



**T.C.  
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**İKİNCİ MERTEBEDEN BİR TARAMA SÜRECİNİN  
OPTİMALLIĞI İÇİN GEREKLİ KOŞULLAR**

**Büşra AKGÜN**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Matematik Programı**

**DANIŞMAN**

**Dr. Öğr. Üyesi Gülseren ÇİÇEK**

**Haziran, 2022**

**İSTANBUL**

Bu çalışma 21.06.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

### **Tez Jürisi**

Dr. Öğr. Üyesi Gülseren ÇİÇEK (Danışman)  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Elimhan MAHMUDOV  
İstanbul Teknik Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Özkan DEĞER  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

## ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum çok kıymetli hocam ve danışmanım Dr.Öğr.Üyesi Gülseren ÇİÇEK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Yine aynı şekilde yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını esirgemeyen, değerli bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, her zaman örnek aldığım sayın Dr.Öğr.Üyesi Cemal ÇİÇEK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma da sonsuz teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca hep arkamda olan, maddi ve manevi her türlü desteklerini esirgemeyen, hayallerime ulaşmamda ve inandığım yolda yürümemde bana destek olan, bu zamana kadar yaşadığım her zorlukta beni yüreklendiren, asla haklarını ödeyemeyeceğim babam Basri AKGÜN'e ve annem Hanife AKGÜN'e sonsuz teşekkür ederim. Manevi desteklerini hep hissettiğim Necibe ŞENTÜRK, Okay YILMAZ ve diğer bütün arkadaşlarıma ayrıca teşekkür ederim.

Haziran, 2022

Büşra AKGÜN

# İÇİNDEKİLER

|                                                                                                             | Sayfa No  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| ÖNSÖZ .....                                                                                                 | iv        |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                                           | vi        |
| ŞEKİL LİSTESİ .....                                                                                         | vii       |
| SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ .....                                                                             | x         |
| ÖZET .....                                                                                                  | xii       |
| SUMMARY .....                                                                                               | xiv       |
| <b>1 GİRİŞ .....</b>                                                                                        | <b>1</b>  |
| <b>2 GENEL KISIMLAR .....</b>                                                                               | <b>6</b>  |
| 2.1. KONVEKS KÜMELER VE KONVEKS KONİLER .....                                                               | 6         |
| 2.1.1. Konveks Kümeler .....                                                                                | 6         |
| 2.1.2. Konveks Koniler ve Dual Koniler .....                                                                | 8         |
| 2.2. KONVEKS FONKSİYONLAR .....                                                                             | 11        |
| 2.2.1. Konveks Fonksiyonların Eşleniği .....                                                                | 13        |
| 2.2.2. Türev ve Subdiferansiyel .....                                                                       | 15        |
| 2.2.3. Uzaklık Fonksiyonu .....                                                                             | 17        |
| 2.2.4. Normal Koni .....                                                                                    | 17        |
| 2.3. KONVEKS ÇOK DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN YEREL EŞLENİK<br>DÖNÜŞÜMLER .....                                  | 20        |
| 2.3.1. Yerel Eşlenik Dönüşümlerin Hesaplanması .....                                                        | 23        |
| 2.3.2. Somut Durumlarda Yerel Eşlenik Dönüşümler .....                                                      | 24        |
| 2.3.3. Konveks Programlama Problemlerinde Ekstremum için Gerekli Koşullar .....                             | 25        |
| 2.4. TARAMA SÜRECİ .....                                                                                    | 26        |
| 2.5. KONVEKS PROGRAMLAMA PROBLEMLERİ .....                                                                  | 37        |
| <b>3 MALZEME VE YÖNTEM .....</b>                                                                            | <b>42</b> |
| <b>4 BULGULAR .....</b>                                                                                     | <b>43</b> |
| 4.0.1. Ayırık İçermeler için Gerekli ve Yeterli Koşullar .....                                              | 44        |
| 4.0.2. Sürekli Problemin Yaklaşımı ve Ayırık Yaklaşık Problemleri için Gerekli ve<br>Yeterli Koşullar ..... | 49        |

|                                  |           |
|----------------------------------|-----------|
| <b>5 TARTIşMA VE SONUÇ .....</b> | <b>55</b> |
| <b>KAYNAKLAR .....</b>           | <b>56</b> |
| <b>ÖZGEÇMİş .....</b>            | <b>59</b> |



## ŞEKİL LİSTESİ

|                                                                        | Page No |
|------------------------------------------------------------------------|---------|
| Şekil 1.1: Doğrusal olan ve olmayan problemlerin çözümleri .....       | 2       |
| Şekil 2.1: Konveks küme ve konveks olmayan küme .....                  | 6       |
| Şekil 2.2: Konveks olmayan küme ve onun konveks zarfı .....            | 7       |
| Şekil 2.3: $P$ konveks konisi ve onun $P^*$ dual konisi .....          | 9       |
| Şekil 2.4: Bir küme ile oluşturulan koni .....                         | 10      |
| Şekil 2.5: Durgunluk konisi .....                                      | 11      |
| Şekil 2.6: Bir has konveks fonksiyonun epigrafi ve tanım kümesi .....  | 12      |
| Şekil 2.7: Konveks fonksiyon ve konveks olmayan fonksiyon .....        | 12      |
| Şekil 2.8: Konveks ve konveks olmayan fonksiyonların epigrafları ..... | 12      |
| Şekil 2.9: Eşlenik fonksiyon .....                                     | 14      |
| Şekil 2.10: Polar koni .....                                           | 14      |
| Şekil 2.11: Subdiferansiyel .....                                      | 15      |
| Şekil 2.12: Uzaklık fonksiyonu .....                                   | 17      |
| Şekil 2.13: Normal koni .....                                          | 18      |
| Şekil 2.14: Normal koni ile dual koni arasındaki ilişki .....          | 18      |
| Şekil 2.15: Bir konveks polihedron .....                               | 19      |
| Şekil 2.16: Tek değerli fonksiyon ve çok değerli fonksiyon .....       | 20      |
| Şekil 2.17: Sürekli çözümü olmadan tarama süreçleri .....              | 27      |
| Şekil 2.18: Tarama süreçlerinin yorumlanması .....                     | 27      |
| Şekil 2.19: Sweeping process .....                                     | 28      |
| Şekil 2.20: Catching-up algoritma .....                                | 28      |

## SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

| Simgeler                       | Açıklama                                                        |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$                   | : Reel sayılar cismi                                            |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | : İç çarpım                                                     |
| $\mathbb{R}^n$                 | : $n$ -boyutlu öklid uzayı                                      |
| $\text{conv } P$               | : $P$ kümesinin konveks zarfı                                   |
| $\overline{\text{conv } P}$    | : $P$ kümesinin kapalı konveks zarfı                            |
| $\bar{P}$                      | : $P$ kümesinin kapanışı                                        |
| $\text{ri } P$                 | : $P$ kümesinin izafi içi                                       |
| $\text{aff } P$                | : $P$ kümesinin afin zarfı                                      |
| $K_P$                          | : $P$ kümesinin teğet yönler konisi                             |
| $K_P^*$                        | : $P$ kümesinin dual konisi                                     |
| $\text{int } P$                | : $P$ kümesinin iç noktalar kümesi                              |
| $H_P(x^*)$                     | : $P$ kümesinin destek fonksiyonu                               |
| $\text{dom } g$                | : $g$ fonksiyonunun tanım kümesi                                |
| $\text{epi } g$                | : $g$ fonksiyonunun grafik üstü kümesi                          |
| $g^*(x^*)$                     | : $g$ fonksiyonunun eşlenik fonksiyonu                          |
| $\text{cone } P$               | : $P$ tarafından üretilen koni                                  |
| $0^+P$                         | : $P$ kümesinin durgunluk (resesif) konisi                      |
| $\delta_P(\cdot)$              | : $P$ kümesinin indikatör fonksiyonu                            |
| $P^\circ$                      | : $P$ kümesinin polar konisi                                    |
| $g'(x; p)$                     | : $g$ fonksiyonunun $x$ noktasındaki $p$ yönündeki yönlü türevi |
| $\partial g(x_0)$              | : $g$ fonksiyonunun $x_0$ noktasındaki subdiferansiyel kümesi   |
| $d(x; P)$                      | : $P$ kümesi ile ilgili uzaklık fonksiyonu                      |
| $N(\bar{x}; C)$                | : $\bar{x}$ 'te $C$ kümesi için normal koni                     |
| $K_C(x)$                       | : $C$ kümesinin $x$ noktasındaki teğet konisi                   |
| $G(x)$                         | : $G$ çok değerli fonksiyonu                                    |
| $\text{gph } G$                | : $G$ çok değerli fonksiyonunun grafiği                         |
| $\text{dom } G$                | : $G$ çok değerli fonksiyonunun tanım kümesi                    |
| $0^+ \text{gph } G$            | : $G$ çok değerli dönüşümünün durgunluk (resesif) konisi        |
| $G^*(x^*)$                     | : $G$ çok değerli fonksiyonunun eşlenik (dual) fonksiyonu       |

|                   |                                                               |
|-------------------|---------------------------------------------------------------|
| $G^*(y^*; z)$     | : $G$ çok değerli fonksiyonunun yerel eşlenik fonksiyonu      |
| $H_G(x; y^*)$     | : $G$ çok değerli fonksiyonunun Hamilton Fonksiyonu           |
| $G_{Arg}(x; y^*)$ | : Argmaximum kümesi                                           |
| $G^{-1}$          | : $G$ çok değerli dönüşümünün tersi                           |
| $C(t)$            | : $t$ zamanına ve başlangıç koşuluna bağlı hareketli bir küme |
| $K_{gph\ G}(x)$   | : $G$ çok değerli dönüşümünün teğet yönler konisi             |
| $K_{gph\ G}^*(x)$ | : $G$ çok değerli dönüşümünün teğet yönler konisinin duali    |
| $\Delta x(t)$     | : Birinci dereceden fark operatörü                            |
| $\Delta^2 x(t)$   | : İkinci dereceden fark operatörü                             |



| <b>Kısaltmalar</b> | <b>Açıklama</b>          |
|--------------------|--------------------------|
| <b><i>o.ü</i></b>  | : Olmak Üzere            |
| <b><i>o.ş</i></b>  | : Olacak Şekilde         |
| <b><i>gyk</i></b>  | : Gerek ve Yeter Koşul   |
| <b><i>TYŞ</i></b>  | : Temel Yeterlilik Şartı |



## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### İKİNCİ MERTEBEDEN BİR TARAMA SÜRECİNİN OPTİMALİĞİ İÇİN GEREKLİ KOŞULLAR

Büşra AKGÜN

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gülseren ÇİÇEK

Bu tez çalışmasında, ikinci mertebeden bir tarama sürecinin optimalliği için gerekli koşullar üzerinde durulmuştur.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm yani giriş kısmında optimallik ve tarama sürecinin tarihçesi ele alınmıştır.

İkinci bölümde tez için gerekli olan bilgiler ve tanımlar verilmektedir. Bu bölüm beş alt bölümden oluşmaktadır. Bu bölümde öncelikle konveks kümeler, konveks fonksiyonlar ve konveks çok değerli dönüşümler gibi konular hakkında bilgiler verilip sonrasında tarama süreçleri ele alınmaktadır. Son kısımda ise konveks programlama problemleri ile ilgili bilgiler verilmektedir.

Üçüncü bölümde, tez boyunca faydalanan araçlardan ve kullanılan yöntemlerden bahsedilmektedir.

Dördüncü bölüm yani bulgular kısmı tezimizin asıl kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde yörüngeye ve türevine uygulanan geçerli kısıtlamalar ile ikinci mertebeden bir tarama

sürecinin optimalliğı için gerekli koşullar ele alınıp formüle edilmiştir.

Beşinci bölümde tez çalışmamızın genel değerlendirmesi yapılmış olup ve konu ile ilgili öneriler verilmiştir.

Haziran 2022, 74 sayfa.

**Anahtar kelimeler:** Konveks küme, konveks fonksiyon, çok değerli dönüşüm, ayrık ve diferansiyel içerme, ikinci merteden optimizasyon problemi, yerel eşlenik fonksiyon, tarama süreçleri



## **SUMMARY**

### **M.Sc. THESIS**

#### **NECESSARY CONDITIONS FOR THE OPTIMALITY OF A SECOND ORDER SWEEPING PROCESS**

**Büşra AKGÜN**

**İstanbul University**

**Institute of Graduate Studies in Sciences**

**Department of Mathematics**

**Supervisor: Assist.Prof.Dr. Gülseren ÇİÇEK**

In this thesis, the necessary conditions for the optimality of a second-order sweeping process are studied.

This thesis consist of five chapters. The first chapter, the introduction, is about the history of optimality and the sweeping processes.

In the second chapter, necessary information and definitions for the thesis are given. The second chapter consists of five sections. In this chapter, first of all, informations about subjects such as convex sets, convex functions and convex multivalued mappings are given, and then sweeping processes are expressed. In the last part, information about convex programming problems are given.

In the third chapter, the tools and methods used throughout the thesis are mentioned.

The fourth chapter, the results chapter, constitutes the main part of our thesis. In this chapter, the valid constraints applied to the trajectory and its derivative and the necessary conditions for the optimality of a second-order sweeping process are discussed and formulated.

In the fifth chapter, the general evaluation of our thesis study has been made and suggestions about the subject have been given.

June 2022, 74 pages.

**Keywords:** Convex set, convex function, multivalued mapping, differential inclusion, second order optimization problem, locally dual mapping, sweeping process



## 1 GİRİŞ

Bu tez çalışmamızda yörüngeye ve türevine uygulanan geçerli kısıtlamalar ile ikinci mertebeden bir tarama sürecinin optimallliği için gerekli koşullar incelenecektir.

$\mathbb{R}^n$   $n$ -boyutlu Öklid uzayı,  $x, u \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere  $\langle x, u \rangle$  iç çarpım ve  $(x, u)$   $x, u$ 'nun ikilisi olsun.  $G : \mathbb{R}^{2n} \Rightarrow \mathbb{R}$  çok değerli dönüşüm ve  $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  tek değerli fonksiyon olduğunu varsayalım.

$$\text{minimize } \varphi(x(T), x'(T)) \quad (1.1)$$

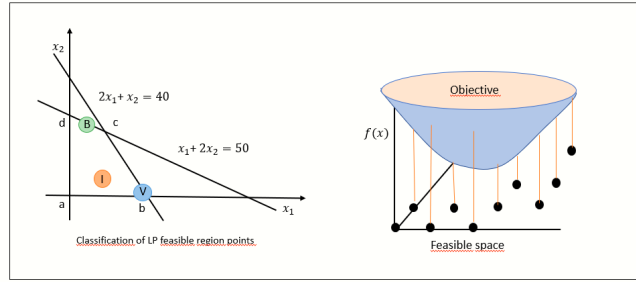
$$x''(t) \in -N(x'(t); C(t)) + G(x(t), x'(t)) \quad , \quad t \in [0, T] \quad (1.2)$$

$$x(0) = x_0 \quad , \quad x'(0) = v_0 \quad , \quad (x_0, v_0) \in C(0) \quad (1.3)$$

Problem  $\varphi(x(T), x'(T))$  Mayer problemini minimize edecek şekilde  $t = 0$  , sınır koşullarını ve  $[0, T]$  aralığının hemen her yerde ikinci mertebeden diferansiyel içermeleri sağlayacak bir  $\tilde{x}(t)$  yörüngesi bulmaktır. Burada  $C(t) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  hareketli, konveks değerli, kapalı bir kümedir.

İlk olarak optimizasyonun ne olduğuna ve tarihsel gelişim sürecine değinelim. Optimizasyon tanım olarak matematiksel bir şekilde ifade edilebilen bir problemi çözebilmek için en iyi kararı verme ve olabilecek en iyi sonucu üretme işlemidir. Burada amaç, bir fonksiyonu minimize veya maksimize etmektir. Üretilmek istenen sonuçla ilgili bütün ihtimalleri tahmin etmek zordur. Matematiksel olarak uygulanan yaklaşımlar ve yöntemler çözümü için onları basitleştirir ve sonuçlar için varsayımlar yaparak bütün ihtimaller yerine arama uzayını küçültmektedirler. Bir problemi çözmek için ele alınan fonksiyonun maksimumu, aynı fonksiyonun minimumu araştırılarak da bulunabilmektedir. Bu yüzden optimizasyon, minimizasyon anlamında da kullanılabilir. Optimizasyon problemlerinin tümü çözebilecek tek bir yöntem yoktur. Her problem için farklı yöntemler geliştirilmiştir. Optimizasyon problemleri lineer veya lineer olmayan yapıda olabilmektedir. Lineer problem "Simpleks" veya "Grafik" yöntemleriyle çözülebilmektedir ve çözümü uygun bölgenin sınırında yer almaktadır. Lineer olmayan için ise çözüm uygun çözüm bölgesinin içinde ve

kenarında bulunmaktadır.



**Şekil 1.1:** Doğrusal olan ve olmayan problemlerin çözümleri

Optimizasyonun tarihsel gelişimine bakılırsa uygarlık tarihi kadar eski olduğunu söylemek mümkündür. Fakat konu ile ilgili önemli gelişmeler olarak 17. ve 18. yy'da Newton, Leibnitz, Lagrange ve Cauchy'nin çalışmaları söylenebilir. Newton ve Leibniz'in geliştirdiği kalkülüs optimizasyon teorisi için çok önemli bir yere sahiptir. Kalkülüs, bir fonksiyonun ve bağımsız değişkenlerinin maksimum veya minimum cinsinden optimallik koşullarının elde edilmesini sağlamaktadır. Fakat, bazı zamanlarda kalkülüsün uygulanmasında görülen cebirsel problemlerlerin çözümü zor olabildiği için pragmatik olarak dünya problemlerinin optimizasyonunda yeterli bir araç olamamaktadır. Karush'un 1939 yılında kısıtlandırılmış problemler için optimallik koşullarını ifade etmesi optimizasyon için yeni bir adım olmuştur.

II. Dünya Savaşı'ndan sonra yeni optimizasyon teknikleri geliştirilmiş ve bunlar daha zor ve karmaşık problemlere uygulanabilmiştir. Bunun sebebi olarak bilgisayarların geliştirilmesi ve optimum değerlerin elde edilmesi için nümerik tekniklere matematiksel analizin uygulanması söylenebilir. Bu teknikler kalkülüsün zorluklarını yok etmiştir. İngiltere ve ABD'nin 1942'de yöneylemle ilgili araştırma gruplarını oluşturması optimizasyon için büyük bir adım olmuştur.

W. McCulloch ve W. Pitts 1943'de sezgisel optimizasyon ile ilgili yapay sinir ağları konusunda çalışmıştır. 1944'de ise, J.V. Neumann ve O. Morgenstern "Oyun Teorisi ve Ekonomik Davranış" adlı eserle oyun kuramı kavramını ortaya atmıştır. G.B. Dantzig tarafından 1947'de ise lineer problemler için Simplex yöntem geliştirilmiştir. Bu gelişim optimizasyon konusunda bir devrim sayılabilir. R. Bellman ise 1950'de dinamik programlama modeli ve çözümünü geliştirmiştir. 1951'de H. Kuhn ve A. Tucker öncesinde Karush tarafından önerilen kısıtlandırılmış problemler için optimallik koşullarını ele alıp tekrar formülize ederek lineer olmayan programlama modelleri hakkında çalışmışlardır. Aynı

yıl içerisinde, J.V. Neumann, G.B. Dantzig ve A. Tucker primal-dual lineer programlama modellerini geliştirmişlerdir. 1955 yılında da G.B. Dantzig stokastik programlama üzerine çalışmıştır.

1956'da M. Frank ve P. Wolfe kuadratik programlamayı, 1959 yılında A. Charnes ve W. Cooper ise şans kısıtlı kısıtlama modellerini geliştirmiştir. 1960'da sezgisel optimizasyonla ilgili olan yapay zeka ile yöneylem hakkında araştırmalar yapılmıştır. A. Charnes ve W. Cooper tarafından 1965'de ise hedef programlama modeli geliştirilmiştir. M. Zeleny, S. Zionts, J. Wallenius, W. Edwards ve B. Roy 1975'de çok amaçlı karar verme teorisini ortaya atmıştır. L. Khachian ise 1979'da lineer programlama modellerinin çözümü için elips yöntemini geliştirmiştir. N. Karmarkar 1984 yılında lineer programlama için iç nokta algoritmasını geliştirmiştir. J.H. Holland 1992'de bir sezgisel optimizasyon tekniği olan genetik algoritma geliştirmiştir. Optimal kontrol Pontryagin'ın Maksimum Prensipleri [33] ile birlikte diskret ve sürekli optimizasyon problemine uygulanmıştır.

Optimizasyon konusu son zamanlarda çok fazla ilgi görmekte ve birçok araştırmacı tarafından her geçen gün önemli katkılar yapılmaktadır. Kullanıcı dostu yazılım geliştirme, yüksek hızlı işlemciler, yapay sinir ağları dahil olmak üzere bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmelerden dolayı ilgi çeken bir çalışma alanıdır. Ayrıca matematik dışında tarım, tıp, askeriye, uydu yörüngeleri, mühendislik, ekonomi, radyoterapi gibi pek çok alanlarda programlama yöntemleri kullanılmaktadır.

Rockafellar [35] çalışmasında da yer verdiği gibi varyasyon analizinde optimizasyon problemleriyle ilgilenmektedir. Bilhassa ikinci mertebeden ayrık ve diferansiyel içermeleri içeren problemler Aitalioubrahim [1] ve Benchohra [3] tarafından incelenmiştir. Genellikle [2], [10], [18], [21], [27]'de varlık ve geçerlilik hakkında çalışılmıştır. Çok değerli dönüşümler, ayrık yaklaşım ve diferansiyel içermeli problemler, adi ve kısmi diferansiyel içermeli problemlerle ilgili bilgiler Mahmudov'un [22], [24], [25] gibi birçok çalışmasında verilmektedir. Mahmudov yüksek mertebeden ayrık diferansiyel içermeli optimizasyon problemlerini [24]'de, ikinci mertebeden olanlar ise [23]'de incelenmiştir.

Yarou ve Haddad [18]'de ikinci mertebeden diferansiyel içermeye açısından ilk geçerli sonuçtan söz etmiştir. Burada, sonsuz boyut ve ikinci mertebeden diferansiyel içermeye için Cauchy problemi düşünülmektedir. Konveks olmayan sonlu boyutlu durumu ise Cernea [10] ve Lupulescu [21] ele almıştır. İbrahim ve Akulaibi [20]'da Hilbert uzayında incelemiştir.

Genel olarak, ikinci mertebeden diferansiyel içermeli problemlerin çözümünün varlığı ve geçerliliği hakkında çalışılmıştır. Mahmudov [23]'de ikinci dereceden diferansiyel içermeli Bolza problemini incelemektedir ve problem için gerekli ve yeterli koşulları elde edip ek problem olarak ayırık yaklaşık problemini ele almaktadır. Optimal koşullar için yerel dual fonksiyon ve denklik teoremlerini kullanmaktadır. Genellikle ikinci mertebeden diferansiyel içermeli problemlerin çözümlerinin varlığı ve geçerliliği hakkında çalışmalar vardır. Çiçek ve Mahmudov [15] 'da ise ikinci mertebeden diferansiyel içermeli Mayer problemi için optimal koşullar formülize etmektedir. B.S. Mordukhovich [29]'de kısıtlamalar ile yarılineer içermelerin optimal kontrolü hakkında çalışmıştır.

Şimdi de "Sweeping Process" kavramına değinelim. Bu tez çalışmasında bu kavram "Tarama Süreçleri" olarak çevrilmiştir. Fakat farklı bir şekilde ifade etmek gerekirse "Süpürme Süreçleri" olarak da ifade edilebilir. Birinci mertebeden tarama süreçleri konusunu J.J Moreau 1971 yılında ortaya atmıştır [30]. Mekanik yorumlama nedeniyle bu tür problemler "Sweeping Process" olarak adlandırılmıştır. Bu kavram elastoplastik sistemleri modellemek için oluşturulmuştur ve tarama süreçleri modelleri düzgün olmayan elektrik devreleri, mekanikler, elastoplastik ve termoelastoplastik malzemelerin mekaniği gibi bir çok farklı uygulama alanına sahiptir.

Cauchy problemi için bir Lipschitz çözümünün var olması tarama süreci için klasik bir sonuçtur. Moreau-Yosida yaklaşımı ve catching up algoritması bu konuda klasik kullanılan metotlardır. Kararsız tarama süreçleri, ikinci mertebeden tarama süreçleri, yerel olmayan başlangıç koşulları ile tarama süreçleri gibi tarama süreçlerinin çeşitli varyantları vardır. Tarama süreçleri ilgili çözümlerin varlığını bulma, tarama süreçlerinin optimallliği ve düzgün olmayan mekanik uygulamalar üzerinde çalışılan konulara örnek olarak verilebilir. G. Colombo, R. Henrion, D. Nguyen, N.D. Hoang, B.S. Mordukhovich , T.H Cao ve J. Noel ve daha birçok araştırmacı tarafından tarama süreçleri konusu çalışılmıştır. [5], [6], [13], [7], [32]

Tüm bu çalışmalar çözümün varlığı için yapılmıştır. Bu tezde tarama süreçli ikinci mertebeden diferansiyel içermeli optimizasyon problemi için optimal koşullar ele alınacaktır.

Matematiksel programlama problemi, belli kısıtlar altında amaç fonksiyonunun optimize yani minimize ya da maksimize edilmesiyle ortaya çıkmaktadır. Bir optimizasyon modeli tasarlanır, bir çözüm elde edilir ve bu matematiksel programlama olarak adlandırılır.

Bu tez çalışmamızda giriş kısmında optimallik ve tarama sürecinin tarihçesi ele alınıp sonraki bölümde konveks küme, konveks koni, konveks fonksiyonlar, subdiferansiyel, çok değerli dönüşüm ve yerel eşlenik dönüşümler gibi kavramlar tanıtılmıştır. Optimallik için gerekli ve yeterli koşullar açıklanmıştır ve kullanılan yöntemlerden bahsedilmiştir. Daha sonrasında yörüngeye ve türevine uygulanan geçerli kısıtlamalar ile ikinci mertebeden bir tarama sürecinin optimalliği için gerekli koşullar ele alınıp formüle edilmiştir.



## 2 GENEL KISIMLAR

[22] Bu bölümde Konveks Analiz ile ilgili temel tanım ve teoremler incelenecektir. Bu tez boyunca  $x$  vektörü  $X = \mathbb{R}^n$   $n$ -boyutlu Öklid uzayında düşünülecektir. Biz ayrıca onun  $x^* = \mathbb{R}^n$  dual uzayında çalışacağız.  $x^i$  ve  $x^{*i}$   $x$  ve  $x^*$ 'nin bileşenleri o.ü  $x \in X$  ve  $x^* \in X^*$  vektörlerinin iç çarpımı şu şekilde tanımlanır :

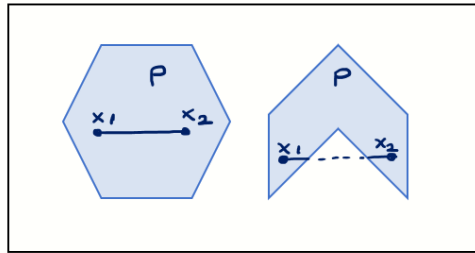
$$\langle x, x^* \rangle = \sum_{i=1}^n x^i x^{*i}$$

### 2.1. KONVEKS KÜMELER VE KONVEKS KONİLER

Bu bölümde konveks kümeler ve konveks koniler ile ilgili tanım ve özellikleri vereceğiz.

#### 2.1.1. Konveks Kümeler

**Tanım 2.1.** [22] Herhangi  $x_1, x_2 \in P$ , ve  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  için  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in P$  oluyorsa  $P \subseteq X$  kümesine konveks küme denir. Örneğin  $\emptyset$  ve  $\mathbb{R}^n$  konvektir.



Şekil 2.1: Konveks küme ve konveks olmayan küme

**Yardımcı Teorem 2.2.** [22]  $I$  keyfi indeks kümesi o.ü  $\{P_i : i \in I\}$   $\mathbb{R}^n$ 'de boştan farklı konveks kümeler ailesi olsun. Bu durumda

$$P = \bigcap_{i=1} P_i$$

kesişimi konvektir.

**Yardımcı Teorem 2.3.** [22]  $P_1$  ve  $P_2$  kümeleri  $\mathbb{R}^n$ 'de konveks kümeler ve  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  olsun. O halde  $c_1P_1 + c_2P_2$  toplamı konvektir.

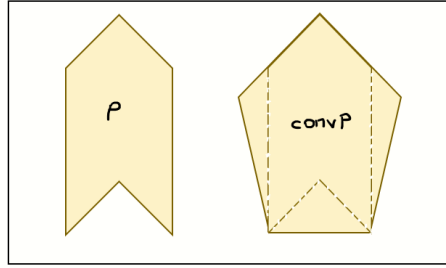
**Yardımcı Teorem 2.4.** [22]  $P$  bir konveks küme ve  $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$  olsun. Bu durumda

$$(c_1 + c_2)P = c_1P + c_2P.$$

**Tanım 2.5.** [22]  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$  verilsin.  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$  ve  $\lambda_i \geq 0, \forall m \in \mathbb{N}$  için  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$  noktası  $x_1, x_2, \dots, x_m$  noktalarının konveks kombinasyonu olarak adlandırılır.

**Yardımcı Teorem 2.6.** [22] Eğer  $P$  bir konveks küme ve  $x_i \in P, i = 1, 2, \dots, m$  ise  $P$  kümesi  $x_1, x_2, \dots, x_m$  elemanlarının bütün konveks kombinasyonlarını içerir.

**Tanım 2.7.** [22]  $P$ 'yi içeren bütün konveks kümelerin kesişimine  $P$  kümesinin konveks zarfı denir ve  $\text{conv}P$  ile gösterilir.



**Şekil 2.2:** Konveks olmayan küme ve onun konveks zarfı

**Yardımcı Teorem 2.8.** [22]  $P$  kümesi  $X = \mathbb{R}^n$ 'de bir küme olsun.  $\text{conv}P$ ,  $P$ 'nin noktalarının bütün konveks kombinasyonlarının bir kümesidir.

**Teorem 2.9.** (Caratheodory Teoremi) [22]  $P$  kümesi  $X = \mathbb{R}^n$ 'de herhangi bir küme ve  $x \in \text{conv}P$  de herhangi bir nokta olsun. Öyleyse  $x$  noktası  $P$ 'nin  $n + 1$  ya da daha az noktasının konveks kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

**Teorem 2.10.** (Gauss-Lucas) [22] Sabit olmayan bir kompleks polinomun türevinin kökleri, polinomun kendisinin köklerinin kümesinin konveks zarfına aittir.

**Tanım 2.11.** [22]  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  o.ü eğer  $x + \varepsilon B \subseteq P$  sağlayan  $\varepsilon \geq 0$  sayısı var ise  $x \in P$ 'ye  $P$  kümesinin iç noktası denir.  $P$ 'nin tüm iç noktalarının kümesi kısaca  $\text{int} P$  ile gösterilir ve  $P$ 'nin içi denir.

**Tanım 2.12.** [22]  $x$ 'e yakınsayan bir  $x_k \in P$  dizisi varsa,  $x$  noktasına  $P$ 'nin limit noktası denir.  $P$ 'nin bütün limit noktalarının kümesi  $P$ 'nin kapanışı olarak adlandırılır ve  $\bar{P}$  ile gösterilir.

**Yardımcı Teorem 2.13.** [22] konveks küme olan  $P$  'nin kapanışı ve içi de konveks kümedir.

**Tanım 2.14.** [22]  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  bir konveks küme ve  $x_0$  noktası  $P$ 'nin herhangi bir noktası olsun.  $P - x_0$  içeren tüm olası temel alt uzaylarının kesişimi  $P$  kümesi için lineer örtü olarak adlandırılır ve  $LinP$  ile gösterilir. Diğer bir deyişle,  $LinP$   $P$ 'yi içeren  $\mathbb{R}^n$ 'nin en küçük alt uzayıdır.  $P$  kümesinin  $AffP$  afin örtüsü  $\mathbb{R}^n$ 'de  $P$ 'yi içeren bütün afin kümelerinin kesişimidir. Böylece  $AffP$ ,  $P$ 'yi içeren en küçük afin küme olarak adlandırabiliriz. Böylece bir afin örtüyü  $AffP = x_0 + LinP$  olarak tanımlayabiliriz.

**Tanım 2.15.** [22]  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  konveks kümenin izafi içi  $riP$  ile gösterilir ve

$$riP = \{x \in affP : \exists \varepsilon > 0, (x + \varepsilon \bar{B}) \cap (affP) \subset P\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca  $riP \subset P \subset \bar{P}$ dir.

**Yardımcı Teorem 2.16.** [22]  $ri\bar{P} = riP$ .

**Tanım 2.17.** [22]  $P$ 'yi içeren bütün kapalı konveks kümelerinin kesişimine  $P$ 'nin kapalı konveks zarfı denir ve  $\overline{conv}P$  ile gösterilir.

**Yardımcı Teorem 2.18.** [22]  $\overline{conv}P = \overline{conv\bar{P}}$ .

**Teorem 2.19.** [22] Kompakt bir kümenin konveks örtü kümesi de kompaktır.

**Teorem 2.20.** [22]  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  bir konveks küme olsun. Eğer  $x_1 \in \bar{P}$ ,  $x_2 \in riP$  ise  $\forall \lambda \in (0, 1)$  için

$(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \in riP$  dir. Ayrıca  $\bar{P} = \overline{riP}$ .

**Tanım 2.21.** [22]  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  boştan farklı konveks kümesinin  $H_P$  destek fonksiyonu:

$$H_P(x^*) = \sup_x \{\langle x, x^* \rangle : x \in P\}$$

**Teorem 2.22.** [22]  $P$  kapalı konveks küme olsun. O halde  $x \in P$  ancak ve ancak  $\forall x^*$  için  $\langle x, x^* \rangle \leq H_P(x^*)$  olmasıdır.

### 2.1.2. Konveks Koniler ve Dual Koniler

Bu bölümde konveks koni ve dual koni ile ilgili tanım ve özellikleri vereceğiz.

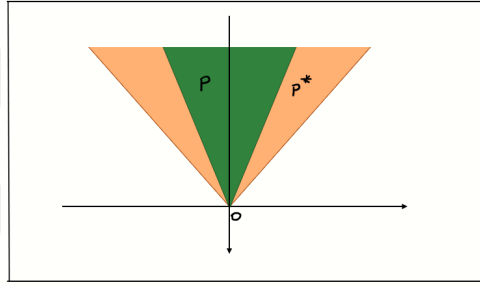
**Tanım 2.23.** [22]  $P$  bir konveks küme olsun. Eğer  $x \in P$  ve  $\lambda > 0$  için  $\lambda x \in P$  ise  $P$ 'ye konveks koni denir.

**Yardımcı Teorem 2.24.** [22]  $x_1, \dots, x_m \in P$ ,  $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_m > 0$  ise,  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \in P$  dır.

**Tanım 2.25.** [22]  $\forall x \in P$  için  $\langle x, x^* \rangle \geq 0$  sağlayan  $x^* \in X^* = \mathbb{R}^n$  vektörlerinin kümesine  $P$  konisinin dual konisi denir ve  $P^*$  ile gösterilir.

$$P^* = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle \geq 0, \forall x \in P\}$$

şeklinde ifade edilir.  $P^*$  bir konveks konidir.



**Şekil 2.3:**  $P$  konveks konisi ve onun  $P^*$  dual konisi

**Yardımcı Teorem 2.26.** [22]  $P^*$  bir kapalı konidir.

**Yardımcı Teorem 2.27.** [22]  $P^* = (\overline{P})^*$

**Yardımcı Teorem 2.28.** [22]  $P$  kapalı bir koni ve  $\forall x^* \in P^*$  için  $\langle x, x^* \rangle \geq 0$  ise  $x \in P$  dır.

**Yardımcı Teorem 2.29.** [22]  $P$  kapalı bir koni ise  $P^{**} = P$  dır.

**Yardımcı Teorem 2.30.** [22]  $P_1$  ve  $P_2$  konveks koniler olsun. Bu durumda  $P_1 + P_2$  toplamı konveks konidir ve  $(P_1 + P_2)^* = P_1^* \cap P_2^*$  dir.

**Yardımcı Teorem 2.31.** [22]  $P_1$  ve  $P_2$  konileri kapalı ise  $(P_1 \cap P_2)^* = \overline{P_1^* + P_2^*}$  dir.

**Yardımcı Teorem 2.32.** [22] Eğer  $\langle x, x^* \rangle > 0$ ,  $\forall x \in P$  için alttan sınırlıysa  $x^* \in P^*$  dir. Ayrıca,  $x \in \text{int } P$  ise  $\langle x, x^* \rangle > 0$  dır.

**Teorem 2.33.** [22]  $P_1, \dots, P_m$  konveks koniler olsun. Kesişimlerinin boş olması için gerek ve yeter koşul  $x_1^* + \dots + x_m^* = 0$  sağlayan aynı anda hepsi sıfır olmayan  $i = 1, \dots, m$  için  $x_i^* \in P_i^*$  var olmasıdır.

**Teorem 2.34.** [22]  $P_1, P_2, \dots, P_m$  konveks koniler olsun. Eğer  $P = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_m$  ve  $P_1 \cap \text{int}P_2 \cap \dots \cap \text{int}P_m \neq \emptyset$  ise  $P^* = P_1^* + P_2^* \dots + P_m^*$  olur.

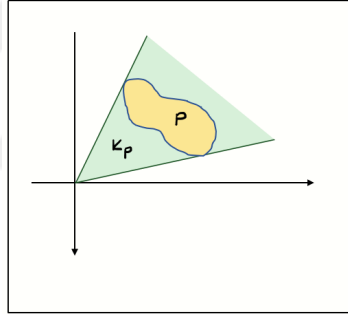
**Teorem 2.35.** [22]  $P_1, P_2, \dots, P_m$  konveks koniler ve  $P = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_m$  olsun. Öyleyse ya  $P^* = P_1^* + P_2^* \dots + P_m^*$  ya da hepsi aynı anda sıfır olmayan  $x_1^* + x_2^* \dots + x_m^* = 0$  o.ş  $x_i^* \in P_i^*$  vardır.

**Tanım 2.36.** [22] Eğer  $x_1^* + x_2^* \dots + x_m^* = 0$  o.ş hepsi aynı anda sıfır olmayan  $x_i^* \in P_i^*$  vektörleri varsa  $P_1, P_2, \dots, P_m$  konveks konilerine ayrılabilir denir.

**Tanım 2.37.** [22]  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  herhangi boştan farklı bir küme olsun.

$$\text{cone}P = \{x : x = \lambda x_1, x_1 \in P, \lambda > 0\}$$

ile tanımlanan koni  $P$  tarafından üretilen koni olarak adlandırılır.



Şekil 2.4: Bir küme ile oluşturulan koni

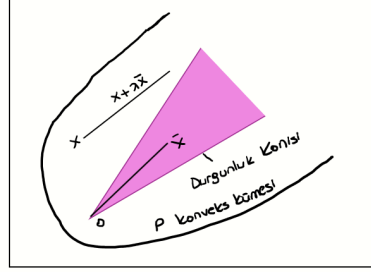
**Yardımcı Teorem 2.38.** [22]  $P$  bir konveks küme ise  $\text{cone}P$  bir konveks konidir.

**Yardımcı Teorem 2.39.** [22]  $P$  bir olsun. O halde  $x^* \in (\text{cone}P)^*$  ancak ve ancak  $\forall x \in P$  için  $\langle x, x^* \rangle \geq 0$  dır.

**Tanım 2.40.** [22]  $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{R}^n$  bir konveks küme olsun.  $P$ 'nin durgunluk konisi şu şekilde tanımlanır:

$$0^+P = \{\bar{x} \neq 0 : x + \lambda \bar{x} \in P, \forall x \in P, \forall \lambda \geq 0\} \cup \{0\}$$

**Tanım 2.41.** [22]  $\mathbb{R}^n$ 'de bir polihedral konveks küme sonlu sayıdaki kapalı yarı-uzayların kesişimi olarak ifade edilebilir, yani  $\langle x, x_k^* \rangle \leq \beta_k, k = 1, 2, \dots, l$  formundaki sonlu sayıda eşitsizlik sisteminin çözümünün bir kümesidir. Özellikle  $\langle x, x_k^* \rangle \leq \beta_k, k = 1, 2, \dots, l$  eşitsizlik



Şekil 2.5: Durgunluk konisi

sistemi homojen ise  $(\beta_k, k = 1, 2, \dots, l)$  yani  $\langle x, x_k^* \rangle \leq 0, k = 1, 2, \dots, l$  ise eşitsizliklerinin sonlu sayıdaki çözüm kümesine konveks polihedral koni denir. Tanım gereği polihedral kümeler kapalı ve konveks kümelerdir.

**Teorem 2.42.** (Farkas Teoremi) [22] Eğer  $P$  bir polihedral koni ise  $K_P^*$  dual konisi polihedraldir ve  $x^* = \sum_{k=1}^l \gamma_k x_k^*, \gamma_k \geq 0$  formundaki elemanlardan oluşur.

**Yardımcı Teorem 2.43.** [22] Polihedral konilerin toplamı bir polihedral konidir.

**Yardımcı Teorem 2.44.** [22]  $P_1, \dots, P_m$  polihedral koniler ise  $(P_1 \cap \dots \cap P_m)^* = P_1^* + \dots + P_m^*$ .

**Yardımcı Teorem 2.45.** [22] Bir polihedral küme bir polihedral koni ve bir politop toplamı olarak temsil edilebilir. Tersine, herhangi bir politop ve polihedral koninin toplamı bir polihedral kümedir.

## 2.2. KONVEKS FONKSİYONLAR

[22]  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$  olsun. Bu fonksiyona ait bazı tanımlar aşağıdadır.

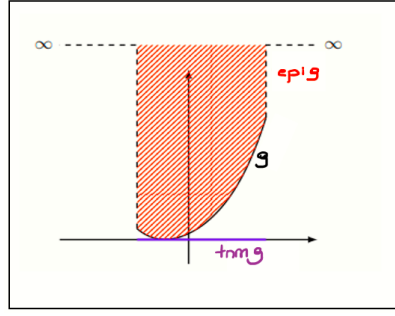
$$\text{dom } g = \{x : g(x) < \infty\}$$

kümesi  $g$  fonksiyonunun tanım kümesidir.

$$\text{epi } g = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq t\}$$

kümesine  $g$  fonksiyonunun epigrafi denir.

**Tanım 2.46.** [22] Eğer en az bir  $x$  noktası için  $g(x) < +\infty$  ve her  $x$  için  $g(x) > -\infty$  ise  $g$  fonksiyonuna has fonksiyon ya da proper fonksiyon denir. Proper olmayan fonksiyona

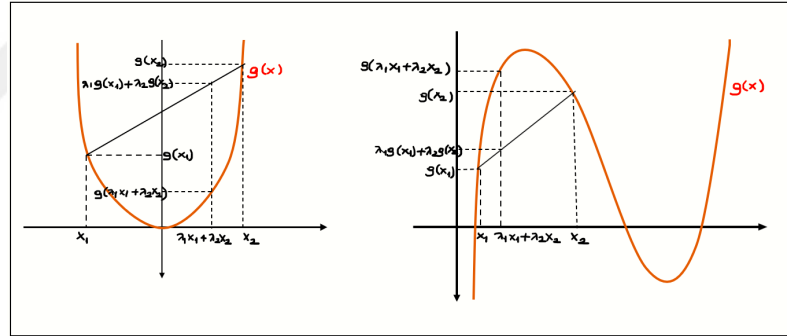


**Şekil 2.6:** Bir has konveks fonksiyonun epigrafi ve tanım kümesi

improper fonksiyon denir. Böylece,  $g$ 'nin olması için  $\text{gryk } \text{dom } g \neq \emptyset$  ve  $x \in \text{dom } g$  için  $g(x)$ 'in sonlu olmasıdır.

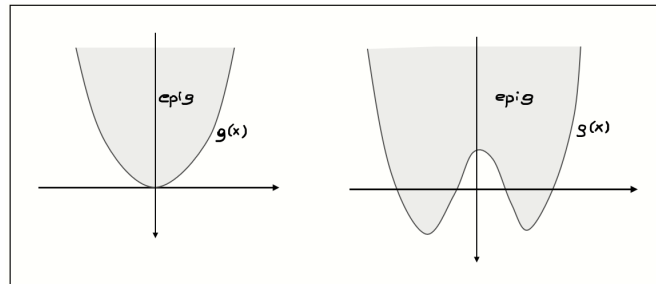
**Tanım 2.47.** [22]  $g$  bir has fonksiyon olsun.  $g$ 'nin konveks fonksiyon olabilmesi için  $\text{gryk}$

$$g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$



**Şekil 2.7:** Konveks fonksiyon ve konveks olmayan fonksiyon

**Tanım 2.48.** [22]  $\text{epi } g$  konveks ise  $g$  bir konveks fonksiyondur.



**Şekil 2.8:** Konveks ve konveks olmayan fonksiyonların epigrafları

**Yardımcı Teorem 2.49.** [22] Eğer  $g$  konveks ise  $\text{dom } g$  konveks kümedir.

**Yardımcı Teorem 2.50.** [22]  $g_i, i \in I$  konveks fonksiyonlarının bir topluluğu ve  $I$  keyfi indeks kümesi olsun. Öyleyse  $g(x) = \sup_{x \in I} g_i(x)$  noktasal supremumu bir konveks fonksiyondur.

**Yardımcı Teorem 2.51.** (Jensen Eşitsizliği) [22]  $g$  bir has konveks fonksiyon olsun. Öyleyse  $g(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 g(x_1) + \dots + \lambda_m g(x_m)$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ .

**Yardımcı Teorem 2.52.** [22]  $g_i, i = 1, \dots, m$  has konveks fonksiyonlarının negatif olmayan katsayılar ile toplamı konvektir.

**Açıklama 2.53.** [22] Konveks küme ve konveks fonksiyonlar arasında bazı ilişkiler vardır. En basiti  $P$ 'nin  $\delta_P(\cdot)$  indikatör fonksiyonu ile  $\mathbb{R}^n$ 'de her  $P$  kümesi arasındaki ilişkidir. Burada

$$\delta_P(x) = \begin{cases} 0, & x \in P \\ \infty, & x \notin P \end{cases}$$

$P$  konveks ancak ve ancak  $\delta_P(\cdot)$   $\mathbb{R}^n$ 'de konveks fonksiyondur.

**Teorem 2.54.** [22]  $g$  has konveks fonksiyonu bir  $x_0 \in \text{dom } g$  noktasının bir komşuluğunda üstten sınırlı olsun. O halde  $g$ ,  $x_0$  noktasında süreklidir.

**Teorem 2.55.** [22] Eğer  $g$  konveks fonksiyonu  $x_0$ 'da sürekli ise  $g$ ,  $x_0$  noktasının komşuluğu için  $|g(x) - g(x_0)| = L \|x - x_0\|$  Lipschitz koşulunu sağlar, burada  $L$  sabittir.

**Teorem 2.56.** [22]  $g$  bir has konveks fonksiyon olsun. Öyleyse  $f$ ,  $ri(\text{dom } g)$ 'te süreklidir.

### 2.2.1. Konveks Fonksiyonların Eşleniği

[22] Kapalı konveks kümenin destek fonksiyonuyla tamamen karakterize edilebileceğini hatırlayalım:

$$H_P(x^*) = \sup_x \{\langle x, x^* \rangle : x \in P\}$$

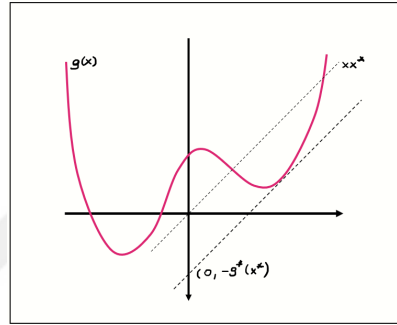
$epig \subset \mathbb{R}^{n+1}$  olduğunu dikkate alarak  $g$  kapalı konveks fonksiyonunun epigrafının destek fonksiyonunu şu şekilde yazabiliriz:

$$H_{epig}(x^*, \eta^*) = \sup_{(x, \eta) \in epig} \{\langle (x^*, \eta^*), (x, \eta) \rangle\} = \sup_{(x, \eta)} \{\langle x, x^* \rangle + \eta \eta^* : (x, \eta) \in epig\}$$

Eğer  $\eta^* \geq 0$  ise verilen bir  $x$  için  $g(x) \leq \eta$  olabilir. Böylece  $H_{epig}(x^*, \eta^*) = +\infty$  olur.  $\eta^* \leq 0$  durumu için ise  $f$  kapalı konveks fonksiyon olduğundan  $H_{epig}(x^*, -1)$  olduğunu göstermek yeterlidir:  $H_{epig}(x^*, -1^*) = \sup_x \{\langle x, x^* \rangle - g(x)\}$

**Tanım 2.57.** [22]  $g$ 'nin eşlenik fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$g^*(x^*) = \sup_x \{\langle x, x^* \rangle - g(x)\}, \quad x \in \text{dom } g, \quad x^* \in \mathbb{R}^n$$



**Şekil 2.9:** Eşlenik fonksiyon

**Yardımcı Teorem 2.58.** [22] Eşlenik fonksiyon daima kapalı ve konvektir.

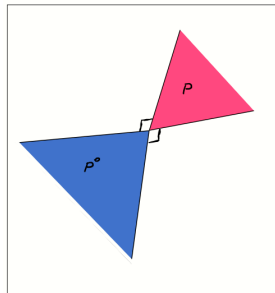
**Tanım 2.59.** [22]  $P$  kümesinin poları  $P^\circ$  ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$P^\circ = \{x^* : H_P(x^*) \leq 1\}.$$

Eğer  $P$  bir konveks koni ise ;

$$P^\circ = \{x^* : \langle x, x^* \rangle \leq 0, \forall x \in K\}$$

Ayrıca  $P^* = -P^\circ$  dır. Yani polar koni dual koninin zıttıdır.



**Şekil 2.10:** Polar koni

**Teorem 2.60.** [22] Eğer  $g$  kapalı has konveks fonksiyon ise  $g = g^{**}$  dır, burada

$$g^{**}(x) = \sup_{x^*} \{ \langle x, x^* \rangle - g^*(x^*) \}$$

### 2.2.2. Türev ve Subdiferansiyel

[22] Genel olarak konveks fonksiyonlar diferansiyellenemezdir fakat bu fonksiyonların birçok "diferansiyellenebilme" özelliği vardır. Bunlardan biri yönlü türevlerin genel olarak var olmasıdır. Dahası, konveks fonksiyonlar için bir subgradient kavramı tanımlanabilir ve subgradientlerin kümesi subdiferansiyel olarak adlandırılır.

$g'$ 'nin  $x$  noktasındaki  $p \in X = \mathbb{R}^n$  yönündeki yönlü türevi

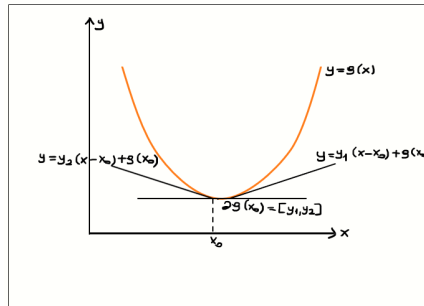
$$g'(x, p) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{g(x + \lambda p) - g(x)}{\lambda}$$

**Yardımcı Teorem 2.61.** [22]  $g$  bir has konveks fonksiyon ve  $x_0 \in \text{dom } g$  olsun. Bu durumda  $\forall p \in \mathbb{R}^n$  için  $g'(x_0, p)$  sonludur ya da yoktur.

**Yardımcı Teorem 2.62.** [22] Eğer  $\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$  için  $x_0 + \lambda p \notin \text{dom } g$  ise  $g'(x_0, p)$  değeri sonludur .

**Yardımcı Teorem 2.63.** [22]  $g'(x_0, p)$  yönlü türevi  $p$ 'nin pozitif homojen fonksiyonudur.

**Tanım 2.64.** [22] Eğer  $\forall x$  için  $g(x) - g(x_0) \geq \langle x - x_0, x^* \rangle$  ise  $x^*$  vektörü  $x_0 \in \text{dom } g$  noktasında  $g$  has konveks fonksiyonunun subgradientidir.



Şekil 2.11: Subdiferansiyel

**Yardımcı Teorem 2.65.** [22]  $g$ ,  $x_0 \in \text{dom } g$ 'te has konveks fonksiyon olsun. O halde  $x^*$ ,  $x_0$ 'daki  $g$ 'nin subgradiyentidir ancak ve ancak  $\forall p$  için  $\langle p, x^* \rangle \leq g'(x_0, p)$ .

**Tanım 2.66.** [22]  $g$ 'nin  $x_0$  noktasındaki subgradyentlerinin oluşturduğu kümeye  $g$ 'nin  $x_0$  noktasındaki subdiferansiyeli denir ve şu şekilde ifade edilir:

$$\partial g(x_0) = \{x^* : g(x) - g(x_0) \geq \langle x - x_0, x^* \rangle, \forall x\}$$

$\partial g(x_0)$  kümesi boş küme olabilir.

$\partial g(x_0)$  kümesi boştan farklı ise  $g$ 'ye  $x_0$  noktasında subdiferansiyellenebilir denir.

**Yardımcı Teorem 2.67.** [22]  $\partial g(x_0)$  kapalı konveks kümedir.

**Teorem 2.68.** [22] Eğer  $g'(x_0, \cdot)$  kapalı ise  $\partial g(x_0)$  boştan farklıdır ve

$$g'(x_0, p) = \sup_{x^*} \{\langle p, x^* \rangle : x^* \in \partial g(x_0)\}.$$

**Teorem 2.69.** [22] Eğer  $g, x_0$ 'da diferansiyellenebilir konveks fonksiyon ise subdiferansiyel bu noktadaki tek gradyent vektöründen oluşur. Yani  $\partial g(x_0) = \{g'(x_0)\}$ .

**Yardımcı Teorem 2.70.** [22]  $g_0$  konveks fonksiyon ve  $\alpha > 0$  olsun. Öyleyse  $g(x) = \alpha g_0(x)$  subdiferansiyellenebilir ve  $\partial g(x_0) = \alpha \partial g_0(x_0)$ 'dır.

**Yardımcı Teorem 2.71.** [22]  $g_1, g_2$  has konveks fonksiyonlar ve  $g = g_1 + g_2$  olsun. Öyleyse

$$\partial g(x_0) \supseteq \partial g_1(x_0) + \partial g_2(x_0).$$

**Teorem 2.72.** Moreau-Rockafellar [22]  $g_1, g_2$  has konveks fonksiyonlar,  $g = g_1 + g_2$ ,  $x_0 \in \text{dom } g_1 \cap \text{dom } g_2$  olsun ve

1)  $g_1$  sürekli o.ü  $\exists x_1 \in \text{dom } g_1 \cap \text{dom } g_2$

2)  $\text{ri}(\text{dom } g_1) \cap \text{ri}(\text{dom } g_2) \neq \emptyset$  ifadelerinden birinin sağlandığını varsayalım. O halde

$$\partial g(x_0) = \partial g_1(x_0) + \partial g_2(x_0)$$

**Teorem 2.73.** [22]  $\text{ri}P_1 \cap \dots \cap \text{ri}P_m \neq \emptyset$  olduğunu varsayalım. Öyleyse

$$(P_1 \cap \dots \cap P_m)^* = P_1^* + \dots + P_m^*$$

**Teorem 2.74.** [22]  $P^*$  kapalı konveks küme ve  $g(x) = \sup_{x^*} \{\langle x, x^* \rangle : x^* \in P^*\}$  olsun. O halde

$$\partial g(x_0) = \{x^* \in P^* : \langle x_0, x^* \rangle = g(x_0)\}$$

Özellikle, eğer  $x_0 = 0$  ise  $\partial g(0) = P^*$  dır.

**Teorem 2.75.** [22]  $g$  bir konveks fonksiyon ve  $P = \{x : g(x) \leq 0\}$  olsun ve varsayalım ki  $x_1 \in P$  için  $g(x_1) < 0$  olsun. Eğer  $g(x_0) = 0$  ve  $g'(x_0, \cdot)$  kapalı fonksiyon ise

$$[\text{cone}(P - x_0)]^* = -\text{cone} \partial g(x_0).$$

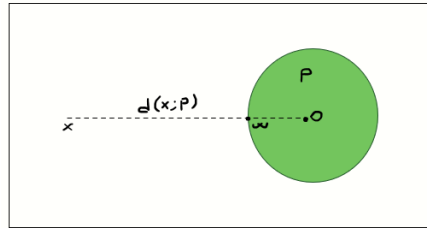
**Teorem 2.76.** [22]  $g$  bir konveks fonksiyon,  $x_0 \in P$ 'de sürekli  $P = \{x : g(x) \leq 0\}$  ve  $g(x_1) < 0$  o.ş öyle bir  $x_1$  var olsun. Bu durumda

$$[\text{cone}(P - x_0)]^* = \begin{cases} \{0\}, & g(x_0) < 0 \\ -\text{cone} \partial g(x_0), & g(x_0) = 0. \end{cases}$$

### 2.2.3. Uzaklık Fonksiyonu

**Tanım 2.77.**  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  kümesi verilsin.  $P$  kümesi ile ilgili uzaklık fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$d(x; P) := \inf \{ \|x - \omega\| \mid \omega \in P \}$$



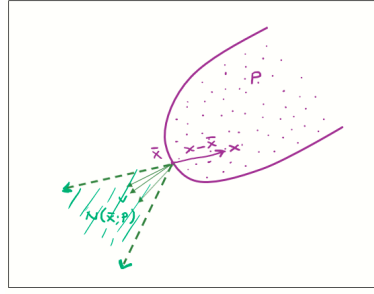
Şekil 2.12: Uzaklık fonksiyonu

### 2.2.4. Normal Koni

**Tanım 2.78.** [28]  $\bar{x} \in P$  ve  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  konveks küme olsun.  $\bar{x}$ 'te  $P$ 'nin normal konisi

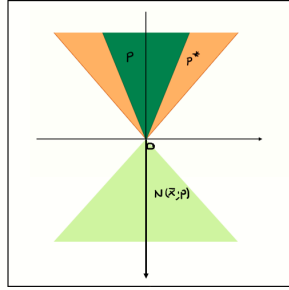
$$N(\bar{x}; P) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in P\}$$

şeklinde tanımlanır.  $\bar{x} \notin P$  için  $N(\bar{x}; P) = \emptyset$  dir.



Şekil 2.13: Normal koni

Ayrıca  $P^* = -N(\bar{x}; P)$  dir. Yani normal koni dual koninin zıttıdır.



Şekil 2.14: Normal koni ile dual koni arasındaki ilişki

**Önerme 2.79.** [28]  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  konveks kümesi için  $\bar{x} \in P$  olsun. O halde

i)  $N(\bar{x}; P)$  orijini içeren kapalı konveks konidir.

ii) Eğer  $\bar{x} \in \text{int} P$  ise  $N(\bar{x}; P) = \{0\}$  dır.

**Önerme 2.80.** [28]

i)  $P_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  ve  $P_2 \subseteq \mathbb{R}^p$  boştan farklı konveks alt kümeler olsun.  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in P_1 \times P_2$  için

$$N((\bar{x}_1, \bar{x}_2); P_1 \times P_2) = N(\bar{x}_1; P_1) \times N(\bar{x}_2; P_2) \text{ dir.}$$

ii)  $\bar{x}_1 \in P_1$  ,  $\bar{x}_2 \in P_2$  ve  $P_1$  ,  $P_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  nin konveks alt kümeleri olsun. Öyleyse

$$N(\bar{x}_1 + \bar{x}_2; P_1 + P_2) = N(\bar{x}_1; P_1) \cap N(\bar{x}_2; P_2) \text{ dir.}$$

**Önerme 2.81.** [28]  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  lineer dönüşüm ve  $b \in \mathbb{R}^p$  o.ü  $B(x) = A(x) + b$  ile tanımlanan  $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  olsun.  $c \in \mathbb{R}$  verilsin,  $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx = c\}$  çözüm kümesini ele alalım.  $B(\bar{x}) = c$  sağlayan herhangi bir  $\bar{x} \in P$  için

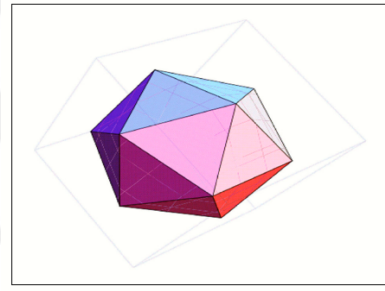
$$N(\bar{x}; P) = \text{im} A^* = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = A^* y, y \in \mathbb{R}^p\} \text{ dır.}$$

**Sonuç 2.82.** [28]  $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{R}^n$  konveks küme ve  $\bar{x} \in P$  olsun. Bu durumda eğer  $P$  için normal koni nontriviyal yani  $N(\bar{x}; P) \neq \{0\}$  ancak ve ancak  $\bar{x} \in \text{bd } P$  dır.

**Teorem 2.83.** [28]  $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  konveks kümeler ve  $\bar{x} \in P_1 \cap P_2$  olsun. Öyleyse herhangi bir  $v \in N(\bar{x}; P_1 \cap P_2)$  için  $\alpha v = v_1 + v_2$ ,  $(\alpha, v_1) \neq (0, 0)$  o.ş'de  $\lambda \geq 0$  ve  $v_1 \in N(\bar{x}; P_1)$ ,  $v_2 \in N(\bar{x}; P_2)$  vardır.

**Sonuç 2.84.** [28]  $\bar{x} \in P_1 \cap P_2$  o.ü  $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  konveks kümeler olsun.  $N(\bar{x}; P_1) \cap [-N(\bar{x}; P_2)] = \{0\}$  temel yeterlilik şartı (TYŞ) sağlandığını varsayalım. O halde  $N(\bar{x}; P_1 \cap P_2) = N(\bar{x}; P_1) + N(\bar{x}; P_2)$  normal koni kesişim kuralı gerçekleşir.

**Sonuç 2.85.** [28]  $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  için  $\text{int } P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$  ya da  $\text{int } P_2 \cap P_1 \neq \emptyset$  olsun. Bu durumda herhangi  $\bar{x} \in P_1 \cap P_2$  için hem TYŞ hem de yukarıdaki kesişim kuralı sağlanır.



**Şekil 2.15:** Bir konveks polihedron

**Tanım 2.86.** [19]

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle s_j, x \rangle \leq r_j, j = 1, 2, \dots, m\}$$

$m$  sabiti ile tanımlanan bir kapalı konveks polihedron olsun ve  $x \in C$ 'de aktif sabitlerin kümesi

$$J(x) := \{j = 1, 2, \dots, m : \langle s_j, x \rangle = r_j\}$$

ile tanımlanmış olsun. Bu durumda

$$K_C(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle s_j, d \rangle \leq 0, j \in J(x)\}$$

$C$  kümesinin  $x$  noktasındaki teğet konisi ve

$$N_C(x) = \text{cone} \{s_j : j \in J(x)\} = \left\{ \sum_{j \in J(x)} a_j s_j : a_j \geq 0 \right\}.$$

$C$  kümesinin  $x$  noktasındaki normal konidir.

### 2.3. KONVEKS ÇOK DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN YEREL EŞLENİK DÖNÜŞÜMLER

[22] Bu bölümde çok değerli dönüşüm ile ilgili temel tanımlar ve özellikler verilecektir.

$X$  ve  $Y$  sonlu boyutlu Öklid uzayları o.ü  $Z = X \times Y$  tanımlansın.  $P$  kümesi  $Z = X \times Y$  nin keyfi bir alt kümesi olsun. O halde  $G$  çok değerli fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

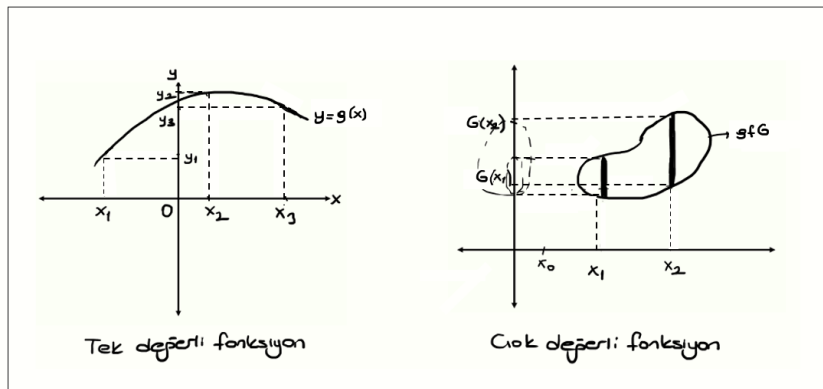
$$G(x) = \{y : (x, y) \in P\}$$

$P$  kümesine  $G$  çok değerli fonksiyonunun grafiği denir ve  $\text{gph } G$  ile gösterilir,

$$\text{gph } G = \{(x, y) : y \in G(x)\}.$$

$$\text{dom } G = \{x : G(x) \neq \emptyset\} \quad , \quad \|G(x)\| = \sup_y \{\|y\| : y \in G(x)\},$$

tanımdan  $\|\emptyset\| = 0$  dır.



**Şekil 2.16:** Tek değerli fonksiyon ve çok değerli fonksiyon

**Tanım 2.87.** [22]  $\text{gph } G$  konveks ise  $G$  konveks çok değerli dönüşümdür.

**Tanım 2.88.** [22]  $G(x)$ ,  $Y$ 'de konveks ise  $G$  konveks değerli çok değerli dönüşümdür.

**Tanım 2.89.** [22]  $gph G$  kapalı ise  $G$  kapalı çok değerli dönüşümdür.

**Tanım 2.90.** [22] Sabit bir  $C > 0$  sayısı için  $\|G(x)\| \leq C(1 + \|x\|)$  eşitsizliği sağlanıyorsa  $G$  çok değerli fonksiyonu sınırlıdır.

**Tanım 2.91.** [22] Eğer  $Y$ 'de sıfırın herhangi bir  $U$  komşuluğu için  $G(x) \subseteq G(x_0) + U$   $\forall x \in x_0 + V$  kapsamasını sağlayan  $X$ 'te sıfırın bir  $V$  komşuluğu varsa  $G$  çok değerli dönüşümü  $x_0$  noktasında üstten yarısürekli denir.

**Tanım 2.92.** [22] Eğer  $Y$ 'de sıfırın herhangi bir  $U$  komşuluğu için  $G(x_0) \subseteq G(x) + U$   $\forall x \in x_0 + V$  kapsamasını sağlayan  $X$ 'te sıfırın bir  $V$  komşuluğu varsa  $G$  çok değerli dönüşümüne  $x_0$  noktasında alttan yarısürekli denir.

**Tanım 2.93.** [22] Eğer  $x_0$  noktasında hem üstten hem alttan yarısürekliyse  $G$  çok değerli fonksiyonuna  $x_0$  noktasında sürekli denir. Eğer  $G \forall x \in X$  için sürekliyse  $G$  çok değerli fonksiyonu sürekli denir.

**Yardımcı Teorem 2.94.** [22]  $G$  kapalı konveks çok değerli dönüşüm olsun ve varsayalım ki  $\exists x_0 \in dom G$ 'te  $G(x_0)$  sınırlı olsun. Öyleyse  $G$  sınırlıdır.

**Tanım 2.95.** [22]

$$0^+ gph G = \{(\bar{x}, \bar{y}) : (x + \lambda \bar{x}, y + \lambda \bar{y}) \in gph G, \lambda \geq 0, \forall (x, y) \in gph G\}$$

ile tanımlanan  $0^+ gph G$  bir konveks dönüşüm olan  $G$ 'nin durgunluk (resesif) konisi (RK) olarak adlandırılır.

$$G^*(y^*) = \{x^* : (x^*, -y^*) \in (0^+ gph G)^*\}$$

ile tanımlanan  $G^*$  çok değerli dönüşümü de  $G$  konveks fonksiyonunun eşlenik dönüşümüdür.

**Yardımcı Teorem 2.96.** [22]  $G^*$  eşlenik dönüşümü sınırlıdır ancak ve ancak  $dom G = X$  tir.

**Yardımcı Teorem 2.97.** [22]  $G$  dönüşümü  $x_0 \in int(dom g)$ 'de sınırlı, kapalı konveks dönüşüm olsun. Öyleyse  $x_0$ 'ın belirli bir komşuluğunda  $G$  Lipschitz koşulunu sağlar.

**Sonuç 2.98.** [22]  $P \subseteq int(dom g)$  kompakt olsun. O halde  $G$  kapalı konveks dönüşümü  $P$ 'de Lipschitz koşulunu sağlayan  $\bar{x}$  noktasında sınırlıdır.

[22] Bir çok değerli fonksiyonu olan  $G$  Hamilton fonksiyonu

$$H(x, y^*) = \sup_y \{ \langle y, y^* \rangle : y \in G(x) \} , y^* \in Y^* = \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

ile tanımlanır. Ayrıca

$$M(x^*, y^*) = \inf_{(x, y)} \{ \langle x, x^* \rangle - \langle y, y^* \rangle : (x, y) \in \text{gph } G \} \quad (2.2)$$

ile tanımlıdır.

Eğer  $G(x) \neq \emptyset$  ise  $H(x, y^*) = -\infty$  dur.

$$M(x^*, y^*) = \inf_{(x, y)} \{ \langle x, x^* \rangle - H(x, y^*) \} . \quad (2.3)$$

Yani  $\forall x$  için

$$M(x^*, y^*) \leq \langle x, x^* \rangle - H(x, y^*) ,$$

şeklinde de ifade edilebilir. Ayrıca  $M(x^*, y^*) = -(-H(., y^*))^*(x^*)$  dir.

$H(., y^*)$  konkav fonksiyondur.

**Yardımcı Teorem 2.99.** [22]  $G$  bir konveks çok değerli dönüşüm olsun. Bu durumda

$$G(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \supseteq \lambda_1 G(x_1) + \lambda_2 G(x_2) , \lambda_1 \geq 0 , \lambda_2 \geq 0 , \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

[22]  $z \in \text{gph } G$  noktası alalım ve  $K_{\text{gph } G}(z) = \text{cone}(\text{gph } G - z)$  yani

$$K_{\text{gph } G}(z) = \{ \bar{z} : \bar{z} + \lambda z \in \text{gph } G \text{ yeterince küçük } \lambda > 0 \text{ için} \} .$$

Argmaximum küme şu şekilde tanımlanır:

$$G_{\text{Arg}}(x; y^*) = \{ y \in G(x) : \langle y, y^* \rangle = H(x, y^*) \} .$$

$G_z(\bar{x}) = \{ \bar{y} : (\bar{x}, \bar{y}) \in K_{\text{gph } G}(z) , z = (x, y) \}$  çok değerli dönüşümü  $K_{\text{gph } G}(z)$  ve  $\text{gph } G_z = K_{\text{gph } G}(z)$  ile tanımlanır.

**Tanım 2.100.** [22]  $G$  konveks çok değerli dönüşüm için

$$G^*(y^*; z) = \left\{ x^* : (x^*, -y^*) \in K_{gph G}^*(x, y) \right\}$$

ile tanımlanan  $G^* : X^* \rightarrow Y^*$  dönüşümü  $(x, y) \in gph G$  noktasında  $G$  için yerel eşlenik dönüşüm olarak adlandırılır, burada  $K_{gph G}^*(x, y)$ ,  $K_{gph G}(x, y)$  konisi için dual konidir.

**Teorem 2.101.** [22]  $G : X \rightarrow P(Y)$  konveks çok değerli dönüşüm olsun. Öyleyse

$$G^*(y^*; (x, y)) = \begin{cases} \partial_x H(x, y^*), & y \in G(x, y^*), \\ \emptyset, & y \notin G(x, y^*), \end{cases}$$

burada  $\partial_x H(x, y^*) = -\partial_x [-H(x, y^*)]$ .

### 2.3.1. Yerel Eşlenik Dönüşümlerin Hesaplanması

[22] Yerel eşlenik dönüşüm ile eşlenik dönüşüm arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

$z \in Q$  noktasında  $Q \subseteq Z = X \times Y$  konveks kümesi için

$$K_Q(z) = cone(Q - z) = \{ \bar{z} : \bar{z} = \lambda(z_1 - z), \lambda > 0, \forall z_1 \in Q \}$$

$Q$ 'nun  $z$  noktasında teğet yönler konisidir.

**Teorem 2.102.** [22]  $G$  kapalı konveks çok değerli dönüşüm olsun. Bu durumda

$$G^*(y^*) = \overline{\bigcup_{z \in gph G} F^*(y^*; z)}, \quad y \in G(x; y^*).$$

**Yardımcı Teorem 2.103.** [22]  $G$  konveks çok değerli dönüşüm ise herhangi bir reel  $\alpha \neq 0$  için  $\alpha G$  konveks çok değerli dönüşümdür.  $G(x) = \alpha F(x)$  olsun. Bu durumda  $G^*(y^*; (x, \alpha y)) = \|\alpha\| G^*(y^*; sgn \alpha, (x, y))$ .

[22]  $G_i : X \rightarrow P(Y)$   $i = 1, 2, \dots, N$  ile verilen çok değerli dönüşümün toplamı

$$G(x) = (G_1 + \dots + G_N)(x) = G_1(x) + \dots + G_N(x), \quad x \in \bigcap_{i=1}^N dom G_i$$

bir çok değerli dönüşümdür. Verilen bir  $y^* \in Y^*$  için  $i = 1, \dots, N$  o.ü  $G_i(x)$ 'e göre sırasıyla

Hamilton fonksiyonu ve Argmaximum kümesi  $H_i(x, y^*)$  ve  $G_i(x, y^*)$  ise  
 $H_G(x; y^*) = \sum_{i=1}^N H_i(x; y^*)$ ,  $x \in \bigcap_{i=1}^N \text{dom } G_i$  ve  $G(x, y^*) = \sum_{i=1}^N G_i(x; y^*)$  dır.

**Teorem 2.104.** [22]  $G_i : X \rightarrow P(Y)$   $i = 1, 2, \dots, N$  konveks olsun ve olası bir tanesi hariç bütün  $H_i(., y^*)$   $i = 1, 2, \dots, N$  Hamilton fonksiyonlarının  $x \in \bigcap_{i=1}^N \text{dom } G_i$  noktasında sürekli olduğunu varsayalım. Böylece

$$G^*(y^*; (x, y)) = G_1^*(y^*; (x, y_1)) + \dots + G_N^*(y^*; (x, y_N))$$

$$y = y_1 + \dots + y_N, \quad y_i \in G_i(x) \quad i = 1, \dots, N.$$

Ayrıca

$$G^*(y^*; (x, y)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \partial_x H_i(x; y^*), & y \in G(x; y^*) \\ \emptyset, & y \notin G(x; y^*) \end{cases}$$

### 2.3.2. Somut Durumlarda Yerel Eşlenik Dönüşümler

[22] İlk olarak yerel eşlenik dönüşümün kullanımı ile bazı karmaşık fonksiyonların bile subdiferansiyelini hesaplayabileceğimizi göstereceğiz.

**Teorem 2.105.** [22]  $G : X \rightarrow P(Y)$  sınırlı, kapalı ve konveks çok değerli fonksiyon olsun ve  $\text{dom } \varphi = Z$  o.ü  $\varphi$  nin has konveks fonksiyon olduğunu varsayalım. Ayrıca,

$$g(x) = \min_y \{ \varphi(x, y) : y \in G(x) \}$$

olduğunu varsayalım. Öyleyse  $g$  bir konveks fonksiyondur ve herhangi bir  $x_0 \in \text{dom } G$  için  $g$ 'nin subdiferansiyeli

$$\partial g(x_0) = \{ x^* - G^*(-y^*; z_0) : (x^*, y^*) \in \partial_z \varphi(z_0) \}$$

şeklinde dir. Burada  $z_0 = (x_0, y_0)$  ve  $y_0 \in G(x_0)$  yukarıdaki ilk eşitlikteki  $\varphi$  fonksiyonunu minimum yapan noktadır. Özellikle eğer  $\varphi$  fonksiyonu diferansiyellenebilir ise  $\varphi'_x(z_0)$  ve  $\varphi'_y(z_0)$  sırasıyla  $x$  ve  $y$ 'ye göre yönlü türevler o.ü aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\partial g(x_0) = \varphi'_x(z_0) - G^*(-\varphi'_y(z_0, z_0))$$

**Teorem 2.106.** [22]  $\varphi_i$  ,  $i = 1, \dots, m$  fonksiyonlarının konveks ve  $z_0$  noktasında sürekli olduğunu varsayalım. Ayrıca  $\varphi_i(z_1) < 0$  ,  $i = 1, \dots, m$  o.ş bir  $z_1$  noktasının olduğunu varsayalım. Öyleyse,

$$G(x) = \{y : \varphi_i(x, y) < 0, i = 1, \dots, m\}$$

ile verilen çok değerli dönüşümü için  $I_0 = \{i : \varphi_i(x_0, y_0) = 0\}$  o.ü

$$G^*(y^*; z_0) = \left\{ - \sum_{i \in I_0} \lambda_i x_i^* : y^* = \sum_{i \in I_0} \lambda_i y_i^*, (x_i^*, y_i^*) \in \partial_z \varphi_i(z), \lambda_i \geq 0, i \in I_0 \right\}$$

şeklinde ifade edilir.

**Teorem 2.107.** [22]  $i = 1, \dots, m$  o.ü  $g_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  konveks fonksiyonlar ve

$$gph G = \{(x, y) : g_i(y) \leq x_i, i = 1, \dots, m\}$$

olsun. O halde ,

$$G^*(y^*; z_0) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^m : \lambda_i \geq 0, \lambda_i(g_i(y_0) - x_0^i) = 0, i = 1, \dots, m, y^* = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i^* \right\}.$$

**Teorem 2.108.** [22]  $\varphi : Z \rightarrow \mathbb{R}$  ,  $Z = X \times Y$  konveks fonksiyon,  $\varphi$   $z_0$  noktasında sürekli ve  $\varphi(z_0) = 0$  olsun. Ayrıca  $z_1 = (x_1, y_1)$  ,  $P$  kümesi konveks küme o.ü  $\varphi(z_1) < 0$  ,  $x_1 \in P$  o.ş bir nokta olsun. Bu durumda

$$\tilde{G}^*(y^*; z_0) = \{-\lambda x_0^* + x_1^* : y^* = \lambda y_0^*, (x_0^*, y_0^*) \in \partial_z \varphi(z_0), x_1^* \in [cone(P - x_0)]^*, \lambda \geq 0\}$$

### 2.3.3. Konveks Programlama Problemlerinde Ekstremum için Gerekli Koşullar

**Teorem 2.109.** [22]  $g$  has konveks fonksiyon ve  $P \neq \emptyset$   $f$  'nin üzerinde minimize edildiği konveks küme olsun. Ayrıca  $x_1 \in P$  ,  $g$ 'nin sürekli olduğu bir nokta olsun.  $x_0$ 'ın  $P$  üzerinde  $g$ 'yi minimize eden bir nokta olması için  $gyk \partial g(x_0) \cap K_P^* \neq \emptyset$  olmasıdır, burada  $K_P(x_0) = cone(P - x_0) = \{\bar{x} : x_0 + \lambda \bar{x} \in P, \text{ yeterince küçük } \lambda > 0 \text{ için}\}$  dır.

**Teorem 2.110.** [22] Önceki teoremin koşulları sağlansın ve  $P_i, i = 1, 2, \dots, k$  konveks ve  $int P_1 \cap int P_2 \cap \dots \cap int P_k \neq \emptyset$  o.ü  $P = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_k$  olduğunu varsayalım. Öyleyse  $P$  üzerinde  $x_0$ 'ın  $g$ 'yi minimize eden bir nokta olması için  $gyk x_i^* \in K_P^*(x_0), i = 1, \dots, k$  ;

$x^* = x_1^* + \dots + x_k^*$  o.ü  $x^* \in \partial g(x_0)$  noktalarının var olmasıdır.

**Teorem 2.111.** [22]  $g$  bir has konveks fonksiyon ve  $P_i$  konveks kümeler o.ü

$$P = \bigcap_{i=1}^k P_i$$

olsun. Ayrıca  $x_1 \in P$ ,  $f$ 'nin bir süreklilik noktası olsun. O halde  $P$  üzerinde  $x_0$ 'ın  $g$ 'yi minimize eden bir nokta olması için gerek koşul  $x_i^* \in K_P^*(x_0)$ ,  $i = 1, \dots, k$  ve  $\lambda x^* = x_1^* + \dots + x_k^*$  o.ü  $x^* \in \partial g(x_0)$  noktalarının ve  $\lambda \in \{0, 1\}$  sayısının var olmasıdır. Burada  $\lambda = 0$  ise  $x_1^*, \dots, x_k^*$  noktalarından en az biri sıfırdan farklıdır.  $\lambda = 1$  ise bu koşullar  $g$ 'nin minimalliği için aynı zamanda yeterli koşullardır.

## 2.4. TARAMA SÜRECİ

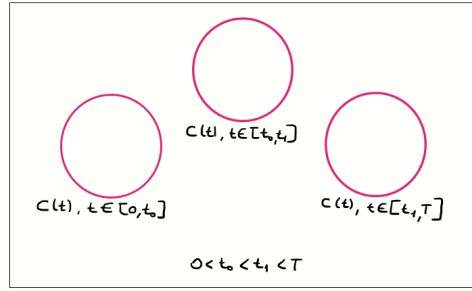
Bu konu ilgili makalelerde "Sweeping Process" olarak geçmektedir. Bu tez çalışmasında "Tarama Süreçleri" olarak çevrilmiştir fakat farklı bir şekilde ifade etmek gerekirse "Süpürme Süreçleri" olarak da ifade edilebilir.

1.mertebeden tarama süreçleri 1971'de Fransız matematikçi J.J Moreau tarafından elastoplastik sistemleri modellemek için ortaya atılmıştır [36]. Mekanik yorumlama nedeniyle bu tür problemler "Sweeping Process" olarak adlandırılmıştır [32].

Tarama süreçleri modelleri düzgün olmayan elektrik devreleri, mekanikler, elastoplastik ve termoelastoplastik malzemelerin mekaniği gibi bir çok farklı uygulama alanına sahiptir.

$$\begin{cases} x'(t) \in -N(C(t); x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in C(0) \end{cases} \quad (2.4)$$

Burada  $C(t)$ ,  $t \in [0, T]$  zaman aralığına ve  $x_0 \in C(0)$  başlangıç koşuluna bağlı hareketli bir kümedir.  $C(t)$ 'nin hareketi sebebiyle sürüklenme ve taramaya tabi olan  $x_0$  başlangıç koşulunun yer değiştirmesinin modelizasyonu ortaya çıkmaktadır.  $x_t$  noktasının  $C(t)$  sınırı yakalanana kadar hareketsiz kaldığı ve sonrasında hızının  $\partial C(t)$  için normal olduğu düşünülebilir. Biçimsel olarak tarama süreci başlangıç koşulu ile bir diferansiyel içermez. Burada  $N(C(t); x(t))$ ,  $x \in C$ 'de  $C$  için normal konidir. Özellikle eğer  $x \in \text{int}C$  ise  $N(C(t); x(t)) = 0$ ,  $x \notin C$  ise  $N(C(t); x(t)) = \emptyset$  dir [14].

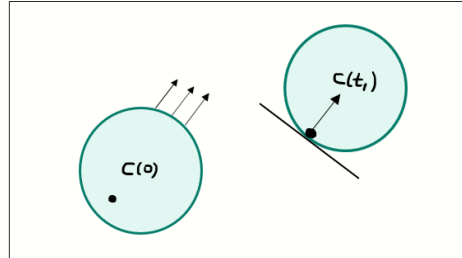


**Şekil 2.17:** Sürekli çözümü olmadan tarama süreçleri

Sağ tarafının sınırsız olması, problemin kısıtlı bir diferansiyel içerme olması ve sürekli olmayan hareketli kümeler için elde edilecek çözümün iyi bir notasyonunun nasıl olması gerektiğini belirlemek tarama sürecinin zorluklarından biridir [36].

#### **Tarama Süreçlerinin Yorumlanması:**

[36] İçerisinde küçük bir top olan büyük bir halka düşünün. Halka  $t = 0$  anında, hareket etmeye başlayacaktır. Top hareket ettikten sonra çemberin hareketine bağlı olarak ya olduğu yerde kalır ya da çemberin içine doğru sürüklenir. Son halde topun hızı, ayrılmamak için halkanın içine doğrudur.



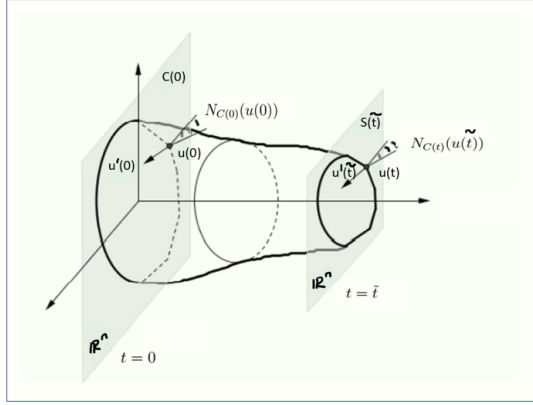
**Şekil 2.18:** Tarama süreçlerinin yorumlanması

[17] Birinci mertebeden bir tarama sürecini aşağıdaki gibi de resmedebiliriz. Tarama kümesi adı verilen küme değerli bir  $C : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  dönüşümü verildiğinde

$$u' \in -N_{C(t)}(u(t)) \quad t \in (a, b)$$

içermesini sağlayan  $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mutlak sürekli eğrilerini düşünelim.

Moreau'nun orijinal gösteriminde,  $C(t)$ 'nin konveks küme olduğu varsayıldığından  $N_{C(t)}$  normal konisi konveks analizdeki olağan normal koni olarak düşünülebilir.



Şekil 2.19: Sweeping process

**Teorem 2.112.** (Teorem: Moreau 1971 ) [36]

Eğer  $(C(t))_{t \geq 0}$  boştan farklı, kapalı, konveks kümeler ve öyle  $K \geq 0$  için

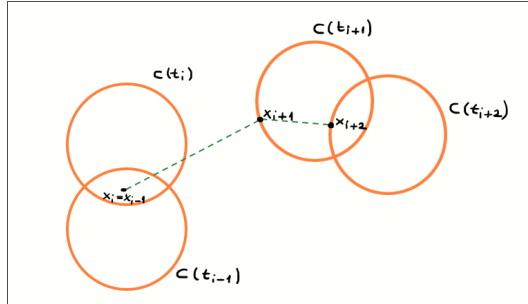
$$(C(t), C(s)) = \max \left\{ \sup_{x \in C} d_{C(t)}(x), \sup_{x \in D} d_{C(s)}(x) \right\} \leq K|t - s|$$

ise o halde aşağıdaki tarama sürecinin benzersiz Lipschitz çözümü vardır.

$$\begin{cases} -x'(t) \in N(C(t); x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in C(0) \end{cases}$$

Ayrıca,  $t \in [0, T]$  için  $\|x'(t)\| \leq K$  dir.

İspatında örtük ayrıştırma kullanılıp “Catching-up algoritma” ile ispata devam edilmektedir.



Şekil 2.20: Catching-up algoritma

### Tarama Süreçleri İle İlgili Bilgiler:[14]

(2.4)'daki gibi ifade edilen tarama sürecinde;

- **Klasik varsayımlar:**  $x \in H$ 'nın bir Hilbert uzayı,  $t \rightarrow C(t)$  Lipschitz sürekli olması ve  $C(t)$ 'nin kapalı ve konveks olmasıdır.
- **Klasik sonuçlar:** Cauchy problemi için bir Lipschitz çözümünün var olması ve başlangıç koşuluna bağlı teknik ve sürekliliktir.
- **Klasik methodlar:** Moreau-Yosida yaklaşımı ve The catching up algoritma söylenebilir. J.J Moreau'ya dayanmaktadır.(Her ikisi de yaklaşık çözümlerden oluşan bir cauchy dizisi oluşturmaktadır.)

### Moreau'nun Tarama Süreçlerinin Çeşitli Versiyonları [36]

#### • Perturbed Tarama Süreci

$$\begin{cases} -x'(t) \in N(C(t);x(t)) + F(t,x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in C(0) \end{cases}$$

Burada  $(C(t))_{t \in [0, T]}$  boştan farklı kapalı kümeler ailesi,  $N(S, \cdot)$  ,  $S$  için uygun dışa doğru bir NK ve  $F : [0, T] \times H \Rightarrow H$  üstten yarısüreklilik, ölçülebilirlik gibi bazı standart koşulları karşılayan boş olmayan kapalı konveks değerlere sahip küme değerli bir dönüşümdür.

J.J. Moreau, C. Casting, G. Colombo gibi isimler tarafından ele alınmıştır.

#### • Perturbed Duruma Bağlı Tarama Süreci

$$\begin{cases} -x'(t) \in N(C((t, x(t));x(t)) + F(t,x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in C(0) \end{cases}$$

Burada  $(C(t, x))_{t \in [0, T], x \in H}$  boştan farklı kapalı kümeler ailesidir ve diğer özellikler kararsız tarama süreçlerinde ifade edildiği gibidir.

• **BV Tarama Süreçleri**

$$\begin{cases} -dx \in N(C(t);x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in C(0) \end{cases}$$

• **İkinci Mertebeden Tarama Süreci: (Second Order Sweeping Process)**

$$\begin{cases} -x''(t) \in N(C((t,x(t),x'(t));x'(t)) + F(t,x(t))), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in C(0) \end{cases}$$

Burada  $(C(t,x,y))_{t \in [0,T], x,y \in H}$  boştan farklı kapalı kümeler ailesidir ve diğer özellikler kararsız tarama süreçlerinde ifade edildiği gibidir.

Tarama sürecini içeren ikinci dereceden diferansiyel içerme problemi dry friction (kuru sürtünme) problemlerini modellemek için tasarlanmıştır [32].

• **Yerel Olmayan Başlangıç Koşulları İle Tarama Süreci: (Sweeping Processes With Nonlocal Initial Conditions)**

$$\begin{cases} x'(t) \in -N(C(t);x(t)) + F(t,x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = Mx \in C(0) \end{cases}$$

Burada  $M : C([0, T]; H) \rightarrow H$  yerel olmayan bir operatördür, yani

$Mx = \pm x(T)$  (periyodik ve anti-periyodik başlangıç koşulları)

$Mx = \frac{1}{T-0} \int_0^T x(s) ds$  (ortalama değer başlangıç koşulları)

$Mx = \sum_{k=1}^{k_0} \alpha_k x(t_k)$ ,  $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{k=1}^{k_0} |\alpha_k| \leq 1$ ,  $0 < t_1 < \dots < T$  (Çoklu nokta başlangıç koşulu)

• **Kapalı tarama süreci: (Implicit Sweeping Process)**

$$\begin{cases} x'(t) \in -N(C(t);Ax'(t) + Bx(t)) + F(t,x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in H \end{cases}$$

Burada  $\forall t \in [0, T]$  için  $C(t)$  kümesi boştan farklı, kapalı konveks küme ve  $A, B : H \rightarrow H$  sınırlı, lineer simetrik operatörlerdir.

• **Geçmişe Bağlı Örtülü Tarama Süreçleri: (History-Dependent Implicit Sweeping Process )**

$$\begin{cases} -x'(t) \in N_{C(t)}(Ax'(t) + Bx(t) + (\mathfrak{R}x)(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ve  $x : [0, T] \rightarrow H$  o.ş bir diferansiyel içirme olsun. Burada  $\forall t \in [0, T]$  için  $C(t)$  boştan farklı, kapalı, konveks küme ,  $A : H \rightarrow H$  sınırlı lineer operatör,  $B : H \rightarrow H$  Lipschitz operatör,  $\mathfrak{R}$  tarihe bağlı operatördür.

Buraya kadar Moreau'nun tarama süreçlerinin birçok versiyonlarını görmüş durumdayız ve bunlara ek birçok farklı versiyonları daha bulunmaktadır.

**Tarama süreçleri ile ilgili halihazırda yürütülen çalışmalar ve açık problemler :[36]**

- Çözümlerin varlığı
- Tarama işlevlerinin ve versiyonlarının kararlılığı ve asimptatik davranışı
- Tarama süreçlerinin optimal kontrolü
- Düzgün olmayan mekanik uygulamalar
- Elektrik devrelerinde uygulamalar

Şimdi kontrol problemleri, minimum zaman fonksiyonunun Hamilton-Jacobi karakterizasyonu ve gerekli optimal koşullar konularına değinelim. Bu konular literatürde G. Colombo, B.S. Mordukhovich, Nguyen, N.D. Hoang, R. Henrion, M. Palladino, C.E. Arround ve daha birçok kişi tarafından kapsamlı şekilde incelenmiştir.

Tarama süreçlerinin kontrol problemleri konusunu inceleyelim [14]:

$$x'(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + f(x(t)) , x(0) = x_0 \in C(0)$$

$C$ 'nin sabit olduğu

$$x'(t) \in N_C(x(t)) + f(x(t)) , x(0) = x_0 \in C(0)$$

durumu kısıtlamanın dinamiklerde aktif olarak görüldüğü bir durum olan kısıtlı evrimi modellemektedir.

Bir dinamik söz konusu olduğunda biraz kontrol sağlamak önemlidir.

$$x'(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + f(x(t), u), u \in U$$

Kontrol,  $C$  şekil optimizasyonu ve  $u$  klasik kontrol olarak görülebilir. Tarama sürecinin kontrolü hakkında çok az sonuç vardır ve bunlara örnek [14] :

- Optimal çözümün varlığı
- Kontrol edilebilirlik
- Hamilton-Jacobi eşitsizlikleri aracılığıyla değer fonksiyonun karakterizasyonu
- Gerekli optimallik koşulları

Minimum zaman fonksiyonun Hamilton Jacobi karakterizasyonunu inceleyelim. Bu durum minimal zaman kontrolü ile bağlantılı olarak ortaya çıkan Hamilton-Jacobi denkleminin çözümleri ile ilgilidir. Minimal durumda çözümler oluşturulmaktadır ve zamana bağlı yörüngelerle yakın ilişkilidir [11]. Bu konu hakkında daha detaylı bilgilere [14]'dan ulaşabilirsiniz.

Şimdi gerekli optimalite koşulları konusunu ele alalım. Şekil optimizasyonudur.

G. Colombo, N.D Hoang, R. Henrion, B.S. Mordukhovich gibi isimler bu konu hakkında çalışmalar yapmıştır.

$$x'(t) \in N(C(t); x(t)) , x(0) = x_0 \in C(0)$$

yörüngeleri üzerinde bir maliyeti en az indirmeyi düşünelim. Burada  $C$ 'nin bir polihedron olduğunu varsayalım. Biz de tezimizde optimal koşullarla ilgili çalışırken polihedron üzerinde çalışmaktayız.

$$C(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u_i(t), x \rangle \leq b_i(t), i = 1, \dots, m\}$$

$$\|u_i(t)\| = 1, \forall t \in [0, T], i = 1, \dots, m$$

Burada  $u_i, b_i$  Lipschitz ve kısıtlama niteliğini sağlayan kontrollerdir. Problemin maliyeti

$$J[x, u, b] := \varphi(x(T)) + \int_0^T (\alpha_1(t, z) + \alpha_2(x') + \alpha_3(t, u', b')) dt$$

o.ş ifade edilmektedir. Burada  $u = (u_1, \dots, u_m)$  ,  $b = (b_1, \dots, b_m)$  ve Lagrangianlar uygun varsayımları sağlar.

$\bar{z} := (\bar{x}, \bar{u}, \bar{b})$  bir yerel  $W^{1,1}$  minimizer olsun öyle ki  $\bar{u}, \bar{b}$  parçalı  $W^{2,\infty}$  dır. B.S. Mordukhovich tarafından tasarlanan (zaman) ayrık yaklaşımlara bağlı yöntem şu şekildedir:

- $\bar{z}$ 'nin yaklaşımlarını oluşturuyoruz ve bunların arasında  $\bar{z}$ 'den kare mesafenin içeren ayrık bir maliyeti en aza indiriyoruz.
- Ayrık problemlerin minimizelerinin dizisinin güçlü bir şekilde  $\bar{z}$ 'ye yakınlaştığını kanıtıyoruz.
- Her ayrı minimizer için koşulları yazıyoruz.
- Bazı ön bilgileri oluşturuyoruz, gerekli koşullar arasında limite geçiyoruz ve  $\bar{z}$  için gerekli koşulların kümesini elde ediyoruz.

Şimdi tarama süreçlerinin optimizasyonu ile ilgili oluşturulan makalelerden birkaç tanesini ayrıntılı bir şekilde inceleyelim.

- T.H. Cao ve B.S. Mordukhovich'in 2016 yılındaki "Ayrık Yaklaşımlar Aracılığıyla Kararsız Tarama Sürecinin Optimal Kontrolü ve Ayrık ve Sürekli Dinamik Sistemler" isimli makalesinde

$$\text{minimize } J[x, u, a] = \phi(x(T)) + \int_0^T \alpha(t, x(t), u(t), a(t), x'(t), u'(t), a'(t)) dt \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilen Bolza formundaki fonksiyonu üzerine çalışılmıştır.

$$-x'(t) \in N(x(t); C(t)) + f(x(t), a(t)) , t \in [0, T] , x(0) = x_0 \in C(0)$$

ile ifade edilen karmaşık tarama süreçlerinin optimal kontrol problemlerinin yeni bir sınıfı ifade edilmektedir. Makalede kalabalık bir nüfus hareketinin modeli için uygulamalar ile kontrollü bir dinamik sağlanmaktadır. Bu problemde kısıtlayan ve zorlayan durumlar için ayrık yaklaşım uygulanmaktadır ve gerekli optimal koşullar elde edilmektedir [6].

- G.Colombo, R.Henrion, N.D.Hoang ve B.S. Mordukhovich tarafından 2016 yılında yazılan " Polihedral Kontrol Kümeleri Üzerinde Tarama Süreçlerinin Optimal Kontrolü " isimli makalesinde

$$x'(t) \in -N(x(t);C(t)) , t \in [0, T] , x(0) = x_0 \in C(0)$$

ile tanımlanan kontrollü tarama dinamikleri üzerine (2.5)'deki fonksiyonunu minimize edecek şekilde optimal kontrol problemi üzerinde çalışılmıştır. Burada

$$C(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u_i(t), x \rangle \leq a_i(t) , i = 1, \dots, m\}$$

$$\|u(t)\| = 1 , t \in [0, T] , i = 1, \dots, m$$

burada  $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot))$  ve  $a(\cdot) = (a_1(\cdot), \dots, a_m(\cdot))$  kontrol eylemleri  $[0, T]$  üzerinde kesin sürekli, son zaman  $T$  sabit ve diferansiyel dahil etmenin  $x(\cdot)$  yörüngeleri mutlak süreklidir. Burada hareketli konveks polihedralin üzerinde Bolza tipi fonksiyonu optimize edecek şekilde çalışılmıştır. Ayırık yaklaşım yöntemi ile gerekli optimallik koşulları elde edilmektedir. Bu koşullar ile ilgili örnekler de verilmiştir [13].

- T.H. Cao ve B.S. Mordukhovich'in 2017 yılındaki "Kalabalık Hareket Modeline Yönelik Uygulamalarla Kontrollü Bir Tarama Süreci İçin Optimal Koşullar" makalesini inceleyelim. Bu makale yukarıda ifade ettiğimiz makalenin bir devamı olarak düşünülebilir ve (2.5)'deki kontrol problemi üzerine çalışılmıştır.  $u(\cdot) \in W^{1,2}([0, T]; \mathbb{R}^n)$  kontroller ve  $a(\cdot) \in W^{1,2}([0, T]; \mathbb{R}^n)$  aşağıdaki diferansiyel içermeyi sağlayan durumlardır.

$$-x'(t) \in N(x(t);C_u(t)) + f(x(t), a(t)) , x(0) = x_0 \in C_u(0)$$

burada  $C_u(t) = C + u(t)$  ve  $C \subset \mathbb{R}^n$  kapalı konveks kümelerdir.  $\tau = \min \{r, T\}$ 'yi sağlayan herhangi bir  $\tau \in [0, \bar{\tau}]$  için,  $u(\cdot)$  kontrollü aşağıdaki kısıtlamalara tabidir:

$$\begin{cases} \|u(t)\| = r, & t \in [\tau, T - \tau] \\ r - \tau \leq \|u(t)\| \leq r + \tau, & t \in [0, \tau] \cup (T - \tau, T]. \end{cases}$$

Bu makalenin temel amacı, belirtilen kısıtlar altında diferansiyel içirme için ayırık

yaklaşımlar ortaya koymak ve ayrık optimal çözümleri için gerekli koşulları göstermektir. Aynı şekilde ayrık yaklaşımlar yöntemi kullanılmaktadır. Bir koridordaki trafik akışı kalabalık hareket modeliyle optimal kontrol problemine uygulanmaktadır [4] .

- J. Noel'in 2018 yılındaki yayımladığı "İkinci Mertebeden Genel Karmaşık Tarama Süreçli Diferansiyel İçerme" isimli makalesi hareketli kümenin hem zamana hem de duruma bağlı olduğu, ikinci dereceden diferansiyel içermeler ile kontrol edilen karmaşık tarama süreci üzerinedir. Kümenin prox-regular ya da subsmooth olduğu varsayılarak, bir gecikmenin varlığında bile çözümlerin varlığını ispatlanmaktadır. Bu makalede sonlu boyutlu bir ortamda aşağıdaki sürekli tarama sürecini incelenmektedir:

$$\begin{cases} u''(t) \in -N_{C(t,u(t))}(u'(t)) + G(t, u'(t), u(t)), & t \in [0, T] \\ u'(t) \in C(t, u(t)), & t \in [0, T] \\ u'(0) = v_0, u(0) = u_0 \end{cases}$$

$C$  çoklu dönüşümünün kapalı prox-regular veya eşit-düzgün subsmooth olduğu ve hem  $t$  zamanına hem de  $u$  durumuna bağlı olduğu varsayılmaktadır.[32]

- T.H. Cao ve B.S. Mordukhovich'in 2019 yılındaki "Düzlemsel Kalabalık Hareket Modelinin Optimizasyonu İçin Konveks Olmayan Tarama Sürecinin Optimal Kontrol Uygulamaları" isimli makalesi konveks olmayan tarama süreçlerinin optimal kontrolü ve trafik dengesinin düzlemsel kalabalık modelinin optimizasyonuna yönelik uygulamalar ile ilgilidir. Makalede (2.5)'deki kontrol problemi üzerine çalışılmıştır. Burada  $u$  ve  $a$ , kontrolleri temsil eder ve  $x$

$$-x'(t) \in N(x(t); C + u(t)) + f(x(t), a(t)), \quad x(0) = x_0 \in C_u(0)$$

kontrollü tarama işleminin bir çözümüdür. Burada  $C$ , konveks kümelerin tümleyeninin kesişimi olarak tanımlanan bir prox-regular kümedir [5].

- [9] T.H. Cao, B.S Mordukhovich'in 2019 yılındaki "Konveks Olmayan Karmaşık Tarama Süreçlerinin Optimal Kontrolü" adlı makalesinde kontrollü tarama süreçleri konveks

polihedral ile tanımlanmaktadır. Burada

$$-x'(t) \in N(x(t); C(t)) + f(x(t), a(t)), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0 \in C(0)$$

kontrollü tarama süreçleri ile düşünülüp (2.5)'deki gibi ifade edilen Bolza formundaki fonksiyonu minimize etmek üzerine çalışılmıştır. Burada

$$C(t) : C + u(t) = \bigcap_{i=1}^n C_i + u(t), \quad C_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0\}, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

• T.H. Cao, B.S. Mordukhovich, D. Nguyen, T. Nguyen'in 2021 yılında yayımladığı "Karmaşık Tarama İşlemlerinin Engelli Doğrusal Olmayan Kitle Hareketi Modellerine Uygulanması" isimli makalesinde genel bir karmaşık konveks olmayan tarama süreci ile kontrol edilen optimal kontrol problemlerinin bir uygulaması olan, engellerle düzlemsel kontrollü kalabalık hareket modellerinin dinamik optimizasyonunu çözmeye odaklanmaktadır. Bu, engellerin dikkate alınmadığı daha önce yapılmış olan [5] ve [9] 'teki çalışmaların bir uzantısı olarak düşünülebilir. Söz konusu problem için gerekli optimallik koşulları [5] ve [9]'teki sonuçlara dayanarak belirlenmektedir ve örneklendirme de yapılmaktadır.[8]

• E.N. Mahmudov 2022 yılında henüz yeni yayımladığı "İkinci Mertebeden Tarama Süreçlerinin Ayrık ve Diferansiyel İçermelerle Optimal Kontrolü" isimli makalesinde

$$\text{minimize } \Phi(x(t), x'(t)),$$

$$x''(t) \in -N_{C(x(t))}(x'(t)) + F(x(t), x'(t), t), \quad t \in [0, T]$$

$$x(0) = \omega_0, \quad x'(0) = \omega_1 \in C(\omega_0)$$

şeklinde ifade edilen ikinci mertebeden tarama süreci bir optimal problemin optimal yörüngesi için gerekli koşulları formüle etmektedir. Burada  $F(., t) : \mathbb{R}^{2n} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  konveks küme değerli dönüşüm,  $\Phi$  sürekli ve  $\Phi(.,.) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^1$  konveks fonksiyon,  $\omega_0, \omega_1$  sabit vektörler,  $N_C(x)$  normal koni,  $C$  kapalı konveks dönüşüm ve  $T$  pozitif reel sayıdır. Problem  $\Phi(x(t), x'(t))$  Mayer problemini minimize edecek şekilde sınır koşullarını ve  $t \in [0, T]$  aralığının hemen her yerinde ikinci mertebeden diferansiyel içermeleri sağlayacak bir  $\tilde{x}(t)$

yörüngeyi bulmaktır.

Bu makale tezimizin şekillenmesinde yardımcı olmaktadır. [26]

## 2.5. KONVEKS PROGRAMLAMA PROBLEMLERİ

Gerekli notasyonlar [22] ve [16]'de bulunabilir.

$\mathbb{R}^n$ ,  $z$  değişkenini içeren  $n$ - boyutlu bir Öklid uzayıdır.  $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  o.ü  $G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$  ifadesinin bir çok değerli dönüşüm ve  $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ifadesinin de ayrık değerli bir has fonksiyon olduğunu varsayalım.  $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  konveks kümeler olsun.  $G$  çok değerli dönüşümünün grafiği şu şekildedir:

$$gph G = \{(x, u, v) : v \in G(x, u)\}$$

$G$ 'in tanım kümesi  $dom G$  ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$dom G = \{(x, u) : G(x, u) \neq \emptyset\}$$

$G$  çok değerli dönüşümünün sırasıyla Hamilton fonksiyonunu ve Argmaximum kümesi

$$H_G(x, u, v^*) = \sup_v \{\langle v, v^* \rangle : v \in G(x, u)\}$$

$$G_{Arg}(x, u, v^*) = \sup_v \{v \in G(x, u) : \langle v, v^* \rangle = H_G(x, u, v^*)\}$$

olur. Eğer  $G(x, u) = \emptyset$  ise  $G$  konveks çok değerli dönüşümü için  $H_G(x, u, v^*) = -\infty$  dur.

$(z_0, w_0, x_0) \in gph G$  noktasında  $\forall (z, w, x) \in gph G$  için teğet yönler konisi :

$$K_{gph G}(x_0, u_0, v_0) = cone[gph G - (x_0, u_0, v_0)]$$

$$= \{(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) : \bar{x} = \alpha(x - x_0), \bar{u} = \alpha(u - u_0), \bar{v} = \alpha(v - v_0)\} \text{ dır.}$$

$(x_0, u_0, v_0) \in gph G$  noktasında  $G$  konveks dönüşümü için yerel eşlenik dönüşüm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$G^*(v^*; (x_0, u_0, v_0)) = \{(x^*, u^*) : (x^*, u^*, -v^*) \in K_{gph G}^*(x_0, u_0, v_0)\}. [22]$$

İkinci mertebeden ayrık Mayer problemini ele alalım:[16]

$$\text{minimize } \Psi(x_{T-1}, x_T) \quad (2.6)$$

$$x_{t+2} \in G(x_t, x_{t+1}) \quad , \quad t = 0, \dots, T-2 \quad (2.7)$$

$$x_t \in M \quad , \quad x_{t+1} - x_t \in N \quad , \quad t = 1, 2, \dots, T-2 \quad (2.8)$$

$$x_0 = \alpha_0 \quad , \quad x_1 = \alpha_1 \quad , \quad (x_{T-1}, x_T - x_{T-1}) \in Q \quad (2.9)$$

Burada  $x_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi(.,.) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{\pm\infty\}$  reel değerli fonksiyon,  $G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$  çok değerli dönüşüm,  $T$  sabit doğal sayı,  $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $Q \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  ve  $\alpha_0, \alpha_1$  sabit sayılardır.  $\{x_t\}_{t=0}^T = \{x_t : t = 0, 1, \dots, T\}$  (2.6) – (2.9) problemi için bir uygulanabilir yörünge olarak adlandırılır. Eğer  $Q$  konveks çok değerli fonksiyon ve  $\Psi(.,.)$  has konveks fonksiyon ise (2.6) – (2.9) ayrık problemi konvektir.

**Tanım 2.113.** [16] Eğer  $x_t^0 \in \mathbb{R}^n$  noktası için

$$\text{i) } (x_t^0, x_{t+1}^0, x_{t+2}^0) \in \text{ri}(\text{gph } G),$$

$$\text{ii) } (x_t^0, x_{t+1}^0, x_{t+2}^0) \in \text{int}(\text{gph } G) \quad , \quad t = 0, \dots, T-2 \quad (\text{bir sabit } t_0 \text{ olası istisnası ile})$$

durumlarından biri sağlanıyor ve  $(x_t^0, x_{t+1}^0)$  noktasında  $\Psi(.,.)$  sürekli ise (2.6) – (2.9) konveks problem için regülerlik koşulu sağlanır denir.

[16] İlk olarak (2.6) – (2.9) konveks problemini düşünelim.  $p = (x_0, x_1, \dots, x_T) \in R^{n(T+1)}$  bir vektör olsun ve  $R^{n(T+1)}$ 'de aşağıdaki konveks kümeleri tanımlayalım:

$$S_t = \{p = (x_0, x_1, \dots, x_T) \mid (x_t, x_{t+1}, x_{t+2}) \in \text{gph } G\} \quad , \quad t = 0, 1, \dots, T-2,$$

$$\tilde{R}_t = \{p = (x_0, x_1, \dots, x_T) \mid x_t \in M \quad , \quad x_{t+1} - x_t \in N\} \quad , \quad t = 1, \dots, T-2,$$

$$\Phi_0 = \{p = (x_0, x_1, \dots, x_T) \mid x_0 = \alpha_0\}$$

$$\Phi_1 = \{p = (x_0, x_1, \dots, x_T) \mid x_1 = \alpha_1\}$$

$$\Phi_T = \{p = (x_0, x_1, \dots, x_T) \mid (x_{T-1}, x_T - x_{T-1}) \in Q\}.$$

Dual koninin tanımını kullanarak  $K_{R_t}^*(p)$ ,  $K_{\Phi_T}(p)$  teğet yönler konilerinin duallerini

hesaplamalıyız.  $K_{S_t}^*(p)$  dual konisi Mahmudov'a göre

$$K_{S_t}^*(p) = \left\{ p^* = (x_0^*, x_1^*, \dots, x_T^*) \mid (x_t^*, x_{t+1}^*, x_{t+2}^*) \in K_{gph G}^*(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+2}), x_k^* = 0, k \neq t, t+1, t+2 \right\}$$

$t = 0, 1, \dots, T-2$  o.ş ifade edilmiştir. Burada  $(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+2}) \in gph Q$  o.ü  $K_{gph G}^*(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+2})$ ,  $K_{gph G}(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+2})$  teğet yönler konisinin dual konisidir. Ayrıca,

$$K_{\Phi_0}^*(p) = \{p^* = (x_0^*, x_1^*, \dots, x_T^*) \mid x_0^* \in \mathbb{R}^n, x_t^* = 0, t = 1, 2, \dots, T\}.$$

$$K_{\Phi_1}^*(p) = \{p^* = (x_0^*, x_1^*, \dots, x_T^*) \mid x_1^* \in \mathbb{R}^n, x_t^* = 0, t \neq 1\}.$$

**Teorem 2.114.** [16]  $G$  ve  $\Psi(.,.)$  sırasıyla  $\{x_t\}_{t=0}^T$  uygulanabilir yörüngesinin noktalarında konveks dönüşüm ve sürekli konveks fonksiyon,  $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$  ve  $Q \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  konveks kümeler olsun.  $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^T$  nin (2.6) – (2.9) probleminin optimal yörüngesi olması için

- i)  $(x_t^* - u_t^* - \gamma_t^*, u_{t+1}^* - \varsigma_t^*) \in G^*(x_{t+2}^*; (\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}, \tilde{x}_{t+2}))$   
 $(\gamma_t^* + \varsigma_t^*, \varsigma_t^*) \in K_M^*(\tilde{x}_t) \times K_N^*(\tilde{x}_{t+1} - \tilde{x}_t), t = 1, 2, \dots, T-1$
- ii)  $(u_{T-1}^* - x_{T-1}^* + \gamma_{T-1}^*, -x_T^* + \varsigma_{T-1}^*) \in \lambda \partial \Psi(\tilde{x}_{T-1}, \tilde{x}_T)$

ayrık Mahmudov eşlenik içermesi ve transversallik koşullarını sağlayan hepsi aynı anda sıfır olmayan  $\{x_t^*, u_t^*, \gamma_t^*, \varsigma_t^*\}, t = 0, 1, \dots, T-2, x_T^*, \gamma_{T-1}^*, \varsigma_{T-1}^*$  vektörlerinin ve  $\lambda \in \{0, 1\}$  sayısının var olması gereklidir. Burada  $(\gamma_{T-1}^* + \varsigma_{T-1}^*, \varsigma_{T-1}^*) \in K_Q^*(\tilde{x}_{T-1}, \tilde{x}_T - \tilde{x}_{T-1})$  dır. Eğer regülerlik koşulu için sağlanıyorsa  $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^T$  yörüngesinin optimalliği için yeterlidir.

Şimdi ikinci mertebeden diferansiyel içermeli Mayer problemi inceleyelim:

$$\text{minimize } \varphi(x(b), x'(b)) \quad (2.10)$$

$$x''(t) \in G(x(t), x'(t)) \quad , \quad t \in [a, b] \quad (2.11)$$

$$x(t) \in M, x'(t) \in N, \quad t \in [a, b] \quad (2.12)$$

$$x(a) = \alpha_0, x'(a) = \beta_0, (x(b), x'(b)) \in Q \quad (2.13)$$

Burada  $\alpha_0 \in M, \beta_0 \in N$ . Problem  $\varphi(x(b), x'(b))$  Mayer problemini minimize edecek şekilde sınır koşullarını (2.13) ve  $[0, T]$  aralığının neredeyse her yerinde ikinci mertebeden diferansiyel içermeleri (2.11) ve kısıtları (2.12) sağlayacak bir  $\tilde{x}(t)$  yörüngesi bulmaktır.

Bu problemi aşağıdaki eşlenik yaklaşım problemi ile tanımlayalım:

$$\text{minimize } \varphi(x(b-\delta), \Delta_-x(b)), \quad (2.14)$$

$$\Delta^2 x(t) \in G(x(t), \Delta x(t)), \quad t = a, a+\delta, a+2\delta, \dots, b-2\delta, \quad (2.15)$$

$$x(t) \in M, \quad \Delta x(t) \in N, \quad t = a, a+\delta, a+2\delta, \dots, b-2\delta, \quad (2.16)$$

$$x(a) = \alpha_0, \quad \Delta x(a) = \beta_0, \quad (x(b-\delta), \Delta_-x(b)) \in Q \quad (2.17)$$

(2.6) – (2.9) problemini (2.14) – (2.18) biçiminde bir probleme indirgemek için

$$\Omega(x, u) = 2u - x + \delta^2 G(x, \frac{u-x}{\delta}) \quad (2.18)$$

basit yardımcı  $\Omega$  dönüşümünü ve

$$\bar{\varphi}(x(b-\delta), x(b)) \equiv \varphi(x(b-\delta), \Delta_-x(b)) \quad (2.19)$$

$\bar{\varphi}$  fonksiyonunu kullanalım. (2.6) – (2.9) problemini aşağıdaki gibi yeniden yazalım:

$$\text{minimize } \bar{\varphi}(x(b-\delta), \Delta_-x(b)), \quad (2.20)$$

$$x(t+2\delta) \in \Omega(x(t), x(t+\Omega)), \quad t = a, a+\delta, a+2\delta, \dots, b-2\delta, \quad (2.21)$$

$$x(t) \in M, \quad x(t+\delta) - x(t) \in \delta N, \quad t = a, a+\delta, a+2\delta, \dots, b-2\delta, \quad (2.22)$$

$$x(a) = \alpha_0, \quad x(a+\delta) = \alpha_0 + \delta\beta_0 = \alpha_1, \quad (2.23)$$

$$(\delta x(b-\delta), x(b) - x(b-\delta)) \in \delta\Omega. \quad (2.24)$$

Teorem 2.114 ile (2.20) – (2.24) probleminde

$\{\tilde{x}_t\} := \{\tilde{x}_t \mid t = a, a+\delta, \dots, b-\delta, -\delta\}$  yörüngesinin optimalliği için

$$(\bar{x}^*(t) - \bar{u}^*(t) - \bar{\gamma}^*(t), \bar{u}^*(t+\delta) - \bar{\zeta}^*(t)) \in \Omega^*(\bar{x}^*(t+2\delta); (\tilde{x}(t), \tilde{x}(t+\delta), \tilde{x}(t+2\delta)))$$

$$(\bar{\gamma}^*(t) + \bar{\zeta}^*(t), \bar{\zeta}^*(t)) \in K_M^*(\tilde{x}(t)) \times K_{\delta N}^*(\tilde{x}(t+\delta) - \tilde{x}(t)), \quad t = a+2\delta, a+3\delta \dots b-2\delta$$

$$(\bar{u}^*(b-\delta) - \bar{x}^*(b-\delta) + \bar{\gamma}^*(b-\delta), -\bar{x}^*(b) + \bar{\zeta}^*(b-\delta)) \in \lambda \partial \bar{\varphi}(\tilde{x}(b-\delta), \tilde{x}(b))$$

ayrık Mahmudov eşlenik içermesi ve transversallik koşullarını sağlayan hepsi aynı anda sıfır olmayan  $\{\bar{u}^*(t)\}$ ,  $\{\bar{x}^*(t)\}$  vektörlerinin ve  $\lambda \in \{0, 1\}$  sayısının var olması gereklidir.

**Teorem 2.115.** [16]  $G$  ve  $\varphi$  sırasıyla  $x^*$ 'e göre ve  $\{x(t)\}$  ,  $t = a, a + \delta, \dots, b - \delta, b$  UY'nin noktalarında konveks dönüşüm ve sürekli has konveks fonksiyon,  $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$  ve  $Q \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  konveks kümeler olsun.  $\{\tilde{x}(t)\}$  nin (2.6) – (2.9) ayrık yaklaşım probleminin optimal yörüngesi olması için

$$(\Delta^2 x^*(t) - \Delta v^*(t - \delta) - \mu^*(t), v^*(t) - \xi^*(t)) \in G^*(x^*(t + 2\delta); (\tilde{x}(t), \Delta \tilde{x}(t), \Delta^2 \tilde{x}(t))) \quad (2.25)$$

$$(\mu^*(t), \xi^*(t)) \in K_M^*(\tilde{x}(t)) \times K_N^*(\Delta \tilde{x}(t)) , t = a + \delta, a + 2\delta, \dots, b - 2\delta \quad (2.26)$$

$$v^*(b - \delta) + \Delta x^*(b - \delta) + \mu^*(b - \delta), -x^*(b) + \xi^*(b - \delta)) \in \lambda \partial \varphi(\tilde{x}(b - \delta), \Delta \tilde{x}(b)) \quad (2.27)$$

$$(\mu^*(b - \delta), \xi^*(b - \delta)) \in K_Q^*(\tilde{x}(b - \delta), \Delta \tilde{x}(b)) \quad (2.28)$$

$$\Delta^2 \tilde{x}(t) \in G_{Arg}(\tilde{x}(t), \Delta \tilde{x}(t); x^*(t + 2\delta))$$

ikinci mertebdeden yaklaşık Mahmudov eşlenik içermesi ve transversallik koşullarını sağlayan hepsi aynı anda sıfır olmayan  $\{x(t)^*, v(t)^*, \mu(t)^*, \xi(t)^*\}$  ,  $t = 0, 1, \dots, T - 2$  vektörlerinin ve  $\lambda \in \{0, 1\}$  sayısının var olması gereklidir.

**Teorem 2.116.** [16] (2.6) – (2.9) konveks problemde  $\tilde{x}(t)$  yörüngesinin optimalliği için gerekli koşullar  $t = b$  bitiş noktasında

$$\textbf{i)} (x^{*''}(t) + v^{*'}(t), v^*(t)) \in G^*(x^*(t); (\tilde{x}(t), \tilde{x}'(t), \tilde{x}''(t))) + K_M^*(\tilde{x}(t)) \times K_N^*(\tilde{x}'(t)) , t \in [a, b]$$

$$\textbf{ii)} (v^*(b) + x^{*'}(b), -x^*(b)) \in \partial \varphi(\tilde{x}(b), \tilde{x}'(b)) - K_Q^*(\tilde{x}(b), \tilde{x}'(b))$$

$$\textbf{iii)} \tilde{x}''(t) \in G_{Arg}(\tilde{x}(t), \tilde{x}'(t); x^*(t)) , t \in [a, b]$$

ikinci mertebden Mahmudov eşlenik içermesi tipi içirme, transversallik koşullarını sağlayan ve verilen bir noktada boştan farklı  $G^*$  yerel eşlenik dönüşümünün sağlandığı koşulda  $\{x^*(t), v^*(t)\}$  ,  $t \in [a, b]$  mutlak sürekli fonksiyonun çiftinin var olmasıdır. Burada  $G_{Arg}(x, u, v^*) = \{v \in (x, u) \mid \langle v, v^* \rangle = H(x, u, v^*)\}$  kümesi  $G$  çok değerli dönüşümü için bir argmaximum kümedir. Ayrıca TYŞ da sağlansın. Burada  $x^*(t)$  ,  $t \in [a, b]$  nin birinci mertebden türev ve  $x^{*''}(\cdot) \in L_1^n([a, b])$  ile birlikte mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu varsayıyoruz. Ayrıca  $v^*(t)$  ,  $t \in [a, b]$  mutlak sürekli ve  $v^{*'}(\cdot) \in L_1^n([a, b])$  dir.

### 3 MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında öncelikle konveks küme, normal koni, çok değerli fonksiyon gibi temel kavramlar ve bunlarla ilgili temel teoremler verilmiştir. Daha sonrasında tarama süreçleri ile ilgili ayrıntılı bilgiler verilip ikinci mertebeden bir tarama sürecinin optimalliği için gerekli ve yeterli koşullar incelenmiştir.

Tez oluşturulurken araştırılan konu ile ilgili kütüphane ve internet ortamında bir çok kitap taranmış ve bir çok makale kronolojik olarak incelenmiştir. Oluşturulan tezin doküman haline getirilmesi için Latex programı kullanılmıştır.

## 4 BULGULAR

[12] [15] [16] [23]  $\mathbb{R}^n$   $n$ -boyutlu Öklid uzayı,  $x, u \in \mathbb{R}^n$  o.ü  $\langle x, u \rangle$  iç çarpım ve  $(x, u)$   $x, u$ 'nun ikilisi olsun.  $G : \mathbb{R}^{2n} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  bir çok değerli dönüşüm ve  $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  tek değerli fonksiyon olduğunu varsayalım.

Bizim ana araştırmamız yörüngeye ve türevine uygulanan geçerli kısıtlamalar ile ikinci mertebeden bir tarama sürecinin optimalliği için optimal koşulları elde etmektir.

$$\text{minimize } \varphi(x(T), x'(T)) \quad (4.1)$$

$$x''(t) \in -N(x'(t); C(t)) + G(x(t), x'(t)) \quad , \quad t \in [0, T] \quad (4.2)$$

$$(x(t), x'(t)) \in C(t) \quad (4.3)$$

$$x(0) = x_0 \quad , \quad x'(0) = v_0 \quad , \quad (x_0, v_0) \in C(0) \quad (4.4)$$

Problem  $\varphi(x(T), x'(T))$  Mayer problemini minimize edecek şekilde  $t = 0$  (4.4) sınır koşullarını ve  $[0, T]$  aralığının hemen her yerde (4.2) ikinci mertebeden diferansiyel içermeleri sağlayacak bir  $\tilde{x}(t)$  yörüngesi bulmaktır. Burada  $C(t) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  hareketli, konveks değerli, kapalı bir kümedir.

İkinci mertebeden ayrık Mayer problemini ele alalım

$$\text{minimize } \Psi(x_{T-1}, x_T) \quad (4.5)$$

$$x_{t+2} \in Q(x_t, x_{t+1}) \quad , \quad t = 0, \dots, T-2 \quad (4.6)$$

$$(x_t, x_{t+1} - x_t) \in C_t \quad (4.7)$$

$$x_0 = \alpha_0 \quad , \quad x_1 = \beta_0 \quad (4.8)$$

Burada  $x_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi(.,.) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{\pm\infty\}$  reel değerli fonksiyon,  $Q : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$  bir çok değerli dönüşüm ve  $T$  sabit doğal sayıdır.  $\{x_t\}_{t=0}^T = \{x_t : t = 0, 1, \dots, T\}$  (4.5) – (4.8) problemi için uygulanabilir yörünge olarak adlandırılır. Eğer  $Q$  konveks çok değerli

fonksiyon ve  $\Psi(.,.)$  bir has konveks fonksiyon ise (4.5) – (4.8) ayrık problemi konvektir.

**Tanım 4.1.** (Regülerlik Koşulu)[26]  $Q(x, u, t) = -N_{C(t)}(u) + G(x, u, t)$  olsun. Bir  $\{x_t\}_{t=0}^T$  uygun çözümü

**a)**  $(x_t, x_{t+1}, x_{t+2}) \in \text{ic}[gph Q(., t)]$  ,  $t = 0, \dots, T-2$  (bir  $t$  hariç olabilir) ve  $\psi$  ,  $(x_{T-1}, x_T)$ 'de sürekli

**b)**  $(x_t, x_{t+1}, x_{t+2}) \in \text{ri}(gph Q)$  ,  $(x_{T-1}, x_T) \in \text{ri}(\text{dom } \psi)$

koşullarından birini sağlıyorsa tarama süreçli konveks problem regülerlik koşulunu sağlar denir.

#### 4.0.1. Ayrık İçermeler için Gerekli ve Yeterli Koşullar

[15] [16] [23] İkinci mertebeden ayrık konveks (4.5) – (4.8) problemini düşünelim. Aşağıdaki konveks kümelerde  $R^{n(T+1)}$  uzayında  $w = (x_0, x_1, \dots, x_T) \in R^{n(T+1)}$  bir vektör olsun.

$$S_t = \{w = (x_0, x_1, \dots, x_T) \mid (x_t, x_{t+1}, x_{t+2}) \in gph Q\}$$

$$R_t = \{w \mid (x_t, x_{t+1} - x_t) \in C_t\}$$

$$t = 0, 1, \dots, T-2,$$

$$M_0 = \{(x_0, x_1, \dots, x_T) \mid x_0 = \alpha_0\}$$

$$M_1 = \{(x_0, x_1, \dots, x_T) \mid x_1 = \beta_0\} ,$$

İlk olarak  $K_{S_t}^*(w)$  ,  $K_{M_0}^*(w)$  ve  $K_{M_1}^*(w)$  dual konilerini hesaplamalıyız.

**Yardımcı Teorem 4.2.** [15] [16] [23]  $(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+2}) \in gph Q$  o.ü  $K_{gph Q}(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+2})$  teğet yönler konisi olsun. Öyleyse

$$K_{S_t}^*(w) = \left\{ w^* = (x_0^*, x_1^*, \dots, x_T^*) \mid (x_t^*, x_{t+1}^*, x_{t+2}^*) \in K_{gph Q}^*(x_t, x_{t+1}, x_{t+2}) \right\}$$

**İspat:** Eğer yeterince küçük  $\lambda > 0$  için  $w + \lambda \bar{w} \in S_t$  ,  $t = 0, \dots, T-2$  ise yani eğer yeterince küçük  $\lambda > 0$  için  $(x_t + \lambda \bar{x}_t, x_{t+1} + \lambda \bar{x}_{t+1}, x_{t+2} + \lambda \bar{x}_{t+2}) \in gph Q$  ise  $\bar{w} \in K_{S_t}(w)$  dir. Yani ;

$$K_{S_t} = \{\bar{w} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_T \mid w + \bar{w} \in S_t\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{(x_0 + \lambda \bar{x}_0, x_1 + \lambda \bar{x}_1, \dots, x_T + \lambda \bar{x}_T) \in S_t\} \\
&= \{(x_t + \lambda \bar{x}_t, x_{t+1} + \lambda \bar{x}_{t+1}, x_{t+2} + \lambda \bar{x}_{t+2}) \in \text{gph } Q\} \\
&= \{(x_t, x_{t+1}, x_{t+2}) + \lambda (\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}, \bar{x}_{t+2}) \in \text{gph } Q\}
\end{aligned}$$

O halde;

$$(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}, \bar{x}_{t+2}) \in K_{\text{gph } Q}(x_t, x_{t+1}, x_{t+2}), \quad t = 0, 1, \dots, T-2$$

Dual koni tanımından  $w^* \in K_{S_t}^*(w)$  ise ancak ve ancak

$$\langle w^*, \bar{w} \rangle = \sum_{k=0}^T \langle x_k^*, \bar{x}_k \rangle \geq 0, \quad \forall \bar{w} \in K_{S_t}(w)$$

Bu durumda  $\bar{w}$  vektörünün  $\bar{x}_k$ ,  $k \neq t, t+1, t+2$  bileşenlerinin keyfiliklerinden yukarıdaki eşitsizlik  $k \neq t, t+1, t+2$  için  $x_k^* = 0$  olduğunda gerçekleşir. Öyleyse son eşitsizlik

$$\langle x_t^*, \bar{x}_t \rangle + \langle x_{t+1}^*, \bar{x}_{t+1} \rangle + \langle x_{t+2}^*, \bar{x}_{t+2} \rangle \geq 0,$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}, \bar{x}_{t+2}) \in K_{\text{gph } Q}(x_t, x_{t+1}, x_{t+2})$  dir.

$(x_t^*, x_{t+1}^*, x_{t+2}^*) \in K_{\text{gph } G}^*(x_t, x_{t+1}, x_{t+2})$  elde edilir. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmıştır.

[23] Diğer yandan  $x_0 = \alpha_0$ ,  $w + \bar{w} \in M_0$  ise ancak ve ancak  $\bar{x}_0 = 0$  dır. Sonuç olarak

$$K_{M_0}(w) = \{\bar{w} = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_T) : \bar{x}_0 = 0\}.$$

Bu nedenle

$$K_{M_0}^*(w) = \{w^* = (x_0^*, x_1^*, \dots, x_T^*) \mid x_t^* = 0, \quad t = 1, 2, \dots, T\}.$$

$x_1 = \beta_1$  olduğunda  $K_{M_0}^*(w)$ 'ın hesaplamasına benzer şekilde, aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

$$K_{M_1}(w) = \{\bar{w} = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_T) : \bar{x}_1 = 0\}.$$

$$K_{M_1}^*(w) = \{w^* = (x_0^*, x_1^*, \dots, x_T^*) \mid x_t^* = 0, \quad t \neq 1\}.$$

**Yardımcı Teorem 4.3.** [16]  $p \in \tilde{R}_t$ ,  $t = 1, \dots, T-2$  olsun. O halde  $p$ 'de  $\tilde{R}_t$  için teğet yönler

konisi ve dual koni sırasıyla

$$K_{\tilde{R}_t}(p) = \{\bar{p} = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_T) \mid (\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1} - \bar{x}_t) \in K_{C_t}(x_t, x_{t+1} - x_t), \bar{x}_k \in \mathbb{R}^n, k \neq t, t+1\}$$

$$t = 1, 2, \dots, T-2$$

$$K_{\tilde{R}_t}^*(p) = \{p^* = (x_0^*, \dots, x_T^*) \mid (x_{t+1}^* + x_t^*, x_{t+1}^*) \in K_{C_t}^*(x_t, x_{t+1} - x_t), x_k^* = 0, k \neq t, t+1\}$$

$$t = 1, 2, \dots, T-2$$

şeklinde ifade edilir.

**İspat:** İlk olarak herhangi bir  $t = 1, 2, \dots, T-2$  için verilen bir  $p$  noktasında  $\tilde{R}_t$  teğet yönler konisi için  $K_{\tilde{R}_t}(p)$ 'yi hesaplayalım. Teğet yönler konisinin tanımından  $K_{\tilde{R}_t}(p)$  yeterince küçük  $\lambda > 0$  için  $p + \lambda \bar{p} \in \tilde{R}_t$  o.ş  $\bar{p} = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_T)$  noktalarından oluşur. Bu durumda  $\tilde{R}_t$ 'nin formülünden son içermeye  $(x_t + \lambda \bar{x}_t, (x_{t+1} + \lambda \bar{x}_{t+1}) - (x_t + \lambda \bar{x}_t)) \in C_t$ 'e eş değerdir, yeterince küçük  $\lambda > 0$  ve  $k \neq t, t+1$  o.ü  $x_k$  için sağlanır. Böylece,  $(x_t + \lambda \bar{x}_t, (x_{t+1} + \lambda \bar{x}_{t+1}) - (x_t + \lambda \bar{x}_t)) \in C_t$  'dan dolayı  $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1} - \bar{x}_t) \in K_{C_t}(x_t, x_{t+1} - x_t)$  elde ederiz ve  $x_k$   $k \neq t, t+1$  için keyfi olduğundan o halde  $\bar{x}_k \in \mathbb{R}^n, k \neq t, t+1$  dır. Böylece,

$$K_{\tilde{R}_t}(p) = \{\bar{p} = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_T) \mid (\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1} - \bar{x}_t) \in K_{C_t}(x_t, x_{t+1} - x_t), \bar{x}_k \in \mathbb{R}^n, k \neq t, t+1\}$$

$$t = 1, 2, \dots, T-2$$

Diğer yandan, dual koni tanımından  $p^* \in K_{\tilde{R}_t}^*(p)$  ancak ve ancak

$$\langle p^*, \bar{p} \rangle = \sum_{k=0}^T \langle x_k^*, \bar{x}_k \rangle \geq 0, \forall \bar{p} = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_T) \in K_{\tilde{R}_t}(p), t = 1, 2, \dots, T-2$$

ya da eşit olarak ancak ve ancak her  $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1} - \bar{x}_t) \in K_{C_t}(x_t, x_{t+1} - x_t)$  için ve  $k \neq t, t+1$  o.ü keyfi  $\bar{x}_k$  için

$$\langle x_0^*, \bar{x}_0 \rangle + \dots + \langle x_t^*, \bar{x}_t \rangle + \langle x_{t+1}^*, \bar{x}_{t+1} \rangle + \dots + \langle x_T^*, \bar{x}_T \rangle \geq 0$$

elde edilir.  $\bar{x}_k, k \neq t, t+1$  bileşenlerinin keyfiliklerinden, son eşitsizlik

$\langle x_t^*, \bar{x}_t \rangle + \langle x_{t+1}^*, \bar{x}_{t+1} \rangle \geq 0$  ifadesine indirgenir ve yeniden düzenlemelerden sonra herhangi  $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1} - \bar{x}_t) \in K_{C_t}(x_t, x_{t+1} - x_t)$  için  $\langle x_t^* + x_{t+1}^*, \bar{x}_t \rangle + \langle x_{t+1}^*, \bar{x}_{t+1} - \bar{x}_t \rangle \geq 0$  eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik  $(x_t^* + x_{t+1}^*, x_{t+1}^*) \in K_{C_t}^*(x_t, x_{t+1} - x_t)$  olduğunu verir. Bu yüzden

$K_{\tilde{R}_t}(p)$  konisinin dual konisi için arzu edilen ilişki elde edilir.

**Teorem 4.4.** [15] [16] [23]  $Q$  ve  $\Psi(.,.)$  sırasıyla  $\{x_t^0\}_{t=0}^T$  uygulanabilir yörüngesinin noktalarında konveks dönüşüm ve sürekli konveks fonksiyon olsun.  $\{\tilde{x}(t)\}_{t=0}^T$  nin (4.5) – (4.8) probleminin optimal yörüngesi olması için

$$\text{i)} (x_t^* - u_t^* - \gamma_t^*, u_{t+1}^* - \varsigma_t^*) \in Q^*(x_{t+2}^*; (\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}, \tilde{x}_{t+2})) , t = 0, 1, 2, \dots, T-1$$

$$(\gamma_t^* + \varsigma_t^*, \varsigma_t^*) \in K_{C_t}^*(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1} - \tilde{x}_t) , t = 1, 2, \dots, T-1$$

$$\text{ii)} (u_{T-1}^* - x_{T-1}^*, -x_T^*) \in \lambda \partial \Psi(\tilde{x}_{T-1}, \tilde{x}_T)$$

ayrık Mahmudov eşlenik içermesi ve transversallik koşullarını sağlayan hepsi aynı anda sıfır olmayan  $x_t^*$ ,  $x_T^*$ ,  $u_t^*$   $t = 0, 1, \dots, T-1$  vektörlerinin ve  $\lambda \in \{0, 1\}$  sayısının var olması gereklidir.

Ve eğer regülerlik koşulu bu koşullar için sağlanıyorsa  $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^T$  yörüngesinin optimalliği için yeterlidir.

**İspat:**  $g(w) = \Psi(x_{T-1}, x_T)$  ile göstererek, bu problemi geometrik kısıtlanmalı probleme indirgeyeceğiz.

(4.5) – (4.8) problemimiz  $P$ 'nin konveks küme olduğu

$$\text{minimize } g(w)$$

$$P = \bigcap_{t=0}^{T-2} S_t \cap M_0 \cap M_1 \cap R_t$$

ifadesine eşdeğerdir. Bu teoremin hipotezinden  $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^T$  optimal yörüngedir. Dolayısıyla  $\tilde{w} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_T)$  bu geometrik problemin çözümüdür. [22]'deki Teorem 3.4'ten elde edilen sonuç  $P$  konveks matematiksel programlaması için gerekli optimal koşulu sağlar. Bu teorem ile hepsi aynı anda sıfır olmayan  $w^*(t) \in K_{S_t}^*(\tilde{w})$  ,  $t = 0, 1, \dots, T-2$ ,  $w^*(0) \in K_{M_0}^*(\tilde{w})$   $w^*(1) \in K_{M_1}^*(\tilde{w})$  vektörleri ve  $\lambda \in \{0, 1\}$  sayısı vardır öyle ki

$$\lambda w^{0*} = \sum_{t=0}^{T-2} (w^*(t) + \hat{w}^*(t)) + w_0^* + w_1^* , w^{0*} \in \partial_w g(\tilde{w}) \quad (4.9)$$

$\Psi$  fonksiyonunun tanımından  $w^{0*} \in \partial_w g(\tilde{w})$  vektörü  $w^{0*} = (0, \dots, 0, \bar{x}_{T-1}^*, \bar{x}_T^*)$  formundadır. Burada  $(\bar{x}_{T-1}^*, \bar{x}_T^*) \in \partial \Psi(\tilde{x}_{T-1}, \tilde{x}_T)$   $t = 0, 1, \dots, T-2$  ve  $\tilde{x}_t^* = 0$  ,  $\Psi(\tilde{x}_{T-1}, \tilde{x}_T)$  Yardımcı Teorem 4.2'den

$$w^*(t) = (0, \dots, 0, x_t^*(t), x_{t+1}^*(t), x_{t+2}^*(t), 0, \dots, 0) ,$$

$$(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t), x_{t+2}^*(t)) \in K_{gph Q}^*(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}, \tilde{x}_{t+2}) \quad , \quad t = 0, 1, \dots, T-2 \quad (4.10)$$

$$\hat{w}^*(t) = (0, \dots, 0, \hat{x}_t^*(t), \hat{x}_{t+1}^*(t), \hat{x}_{t+2}^*(t), 0, \dots, 0) \quad ,$$

$$(\hat{x}_t^*(t) + \hat{x}_{t+1}^*(t), \hat{x}_{t+1}^*(t)) \in K_{C_t}^*(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1} - \tilde{x}_t) \quad , \quad t = 0, 1, \dots, T-2$$

$$w_0^* = (a^*, 0, \dots, 0) \quad w_1^* = (0, b^*, 0, \dots, 0)$$

burada  $a^*, b^* \in \mathbb{R}^n$  dir.

Şimdi (4.9) yı kullanarak aşağıdaki denklemler bulunur:

$$0 = a^* + x_0^*(0)$$

$$0 = b^* + x_1^*(0) \quad (4.11)$$

$$0 = x_t^*(t) + x_t^*(t-1) + x_t^*(t-2) + \hat{x}_t^*(t) + \hat{x}_t^*(t-1) \quad t = 2, \dots, T-2$$

Yerel eşlenik dönüşümünün tanımından ve (4.10)'deki ikinci formülüzasyondan şunu elde ederiz.

$$(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)) \in Q^*(-x_{t+2}^*(t); (\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}, \tilde{x}_{t+2})) \quad t = 0, 1, \dots, T-2 \quad (4.12)$$

(4.11)'in 3.ifadesinde yeni  $x_{t+1}^*(t) + \hat{x}_{t+1}^*(t) = u_{t+1}^*$  ,  $-x_{t+2}^*(t) = x_{t+2}^*$  ,  $\hat{x}_{t+1}^*(t) = \varsigma_t^*$  ve  $\hat{x}_t^*(t) = \gamma_t^*$   $t = 0, 1, \dots, T-2$  notasyonlarını kullanarak (4.12)'ten

$$(x_t^* - u_t^* - \gamma_t^*, u_{t+1}^* - \varsigma_t^*) \in Q^*(x_{t+2}^*; (\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}, \tilde{x}_{t+2})) \quad t = 0, 1, \dots, T-2 \quad (4.13)$$

elde ederiz. Burada  $(\gamma_t^* + \varsigma_t^*, \varsigma_t^*) \in K_{C_t}^*(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1} - \tilde{x}_t)$  ,  $t = 1, \dots, T-2$ . Diğer yandan (4.13)'teki ifadeyi  $t = 0$  için

$$(-a^*, b^*) \in Q^*(x_2^*; (\tilde{x}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2))$$

şeklinde yazabiliriz.

Sonuç olarak  $t = T-1$  ve  $t = T$  anı için

$$\lambda \bar{x}_{T-1}^* = x_{T-1}^*(T-2) + x_{T-1}^*(T-3)$$

$$\lambda \bar{x}_T^* = x_T^*(T-2)$$

ya da kabul ettiğimiz notasyonlarla birlikte

$$\lambda \bar{x}_{T-1}^* = u_{T-1}^* - x_{T-1}^*$$

$$\lambda \bar{x}_T^* = -x_T^*.$$

Böylece

$$\lambda(\bar{x}_{T-1}^*, \bar{x}_T^*) \in \lambda \partial \Psi(\tilde{x}_{T-1}, \tilde{x}_T), \text{ yani}$$

$$(u_{T-1}^* - x_{T-1}^*, -x_T^*) \in \lambda \partial \Psi(\tilde{x}_{T-1}, \tilde{x}_T).$$

Teoremin ispatı tamamlanmış oldu.

#### 4.0.2. Sürekli Problemin Yaklaşımı ve Ayırık Yaklaşık Problemleri için Gerekli ve Yeterli Koşullar

[15] [16] [23]  $h, t$ — ekseninde bir adım olsun ve  $x(t) = x_h(t)$   $[0, T]$  üzerinde bir adım fonksiyonu olsun. Aşağıda birinci ve ikinci dereceden fark operatörlerini tanıtalım :

$$\Delta x(t) = \frac{1}{h} [x(t+h) - x(t)]$$

$$\Delta^2 x(t) = \frac{1}{h} [\Delta x(t+h) - \Delta x(t)] = \frac{x(t+2h) - 2x(t+h) + x(t)}{h^2}$$

$$t = 0, h, \dots, T-h$$

Yukarıda verilen diferansiyel operatörleri kullanarak (4.1) – (4.4) problemi ile biz şimdi aşağıdaki ikinci mertebeden ayırık yaklaşım problemini ilişkilendirelim:

$$\text{minimize } \phi(x(T-h), \Delta x(T-h)) \quad (4.14)$$

$$\Delta^2 x(t) \in -N(\Delta x(t); C(t)) + G(x(t), \Delta x(t)) \quad , \quad t = 0, h, \dots, T-2h \quad (4.15)$$

$$(x(t), \Delta x(t)) \in C(t) \quad (4.16)$$

$$x(0) = x_0 \quad , \quad \Delta x(0) = v_0 \quad , \quad (x_0, v_0) \in C(0) \quad (4.17)$$

Bunu yazmak için basit bir yardımcı dönüşüme ihtiyacımız olacak.

$x(t) = x$  ,  $x(t+h) = u$  ,  $x(t+2h) = v$  olmak üzere

$$\frac{v-2u+x}{h^2} \in -N(u, C(t)) + G\left(x, \frac{u-x}{h}\right) \text{ dır.}$$

Yani  $v \in 2u - x - h^2 N(u, C(t)) + h^2 G\left(x, \frac{u-x}{h}\right) = Q(x, u)$  ve böylece

$$Q(x, u) = 2u - x - h^2 N(u, C(t)) + h^2 G\left(x, \frac{u-x}{h}\right).$$

(4.14) – (4.17) problemini aşağıdaki gibi yeniden yazalım :

$$\text{minimize } \varphi(x(T-h), \Delta x(T-h)) \quad (4.18)$$

$$x(t+2h) \in Q(x(t), x(t+h)) \quad t = 0, h, \dots, T-2h \quad (4.19)$$

$$(x(t), x'(t)) \in C(t) \quad (4.20)$$

$$x(0) = x_0 \quad , \quad x(t+h) = x_0 + hv_0 = w_0 \quad (4.21)$$

Teorem 4.4 ile (4.18) – (4.21) probleminde  $\{\tilde{x}(t)\} := \{\tilde{x}(t) : t = 0, h, \dots, T\}$  yörüngesinin optimalliği için

$$\text{minimize } \varphi(x(T-h), \Delta x(T-h))$$

$$(hx(t), x(t+h) - x(t)) \in hC(t)$$

$$(\gamma^*(t) + \varsigma^*(t), \varsigma^*(t)) \in K_{hC(t)}^*(hx(t), x(t+1) + x(t))$$

$$(x^*(t) - u^*(t) - \gamma^*(t), u^*(t+2h) - \varsigma^*(t)) \in Q^*(t+2h) ; (\tilde{x}(t), \tilde{x}(h), \tilde{x}(t+2h)) \quad (4.22)$$

$$t = 0, h, \dots, T-2h$$

o.ş hepsi aynı anda sıfıra eşit olmayan  $\lambda = \lambda_h \in 0, 1$  sayısının ve  $\{x_t^*, u^*, \gamma^*, \varsigma^*\}$  vektör çiftinin var olması gereklidir.

Yukarıda (4.22) bağıntısındaki  $LAMQ^*$ ,  $LAMN^*$  cinsinden ifade etmeliyiz.

**Yardımcı Teorem 4.5.** [16]  $(\tilde{x}(t-h), \Delta \tilde{x}(t)) \in C(t)$  verilmiş olsun. Eğer  $K_{hC(t)}(h\tilde{x}(t-h), \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t-h))$  konisi  $(h\tilde{x}(t-h), \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t-h))$  'de  $hC(t)$  kümesinin

teğet yönler konisi ve  $K_{C(t)}(\tilde{x}(t-h), \Delta\tilde{x}(t))$  konisi  $(\tilde{x}(t-h), \Delta\tilde{x}(t))$  'de  $C(t)$  kümesinin teğet yönler konisi ise

$$K_{hC(t)}(h\tilde{x}(t-h), \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t-h)) = K_{C(t)}(\tilde{x}(t-h), \Delta\tilde{x}(t))$$

dir. Ayrıca dual koniler arasındaki ilişki

$$K_{hC(t)}^*(h\tilde{x}(t-h), \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t-h)) = K_{C(t)}^*(\tilde{x}(t-h), \Delta\tilde{x}(t))$$

ile tanımlanır.

**İspat:**  $(\bar{x}, \bar{y}) \in K_{hC(t)}(h\tilde{x}(t-h), \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t-h))$  olsun. Böylece teğet yönler konisinin tanımından  $(h\tilde{x}(t-h) + \lambda\bar{x}, \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t-h) + \lambda\bar{y}) \in hC(t)$  elde edilir. Bu

$(\tilde{x}(t-h) + \lambda\frac{\bar{x}}{h}, \frac{\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t-h)}{h} + \lambda\frac{\bar{y}}{h}) \in C(t)$  içermesine eş değerdir. O halde

$(\bar{x}, \bar{y}) \in K_{C(t)}(\tilde{x}(t-h), \Delta\tilde{x}(t))$  'den  $\left(\frac{\bar{x}}{h}, \frac{\bar{y}}{h}\right) \in K_{C(t)}\left(\tilde{x}(t-h), \frac{\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t-h)}{h}\right)$  elde edilir.

Tersine,  $(\bar{x}, \bar{y}) \in K_{C(t)}(\tilde{x}(t-h), \Delta\tilde{x}(t))$  alalım, öyleyse teğet yönler konisinin tanımı ile  $\left(\tilde{x}(t-h) + \lambda\bar{x}, \frac{\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t-h)}{h} + \lambda\bar{y}\right) \in C(t)$  dır. Son içermenin her iki tarafını  $h$  ile çarparak  $(h\tilde{x}(t-h) + \lambda h\bar{x}, \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t-h) + \lambda h\bar{y}) \in C(t)$  ya da bir başka deyişle elde edilir. Böylece, konilerin özelliklerinden  $(\bar{x}, \bar{y}) \in K_{hC(t)}(h\tilde{x}(t-h), \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t-h))$  içermesi sağlanır. Nihayetinde  $K_{hC(t)}(h\tilde{x}(t-h), \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t-h)) = K_{C(t)}(\tilde{x}(t-h), \Delta\tilde{x}(t))$  ilişkisi elde edilir.

Dual koniler arasında ilişki de Mahmudov ve Çiçek'in [16] makalesindeki Yardımcı Teorem 4.1'deki gibi ispatlanmaktadır.

**Teorem 4.6.** [16]  $Q$  ve  $\varphi$  sırasıyla  $x$ 'e göre ve  $\{x(t)\}$ ,  $t = 0, h, \dots, T-h, T$  uygulanabilir yörüngesinin noktalarında konveks fonksiyon ve sürekli has konveks fonksiyon ve  $C \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  konveks küme olsun.  $\{\tilde{x}(t)\}$ 'nin (4.14) – (4.17) ayrık yaklaşım probleminin optimal yörüngesi olması için

$$(\Delta^2 x^*(t) - \Delta v^*(t-h) - \mu^*(t), v^*(t) - \xi^*(t)) \in Q^*(x^*(t+2h); (\tilde{x}(t), \Delta\tilde{x}(t), \Delta^2\tilde{x}(t))),$$

$$(\mu^*(t), \xi^*(t)) \in K_{C(t)}^*(\tilde{x}(t), \tilde{x}'(t)), t = 0, h, \dots, T-h, T$$

$$(v^*(T-h) + \Delta x^*(T-h), -x^*(T)) \in \lambda \partial \varphi(\tilde{x}(T-h), \Delta\tilde{x}(T))$$

$$\Delta^2 \tilde{x}(t) \in Q_{Arg}(\tilde{x}(t), \Delta\tilde{x}(t); x^*(t+2h))$$

ikinci mertebdeden yaklaşık Mahmudov eşlenik içermesi ve transversallik koşullarını sağlayan hepsi aynı anda sıfır olmayan  $\{x(t)^*, v(t)^*, \mu(t)^*, \xi(t)^*\}$  ,  $t = 0, 1, \dots, T - 2$  vektörlerinin ve  $\lambda \in \{0, 1\}$  sayısının var olması gereklidir.

İspatı Mahmudov ve Çiçek'in [16] makalesindeki Teorem 4.3'e benzer şekilde yapılmaktadır.

**Yardımcı Teorem 4.7.** [15] [16] [23]  $G$  konveks çok değerli fonksiyon,  $N(x'(t); C(t))$  Clarke normal konisi olsun. Bu durumda  $H_Q$  ,  $H_G$  ve  $H_N$  arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$H_Q(x, u, v^*) = \langle 2u - x, v^* \rangle + h^2 H_N(u, -v^*) + h^2 H_G\left(x, \frac{u-x}{h}, v^*\right)$$

**İspat:**  $Q$  bir çok değerli fonksiyon ,  $v = 2u - x - v_1 - v_2$  ,  $v_1 \in h^2 N(u, C(t))$  ,  $-v_2 \in h^2 G\left(x, \frac{u-x}{h}\right)$  olsun. Hamilton fonksiyonunun tanımı ile

$$\begin{aligned} H_Q(x, u, v^*) &= \sup_v \{ \langle v, v^* \rangle : v \in Q(x, u) \} \\ &= \sup_{v_1, v_2} \{ \langle 2u - x - v_1 - v_2, v^* \rangle : v_1 \in h^2 N(u, C(t)) , -v_2 \in h^2 G(u, C(t)) \} \\ &= \sup_{v_1, v_2} \left\{ \langle 2u - x, v^* \rangle + \langle v_1, -v^* \rangle + \langle -v_2, v^* \rangle : v_1 \in h^2 N(u, C(t)) , -v_2 \in h^2 G\left(x, \frac{u-x}{h}\right) \right\} \\ &= \langle 2u - x, v^* \rangle + h^2 \sup_{v_1} \{ \langle v_1, -v^* \rangle : v_1 \in N(u, C(t)) \} + h^2 \sup_{v_2} \left\{ \langle -v_2, v^* \rangle : -v_2 \in h^2 G\left(x, \frac{u-x}{h}\right) \right\} \\ &-v_2 = v_3 \text{ olarak düşünersek} \end{aligned}$$

$$= \langle 2u - x, v^* \rangle + h^2 H_N(u, -v^*) + h^2 H_G\left(x, \frac{u-x}{h}, -v^*\right)$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.103 ve Teorem 2.104'dan

$$Q^*(x, u, v^*) = \partial_{(x,u)} H_N(u, -v^*) + \partial_{(x,u)} H_G\left(x, \frac{u-x}{h}, v^*\right).$$

Burada  $u \in \text{dom } H_N(\cdot, -v^*)$  için  $\partial_{(x,u)} H_N(u, -v^*) = \{(0, 0)\}$  dir.[26]

[26], Yardımcı Teorem 2.103 ve Teorem 2.104'dan

$$\begin{aligned} Q^*(x^*(t+2h); (\tilde{x}(t), \Delta \tilde{x}(t), \Delta^2 \tilde{x}(t))) &= N_{C(t)}^*(-x^*(t+2h); (\Delta \tilde{x}(t), \Delta^2 \tilde{x}(t))) \\ &+ G(x^*(t+2h)) , (\tilde{x}(t), \Delta \tilde{x}(t), \Delta^2 \tilde{\omega}(t)), \text{ burada} \end{aligned}$$

$$\Delta^2 \tilde{x}(t) = \Delta^2 \tilde{\tau}(t) + \Delta^2 \tilde{\omega}(t), \quad t = 0, \dots, T - 2h \text{ ve}$$

$$\Delta^2 \tilde{\tau}(t) \in -N_{C(t)}(\Delta \tilde{x}(t)); \Delta^2 \tilde{\omega}(t) \in G(\tilde{x}(t); \Delta \tilde{x}(t)) \text{ dır.}$$

**Teorem 4.8.**  $G(., t) : \mathbb{R}^{2n} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  konveks küme değerli bir dönüşüm ve  $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  bir HKF olsun.  $C(t)$  kapalı, konveks, hareketli bir küme olsun. Bu durumda (4.14) – (4.17) AYP'nin  $\{\tilde{x}(t)\}$  yörüngesinin optimalliği için gerekli koşul  $\lambda \in \{0, 1\}$  sayısının ve  $\{x^*(t), v^*(t)\}$  aynı anda sıfır olmayan vektörlerin var olması öyle ki

$$\textbf{i)} \quad (\Delta^2 x^*(t) + \Delta v^*(t), v^*(t)) \in G^*(x^*(t + 2h); (\tilde{x}(t), \Delta \tilde{x}(t), \Delta^2 \omega^*(t), t) + K_{C(t)}^*(\tilde{x}(t), \Delta \tilde{x}(t)))$$

$$t = 2h, \dots, t - 2h$$

$$\textbf{ii)} \quad \Delta^2 \tilde{\tau}(t) \in -N_{C(t)}(\Delta \tilde{x}(t)); \Delta^2 \omega(t) \in G(\tilde{x}(t); \Delta \tilde{x}(t), t),$$

$$\Delta^2 \tilde{x}(t) = \Delta^2 \tilde{\tau}(t) + \Delta^2 \tilde{\omega}(t), \quad t = 0, \dots, T - 2h$$

$$\Delta^2 \tilde{\tau}(t) \in -N_{C_{Arg}}(\Delta \tilde{x}(t); -x^*(t + 2h))$$

$$\textbf{iii)} \quad v^*(T - h) + \Delta x^*(T), -x^*(T) \in \lambda \partial_{(x,u)} \varphi(\tilde{x}(T - h), \Delta \tilde{x}(T - h))$$

Dahası, regülerlik koşulu altında bu koşullar  $\{\tilde{x}(t)\}$  optimalliği için aynı zamanda yeterli olmaktadır.

**Teorem 4.9.** [16] (2.6) – (2.9) KP'de  $\tilde{x}(t)$  yörüngesinin optimalliği için gerekli koşullar  $t = T$  bitiş noktasında

$$\textbf{i)} \quad (x^{*''}(t) + v^{*'}(t), v^*(t)) \in G^*(x^*(t); (\tilde{x}(t), \tilde{x}'(t), \tilde{\omega}''(t))) + K_{C(t)}^*(\tilde{x}(t), \tilde{x}'(t)), \quad t \in [0, T]$$

$$\textbf{ii)} \quad (v^*(T) + x^{*'}(T), -x^*(T)) \in \partial \varphi(\tilde{x}(T), \tilde{x}'(T))$$

$$\textbf{iii)} \quad \tilde{\omega}''(t) \in G_{Arg}(\tilde{x}(t), \tilde{x}'(t); x^*(t)), \quad \tilde{\tau}''(t) \in -N_{C(t)Arg}(\tilde{x}'(t); x^*(t)), \quad t \in [0, T]$$

ikinci mertebeden Mahmudov eşlenik içerme tipi içerme, transversallik koşullarını sağlayan ve verilen bir noktada boştan farklı  $G^*$  yerel eşlenik dönüşümü sağlandığı koşulda  $\{x^*(t), v^*(t)\}$ ,  $t \in [0, T]$  mutlak sürekli fonksiyonun çiftinin var olmasıdır. Burada  $G_{Arg}(x, u, v^*) = \{v \in (x, u) \mid \langle v, v^* \rangle = H(x, u, v^*)\}$  kümesi  $G$  çok değerli dönüşüm için bir argmaximum kümedir. Ayrıca TYŞ da sağlansın. Burada  $x^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$  nin birinci mertebeden türev ve  $x^{*''}(\cdot) \in L_1^n([0, T])$  ile birlikte mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu varsayıyoruz. Ayrıca  $v^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$  mutlak sürekli ve  $v^{*'}(\cdot) \in L_1^n([0, T])$  dir.

**Teorem 4.10.** [12] Problemimizde

$$C := \bigcap_{i=1}^s C_i, \quad C_i : \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x_i^*, x \rangle \leq c_i\} \quad (4.23)$$

formundaki  $C$  ile birlikte  $G : C \times U \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  küme değerli dönüşümü

$$G(x, x') := -N(x'; C) + f(x, x'), \quad \forall x \in C$$

şeklinde verilsin,  $R(x) := N(x'; C)$  ile gösterilsin ve ayrıca  $f$ 'nin referans noktaları etrafında  $C^1$  sınıfından olduğunu varsayalım. O halde herhangi  $(x, x') \in C \times U$  ve  $w + f(x, x')$  için

$$G^*(x, x', w)(w) \subset \left\{ z = \left( \nabla_x f(x, x')^* w - \sum_{j \in I_0(w) \cup I_{>w}} \gamma_j x_j^*, \nabla_{x'} f(x, x')^* w \right) \right\} \quad (4.24)$$

burada  $w \in \text{dom } R^*(x, w + f(x, x'))$ ,

$$I_0(w) := \{i \in I(x) \mid \langle x_i^*, w \rangle = c_i\}$$

$$I_{>}(w) := \{i \in I(x) \mid \langle x_i^*, w \rangle > c_i\}, \quad w \in \mathbb{R}^n$$

ve  $i \in I_0(w)$  için  $\gamma_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in I_{>}(w)$  için  $\gamma_i \geq 0$  dır.

Ayrıca (4.24) bir eşitlik ve  $\text{dom } R^*(x, w + f(x, x'))$  olarak

$$\text{dom } R^*(x, w + f(x, x')) = \left\{ w \mid \exists \lambda_i \geq 0, w + f(x, x') = \sum_{i \in I(x)} \gamma_i x_i^*, \lambda_i > 0 \Rightarrow \langle x_i^*, w \rangle = c_i \right\}$$

ile hesaplanabilir.

## 5 TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde ikinci mertebeden bir tarama sürecinin optimallığı için gerekli koşullar üzerine durulmuştur. İlk olarak konveks küme, normal koni gibi konveks analizdeki temel tanım ve teoremlere değinilip sonrasında çok değerli fonksiyon, eşlenik fonksiyon, ayrık diferansiyel içermeli optimizasyon problemleri hakkında bilgiler verilmiştir. Tarama süreçleri konusu ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Bulgular bölümünde E.N. Mahmudov ve B.S. Mordukhovich'in yaptığı çalışmalar ışığında ikinci mertebeden tarama süreçli diferansiyel içermeli bir konveks problem ele alınmıştır ve bunun sonucunda da problemin çözümünün optimallığı için gerekli koşullara ulaşılmıştır.

Bu tezde konveks durumlar için tarama süreçli optimizasyon problemi incelenmiştir. Konveks olmayan durumlar için de benzer şekilde ele alınabilir. Ayrıca farklı sınır koşulları ve diferansiyel içermeler düşünülerek problem tekrar oluşturulup optimallik için gerek ve yeter koşullar araştırılabilir. Bundan sonraki çalışmalarındaki amacım bu tezde elde edilen sonuçları kullanarak ilerlemektir.

## KAYNAKLAR

- [1]. Aitalioubrahim, M., 2012, On Second Order Functional Differential Inclusions in Hilbert Space, *Differential Equations and Applications*, Vol.4.3, 389-410.
- [2]. Auslender, A. and Mechler, J., 1994, Second Order Viability Problems for Differential Inclusions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.181, 205-218.
- [3]. Benchohra, M., 2001, On Second Order Differential Inclusions in Banach Spaces, *New Zealand Journal of Mathematics*, Vol.30, 5-13.
- [4]. Cao, T.H. and Mordukhovich, B.S., 2017, Optimality Conditions for a Controlled Sweeping Process with Applications to the Crowd Motion Model *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. A Journal Bridging Mathematics and Sciences*, Volume 22, Number 2
- [5]. Cao, T.H. and Mordukhovich, B.S., 2019, Applications of Optimal Control of a Nonconvex Sweeping Process to Optimization of the Planar Crowd Motion Model, *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. A Journal Bridging Mathematics and Sciences*, Volume 24, Number 8
- [6]. Cao, T.H. and Mordukhovich, B.S., 2016, Optimal Control of a Perturbed Sweeping Process via Discrete Approximations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. A Journal Bridging Mathematics and Sciences*, Volume 21, Number 10
- [7]. Cao, T.H. and Mordukhovich, B.S., Applications of Optimal Control of a Nonconvex Sweeping Process to Optimization of the Planar Crowd Motion Model, *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. A Journal Bridging Mathematics and Sciences*, Volume 24, Number 8
- [8]. Cao, T.H and Mordukhovich, B.S. and Nguyen, D. and Nguyen, T., 2021, Applications of Controlled Sweeping Processes to Nonlinear Crowd Motion Models with Obstacles, *IEEE Control Systems Letters*, IEEE, Volume 6, Number
- [9]. Cao, T.H. and Mordukhovich, B.S., 2019, Optimal Control of a Nonconvex Perturbed Sweeping Process, *Journal of Differential Equations*, Volume 266, Number 2-3
- [10]. Cernea, A., 2002, On the Existence of Viable Solutions for a Class of Second Order Differential Inclusions, *Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions*, 22(1),67-78
- [11]. Clarke, F.H. and Nour, C., 2004, The Hamilton-Jacobi Equation of Minimal Time Control, *Journal of Convex Analysis*, Volume 11, Number 2
- [12]. Colombo, G. and Mordukhovich, B.S. and Nguyen, D., 2020, Optimization of a Perturbed Sweeping Process by Constrained Discontinuous Controls, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Volume 58, Number 4

- [13]. Colombo, G. and Henrion, R. and Hoang, N.D. and Mordukhovich, B.S., 2016, Optimal Control of the Sweeping Process Over Polyhedral Controlled Sets, *Journal of Differential Equations*, Volume 260, Number 4
- [14]. Colombo, G., 2016, *Moreau's Sweeping Process and Its Control* PowerPoint slides, , Universit'a di Padova
- [15]. Çiçek, G. and Mahmudov, E.N., 2016, 'The Problem of Mayer for Discrete and Differential Inclusions with Initial Boundary Constraints', *Appl. Math. Inf. Sci.*, Volume 10, Number 5
- [16]. Çiçek, G. and Mahmudov, E.N., 2021, Optimization of Mayer Functional in Problems with Discrete and Differential Inclusions and Viability Constraints, *Turkish Journal of Mathematics*, Volume 45, Number 5
- [17]. Daniilidis, A. and Drusvyatskiy, D., 2017, Sweeping by a Tame Process, *Annales de l'Institut Fourier*, Volume 67, Number 5
- [18]. Haddad, T. and Yarou, M., 2006, Existence of Solutions for Nonconvex Second-Order Differential Inclusions in The Infinite Dimensional Space, *Electronic Journal of Differential Equations* , Vol.2006, No:33, 1-8
- [19]. Hiriart U. and Jean B. and Lemaréchal, C., 2013, Convex Analysis and Minimization Algorithms I: Fundamentals, *Springer science & business media*, Vol 305
- [20]. Ibrahim, A.G and Alkulaibi, K.S., 2004, On the Existence of Monotone Solutions for Second-order Non-convex Differential Inclusions in Infinite Dimensional Spaces, *Portugaliae Mathematica*, Junta Nacional de Investigacao Cientifica, Volume 61, Number 2
- [21]. Lupulescu, V., 2005, Viable Solutions for Second Order Nonconvex Functional Differential Inclusions, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol.2005, No:110, 1-11.
- [22]. Mahmudov, E., 2011 , *Approximation and Optimization of Discrete and Differential Inclusions*, Elsevier, Inc., Amsterdam, 978-0-12-388428-2
- [23]. Mahmudov, E.N., 2015, Optimization of Second-order Discrete Approximation Inclusions, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, Taylor & Francis, Volume 36, Number 5
- [24]. Mahmudov, E.N., 2014, Approximation and Optimization of Higher Order Discrete and Differential Inclusions, *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 21(1), 1-26
- [25]. Mahmudov, E.N., 2019, Optimization of Boundary Value Problems for Certain Higher-order Differential Inclusions, *Journal of Dynamical and Control Systems* , Volume 25, Number 1
- [26]. Mahmudov, E.N., 2022, Optimal control of second Order Sweeping Processes with Discrete and Differential Inclusions, *Journal of Convex Analysis*, Volume 29, Number 1

- [27]. Marco, L., Murillo, J.A., 2001, Lyapunov Functions for Second Order Differential Inclusions: A Viability Approach, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.262, No:1, 339-354.
- [28]. Mordukhovich, B.S. and Nam, N.M., 2014, *An Easy Path to Convex Analysis and Applications*, Series Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics, Vol 14, Morgan & Claypool Publishers, Williston, VT, 978-1-62705-237-5
- [29]. Mordukhovich, B.S. and Wang, D., 2015, Optimal Control of Semilinear Unbounded Evolution Inclusions with Functional Constraints, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Volume 167, Number 3
- [30]. Moreau, J.J., 1971, Raflé par un convexe variable. I, *Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe*, Vol. I, 43 pp. Secrétariat des Math., Publ. No. 118
- [31]. Moreau, J.J., 1972, Raflé par un convexe variable. II, *Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe*, Vol. II, Exp. No. 3, 36 pp. Secrétariat des Math., Publ. No. 122
- [32]. Noel, J., 2018, Second-order General Perturbed Sweeping Process Differential Inclusion, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, Springer, Volume 20, Number 3
- [33]. Pontryagin, L.S. and Boltyanskii, V.G. and Gamkrelidze, R.V. and Mishchenko, E.F., 1964, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, The Macmillan Company, New York, 63-15354
- [34]. Rockafellar, R.T., 1970, *Convex Analysis*, Princeton Mathematical Series, No. 28, Princeton University Press, Princeton, N.J.
- [35]. Rockafellar, R.T. and Wets, J.B. 1998, *Variational Analysis*, Springer, Berlin, 3-540-62772-3.
- [36]. Vilches E., 2020, *An Overview of Moreau's Sweeping Processes with Applications* PowerPoint slides, Universidad de O'Higgins Instituto de Ciencias de la Ingeniería Rancagua, Chile, Seminario de Optimización CMM-UdeC

## ÖZGEÇMİŞ

| Kişisel Bilgiler |                                                                          |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Adı Soyadı       | Büşra AKGÜN                                                              |
| Doğum Yeri       |                                                                          |
| Doğum Tarihi     |                                                                          |
| Uyruğu           | <input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer: |
| Telefon          |                                                                          |
| E-Posta Adresi   |                                                                          |
| Web Adresi       |                                                                          |



| Eğitim Bilgileri |                       |
|------------------|-----------------------|
| Lisans           |                       |
| Üniversite       | İstanbul Üniversitesi |
| Fakülte          | Fen Fakültesi         |
| Bölümü           | Matematik Bölümü      |
| Mezuniyet Yılı   | 2015                  |

| Yüksek Lisans    |                         |
|------------------|-------------------------|
| Üniversite       | İstanbul Üniversitesi   |
| Enstitü Adı      | Fen Bilimleri Enstitüsü |
| Anabilim Dalı    | Matematik Anabilim Dalı |
| Programı         | Matematik Programı      |
| Mezuniyet Tarihi | 2022                    |

