8] ve tepe noktasının apsis değerinin x ekseninin hangi bölgesinde olacağına ilişkin çıkarımlarını yapmıştır [11-15].

Can bir parabolün ötelenmesi durumunda parabolün kollarının açıklığının değişmemesine bağlı olarak a katsayısının değerinin değişmeyeceğini ifade etmiştir. b katsayısının ise parabolün y eksenine paralel ya da x eksenine paralel olacak şekilde ötelenmesine bağlı değişiklik göstereceğini yorumlamış ve c katsayısının parabolün ötelendiği tüm durumlarda değişeceği çıkarımını yapabilmektedir. Parabolün ötelenmesine bağlı katsayıların değerlerine ilişkin çıkarımlara ek olarak fonksiyonun genel ifadesinin nasıl değişeceğini de cebirsel olarak açıklamıştır. Can'ın parabolün ötelenmesi ile ilgili sorulara verdiği yanıtlar bağlamında elde edilen bulgular Tablo 19'da gösterilmektedir.

Tablo 19

Can'ın Ötelemeye İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular

Soru	Puan	Puan Ölçütü	Öğrenci Yanıtından Kesit
13	4	• a katsayısının ve parabolün yönünün, kollarının açıklığının değişmeyeceğini, b ve c katsayısının değişeceğini ifade etme • Tepe noktasının ve maksimum ya da minimum değerin değişeceğini açıklama • Parabolün eksenleri kestiği noktaların değişeceğini açıklama	
14	4	• a katsayısının ve parabolün şeklinin değişmeyeceğini ifade etme, b ve c katsayılarının değişeceğini ifade etme • tepe noktasının ve parabolün eksenleri kestiği noktanın değişeceğini ifade etme • tanım ve değer kümelerinin değişmeyeceğini ifade etme • fonksiyon ifadesinin $f(x-m)$ olacağını ifade etme	
15	4	• a katsayısının ve parabolün şeklinin değişmeyeceğini ve b ve c katsayılarının değişeceğini ifade etme	

-
- Tepe noktasının ve parabolün eksenleri kestiği noktanın değişeceğini ifade etme
 - Tanım ve değer kümelerinin değişmeyeceğini ifade etme
 - Fonksiyon ifadesinin $f(x)+m$ olacağını ifade etme
-

Can parabolün ötelenmesi ile ilgili sorularda ikinci dereceden fonksiyonun katsayılarına ilişkin uygun çıkarımlar yapabilmıştır.

1 Can: Sağa sola ötelediğimizde a değişmiyor, b değişiyor, c
 2 değişiyor, o zaman fonksiyonun içine giriyoruz.
 3 Mesela burada 2 birim yukarı ötelersek bu oluyor
 4 $[f(x)+2]$, burada 2 birim sağa ötelersek eksi mi oluyor
 5 artı mı oluyor bir dakika [düşünüyor...] Sanırım eksi
 6 oluyor, yani demek istediğim şu d değişim miktarı
 7 olsun, $f(x-d)$ o zaman içine girmiş oluyoruz, o zaman
 8 da c değişiyor otomatikman b de değişiyor, a yönünü
 9 ve açıklığını belirliyorsa onlar da değişmediğine göre
 10 a değişmiyor.

Bir parabol y eksenine paralel olarak ötelendiğinde, a katsayısının değişmeyeceğini, b ve c katsayılarının değişeceğini [1-2] ve fonksiyonun x ekseninde değişiklik olması sebebiyle tüm fonksiyon ifadesinin değişeceğini açıklamıştır. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun $f(x-d)$ olarak değişeceğini ifade etmiş ve bu işlemi fonksiyonun içine girmek olarak yorumlamıştır [2; 4-7]. Parabolün x eksenine paralel olarak ötelenmesi halinde ise $f(x)$ fonksiyonunun $f(x)+d$ biçiminde değişiklik göstereceğini belirtmiştir [3-4]. Bu çıkarımları doğrultusunda Can'ın hem katsayılarla ilişkin bilgilerini kullandığı hem de ikinci dereceden fonksiyonların farklı gösterimleri arasında ilişkilendirmeler yaptığı sonucuna ulaşılmıştır.

Can'ın kavramsal anlama testine verdiği yanıtlar doğrultusunda ikinci dereceden fonksiyonlara ve kritik özelliklerine ilişkin kavramsal anlamayı gerçekleştirildiği söylenebilir. Fonksiyonun farklı gösterimleri arası geçişleri de uygun şekillerde yapabilmiş ve gerçek yaşam bağlamındaki soruları da etkili bir şekilde yanıtlayabilmıştır.

Alp'in Kavramsal Anlama Testine Verdiği Yanıtlara Yönelik Bulgular.-

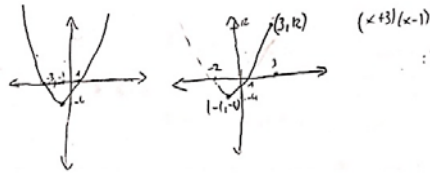
Alp'in kavramsal anlama testine verdiği yanıtlarının analizleri doğrultusunda elde edilen bulgular analizin dayandırıldığı rubrikteki beş kategori bağlamında sunulmaktadır.

Alp ikinci dereceden fonksiyonların cebirsel ifadesinde mutlaka x^2 'li bir terim olacağını, bu terimin katsayının 0 olmayacağını ve grafiğinin parabol olacağını ifade etmiştir. Fonksiyonun eşleme, eş zamanlı değişim, dönüşüm ve işlem fikirlerine sahip olduğu görülen Alp tanım ve değer kümelerine de vurgu yapmıştır. İkinci dereceden fonksiyonun reel sayılar kümesinde tanımlanması grafiğin halinde y eksenini mutlaka kesmesi gerektiğini belirtmiştir. Doğrusal fonksiyonlarla ilişkilendirirken iki doğrusal fonksiyonun çarpımı ile ikinci dereceden fonksiyonun oluşturulabileceğini açıklamıştır. Oluşturulan ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin eğiminden bahsedilemeyeceğini dile getirmiştir. Ek olarak, tepe noktası ve simetri eksenini çokluklarına ve bu çoklukların anlamlarına vurgu yaptığı görülmüştür. Tablo 20'de Alp'in ikinci dereceden fonksiyonun genel özelliklerine ve doğrusal fonksiyonlarla ilişkisi ile ilgili kavramsal anlamasına yönelik bulgulara yer verilmektedir.

Tablo 20

Alp'in İkinci Dereceden Fonksiyonların Genel Özellikleri ve Doğrusal Fonksiyonlarla İlişkisi İle İlgili Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular

Soru	Puan	Puan Ölçütü	Öğrenci Yanıtından Kesit
1	4	• Tepe noktasının tüm özelliklerini ifade etme • Süreklilik ve sonsuzluk özelliklerini ifade etme • Değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğunu ifade etme	•  y eksenini kestiği nokta, c. •  sürekli olması gerekir. • Tanım ve değer kümesi • Tepe noktası, • Maks. , minimum değerler • Simetri eksenini
2	4	• Değişim miktarlarını açıklama • İkinci dereceden fonksiyonun iki doğrusal fonksiyonun çarpımı olarak ifade etme • Eşleme	0+0 Derecedenli fonk. x'e göre y'nin değişim miktarı d.f.'de sabit 2.d.f. değişim miktarının değişim miktarı sabit 2.dereceden fonksiyonda sabit değ.

3	4	• y'nin x'e bağlı değişeceğini ifade etme • Farklı gösterimler arası ilişkilendirmeleri yapma • Tepe noktasını ifade etme ve tepe noktasını x eksenini kesen noktalarla ilişkilendirme	belirli x değerleri ile bu işlemlerdeki y değerlerinin eşlenmesi bu eşlenmelerin düzlemde alınması sonucu bir şekil oluşması bu şekille parabol denir bir minimum değeri var, + epe noktasının y değeri
6	4	• $\mathbb{R}$'de her zaman olamayacağını sebepleriyle açıklama	köklü sayı sabit, çarpımla ayrılmaz form her zaman olmaz. standart formül her zaman dur. $a(x-x_1)(x-x_2) = 0(x-(1-3))$
8	4	• Grafiklerini çizme • Cebirsel ifadelerinin aynı olduğunu belirtme • Tanım ve değer kümeleri farklı olduğunu ifade etme • İlk fonksiyonun sadece y ekseninde sınırlı ve minimum noktası olduğunu açıklama • İkinci fonksiyonun x ve y'de sınırlı olduğunu açıklama	
20	4	• $f(0)=c$ olması nedeniyle c'nin parabolün y eksenini kestiği noktayı belirlediğini ifade etme • İkinci dereceden fonksiyonlarda sabit bir değişim oranı olmadığı için eğimin olmadığını ifade etme, b'nin eğim olmadığını açıklama	2. dereceden fonksiyonlarda değişim miktarı sabit değil. bu yüzden eğim yoktur. (0, y) $y = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$ $y = c$

Alp ikinci dereceden ve doğrusal fonksiyonları karşılaştırırken ikisinin de fonksiyon olması sebebiyle tanım ve değer kümelerinin olduğunu, x değerlerinin y değerlerine dönüştüğünü ve bu değerlerin birbiri ile eşlendiğini benzer özellikleri olarak ifade etmiştir. Ek olarak iki fonksiyonun da değişim oranlarına ilişkin karşılaştırmalar yapmıştır.

1	Alp:	Burada x bir birim değişirken y'nin değişim miktarı
2		iki noktalarda, tüm noktalarda mı denir, iki noktalarda
3		mı? Tüm noktalarda eşit. Ama burada değil.
4	Araştırmacı:	Orada nasıl?
5	Alp:	Orada işte atıyorum x bir birim artıyorken y bir birim
6		artıyor ilk, herhangi bir noktadaki, diğer [ikinci
7		dereceden fonksiyonda] noktadaki değişim farklı
8		atıyorum 3 birim artıyor. Bunda bir doğrusallık var,
9		bunda bir eğri var.
10	Araştırmacı:	Hıhı. O doğrusallığı sağlayan şey ne? Neden doğrusal?

11 Alp: O değişim miktarlarının eşit olması.

Doğrusal fonksiyonlarda x değerlerinin bir birim artması halinde y değerlerinin değişiminin sabit olduğunu [2-3; 5-6], ikinci dereceden fonksiyonlarda ise x değerlerinin bir birim değişmesi halinde y değerlerinin değişiminin sabit olmadığını [3; 6-8] açıklamıştır. Bu sebeple fonksiyonların grafiklerinin birinin doğrusal olduğunu diğerinin eğri olduğunu eklemiştir [10]. Alp ikinci dereceden fonksiyonların farklı cebirsel gösterimlerinin kritik özelliklerine ilişkin çıkarımları ve aralarında uygun geçişleri yapabirmiştir.

1	Alp:	Şimdi tepe noktası her zaman olmak zorunda o yüzden
2		kanonik form her zaman vardır. Çarpanlara ayrılmış
3		form kökler çıkıyordu ama kökler sanal çıkabilir o
4		yüzden bu her zaman olamaz. standart form ile
5		kanonik form tam kareye dönüştürülmüş hali.
6	Araştırmacı:	Hıhı. O vardır yani?
7	Alp:	Aynı sonuçta.
8	Araştırmacı:	Hıhı.
9	Alp:	[yazıyor.] mesela kökleri şey diyelim $1-3i$ $1+3i$ bunu
10		şu çarpanlara ayrılmış formda yazdığımızda 0 a eşit
11		olacak mesela $a(x - (1 - 3i))(x - (1 + 3i))$ oluyor
12		ama reel sayılarda i diye bir şey yok.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklindeki bir ikinci dereceden fonksiyonun her zaman tepe noktası olacağı düşüncesine dayalı olarak cebirsel ifadesinin kanonik form şeklinde yazılabileceğini [1-2; 4-5] ancak $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin reel sayılar kümesinde köklerinin olmayabileceği durumunu göz önüne alarak çarpanlara ayrılmış formda her zaman yazılamayacağını açıklamıştır [3-4]. Bu duruma uygun bir fonksiyon ifadesi oluşturarak denklemin köklerinin sanal düzlemde tanımlı olacağı fikriyle sanal sayıları dikkate alarak çarpanlara ayrılmış formu yazmıştır [11-12].

Alp ikinci dereceden fonksiyonlarını değişim miktarları açısından fonksiyonun genel özellikleri ile ilgili sorularda uygun bir şekilde yorumlayabirmiştir. Buna ek olarak, bağlam içeren sorularda da değerleri tablo şeklinde verilen iki çokluğun ilişkisini oluşturmaya çalışırken ilk olarak değişim miktarlarını incelemiştir ve x değerlerinin bir birim değişmesi durumunda y değerlerinin değişimini belirlemiştir. Alp'in değişim miktarı ve değişim oranı çokluklarını doğrusal ve ikinci dereceden

fonksiyonlar kapsamında anladığı ortaya çıkmıştır. Tablo 21’de Alp’in değişim miktarlarına ilişkin kavramsal anlamasına yönelik bulgulara yer verilmektedir.

Tablo 21

Alp’in Değişim Miktarlarına İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular

Soru	Puan	Puan Ölçütü	Öğrenci Yanıtından Kesit
16	4	Değişim miktarlarının değişimini inceleyerek $ax^2 + bx + c$ olduğunu belirleme ve grafiğini çizme	Handwritten student work for question 16. It shows a table with x and y values, a graph of a parabola, and the equation $x^2 - x - 2$.
17	4	$f(x) = 2x$ ve $f(x) = x(x - 2)$ olarak belirleme - Birinci fonksiyon doğrusal fonksiyon ve değişim oranlarının sabit olduğunu açıklama - Birinde sadece boyun değişmesi alanının değişmesini etkilediği için doğrusal fonksiyon olduğunu açıklama - Diğerinde enin ve boyun değişmesinin alanı değiştirmesi sebebiyle ikinci dereceden fonksiyon olarak açıklama - Tanım ve değer kümelerini belirleme	Handwritten student work for question 17. It shows several functions and their domains: $f_1(x)=2$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=2x$, $f_4(x)=x-2$, $f_5(x)=x$, $f_6(x)=x^2-2x$, and their domains: $f_1: [2, \infty) \rightarrow [4, \infty)$, $f_2: [4, \infty) \rightarrow [9, \infty)$.
18	4	a, b ve c seçeneklerinin tamamını yapma	Handwritten student work for question 18. It shows calculations for a, b, and c, including the quadratic formula and a discriminant calculation.

Alp 16. soru kapsamında x ve y değişkenleri arasındaki ilişkiyi incelerken değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğunu fark etmiş ve bu sonucun x ve y değişkenleri arasındaki ilişkinin ikinci dereceden fonksiyon ile ifade edilebileceğini dile getirmiştir. İkinci dereceden fonksiyonlarla bu fikri ilişkilendirmesine karşın, x^3 ’lü terim içeren üçüncü dereceden fonksiyolarda da değişimin sabit olup olmadığını belirlemek istemiştir.

- 1 Araştırmacı: Seni ikinci dereceden olduğunu düşündüren şey ne
2 olur?
- 3 Alp: Artış miktarlarının artış miktarları diyebiliriz.
- 4 Araştırmacı: Ne artış miktarlarının artış miktarı?
- 5 Alp: 2. Küpte bu eşit oluyor mu? Bir de bu soru var. 4'ün
6 küpü 64, 125 216 çok bir uçurum oluyor aralarında
7 burada sadece 8-10-12
- 8 Araştırmacı: Olmaz mı orada? Küpte değişim değişimi aynı olmaz
9 mı?
- 10 Alp: Olmaz.
- 11 Araştırmacı: Olmaz. Burada aynı olduğu için mi ikinci dereceden
12 olduğunu düşünüyorsun?
- 13 Alp: Hıhı. mesela 729 64 ile 729 arasında uçurum var ama
14 10 ile 70 arasında daha şey. O yüzden küp
15 olmayacağını. Küpü denesek çıkar mı acaba? Ama çok
16 uzun olur.
- 17 Araştırmacı: Neden?
- 18 Alp: $[ax^3 + bx^2 + cx + d]$ deniyor.]
19 ooo
- 20 Alp: x^3 'ün katsayısını 0 buldum. Yani yine x^2 li oldu. $b=1$,
21 $c=-1$ $d=-2$ buradan $0x^3 + x^2 - x - 2$

İlk olarak küçük sayıların küpünü almış ve değişim miktarlarının değişiminin sabit olmadığını görmüştür [5-7]. Bununla birlikte büyük sayılar için benzer sonuca ulaşacağı konusunda tereddüt etmiştir [13-16]. Bu doğrultuda iki değişken arasındaki ilişkinin $ax^3 + bx^2 + cx + d$ şeklinde bir ifade ile açıklanacağı varsayımıyla a, b, c ve d değerlerini tablodaki noktalar yardımıyla hesaplamıştır. Bu hesaplamalarının sonucunda a katsayısının değerinin 0 olduğuna ulaşmış ve böylelikle ikinci dereceden fonksiyonların değişim miktarlarına ilişkin bilgisini doğrulamıştır. Alp'in ikinci dereceden fonksiyonların değişim miktarlarına ilişkin bilgisini kullanması ve soru üzerinde yorumlaması doğrusal fonksiyonların değişim miktarlarına ilişkin ek çıkarımlar yapmasını da desteklemiştir.

- 1 Alp: İkinci dereceden de değişim miktarları değişiyor
2 sürekli, sabit değil. Mesela değişim miktarlarının
3 değişimlerinin sabit olduğunu görmüştük.
- 4 Araştırmacı: Değişimlerinin değişimi sabit?
- 5 Alp: x 'e göre y 'nin değişim miktarı.
6 ooo
- 7 Alp: Aslında mantıken diğerinde de [doğrusal fonksiyon
8 için] sabit. Çünkü diğerinde değişim miktarı sabit
9 direkt değişim miktarının değişim miktarı 0 oluyor,
10 değişmiyor.

19	4	• $ax^2 + c$ durumunu inceleme ve tepe noktasının $(0,c)$ noktası olduğunu ifade etme • $ax^2 + bx$ durumunu incelerken tüm durumları ele alma ve grafiksel olarak gösterme	

Alp tepe noktasının anlamını a katsayısına göre yorumlayabilmiş ve katsayıların sayı değerlerinin işaretlerine göre parabolün nasıl çizilebileceğine ilişkin sonuçlara ulaşabilmiştir.

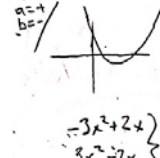
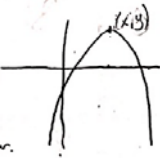
1	Alp:	$a, b < 0$ olması şimdi ya bu artı olacak bu eksi olacak,
2		ya da bu artı olacak bu eksi olacak.
3	Araştırmacı:	Evet.
4	Alp:	Eğer bu eksi olursa kollar aşağıya oluyor, tepe
5		noktasının y 'si maksimum değer olmuş oluyor.
6	Araştırmacı:	Bir gösterebilir misin? Çizerek gösterebilirsin
7		istersen. İlk neyi yapacaksın? A pozitif b negatifken.
8	Alp:	Mesela rastgele çizeyim değer vermeden. Mesela şey
9		$\frac{-b}{2a}$ b si negatif artı oluyor, a pozitif o yüzden tepe
10		noktasının x 'i pozitif değer alıyor. Yani tepe noktası
11		burada olamıyor şu bölgede. Bunu değiştiriyor mesela
12		kolları yukarı doğru açık oluyor, bunu değiştiriyor.
14	Araştırmacı:	Bir çizebilir misin nasıl olabilir?
15	Alp:	[Çiziyor.]
16	Araştırmacı:	Böyle olabilir. Daha yukarıda olabilir mi?
17	Alp:	Olabilir. Onu a ve b 'nin sayı değerleri belirliyor.
18	Araştırmacı:	Hıhı.
19	Alp:	Burada $\frac{-b}{2a}$ yine pozitif değer oluyor yine bu tarafta
20		olacak. [x ekseninin pozitif kısmını gösteriyor.]
21	Araştırmacı:	Hıhı.
22	Alp:	O zaman şey diyebiliriz, a ve b 'nin işaretleri
23		birbirinden farklı ise tepe noktasının x 'i her zaman
24		pozitif değer alır.

a ile b katsayılarının işaretlerinin birbirinden farklı olması durumunda tepe noktasının apsis değerinin her zaman pozitif olacağını $x = \frac{-b}{2a}$ eşitliğine dayalı olarak açıklamıştır [8-11].

Alp ikinci dereceden fonksiyonların özelliklerini açıklarken $ax^2 + bx + c$ ifadesinde a katsayısının mutlaka 0'dan farklı olması gerektiğini vurgulamıştır. a katsayısının kolların açıklığını, kolların yönünü ve tepe noktasını, b katsayısının tepe noktasını ve c katsayısının y eksenini kestiği noktayı ve tepe noktasını belirlediğini ifade etmiştir. Katsayıların farklı durumlarına ilişkin çıkarımlarının da uygun olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ek olarak x ve f(x) değişkenlerini yorumlarken eş zamanlı değişim fikrine sayalı olarak x'e bağlı f(x)'in değiştiğini açıklamıştır. Alp'in katsayılarla ilişkin kavramsal anlamasına yönelik bulgular Tablo 23'de gösterilmektedir.

Tablo 23

Alp'in Katsayılarla İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular

Soru	Puan	Puan Ölçütü	Öğrenci Yanıtından Kesit
9	4	• a, b ve c katsayılarının tamamını açıklama • a katsayısının parabolün kollarının yönünü ve açıklığını belirlediğini ifade etme • a ve b katsayılarının tepe noktasını belirlediğini ifade etme • c katsayısının y eksenini kestiği nokta olduğunu ifade etme	x = değişken y = x'e bağlı değişken a = x^2'nin katsayısı, açıklığı belirliyor, kolların ne tarafa gittiğini belirliyor. b = Tepe noktasını etkiler. c = y eksenini kestiği nokta, parabolün yukarı aşağı dönmesi
10	4	• a'nın yönü açıklığı ve tepe noktasını değiştirdiğini ifade etme • b'nin tepe noktasını değiştirdiğini ifade etme • c'nin y eksenini kesen noktayı değiştirdiğini ifade etme	a) Parabolde kolların açıklığı, kolların dönmesi, tepe noktasını, minimum veya maksimum değerin hangi x değeriyle sağlandığını belirler. b) y eksenini kestiği noktayı belirler, parabolü yukarı veya aşağı döndürür. c) Tepe noktasını, simetri eksenini etkiler.
11	4	• $a > 0$ ve $b < 0$ olduğunu yorumlama • $a < 0$ ve $b > 0$ olduğunu yorumlama • grafikleri çizme • tepe noktasının bölgelerini belirleme	$a = +$ $b = -$  $a = -$ $b = +$  $3x^2 + 2x$ Tepe noktasının x değeri yarıdır. $3x^2 - 2x$

19	4	• $ax^2 + c$ durumunu inceleme ve tepe noktasının $(0, c)$ noktası olduğunu ifade etme • $ax^2 + bx$ durumunu incelerken tüm durumları ele alma ve grafiksel olarak gösterme	
20	4	• $f(0)=c$ olması nedeniyle c'nin parabolün y eksenini kestiği noktayı belirlediğini ifade etme • İkinci dereceden fonksiyonlarda sabit bir değişim oranı olmadığı için eğimin olmadığını ifade etme, b'nin eğim olmadığını açıklama	2. dereceden fonksiyonlarda değişim miktarı sabit değil, bu yüzden eğim yoktur. (0, y) $y = a + b + c$ $y = c$

Alp katsayıları yorumlarken tepe noktasına ilişkin çıkarımlarda bulunmuştur. İlk olarak b katsayısının etkilediğini dile getirmiştir.

- 1 Alp: b de sağ alta ya da sağa üste ötelemesini gösteriyor.
2 Araştırmacı: b neyi etkiliyor? Ötelemesini mi gösteriyor?
3 Alp: Evet. O da işte x'in kaçla çarpılacağını gösteriyor.
4 Bunun da çok şey yok aslında.
5 Araştırmacı: Etkilediği başka bir şey yok mu b'nin?
6 Alp: Kökleri etkiliyor. Tepe noktasını etkiliyor.
7 Araştırmacı: Tepe noktasını b mi etkiliyor?
8 Alp: Sonuçta $\frac{-b}{2a}$, tepe noktasını c etkilemiyor.
9 Araştırmacı: c etkilemiyor, b önemli mi bu anlamda sence
10 fonksiyon için?
11 Alp: Tabi tepe noktası en önemli şeylerden biri. Önemli
12 aslında. a da etkiliyor tepe noktasını, mantıken c de
13 etkiliyor çünkü y sini bulmak istediğimizde c değeri
14 ile de topluyoruz.

Tepe noktasının b katsayısının değerini belirleme gerekçesini açıklaması istendiğinde, Alp $\frac{-b}{2a}$ ifadesine dayalı olarak açıklama yapmıştır. Bu aşamada bu ifadeyi göz önüne alarak a katsayısının değerinin de tepe noktasının değerini etkilediğini dile getirmiştir [11-12]. Ancak $\frac{-b}{2a}$ ifadesinin tepe noktasının apsisine karşılık geldiği ve tepe noktasının y koordinatının da bulunduğu fikriyle c katsayısının da tepe noktasını belirleyen bir değer olduğunu dile getirmiştir. Bu aşamada Alp $\frac{-b}{2a}$ ile elde ettiği değeri fonksiyonda y değerine dönüştürerek tepe noktasının ordinatı ile eşlemiştir [12-14].

Ötelemeye yönelik sorular kapsamında da Alp uygun çıkarımları yapmış ve genellemeleri ifade etmiştir. Parabollerin ötelenmesi durumunda a katsayısının hiç değişmediğini, c katsayısının değiştiğini b katsayısının ise parabolün sağa sola ötelenmesi durumunda değiştiğini belirtmiştir. Ek olarak, ötelemelerde tanım ve değer kümesinin de değişmediğini belirlemiştir.

Tablo 24

Alp'in Ötelemeye İlişkin Kavramsal Anlamasına Yönelik Bulgular

Soru	Puan	Puan Ölçütü	Öğrenci Yanıtından Kesit
13	4	• a katsayısının ve parabolün yönünün, kollarının açıklığının değişmeyeceğini, b ve c katsayılarının değişeceğini ifade etme • Tepe noktasının ve maksimum ya da minimum değerini değişeceğini açıklama • Parabolün eksenleri kestiği noktaların değişeceğini açıklama	a değişmez. Tepe noktası değişir. b ve c değişebilir. x eksenini keşen noktalar değişir. Sonuçta doğru olabilir, yanlış olabilir.
14	4	• a katsayısının ve parabolün şeklinin değişmeyeceğini ifade etme, b ve c katsayılarının değişeceğini ifade etme • tepe noktasının ve parabolün eksenleri kestiği noktanın değişeceğini ifade etme • tanım ve değer kümelerinin değişmeyeceğini ifade etme • fonksiyon ifadesinin $f(x-m)$ olacağını ifade etme	veya değişmeyen hâlinde ne yazık ki bilinmiyor? şu ya da birine sağa veya sola kaydırıldığında Tepe noktasının x', b ve c, y' kestiği nokta değişir. maksimum veya minimum değeri, Tepe noktasının y''si, a, b, tanımları ve değeri değişir, şekli değişmez.
15	4	• a katsayısının ve parabolün şeklinin değişmeyeceğini ve b ve c katsayılarının değişeceğini ifade etme • Tepe noktasının ve parabolün eksenleri kestiği noktanın değişeceğini ifade etme • Tanım ve değer kümelerinin değişmeyeceğini ifade etme • Fonksiyon ifadesinin $f(x)+m$ olacağını ifade etme	Tepe noktasının y''si, c, y''si kestiği nokta maksimum veya minimum değeri, köli durumu değişir. Tepe noktasının x', a ve b, tanımları ve değeri değişir, şekli değişmez.

Alp parabolün ötelenmesi ile ilgili sorularda parabolün eksenleri kestiği noktalara ilişkin çıkarımları da yapmıştır.

1	Alp:	Sadece sağa veya sola öteleniyorsa köklerin sanal ya
2		da gerçek oluşu değişmiyor. Mesela sanal kök varsa
3		c'si aşağıya doğru öteleniyorsa o zaman sanal kök
4		gerçek kök değişebiliyor.

Kolları yukarıya doğru devam eden bir parabolün x eksenini kesmemesi bir başka deyişle $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin sanal kökleri olması durumunda x eksenine paralel olarak aşağıya ötelendiği düşünüldüğünde sanal köklerin reel köklere dönüşeceğini ifade etmiştir [2-4]. Buna karşın parabolün sağa ya da sola ötelenmesi halinde kök durumlarında bir değişiklik olmayacağını belirtmiştir [1-2].

Alp'in kavramsal anlama testine verdiği yanıtlar doğrultusunda ikinci dereceden fonksiyon kavramına ilişkin uygun anlamlar geliştirdiği söylenebilir. Fonksiyonun oluşturulması ve kritik noktaları ile ilgili sonuçları genelleylebilmiştir. Ayrıca katsayıları farklı gösterimler bağlamında değerlendirebilmiş ve öteleme hareketleri kapsamında fonksiyonu ve parabolü yorumlayabilmiştir.

II. Alt Probleme Yönelik Bulgular

Çalışmanın ikinci alt problemi kapsamında onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin kavramsal anlamalarını destekleyen ve tez çalışması boyunca tasarlanan, değerlendirilen ve revize edilen öğretim dizisinin son hali ortaya koyulmaktadır. Öğretim dizisi sunulurken öncelikle her ders süresince öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin anlamalarını geliştirmek amacıyla gerçekleştirilen etkinlikler tetiklediği zihinsel eylemler açısından ayrıntılı açıklanmaktadır. Sonrasında öğretim dizisinin içeriği, hedefleri, öğrencilerin ve öğretmenin beklenen eylemleri dersler kapsamında tablo halinde genel olarak sunulmaktadır.

Onuncu sınıf öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonları öğrenmeleri için tasarlanan etkinlikler GME teorisi doğrultusunda gerçek yaşam bağlamli matematiksel

modelleme etkinlikleridir. Öğrencilerin bu etkinlikler üzerinde çalışırken gerçek yaşam durumlarını modelleyerek kavramları oluşturmaları gerekmektedir. Böylelikle kavramların yapısını ve içerdikleri fikirleri kendilerine anlamlı gelebilecek bağlamlar içinde değerlendirebilmektedirler. Dahil olacakları matematiksel modelleme sürecinin onların kavramları oluşturma aşamalarını destekleyeceği düşünülmektedir. Bununla birlikte, öğrenme sürecinin bu tür etkinliklerle verimli bir şekilde tamamlanabilmesi için öğrencilerin ilk olarak matematiksel modelleme sürecine ilişkin bilgilerinin olması önem taşımaktadır. Bu amaçla ikinci dereceden fonksiyonların öğretim süreci için tasarlanan etkinlikler sunulmadan önce matematiksel modelleme ile ilgili bilgilendirmeler yapılması ve öğrencilerin matematiksel modelleme problemleri üzerinde çalışmalarının sağlanması gerekli görülmüştür. Öğrencilere matematiksel modelleme süreci açıklandıktan sonra onlara Saman Balyası Problemi (bkz. Ek 17) sunulmuş ve çözümü gerçekleştirmeleri istenmiştir. İkinci döngüde sadece Saman Balyası Problemi'nin çözümü üzerinde çalışan öğrenciler öğretim dizisi kapsamındaki etkinliklerin modelleme aşamasında fazla zaman harcamışlardır. Bu sebeple üçüncü döngü için ikinci bir matematiksel modelleme problemi olan İzmir Saat Kulesi Problemi (bkz. Ek 18) üzerinde çalışmaları istenmiştir. Bu sayede öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonların öğretimi dizisinde yer alan etkinliklerde modellemeden kaynaklanan güçlükler yaşamalarının önüne geçilmesi planlanmıştır. Bu süreçte modelleme deneyimi kazandıracak öğretim içeriğinin nihai hali hedefler, öğrenci ve öğretmenin beklenen eylemleri açısından Tablo 25'de gösterilmektedir.

Hazırlık aşaması tamamlandıktan sonra öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları öğrenebilmeleri için fonksiyon kavramına ve özellikle doğrusal fonksiyon kavramına ilişkin ön bilgilerinin neler olduğu ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. İkinci dereceden fonksiyonları doğrusal fonksiyonlarla ilişkilendirmek amaçlandığı için öğrencilerin doğrusal fonksiyona, doğrusal fonksiyonun kritik özelliklerine, iki değişken arasındaki doğrusal ilişkiyi oluşturmaya, grafiksel gösterim ve cebirsel gösterim arasındaki geçiş ve katsayıların anlamlarına ilişkin bilgilerinin önemli olduğu düşünülmüştür. Bu doğrultuda öğrencilere ön değerlendirme yapılması gerekli görülmüştür. Bu değerlendirmelerin sonucuna dayalı olarak öğretim dizisinin başlarında öğrencilerin fonksiyon ve doğrusal fonksiyon ile ilgili var olan eksiklerinin

ve yanlış anlayışlarının giderilmesine yönelik müdahaleler yapılabileceği düşünülmüştür.

Bu sürecin ardından öğrencilerin zihinsel eylemlerini tetikleyecek ve yansıtıcı soyutlamalar yaparak kavramsal öğrenmelerini destekleyecek etkinliklerden oluşan ikinci dereceden fonksiyonlarla ilgili öğretim dizisine geçiş yapılmıştır.



Tablo 25. Öğretim Dizisine Hazırlık Aşamasının İçeriği

Temel Kazanım: Matematiksel modellemeye ilişkin deneyim kazanır, modelleme sürecini keşfeder ve grup çalışmasına uyum sağlar.				
Süre	Etkinlik	Hedef	Gerçekleştirilmesi Beklenen Eylemler	
			Öğrenci	Öğretmen
2 Ders Saati	İzmir Saat Kulesi)	- Matematiksel modelleme sürecinin aşamalarını fark eder ve uygular. - Matematiksel modelleme ile gerçek yaşam problemlerine çözümler sunulabileceğini fark eder. - Ulaşılan sonuçları gerçek yaşam bağlamında yorumlar. - Kabul ettiği varsayımların ve gerçekleştirdiği çözümlerin doğruluğunu araştırır. - Arkadaşlarının fikirlerini dinler ve kendi fikirlerini gerekçelendirir. - Birlikte çalışmanın katkılarını ve önemini keşfeder.	- İkişer kişilik grup olarak etkinlik üzerinde çalışırlar. - Bağlamlar hakkında düşünce üretmenin ve birbirlerinin düşüncelerini dinlemenin önemini fark ederler. - Matematik ve gerçek yaşamı ilişkilendirmeye başlarlar. - Saman balyası çözümü için çemberlerden yararlanabileceklerini fark ederler. - Üst üste dizdikleri çemberleri, çemberin özelliklerinden hareketle yükseklik ifadesine ulaşmaya çalışırlar ve böylelikle matematiksel modeli elde ederler. - Saman balyaları üzerinde oturan kadının herhangi bir vücut ölçüsünden yararlanarak matematiksel çözüme ulaşmaya çalışırlar.	- Matematiksel modellemenin ne olduğunu açıklar ve matematiksel modelleme sürecine değinir. - Çözüm sürecinde yapılanların nedenleriyle ayrıntılı açıklanmasının önemine vurgu yapar. - Grup çalışması yaparken gerçekleştirilecek eylemler üzerinde konuşur. - Saman balyası problemde oluşturulacak matematiksel model için hangi kavramların seçilmesi gerektiğini gerekçeleriyle düşünmeye teşvik eder. - Değişken belirleme ve önemini tartışır.
2 Ders Saati	İzmir Saat Kulesi (bkz Ek 18)	- Matematiksel modelleme sürecinin aşamalarını fark eder ve uygular. - Matematiksel modelleme ile gerçek yaşam bağlamı problemlere çözümler sunulabileceğini fark eder. - Ulaşılan sonuçları gerçek yaşam bağlamında yorumlar. - Kabul ettiği varsayımların ve gerçekleştirdiği çözümlerin doğruluğunu araştırır. - Grup çalışmasının önemini fark eder. - Arkadaşlarının fikirlerini dinler ve kendi fikirlerini gerekçeleriyle açıklar.	- İkişer kişilik grup olarak etkinlik üzerinde çalışırlar. - Matematik ve gerçek yaşamı ilişkilendirmeye başlarlar. - İzmir Saat Kulesini gösteren fotoğrafların hangisinin matematiksel çözüm için en uygun olacağına karar verirler. - Varsayımlarını tartışarak ve birbirlerini mantıklı bir şekilde ikna ederek sonuca karar verirler. - Fotoğraflardaki insanların boylarından ya da farklı nesnelerin yüksekliklerinden yararlanarak ve saat kulesinin yüksekliğini bulmaya çalışırlar. - Çözüme ulaşmak için oran kavramından yararlanırlar.	- Çözüm sürecinde yapılanların ayrıntılı açıklanmasının ve nedenlerinin ifade edilmesinin önemine vurgu yapar. - Grup çalışması yaparken gerçekleştirilecek eylemler üzerinde konuşur. - Gerçek yaşam durumunun matematiğe nasıl aktarılabilirliğini açıklar. - Farklı fotoğraflarla sunulan matematiksel modelleme probleminin çözümü için yararlanılacak fotoğrafın kullanımının sonucun gerçek yaşama uygunluğu açısından önemli olduğuna vurgu yapar.

Öğretim dizisi 16 ders saati etkinlik uygulamalarını, 4 ders saati üç etkinlik sonrası değerlendirmeleri ve son olarak 2 ders saati tüm sürece ilişkin kavramsal anlama testinin uygulanmasını içermektedir. Bölümün devamında öğretim dizisinde yer alan öğrenme etkinliklerinin içerikleri, gerektirdiği zihinsel eylemler, desteklediği nicel operasyonlar ve ölçme-değerlendirme etkinliklerinin içeriği ayrıntılı olarak açıklanmaktadır.

Etkinlik 1-Dünya'nın Dibi (1. Aşama)

Öğretim dizisi kapsamındaki ilk etkinlik olan “Dünya'nın Dibi” isimli etkinlik öğrencilerin doğrusal fonksiyona ilişkin temel fikirleri anlamalarını ve kavramsal öğrenmelerini desteklemek amacıyla tasarlanmıştır. Etkinlikte ilk olarak dünyanın en derin noktası olarak bilinen Mariana Çukuru ile ilgili gerçek yaşamdan bilgilendirmeler yapılmış ve dalışlardaki vurgun olayına değinilmiştir. Vurguna uğrayan kişilerin tedavisi için hiperbarik ortamlardan yararlandığı açıklanmıştır. Bu gerçek yaşam durumu bağlamında öğrencilerden ilk olarak problem metni içerisinde sözel olarak verilen “her 10 metrede basıncın 1 ATM artması” ifadesini göz önüne alarak basınç ile derinlik arasındaki ilişkiyi oluşturmaları istenmiştir. Derinliğin 10 metre artmasının basıncın 1 ATM artmasına yol açtığının sözel olarak doğrudan verilmesi öğrencilerin basınç ve derinlik ilişkisini doğrusal ilişki olarak yazmalarını desteklemiştir. Çünkü söz konusu ifadede iki çokluk arasındaki değişim oranının değeri belirtilmiştir. Bağımsız değişkeni derinlik, bağımlı değişkeni basınç olarak düşünen öğrencilerin bağımsız değişkenin 1 artmasının bağımlı değişkeni 1/10 oranında arttıracaklarını sezecekleri varsayılmıştır. Derinliğe bağlı basıncın eş zamanlı olarak değişmesi ile öğrenciler iki çokluk arasındaki ilişkiyi gösteren matematiksel kavramın fonksiyona karşılık geldiğini fark etmişlerdir. Buna ek olarak, öğrenciler deniz seviyesindeki basıncın 1 ATM olduğu bilgisini doğrusal fonksiyonun cebirsel ifadesindeki sabiti belirlemiş ve doğrusal fonksiyon ifadesini oluşturmuşlardır. Sonraki soruda öğrencilerin derinlik ve basınç arasında oluşturdukları ilişkinin grafiğini çizmeleri ve bu grafiği cebirsel ifade ile ilişkilendirmeleri istenmiştir. Öğrenciler bu aşamada bağımsız değişken olan derinlik değerleri ile bağımlı değişken olan basınç değerlerini eşleyerek sıralı ikililer oluşturmuşlardır. Bu sıralı ikilileri derinliği x eksen, basıncı y eksen kabul ederek analitik düzleme yerleştirmişler ve

böylelikle ilişkiyi temsil eden grafiğin doğrusal olduğunu keşfetmişlerdir. Burada öğrencilerin cebirsel ifadedeki x değişkeninin katsayısının grafiksel gösterimde eğime karşılık geldiğini fark etmeleri beklenmiştir. Bunun yanı sıra, bu süreçte öğrenciler basınç-derinlik ilişkisini gösteren fonksiyonunun başlangıç noktasını belirleyememe, basınç-derinlik fonksiyonunun grafiği ile cebirsel ifadesini ilişkilendirememesi ve eğimin x 'in katsayısı olduğunu görememe ve fonksiyonun tanım kümesini ve değer kümesini belirlememe gibi olası güçlüklerle karşılaşmıştır. Bu gibi zorluklarla karşılaşıldığında öğrencilerin basınç ve derinlik çokluklarına belirli değerler vererek tablo oluşturmalarının istenebileceği düşünülmektedir. Böylelikle öğrencilerin tablo ile grafiksel gösterim arasındaki ilişkiyi daha net görebilmelerini ve eğitim-değişim oranı geçişini daha kolay anlamlandırabilmelerini sağlanabilecektir. Buna ek olarak, "Deniz seviyesinde basınç kaçtır?", "Deniz seviyesinde derinlik için ne söyleyebilirsiniz?" gibi sorular sorularak öğrencilerin güçlüklerinin giderilmesine ve farkındalıklarının artırılmasına yönelik yaklaşımlar sergilenebilir.

Değişim oranının sözel ifadede doğrudan verilmesinin öğrencilerin duruma ilişkin herhangi bir irdeleme yapmadan ilişkiyi doğru bir şekilde yazmalarına imkan vereceği fikrine dayalı olarak tablo değerlerinin incelenmesini ve değişim oranının belirlenmesini gerektiren sorularla etkinliğe devam edilmiştir. Aynı bağlam içerisinde basınca bağlı olarak normal bir ortamda kanda çözünen oksijen miktarına ilişkin veriler ve basınca bağlı olarak hiperbarik bir ortamda kanda çözünen oksijen miktarına ilişkin veriler tablo gösterimi yardımıyla sunulmuştur. Öğrencilerin basınca bağlı normal ortamdaki bir kişinin kanında çözünen oksijen miktarını gösteren matematiksel ifadeyi yazmaları istenmiştir. Bu matematiksel ifadeyi yazabilmek için öğrencilerin bağımsız değişkene ve bağımlı değişkene ait verileri incelemeleri ve veri değerleri arasında bir ilişki kurmaları gerekmiştir. Bağımlı değişken bağımsız değişkenin doğrudan bir katı olmadığı için öğrenciler iki çokluk arasında farklı bir ilişki aramışlar ve çokluklardaki değişimlere yönelmişlerdir. Öğrenciler bu sayede değişim miktarları arasında bir oran olduğunu fark etmişler ve bağımsız değişkenin artmasının belirli bir oran ile bağımlı değişkeni arttırdığını keşfetmişlerdir. Bu aşamanın öğrencilerin doğrusal ilişkinin kritik bir özelliği olan değişim oranına anlamlar yüklemeleri için önemli olduğu düşünülmektedir. Buna ek olarak, öğrenciler ilişkiyi yazdıktan sonra

onlara bu ilişkinin matematiksel olarak hangi kavrama karşılık geldiği sorulduğunda, basıncın değişmesiyle eş zamanlı olarak kanda çözünen oksijen miktarının da belirli bir oranda değişmesi öğrencileri fonksiyon kavramına götürmüştür. Dolayısıyla bir çokluğa eş zamanlı olarak diğer bir çokluğun değişmesi fikri ile oluşturdukları matematiksel ilişkiyi fonksiyon kavramı ile ilişkilendirmişlerdir.

Bu ilişkiyi kurduktan sonra öğrencilerin fonksiyonun tanım ve değer kümelerini belirlemeleri beklenmiştir. Öğrenciler deniz seviyesindeki basıncın 1 ATM olmasına bağlı olarak tanım ve değer kümelerini yazmışlardır. Bu süreçte öğrencilerin amacı iki çokluk arasındaki ilişkinin modelini oluşturmak olduğu için öğrenciler genellikle fonksiyonun tanım ve değer kümelerini yazmayı ihmal etmişlerdir. Bu durumda öğrencilerin matematiksel kavramı düşünmeleri desteklenebilir ve böylelikle fonksiyon kavramı için önemli olan tanım ve değer kümelerini belirlemeleri sağlanabilir. Sorunun devamında öğrencilerin basınç ile çözünen oksijen miktarı arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği çizmeleri beklenmiştir. Öğrenciler bu aşamada tablo değerlerinden ya da cebirsel ifadeden yararlanarak iki değişken arasında yapacakları eşlemelerle sıralı ikililer oluşturmuşlardır. Basıncı bağımsız değişken olarak x eksenine, oksijenin çözünme miktarını bağımlı değişken olarak y eksenine yerleştirerek oluşturdukları analitik düzlemde doğrusal olarak grafiği çizmişlerdir. Tabloda bağımlı değişkenin değişim miktarının bağımsız değişkenin değişim miktarına oranının cebirsel ifadede x'in katsayısı olduğunu anlamlandıran öğrenciler tabloda belirledikleri herhangi iki noktayı grafik üzerinde de incelemişlerdir. Böylece y'lerdeki değişimin x'lerin değişime oranını eğim ile ilişkilendirmişlerdir. Bu ilişkilendirme onları eğim kavramının bir oran olduğuna, doğrusal fonksiyonlarda eğimin sabit olduğuna ve cebirsel anlamda bağımsız değişkenin katsayı olarak ifade edildiğine ulaştırmıştır. Etkinlik kapsamındaki ilk dört soru öğrencilerin sırasıyla doğrusal fonksiyonun temel fikirlerini oluşturmalarını desteklemiş ve farklı gösterimler arası geçişleri yapmalarını sağlamıştır.

Öğrenciler tablo değerleri üzerine düşünürlerken değişim miktarlarını incelememe, değişim miktarını x'in katsayısı olarak ifade etmeme, başlangıç noktasını göz önünde bulundurmama, fonksiyonun grafiğinde eğimi değişim oranı ile

ilişkilendirmeme gibi güçlükler yaşayabilmektedirler. Öğretmen bu durumlarla karşılaştığında öğrencilerin doğruyu anlamlandırmalarını ve bir doğruya eğimin sabit olduğunu fark etmelerini sağlamalıdır. Aynı zamanda aynı değişim oranına sahip farklı başlangıç değeri olan fonksiyonlar üzerine düşündürerek fonksiyon ifadesi için başlangıç değerinin de önemli olduğunu hissettirmelidir.

Bir sonraki soruda Mariana Çukuru'na serbest dalış yapıldığı düşünüldüğünde kanda çözünen oksijen miktarının sorulması öğrencilerin oluşturmuş oldukları matematiksel modelleri kullanmalarını sağlamıştır. Öğrenciler ilk olarak derinliğe bağlı olarak Mariana Çukuru'ndaki basıncın değerini bulmuşlardır. Basıncı bulduktan sonra basınç-oksijen miktarı ilişkisini gösteren doğrusal fonksiyondan yararlanarak istenilen sonuca ulaşmışlardır. Bu soru ile öğrencilerin fonksiyonun bir işlem olduğu ya da bir bağımsız değişkenin bir işleme tabi tutularak bağımlı değişkene dönüştürüldüğü anlamının kazandırılması amaçlanmıştır. Ek olarak öğrenciler bir fonksiyonun görüntüsünü başka bir fonksiyonun girdisi olarak kullanarak yeni bir görüntü elde etmişler ve bu sayede bileşke fonksiyonunu bağlam içerisinde irdelemişlerdir.

Etkinliğin 1. aşamasının son sorusunda öğrenciler tabloda hiperbarik ortamdaki kanda çözünen oksijen miktarlarına ilişkin verileri inceleyerek basınç ile hiperbarik ortamda kanda çözünen oksijen miktarı arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade etmişlerdir. Öğrenciler normal ortam ile ilgili verileri inceleme sürecindekilere benzer yaklaşımlar gerçekleştirmeleri beklenen bir durumdur. Bu aşamada benzer şekilde öğrenciler tablodaki verilerin değişim miktarları arasındaki ilişkiyi görerek sabit bir orana ulaşmışlar ve başlangıç değerini de dikkate alarak doğrusal fonksiyon ifadesini yazmışlardır. Bir yandan da iki değişken arasındaki ilişkiyi ortaya koymaya çalışırken değişim miktarlarını inceleme fikrini pekiştirmişler ve buna yönelik yaptıkları işlemlerde esneklik kazanmışlardır. Böylelikle öğrenciler etkinliğin ilk aşamasını tamamlamışlardır.

Etkinlik 1-Dünya'nın Dibi (2. Aşama)

Doğrusal fonksiyonun öğrenilmesine yönelik tasarlanan etkinliğin ikinci aşaması öğrencilerin irdeledikleri ve üzerinde çalıştıkları kavramlara ilişkin genellemeler yapmalarını sağlayacak soruları içermiştir.

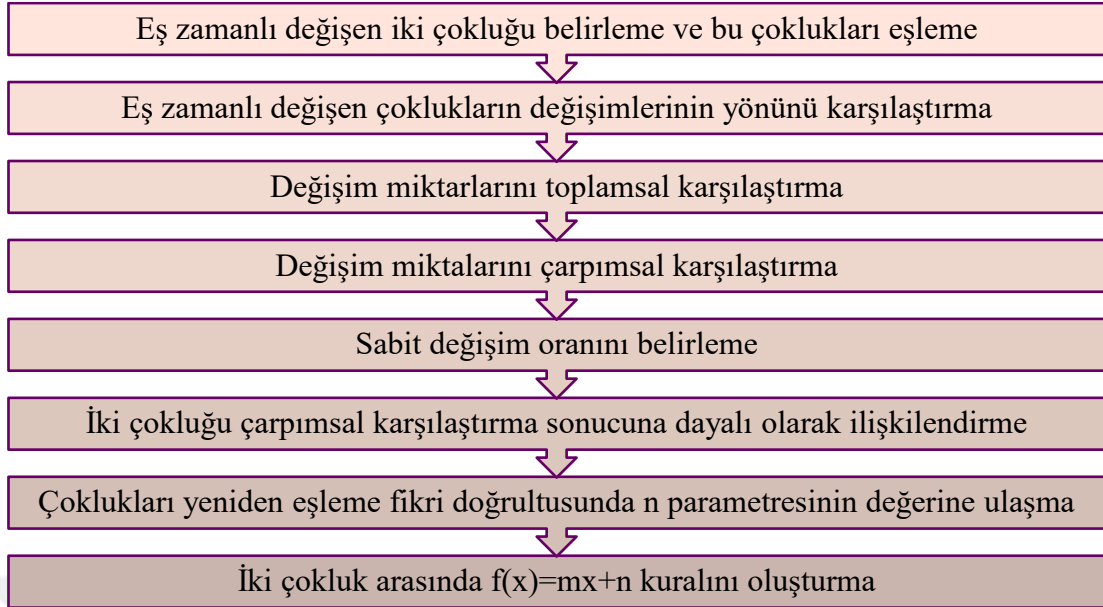
İlk olarak, öğrencilerin ilk aşamada oluşturdukları üç matematiksel modelin genel ifadesini bir başka deyişle doğrusal fonksiyonun genel ifadesini yazmaları istenmiştir. Sonrasında yazdıkları genel ifade yer alan değişkenlerin ve katsayıların anlamlarını açıklamaları beklenmiştir. Öğrenciler bu soruyla önceki aşamada deneyimledikleri durumların zihinlerinde yarattığı sonuçlarını ortaya koymuşlardır. Oluşturdukları modellerde x 'in ve y 'nin gerçek yaşam durumunda anlamlarının olması ve bu anlamları öğrencilerin kendilerinin oluşturması daha soyut olarak sunulan ifadeleri yorumlamalarını kolaylaştırmıştır. Bu doğrultuda x 'i değişen bir çokluk y 'yi ise x 'e bağlı eş zamanlı değişen bir çokluk olarak ifade etmeleri ve x 'in tanımlanan bir işlemle y 'ye dönüştüğünü açıklamaları beklenmiştir. Grafiksel gösterimden yararlanarak x ile y 'nin eşlenmesi ile oluşan sıralı ikililerin grafik üzerinde olduğunu veya grafik üzerindeki noktaların x değerlerinin fonksiyon ifadesinde y 'ye karşılık geldiğini ifade etmişlerdir. Böylece öğrenciler fonksiyon ifadesindeki a katsayısını ilk aşamada inceledikleri tablo değerlerinin zihninde oluşturduğu sonuçlara bağlı olarak değişim miktarlarının oranı olduğunu ve doğrusal fonksiyonlarda değişim miktarlarının oranının sabit bir değeri olduğunu açıklamışlardır. Değişim oranının tablo gösterimi ile grafiksel gösteriminin ilişkisi açık olduğu için öğrenciler ön bilgilerinin de yardımıyla a katsayısının eğime karşılık geldiğini belirtmişlerdir. Fonksiyonun b katsayısının ise bağımsız değişkenin 0 değeri ile eşleştiğini bunun da grafiksel gösterimde doğrunun y eksenini kesen noktayı gösterdiğini ifade etmişlerdir. Bu soru ile öğrencilerin deneyimlerinin sonuçlarını ortaya çıkararak genellemelere ulaşmaları sağlanmıştır.

İkinci soru kapsamında öğrencilerin x 'in katsayısının değişim oranı olduğunu düşünmeleri ve x 'in artmasının ya da azalmasının y 'yi nasıl değiştireceği ile fonksiyondaki a katsayısını ilişkilendirmeleri beklenmiştir. Fonksiyonun x değişkeninin katsayısının a olması halinde x 1 birim değiştiğinde y 'nin a birim

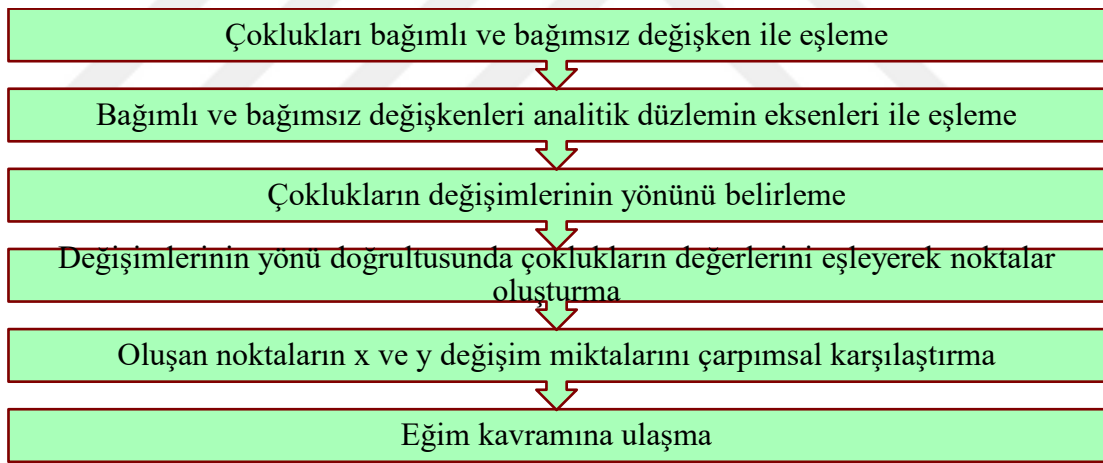
değişeceğini, x değişkeninin katsayısının 2a olması durumunda x 1 birim değişirken y 'nin 2a birim değişeceğini açıklamışlardır. Ek olarak, ilk durumdaki eğimin ikinci durumda 2 katına çıkacağını belirtmişlerdir..

Sonraki sorularda öğrencilerin $ax + b = 0$ denklemi ile $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun ilişkisini doğru bir şekilde kurabilmelerini ve farklılıklarını anlamlandırmalarını sağlamak amaçlanmıştır. Öğrenciler bir bilinmeyenli denklemin bir kökünün olduğunu ve kökünü bulurken y değeri 0 olarak alınacağı için denklemi sağlayan x değerinin fonksiyonun grafiğinin x eksenini kesen noktaya karşılık geldiğini açıklamışlardır. Ek olarak, denklemlerin sabit bir sayı ile çarpıldığında oluşan yeni denklemlerin çözüm kümesinin değişmediğini ve dolayısıyla denklemlerin birbirleri ile aynı olduğunu fark etmeleri beklenmiştir. Oluşturulan yeni denklemlerin ifadesinin fonksiyon olarak yazılması halinde fonksiyonların değiştiğini sadece grafiklerinin x eksenini kestiği noktanın aynı kaldığını kavrayacakları düşünülmüştür. Bir önceki soruda x 'in katsayısının değişiminin fonksiyonun eğimini değiştireceği sonucunu genelleyen öğrenciler sabit bir sayı ile fonksiyonun katsayılarını çarparak elde edilen fonksiyonlarda eğimin değişeceğini ve dolayısıyla fonksiyonun grafiğinin de değişeceğini anlamlandırabilmişlerdir.

Doğrusal fonksiyon etkinliği ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin sonraki etkinliklerin verimli bir şekilde ilerletilmesi için temel oluşturmuştur. Bu bağlamda bu etkinlik kapsamında öğrencilerin eşleme, eş zamanlı değişim, dönüşüm, değişim oranının sabit olması ve eğimin değişim oranı ile ilişkilendirilmesi gibi kritik fikirleri oluşturmaları amaçlanmıştır. Bu öğretim deneyleri ile onuncu sınıf öğrencilerinin doğrusal fonksiyonun cebirsel ifadesini oluşturmaya ilişkin öğrenme yollarının aşağıdaki gibi olduğu ortaya çıkmıştır.



Öğrencilerin doğrusal fonksiyonun grafiksel gösterimi ile ilgili öğrenme yolları da şu şekildedir:



Etkinliğin birinci aşamasına iki ders saati, ikinci aşamasına da iki ders saati olarak toplam dört ders saati süresi etkinliğin tamamlanması için yeterli görülmüştür. Dünya'nın Dibi etkinliğini tamamlayan öğrenciler ikinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesi için önemli olan El Castillo etkinliğinde yapacakları çalışmalarını destekleyecek zihinsel eylemleri gerçekleştirmişlerdir. Doğrusal fonksiyon etkinliğinin tamamlanmasının ardından temel olarak ikinci dereceden fonksiyonlarla

doğrusal fonksiyonların ilişkilendirilmesinin amaçlandığı El Castillo isimli ikinci etkinlik ile öğretmenler öğretim dizisine devam etmişlerdir.

Etkinlik 2-El Castillo (1.Aşama)

“El Castillo” isimli ikinci etkinlikte öğrencilerin iki doğrusal fonksiyonun çarpımının ikinci dereceden fonksiyon olduğunu fark etmeleri ve ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin parabol olduğunu sezmeleri amaçlanmıştır. Etkinlikte problem durumunda çalışılacak El Castillo ve özellikleri ile ilgili bilgilere yer verilmiştir. El Castillo yapısının kare piramit şeklinde olduğu, dokuz kattan oluştuğu ve her yüzünde 91 basamak olacak şekilde toplam 364 basamağa sahip olduğu açıklanmıştır. Etkinlik kapsamında öğrenciler yapıyı ele alırlarken, bir yüzündeki basamakların bittiği yere kadar yapıyı dikkate almaları ve üstteki çıkıntı kısmını görmezden gelmeleri istenmiştir.

Etkinlik üzerine çalışmaya başlayan öğrenciler ilk olarak kendilerine verilen altı fotoğraftan istediklerini kullanarak matematiksel modelleme süreci ile alt tabanının kenar uzunluğunu, üst tabanın kenar uzunluğunu ve yapının yüksekliğini bulmaya çalışmışlardır. Bu süreçte fotoğraflarda bulunan insanlardan yararlanarak ve yararlandıkları insanlar ile ilgili bir takım varsayımlar belirleyerek istenilen uzunlukları hesaplamışlardır. Öğrenciler bu süreçte yapıya en yakın insanların olduğu fotoğrafları kullanarak ve perspektif fikrini göz önüne alarak doğru sonuca en yakın çözümler gerçekleştirebilmişlerdir. Bu süreçte öğrencilerin farklı ölçütler kullanarak yapının uzunluklarını farklı yollarla bulmalarını ve çözümlerini karşılaştırmalarını istemenin onları doğrulama yapmalarını destekleyeceği düşünülmektedir. Hem etkinlik bağlamına alışmaları hem de üzerinde çalışacakları verileri kendilerinin oluşturmaları açısından böyle bir modelleme süreci ile etkinliğe başlamalarının uygun olacağı düşünülmüştür.

Matematiksel modelleme ile istenen uzunluklar belirlendikten sonra öğrencilerin yapının dokuz katı için tabanların kenar uzunluklarını bulmaları ve katlara göre kenar uzunluklarının nasıl değiştiğini açıklamaları istenmiştir. Bu soru ile doğrusal fonksiyona geçiş yapmadan önce öğrencilerin kullanacakları kenar

uzunluklarına ilişkin verileri kendilerinin oluşturmaları beklenmiştir. Öğrencilerin kenar uzunluklarının belirli bir sabit oranda azaldığını fark etmeleri herhangi bir katı temsil eden sayı ile kata bağlı kenar uzunlukları arasındaki ilişkinin değişim oranının sabit olduğu fikrine geçişlerini kolaylaştırmıştır. Başka bir yaklaşımla, öğrenciler dokuz katın kenar uzunluklarını hesaplarlarken katlar arası yüksekliğin eşit olması sebebiyle alt tabanın kenar uzunluğu ile üst tabanın kenar uzunluğu arasındaki farkı eş parçalama yaparak ardışık herhangi iki katın tabanlarının kenar uzunlukları arasındaki farkı bulabilmişlerdir (bkz. Şekil 15).

Şekil 15
El Castillo'nun Alt ve Üst Tabanlarının İlişkisi

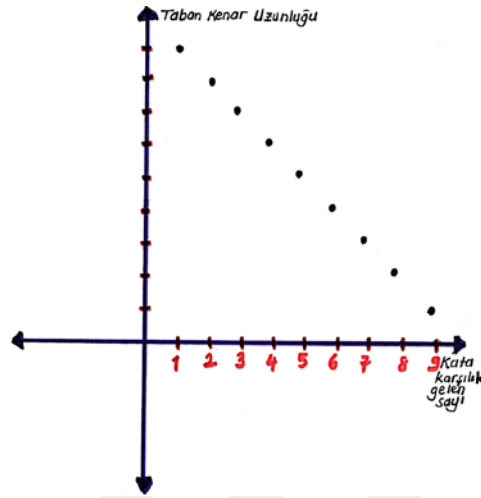


Bu sayede ardışık iki kat arasındaki kenar uzunluklarının sabit bir oran ile arttığını ya da azaldığını fark eden öğrenciler kata bağlı olarak ortaya çıkan kenar uzunlukları arasındaki ilişkinin doğrusal olduğunu anlamlandırabilmişlerdir. Öğrenciler bir önceki etkinlik kapsamında tablo değerleri arasındaki ilişkileri irdeleyerek değişim oranının anlamına ilişkin oluşturdukları fikirlerden El Castillo etkinliğinin bu aşamasında yararlanmışlar ve böylelikle etkinliklerdeki fikirler arasındaki geçişi anlamlı bir şekilde yapabilmişlerdir.

Etkinliğin ilk aşamasının temeli olan sabit değişim oranını fark eden öğrencilerin devamında katlara bağlı kenar uzunluğu ilişkisini gösteren matematiksel modeli oluşturmaları istenmiştir. Bu amaçla öncelikle öğrencilerin bağımlı ve bağımsız değişken olarak hangi iki çokluğu ilişkilendireceklerini belirlemeleri gerekmiştir. Katların kenar uzunluklarını belirlerlerken yaptıkları işlemleri dikkate

almaları matematiksel kavramı oluşturmak için hangi çokluklardan yararlanmaları gerektiğini kendilerinin keşfetmelerini sağlamıştır. Katlar için belirledikleri sayısal değerleri bağımsız değişken olarak ele alırlarken bir başka deyişle tanım kümesinde yer alan çoklukları oluşturlarken toplamsal ilişkiden yararlanmışlardır. Benzer şekilde katların kenar uzunluklarını bağımlı değişken olarak ele alırlarken bir başka deyişle görüntü kümesinde yer alan çoklukları oluşturlarken de toplamsal karşılaştırma yapmışlardır. Bağımlı ve bağımsız değişkenleri bu şekilde belirleyen öğrencilerin sonrasında iki değişken arasındaki çarpımsal ilişkiyi kurmaları beklenmiştir. Bir önceki doğrusal fonksiyon etkinliğinde öğrenciler y değerlerindeki değişimin x değerlerindeki değişime oranının sabit olduğunu x ile y ilişkisinin doğrusal fonksiyonu göstermesi ile ilişkilendirdikleri için katlara bağlı kenar uzunluklarını gösteren fonksiyonu da doğrusal fonksiyon olarak kolaylıkla oluşturmuşlardır. Doğrusal fonksiyonu oluşturan öğrenciler tanım kümesindeki çoklukları kat için belirlenen sayısal değerler (1.kat, 2.kat, 3.kat, ... gibi) olarak alacakları için öğrencilerin tanım kümesinin sadece $[1,9]$ aralığındaki tam sayılardan oluşacağını göz önüne bulundurmaları gerekmiştir. Buna karşılık bağımsız değişkenlerle eşleme yapılan bağımlı değişkenlerin oluşturduğu görüntü kümesinin de dokuz elemanı içereceğini ifade etmeleri beklenmiştir. Tanım kümesini ve görüntü kümesini belirleme ve fonksiyona bağlı olarak iki küme arasında eşleme yapma öğrencilerin grafiksel gösterime geçişini desteklemiştir. Çünkü öğrenciler grafiksel gösterimde birbiriyle eşleşen iki çokluğu ifade eden noktaları kullanmışlardır. Öğrenciler grafiği çizerlerken yaptıkları eşlemelerle oluşturdukları dokuz sıralı ikiliyi öncelikle analitik düzlemde konumlandırmışlardır. Bu doğrultuda katlara bağlı oluşan kenar uzunluklarını temsil eden grafiğin noktasal bir grafik olduğunu görebilmişlerdir (bkz. Şekil 16). Bu grafiksel gösterime geçiş sırasında öğrenciler ardışık herhangi iki nokta arasındaki mesafenin eşit olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

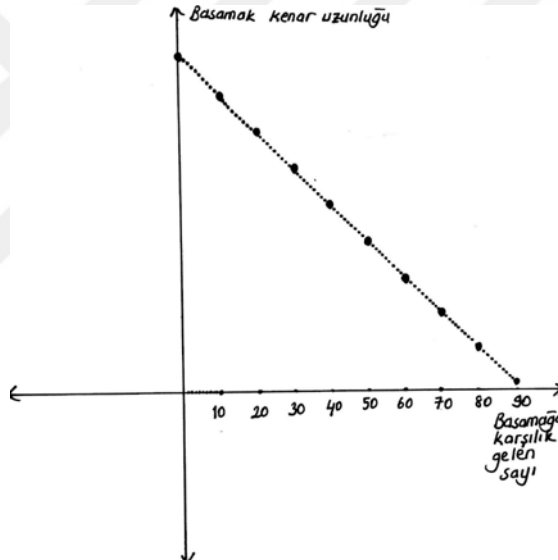
Şekil 116
Kat-Kenar Uzunluğu İlişkinin Grafiksəl Gösterimi



Etkinlikte istenen ilk doğrusal fonksiyon ifadesini oluşturan öğrencilerin basamaklara karşılık gelen ve tabana paralel olacak şekilde oluşan kesitlerin kenar uzunluklarını basamaklara bağlı olarak temsil eden ifadeyi yazmaları istenmiştir. Bu soruyu yanıtlamak için öğrencilerin oluşacak kesitlerin birer kare olduğunu zihinlerinde canlandırmaları gerekmiştir. Öğrenciler basamakları yorumlarken birinci katın tabanının 0.basamağa karşılık geldiğini ve ardışık her iki kat arasında 10 basamak olduğunu düşünmüşlerdir. Her kat arasındaki on basamağı göz önüne alarak ardışık iki katın kenar uzunlukları arasındaki farkı eş parçalama yaparak ardışık iki basamağa karşılık gelen kesitlerin kenar uzunlukları arasındaki farka ulaşmışlardır. Yapının düzgün bir yapı olması öğrencilerin herhangi iki katın kenar uzunlukları ya da herhangi iki basamaktaki kesitin kenar uzunlukları arasındaki değişimin sabit olacağını düşünmelerini desteklemiştir. Basamakların sayısal değeri birer birer değiştiği için ulaştıkları fark öğrencilerin yeni oluşturacakları doğrusal fonksiyon ifadesinin değişim oranına karşılık gelmiştir. Değişim oranını bu şekilde hesaplayan öğrenciler doğrusal fonksiyon ifadesini de kolaylıkla modellemişlerdir. Bir başka deyişle, öğrenciler daha az verinin söz konusu olduğu katlara bağlı kenar uzunluklarını gösteren doğrusal ilişkiden yararlanarak yeni modellerini oluşturmuşlardır. Benzer şekilde, tanım kümesini basamakların oluşturduğu sayısal değerler olarak düşündükleri için $[0,90]$ aralığındaki tamsayılar olarak ifade etmişlerdir. Bağımsız değişkenlerle eşleyecekleri bağımlı değişkenler de fonksiyonun görüntü kümesini oluşturacağı için görüntü kümesinde de doksan bir tane eleman bulunmuştur.

Öğrenciler iki küme arasında bire bir eşleme yaparak sıralı ikilileri yazmışlar ve cebirsel anlamda fonksiyonun farklı bir anlamını oluşturmuşlardır. Öğrenciler basamaklara ilişkin tanım kümesini oluştururlarken iki kat arasındaki mesafeye eş parçalama eylemini uyguladıkları için grafiksel gösterimde de dokuz noktadan ardışık herhangi ikisinin arasına eşit uzaklıklarla dokuz nokta daha konumlanacağını fark etmişlerdir. Bir başka deyişle, bir önceki grafiksel gösterimdeki kesikli dokuz noktayı eşit aralıklarla sonlu sayıda arttırmışlar ve kata bağlı fonksiyonun grafiğine göre yine sonu sayıda ancak daha fazla noktadan oluşan bir grafik oluşturmuşlardır (bkz. Şekil 17).

Şekil 17
Basamak ve Kenar Uzunluğu İlişkisinin Grafiksel Gösterimi



Etkinliğin ilk aşamasında son olarak öğrencilerin yapının herhangi bir yüksekliğinde tabana paralel olacak şekilde oluşan kesitlerin kenar uzunluklarını doğrudan gösterebilecek bir matematiksel ifade oluşturmaları istenmiştir. Bu soruda öğrencilerin değişim oranını hesaplayabilmeleri için yapının toplam yüksekliğini dikkate almaları gerekmiştir. Önceki doğrusal fonksiyonların değişim oranından yararlanarak yeni fonksiyonun değişim oranını hesaplamışlar ve yüksekliğe bağlı kenar uzunluğu ilişkisini gösteren modeli oluşturmuşlardır. Tanım kümesindeki her eleman yapının herhangi bir yüksekliğine karşılık geldiği için tanım kümesi sonsuz elemandan oluşmuştur. Buna bağlı görüntü kümesi de alt tabanın kenar uzunluğu ile

üst tabanın kenar uzunluğu arasındaki sonsuz değeri içermiştir. Böylelikle fonksiyonun tanım ve görüntü kümesinin belirlenen aralıktaki reel sayılara karşılık geleceği fikri oluşmuştur. Öğrenciler fonksiyonun grafiğini çizerlerken de en alt tabana karşılık gelen nokta ile en üst tabana karşılık gelen nokta arasında sonsuz parçalama yaparak sürekli doğrusal fonksiyon çizmişlerdir.

Etkinliğin ilk aşaması boyunca öğrenciler kesikli noktalardan bu noktalar arası parçalamalar yaparak sürekli olan doğruyu elde etme fikrini zihinsel eylemleriyle anlamlandırabilmişlerdir. Bu fikir öğrencilerin etkinliğin ikinci aşaması kapsamında gerçekleştirecekleri alana ilişkin zihinsel eylemleri için önemli olmuştur.

Etkinlik 2-El Castillo (2. Aşama)

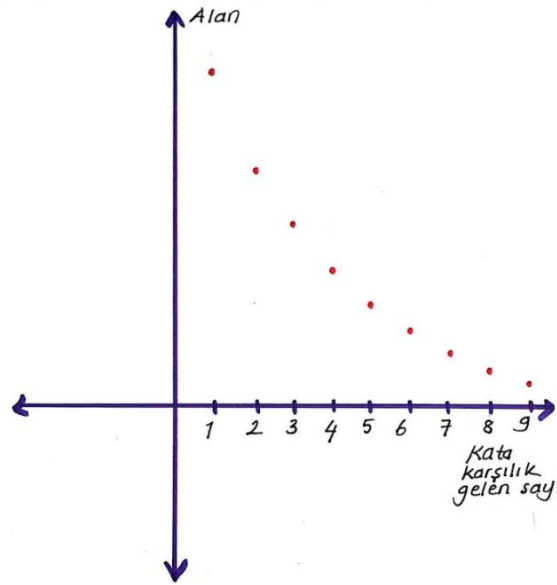
Yapının katı, basamağı ve yüksekliği olmak üzere üç farklı bağımsız değişkene bağlı olarak kenar uzunluklarını gösteren ilişkileri modelleyen öğrencilerden etkinliğin ikinci aşamasında yine bu üç bağımsız değişkene bağlı olarak oluşan karelerin alanlarını gösteren matematiksel ifadeleri oluşturmaları istenmiştir.

Öğrenciler ilk olarak her kattaki karelerin kenar uzunluklarının karesini alarak alanların değerlerini hesaplamışlar ve alan verilerini elde etmişlerdir. Yapının dokuz katı olması sebebiyle öğrenciler her katta gezilebilecek alanı bulmak için katların alanlarını ayrı ayrı hesaplamışlardır. Önceki doğrusal ilişkiyi içeren etkinlikler boyunca sürekli olarak bağımsız değişkenin değişim miktarları ile bağımlı değişkenin değişim miktarları arasındaki ilişkiyi irdeledikleri için bu süreçte de öğrenciler ilk olarak alanlar arası değişim miktarını inceleme yaklaşımı sergilemişlerdir. Alanlar arası değişim miktarlarının ardışık her iki alan arasında sabit olmadığını gören öğrenciler farklı bir ilişki bulmaya yönelmişlerdir. Bu aşamada değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğunu fark etmişler ve bu sebeple kata bağlı oluşan karelerin sınırladığı alanları gösteren matematiksel ifadenin doğrusal fonksiyondan farklı bir matematiksel kavram ile ilişkilendirmeleri gerektiği sonucuna ulaşmışlardır. Sabit bir değişim oranı olmaması sebebiyle değişim oranlarından yararlanarak fonksiyon ifadesini oluşturamayacakları için ilk aşamada elde ettikleri kata bağlı kenar uzunluğunu gösteren doğrusal fonksiyonun karesini almışlardır. Bu süreçte

karşılaştıkları değişim miktarlarına ilişkin beklenmeyen sonuç öğrencileri karelerin kenarlarından alanlarını oluşturma fikrine götürmüştür. Dolayısıyla bir doğrusal fonksiyonun karesini alarak elde ettikleri alan fonksiyonunun ikinci dereceden bir fonksiyon olduğunu görmüş ve ulaşmış oldukları değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğu fikriyle ikinci dereceden fonksiyon kavramını ilişkilendirmişlerdir. Alan fikrinden yola çıktıkları için iki doğrusal fonksiyonun çarpımıyla bir ikinci dereceden fonksiyon oluşacağını anlamlandırmışlardır. Cebirsel olarak $f(x) = ax + b$ ile $g(x) = cx + d$ fonksiyonlarının çarpımıyla $f(x).g(x) = acx^2 + adx + bcx + cd$ ifadesini elde etmişler ve bu ifadenin $h(x) = Ax^2 + Bx + C$ gibi bir ikinci dereceden fonksiyona karşılık geldiği sonucuna ulaşmışlardır. Fonksiyonun tanım kümesini bağımsız değişken olarak belirledikleri katları temsil eden sayısal değerleri ifade eden tamsayıları ve değer kümesini de bağımsız değişkenle eşleşen dokuz alan değerini içerecek şekilde oluşturmuşlardır. Sorunun son kısmında alana ilişkin ifadeyi iki kenar uzunluğunun çarpımı olarak yazmalarının istenmesi öğrencilerin herhangi iki doğrusal fonksiyonu çarparak ikinci dereceden fonksiyon elde edebileceklerine ilişkin genellemelerini desteklemiştir.

İkinci soruda oluşturulan alan fonksiyonunun grafiğinin çizilmesi istenmiştir. Bu grafiği çizmek için her bağımsız değişkeni bağımlı değişken ile eşleyerek sıralı ikililer oluşturmakta ve bu sıralı ikilileri temsil eden noktaları kareli kağıtta çizdikleri analitik düzleme yerleştirmişlerdir. Bu şekilde dokuz noktayı içeren bir grafik oluşturmuşlardır (bkz. Şekil 18). Grafikteki noktaları inceleyerek noktaları oluşturan y değerlerindeki değişim miktarının x değerlerindeki değişim miktarına karşılık sürekli azaldığını fark etmişler ve sabit bir değişim miktarı olmamasından dolayı eğimin varlığından bahsedemeyecekleri sonucuna ulaşmışlardır.

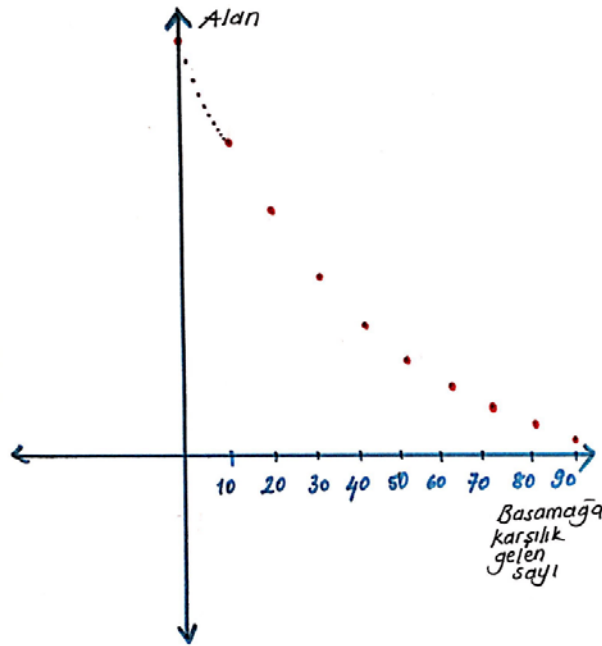
Şekil 18
Kat-Alan İlişkisinin Grafikselleştirilmesi



Noktaların tümünden geçen bir doğrunun olmadığına ilişkin çıkarımı da grafiğin eğiminin olmaması fikrine dayalı yapmışlardır. Ek olarak grafik üzerinde seçilen herhangi iki noktadan çizecekleri doğruların eğimlerinin farklı olduğunu fark etmişlerdir.

Katlara bağlı alan fonksiyonuna yönelik çalışmaların ardından her basamağa karşılık gelen ve tabana paralel olacak şekilde oluşan kesitlerin alan fonksiyonunun oluşturulması istenmiştir. Bir önceki soruyu tamamlayan öğrenciler bu fonksiyonu doğrudan bu kesitlerin kenar uzunluklarına ilişkin oluşturdukları doğrusal fonksiyonun karesini alarak yazmışlardır. Tanım kümesini oluşturmak için herhangi ardışık iki kat arasındaki mesafeyi ele alarak eş parçalama yapmışlardır. Fonksiyonun grafiğini çizerlerken noktasal olacağını fark etmişler ve tek tek her noktayı hesaplamadan grafiğin genel eğilimini belirleyebilmişlerdir. Bu noktaları kareli kağıtta analitik düzleme yerleştirecekleri için değişim miktarlarının giderek azaldığı sonucuna ulaşmaları kolay olmuştur (bkz. Şekil 19).

Şekil 19
Basamak-Alan İlişkisinin Grafikselleştirilmesi



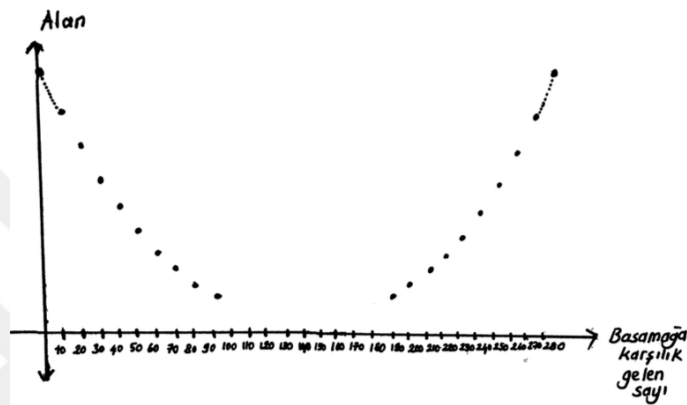
Benzer şekilde, yapının herhangi bir yüksekliğinde tabana paralel olacak şekilde oluşan kesitlerin alanlarını gösteren matematiksel ifadeyi yükseklik-kenar ilişkisini gösteren doğrusal fonksiyonunun karesini alarak oluşturmuşlardır. Tanım kümesinin basamaklar arası mesafeleri sonsuz sayıda eş parçalama yaparak elde edecekleri için sonsuz sayıyı içereceğini sezmişler ve bu noktalara bağlı olarak yaptıkları eşlemeler ile grafiği sürekli bir eğri olarak çizmişlerdir.

Yüksekliğe bağlı kenar uzunluğunu temsil eden fonksiyonunun grafiği ile yüksekliğe bağlı alan fonksiyonunun grafiğini karşılaştırma basamağında öğrenciler doğru grafiğinde belirledikleri bağımsız değişkenlerin ikinci dereceden fonksiyon ifadesinde aynı bağımsız değişken olduğunu anlamlandırmışlar ve aynı bağımsız değişkene karşılık doğrusal ilişkideki bağımlı değişkenlerin karelerinin ikinci dereceden fonksiyonun bağımlı değişkenleri olduğunu fark etmişlerdir. Ek olarak, aynı bağımsız değişkenlere karşılık gelen doğrusal fonksiyonun bağımlı değişkenleri ile ikinci dereceden fonksiyonun bağımlı değişkenlerini bire bir eşleyerek ilişkilendirmişlerdir.

Etkinliğin son iki sorusunda tanım kümesi genişletilerek öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin nasıl olacağını sezmeleri beklenmiştir. Öğrenciler atılan toplam basamak sayısına bağlı olarak tabana paralel kesitlerin alan fonksiyonun değerinin bir noktaya kadar azalacağını ve sonra tekrar artacağını fark etmişler ve grafiğin simetrik olduğunu anlamlandırmışlardır (bkz. Şekil 20).

Şekil 20

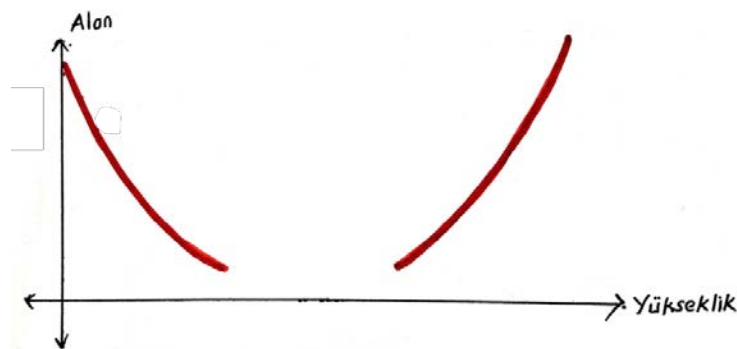
Basamak-Alan İlişkisinin Genişletilen Tanım Aralığındaki Grafiksel Gösterimi



Benzer şekilde yükseklik göz önüne alındığında, alınan mesafeye bağlı yüksekliklerdeki alana ilişkin grafiğin sürekli bir eğri olduğunu ve bu eğrinin yapının en üst yükseklik noktasına göre simetrik olacağını fark etmişlerdir (bkz. Şekil 21).

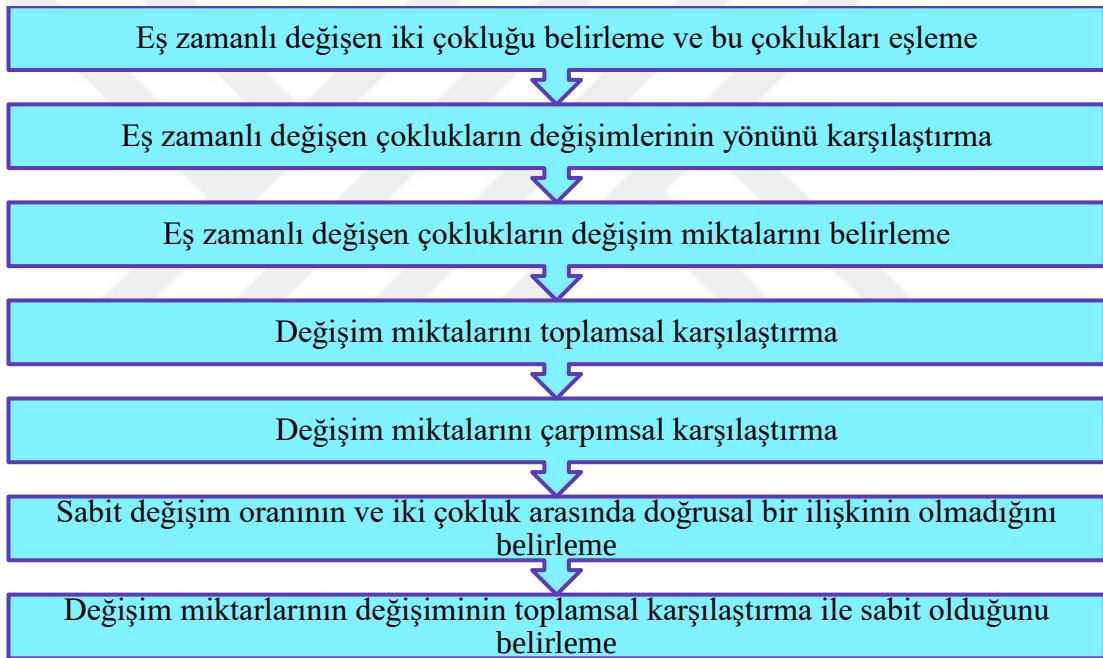
Şekil 21

Yükseklik-Alan İlişkisinin Genişletilmiş Tanım Aralığındaki Grafikselleştirilmesi



Öğrenciler bu etkinlik kapsamında, alan fonksiyonunu oluşturan doğrusal fonksiyonlarda her bir birimde fonksiyonun değeri aynı şekilde artarken, iki doğrusal fonksiyonun çarpımında her bir birimde farklı değişimlerin olacağı ve dolayısıyla grafiksel gösteriminin doğrusal olmayacağı sonuçlarına ulaşmışlardır. Aynı zamanda ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin simetrik olduğunu noktasal grafikten sürekli grafiğe geçiş yaparak zihinlerinde yapılandırmışlardır.

Öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonların değişim miktarlarının değişiminin sabit olması fikrini oluştururken geçtikleri öğrenme yollarının aşağıda gibi olduğu görülmüştür.



İkinci dereceden fonksiyonun grafiksel gösterimini oluşturma ve simetrik olmasını fark etme sürecinde öğrencilerin geçtikleri öğrenme yolları da aşağıda gösterilmektedir.



Bu etkinliğin ilk aşaması iki ders saati içerisinde ikinci aşaması iki ders saati içerisinde olacak şekilde toplam dört ders saatlik sürede tamamlanabilmektedir. Etkinliğin uygulamasının ardından öğretim dizisini bu aşamasına kadar öğrencilerin anlamalarının değerlendirilmesi amacıyla ölçme ve değerlendirme yapılması gerekli görülmüştür.

Ölçme-Değerlendirme I Etkinliği

Ölçme-değerlendirme etkinliği kapsamındaki birinci etkinlikte (bkz. Ek 15) öğrencilere DIN-A formundaki kağıtların enini ve boyunu gösteren veriler tablo gösterimi ile verilerek ilk olarak öğrencilerin boyutlar arasındaki ilişkiyi gösteren matematiksel ifadeyi oluşturmaları istenmiştir. Öğrenciler bu aşamada kağıtların boy uzunluklarındaki değişimler ile en uzunluklarındaki değişimleri ve aralarındaki ilişkileri incelemişlerdir. Etkinlik kapsamında öğrencilerden yaptıkları işlemlerde elde ettikleri ondalık basamak içeren sayıları işlemsel kolaylık sağlamak için onda birler basamağına yuvarlamaları istenmiştir. DIN-A formundaki kağıtların boy ile en uzunlukları arasındaki ilişkiyi ortaya koymak için öğrenciler iki farklı yaklaşım sergilemişlerdir. Birincisi, öğrenciler doğrudan her bir boyuttaki kağıdın boy uzunluğunu en uzunluğuna oranladıklarında 1,4 sonucuna ulaşmışlardır. Öğrencilerin fonksiyonlara yönelik zihinsel eylemlerinin eşleme fikrini içermesi sonucunda bu yaklaşım ortaya çıkmıştır. İkinci yaklaşım olarak, kağıtların boy uzunluklarındaki değişim miktarlarını en uzunluklarındaki değişim miktarlarına oranlayan öğrenciler de 1,4 sonucunu bulmuşlardır. Bu yaklaşım ise fonksiyonun eş zamanlı değişim fikrinin sonucu olarak karşımıza çıkmıştır. Öğrencilerin sergileyebilecekleri iki yaklaşım kağıtların boyutları arasındaki doğrusal ilişkiyi anlama ve ortaya çıkarma yönüyle değerlendirildiğinde eşleme fikrine sahip öğrencilerin eş zamanlı değişim fikrine sahip olan öğrencilere göre daha kısıtlı yaklaşımlar sergileyecekleri düşünülmektedir. Çünkü öğrenciler bu etkinlikte başarılı sonuçlara ulaşmış olsalar bile bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi eşleme fikriyle araştırdıkları için (0,0) noktasını sağlamayan başka doğrusal fonksiyonları oluşturmada güçlüklerle karşılaşabilmektedirler. Bu doğrultuda bu tür eğilim gösteren öğrencilere değişim oranlarını irdelemeleri için yönlendirmeler yapılması gerekli görülmüştür. Boyutlar arası ilişkiyi cebirsel olarak ifade eden öğrenciler değişim oranlarının sabit olması fikrini dikkate alarak ilişkiyi gösteren grafiğin doğrusal olacağı sonucuna ulaşmışlardır. Sonrasında belirledikleri bağımsız değişkeni x eksenine bağımlı değişkeni ise y eksenine yerleştirerek grafiği çizmişlerdir. Bu aşamada öğrenciler doğrudan tablodaki değerleri analitik düzlemde eşleme ile yerleştirerek noktasal bir grafik çizimi yapmışlardır.

Etkinliğin ikinci sorusunda öğrencilerin kağıtların bir boyutuna bağlı alanlarını gösteren ilişkiyi matematiksel olarak yazmaları istenmiştir. Bir önceki soruda ulaştıkları boyutlar arası doğrusal ilişkiyi bu aşamada öğrencilerin kullanması gerekmiştir. Bağımsız değişken olarak ifade ettikleri boyutu bu soruda $f(x) = x$ eşitliğiyle ve bağımlı değişkeni x 'e bağlı olarak oluşturdukları $g(x) = 1,4x$ eşitliğiyle ifade etmişlerdir. Böylelikle boyutların her birini temsil eden bir doğrusal fonksiyon oluşturmuşlardır. Sonrasında kağıtların alanlarına karşılık gelen fonksiyon ifadesini $(x) \cdot (1,4x)$ yardımıyla $h(x) = 1,4x^2$ olarak ikinci dereceden fonksiyon biçiminde yazmışlardır. Öğrenciler bu ilişkinin grafiğini çizerlerken bağımsız değişken olarak ifade ettikleri boyutun sayısal değeri ile alan değerini eşleyerek oluşturdukları noktaları analitik düzleme yerleştirerek noktasal grafik elde etmişlerdir. Öğrencilerin çizmiş oldukları noktasal grafiğin noktalarının birleştirilmesi durumunda bir doğruya değil eğriye karşılık geldiğini ifade etmeleri beklenmiştir.

Son soruda öğrenciler hem doğrusal fonksiyonun hem de ikinci dereceden fonksiyonun grafiğini reel sayılar kümesinde olacak şekilde aynı analitik düzlemde çizmişlerdir. Bu doğrultuda, doğrusal fonksiyonların grafiklerinin x eksenini kestiği noktaların ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği noktalarla aynı olduğunu belirtmeleri beklenmiştir. Buna karşılık iki doğrusal fonksiyonun çarpımıyla oluşturdukları ikinci dereceden fonksiyonu noktasal anlamlarda da ilişkilendirebilmişlerdir. Bir başka deyişle grafik üzerinde bir bağımsız değişkenin iki doğrusal fonksiyonda eşleştiği değerlerin çarpımı aynı bağımsız değişkenin iki doğrusal fonksiyonun çarpımıyla elde edilen ikinci dereceden fonksiyon değerine eşit olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Bu etkinliği tamamlayan öğrencilere aynı ders saati içerisinde doğrusal fonksiyon ve ikinci dereceden fonksiyon ile doğrusal fonksiyon arasındaki ilişkiye yönelik anlamalarını değerlendirmek amacıyla hazırlanan bir sonraki ölçme ve değerlendirme etkinliği verilmiştir.

Ölçme-Değerlendirme II Etkinliği

Bu etkinlikte (bkz. Ek 16) öğrencilere bir senaryo üzerinden sorular yöneltilmiştir. Senaryoda bir öğretmenin sınıftaki öğrencilere belirli boyutlarda kare şeklinde kağıtlar vererek onların karenin bir kenarından 1 cm'lik ve diğer kenarından 3 cm'lik şeritler keserek dikdörtgenler oluşturmalarını istediği bilgisi verilmiştir. Sonrasında da öğrencilerin belirledikleri farklı kenar uzunluklarına sahip karelerin ve bu karelere bağlı oluşturulan dikdörtgenlerin kenar uzunluklarının tabloya yazmaları istenmiştir. Bu senaryo bağlamında öğrencilerin tablodaki olası verileri kullanarak karenin kenar uzunluğu ile oluşan dikdörtgenlerin en ve boy uzunlukları arasındaki ilişkiyi gösteren matematiksel ifadeyi yazmaları gerekmiştir. Bunlarında ardından karenin bir kenarı ile oluşan dikdörtgenlerin alanlarının ilişkisini matematiksel olarak ifade etmeleri beklenmiştir.

Bu sorulara yönelik öğrenciler ilk olarak değişen karenin kenar uzunluklarına göre dikdörtgenlerin boyutları olduğu için karenin kenar uzunluğunu bağımsız değişken olarak belirlemişlerdir. Bağımsız değişkene bağlı olarak oluşan dikdörtgenlerin enlerini birinci bağımlı değişken olarak, boylarını ise ikinci bağımlı değişken olarak ifade etmişlerdir. Bir başka deyişle öğrenciler x 'i karenin kenar uzunluğu olarak ele alırlarken x 'e bağlı $f(x)$ değişkenini dikdörtgenin eni olarak ele almışlar ve $f(x) = x - 3$ fonksiyonunu oluşturmuşlardır. x 'i karenin kenar uzunluğu olarak alıp x 'e bağlı $g(x)$ fonksiyonunu da dikdörtgenin boy uzunluğu olarak $g(x) = x - 1$ şeklinde ifade etmişlerdir.

Bu aşamada öğrenciler dikdörtgenin kısa kenarı olarak düşündükleri en uzunluğunu karenin kenarının 3 cm kesilmesiyle olduğu düşüncesiyle karenin kenarının 3 cm'den daha fazla olacağını ifade etmişler ve bu çıkarımlarına dayalı olarak karenin kenarına bağlı dikdörtgenin enini gösteren fonksiyonun tanım kümesini $(3, \infty)$ olarak yazmışlardır. Dikdörtgenin boyu ile ilişkili fonksiyon için de bu tanım kümesinin uygun olduğunu fark etmişlerdir. Buna bağlı olarak değer kümesini ise dikdörtgenin eni için $(0, \infty)$ ve dikdörtgenin boyu için $(2, \infty)$ olarak belirtmişlerdir. Öğrencilerin iki doğrusal fonksiyonun grafiğini çizerlerken bu tanım ve değer kümelerini dikkate alarak doğrusal fonksiyonun başlangıç noktasını açık aralık olarak

göstermeleri beklenmiştir. Ardından dikdörtgenin alan fonksiyonunu aynı bağımsız değişkene bağlı olarak $h(x) = (x - 1)(x - 3)$ şeklinde yazmışalar ve oluşan alan fonksiyonun ikinci dereceden fonksiyon olduğunu dikkate alarak grafiğini eğrisel bir şekilde çizmişlerdir.

Son olarak öğrenciler oluşturdukları üç farklı fonksiyonu reel sayılar kümesinde ele alarak aynı analitik düzlemde çizdiklerinde bir önceki ölçme ve değerlendirme etkinliğinde olduğu gibi doğrusal fonksiyonların grafiklerinin x eksenini kestiği noktaların aynı bağımsız değişkene bağlı söz konusu iki doğrusal fonksiyonun çarpımıyla oluşturulan ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği noktalarla aynı olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Öğrencilerin iki ölçme ve değerlendirme etkinliği ile bir yandan onların anlamalarını ortaya çıkarmak bir yandan da öğrenmiş oldukları fikirleri kullanmalarını sağlamak ve doğrusal fonksiyona ve doğrusal fonksiyon ile ikinci dereceden fonksiyonların ilişkilerine ve birbirlerinden farklılıklarına yönelik anlamalarını pekiştirmek amaçlanmıştır. Bu ölçme ve değerlendirme süreçlerinin tamamlanmasının ardından öğretim dizisinin bir sonraki aşaması olan “En Uzun Basketbol Atışı” isimli etkinliğe geçiş yapılmıştır.

Etkinlik 3-En Uzun Basketbol Atışı (1.Aşama)

“En Uzun Basketbol Atışı” etkinliğinde öğrencilerin $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafiğinin simetri eksenini ve tepe noktasını keşfetmelerini ve grafiği verilen ikinci dereceden fonksiyonların farklı cebirsel gösterimlerini yazarak aralarında geçişler yapmalarını sağlamak amaçlanmıştır.

Etkinliğin birinci aşamasında ilk olarak öğrencilere basketbol atışıyla ilgili bir video gösterilmiştir. Video basketbol topunun atılarak doğrudan potaya girdiği atışları içerek şekilde seçilmiştir. Burada amaç öğrencilerin bu topların potaya giderken izledikleri yolları irdeleyerek bir parabolün özelliklerini fark etmelerini sağlamak olmuştur. Öğrenciler açısından gerçek yaşamlarında aşına oldukları basketbol topunun atılması anlamlı bir olay olduğu için topun izlediği yolu temsil eden parabolün

özelliklerini basketbol topının hareketine dayalı olarak kolaylıkla sezmişlerdir. Soruda öğrencilerin potaya sabit bir uzaklıkta bulunan bir kişinin konumunu değiştirmeden ve topun elinden çıktığı yükseklik ile topun atıldığı potanın yüksekliğinin aynı hızda olduğunu varsayarak, farklı atışlar için topun izleyebileceği yolları çizmeleri istenmiştir. Öğrenciler öncelikle bu çizimleri yapmakta ve çizimlerini inceleyerek topun bir noktaya kadar çıkıp o noktadan tekrar aynı yolu izleyerek düşeceğini, başlangıç ve bitiş noktalarının aynı olacağını ve başlangıç ve bitiş noktalarının orta noktasına göre topun izlediği yolun simetrik olacağını fark etmişlerdir. Bu çizimleri öğrencilerin analitik düzleme taşımaları atılan bir basketbol topunun izlediği yolu matematiksel olarak irdelemeye başlamalarını sağlamıştır.

Etkinliğin devamında öğrencilerin en uzun basketbol atışının matematiksel modelini oluşturmaları istenmiştir. Buna yönelik olarak öğrencilere, en uzun basketbol atışını yapan basketbolcunun topu attığı noktayı gösteren fotoğraf, atılan topun çıktığı en yüksek noktayı gösteren video kesitinden bir fotoğraf ve basketbol sahasının ölçüleri verilmiştir. Buna ek olarak öğrencilere isterlerse bu atışın videosunu izleyebilecekleri belirtilmiştir. Bir önceki etkinlikte ikinci dereceden fonksiyonun grafiğini başarıyla çizen öğrenciler en uzun basketbol atışında topun izlediği yolu temsil eden ifadenin genel formunu $f(x) = ax^2 + bx + c$ olarak yazmışlardır. Çünkü topun izlediği yolun şekli ile El Castillo etkinliğindeki yüksekliğe bağlı kesitlerin alanlarını gösteren grafiğin benzer yapıda olduğunu fark etmişlerdir. Topun basketbolcunun elinden çıktığı yüksekliği dikkate alarak ve resimde verilen en yüksek noktadan geçerek karşı potaya girene kadar izlediği yolu gösteren parabolü çizmişlerdir. Sonrasında varsayımlar doğrultusunda parabolü analitik düzleme yerleştirmişlerdir. Öğrenciler analitik düzlemin eksenlerini x eksenini topun yatayda aldığı yol, y eksenini ise topun yatayda aldığı yola bağlı olarak yüksekliği olarak belirlemişlerdir. $f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesindeki a, b ve c katsayılarının değerlerini bulabilmek için varsayımları doğrultusunda fotoğraf ve saha ölçülerinden yararlanmışlar ve parabol üzerinde noktalar belirlemişlerdir. Öğrenciler parabol üzerinde belirledikleri noktaların x ve y değerlerinin birbiriyle eşleme yapılması sonucunda oluştuğu fikriyle bu noktaları $f(x) = ax^2 + bx + c$ cebirsel ifadesini sağlayan (x, y) sıralı ikilileri ile eşleşmişlerdir. Bu süreçte öğrenciler amaçları a, b ve

c katsayılarını bulmak olduğu için üç nokta belirleme gerekliliğini fark etmişlerdir. Belirledikleri üç noktayı kullanarak elde ettikleri üç bilinmeyenli üç denklemin çözümünü yaparak katsayıların değerlerine ulaşmışlardır. Bu sayede en uzun basketbol atışının cebirsel olarak matematiksel modelini oluşturmuşlardır. Öğrenciler etkinliğin matematiksel modelleme aşaması ile ikinci dereceden bir fonksiyonun grafiği verildiğinde cebirsel ifadesini yazabilmek için üç nokta gerektiği sonucuna ulaşmışlar ve özellikle bu süreçte eşleme ve dönüşüm fikirlerini kullanmışlardır.

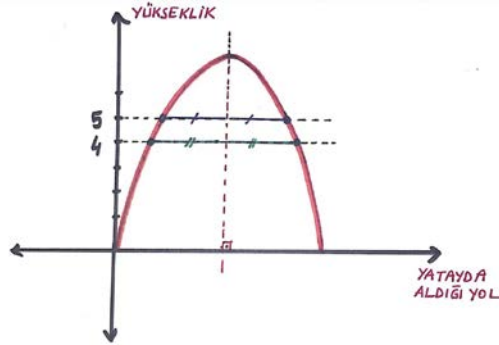
Etkinliğin devamında topun en yüksek noktasının 4 metreden daha fazla olduğuna dayalı olarak öğrencilerin topun 4 metre yükseklikte olduğu durumları incelemeleri istenmiştir. Öğrenciler basketbol topunun hareketini düşünerek kolaylıkla topun iki durumda 4 metre yükseklikte bulunacağını ifade etmişlerdir. Topun en yüksek noktaya ulaşmadan önce ve en yüksek noktadan aşağıya düşerken bu yükseklikte konumlanacağı çıkarımını yapabilmışlardır. Buna ek olarak, topun yukarı çıkarken 4 metre yükseklikte bulunduğu konumu ile en yüksekte bulunduğu konumu arasında yatayda aldığı yol ile 4 metre yüksekliğinde bulunduğu konumu ile aşağıya düşerken 4 metre yükseklikte bulunduğu konumu arasında yatayda aldığı yolun birbirine eşit olacağını fark etmişlerdir. Öğrenciler bu iki mesafe arasında eşleme yaparlarken çokluklar arası toplamsal karşılaştırmadan yararlanmışlardır. Topun 5 metre yükseklikte bulunduğu konumlar arasında inceleme yaparken de benzer eylemleri gerçekleştirmişlerdir. Bu süreçte öğrencilerin parabolün en yüksek noktası olduğunu ve dolayısıyla ikinci dereceden fonksiyonların maksimum değeri olduğunu anlamlandırmışlardır. Ek olarak, aynı yükseklikte bulunan nokta çiftlerinin parabolün en yüksek noktasından geçen ve x eksenine dik olan bir doğruya göre simetrik olduğunu fark etmişlerdir. Aynı yükseklikte bulunan iki noktanın x değerlerinin orta noktasının da simetri doğrusu üzerinde olduğu sonucuna ulaşmışlardır (bkz. Şekil 22). Ancak bu durumda öğrencilere bir önceki etkinlikte olduğu gibi parabolün kollarının yukarı bakması halinde minimum değerinin olacağına yönelik anlamları kazanmaları için fırsatlar sunulmasının gerekli olduğu düşünülmüştür.

Sonuç olarak, öğrenciler ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin bir simetri doğrusuna sahip olduğunu ve bu simetri doğrusunun fonksiyonun maksimum ya da

minimum değerini gösteren tepe noktasından geçeceğini anlamlandırmaları amaçlanmıştır.

Şekil 22

Simetri Ekseni ile Aynı Yükseklikte Bulunan Noktaların İlişkisi



İki ders saati süre içerisinde tamamlanan etkinliğin ikinci aşaması sonraki iki saatlik ders kapsamında gerçekleştirilmiştir.

Etkinlik 3-En Uzun Basketbol Atışı (2.Aşama)

Etkinliğin ikinci aşamasında öğrenciler ilk aşamada oluşturdukları matematiksel model üzerine çalışmalar yapmışlardır. Ancak öğrenciler kendi belirledikleri varsayımları doğrultusunda kendi modellerini oluşturdukları için bu aşamada çalışılacak model öğrencilere etkinliğin amaçları doğrultusunda belirlenen varsayımlara uygun şekilde düzenlenerek verilmiştir. Verilen ikinci dereceden fonksiyon ifadesi oluşturulurken topun basketbolcunun elinden atıldığı anda bulunduğu konum orijin olarak belirlenip topun basketbolcunun elinden çıktığı yükseklik ile potaya girdiği yükseklik aynı olacak şekilde analitik düzleme yerleştirilmiştir. Bu model öğrencilerin parabolün tepe noktası, simetri eksen, eksenleri kestiği noktalar gibi çoklukları anlamlandırmaları ve birbirleriyle ilişkilendirmelerini destekleyeceği düşüncesiyle öğrencilere verilmiştir. Model öğrencilerin bu çoklukları hem grafiksel gösterimde hem de cebirsel gösterimde doğrudan görebilmelerini sağlamıştır. Ek olarak, farklı cebirsel gösterimler arası geçişlere ilişkin öğrencilerin soyutlamalarına da yardımcı olmaktadır. Etkinlik kağıdında verilen $f(x) = -\frac{1}{33}(x^2 - 33x)$ ifadesi basketbol topunun atışına ilişkin son döngüde elde edilen nihai modeldir. Ancak sınıf ortamlarında uygulanması

durumunda model farklılaşabilecektir. Modelin değişmesine karşın benzer formatta olmasının öğrencilerin zihinsel eylemlerini destekleyeceği düşüncesinin göz önünde bulundurulması gerekmektedir.

Öğrenciler bu model ile ilk olarak $f(x) = 0$ olması halinde elde edilen denklemin köklerini bulmuşlardır. Öğrencilerin ikinci dereceden denklemlerin çözümüne ilişkin eksik bilgilerinin olması bu aşamada güçlükler yaşamalarına neden olabilmektedir. Öğretmenler bu güçlüklerin üstesinden gelebilmek için öğrencilere basketbol atışını temsil eden fonksiyonun değerinin 0 ile eşlenmesi ile elde edilen ikinci dereceden denklemden daha basit ikinci dereceden denklemler vererek bunların çözüm kümelerini bulmalarını isteyebilirler. Böylelikle öğrencilerin denklem çözümüne ilişkin bilgilerini hatırlamalarına yardımcı olacakları düşünülmektedir. $f(x) = 0$ denkleminin köklerini bulduktan sonra parabol ile kökleri karşılaştırarak ikinci dereceden denklem ile ikinci dereceden fonksiyon arasındaki ilişkiyi kurabilmişlerdir. İkinci dereceden fonksiyonda $f(x)$ 'in 0 olması ile eşleşen x değerlerini bularak $(x_1, 0)$ ve $(x_2, 0)$ sıralı ikilisini grafiksel gösterimde x eksenini kesen noktalarla eşlemiştir. Bu iki noktanın y değerlerinin 0 olması sebebiyle iki noktanın simetri eksenine uzaklıklarının eşit olacağını belirleyebilmişlerdir. Öğrenciler bu aşamada x eksenini kesen noktaların her birinin simetri doğrusunun x eksenini kestiği noktaya uzaklığını toplamsal olarak karşılaştırmışlar ve bu noktaları birbirleriyle zihinsel olarak eşlemiştir. Bu iki noktanın simetri doğrusuna eşit uzaklıkta olduğuna dayalı olarak bu iki noktanın orta noktasının simetri doğrusunun x eksenini kestiği nokta olduğu çıkarımını yapabilmişlerdir. Öğrenciler ikinci dereceden denklemler konusunda kökler toplamının cebirsel olarak $-\frac{b}{a}$ olduğunu öğrendikleri için simetri doğrusunun cebirsel ifadesini $x = -\frac{b}{2a}$ şeklinde yazabilmişlerdir. Dolayısıyla $f(x)$ 'in 0 olması halinde oluşan ikinci dereceden denklemin köklerinin toplamının yarısını simetri doğrusuyla ilişkilendirmişlerdir. Öğrencilerin bu aşamada da ön ilgilerinden kaynaklı zorluklarının olabileceği düşünülmektedir. İkinci dereceden denklemin kökler toplamını hatırlayamayan öğrencilere bu ifadeyi doğrudan söylemek yerine Δ değerinden yararlanarak kendilerinin ortaya çıkarmasına yönelik yönlendirmeler yapılması gerekmektedir. Buna ek olarak, öğrenciler x eksenini kesen

noktaların orta noktasını bulurlarken iki nokta arasındaki uzaklık değerinin yarısını bulma eğilimi de gösterebilmektedirler. Bu sonucun tepe noktasının apsis değerine karşılık gelmesinin köklerden birinin 0 olması durumunda söz konusu olduğunun göz önünde bulundurulması gerekmektedir. Uzaklığın yarısının x eksenini kesen noktaların orta noktasına karşılık gelmediğinin, bulunan değerin bu noktalara eklenmesi ya da çıkarılması ile orta noktanın bulunabileceğinin keşfedilmesi önem taşımaktadır. Bu sebeple, x eksenini kesen noktalar değiştirilerek farklı paraboller üzerine öğrencilerin çıkarımlarını gerçekleştirmeleri istenebilir. Bu süreçte önemli olan fikir öğrencilerin aynı y değerine sahip noktaları birbiriyle eşlemeleri olmuştur. Bu zihinsel eylem öğrencilerin parabolün simetri doğrusuna ilişkin kapsamlı düşünceler oluşturmalarını tetiklemiştir.

Etkinliğin sonraki sorularında öğrencilerin fonksiyonun farklı cebirsel gösterimleri arasında geçişler yapabilmeleri ve farklı cebirsel gösterimler ile grafiksel gösterim arasındaki ilişkiyi kurmaları amaçlanmıştır. İlk olarak öğrencilere verilen modeli çarpanlarına ayırmaları ve çarpanlara ayrılmış formu grafikle ilişkilendirmeleri istenmiştir. Matematiksel model parabolün x eksenini kestiği noktalar yardımıyla oluşturulduğu için öğrenciler kolaylıkla çarpanlarına ayırmışlar ve elde ettikleri ifadelerin parabolün eksenleri kestiği noktalar ile ilişkisini görmüşlerdir. Bunun yanı sıra parabolün eksenleri kestiği noktalar yardımıyla ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesinin nasıl oluşturulabileceğine ilişkin sonuçlara ulaşmışlardır. Öğrenciler bu durumda $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ şeklinde ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesini yazmışlardır. Bununla birlikte, öğrencilerin $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ifadesinin tamamını elde edebilmeleri için a katsayısını de göz önünde bulundurmaları beklenmiştir. Modeli inceleyen öğrenciler eksik olan katsayıyı fonksiyonun cebirsel ifadesine ne şekilde ekleyebileceklerini fark etmişlerdir. Bu sonucu yorumlayan öğrenciler grafiği verilen bir parabolün cebirsel ifadesini yazmak için x eksenini kestiği noktaların yanı sıra a katsayısını bulmak için parabol üzerinde bir noktaya daha ihtiyaç duyulduğunu belirlemişlerdir. Ayrıca öğrenciler ikinci dereceden fonksiyonu iki doğrusal fonksiyonun çarpımıyla ilişkilendirdikleri El Castillo etkinliğinde ulaştıkları sonuçlarla çarpanlara ayrılmış formu yorumlayabilmişlerdir. Bunun yanı sıra $f(x) = 0$ denkleminin reel sayılar kümesinde

kökü olmaması halinde ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin x eksenini kesmeyeceği ve dolayısıyla cebirsel ifadesinin çarpanlarına ayrılmış formda yazılamayacağı sonucuna ulaşmışlardır. Buna dayalı olarak, öğrencilerin her iki doğrusal fonksiyonun çarpımının ikinci dereceden fonksiyon olmasına karşılık ikinci dereceden bir fonksiyonun her zaman iki doğrusal fonksiyon çarpımı şeklinde yazılamayacağı genellemesine ulaşmaları beklenmiştir.

Bir diğer soruda öğrencilerin kanonik forma $[f(x) = a(x - r)^2 + k]$ ulaşmaları hedeflenmiş ve bu doğrultuda verilen modeli tam kare haline getirmeleri istenmiştir. Öğrenciler bu aşamada ön bilgilerindeki eksikliklerden kaynaklı güçlüklerle karşılaşmışlardır. Tam kare içerecek bir ifadeyi oluşturmada terim ekleme ve çıkarma yöntemi ya da sabit terimin yarısından yararlanma fikrini keşfetmeleri için daha basit düzeyde ifadeler verilebileceği düşünülmektedir. Bu işlemsel güçlüklerin öğrenmeyi engellemeyecek şekilde üstesinden gelinmesi gerekmektedir. Sonrasında öğrenciler ifadeyi hatırladıkları ön bilgilerinden yararlanarak tam kareye dönüştürmüşler ve ulaştıkları $a(x - r)^2 + k$ ifadesindeki r ve k değerlerini grafikte ilişkilendirmişlerdir. Bu aşamada öğrencilere verilen model öğrencilerin kanonik formdaki cebirsel gösterim ile grafiksel gösterimi ilişkilendirmelerini desteklemiştir. Grafiğin tepe noktasının apsis değerini ve fonksiyonun maksimum değeri olan tepe noktasının ordinat değerini tam kare ifadede doğrudan görebilmişlerdir. Bu durumda öğrenciler bir parabolün tepe noktasını bilmeleri halinde cebirsel formun $(x - r)^2 + k$ kısmını oluşturabilecekleri sonucuna ulaşmışlardır. Buna ek olarak kanonik formda da a katsayısının bulunması gerekliliğine dayalı olarak parabol üzerinde başka bir noktaya ihtiyaç duyacaklarını fark etmişlerdir.

Bu etkinlik ile dört ders saati süresinde öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonların farklı gösterimlerini anlamlandırmaları sağlanarak ikinci dereceden fonksiyonların kavramsal anlamasına yönelik zihinsel eylemleri gerçekleştirmeleri için fırsatlar sunulmuştur.

Bu etkinliğin uygulamasının ardından öğrencilerin grafiği verilen bir ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadeleri nasıl oluşturacaklarını ve ikinci dereceden

fonksiyonun cebirsel ifadeleri ile grafiksel ifadesi arasında oluşturdıkları anlamları ortaya çıkarmak için bir ders saati süresi gerektiren ölçme-değerlendirme etkinliği uygulanmıştır.

Ölçme-Değerlendirme III Etkinliği

Öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinden yararlanarak fonksiyonun cebirsel ifadelerini nasıl oluşturdıklarını anlamak için Angry Birds oyununu içeren bir etkinlik sunulmuştur (bkz. Ek 17). Etkinlikte Angry Birds oyunundan dört kuş ve dört domuzun bulunduğu bir fotoğraf öğrencilere verilmiş ve öğrencilerin her bir kuşun bir domuzu vurduğunu düşünmeleri istenmiştir. Domuzlardan üçü aynı yükseklikte ve birbirlerine eşit uzaklıkta, dördüncü domuz biraz daha uzak ve daha yüksek olacak şekilde konumlandırılmıştır. Kuşların atılacağı sapan ise ilk üç domuzun bulunduğu yükseklikle aynı olacak şekilde yerleştirilmiştir.

Öğrenciler bu etkinlikte saptanmış kuşun en öndeki domuzu vurması için izlediği yolu çizerlerken kuş ile domuz aynı yükseklikte olduğu için aralarındaki mesafenin orta noktasını tepe noktasının apsisi olarak düşünmüşlerdir. Soruda atılan kuşların hepsinin aynı yüksekliğe çıkarak domuzları vuracağı belirtildiği için bir sonraki domuzu vurmak için kuşun aynı yüksekliğe çıkmasını dikkate almaları ve aralarındaki uzaklık daha fazla olduğu için tepe noktasını apsis değerinin analitik düzlemde sağa doğru kayacak şekilde belirlemeleri gerekmiştir. Öğrenciler kuşların izlediği yolları analitik düzleme taşırlarken kuşların ve domuzların bulunduğu konumları belirledikleri varsayımlar doğrultusunda analitik düzlemdeki noktalarla eşleştirmişlerdir. Analitik düzlemde belirledikleri noktaları parabolün cebirsel ifadelerini yazarlarken kullanmışlardır. Bu doğrultuda tepe noktası formundan yararlanmak isteyen öğrencilerin iki nokta belirlemeleri, diğer cebirsel formlardan yararlanmak isteyen öğrencilerin üç nokta belirlemeleri beklenmiştir. Bu aşamada öğrenciler karar verdikleri cebirsel formlar doğrultusunda her bir kuşun atışını temsil eden ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesini oluşturmuşlardır.

Gerçekleştirilen ölçme ve değerlendirme uygulamasının ardından öğretim dizisinde öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonların cebirsel ifadesindeki katsayılara ve parabollerin ötelenmesine ilişkin anlamları oluşturmalarını sağlayan etkinliğe yer verilmiştir.

Etkinlik 4-Parabolik Uçuş (1. Aşama)

Öğretim dizisinin son etkinliği olan “Parabolik Uçuş” isimli etkinlikte öğrencilerin $f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesine ilişkin a katsayısının değişimine göre çıkarımlarda bulunmaları, $f(x) = ax^2 + c$ ifadesine ilişkin c katsayısının değişimine göre çıkarımlarda bulunmaları ve tepe noktasını belirleyen katsayıların farklı durumlarını inceleyerek çıkarımlarda bulunmaları amaçlanmıştır. Etkinlikte ilk olarak Parabolik Uçuş gerçekleştiren uçaklara ilişkin bilgilendirmeler yapılmıştır. Etkinlik kapsamındaki sorularda gerçekleştiren uçakların hareketinin konveks ve konkav olduğu durumlar birbirinden ayrı olarak ele alınmış ve bu şekilde öğrencilerin parabol olarak düşünmeleri beklenmiştir.

Etkinliğin başında öğrencilerin bir önceki etkinlikte öğrenmiş oldukları grafiksel gösterim ile farklı cebirsel gösterimler arası geçişlere ilişkin sorular sorulmuş ve öğrencilerin verilen grafikten yararlanarak uçağın 20. ve 40. saniyeler arası hareketini irdelemeleri istenmiştir. Öğrenciler uçağın bu hareketinin cebirsel ifadesini bulurlarken üç cebirsel gösterimden belirledikleri birini kullanmışlardır. Bu süreçte tepe noktasından yararlanmak istemeleri halinde öğrencilerin tepe noktası ve belirledikleri bir noktayı kullanmaları gerekmiştir. Çarpanlara ayrılmış formdan yararlanmak istemeleri halinde ise grafiğin eksenleri kestiği noktaları bulmaları söz konusu olacaktır. Ek olarak, grafik üzerinde bir nokta daha belirleyerek a katsayısının değerine ulaşmışlardır. Öğrenciler parabol üzerinde belirledikleri noktaların x ve y koordinatlarını $f(x)$ 'in cebirsel ifadesi ile eşlemişlerdir. Ancak bu aşamada öğrencilerin çarpanlara ayrılmış formu kullanmak istemeleri parabolün x eksenini kestiği noktalara ulaşmaları gerekliliğini ortaya çıkarmıştır. Oysaki tepe noktası doğrudan görülebildiği için bu formu kullanmaları daha kısa sürede çözüme götürmüştür. Gerektiğinde öğrencilerin bu forma yönelmelerini sağlayacak ipuçları verilmesi etkili olabilecektir.

Soruda ek olarak öğrencilerin uçağın bu aralıktaki uçuşunu fonksiyonun tanım kümesi reel sayılar olacak şekilde çizimleri istenmiştir. Öğrenciler bu soru ile uçağın hareketinin verilen grafikte sınırlı olmasının tanım aralığından kaynaklı olduğunu fark etmişler ve reel sayılar kümesinde sonsuz x değerinin bulunduğunu ve tepe noktasının k değerini baz alarak da fonksiyonun alacağı değerlerin $(-\infty, k]$ aralığında olduğunu anlamlandırmışlardır.

Etkinliğin devamında öğrencilerden 40. ile 60. saniyeler arasında gerçekleştirilen uçuşun hareketini cebirsel olarak ifade etmeleri istenmiştir. Bu aşamada öğrenciler benzer şekilde karar verdikleri cebirsel formdan yararlanmışlardır. Ancak uçuşu gösteren grafiğin x eksenini kesmemesi bir başka deyişle $f(x) = 0$ olması halinde oluşan ikinci dereceden denklemin reel sayılar kümesinde kökünün olmaması gerekçesiyle çarpanlara ayrılmış formdan yararlanamayacakları sonucuna ulaşmışlardır. Bu iki soru öğrencilerin etkinliğin devamındaki sorular için başlangıç noktası olmuştur.

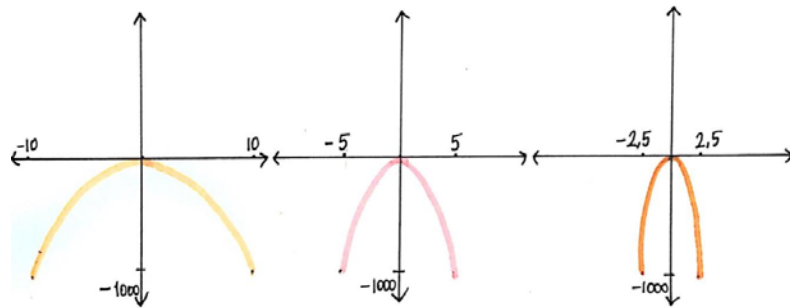
Sonraki üç soruda öğrencilerin a katsayısının anlamını keşfetmeleri amaçlanmıştır. Bu amaçla 20. ve 40.saniyelerdeki uçağın hareketini tepe noktası orijin olacak şekilde taşımaları ve taşıyarak elde ettikleri grafiğin cebirsel ifadesini yazmaları istenmiştir. Öğrenciler hareketi orijine taşıırken uçağın belirli saniyeler arasında değişen yüksekliklerini dikkate alarak en yüksek noktası orijin olacak şekilde parabolü yerleştirmişlerdir. Bu aşamada uçağın ilk durumdaki belirli saniyeler arasındaki yüksekliklerinin farkı ile yeni durumdaki yüksekliklerinin farkını toplamsal olarak karşılaştırmışlar ve aldıkları yükseklik mesafesini değiştirmeden ilk durumda belirledikleri noktaları yeni durumdaki nokta ile eşlemişlerdir. Aynı zamanda elde ettikleri parabolün cebirsel ifadesini oluşturmak için yararlanacakları noktaları da belirlemişlerdir. Bu soruda öğrencilerin başlangıç grafiğinin tepe noktasını orijine taşımalarının istenmesinin sebebi oluşacak cebirsel ifadenin $y = ax^2$ formunda olması sebebiyle öğrencilerin sadece a katsayısına odaklanmalarını sağlamıştır. Öğrenciler sonraki soruda 40. ile 60. saniyeler arası uçağın hareketinin minimum yükseklikte bulunduğu noktayı orijine taşıyarak benzer eylemlerle yeni bir parabol elde

etmişlerdir. Bu parabolün cebirsel ifadesini yazarak konveks ve konkav harekete sahip durumlarda ortaya çıkan parabollerin cebirsel ifadelerini karşılaştırmışlardır. Buradan öğrencilerin parabolün kollarının aşağıya ya da yukarıya doğru olmasını a katsayısının işaretiyle ilişkilendirmeleri beklenmiştir.

Birinci aşamanın sonraki sorularında ise öğrencilerin parabolün kollarının birbirine daha yakın ya da daha uzak olmasını ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesiyle ilişkilendirmelerini ve a katsayısının değerine ilişkin sonuçlara ulaşmalarını sağlayacak sorulara yer verilmiştir. Bu amaçla uçağın 20. ve 40. saniyeler arasındaki uçuşunu 10 saniyede tamamlaması durumunda ilk hareketiyle aynı yükseklik farkı oluşturduğunu varsayarak uçağın bulunacağı en yüksek noktayı orijine taşımaları istenmiştir. Öğrenciler bu koşulları göz önüne alarak uçağın hareketini temsil eden parabolü analitik düzlemde çizmişlerdir. Bu bağlamda öğrenciler ilk olarak uçağın 20 saniyelik sürede tamamladığı hareketi boyunca belirli konumlarını yeni uçuş hareketindeki konumuyla eşlemişler ve grafiksel gösterimini bu doğrultuda yapmışlardır. Sonrasında benzer şekilde uçağın aynı uçuşu 5 saniye süre içerisinde tamamladığını varsaymaları ve bu hareketin grafiksel gösterimini analitik düzlemde istenilen koşullarda çizmeleri istenmiştir (bkz. Şekil 23).

Şekil 23

Parabolik Uçuşun 20, 10 ve 5 Saniyede Tamamlanması Durumundaki Uçağın Hareketlerinin Grafiksel Gösterimi

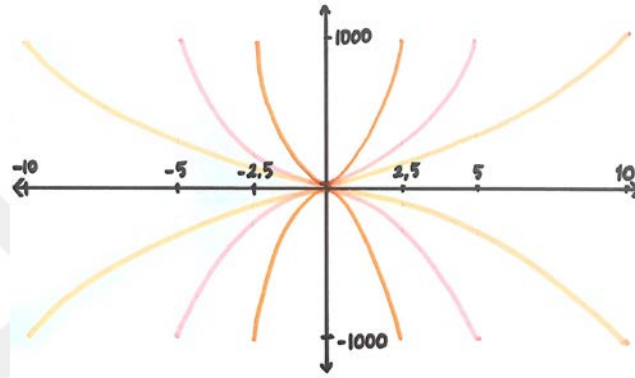


Etkinliğin devamında, öğrenciler uçağın 40. ve 60. saniye arasında gerçekleştirdiği hareketini 10 ve 5 saniye süre içerisinde tamamladığını düşünerek ve uçağın en alçak konumunu orijin noktası ile eşleyerek analitik düzlemde yerleştirmişler

ve temel aldıkları cebirsel formun yapısı doğrultusunda parabolün üzerinde noktalar belirleyerek her bir uçuşta uçağın hareketinin matematiksel ifadesini oluşturmuşlardır. Oluşturdukları her bir cebirsel formu inceleyen öğrenciler aynı analitik düzlemde çizdikleri grafiklerdeki değişim ile cebirsel gösterimlerdeki değişimi karşılaştırarak çıkarımlarda bulunmuşlardır (bkz. Şekil 24).

Şekil 24

Uçağın Farklı Saniyelerde Gerçekleştirdiği Hareketlerin Grafikselleştirilmesi



Bu süreçte öğrenciler parabolün kollarının birbirinden uzaklaşmasının cebirsel formda a katsayısının mutlak değeri olarak küçülmesi anlamına geldiği sonucuna ulaşmışlardır. Ek olarak, öğrencilerin bir parabolün ötelenmesi halinde kollarının birbirine göre durumlarında herhangi bir değişiklik olmadığını sezmelerini destekleyen bir süreç olmuştur. Öğrenciler uçağın aynı sürede tamamladığı uçuşlarındaki hareketlerini gösteren parabolün birbirlerinin ötelenmiş halleri olduğunu ve bu parabolün cebirsel ifadelerinde a katsayılarının aynı olduğunu fark etmişlerdir. İki ders saati süresinde tamamlanan bu aşamanın ardından sonraki derste etkinliğin ikinci aşamasına geçiş yapılmıştır.

Etkinlik 4-Parabolik Uçuş (2. Aşama)

İkinci aşamadaki ilk soruda öğrencilerin $f(x) = ax^2 + c$ formundaki ikinci dereceden fonksiyonlara dayalı çıkarımlar yapmaları ve parabolün ötelenmesi

durumunda a ve c katsayılarındaki değişikliklere ilişkin sonuçlara ulaşmaları amaçlanmıştır.

Bu amaçlar doğrultusunda ilk olarak öğrencilerin uçağın 20. ve 40. saniyeler arası gerçekleştirdiği hareketi boyunca en yüksekte bulunduğu konumu (0,500) noktası ile eşleyerek grafiğini çizmeleri ve bu hareketin cebirsel ifadesini yazmaları istenmiştir. Öğrenciler bu süreçte $f(x) = ax^2 + c$ formundaki fonksiyonların grafiklerinin tepe noktasının y ekseninde olduğunu anlamlandırmışlar ve tepe noktasının apsis değerinin 0 olması sebebiyle bu sonucu ilişkilendirmişlerdir. Ek olarak, b katsayısının 0 olması fonksiyonların maksimum ya da minimum noktasının x değerinin 0 olduğu anlamına geldiğini kavramışlardır. Öğrenciler bu sorularla bir parabolün x eksenine paralel olacak şekilde aşağıya ya da yukarıya ötelenmesinin ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesinde c katsayısının değişimine karşılık geldiğini fark etmişlerdir. Bu sorulara ilişkin öğrencilerin genelleme yapmaları amacıyla uçağın en yüksekte bulunduğu konumu (0, 10000) olarak düşünmeleri istenmiştir.

Etkinliğin sonraki sorusunda uçağın 20. ve 40. saniyeler arasındaki hareketi boyunca en yüksekte bulunduğu noktayı x eksenine teğet olacak şekilde sırasıyla dört farklı noktaya taşınması istenmiştir. Parabollerin x-eksenine teğet olarak taşınmasının istenmesinin sebebi c katsayısının 0 olmasıdır. Bu sayede öğrencilerin parabolün y eksenine paralel ötelenmesine ilişkin durumları daha kolay kavrayabilecekleri düşünülmüştür. Öğrenciler bu dört duruma ilişkin parabollerin cebirsel ifadelerini oluşturmuşlar ve birbiriyle karşılaştırarak çıkarımlarda bulunmuşlardır. Böylelikle bir parabolün yatay eksen ve y eksenine paralel ötelenmesinin sonucu olarak fonksiyonun cebirsel ifadesinde sadece b katsayısının değiştiğini fark etmişler ve böylelikle parabolün ötelemelerine ilişkin grafiksel ve cebirsel olarak sonuçlara ulaşmışlardır.

İki ders saati süresinde uygulanan bu etkinlik ile ikinci dereceden fonksiyonların öğretimine yönelik son öğrenme etkinliği tamamlanmış olmuştur. Bu sürecin sonrasında öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonların grafiklerinin

ötelenmesine ilişkin anlamalarını değerlendirmek amacıyla bir ölçme ve değerlendirme etkinliği yapılmıştır.

Ölçme-Değerlendirme IV Etkinliği

Öğrencilerin parabollerin ötelemelerine ilişkin anlamalarını değerlendirmek amacıyla sahillerde güvenlik amacıyla yerleştirilen parabol şeklindeki zincir korkuluklardan yararlanılmıştır (bkz. Ek 10). İlk olarak öğrencilere tek bir sıra olarak yapılmış zincir korkulukları olan bir sahilin fotoğrafı verilmiş ve bu korkulukların tamamını içerek bir model oluşturmaları istenmiştir. Öğrenciler bu modeli oluşturmak için sıranın en başındaki zinciri temel alarak diğer zincirleri bunun yatayda ötelenmiş durumları olarak yorumlayabilmişlerdir. İlk zinciri parabol olarak analitik düzleme taşımakta, belirledikleri varsayımlar doğrultusunda parabol üzerinde noktalar belirlemişler ve böylelikle parabolün cebirsel ifadesini yazabilmişlerdir. Ötelenen parabolleri ise tepe noktasının değiştiği fikrinden yararlanarak kanonik form yardımıyla modellemiştir. Öğrencilerin zincirlerin sürekli olarak devam ettiğini düşünmelerini isteyerek ötelenen parabollerin cebirsel ifadeleri için genellemeye ulaşmaları istenmiştir.

Etkinliğin diğer sorusunda ise öğrencilere üç sıra halinde yapılmış zincir korkulukların olduğu sahilin fotoğrafı verilmişler ve bu korkulukların tamamını içerek bir model oluşturmaları istenmiştir. İstenilen modeli oluşturmak için öğrencilerin hem yatay hem de düşey ötelemeyi dikkate almaları ve buna bağlı olarak hem b katsayısında hem de c katsayısında değişikliğin olacağını düşünmeleri gerekmiştir. Öğrenciler genelleme yapabilmek için kanonik formu kullanmışlar ve parabolün yatayda ötelenmesini kanonik formda r 'nin değişimi ve düşeyde ötelenmesini k 'nın değişimi ile ifade etmişlerdir. Bu çıkarımlarına yönelik ulaştıkları genellemeleri de öğrencilerin kavramları öğrenme durumlarını değerlendirmek için önemli olmuştur.

Öğretim dizisinde yer verilen etkinliklerin ne olduğu, amaçları, gerçekleştirilme süresi, bu süreçlerdeki öğrencilerden ve öğretmenlerden beklenen eylemler Tablo 26'da gösterilmektedir.

Tablo 26. İkinci Dereceden Fonksiyonlara İlişkin Öğretim Dizisinin İçeriği

Öğrenme Adımı		Doğrusal fonksiyonu açıklar.		
Süre	Etkinlik	Hedef	Gerçekleştirilmesi Beklenen Eylemler	
			Öğrenci Eylemi	Öğretmen Eylemi
2 Ders Saati	Dünya'nın Dibi (1. Aşama) (bkz. Ek 1)	- Problem durumunu doğrusal fonksiyon kavramı ile ilişkilendirir. - Problem metni içerisinde sözel ifadeyi yorumlayarak doğrusal fonksiyon modelini oluşturur. - Tablo gösterimindeki verileri inceleyerek doğrusal ilişkiyi fark eder. - Doğrusal fonksiyonun farklı gösterimlerini inceler ve birbirleriyle ilişkilendirir. - Fonksiyonun tanım kümesini ve değer kümesini belirler.	- İkişer kişilik gruplar halinde etkinlik kâğıdı üzerinde çalışırlar. - İki değişken arasındaki ilişkiyi oluşturmada bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarını kullanırlar. - Sözel ifadedeki değişim oranını tablodaki değişim oranı ile ilişkilendirirler. - Grafiksel gösterim ile diğer gösterimleri ilişkilendirirler. - İstenilen üç farklı doğrusal fonksiyon modelini oluştururlar. - Oluşturdukları modelleri farklı değerlerin karşılık geldiği değerleri bulmak için kullanırlar.	- Öğrencileri çözüm sürecinde gözlemler. - Öğrencilerin çözüm sırasında ne gibi düşüncelere sahip olduklarını anlamak için sorular sorar. - Doğrusal fonksiyonu oluştururken yaşadıkları güçlükleri belirler. - Öğrencilerin farklı gösterimler kapsamında doğrusal fonksiyonun odak noktası olarak sabit değişim oranı fikrini irdelemelerini sağlar ve öğrenmelerini destekleyecek şekilde müdahaleci sorular yönlendirir.
2 Ders Saati	Dünya'nın Dibi (2. Aşama) (bkz. Ek 1)	- Matematiksel modelleme sürecinde oluşturdukları üç farklı modelin genel formunu ifade eder. $f(x) = ax + b$ fonksiyonunda bağımlı ve bağımsız değişkenlerin anlamlarını ve birbirleriyle ilişkilerini açıklar. $f(x) = ax + b$ fonksiyonundaki katsayıların anlamlarını açıklar ve farklı gösterimlerdeki karşılıklarını yorumlar. $f(x) = ax + b$ fonksiyonu ile $ax + b = 0$ denklemi arasındaki ilişkiyi açıklar. - Doğrusal fonksiyon kavramına ilişkin soyutlamalar yapar.	- Doğrusal fonksiyonun genel ifadesini yazarlar. - Matematiksel modelleme sürecinde oluşturdukları anlamları $f(x) = ax + b$ genel ifadesini yorumlamada kullanırlar. - Fonksiyonda x değişime karşılık oluşan $f(x)$ değerlerini bulurlar ve x ile $f(x)$ değerlerini eşleyerek doğru üzerindeki noktalara karşılık geleceğini açıklarlar. $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun a katsayısının değişim oranına karşılık geldiğini, grafiksel gösterimde ise eğime karşılık geldiğini açıklarlar. $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun b katsayısının sabit bir sayı olduğunu ve grafiksel gösterimde doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinat değerine karşılık geldiğini açıklarlar. $ax + b = 0$ denklemi ile $k \cdot ax + k \cdot b = 0$ denklemin aynı denklemi ifade ettiğini keşfederler. $f(x) = ax + b$ fonksiyonu ile $f(x) = k \cdot ax + k \cdot b$ fonksiyonunun farklı olduğunu keşfederler.	- Öğrencilerin genelleme yapmalarını destekleyecek ek sorular sorar. - Doğrusal fonksiyon için değişim oranının sabit olması fikrinin kritik olduğunu hissettirir. - Öğrencilerin bir gösterime odaklanmaları halinde farklı gösterimlere ilişkin çıkarımlar yapmalarını destekler.

Öğrenme Adımı		- İki doğrusal fonksiyonun çarpımının ikinci dereceden fonksiyon olduğunu ifade eder. - İkinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesine bağlı oluşturduğu sıralı ikilileri analitik düzleme yerleştirerek ve noktaları sıklaştırarak ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin yapısını sezer.		
Süre	Etkinlik	Hedef	Gerçekleştirilmesi Beklenen Eylemler	
			Öğrenci Eylemi	Öğretmen Eylemi
2 Ders Saati	El Castillo (1. Aşama) (bkz. Ek 2)	- Matematiksel modelleme sürecini uygular. - Doğrusal fonksiyon fikirlerini kullanır ve doğrusal fonksiyon modelini oluşturur. - Elde edilen doğrusal fonksiyon modelini kullanarak yeni matematiksel modeller oluşturur.	- Kare piramit olan yapının tabanının bir kenar uzunluğunu ve yüksekliğini bulmak için fotoğrafları kullanırlar. - Yapının katlarına bağlı olarak oluşturacakları matematiksel model için değişim oranını belirlerler. - Kata bağlı olarak oluşturdukları doğrusal fonksiyonun grafiğini kesikli noktalar halinde çizerler. - Basamağa bağlı matematiksel modelin değişim oranını bulmak için kata bağlı oluşturdukları doğrusal fonksiyonun değişim oranını kullanırlar. - Basamağa bağlı olarak oluşturdukları doğrusal fonksiyonun grafiğini kesikli noktalar halinde çizerler. - Herhangi bir yüksekliğe bağlı oluşturdukları matematiksel modelin değişim oranını bulmak için önceki fonksiyonların değişim oranlarından birini kullanırlar. - Yükseklığe bağlı oluşturdukları doğrusal fonksiyonun grafiği sürekli olarak çizerler.	- Etkinlik süresince öğrencileri gözlemler. - Matematiksel modelleme sürecinde kullanmak amacıyla belirledikleri fotoğrafları seçme gerekçelerini sorar ve varsayımlarının nedenlerini ortaya çıkarmak amacıyla sorular sorar. - Birbirlerinin fikirlerini dinlemelerini ve çözüme yönelik fikirleri farklılıkları değerlendirerek belirlemelerini ister.
2 Ders Saati	El Castillo (2. Aşama) (bkz. Ek 2)	- Alana ilişkin fonksiyonu oluşturmada doğrusal fonksiyondan yararlanır. - İki doğrusal fonksiyonun çarpımının ikinci dereceden fonksiyon olduğunu açıklar. - Alan fonksiyonunda değişim oranının sabit olmadığını açıklar. - İkinci dereceden fonksiyonun grafiğinin doğrusal olmadığını ve bir çokluğa göre simetrik olan bir eğri olduğunu sezer. - İkinci dereceden fonksiyon ile doğrusal fonksiyon arasındaki ilişkiye yönelik genellemelere ulaşır.	- Farklı katların alanlarını oluşturarak değişim oranlarını incelerler ve bu sayede değişim oranlarının sabit olmadığını, değişim miktarlarının değişiminin sabit olmadığını fark ederler. - Kenar uzunluklarının matematiksel modellerini alan fonksiyonunu oluşturmak için çarparlar. - İkinci dereceden fonksiyonların birinci dereceden fonksiyonlarla ilişkisine yönelik genellemeler yaparlar. - Katlara bağlı oluşturdukları alan fonksiyonun grafiğini kesikli noktalar olarak çizerler. - Basamaklara bağlı oluşturdukları alan fonksiyonun grafiğini kesikli noktalar halinde çizerler ve noktaların bir öncekine göre daha fazla olduğunu yorumlarlar. - Yükseklığe bağlı oluşturdukları alan fonksiyonun grafiğini sürekli olarak çizerler.	- İki kavram arasındaki ilişkiyi oluşturmaya çalışan öğrencilerin güçlük yaşamaları halinde sorular sorar. - Alan fonksiyonu oluştururken öğrencilerin değişim oranlarını irdelemelerini sağlayarak doğrusal fonksiyondan farklılığını anlamlarına yardımcı olur. - Öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonun grafiğinin neden doğrusal olmadığına ilişkin çıkarımlarda bulunmalarını destekler. - Öğrencilerin genelleme yapmaya yönlendirir.
Ölçme ve Değerlendirme: İkinci dereceden fonksiyonlarla doğrusal fonksiyonun ilişkisine yönelik öğrenci anlamalarını değerlendirme (1 ders saati)				

Öğrenme Adımı		$f(x) = ax^2 + bx + c$ grafiğinin simetri eksenini ve tepe noktasını keşfeder. - Grafiği verilen ikinci dereceden fonksiyonların farklı cebirsel gösterimlerini (kanonik form, çarpımsal form ve standart form) yazar ve aralarında geçiş yapar.		
Süre	Etkinlik	Hedef	Gerçekleştirilmesi Beklenen Eylemler	
			Öğrenci Eylemi	Öğretmen Eylemi
2 Ders Saati	En Uzun Basketbol Atışı (1.Aşama) (bkz. Ek 3)	- Grafiği verilmiş ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesini yazar. - Parabolün simetri eksenini fark eder ve özelliklerini açıklar. - Parabolün tepe noktasını fark eder ve özelliklerini açıklar.	- Basketbol topunun yörüngesini belirlerler ve topun hareketi ile ilgili farklı durumları çizerler. - En uzun basketbol atışının matematiksel modelini oluşturmak için grafik üzerinde noktalar belirlerler. - Çizdikleri parabolün simetrik olması üzerine incelemeler yaparlar ve aynı yükseklikteki noktaların simetrik olduğunu yorumlarlar. - Parabol üzerinde tepe noktası olduğunu açıklarlar.	- Topun hareketini modelleyen ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel ifadesinin oluşturulmasında öğrencileri grafik üzerindeki noktalardan yararlanmaya yönlendirir. - Belirledikleri noktaları nasıl seçtiklerini sorgular. - Öğrencilerin fikirlerini ve anlamalarını ortaya çıkarmaya çalışır. - El Castillo etkinliğinde ulaştıkları genellemeleri kullanmaya yönlendirir.
2 Ders Saati	En Uzun Basketbol Atışı (2.Aşama) (bkz. Ek 3)	- Parabolün simetri eksenini ile ilgili genellemeler yapar. - Simetri eksenini ile tepe noktasını ilişkilendirir. - İkinci dereceden fonksiyonun farklı cebirsel gösterimleri arası dönüşümler yapar. - İkinci dereceden fonksiyonun grafiksel gösterimi ile cebirsel gösterimleri arası dönüşümler yapar.	- Simetri eksenini ile ilgili genellemeye ulaşmaya çalışırlar. - Simetri eksenini ile grafiğin x eksenini kestiği noktalar arası ilişkilendirmeler yaparlar. - Simetri ekseninin cebirsel ifadesini yazarlar. - İkinci dereceden denklemlere ilişkin bilgilerini kullanırlar. - İkinci dereceden bir fonksiyonun farklı cebirsel gösterimlerine grafiksel gösterimden yararlanarak ulaşırlar. - Parabollerin simetri eksenleri ile tepe noktaları arasındaki ilişkiye yönelik genellemelere ulaşırlar. - Standart form, kanonik form ve çarpanlara ayrılmış form için fonksiyon üzerinde incelemeler yapar.	- Öğrencilerin süreç içerisinde kazanmış oldukları fikirleri kullanmalarını bekler. - İkinci dereceden denklemlerin özelliklerine ilişkin bilgileri ile ikinci dereceden fonksiyon ve parabol arasında ilişkilendirmeler yapmalarını ister. - Tepe noktası ile simetri eksenini arasındaki ilişkilere yönelik genellemelere ulaşmaları için destekler. - Farklı cebirsel gösterimlere ilişkin kritik durumları sorgulamalarını sağlar.
Ölçme ve Değerlendirme: Grafiği verilmiş ikinci dereceden fonksiyonların cebirsel ifadelerini oluşturmaya yönelik öğrenci anlamalarını değerlendirme (1 ders saat)				

Öğrenme Adımı		• $f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesine ilişkin a katsayısının değişimine göre çıkarımlarda bulunur. • $y = ax^2 + c$ ifadesine ilişkin c katsayısının değişimine göre çıkarımlarda bulunur. • Tepe noktasını belirleyen katsayıların farklı durumlarını inceler ve çıkarımlarda bulunur.		
Süre	Etkinlik	Hedef	Gerçekleştirilmesi Beklenen Eylemler	
			Öğrenci Eylemi	Öğretmen Eylemi
2 Ders Saati	Parabolik Uçuş (1. Aşama) (bkz. Ek 4)	• Parabolün farklı cebirsel gösterimlerini yazar. • $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun değişen a katsayısına göre parabolün durumuna ilişkin çıkarımlarda bulunur. • Parabolün sınırsızlığını ve sürekliliğini fark eder.	• Parabolik hareket eden uçakların belirli saniyeler arasındaki hareketlerinin matematiksel modelini oluştururlar. • Oluşturdukları ikinci dereceden fonksiyon ifadesinin farklı cebirsel gösterimlerini yazarlar. • Kolları yukarı olan ve kolları aşağı olan iki parabolü karşılaştırırlar ve a katsayısının negatif ya da pozitif olması durumu ile ilişkilendirirler. • Hareketini daha kısa sürede tamamlayan uçakların grafiğini çizerler ve bu grafiklerin cebirsel ifadelerini oluştururlar. • Parabollerin kollarının açıklığının değiştiğini ve bu değişikliğin cebirsel ifadede a'nın değeri ile ilgili olduğuna ilişkin çıkarımlarda bulunurlar.	• Öğrencilerin çözüm süreçlerini gözlemler ve yaptıklarını gerekçelendirmelerini ister. • İkinci dereceden fonksiyonun a katsayısına ilişkin genellemelere ulaşmaları için onları sorgulamalar yaptırır.
		• $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun değişen c katsayısına göre parabolün durumuna ilişkin çıkarımlarda bulunur. • Parabolün x eksenine paralel olarak ötelenmesine ilişkin çıkarımlarda bulunur. • Parabolün y eksenine paralel olarak ötelenmesine ilişkin çıkarımlarda bulunur. • Parabolün ötelenmesi sonucunda katsayılarına ilişkin genellemelere ulaşır.	• Parabolik hareket eden uçakların tepe noktasının y ekseninde olmasını modelleyen fonksiyonun $y = ax^2 + c$ biçiminde olduğunu fark ederler. • $f(x) = ax^2 + c$ fonksiyonundaki farklı c değerlerinin olmasını parabolün yukarı aşağı ötelenmesi hareketi ile ilişkilendirirler. • y eksenine paralel olarak sağa ya da sola parabolün ötelenmesi halinde grafiksel ve cebirsel gösterimde değişenler üzerine incelemeler yaparlar ve çıkarımlarda bulunurlar. • x eksenine paralel olarak aşağı ya da yukarı parabolün ötelenmesi halinde grafiksel ve cebirsel gösterimde değişenler üzerine incelemeler yaparlar ve çıkarımlarda bulunurlar. • Tepe noktasını belirleyen katsayıların farklı değerlerini incelerler ve çıkarımlarda bulunurlar.	• Farklı öteleme hareketlerinde fonksiyonun farklı cebirsel ifadelerindeki değişimlerini ve nedenlerini sorgularlar. • Parabolün öteleme durumlarında ikinci dereceden fonksiyonun katsayılarında ne gibi değişiklikler olacağı üzerine düşünmelerini ister.
Ölçme ve Değerlendirme: İkinci dereceden fonksiyonun katsayılarına ve parabolü ötelenme hareketlerine yönelik öğrenci anlamalarını değerlendirme (1 ders saati)				
Kavramsal Anlama Testinin Uygulanması (2 ders saati)				

BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Onuncu sınıf öğrencilerinin zihinsel eylemlerini tetikleyerek ikinci dereceden fonksiyonları kavramsal öğrenmelerini sağlayacak bir öğretim dizisinin tasarlanmasının ve bu süreçte öğrencilerin anlamalarının gelişiminin nicel muhakeme bağlamında nasıl şekillendiğini ortaya çıkarılmasının amaçlandığı bu tasarı çalışmasında ulaşılan sonuçlar mevcut alanyazın ile karşılaştırılarak beş başlık altında ele alınmaktadır.

İlk olarak tasarlanan ve uygulanan gerçek yaşam bağlamlı problem durumlarına dayanan matematiksel modelleme etkinliklerinin öğrencilerin nicel muhakemelerini nasıl desteklediğine ilişkin sonuçlara yer verilmektedir. Sonrasında doğrusal fonksiyona ilişkin öğrenmeleri, ikinci dereceden fonksiyonun ve grafiğinin oluşturulmasına ilişkin öğrencilerin zihinsel eylemleri, parabolün tepe noktası ve simetri eksenine ilişkin öğrenci öğrenmeleri, ikinci dereceden fonksiyonun farklı gösterimlerine ilişkin öğrenci öğrenmeleri ve ikinci dereceden fonksiyonun katsayıları ve parabolün ötelenmesine ilişkin öğrenci öğrenmeleri başlıkları doğrultusunda elde edilen sonuçlar sunulmaktadır.

Matematiksel Modelleme Etkinliklerinin Öğrencilerin Nicel Muhakemelerini Desteklemesi

Öğrenciler ikinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesine ilişkin tasarlanan mantıksal-matematiksel öğrenme etkinlikleri doğrultusundaki matematiksel modelleme etkinleri üzerine çalışırken gerçek yaşam durumlarına ilişkin bilgileri ve deneyimleri yardımıyla etkinliklerde yer verilen çokluklara anlamlar yüklemeye

başlamışlardır. Gerçekleştirilen öğretim deneylerinde öğrenciler ilk olarak gerçek yaşam bağlamı etkinliklerin içerdikleri durumlar üzerine düşünmüşler ve bu durumları matematiksel olarak açıklamaları beklendiği için matematiksel ifadeleri oluştururlarken yararlanabilecekleri değişkenleri belirlemişlerdir. Etkinlikler öğrencilerin belirlenen matematiksel kavramları yapılandırmalarını sağlayacak çokluklar ve kavramlar göz önüne alınarak tasarlandığı için öğrenciler aktif zihinsel süreçleri yardımıyla gerçekleştirdikleri nicel operasyonlar ile çoklukları oluşturmuşlardır. Matematiksel modellerle açıklamaya çalıştıkları durumlar üzerine düşünmek nicel muhakemelerini desteklemiştir. Buna ek olarak, süreçte gerçekleştirdikleri nicel muhakemeleri de gerçek yaşam durumları içerisindeki kavramları keşfederek matematiksel modelleri oluşturmalarına yön vermiştir. Weber ve diğer. (2014) öğretim süreçlerinde öğrencileri nicel muhakemeye yönlendirmenin gerçek yaşam durumlarının matematiksel modellerini geliştirmelerine ve keşfetmelerine yardımcı olacağını ifade etmişlerdir. Tez çalışmasında öğrencilerin gerçek yaşam durumlarına yönelik daha fazla yorum yapabilmelerinin ve durumların içerisine kendilerini dahil edebilmelerinin nicel muhakemelerini daha fazla desteklediği görülmüştür. Matematiksel kavramlar tek başlarına soyut olduğu için ve öğrencilerin zihinlerinde oluşturdukları şekilde var oldukları için onların kavramları oluşturmalarını destekleyecek bağlamlara ilişkin bilgileri önemli olmuştur. Etkinliklerdeki bağlamlara ilişkin deneyimleri veya bilgileri öğrencilerin süreçlerdeki düşünme becerilerine ve muhakemelerine yön vermiştir. Bu doğrultuda, nicel muhakeme perspektifine dayalı uygulanacak matematiksel modelleme etkinliklerinin bağlamları üzerine öğrencilerle tartışmalar gerçekleştirmek ve gerektiğinde bağlamla ilgili daha fazla bilgilendirme yapmak model oluşturma sürecine destek olabilmektedir.

Gerçek yaşam bağlamı etkinlikler dinamik durumları içerdiği için öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri anlamlandırmaları ve fonksiyonun eş zamanlı değişim fikrini oluşturmalarına imkan vermiştir. Thompson (1994) fonksiyonların öğrenilmesi için fonksiyonu içeren anlamlı bir bağlamın uygun bir başlangıç noktası olacağını dile getirmiştir. Birbiriyle ilişkili olarak değişen iki çokluğu ve bu çokluklardan hangisinin bir diğerine bağlı olarak değiştiğini belirleme matematiksel

modelleme sürecinin en başında gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler bağımlı ve bağımsız değişkenlere bağlama ilişkin bilgileri veya bağlama yönelik yorumları doğrultusunda karar vermişlerdir. İki çokluk arasındaki ilişkiyi gösteren matematiksel modeli oluşturma sürecinde öğrencilerin iki değişkenin ilişkisini belirlemede kritik olan çoklukları belirlemeleri gerekli olmuştur. Dolayısıyla bu süreçte öğrenciler var olan çoklukları ilişkilendirerek yeni çokluklar oluşturmuşlardır. Matematiksel model oluşturmalarının beklenmesi öğrencilerin zihinsel olarak aktif olmalarını tetiklemiştir. Bunun yanı sıra öğrencilerin oluşturdukları matematiksel modelleri yorumlamaları ve doğrulamaya çalışmaları kavramları yeniden gözden geçirmelerini ve gerekli olduğu durumlarda revize etmelerini sağlamıştır. Dinamik ilişkileri içeren durumlar doğrultusunda oluşturulan matematiksel kavramlar öğrencilerin bu kavramları kullanmalarını gerektirdiği için öğrencilerin öğrenme süreçlerinde ezbere yaklaşımlardan uzaklaşmalarına imkan vermiştir. Çünkü öğrenciler gerçek yaşam durumlarını temsil edecek uygun matematiksel modellere ulaşırlarken kavramların içerdiği temel fikirlerden yararlanmışlardır. Bir başka deyişle, durumu modellerken var olan çokluklardan nicel muhakemelerle yeni çokluklara ve dolayısıyla kavramlara ulaşmışlardır.

Öğretme süreci olarak bu etkinlikler değerlendirildiğinde, araştırmacılar öğrencilerin kavramlara ilişkin ne düşündüklerini, nasıl düşündüklerini, kavramlara ve çokluklara ilişkin anlamalarını modelleme süreci sırasında daha kolay ortaya çıkarabilmişlerdir. Çünkü öğrenciler modelleme sürecinde kavramları kullanırlarken gerekçelerini sürekli olarak ifade etmişlerdir. Gerçek yaşam durumları üzerine öğrencileri konuşturmak daha kolay olduğu için öğretimi öğrenci düşünceleri doğrultusunda değerlendirebilmeyi de desteklemiştir. Ek olarak, farklı gerçek yaşam durumları farklı öğrencilerin ilgilerini çekebildiği için öğrencileri sürece dahile edebilme imkanını arttırmıştır. Ancak, öğrencilerin matematiksel modelleme sürecine çok hakim olmamaları kavram oluşturma ve genelleme sürecinde gerekli olan verileri elde ederken çok zaman harcamalarına neden olmuştur. Bu uzun çalışma süreçleri öğrencilerin sıkılmasına yol açarak kavramları oluştururlarken etkili düşüncelerini engellemiştir. Bu sebeple etkinliklerdeki bazı veriler öğrencilere etkinlik içerisinde sunularak kavram oluşturma sürecine geçişleri kolaylaştırılabilir.

Etkinlikteki çokluklar ile ilgili ilişkiler öğrencilerin deneyimledikleri ya da yorumlayabilecekleri durumlar olması sebebiyle bağımlı ve bağımsız değişkenleri kolaylıkla belirleyebilmişlerdir. Belirledikleri değişkenlerden biri değiştikçe diğerinin değişeceği fikrine dayalı olarak matematiksel olarak fonksiyon kavramının içerdiği fikirleri ifade etmişlerdir. Ancak öğrencilerden bazıları bir ilişkiyi ifade eden matematiksel kavramın denklem olabileceğini ifade etmişlerdir. Zihinsel olarak dinamik durumların eş zamanlı olarak değiştiği durumunu düşünmelerine karşın “denklem” ifadesini kullanmalarının sebebinin fonksiyon kavramının ifade ettiği eş zamanlı değişim fikrini ve denklemin stabil bir durumu ifade ettiğini tam olarak öğrenmemelerinden kaynaklı olduğu düşünülmektedir. Bu süreçteki öğrencilerin yanlış ifadeleri doğrultusunda, ikinci dereceden fonksiyon kavramına geçmeden önce doğrusal fonksiyon kapsamında fonksiyona ilişkin fikirlerin de oluşturulması için doğrusal fonksiyon ilişkilerini içeren gerçek yaşam bağlamı üzerinde çalışılmasının gerekliliği ortaya çıkmıştır. Bu etkinlikte kavramın oluşturulması için gerekli olan veriler öğrencilere sunulduğu için öğrenciler doğrudan belirledikleri değişkenler arasındaki matematiksel ilişkileri oluşturmaya yönelik çalışmalar yapmışlardır. Benzer şekilde, Oehrtman, Carlson ve Thompson (2008) analiz öğrencilerinin dinamik olarak değişen durumlarla ilgili akıl yürütmeyi içeren eş zamanlı düşünmeye yönelik sıklıkla bir değişkeni bağımlı olduğu diğer bir değişken ile koordine etme ve bir değişkenin değişim yönünü diğer değişkendeki değişimlerle koordine etme zihinsel eylemlerini gerçekleştirdiklerine ulaşmışlardır. Öğrencilerin değişkenlerin değişim miktarlarını birbirleriyle ilişkilendiren etkili muhakemeler yapamadıklarını belirtmişlerdir. Bu sonuçlar da öğrencilerin değişim oranına ilişkin muhakemelerini güçlendirmek için öğretimin içeriğinin destekleyici olması gerekliliğini göstermiştir. Öğrenciler değişkenleri belirledikten sonra değişimin yönünü ve değişim miktarlarını incelemişlerdir. Sonrasında da değişim miktarlarının birbiri ile ilişkisini ortaya çıkarmaya çalışmışlardır. Çünkü değişim miktarlarını incelememeleri halinde ulaştıkları matematiksel modelin durumu açıklayamadığını görebilmişlerdir. Gerçek yaşam bağlamının içerisinde verilen tablo değerleri de öğrencilerin oluşturdukları matematiksel modeli doğrulamada yardımcı olmuştur. Öğrencilere bağlam verilmeden sadece doğrusal ilişki içeren iki değişkene ait veriler sunulmuş olsaydı değişimin

dinamikliğini düşünmeyecekleri için değişim miktarlarını incelemeyebilirlerdi. Bağlamın yapısı aynı zamanda öğrencilere ilişkinin yapısına yönelik ortaya koydukları fikirleri yorumlamaya da yönlendirdiği görülmüştür.

El Castillo etkinliğinde öğrenciler ilk olarak fotoğraflardaki insanlardan yararlanarak veya kendi gerçek yaşam bilgi ve deneyimlerine dayalı olarak yapının taban uzunluğunu ve yüksekliğini bulmaya çalışmışlardır. Öğrenciler bu yapıyı görmemiş olsalar bile düzgün bir yapının katlarının ve basamaklarının kenar uzunlukları ya da alanları ile ilgili çıkarımlar yapabilecek bir çok deneyim yaşamışlardır. Dolayısıyla öğrenciler için bu etkinlikteki fikirlere yükledikleri anlamlar soyut kalmamıştır. Öğrenciler yapının uzunluk değerlerine ilişkin herhangi bir bilgi verilmemesi ve daha önce matematiksel modelleme problemleri üzerine çalışmamaları sebebiyle çok zaman harcamışlardır. Ders saatinin büyük bir kısmını en alt taban ve yükseklik uzunluklarını bulmak için kullanmaları sebebiyle bazı grupların kenar uzunlukları ile ilgili istenilen matematiksel modellerini cebirsel olarak oluşturabilmeleri için yeterli zamanları kalmamıştır. Bu aşamada, yapının düzgün bir yapı olması ardışık katlardaki taban uzunluklarının eş miktarda değiştiğini yorumlayabilmelerine imkan vermiştir. Dolayısıyla öğrenciler kenar uzunlukları ile ilgili modellerin doğrusal olacağını düşünmüşlerdir. Ek olarak, bağlam içerisindeki kat, basamak ve yükseklik çoklukları öğrencilerin kenar uzunluklarını farklı bağımsız değişkenlere bağlı olarak temsil eden fonksiyonların tanım kümeleri üzerine çıkarımlarda bulunmalarını desteklemiştir. Bu çıkarımları etkinliğin bir sonraki aşaması olan alan fonksiyonlarının grafiklerinin doğrusal olmadığını ve simetrik bir eğri olduğunu anlamlandırmalarının temeli olmuştur. El Castillo etkinliğinin bir sınıf ortamında uygulanması sürecinde en alt taban uzunluk ve yükseklik değerlerinin öğrencilere verilmesinin etkinliğin model oluşturma aşamasında öğrencilerin daha etkin düşünmelerine ortam hazırlayacağı düşünülmektedir.

En Uzun Basketbol Atışı etkinliğinde öğrenciler basketbola yönelik ilgilerinin olması ya da arkadaşlarının basketbol oynuyor olması sebebiyle etkinliğe büyük motivasyonla başlamışlar ve aktif bir katılım göstermişlerdir. Bu etkinlikte topun hareketini zihinlerinde kolaylıkla canlandırabildikleri için belirledikleri

varsayımlar doğrultusunda analitik düzleme parabol olarak taşımışlardır. Bu etkinlikte topun hareketi öğrencilerin tepe noktası ve simetri çokluklarını oluşturmalarını desteklemiştir. Topun aynı yükseklikte bulunduğu noktaları karşılaştırdıkları ve tüm bu noktaların özelliklerine ilişkin çıkarımlarda bulundukları için simetri eksenini ve tepe noktası çoklukları öğrenciler için oldukça somut hale gelmiştir. Bununla birlikte, El Castillo etkinliğinde olduğu gibi En Uzun Basketbol Atışının matematiksel modelini oluşturma sürecinde belirli varsayımlar öğrencilere sunularak daha kısa sürede modeli elde etmeleri desteklenebilir. Öğretim sırasında matematiksel modelleme etkinliklerinin çok açık uçlu olması kavramların oluşturulması sürecinin gecikmesine ya da istenmeyen fikirlerin oluşmasına ortam hazırlayabilmektedir.

Parabolik Uçuş etkinliğinde öğrencilerin doğrudan grafiksel gösterimleri cebirsel olarak ifade etmeleri beklendiği için farklı varsayımlar söz konusu olmamıştır. Bu aşamada öğrenciler bir uçağın farklı sürelerde uçuşu tamamlamalarını kolaylıkla modelleyebilmişler ve a katsayısına ilişkin çıkarımlarını oluşturdıkları modelleri karşılaştırarak yapabilmişlerdir. Parabolik Uçuş etkinliği bir parabolün ötelenmesi halinde ne gibi değişikliklerin olacağını öğrencilerin kendilerinin keşfetmelerini sağlayan bir etkinlik olmuştur.

Doğrusal Fonksiyona İlişkin Öğrenci Öğrenmeleri

Doğrusal fonksiyon kavramının öğrenilmesine ilişkin etkinlikte öğrenciler ilk olarak derinlik ve basınç ilişkisinin sözel ifadesi doğrultusunda eş zamanlı değişim ve eşleme fikri doğrultusunda değişkenleri yorumlamışlardır. Derinlik ve basınç değerlerini eş zamanlı olarak değiştikleri düşüncesiyle birbiri ile eşlemişlerdir. Sözel ifadede değişim oranının verilmesi öğrencilerin değişim oranını üzerine inceleme yapmadan ifadeyi oluşturabilmelerine neden olmuştur. Bu aşamada bazı öğrencilerin bağımsız değişkeni basınç ile bağımlı değişkeni derinlik ile eşledikleri görülmüştür. Bu eşlemenin nedeninin öğrencilerin bağlamı yorumlamadan matematiksel ifadeye odaklanmalarından kaynaklandığını düşünülmektedir. Bu öğrenciler değişim oranını 10 olarak düşünerek cebirsel ifadeyi oluşturmuşlardır. İlişkinin grafiksel gösterimini yaparken de x eksenini basınç y eksenini derinlik ile eşlemişlerdir.

Etkinlikteki kritik aşamalardan biri öğrencilerin tablo değerlerini inceleyerek basınç ile normal ortam içerisinde kanda oksijenin çözünme miktarı arasındaki ilişkiyi oluşturmaya çalıştıkları süreç olmuştur. Bu süreçte öğrencilerin bir kısmı iki çokluk arasındaki ilişkiyi oluşturmaya çalışırken sadece değişimlerin yönü ile ilgilenmişlerdir. Bir çokluğun değeri artarken diğerinin değerinin artmasını iki çokluk arasında doğru orantı olduğunun göstergesi olarak kabul etmişlerdir. Öğrencilerin sadece değişimin yönünü dikkate alarak çıkarımda bulunmaları onların doğrusal fonksiyonun yanı sıra doğru orantı kavramına ilişkin eksik bilgilerinin olduğunu da göstermiştir. Bazı öğrenciler iki çokluk arasında doğrudan sabit bir kat bulmaya çalışmışlar ve bu sabit katı bulamadıkları için iki çokluk arasında doğrusal olmayan bir ilişki olduğunu ifade etmişlerdir. Hohensee (2016) öğrencilerin doğrusal fonksiyona ilişkin akıl yürütmelerini ortaya çıkardığı bir çalışmada $y = ax + b$ fonksiyonunda $b \neq 0$ olması halinde öğrencilerin doğrusal ilişkiyi fark edemediklerine ulaşmıştır. Tez çalışmada da öğrencilerin bu yaklaşımı genel olarak sergiledikleri elde edilen bir sonuç olmuştur. Ancak etkinliğin bağlamı ve aşamaları öğrencilerin doğrusal ilişkinin kat ilişkisi ile açıklanmadığını, değişim oranının sabit olması ile açıklandığını fark etmelerine yardımcı olmuştur. Tabloda verilen değerler $f(x) = mx$ formatına uygun olmuş olsaydı öğrenciler değişim miktarlarına ve dolayısıyla değişim oranını inceleme gereksinimi duyamayacaklardı. Bu durumun öğrencilerin doğrusal ilişkiyi sadece iki değişken arasındaki bir kat ilişkisi olarak görmelerine yol açacağı düşünülmektedir.

Etkinlik kapsamında verilen tablodaki değerlerin $f(x) = mx + n$ formatına uygun olması öğrencileri değişim miktarlarını incelemeye yönlendirmiştir. Öncelikle değişim miktarlarını toplamsal olarak karşılaştırmışlardır. Toplamsal karşılaştırma ile bir ilişkiye ulaşamayan öğrenciler farklı değer arasındaki değişim miktarlarını çarpımsal karşılaştırma yaparak sabit bir orana ulaşmışlardır. Etkinlikte verilen tablo değerlerini inceleme ve bu değerlere dayalı ilişkiyi belirleme sürecinde ortaya çıkan zihinsel eylemler öğrencilerin değişim oranı çokluğunu oluşturmalarını sağlamıştır. Fonksiyon tablolarına ilişkin öğrencilerin fonksiyonel düşünme yollarını araştıran Tanışlı (2011) öğrencilerin fonksiyon tablolarını incelerken tekrarlayan bir örüntü aradıklarına ulaşmış ve tablolardaki bağımsız değişkenin birer birer artmasının

öğrencilerin bağımlı değişkeni bu yaklaşımla ele almalarına neden olduğunu ifade etmiştir. Araştırmacı öğrencilerin tekrarlayan örüntü arama yaklaşımlarının onların fonksiyonel düşüncelerini engelleyeceğini dile getirmiştir. Dünya'nın Dibi etkinliği kapsamındaki tablo verileri bu doğrultuda değerlendirildiğinde, tablodaki sayıların ondalık gösterim halinde olması ve belirli bir düzen içerisinde verilmemesinin öğrencileri uygun fonksiyon modelini oluşturmaya yönlendirdiği söylenebilir.

Doğrusal fonksiyon için kritik bir kavram olan sabit değişim oranına ulaşamayan öğrenciler için farklı yönlendirme soruları eklenebileceği düşünülmektedir. Basınç ve oksijenin çözünme miktarı arasında doğrusal bir ilişkiyi olduğunu ifade edilmesi ve bu doğrusal ilişkinin göstergesinin ne olduğunun bulunmasının istenmesi öğrencileri değişim miktarlarını incelemeye yönlendirebilir. Bu aşamadaki ek soruların öğrencilerin seviyelerine ya da ön bilgilerine göre şekillendirilebileceği ve ek sorularla öğrenme süreçlerinin desteklenebileceği düşünülmektedir.

Öğrenciler değişim oranının sabit olduğu sonucuna ulaştıktan sonra iki çokluğu birbiriyle tekrar eşlemişler ve matematiksel modeli yazmaya çalışmışlardır. Bu aşamada bağlam doğrultusunda başlangıç noktasının üzerine oksijenin çözünme miktarında değişimin olacağı fikriyle sabit katsayıyı elde etmişlerdir. Bu aşamada $f(x) = mx + n$ formatını dikkate alarak ulaştıkları değişim oranını m ile eşleyip tablodaki herhangi bir basınç değerini ve bu değere karşılık gelen oksijenin çözünme miktarı değerini kullanarak n katsayısını bulabilirlerdi. Öğrencilerin iki çokluk arasındaki matematiksel ilişkiyi oluşturma sürecinde ifade etmeye çalıştıkları matematiksel modeli tablodaki verilerin cebirsel ifadesi olarak düşünmemelerinin n katsayısını bulmak için deneme yanılma yöntemini kullanmalarına neden olduğu düşünülmektedir. Buna karşın, tüm katsayılarının değerlerine ulaşp matematiksel modeli oluşturduktan sonra tablodaki değerler ile doğrulama yapmışlardır. Modeli oluşturma aşamasında tablodaki verilerden yararlanmaları daha hızlı çözüme ulaşmalarını destekleyebilirdi.

İki çokluk arasındaki ilişkiyi temsil eden matematiksel modelin cebirsel olarak ifade edilmesinin ardından öğrenciler ilişkiyi grafiksel olarak göstermişlerdir. Johnson (2015) da öğrencilerin dört farklı şişenin doldurulması sırasında yüksekliğin değişmesi ile hacminin nasıl değişeceğini tanımlamalarını istemiş ve bir grafik vererek şişelerden biri ile bu grafiği eşlemelerini istemiştir. Bu şekilde öğrencilerin değişim oranına ilişkin fikirlerini ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Ancak böyle bir yaklaşımın öğrencilerin nicel muhakemelerinin gelişimini desteklemeyeceği sadece ilişkideki çokluklara ilişkin muhakemelerinin belirleme imkanı verebileceği düşünülmektedir. Tez çalışmasında öğrencilerin grafikleri kendilerinin çizmelerinin istenmesi ile fonksiyonel ilişkilere yönelik nicel operasyonlar gerçekleştirerek muhakemeleri hem geliştirilmiş hem de grafik oluşturma sürecindeki bu muhakemelerinin açıklanması cebirsel gösterimlerdeki düşünceleri ayrıntılandırılmıştır. Moore, Carlson ve Oehrtman (2009) öğrencileri çoklukların eş zamanlı değişiminin grafiksel gösterimlerini oluşturmaya ve açıklamaya teşvik etmenin onların çokluklara ilişkin muhakeme becerilerini daha fazla anlamayı sağladığını açıklamışlardır.

Öğrenciler ilk olarak bağımsız değişken ve bağımlı değişken olarak belirledikleri çoklukları analitik düzleme yerleştirmişlerdir. Doğrusal ilişkilerin grafiklerini çizerlerken öğrenciler zorluk yaşamamışlardır. Grafik çizimine ek olarak öğrencilerin sabit değişim oranını grafik üzerinde göstermeleri beklenmiştir. Öğrenciler bağlamdaki çoklukları temsil eden grafikleri çizerlerken değişim oranına ya da eğime değinmemişlerdir. Dolayısıyla bu kavramın grafiksel ve cebirsel anlamaları ilişkilendirilmemiştir. Öğrenciler doğrusal fonksiyonu ve içerdiği fikirleri ve çoklukların genelleme aşamasında bu ilişkilendirmeleri yapmışlardır. Öğretim sürecinde bağlam kapsamında da bu çoklukları farklı gösterimler arası ilişkilendirmelerinin yapılması için ek sorulara sorulabilir. “İki çokluk arasında doğrusal ilişki olduğunu düşündüren fikri grafikte nasıl yorumlarsınız?” şeklindeki bir soru öğrencilerin değişim oranını grafiksel gösterim, tablo gösterimi ve cebirsel gösterimi daha önce ilişkilendirmelerini destekleyebilir.

Öğrenciler etkinlik kapsamında üç farklı doğrusal fonksiyon ifadesi oluşturmuşlar ve bu ifadelerin farklı gösterimleri üzerine incelemeler yapmışlardır.

Farklı gösterimler üzerine incelemeler yapmaları doğrusal fonksiyonun içerdiği çoklukları kavramsal olarak anlamalarını desteklemiş ve bu çoklukları sonraki etkinlikler kapsamında istedikleri gösterimlerden yararlanarak kullanabilmelerine imkan vermiştir. Acevedo Nistal, Van Dooren ve Verschaffel (2014) doğrusal fonksiyona ilişkin problemlerde öğrencilerin gösterimsel esnekliklerinin gelişiminin bir gösterimin ne zaman kullanılabileceği ve belirli durumlarda herhangi bir gösteriminin kullanımının neden daha uygun olabileceği sorularını sistematik bir şekilde ele alan öğretim ile sağlanabileceğini dile getirmişlerdir. Bunlara ek olarak, öğrencilerin doğrusal fonksiyona ve içerdiği fikirlere ilişkin genellemelere ulaşmaları da kavramları farklı durumlarda kullanabilmeleri ve kavramsal öğrenmeleri için önemli olarak düşünülmektedir. Bu doğrultuda yer verilen sorularda öğrenciler bağımlı ve bağımsız değişken, sabit değişim oranı, eğim kavramlarına ilişkin genellemelerde bulunmuşlardır. Bağlamdan bağımsız bir şekilde düşündüklerinde matematiksel olarak bu çoklukların aynı fikre karşılık geldiği sonucuna ulaşmışlardır.

Denklem ve fonksiyon kavramlarının birbirleriyle ilişkisine, birbirlerinden farklılaşan yönlerine ve farklı temsiller doğrultusundaki anlamlarına ilişkin çıkarımlarını da yapmışlardır. Öğrenciler fonksiyon ilişkilerini değişen çokluklara ilişkin oluşturmalarına rağmen zaman zaman fonksiyon yerine denklem kavramını kullanmışlardır. Bunun nedeninin öğrencilerin kavramlar arasındaki ayrımı daha önce düşünmemiş olmalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Etkinlikte denklem ve fonksiyon kavramlarını birbiri ile ilişkili olarak yorumlamalarının istenmesi öğrencilerin uygun çıkarımlar yapmalarını desteklemiştir. Böylelikle ikinci dereceden fonksiyon kavramında bu kavramları kullanabilecek fikirleri oluşturmuşlardır. Denklem ve fonksiyon arasındaki ilişki tepe noktası, simetri eksenini gibi çoklukların cebirsel anlamlarını ve parabolün x-eksenini kestiği noktaları yorumlayabilme kapsamında önemli olacağı için vurgulanması önerilmektedir.

Öğrencilerin İki Doğrusal Fonksiyonun Çarpımıyla İkinci Dereceden Fonksiyonun ve Grafiğinin Oluşturulması Sürecindeki Zihinsel Eylemleri

Doğrusal fonksiyona ilişkin çoklukları oluşturan öğrenciler için ikinci dereceden fonksiyonlara geçiş yapma sürecinde alan fikrinden yararlanmak anlamlı

olmuştur. İlk olarak, kare olan katlarının kenar uzunluklarının düzgün bir şekilde azalması doğrultusunda öğrenciler kata bağlı kenar uzunluklarının doğrusal bir fonksiyon olarak ifade edilebileceğini belirtmişlerdir. Yapının dokuz katının kenar uzunluklarını yazdıklarında aralarındaki değişim miktarlarının sabit olduğunu düşünmüşlerdir. Benzer şekilde basamaklardan ya da herhangi bir yükseklikten tabana paralel olarak oluşturulan kesitlerin kenar uzunluklarının değişiminin de eşit olduğunu sonucuna ulaşmışlardır. Bu aşamalarda öğrencilerin sabit değişim oranı fikrinden yararlanarak doğrusal bir ilişki olduğunu ifade etmeleri kata bağlı taban alanları arasındaki değişimin de sabit olacağını ve dolayısıyla kat-alan ilişkisinin de doğrusal olacağını düşünmelerine yol açmıştır. Ancak Dünya'nın Dibi etkinliğinde ve El Castillo etkinliğinin ilk aşamasında değişim oranını inceleme yaklaşımlarını alan değerleri arasında da uygulamaları öğrencilerin değişim miktarının sabit olmadığını görmelerini sağlamıştır. Her bir katın taban alanının değerini tablo şeklinde yazmaları öğrencilerin bu sonuca ulaşmalarını desteklemiştir. Bu sayede öğrenciler ardışık her katın alanları arasındaki değişim miktarının aynı olmadığını fark edebilmişlerdir. Bu aşamada sınıf ortamında uygulanan öğretim deneylerinde öğrencilerden çok azı değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğunu ortaya çıkarmışlardır. Bu durum göz önüne alınarak, öğrencilerin son döngüde uygulanan etkinliğe bu çokluğa odaklanmaları için sorular eklenmiştir ve dolayısıyla iki öğrenci bu çıkarımı yapabilmışlerdir. Elbette bu aşamada değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğu çıkarımına dayalı olarak öğrencilerin kat-alan ilişkisinin ikinci dereceden bir fonksiyonla açıklanacağını ifade etmeleri beklenmemiştir. Öğrenciler kendi zihinsel yapılarına uygun şekilde değişim miktarlarının değişiminin sabit olmasına dayalı olarak alan değişimlerine ilişkin fonksiyonun doğrusal olacağını ifade etmişlerdir. Bir başka deyişle, x ve y arasında bir ilişki kurmak yerine Δx ve Δy arasında bir ilişki kurmaya yönelmişlerdir. Bu yaklaşımları farklı bağlamlar ve değişkenlerin ilişkilerinin hangi durumlarda doğrusal olacağına ilişkin öğrencilerin uygun çıkarımlar yapabildiklerini göstermiştir. Buna karşın, doğrusal fonksiyonun değişim oranı çokluğuna ilişkin bilgileri yeni ilişkileri ve dolayısıyla yeni çoklukları oluşturmada yetersiz olmuştur.

Öğrencilerin kat-alan ilişkisini oluşturabilmeleri için bağlamın anlamını tekrar düşünmeleri gerekmiştir. Alan fikri iki kenar uzunluğunun çarpımı olarak ele alındığında kenar uzunluklarını temsil eden iki doğrusal fonksiyonun çarpımını düşünmeleri öğrenciler için zor olmamıştır. Dolayısıyla etkinlikte öğrencilerin kat-alan ilişkisini oluştururlarken alanın anlamının dikkate almalarına vurgu yapılması önemli olmuştur. Kat-kenar ilişkisini temsil eden $f(x) = ax + b$ ifadesini yapının tabanlarının kare olması gerekçesiyle kendisiyle çarpmak gerektiğini ifade edebilmişlerdir. $f(x).f(x) = (ax + b)(ax + b) = a^2x^2 + 2abx + b^2$ şeklinde oluşturdukları alan fonksiyonunun ikinci dereceden bir fonksiyon olduğunu görebilmişlerdir. Bu aşamada önemli olan öğrencilerin ulaştıkları çıkarımları birbiriyle ilişkilendirmeleridir. İlk olarak alanlar arasındaki değişim miktarının sabit olmadığını, değişim miktarlarının değişimlerinin sabit olduğu sonucuna ulaşan öğrenciler, bu çıkarımlarını alan fikrinden yola çıkarak ulaştıkları ikinci dereceden fonksiyon kavramı ile ilişkilendirmeleri beklenmiştir. Dolayısıyla ikinci dereceden bir fonksiyonun değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğu anlamlı gelecektir. Bu ilişkilendirmeleri sınıf ortamında yapılan öğretim deneyleri kapsamında her grup gerçekleştirememiştir. Dolayısıyla etkinlikte bu çoklukların incelenmesine yönelik yönlendirici soruların daha açık bir şekilde ifade edilmesi gerekliliği ortaya çıkmıştır. Üçüncü döngüdeki öğrenciler bu çıkarımları uygun şekillerde yapabilmişlerdir. Etkinliklerin birbiriyle ilişkili bir şekilde tasarlanması, bir etkinliğin öğrencilerin zihninde oluşturduğu etkileri bir sonraki etkinlikte kullanmalarını tetiklemiştir. Doğrusal fonksiyonun içerdiği çoklukların öğrenilmesine yönelik yapılan çalışmalarda değişim oranına vurgu yapılmamış olsaydı öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyon için de değişim miktarlarına ilişkin incelemeleri yapmalarının mümkün olmayacağı düşünülmektedir. Thompson (1994) öğrencilerin hız, ortalama hız ve oran çokluklarını nasıl oluşturduklarını araştırdığı çalışmasında öğrencilerin zamanı kapsamlı bir çokluk olarak oluşturmalarının harekete ilişkin sezgilerinden zamanı ve mesafeyi soyutlamasının hızı oran olarak kavramalarını desteklediği sonucuna ulaşmıştır. Öğrencilerin bir çokluğu oluşturabilmek için o çoklukla ilişkili diğer çoklukları ve fikirleri kavramsallaştırmış olması gerekmektedir. Lobato ve Siebert (2002) öğrencilerin durumları niceliksel olarak transfer etmelerinin doğasını anlamak için nicel muhakemelerini geliştirebilmek için yürüttükleri öğretimsel oturumlar

kapsamında öğrencilerin etkinliklerden edindikleri fikirlerini sonraki etkinliklerde kullandıklarını ve benzerliklerin ilişkilerini oluşturdıklarını ortaya çıkarmışlardır. Araştırmacılar bu transfer sürecinin dinamik bir süreç olduğunu ifade etmişlerdir. Benzer şekilde, tez çalışması sürecinde öğrenciler değişkenleri ve değişkenlerin değişim miktarlarını çarpımsal olarak karşılaştırma yaklaşımını sürekli olarak sergilemişlerdir. Ek olarak, alan fonksiyonunda Δx 'ın bir birimlik değişiminde Δy 'nin değişiminin sabit olduğunu ifade etmeleri nicel muhakemelerinin güçlü bir göstergesi olmuştur. Öğrencilerin bu çıkarımları doğrultusunda, doğrusal fonksiyondaki değişim oranı çıkarımının ikinci dereceden fonksiyondaki değişimlere yönelik çıkarımları desteklediği görülmüştür. Dünya'nın Dibi etkinliğindeki fikirler ile El Castillo etkinliğindeki fikirleri ilişkilendirerek bilgilerini transfer ettikleri ve bu sayede bu öğrencilerin değişim miktarlarının değişimine geçiş yapabildikleri söylenebilir. Hohensee (2016) de ikinci dereceden fonksiyonun belirli bir aralığı boyunca ortalama değişim oranı o aralıkta bir doğrusal fonksiyon tanımladığını ifade etmiş ve değişim miktarlarına ikinci dereceden fonksiyonlarda ele alınması gerekliliğini vurgulamıştır. Öğrencilerin değişen değişim oranları ile ilgili soruları nasıl yanıtlayacaklarını araştıran Johnson (2013) öğretmenlerin öğrencilerinin değişime bağlı muhakeme kullanımlarını güçlendirerek değişim oranlarındaki değişimi anlamlandırmalarını desteklemeleri gerektiğini vurgulamıştır. Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2013/2018) incelendiğinde ise ikinci dereceden fonksiyonların öğretilmesi kapsamında değişim miktarlarının değişimine ilişkin hiç bir ifadeye rastlanılmamaktadır. Bu doğrultuda okullarda bu çoklukların öğrencilere kazandırılması yönünde öğretimler yapılması beklenmemektedir. Doğrusal fonksiyonların ve ikinci dereceden fonksiyonların kavramsal öğrenmesini destekleyebilmek için öncelikle öğretim programlarında revizyonlara gidilmesi gerektiği düşünülmektedir.

Alan bağlamını içeren problem durumun öğrencileri iki kenar uzunluğunun çarpımını gerektiren alan fikrinden yola çıkarak yeni bir çokluk olan ikinci dereceden fonksiyon fikrine götürmüştür. Alan bağlamının yanı sıra ivme-hız-yol gibi çoklukların yer verildiği bağlamlarda çarpım fikrine ulaştırabilecektir. İki doğrusal fonksiyonun çarpımı ile bir ikinci dereceden fonksiyonun oluşturulmasının

desteklendiği bu süreçlerde öğrencilerin fonksiyon ilişkisini kurdukları çokluklar arasındaki değişim miktarlarını incelemeleri önem taşımaktadır.

Öğrenciler iki doğrusal fonksiyonun çarpımıyla oluşturdukları ve değişim miktarlarının değişimlerinin sabit olduğunu fark ettikleri ikinci dereceden fonksiyonun grafiğini çizerlerken öncelikle fonksiyonun bağımsız değişkenine karşılık gelen analitik düzlemi bağlam doğrultusunda eş parçalamışlardır. Eş parçalama ile elde ettikleri dokuz değer alan değerleri ile eşleyerek analitik düzlemde noktalar oluşturmuşlardır. Bu noktaların analitik düzlemdeki noktalarını inceleyerek herhangi ikisinin değişim oranının başka herhangi iki noktanın değişim oranı ile aynı olmadığını belirlemişlerdir. Bu eylemleri ile noktaların tamamının oluşturduğu grafiğin doğrusal olmayacağı sonucuna ulaşmışlardır. Bağımsız değişkenin bulunduğu eksen bağlam doğrultusunda daha fazla eş parçaya ayırarak karşılık gelen değerleri ile eşlemişler ve analitik düzlemde noktaları sıklaştırmışlardır. Sonrasında ise sonsuz miktarda yaptıkları eş parçalama ile sürekli bir grafik oluşturmuşlardır. Öğrenciler böylelikle eğrisel bir grafik elde etmişlerdir. Buna ek olarak, grafik üzerindeki noktaları analitik düzlemde aynı y değerine sahip noktalarla eşlemişler ve minimum değerden geçecek bir simetri doğrusu olduğunu sezmışlerdir. Eşledikleri noktaların simetri doğrusuna olan uzaklıklarını toplamsal karşılaştırarak bu uzaklıkların birbirine eşit olduğunu belirlemişlerdir. Öğrenciler El Castillo etkinliği ile simetrik bir grafik olan parabolü ve simetri doğrusunu kavramsal olarak oluşturmuşlardır.

Öğrencilerden bazılarının ikinci dereceden fonksiyonların grafiğine ilişkin çıkarımlarını alan fonksiyonun x^2 'li terim içermesine dayalı olarak da yaptıkları görülmüştür. Öğrenciler 9.sınıf düzeyinde “ $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) biçimindeki fonksiyonların grafiklerini çizer.” kazanımının öğretimi sürecinde $f(x) = x^2$ fonksiyonunu grafiğinin parabol olacağını öğrenmişlerdir. Bu bilgileri öğrencilerin elde ettikleri alan fonksiyonunun grafiğinin doğrusal olmayacağını düşünmelerini desteklemiştir. Ancak grafiğe ilişkin çıkarımları ile sabit bir değişim oranının olmamasını ilişkilendirmelerine de önem verilmesi gerekmektedir. Bir başka deyişle, $f(x) = x^2$ fonksiyonun grafiğinin doğrusal olmamasının altında yatan nedeni anlamlandırmaları kavramsal öğrenmeleri için önemlidir. Bu kavramları fark eden

öğrenciler analitik düzleme yerleştirdikleri dokuz noktanın birleştirilmesi ile oluşan grafiğin sabit bir değişim oranı olmaması nedeniyle eğiminden bahsedilemeyeceği ve dolayısıyla bu noktaların herhangi ikisinin birleştirilmesiyle oluşan parçanın bile doğrusal olmadığı çıkarımını yapabilmışlardır. Zaslavsky (1997) öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonları kavramsal öğrenmelerine engel olan bir düşüncelerinin parabolün üzerindeki herhangi üç noktanın doğrusal olacağı düşüncesi olduğunu belirlemiştir. Öğrencilerin doğrusal fonksiyona ilişkin kavramsal anlamaları bu engelin önüne geçecek en önemli faktördür. Çünkü öğrenciler doğrusal fonksiyonu öğrenmiş olmaları halinde grafiğinin doğru olmasının gerekçesini uygun bir şekilde ifade edebileceklerdir. Bu bilgileri de iki doğrusal fonksiyonun çarpımı ile oluşturulan ikinci dereceden fonksiyonun grafiğindeki herhangi bir parçanın doğrusal olmayacağı sonucuna götürecektir.

El Castillo etkinliğinin yapısı gereği öğrencilerin her bir aşamada elde ettikleri fikirlerinin onların bir sonraki süreçteki çıkarımlarını desteklediği görülmüştür. Değişimleri farklı olan çoklukların grafiksel gösterimini belirlemek amacıyla ilk olarak dokuz nokta üzerine inceleme yapmaları öğrenciler için anlamlı olmuştur ve bu sayede noktaların doğrusal olmadığını görmeleri kolaylaşmıştır. Sonraki aşamada basamaklardan tabana paralel olarak çizilen kesitlerin alanları üzerine çalıştıkları için dokuz nokta yerine doksan noktayı düşünerek grafiği oluşturmuşlardır. Kata bağlı alanı temsil eden grafikten basamağa bağlı alanı temsil eden grafiğe geçiş öğrencilerin ikinci dereceden bir fonksiyonun grafiğinin yapısını anlamlandırmalarında etkili olmuştur. Castillo Garsow, Johnson ve Moore (2013) aralıkların uçlarını düşünme ile sürekliliği düşünmenin temel olarak birbirinden farklı olmasına karşın, birbiriyle ilişkili olduğunu vurgulamışlar ve sürekli düşünmenin aralıklar halinde düşünmeyi gerektirdiğini ifade etmişlerdir. El Castillo etkinliği kapsamında da bu geçiş ile grafiğin sürekli olması durumuna ilişkin çoğu öğrenci uygun çıkarımlar yapabilmıştır. Bu süreçte etkinlikteki katların ve basamakların özelliklerinden ikinci dereceden fonksiyonun cebirsel çıkarımlardan çok grafiğe ilişkin çıkarımlar için yararlanılmıştır. Yapının en üst basamağına kadar çıkılıp sonra basamaklardan aşağıya doğru inilmesi ve bu aşamada her bir basamak sayısının toplam basamak olarak ele alınması durumunda grafiğin yapısının simetrik olacağını

kolaylıkla düşünebilmişlerdir. Ancak bu aşamada öğrencilerin cebirsel ifadeyi grafik ile tepe noktası, simetri eksenini gibi çokluklar açısından ilişkilendirmeleri beklenmemiştir. Etkinlikteki El Castillo yapısı bir kesit piramit olması nedeniyle simetri ekseninin değeri cebirsel olarak 90. basamağa karşılık gelmemektedir. Bu çokluklar açısından etkinlikteki yapının doğrudan kullanımı sınırlı kalacaktır. El Castillo etkinliğinin ikinci dereceden fonksiyonun simetri eksenini ve tepe noktası çokluklarının cebirsel olarak yorumlanması istenirse yapının basamaklarının alınan kesitlerin alanlarının sıfır olana kadar devam edeceği varsayımı gerekli olacaktır. Ancak amaç sadece iki doğrusal fonksiyonun çarpımı ile ikinci dereceden bir fonksiyonun elde edilmesi ve grafiğinin doğrusal olmadığına sezdirilmesi ise etkinliğin bu haliyle yeterli olacağı düşünülmektedir.

Öğrencilerin iki doğrusal fonksiyonun çarpımı ile bir ikinci dereceden fonksiyon oluşturmalarının yapılandırıcılık bakış açısına uygun olarak gerçekleştirildiği düşünülmektedir. Ancak bu aşamada dikkat edilmesi gereken önemli bir husus öğrencilerin çıkarımın tersini yapmamaları gerekliliğidir. İkinci dereceden bir fonksiyonun her zaman iki doğrusal fonksiyonun çarpımı olduğu uygun olmayan bir çıkarım olacaktır. Bu çıkarımın uygun olmamasının gerekçesi üzerine bu süreçte incelemeler yapılmasa bile öğrencilerin bu düşüncelerinin oluşmasının önüne geçecek açıklamalar yapılması gerekmektedir.

İkinci Dereceden Fonksiyonun Tepe Noktası ve Simetri Eksenine İlişkin

Öğrenci Öğrenmeleri

Öğrenciler ikinci dereceden fonksiyonun grafiği için önemli çokluklar olan tepe noktasını ve simetri eksenini El Castillo etkinliği kapsamında grafiksel olarak oluşturmuşlardır. Ancak bu çoklukların cebirsel anlamlarını kendileri için anlamlı bir gerçek yaşam bağlamı olan basketbol topunun atışı üzerinde incelemişlerdir. Bir noktadan atılan topun atıldığı yükseklik ile aynı yükseklikte bulunan bir noktaya ulaşana kadar izlediği yolun gösterimini parabol olarak çizmişlerdir. Topun hareketinin başladığı ve bittiği noktanın aynı yükseklikte olması öğrencilerin simetri eksenini oluşturmaları için önemli olmuştur. Öncelikle topun çıkabileceği maksimum yükseklik dışında topun bulunabileceği yüksekliklere ait iki durumda olduğunu ifade

etmişlerdir. Bir başka deyişle, bir yükseklik değerinde hem top maksimum noktaya çıkarken hem de bu noktadan inerken bulunabileceğini zihinsel olarak belirlemişlerdir. Simetri eksenini kullandıkları bu süreçte bu iki noktanın özelliklerini ve birbiriyle ilişkisini açıklarlarken öğrenciler genellikle tepe noktasına göre karşılaştırma yapmışlardır. Tepe noktasına göre simetrik olduğunu ifade etmeleri doğru bir çıkarım olmamasına karşın öğrencilerin zihinsel olarak simetri eksenini referans aldıkları düşünülmektedir. Topun herhangi bir yükseklikte bulunmasına karşılık gelen noktanın tepe noktasına göre simetrik olduğu noktanın parabolün üzerinde olmadığını düşünebileceklerdir. Öğrencilerin tepe noktasına göre simetrik olmaya ilişkin ifadeleri sorgulandığında iki noktanın tepe noktasına uzaklıklarının eşit olduğunu açıklamaları da bu sonucu desteklemiştir. Öğrenciler zihinsel olarak tepe noktasından x eksenine dik olarak çizdikleri doğruya göre iki noktayı birbiriyle karşılaştırmışlar ve o doğruya göre katlayarak eşlemişlerdir. Bu aşamada öğrencilerin çizimlerinin ve gösterimlerinin uygun olduğu ancak ifadelerinin hatalı olduğu görülmüştür. Bu sonuçlara dayalı olarak, öğrencilerin zihinsel eylemlerini etkili bir şekilde ortaya çıkarabilmek için farklı gösterimlerin kullanılmasının önemli olduğu söylenebilir. Özellikle bazı gösterim şekilleri öğrencilerin kavramlara ilişkin zihinlerinde oluşturdukları anlamları ortaya çıkarmada daha etkili olmaktadır. Farklı öğrenciler için farklı gösterimlerle kendilerini daha doğru açıklayabilecekleri mümkün olabilir. Bu bağlamda öğretim ve değerlendirme süreçlerinde farklı gösterim biçimlerinden mutlaka yararlanılması gerekmektedir.

Parabolün üzerinde aynı yükseklikte bulunan noktaların simetri eksenine olan uzaklıklarını toplamsal karşılaştırarak bu uzaklıkların eşit olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Öğrenciler bu aşamada aynı yükseklikteki noktaların apsis değerleri ile tepe noktasının apsis değerini ilişkilendirmeye başlamışlardır. Bu incelemeler öğrencilerin sadece parabolün x eksenini kestiği noktalardan değil her noktadan yararlanarak tepe noktasına ilişkin çıkarımlar yapabileceklerini fark etmelerini sağlamıştır. Öğrenciler yaptıkları nicel muhakemelerle hiç bir sayısal işlem yapmadan tepe noktasına ve simetri eksenine ilişkin anlamlar oluşturmuşlardır. Sonrasında tepe noktasını ve simetri eksenini bulma ile ilgili genellemeye ulaşmaları için parabolün eksenleri kestiği noktaları bulmaya yönlendirilmişlerdir. Aynı

yükseklikte olan her iki noktada olduğu gibi $y = 0$ olması durumundaki iki nokta da birbirine göre simetriktir. Parabolün üzerindeki aynı yükseklikteki tüm noktaların simetri eksenine göre simetrik olmasının yanında $y = 0$ durumundaki iki nokta için tepe noktasının apsisine göre de simetrik olduğu düşüncesi bu aşamada kullanılmıştır. Öğrenciler parabolün eksenleri kestiği iki noktanın orta noktasının tepe noktasının apsis değerine karşılık geldiğini anlamlandırmışlardır. Bu çıkarımlarını cebirsel olarak açıklayabilmek için öğrencilerin ikinci dereceden denklemlere ilişkin bilgileri önemli olmuştur. $(x_1, 0)$ ve $(x_2, 0)$ noktalarının orta noktası $(\frac{x_1+x_2}{2}, 0)$ olduğu için öğrencilerin $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri toplamının katsayılar cinsinden eşitliğini ne olduğunu bilmeleri gerekmiştir. İkinci dereceden denklemin kökler toplamının $-\frac{b}{a}$ olduğunu hatırlayan öğrenciler için tepe noktasının apsis değerinin cebirsel olarak $-\frac{b}{2a}$ olduğunu ifade etmek kolay olmuştur. Bu bilgiyi hatırlamayan öğrenciler de bir ikinci dereceden denkleminin köklerini Δ yardımıyla bularak tepe noktasının apsisini ifade edebilmişlerdir. İkinci dereceden denklem ile ikinci dereceden fonksiyon arasındaki ilişkinin kurulmasıyla öğrenciler simetri ekseninin cebirsel ifadesine ulaşabileceklerdir. Zaslavsky (1997) öğrencilerin ikinci dereceden denklem ile ikinci dereceden fonksiyonun ilişkisine yönelik kavramsal güçlüklerinin olduğunu ifade etmiş ve ikinci dereceden fonksiyonları ikinci dereceden denklem gibi görme eğiliminde olduklarını dile getirmiştir. Bu tür zorlukların ikinci dereceden fonksiyonlarda karşılaşılmaması için daha önceki süreçlere ele alınması gerekmektedir. Tez çalışması kapsamında doğrusal fonksiyonlar ve birinci dereceden denklemler arasındaki ilişkiler ve farklılıklar üzerine genellemeler yapılması istendiği için öğrenciler bu süreçte problemlerle karşılaşmamışlardır.

Öğrencilerin genel olarak tepe noktasının ve simetri eksenin işlemsel olarak nasıl elde edileceğini ortaya çıkarmaları nicel muhakemelerinin sayesinde oldukça kolay olmuştur. Öğrencilerin bu çoklukları kendilerinin oluşturmaları altında yatan nedenlerinin farkında olmalarını sağlamıştır. Borgen ve Manu (2002) tepe noktasını uygun olarak bulmada başarılı olan öğrencilerin tepe noktasını grafik ile ilişkilendirmediklerine ulaşmıştır. Öğrencilere $f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesi verilerek tepe noktasının apsis değerinin $-\frac{b}{2a}$ ile hesaplandığının söylenmesi ile öğrencilerin tepe

noktasının grafik ile ilişkisini kurmalarının önüne geçecektir. $\frac{-b}{2a}$ değerinin elde edilmesi aşamasında simetri fikrine vurgu yapılması ve buradan yola çıkarak tepe noktasına ulaşılması anlamı olacaktır.

Tepe noktası ve simetri eksenine ilişkin çıkarımları yapmada öğrencilerin basketbol topunun aynı yükseklikte bulunduğu noktaları incelemeleri önemli olmuştur. Bu süreçte kritik olan çıkarım aynı y değerine sahip noktaların karşılaştırılması ile gerçekleşmiştir. Topun çıkabileceği maksimum yükseklik olması sebebiyle de tepe noktasının y değerinin ikinci dereceden fonksiyonun alabileceği maksimum değeri ifade ettiği sonucuna doğrudan ulaşmışlardır. Öğrenciler tepe noktasının sadece $\frac{-b}{2a}$ olmadığını, tepe noktasının apsisi olan bu değer ile bu değer fonksiyonda karşılık geldiği y değerinin eşleşmesi sonucu elde edilen sıralı ikili olduğunu anlamlandırabilmişlerdir. Zaslavsky (1997) öğrencilerin tepe noktasını belirlerken sadece apsis değerini dikkate aldıklarını ve eğer iki fonksiyonun tepe noktalarının apsis değeri aynı ise ordinat değerleri farklı olmasına rağmen bu noktaların aynı nokta olduğunu düşündüklerini belirtmiştir. Gerçek yaşam durumunun bu çoklukları oluşturmada oldukça önemli olduğu ve ezbere yaklaşımların önüne geçtiği düşünülmektedir. Childers ve Vidakovic (2014) öğrencilerin tepe noktasına ilişkin fikirlerini ortaya çıkarmak için sordukları gerçek yaşam bağlamlı soruda öğrencilerin problemler yaşadıklarını ve fonksiyonun maksimum değerini bulamadıklarını ortaya çıkarmışlardır. Öğretim sürecinde bir ikinci dereceden fonksiyonun tepe noktası bağlamdan bağımsız düşünüldüğünde bir noktadan başka anlam ifade etmemekte, ancak bağlam içerisinde kullanıldığında öğrencilerin kullanabileceği çokluk haline gelmekte ve anlam kazanmaktadır. Herhangi bir top atışının çıkabileceği maksimum yükseklik, parabol şeklindeki bir köprünün yere olan minimum uzaklığı gibi durumlar içerisinde sahip olduğu anlamı yorumlanması beklenmelidir. Aksi halde, öğretim sürecinde öğrencilerin bir ikinci dereceden fonksiyonun alabileceği maksimum ya da minimum değeri bulmalarını istemek kural kullanımının ötesine geçmeyecek ve sadece işlemsel anlamlarını sağlayacaktır. Bunlar doğrultusunda, bir ikinci dereceden fonksiyonun tepe noktası ve simetri ekseninin oluşturulması için farklı bağlamlarda aynı y değerine sahip nokta çiftleri arasındaki incelemeler yapılması gerekliliği büyük önem taşımaktadır.

İkinci Dereceden Fonksiyonun Farklı Gösterimlerine İlişkin Öğrenci Öğrenmeleri

En Uzun Basketbol Atışı etkinliğinde öğrenciler basketbol atışının grafiksel gösterimini oluşturmuşlar ve bu gösterim yardımıyla farklı cebirsel gösterimlere geçiş yapmışlardır. İlk olarak parabolün eksenleri kestiği noktaları $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleriyle ilişkilendirmişlerdir. Doğrusal fonksiyona ilişkin genelleme sürecinde fonksiyon ile denklem arasındaki farklılığı ve ilişkiyi yorumladıkları için öğrenciler ikinci dereceden fonksiyon ile denklemin ilişkisini kolaylıkla kurabilmişlerdir. Öğrencilerin ön bilgilerinin iyi olmasının mevcut bilgileri ile yeni kavramları doğru şekillerde ilişkilendirmelerinde destekleyici olacağı düşünülmektedir. Bu süreçte öğrenciler $(x - x_1)(x - x_2)$ olarak ifade etmede herhangi bir zorluk yaşamamışlar ancak $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ olarak yazmada güçlüklerle karşılaşmışlardır. a katsayısının da bu gösterimde olması gerekliliğini ortaya çıkarmaları zor olmuştur. Bu konuda öğrencileri desteklemek için ek sorulara ihtiyaç duyulmuştur. Bağlama ilişkin bir fonksiyon olması sebebiyle katsayıları küçük sayılar olmadığı için öğrencilerin çarpanlara ayrılmış formda yazmaları kolay olmamıştır. Bu yüzden daha basit ikinci dereceden fonksiyon ifadeleri verilerek öğrencilerin çarpanlara ayrılmış şekilde yazmaları istenmiş ve bu denemelerinden sonra a katsayısının çarpanlara ayrılmış formda olup olmayacağına ilişkin çıkarımlarını yapabilmişlerdir. Öğrenciler bu çıkarımlarının ardından standart formdaki b ve c katsayılarının çarpanlara ayrılmış formda doğrudan görülmediğini fark etmeye yönlendirilmelidir. Ek olarak, parabolün x eksenini kesmediği durumlarda bir ikinci dereceden fonksiyonun çarpanlara ayrılmış formda yazılamayacağını fark etmeleri gerekmektedir. Bir parabolün tepe noktası x ekseninin altında olması ve bu tepe noktasının fonksiyonun minimum değerine karşılık gelmesi halinde çizilen grafik x eksenini kesmiyor gibi görünse bile kollarının devam edeceği ve x eksenini keseceği düşüncesiyle öğrencilerin bu parabolün cebirsel olarak çarpanlara ayrılmış formun yazılabileceğini ifade etmeleri önemlidir. Benzer şekilde tepe noktasının x ekseninin üzerinde olması ve bu tepe noktasının fonksiyonun maksimum değerine karşılık gelmesi durumunda da çarpanlara ayrılmış formun oluşturulabileceğini belirtmeleri beklenmektedir. Reel sayılarda tanımlı olmasına karşın parabolün sınırlı çizilmesi

durumunda bile bu çıkarımları yapabilen öğrencilerin kavramsal anlamalarının güçlü olduğu söylenebilir. Zaslavsky (1997) ikinci dereceden fonksiyonların tanım kümesinin reel sayılarda tanımlı olmasına rağmen, öğrencilerin tanım aralığını parabolün çizilen kısmı ile sınırlıymış gibi düşündüklerini ikinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesi için bir engel olduğunu dile getirmiştir. Tez çalışmasında öğrencilerin bu yanlış anlamaya sahip olmaları öğrencilerden gerçek bağlam içerisinde sınırlı olarak verilen parabollerin reel sayılar kümesinde tanımlı olarak çizmelerinin ve bu çizdikleri grafiği yorumlamalarının istenmesi bu yanlış anlayışların oluşmasının önüne geçmiştir. Bu bağlamda etkinlikteki soruların sınıf ortamında öğretmenlere fikir verebileceği düşünülmektedir.

Farklı gösterimler arası geçişin uygun şekillerde yapılabilmesi için de sınıf ortamında gerçekleştirilen öğretim deneyinde öğrencilerin belli varsayımlar doğrultusunda basketbol atışının matematiksel modelini oluşturmaları istenebilir. Bu varsayımlar doğrultusunda elde edilen matematiksel modeldeki katsayı değerleri grafiksel gösterimde de doğrudan görülebildiği için öğrencilerin farklı cebirsel gösterimlere geçiş yapmalarının kolay olabileceği düşünülmektedir.

Öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonun kanonik formu olan $f(x) = a(x - r)^2 + k$ ifadesini oluşturabilmeleri ve bu ifadedeki r ve k değerlerinin tepe noktasının koordinatlarına karşılık geldiği çıkarımını yapabilmeleri için ikinci dereceden fonksiyonun standart formdaki cebirsel ifadesini tam kare ifade içerecek forma dönüştürmeleri beklenmiştir. Öğrencilerin çarpanlara ayırma konusuna ilişkin bilgileri ne kadar güçlü ise tam kare içerecek ifadeyi oluşturmaları o kadar kolay olmuştur. Aksi halde öğrenciler bu aşamada zorluklar yaşamışlardır. Etkinliklerin tasarlanması öğrencilerin ön bilgilerini kullanarak yeni bilgilerinin oluşturulması bakış açısına dayalı olduğu için bu aşamada da çarpanlara ayırma konusuna ilişkin eksiklerinin olmadığı varsayılmıştır. Öğrencilerin eksikliklerinin olması durumunda öncelikle daha basit ifadeleri tam kare içerecek şekilde yazmaları istenebilir ve ikinci dereceden fonksiyonun farklı cebirsel gösterimlerini öğrenme sürecini aksatmayacak şekilde hızlı bir şekilde üstesinden gelinebilir.

İkinci Dereceden Fonksiyonun Katsayılarına ve Parabolün Öteleme Hareketlerine İlişkin Öğrenci Öğrenmeleri

İkinci dereceden fonksiyonların katsayılarına ilişkin incelemeler tez çalışmasında son etkinlik kapsamında ele alınmıştır. Öğrenciler ilk olarak a katsayısının anlamını oluşturmuşlardır. Bu süreçte bir parabolik uçuş gerçekleştiren uçağın farklı zamanlarda aynı yüksekliğe çıkıp indiği durumları temsil eden parabolleri aynı analitik düzleme yerleştirmeleri ve bu parabollerin cebirsel ifadelerini kendilerinin oluşturmaları çıkarımlarını desteklemiştir. Parabollerin cebirsel ifadeleri $f(x) = ax^2$ formatına uygun olduğu için öğrenciler kolaylıkla a katsayısının anlamını oluşturabilmişlerdir. a katsayısının parabolün kollarının yönünü ve açıklığını belirlediği sonuçlarına ulaşmışlardır. Zaslavsky (1997) öğrencilerin $f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde verilen ikinci dereceden fonksiyonun a katsayısını grafiğin eğimi olarak düşündüklerini ve a katsayısını bulmaya çalışırken iki noktadan eğim bulma yaklaşımını sergilediklerini belirtmiştir. Benzer şekilde Ellis ve Grinstead (2008) yaptıkları çalışmada öğrencilerin b ve a katsayısını eğim olarak ifade ettiklerine ulaşmışlardır. Bu yanlış anlayışların temelinde öğrencilerin eğim kavramının anlamını bilmemelerinin yattığı düşünülmektedir. Öğrencilerin eğim kavramını sabit değişim oranı olarak oluşturmalarını destekleyecek öğrenme ortamları tasarlandığında ikinci dereceden fonksiyonlarda değişim oranı sabit olmadığı gerekçesiyle parabolün eğiminden bahsedilemeyeceğini kolaylıkla yorumlayabilecekleri düşünülmektedir. Birbiriyle doğrudan ilişkili kavramlar olan doğrusal fonksiyonlarla ikinci dereceden fonksiyonların öğretimi birbirinden ayrı bir şekilde gerçekleştirildiğinde öğrenciler yanlış genellemelere ulaşabileceklerdir. Tez çalışmasında doğrusal fonksiyon kapsamında eğimin ve değişim oranının anlamını oluşturmaları öğrencilerin ikinci dereceden fonksiyonlardaki a katsayısının eğim olduğunu ifade etmelerinin önüne geçmiştir.

Öğrenciler b ve c katsayısının anlamlarına ilişkin çıkarımları parabolün ötelenme hareketleri doğrultusunda gerçekleştirmişlerdir. $f(x) = ax^2$ şeklinde cebirsel ifadesi olan parabollerin y eksenini üzerinde ötelenmesi ile parabolün ifadesinin $f(x) = ax^2 + c$ şeklinde olacağı sonucuna ulaşmışlardır. Bu aşamada c katsayısının y eksenini kestiği noktaya karşılık geldiğini belirlemişlerdir. Nielsen (2015) öğrencilerin

c katsayısının grafiğin y eksenini kestiği nokta olmasının nedenini açıklamada yetersiz kaldıklarını ifade etmiştir. Öğrencilerin c katsayısının anlamını kendilerinin oluşturmasını destekleyen parabolik uçuş etkinliği c katsayısının grafiksel gösterimde karşılık geldiği anlamının gerekçesini de belirleyebilmelerini sağlamıştır. Bu sayede öğrenciler farklı c katsayısına sahip ikinci dereceden fonksiyonları c katsayısı bağlamında kolaylıkla yorumlayabilmişlerdir. $f(x) = ax^2 + bx$ formundaki bir fonksiyonun grafiğinin y eksenini 0 ordinat değerinde keseceği için orijinden geçeceği sonucuna ulaşmışlardır.

İkinci dereceden fonksiyonun b katsayısını yorumlamada öğrenciler ikinci dereceden denklem bilgilerinden yararlanmaları etkili olmuştur. İkinci dereceden bir denklemin kökler toplamının $-\frac{b}{a}$ olması bilgisine sahip öğrenciler tepe noktasının apsis değerini b ve a katsayısı ile ilişkilendirmişlerdir. a katsayısının aynı olması halinde b katsayısının değişimi parabolün tepe noktasının ötelendiği anlamına geldiği sonucuna ulaşabilmişlerdir. Dolayısıyla öğrencilerin çoğu tepe noktasını belirleyen katsayıları a ve b olarak yorumlamışlardır. Bu bağlamda öğrencilerin tepe noktasına değinirlerken sadece apsis değerine odaklandıkları görülmüştür. Öğrencilerin tepe noktasının ordinat değeri bulunurken fonksiyonun kuralından yararlanılması sebebiyle tüm katsayıların belirleyici olduğunu anlamlandırmaları gerekli görülmektedir. Bu sebeple öğretim sırasında tepe noktasının sadece apsisine odaklanılmamalı her iki koordinatın bulunmasına önem verilmelidir. Böylelikle katsayılara ilişkin yanlış çıkarımların da önüne geçilebileceği düşünülmektedir. Eraslan (2005) öğrencilerin grafikteki tepe noktasının değerlerini $y = ax^2 + bx + c$ ifadesindeki b ve c katsayılarıyla ilişkilendirdiklerini ortaya koymuştur. Bu yanlış anlamalarının nedeni öğrencilerin yanlış genellemelerden ve ezbere yaklaşımlarından kaynaklanabilir. İkinci dereceden denklemin kökleri ile parabolün eksenleri kestiği noktaların ilişkilendirilmesi ve fonksiyonun eşleme fikriyle grafiğin noktalarının oluşturulması bu güçlüklerin ortadan kaldırılmasını destekleyecektir. Koklu ve Topcu (2012) yaptıkları çalışmada öğrencilerin b'nin parabolün eğimi olabileceği düşüncesine sahip oldukları sonucuna ulaşmışlardır. $f(x) = ax + b$ şeklindeki doğrusal fonksiyonlardaki x'in katsayısının eğim olduğunun ifade edilmesine dayalı olarak aşırı genellemeyle ikinci dereceden fonksiyonlara aktarılabilmektedir. Eğim kavramının anlamını kavrayan öğrencilerin

bu yanlış çıkarımları yapmayacakları düşünülmektedir. Doğrusal fonksiyonlara ilişkin anlamaların ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin anlamalar için önemi burada da karşımıza çıkmaktadır.

b katsayısının 0 olması durumunda bir başka deyişle $y = ax^2 + c$ formundaki bir ikinci dereceden fonksiyonun simetri ekseninin $x=0$ olduğunu fark eden öğrenciler bu durumu b katsayısının 0 olması ile ilişkilendirmişlerdir. Zaslavsky (1997) öğrencilerin b ve c katsayılarının 0 olması durumunda bu katsayıların olmadığını düşündüklerini ifade etmiştir. Tez çalışması kapsamında etkinlikler alanyazın taraması sonrasında kavramsal analiz doğrultusunda tasarlandığı için bu etkinliklerle öğrencilerin bu gibi yanlış anlamaları oluşturmalarının önüne geçilmesi sağlanmıştır. Öğrenciler belirli varsayımlar doğrultusunda kendi modellerini oluşturdukları ve bu modelleri farklı gösterimlerle ifade ettikleri için katsayıları ezbere şekilde yorumlamamışlardır.

Geliştirilen öğretim dizisinin öğrencilerin nicel muhakemelerini harekete geçirerek onların ikinci dereceden fonksiyonları öğrenmelerini desteklediği ortaya çıkmıştır. Bu sonucun ortaya çıkmasında etkinliklerin tasarlanmasında ve revize edilmesinde yansıtıcı soyutlama ve nicel muhakeme perspektiflerinin dikkate alınmasının etkili olduğu düşünülmektedir. Gerçekçi matematik eğitimi teorisindeki yatay ve dikey matematikselleştirme süreçlerinde öğrencilerin nicel muhakeme ile yansıtıcı soyutlama yaptıkları görülmüştür. Bu öğretim dizisinin bir öğretmen tarafından uygulanabilmesi için öncelikli olarak öğretmenlerin kavramsal çerçevedeki yapıları benimsemeleri ve anlamaları gerekmektedir. Aksi halde aynı düzeydeki öğrenciler olsa bile benzer sonuçların çıkmasını beklemek anlamlı olmayacaktır. Öğrenci düşüncelerine uygun bir şekilde öğretim tasarlama ve uygulama süreçleri için tez çalışmasında dikkate alınan perspektifler oldukça önemlidir. Matematik öğretmenlerinin bu perspektifleri farklı kavramların öğretimi sürecinde de dikkate alarak uygulamalarına yansıtabilmeleri için bu perspektifler çerçevesinde hazırlanan mesleki gelişim programları gerekli görülmektedir. Bunlara ek olarak söz konusu öğretim dizisi geliştirilirken fen lisesindeki öğrencilerin zihinsel eylemleri göz

önüne alınmıştır. Bu dizisindeki yer alan etkinliklerin diğer lise türlerindeki öğrenci gruplarına uygulanması önerilmektedir.

Bu sonuçlara ek olarak, çalışmada öğrencilerin gruplar halinde çalışmalarına karşın kavramlara ilişkin anlamalarının zihinlerinde bireysel olarak oluşturdukları ölçme-değerlendirme etkinlikleri kapsamında ortaya çıkmıştır. Öğretim deneyleri boyunca kavramlara ve çokluklara ilişkin herhangi bir fikri belirten öğrencilerin ölçme-değerlendirme sürecinde bu fikirleri grup arkadaşına göre daha fazla yansıttığı görülmüştür. Bir çalışma süreci grup olarak gerçekleştirilse de öğrenciler matematiksel kavramları kendi zihinlerinde kendi bilişsel yapılarına uygun olarak oluşturdukları için bireysel ölçme-değerlendirme gerekliliği önemlidir. Öğretmenlerin kendi sınıf ortamlarında grup çalışmaları yapmaları halinde öğrencileri bireysel olarak da değerlendirmeyi göz ardı etmemeleri gerekmektedir.

Bu tez çalışmasındaki tüm uygulamalar araştırmacılar tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu şekilde ortaya koyulan öğretim dizisini bir matematik öğretmenin sınıfında kullanmasının öğrencilerinin ikinci dereceden fonksiyonlara ilişkin kavramsal öğrenmelerini nasıl etkileyeceği araştırılması öğretim dizisinin geçerliğini arttıracaktır. Bunun yanı sıra bu öğretim dizisini uygulayan öğretmenin alan ve alan öğretimi bilgisinin de desteklenebileceği düşünülmektedir. Öğretimsel ürünlerin yaratıcı ve dikkatli bir şekilde tasarlanmasını içeren tasarım tabanlı araştırmalar katılımcıların mesleki gelişimlerine katkı sağlamaktadırlar. Bu sebeple öğretmenlerin de bu tür tasarım tabanlı araştırma süreçlerine dahil edilmeleri önemli görülmektedir.



KAYNAKÇA

- Acevedo Nistal A., Van Dooren W. & Verschaffel L. 2014. Improving Students' Representational Flexibility in Linear-Function Problems: An Intervention. **Educational Psychology**, 34(6) , 763-786.
- An, T., Mintos, A. & Yigit, M. (2013). A Cross-National Standards Analysis: Quadratic Equations and Functions. **CERME8** (s. 1825-1834). Antalya, Türkiye: ODTÜ ve ERME.
- Applefield, J. M., Huber, R. & Moallem, M. (2000). Constructivism in Theory and Practice: Toward a Better Understanding. **The High School Journal**, 84(2), 35–53.
- Aspinwall, L. & Shaw, K. L. (2002). When Visualization is a Barrier to Mathematical Understanding. **The Mathematics Teacher**, 95(9), 714-717.
- Baki, A. (2018). **Matematiği Öğretme Bilgisi** (1. Baskı) Ankara: Pegem Akademi.
- Bakker, A. (2004). **Design Research in Statistics Education: On Symbolizing and Computer Tools**. Utrecht, the Netherlands: CD Beta Press.
- Barab, S. A. & Squire, K. (2004). Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground. **The Journal of the Learning Sciences**, 13(1), 1-14.
- Belue, P. T., Overman Cavey, L. & Kinzel, M. T. (2017). An Exploration of a Quantitative Reasoning Instructional Approach to Linear Equations in Two Variables With Community College Students. **School Science and Mathematics**, 117(5), 183-193.
- Blumer, H. (1986). **Symbolic Interaction: Perspective and Method**. Berkeley: University of California Press
- Bodner, G.M. (1986). Constructivism: A Theory of Knowledge. **Journal of Chemical Education**, 63(10), 873-878.
- Borgen, K. L. & Manu, S.S. (2002). What Do Students Really Understand? **Journal of Mathematical Behavior**, 21(2), 151-165.
- Brown, A. L. (1992). Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings. **Journal of the Learning Sciences**, 2(2), 141–178.

- Bryant, A. & Charmaz, K. (2007). Discursive Glossary of Terms. A. Bryant & K. Charmaz (Ed) **The SAGE Handbook of Grounded Theory**. Sage, London, 603–612.
- Carlson, M.P. & Oerthman, M. (2005). Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function. **The Mathematical Association of America (MAA)**,(s.1-17). https://maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html#m92 adresinden alınmıştır.
- Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L. & Moore, K. C. (2013). Chunky and Smooth Images of Change. **For the Learning of Mathematics**, 33(3), 31–37.
- Charmaz, K. (2006). **Constructing Grounded Theory: A Practical Guide through Qualitative Analysis**. London: Sage.
- Charmaz, K. (2008a). Constructionism and the Grounded Theory Method. **Handbook of Constructionist Research**, 1, 397-412.
- Charmaz, K. (2008b). Grounded Theory as a Emergent Method. S. N. P. L. E. Hesse-Biber (Ed.), **Handbook of Emergent Methods** (s. 155-172). New York: The Guilford Press.
- Charmaz, K. (2008c). The Legacy of Anselm Strauss in Constructivist Grounded Theory. N. Denzin (Ed) **Studies in Symbolic Interaction** (s. 127-141). Emerald Group Publishing Limited.
- Charmaz, K. (2000). Experiencing Chronic Illness. **Handbook of Social Studies in Health and Medicine**, 277-292.
- Childers, A. B. & Vidakovic, D. (2014). Students' Understanding of the Concept of Vertex of Quadratic Functions in relation to Their Personal Meaning of the Concept of Vertex. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**, 1-33.
- Clement, L. L. (2001). What Do Students Really Know about Functions?. **The Mathematics Teacher**, 94(9), 745.
- Clements, D. & Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education. **Mathematical Thinking and Learning**, 6(2),81-89.
- Cobb P. (2000) Constructivism in Social Context. L.P. Steffe & P.W. Thompson (Ed.). **Radical Constructivism in Action: Building on the Pioneering Work Of Ernst von Glasersfeld** (s. 152-178). London: Routledge-Falmer.

- Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Ed.). (1995). **The Emergence of Mathematical Meaning-Interaction in Classroom Cultures**. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. **Educational Psychologist**, 31(3-4), 175–190.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. **Educational Researcher**, 32(1), 9–13.
- Collins, A. (1992). Towards a Design Science of Education. E. Scanlon & T. O'Shea (Ed.), **New Directions in Educational Technology** (s. 15–22). Berlin: Springer
- Collins, A., Joseph, D. & Bielaczyc, K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues. **Journal of the Learning Sciences**, 13(1), 15–42.
- Colunga Cavazos, J. E. (2001). The Cognitive Development of Students from 9th Grade to College in the Learning of Linear and Quadratic Functions. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Indiana University.
- Common Core State Standards Initiative. (2010). Common Core State Standards for mathematics. http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf adresinden alındı.
- Confrey, J. (1990). What Constructivism Implies for Teaching. **Journal for Research in Mathematics Education. Monograph**, 4, 107-210.
- Confrey, J. (2006). The Evolution of Design Studies as Methodology. R. K. Sawyer (Ed.), **The Cambridge Handbook of the Learning Sciences** (s. 135-152). New York, NY: Cambridge University Press.
- Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, Covariation and Their Role in the Development of Exponential Function. **Journal for Research in Mathematics Education**, 26, 66–86.
- Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Wilson, P. H. & Mojica, G. (2008). Synthesizing Research on Rational Number Reasoning. **Working Session at the Research Pre-session of the National Council of Teachers of Mathematics**, Salt Lake City, UT.

- Corbin, J. & Strauss, A. (1990). Grounded Theory Research: Procedures, Canons, and Evaluative Criteria. **Qualitative Sociology**, 13(1), 3-21.
- Craine, T. V. (1996). A Graphical Approach to the Quadratic Formula. **The Mathematics Teacher**, 89(1), 34.
- Design-Based Research Collective (2003). Design Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. **Educational Researcher**, 32(1), 5–8.
- DiSessa, A. A. (2007). An Interactional Analysis of Clinical Interviewing. **Cognition and Instruction**, 25(4), 523-565.
- DiSessa, A. A. & Cobb, P. (2004). Ontological Innovation and the Role of Theory in Design Experiments. **The Journal of the Learning Sciences**, 13(1), 77-103.
- Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1982). Intuitive Functional Concepts: A Baseline Study on Intuitions. **Journal for Research in Mathematics Education**, 13(5), 360-380.
- Eisenberg, T. (1992). On the development of a Sense for Functions. G. Harel & E. Dubinsky (Eds.) **The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy**, (s. 153-174) Mathematical Association of America.
- Ellis, A. B. & Grinstead, P. (2008). Hidden Lessons: How a Focus on Slope-Like Properties of Quadratic Functions Encouraged Unexpected Generalizations. **The Journal of Mathematical Behavior**, 27(4), 277-296.
- Ellis, A. B. (2007). The Influence of Reasoning with Emergent Quantities on Students' Generalizations. **Cognition and Instruction**, 25(4), 439-478.
- Ellis, A. B. (2011). Algebra in the Middle School: Developing Functional Relationships through Quantitative Reasoning. J. Cai & E. Knuth (Ed.), **Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives**. (s. 215-238). Springer, Berlin Heidelberg.
- Engelhardt, P. V., Corpuz, E. G., Ozimek D. J. & Rebello, N. S. (2004). The Teaching Experiment –What It Is and What It Isn't? **Proceedings of Physics Education Conference-AIP Conference** (s. 157-160). Madison, WI.

- Eraslan, A. (2005). A Qualitative Study: Algebra Honor Students' Cognitive Obstacles As They Explore Concepts of Quadratic Functions. Yayınlanmamış Doktora Tezi, The Florida State University College of Education.
- Eraslan, A. (2007). The Notion of Compartmentalization: The Case of Richard. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 38(8), 1065-1073.
- Eraslan, A. (2008). The Notion of Reducing Abstraction in Quadratic Functions. **International Journal of Mathematics Education in Science and Technology**, 39(8), 1051-1060.
- Eraslan, A., Aspinwall, L., Knott, L. & Evitts, T. (2007). Quadratic Functions: Students' Graphic and Analytic Representations. **The Mathematics Teacher**, 101(3), 233-237.
- Ernest, P. (1994). Varieties of Constructivism: Their Metaphors, Epistemologies and Pedagogical Implications. **Hiroshima Journal of Mathematics Education**, 2(8), 1-14.
- Gallant, M. J. & Kleinman, S. (1983). Symbolic Interactionism vs. Ethnomethodology. **Symbolic Interaction** 6(1), 1-18.
- Ginsburg, H. P. (1981). The Clinical Interview in Psychological Research on Mathematical Thinking: Aims, Rationales, Techniques. **For the Learning of Mathematics**, 1(3), 4-11.
- Glaser, B. G. & Holton, J. (2004). Remodelling Grounded Theory. **Grounded Theory Review**, 4(1), 1-24.
- Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). **The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research**. New York: McGraw-Hill.
- Glaser, B. G. (2007). **Naturalist Inquiry and Grounded Theory. Historical Social Research /Historische Sozialforschung. Supplement**, 19, 114-132.
- Glaser, B. G. & Holton, J. (2007). **Remodeling Grounded Theory. Historical Social Research /Historische Sozialforschung. Supplement**, 19, 47-68.

- Gorard, S., Roberts, K. & Taylor, C. (2004). What Kind of Creature Is a Design Experiment? **British Educational Research Journal**, 30(4), 575-590.
- Gravemeijer, K. & van Eerde, D. (2009). Design Research as a means for Building a Knowledge Base for Teachers and Teaching in Mathematics Education. **The Elementary School Journal**, 109(5), 510–524.
- Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design Research from the Learning Design Perspective. J. v. d. Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Ed.), **Educational Design Research** (s. 17-51). London: Routledge.
- Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example. **Educational Studies in Mathematics**, 39, 111-129.
- Gravemeijer, K. (1999). Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. **Mathematical Thinking and Learning**, 1(2), 155-177.
- Gravemeijer, K. (2004). Local Instruction Theories as a Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education. **Mathematical Thinking and Learning**, 6(2), 105-128.
- Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J. (2000). Symbolizing Modeling and Instructional Design. P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Ed.), **Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms. Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design**. (s. 225-273). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994). **Developing Realistic Mathematics Education**. Utrecht, The Netherlands: CD-Beta press/Freudenthal Institute.
- Hohensee, C. (2016). Student Noticing in Classroom Settings: A Process Underlying Influences on Prior Ways of Reasoning. **The Journal of Mathematical Behavior**, 42, 69-91.
- Huang, X., Li, S. & An, S. (2012). Understanding of Teaching Strategies on Quadratic Functions in Chinese Mathematics Classrooms. **Research in Mathematical Education**, 16(3), 177-194.

- Hunting, R. P. (1997). Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice. **The Journal of Mathematical Behavior**, 16(2), 145-165.
- Johnson, H. L. (2013). Reasoning about Quantities That Change Together. **Mathematics Teacher**, 106(9), 704-708.
- Johnson, H. L. (2012). Reasoning about Quantities Involved in Rate of Change as Varying Simultaneously and Independently. R. Mayes & L. L. Hatfield (Ed.), **Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling: A Driver for STEM Integrated Education and Teaching in Context** (Cilt 2, s. 39-53). Laramie, WY: University of Wyoming College of Education.
- Johnson, H. L. (2015). Secondary Students' Quantification of Ratio and Rate: A Framework for Reasoning about Change in Covarying Quantities. **Mathematical Thinking and Learning**, 17(1), 64-90.
- Karim, N. A. (2009). Understanding Quadratic Functions Using Real World Problems and IT, 291-295. <http://www.qucosa.de/fileadmin/data/qucosa/documents/8031/Proceedings-636pagesDresden2009291-295.pdf> adresinden alınmıştır.
- Kenny, M. & Fourie, R. (2015). Contrasting Classic, Straussian, and Constructivist Grounded Theory: Methodological and Philosophical Conflicts. **The Qualitative Report**, 20(8), 1270.
- Knuth, E. J. (2000). Understanding Connections between Equations and Graphs. *The Mathematics Teacher*, 93(1), 48-53.
- Kobak Demir, M. & Gür, H . (2016). Öğretmen Adaylarının Parabol Bilgisini Oluşturma Süreçleri ve Bu Süreçte Öğretmenin Rolü: Durum Çalışması. **Education Sciences**, 11(4), 195-216.
- Koklu, O. & Topcu, A. (2012). Effect of Cabri-Assisted Instruction on Secondary School Students' Misconceptions about Graphs of Quadratic Functions. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 43(8), 999-1011.
- Konold C. & Johnson D. K. (1991) Philosophical and Psychological Aspects of Constructivism. L. P. Steffe (Ed.) **Epistemological Foundations of Mathematical Experience** (s. 1-13). Springer, New York.

- Kotsopoulos, D. (2007). Unravelling Student Challenges with Quadratics. **Australian Mathematics Teacher**, 63(2), 19-24.
- Kutluca, T. & Baki, A. (2013). İkinci Dereceden Fonksiyonlar Konusunda Geliştirilen Çalışma Yaprakları Hakkında Öğrenci Görüşleri. **Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi**, 28(3), 319-331.
- Kutluca, T. (2009). İkinci Dereceden Fonksiyonlar Konusu İçin Tasarlanan Bilgisayar Destekli Öğrenme Ortamının Değerlendirilmesi. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Kutluca, T. (2013). Excel Yazılımı ile Geliştirilen Bilgisayar Destekli Bir Öğretim Materyalinin Tasarlanması. **Elektronik Eğitim Bilimleri Dergisi**, 2(4), 40-49.
- Kutluca, T. (2017). İkinci Dereceden Fonksiyonlar Konusuna İlişkin 10.Sınıf Öğrencilerinin Başarı, Öz Değerlendirme & Tutumlar Arasındaki İlişki. **Batman Üniversitesi Yaşam Bilimleri Dergisi**, 7(1), 76-88.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. **Review of Educational Research**, 60(1), 1-64.
- Lempert, L. B. (2007). Asking Questions of the Data: Memo Writing in the Grounded. **The Sage Handbook of Grounded Theory**, 245-264.
- Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). **Beyond Constructivism: A Models & Modelling Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching**. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Lobato, J. & Siebert, D. (2002). Quantitative Reasoning in a Reconceived View of Transfer. **The Journal of Mathematical Behavior**, 21(1), 87-116.
- Lobato, J., Hohensee, C., Rhodehamel, B. & Diamond, J. (2012). Using Student Reasoning to Inform the Development of Conceptual Learning Goals: The Case of Quadratic Functions. **Mathematical Thinking and Learning**, 14(2), 85-119.
- Maloney, A. P. & Confrey, J. (2010). The Construction, Refinement, and Early Validation of the Equipartitioning Learning Trajectory. **9th International Conference of the Learning Sciences**. Chicago, IL.

- McKenney, S. & van den Akker, J. (2005) Computer-based support for Curriculum Designers: A Case of Developmental Research. **Educational Technology Research & Development**, 53(2), 41-66.
- McKenney, S., Nieveen, N. & van den Akker, J. (2006). Design Research from a Curriculum Perspective. J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Ed.), **Educational Design Research**. London:Routledge.
- Metcalfe, R. C. (2007). The Nature of Students' Understanding of Quadratic Functions, Yayınlanmamış Doktora Tezi, The State University of New York at Buffalo, ABD.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). **Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) Öğretim Programı**. Ankara: MEB Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). **Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) Öğretim Programı**. Ankara: MEB Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları.
- Mitchellmore, M. & Cavanagh, M. (2000). Students' Difficulties in Operating a Graphics Calculator. **Mathematics Education Research Journal**, 12(3), 254-268.
- Mojica, G. (2010). Preparing Pre-Service Elementary Teachers to Teach Mathematics with Learning Trajectories. Yayınlanmamış Doktora Tezi. North Carolina State University, USA.
- Molina, M., Castro, E. & Castro, E. (2007). Teaching Experiments within Design Research. **The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences**, 2(4), 435-440.
- Moore, K. C. (2014). Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac. **Journal for Research in Mathematics Education**, 45(1), 102-138.
- Moore, K. C., Carlson, M. P. & Oehrtman, M. (2009). The role of Quantitative Reasoning in Solving Applied Precalculus Problems. **Proceedings of the Twelfth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education**. Raleigh, NC: North Carolina State University.
- Mousley, J., Sullivan, P. & Zevenbergen, R. (2007). Keeping All Students on the Learning Path. **Proceedings from Ninth International Conference: The Mathematics Education into the 21st Century Project**. Charlotte, NC: UNCC.

- Movshovitz-Hadar, N. (1993). A Constructive Transition from Linear to Quadratic Function. **School Science and Mathematics**, 93(6), 288-298.
- Musgrave, S. & Thompson, P. W. (2014). Function Notation as an Idiom. **In Proceedings of the 38th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (Cilt 4, s. 281-288).
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2001). **Practice-Based Professional Development for Teachers of Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Research Council (2007). **Taking Science to School**. Washington, DC: National Academy Press.
- Nielsen, L. E. J. (2015). Understanding Quadratic Functions and Solving Quadratic Equations: An Analysis of Student Thinking and Reasoning. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Washington Üniversitesi, Missouri, ABD.
- Oehrtman, M. C., Carlson, M. P. & Thompson, P. W. (2008). Foundational Reasoning Abilities That Promote Coherence in Students' Understandings of Function. M. P. Carlson & C. Rasmussen (Ed.), **Making the Connection: Research and Practice in Undergraduate Mathematics** (s. 150-171). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Özaltun Çelik, A. & Bukova Güzel, E. (2017). Revealing Ozgur's Thoughts of a Quadratic Function with a Clinical Interview: Concepts and Their Underlying Reasons. **International Journal of Research in Education and Science (IJRES)**, 3(1), 122-134
- Pablopulos, A. & Carolina, C. (2015). Investigating the Use of the Clinical Interview Method in an Elementary Mathematics Methods Course, Yayınlanmamış Doktora Tezi. Rutgers University, Graduate School of Education, New Jersey, USA.
- Philipp, R. A. & Vincent, C. (2003). Reflecting on Learning Fractions without Understanding. **ON-Math: Online Journal of School Mathematics**, 2(2).

- Piaget, J. (1970). **Genetic Epistemology** (E. Duckworth, Trans.). New York: Columbia University Press.
- Pierce, R. (2005). Linear Functions and a Triple Influence of Teaching on the Development of Students' Algebraic Expectation. **29th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Melbourne.
- Plomp, T. (2013). Educational Design Research: An Introduction. T. Plomp & N. Nieveen (Ed.), **Educational Design Research Part A: An Introduction** (s. 11-50). Enschede: SLO Netherlands Institute for Curriculum Development.
- Prediger, S., Gravemeijer, K. & Confrey, J. (2015). Design Research with a Focus on Learning Processes: An Overview on Achievements and Challenges. **ZDM Mathematics Education**, 47(6), 877–891.
- Reeves, T. (2000). Enhancing the Worth of Instructional Technology Research through “Design Experiments” and Other Developmental Strategies. Paper presented at the AERA.
- Schwarz, B. B. & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or Levers in Learning the Function Concept? The Role of Computer Tools. **Journal for Research in Mathematics Education**, 30(4), 362-389
- Selden, A. & Selden J. (1992). Research Perspectives on Conceptions of Function: Summary and Overview. E. Dubinsky & G. Harel (Ed.). **The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy**. (s. 1–16). MAA Notes 25: Mathematical Association of America.
- Sevim, V. (2011). Students’ Understanding of Quadratic Functions: A Multiple Case Study. Yayınlanmamış Doktora Tezi, The University of North Carolina, USA.
- Simon, M. A. (2000). Constructivism, Mathematics Teacher Education, and Research in Mathematics Teacher Development. L.P.. Steffe & P.W. Thompson (Ed.). **Radical Constructivism in Action: Building on the Pioneering Work of Ernst von Glasersfeld** (s. 213-230). London: Routledge-Falmer.
- Simon, M. & Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. **Mathematical Thinking and Learning**, 6(2), 91-104.

- Simon, M. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, 26,114-145.
- Simon, M. (2003). Logico-Mathematical Activity versus Empirical Activity: Examining a Pedagogical Distinction, N. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Ed.), **Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, (Cilt 4, s. 183-190). Honolulu, Hawaii.
- Simon, M. (2006). Pedagogical Concepts as Goals for Teacher Education: Towards an Agenda for Research in Teacher Development. S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Ed.), **Proceedings of the Twenty-Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, (Cilt. 2, s. 730-735). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.
- Simon, M. (2016). An Approach to the Design of Mathematical Task Sequences: Conceptual Learning as Abstraction. **PNA**, 10(4), 270-279.
- Simon, M., Saldanha, L., McClintock, E., Akar, G. K., Watanabe, T. & Zembat, I. O. (2010). A Developing Approach to Studying Students' Learning through Their Mathematical Activity. **Cognition and Instruction**, 28(1), 70-112.
- Simon, M., Tzur, R., Heinz, K. & Kinzel, M. (2004). Explicating a Mechanism for Conceptual Learning: Elaborating the Construct of Reflective Abstraction. **Journal for Research in Mathematics Education**, 35(5), 305-329.
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), **Algebra in the Early Grades** (s. 133-160). New York: Lawrence Erlbaum.
- Smith, J. & Thompson, P. W. (2008). Quantitative Reasoning and the development of algebraic reasoning. J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Ed.), **Algebra in the Early Grades** (s. 95-132). New York: Erlbaum.
- Steffe, L. P. (2002). A New Hypothesis Concerning Children's Fractional Knowledge. **Journal of Mathematical Behavior**, 102, 1-41.
- Steffe, L. P. & Kieren, T. (1994). Radical Constructivism and Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**, 25(6), 711-733.

- Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. R. Lesh & A. E. Kelly (Ed.), **Research Design in Mathematics and Science Education** (s. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Steffe, L. P. (1991). The Constructivist Teaching Experiment: Implication and Illustrations. E. von Glasersfeld (Ed.), **Radical Constructivism in Mathematics Education** (s. 177-194). Dordrecht, Hollanda: Kluwer.
- Stephan, M. L (2015). Conducting Classroom Design Research with Teachers. **ZDM Mathematics Education**, 47(6), 905-917.
- Stephan, M., Underwood-Gregg, D. & Yackel, E. (2014). Guided Reinvention: What Is It and How Do Teachers Learn This Teaching Approach? Y. Li, E. A. Silver & S. Li (Ed.), **Transforming Mathematics Instruction: Multiple Approaches and Practices** (s. 37-57). Cham: Springer.
- Strauss, A. L. & Corbin, J. M. (1998). **Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures For Developing Grounded Theory** (2. Baskı). Thousand Oaks: Sage Publications.
- Strauss, A. L. & Corbin, J. M. (1994). Grounded Theory Methodology: An Overview. N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Ed.), **Handbook of Qualitative Research** (s. 273–285). London: Sage.
- Swan, M. (2014). Design Research in Mathematics Education. S. Lerman (Ed.), **Encyclopedia of Mathematics Education** (s. 148–152). Dordrecht, Netherlands: Springer Netherlands.
- Swanepoel, C. H. & Gebrekal, Z. M. (2010). The Use of Computers in the Teaching and Learning of Functions in School Mathematics in Eritrea. **Africa Education Review**, 7(2), 402-416.
- Tall, D., McGowen, M. & DeMarois, P. (2000). The Function Machine as a Cognitive Root for the Function Concept. **Proceedings of 22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Tucson, AZ:255-261.

- Tanişlı, D. (2011). Functional Thinking Ways in Relation to Linear Function Tables of Elementary School Students. **The Journal of Mathematical Behavior**, 30(3), 206-223.
- Tatsis, K. & Koleza, E. (2002). Language as a Communicative and Interpretive Tool in Mathematical Problem Solving. **2nd International Conference on the Teaching of Mathematics Proceedings (ICTM)**.
- Thompson, P. W. (2000). Radical Constructivism: Reflections and Directions. L.P.. Steffe & P.W. Thompson (Ed.). **Radical Constructivism in Action: Building on the Pioneering Work of Ernst von Glasersfeld** (s. 291-315). London: Routledge-Falmer..
- Thompson, P. W. (2002). Didactic Objects and Didactic Models in Radical Constructivism. K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (Ed.), **Symbolizing and Modeling In Mathematics Education**. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Thompson, P. W. & Carlson, M. P. (2017). Variation, Covariation, and Functions: Foundational Ways of Thinking Mathematically. J. Cai (Ed.), **Compendium for Research in Mathematics Education** (s. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Thompson, P. W. (1989). Artificial Intelligence, Advanced Technology, and Learning and Teaching Algebra. C. Kieran & S. Wagner (Ed.), **Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra** (s. 135-161). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Thompson, P. W. (1990). **A Theoretical Model of Quantity-Based Reasoning in Arithmetic and Algebraic**. Center for Research in Mathematics & Science Education: San Diego State University.
- Thompson, P. W. (1991). To Experience is to Conceptualize: Discussions of Epistemology and Experience. L. P. Steffe (Ed.) **Epistemological Foundations of Mathematical Experience**, (s. 260–281), Springer-Verlag, New York.
- Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. J. Kaput (Ed.), **Research in Collegiate Mathematics Education, 1** (Issues in Mathematics Education, Cilt 4, s. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.

- Thompson, P. W. (1995). Notation, Convention, and Quantity in Elementary Mathematics. J. Sowder & B. Schapelle (Ed.), **Providing a Foundation for Teaching Middle School Mathematics** (s. 199-221). Albany, NY: SUNY Press.
- Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of Mathematical Ideas: Some Padework at the Foundation of Mathematics Education. Plenary Paper Delivered at the 32nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. SÈpulveda (Ed.), **Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, (Cilt 1, s. 45-64). MorÈlia, Mexico: PME.
- Thompson, P. W. (2011). Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling. L. Hatfield, S. Chamberlain & S. Belbase (Ed.), **New Perspectives and Directions for Collaborative Research in Mathematics Education WISDOMe Monographs** (Cilt 1, s. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming Press.
- Thompson, P. W. (2013). Why Use $f(x)$ When All We Really Mean Is y . OnCore, **The Online Journal of the AAMT**, 18-26.
- Van de Walle, J.A., Karp, K.S. & Bay-Williams, J.M. (2010). **Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally** (7. Baskı). Boston: Allyn & Bacon.
- Van den Akker, J. (1999). Principles and Methods of Development Research. J. van den Akker, R.M. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen & T. Plomp (Ed.), **Design Approaches and Tools in Education and Training** (s. 1-14). Boston: Kluwer Academic
- van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). **Assessment and Realistic Mathematics Education**, CD-ß Press Utrecht University, Utrecht, The Netherlands.
- van den Heuvel-Panhuizen, M. & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. S. Lerman (Ed.), **Encyclopedia of Mathematics Education** (s. 521-525). Springer Netherlands.
- von Glasersfeld, E. (1989). Cognition, Construction of Knowledge, and Teaching. **Constructivism in Science Education** (s. 11-30). Springer, Dordrecht.

- von Glasersfeld, E. (1982). An Interpretation of Piaget's Constructivism. **Revue Internationale de Philosophie**, 36(4), 612-635.
- von Glasersfeld, E. (1998). Why Constructivism Must Be Radical. M. Larochelle., N. Bednarz & J. Garrison (Ed). **Constructivism and Education** (s. 23-28). Cambridge University Press: Cambridge.
- von Glasersfeld, E. (2002). **Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning**. Routledge Falmer.
- Wang, Y., Barmby, P. & Bolden, D. (2017). Understanding Linear Function: A Comparison of Selected Textbooks from England and Shanghai. **International Journal of Science and Mathematics Education**, 15(1), 131-153.
- Weber, E. D. (2012). Students' Ways of Thinking About Two-Variable Functions and Rate of Change in Space. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Arizona State University.
- Weber, E., Ellis, A., Kulow, T. & Ozgur, Z. (2014). Six Principles for Quantitative Reasoning and Modeling. **Mathematics Teacher**, 108(1). 24-30.
- Wilkie, K. J. (2016a). Students' Use of Variables and Multiple Representations in Generalizing Functional Relationships Prior To Secondary School. **Educational Studies in Mathematics**, 93(3), 333-361.
- Wilkie, K. J. (2016b). Using Challenging Tasks for Formative Assessment on Quadratic Functions with Senior Secondary Students. **Australian Mathematics Teacher**, 72(1), 30.
- Yackel, E. (2001). Explanation, Justification and Argumentation in mathematics classrooms. M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), **Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, (Cilt 1, s. 9-24). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, 22, 390-408.
- Yackel, E., Cobb, P. & Wood, T. (1991). Small-Group Interactions as a Source of Learning Opportunities in Second-Grade Mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, 22(5), 390-408.

- Yıldırım, A. Şimşek H. (2011). **Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri** (8. Baskı)
Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Zaslavsky, O. (1997). Conceptual Obstacles in the Learning of Quadratic Functions. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, 19(1), 20-45.
- Zazkis, R., Liljedahl, P. & Gadowsky, K. (2003). Conceptions of Function Translation: Obstacles, Intuitions, and Rerouting. **Journal of Mathematical Behavior**, 22(4), 435–448.



EKLER

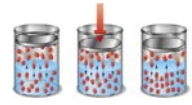
EK 1. Etkinlik 1-Dünya'nın Dibi

1.Aşama

Kanadalı yönetmen James Cameron, 1989 yılında çektiği ve okyanusların derinliklerinde keşif yapan bir araştırma ekibini anlattığı Abyss filmine konu olan, “Dünya’nın Dibi” olarak bilinen 10.994 metre derinlikteki Mariana Çukuru’na 2012 yılında özel yapım Challenger Deep isimli denizaltı ile dalış yapmış ve dip noktasında 6 saat kalmıştır. Denizaltı olmadan bu dalışı yapmaya kalksaydı derinlerden su yüzeyine çıktığında ani basınç değişiminden dolayı vurgun (dekompresyon hastalığı) yiyebilirdi.

Bunun nedeni ise derinliklere inildiğinde her 10 metrede basıncın 1 ATM artmasına bağlı olarak oksijen, karbondioksit ve azot gibi gazların dokularda ve kanda daha fazla çözünmesidir. Yüksek basınçlı derinliklerden aniden düşük basınçlı ortama geçildiğinde, kanda ve dokulardaki çözünmüş gazlar, çözünmüş durumdan çıkıp, kabarcıklar şekline dönüşür. Bu kabarcıkların genişlemesiyle hücre şişer ve patlayarak ortadan kalkar ve vücutta çeşitli hasarlara neden olabilir. Scuba (Self Contained Underwater Breathing Aparatus- Su altında kendi kendine yetebilen soluma donanımı) dalışı yani tüplü dalış yapanların da bu basınç değişikliğini dikkate almadıkları durumlarda kötü sonuçlarla karşılaştıkları görülmektedir. 2006 yılında Fenerbahçe Kulübü eski Başkanı Ali Şen ile birlikte tüplü dalış yapan Bodrum Clup Flipper’ın sahibi Ahmet Bayer 53 metreye inmiş ve vurgun yemiştir. Ardından basınç odasına alınarak hiperbarik tedavisine başlanmıştır.

Hiperbarik tedavisinde tamamen kapalı bir basınç odasında atmosfer basınçtan daha yüksek bir basınç altında, maske, başlık veya endotrakeal tüple (solunumu güvenlik altına almak veya solunumu kontrol etmek amacıyla trakea yerleştirilen içine tüp) aralıklı olarak oksijen solutulmaktadır. Bu ortamda % 100 oksijen bulunduğu plazmada oksijenin çözünürlüğü artar. Bunun yanında, hacmi genişleyen nitrojen kabarcıklarının yeniden erimiş nitrojen duruma geçmesi sağlanır. Oksijenin normal ortamda ve hiperbarik ortamda bazı basınçlarda kandaki çözünme miktarları aşağıdaki tabloda verilmiştir.



Basınç (ATM)	Normal ortam (ml/dl)	Hiperbarik ortam (ml/dl)
1	0.31	2.07
1.3	0.46	2.79
1.5	0.56	3.27
2.4	1.01	5.43
3.1	1.36	7.11

- Basınç ile derinlik arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade ediniz.
- Basınç ile derinlik arasındaki ilişkiyi gösteren grafiğini çizin. Grafiği cebirsel karşılaştırarak yorumlayınız.
- Tablodaki normal ortam verilerine göre oksijenin çözünmesi ile basınç arasında nasıl bir ilişki vardır? Matematiksel olarak ifade ediniz. Oluşturduğunuz matematiksel ifadenin bütün değerler için uygun olup olmadığını inceleyiniz.

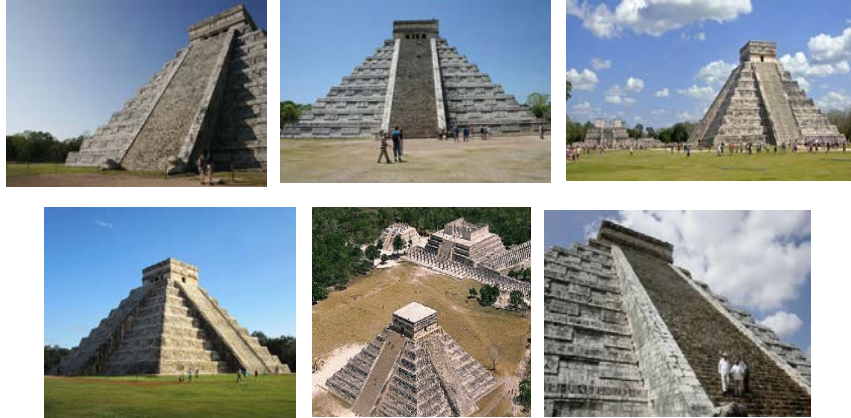
- d)** Bu ilişkinin grafiğini çizin ve nasıl çizdiğinizi açıklayınız. Grafiği cebirsel ifadeyle ve tabloyla karşılaştırarak yorumlayınız.
- e)** Mariana Çukuruna serbest dalış yaptığında/yapabildiğini düşündüğümüzde dokularında çözünen oksijen miktarı ne kadar olur?
- f)** James Cameron hiperbarik bir ortamda olsaydı aynı derinlikte dokularında çözünen oksijen miktarı ne kadar olurdu?

2.Aşama

- a)** Etkinliğin birinci aşamasında oluşturmuş olduğunuz üç fonksiyonu temsil edecek genel ifadeyi x , $f(x)$ değişkenlerini ve a , b katsayılarını kullanarak yazınız. a ve b katsayılarının ve x ve $f(x)$ değişkenlerinin anlamları doğrultusunda fonksiyonu yorumlayınız. Bu değerler grafiksel gösterimde neye karşılık gelmektedir? Açıklayınız.
- b)** Yazmış olduğunuz doğrusal fonksiyon ifadesinde x 'in katsayısının $2a$ olduğunu düşününüz. İlk fonksiyon ile karşılaştırarak farklılıklarını ve benzerliklerini nedenleriyle birlikte yorumlayınız.
- c)** $ax + b = 0$ gösterimine uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem yazınız ve bu denklemle ilişkili bir doğrusal fonksiyon oluşturarak aralarındaki fark ve benzerlikleri inceleyiniz.
- d)** Yazdığınız denklemle çözüm kümesi aynı olacak farklı denklemler oluşturunuz ve bu denklemler arasında bir ilişki var mıdır? Açıklayınız.
- e)** Bu denklemlerin tümünü gösteren genel bir matematiksel ifade yazınız.
- f)** Yazdığınız fonksiyonun (c basamağında) x eksenini kestiği noktadan geçen başka doğrusal fonksiyonlar yazınız. Bu fonksiyonları karşılaştırınız, farklılık ve benzerliklerini yazınız.
- g)** (e) ve (f) basamaklarında ulaştığınız sonuçları dikkate alarak ne gibi çıkarımlarda bulunursunuz?
- h)** Doğrusal fonksiyon ve kritik özelliklerine yönelik her aşamada yaptıklarınızla ilgili olarak bir genelemeye ulaşabilir misiniz? Ayrıntılarıyla yazınız.

Ek 2. Etkinlik 2- El Castillo

1.Aşama



Dünyanın yedi harikasından biri olan ve UNESCO tarafından Dünya Kültür Mirası listesinde yer alan El Castillo bir diğer adıyla Chichen Itza (Kukulcan Piramidi/Tapınağı), Maya uygarlığı tarafından inşa edilen, güzel ve değişik mimarisinin yanı sıra konumu sebebiyle de Yucatan yarımadasının en fazla ziyaret edilen arkeolojik kalıntısıdır. Astronomide oldukça ileri bir uygarlık olan Mayalılar ürettikleri eserlerde de astronomi biliminden faydalanmışlardır. 9 kat şeklinde inşa edilen kare piramit dokuz gezegeni temsil etmektedir. Yapının dört tarafında toplam 364 adet basamak bulunmaktadır. En tepesinde yer alan platformla beraber basamaklar 365 adete ulaşır ki bu da bir yılın günlerine karşılık gelmektedir.

Bu tapınağın dokuzuncu katının bittiği kısmı üst taban olarak kabul edelim. Bu yapının alt ve üst taban uzunluklarını ve yüksekliğini bulunuz. Yaptıklarınızı ayrıntılı olarak açıklayınız.

- Yapının her katındaki taban uzunlukları nasıl değişiyor? Yapının en altındaki katı birinci kat kabul ederek her kat için oluşan karelerin kenar uzunluklarını bulunuz.
- Her kata karşılık gelecek şekilde oluşan karelerin kenar uzunluklarını bulundukları kata bağlı olarak doğrudan gösterebilecek bir matematiksel ifade oluşturunuz. Oluşturduğunuz ifadeyi analiz ediniz ve grafiğini çiziniz.
- Her basamağa karşılık gelen ve tabana paralel olacak şekilde oluşan kesitlerin kenar uzunluklarını bulundukları basamaklara bağlı olarak doğrudan gösterebilecek bir matematiksel ifade oluşturunuz. Oluşturduğunuz ifadeyi analiz ediniz ve grafiğini çiziniz.
- Yapının herhangi bir yüksekliğinde tabana paralel olacak şekilde oluşan kesitin kenar uzunluklarını doğrudan gösterebilecek bir matematiksel ifade oluşturunuz. Oluşturduğunuz ifadeyi analiz ediniz ve grafiğini çiziniz.

2.Aşama

- a) Tapınağın içerisine girerek tüm katlarda dolaşabilmek mümkün olduğuna göre, herhangi bir katta dolaşan insanların bulundukları kata bağlı olarak ne kadarlık alanda gezeceklerini bulunuz ve katlara bağlı alan değerleri arasındaki değişim miktarlarını inceleyerek çıkarımlarınızı yazınız.
- b) Herhangi bir katta dolaşan insanların bulundukları kata bağlı olarak ne kadarlık alanda gezeceklerini gösteren matematiksel ifadeyi karenin alanı fikrinden yararlanarak oluşturunuz.
- c) Bulunulan kata bağlı olarak oluşan alanı gösteren grafiği çiziniz. Bu grafik için ne söyleyebilirsiniz? Sizce bu noktaların tümünden geçen bir doğru var mıdır? Gerekçeleriyle açıklayınız.
- d) Her basamağa karşılık gelen ve tabana paralel olacak şekilde oluşan kesitlerin alanını belirleyebilecek genel bir matematiksel ifade yazınız. Bu matematiksel ifadeyi, oluşan kesitin iki kenar uzunluğunun çarpımı şeklinde düzenleyiniz.
- e) Her basamağa bağlı olarak kesitlerin alanını gösteren grafiği çiziniz. Bu grafik için ne söyleyebilirsiniz? Gerekçeleriyle açıklayınız.
- f) El Castillo yapısının yüksekliğini göz önüne aldığınızda, herhangi bir yüksekliğinde tabana paralel olacak şekilde oluşan kesitin alanını belirleyebilecek genel bir matematiksel ifade yazınız. Bu matematiksel ifadeyi, oluşan kesitin iki kenar uzunluğunun çarpımı şeklinde düzenleyiniz.
- g) Herhangi bir yüksekliğe bağlı kesitlerin alanını gösteren grafiği çiziniz. Bu grafik için ne söyleyebilirsiniz? Gerekçeleriyle açıklayınız.
- h) Çizdiğiniz grafiği kesitin kenar uzunluğunu gösteren grafik ile karşılaştırınız. Varsa farklılıklarını ve benzerliklerini açıklayınız.
- i) Bu iki model arasındaki ilişkiyi genelleyerek açıklayınız.
- j) Bir kişinin tapınağın bir tarafındaki merdivenlerden en üst basamağa kadar çıktığını ve sonra tekrar en aşağıya indiğini düşündüğünüzde, kişinin attığı toplam basamağa karşılık gelen kesitin alanını gösteren grafiği çiziniz. Çizdiğiniz grafiği yorumlayınız.
- k) Kesik kare piramidin tamamlanarak piramit elde edilmesi durumunda toplam basamak sayısının kaç olacağını hesaplayarak kişinin en üst basamağa çıkması ve inmesi durumunda toplam basamağa karşılık gelen kesitin alanını gösteren grafiği çiziniz. Çizdiğiniz grafiği yorumlayınız.
- l) Çizdiğiniz bu grafiği yapının herhangi bir yüksekliğine bağlı kesitleri düşünerek nasıl çizersiniz? Açıklayınız.

Ek 3. Etkinlik 3- En Uzun Basketbol Atışı

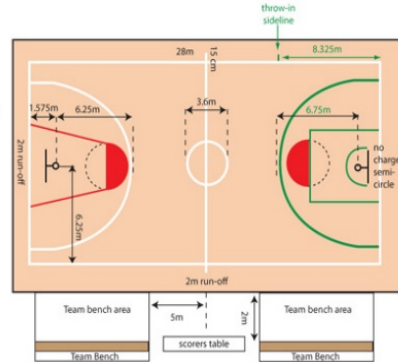
1.Aşama

a) Uzun mesafeli basketbol atışları ile ilgili videoyu izleyiniz. Potaya sabit bir uzaklıkta bulunan bir kişinin konumunu değiştirmeden ve topun elinden çıktığı yükseklik ile topun atıldığı potanın yüksekliğinin aynı hizada olduğunu varsayarak, farklı atışlar için topun izleyebileceği yolları çizin. Çizimlerinizi analitik düzlemde gösteriniz.



b) Bu çizimleri yaparken nelere dikkat ettiniz? Çizimlerinizde benzeyen ya da farklı olan yönler nelerdir? Açıklayınız.

c) Harlem Globetrotters takımının oyuncusu 190,5 cm boyundaki Thunder Law 315 cm yüksekliğindeki potaya 33 metre uzaklıktan yaptığı en uzun basketbol atışı ile Guinness Rekorlar Kitabına girdi. Topun çıkış noktasını (0,0) noktası ile eşleyerek, basketbolcuya yakın olan potanın sahada yer almadığını ve basketbolcunun atış yaptığı konumun pota ile aynı hizada olduğunu varsayarak basketbol topunun potaya girene kadar izlediği yolu analitik düzleme taşıyınız. İşlemlerde kolaylık sağlaması açısından potayı 3 metre, iki pota arasındaki uzaklığı ise 25 metre alınız.



a) Analitik düzleme taşıdığımız grafiği temsil eden matematiksel ifade ne olabilir? Bu ifadeyi bulunuz. Bu ifadeyi bulurken kaç nokta kullandınız? Açıklayınız.

b) Topun yerden 4 metre yükseklikte olduğu durumu/durumları grafik üzerinde gösteriniz. Bu şekilde kaç nokta bulabilirsiniz? Bu noktalar için ne söyleyebilirsiniz?

c) Topun yerden 5 metre yükselmesi durumunu grafik üzerinde gösteriniz. Bu şekilde kaç nokta bulabilirsiniz? Bu noktalar için ne söyleyebilirsiniz?

d) Grafik üzerinde topun yerden yüksekliği aynı olan nokta çiftlerinin tümü için geçerli bir yargıya ulaşınız.

2.Aşama

Topun izlediği yolu gösteren grafiğin fonksiyonunu $f(x) = -\frac{1}{33} (x^2 - 33x)$ olarak ele alınız.

a) $x^2 - 33x = 0$ denkleminin köklerini bulunuz. Kökler ile $f(x) = -\frac{1}{33} (x^2 - 33x)$ fonksiyonun grafiği arasında bir ilişki var mıdır? Açıklayınız.

b) Bu fonksiyonun simetri eksenini denklemin köklerinden hareketle nasıl bulunabileceğini açıklayınız.

c) Simetri ekseninin nasıl bulunabileceği ile ilgili bir genellemeye ulaşınız.

d) Topun izlediği yolu gösteren $f(x) = -\frac{1}{33} (x^2 - 33x)$ ifadesini çarpanlarına ayırınız ve çarpanlarına ayrılmış ifadeyi grafik ile karşılaştırınız. Ne söyleyebilirsiniz?

e) Buradan hareketle herhangi bir ikinci dereceden fonksiyonu ne şekilde ifade edebileceğinizi belirtiniz ve genel bir yargıya ulaşınız.

f) $f(x) = -\frac{1}{33} (x^2 - 33x)$ ifadesini $-\frac{1}{33}$ katsayısını göz önüne alarak tam kare içerecek şekilde düzenleyiniz. Elde ettiğiniz tam kare içeren ifadeyi grafik ile karşılaştırınız. Çıkarımlarınızı açıklayınız.

g) Buradan hareketle herhangi bir ikinci dereceden fonksiyonu ne şekilde ifade edebileceğinizi belirtiniz ve genel bir yargıya ulaşınız.

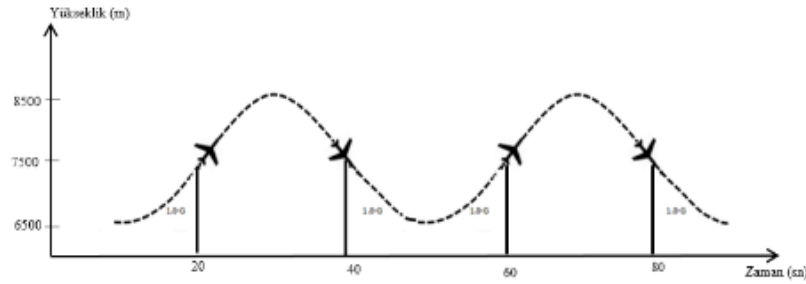
Ek 4. Etkinlik 4- Parabolik Uçuş

1. Aşama

Avrupa Uzay Ajansı'na bağlı çalışan Fransız ve Alman bilim adamları Novespace adlı yerçekimsiz ortam projesi kapsamında uzaya çıkmadan uzay deneyleri yürütmektedirler. Uçağın belirli bir açıyla yükselip alçalması şeklinde gerçekleşen parabolik uçuş, yerçekimsiz ya da yerçekiminin en aza indirgendiği ortamların bir simülasyonunu oluşturmaya



imkan veriyor. Parabolik uçuş anında yolcular belli bir süre yerçekiminin etkisinden sıyrılıyorlar. Bu yöntem, mikrogravite alanında çalışan bilim adamlarına büyük kolaylık sağlıyor. Deneyin en büyük avantajı, bilim adamlarına, çok daha az bir maliyetle uzay istasyonlarında astronotların nasıl bir yaşam alanına sahip olması gerektiğine dair veri sağlıyor olmasıdır. Aşağıda bu uçakların belirli saniyeler arasındaki hareketleri gösteren grafik verilmiştir.



- Uçağın 20-40. saniyeler arasında yaptığı hareketin cebirsel ifadesini bulunuz. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olacak şekilde bu fonksiyonun grafiğini çiziniz. Fonksiyonu standart form, çarpanlara ayrılmış form ve kanonik form olarak yazınız ve çizdiğiniz grafik ile yazdığınız cebirsel formları ilişkilendiriniz.
- Uçağın 40-60. saniyeler arasında yaptığı hareketin cebirsel ifadesini bulunuz. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olacak şekilde bu fonksiyonun grafiğini çiziniz. Fonksiyonu standart form, çarpanlara ayrılmış form ve kanonik form olarak yazınız ve çizdiğiniz grafik ile yazdığınız cebirsel formları ilişkilendiriniz.
- Uçağın 20. ve 40. saniyeler arasındaki en yüksekte bulunduğu noktayı orijine taşıyarak hareketinin grafiğini çiziniz ve cebirsel ifadesini bulunuz.
- Uçağın 40. ve 60. saniyeler arasındaki en aşağıda bulunduğu noktayı orijine taşıyarak hareketinin grafiğini çiziniz ve cebirsel ifadesini bulunuz.
- Bulduğunuz iki matematiksel ifadeyi karşılaştırınız. Aralarındaki benzerlikleri ve farklılıkları bulunuz ve elde ettiğiniz sonuçlarla ilgili genellemelere ulaşınız.
- Uçağın 25. saniyede 7500 metreden yükselmeye başladığını ve 8500 metre yüksekliğe çıktıktan sonra tekrar 7500 metreye alçaldığını ve bu hareketin 10 saniyede gerçekleştiğini düşünelim. Bu hareket sırasında uçağın en yüksekte

bulunduğu noktayı orijin kabul ederek hareketinin grafiğini çiziniz ve cebirsel ifadesini bulunuz.

g) Uçağın 25. saniyede 7500 metreden yükselmeye başladığını ve 8500 metre yüksekliğe çıktıktan sonra tekrar 7500 metreye alçaldığını ve bu hareketin 5 saniyede gerçekleştiğini düşünelim. Bu hareket sırasında uçağın en yüksekte bulunduğu noktayı orijin kabul ederek hareketinin grafiğini çiziniz ve cebirsel ifadesini bulunuz.

h) c, f ve g seçeneklerinde bulmuş olduğunuz grafikleri aynı analitik düzleme taşıyınız ve her birinin cebirsel ifadesini yazınız. Fonksiyonların grafik ve cebirsel ifadelerinde değişenleri ve değişmeyenleri inceleyerek genellemelerde bulununuz.

i) Uçağın 45. saniyede 7500 metreden alçalmaya başladığını ve 6500 metre yüksekliğe indikten sonra tekrar 7500 metreye yükseldiğini ve bu hareketin 10 saniyede gerçekleştiğini düşünelim. Bu hareket sırasında uçağın en aşağıda bulunduğu noktayı orijin kabul ederek hareketinin grafiğini çiziniz ve cebirsel ifadesini bulunuz.

j) Uçağın 45. saniyede 7500 metreden alçalmaya başladığını ve 6500 metre yüksekliğe indikten sonra tekrar 7500 metreye yükseldiğini ve bu hareketin 5 saniyede gerçekleştiğini düşünelim. Bu hareket sırasında uçağın en aşağıda bulunduğu noktayı orijin kabul ederek hareketinin grafiğini çiziniz ve cebirsel ifadesini bulunuz.

k) d, i ve j seçeneklerinde bulmuş olduğunuz grafikleri aynı analitik düzleme taşıyınız ve her birinin cebirsel ifadesini yazınız. Fonksiyonların grafiklerinde ve cebirsel ifadelerinde değişenleri ve değişmeyenleri inceleyerek genellemelerde bulununuz.

2. Aşama

a) Uçağın 20. ve 40. saniyeler arasındaki hareketini inceleyelim. Uçağın en yüksekte bulunduğu noktayı sırasıyla (0,500), (0,1000) ve (0, -500) noktalarına ayrı ayrı taşıyarak uçağın hareketini gösteren grafikleri aynı analitik düzlemde çiziniz ve cebirsel ifadelerini bulunuz. Fonksiyonların grafiklerinde ve cebirsel ifadelerinde değişenleri ve değişmeyenleri inceleyerek genellemelerde bulununuz.

b) Uçağın 40. ve 60. saniyeler arasındaki hareketini inceleyelim. Uçağın en alçakta bulunduğu noktayı sırasıyla (0,500), (0,1000) ve (0, -500) noktalarına ayrı ayrı yerleştirerek uçağın hareketini gösteren grafikleri aynı analitik düzlemde çiziniz ve cebirsel ifadelerini bulunuz. Fonksiyonların grafiklerinde ve cebirsel ifadelerinde değişenleri ve değişmeyenleri inceleyerek genellemelerde bulununuz.

c) Uçağın a ve b seçeneklerindeki hareketlerini düşünelim. Eğer uçağın en yüksekte/en alçakta bulunduğu noktaları (0,10000) noktasına taşımış olsaydınız hareketlerin cebirsel ifadesi nasıl olurdu?/ne değişirdi? Nedenini açıklayınız.

d) Uçağın 20. ve 40. saniyeler arasındaki hareketini inceleyelim. Uçağın en yüksekte bulunduğu noktayı sırasıyla $(-20, 0)$, $(-10, 0)$, $(10, 0)$ ve $(20, 0)$ noktalarına ayrı ayrı taşıyarak uçağın hareketini gösteren grafikleri aynı analitik düzlemde çizin ve cebirsel ifadelerini bulunuz. Fonksiyonların grafiklerinde ve cebirsel ifadelerinde değişenleri ve değişmeyenleri inceleyerek genellemelerde bulununuz.

e) Uçağın 40. ve 60. saniyeler arasındaki hareketini inceleyelim. Uçağın en alçakta bulunduğu noktayı sırasıyla $(-20, 0)$, $(-10, 0)$, $(10, 0)$ ve $(20, 0)$ noktalarına ayrı ayrı yerleştirerek uçağın hareketini gösteren grafikleri aynı analitik düzlemde çizin ve cebirsel ifadelerini bulunuz. Fonksiyonların grafiklerinde ve cebirsel ifadelerinde değişenleri ve değişmeyenleri inceleyerek genellemelerde bulununuz.

f) Uçağın d ve e seçeneklerindeki hareketlerini düşünelim. Eğer uçağın en yüksekte/en alçakta bulunduğu noktaları $(10000, 0)$ noktasına taşımış olsaydınız hareketlerin cebirsel ifadesi nasıl olurdu?/ne değişirdi? Nedenini açıklayınız.

g) Grafiklerin taşınması ile ilgili olarak yaptığınız incelemelerle ulaştığınız sonuçları açıklayınız. Grafikler ve cebirsel ifadelerini ele aldığınızda değişenler ve değişmeyenler nelerdir? Açıklayınız.

Ek 5. Etik Kurul İzni



T.C.
İZMİR VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 12018877-604.01.02-E.5836990
Konu : Aytuğ ÖZALTUN ÇELİK
Araştırma İzni

26/05/2016

VALİLİK MAKAMINA

İlgi : a) MEB Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü'nün 07/03/2012 tarihli ve B.08.0.YET.00.20.00.0/3616 sayılı yazısı (Genelge 2012/13)
b) Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'nün 11/05/2016 tarihli ve 1295 sayılı yazısı.

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Doktora Programı öğrencisi Aytuğ ÖZALTUN ÇELİK'in "İkinci Dereceden Fonksiyonlara İlişkin Varsayımsal Öğrenme Yollarının ve Öğretim Dizisinin Tasarlanması" konulu tez çalışması için kullanacağı ölçekleri, Müdürlüğümüz Buca ilçesi'nde bulunan İnci Özer Tırmaklı Fen Lisesi'nde öğrenim gören onuncu sınıf öğrencilerine uygulamak istediği ilgi (b) yazı ile belirtilmektedir.

Söz konusu ölçeklerin uygulanmasının, yukarıda adı geçen ilçenin okulunda 2015-2016 öğretim yılında eğitim öğretimi aksatmayacak ve eğitim kurumu yöneticilerinin uygun gördüğü şekilde yapılması Müdürlüğümüzce uygun görülmüştür.

Makamlarınızca da uygun görüldüğü takdirde olurlarınıza arz ederim.

Vefa BARDAKCI
Müdür

OLUR
26/05/2016

Fatih DAMATLAR
Vali a.
Vali Yardımcısı

Hükümet Konağı C Blok Strateji Geliştirme Hizmetleri 1 Bölümü Konak/İZMİR Ayrıntılı bilgi için: N.GÜR - Memur
Elektronik Adı: izmir.meb.gov.tr Tel: (0 232) 477 21 37
e-posta: strateji35_1@meb.gov.tr Faks: (0 312) 477 21 07

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <http://evrakorg.meb.gov.tr> adresinden 554f-04d8-3cea-be6e-2be2 kodu ile teyit edilebilir.

Ek 6. Ön Öğrenmeleri Değerlendirmeye Yönelik Sorular

Aşağıdaki soruları ayrıntılı olarak yanıtlayınız ve gerekçelerinizi açık bir biçimde belirtiniz.

1. Fonksiyon deyince aklınıza ne gelmektedir? Ayrıntılı açıklayınız.
2. Fonksiyonun tanımını yapınız. Tanımı yazarken yararlandığınız ifadeleri açıklayınız.
3. Bir ifadenin fonksiyon olabilmesi için gerekli olan koşullar nelerdir? Bu koşulların gerekliliğini ayrıntılı olarak açıklayınız.
4. $f(x)=y$ eşitliğinde, f , x ve y ne anlama gelmektedir? Açıklayınız.
5. $f(y)=x$ eşitliğinde f , y ve x ne anlama gelmektedir? Açıklayınız.
6. Bir fonksiyon yazınız. Bu fonksiyonu inceleyiniz ve grafiksel olarak gösteriniz. Grafiği çizerken gerçekleştirdiğiniz aşamaları ayrıntılı olarak açıklayınız.
7. Doğrusal fonksiyon deyince aklınıza ne gelmektedir?
8. Bir doğrusal fonksiyon ifadesi yazınız.
 - a. Yazdığınız ifadede kullandığınız tüm değişkenlerin ve sayıların ne anlama geldiğini açıklayınız.
 - b. Bu doğrusal fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Ek 7. Ölçme-Değerlendirme I

Amerika Birleşik Devletleri ve Kanada dışında dünyadaki bütün ülkeler tarafından kabul edilen ISO 216 metrik biçimi kağıt boyutlarında kullanılmak üzere kabul edilmiştir. Kağıt boyutları metrik sisteme göre DIN-A ve DIN-B normunda standart olarak belirlenmiştir. DIN-A formundaki kağıtlar küçükten büyüğe doğru A6, A5, A4, A3, A2, A1, A0 olarak sıralanır.

Kağıt Boyutu	Eni	Boyu
A0	841 mm	1189 mm
A1	594 mm	841 mm
A2	420 mm	594 mm
A3	297 mm	420 mm
A4	210 mm	297 mm
A5	148 mm	210 mm

Tablo. DIN-A formundaki kağıtların boyutlarına ilişkin bilgiler

- Her bir kağıdın eni ve boyu arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade ediniz ve grafiğini çiziniz. Yaptıklarınızı ayrıntılı olarak açıklayınız.
- Her bir kağıdın alanını bir kenar uzunluğuna bağlı olarak belirten matematiksel ifadeyi yazınız ve grafiğini çiziniz.
- Oluşturduğunuz alan fonksiyonunu doğrusal iki fonksiyonun çarpımı şeklinde ifade ederek bu fonksiyonların tümünün grafiklerini $\mathbb{R}'$ den $\mathbb{R}'$ ye olacak şekilde aynı analitik düzlemde gösteriniz. Bu grafikleri nasıl yorumlarsınız?

Not: İşlemlerinizi yaparken ulaştığınız sonuçları onda birler basamağına yuvarlayarak dikkate alınız.

Ek 8. Ölçme-Değerlendirme II

Bir öğretmen bir grup öğrenciye farklı boyutlarda kare şeklinde birer kağıt vererek kağıtların bir kenarından 1 cm'lik ve diğer kenarından 3 cm'lik şeritler keserek dikdörtgenler oluşturmalarını istiyor. Ardından her öğrencinin kullandığı karenin kenarı ile oluşturduğu dikdörtgenin kenar uzunluklarını ve alanını tüm sınıfın görmesi için aşağıdaki gibi bir tabloya yazmalarını istiyor.

Karenin kenarı	Oluşan dikdörtgenin eni	Oluşan dikdörtgenin boyu	Oluşan dikdörtgenin alanı
...	...	...	...

- Oluşan dikdörtgenlerin enini karelerin bir kenarının fonksiyonu olarak yazınız ve bu fonksiyonun grafiğini çizin.
- Oluşan dikdörtgenlerin boyunu karelerin bir kenarının fonksiyonu olarak yazınız ve bu fonksiyonun grafiğini çizin.
- Oluşan dikdörtgenlerin alanını karelerin bir kenarının fonksiyonu olarak yazınız ve bu fonksiyonun grafiğini çizin.
- Çizdiğiniz grafikleri $\mathbb{R}'$ den $\mathbb{R}'$ 'ye olacak şekilde aynı analitik düzlemde çizin, bu grafikleri karşılaştırınız ve varsa aralarındaki ilişkileri açıklayınız.

Ek 9. Ölçme-Değerlendirme III



Merkezi Finlandiya’da bulunan Rovio Entertainment’ın geliştirdiği Angry Birds oyunu son derece sınırlı olan farklı cins kuşları sapanla fırlatarak; hedef olan domuzları öldürmeye dayalı bir oyundur. Bu oyundaki küçük kırmızı kuşların herhangi bir özelliği yoktur. Diğer kuşlar gibi dokunulduğunda hareketlerinde farklı özellikler göstermek yerine sadece bağırlarlar.

Şekildeki her kırmızı Angry Bird’ün bir domuzu vuracağını düşünerek, her birinin aynı yüksekliğe çıkıp domuzları vurması için izleyeceği yolları analitik düzleme taşıyarak grafiğini çizersiniz. Bu grafikleri çizerken neleri göz önünde bulundurdunuz? Açıklayınız.

Çizmiş olduğunuz grafiklerin cebirsel ifadelerini bulunuz ve grafikleri ile ilişkilendirerek özelliklerini ayrıntılı olarak açıklayınız. Değişkenleri ve değişmeyenleri belirleyiniz.

Ek 10. Ölçme-Değerlendirme IV



İstanbul Büyükşehir Belediyesi İstinye ve Tarabya sahillerini güvenliği sağlamak amacıyla koyu boydan boya demir korkuluklarla çevirmiştir.

Bu korkulukların ortak özelliklerini belirtiniz. Bu korkulukların tümünü temsil eden bir ikinci dereceden fonksiyon ifadesi oluşturarak tanımlayınız.



Sarıyer sahilindeki demir korkuluklar ise daha farklı olarak üç sıra halinde tasarlanmıştır. Bu sahildeki korkulukların ortak özellikleri ve farklılıkları nelerdir? Açıklayınız. Bu korkulukların tümünü temsil eden bir ikinci dereceden fonksiyon ifadesi oluşturarak tanımlayınız.

Korkulukların yan yana ve üst üste devam ettiğini varsayınız. Yan yana olan korkuluklardan soldan m. korkuluğun ve üst üste olan korkuluklardan alttan n. korkuluğun cebirsel ifadesini bir ikinci dereceden fonksiyon ifadesine dayalı olarak tanımlayınız.

Ek 11. Kavramsal Anlama Testi

Sorular

- 1) İkinci dereceden fonksiyonu nasıl tanımlarsınız? İkinci dereceden fonksiyon için önemli olduğun düşündüğünüz 10 kritik durumu/noktayı açıklayınız.
- 2) Fonksiyon, doğrusal fonksiyon, ikinci dereceden fonksiyonu düşündüğünüzde, bu üç kavramın ortak ve farklı yönlerinin neler olduğunu ve birbirleri ile ilişkisini açıklayınız.
- 3) $y = x^2 + 3x - 4$ ifadesi matematiksel olarak neyi/neleri gösteriyor olabilir? Nedenleri ile açıklayınız.
- 4) Doğrusal fonksiyonlardan yola çıkarak ikinci dereceden fonksiyonlara geçiş yapılabilir mi? Nedenleri ile açıklayınız.
- 5) İkinci dereceden bir fonksiyonun herhangi bir parçası doğrusal olabilir mi? Nedenleri ile açıklayınız.
- 6) $\mathbb{R}$ 'de tanımlı ikinci dereceden fonksiyonlar için her zaman kanonik form, çarpanlara ayrılmış form, standart form mevcut mudur? Nedenleri ile açıklayınız.
- 7) Tepe noktası ve simetri ekseninin ikinci dereceden fonksiyonlar için önemi nedir? Açıklayınız.
- 8) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x - 3$ ve
 $f: [-2, 3] \rightarrow [-4, 12] f(x) = x^2 + 2x - 3$
 şeklinde tanımlanmış iki fonksiyonun benzeyen ve benzemeyen yönleri nelerdir? Grafiklerini çizin ve yanıtınızı açıklayınız.
- 9) $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu için a, b, c, x ve y ne ifade etmektedir? Açıklayınız.
- 10) $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu için
 - a'nın değişimi neyi değiştirir? (b ve c sabit)
 - c'nin değişimi neyi değiştirir? (a ve b sabit)
 - b'nin değişimi neyi değiştirir? (a ve c sabit)
- 11) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda $a.b < 0$ olması durumunda fonksiyon ile ilgili ne gibi çıkarımlar yapabilirsiniz? Açıklayınız.

12) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu için en büyük veya en küçük değer var mıdır? Var ise bu değeri nasıl bulursunuz açıklayınız?

13) İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği analitik düzlemde ötelendiğinde fonksiyonun cebirsel ifadesinde ve grafiğinde değişenler ve değişmeyenler nelerdir? Nedenleri ile açıklayınız.

14) x eksenine teğet olan bir parabol a birim sağa veya a birim sola kaydırıldığında değişenler veya değişmeyenler hakkında ne söyleyebilirsiniz?

15) Tepe noktası y ekseninde olan bir parabol a birim aşağıya veya a birim yukarıya kaydırıldığında değişenler veya değişmeyenler hakkında ne söyleyebilirsiniz?

16)

x	y
4	10
5	18
6	28
7	40
8	54
9	70

Tabloda verilen x ve y değerleri arasında nasıl bir ilişki vardır? x ve y arasındaki matematiksel ilişkiyi bulunuz ve grafiğini çiziniz. Yaptıklarınızı ayrıntılı olarak açıklayınız.

17)

En	Boy	Alan
2	2	4
2	3	6
2	4	8
2	5	10
2	6	12
2	7	14

Tablo 1. Birinci dikdörtgenin kenar uzunluklarına göre değişen alanı

En	Boy	Alan
2	4	8
3	5	15
4	6	24
5	7	35
6	8	48
7	9	63

Tablo 2. İkinci dikdörtgenin kenar uzunluklarına göre değişen alanı

Yukarıdaki tablolarda iki farklı dikdörtgenin kenarlarına bağlı olarak alanlarının değerleri verilmiştir. İki farklı dikdörtgenin kenarları ile alanı arasındaki ilişkiyi bir

değişkene bağlı olarak yazınız. Yazdığınız iki fonksiyon ifadesini karşılaştırarak inceleyiniz. Kenar uzunlukları ve alanlardaki artışlar ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?

18) Belli bir ilacın etkisinde tutulan bir bakteri topluluğunun gelişim fonksiyonu, t saat olarak zamanı, y de bakteri sayısını göstermek üzere;
 $y = -(10t)^2 + 10^3t + 2 \cdot 10^4$ verilmektedir.

- a) Başlangıçta topluluğun kaç üyesi vardır?
- b) Kaçınıcı saatten sonra toplulukta azalma başlar?
- c) Kaç saat sonra topluluktaki tüm bakteriler ölür?

19)

- $y = ax^2 + bx$ şeklindeki fonksiyonun grafiğinin yerini ve şeklini nasıl belirleyebilirsiniz? Grafiğin tepe noktasının yeri ile ilgili ne söyleyebilirsiniz? Açıklayınız.
- $y = ax^2 + c$ şeklindeki fonksiyonun grafiğinin yerini ve şeklini nasıl belirleyebilirsiniz? Grafiğin tepe noktasının yeri ile ilgili ne söyleyebilirsiniz? Açıklayınız.

20) Bir öğrenci $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonundaki b değerinin fonksiyonun grafiğinin eğimi ve c değerinin y eksenini kestiği nokta olması gerektiğini ileri sürmektedir. Öğrencinin bu düşüncesini desteklemek ya da çürütmek için neler söyleyebilirsiniz?

Ek 12. İkinci Dereceden Fonksiyonların Genel Özellikleri ve Doğrusal Fonksiyonlarla İlişkisi İle İlgili Kavramsal Anlama Sorularına Yönelik Rubrik

Soru	Puan	Puan Ölçütü
1	0	•Boş/Yanlış
	1	•Cebirsel ifade etme veya •Grafiğin parabol olduğunu ifade etme • x^2 li terim içerdiğini ifade etme
	2	•Tepe Noktasının formülünü belirtme, •a veya c katsayısını açıklama •Simetri eksenini formülünü belirtme • Δ ile ilgili açıklamalar yapma
	3	•Tepe noktasını bir özelliğini belirtme, •Farklı cebirsel gösterimleri yazma •b katsayısını anlamlandırma, •Kökler ile tepe noktasını ilişkilendirme
	4	•Tepe noktasının tüm özelliklerini ifade etme •Süreklilik ve sonsuzluk özelliklerini ifade etme •Değişim miktarlarının değişiminin sabit olduğunu ifade etme
2	0	•Boş/Yanlış
	1	•Hepsinin fonksiyon/eşitlik/denklem olduğunu belirtme •Derecelerinin farklı olduğunu ifade etme •Hepsinin grafiği olduğunu ifade etme
	2	•Tanım ve değer kümeleri olduğunu belirtme •Eşleme ve kuralının olduğunu açıklama •Sadece cebirsel gösterimlerini yazma •Sadece grafiklerini çizme
	3	•Grafikleri ile cebirsel ifadelerini ilişkilendirme
	4	•Değişim miktarlarını açıklama •İkinci dereceden fonksiyonun iki doğrusal fonksiyonun çarpımı olarak ifade etme •Eşleme
3	0	•Boş/Yanlış
	1	•Fonksiyon/denklem olduğunu ifade etme •Çarpanlarına ayırarak köklerini bulma • x 'e bağlı y değerlerini bulma
	2	•İkinci dereceden fonksiyonlara özgü tablo, cebirsel ifade ya da grafiksel açıklama yapma •Tepe noktasını bulma
	3	•Farklı gösterimleri ilişkilendirme •Birkaç temel özellik belirtme
	4	• y 'nin x 'e bağlı değişeceğini ifade etme •Farklı gösterimler arası ilişkilendirmeleri yapma •Tepe noktasını ifade etme ve tepe noktasını x eksenini kesen noktalarla ilişkilendirme

6	0	•Boş
	1	•Mevcut olacağını ifade etme
	2	•Cebirsel ifadeleri yazma
	3	•Mevcut olmadığını bir formu ifade ederek açıklama
	4	• $\mathbb{R}$ 'de her zaman olamayacağını sebepleriyle açıklama
8	0	•Boş/Farkları olmadığını ifade etme
	1	•Farkları olduğunu açıklama yapmaksızın ifade etme
	2	•Farkları olduğunu tanım kümelerinin farklı olduğu ile açıklama •Grafiklerinin sonsuza kadar devam etmeyeceğini ifade etme
	3	•Grafik çizerek farklı olduklarını gösterme
	4	•Grafiklerini çizme •Cebirsel ifadelerinin aynı olduğunu belirtme •Tanım ve değer kümeleri farklı olduğunu ifade etme •İlk fonksiyonun sadece y ekseninde sınırlı ve minimum noktası olduğunu açıklama •İkinci fonksiyonun x ve y'de sınırlı olduğunu açıklama
20	0	•Boş/Yanlış
	1	•c'nin y eksenini kesen noktayı belirlediğini açıklama yapmaksızın ifade etme
	2	• $f(0)=c$ olması nedeniyle c'nin parabolün y eksenini kestiği noktayı belirlediğini ifade etme
	3	• $f(0)=c$ olması nedeniyle c'nin parabolün y eksenini kestiği noktayı belirlediğini ifade etme •İkinci dereceden fonksiyonlarda eğimin olmadığını ifade etme
	4	• $f(0)=c$ olması nedeniyle c'nin parabolün y eksenini kestiği noktayı belirlediğini ifade etme •İkinci dereceden fonksiyonlarda sabit bir değişim oranı olmadığı için eğimin olmadığını ifade etme, b'nin eğim olmadığını açıklama

Ek 13. Değişim Miktarlarına İlişkin Kavramsal Anlama Sorularına Yönelik Rubrik

Soru	Puan	Puan Ölçütü
16	0	• Boş/Yanlış
	1	• Noktaları yerleştirerek grafik çizme
	2	• Deneyerek cebirsel ifadesini yazma ve grafiğini çizme
	3	• $ax^2 + bx + c$ kabul ederek fonksiyon ifadesini belirleme ve grafiğini çizme
	4	• Değişim miktarlarının değişimini inceleyerek $ax^2 + bx + c$ olduğunu belirleme ve grafiğini çizme
17	0	• Boş/Yanlış
	1	• Sadece $y=2x$ olarak ifade etme
	2	• $y=2x$ ve $y=x(x-2)$ olarak belirleme
	3	• $y=2x$ ve $y=x(x-2)$ olarak belirleme Fonksiyonların birinin doğrusal olduğunu diğerinin doğrusal olmadığını ifade etme
	4	• $y=2x$ ve $y=x(x-2)$ olarak belirleme • Birinci fonksiyon doğrusal fonksiyon ve değişim oranlarının sabit olduğunu açıklama • Birinde sadece boyun değişmesi alanının değişmesini etkilediği için doğrusal fonksiyon olduğunu açıklama • Diğerinde enin ve boyun değişmesinin alanı değiştirmesi sebebiyle ikinci dereceden fonksiyon olarak açıklama • Tanım ve değer kümelerini belirleme
18	0	• Boş/Yanlış
	1	• a seçeneğini yapma
	2	• a ve c seçeneğini yapma
	3	• a ve b seçeneğini ya da a ve c seçeneğini yapma
	4	• a, b ve c seçeneklerinin tamamını yapma

Ek 14. Tepe Noktasına İlişkin Kavramsal Anlama Sorularına Yönelik Rubrik

Soru	Puan	Puan Ölçütü
7	0	• Boş/Yanlış
	1	• Önemli olduğunu ifade etme
	2	• Her parabolde olacağını ifade etme • Fonksiyonun değerleri ile ilişkilendirme
	3	• Simetri eksenini $x=r$ ve tepe noktası (r, k) olduğunu ifade etme • Tepe noktasının fonksiyonun en küçük ya da en büyük değeri belirlediğini ifade etme
	4	• Maksimum ya da minimum değeri olduğunu açıklama • Tepe noktasına göre fonksiyonun artan iken azalan olduğunu ya da azalan iken artan olduğunu açıklama • Simetri eksenine ile tepe noktasını ilişkilendirme
11	0	• Boş/Yanlış
	1	• Sadece a 'yı dikkate alarak parabolün kollarının yönünü yorumlama
	2	• a ve b ayrı düşünmeden tepe noktasının apsis değerinin pozitif olduğunu ifade etme
	3	• $a \cdot b < 0$ için sadece bir durum ele alarak grafiğini çizme ve • tepe noktasını belirleme
	4	• $a > 0$ ve $b < 0$ olduğunu yorumlama • $a < 0$ ve $b > 0$ olduğunu yorumlama • grafikleri çizme • tepe noktasının bölgelerini belirleme
12	0	• Boş/Yanlış
	1	• Var olabileceğini ifade etme
	2	• $r = \frac{-b}{2a}$ ve $f(r)$ olduğunu ifade etme • Tepe noktasının maksimum ya da minimum değer olduğunu açıklama
	3	• a katsayısının iki durumunu inceleyerek $a > 0$ olduğunda minimum ve $a < 0$ olduğunda maksimum değer olabileceğini açıklama
	4	• a katsayısının iki durumunu inceleyerek $a > 0$ olduğunda minimum ve $a < 0$ olduğunda maksimum değer olabileceğini açıklama • $\frac{-b}{2a}$ ve $f(r)$ olduğunu ifade etme
18	0	• Boş/Yanlış
	1	• a seçeneğini yapma
	2	• a ve c seçeneğini yapma
	3	• a ve b seçeneğini ya da a ve c seçeneğini yapma
	4	• a , b ve c seçeneklerinin tamamını yapma
19	0	• Boş/Yanlış
	1	• $ax^2 + c$ durumunu inceleme ve tepe noktasını y eksenine ile ilişkilendirme
	2	• $ax^2 + c$ durumunu inceleme ve tepe noktasının $(0, c)$ noktası olduğunu ifade etme • $ax^2 + bx$ durumunu incelerken sadece bir durumu açıklama
	3	• $ax^2 + c$ durumunu inceleme ve tepe noktasının $(0, c)$ noktası olduğunu ifade etme • $ax^2 + bx$ durumunu incelerken tüm durumları ele almama
	4	• $ax^2 + c$ durumunu inceleme ve tepe noktasının $(0, c)$ noktası olduğunu ifade etme • $ax^2 + bx$ durumunu incelerken tüm durumları ele alma ve grafiksel olarak gösterme

Ek 15. Katsayılara İlişkin Kavramsal Anlama Sorularına Yönelik Rubrik

Soru	Puan	Puan Ölçütü
9	0	•Boş
	1	•Sadece birini açıklama •a katsayısının yönü ya da açıklığını ya da tepe noktasının değerini belirlediğini ifade etme ya da c katsayısını açıklama •x ve y değişkenlerini açıklama •Katsayılar olduğunu ifade etme
	2	•a katsayısının yönü belirlediğini ifade etme ve c katsayısını açıklama veya •a katsayısının açıklığı ve yönü belirttiğini ifade etme
	3	•a katsayısının yönü belirlediğini ifade etme ve b ve c katsayısını açıklama
	4	•a, b ve c katsayılarının tamamını açıklama •a katsayısının parabolün kollarının yönünü ve açıklığını belirlediğini ifade etme •a ve b katsayılarının tepe noktasını belirlediğini ifade etme •c katsayısının y eksenini kestiği nokta olduğunu ifade etme
10	0	•Boş
	1	•Sadece birini açıklama •a katsayısının yönü belirlediğini ifade etme • Δ 'ya ilişkin açıklamalar yapma
	2	•a ve b katsayılarını açıklama ya da •a ve c katsayılarını açıklama ya da •b ve c katsayılarını açıklama ya da •a'nın açıklığı ve yönü belirlediğini açıklama
	3	•a katsayısının yönü/açıklığı/tepe noktasını ya da herhangi iki durumu değiştirdiğini ve b ve c katsayılarını açıklama
	4	•a'nın yönü açıklığı ve tepe noktasını değiştirdiğini ifade etme •b'nin tepe noktasını değiştirdiğini ifade etme •c'nin y eksenini kesen noktayı değiştirdiğini ifade etme
11	0	•Boş/Yanlış
	1	•Sadece a'yı dikkate alarak parabolün kollarının yönünü yorumlama
	2	•a ve b ayrı düşünmeden tepe noktasının apsis değerinin pozitif olduğunu ifade etme
	3	• $a \cdot b < 0$ için sadece bir durum ele alarak grafiğini çizme ve •tepe noktasını belirleme
	4	• $a > 0$ ve $b < 0$ olduğunu yorumlama • $a < 0$ ve $b > 0$ olduğunu yorumlama •grafikleri çizme •tepe noktasının bölgelerini belirleme
19	0	•Boş/Yanlış
	1	• $ax^2 + c$ durumunu inceleme ve tepe noktasını y eksenini ile ilişkilendirme
	2	• $ax^2 + c$ durumunu inceleme ve tepe noktasının (0,c) noktası olduğunu ifade etme • $ax^2 + bx$ durumunu incelerken sadece bir durumu açıklama
	3	• $ax^2 + c$ durumunu inceleme ve tepe noktasının (0,c) noktası olduğunu ifade etme • $ax^2 + bx$ durumunu incelerken tüm durumları ele almama
	4	• $ax^2 + c$ durumunu inceleme ve tepe noktasının (0,c) noktası olduğunu ifade etme • $ax^2 + bx$ durumunu incelerken tüm durumları ele alma ve grafiksel olarak gösterme
20	0	•Boş/Yanlış
	1	•c'nin y eksenini kesen noktayı belirlediğini açıklama yapmaksızın ifade etme
	2	• $f(0)=c$ olması nedeniyle c'nin parabolün y eksenini kestiği noktayı belirlediğini ifade etme
	3	• $f(0)=c$ olması nedeniyle c'nin parabolün y eksenini kestiği noktayı belirlediğini ifade etme

		• İkinci dereceden fonksiyonlarda eğimin olmadığını ifade etme
	4	• $f(0)=c$ olması nedeniyle c'nin parabolün y eksenini kestiği noktayı belirlediğini ifade etme • İkinci dereceden fonksiyonlarda sabit bir değişim oranı olmadığı için eğimin olmadığını ifade etme, b'nin eğim olmadığını açıklama



Ek 16. Ötelemeye İlişkin Kavramsal Anlama Sorularına Yönelik Rubrik

Soru	Puan	Puan Ölçütü
13	0	• Boş/Yanlış
	1	• a katsayısının ve parabolün yönünün değişmeyeceğini ifade etme ya da • c katsayısının değişeceğini ifade etme
	2	• Parabol değişeceğini ifade etme ancak b ve c ile ilişkilendirmeme • Tepe noktasının değişeceğini ifade etme
	3	• a katsayısının ve parabolün yönünün, kollarının açıklığının değişmeyeceğini ifade etme • b ve c katsayısının değişeceğini ifade etme ancak nedenini açıklamama
	4	• a katsayısının ve parabolün yönünün, kollarının açıklığının değişmeyeceğini, b ve c katsayısının değişeceğini ifade etme • Tepe noktasının ve maksimum ya da minimum değerini değişeceğini açıklama • Parabolün eksenleri kestiği noktaların değişeceğini açıklama
14	0	• Boş/Yanlış
	1	• a katsayısının ve parabolün şeklinin değişmeyeceğini ifade etme
	2	• a katsayısının ve parabolün şeklinin değişmeyeceğini, b ve c katsayılarının değişeceğini ifade etme • tepe noktasının ve parabolün eksenleri kestiği noktanın değişeceğini ifade etme
	3	• a katsayısının ve parabolün şeklinin değişmeyeceğini ifade etme, b ve c katsayılarının değişeceğini ifade etme • tepe noktasının ve parabolün eksenleri kestiği noktanın değişeceğini ifade etme • tanım ve değer kümelerinin değişmeyeceğini ifade etme
	4	• a katsayısının ve parabolün şeklinin değişmeyeceğini ifade etme, b ve c katsayılarının değişeceğini ifade etme • tepe noktasının ve parabolün eksenleri kestiği noktanın değişeceğini ifade etme • tanım ve değer kümelerinin değişmeyeceğini ifade etme • fonksiyon ifadesinin $f(x-m)$ olacağını ifade etme
15	0	• Boş/Yanlış
	1	• a katsayısının ve parabolün şeklinin değişmeyeceğini ifade etme
	2	• a katsayısının ve parabolün şeklinin değişmeyeceğini, b katsayısının değişmeyeceğini ve c katsayısının değişeceğini ifade etme • tepe noktasının ve parabolün eksenleri kestiği noktanın değişeceğini ifade etme
	3	• a katsayısının ve parabolün şeklinin değişmeyeceğini, b katsayısının değişmeyeceğini ve c katsayısının değişeceğini ifade etme • Tepe noktasının ve parabolün eksenleri kestiği noktanın değişeceğini ifade etme • Tanım ve değer kümelerinin değişmeyeceğini ifade etme
	4	• a katsayısının ve parabolün şeklinin değişmeyeceğini ve b ve c katsayılarının değişeceğini ifade etme • Tepe noktasının ve parabolün eksenleri kestiği noktanın değişeceğini ifade etme • Tanım ve değer kümelerinin değişmeyeceğini ifade etme • Fonksiyon ifadesinin $f(x)+m$ olacağını ifade etme

Ek 17. Saman Balyası Problemi

Şekilde en alt sırada 5 saman balyası bulunmaktadır. Bir üst sıraya geçildiğinde ise her defasında bir saman balyası eksilmektedir. En üstte bir saman balyası kaldığına göre tüm yığının yüksekliğini yaklaşık olarak hesaplayınız.

Ek 18. İzmir Saat Kulesi Problemi

İZMİR SAAT KULESİ PROBLEMİ

Aşağıda fotoğrafları verilen İzmir Saat Kulesinin gerçek yüksekliğini bulunuz. Yüksekliği nasıl bulduğunuzu açıklayınız. Bilindiği gibi, MİNİATÜRK'te İzmir Saat Kulesi'nin bir modeli bulunmaktadır. Sizce bu modelin yüksekliği kaçtır? Gerçeği ile MİNİATÜRK.2'teki modelinden yararlanarak saatin çapını (akrep ve yelkovanının uzunluğunu), giriş kapısının yüksekliğini ve seçeceğiniz farklı bölümlerin uzunluklarının gerçeğinde ve modelinde nasıl olduğunu belirleyiniz?



MİNİATÜRK'TEKİ İZMİR SAAT KULESİ MODELİNE İLİŞKİN FOTOĞRAFLAR



Ek 19. Orijinallik Raporu



DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU



Tarih:13/02/2018

Tez Başlığı:

İkinci Dereceden Fonksiyonlara İlişkin Varsayımsal Öğrenme Yollarının ve Öğretim Dizisinin Tasarlanması

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 399 sayfalık kısmına ilişkin, 13/02/2018 tarihinde **tez danışmanım tarafından** Dokuz Eylül Üniversitesi Kutuphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı'nın sağladığı İntihal Tespit Programından (Turnitin-Tez İntihal Analiz Programı) aşağıda belirtilen **filtreleme tiplerinden biri** (uygun olanı işaretleyiniz) uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin **benzerlik oranı % 1'dir**.

- <http://www.kutuphane.deu.edu.tr/tr/turnitin-tez-intihal-analiz-programi/> adresindeki Tez İntihal Analiz Programı

Kullanım Kılavuzunu okudum ☒ X

Filtreleme Tipi 1(Maksimum %15) x

Filtreleme Tipi 2(Maksimum %30) ☐

☒ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☒ Kaynakça hariç, ☒ Alıntılar dâhil, ☒ Altı (6) kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç	☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☐ Kaynakça dâhil, ☐ Alıntılar dâhil.
EK 1- İntihal Tespit Programı Raporu İLK SAYFA Çıktısı. ☐	
EK 2- İntihal Tespit Programı Raporu (Tümü) Cd İçinde. ☐	

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve yukarıda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini, aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim

Adı Soyadı : Aytuğ ÖZALTUN ÇELİK
 Öğrenci No :2014950083
 Anabilim Dalı :Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı
 Programı :Matematik Öğretmenliği
 Statüsü :Yüksek Lisans ☐ Doktora x

ÖĞRENCİ

Aytuğ ÖZALTUN ÇELİK

13/02/2018

DANIŞMAN

Prof. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL

13/02/2018

Açıklamalar

1: Bu formu teslim etmeden önce sizden istenen bilgileri uygun kutucuğu (☐) işaretleyerek doldurunuz.

Kullanıcı şifre vb. konusunda sorun yaşanması durumunda Üniversitemiz Merkez Kutuphanesinde bulunan Turnitin yetkilisine (Ali Taş Tel +90 (232) 3018026 veya ali.tas@deu.edu.tr) başvurunuz

2: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu' formu tezin çıktıları ve elektronik nüshalarının içerisinde ekler kısmında yer alır.

3: Tez savunmasında düzeltme alınması durumunda bu form güncellenerek yeniden hazırlanır

4: Turnitin-Tez İntihal Analiz Programına yükleme yapılırken Dosya Başlığı (document title) olarak **tez başlığının tamamı**, Yazar Adı (author's first name) olarak **öğrencinin adı**, Yazar Soyadı (author's last name) olarak **öğrencinin soyadı** bilgisini yazınız.