



T.C.  
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ



**İKİNCİ MERTEBEDEN FONKSİYONEL DİFERENSİYEL  
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIM DAVRANIŞI**

**Adil KAYMAZ**

**Doktora Tezi  
Matematik Anabilim Dalı  
Prof. Dr. Ercan TUNÇ**

**2021**

**Her hakkı saklıdır**

T.C.  
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

İKİNCİ MERTEBEDEN FONKSİYONEL DİFERENSİYEL  
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIM DAVRANIŞI

Adil KAYMAZ

TOKAT  
2021

Her hakkı saklıdır

Prof. Dr. Ercan TUNÇ danışmanlığında, Adil KAYMAZ tarafından hazırlanan bu çalışma 08/09/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.



## TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdığı yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Adil KAYMAZ

08/09/2021

## ÖZET

Doktora Tezi

### İKİNCİ MERTEBEDEN FONKSİYONEL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIM DAVRANIŞI

Adil KAYMAZ

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Ercan TUNÇ

Bu tez çalışmasında, öncelikle ikinci mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemler (FDD ler) ve bu denklemlerin çözümlerinin salınım davranışları üzerine yapılan çalışmaların tarihsel süreçte izlediği yol anlatılmıştır. İkinci bölümde FDD ler ve bu denklemlerin çözümlerinin salınımına dair tanım, sınıflandırma ve uygulamaları konusunda bilgiler verilip, FDD ler ve adi diferensiyel denklemlerin (ADD lerin) çözümlerinin salınım davranışlarının farklılıkları vurgulanmıştır. Bölüm sonunda ise literatürde yer alan ikinci mertebeden farklı tip FDD sınıflarının çözümlerinin salınım davranışı üzerine yapılan çalışmalara örnekler verilmiştir. Tezde kullanılan materyal ve yöntem bilgisinin yer aldığı üçüncü bölümün ardından bulgular ve tartışma başlıklı dördüncü bölüm gelmektedir. Bu bölümde sırasıyla, ikinci mertebeden damping terimli lineer nötral, yarı lineer nötral ve lineer karma nötral FDD sınıflarının çözümlerinin salınımına dair yeter şartlar sunulmuştur. Her alt bölümün sonunda verilen örnekler ile elde edilen sonuçların önemi ve uygulanabilirliği gösterilmiştir. Beşinci bölümde tezde kullanılan yöntemler ve elde edilen bulgularla ne tür genellemelere gidilebileceğine değinilmiş olup bu tezden hareketle gelecekteki çalışmalarda yer alabilecek FDD sınıflarına dair tavsiyelerde bulunulmuştur. Kaynaklar adlı son bölümle birlikte tez tamamlanmıştır.

2021, 88 sayfa

**ANAHTAR KELİMELEER:** Damping terim, Fonksiyonel diferensiyel denklem, İkinci mertebe, Nötral diferensiyel denklem, Salınım.



## ABSTRACT

Ph.D. Thesis

### OSCILLATION BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF SECOND ORDER FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Adil KAYMAZ

Tokat Gaziosmanpasa University  
Institute of Graduate Studies  
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Ercan TUNÇ

In this thesis, firstly, the path in the historical process of the second order functional differential equations (FDEs) and the studies on the oscillation behaviors of their solutions are explained. In the second chapter, giving the information about the definitions, the classifications and the applications of the FDEs and the oscillation of their solutions, the differences between the oscillatory behavior of the solutions of FDEs and ordinary differential equations (ODEs) are highlighted. At the end of the chapter, some examples about the studies on the oscillation behavior of the solutions of different types second-order FDE classes in the literature are given. After the third section, which includes the material and methodological information used in the thesis, the fourth chapter titled findings and discussion follows. In this chapter, the sufficient conditions about the oscillation of the solutions of the three different FDE classes, namely, second order linear neutral, half-linear neutral and linear mixed neutral with damping terms presented, respectively. The importance and applicability of the results obtained are shown with the examples given at the end of each subsection. In the fifth chapter what kind of generalizations can be achieved through the findings obtained and the methods used in this work has been mentioned. Also based on this thesis, some recommendations regarding the FDE classes in the forthcoming studies have been made. The thesis has been completed with the last chapter titled as the references.

2021, 88 pages

**KEYWORDS:** Damping term, Functional differential equations, Neutral differential equations, Oscillation, Second order.





## İÇİNDEKİLER

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖZET . . . . .                                                                         | i   |
| ABSTRACT . . . . .                                                                     | iii |
| ÖNSÖZ . . . . .                                                                        | vi  |
| SİMGE ve KISALTMALAR . . . . .                                                         | vii |
| 1. GİRİŞ . . . . .                                                                     | 1   |
| 2. LİTERATÜR ÖZETLERİ ve KURAMSAL TEMELLER . . . . .                                   | 7   |
| 2.1 FDD lerin Tanımı ve Uygulamaları . . . . .                                         | 7   |
| 2.2 FDD lerin Sınıflandırması . . . . .                                                | 12  |
| 2.3 Salınım Tanımı ve ADD lerin Salınım Teorisine Dair Kısa Bir Not . . .              | 15  |
| 2.4 ADD ve FDD lerin Çözümlerinin Salınımlarının Karşılaştırılması . .                 | 18  |
| 2.5 FDD lerin Salınımına Dair Literatürde Yer Alan Çalışmalara Bazı Örnekler . . . . . | 23  |
| 3. MATERYAL ve YÖNTEM . . . . .                                                        | 28  |
| 3.1 Materyal . . . . .                                                                 | 28  |
| 3.2 Yöntem . . . . .                                                                   | 28  |
| 4. BULGULAR ve TARTIŞMA . . . . .                                                      | 29  |
| 4.1 İkinci Mertebeden Damping Terimli Lineer NDD lerin Salınımı . . .                  | 29  |
| 4.1.1 Giriş . . . . .                                                                  | 29  |
| 4.1.2 $\sigma(t) \leq \tau(t)$ için salınım sonuçları . . . . .                        | 31  |
| 4.1.3 $\sigma(t) \geq \tau(t)$ için salınım sonuçları. . . . .                         | 38  |
| 4.1.4 Örnekler . . . . .                                                               | 40  |
| 4.2 İkinci Mertebeden Damping Terimli Yarı-Linear NDD lerin Salınımı .                 | 42  |
| 4.2.1 Giriş . . . . .                                                                  | 42  |
| 4.2.2 Salınım sonuçları . . . . .                                                      | 44  |
| 4.2.3 Örnekler . . . . .                                                               | 57  |
| 4.3 İkinci Mertebeden Damping Terimli Linear Karma NDD lerin Salınımı                  | 60  |
| 4.3.1 Giriş . . . . .                                                                  | 60  |
| 4.3.2 $p_1(t) > 0$ ve $p_2(t) \geq 1$ Durumunda salınım sonuçları . . . . .            | 64  |
| 4.3.3 Örnek . . . . .                                                                  | 69  |
| 5. SONUÇ ve ÖNERİLER . . . . .                                                         | 71  |
| KAYNAKLAR . . . . .                                                                    | 73  |
| ÖZGEÇMİŞ . . . . .                                                                     | 77  |

## ÖNSÖZ

Bu tezin oluşmasında, tez konusu seçimi başta olmak üzere, tezin yürütülmesi ve sonuçlandırılması aşamalarındaki katkı ve destekleriyle her daim yanımda olan, tez danışmanım ve değerli hocam Prof. Dr. Ercan TUNÇ'a derin saygı ve şükranlarımı sunuyorum.

Hem bilimsel birikimi hem de insancıl yanıyla bizim için çok değerli olan ve ihtiyaç duyduğumuz her an desteğini eksik etmeyen sevgili hocamız Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU'na da bu vesileyle teşekkür etmek istiyorum.

Özel ve eğitim hayatım boyunca dostluklarıyla gurur duyduğum ve akademik çalışmalarım da örnek aldığım tez izleme komitemin değerli üyeleri, Doç. Dr. Ahmet ALTÜRK, Dr. Öğr. Üyesi Orhan ÖZDEMİR ve merhum hocamız Dr. Öğr. Üyesi Osman ÖZDEMİR'e de yardımları için minnettarım.

Bu teze birlikte, öğrencilik hayatımın en başından bugüne kadar üzerimde emeği olan tüm hocalarıma ve doktoram süresince desteklerini eksik etmeyen başta sabırlı eşim Filiz olmak üzere, aile üyelerimin her birine de ayrı ayrı teşekkür ederim.

**Adil KAYMAZ**

**Eylül 2021**

## SİMGE ve KISALTMALAR

| Simgeler           | Açıklamalar                                        |
|--------------------|----------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$       | Reel sayılar kümesi                                |
| $\mathbb{R}^+$     | Pozitif reel sayılar kümesi                        |
| $\mathbb{Q}$       | Rasyonel sayılar kümesi                            |
| $C$                | Sürekli fonksiyonlar uzayı                         |
| $C^1$              | Sürekli türevlenebilen fonksiyonlar uzayı          |
| $C^2$              | İki defa sürekli türevlenebilen fonksiyonlar uzayı |
| $\sup$             | Supremum                                           |
| $\limsup$          | Limit superior / supremum                          |
| $C(X, \mathbb{R})$ | Reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı            |

| Kısaltmalar  | Açıklamalar                                |
|--------------|--------------------------------------------|
| $ADD$        | Adi diferensiyel denklem                   |
| $DD$         | Diferensiyel denklem                       |
| $FDD$        | Fonksiyonel diferensiyel denklem           |
| $GFDD$       | Gecikmeli fonksiyonel diferensiyel denklem |
| $GNDD$       | Gecikmeli nötral diferensiyel denklem      |
| $\dot{I}FDD$ | İleri fonksiyonel diferensiyel denklem     |
| $\dot{I}NDD$ | İleri nötral diferensiyel denklem          |
| $\dot{I}D$   | İntegral denklem                           |
| $KFDD$       | Karma fonksiyonel diferensiyel denklem     |
| $KNDD$       | Karma nötral diferensiyel denklem          |
| $KDD$        | Kısmi diferensiyel denklem                 |
| $NDD$        | Nötral diferensiyel denklem                |
| $NFDD$       | Nötral fonksiyonel diferensiyel denklem    |

## 1. GİRİŞ

Pek çok uygulamada, ele alınan sistemin gelecekteki durumunun geçmiş durumlarından bağımsız olarak yalnızca mevcut durumuyla belirlendiği varsayılır. Ayrıca ele alınan sistemin, mevcut durumun ve bu durumdaki değişim oranını içeren bir denklemle yönetildiği varsayılıyorsa, bunun için akla ilk olarak genellikle ADD ya da kısmi diferensiyel denklem (KDD) gelmektedir. Ne var ki daha dikkatli bir incelemede sistemin durumunun geçmişten bağımsız ve sadece mevcut durumuyla belirlendiğini düşünmek, gerçek duruma sadece bir ilk yaklaşım olduğu ve daha gerçekçi bir modelin sistemin geçmiş durumunu (en azından bir kısmını) da içermesi gerektiği ortaya çıkar. Ayrıca, bazı problemlerde sistemin geçmişle bağının olmaması anlamsızdır. Bu durum bir süredir bilinmesine rağmen bu şekildeki sistemlerin teorisi kapsamlı olarak son yıllarda gelişmiştir. Aslında Volterra'ya [1928] kadar, geçen iki yüzyıl boyunca elde edilen sonuçların çoğu, bazı özel denklemlerin çok spesifik özellikleriyle ilgilidir (Hale ve Lunel, 1991).

Etkileri olan sistemler (ya da gecikmeli sistemler) teorik olarak çok ilgi çekicidir ve uygulamaları göz önüne alındığında önemli bir sınıf oluştururlar. Sistemlerin bu sınıfı FDD ler ile tanımlanır. Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerinin, bağımsız değişkenin farklı değerlerine bağlı olarak ortaya çıktığı FDD lerin ilk olarak 1700 lü yıllarda Euler, Bernoulli, Lagrange, Laplace, Poisson ve diğerleri tarafından ele alındığı bilinmektedir. Bu matematikçiler için FDD lerin kaynaklarını çeşitli geometri problemleri oluşturmaktaydı (Kolmanovskii ve Nosov, 1986).

Bu yıllarda Johann Bernoulli tarafından özel bir yayılım problemindeki titreşen kabloyla bağıntılı olarak düşünülen

$$y'(t) = y(t - 1)$$

denklemini, bilinen ilk FDD dir (Răsvan, 2006).

1800 ler ve 1900 lerin başına kadar FDD ler üzerine nadir olan çalışmalar 1930 ve 1940 lara gelindiğinde kökten bir değişim göstermiştir. Bu yıllarda önemli bir dizi bilimsel ve teknik problemler, tanımlamalarında var olan farklı gecikmelerin

hesaba katılmasını gerektirdi. Bu tipin ilk problemleri Volterra (viscoelasticity, 1909; avcı-av modelleri, 1928-1931), Kostyzin (matematiksel biyoloji problemleri, 1934), Callender ve Stevenson (gecikmeli sistemlerde kararsızlık, 1936), mühendislikte bir editoryal makale (gecikmenin sönümlenme-damping etkisi, 1937), Gorelik (mikrodalga salınım, 1939), Voznesensky ve Solodovnikov (türbin kararlılığında hidroşokun etkisi, 1934, 1941), Bogolov (bir hidroelektrik santrali için geri bildirim sistemleri, 1941), Sievert (hücrelerin x-ray ışınlamasına reaksiyonları, 1941), Minorsky (gemi sabitleme, 1942), Andronov ve Mayer (geri bildirim sistemlerinde gecikme süresi, 1946), Kabakov ve Sokolov (buhar basıncı için kontrol prosesi, 1946), Gerasimiv (ısı transferinde geri bildirim sistemleri, 1949) gibi pek çok araştırmacı tarafından dikkate alındı. Uygulamada bu denli önemli problemlerin ortaya çıkması çok iyi bilinmeyen bu denklemlerin incelenmesi için matematikçilerin yoğun ilgisini uyandırdı ve 1950 lerde FDD teorisinin hızlı gelişimi başlamış oldu. Myshkis'in 1949 yılındaki makalesi FDD lerin gelişimi üzerinde önemli bir etkiye sahipti. Myshkis'in bu çalışmasında başlangıç değer problemi ilk kez doğru bir şekilde formüle edildi. Myshkis, lineer gecikmeli fonksiyonel diferensiyel denklemlerin (GFDD lerin) genel bir sınıfını tanımlayıp, çözümlerinin bazı temel özelliklerini çalıştı. Bu sonuçların yer aldığı kitabı tamamıyla GFDD teorisine adanan ilk kitap olmuştur (Kolmanovskii ve Nosov, 1986).

DD lerin kalitatif teorisi; denklemlerin analitik çözümlerini bulmaksızın çözümlerin davranışının çalışılmasını ifade eder. Çeşitli diferensiyel denklem (DD) türlerinin kalitatif teorisinin incelenmesine 1660 lı yıllarda kalkülüsün doğuşuyla birlikte başlanmış olsa da, DD ler için kalitatif teorisinin başlangıcı 1880 lerde Henri Poincare ve Alexandr M. Lyapunov'la ilişkilendirilir (Mawhin, 1996). İyi bilindiği üzere, tüm lineer ve non lineer DD lerin çözümlerini nümerik çözümler haricinde bulmak genellikle mümkün değildir. Dahası FDD ler, integral denklemleri (İD leri), KDD ler ve kesirli DD lerin çözümlerini bulmak ADD lerin çözümlerini bulmaktan çok daha zordur. Bu nedenle dolaylı metotlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu yüzden çözümlerin analitik ifadesi olmadığında DD lerin çözümlerinin kalitatif davranışı hakkında bilgi edinmek çok önemlidir. FDD lerin çözümlerinin salınımlı veya salınımsız oluşu da

kalitatif teoride önemli ölçüde ilgi gören problemlerin başında gelmektedir (Tunç ve ark., 2016).

Salınım teorisi ise 1836 da J. C. F. Sturm'un bir makalesinde yer vermesi ile ortaya çıkmış ve DD lerin kalitatif teorisinde yepyeni bir araştırma konusu olmuştur. O güne kadar DD teorisi öncelikli olarak verilen bir DD in çözümlerini bulma üzerineydi ve bundan dolayı çok sınırlıydı. Bu durumun aksine Sturm'un temel fikri, çözümlerin geometrik özelliklerini (işaret değişikliği, sıfırları, sınırları, salınımı gibi) çözümlerin kendilerinden değil, direkt olarak DD in kendisinden elde etmektir. Bu tarihten itibaren ADD lerin salınım teorisi büyük bir gelişim gösterdi. Günümüzde ise tutarlı ve kendine yeten bir alan olarak kabul edilen DD lerin kalitatif teorisi, esas olarak FDD lerin çözüm özelliklerinin çalışılmasına yönelmiş durumdadır (Grace ve Jadlovská, 2017).

FDD lerin farklı sınıflarının çözümlerinin asimptotik ve salınım özellikleri için yeter şartlar elde etme problemleri de bir çok araştırmacı için uzun süre ilgi çekici olmuştur. Bunun nedeni özellikle FDD lerin bilimin tüm alanlarındaki sayısız sürecin modellenmesinde yeterli olduğunun düşünülmesidir. Nötral fonksiyonel diferensiyel denklemler (NFDD ler) veya kısaca nötral diferensiyel denklemler (NDD ler) ise FDD sınıflandırmasında önemli bir yere sahiptir. NDD, bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin hem sapma argümentli hem de sapma argümentsiz olarak görüldüğü bir denklemdir. Bu tip denklemlerin çözümlerinin kalitatif özelliklerinin incelenmesi teorik ilginçliğinin yanı sıra kayda değer pratik bir öneme de sahiptir. Bu önem; NDD lerin kayıpsız iletim hatları içeren elektrik ağları ile ilgili problemler başta olmak üzere, elastik çubuğa eklenmiş titreşen kütlelerin çalışmalarında veya zaman gecikmeli çok çeşitli problemlerin çözümlerinde ortaya çıkmasından ileri gelmektedir (Grace ve Jadlovská, 2017).

Bu tezin konusu, yukarıda anlatıldığı gibi, DD lerin kalitatif teorisinde aktif bir şekilde çalışılan ve FDD lerin çözümlerinin salınım davranışı konusunun bir alt başlığı sayılabilecek "ikinci mertebeden FDD lerin çözümlerinin salınım davranışdır". Bu tezle ikinci mertebeden FDD lerin çözümlerinin salınımına ilişkin, yeni yeter şartlarla yeni salınım sonuçları sunularak literatüre katkı sağlanmıştır. Ayrıca elde

edilen sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlar ile karşılaştırılarak bu bulguların önemi detaylı bir şekilde vurgulanmıştır.

Tezin Yapısı:

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, bilhassa 20. yy. da çeşitli matematiksel modellemelerinde FDD lerle karşılaşan araştırmacıların ele aldıkları konulara dair örnekler verilmiştir. Ardından DD lerin kalitatif teorisi ve bu alanın çalışma konuları içerisinde yer alan FDD lerin çözümlerinin salınımlılık davranışı çalışmalarının doğuşu ve özellikle NDD lerin uygulamalardaki önemine değinilmiş olup tezin yapısı ve içeriği hakkında kısa bir bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde bir FDD in nasıl oluşturulduğu bir örnekle anlatılmış, araştırmacıların üzerinde çalıştığı ve modellemelerinde karşılarına çıkan çeşitli FDD lere örnekler verilmiştir. Sonrasında ise bir DD in çözümünün salınım tanımı verilerek ADD lerin çözümlerinin salınım teorisi çalışmalarının izlediği yola dair kısa bir bilgi sunulmuştur. Ardından FDD lerde görülen sapma argümentinin ADD lerinkinden farklı olarak denklemin çözümlerinin salınım davranışına yaptığı etki verilen örneklerle gösterilmiştir. Bu bölümün son kısmında ise 2. mertebeden çeşitli FDD sınıflarının çözümlerinin salınım davranışları üzerine yayımlanmış bazı makalelere örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölüm tezde kullanılan materyallerin tanıtımının ve tezde elde edilen bulgular için uygulanan yönteme dair kısa bir bilginin yer aldığı bölümdür.

Tezin orjinal kısımlarının yer aldığı bölüm olan "Bulgular ve Tartışma" adlı dördüncü bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Bu bölümler ve içerikleri şu şekildedir:

Birinci alt bölüm, aynı zamanda 2019 yılında *On oscillation of second-order linear neutral differential equations with damping term* adıyla *Dynamic Systems and Applications*, 28, no.2, 289–301 de yayımlanan makalemizde yer alan;

$$z(t) = x(t) + p(t)x(\tau(t))$$

olmak üzere, ikinci mertebeden damping terimli

$$z''(t) + r(t)z'(t) + q(t)x(\sigma(t)) = 0, \quad t \geq t_0 > 0,$$

lineer NDD sınıfının çözümlerinin salınım davranışını incelediğimiz bölümdür (Tunç ve Kaymaz, 2019a).

İkinci alt bölüm, yine 2019 yılında *Oscillatory behavior of second-order half-linear neutral differential equations with damping* adıyla *Advances in Dynamical Systems and Applications*, volume 14, number 2, 213-227 de yayımlanmış;

$$z(t) = x(t) + h(t)x(\tau(t))$$

ve

$$\alpha \geq 1$$

iki pozitif tek sayının oranı olmak üzere ikinci mertebeden damping terimli

$$(r(t)(z'(t))^\alpha)' + p(t)(z'(t))^\alpha + q(t)f(t, x(\sigma(t))) = 0, \quad t \geq t_0 > 0,$$

yarı-linear NDD sınıfının çözümlerinin salınım davranışını ele aldığımız makaleden oluşmaktadır (Tunç ve Kaymaz, 2019b).

Üçüncü alt bölüm ise,

$$z(t) = x(t) + p_1(t)x(\tau_1(t)) + p_2(t)x(\tau_2(t))$$

olmak üzere

$$(r(t)z'(t))' + p(t)z'(t) + q(t)x(\sigma(t)) = 0, \quad t \geq t_0 > 0,$$

ikinci mertebeden damping terimli lineer karma NDD sınıfının çözümlerinin salınımı üzerine; *Oscillation of damped second-order linear mixed neutral differential equations*



adıyl 2021 yılında *Monatshefte für Mathematik*, volume 194, issue 1, 85-104 de yayımladığımız makalenin bir kısmını sunduğumuz bölümdür (Tunç ve Kaymaz, 2021).

Sonuç ve Öneriler adını verdiğimiz beşinci bölümde, tezde yer alan FDD sınıflarının çözümlerinin salnım davranışlarına ek olarak ne tür ne tür farklı denklem sınıflarının salınımına dair yeni çalışmalar yapılabileceği belirtilmiştir. Ayrıca çalışmada yer alan şartların bazılarının değiştirilmesi suretiyle de yeni salnım kriterleri elde edilebileceği vurgulanmıştır.

Altıncı bölüm ise tezimizde kullandığımız kitap, makale ve tezler için referansların yer aldığı Kaynaklar bölümüdür.

## 2. LİTERATÜR ÖZETLERİ ve KURAMSAL TEMELLER

### 2.1 FDD lerin Tanımı ve Uygulamaları

Bilindiği üzere ADD ler bir ve aynı argüment değeri için bilinmeyen fonksiyon ve onun bazı türevlerini ihtiva eden denklemlerdir.

Örneğin;

$$F(x(t), x'(t), x''(t)) = 0,$$

$$x''(t) + 3x'(t) = 0$$

denklemleri ikinci mertebeden kapalı ve açık formdaki ADD örnekleridir.

ADD, bilinmeyen fonksiyon ve denklemdaki türevlerinin aynı  $t$  anındaki değerlerini içeren bir denklem iken FDD ler bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin, bağımsız değişkenin farklı değerleriyle verildiği denklemlerdir. Bu anlamda FDD ler ADD lerin bir genelleştirmesidir. Literatürde bu denklemlere aynı zamanda sapma (deviating) argümentli diferensiyel denklemler de denmektedir (Zafer, 1992).

Örnek olarak

$$x'(t) = x(t-1) + x(t/3) + 1$$

ve

$$x''(t) + x''(t+3) - x(t) = 0$$

denklemleri sırasıyla birinci ve ikinci mertebeden FDD lerdir.

Pek çok uygulamada sistemin gelecekteki durumu için, geçmişteki durumundan bağımsız olduğu kabul edilerek, sadece mevcut durumun belirleyici olduğu düşünülür. Dolayısıyla böyle bir sistem bir ADD in çözümleri tarafından tanımlanabilir. Ancak geçmişin, gelecek üzerinde önemli bir biçimde etkisi olursa, böyle durumlarda sistemin en iyi şekilde tanımlanması için bir FDD kullanılır (Zafer, 1992).

Bir sürecin daha önceki zamanlardaki durumları nasıl olur da bu sürecin mevcut durumunu direkt olarak etkiler? İyi bilinmektedir ki her bir anda, nesne sadece o andaki durumu bilmekte ve yalnız buna tepki vermektedir. Malzemelerin hafızasını ya da bir insanı dikkate aldığımızda, sadece mevcut andaki hafıza durumunu göz önünde bulundurmalıyız. Bu durumu basit bir örnekle ele alalım (Kolmanovskii ve Myshkis, 1999).

Duş sırasında,  $T$  sıcaklığındaki suyu istediği  $T_i$  sıcaklığına getirmek için sıcak ve soğuk su girişi olan bir karıştırıcı üzerindeki kolu sağa ve sola hareket ettirmesi gereken bir kişiyi düşünelim. Kabul edelim ki karıştırıcıdan çıkan su sıcaklığındaki  $\Delta T$  değişimi, bir  $k$  sabitiyle, kolun hareket ettirilmesindeki  $\Delta\alpha$  açısı ile orantılı olsun.  $T_\zeta(t)$ , karıştırıcıdan çıkan suyun sıcaklığını gösterecek ve  $h$  sabiti de karıştırıcıdan çıkan suyun duştaki kişinin başına ulaşmaya kadar geçen süre olsun. Kabul edelim ki kolun döndürülme oranı, bir  $\mu$  sabitiyle, kişi tarafından algılanan su sıcaklığının  $T_i$  den sapması ile orantılı olsun. Kişi  $t$  anında karıştırıcıdan  $t - h$  anında çıkan suyun sıcaklığını hissettiği için,

$$\alpha'(t) = -\mu[T_\zeta(t - h) - T_i]$$

buluruz. Bu ise  $T_\zeta$  sıcaklığı için şu şekilde bir eşitlik verir:

$$T'_\zeta(t) = -k\mu[T_\zeta(t - h) - T_i]$$

Bu da tipik bir (gecikmeli) FDD dir (Kolmanovskii ve Myshkis, 1999).

Bu örneğin ardından aşağıda vereceğimiz diğer örneklerle, araştırmacıların karşılaştıkları farklı problemlerin FDD lerin çeşitlenmesi üzerindeki etkilerini göreceğiz.

Geçmiş bağımlılığın fonksiyonun türevinde değil sadece kendisinde görüldüğü bir diferensiyel denklem, geçmiş bağımlılığı olan FDD lerin en basit tipidir. Bu tipteki FDD lere gecikmeli fonksiyonel diferensiyel denklem (GFDD) denir (Hale ve Lunel, 1991).

Örnek olarak,

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t-r))$$

verilebilir. Bu FDD in kontrol problemleri üzerindeki fiziksel uygulamalarının incelenmesi için Minorsky'e bakılabilir (Hale ve Lunel, 1991).

Lord Cherwell asal sayıların dağılımı üzerine yaptığı bir çalışmasında

$$x'(t) = -\alpha x(t-1)[1+x(t)]$$

GFDD i ile karşılaşmıştır. Bu denklemin varyasyonları ayrıca tek bir türün gelişim teorisindeki modelleri olarak da kullanılmıştır (Hale ve Lunel, 1991).

Dunkel tek bir türün gelişimine dair daha genel bir FDD i

$$x'(t) = -\alpha \left[ \int_{-1}^0 x(t+\theta) d\eta(\theta) \right] (1+x(t))$$

önermiştir (Hale ve Lunel, 1991).

Bu çalışmalardan çok daha önceleri Volterra, avcı-av modelleri çalışmasında, denklemlerdeki tüm sabitler ve fonksiyonlar negatif olmayan,  $x$  ve  $y$  sırasıyla avcı ve av sayılarını göstermek üzere;

$$\begin{aligned} x'(t) &= \left[ \epsilon_1 - \gamma_1 y(t) - \int_{-r}^0 F_1(\theta) y(t+\theta) d\theta \right] x(t), \\ y'(t) &= \left[ -\epsilon_1 + \gamma_2 x(t) + \int_{-r}^0 F_2(\theta) x(t+\theta) d\theta \right] y(t) \end{aligned}$$

integro-diferensiyel denklemlerini incelemiştir (Hale ve Lunel, 1991).

Benzer modeller için, Wangersky ve Cunningham, avcı-av modelleri için ayrıca;

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha x(t) \left[ \frac{m-x(t)}{m} \right] - bx(t)y(t), \\ y'(t) &= -\beta y(t) + cx(t-r)y(t-r) \end{aligned}$$

denklemlerini de kullanmışlardır (Hale ve Lunel, 1991).

Bitkilerin, özellikle ayçiçeği olmak üzere, çevre mutasyonunu açıklama girişimlerinde Israelson ve Johnsson,  $\alpha$  bitkinin baş kısmının dik eksenle yaptığı açı olmak üzere, bir model olarak

$$\alpha'(t) = -k \int_1^\infty f(\theta) \sin \alpha(t - \theta - t_0) d\theta$$

denklemini kullanmıştır (Hale ve Lunel, 1991).

Uygun varsayımlarla

$$x'(t) = \sum_{i=0}^N A_i x(t - T_i)$$

bir boyanın merkezi bir depodan karışımını tanımlamak için elverişli bir model oluşturur (Hale ve Lunel, 1991).

Bir büyükşehirde kızamık hastalığının yayılmasını tanımlayan bir girişimde London ve Yorke,  $S(t)$ ,  $t$  anında duyarlı bireylerin sayısı,  $\gamma$  nüfusa katılan bireylerin oranı,  $\beta(t)$  nüfusun karakteristik fonksiyonu olmak üzere;

$$S'(t) = -\beta(t)S(t)[2\gamma + S(t - 14) - S(t - 12)] + \gamma$$

denklemini ile karşılaşmışlardır (Hale ve Lunel, 1991).

$$x'(t) = - \int_{t-r}^t a(t-u)g(x(u))du$$

denklemini ise Ergen tarafından nükleer reaktör yakıtının bir dolaşım teorisinde karşılaşılmış, Levin ve Nohel tarafından da kapsamlı şekilde çalışılmıştır (Hale ve Lunel, 1991).

Triyot osilatöründeki iletim zamanını göz önüne alan Rubanik,  $\tau$  gecikme argümentli

$$x''(t) + \alpha x'(t) - f(x(t-r))x'(t-r) + x(t) = 0$$

Van der Pol denklemini ile karşılaşmıştır (Hale ve Lunel, 1991).

Salınım sistemleri arasında gecikmeli bağlantıları ele alan Starik ise

$$\begin{aligned}
y''(t) + [w^2 + \epsilon\lambda \sin \phi(t - r_1)]y(t) &= -\epsilon[hy'(t) + \gamma y^3(t - r^2)] \\
I\phi''(t) &= \epsilon[L(\phi'(t)) - H(\phi(t) - \sigma_1^2 y^2(t - r_3) \cos \phi(t)) \\
&\quad - \sigma_2 \sin \phi(t) - \sigma_3 \cos \phi(t)]
\end{aligned}$$

sistemini ele almıştır (Hale ve Lunel, 1991).

Optimal kontrol teorisinde Krasovskii

$$\begin{aligned}
x'(t) &= P(t)x(t) + B(t)u(t) \\
y(t) &= Q(t)x(t) \\
u'(t) &= \int_{-r}^0 d[\eta(t, \theta)]y(t + \theta) + \int_{-r}^0 d[\mu(t, \theta)]u(t + \theta)
\end{aligned}$$

sistemini kapsamlı bir şekilde çalışmıştır (Hale ve Lunel, 1991).

Boyutsuz değişkenlerde bir vakum tüpü içindeki salınımın modellendiği bir denklem örneği olarak da

$$x''(t) + 2rx'(t) + w^2x(t) + 2qx'(t)(t - 1) = \epsilon(x'(t - 1))^3$$

damping terimli (birinci mertebeden türevi içerdiği için) denklemi verilebilir (Kolmanovskii ve Myshkis, 1999).

Son olarak da gecikmeli bir oto jeneratörünün ve ikinci dereceden filtrelerin dinamiği

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + x(t) = f(x(t - h))$$

denklemleri ile verilmiştir (Kolmanovskii ve Myshkis, 1999).

FDD lerin uygulamadaki bu örneklerinin dışında gecikme (ya da ileri) argümentinin bağımsız değişkende ortaya çıktığı gibi aynı zamanda türevinde de görüldüğü denklemler mevcuttur. Bunlara NFDD ya da NDD adı verilir. Aralarında bağlantıları olan iki ya da daha çok basit salınımlı sistem çalışmalarında ortaya çıkan bu tür problemleri çalışmak daha zordur. NDD lerin ortaya çıktığı problemler için de şu örnekler verilebilir (Hale ve Lunel, 1991).

Rubanik bir elastik çubuğa bağlı titreşen kütleler çalışmasında

$$\begin{aligned}x''(t) + w_1^2 x(t) &= \epsilon f_1(x(t), x'(t), y(t), y'(t)) + \gamma_1 y''(t - r), \\y''(t) + w_2^2 x(t) &= \epsilon f_2(x(t), x'(t), y(t), y'(t)) + \gamma_2 x''(t - r)\end{aligned}$$

denklemleri ile karşılaşmıştır (Hale ve Lunel, 1991).

Elektrodinamikte çarpışma problemi çalışmasında ise Driver,

$$g(t) \leq t$$

olmak üzere,

$$x'(t) = f_1(t, x(t), x(g(t))) + f_2(t, x(t), x(g(t)))x'(g(t))$$

tipindeki sistemleri ele almıştır (Hale ve Lunel, 1991).

Genel olarak Euler denklemleri bazı uygun sınır şartları ile

$$x''(t) = f(t, x(t), x(t - r), x'(t), x'(t - r), x''(t - r))$$

formundadır (Hale ve Lunel, 1991).

Bu örneklerle de görüldüğü gibi uygulamadaki farklı problemlerin modellemelerinde büyük oranda FDD ler ile karşılaşilmektedir. Bu örneklerin benzerleri ve de farklı türdeki pek çok FDD örneği için, okuyucuya Kolmanovskii ve Myshkis (Kolmanovskii ve Myshkis, 1999), Kolmanovskii ve Nosov (Kolmanovskii ve Nosov, 1986) ve Hale ve Lunel (Hale ve Lunel, 1991) referans olarak verilebilir.

## 2.2 FDD lerin Sınıflandırması

Önceki kısımda örneklerini de verdiğimiz gibi araştırmacıların çalışmalarındaki problemlerin modellemelerinde karşılarına çok değişik türden FDD ler çıkmaktadır. Problemin cinsine göre sapma argümenti bazen fonksiyonun kendisinde, bazen fonksiyonun türevinde bazen ise her ikisinde de bulunur. FDD üzerinde yapılan

Çalışmaların her denklem türüne göre farklılıklar göstermesi FDD leri doğru şekilde sınıflandırmanın gerekliliğini ortaya koymaktadır.

FDD ler bağımlı değişken ve türevlerindeki değişken sapmalarına göre farklı tiplerde isimlendirilirler.

Buna göre:

Gecikmeli (delayed) fonksiyonel diferensiyel denklemler (GFDD ler), denklemde bulunan bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevinin, argmentin bir tek değerine bağlı olduğu ve bu argmentin denklemde görülen bilinmeyen fonksiyonun ve türevlerinin argmentlerinden daha küçük olmadığı denklemlerdir (Zafer, 1992).

Örneğin;

$$x'(t) = x(t - 5) + x(t/4) + 3$$

$$2x''(t) + x(t - \pi) = 0$$

denklemleri GFDD lerdir.

İleri (advanced) fonksiyonel diferensiyel denklemler (İFDD ler), denklemde bulunan bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevinin, argmentin bir tek değerine bağlı olduğu ve bu argmentin denklemde görülen bilinmeyen fonksiyonun ve türevlerinin argmentlerinden daha büyük olmadığı denklemlerdir (Zafer, 1992).

Örneğin;

$$x'(t) + x(t + \pi) + x(t^2 + 1) = 0$$

$$x''(t) + x'(t + 5) = 7x(t) + 10$$

denklemleri İFDD lerdir.

Karma (mixed) fonksiyonel diferensiyel denklemler (KFDD ler), denklemde bulunan bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevinin, argmentin bir tek değerine bağlı olduğu ve denklemde görülen diğer argmentlerin bazılarının bu argmentten



daha büyük ve geri kalanlarının da bu argümentten daha küçük olduğu denklemlerdir (Zafer, 1992).

Örneğin;

$$2x'(t) = x(t - \pi) + 3x(t + \pi)$$

$$x''(t) + x'(t - 2) - x(t + 3) = 0$$

denklemleri KFDD lerdir.

Son olarak nötral (neutral, kararsız) diferensiyel denklemler (NDD) ise, denklemde bulunan bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevinin, hem sapma argümentli hem de sapma argümentsiz ortaya çıktığı denklemlerdir (Zafer, 1992).

Örneğin;

$$x'(t) + x'(t - 1) = 2x(t),$$

$$x''(t) + \frac{1}{2}x''(t + \pi) - \frac{1}{4}x(t - \pi) = 0$$

ve

$$z(t) = x(t) + \frac{1}{2}x(t - 1) + \frac{1}{2}x(t + 2)$$

olmak üzere

$$z'(t) + 2z(t) = 5$$

denklemleri de NDD lere örnek olarak verilebilir. NDD ler, denklemlerdeki bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevinde görülen sapma argümentlerine bağlı olarak ayrıca sınıflandırılabilir. Buna göre yukarıdaki ilk denklem gecikmeli nötral diferensiyel denklem (GNDD), ikinci denklem ileri nötral diferensiyel denklem (İNDD) ve üçüncü denklem ise karma nötral diferensiyel denklem (KNDD) sınıfında yer almaktadır (Zafer, 1992).

Bir FDD in  $t$  nin bazı değerlerinin kümesi üzerinde yukarıda anılan denklem sınıflarından birine,  $t$  nin farklı bazı değerlerinin kümesi üzerinde ise bir diğerine ait olması da mümkündür (Zafer, 1992).

Örneğin,

$$x''(t) + x(t) - x(t + \cos t) = 0$$

denklemini,  $\cos t \leq 0$  şartının sağlandığı aralıklarda GFDD,  $\cos t \geq 0$  şartının sağlandığı aralıklarda ise İFDD dir.

### 2.3 Salınım Tanımı ve ADD lerin Salınım Teorisine Dair Kısa Bir Not

DD lerin kalitatif teorisi olarak adlandırılan çalışma alanının önemli konularından biri de diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımdır.

Aşağıdaki vereceğimiz tanım reel değerli bir fonksiyonun salınım tanımıdır. Bu tanım farklı mertebelerden ADD ler ve farklı sınıftaki FDD lerin çözümlerinin salınım tanımı olarak da kullanılmaktadır.

**Tanım 2.3.1.**  $x(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $x(t) \not\equiv 0$  olmak üzere  $x(t)$  fonksiyonunun  $\forall T \geq t_0$  için  $[T, \infty)$  da bir sıfırı varsa  $x(t)$  fonksiyonuna salınımlı aksi halde salınımsızdır denir. Benzer şekilde reel sayıların bir  $\{x_n\}$  dizisi de neticede pozitif ya da negatif olmuyorsa salınımlıdır aksi halde salınımsızdır denir (Zafer, 1992).

Tanımdan da anlaşılacağı gibi aşık olmaya  $(x(t) \not\equiv 0)$  bir  $x(t)$  çözümü için herhangi bir  $t_1 \in [t_0, \infty)$  için  $x(t_2) = 0$  olacak şekilde bir  $t_2 \in [t_1, \infty)$  varsa  $x(t)$  çözümü salınımlı, tüm  $t \in [t_1, \infty)$  için  $x(t) \neq 0$  olacak şekilde bir  $t_1 \in [t_0, \infty)$  varsa  $x(t)$  çözümü salınımsızdır denir. Bir başka deyişle salınımsız bir çözüm neticede ya devamlı pozitif ya da negatiftir.

Bir diferensiyel denklemin çözümlerinin tamamı salınımlı ise denkleme salınımlıdır denir.

Örnek olarak iyi bilinen;

$$x''(t) + x(t) = 0$$

ADD i  $x_1 = \sin t$  ve  $x_2 = \cos t$  gibi salınımlı çözümlere ve

$$x''(t) - x(-t) = 0$$

ADD i ise salınımlı  $x_1(t) = \sin t$  ve salınımsız  $x_2 = e^t + e^{-t}$  çözümüne sahiptir (Ladde ve ark., 1987).

Salınım teorisi, 1836 yılında Sturm'un ısı iletimi problemi çalışmasında salınım kavramını tanıtmıştı. Bu yana ADD lerin kalitatif teorisi içerisinde önemli bir araştırma alanı haline gelmiştir. FDD lerin salınım teorisi, ADD lerin salınım teorisindeki iyi bilinen sonuçların bir şekilde FDD lere taşınmasıyla, ADD lerin salınım teorisinin doğal bir genişlemesi haline almıştır. (Ladde ve ark., 1987).

James S. W. Wong, ikinci mertebeden

$$x''(t) + a(t)x(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.3.1)$$

ADD in çözümlerinin salınım davranışını incelediği makalesinin (Wong, 1969) giriş kısmında (2.3.1) denkleminin çözümlerinin salınım davranışı üzerine yapılan çalışmalara dair şu bilgileri veriyor.

$a(t)$  lokal olarak integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, eğer tüm çözümlerinin  $[0, \infty)$  da keyfi derecede büyük sıfırları varsa (2.3.1) denkleminin salınımlıdır denir. Aksi halde salınımsızdır. Sturm Ayırma Teoreminin sonucu olarak 2. mertebeden homojen (2.3.1) denkleminin çözümlerinin bir tanesi salınımlı ise tüm çözümleri de salınımlı ya da çözümlerinin bir tanesi salınımsız ise tüm çözümleri de salınımsızdır. İkinci mertebeden lineer ADD lerin salınım literatürü muazzamdır. Bu sonuçların ilklerinden biri elbette Sturm'un klasik teoremidir.

(2.3.2) ve (2.3.3) eşitsizlikleri büyük  $t$  değerleri için geçerli olmak üzere;

$$a(t) \geq a_0 > 0 \text{ ise } (2.3.1) \text{ salınımlıdır,} \quad (2.3.2)$$

$$a(t) \leq 0 \text{ ise } (2.3.1) \text{ salınımsızdır.} \quad (2.3.3)$$

Temel karşılaştırma denklemi olarak

$$x''(t) + (1/4t^2)x(t) = 0, \quad (2.3.4)$$

Klasik Euler denklemini kullanan Kneser

$$t^2 a(t) \leq \frac{1}{4} \text{ ise } (2.3.1) \text{ salınımsız,} \quad (2.3.5)$$

$$\text{ve } \epsilon > 0 \text{ olmak üzere } t^2 a(t) \geq \frac{1+\epsilon}{4} \text{ ise } (2.3.1) \text{ salınlıdır} \quad (2.3.6)$$

olduğunu göstermiştir.

Fite salınım için

$$a(t) \geq 0 \text{ ve } \int_0^\infty a(t)dt = \infty \text{ ise } (2.3.1) \text{ salınlıdır,} \quad (2.3.7)$$

şeklinde bir integral kriteri veren ilk kişidir.

Hille (2.3.7) şartını şu şekilde tamamlamıştır:

$$A(t) = \int_t^\infty a(s)ds \quad (2.3.8)$$

olmak üzere, eğer;

$$a(t) \geq 0 \text{ ve } \int_0^\infty a(t)dt < \infty \quad (2.3.9)$$

ise bu durumda

$$tA(t) \leq \frac{1}{4} \text{ ise } (2.3.1) \text{ salınımsız} \quad (2.3.10)$$

$$\text{ve } \epsilon > 0 \text{ olmak üzere } A(t) \geq \frac{1+\epsilon}{4} \text{ ise } (2.3.1) \text{ salınlıdır.} \quad (2.3.11)$$

Daha sonra Wintner  $a(t)$  nin negatif olmama ek şartı olmadan da Fite'nin ifadesinin geçerli olduğunu, yani;

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T a(s)ds = \infty \text{ ise } (2.3.1) \text{ salınlı,} \quad (2.3.12)$$

olduğunu göstermiştir.

Wintner ayrıca,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T a(s) ds < \infty \quad (2.3.13)$$

şartı altında,

$$\int_0^\infty \exp \left( -k \int_0^t A(s) ds \right) dt < \infty, \quad k = 2 \quad \text{ise} \quad (2.3.1) \text{ salınımlı} \quad (2.3.14)$$

ve

$$A^2(t) \leq a(t)/4 \quad \text{ise} \quad (2.3.1) \text{ salınımsız} \quad (2.3.15)$$

olduğunu ispatlamıştır.

Hartman (2.3.14) ün  $k = 4$  için de geçerli olduğunu göstermiştir.

Diğer yandan Opial (2.3.15) i

$$\int_t^\infty A^2(s) ds \leq A(t)/4 \quad \text{ise} \quad (2.3.1) \text{ salınımsız} \quad (2.3.16)$$

ve

$$\int_t^\infty A^2(s) ds \geq ((1 + \epsilon)/4) A(t) \geq 0 \quad \text{ise} \quad (2.3.1) \text{ salınımlıdır,} \quad (2.3.17)$$

şeklinde genişletmiştir.

Mevcut bir DD in çözümlerinin salınıma ilişkin yeter şartların geliştirilmesiyle ilgili olarak matematikçiler tarafından izlenen yola dair bir fikir vermesi açısından önemli bulduğumuz bu bilgiler, FDD lerin çözümlerinin salınım davranışı üzerine yapılan çalışmalarla benzerlik göstermektedir.

## 2.4 ADD ve FDD lerin Çözümlerinin Salınımlarının Karşılaştırılması

FDD lerin çözümlerinin salınım davranışları ADD lerin çözümlerinin salınım davranışlarından oldukça farklıdır. Tezin bu bölümünde vereceğimiz örneklerle, bazı ADD lere eklenen sapma argümentinin oluşturulan yeni FDD lerin çözümlerinin salınım davranışlarında nasıl farklılıklara yol açabileceğini göstereceğiz (Özdemir, 2018).

Bilindiği gibi birinci mertebeden lineer homojen ADD lerin cözümleeri salınımlı değilken birinci mertebeden FDD lerin cözümleeri salınımlı olabirler. Bunun için bilinen basit bir örnekle başlayalım (Ladde ve ark., 1987).

Örneğin, birinci mertebeden lineer

$$x'(t) + x(t) = 0$$

ADD i,  $x = e^{-t}$  gibi salınımsız bir cözümüne sahipken, birinci mertebeden

$$x'(t) + x(t - \frac{\pi}{2}) = 0$$

GFDD i ve yine birinci mertebeden

$$x'(t) - x(t + \frac{\pi}{2}) = 0$$

İFDD i,  $x_1 = \sin t$  ve  $x_2 = \cos t$  şeklinde salınımlı cözümleere sahiptir (Ladde ve ark., 1987).

İkinci mertebeden denklemlere geldiğimizde, Sturm Ayırma Teoreminden bilinmektedir ki ikinci mertebeden lineer homojen ADD lerin cözümleeri aynı karakterdedir (bütün cözümleeri salınımlıdır ya da bütün cözümleeri salınımsızdır). Ne var ki ikinci mertebeden FDD ler için bu durum genellikle doğru değildir.

Daha önce verdiğimiz örnekteki ikinci mertebeden lineer

$$x''(t) + x(t) = 0 \tag{2.4.1}$$

ADD i,  $x_1 = \sin t$  ve  $x_2 = \cos t$  gibi salınımlı cözümleere sahipken bu ADD e sapma argümenti (deviating argument) ilave edilmesiyle elde edilen yeni FDD

$$x''(t) + x(\pi - t) = 0,$$

salınımlı  $x_1 = \sin t$  ve salınımsız  $x_2 = e^t - e^{\pi-t}$  cözümleerine sahip olmaktadır (Ladde ve ark., 1987).

Benzer şekilde başka bir ikinci mertebeden lineer

$$x''(t) - x(t) = 0 \quad (2.4.2)$$

ADD i,  $x_1 = e^t$  ve  $x_2 = e^{-t}$  biçiminde salınımsız çözümlere sahip iken denkleme sapma argümenti eklenmesiyle oluşan yeni FDD i

$$x''(t) - x(t - \pi) = 0$$

$x_1 = \sin t$  ve  $x_2 = \cos t$  şeklinde salınımlı çözümlere sahiptir (Ladde ve ark., 1987).

Bir başka ikinci mertebeden ADD,

$$x''(t) + \frac{1}{2t^2}x(t) = 0$$

$x_1(t) = t \cos(\ln t)$  ve  $x_2(t) = t \sin(\ln t)$  şeklinde salınımlı çözümlere sahiptir. Ancak denkleme sapma argümenti eklenmesiyle oluşan yeni GFDD,  $t > 0$  için

$$x''(t) + \frac{1}{2t^2}x\left(\frac{t}{4}\right) = 0$$

salınımsız bir  $x(t) = \sqrt{t}$  çözümüne sahiptir (Agarwal ve ark., 2003b).

Şimdi de bir FDD de bulunan damping terimin denklemin çözümlerinin salınım davranışı üzerindeki etkilerinin, damping terimin ADD lerin çözümlerinin salınım davranışı üzerindeki etkiden farklı olabileceğini göstermek için şu örneği vermek istiyoruz.

İkinci mertebeden

$$x''(t) + x(t) = 0 \quad (2.4.3)$$

ADD inin bildiğimiz gibi  $x_1 = \sin t$  ve  $x_2 = \cos t$  gibi salınımlı çözümleri vardır. Ancak (2.4.3) denklemine damping terim eklediğimizde

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0 \quad (2.4.4)$$

ADD i  $x_1 = e^t$  ve  $x_2 = te^t$  gibi salınımsız çözümlere sahip olur. Yani eklenen damping terim (2.4.3) ün çözümlerinin salınım davranışını değiştirmiştir (Agarwal ve ark., 2003b).

Ne var ki;

$$x''(t) + x(t + \tau) = 0, \quad \tau > 0 \quad (2.4.5)$$

İFDD i ve damping terim eklenerek elde edilen

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t + \tau) = 0, \quad \tau > 0 \quad (2.4.6)$$

İFDD lerinin her ikisinin de çözümlerinin tamamı salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2003b). Dolayısıyla damping terim (2.4.5) in çözümlerinin salınım davranışını değiştirmemiştir.

Şimdi de,

$$x'(t) = 2x(t) - y(t)$$

$$y'(t) = x(t) + y(t)$$

ADD sistemini göz önüne alalım. Bu denklemin her  $(x(t), y(t))$  çözümünün salınımlı olduğu karakteristik denklem analizinden bilinmektedir (Erbe ve ark., 1995).

Ancak,

$$x'(t) = 2x(t) - y(t - \frac{1}{3} \ln 4)$$

$$y'(t) = x(t - \frac{1}{3} \ln 4) + y(t)$$

GFDD sistemi, salınımsız  $(x(t) = e^{(3/2)t}, y(t) = e^{(3/2)t})$  çözümüne sahiptir. Bu durum gecikme argümentinden kaynaklanmaktadır (Erbe ve ark., 1995).

Eklenen sapma argümentinin NDD lerdeki etkilerini görmek içinde şu örnekleri inceleyelim. Birinci mertebeden,

$$x'(t) + x\left(t - \frac{1}{e}\right) = 0$$



FDD i salınımsız çözümlere sahip olmasına rağmen,  $p \in (0, 1)$  reel bir sabit olmak üzere,

$$(x(t) + px(t-1))' + x\left(t - \frac{1}{e}\right) = 0$$

NDD in bütün çözümleri salınımlıdır (Erbe ve ark., 1995).

Başka bir örnek olarak,

$$x'(t) + x(t-1) = 0$$

GFDD inin çözümleri salınımlı iken iki farklı nötral terim eklenmesi ile oluşan birinci NDD,

$$(x(t) + \frac{1}{2}x(t-1))' + x(t-1) = 0$$

salınımsız, ikinci NDD,

$$(x(t) - \frac{1}{2}x(t-1))' + x(t-1) = 0$$

ise salınımlı çözümlere sahiptir. Dolayısıyla nötral terimin varlığı çözümlere salınım karakteri verebildiği gibi ortadan da kaldırabilmektedir (Erbe ve ark., 1995).

Bu bölümün son örneği, farklı nötral terimlerin ilavesi ikinci mertebeden FDD lerin de çözümlerinin salınım davranışını değiştirebildiğini gösteren şu örnek olacaktır.

İkinci mertebeden,

$$(e^{2t}x'(t))' + \left(e^{2t} + \frac{e^{2t+2}}{2}\right)x(t) = 0 \quad (2.4.7)$$

ADD i ve

$$\left(e^{2t} \left(x(t) + \frac{1}{2e^4}x(t-2)\right)\right)' + \left(e^{2t} + \frac{e^{2t+2}}{2}\right)x(t) = 0$$

NDD i salınımlıdır. Ancak (2.4.7) denkleminde farklı bir nötral terim ilave edilmesiyle oluşan

$$\left(e^{2t} \left(x(t) + \frac{1}{2}x(t-2)\right)\right)' + \left(e^{2t} + \frac{e^{2t+2}}{2}\right)x(t) = 0$$

NDD in salınımlı olmayan  $x(t) = e^{-t}$  çözümü vardır. Bu durum, nötral terimin farklı seçiminden kaynaklanmaktadır (Agarwal ve ark., 2014).

## 2.5 FDD lerin Salınımına Dair Literatürde Yer Alan Çalışmalara Bazı Örnekler

Bu bölümde örnek olması açısından, literatürde yer alan ikinci mertebeden çeşitli FDD sınıflarının çözümlerinin salınım davranışları üzerine yayınlanmış bazı makaleleri okuyucuyla paylaşıyoruz. Araştırmacıların çokça atıfta bulunduğu bu çalışmalarda da görüleceği gibi yazarlar belirttikleri denklem sınıflarının çözümlerinin salınımı için sapma argümentlerine, katsayı fonksiyonlarına veya üstel sabitlerine dair bazı şartlar koymuşlardır. Bu örneklerle birlikte tezimizin sonraki bölümlerinde yer vereceğimiz denklem sınıflarına dair elde ettiğimiz salınım sonuçlarının literatürdeki yerinin daha iyi anlaşılacağını umuyoruz.

S. R. Grace, 1992 yılında Journal of Mathematical Analysis and Applications 168, 306–318 de "*Oscillatory and asymptotic behavior of delay differential equations with a nonlinear damping term*" adıyla yayınladığı makalede,  $n$  çift sayı,

$$f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \quad \text{sürekli bir fonksiyon ve} \quad \sigma \geq \tau$$

olacak şekilde  $\tau$  ve  $\sigma$  negatif olmayan sabitler

olmak üzere,

$$x^{(n)}(t) + f(t, x[t - \tau], x'[t - \sigma]) = 0$$

GFDD ini ele almıştır (Grace, 1992).

Y. V. Rogovchenko, 2001 yılında Nonlinear Analysis 47, 4925–4935 de yayınladığı, "*Oscillatory behavior of nonlinear functional differential equations*" adlı makalesinde  $t \in [t_0, \infty)$  olmak üzere,

$$(r(t)\psi(x(t))x'(t))' + q(t)f(x(t), x(\tau(t))) = 0$$

lineer olmayan FDD inin çözümlerinin salınım davranışını çalışmıştır (Rogovchenko, 2001).

S. H. Saker, P. Y. H. Pang ve R. P. Agarwal, 2003 yılında Dynamic Sys. Appl. 12, 307–322 de "*Oscillation theorems for second order nonlinear functional differential equations with damping*" adıyla yayınladıkları çalışmada,

$$a, p, q, g, \sigma \in \mathcal{C}([t_0, \infty), \mathbb{R}^+), \quad g'(t) > 0, \quad \sigma'(t) > 0, \quad q(t) > 0$$

$$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad u \neq 0 \quad \text{için} \quad uf(u) > 0,$$

$$\text{bazı pozitif } k \text{ sabiti için } \frac{f(u)}{u} \geq k \quad \text{ve} \quad t \geq t_0$$

olmak üzere

$$(a'(t)x'(t))' + p(t)x'(\sigma(t)) + q(t)f(x(g(t))) = 0$$

FDD inin salınımını incelemişlerdir (Saker ve ark., 2003).

Y. V. Rogovchenko ve F. Tuncay, 2009 yılında Taiwanese Journal of Mathematics Vol. 13, No. 6B, pp. 1909–1928 de "*Oscillation theorems for a class of second order nonlinear differential equations with damping*" adıyla yayınladıkları çalışmada,

$$t \geq t_0, \quad r \in \mathcal{C}^1([t_0, \infty); (0, \infty)), \quad p, q \in \mathcal{C}([t_0, \infty); \mathbb{R}),$$

$$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{ve} \quad x \neq 0 \quad \text{için} \quad xf(x) > 0$$

olmak üzere

$$[r(t)\psi(x(t))x'(t)]' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0$$

FDD inin salınım problemini çalışmışlardır (Rogovchenko, 2009).

B.Baculíková, T. Li ve J. Džurina, 2011 yılında Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 74, 1–13 de "*Oscillation theorems for second order neutral differential equations*" adıyla yayınladıkları makalede

$q(t), v(t) \in \mathcal{C}([t_0, \infty)), r(t), p(t), \tau(t), \eta(t), \sigma(t) \in \mathcal{C}^1([t_0, \infty))$  ve

- $r(t) > 0, q(t) > 0, v(t) > 0, 0 \leq p(t) \leq p_0 < \infty;$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty;$
- $\tau'(t) \geq \tau_0 > 0, \tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau, \tau \circ \eta = \eta \circ \tau$

ve makale boyunca  $t \rightarrow \infty$  iken

$$R(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{r(s)} ds \rightarrow \infty$$

olmak üzere ikinci mertebeden

$$(r(t)[x(t) + p(t)x(\tau(t))]')' + q(t)x(\sigma(t)) + v(t)x(\eta(t)) = 0$$

NDD inin çözümlerinin salınım davranışını ele almışlardır (Baculíková ve ark., 2011).

R. P. Agarwal, M. Bohner, T. Li ve C. Zhang, 2014 yılında Annali di Mathematica 193: 1861–1875 de "*Oscillation of second order Emped-Fowler neutral delay differential equations*" adıyla yayınladıkları çalışmada

- $\mathfrak{R}$  bütün pozitif tek tam sayıların oranlarının kümesi olmak üzere,  
 $\alpha, \gamma \in \mathfrak{R};$
- $r \in \mathcal{C}([t_0, \infty), (0, \infty)), p, q \in \mathcal{C}([t_0, \infty), \mathbb{R}), 0 \leq p(t) < 1, q(t) \geq 0$   
ve büyük t ler için  $q(t) \not\equiv 0;$
- $\tau, \sigma \in \mathcal{C}([t_0, \mathbb{R}), \tau(t) \leq t, \sigma(t) \leq t, \lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = 0$  ve  
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$

olmak üzere

$$(r(t)((x(t) + p(t)x(\tau(t)))')^\alpha)' + q(t)x^\gamma(\sigma(t)) = 0, \quad t \geq t_0$$

ikinci mertebeden Emden-Fowler NGDD ini ele almışlardır (Agarwal ve ark., 2014).

S. R. Grace, J. R. Graef ve E. Tunç, 2017 de Miskolc Mathematical Notes, Vol. 18, No.2, pp. 759-769 da "*Oscillatory behavior of second order damped neutral differential equations with distributed deviating arguments*" adlı makaleleri  $y(t) = x(t) + b(t)\phi(x(\tau(t)))$ ,  $0 < a < b$ ,  $\alpha$  pozitif tek sayıların oranı ve  $t \geq t_0 \geq 0$  olmak üzere

$$(r(t)(y'(t))^\alpha)' + p(t)(y'(t))^\alpha + \int_a^b q(t, \tau)f(t, x(g(t, \tau)))d\tau = 0$$

ikinci mertebeden dağılımlı sapma argümentli damping terimli lineer olmayan NDD'inin çözümlerinin salınım davranışı üzerinedir. Yazarlar bu çalışma boyunca şu varsayımları yapmışlardır:

•

$$A(t, t_0) = \exp \left( \int_{t_0}^t \frac{-p(s)}{r(s)} ds \right)$$

olmak üzere  $r(t)$  azalmayan olacak şekilde  $p, r : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  sürekli fonksiyonlar ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \left( \frac{1}{r(s)} A(s, t_0) \right)^{1/\alpha} ds < \infty;$$

- $0 \leq b(t) < 1$  olacak şekilde  $b : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyondur;
- $q : [t_0, \infty) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  sürekli bir fonksiyondur;
- $\tau \in [a, b]$ ,  $t \rightarrow \infty$  iken  $g(t, \tau) \rightarrow \infty$  ve  $g(t, \tau) \leq t$ ,  $g(t, \tau)$   $\tau$  ya göre azalan olacak şekilde  $g : [t_0, \infty) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyondur;
- $u \neq 0$  için  $f(t, u)/u^\alpha \geq \mu$  olacak şekilde pozitif bir  $\mu$  sabiti vardır ve tüm  $u \neq 0$  için  $uf(t, u) > 0$  olacak şekilde  $f(t, u) : [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyondur;
- $u \neq 0$  için  $\phi(u)/u \leq \beta$  olacak şekilde  $0 < \beta < 1$  de bir  $\beta$  reel sayısı vardır ve tüm  $u \neq 0$  için  $u\phi(u) > 0$  olacak şekilde sürekli bir  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu vardır;
- $t \rightarrow \infty$  iken  $\sigma(t) \rightarrow \infty$  ve  $\sigma(t) \leq t$  olacak şekilde  $\sigma : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyondur.

(Grace ve ark., 2017)

Son olarak E. Tunç ve O. Özdemir, 2019 yılında Journal of Taibah University for Science 13, 481-489 da "*On the oscillation of second-order half-linear functional differential equations with mixed neutral term*" adıyla yayınladıkları makalede,  $\alpha$  iki pozitif tek sayının oranı ve

$$z(t) = x(t) + p_1(t)x(g_1(t)) + p_2(t)x(g_2(t))$$

olmak üzere

$$(r(t)(z'(t))^\alpha)' + q(t)x^\alpha(h(t)) = 0, \quad t \geq t_0 > 0$$

FDD inin çözümlerinin salınım davranışını ele almışlardır (Tunç ve Özdemir, 2019).

### **3. MATERYAL ve YÖNTEM**

#### **3.1 Materyal**

Bu tez çalışmasında kullanılan materyaller, KAYNAKLAR bölümünde ayrıntılı olarak belirtilmiş olan ulusal ve uluslararası matematik dergilerinde yayımlanmış bilimsel makaleler, konu ile ilgili yayımlanmış mevcut kitaplar ile yerli ve yabancı yüksek lisans ve doktora tezleridir.

#### **3.2 Yöntem**

Bu tezde DD lerin çözümlerinin salınım davranışı araştırmalarında en etkili yöntemlerden olduğu kabul edilen ve literatürde sıkça kullanılan Riccati tipi dönüşüm, integral kriteri ve integral ortalama tekniği kullanılmıştır.

## 4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Tezin bu bölümü üç alt başlıktan oluşmaktadır. Bu alt başlıklar, tezin yapısı kısmında da belirttiğimiz gibi uluslararası dergilerde yayınladığımız üç orjinal makalemizde yer alan çalışmalarımızdır.

### 4.1 İkinci Mertebeden Damping Terimli Lineer NDD lerin Salınımı

#### 4.1.1 Giriş

Bu bölümde,

$$z(t) = x(t) + p(t)x(\tau(t))$$

olmak üzere

$$z''(t) + r(t)z'(t) + q(t)x(\sigma(t)) = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (4.1.1)$$

formundaki, ikinci mertebeden damping terimli lineer NDD inin çözümlerinin salınım davranışını ele alacağız.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(C<sub>0</sub>)  $p(t) \geq 1$  ve büyük  $t$  değerleri için  $p(t) \not\equiv 1$ ,  $q(t) \geq 0$  ve büyük  $t$  değerleri için  $q(t) \not\equiv 0$  olmak üzere  $p, q : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli sürekli fonksiyonlardır;

(C<sub>1</sub>)

$$\int_{t_0}^{\infty} \exp \left( - \int_{t_0}^t r(s) ds \right) dt = \infty \quad (4.1.2)$$

olmak üzere  $r : [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  reel değerli sürekli bir fonksiyondur;

(C<sub>2</sub>)  $\tau(t) < t$ ,  $\tau$  kesin artan (i.e.  $\tau'(t) > 0$ ) ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$  olacak şekilde

$\tau, \sigma : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli sürekli fonksiyonlardır.

(4.1.1) in çözümünden, bazı  $t_x \geq t_0$  için  $[t_x, \infty)$  aralığında (4.1.1) eşitliğini sağlayan ve  $z \in C^2([t_x, \infty), \mathbb{R})$  özelliğine sahip  $x \in C([t_x, \infty), \mathbb{R})$  fonksiyonunu kastetmekteyiz.



(4.1.1) in sadece, bazı  $[t_x, \infty)$  yarı doğrusu üzerinde mevcut olan ve herhangi bir  $T \geq t_x$  için

$$\sup \{|x(t)| : T \leq t < \infty\} > 0$$

şartını sağlayan çözümlerini dikkate alıyor ve hatta (4.1.1) in bu şekilde çözümlerinin mevcut olduğunu kabul ediyoruz. (4.1.1) in bu şekildeki bir  $x(t)$  çözümü eğer  $[t_x, \infty)$  da keyfi derecede büyük sıfırlara sahip ise salınımlıdır denir. Bir başka deyişle herhangi bir  $t_1 \in [t_x, \infty)$  için  $x(t_2) = 0$  olacak şekilde  $t_2 \geq t_1$  mevcutsa (4.1.1) in bir  $x(t)$  çözümü salınımlıdır denir. Aksi halde salınımsızdır denir. Yani  $x(t)$  çözümünün neticede pozitif ya da negatif olması durumunda (4.1.1) in  $x(t)$  çözümü salınımsızdır denir. (4.1.1) in tüm çözümleri salınımlı ise (4.1.1) denkleminin salınımlıdır denir.

Son yıllarda damping terimsiz ikinci mertebeden NDD lerin farklı sınıflarının çözümlerinin salınım davranışını incelemede büyük bir ilgi oluşmuştur. Son zamanlarda yayınlanan çalışmalar ve bu konuda elde edilen sonuçların örnekleri için okuyucuyu (Agarwal ve ark., 2003a) (Bohner ve ark., 2017) (Baculíková ve Džurina, 2011a) (Baculíková ve ark., 2011; Erbe ve ark., 2008) (Grace ve ark., 2018; Li ve ark., 2012, 2013b,c; Li ve Rogovchenko, 2014a) (Ruan, 1993; Saker, 2006; Thandapani ve ark., 2012; Tunç ve Graef, 2014; Wong, 2000) makalelerine yönlendirebiliriz. Fakat, ikinci mertebeden damping terimli NDD ler için salınım kriterleri belirlemek literatürde büyük bir ilgi çekmemiştir. Hatta  $0 < p(t) \leq p_0 < 1$  veya  $-1 < p_0 \leq p(t) < 0$  durumları için sonuçlar elde edilmiştir ve örnek olarak (Grace ve ark., 2017) (Grace ve Jadlovská, 2017) (Tunç ve Grace., 2016) makaleleri verilebilir. Bunun anlamı, bahsedilen makalelerde elde edilen sonuçların  $t \rightarrow \infty$  iken  $p(t) \rightarrow \infty$  durumuna uygulanamayacağıdır. Bahsedilen makalelerin motivasyonu ile bu çalışmadaki amacımız  $p(t) > 1$  ve/veya  $t \rightarrow \infty$  iken  $p(t) \rightarrow \infty$  durumları için uygulanabilecek yeni salınım kriterleri ortaya koymaktır. Hatta bu çalışmada elde edilen sonuçlar  $a, b > 0$  olmak üzere  $\tau(t) = t - a$  ve  $\sigma(t) = t - b$  gibi sabit gecikmeler için de yeni sonuçlardır. Bundan dolayı umulur ki mevcut çalışma damping terimli ikinci mertebeden NDD ler için salınım teorisindeki bu boşluğu kısmen doldurabilir. Belirtmek isteriz ki bu çalışmada sunulan sonuçlar kolaylıkla daha genel damping

(sönümlü) terimli lineer ve/veya lineer olmayan NDD lere genişletilebilir ((Grace ve ark., 2017) (Grace ve Jadlovská, 2017) ve (Tunç ve Grace., 2016) daki denklemler).

#### 4.1.2 $\sigma(t) \leq \tau(t)$ için salınım sonuçları

Bu kısımda  $\sigma(t) \leq \tau(t)$  olmak üzere (4.1.1) denkleminin salınımı için bazı yeni salınım kriterleri ortaya koyacağız.  $\tau^{-1}$ ,  $\tau$  nun ters fonksiyonu olmak üzere gösterim kolaylığı açısından,

$$\psi(t) := \frac{1}{p(\tau^{-1}(t))} \left( 1 - \frac{1}{p(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} \left[ \frac{\tau^{-1}(\tau^{-1}(t))}{\tau^{-1}(t)} \right]^2 \right)$$

olsun ve bu çalışma boyunca yeterince büyük  $t$  değerleri için  $\psi(t) > 0$  olduğunu kabul edelim.

**Teorem 4.1.1.** Kabul edelim ki  $(C_0) - (C_2)$  ve (4.1.2) şartları sağlansın. Eğer;

$$\xi(t) = \frac{\eta'(t) - \eta(t)r(t)}{\eta(t)} \quad (4.1.3)$$

olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[ \eta(s)q(s)\psi(\sigma(s)) \left( \frac{\tau^{-1}(\sigma(s))}{s} \right)^2 - \frac{\eta(s)\xi^2(s)}{4} \right] ds = \infty \quad (4.1.4)$$

olacak şekilde pozitif bir  $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$  fonksiyonu mevcut ise (4.1.1) denklemini salımlıdır.

**İspat.** Kabul edelim ki  $x(t)$  (4.1.1) in salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın kabul edelim ki  $t \geq t_1$  için  $x(t) > 0$ ,  $x(\tau(t)) > 0$  ve  $x(\sigma(t)) > 0$  olacak şekilde  $t_1 \in [t_0, \infty)$  mevcut olsun.  $(x(t))$  nin neticede negatif olma durumunun ispatı da benzerdir ve bu durumun ayrıntılarına burada olduğu gibi çalışmanın diğer ispatlarında da yer verilmemiştir). (4.1.1) ve  $(C_0)$  dan

$$z''(t) + r(t)z'(t) = -q(t)x(\sigma(t)) \leq 0$$

yani  $t \geq t_1$  için

$$z''(t) + r(t)z'(t) \leq 0$$

olur. Bu da  $t \geq t_1$  için

$$\left( \exp \left( \int_{t_1}^t r(s) ds \right) z'(t) \right)' \leq 0$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla,  $\exp \left( \int_{t_1}^t r(s) ds \right) z'(t)$  artmayandır ve neticede, kabul edelim ki  $t_2 \geq t_1$  için  $[t_2, \infty)$  da işaretini değiştirmez. Bundan dolayı  $z'(t)$ ,  $[t_2, \infty)$  da sabit işaretlidir ve iki durum söz konusu olur:

(I)  $t \geq t_2$  için  $z'(t) > 0$  veya (II)  $t \geq t_2$  için  $z'(t) < 0$ .

İlk olarak durum (I) i değerlendirelim.  $t \geq t_2$  için  $z'(t) > 0$  olduğundan (4.1.1) den  $t \geq t_2$  için

$$z(t) > 0, \quad z'(t) > 0 \quad \text{ve} \quad z''(t) \leq 0.$$

Buradan

$$z(t) = z(t_2) + \int_{t_2}^t z'(s) ds \geq (t - t_2)z'(t)$$

elde ederiz ve tüm  $t \geq t_3 := 2t_2$  için

$$\frac{z(t)}{z'(t)} \geq t/2$$

dir. Buradan  $t \geq t_3$  için

$$\left( \frac{z(t)}{t^2} \right)' = \frac{tz'(t) - 2z(t)}{t^3} \leq 0$$

olur yani  $[t_3, \infty)$  da  $z(t)/t^2$  artmayandır.  $z(t)$  nin tanımından (ve ayrıca (Agarwal ve ark., 2003a) (8.6) eşitsizliğinden)

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{p(\tau^{-1}(t))} [z(\tau^{-1}(t)) - x(\tau^{-1}(t))] \\
&= \frac{z(\tau^{-1}(t))}{p(\tau^{-1}(t))} - \frac{[z(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t))) - x(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))]}{p(\tau^{-1}(t))p(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} \\
&\geq \frac{z(\tau^{-1}(t))}{p(\tau^{-1}(t))} - \frac{1}{p(\tau^{-1}(t))p(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} z(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t))). \quad (4.1.5)
\end{aligned}$$

$\tau$  nun kesin artan ve  $\tau(t) < t$  olmasından

$$\tau^{-1}(t) < \tau^{-1}(\tau^{-1}(t))$$

olduğu görülür ve  $z(t)/t^2$  nin artmayan olmasından dolayı

$$\frac{(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))^2 z(\tau^{-1}(t))}{(\tau^{-1}(t))^2} \geq z(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t))) \quad (4.1.6)$$

elde ederiz. (4.1.6) nın (4.1.5) te kullanılmasıyla  $t \geq t_3$  için

$$x(t) \geq \psi(t) z(\tau^{-1}(t)) \quad (4.1.7)$$

bulunur.

$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$  olduğundan tüm  $t \geq t_4$  için  $\sigma(t) \geq t_3$  olacak şekilde  $t_4 \geq t_3$  seçebiliriz.

Dolayısıyla (4.1.7) den  $t \geq t_4$  için

$$x(\sigma(t)) \geq \psi(\sigma(t)) z(\tau^{-1}(\sigma(t))) \quad (4.1.8)$$

elde ederiz. (4.1.8), (4.1.1) de kullanılmasıyla  $t \geq t_4$  için

$$z''(t) + r(t)z'(t) + q(t)\psi(\sigma(t))z(\tau^{-1}(\sigma(t))) \leq 0. \quad (4.1.9)$$

Riccati tipi dönüşümü ile  $t \geq t_4$  için  $w(t)$  fonksiyonunu

$$w(t) := \eta(t) \frac{z'(t)}{z(t)} \quad (4.1.10)$$

tanımlayalım.

Açıktır ki  $w(t) > 0$  ve (4.1.4), (4.1.9), (4.1.10) dan

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{\eta'(t)}{\eta(t)} w(t) + \eta(t) \left( \frac{z''(t)z(t) - (z'(t))^2}{z^2(t)} \right) \\ &\leq \frac{\eta'(t)}{\eta(t)} w(t) + \frac{\eta(t)}{z(t)} [-r(t)z'(t) - q(t)\psi(\sigma(t))z(\tau^{-1}(\sigma(t)))] - \frac{1}{\eta(t)} w^2(t) \\ &= \xi(t)w(t) - \eta(t)q(t)\psi(\sigma(t)) \frac{z(\tau^{-1}(\sigma(t)))}{z(t)} - \frac{1}{\eta(t)} w^2(t) \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

olduğunu görürüz.

$z(t)/t^2$  nin artmayanlığı kullanılır ve  $\sigma(t) \leq \tau(t)$  nin  $\tau^{-1}(\sigma(t)) \leq t$  olmasını gerektirdiği dikkate alınırsa buradan

$$\frac{z(\tau^{-1}(\sigma(t)))}{z(t)} \geq \frac{(\tau^{-1}(\sigma(t)))^2}{t^2} \quad (4.1.12)$$

elde edilir. (4.1.12) nin (4.1.11) de kullanılması  $t \geq t_4$  için

$$w'(t) \leq \xi(t)w(t) - \eta(t)q(t)\psi(\sigma(t)) \frac{(\tau^{-1}(\sigma(t)))^2}{t^2} - \frac{1}{\eta(t)} w^2(t) \quad (4.1.13)$$

verir.  $w$  ya göre tam kareye tamamlarsak (4.1.13) ten  $t \geq t_4$  için

$$w'(t) \leq -\eta(t)q(t)\psi(\sigma(t)) \frac{(\tau^{-1}(\sigma(t)))^2}{t^2} + \frac{\eta(t)\xi^2(s)}{4}, \quad (4.1.14)$$

elde edilir. (4.1.14) ün  $t_4$  den  $t$  ye kadar integralenmesiyle de

$$\int_{t_4}^t \left[ \eta(s)q(s)\psi(\sigma(s)) \left( \frac{\tau^{-1}(\sigma(s))}{s} \right)^2 - \frac{\eta(s)\xi^2(s)}{4} \right] ds \leq -w(t) + w(t_4) < w(t_4)$$

elde edilir ve bu (4.1.4) ile çelişir.

Şimdi de durum (II) yi göz önüne alalım.  $u(t) = -z'(t) > 0$  dönüşümü yaparak

(4.1.1) den  $t \geq t_2$  için

$$u'(t) + r(t)u(t) \geq 0$$

olur. Bu ifade  $t_2$  den  $t$  ye kadar integrallenirse

$$u(t) \geq u(t_2) \exp \left( - \int_{t_2}^t r(s) ds \right)$$

bulunur ve buradan

$$z'(t) \leq z'(t_2) \exp \left( - \int_{t_2}^t r(s) ds \right). \quad (4.1.15)$$

(4.1.15)  $t_2$  den  $t$  ye kadar integrallenir ve (4.1.2) göz önünde bulundurulursa,  $t \rightarrow \infty$  için

$$z(t) \leq z(t_2) + z'(t_2) \int_{t_2}^t \exp \left( - \int_{t_2}^s r(u) du \right) ds \rightarrow -\infty$$

elde ederiz. Bu da  $z$  nin pozitifliği ile çelişir ve ispatı tamamlar.

Teorem (4.1.1) den  $\eta(t)$  nın farklı seçimlerini kullanarak (4.1.1) in salınımlılığı için farklı şartlar elde edebiliriz. Örneğin  $\eta(t) = 1$  ve  $\gamma \geq 1$  olmak üzere  $\eta(t) = t^\gamma$  olarak seçilmesi durumunda sırasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 4.1.2.** Kabul edelim ki  $(C_0)$ – $(C_2)$  ve (4.1.2) sağlansın. Eğer;

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[ q(s) \psi(\sigma(s)) \left( \frac{\tau^{-1}(\sigma(s))}{s} \right)^2 - \frac{r^2(s)}{4} \right] ds = \infty \quad (4.1.16)$$

ise (4.1.1) denklemini salınımlıdır.

**Sonuç 4.1.3.** Kabul edelim ki  $(C_0)$ – $(C_2)$  ve (4.1.2) sağlansın. Eğer;

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[ s^{\gamma-2} q(s) \psi(\sigma(s)) (\tau^{-1}(\sigma(s)))^2 - \frac{[(s^\gamma)' - s^\gamma r(s)]^2}{4s^\gamma} \right] ds = \infty$$

ise (4.1.1) denklemini salınımlıdır.

Aşağıdaki teoremden Philos (Philos, 1989)'a atfedilen integral averaj tekniği kullanarak (4.1.1) için yeni bir salınım kriteri ortaya koyuyoruz. Teoreminizi sunmadan önce Philos (Philos, 1989)'un ortaya koyduğu  $\mathcal{P}$  fonksiyon sınıfını tanıtalım.  $D_0 = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t > s \geq t_0\}$  ve  $D = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t \geq s \geq t_0\}$  olsun.

Eğer;

(i)  $t \geq t_0$  için  $H(t, t) = 0$  ve  $(t, s) \in D_0$  da  $H(t, s) > 0$ ,

(ii)  $H, D_0$  da ikinci değişkene göre sürekli ve pozitif olmayan bir kısmi türevi mevcut olsun,

bu taktirde  $H \in C(D, \mathbb{R})$  fonksiyonu  $\mathcal{P}$  sınıfına aittir denir ve  $H \in \mathcal{P}$  ile gösterilir.

**Teorem 4.1.4.** Kabul edelim ki  $(C_0)-(C_2)$  ve (4.1.2) şartları sağlansın.  $H, \mathcal{P}$  sınıfına ait olacak şekilde  $h, H : D \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyonlar ve tüm  $(t, s) \in D_0$  için

$$-\frac{\partial H}{\partial s}(t, s) = h(t, s)\sqrt{H(t, s)} \quad (4.1.17)$$

olsun. Eğer  $\xi(t)$  (4.1.4) teki gibi ve

$$\Psi(t, s) = -h(t, s) + \sqrt{H(t, s)}\xi(s) \quad (4.1.18)$$

olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left[ H(t, s)\eta(s)q(s)\psi(\sigma(s)) \left( \frac{\tau^{-1}(\sigma(s))}{s} \right)^2 - \frac{\eta(s)\Psi^2(t, s)}{4} \right] ds = \infty \quad (4.1.19)$$

olacak şekilde pozitif bir  $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$  fonksiyonu mevcut ise (4.1.1) in her çözümü salınımlıdır.

**İspat.** Kabul edelim ki  $x(t)$  (4.1.1) in salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın kabul edelim ki  $[t_1, \infty)$  da  $x(t) > 0$ ,  $x(\tau(t)) > 0$  ve  $x(\sigma(t)) > 0$  olacak şekilde  $t_1 \in [t_0, \infty)$  mevcut olsun. Teorem (4.1.1) in ispatındaki yol izlenirse yine dikkate alacağımız iki durum söz konusu olur:

(I)  $t \geq t_2$  için  $z'(t) > 0$  veya (II)  $t \geq t_2$  için  $z'(t) < 0$ .

Eğer Durum (II) geçerli ise, Teorem (4.1.2) nin ispatındakiyle aynı şekilde ilerleyerek  $z$  nin pozitifliği ile çelişki elde edilir.

Şimdi, Durum (I) i ele alalım. Bu durumda yine Teorem (4.1.1) in ispatındaki gibi  $t \geq t_4$  için (4.1.13) elde ederiz. Buradan,

$$\begin{aligned}
\int_{t_4}^t H(t, s) \eta(s) q(s) \psi(\sigma(s)) \left( \frac{\tau^{-1}(\sigma(s))}{s} \right)^2 ds &\leq - \int_{t_4}^t H(t, s) w'(s) ds \\
&+ \int_{t_4}^t H(t, s) \xi(s) w(s) ds - \int_{t_4}^t H(t, s) \frac{1}{\eta(s)} w^2(s) ds
\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

elde edilir. Kısmi integrasyon formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{t_4}^t H(t, s) w'(s) ds &= H(t, s) w(s) \Big|_{t_4}^t - \int_{t_4}^t \frac{\partial H}{\partial s}(t, s) w(s) ds \\
&= -H(t, t_4) w(t_4) - \int_{t_4}^t \frac{\partial H}{\partial s}(t, s) w(s) ds
\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

elde ederiz. (4.1.21) in (4.1.20) de yerine yazılması

$$\begin{aligned}
\int_{t_4}^t H(t, s) \eta(s) q(s) \psi(\sigma(s)) \left( \frac{\tau^{-1}(\sigma(s))}{s} \right)^2 ds &\leq H(t, t_4) w(t_4) \\
- \int_{t_4}^t H(t, s) \frac{1}{\eta(s)} w^2(s) ds &+ \int_{t_4}^t \left[ \frac{\partial H}{\partial s}(t, s) + H(t, s) \xi(s) \right] w(s) ds
\end{aligned}$$

eşitsizliğini verir.

(4.1.17) göz önüne alınırsa bu son ifade

$$\begin{aligned}
&\int_{t_4}^t H(t, s) \eta(s) q(s) \psi(\sigma(s)) \left( \frac{\tau^{-1}(\sigma(s))}{s} \right)^2 ds \\
&\leq H(t, t_4) w(t_4) - \int_{t_4}^t H(t, s) \frac{1}{\eta(s)} w^2(s) ds \\
&+ \int_{t_4}^t \left[ -h(t, s) \sqrt{H(t, s)} + H(t, s) \xi(s) \right] w(s) ds
\end{aligned}$$

halini alır. Teorem (4.1.1) deki gibi tam kareye tamamlarsak

$$\int_{t_4}^t H(t, s) \eta(s) q(s) \psi(\sigma(s)) \left( \frac{\tau^{-1}(\sigma(s))}{s} \right)^2 ds \leq H(t, t_4) w(t_4) + \frac{1}{4} \int_{t_4}^t \eta(s) \Psi^2(t, s) ds$$

ve buradan

$$\frac{1}{H(t, t_4)} \int_{t_4}^t \left[ H(t, s) \eta(s) q(s) \psi(\sigma(s)) \left( \frac{\tau^{-1}(\sigma(s))}{s} \right)^2 - \frac{\eta(s) \Psi^2(t, s)}{4} \right] ds \leq w(t_4)$$



olduğu görülür ve (4.1.19) ile çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki salınım kriteri Teorem (4.1.4) ten direkt olarak elde edilir.

**Sonuç 4.1.5.**  $\Psi(t, s)$  (4.1.18) deki gibi olmak üzere (4.1.19) yerine

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) \eta(s) q(s) \psi(\sigma(s)) \left( \frac{\tau^{-1}(\sigma(s))}{s} \right)^2 ds = \infty$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \eta(s) \Psi^2(t, s) ds < \infty$$

şartları konur ve Teorem (4.1.4) ün diğer tüm şartları sağlanırsa (4.1.1) salınımlıdır.

#### 4.1.3 $\sigma(t) \geq \tau(t)$ için salınım sonuçları.

Bu kısımda  $\sigma(t) \geq \tau(t)$  olması durumunda (4.1.1) denkleminin salınımı için bazı yeni kriterler verilmiştir.

**Teorem 4.1.6.** Kabul edelim ki  $(C_0)$ – $(C_2)$  ve (4.1.2) sağlansın.  $\xi(t)$ , (4.1.4) teki gibi olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[ \eta(s) q(s) \psi(\sigma(s)) - \frac{\eta(s) \xi^2(s)}{4} \right] ds = \infty \quad (4.1.22)$$

olacak şekilde pozitif bir  $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$  fonksiyonu var ise (4.1.1) denklemini salınımlıdır.

**İspat.** Kabul edelim ki  $x(t)$  (4.1.1) in salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın kabul edelim ki  $t \geq t_1$  için  $x(t) > 0$ ,  $x(\tau(t)) > 0$  ve  $x(\sigma(t)) > 0$  olacak şekilde  $t_1 \in [t_0, \infty)$  mevcut olsun. Teorem (4.1.1) in ispatındaki yol izlenirse yine dikkate alınacak iki durum ortaya çıkar:

(I)  $t \geq t_2$  için  $z'(t) > 0$  veya (II)  $t \geq t_2$  için  $z'(t) < 0$ .

(II) durumunda, Teorem (4.1.1) in ispatındaki yol aynen izlenirse  $z$  nin pozitifliği ile çelişki elde edilir.

Şimdi (I) durumunu ele alalım. Yine Teorem (4.1.1) in ispatındaki yol izlenirse  $t \geq t_4$  için (4.1.11) e ulaşırız.  $\tau(t)$  nin kesin artanlığı kullanılarak ve  $\sigma(t) \geq \tau(t)$  göz

önüne alınırsa,

$$\tau^{-1}(\sigma(t)) \geq t$$

olur. Buradan ve  $z$  nin artanlığından

$$\frac{z(\tau^{-1}(\sigma(t)))}{z(t)} \geq 1 \quad (4.1.23)$$

ve (4.1.23) ün (4.1.11) de kullanılmasıyla da

$$w'(t) \leq \xi(t)w(t) - \eta(t)q(t)\psi(\sigma(t)) - \frac{1}{\eta(t)}w^2(t) \quad (4.1.24)$$

elde edilir.

İspatın kalan kısmı Teorem (4.1.1) in ispatının ilk kısmına benzerdir ve detaylara yer verilmemiştir.

**Teorem 4.1.7.** Kabul edelim ki  $(C_0)-(C_2)$ , (4.1.2), (4.1.17) sağlansın ve  $H, \mathcal{P}$  sınıfına ait olacak şekilde  $h, H : D \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyonlar olsun.

Eğer  $\Psi(t, s)$ , (4.1.18) deki gibi olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left[ H(t, s)\eta(s)q(s)\psi(\sigma(s)) - \frac{\eta(s)\Psi^2(t, s)}{4} \right] ds = \infty \quad (4.1.25)$$

olacak şekilde pozitif bir  $\eta \in C^1([t_0, \infty), R)$  mevcut ise bu durumda (4.1.1) in her çözümü salınımlıdır.

**İspat.** İspat, (4.1.23), (4.1.24) ve Teorem (4.1.4) ten elde edilir ve bundan dolayı detaylara yer verilmemiştir.

**Sonuç 4.1.8.**  $\Psi(t, s)$ , (4.1.18) deki gibi olmak üzere (4.1.25) yerine

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s)\eta(s)q(s)\psi(\sigma(s))ds = \infty \quad (4.1.26)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \eta(s)\Psi^2(t, s)ds < \infty \quad (4.1.27)$$

şartları konur ve Teorem (4.1.7) nin diğer tüm şartları sağlanırsa (4.1.1) salınımlıdır.

Bu bölümü sonuçlarımızı gösteren iki örnek ile tamamlıyoruz. İlk örnek  $t \rightarrow \infty$  için  $p(t) \rightarrow \infty$  durumunu, ikinci örnek ise  $p$  nin sabit bir fonksiyon olma durumunu ele almıştır.

#### 4.1.4 Örnekler

##### Örnek 4.1.9.

$$z(t) = x(t) + tx \left( \frac{t}{2} \right)$$

olmak üzere  $t \geq 2$  için damping terimli

$$z''(t) + \frac{1}{t^2} z'(t) + (t^2 + t)x \left( \frac{t}{3} \right) = 0 \quad (4.1.28)$$

lineer NDD ini ele alalım.

Burada  $p(t) = t$ ,  $r(t) = 1/t^2$ ,  $q(t) = t^2 + t$ ,  $\tau(t) = t/2$  ve  $\sigma(t) = t/3$  tür.  $(C_0)$ – $(C_2)$  ve (4.1.2) şartlarının sağlandığı kolayca görülür ve

$$\tau^{-1}(t) = 2t, \quad \tau^{-1}(\tau^{-1}(t)) = 4t, \quad \tau^{-1}(\sigma(t)) = 2t/3 \quad \text{ve} \quad \psi(t) \geq 1/4t.$$

$\eta(t) = 1$  olarak alınır ve  $\psi(t) \geq 1/4t$  olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \left[ q(s)\psi(\sigma(s)) \left( \frac{\tau^{-1}(\sigma(s))}{s} \right)^2 - \frac{r^2(s)}{4} \right] ds &\geq \int_2^t \left[ \frac{1}{3}(s+1) - \frac{1}{4s^4} \right] ds \\ &= \frac{t^2}{6} + \frac{t}{3} + \frac{1}{12t^3} - \frac{129}{96} \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

elde edilir. (4.1.29) da  $t \rightarrow \infty$  için  $\limsup$  alınır (4.1.16) nın sağlandığı görülür ve Sonuç 4.1.2 gereği (4.1.28) denklemini salınımlıdır.

##### Örnek 4.1.10.

$$z(t) = x(t) + 32x \left( \frac{t}{4} \right)$$

olmak üzere  $t \geq 1$  için damping terimli

$$z''(t) + \frac{1}{t} z'(t) + t^2 x \left( \frac{t}{2} \right) = 0 \quad (4.1.30)$$

lineer NDD ini göz önüne alalım. Burada  $p(t) = 32$ ,  $r(t) = 1/t$ ,  $q(t) = t^2$ ,  $\tau(t) = t/4$ , ve  $\sigma(t) = t/2$  dir. Bu durumda  $(C_0)$ – $(C_2)$  ve (4.1.2) şartlarının sağlandığını görmek kolaydır ve

$$\tau^{-1}(t) = 4t, \quad \tau^{-1}(\tau^{-1}(t)) = 16t \quad \text{ve} \quad \psi(t) = 1/64$$

dür.

$H(t, s) = (t - s)^2$  seçersek,  $H \in \mathcal{P}$  ve  $h(t, s) = 2$  olur.  $\eta(t) = 1$  ile  $\Psi(t, s) = -1 - t/s$  ve

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) \eta(s) q(s) \psi(\sigma(s)) ds &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-1)^2} \int_1^t \frac{1}{64} (t-s)^2 s^2 ds \\ &\geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{64(t-1)^2} \int_1^t (t-s)^2 ds \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{192(t-1)^2} = \infty \end{aligned}$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \eta(s) \Psi^2(t, s) ds = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-1)^2} \int_1^t \left(1 + \frac{t}{s}\right)^2 ds = 1 < \infty.$$

Dolayısıyla (4.1.26) ve (4.1.27) şartları sağlanır. Buradan Sonuç 4.1.8 gereği (4.1.30) denklemini salınımlıdır.

**Uyarı 4.1.11.** (4.1.1) denklemini  $t \rightarrow \infty$  iken  $p(t) \rightarrow -\infty$  durumu için çalışmak ayrıca ilgi çekici olabilir.

## 4.2 İkinci Mertebeden Damping Terimli Yarı-Linear NDD lerin Salınımı

### 4.2.1 Giriş

Bu bölümde

$$z(t) = x(t) + h(t)x(\tau(t))$$

ve  $\alpha \geq 1$  iki pozitif tek sayının oranı olmak üzere

$$(r(t)(z'(t))^\alpha)' + p(t)(z'(t))^\alpha + q(t)f(t, x(\sigma(t))) = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (4.2.1)$$

damping terimli ikinci mertebeden yarı-linear NDD inin çözümlerinin salınım davranışını ele alacağız.

Bu bölüm boyunca aşağıdaki şartların sağlandığını kabul ediyoruz:

- (i)  $p(t) \geq 0$ ,  $q(t) > 0$ ,  $r(t) > 0$  ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[ \frac{1}{r(t)} \exp \left( - \int_{t_0}^t \frac{p(s)}{r(s)} ds \right) \right]^{1/\alpha} dt = \infty \quad (4.2.2)$$

olacak şekilde  $p, q, r : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyonlardır;

- (ii) Büyük  $t$  ler için  $h(t) \not\equiv 1$  ve  $h(t) \geq 1$  olacak şekilde  $h : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyondur;

- (iii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$ ,  $\tau(t) < t$  ve  $\tau$  kesin artan olacak şekilde  $\tau, \sigma : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyonlardır;

- (iv) Tüm  $u \neq 0$  için  $uf(t, u) > 0$  olacak şekilde  $f(t, u) : [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyondur ve  $u \neq 0$  için

$$f(t, u)/u^\alpha \geq k$$

olacak şekilde pozitif bir  $k$  sabiti mevcuttur.

Bu çalışmada

$$\tau(t) \geq \sigma(t) \quad (4.2.3)$$

ve

$$\tau(t) \leq \sigma(t) \quad (4.2.4)$$

durumları ele alınmıştır.

(4.2.1) in çözümünden, bazı  $t_x \geq t_0$  lar için  $z \in C^1([t_x, \infty), \mathbb{R})$ ,  $r(z')^\alpha \in C^1([t_x, \infty), \mathbb{R})$  özelliğine sahip ve  $[t_x, \infty)$  da (4.2.1) i sağlayan bir  $x \in C([t_x, \infty), \mathbb{R})$  fonksiyonunu kastediyoruz. (4.2.1) in sadece, bazı  $[t_x, \infty)$  yarı doğrusu üzerinde mevcut olan ve herhangi bir  $T \geq t_x$  için

$$\sup \{|x(t)| : T \leq t < \infty\} > 0$$

şartını sağlayan çözümlerini göz önünde bulunduracağız. Hatta (4.2.1) in bu şekilde çözümlerinin mevcut olduğunu varsayacağız. Eğer  $[t_x, \infty)$  de keyfi büyüklükte sıfırları mevcutsa (4.2.1) in bu şekildeki bir  $x(t)$  çözümüne salınımlıdır denir. Bir başka ifade ile her  $t_1 \in [t_x, \infty)$  için  $x(t_2) = 0$  olacak şekilde  $t_2 \geq t_1$  mevcutsa  $x(t)$  çözümüne salınımlıdır denir. Aksi halde salınımsızdır. Başka bir deyişle  $x(t)$  çözümü neticede pozitif ya da negatif oluyor ise salınımsızdır. Eğer tüm çözümleri salınımlı ise (4.2.1) denkleminin kendisine salınımlıdır denir.

İkinci dereceden FDD lerin çeşitli sınıflarının çözümlerinin salınım davranışı pek çok araştırmacının çalışmalarının konusu olmuş ve birçok ilginç sonuç elde edilmiştir. Bazı tipik sonuçlar için okuyucuyu (Baculiková ve ark., 2011) (Bohner ve ark., 2017) (Grace ve ark., 2018) (Li ve ark., 2012) (Li ve Rogovchenko, 2014a) (Li ve ark., 2014a) (Li ve Rogovchenko, 2015b) (Li ve Rogovchenko, 2017c) (Saker, 2003) (Saker ve ark., 2003) (Saker ve ark., 2007) (Santra ve ark., 2018) (Thandapani ve ark., 2011) (Tunç ve Graef, 2014) (Wong, 2000) referanslarına ve konunun güncel sonuçlarının örnekleri için bu kaynaklarda anılan referanslara yönlendirebiliriz. Fakat, damping terimli ikinci mertebeden NDD lerin çözümlerinin salınım davranışına dair sonuçlar literatürde daha nadirdir. Bazı sonuçlar örnek olarak (Grace ve ark., 2017; Grace ve Jadlovská, 2017; Tunç ve Grace., 2016; Tunç ve Kaymaz, 2019a) da bulunabilir. (Grace ve ark., 2017; Grace ve Jadlovská, 2017) (Tunç ve Grace., 2016; Tunç ve Kaymaz, 2019a) makaleleri damping terimli ikinci mertebeden NDD lerle ilgili olmakla

beraber dikkat edilmelidir ki bu çalışmaların sonuçları ( (Tunç ve Kaymaz, 2019a) dışında )  $t \rightarrow \infty$  iken  $h(t) \rightarrow \infty$  durumuna uygulanamaz. Bu gözlemlerin motivasyonu ile bu çalışmada  $t \rightarrow \infty$  iken  $h(t) \rightarrow \infty$  ve/veya  $h(t) > 1$  durumunda (4.2.1) denkleminin salınımı için yeterli şartlar geliştirmeyi umuyoruz. Bu çalışmada elde edilecek sonuçlar Philos'a (Philos, 1989) ait olan integral ortalama tekniği kullanılarak elde edilmiştir (ayrıca değiştirilmiş integral teknikleri için bkz. (Li ve ark., 2014b; Rogovchenko, 2009)) ve kolaylıkla daha genel ikinci mertebeden damping terimli lineer olmayan NDD lere genişletilebilir. Bundan dolayı mevcut çalışmanın damping terimli ikinci mertebeden NDD lerin çözümlerinin salınım davranışı çalışmalarına büyük bir katkı yapacağı umulmaktadır.

#### 4.2.2 Salınım sonuçları

Aşağıdaki teoremlerde Philos (Philos, 1989) a atfedilen ortalama integral tekniği kullanılarak (4.2.1) için yeni salınım kriterleri ortaya koyuyoruz. Teoremlerimizi sunmadan önce Philosu takip ederek (Philos, 1989),  $\mathcal{P}$  fonksiyon sınıfının tanımını yapalım.

$D_0 = \{(t, s) : t > s \geq t_0\}$  ve  $D = \{(t, s) : t \geq s \geq t_0\}$  olsun. Eğer;

(i)  $t \geq t_0$  için  $H(t, t) = 0$  ve  $(t, s) \in D_0$  için  $H(t, s) > 0$  ;

(ii)  $H, D_0$  üzerinde ikinci değişkene göre sürekli ve pozitif olmayan kısmi türevelere sahip

ise  $H \in C(D, \mathbb{R})$  fonksiyonu  $\mathcal{P}$  sınıfına aittir deriz ve  $H \in \mathcal{P}$  ile gösteririz.

Gösterim amacıyla,

$$A(t, t_*) := \int_{t_*}^t \frac{ds}{r^{1/\alpha}(s)}, \quad t_* \geq t_0,$$

her pozitif  $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$  fonksiyonu için

$$\xi(t) = \frac{\eta'(t)r(t) - \eta(t)p(t)}{\eta(t)r(t)}$$

ve  $\tau^{-1}$ ,  $\tau$  nun ters fonksiyonu olmak üzere

$$\psi(t, t_*) := \frac{1}{h(\tau^{-1}(t))} \left( 1 - \frac{1}{h(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} \frac{A(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)), t_*)}{A(\tau^{-1}(t), t_*)} \right), \quad t_* \geq t_0,$$

olsun. Bu kısım boyunca yeterince büyük tüm  $t$  ler için  $\psi(t, t_*) > 0$  olduğunu varsayıyoruz.

Birinci ana sonucumuz aşağıdaki teoremdedir.

**Teorem 4.2.1.** (i)–(iv), (4.2.2) ve (4.2.3) şartları sağlansın ve  $H$ ,  $\mathcal{P}$  sınıfına ait ve tüm  $(t, s) \in D_0$  için

$$-\frac{\partial H}{\partial s}(t, s) = h(t, s)\sqrt{H(t, s)} \quad (4.2.5)$$

eşitliği sağlanacak şekilde  $h, H : D \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyonlar olsun.

Yeterince büyük tüm  $t_2 \in [t_1, \infty) \subseteq [t_0, \infty)$  için ve tüm  $t \geq T$  için  $\sigma(t) > t_2$  olacak şekilde tüm  $T > t_2$

$$\Psi(t) = k\eta(t)q(t)\psi^\alpha(\sigma(t), t_2) \frac{A^\alpha(\tau^{-1}(\sigma(t)), t_2)}{A^\alpha(t, t_2)} \quad (4.2.6)$$

ve

$$\Phi(t, s) = \left( -h(t, s) + \xi(s)\sqrt{H(t, s)} \right)^2 \quad (4.2.7)$$

olmak üzere bazı  $\gamma \geq 1$  için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ H(t, s)\Psi(s) - \frac{\gamma}{4\alpha} \frac{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)\Phi(t, s)}{A^{\alpha-1}(s, t_2)} \right] ds = \infty \quad (4.2.8)$$

olacak şekilde pozitif bir  $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$  fonksiyonu mevcut ise bu durumda (4.2.1) in her çözümü salınımlıdır.

**İspat.**  $x(t)$  (4.2.1) in salınımsız çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın  $t \geq t_1$  için  $x(t) > 0$ ,  $x(\tau(t)) > 0$  ve  $x(\sigma(t)) > 0$  olacak şekilde  $t_1 \in [t_0, \infty)$  mevcut olduğunu varsayalım.  $x(t)$  nin neticede negatif olma durumunun ispatı benzer şekilde yapılabileceğinden dolayı bu durumu mevcut ve sonraki teoremlerin ispatında göz ardı edeceğiz.



Bu durumda (4.2.1) den

$$(r(t) (z'(t))^\alpha)' + p(t) (z'(t))^\alpha + kq(t)x^\alpha(\sigma(t)) \leq 0 \quad (4.2.9)$$

ve dolayısıyla  $t \geq t_1$  için

$$(r(t) (z'(t))^\alpha)' + p(t) (z'(t))^\alpha < 0. \quad (4.2.10)$$

$v(t) = r(t) (z'(t))^\alpha$  dersek (4.2.10) dan  $t \geq t_1$  için

$$v'(t) + \frac{p(t)}{r(t)}v(t) < 0$$

olur ve bu da  $t \geq t_1$  için

$$\left( \exp \left( \int_{t_1}^t \frac{p(s)}{r(s)} ds \right) v(t) \right)' < 0$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla  $v(t) \exp \left( \int_{t_1}^t \frac{p(s)}{r(s)} ds \right)$  azalandır ve bazı  $t_2 \geq t_1$  ler için en sonunda, söz gelimi  $[t_2, \infty)$  da işaretini değiştirmmez. Bu yüzden  $[t_2, \infty)$  da  $z'(t)$  sabit işarete sahip olur ve ele alacağımız iki durum ortaya çıkar:

(I)  $t \geq t_2$  için  $z'(t) > 0$  veya (II)  $t \geq t_2$  için  $z'(t) < 0$ .

Önce (I) durumunun geçerli olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.2.9) ve  $z$  nin tanımından

$$z(t) > 0, \quad z'(t) > 0 \quad \text{ve} \quad t \geq t_2 \quad \text{için} \quad (r(t) (z'(t))^\alpha)' < 0$$

ve buradan

$$z(t) = z(t_2) + \int_{t_2}^t \frac{1}{r^{1/\alpha}(s)} (r(s) (z'(s))^\alpha)^{1/\alpha} ds \geq r^{1/\alpha}(t) z'(t) A(t, t_2) \quad (4.2.11)$$

olduğu görülür. (4.2.11) den dolayı  $t_3 \in (t_2, \infty)$  olmak üzere tüm  $t \geq t_3$  için

$$\left( \frac{z(t)}{A(t, t_2)} \right)' = \frac{r^{-1/\alpha}(t) [r^{1/\alpha}(t) z'(t) A(t, t_2) - z(t)]}{A^2(t, t_2)} \leq 0$$

yani  $t \geq t_3$  için  $z(t)/A(t, t_2)$  artmayandır.

$z$  nin tanımından (ayrıca bkz. (Agarwal ve ark., 2003a) deki (8.6) eşitsizliği )

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{h(\tau^{-1}(t))} [z(\tau^{-1}(t)) - x(\tau^{-1}(t))] \\
&= \frac{z(\tau^{-1}(t))}{h(\tau^{-1}(t))} - \frac{[z(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t))) - x(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))]}{h(\tau^{-1}(t))h(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} \\
&\geq \frac{z(\tau^{-1}(t))}{h(\tau^{-1}(t))} - \frac{1}{h(\tau^{-1}(t))h(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} z(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t))) \quad (4.2.12)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\tau(t) < t$  ve  $\tau$  kesin artan olduğundan dolayı  $\tau^{-1}$  de artandır ve  $\tau^{-1}(t) > t$ . Dolayısıyla

$$\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)) > \tau^{-1}(t)$$

ve  $t \geq t_3$  için  $z(t)/A(t, t_2)$  artmayan olduğundan

$$\frac{A(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)), t_2) z(\tau^{-1}(t))}{A(\tau^{-1}(t), t_2)} \geq z(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))$$

elde ederiz. Son eşitsizliği (4.2.12) de yerine yazmak  $t \geq t_3$  için

$$x(t) \geq \psi(t, t_2) z(\tau^{-1}(t)) \quad (4.2.13)$$

yi verir.

$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$  olduğundan tüm  $t \geq t_4$  için  $\sigma(t) \geq t_3$  olacak şekilde  $t_4 \geq t_3$  seçebiliriz.

Böylece (4.2.13) den  $t \geq t_4$  için

$$x(\sigma(t)) \geq \psi(\sigma(t), t_2) z(\tau^{-1}(\sigma(t))) \quad (4.2.14)$$

olur.

(4.2.14) ü (4.2.9) da kullanırsak  $t \geq t_4$  için

$$(r(t) (z'(t))^\alpha)' + p(t) (z'(t))^\alpha + kq(t)\psi^\alpha(\sigma(t), t_2)z^\alpha(\tau^{-1}(\sigma(t))) \leq 0 \quad (4.2.15)$$

elde edilir.  $w$  fonksiyonunu Riccati tipi dönüşümle  $t \geq t_4$  için

$$w(t) = \eta(t) \frac{r(t) (z'(t))^\alpha}{z^\alpha(t)} \quad (4.2.16)$$

olarak tanımlayalım.

Açıktır ki  $w(t) > 0$  ve (4.2.15)–(4.2.16) dan  $t \geq t_4$  için

$$w'(t) \leq \xi(t)w(t) - k\eta(t)q(t)\psi^\alpha(\sigma(t), t_2) \frac{z^\alpha(\tau^{-1}(\sigma(t)))}{z^\alpha(t)} - \alpha \frac{w^{(1+\alpha)/\alpha}(t)}{(\eta(t)r(t))^{1/\alpha}} \quad (4.2.17)$$

olduğunu görürüz. (4.2.17) ve  $\tau$  nun kesin artan olmasından dolayı

$$\tau^{-1}(\sigma(t)) \leq t$$

ve  $[t_4, \infty) \subseteq [t_3, \infty)$  da  $z(t)/A(t, t_2)$  artmayan olduğundan dolayı

$$\frac{z(\tau^{-1}(\sigma(t)))}{z(t)} \geq \frac{A(\tau^{-1}(\sigma(t)), t_2)}{A(t, t_2)} \quad (4.2.18)$$

elde ederiz. (4.2.18) i (4.2.17) de kullanırsak

$$w'(t) \leq \xi(t)w(t) - k\eta(t)q(t)\psi^\alpha(\sigma(t), t_2) \frac{A^\alpha(\tau^{-1}(\sigma(t)), t_2)}{A^\alpha(t, t_2)} - \alpha \frac{w^{(1+\alpha)/\alpha}(t)}{(\eta(t)r(t))^{1/\alpha}}$$

elde ederiz ve bu da  $t \geq t_4$  için

$$w'(t) \leq \xi(t)w(t) - \Psi(t) - \frac{\alpha w^{1/\alpha-1}(t)}{(\eta(t)r(t))^{1/\alpha}} w^2(t) \quad (4.2.19)$$

şeklinde yazılabilir.

(4.2.11) ve (4.2.16) ışığında  $t \geq t_4$  için

$$\begin{aligned}
w^{\frac{1}{\alpha}-1}(t) &= (\eta(t)r(t)^{\frac{1}{\alpha}-1}) \left( \left( \frac{z'(t)}{z(t)} \right)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \\
&= (\eta(t)r(t)^{\frac{1}{\alpha}-1}) \left( \frac{z(t)}{z'(t)} \right)^{\alpha-1} \\
&\geq \eta^{\frac{1}{\alpha}-1}(t) A^{\alpha-1}(t, t_2)
\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

elde ederiz.

(4.2.20) yi (4.2.19) da kullanırsak,

$$w'(t) \leq \xi(t)w(t) - \Psi(t) - \frac{\alpha A^{\alpha-1}(t, t_2)}{\eta(t)r^{1/\alpha}(t)} w^2(t) \tag{4.2.21}$$

olur.

(4.2.21) i  $H(t, s)$  ile çarpar ve de  $T$  den  $t$  ye kadar integralini alırsak, bazı  $\gamma \geq 1$  ve tüm  $t \geq T \geq t_4$  için

$$\begin{aligned}
\int_T^t H(t, s) \Psi(s) ds &\leq - \int_T^t H(t, s) w'(s) ds + \int_T^t H(t, s) \xi(s) w(s) ds \\
&- \frac{\alpha}{\gamma} \int_T^t H(t, s) \frac{A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) ds \\
&- \frac{\alpha(\gamma-1)}{\gamma} \int_T^t H(t, s) \frac{A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) ds
\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

elde edilir.

Kısmi integrasyon ile

$$\begin{aligned}
\int_T^t H(t, s) w'(s) ds &= H(t, s) w(s) \Big|_T^t - \int_T^t \frac{\partial H}{\partial s}(t, s) w(s) ds \\
&= -H(t, T) w(T) - \int_T^t \frac{\partial H}{\partial s}(t, s) w(s) ds
\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

e ulaşırız.

(4.2.23) ü (4.2.22) de yerine yazar ve (4.2.5) te göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}
\int_T^t H(t, s) \Psi(s) ds &\leq H(t, T) w(T) \\
&+ \int_T^t \left[ -h(t, s) \sqrt{H(t, s)} + H(t, s) \xi(s) \right] w(s) ds \\
&- \frac{\alpha}{\gamma} \int_T^t H(t, s) \frac{A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s) r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) ds \\
&- \frac{\alpha(\gamma-1)}{\gamma} \int_T^t H(t, s) \frac{A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s) r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) ds \quad (4.2.24)
\end{aligned}$$

bulunur.

$w$  ya göre tam kareye tamamlarsak, (4.2.24) den

$$\begin{aligned}
&\int_T^t \left[ H(t, s) \Psi(s) - \frac{\gamma}{4\alpha} \frac{\eta(s) r^{1/\alpha}(s) \Phi(t, s)}{A^{\alpha-1}(s, t_2)} \right] ds \\
&\leq H(t, T) w(T) - \frac{\alpha(\gamma-1)}{\gamma} \int_T^t H(t, s) \frac{A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s) r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) ds \quad (4.2.25)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla her  $t \geq t_4$  için,

$$\int_{t_4}^t \left[ H(t, s) \Psi(s) - \frac{\gamma}{4\alpha} \frac{\eta(s) r^{1/\alpha}(s) \Phi(t, s)}{A^{\alpha-1}(s, t_2)} \right] ds \leq H(t, t_4) w(t_4)$$

elde ederiz ve bu da (4.2.7) ile çelişir.

Şimdi (II) durumunu inceleyelim.  $t \geq t_2$  için  $u(t) = r(t) (-z'(t))^\alpha > 0$  olsun.

(4.2.1) den  $t \geq t_2$  için

$$u'(t) + \frac{p(t)}{r(t)} u(t) \geq 0.$$

Bu ifadenin  $t_2$  den  $t$  ye kadar integralini alırsak,

$$u(t) \geq u(t_2) \exp \left( - \int_{t_2}^t \frac{p(s)}{r(s)} ds \right)$$

elde edilir ve buradan da

$$z'(t) \leq r^{1/\alpha}(t_2)z'(t_2) \left[ \frac{1}{r(t)} \exp \left( - \int_{t_2}^t \frac{p(s)}{r(s)} ds \right) \right]^{1/\alpha} \quad (4.2.26)$$

olur.

(4.2.26) yı  $t_2$  den  $t$  ye kadar integralini alır ve (4.2.2) yi de dikkate alarak  $t \rightarrow \infty$  için

$$z(t) \leq z(t_2) + r^{1/\alpha}(t_2)z'(t_2) \int_{t_2}^t \left[ \frac{1}{r(s)} \exp \left( - \int_{t_2}^s \frac{p(u)}{r(u)} du \right) \right]^{1/\alpha} ds \rightarrow -\infty$$

olur ve bu  $z(t)$  nin pozitif olması ile çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki salınım kriteri Teorem 4.2.1 in bir sonucu olarak hemen verilebilir.

**Sonuç 4.2.2.** Teorem 4.2.1 deki (4.2.2) şartının

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t k^{-1} H(t, s) \Psi(s) ds = \infty \quad (4.2.27)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \frac{\eta(s) r^{1/\alpha}(s) \Phi(t, s)}{A^{\alpha-1}(s, t_2)} ds < \infty \quad (4.2.28)$$

şartları ile değiştirildiğini ve diğer tüm şartların sağlandığını kabul edelim. Bu durumda (4.2.1) denklemi salınımlıdır.

**Teorem 4.2.3.** Kabul edelim ki (i)–(iv), (4.2.2) ve (4.2.3) şartları sağlansın.  $H$  ve  $h$  (4.2.5) i sağlayacak şekilde Teorem 4.2.1 dekiler gibi ve

$$0 < \inf_{s \geq t_0} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, t_0)} \right\} \leq \infty \quad (4.2.29)$$

olsun.  $\Psi(s)$  ve  $\Phi(t, s)$  Teorem 4.2.1 dekiler gibi ve  $\phi_+(t) = \max\{\phi(t), 0\}$  olmak üzere yeterli derecede büyük tüm  $t_2 \in [t_1, \infty) \subseteq [t_0, \infty)$  için ve tüm  $t \geq T$  için  $\sigma(t) > t_2$  olmak üzere tüm  $T > t_2$  için

$$\int_T^\infty \frac{A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)} \phi_+^2(s) ds = \infty, \quad (4.2.30)$$

ve bazı  $\gamma > 1$  ler için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ H(t, s) \Psi(s) - \frac{\gamma}{4\alpha} \frac{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)\Phi(t, s)}{A^{\alpha-1}(s, t_2)} \right] ds \geq \phi(T) \quad (4.2.31)$$

olacak şekilde  $\phi \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$  ve  $\eta \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$  fonksiyonları mevcutsa (4.2.1) in her çözümü salınımlıdır.

**İspat.**  $x(t)$  (4.2.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun ve  $t_1 \in [t_0, \infty)$  olmak üzere  $t \geq t_1$  için  $x(t) > 0$ ,  $x(\tau(t)) > 0$  ve  $x(\sigma(t)) > 0$  olsun. Teorem 4.2.1 in ispatı gibi başladığımızda dikkate alacağımız yine iki durum söz konusu olacaktır:

(I)  $t \geq t_2$  için  $z'(t) > 0$  veya (II)  $t \geq t_2$  için  $z'(t) < 0$ .

(II) durumu söz konusu ise Teorem 4.2.1 deki ispat ile aynı şekilde ilerleyerek  $z$  nin pozitifliği ile çelişki elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki (I) durumu geçerli olsun. Teorem 4.2.1 in ispatındaki gibi ilerleyerek yine (4.2.25) i elde ederiz ve bu da  $t > T \geq t_4$  için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ H(t, s) \Psi(s) - \frac{\gamma}{4\alpha} \frac{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)\Phi(t, s)}{A^{\alpha-1}(s, t_2)} \right] ds \\ & \leq w(T) - \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \frac{\alpha(\gamma-1)}{\gamma} \frac{H(t, s)A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) ds \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

şeklinde yazılabilir. (4.2.32) den

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ H(t, s) \Psi(s) - \frac{\gamma}{4\alpha} \frac{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)\Phi(t, s)}{A^{\alpha-1}(s, t_2)} \right] ds \\ & \leq w(T) - \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \frac{\alpha(\gamma-1)}{\gamma} \frac{H(t, s)A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

olduğu görülür.

(4.2.31) göz önüne alınırsa tüm  $t > T \geq t_4$  ve herhangi  $\gamma > 1$  için (4.2.33) den

$$w(T) \geq \phi(T) + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \frac{\alpha(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{H(t, s) A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s) r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) ds \quad (4.2.34)$$

elde edilir. Dolayısıyla tüm  $T \geq t_4$  için

$$w(T) \geq \phi(T) \quad (4.2.35)$$

ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_4)} \int_{t_4}^t \frac{H(t, s) A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s) r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) ds \leq \frac{\gamma(w(t_4) - \phi(t_4))}{\alpha(\gamma - 1)} < \infty. \quad (4.2.36)$$

Şimdi iddia ediyoruz ki,

$$\int_{t_4}^{\infty} \frac{A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s) r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) ds < \infty \quad (4.2.37)$$

şartı sağlanır. Karşıtının doğru olduğunu kabul edelim, yani

$$\int_{t_4}^{\infty} \frac{A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s) r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) ds = \infty \quad (4.2.38)$$

olsun. (4.2.29) tarafından,

$$\inf_{s \geq t_0} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, t_0)} \right\} > \varepsilon \quad (4.2.39)$$

olacak şekilde sabit bir  $\varepsilon > 0$  mevcuttur. Diğer yandan (4.2.38) sayesinde her pozitif  $\delta$  sayısı için bir  $t_5 > t_4$  vardır öyle ki tüm  $t \geq t_5$  için

$$\int_{t_4}^t \frac{A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s) r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) ds \geq \frac{\delta}{\varepsilon}. \quad (4.2.40)$$



(4.2.40) ı göz önüne alır ve kısmi integrasyon uygularsak tüm  $t \geq t_5$  için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{H(t, t_4)} \int_{t_4}^t H(t, s) \frac{A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) ds \\
&= \frac{1}{H(t, t_4)} \int_{t_4}^t H(t, s) d \left[ \int_{t_4}^s \frac{A^{\alpha-1}(\xi, t_2)}{\eta(\xi)r^{1/\alpha}(\xi)} w^2(\xi) d\xi \right] ds \\
&= \frac{1}{H(t, t_4)} \int_{t_4}^t \left[ \int_{t_4}^s \frac{A^{\alpha-1}(\xi, t_2)}{\eta(\xi)r^{1/\alpha}(\xi)} w^2(\xi) d\xi \right] \left[ -\frac{\partial H(t, s)}{\partial s} \right] ds \\
&\geq \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{1}{H(t, t_4)} \int_{t_5}^t \left[ -\frac{\partial H(t, s)}{\partial s} \right] ds \\
&= \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{H(t, t_5)}{H(t, t_4)} \geq \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{H(t, t_5)}{H(t, t_0)} \tag{4.2.41}
\end{aligned}$$

elde ederiz. (4.2.39) dan

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, t_0)} > \varepsilon > 0, \tag{4.2.42}$$

elde edilir ve böylece tüm  $t \geq t_6$  için

$$\frac{H(t, t_5)}{H(t, t_0)} \geq \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $t_6 \geq t_5$  vardır. En son eşitsizlikten ve (4.2.41) den  $t \geq t_6$  için

$$\frac{1}{H(t, t_4)} \int_{t_4}^t H(t, s) \frac{A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) ds \geq \delta \tag{4.2.43}$$

elde ederiz.  $\delta$  keyfi bir pozitif sabit olduğundan

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_4)} \int_{t_4}^t H(t, s) \frac{A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) ds = \infty \tag{4.2.44}$$

elde ederiz ve (4.2.36) ile çelişir. Dolayısıyla (4.2.37) geçerlidir ve (4.2.35) ten dolayı

$$\int_{t_4}^{\infty} \frac{A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)} \phi_+^2(s) ds \leq \int_{t_4}^{\infty} \frac{A^{\alpha-1}(s, t_2)}{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)} w^2(s) ds < \infty \quad (4.2.45)$$

sağlanır. Bu da (4.2.30) ile çelişkidir ve ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 4.2.4.** Kabul edelim ki (4.2.31) şartı aşağıdaki şekliyle değişmiş olarak Teorem 4.2.3 tüm şartları sağlanmış olsun

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ H(t, s) \Psi(s) - \frac{\gamma}{4\alpha} \frac{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)\Phi(t, s)}{A^{\alpha-1}(s, t_2)} \right] ds \geq \phi(T). \quad (4.2.46)$$

Bu durumda (4.2.1) in her çözümü salınımlıdır.

**İspat.**

$$\begin{aligned} \phi(T) &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ H(t, s) \Psi(s) - \frac{\gamma}{4\alpha} \frac{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)\Phi(t, s)}{A^{\alpha-1}(s, t_2)} \right] ds \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ H(t, s) \Psi(s) - \frac{\gamma}{4\alpha} \frac{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)\Phi(t, s)}{A^{\alpha-1}(s, t_2)} \right] ds \end{aligned}$$

eşitsizliğinin bir sonucu olarak açıktır ve bu nedenle ayrıntılarına yer vermiyoruz.

Şimdi (4.2.4) durumu için salınım sonuçları verelim.

**Teorem 4.2.5.** Kabul edelim ki (i)–(iv), (4.2.2), (4.2.4) sağlansın ve  $H$  ile  $h$  (4.2.5) sağlanacak şekilde Teorem 4.2.1 dekiler gibi olsun.

Eğer;

$$\Omega(t) = k\eta(t)q(t)\psi^\alpha(\sigma(t), t_2), \quad (4.2.47)$$

ve  $\Phi(t, s)$  (4.2.8) deki gibi olmak üzere yeterli derecede büyük her  $t_2 \in [t_1, \infty) \subseteq [t_0, \infty)$  için ve tüm  $t \geq T$  için  $\sigma(t) > t_2$  olacak şekilde tüm  $T > t_2$  için ve bazı  $\gamma \geq 1$  için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ H(t, s) \Omega(s) - \frac{\gamma}{4\alpha} \frac{\eta(s)r^{1/\alpha}(s)\Phi(t, s)}{A^{\alpha-1}(s, t_2)} \right] ds = \infty \quad (4.2.48)$$

olacak şekilde pozitif bir  $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$  fonksiyonu mevcutsa bu durumda (4.2.1) in her çözümü salınımlıdır.

**İspat.** Kabul edelim ki bazı  $t_1 \in [t_0, \infty)$  için  $t \geq t_1$  için  $x(t) > 0$ ,  $x(\tau(t)) > 0$  ve  $x(\sigma(t)) > 0$  olmak üzere  $x(t)$  (4.2.1) in salınımsız bir çözümü olsun. Teorem 4.2.1 in ispatında olduğu gibi devam edersek yine iki durum söz konusu olacaktır. (I)  $t \geq t_2$  için  $z'(t) > 0$  veya (II)  $t \geq t_2$  için  $z'(t) < 0$ . Eğer (II) durumu geçerli ise Teorem 4.2.1 in ispatında olduğu gibi  $z(t)$  nin pozitifliği ile çelişki elde edilir.

Eğer (I) durumu geçerli ise bu durumda Teorem 4.2.1 in ispatında olduğu gibi  $t \geq t_4$  için (4.2.17) e ulaşırız. (4.2.4) ve  $\tau$  nun kesin artan olmasından dolayı

$$\tau^{-1}(\sigma(t)) \geq t$$

dir ve  $z$  artan olduğundan

$$\frac{z(\tau^{-1}(\sigma(t)))}{z(t)} \geq 1 \quad (4.2.49)$$

elde ederiz.

(4.2.49) u (4.2.17) de kullanırsak

$$w'(t) \leq \xi(t)w(t) - k\eta(t)q(t)\psi^\alpha(\sigma(t), t_2) - \alpha \frac{w^{(1+\alpha)/\alpha}(t)}{(\eta(t)r(t))^{1/\alpha}} \quad (4.2.50)$$

elde edilir. İspatın kalan kısmı Teorem 4.2.1 in ispatının ilk kısmına benzerdir ve bu sebeple burada yer verilmemiştir.

**Sonuç 4.2.6.** Teorem 4.2.4 ün sonucu (4.2.47) kabulü

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t k^{-1} H(t, s) \Omega(s) ds = \infty \quad (4.2.51)$$

ve (4.2.28) şartları ile değiştirilse de geçerliliğini korur.

**Teorem 4.2.7.** Kabul edelim ki (i)–(iv), (4.2.2) ve (4.2.4) sağlansın.

$H$  ve  $h$ , (4.2.5) ve (4.2.29) sağlanacak şekilde Teorem 4.2.1 deki gibi olsun.  $\Omega(t)$  (4.2.48) deki gibi olmak üzere, eğer (4.2.30) sağlanacak şekilde  $\phi \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$  ve  $\eta \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$  fonksiyonları varsa ve yeterli derecede büyük tüm  $t_2 \in$

$[t_1, \infty) \subseteq [t_0, \infty)$  için ve tüm  $t \geq T$  için  $\sigma(t) > t_2$  olmak üzere tüm  $T > t_2$  için ve bazı  $\gamma > 1$  için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ H(t, s) \Omega(s) - \frac{\gamma}{4\alpha} \frac{\eta(s) r^{1/\alpha}(s) \Phi(t, s)}{A^{\alpha-1}(s, t_2)} \right] ds \geq \phi(T) \quad (4.2.52)$$

ise (4.2.1) in tüm çözümleri salınımlıdır.

**İspat.** İspat (4.2.49), (4.2.50) ve Teorem 4.2.3 ten elde edilebileceğinden dolayı ayrıntılara burada yer vermeyeceğiz.

**Teorem 4.2.8.** Kabul edelim ki yukarıdaki teoremin (4.2.52) şartı

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ H(t, s) \Omega(s) - \frac{\gamma}{4\alpha} \frac{\eta(s) r^{1/\alpha}(s) \Phi(t, s)}{A^{\alpha-1}(s, t_2)} \right] ds \geq \phi(T) \quad (4.2.53)$$

ile yer değiştirsın ve diğer tüm şartlar sağlansın. Bu durumda (4.2.1) in tüm çözümleri salınımlıdır.

**İspat.** İspat (4.2.49), (4.2.50) ve Teorem 4.2.4 ten elde edilebileceğinden dolayı ayrıntılara burada yer vermeyeceğiz.

### 4.2.3 Örnekler

Çalışmayı yukarıdaki sonuçların uygulanabilirliğini göstermek için aşağıdaki örneklerle sonlandıracağız. İlk örnek  $t \rightarrow \infty$  için  $h(t) \rightarrow \infty$  durumunu, ikinci örnek ise  $h$  nin sabit bir fonksiyon olma durumunu ele almaktadır.

**Örnek 4.2.9.**  $z(t) = x(t) + tx(t-2)$  olmak üzere damping terimli yarı-lineer

$$\left( (z'(t))^5 \right)' + \frac{1}{t} (z'(t))^5 + (t+1)^4 x^5(t-1) = 0, \quad t \geq 2, \quad (4.2.54)$$

NDD i göz önüne alalım. Burada  $\alpha = 5$ ,  $\tau(t) = t-2$ ,  $\sigma(t) = t-1$ ,  $r(t) = 1$ ,  $p(t) = 1/t$ ,  $q(t) = (t+1)^4$ ,  $h(t) = t$  ve  $f(t, x(\sigma(t))) = x^5(t-1)$  dir. (i)-(iv), (4.2.2) ve (4.2.4) şartlarının sağlandığı kolayca görülür ve  $t_2 = t_1 = t_0 = 2$  seçerek

$$A(t, t_2) = A(t, 2) = t-2,$$

$$A(\tau^{-1}(t), t_2) = A(t+2, 2) = t,$$

$$A(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)), t_2) = A(t+4, 2) = t+2,$$

ve  $t \geq t_0 = 2$  için,

$$\psi(t, t_2) = \frac{1}{t+2} \left( 1 - \frac{t+2}{t(t+4)} \right) > 0$$

bulunur.

$H(t, s) = (t-s)^2$  dersek  $H \in \mathcal{P}$  ve  $h(t, s) = 2$  olur.  $\eta(t) = t$  ile  $\xi(t) = 0$  olduğunu görürüz ve tüm  $T \in (3, \infty)$  için (4.2.51) ve (4.2.28) şartları,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t k^{-1} H(t, s) \Omega(s) ds &\geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{(2/5)^5}{(t-T)^2} \int_T^t (t-s)^2 \frac{s}{s+1} ds \\ &\geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{(2/5)^5 T}{T+1} \frac{1}{(t-T)^2} \int_T^t (t-s)^2 ds \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{(2/5)^5 T (t^3 - 3t^2 T + 3t T^2 - T^3)}{3(T+1)(t-T)^2} = \infty \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \frac{\eta(s) r^{1/\alpha}(s) \Phi(t, s)}{A^{\alpha-1}(s, t_2)} ds &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-T)^2} \int_T^t \frac{4s}{(s-2)^4} ds \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-T)^2} \frac{4}{(T-2)^4} \int_T^t s ds \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{2(t^2 - T^2)}{(T-2)^4 (t-T)^2} = \frac{2}{(T-2)^4} < \infty \end{aligned}$$

olup (4.2.51) ve (4.2.28) şartları sağlanmış olur. Dolayısıyla Sonuç 4.2.6'nın tüm şartları sağlanır ve (4.2.54) salınımlıdır.

**Örnek 4.2.10.**  $z(t) = x(t) + 10x(t-1)$  olmak üzere damping terimli yarı-lineer

$$\left( \frac{1}{t^3} (z'(t))^3 \right)' + \frac{1}{t^4} (z'(t))^3 + t^2 x^3(t/2) = 0, \quad t \geq 2, \quad (4.2.55)$$

NDD i göz önüne alalım. Burada  $\alpha = 3$ ,  $\tau(t) = t-1$ ,  $\sigma(t) = t/2$ ,  $r(t) = 1/t^3$ ,  $p(t) = 1/t^4$ ,  $q(t) = t^2$ ,  $h(t) = 10$  ve  $f(t, x(\sigma(t))) = x^3(t/2)$  dir. (i)-(iv), (4.2.2) ve

(4.2.3) şartlarının sağlandığı kolayca görülür ve  $t_2 = t_1 = t_0 = 2$  ile

$$A(t, t_2) = A(t, 2) = (t^2 - 4)/2,$$

$$A(\tau^{-1}(t), t_2) = A(t + 1, 2) = ((t + 1)^2 - 4)/2,$$

$$A(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)), t_2) = A(t + 2, 2) = ((t + 2)^2 - 4)/2,$$

ve  $t \geq t_0 = 2$  için

$$\psi(t, t_2) = \frac{1}{10} \left( 1 - \frac{t(t+4)}{10(t-1)(t+3)} \right) > 0$$

bulunur.

$H(t, s) = (t - s)^2$  dersek  $H \in \mathcal{P}$  ve  $h(t, s) = 2$  olur.  $\eta(t) = t$  ile  $\xi(t) = 0$  dır ve Örnek (4.2.9) deki gibi (4.2.27) ve (4.2.28) şartlarının sağlandığını görmek zor değildir. Dolayısıyla Sonuç 4.2.2 nin tüm şartları sağlanır ve bu yüzden (4.2.55) salınımlıdır.

### 4.3 İkinci Mertebeden Damping Terimli Lineer Karma NDD lerin Salınımı

#### 4.3.1 Giriş

Bu bölümde

$$z(t) = x(t) + p_1(t)x(\tau_1(t)) + p_2(t)x(\tau_2(t))$$

olmak üzere

$$(r(t)(z'(t)))' + p(t)z'(t) + q(t)x(\sigma(t)) = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (4.3.1)$$

ikinci mertebeden damping terimli lineer karma NDD inin çözümlerinin salınım davranışını ele alacağız.

Bu bölüm boyunca aşağıdaki şartların sağlandığını kabul ediyoruz:

- (i)  $q(t)$  büyük  $t$  değerleri için özdeş olarak sıfır olmamak üzere  $p(t) \geq 0$ ,  $q(t) \geq 0$  ve  $r(t) > 0$  olacak şekilde  $p, q, r : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli sürekli fonksiyonlar ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{r(t)} \exp \left( - \int_{t_0}^t \frac{p(s)}{r(s)} ds \right) dt = \infty; \quad (4.3.2)$$

- (ii)  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  kesin artan,  $\tau_1(t) < t$ ,  $\tau_2(t) > t$  ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tau_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$  olacak şekilde  $\tau_1, \tau_2, \sigma : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli sürekli fonksiyonlardır;

- (iii) Büyük  $t$  değerleri için  $p_2(t) \not\equiv 1$  olmak üzere  $p_1(t) > 0$  ve  $p_2(t) \geq 1$  olacak şekilde  $p_1, p_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli sürekli fonksiyonlardır;

(5.0.1) in çözümünden, bazı  $t_x \geq t_0$  lar için  $[t_x, \infty)$  da (5.0.1) i sağlayan ve  $z \in C^1([t_x, \infty), \mathbb{R})$ ,  $rz' \in C^1([t_x, \infty), \mathbb{R})$  özelliklerinde olan bir  $x \in C([t_x, \infty), \mathbb{R})$  fonksiyonunu kastediyoruz. (5.0.1) çözümlerinden sadece  $[t_x, \infty)$  yarım aralığında mevcut olanları ve her  $T_1 \geq t_x$  için

$$\sup \{|x(t)| : T_1 \leq t < \infty\} > 0$$

şartını sağlayanları dikkate alıyoruz. Üstelik (5.0.1) in bu şekilde çözümlere sahip olduğunu kabul ediyoruz. Eğer  $x(t)$  nin  $[t_x, \infty)$  da keyfi derecede büyük sıfırları

mevcutsa (5.0.1) in  $x(t)$  çözümüne salınımlıdır denir. Bir başka ifade ile her  $t_1 \in [t_x, \infty)$  için  $x(t_2) = 0$  olacak şekilde  $t_2 \geq t_1$  mevcutsa  $x(t)$  çözümüne salınımlıdır denir. Aksi halde salınımsızdır denir. Yani  $x(t)$  çözümü neticede pozitif ya da negatif oluyorsa salınımsızdır denir. Eğer tüm çözümleri salınımlı ise (5.0.1) denkleminin kendisine salınımlıdır denir.

İkinci mertebeden gecikmeli veya ileri argümentli NDD lerin çözümlerinin salınım davranışı pek çok araştırmacı tarafından farklı yöntemler kullanılarak geniş ölçüde araştırılmıştır. Örnek olarak (Agarwal ve ark., 2003a, 2014; Baculíková ve Džurina, 2011b; Bohner ve ark., 2017; Chen, 2010; Ji ve ark., 2014; Kubiacyk ve ark., 2013; Li ve ark., 2012, 2013b; Li ve Rogovchenko, 2014a, 2015b, 2017c; Wang ve Li, 2016) makaleleri ve bu çalışmalardaki referanslar verilebilir. Fakat ikinci mertebeden gecikmeli veya ileri argümentli NDD lerle kıyaslandığında ikinci mertebeden karma argümentli NDD lerin salınım sonuçları nadirdir ve hatta bu sonuçlar da damping terimsiz denklemlerden elde edilen sonuçlardır. Bu konu ile ilgili son zamanlarda elde edilen sonuçlara dair örnekler için (Agwa ve ark., 2016; Arul ve Shobha, 2015; Ji ve ark., 2014; Li, 2010; Li ve ark., 2011, 2013a; Qi ve Yu, 2015; Thandapani ve Rama, 2013; Thandapani ve ark., 2016; Zhang ve ark., 2016) ve bu çalışmalardaki referanslar verilebilir. Diğer taraftan ilgili literatürdeki incelenen denklem tipleri genel olarak şu şekildedir.

Li (Li, 2010) ve Li ve arkadaşları (Li ve ark., 2014a) karşılaştırma testi kullanarak

$$z(t) = x(t) + p_1(t)x(t - \sigma_1) + p_2(t)x(t + \sigma_2)$$

olmak üzere ikinci mertebeden sabit karma argümentli

$$(r(t)(z'(t)))' + q_1(t)x(t - \sigma_3(t)) + q_2(t)x(t + \sigma_4(t)) = 0 \quad (4.3.3)$$

NDD inin çözümlerinin salınımlı çalışmıştır.

Ji ve arkadaşları (Ji ve ark., 2014))

$$z(t) = x(t) + p_1(t)x(\eta_1(t)) + p_2(t)x(\eta_2(t))$$



olmak üzere ikinci mertebeden yarı-lineer

$$(r(t) (z^\Delta(t))^\gamma)^\Delta + q_1(t)x^\gamma(\tau_1(t)) + q_2(t)x^\gamma(\tau_2(t)) = 0 \quad (4.3.4)$$

karma zaman bağımlı argümentli nötral dinamik denklemini ele almıştır.

Qi ve Yu (Qi ve Yu, 2015) ve Zhang ve arkadaşarı (Zhang ve ark., 2016),

$$z(t) = x(t) + p_1(t)x(t - \sigma_1) + p_2(t)x(t + \sigma_2)$$

olmak üzere sabit karma argümentli ve dağıtılmış sapma argümentli ikinci mertebeden

$$(r(t)(z'(t))^\gamma)' + \int_a^b q_1(t, \xi)x^\gamma(t - \xi)d\xi + \int_a^b q_2(t, \xi)x^\gamma(t + \xi)d\xi = 0 \quad (4.3.5)$$

NDD inin çözümlerinin salınımını çalışmıştır.

Li ve ark. (Li ve ark., 2013a)

$$z(t) = x(t) + \sum_{i=1}^m p_i(t)x(\tau_i(t))$$

olmak üzere ikinci mertebeden yarı-lineer karma argümenli

$$(r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t))' + q(t)|x(\sigma(t))|^{\alpha-1}x(\sigma(t)) = 0 \quad (4.3.6)$$

NDD inin çözümlerinin salınımını çalışmıştır.

Arul ve Shobha (Arul ve Shobha, 2015)

$$z(t) = x(t) + p_1(t)x(t - \tau) + p_2(t)x(t + \delta)$$

olmak üzere ikinci mertebeden sabit karma argümentli

$$(r(t)z'(t))' + q(t)f(x(\sigma(t))) = 0 \quad (4.3.7)$$

NDD inin çözümlerinin salınım durumunu incelemiştir.

Agwa ve arkadaşları (Agwa ve ark., 2016)

$$z(t) = x(t) + p_1(t)x(\eta_1(t)) + p_2(t)x(\eta_2(t))$$

olmak üzere ikinci mertebeden karma argümentli nonlinear

$$(r(t)(z^\Delta(t))^\gamma)^\Delta + f(t, x(\tau_1(t))) + g(t, x(\tau_2(t))) = 0 \quad (4.3.8)$$

NDD inin çözümlerinin salınımı ele amıştır.

Thandapani ve Rama (Thandapani ve Rama, 2013) ve Thandapani ve arkadaşları (Thandapani ve ark., 2016)

$$z(t) = x(t) + p_1(t)x(t - \sigma_1) + p_2(t)x(t + \sigma_2)$$

olmak üzere ikinci mertebeden karma argümentli

$$(r(t)[z^\alpha]')' + q_1(t)x^\beta(t - \tau_1) + q_2(t)x^\gamma(t + \tau_2) \quad (4.3.9)$$

NDD inin çözümlerinin salınımını çalışmışlardır.

Önemle vurgulanması gereken bir nokta şudur ki yukarıda verilen çalışmaların tamamında  $p_1(t)$  ve  $p_2(t)$  katsayı fonksiyonları pozitif ve üstten sınırlıdır.

Yukarıda yer alan makalelerin motivasyonu bu çalışmada (5.0.1) için bazı yeni salınım kriterleri vermek istiyoruz. Vurgulamak isteriz ki bu çalışmada sunulan sonuçlar  $i = 1, 2, 3$  için  $\sigma_i(t) > 0$  olmak üzere  $\tau_1(t) = t - \sigma_1$ ,  $\tau_2(t) = t + \sigma_2$  ve  $\sigma(t) = t \pm \sigma_3$  şeklindeki sabit gecikmeler için de yeni sonuçlardır. Ayrıca belirtmek isteriz ki bu çalışmadaki sonuçlar daha genel damping terimli KNDD lere olduğu gibi (5.0.3)-(4.3.9) denklemlerinin damping terimli formlarına da kolaylıkla genişletilebilir. Bu sebeplerle umulur ki mevcut çalışma sadece ikinci mertebeden damping terimli KNDD ler için salınım teorisindeki bir boşluğu doldurmakla kalmayıp bu alanda yeni çalışmalara da ilham kaynağı olur.

### 4.3.2 $p_1(t) > 0$ ve $p_2(t) \geq 1$ Durumunda salınım sonuçları

Bu kısımda sırasıyla  $\sigma(t) \leq \tau_2(t)$  ve  $\sigma(t) \geq \tau_2(t)$  durumlarında (5.0.1) in salınımı için bazı yeni kriterler oluşturacağız. Notasyon kolaylığı için

$$R(t, t_1) = \int_{t_1}^t \frac{1}{r(s)} ds, \quad t \geq t_1 \geq t_0 \quad (4.3.10)$$

ve  $\tau_2^{-1}$ ,  $\tau_2$  nin ters fonksiyonu olmak üzere  $\psi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  yi

$$\psi(t) := \frac{1}{p_2(\tau_2^{-1}(t))} \left[ 1 - \frac{1}{p_2(\tau_2^{-1}(\tau_2^{-1}(t)))} - \frac{p_1(\tau_2^{-1}(t))}{p_2(\tau_2^{-1}(\tau_1(\tau_2^{-1}(t))))} \right] \quad (4.3.11)$$

olarak tanımlayalım. Bu bölüm boyunca yeterince büyük tüm  $t$  ler için  $\psi(t) > 0$  olduğunu kabul edeceğiz.

Aşağıdaki lemma ile başlayalım.

**Lemma 4.3.1.** Kabul edelim ki bazı  $t_1 \geq t_0$  için  $t \geq t_1$  olmak üzere

$$z(t) > 0, \quad z'(t) > 0 \text{ ve } (r(t)z'(t))' \leq 0 \quad (4.3.12)$$

olsun. Bu durumda  $t \geq t_1$  için

$$z(t) \geq r(t)z'(t)R(t, t_1). \quad (4.3.13)$$

Ayrıca  $t \geq t_2$  için

$$\left( \frac{z(t)}{R(t, t_1)} \right)' \leq 0 \quad (4.3.14)$$

olacak şekilde  $t_2 > t_1$  vardır.

**İspat.** Kabul edelim ki bazı  $t_1 \geq t_0$  için  $t \geq t_1$  olmak üzere (4.3.12) sağlansın. Bu durumda

$$z(t) = z(t_1) + \int_{t_1}^t \frac{r(s)z'(s)}{r(s)} ds \geq r(t)z'(t) \int_{t_1}^t \frac{1}{r(s)} ds = r(t)z'(t)R(t, t_1) \quad (4.3.15)$$

ve dolayısıyla (4.3.13) sağlanmış olur. Daha sonra (4.3.13) den tüm  $t \geq t_2 := t_1 + 1$  için

$$\left( \frac{z(t)}{R(t, t_1)} \right)' = \frac{1/r(t)[r(t)z'(t)R(t, t_1) - z(t)]}{(R(t, t_1))^2} \leq 0 \quad (4.3.16)$$

(4.3.14) sağlanır ve ispat tamamlanır.

**Teorem 4.3.2.** Kabul edelim ki (i) – (iii) sağlansın ve  $\sigma(t) \leq \tau_2(t)$  olsun. Eğer

$$\xi(t) = \frac{\eta'(t)r(t) - \eta(t)p(t)}{\eta(t)r(t)} \quad (4.3.17)$$

olmak üzere yeterince büyük tüm  $t_1 \in [t_0, \infty)$  için tüm  $T > t_1$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[ \eta(s)q(s)\psi(\sigma(s)) \frac{R(\tau_2^{-1}(\sigma(s)), t_1)}{R(s, t_1)} - \frac{\eta(s)r(s)\xi^2(s)}{4} \right] ds = \infty \quad (4.3.18)$$

olacak şekilde pozitif bir  $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$  fonksiyonu mevcut ise bu durumda (5.0.1) salınımlıdır.

**İspat.**  $x(t)$  (5.0.1) in salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın  $t \geq t_1$  için  $x(t) > 0$ ,  $x(\tau_1(t)) > 0$ ,  $x(\tau_2(t)) > 0$  ve  $x(\sigma(t)) > 0$  olacak şekilde  $t_1 \in [t_0, \infty)$  olduğunu kabul edebiliriz.  $(x(t))$  nin neticede negatif olma durumunun ispatı da benzerdir ve bundan dolayı bu durumun ayrıntılarını vermiyoruz) (5.0.1) den

$$(r(t)z'(t))' + p(t)z'(t) = -q(t)x(\sigma(t)) \leq 0$$

ya da  $t \geq t_1$  için

$$(r(t)z'(t))' + p(t)z'(t) \leq 0$$

elde ederiz.

$y(t) = r(t)z'(t)$  dersek son eşitsizlik

$$y'(t) + \frac{p(t)}{r(t)}y(t) \leq 0$$

halini alır ve bu da  $t \geq t_1$  için

$$\left( \exp \left( \int_{t_1}^t p(s)/r(s) ds \right) y(t) \right)' \leq 0$$

eşitsizliğini gerektirir. Böylece,  $\exp(\int_{t_1}^t p(s)/r(s) ds)y(t)$  artmayandır ve en sonunda devamlı surette, diyelim ki  $t_2 \geq t_1$  için  $[t_2, \infty)$  da işaretini değiştirmez. Dolayısıyla  $z'(t)$  nin  $[t_2, \infty)$  da devamlı surette sabit bir işareti olur ve bu durumda dikkate alacağımız iki durum ortaya çıkar. (I)  $t \geq t_2$  için  $z'(t) > 0$  veya (II)  $t \geq t_2$  için  $z'(t) < 0$ .

İlk olarak durum (I) i ele alalım.  $t \geq t_2$  için  $z'(t) > 0$  olduğundan (5.0.1) den  $t \geq t_2$  için  $(r(t)z'(t))' \leq 0$  ve bundan dolayı Lemma 4.3.1 ışığında, bazı  $t_3 \in (t_2, \infty)$  için  $t \geq t_3$  olmak üzere (4.3.14) sağlanır. Yani  $t \geq t_3$  için  $z(t)/R(t, t_1)$  artmayandır.  $z(t)$  nin tanımı ışığında, (aynı zamanda (Agarwal ve ark., 2003a) nolu kaynaktaki (8.6) eşitsizliğinden)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{p_2(\tau_2^{-1}(t))} [z(\tau_2^{-1}(t)) - x(\tau_2^{-1}(t)) - p_1(\tau_2^{-1}(t))x(\tau_1(\tau_2^{-1}(t)))] \\ &= \frac{z(\tau_2^{-1}(t))}{p_2(\tau_2^{-1}(t))} - \frac{z(\tau_2^{-1}(\tau_2^{-1}(t))) - x(\tau_2^{-1}(\tau_2^{-1}(t)))}{p_2(\tau_2^{-1}(t))p_2(\tau_2^{-1}(\tau_2^{-1}(t)))} \\ &\quad - \frac{p_1(\tau_2^{-1}(\tau_2^{-1}(t)))x(\tau_1(\tau_2^{-1}(\tau_2^{-1}(t))))}{p_2(\tau_2^{-1}(t))p_2(\tau_2^{-1}(\tau_2^{-1}(t)))} \\ &\quad - \frac{p_1(\tau_2^{-1}(t))}{p_2(\tau_2^{-1}(t))} \left[ \frac{z(\tau_2^{-1}(\tau_1(\tau_2^{-1}(t)))) - x(\tau_2^{-1}(\tau_1(\tau_2^{-1}(t))))}{p_2(\tau_2^{-1}(\tau_1(\tau_2^{-1}(t))))} \right. \\ &\quad \left. - \frac{p_1(\tau_2^{-1}(\tau_1(\tau_2^{-1}(t))))x(\tau_1(\tau_2^{-1}(\tau_1(\tau_2^{-1}(t))))}{p_2(\tau_2^{-1}(\tau_1(\tau_2^{-1}(t))))} \right] \\ &\geq \frac{z(\tau_2^{-1}(t))}{p_2(\tau_2^{-1}(t))} - \frac{z(\tau_2^{-1}(\tau_2^{-1}(t)))}{p_2(\tau_2^{-1}(t))p_2(\tau_2^{-1}(\tau_2^{-1}(t)))} \\ &\quad - \frac{p_1(\tau_2^{-1}(t))z(\tau_2^{-1}(\tau_1(\tau_2^{-1}(t))))}{p_2(\tau_2^{-1}(t))p_2(\tau_2^{-1}(\tau_1(\tau_2^{-1}(t))))}. \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

$z$ ,  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  nin kesin artan olduğu kullanarak ve  $\tau_1(t) < t < \tau_2(t)$  yi göz önüne alarak

$$z(\tau_2^{-1}(\tau_2^{-1}(t))) < z(\tau_2^{-1}(t)) \quad (4.3.20)$$

ve

$$z(\tau_2^{-1}(\tau_1(\tau_2^{-1}(t)))) < z(\tau_2^{-1}(t)) \quad (4.3.21)$$

elde edilir. Son iki eşitsizliğin (4.3.19) da kullanılmasıyla

$$x(t) \geq \frac{1}{p_2(\tau_2^{-1}(t))} \left[ 1 - \frac{1}{p_2(\tau_2^{-1}(\tau_2^{-1}(t)))} - \frac{p_1(\tau_2^{-1}(t))}{p_2(\tau_2^{-1}(\tau_1(\tau_2^{-1}(t))))} \right] z(\tau_2^{-1}(t)) \quad (4.3.22)$$

veya  $t \geq t_3$  için

$$x(t) \geq \psi(t)z(\tau_2^{-1}(t)). \quad (4.3.23)$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$  olduğundan tüm  $t \geq t_4$  için  $\sigma(t) \geq t_3$  olacak şekilde  $t_4 \geq t_3$  seçebiliriz.

Dolayısıyla (4.3.23) den  $t \geq t_4$  için

$$x(\sigma(t)) \geq \psi(\sigma(t))z(\tau_2^{-1}(\sigma(t))) \quad (4.3.24)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin (5.0.1) de kullanılması  $t \geq t_4$  için

$$(r(t)z'(t))' + p(t)z'(t) + q(t)\psi(\sigma(t))z(\tau_2^{-1}(\sigma(t))) \leq 0 \quad (4.3.25)$$

verir. Riccati tipi dönüşüm kullanarak  $w(t)$  fonksiyonunu tanımlayalım.  $t \geq t_4$  için

$$w(t) := \eta(t) \frac{r(t)z'(t)}{z(t)} \quad (4.3.26)$$

Açıktır ki  $w(t) > 0$  ve (4.3.25) ve (4.3.26) dan

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{\eta'(t)}{\eta(t)}w(t) + \eta(t) \left[ \frac{(r(t)z'(t))'z(t) - r(t)(z'(t))^2}{z^2(t)} \right] \\ &\leq \frac{\eta'(t)}{\eta(t)}w(t) + \frac{\eta(t)}{z(t)} [-p(t)z'(t) - q(t)\psi(\sigma(t))z(\tau_2^{-1}(\sigma(t)))] - \frac{w^2(t)}{\eta(t)r(t)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\eta'(t)}{\eta(t)}w(t) - \frac{p(t)}{r(t)}w(t) - \eta(t)q(t)\psi(\sigma(t))\frac{z(\tau_2^{-1}(\sigma(t)))}{z(t)} - \frac{w^2(t)}{\eta(t)r(t)}. \quad (4.3.27)$$

(4.3.18) kullanılarak (4.3.27) eşitsizliği

$$w'(t) \leq \xi(t)w(t) - \eta(t)q(t)\psi(\sigma(t))\frac{z(\tau_2^{-1}(\sigma(t)))}{z(t)} - \frac{1}{\eta(t)r(t)}w^2(t) \quad (4.3.28)$$

halini alır.  $z(t)/R(t, t_1)$  in  $[t_4, \infty) \subseteq [t_3, \infty)$  da artmadığını ve  $\sigma(t) \leq \tau_2(t)$  nin  $\tau_2^{-1}(\sigma(t)) \leq t$  yi gerektirdiğini kullanarak

$$\frac{z(\tau_2^{-1}(\sigma(t)))}{z(t)} \geq \frac{R(\tau_2^{-1}(\sigma(t)), t_1)}{R(t, t_1)} \quad (4.3.29)$$

elde ederiz.

(4.3.29) u (4.3.28) de yerine yazmak  $t \geq t_4$  için

$$w'(t) \leq \xi(t)w(t) - \eta(t)q(t)\psi(\sigma(t))\frac{R(\tau_2^{-1}(\sigma(t)), t_1)}{R(t, t_1)} - \frac{1}{\eta(t)r(t)}w^2(t) \quad (4.3.30)$$

verir.  $w$  ya göre tam kareye tamamlarsak, (4.3.30) dan  $t \geq t_4$  için

$$w'(t) \leq -\eta(t)q(t)\psi(\sigma(t))\frac{R(\tau_2^{-1}(\sigma(t)), t_1)}{R(t, t_1)} + \frac{\eta(t)r(t)\xi^2(t)}{4}. \quad (4.3.31)$$

(4.3.31) in  $t_4$  den  $t$  ye integrali alınırsa

$$\int_{t_4}^t \left[ \eta(s)q(s)\psi(\sigma(s))\frac{R(\tau_2^{-1}(\sigma(s)), t_1)}{R(s, t_1)} - \frac{\eta(s)r(s)\xi^2(s)}{4} \right] ds \leq -w(t) + w(t_4) < w(t_4) \quad (4.3.32)$$

olduğunu görürüz ve bu da (4.3.17) ile çelişir.

Şimdi de durum (II) yi ele alalım.  $u(t) = -r(t)z'(t) > 0$  olsun. (5.0.1) den  $t \geq t_2$  için

$$u'(t) + \frac{p(t)}{r(t)}u(t) \geq 0. \quad (4.3.33)$$

Bu bağıntının  $t_2$  den  $t$  ye kadar integralini alırsak

$$u(t) \geq u(t_2) \exp \left( - \int_{t_2}^t p(s)/r(s) ds \right) \quad (4.3.34)$$

elde ederiz ve buradan da

$$z'(t) \leq r(t_2)z'(t_2)\frac{1}{r(t)} \exp\left(-\int_{t_2}^t p(s)/r(s)ds\right) \quad (4.3.35)$$

bulunur. (4.3.35) in  $t_2$  den  $t$  ye kadar integralini alıp (5.0.2) göz önüne alınırsa  $t \rightarrow \infty$  için

$$z(t) \leq z(t_2) + r(t_2)z'(t_2) \int_{t_2}^t \frac{1}{r(s)} \exp\left(-\int_{t_2}^s p(u)/r(u)du\right) ds \rightarrow -\infty \quad (4.3.36)$$

olur ve  $z(t)$  nin pozitifliği ile çelişir. Bu teoremi ispatlar.

### 4.3.3 Örnek

Bu kısmı sonucumuzun uygulanabilirliğini gösteren bir örnek ile tamamlıyoruz. Bu örnek  $i = 1, 2$  için  $t \rightarrow \infty$  iken  $p_i(t) \rightarrow \infty$  durumu içindir.

**Örnek 4.3.3.**  $z(t) = x(t) + tx(t/2) + 8tx(2t)$  olmak üzere ikinci mertebeden damping terimli

$$z''(t) + \frac{1}{t}z'(t) + (t^3 + t)x\left(\frac{t}{3}\right) = 0, \quad t \geq 2, \quad (4.3.37)$$

NDD i ele alalım.

Burada  $r(t) = 1$ ,  $p(t) = 1/t$ ,  $p_1(t) = t$ ,  $p_2(t) = 8t$ ,  $\tau_1(t) = t/2$ ,  $\tau_2(t) = 2t$ ,  $\sigma(t) = t/3$  ve  $q(t) = t^3 + t$  dir. (i)-(iii) şartlarının ve (5.0.2) nin sağlandığı açıktır.

$$\tau_2^{-1} = t/2, \quad \tau_2^{-1}(\tau_2^{-1}(t)) = t/4, \quad \tau_2^{-1}(\tau_1(\tau_2^{-1}(t))) = t/8, \quad R(t, t_1) = t - 2$$

ve  $t \geq 2$  için

$$\psi(t) = \frac{1}{4t} \left[ 1 - \frac{1}{2t} - \frac{t/2}{t} \right] = \frac{t-1}{8t^2} > 0. \quad (4.3.38)$$

$\eta(t) = c > 0$  bir sabit olsun ve  $t_1 = t_0 = 2$  ve  $T \in (2, \infty)$  seçilirse

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t c(s^3 + s) \left( \frac{3s-9}{8s^2} \right) \frac{s-12}{6s-12} ds = \infty$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \frac{c}{4s^2} ds = \frac{c}{4t} < \infty$$



olduğundan

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[ \eta(s)q(s)\psi(\sigma(s)) \frac{R(\tau_2^{-1}(\sigma(s)), t_1)}{R(s, t_1)} - \frac{\eta(s)r(s)\xi^2(s)}{4} \right] ds \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[ c(s^3 + s) \left( \frac{3s-9}{8s^2} \right) \frac{s-12}{6s-12} - \frac{c}{4s^2} \right] ds = \infty \end{aligned}$$

olur ve (4.3.18) sağlanır. Dolayısıyla Teorem 4.3.2 gereği (4.3.37) salınımlıdır.

Not: Tezin giriş kısmında da bilgisini verdiğimiz gibi, yayınlanan makalemizin bir kısmını burada vermiş oluyoruz. İlgilenen araştırmacılar bu denklem tipine ilişkin daha fazla sonuç için makaleye başvurabilirler.

## 5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ilk olarak;

$$z(t) = x(t) + p(t)x(\tau(t))$$

olmak üzere, ikinci mertebeden damping terimli

$$z''(t) + r(t)z'(t) + q(t)x(\sigma(t)) = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (5.0.1)$$

lineer NDD inin çözümlerinin salınımı verilen şartlar altında incelenmiştir. Buna ilaveten;

- Uyarı (4.1.11) de de belirttiğimiz gibi (5.0.1) denklemini  $t \rightarrow \infty$  iken  $p(t) \rightarrow -\infty$  durumu için de çalışılabilir.

İkinci olarak;

$$z(t) = x(t) + h(t)x(\tau(t))$$

ve

$$\alpha \geq 1$$

iki pozitif tek sayının oranı olmak üzere ikinci mertebeden damping terimli

$$(r(t)(z'(t))^\alpha)' + p(t)(z'(t))^\alpha + q(t)f(t, x(\sigma(t))) = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (5.0.2)$$

yarı-lineer NDD inin çözümlerinin salınım davranışları verilen şartlar altında incelenmiştir. Ayrıca;

- (5.0.2) denkleminin  $p(t) \geq 0$ ,  $q(t) > 0$ ,  $r(t) > 0$  olacak şekilde  $p, q, r : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyonlar ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[ \frac{1}{r(t)} \exp \left( - \int_{t_0}^t \frac{p(s)}{r(s)} ds \right) \right]^{1/\alpha} dt < \infty,$$

şartı altında salınımı incelenebilir.

- (5.0.2) denkleminin  $h : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon ve  $h(t) \leq -1$  olmak üzere salınımı incelenebilir.
- (5.0.2) denklemine ilişkin sonuçlar n. basamaktan ( $n \geq 2$  çift)

$$(r(t) (z^{n-1}(t))^\alpha)' + p(t) (z^{n-1}(t))^\alpha + q(t)f(t, x(\sigma(t))) = 0, \quad t \geq t_0 > 0,$$

denkleme genişletilmesi de ilginç olacaktır.

- (5.0.2) denkleminin (4.2.2) şartı  $p(t) \leq 0$  ve  $q(t) < 0$  ile değiştirilerek de salınım davranışı incelenebilir.

Üçüncü olarak ise,

$$z(t) = x(t) + p_1(t)x(\tau_1(t)) + p_2(t)x(\tau_2(t))$$

olmak üzere ikinci mertebeden damping terimli

$$(r(t)z'(t))' + p(t)z'(t) + q(t)x(\sigma(t)) = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (5.0.3)$$

lineer KNDD inin çözümlerinin salınım davranışı verilen şartlar altında incelenmiştir. Bu denklemde ve şartlarında da aşağıdaki değişiklikler yapılarak salınım davranışı incelenebilir;

- $0 < \alpha < 1$  ve  $\beta > 1$  tek tamsayıların oranı olmak üzere

$$z(t) = x(t) + p_1(t)x^\alpha(\tau_1(t)) + p_2(t)x^\beta(\tau_2(t))$$

alınarak salınım sonucunun araştırılması ilginç olacaktır.

- (5.0.3) denkleminin salınım davranışı  $p(t) \leq 0$  ve  $q(t) < 0$  şartları altında da incelenebilir.

## KAYNAKLAR

- Agarwal, R.P., Grace, S.R. ve O'Regan, D., 2003a. The oscillation of certain higher-order functional differential equations. *Math. Comput. Modelling*, 37, 705–728.
- Agarwal, R.P., Grace, S.R. ve O'Regan, D., 2003b. *Oscillation Theory of Second Order Dynamic Equations*, 2003. Taylor and Francis, London and New York.
- Agarwal, R.P., Bohner, M. ve Li, W. T. 2004. *Nonoscillation and Oscillation: Theory for Functional Differential Equations*. Pure and Applied Mathematics. A Dekker Series of Monographs and Textbooks, Marcel Dekker, New York.
- Agarwal, R.P., Bohner, M., Li, T. ve Zhang, C., 2014. Oscillation of second-order Emden–Fowler neutral delay differential equations. *Ann. Math. Pur. Appl.*, 193, 1861–1875.
- Agwa, H. A., Khodier, A. M. M. ve Arafa, H. M., 2016. Oscillation of second-order nonlinear neutral dynamic equations with mixed arguments on time scales. *J. Basic Appl. Res. Int.* 17, 49–66.
- Arul, R. ve Shobha, V. S., 2015. Oscillation of second order nonlinear neutral differential equations with mixed neutral term. *J. Appl. Math. Phys.* 3, 1080–1089.
- Baculíková, B., Li, T. ve Džurina, J. 2011. Oscillation theorems for second order neutral differential equations. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2011, 1–13.
- Baculíková, B. ve Džurina, J., 2011. Oscillation theorems for second-order nonlinear neutral differential equations. *Comput. Math. Appl.*, 62, 4472–4478.
- Baculíková, B. ve Džurina, J., 2011. Oscillation theorems for second-order neutral differential equations. *Comput. Math. Appl.* 61, 94–99.
- Bohner, M., Grace, S. R. ve Jadlovská, I., 2017. Oscillation criteria for second-order neutral delay differential equations. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2017, 1–12.
- Candan, T., 2003. *Oscillation Behavior of Higher Functional Differential Equations with Distributed Deviating Arguments*. Ph.D. Thesis, Iowa State University, Ames, Iowa.
- Chen, D. X., 2010. Oscillation of second-order Emden-Fowler neutral dynamic equations on time scales. *Math. Comput. Model.* 51, 1221–1229.
- Erbe, L., Kong, Q. ve Zhang, B.G., 1995. *Oscillation Theory for Functional Differential Equations*. Marcel Dekker Inc., New York.
- Erbe, L., Hassan, T. S. ve Peterson, A., 2008. Oscillation of second order neutral delay differential equations. *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, 3, 53–71.
- Grace, S. R., Graef, J. R. ve Tunç, E., 2017. Oscillatory behavior of second order damped neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Miskolc Math. Notes*, 18, 759–769.
- Grace, S. R., 1992. Oscillatory and asymptotic behavior of delay differential equations with a nonlinear damping term. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 168, 306–318.

- Grace, S. R. ve Jadlovská, I., 2017. Oscillation criteria for second-order neutral damped differential equations with delay argument. *Dynamical Systems—Analytical and Computational Techniques*, Intech, Chapter 2, 31–53.
- Grace, S. R., Džurina, J., Jadlovská, I. ve Li, T. 2018. An improved approach for studying oscillation of second-order neutral delay differential equations. *J. Inequal. Appl.*, 2018, Article ID 193, 1–13.
- Graef, J. R. ve Saker, S. H., 2013. Oscillation theory of third-order nonlinear functional differential equations. *Hiroshima Math. J.*, 43, 49–72.
- Hale, J. K. ve Lunel, S. M. V., 1991. *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer Science+Business Media, LLC.
- Ji, T., Tang, S. ve Thandapani, E., 2014. Oscillation of second order dynamic equations with mixed arguments. *Appl. Math. Inf. Sci.* 48, 2225–2228.
- Kolmanovskii, V. B. ve Nosov, V. R., 1986. *Stability of Functional Differential Equations*. Academic Press, Inc.
- Kolmanovskii, V. ve Myshkis, A., 1999. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Kiguradze, I. T. ve Chanturia, T. A., 1985. *Asymptotic Properties of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993, Translated from the 1985 Russian original.
- Kubiacyk, I., Saker, S. H. ve Sikorska-Nowak, A., 2013. Oscillation criteria for nonlinear neutral functional dynamic equations on time scales. *Math. Slovaca* 63, 263–290.
- Ladde, G.S., Lakshmikantham, V. ve Zhang, B. G., 1987. *Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments*. Marcel Dekker, INC. New York and Basel.
- Li, T., 2010. Comparison theorems for second-order neutral differential equations of mixed type. 2010, 1–7.
- Li, T., Baculíková, B. ve Džurina, J., 2011. Oscillation results for second-order neutral differential equations of mixed type. *Tatra Mt. Math. Publ.* 48, 101–116.
- Li, T., Agarwal, R. P. ve Bohner, M., 2012. Some oscillation results for second-order neutral dynamic equations. *Hacet. J. Math. Stat.*, 41, 715–721.
- Li, T., Senel, M. T. ve Zhang, C., 2013. Oscillation of solutions to second-order half-linear differential equations with neutral terms. *Electron J. Differ. Equ.* 2013, 1–7.
- Li, T., Thandapani, E., Graef, J. R. ve Tunç, E., 2013. Oscillation of second-order Emden–Fowler neutral differential equations. *Nonlinear Stud.*, 20, 1–8.
- Li, T., Rogovchenko, Y. V. ve Zhang, C., 2013. Oscillation results for second-order nonlinear neutral differential equations. *Adv. Difference Equ.*, 2013, Article ID 336, 1–13.
- Li, T., Baculíková, B. ve Džurina, J., 2014. Oscillatory behavior of second-order nonlinear neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Bound. Value Probl.*, 2014, No. 68, 1–15.
- Li, T., Rogovchenko, Y. V. ve Tang, S. 2014. Oscillation of second-order nonlinear differential equations with damping. *Math. Slovaca*, 64, 1227–1236.

- Li, T. ve Rogovchenko, Y. V., 2014. Oscillation theorems for second-order nonlinear neutral delay differential equations. *Abstr. Appl. Anal.*, 2014, Article ID 594190, 1–8.
- Li, T. ve Rogovchenko, Y. V., 2015. Oscillation of second-order neutral differential equations. *Math. Nachr.*, 288, 1150–1162.
- Li, T. ve Rogovchenko, Y. V., 2017. Oscillation criteria for second-order superlinear Emden–Fowler neutral differential equations. *Monatsh. Math.*, 184, 489–500.
- Mawhin, J., 1996. The early reception om France pf the work of Poincaré and Lyapunov in the qualitative theory of differential equations. *Philosophia Scientiæ*, tome 1. no 4 , 119–133.
- Özdemir, O., 2018. Zaman Skalasında Üçüncü Mertebeden Neutral Dinamik Denklemlerin Çözümlerinin Salınımlılık ve Asimptotik Davranışı. Doktora Tezi, T.C. Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Qi, Y. ve Yu, J., 2015. Oscillation of second order nonlinear mixed neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 38, 543–560.
- Philos, C. G., 1989. Oscillation theorems for linear differential equations of second order. *Arch. Math.*, 53, 482–492.
- Răsvan, V., 2006. Functional differential equations of lossless propagation and almost linear behavior. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(10), 138–150.
- Rogovchenko, Y. V., 2001. Oscillatory behavior of nonlinear functional differential equations. *Nonlinear Analysis*, 47, 4925–4935.
- Rogovchenko, Y. V. ve Tuncay, F., 2009. Oscillation theorems for a class of second order nonlinear differential equations with damping. *Taiwan J. Math.*, 13, 1909–1928.
- Ruan, S., 1993. Oscillations of second order neutral differential equations. *Canad. Math. Bull.*, 36, 485–496.
- Saker, S. H., 2003. Oscillation of second order neutral delay differential equations of Emden–Fowler type. *Acta. Math. Hungar.*, 100, 37–62.
- Saker, S. H., Pang, P. Y. H. ve Agarwal, R. P., 2003. Oscillation theorems for second order nonlinear functional differential equations with damping. *Dynam. Syst. Appl.*, 12, 307–322.
- Saker, S. H., 2006. Oscillation of second-order neutral delay dynamic equations of Emden–Fowler type. *Dynam. Systems Appl.*, 15, 629–644.
- Saker, S. H., Agarwal, R. P. ve O'Regan, D., 2007. Oscillation of second-order damped dynamic equations on time scales. *J. Math. Anal. Appl.*, 330, 1317–1337.
- Santra, S. S., Pinelas, S. ve Dix, J. G., 2018. Necessary and sufficient conditions for the oscillation of solutions to second-order nonlinear differential equations with several delays. *Global Journal of Mathematics*, 12, 805–810.
- Thandapani, E., Piramanantham, V. ve Pinelas, S., 2011. Oscillation criteria for second-order neutral delay dynamic equations with mixed nonlinearities. *Adv. Differ. Equ.*, 2011, Article ID 513757, 1–14.
- Thandapani, E., Padmavathi, S. ve Pinelas, S., 2012. Classifications of solutions of second-order nonlinear neutral differential equations of mixed type. *Adv. Difference Equ.*, 2012, Article ID 226, 1–13.

- Thandapani, E. ve Rama, R., 2013. Comparison and oscillation theorems for second order nonlinear neutral differential equations of mixed type. *Serdica Math. J.* 39, 1–16.
- Thandapani, E., Selvarangam, S., Vijaya, M. ve Rama, R., 2016. Oscillation results for second order nonlinear differential equation with delay and advanced arguments. *Kyungpook Math. J.* 56, 137–146.
- Tunç, C., Liu, B., Sanchez, L. R., Alimohammady, M., Mustafa, O. G. ve Saker, S. H., 2016. *Qualitative Theory of Functional Differential Equations*, Special Issue 2016, Hindawi.
- Tunç, E. ve Graef, J. R., 2014. Oscillation results for second order neutral dynamic equations with distributed deviating arguments. *Dynam. Systems Appl.*, 23, 289–303.
- Tunç, E. ve Grace, S. R., 2016. On oscillatory and asymptotic behavior of a second-order nonlinear damped neutral differential equation. *Int. J. Differ. Equ.*, 2016, Article ID 3746368, 1–8.
- Tunç, E. ve Kaymaz, A., 2019a. On oscillation of second-order linear neutral differential equations with damping term. *Dynam. Syst. Appl.*, 28, 289–301.
- Tunç, E. ve Kaymaz, A., 2019b. Oscillatory behavior of second-order half-linear neutral differential equations with damping. *Advances in Dynamical Systems and Appl.*, 14, number 2, 213–227.
- Tunç, E. ve Kaymaz, A., 2021. Oscillation of damped second-order linear mixed neutral differential equations. *Monatshefte für Mathematik*, volume 194, issue 1, 85–104.
- Tunç, E. ve Özdemir, O., 2019. On the oscillation of second-order half-linear functional differential equations with mixed neutral term. *Journal of Taibah University for Science* 13, 481–489.
- Wang, R. ve Li, Q., 2016. Oscillation and asymptotic properties of a class of second-order Emped-Fowler neutral differential equations. *Springer Plus* 2016, 1–15.
- Wong, J. S. W., 1969. Oscillation and nonoscillation of solutions of second order linear differential equations with integrable coefficients. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 144, pp. 197–215.
- Wong, J. S. W., 2000. Necessary and sufficient conditions for oscillation of second order neutral differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 252, 342–352.
- Zafer, A., 1992. Oscillatory and nonoscillatory properties of solutions of functional differential equations and difference equations. Ph.D. Thesis, Iowa State University, Ames, Iowa.
- Zhang, C., Baculiková, B., Dzurina, J. ve Li, T., 2016. Oscillation results for second-order mixed neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Math. Slovaca* 66, 1–12.

## ÖZGEÇMİŞ

