

**İKİNCİ MERTEBEDEN İKİ NOKTALI
SINIR DEĞER PROBLEMLERİNDE
DİFERANSİYEL VE FARK GREEN FONKSİYONLARI**

**EMİRHAN GÜLTEKİN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN İKİ NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMLERİNDE
DİFERANSİYEL VE FARK GREEN FONKSİYONLARI

EMİRHAN GÜLTEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Prof.Dr. GABİL AMİRALİ

SİNOP-2013

T.C.

SİNOP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma, jürimiz tarafından 16/09/2013 tarihinde yapılan sınav ile MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan :Prof.Dr. Gabil AMİRALİ

Üye :Yrd.Doç.Dr. Yılmaz Mehmet DEMİRCİ

Üye :Yrd.Doç.Dr. Alper SİNAN

ONAY:

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

20. / 09 / 2013

Doç.Dr. Hünkar Ayni DUYAR

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

İKİNCİ MERTEBEDEN İKİ NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMLERİNDE DİFERANSİYEL VE FARK GREEN FONKSİYONLARI

ÖZET

Bu çalışmada, ikinci mertebeden sınır değer problemlerinde diferansiyel ve fark Green fonksiyonları ve bu fonksiyonların özellikleri incelendi.

İlk olarak, self adjoint ve self adjoint olmayan diferansiyel sınır değer problemlerinde Green fonksiyonu ve özellikleri incelendi. Ardından bunlara uygun bazı uygulamalar verildi. Daha sonraki kısımda düzgün ve düzgün olmayan şebekelerde fark Green fonksiyonu ve özellikleri incelendi ve bu fonksiyona uygun değerlendirmeler verildi. Sonlu fark sınır değer problemin çözümü için bazı değerlendirmeler fark Green fonksiyonu kullanılarak elde edildi.

Son olarak, özel düzgün olmayan şebekede singüler pertürbe olmuş sonlu fark problemi için hata değerlendirmesi fark Green fonksiyonu kullanılarak elde edildi ve yakınsama hızı değerlendirildi.

Anahtar Kelimeler: Green Fonksiyonu, Sınır Değer Problemi, Fark Şeması, Konveksiyon-Difüzyon Problemleri, Singüler Pertürbasyon,

DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE GREEN FUNCTIONS FOR TWO POINT SECOND ORDER BOUNDARY VALUE PROBLEMS

ABSTRACT

In this study, differential and difference Green's functions for second order boundary value problems and the feature of these functions are examined.

First, Green's function and its properties were examined for self adjoint and non-self adjoint boundary value problems. Then, some applications were given for them. In the next section, difference Green's function and its features were analyzed for uniform and non-uniform meshes and estimates for this function were given. Some estimates for the solution of finite difference boundary value problems were obtained by using difference Green's function.

Finally, the error estimates for singularly perturbed finite difference problem on a special non-uniform mesh was obtained by using the Green's function and the rate of convergence was evaluated.

Key Words: Green Function, Boundary Value Problem, Difference Schemes, Convection-Diffusion Problems, Singular Perturbation

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım esnasında bana yardımcı olan, desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof.Dr. Gabil AMİRALİ'ye, tezimde emeği geçen bütün hocalarıma ve arkadaşlarıma ilgi ve yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca eğitim hayatım boyunca, her türlü fedakârlığı gösteren, beni sabırla destekleyen aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Tanımlar	3
2.1.1. Diferansiyel Denklem	3
2.1.2. Sınır Değer Problemi	3
2.1.3. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu	3
2.1.4. Sonlu Farklar	4
2.1.5. Fark Denklemi	4
2.1.6. Maksimum Normu ve L_1 Normu	5
2.1.7. Fark Türevleri	5
2.1.8. Regüler ve Singüler Pertürbe Olmuş Problem	6
2.1.9. Maksimum Prensibi	7
2.2. Çalışmada Kullanılan Bazı Formüller ve Teoremler	8
2.2.1. Fark Green Formülleri ve Kısmi Toplam Formülleri	8
2.2.2. Sürekli Problem İçin Bazı Değerlendirmeler	9
2.2.3. Ortalama Değer Teoremi	10
3. DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN GREEN FONKSİYONU VE ÖZELLİKLERİ	11
3.1. Green Fonksiyonu İnşası	11
3.2. Sınır Değer Green Fonksiyonu	14
3.3. Green Fonksiyonu Özellikleri	18
3.4. Dirac Delta Fonksiyonu	18
3.5. Green Fonksiyonu Diferansiyel Denklemi	22

4. FARK GREEN FONKSİYONU	26
4.1. Düzgün Şebekede Fark Green Fonksiyonu	26
4.2. Düzgün Olmayan Şebekede Fark Green Fonksiyonu	35
5. İKİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ SINIR DEĞER FARK PROBLEMİNİN HATA DEĞERLENDİRMESİNDE FARK GREEN FONKSİYONU KULLANIMI	39
5.1. Shishkin Şebekesinde Kesme Hatası	39
5.2. Yakınsama	44
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	47
7. KAYNAKLAR	48
ÖZGEÇMİŞ	50

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

SEMBOLLER

L	Diferansiyel operatör
ℓ	Fark operatörü
$u(x)$	Çözüm fonksiyonu
u'	u fonksiyonunun birinci türevi
u''	u fonksiyonunun ikinci türevi
$C^2[0, l]$	$[0, l]$ aralığında kendisi, birinci ve ikinci mertebeden türevleri sürekli fonksiyonlar sınıfı
$y(i) = y_i$	Şebeke fonksiyonu
α	Alfa
β	Beta
γ	Gamma
λ	Lamda
φ	Phi
ψ	Psi
ξ	Xi
η	Eta
μ	Mü
ε	Epsilon
$u_{\bar{x}x,i}$	u fonksiyonunun ikinci fark türevi
$u_{x,i}$	u fonksiyonunun merkezi fark türevi
$\ \cdot \ $	Norm
$\ \cdot \ _{\infty}$	Maksimum norm
$O(h)$	Yakınsama hızı

1. GİRİŞ

Yüzyıllar boyunca yapılan çalışmalar neticesinde içinde yaşadığımız kâınatta meydana gelen hiçbir fiziksel olayın tamamen rastgele cereyan etmediğı (edemediğı) ve kanun adı verilen çok sayıdaki mecburiyet unsurlarına bağılı kaldığı bilinmektedir. Bir toz zerresinden tutun da dünyanın, diğere gezegenlerin hareketleri ya da bir elektromanyetik dalğanın yayılması hep açık bir şekilde ifade edilmiş bu harikulade kanunlara tabi kalmaktadır. Bu kanunların matematiksel formu ortaya çıkarılırken öncelikle fiziksel olayı ve buna ilişkin değişkenleri tanımlamak gerekir. Sonrasında her bir olay üzerinde yapılan dikkatli gözlemler ve doğru akıl yürütmeler bu değişmeyen kanunların matematiksel formlarını ortaya çıkarır. Bu matematiksel formlar değişkenleri olduğu gibi bunların türevlerini de içerebilmektedir.

Günlük hayatta, özellikle mühendislik ve fizik alanında karşılaştığımız olaylar modellenirken hep bu kanunlar esas alınır. Çeşitli basitleştirici kabuller altında yapılan bu tür modellemeler çoğunlukla “diferansiyel denklemler” adı verilen denklemlerle sonuçlanır.

Uygulamalı bilim dallarında karşımıza çıkan diferansiyel denklemlerin çözümünün incelenmesinde en zarif ve etkili yöntemlerden birisi Green fonksiyonudur. Green fonksiyonu, belirli başlangıç koşulları ya da sınır koşullarına tabi homojen olmayan denklemin çözümünde kullanılan bir fonksiyon türüdür. Birçok ana teori altında fizikte özellikle kuantum alan teorisi, aerodinamik, aeroakustik, elektro dinamik ve istatistiksel alan teorisinde hatta korelasyon fonksiyonlarının çeşitli tiplerini ifade etmek için kullanılır.

İngiliz matematikçi George Green ilk olarak 1828’de Green fonksiyonu kavramını geliştirmiş ve fonksiyona adını vermiştir. Daha sonra Green fonksiyonu yöntemi matematik ve uygulamalı bilimlerin çoğunda çok yararlı analitik bir yöntem haline gelmiştir.

Günümüzde lineer diferansiyel denklemlerle ilgili çalışmalarda temel çözümlerin yanı sıra Green fonksiyonu yardımıyla elde edilen çözümlere de yer verilmektedir. Herman (2008), ikinci mertebeden diferansiyel denklemleri ele aldığı çalışmasında sınır-değer problemlerinin incelenmesinde Green fonksiyonun inşasını yaparak konu ile ilgili bol miktarda örnek vermiştir. Myint-u ve Debnath (2007), bilim adamları ve mühendisler için lineer kısmi diferansiyel denklemler kitabında Green fonksiyonunu oluşturarak bu fonksiyonunun kullanımıyla ilgili birçok uygulamalara yer

vermişlerdir. Samarskii (2001), fark şemaları teorisini ele aldığı kitabında fark Green fonksiyonunu tanımlayarak bu fonksiyonu fark denklemlerinin çözümünde incelemiştir. Andreev (2001), bir ve iki boyutlu Shishkin şebekesi üzerinde singüler pertürbe olmuş konveksiyon-difüzyon denkleminin monoton fark şemalarının Green fonksiyonu ve düzgün yakınsaklığını ayrıntılı olarak incelemiştir ve ayrıca aynı yıl ele aldığı diğer bir çalışmada üç noktalı monoton singüler pertürbe olmuş sonlu fark şemalarının çözümünün değerlendirmesinde Green fonksiyonunu incelemiştir. Amiraliev ve Çimen (2010), singüler pertürbe olmuş gecikmeli konveksiyon-difüzyon problemi için nümerik yöntemleri inceleyerek, nümerik çözümün hatasının değerlendirmesinde fark Green fonksiyonunu kullanmışlardır. Amiraliev ve Çakır (2007), singüler pertürbe olmuş üç noktalı sınır değer probleminin nümerik çözümünü incelemiştir. Zhao (2007), ikinci mertebeden üç noktalı sınır değer problemlerinin çözümünde Green fonksiyonunu incelemiştir.

Bu çalışma 7 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konuya giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde bu tez çalışmasında kullanılacak olan genel bilgilere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) + q(x)y(x) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

diferansiyel problemi için Green fonksiyonu ve özellikleri incelenmiştir.

Düzgün ve düzgün olmayan şebekede 2. mertebeden fark Green fonksiyonu ve bu fonksiyon yardımıyla 2. mertebeden fark sınır değer probleminin çözüm değerlendirmesi dördüncü bölümde verilmiştir.

Beşinci bölümde ise singüler pertürbe olmuş

$$\ell y_i := -\varepsilon y_{\bar{x},i} - r_{i+1} y_{\hat{x},i} = f_i, \quad x_i \in \omega,$$

$$y_0 = y_N = 0$$

fark sınır değer problemi ele alınarak bu problemin hata değerlendirmesinde fark Green fonksiyonu kullanılmıştır.

Altıncı bölümde elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Son bölümde ise kaynaklar bildirilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Green fonksiyonunu incelenmeden önce bu bölümde diferansiyel ve fark denklemleri ile ilgili bazı temel kavramlar özet olarak verilecektir.

2.1. Tanımlar

2.1.1. Diferansiyel Denklem

Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bağıntıya diferansiyel denklem denir. Diferansiyel denklemde bağımsız değişken sayısı bir ise bu denkleme adi diferansiyel denklem denir. Yani adi diferansiyel denklemlerde bağımlı değişken örneğin $u = u(x)$; bir tek bağımsız değişkene sahip olmalıdır. Adi diferansiyel denklem içerisinde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir.

2.1.2. Sınır Değer Problemi

Bir diferansiyel denklemin belli koşullara göre çözümleri arandığında eğer bağımlı değişken ve türevlerine göre koşullar farklı noktalarda verilmiş ise probleme sınır değer problemi denir.

2.1.3. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

$[a, b]$ aralığında tanımlanan

$$\omega = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b\}$$

ayrık noktalar kümesine bu aralıkta tanımlı düzgün olmayan şebeke, x_i noktalarına ise şebeke düğümleri veya düğüm noktaları adı verilir. Ayrıca $\omega = \omega \setminus \{a, b\}$ şeklinde tanımlansın.

Eğer düğümler eşit aralıklı ise bu durumda söz konusu şebekeye düzgün şebeke denir ve gösterimi

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad h = (b - a) / N\}$$

şeklindedir. Burada h sabitine şebeke adımı denir. Eğer düzgün olmayan şebeke söz konusuysa şebeke adımı $h_i = x_i - x_{i-1}$ ile, ortalama şebeke adımı ise $\bar{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ ile

ifade edilir. Bu şebekeler üzerinde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonuna şebeke fonksiyonu denir ve çoğu zaman $f(x_i)$ değeri f_i şeklinde gösterilir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

2.1.4. Sonlu Farklar

$y(i)$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ tam değer argümanlı bir fonksiyon olsun. $y(i) = y_i$ olmak üzere

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

ifadelerine sırasıyla i noktasındaki ileri (sağ) fark ve geri (sol) fark denir.

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_i &= \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) \\ &= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \end{aligned}$$

ifadesine ikinci ileri fark,

$$\begin{aligned} \nabla^2 y_i &= \nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_i - y_{i-1}) = y_i - y_{i-1} - (y_{i-1} - y_{i-2}) \\ &= y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2} \end{aligned}$$

ifadesine ise ikinci geri fark denir. Benzer olarak m-inci ileri fark

$$\Delta^m y_i = \Delta(\Delta^{m-1} y_i) = \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i$$

şeklinde ve m-inci geri fark

$$\nabla^m y_i = \nabla(\nabla^{m-1} y_i) = \nabla^{m-1} y_i - \nabla^{m-1} y_{i-1}$$

şeklinde tanımlıdır.

2.1.5. Fark Denklemi

Bir veya daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farkları ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bağıntıya fark denklemi denir. Yani i bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere, bağımlı ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $\Delta y_i, \Delta^2 y_i, \dots, \Delta^m y_i, \dots$ gibi farklarını içine alan bağıntılara fark denklemi denir.

m . mertebeden lineer fark denklemi en genel biçimde şöyle yazılabilir:

$$\alpha_0 \Delta^m y_i + \alpha_1 \Delta^{m-1} y_i + \dots + \alpha_{m-1} \Delta y_i + \alpha_m y_i = f_i$$

Burada $\alpha_0 \neq 0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ belirli katsayılardır ve genelde i 'e bağımlıdır.

$\Delta^k y_i, k = 1, 2, 3, \dots, m$ farklarının ifadeleri yukarıda yerine konulursa,

$$a_0 y_{i+m} + a_1 y_{i+m-1} + \dots + a_{m-1} y_{i+1} + a_m y_i = f_i$$

bağıntısını elde ederiz. Bu da $a_0 \neq 0, a_m \neq 0$ durumu için m -inci fark denkleminin tanımını gibi algılanabilir (Amirali ve Duru, 2002).

2.1.6. Maksimum Norm ve L_1 Normu

$g(x), [a, b]$ kapalı aralığında sürekli herhangi bir fonksiyon olmak üzere;

$\|g\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$ ifadesine $g(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki maksimum normu denir.

$\|g\|_1 = \int_a^b |g(x)| dx$ ifadesine $g(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığındaki L_1 normu denir.

2.1.7. Fark Türevleri

$[a, b]$ aralığında tanımlı $g(x)$ fonksiyonunun düzgün şebeke için fark türevleri aşağıdaki gibidir (Samarskii, 2001).

a) $g_{x,i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h}$ ifadesine birinci mertebeden ileri fark türevi denir.

b) $g_{\bar{x},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h}$ ifadesine birinci mertebeden geri fark türevi denir.

c) $g_{o_{x,i}} = \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2h}$ ifadesine birinci mertebeden merkezi fark türevi denir.

d) $g_{\bar{x}\bar{x},i} = \frac{g_{x,i} - g_{\bar{x},i}}{h} = \frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{h^2}$ ifadesine ikinci mertebeden ileri fark

türevi denir.

$[a, b]$ aralığında düzgün olmayan şebeke için ise bu türevler aşağıdaki gibi tanımlanır (Samarskii, 2001).

a) $g_{x,i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h_{i+1}}$ ifadesine birinci mertebeden ileri fark türevi denir.

b) $g_{\bar{x},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h_i}$ ifadesine birinci mertebeden geri fark türevi denir.

c) $g_{\bar{x},i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h_i}$ ifadesine birinci mertebeden merkezi fark türevi denir.

d) $g_{\bar{x}\bar{x},i} = \frac{g_{x,i} - g_{\bar{x},i}}{h_i}$ ifadesine ikinci mertebeden fark türevi denir.

e) $g_{\bar{x},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h_i}$, $g_{x,i} = \frac{g_{\hat{x},i} + g_{\bar{x},i}}{2}$ şeklindedir.

2.1.8. Regüler ve Singüler Pertürbe Olmuş Problem

P_ε , $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı herhangi bir problem olsun. $\varepsilon = 0$ durumunda P_0 problemine, P_ε problemine uygun indirgenmiş problem denir. Eğer P_0 indirgenmiş problemi ile P_ε problemi aynı tipten, aynı mertebeden ve her ikisi de birtek çözüme sahip iseler, söz konusu P_ε problemine regüler pertürbe olmuş problem denir. Aksi takdirde buna singüler pertürbe olmuş problem denir (Constanta, 2002).

Örnek 2.1.8.1

$$P_\varepsilon : \begin{cases} u'(x) + \varepsilon u(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

başlangıç değer problemi için çözüm fonksiyonu

$$u_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x}$$

şeklindedir. Uygun indirgenmiş problem

$$P_0 : \begin{cases} u'(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

şeklinde olup

$$u_0(x) = 1$$

tek çözümüne sahiptir. Görüldüğü gibi problemin tipi, mertebesi değişmemiş ve her iki problem de bir tek çözüme sahip olmuşlardır. Ayrıca $[0,1]$ aralığının her x_0 noktası için

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x) = 1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow x_0} u_\varepsilon(x)$$

eşitliği söz konusudur. Dolayısıyla ele alınan problem regüler pertürbe olmuş bir problemidir.

Örnek 2.1.8.2

$$P_\varepsilon : \begin{cases} \varepsilon u'(x) + u(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

problemi ele alınırsa, kesin çözüm

$$u_\varepsilon(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

seklindedir.

$$P_0 : \begin{cases} u(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

indirgenmiş problemine bakıldığında mertebenin düştüğü ve başlangıç şartının gereksiz hal aldığı görülür. Dolayısıyla $x = 0$ civarında sınır katı denilen, çözümün hızlı değişim gösterdiği dar alanın varlığı söylenebilir. Dolayısıyla indirgenmiş problem $u_0(x) = 0$ çözümüne sahiptir. Tekrarlı limitlere bakılırsa, $u_\varepsilon(x)$ fonksiyonun keyfi $x_0 \in (0, 1]$ noktası için

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x) = 0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow x_0} u_\varepsilon(x)$$

olduğu görülür. Fakat $x = 0$ noktası için

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} = 1.$$

eşitliği söz konusudur. Dolayısıyla ele alınan problem singüler pertürbe olmuş bir problemidir.

2.1.9. Maksimum Prensibi

Aşağıdaki ikinci mertebeden self adjoint problem ele alınsın.

$$\begin{aligned} Lu &:= -u''(x) + a(x)u(x) = f(x), & 0 < x < l, \\ u(0) &= A, \quad u(l) = B. \end{aligned}$$

Burada $a(x), f(x) \in C^2[0, l]$ yani kendisi, birinci ve ikinci mertebeden türevleri sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca $a(x) \geq 0$ olup, A ve B verilmiş sabitlerdir.

Bu tipteki bir problem için Maksimum Prensibi şu şekilde verilir:

Lu , yukarıdaki problemdeki diferansiyel operatör, $v(x) \in C^2[0, l]$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda:

$$v(0) \geq 0 \quad (v(0) \leq 0),$$

$$v(l) \geq 0 \quad (v(l) \leq 0),$$

$$Lv(x) \geq 0 \quad (Lv(x) \leq 0), \quad 0 < x < l$$

ise

$$v(x) \geq 0 \quad (v(x) \leq 0), \quad 0 \leq x \leq l$$

olur (Samarskii, 2001).

2.2. ÇALIŞMADA KULLANILAN BAZI FORMÜLLER

2.2.1. Fark Green Formülleri ve Kısmi Toplam Formülleri

Herhangi bir v_i şebeke fonksiyonu için $\Delta v_i = v_{i+1} - v_i$, $\nabla v_i = v_i - v_{i-1}$ olduğundan $\Delta v_{i-1} = \nabla v_i$ eşitliği açıktır. Öte yandan $v_i = u_i w_i$ şebeke fonksiyonu Δ operatörüne uygulanırsa

$$\Delta(u_i w_i) = u_{i+1} w_{i+1} - u_i w_i + u_{i+1} w_i - u_i w_{i+1} = u_{i+1} \Delta w_i + w_i \Delta u_i$$

elde edilir. Bu eşitlik çarpımın türevinin fark benzerini ifade etmektedir. Bu eşitlikte $i = 0$ dan $i = N - 1$ 'e toplam alındığında

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta(u_i w_i) &= u_N w_N - u_0 w_0 = \sum_{i=0}^{N-1} u_{i+1} \Delta w_i + \sum_{i=0}^{N-1} w_i \Delta u_i \\ &= \sum_{j=1}^N u_j \nabla w_j + \sum_{i=0}^{N-1} w_i \Delta u_i \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Son eşitlikte

$$\frac{\Delta v_i}{h_i} \equiv v_{\hat{x},i} \quad , \quad \frac{\nabla v_i}{h_i} \equiv v_{\hat{x},i} \quad \text{bağıntıları göz önünde bulundurulursa}$$

$$u_N w_N - u_0 w_0 = \sum_{i=1}^N u_i w_{\hat{x},i} h_i + \sum_{i=0}^{N-1} w_i u_{\hat{x},i} h_i \quad (2.2.1)$$

eşitliği elde edilir.

$w_i = r_{i+1} v_i$ ve $u_N = v_0 = 0$ olsun. Bu durumda (2.2.1) eşitliği yardımıyla

$$\sum_{i=1}^{N-1} r_{i+1,i} u_{\bar{x},i} v_i \dot{h}_i = - \sum_{i=1}^{N-1} (r_{i+1} v_i)_{\bar{x},i} u_i \dot{h}_i, \quad u_N = v_0 = 0 \quad (2.2.2)$$

olduğu görülür.

Eğer (2.2.1) eşitliğinde $u_i = v_{\bar{x},i}$ ve $w_0 = w_N = 0$ alınırsa

$$\sum_{i=1}^{N-1} v_{\bar{x}\bar{x},i} w_i \dot{h}_i = - \sum_{i=1}^N v_{\bar{x},i} w_{\bar{x},i} \dot{h}_i = - \sum_{i=1}^N v_{\bar{x},i} w_{\bar{x},i} \dot{h}_i, \quad w_0 = w_N = 0 \quad (2.2.3)$$

elde edilir ve bu formüle birinci fark Green formülü adı verilir (Andreev, 2001).

(2.2.3) eşitliklerinde v_i ve w_i yer değiştirilirse aşağıdaki ikinci fark Green formülü elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{N-1} v_{\bar{x}\bar{x},i} w_i \dot{h}_i = \sum_{i=1}^{N-1} w_{\bar{x}\bar{x},i} v_i \dot{h}_i, \quad w_0 = w_N = v_0 = v_N = 0 \quad (2.2.4)$$

2.2.2. Sürekli Problem İçin Bazı Değerlendirmeler

$[0,1]$ aralığındaki singüler pertürbe olmuş

$$\begin{aligned} Lu &:= -\varepsilon u''(x) - r(x)u' = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

sınır değer problemi ele alınsın. Burada ε , $[0,1]$ aralığında tanımlı küçük değerli bir parametredir. $r(x) > r > 0$, $r(x), f(x) \in C^1[0,1]$ olmak üzere (2.2.5) probleminin çözümü için aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$|u^{(k)}(x)| \leq c(1 + \varepsilon^{-k} e^{-\frac{rx}{\varepsilon}}), \quad k = 0, 1, 2. \quad (2.2.6)$$

Burada c , ε 'dan bağımsız bir sabittir.

(2.2.5) problemi ve (2.2.6) eşitliği yardımıyla çözümün 3. türevi için aşağıdaki değerlendirme elde edilir.

$$|u'''(x)| \leq c(1 + \varepsilon^{-3} e^{-\frac{rx}{\varepsilon}}). \quad (2.2.7)$$

(2.2.6) ve (2.2.7) eşitsizlikleri yardımıyla, (2.2.5) probleminin çözüm ayrışımı aşağıdaki biçimdedir (Andreev, 2001).

$$u(x) = U(x) + V(x), \quad x \in [0,1]. \quad (2.2.8)$$

Burada $U(x)$ ve $V(x)$ fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned} LU(x) &= f(x), \quad U(1) = 0, \\ LV(x) &= 0, \quad V(0) = -U(0), \quad V(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

problemlerinin çözümü olup

$$\begin{aligned} |U^k(x)| &\leq c, \quad k = 0, 1, 2, 3, \\ |V^k(x)| &\leq c\varepsilon^{-k} e^{-\frac{rx}{\varepsilon}}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

şeklindedir (Andreev, 2001).

2.2.3. Ortalama Değer Teoremi

f ve g , $[a, b]$ aralığında sürekli iki fonksiyon olsun. $\forall x \in [a, b]$ için $g(x) \geq 0$ (ya da $g(x) \leq 0$) olmak üzere

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

şeklindedir. Eğer $g(x) = 1$ ise

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

yazılır.

3. DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN GREEN FONKSİYONU VE ÖZELLİKLERİ

3.1. Green Fonksiyonu İnşası

Aşağıdaki ikinci mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denklem ele alınsın.

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x).$$

Bu denklemin genel çözümü;

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

homojen denklemin genel çözümü ile homojen olmayan denklemin bir özel çözümünün toplamıdır. Yani $y(x) = y_c + y_p$ şeklindedir. Burada y_c homojen denklemin çözümü, y_p ise homojen olmayan denklemin özel çözümüdür. Homojen olmayan denklemin özel çözümünü bulmak için çeşitli yaklaşımların olduğu bilinmektedir. Bu bölümde parametrelerin değişimi metodu kullanılacaktır.

Aşağıdaki ikinci mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denklem ele alınsın.

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) + q(x)y(x) = f(x) \quad (3.1)$$

Bu denklemin homojen halinin $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ şeklinde iki lineer bağımsız çözümü olduğu kabul edilsin. O halde homojen denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (3.2)$$

şeklinde olur. Buradaki c_1 ve c_2 sabitlerini bağımsız değişkenin bir fonksiyonu olarak kabul edip homojen denklemin çözümü

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \quad (3.3)$$

formunda aransın. O halde

$$y_p'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x)$$

olup buradan

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \quad (3.4)$$

elde edilir. Öte yandan

$$y_p''(x) = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)$$

şeklindedir. Bu eşitlikler (3.1) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1(x) \left[p(x)y_1''(x) + p'(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) \right] \\ &\quad + c_2(x) \left[p(x)y_2''(x) + p'(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) \right] \\ &\quad + p(x) \left[c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{p(x)} \quad (3.5)$$

olduğu görülür. (3.4) ve (3.5) bağıntılarından

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{p(x)} \end{cases}$$

sistemi elde edilir. Bu sistem çözüldüğünde

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= -\frac{f(x)y_2(x)}{p(x)[y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)]} \\ c_2'(x) &= \frac{f(x)y_1(x)}{p(x)[y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)]} \end{aligned} \quad (3.6)$$

olarak bulunur. Homojen denklemin lineer bağımsız çözümlerinin Wronskian'ı

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

olmak üzere $c_1'(x)$ ve $c_2'(x)$ ifadelerinin paydasının $p(x)W(x)$ çarpımına eşit olduğu görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(p(x)W(x)) &= \frac{d}{dx}[p(x)(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x))] \\ &= y_1(x)\frac{d}{dx}[p(x)y_2'(x) - p(x)y_1'(x)y_2'(x)] \\ &\quad - y_2(x)\frac{d}{dx}[p(x)y_1'(x) - p(x)y_1'(x)y_2'(x)] \\ &= -y_1(x)q(x)y_2(x) + y_2(x)q(x)y_1(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan $p(x)W(x)$ çarpımının sabit olduğu açıktır. Öte yandan (3.6) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}c_1(x) &= -\int_{x_0}^x \frac{f(\xi)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}d\xi \\ c_2(x) &= \int_{x_1}^x \frac{f(\xi)y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}d\xi\end{aligned}\tag{3.7}$$

olduğu görülür. Burada x_0 ve x_1 daha sonra belirlenecek sabitlerdir. Bu durumda (3.1) denkleminin çözümü

$$y_p(x) = y_2(x)\int_{x_1}^x \frac{f(\xi)y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}d\xi - y_1(x)\int_{x_0}^x \frac{f(\xi)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}d\xi\tag{3.8}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan,

$$a_2(x)y''(x) + a_1y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x)$$

formundaki self adjoint olmayan denklem ele alınsın. Bu denklem

$p(x) = \frac{1}{a_2(x)}e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx} = \frac{1}{a_2(x)}$ ile çarpılarak aşağıdaki self adjoint forma dönüştürülür.

$$(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x)$$

Burada $f(x) = \frac{1}{a_2(x)} p(x) g(x)$ şeklindedir. O halde self adjoint denklemin çözüm ifadesi (3.8) eşitliğinden

$$y_p(x) = y_2(x) \int_{x_1}^x \frac{g(\xi) y_1(\xi)}{a_2(\xi) W(\xi)} d\xi - y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{g(\xi) y_2(\xi)}{a_2(\xi) W(\xi)} d\xi \quad (3.9)$$

yazılır. Sonuç olarak homojen olmayan self-adjoint (3.1) diferansiyel denkleminin çözümü

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_2(x) \int_{x_1}^x \frac{f(\xi) y_1(\xi)}{p(\xi) W(\xi)} d\xi - y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{f(\xi) y_2(\xi)}{p(\xi) W(\xi)} d\xi$$

olarak ifade edilebilir. Burada x_1 ve x_2 sabitleri daha sonra belirlenecektir. Bu durumda self- adjoint bir problemin çözümü en genel biçimde

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $G(x, \xi)$ fonksiyonu Green fonksiyonu olarak bilinmektedir. O halde Green fonksiyonun varlığı tespit edilmiş olunur. Bu fonksiyonu belirlemek için ise daha sonra farklı yöntemler ele alınacaktır.

3.2. Sınır Değer Green Fonksiyonu

Aşağıdaki sınır değer problemi ele alınsın.

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) + q(x) y(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad (3.11)$$

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0.$$

Bu bölümde (3.11) probleminin

$$y(x) = y_2(x) \int_{x_1}^x \frac{f(\xi) y_1(\xi)}{p(\xi) W(\xi)} d\xi - y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{f(\xi) y_2(\xi)}{p(\xi) W(\xi)} d\xi$$

çözümündeki x_0 ve x_1 değerleri belirlenecektir.

Böylece sınır değer probleminin çözümü, Green fonksiyonu içeren basit bir integral biçiminde yazılabilir. Burada integrallerin alt limitlerinin uygun seçimi ile $y_c(x)$ integraller içine dahil edilmiştir.

Öncelikle $y_1(a)=0$, $y_2(b)=0$, $y_1(b)\neq 0$, $y_2(a)\neq 0$ koşullarını sağlayan homojen diferansiyel denklemin çözümü ele alınsın. O halde;

$$y(a) = y_2(a) \int_{x_1}^a \frac{f(\xi)y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi - y_1(a) \int_{x_0}^a \frac{f(\xi)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi$$

şeklinde olup $y_1(a)=0$ olduğu dikkate alınırsa

$$y(a) = y_2(a) \int_{x_1}^a \frac{f(\xi)y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi$$

olduğu bulunur. $y(a)=0$ olması $x_1=a$ ile mümkündür. Daha sonra benzer şekilde

$$y(b) = y_2(b) \int_{x_1}^b \frac{f(\xi)y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi - y_1(b) \int_{x_0}^b \frac{f(\xi)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi$$

ifadesi yazılabilir ve $y_2(b)=0$ olduğu kullanılırsa

$$y(b) = -y_1(b) \int_{x_0}^b \frac{f(\xi)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi$$

elde edilir. $y(b)=0$ olması $x_0=b$ ile mümkündür. Bu yüzden

$$y(x) = y_2(x) \int_a^x \frac{f(\xi)y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi - y_1(x) \int_b^x \frac{f(\xi)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi$$

biçimindedir. $a < x < b$ olduğu dikkate alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$y(x) = \int_a^x \frac{y_1(\xi)y_2(x)f(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi + \int_x^b \frac{y_1(x)y_2(\xi)f(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi \quad (3.12)$$

elde edilir. O halde (3.11) sınır değer probleminin çözümü

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (3.13)$$

şeklinde yazılır. Burada $G(x, \xi)$ Green fonksiyonu parçalı fonksiyon olup

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{pW}, & a \leq x \leq \xi \\ \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{pW}, & \xi \leq x \leq b \end{cases} \quad (3.14)$$

biçimindedir. Bu fonksiyon $x = a$ ve $x = b$ noktalarında sınır koşullarını sağladığından

$$G(a, \xi) = \frac{y_1(a)y_2(\xi)}{pW} = 0, \quad G(b, \xi) = \frac{y_1(\xi)y_2(b)}{pW} = 0$$

oldukları elde edilir. Ayrıca (3.14) ifadesinden Green fonksiyonunun simetrik olduğu görülür. Yani; $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.

Örnek 3. 1: $y'' = x^2$, $0 < x < 1$,

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır değer probleminin çözümü Green fonksiyonu kullanılarak aransın. $y'' = 0$ homojen denkleminin çözümü $y(x) = Ax + B$ biçiminde olup A ve B belirlenecek sabitlerdir. $y_1(x) = 0$ olduğundan $y_1(0) = B = 0$ olur. Ayrıca A keyfi olduğundan $y_1(x) = x$ alınabilir. Benzer şekilde $y_2(1) = 0$ olduğundan $y_2(1) = A + B = 0$ olup bu eşitlikten $B = -A$ olduğu görülür. O halde $y_2(x) = Ax - A = A(x - 1)$ olur. A keyfi bir değer olduğundan $A = -1$ seçimi ile $y_2(x) = 1 - x$ elde edilir.

Bu problemde $p(x) = 1$ dir. Bu yüzden $y_1(x) = x$ ve $y_2(x) = 1 - x$ için $p(x)W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = x(-1) - 1.(1-x) = -1$ bulunur. O halde $G(x, \xi)$ Green fonksiyonu

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\xi(1-x), & 0 \leq x \leq \xi \\ -x(1-\xi), & \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklindedir ve buradan

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi \\ &= \int_0^1 G(x, \xi) \xi^2 d\xi \\ &= -\int_0^x \xi(1-x) \xi^2 d\xi - \int_x^1 x(1-\xi) \xi^2 d\xi \\ &= -(1-x) \int_0^x \xi^3 d\xi - x \int_x^1 (\xi^2 - \xi^3) d\xi \\ &= -(1-x) \left[\frac{\xi^4}{4} \right]_0^x - x \left[\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} \right]_x^1 \\ &= -\frac{1}{4}(1-x)x^4 - \frac{1}{12}x(4-3) + \frac{1}{12}x(4x^3 - 3x^4) \\ &= \frac{1}{12}(x^4 - x) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.3. Green Fonksiyonunun Özellikleri

Green fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. $\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right) + q(x) G(x, \xi) = 0, \quad x \neq \xi .$

ii. $x \neq \xi$ için $G(0, \xi) = G(1, \xi) = 0, \quad 0 < x < 1 .$

iii. $G(x, \xi) = G(\xi, x).$

iv. $x = \xi$ için $G(\xi^+, \xi) = G(\xi^-, \xi).$

v. $x = \xi$ de $G'(x, \xi)$ türevinde sıçrama süreksizliği vardır ve sıçrama miktarı $\frac{1}{p(\xi)}$

kadardır. Yani;

$$\frac{\partial G(\xi^+, \xi)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi^-, \xi)}{\partial x} = \frac{1}{p(\xi)} . \quad (3.15)$$

3.4. Dirac Delta Fonksiyonu

Bu bölümde adi diferansiyel denklemler için Green fonksiyonunun daha genel bir teorisi Dirac delta fonksiyonu yardımıyla elde edilecektir. Green fonksiyonu $x \neq \xi$ için homojen diferansiyel denklemi sağlayacağından

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right) + q(x) G(x, \xi) = 0, \quad x \neq \xi \quad (3.16)$$

şeklinde yazılabilir. $x = \xi$ olduğunda ise Green fonksiyonunun türevinin değerinde sıçrama süreksizliği olduğu Green fonksiyonunun özelliklerinden görülmektedir. Türevin sıçrama değeri ise

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Heaviside fonksiyonuna benzerdir. Heaviside fonksiyonu olması durumunda türev sıçrama haricinde her yerde sıfırdır. Öte yandan sıçrama süreksizliğinde sınırsız eğim olduğunu ve teknik olarak bu noktada türevin olmadığı bilinmektedir. Bu durum

$\delta(x) = \frac{d}{dx} H(x)$ Dirac delta fonksiyonu tanıtılarak düzeltilmeye çalışılacaktır. Daha sonra Green fonksiyonunun

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right) + q(x) G(x, \xi) = \delta(x - \xi)$$

diferansiyel denklemini sağladığı gösterilecektir. Öncelikle Dirac delta fonksiyonu ve özellikleri incelenir.

Dirac delta fonksiyonu yalnızca integral içinde yaptığı işle tanımlı olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. $x \neq 0$ için $\delta(x) = 0$.

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$. Yani bu özellik Dirac delta fonksiyonunun altında kalan alanın bir eşit olduğunu anlamına gelmektedir. Daha genel aralıklar üzerinde de

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1, \quad 0 \in [a, b] \quad \text{ve} \quad \int_a^b \delta(x) dx = 0, \quad 0 \notin [a, b]$$

geçerlidir.

iii. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$.

$x \neq a$ için Dirac delta fonksiyonu sıfıra eşit olduğundan integral her yerde sıfıra eşittir.

$x = a$ için ise $f(x) = f(a)$ olup

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(a) dx = f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = f(a)$$

olduğu görülür.

iv. $\delta(ax) = |a|^{-1} \delta(x)$.

Bu özellik $\delta(ax)$ fonksiyonunun integralinde $y = ax$ değişken değiştirmesi yapılarak gösterilebilir. Yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \delta(ax) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_{-aL}^{aL} \delta(y) dy$$

elde edilir. $a > 0$ ise $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy$ şeklinde olur. Ancak $a < 0$ ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) dx = \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} \delta(y) dy = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy \text{ olur. Bu yüzden;}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy$$

şeklindedir.

Örnek 3.3.1: $\int_{-\infty}^{\infty} (5x+1) \delta(4(x-2)) dx$ integrali incelensin. O halde **iii** ve **iv** özellikleri yardımıyla

$$\int_{-\infty}^{\infty} (5x+1) \delta(4(x-2)) dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (5x+1) \delta(x-2) dx = \frac{11}{4}$$

olduğu bulunur.

Öte yandan $\delta(f(x))$ için bir genelme yapılırsa bu fonksiyonun integrali $f(x)$ fonksiyonunu sıfır yapan değere bağlı olarak değerlendirilebilir. Yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|f'(x_1)|} \delta(x-x_1) dx$$

şeklindedir. Burada x_1 , $f(x)$ fonksiyonun köküdür. Bu özellik $y = f(x)$ değişken dönüşümü yapılarak ispatlanabilir. Sonuç olarak

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_1)|} \delta(x-x_1) \quad (3.17)$$

şeklinde yazılır.

Örnek 3.3.2: $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta(3x-2) dx$ integrali ele alınsın. O halde

$f(x) = 3x - 2$ olup yalnızca $x = \frac{2}{3}$ için $f(x) = 0$ olur ve $|f'(x)| = 3$ tür. O halde (3.17) eşitliği de göz önünde bulundurularak

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta(3x-2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3} x^2 \delta\left(x - \frac{2}{3}\right) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

elde edilir. Bu problem başka bir yoldan incelenirse; $y = 3x - 2$ değişken değiştirmesi yapılarak $dy = 3dx$ ve $x = \frac{y+2}{3}$ ifadeleri elde edilir. O halde bu ifadeler integral de yerlerine konulursa

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta(3x-2) dx = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \left(\frac{y+2}{3}\right)^2 dy = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right) = \frac{4}{27} \text{ elde edilir.}$$

Ayrıca daha genel olarak; $x_j, j=1,2,...,n$ için $f(x_j) = 0$ ve $f'(x_j) \neq 0$ iken

$$\delta(f(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{|f'(x_j)|} \delta(x - x_j) \quad (3.18)$$

biçimindedir. Burada $x_j, f(x)$ fonksiyonunun köküdür.

Örnek 3.3.3: $\int_0^{2\pi} \cos x \delta(x^2 - \pi^2) dx$ integrali incelensin.

$x = \pm\pi$ iken $f(x) = x^2 - \pi^2 = 0$ dir. Ayrıca $f'(x) = 2x$ dir. Bu yüzden $|f'(\pm\pi)| = 2\pi$ dir. O halde (3.18) eşitliğinden

$$\delta(x^2 - \pi^2) = \frac{1}{2\pi} [\delta(x - \pi) + \delta(x + \pi)]$$

elde edilir. Bu ifade integral içinde yerine yazılırsa

$$\int_0^{2\pi} \cos x \delta(x^2 - \pi^2) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x [\delta(x - \pi) + \delta(x + \pi)] dx = \frac{1}{2\pi} \cos \pi = -\frac{1}{2\pi}$$

elde edilir.

3.5. Green Fonksiyonu Diferansiyel Denklemi

Önceki bölümde belirtildiği gibi

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) + q(x)y(x) = f(x)$$

homojen olmayan denklemin çözümü Green fonksiyonu yardımıyla elde edilmektedir. Ayrıca Green fonksiyonu

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right) + q(x)G(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (3.19)$$

diferansiyel denklemini ve homojen denklemini sağlamaktadır. Bu denklemler daha kompakt formda aşağıdaki gibi yazılsın.

$$\begin{aligned} L[y] &= f(x), \\ L[G] &= \delta(x - \xi) \end{aligned}$$

Öte yandan ilk denklem $G(x, \xi)$ ile, ikinci denklem ise $y(x)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkartılırsa

$$GL[y] - yL[G] = f(x)G(x, \xi) - \delta(x - \xi)y(x)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı da ayrı ayrı a ' dan b ' ye integral alınırsa

$$\int_a^b (GL[y] - yL[G])dx = \left[p(x) \left(G(x, \xi)y'(x) - y(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right) \right]_{x=a}^{x=b}$$

ve

$$\int_a^b [f(x)G(x, \xi) - \delta(x - \xi)y(x)]dx = \int_a^b f(x)G(x, \xi)dx - y(\xi)$$

eşitlikleri elde edilir. Daha sonra bu eşitlikler birleştirilip düzenlenirse

$$y(\xi) = \int_a^b f(x)G(x, \xi)dx - \left[p(x) \left(y(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} - G(x, \xi)y'(x) \right) \right]_{x=a}^{x=b}$$

elde edilir. Bu fonksiyonu x ' in bir fonksiyonu olarak yeniden yazmak gerektiğinden x ile ξ değiştirilip Green fonksiyonunun simetrik olduğu kullanılırsa

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi - \left[p(\xi) \left(y(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} - G(x, \xi) y'(\xi) \right) \right]_{\xi=a}^{\xi=b} \quad (3.20)$$

elde edilir. (3.20) eşitliğinde gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} y(x) = & \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi - \left[p(b) \left(y(b) \frac{\partial G(b, \xi)}{\partial \xi} - G(b, \xi) y'(b) \right) \right] \\ & + \left[p(a) \left(y(a) \frac{\partial G(a, \xi)}{\partial \xi} - G(a, \xi) y'(a) \right) \right] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $G(a, \xi) = 0$ ve $G(b, \xi) = 0$ oldukları kullanılırsa

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

eşitliği elde edilir. Bu ise çözümün doğruluğunu gösterir.

Örnek 3.5.1: Aşağıdaki

$$\begin{aligned} y'' &= x^2, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 1, \quad y(1) = 2 \end{aligned}$$

sınır değer problemi ele alınsın. Bu problemin çözümü (3.20) formundadır ve $p(\xi) = 1$ dir. Öte yandan sınır değer Green fonksiyonu kullanılarak

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\xi(1-x), & 0 \leq \xi \leq x \\ -x(1-\xi), & x \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

ifadesi bulunur. Bu ifade ve veriler sınır değer probleminin çözümünde yerine konulduğunda

$$\begin{aligned}
y(x) &= \int_0^1 G(x, \xi) \xi^2 d\xi - \left[y(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} - G(x, \xi) y'(\xi) \right]_{\xi=0}^{\xi=1} \\
&= \int_0^x (x-1) \xi^3 d\xi + \int_x^1 x(\xi-1) \xi^2 d\xi + y(0) \frac{\partial G(x, 0)}{\partial \xi} - y(1) \frac{\partial G(x, 1)}{\partial \xi} \\
&= \frac{(x-1)x^4}{4} + \frac{x(1-x^4)}{4} - \frac{x(1-x^3)}{3} + (x-1) - 2x \\
&= \frac{x^4}{12} + \frac{35}{12}x - 1
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu problem integral olarak da çözülebilir ve genel çözümü

$y(x) = \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2$ biçiminde olur. Bu çözüm her sınır şartlarıyla birlikte aynı sonucu verir.

Green fonksiyonu tarafından sağlanan diferansiyel denklemdeki Dirac delta fonksiyonunun sınır değer probleminin çözümüne yardımcı olabileceği görülmüştür. Green fonksiyonu (3.19) homojen olmayan denkleminin bir çözümüdür. Dirac delta fonksiyonu da Green fonksiyonunun yorumlanmasına yardımcı olmuştur. $\delta(x-\xi)$ fonksiyonu ile $f(\xi)$ fonksiyonu çarpılıp integral alınırsa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\xi) f(\xi) d\xi = f(x)$$

olduğu elde edilir.

$f(x)$ fonksiyonunu $f(\xi)$ fonksiyonunun farklı şiddetteki impulslarının bir toplamı olarak oluşturmada kullanılabilen delta fonksiyonu, $x = \xi$ noktasında bir birim impuls olarak düşünülebilir. Bu yüzden Green fonksiyonu verilen sınır koşulları ve oluşturulan diferansiyel denklem için impulsa bir tepkidir.

Özellikle delta fonksiyonu etkisindeki denklem sıçrama koşulu elde etmek için kullanılabilir. O halde (3.19) denklemini ele alınıp $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\xi - \varepsilon$ 'dan $\xi + \varepsilon$ 'a integral alınırsa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right) + q(x) G(x, \xi) \right] dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta(x - \xi) dx$$

$$= 1$$

elde edilir. $q(x)$ fonksiyonu sürekli olup gerekli işlemler yapılırsa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[p(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right]_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} = 1$$

elde edilir. Bu ise $x = \xi$ noktasında kullanılan sıçrama koşuludur.

4. FARK GREEN FONKSİYONU

4.1. Düzgün Şebekede Fark Green Fonksiyonu

Bu bölümde fark Green fonksiyonunu incelenecektir. Öncelikle

$$Lu := \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (4.1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (4.2)$$

2. mertebeden diferansiyel problemi ele alınsın. Burada $k(x) \geq c_1 > 0$, $q(x) \geq 0$ olmak üzere (4.1)-(4.2) probleminin çözümü şu şekildedir:

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (4.3)$$

Burada $G(x, \xi)$ Green fonksiyonu olup bu fonksiyon açık şekilde ifade edilirse

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\alpha(x)\beta(\xi)}{\alpha(1)}, & x \leq \xi \\ \frac{\alpha(\xi)\beta(x)}{\alpha(1)}, & x \geq \xi \end{cases} \quad (4.4)$$

şeklinde yazılır. Burada $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları sırasıyla,

$$L\alpha = 0, \quad \alpha(0) = 0, \quad k(0)\alpha'(0) = 1, \quad 0 < x < 1,$$

$$L\beta = 0, \quad \beta(1) = 0, \quad k(1)\beta'(1) = -1, \quad 0 < x < 1$$

başlangıç değer problemlerinin çözümleri olup $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları lineer bağımsızdırlar. Bu ise Wronskian'ın sıfırdan farklı olduğunu gösterir. Ayrıca bu fonksiyonlar için

$$\begin{cases} \alpha(x) > 0, & x > 0 \\ \beta(x) > 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

yazılabilir.

Öte yandan ϖ_h düzgün şebekesi üzerinde (4.1) denkleminin karşılık gelen

2. mertebeden fark denklemi şu şekilde ifade edilir:

$$\Lambda y_i = \left(a y_{x,i}^- \right)_{x,i} - d_i y_i = -\varphi_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1, \quad (4.5)$$

$$y_0 = 0, \quad y_N = 0. \quad (4.6)$$

Burada $a(x) \geq c_1 > 0$ ve $d(x) \geq 0$ olup (4.5) denkleminin açık gösterimi

$$\Lambda y_i = \frac{1}{h^2} \left[a_{i+1} (y_{i+1} - y_i) - a_i (y_i - y_{i-1}) \right] = -\varphi_i$$

şeklindedir. Ayrıca düzgün şebeke üzerindeki iç çarpım

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad (y, v) = \sum_{i=1}^N y_i v_i h$$

olmak üzere $\Lambda y_i = -\varphi_i$ denklemini çözen y_i ' ler

$$y_i = \sum_{k=1}^{N-1} G_{ik} \varphi_k h = (G_{ik}, \varphi_k) \quad (4.7)$$

formunda aransın.

Ayrıca $\Lambda_{(i)} G_{ik} = \frac{-\delta_{ik}}{h}$ ise (4.5) denkleminin doğruluğu $\Lambda y_i = \sum_{k=1}^{N-1} \Lambda_{(i)} G_{ik} \varphi_k h$ eşitliğinden

görülmür. Burada δ_{ik} Kronecker deltası olup $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$ şeklindedir.

$$\Lambda_{(i)} G_{ik} = \left(a_i (G_{ik})_{x,i}^- \right)_{x,i} - d_i G_{ik} = \frac{-\delta_{ik}}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.8)$$

$$G_{0k} = G_{Nk} = 0$$

olmak üzere eğer G_{ik} fonksiyonu (4.8) denklemini sağlarsa (4.7) ifadesi, (4.5)-(4.6) probleminin bir çözümü olur. Böylece Green fonksiyonun varlığı bu şekilde belirlenmiş olur. Ayrıca Green fonksiyonu yine α_i ve β_i yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$G_{ik} = \begin{cases} \frac{\alpha_i \beta_k}{\alpha_N} & , i \leq k \\ \frac{\alpha_k \beta_i}{\alpha_N} & , k \leq i \end{cases} . \quad (4.9)$$

Burada α_i ve β_i fonksiyonları sırasıyla,

$$\begin{aligned} \Lambda \alpha_i &= 0, \alpha_0 = 0, a_1 \alpha_{x,0} = 1, a_1 \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{h} = 1, i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \Lambda \beta_i &= 0, \beta_N = 0, a_N \beta_{x,N} = -1, a_N \frac{\beta_N - \beta_{N-1}}{h} = -1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

problemlerinin çözümleri olup aşağıdaki özelliklere sahiptirler.

i. α_i ve β_i fonksiyonları pozitif fonksiyonlardır.

$$\begin{cases} \alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, N \\ \beta_i > 0, i = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

Öte yandan α_i monoton artan ($\alpha_i \leq \alpha_{i+1} \leq \alpha_N$), β_i ise monoton azalan ($\beta_i \leq \beta_{i-1} \leq \beta_0$) fonksiyonlardır. Ayrıca (4.10) koşullarından

$$a_i \alpha_{\bar{x},i} = 1 + \sum_{k=1}^{i-1} h d_k \alpha_k, \quad \alpha_1 = \frac{h}{a_1} > 0 \text{ olduğu görülür.}$$

$k = 1, 2, \dots, i-1$ için $a_k > 0$ ise $a_i \alpha_{\bar{x},i} > 0$ ve $\alpha_i > \alpha_{i-1} > 0$ dir. Benzer şekilde

$$\beta_{\bar{x},i} < 0 \text{ ve } 0 < \beta_i < \beta_{i-1} \text{ dir.}$$

ii. $\alpha_N = \beta_0$ ya da $\alpha(1) = \beta(0)$.

2. Green formülünden

$$(\alpha, \Lambda \beta) = (\beta, \Lambda \alpha) + a_N (\alpha \beta_{\bar{x}} - \beta \alpha_{\bar{x}})_N - a_1 (\alpha \beta_x - \beta \alpha_x)_0 \text{ şeklindedir.}$$

iii. $0 < i \leq N$ için $\Delta_i = a_i (\alpha_{\bar{x},i} \beta_i - \alpha_i \beta_{\bar{x},i}) = \alpha_N (sbt)$ determinanı

pozitiftir. ϖ_h şebekesinde 2. Green formülü uygulandığında

$$0 = \sum_{i=1}^{i_0-1} (\alpha \Lambda \beta - \beta \Lambda \alpha)_i h = a_{i_0} (\alpha \beta_{\bar{x}} - \beta \alpha_{\bar{x}})_{i_0} - a_1 (\alpha \beta_x - \beta \alpha_x)_0$$

$$= -\Delta(x_{i_0}) + \beta(0) a_1 \alpha_{\bar{x},i} = -\Delta(x_{i_0}) + \beta_0$$

elde edilir. $x_{i_0} = x$, ϖ_h şebekesinin keyfi bir düğüm noktası olduğundan

$$\Delta(x) = sbt = \beta(0) = \alpha(1) \text{ olabilir.}$$

Şimdi $\Lambda_{(i)} G_{ik} = \frac{-\delta_{ik}}{h}$ olduğu araştırılsın. $i \neq k$ olmak üzere $\Lambda \alpha_i = 0$ ve

$\Lambda \beta_i = 0$ için $\Lambda_{(i)} G_{ik} = 0$ olduğu görülür. $i = k$ için ise

$$\left(\Lambda_{(i)} G_{ik} \right)_{i=k} = \frac{1}{h^2} \left[a_{i+1} (G_{k+1,k} - G_{kk}) - a_i (G_{kk} - G_{k-1,k}) \right] - d_k G_{kk}$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılrısa

$$\left(\Lambda_{(i)} G_{ik} \right)_{i=k} = \frac{1}{\alpha_N h^2} \left[a_{k+1} (\alpha_k \beta_{k+1} - \alpha_k \beta_k) - a_k (\alpha_k \beta_k - \alpha_{k-1} \beta_k) \right] - d_k G_{kk} \quad (4.11)$$

eşitliği bulunur.

$$\Lambda_{k+1} = \frac{a_{k+1} (\alpha_{k+1} \beta_k - \alpha_k \beta_{k+1})}{h} = \alpha_N \text{ şartından}$$

$$a_{k+1} \alpha_k \beta_{k+1} = a_{k+1} \alpha_{k+1} \beta_k - h \alpha_N$$

ifadesi elde edilir ve bu ifade (4.11) eşitliğinde yerine konulup gerekli işlemler yapılrısa

$$\left(\Lambda_{(i)} G_{ik} \right)_{i=k} = \frac{\beta_k}{\alpha_N} (a \alpha_{\bar{x}})_{x,k} - \frac{1}{h} - \frac{d_k \beta_k}{\alpha_N} \alpha_k = \frac{\beta_k}{\alpha_N} \Lambda \alpha_k - \frac{1}{h} = -\frac{1}{h}$$

ifadesi elde edilir.

Ayrıca (4.9) formülünününden $i, k \neq 0, N$ için $G_{ik} > 0$ ve $G_{ik} = G_{ki}$ oldukları görülür.

Öte yandan sabit i için k 'nin bir fonksiyonu olan G_{ik} ,

$$\Lambda_{(k)} G_{ik} = -\frac{\delta_{ik}}{h}, \quad G_{i0} = G_{iN} = 0 \quad \text{şartlarını sağlar.}$$

Şimdi de $d(x)=0$ özel durumu incelensin. Burada $\alpha = \overset{\circ}{\alpha}(x)$ ve $\beta = \overset{\circ}{\beta}(x)$ fonksiyonları

$$\overset{\circ}{\alpha}_i = \sum_{s=1}^i \frac{h}{a_s}, \quad \overset{\circ}{\beta}_i = \sum_{s=i+1}^N \frac{h}{a_s} \quad (4.12)$$

açık formundaki (4.10) denkleminde belirlenebilir ve

$$\begin{aligned} \Lambda y &= (ay_x)_x = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \\ y_0 &= 0, \quad y_N = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

problemiyle G_{ik} Green fonksiyonu aşağıdaki biçime indirgenir.

$$G_{ik} = \begin{cases} \frac{\sum_{s=1}^i \frac{h}{a_s} \sum_{s=k+1}^N \frac{h}{a_s}}{\sum_{s=1}^N \frac{h}{a_s}}, & i \leq k \\ \frac{\sum_{s=1}^k \frac{h}{a_s} \sum_{s=i+1}^N \frac{h}{a_s}}{\sum_{s=1}^N \frac{h}{a_s}}, & k \leq i \end{cases}. \quad (4.14)$$

Şimdi de (4.5)-(4.6) problemine uygun Green fonksiyonu ve fark türevi için bazı eşitsizlikler elde edilsin ve bu eşitsizlikler yardımıyla problemin çözümünün φ ye bağlı değerlendirmeleri verilsin. (4.7) eşitliğinden

$$|y_i| \leq (G_{ik}, |\varphi_k|) = \sum_{i=1}^{N-1} G_{ik} |\varphi_k| h \quad (4.15)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu doğrultuda devam edildiğinde φ_i ;

$$\varphi = \eta_x, \quad \eta_1 = 0, \quad \eta_i = \sum_{s=1}^{i-1} h \varphi_s, \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (4.16)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeler (4.7) eşitliğinde yerine konulursa

$$y(x) = (G(x, \xi), \eta_\xi) = - (G_\xi(x, \xi), \eta(\xi)) \quad (4.17)$$

eşitlikleri elde edilir.

Ayrıca (4.5)-(4.6) probleminin çözümü için $\|y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |y_i|$ olmak üzere maksimum prensibinden

$$\|y\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{a_{i+1}} \sum_{s=1}^i |h^2 \varphi_s| \leq \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{s=1}^i |h^2 \varphi_s| \quad (4.18)$$

değerlendirmesi yazılabilir (Samarskii, 2001).

Şimdi ise (4.5)-(4.6) probleminin çözüm değerlendirmesinde kullanılacak olan aşağıdaki lemma verilsin.

Lemma 4.1: (4.5)-(4.6) problemi için

$$G(x, \xi) \leq \frac{1}{c_1}, \quad (4.19)$$

$$|G_x(x, \xi)| \leq \frac{2}{c_1}, \quad |G_\xi(x, \xi)| \leq \frac{2}{c_1} \quad (4.20)$$

değerlendirmeleri doğrudur (Samarskii, 2001).

İspat:

i. (4.18) eşitsizliğinde y_i ile G_{ik} ve φ_s ile $\frac{\delta_{sk}}{h}$ değiştirilirse;

$$\max_{i,k} G_{ik} \leq \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} h S_{ik} \leq \frac{1-x_k}{c_1} \leq \frac{1}{c_1}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada $S_{ik} = \sum_{s=1}^i \delta_{sk}$ ve $S_{ik} = \begin{cases} 0, & i < k \\ 1, & i \geq k \end{cases}$ şeklindedir.

ii. $d(x) \equiv 0$ olsun ve $G = G_0(x, \xi)$ Green fonksiyonu (4.14) formülü tarafından belirlensin. Bu durumda

$$G_{0,\bar{x}}(x,\xi) = \begin{cases} \frac{\overset{\circ}{\alpha}(x)\overset{\circ}{\beta}(\xi)}{\overset{\circ}{\alpha}(1)}, & x \leq \xi \\ \frac{\overset{\circ}{\alpha}(\xi)\overset{\circ}{\beta}(x)}{\overset{\circ}{\alpha}(1)}, & x > \xi \end{cases}$$

bulunur. Ayrıca

$$\overset{\circ}{\alpha}_{\bar{x},i} = \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{c_1}, \quad \overset{\circ}{\beta}_{\bar{x},i} = \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{c_1}, \quad \overset{\circ}{\alpha}(\xi) \leq \overset{\circ}{\alpha}(1), \quad \overset{\circ}{\beta}(\xi) \leq \overset{\circ}{\alpha}(1)$$

eşitsizlikleri sayesinde

$$|G_{0\bar{x}}(x,\xi)| \leq \frac{1}{c_1} \quad (4.21)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$|G_{0\bar{\xi}}(x,\xi)| \leq \frac{1}{c_1}$$

şeklindedir.

$v(x,\xi) = G_0(x,\xi) - G(x,\xi)$ olsun. G ve G_0 için denklemler

$$\Lambda_\alpha v(x,\xi) = -d(x)G_0(x,\xi), \quad v(0,\xi) = v(1,\xi) = 0 \quad \text{şeklindedir.}$$

ξ ile ilgili olarak bu denklemin geri fark türevi hesaplanabilir. ξ 'nin kullanımı bize

$v_{\bar{\xi}} = w(x,\xi)$ 'yi oluşturmak için izin verir.

$$\begin{aligned} \Lambda_x w(x,\xi) &= (a(x)w_{\bar{x}}(x,\xi))_x - d(x)w(x,\xi) = -d(x)G_{0\bar{\xi}}(x,\xi) \\ w(0,\xi) &= w(1,\xi) = 0. \end{aligned}$$

Ayrıca aşağıdaki

$$\max_x |w(x,\xi)| \leq \max_x |G_{0\bar{\xi}}(x,\xi)| \leq \frac{1}{c_1} \quad (4.22)$$

değerlendirmesi doğrudur (Samarskii,2001).

(4.21) ve (4.22) değerlendirmeleri kullanılırsa

$|G_{\bar{\xi}}(x, \xi)| \leq |G_{0\bar{\xi}}(x, \xi)| + |w(x, \xi)|$ olduğu bulunarak istenilen (4.20) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Teorem 4.1: (4.5)-(4.6) probleminin çözümü için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur.

$$\|y\|_{\infty} \leq \frac{2}{c_1} \left(1, \left| \sum_{s=1}^{N-1} h\varphi_s \right| \right) = \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=i}^{N-1} h\varphi_s \right|, \quad (4.23)$$

$$\|y\|_{\infty} \leq \frac{2}{c_1} \left(1, \left| \sum_{s=1}^i h\varphi_s \right| \right) = \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=1}^i h\varphi_s \right|. \quad (4.24)$$

Ayrıca $\varphi(x)$, $\varphi = \eta_x + \varphi^*$ formunda olduğunda

$$\|y\|_{\infty} \leq \frac{2}{c_1} \left\{ (1, |\eta|] + (1, |\mu|] \right\} \quad (4.25)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $\mu_1 = 0$ ve $\mu_i = \sum_{k=1}^{i-1} h\varphi_k^*$, $i = 1, 2, \dots, N$ şeklindedir.

İspat: (4.17) eşitsizliğinden

$$|y(x)| = \left| -\sum_{i=1}^N hG_{\bar{\xi}}(x, \xi)\eta(\xi) \right| \leq \sum_{i=1}^N h|G_{\bar{\xi}}(x, \xi)| |\eta(\xi)|$$

elde edilir. Lemma 4.1 yardımıyla bu eşitsizlikten

$$|y(x)| \leq (|G_{\bar{\xi}}(x, \xi)|, |\eta(\xi)|] \leq \frac{2}{c_1} (1, |\eta(\xi)|] \quad (4.26)$$

elde edilir.

Öte yandan (4.16) bağıntısından $\eta_{i+1} - \eta_i = h\varphi_i$ bulunur ve bu denklemin çözümü

$$\eta_N = 0 \text{ ise } \eta_i = -\sum_{s=i}^{N-1} h\varphi_s$$

$$\eta_1 = 0 \text{ ise } \eta_{i+1} = \sum_{s=1}^i h\varphi_s \text{ şeklindedir.}$$

$\eta(x)$ fonksiyonu keyfi bir sabit için de $\eta_x = \varphi$ şartından elde edilebileceğinden

$$\frac{2}{c_1} \left(1, |\eta(\xi)|\right] = \frac{2}{c_1} \left(1, |\eta_i|\right] = \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^N h_i - \sum_{s=i}^{N-1} h \varphi_s$$

olup (4.26) eşitsizliğinden

$$|y(x)| \leq \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^N h_i \left| \sum_{s=i}^{N-1} h \varphi_s \right|$$

elde edilir. O halde;

$$\|y\|_{\infty} \leq \frac{2}{c_1} \left(1, \left| \sum_{s=i}^{N-1} h \varphi_s \right| \right) = \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left| \sum_{s=i}^{N-1} h \varphi_s \right|$$

olur ki bu ise (4.23) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq \left(|G(x, \xi)|, |\eta_\xi| \right) \leq \frac{1}{c_1} \left(1, |\eta_\xi| \right) \leq \frac{2}{c_1} \left(1, |\eta_\xi| \right) \\ &\leq \frac{2}{c_1} \left(1, |\eta_{i+1}| \right) \leq \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} h_i |\eta_{i+1}| = \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left| \sum_{s=1}^i h \varphi_s \right| \end{aligned}$$

olup

$$|y(x)| \leq \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left| \sum_{s=1}^i h \varphi_s \right|$$

elde edilir. O halde,

$$\|y\|_{\infty} \leq \frac{2}{c_1} \left(1, \left| \sum_{s=1}^i h \varphi_s \right| \right) = \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left| \sum_{s=1}^i h \varphi_s \right|$$

bulunur. Buradan da (4.24) eşitsizliğinin doğruluğu görülür.

(4.25) eşitsizliğini ispatlamak için $\varphi = (\eta + \mu)_x$ olmak üzere $\varphi^* = \mu_x$ almak yeterlidir. (4.26) eşitsizliğinden,

$$\|y\|_{\infty} \leq \frac{2}{c_1} \left(1, |\varphi|\right]$$

olduğu bilinmektedir. O halde;

$$\begin{aligned}\frac{2}{c_1} \left(1, |\varphi|\right] &= \frac{2}{c_1} \left\{ \sum_{i=1}^N h |\varphi_i| \right\} = \frac{2}{c_1} \left\{ \sum_{i=1}^N h |\eta_i + \mu_i| \right\} \\ &\leq \frac{2}{c_1} \left\{ \sum_{i=1}^N h |\eta_i| + \sum_{i=1}^N h |\mu_i| \right\} \\ &= \frac{2}{c_1} \left\{ \left(1, |\eta|\right] + \left(1, |\mu|\right] \right\}\end{aligned}$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Bu bölümde ele alınan fark probleminin çözümü için Green fonksiyonu yardımıyla elde edilen (4.23) ve (4.24) eşitsizlikleri, (4.18) eşitsizliğine göre daha hassas ve titizlerdir. Problemin çözümü için genellikle (4.18) eşitsizliği kullanılırken bu çalışmada ise Green fonksiyonu yardımıyla (4.18) eşitsizliğinden daha iyi bir değerlendirme olan (4.23) ve (4.24) eşitsizlikleri elde edilmiş oldu.

4.2. Düzgün Olmayan Şebekede Fark Green Fonksiyonu

$[0,1]$ aralığındaki singüler pertürbe olmuş

$$\begin{aligned}Lu &:= -\varepsilon u''(x) - r(x)u' = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

sınır-değer problemi ele alınsın. Burada ε bu aralıkta küçük değerli bir parametredir. $r(x) > r > 0$ ve $r(x), f(x) \in C^1[0,1]$ olmak üzere (4.2.1) denkleminin karşılık gelen düzgün olmayan şebeke üzerindeki

$$\begin{aligned}\ell y_i &:= -\varepsilon y_{\bar{x}\bar{x},i} - r_{i+1} y_{\bar{x},i} = f_i, \quad x_i \in \omega, \\ y_0 &= y_N = 0\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

fark problemi ele alınsın. (4.2.2) problemi için Green fonksiyonu $G(x_i, \xi_j)$ olsun. Sabit ξ_j 'ler için x_i 'nin bir fonksiyonu olan bu fonksiyon

$$\begin{aligned}\ell G(x_i, \xi_j) &= \delta(x_i, \xi_j), \quad x_i \in \omega, \quad \xi_j \in \omega, \\ G(0, \xi_j) &= G(1, \xi_j) = 0, \quad \xi_j \in \omega\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\delta(x_i, \xi_j) = \begin{cases} h_i, & x_i = \xi_j \\ 0, & x_i \neq \xi_j \end{cases}$ şeklindedir.

(4.2.3) bağıntısı Green fonksiyonu kullanılarak kolayca görülebilir. Öte yandan (4.2.2) probleminin çözümü

$$y_i = \sum_{j=1}^{N-1} G(x_i, \xi_j) f_j h_j, \quad x_i \in \omega \quad (4.2.4)$$

şeklinde dir. Gerçekten, (4.2.3) ifadesi dikkate alındığında

$$\ell_i y_i := \ell y_i = \sum_{j=1}^{N-1} \ell G(x_i, \xi_j) f_j h_j = f_j, \quad x_i \in \omega$$

bağıntısı elde edilir. Sabit x_i için değişken ξ_j 'nin bir fonksiyonu olan $G(x_i, \xi_j)$ Green fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} \ell_j^* G(x_i, \xi_j) &= \delta(x_i, \xi_j), \quad \xi_j \in \omega, \quad x_i \in \omega, \\ G(x_i, 0) &= G(x_i, 1) = 0, \quad x_i \in \omega \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

adjoint probleminin bir çözümüdür. (4.2.4) eşitliği, (4.2.2) problemi ve ℓ 'nin ℓ^* adjoint olduğu kullanılırsa

$$y_i = \sum_{j=1}^{N-1} G(x_i, \xi_j) f_j h_j = \sum_{j=1}^{N-1} G(x_i, \xi_j) \ell_j y_j h_j = \sum_{j=1}^{N-1} \ell_j^* G(x_i, \xi_j) y_j h_j$$

olup

$$\ell_j^* G(x_i, \xi_j) = \delta(x_i, \xi_j)$$

bağıntısı elde edilir.

Teorem 4.2: Eğer $r_i \geq r > 0$ ise $G(x_i, \xi_j)$ Green fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyondur ve ε 'a göre düzgün sınırlıdır (Andreev, 2001).

$$0 \leq G(x_i, \xi_j) < \frac{1}{r}.$$

İspat: (4.2.3) cebirsel denklem sisteminin matrisi M-matrisidir. Green fonksiyonunun negatif olmayan bir fonksiyon olduğu M-matrisi ve (4.2.3) ifadesinden görülür.

Şimdi eşitsizliğin sağ tarafı ispatlansın.

$$\max_{\xi_j \in \omega} G(x_i, \xi_j) = G(x_i, \xi_{j_0}), \quad x_i \in \omega \quad \text{olmak üzere} \quad \xi_{j_0} \in \omega \quad \text{olsun.}$$

(4.2.5) eşitliği ile $\hbar_j$ çarpımının $j=1$ ' den j_0 ' a toplamı alınıp $G(x_i, 0) = 0$ olduğu dikkate alınır

$$\sum_{j=1}^{j_0} \ell_j^* G(x_i, \xi_j) \hbar_j = -\varepsilon G_{\xi}(x_i, \xi_{j_0}) + \varepsilon G_{\xi}(x_i, \xi_1) + r_{j_0+1} G(x_i, \xi_{j_0}) = \sum_{j=1}^{j_0} \delta(x_i, \xi_j) \hbar_j \quad (4.2.6)$$

ifadesi elde edilir. ξ_{j_0} seçiminden dolayı $G_{\xi}(x_i, \xi_{j_0}) = [G(x_i, \xi_{j_0+1}) - G(x_i, \xi_{j_0})] h_{j_0+1}^{-1} \leq 0$ olduğu ve $G(x_i, \xi_j)$ negatif olmayan fonksiyon olduğundan $G_{\xi}(x_i, \xi_1) = G(x_i, \xi_1) h_1^{-1} \geq 0$ olduğu yazılır. Buradan (4.2.6) ifadesindeki ilk iki terimin negatif olmadığı bulunur ki bu yüzden

$$r_{j_0+1} G(x_i, \xi_{j_0}) \leq \sum_{j=1}^{j_0} \delta(x_i, \xi_j) \hbar_j \leq 1$$

olup bu ise istenilen eşitsizliği gösterir.

Uyarı 4.1: (4.1.1) denklemi için (4.2.2) fark şeması ile birlikte aşağıdaki fark şeması sıkça kullanılır.

$$\tilde{\ell} y_i := -\varepsilon y_{\bar{x}\bar{x},i} - r_{i+1} y_{x,i} = f_i \quad (4.2.7)$$

Burada r_{i+1} yerine $r_{i+1} \frac{h_i}{h_{i+1}}$ konulursa; bu fark şeması (4.2.2) formu içine yazılabilir ve

(4.2.7) denkleminde $\tilde{\ell}$ ' ya adjoint olan

$$\tilde{\ell}^* v_i := -\varepsilon v_{\bar{x}\bar{x},i} + \left(r_{i+1} \frac{h_i}{h_{i+1}} v_i \right)_{\bar{x},i} \quad \text{fark denklemi elde edilir.}$$

Bu ifade ve Teorem 4.2 'nin ispatından (4.2.7) fark şemasının Green fonksiyonunun

$$\frac{2h_{i+1}}{r_{i+1}(h_i + h_{i+1})} \leq \frac{2}{r} \quad \text{sabit bir fonksiyon ile sınırlı olduğu bulunur.}$$

Teorem 4.3: Eğer $r_i \geq r > 0$ ise (4.2.2) probleminin çözümü için aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\|y\|_{\infty} \leq \frac{1}{r} \|f\|_1.$$

İspat: (4.2.2) probleminin çözümü

$$y_i = \sum_{j=1}^{N-1} G(x_i, \xi_j) f_j h_j$$

şeklinde olup Teorem 4.2' den Green fonksiyonun sınırlı olduğu kullanılırsa

$$y_i \leq \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{N-1} f_j h_j$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$|y_i| \leq \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{N-1} |f_j| h_j = \frac{1}{r} (|f_j|, 1) = \frac{1}{r} \|f_j\|_1$$

elde edilir. O halde

$$\|y\|_{\infty} \leq \frac{1}{r} \|f\|_1 \text{ olduğu bulunur ve ispat tamamlanır.}$$

5. İKİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ SINIR DEĞER FARK PROBLEMİNİN HATA DEĞERLENDİRMESİNDE FARK GREEN FONKSİYONU KULLANIMI

5.1. Shishkin Şebekesinde Kesme Hatası

(4.2.2) fark probleminin çözümü y_i ve ϖ şebekesinin düğümlerindeki sürekli problemin çözümünün değerleri $u(x_i)$ olsun. $z_i = y_i - u_i$ hata fonksiyonu olup (4.2.2) fark probleminde $y_i = z_i + u_i$ eşitliği kullanılırsa z_i 'nin

$$\begin{aligned} \ell z_i &:= f_i - \ell u_i = f_i + \varepsilon u_{\bar{x}\bar{x},i} + r_i u_{\bar{x},i} =: \psi_i \\ z_0 &= z_N = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

probleminin çözümü olduğu görülür. (4.2.1) problemini kullanarak

$$\psi_i = \varepsilon(u_{\bar{x}\bar{x},i} - u_i'') + r_i(u_{\bar{x},i} - u_i') \quad (5.2)$$

yazılabilir. Şimdi Shishkin şebekesi üzerindeki kesme hatası değerlendirilsin.

(4.2.2) problemi için Shishkin şebekesi şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \varpi = \{ x_i \mid x_i = ih, \quad i=0,1,\dots,\frac{N}{2}; \quad x_i = x_{N/2} + (i - \frac{N}{2})H, \quad i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N; \\ h = \frac{2\delta}{N}, \quad H = \frac{2(1-\delta)}{N}, \quad \delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{r} \ln N, \frac{1}{2}\right) \} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Burada N çift sayıdır. Bu şebeke $i = 1, \dots, \frac{N}{2}$ için $h = h_i$ ve $i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N$ için $h_i = H$ şebeke boyutları ile düzgün parçalı bir şebekedir.

Öncelikle $i \neq \frac{N}{2}$ için kesme hatası incelensin. Taylor formülü kullanılarak

$i < \frac{N}{2}$ için

$$u_{\bar{x}\bar{x},i} \equiv u_{xx,i} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

$$= \frac{1}{h^2} \left(u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + \frac{h^3}{6}u_i'''(\xi_i) - 2u_i + u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' - \frac{h^3}{6}u_i'''(\eta_i) \right)$$

$$= u_i'' + \frac{h}{6} [u'''(\xi_i) - u'''(\eta_i)], \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}), \quad \eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

olduğu elde edilir. O halde

$$|u_{\bar{x},i} - u_i''| \leq \frac{h}{6} (|u'''(\xi_i) + u'''(\eta_i)|), \quad i < \frac{N}{2} \quad (5.4)$$

eşitsizliği yazılabilir. Benzer değerlendirme $i > \frac{N}{2}$ için de yapılabilir. O halde

$$|u_{\bar{x},i} - u_i''| \leq \frac{H}{6} (|u'''(\xi_i) + u'''(\eta_i)|), \quad i > \frac{N}{2} \quad (5.5)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$u_{\hat{x},i} - u_i' = u_{x,i} - u_i' = \frac{h}{2} u''(\zeta_i), \quad \zeta_i \in (x_i, x_{i+1}), \quad i < \frac{N}{2} \quad (5.6)$$

olduğu ve

$$u_{\hat{x},i} - u_i' = \frac{H}{2} u''(\zeta_i), \quad i > \frac{N}{2} \quad (5.7)$$

olduğu görülür. (5.2) eşitliğinde (2.2.6) ve (2.2.7) değerlendirmeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} |\psi_i| &\leq \frac{h\varepsilon}{3} c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^3} e^{-r\varepsilon^{-1}x_{i-1}} \right) + \frac{r_i h}{2} c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-r\varepsilon^{-1}x_i} \right) \\ &\leq c_1 \left(h + \frac{h}{\varepsilon^2} e^{-r\varepsilon^{-1}x_{i-1}} \right), \quad i < \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

ve

$$|\psi_i| \leq c_1 \left(H + \frac{H}{\varepsilon^2} e^{-r\varepsilon^{-1}x_{i-1}} \right), \quad i > \frac{N}{2} \quad (5.9)$$

elde edilir.

Öte yandan herhangi bir $\varphi(x) \in C^2[x_{i-1}, x_{i+1}]$ fonksiyon için

$$\varphi_{\bar{x},i} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(\eta) \varphi''(\eta) d\eta \quad (5.10)$$

olduğu kolayca görülebilir. Burada

$$g(\eta) = \begin{cases} \frac{(\eta - x_{i-1})}{h_i}, & x < x_i, \\ \frac{(x_{i+1} - \eta)}{h_{i+1}}, & x \geq x_i, \end{cases} \quad \text{ve} \quad \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(\eta) d\eta = 1 \quad \text{şeklindedir.}$$

(5.10) eşitliğinde Ortalama Değer Teoremi kullanılarak

$$\varphi_{\bar{x},i} = \varphi''(\lambda_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(\eta) d\eta = \varphi''(\lambda_i), \quad \lambda_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

elde edilir. Son eşitlikte Langrange formülü kullanılarak

$$\varphi_{\hat{x},i} = \frac{h_{i+1}}{h_i} \varphi_{x,i} = \frac{h_{i+1}}{h_i} \varphi'(\zeta_i)$$

bulunur. O halde $\psi_{\frac{N}{2}}$ değerlendirilecek olunursa son iki eşitlik yardımıyla (5.2)

bağıntısından

$$\psi_{\frac{N}{2}} = \varepsilon \left(u''(\lambda_i) - u''\left(\frac{x_N}{2}\right) \right) + r_{\frac{N}{2}} \left(\frac{\frac{h_{N+1}}{2}}{h_{\frac{N}{2}}} u'\left(\zeta_{\frac{N}{2}}\right) - u'\left(\frac{x_N}{2}\right) \right) \quad (5.11)$$

denklemini elde edilir. (5.11) bağıntısında (2.2.6) eşitliği kullanıldığında

$$|\psi_{\frac{N}{2}}| \leq c \left[1 + \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{rx_{\frac{N-1}{2}}}{\varepsilon}\right) \right] \quad (5.12)$$

elde edilir.

Böylelikle ε küçük değerli bir parametre olmak üzere ψ_i nin tüm yerel (lokal) değerlendirmeleri elde edilmiş olunur. Fakat $i = \frac{N}{2} + 1$ için (5.9) ve (5.12) değerlendirmeleri bu çalışma için çok kabadır. Bu bölümde bu değerlendirmeler daha hassas hale getirilecektir. Bunun için (4.2.1) probleminin çözümü için (2.2.6) ve (2.2.7)

ön değerdendirmeleri yerine (2.2.10) değerdendirmesi ve (2.2.8) ayrışımı kullanılacaktır. (2.2.8) ayrışımı, (2.2.9), (5.1) ve (5.2) denklemlerinden

$$\psi_{\frac{N}{2}} = f_{\frac{N}{2}} - \ell U_{\frac{N}{2}} - \ell V_{\frac{N}{2}} =: \psi_{1,\frac{N}{2}} + \psi_{2,\frac{N}{2}}$$

olduğu anlaşılr. Burada

$$\psi_{1,\frac{N}{2}} = f_{\frac{N}{2}} - \ell U_{\frac{N}{2}} = \varepsilon \left(U_{xx} - U''_{\frac{N}{2}} \right) + r_{\frac{N}{2}} \left(U_{x,\frac{N}{2}} - U'_{\frac{N}{2}} \right), \quad (5.13)$$

$$\psi_{2,\frac{N}{2}} = -\ell V_{\frac{N}{2}} = \varepsilon V_{xx} + r_{\frac{N}{2}} V_{x,\frac{N}{2}} \quad (5.14)$$

şeklindedir.

$u(x)$ yerine $U(x)$ alındığında $\psi_{1,\frac{N}{2}}$ için (5.11) gösterimi vardır. (2.2.10)

eşitsizliklerinin birincisi kullanılırsa

$$|\psi_{1,\frac{N}{2}}| \leq c \quad (5.15)$$

eşitsizliği elde edilir. $\psi_{2,\frac{N}{2}}$ değerdendirmesi için

$$\psi_{2,\frac{N}{2}} = \frac{1}{h_{\frac{N}{2}}} \left[\varepsilon \left(V_x - V_x^- \right)_{\frac{N}{2}} + r_{\frac{N}{2}} \left(V_{\frac{N}{2}+1} - V_{\frac{N}{2}} \right) \right]$$

ifadesi yazılabilir. (5.14) bağıntısı Langrange formülü kullanılarak yeniden yazılırsa

$$\psi_{2,\frac{N}{2}} = \frac{1}{h_{\frac{N}{2}}} \left[\varepsilon \left(V' \left(\zeta_{\frac{N}{2}} \right) - V' \left(\zeta_{\frac{N}{2}-1} \right) \right) + r_{\frac{N}{2}} \left(V_{\frac{N}{2}+1} - V_{\frac{N}{2}} \right) \right]$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan (2.2.10) eşitsizliklerinin ikincisi göz önünde bulundurulursa

$$\left| \psi_{2,\frac{N}{2}} \right| \leq c h_{\frac{N}{2}}^{-1} \exp \left(- \frac{r x_{\frac{N}{2}-1}}{\varepsilon} \right)$$

olduğu görülür. (5.15) eşitsizliği ve bu değerlendirmeden

$$\left| \psi_{\frac{N}{2}} \right| \leq c \left(1 + h_{\frac{N}{2}}^{-1} \exp \left(-\frac{rx_{\frac{N-1}{2}}}{\varepsilon} \right) \right) \quad (5.16)$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\left| \psi_{\frac{N}{2}+1} \right| \leq c \left(1 + H^{-1} \exp \left(-\frac{rx_{\frac{N}{2}}}{\varepsilon} \right) \right) \quad (5.17)$$

eşitsizliği elde edilir. (5.12) ve (5.16) değerlendirmeleri birleştirilirse

$$\begin{aligned} \left| \psi_{\frac{N}{2}} \right| &\leq c \left[1 + \min \left\{ \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{h_{\frac{N}{2}}} \right\} \exp \left(-\frac{rx_{\frac{N-1}{2}}}{\varepsilon} \right) \right] \\ &\leq \left[1 + \frac{2}{\varepsilon + h_{\frac{N}{2}}} \exp \left(-\frac{rx_{\frac{N-1}{2}}}{\varepsilon} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde (5.9) ve (5.17) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \left| \psi_{\frac{N}{2}+1} \right| &\leq c \left[1 + \min \left\{ \frac{H}{\varepsilon^2}, \frac{1}{H} \right\} \exp \left(-\frac{rx_{\frac{N}{2}}}{\varepsilon} \right) \right] \\ &\leq c \left[1 + \frac{2H}{\varepsilon^2 + H^2} \exp \left(-\frac{rx_{\frac{N}{2}}}{\varepsilon} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

değerlendirmesi elde edilir. Böylece ψ_i nin tüm yerel (lokal) değerlendirmeleri daha hassas bir biçimde elde edilmiş olunur.

5.2. Yakınsama

Teorem 4.3 ve (5.1) denklemleri yardımıyla, z_i hata fonksiyonunun ψ_i kesme hatası cinsinden aşağıdaki değerlendirmesi doğrudur (Andreev, 2001).

$$\|z\|_{\infty} \leq r^{-1} \|\psi\|_1.$$

ψ_i fonksiyonunun L_1 normuna göre değerlendirmesine devam edilirse; (5.8), (5.9), (5.16), (5.17) eşitsizlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} \|\psi\|_1 &= \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} |\psi_i| h + |\psi_{\frac{N}{2}}| h^{\frac{N}{2}} + |\psi_{\frac{N}{2}+1}| H + \sum_{i=\frac{N}{2}+2}^{N-1} |\psi_i| H \\ &\leq c \left(\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} h^2 + h^{\frac{N}{2}} + H + \sum_{i=\frac{N}{2}+2}^{N-1} H^2 \right) \\ &\quad + c \left\{ \frac{h^2}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} \exp[-r\varepsilon^{-1}(i-1)] + \frac{2(H+h)}{2\varepsilon + H + h} \exp\left(-r\varepsilon^{-1}x_{\frac{N}{2}-1}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2H^2}{\varepsilon^2 + H^2} \exp\left(-r\varepsilon^{-1}x_{\frac{N}{2}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{H^2}{\varepsilon^2} \exp\left(-r\varepsilon^{-1}x_{\frac{N}{2}+1}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-r\varepsilon^{-1}Hj) \right\} \\ &\leq c \left[N^{-1} + \sum_{k=1}^4 S_k \right] \end{aligned} \tag{5.20}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada her bir S_k için ayrı ayrı değerlendirme yapılacaktır. O halde $t > 0$ için $1 - e^{-t} \geq te^{-t}$ eşitsizliği düşünüldüğünde

$$S_1 := \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \exp[-r\varepsilon^{-1}h(i-1)] = \frac{\left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^2}{1 - e^{-\frac{rh}{\varepsilon}}} \leq \frac{h}{r\varepsilon} e^{\frac{rh}{\varepsilon}}$$

elde edilir ve (5.3) Shishkin şebekesinden

$$\frac{h}{\varepsilon} = \frac{2\delta}{N\varepsilon} = \begin{cases} \frac{2\ln N}{Nr}, & \varepsilon r^{-1} \ln N \leq 1/2 \\ \frac{1}{N} \leq \frac{c(\ln N)}{N}, & \varepsilon r^{-1} \ln N \geq 1/2 \end{cases}$$

eşitliği yazılır. Bu durumda

$$S_1 = O(N^{-1} \ln N) \quad (5.21)$$

olduğu görülür. Ayrıca,

$$\begin{aligned} S_4 &= \left(\frac{H}{\varepsilon}\right)^2 \exp\left(-r\varepsilon^{-1}x_{\frac{N}{2}+1}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-r\varepsilon^{-1}H_j) = \\ &= \left(\frac{H}{\varepsilon}\right)^2 \frac{e^{-\frac{rH}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{rH}{\varepsilon}}} \exp\left(-r\varepsilon^{-1}x_{\frac{N}{2}}\right) \leq \\ &\leq \begin{cases} \frac{N^{-1}}{r^2 \max_t \frac{t^2 e^{-t}}{1 - e^{-t}}}, & \varepsilon r^{-1} \ln N \leq \frac{1}{2} \\ 2r^{-2} N^{-1} \ln N \max_{t>0} \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} e^{-\frac{r}{2\varepsilon}}, & \varepsilon r^{-1} \ln N \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

şeklindedir ve buradan

$$S_4 = O(N^{-1} \ln N) \quad (5.22)$$

elde edilir. Son olarak

$$S_2 + S_3 \leq 2 \begin{cases} \left(\frac{H+h}{2\varepsilon+H+h} + \frac{H^2}{\varepsilon^2+H^2}\right) N^{-1} \exp(N^{-1} \ln N), & \varepsilon r^{-1} \ln N \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2 \ln N}{rN} \left(1 + \frac{2 \ln N}{rN}\right) \exp\left(-r\varepsilon^{-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right)\right), & \varepsilon r^{-1} \ln N \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

bulunur. O halde

$$S_2 + S_3 = O(N^{-1} \ln N) \quad (5.23)$$

şeklindedir. (5.20) değerlendirmesi ve (5.23) eşitliğinden

$$\|\psi\|_1 = O(N^{-1} \ln N)$$

olduğu bulunur. Elde edilenler şu temel sonucu ifade etmektedir.

Teorem 5.1: (4.2.1) probleminin çözümü $u(x)$ olsun ve y_i de (4.2.2) fark probleminin (5.3) şebekesindeki çözümü olsun. O halde

$$\|y_i - u(x_i)\|_{\infty} = O(N^{-1} \ln N)$$

eşitliği doğrudur.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Doğada karşılaşılan her olgu fizik kanunlarıyla anlaşılmaya çalışılmış, fizik kanunlarını ifade etmek için diferansiyel denklemler ortaya konulmuştur. Uygulamalı bilim dallarında karşımıza sıkça çıkan diferansiyel denklemlerin çözümünün incelenmesinde en etkili yöntemlerden biri de Green fonksiyonudur.

Bu çalışmada, self adjoint ve self adjoint olmayan sınır değer problemlerinde Green fonksiyonu inşa edilerek ve bu fonksiyonun özellikleri incelenerek konuya giriş sunuldu.

Daha sonra düzgün ve düzgün olmayan şebekelerde fark Green fonksiyonu incelendi. Ve bu fonksiyon yardımıyla problemin çözümü için bazı değerlendirmeler elde edildi. Son olarak da singüler pertürbe olmuş sonlu fark problemi için hata değerlendirmesi fark Green fonksiyonu kullanılarak elde edildi ve yakınsama hızı değerlendirildi.

7. KAYNAKLAR

- Andreev, V.B. 2003. Anisotropic estimates for the discrete Green's function of a monotone difference operator in the singularly perturbed case and its application. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 43(4):546-553.
- Andreev, V.B. 2001. The Green function and a priori estimates of solutions of monotone three-point singularly perturbed finite-difference schemes. *Differential Equations*, 37(7): 923-933.
- Andreev, V.B. 2001. Green's function and uniform convergence of monotone difference schemes for a singularly perturbed convection – diffusion equation on Shishkin's mesh in one-and two-dimensions. <https://www4.dcu.ie/math/research/preprints/ms0115.shtml> (Eriřim tarihi: 01.07.2012).
- Amirali, G., Duru, H. 2002a. *Nümerik Analiz*. ISBN 975-6802-91-X. Pegema Yayıncılık, Ankara, 371 s.
- Amirali, G.M., Duru, H. 2002b. A uniformly convergent difference method for the periodical boundary value problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 46(5):695-703.
- Amiraliyev, G.M., Çimen, E. 2010. Numerical method for a singularly perturbed convection-diffusion problem with delay. *Applied Mathematics and Computation*, 216(8):2351-2359.
- Boglaev, I. 2003. Uniform numerical methods on arbitrary meshes for singularly perturbed problems with discontinuous data. *Applied Mathematics and Computation*, 154(3):815–833.
- Cakir, M., Amiraliyev, G.M. 2007. Numerical solution of a singularly perturbed three-point boundary value problem. *Int. J. Comput. Math*, 84(10):1465–1481.
- Constanta, C. 2002. *Solution Techniques for Elementary Partial Differential Equations*, ISBN 1-58488-257-3, A CRC Press Company, Boca Raton, London, NewYork, Washington, D.C. 251 p.

- Herman, R. L. 2008. A Second Course in Ordinary Differential Equations.
<http://people.uncw.edu/hermanr/mat463/ODEBook/index.htm>
(Eriřim tarihi:01.02.2013).
- Myint-U.T, Debnath. L. 2007. Linear Partial Differential Equations For Scientists and Engineers. ISBN-13: 978-0-8176-4393-5. Birkhauser, Boston, 310p.
- Samarskii, A.A. 2001.The Theory of Difference Schemes. ISBN 0-8247-0468-1.Marcel Dekker,Inc., New York, 761 p.
- Zhao, Z. 2007. Solutions and Green's functions for some linear second-order three-point boundary value problems. Computer and Mathematics with Applications, 56(1):104-113.

ÖZGEÇMİŞ

Emirhan GÜLTEKİN 1989 yılında Samsun'da doğdu. İlköğrenimini Tokat'ta, orta ve lise öğrenimini Samsun'da tamamladı. 2007 yılında girdiği Sinop Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2011 yılında mezun oldu. Aynı yıl Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve öğrenimi halen devam etmektedir.