



**İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL  
DENKLEM İÇİN BİR OPTİMAL KONTROL  
PROBLEMİ**

**Yakup ÖZTÜRK**

**Yüksek Lisans Tezi  
Matematik Anabilim Dalı  
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı  
Yrd. Doç. Dr. Yeşim SARAÇ  
2017  
Her Hakkı Saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM  
İÇİN BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ**

**Yakup ÖZTÜRK**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI  
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı**

**ERZURUM  
2017**

**Her Hakkı Saklıdır**



**T.C.  
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**TEZ ONAY FORMU**

**İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANİSYEL DENKLEMLEM İÇİN BİR  
OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ**

Yrd. Doç. Dr. Yeşim SARAÇ danışmanlığında, Yakup ÖZTÜRK tarafından hazırlanan bu çalışma 24/05/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı-Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu** (...) ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ercan ÇELİK

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yeşim SARAÇ

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fatma TOYOĞLU

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 08.06.2017 tarih ve 23. / 29. .... nolu kararı ile onaylanmıştır.

**Prof. Dr. Cavit KAZAZ**  
**Enstitü Müdürü**

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLEM İÇİN BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Yakup ÖZTÜRK

Atatürk Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yeşim SARAÇ

Bu çalışmada, ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklem için bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Optimal kontrol fonksiyonu denklemin sağ tarafında yer almaktadır. Birinci bölümde, lineer adi diferansiyel denklemler için optimal kontrol problemi hakkında genel bilgiler verildi. İkinci bölümde, bazı matematiksel tanımlar sunuldu. Takip eden bölümde, ele alınan optimal kontrol problemi açıklandı. Optimal çözümün varlığı ve tekliği için gerekli şartlar ispatlandıktan sonra eşlenik problemin çözümü kullanılarak amaç fonksiyonelinin Frechet türevi elde edildi. Elde edilen sonuçlar nümerik örnekler üzerinde tartışıldı.

**2017, 31 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Optimal Kontrol, Adi Diferansiyel Denklemler, Frechet Türev

## **ABSTRACT**

MS. Thesis

### **AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE SECOND ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS**

Yakup ÖZTÜRK

Atatürk University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics  
Department of Applied Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Yeşim SARAÇ

In this thesis, an optimal control problem for the second order linear ordinary differential equation has been studied. The control function is at the right hand side of the equation. In the first chapter, a general information about the optimal control problems for the linear ordinary differential equations is given. In the second chapter, some mathematical definitions are presented. In the next chapter, the optimal control problem considered is presented. After proving necessary conditions for the existence and uniqueness of the optimal solution, the Frechet derivation of the cost functional can be found via the solution of the adjoint parabolic problem is obtained. Results are tested with the numerical examples.

**2017, 31 Pages**

**Keywords:** Optimal Control, Ordinary Differential Equations, Frechet Differential.

## **TEŞEKKÜR**

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde hazırlanmıştır.

Bu çalışmada düşünceleri ile bana yol gösteren, hiçbir özveriden kaçınmayıp değerli bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yeşim SARAÇ'a yakın ilgi, alaka ve yardımlarından dolayı en içten dileklerle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Teze yapmış olduğu katkılardan dolayı Sayın Prof. Dr. Ercan Çelik ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Fatma Toyoğlu hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında büyük ilgi ve destekleri ile her zaman yanımda olan eşime ve kıymetli dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

**Yakup ÖZTÜRK**

**Mayıs 2017**

## İÇİNDEKİLER

|                                                                               |           |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| ÖZET .....                                                                    | i         |
| ABSTRACT .....                                                                | ii        |
| TEŞEKKÜR .....                                                                | iii       |
| SİMGELER DİZİNİ .....                                                         | v         |
| ÇİZELGELER DİZİNİ .....                                                       | vi        |
| <b>1. GİRİŞ.....</b>                                                          | <b>1</b>  |
| <b>2. TEMEL KAVRAMLAR.....</b>                                                | <b>4</b>  |
| <b>3. MATERYAL ve YÖNTEM.....</b>                                             | <b>8</b>  |
| <b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI .....</b>                                           | <b>10</b> |
| 4.1. Optimal Kontrol Probleminin Konulması .....                              | 10        |
| 4.2. Optimal Çözümünün Varlığı, Tekliği ve Kararlılığı .....                  | 12        |
| 4.3. Eşlenik Problem ve Amaç Fonksiyonelinin Frechet Türevlenebilirliği ..... | 21        |
| 4.4. Minimalleştirici Dizi .....                                              | 25        |
| 4.5. Nümerik Örnekler.....                                                    | 27        |
| <b>5. SONUÇ .....</b>                                                         | <b>30</b> |
| KAYNAKLAR .....                                                               | 31        |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                | 32        |

## SİMGELER DİZİNİ

|             |                                                                                                                                |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\forall$   | Her                                                                                                                            |
| $L_2[a, b]$ | $[a, b]$ aralığında ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı                                                 |
| $H^1[a, b]$ | Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2[a, b]$ uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı |





## ÇİZELGELER DİZİNİ

|                                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Çizelge 4.1.</b> Farklı $\alpha$ değerleri için $[y(2; f)-2]^2$ ve $\ f\ _{L_2[0,2]}^2$ .....28           |
| <b>Çizelge 4.2.</b> Farklı $\alpha$ değerleri için $[y(2; f)-2]^2$ ve $\ f\ _{L_2[1,2]}^2$ değerleri .....29 |



## 1. GİRİŞ

Lineer adi diferansiyel denklemlerin fizik, mekanik ve mühendislikte önemli uygulamaları mevcuttur. Bu alanlarda pek çok problem modellendiğinde adi diferansiyel denklemler ile karşılaşılmaktadır. Bu problemlere kütle-yay sistemleri ve elektrik devreleri örnek olarak verilebilir. Fiziksel bir sistemin matematiksel modeline karşılık gelen bir lineer diferansiyel denklemde homojen olmayan terim çoğu kez sistemdeki dış etkiye karşılık gelmektedir.

Optimal kontrol problemleri, verilen bir sistem için belirli optimal kriterleri sağlayan kontrol kuralını bulma problemleridir. Adi ve kısmi diferansiyel denklemler için optimal kontrol problemlerinde, denklemde yer alan bir kontrol fonksiyonunun verilen bir amaç fonksiyoneli minimize eden değişken olarak belirlenmesi amaçlanır.

Adi diferansiyel denklemler için ters problemler çoğunlukla Sturm-Liouville problemleri olarak formüle edilmiştir. Sturm-Liouville problemleri, 1830'lu yıllarda Fransız matematikçi Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından ele alınmıştır. Bu nedenle bu tip problemler bu iki matematikçinin isimleri ile adlandırılmaktadır.

Hasanov (1997) çalışmasında,

$$-(k(x)u')' + q(x)u = f(x)$$

denkleminde  $k(x)$  katsayı fonksiyonunu belirleme problemini ele almıştır. Bu çalışmada aday fonksiyonların kümesi olarak  $\{k(x) \in H^0[a, b]: 0 < c_0 \leq k(x) \leq c_1\}$  seçilmiştir.

$$I_1(k) = |u(b; k) - u_b|$$

ve

$$I_2(k) = \left| (k(x)u'(x; k)) \Big|_{x=a} - u_a \right|$$

fonksiyonellerini minimum yapma isteği ile iki ayrı ters katsayı problemini incelemiştir.

Seyidmamedov and Hasanov (2002) çalışmasında,

$$-(k(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad x \in (a, b)$$

$$u(a) = 0, \quad (k(x)u') \Big|_{x=b} = \varphi$$

problemi için

$$I(k) = |(k(x)u'[x; k])_{x=0} - \phi| + |(u[x; k])_{x=1} - \beta|$$

fonksiyonellerini minimum yapacak olan  $k(x)$  fonksiyonunu belirleme problemini çalışmışlardır.

Lebedev and Cloud (2003), adi diferansiyel denklemler için optimal kontrol problemlerinin teorik çözümünü açıklamışlardır. Pontryagin'in maksimum prensibini kullanarak optimal çözümün varlığını tartışmışlardır.

Saraç and Subaşı (2010) çalışmalarında

$$y' + q(x)y = f(x), \quad x \in [x_0, x_1]$$

$$y(x_0) = a$$

probleminde  $f(x)$  fonksiyonunu kontrol etmişlerdir.

Yousefi *et al.* (2010) çalışmalarında,  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $u \in \mathbb{R}^m$  olmak üzere

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0$$

sisteminde  $u$  fonksiyonunu He'nin Varyasyonel iterasyon yöntemi aracılığıyla kontrol etmişlerdir. Ayrıca nümerik örneklerde birinci mertebeden lineer denklem ve lineer denklem sistemi için sonuçları test etmişlerdir.

Kahina and Mohamed (2012) çalışmasında,  $[0, t^*]$  aralığında aşağıdaki lineer optimal kontrol problemini incelemişlerdir:

$$\begin{aligned} J(z, u(t)) &= c'x(t^*) \rightarrow \max \\ \dot{x} &= Ax + bu, \quad x(0) = z \in X_0 = \{z \in \mathbb{R}^n: d_* \leq z \leq d^*\} \\ Hx(t^*) &= g \end{aligned}$$

Burada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $g \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ve  $f_* \leq u(t) \leq f^*$  şeklindedir.

Bu çalışmada ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemde denklemin sağ tarafında yer alan fonksiyonun optimal kontrol problemi incelenmiştir. Aday kontrollerin kümesi olarak  $L_2[a, b]$  uzayının bir alt kümesi alınmıştır. İkinci bölümde tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılan bazı matematiksel kavramlara yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ele alınan optimal kontrol problemi açıklanmış ve optimal çözümün varlık, teklik ve kararlılığı yani incelenen problemin iyi tanımlanmış olduğu ispat edilmiştir. Eşlenik problem yaklaşımı kullanılarak amaç fonksiyonelinin Frechet türevi bulunmuş ve bu türev aracılığıyla optimal çözüme yakınsayan bir minimalleştirici dizi kurulmuştur. Son olarak nümerik örnek üzerinde sembolik çözüm elde edilebilirliği gösterilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Hunter and Nachtergaele (2001), Kreyszig (1989), Zeidler (1995) ve Musayev *et al.* (2007) kaynakları kullanılarak, tezin ilerleyen bölümlerinde ihtiyaç duyulan bazı tanım, lemma ve teoremler verilmiştir.

**Tanım 2.1 (İç Çarpım):**  $L, F$  cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.  $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \rightarrow F$  fonksiyonu

- a)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- b)  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$  ( $\alpha \in F$ )
- c)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- d)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  ve  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu (veya iç çarpım ) denir.

**Tanım 2.2 (Fonksiyonel):**  $F \subset R$  veya  $F \subset \mathbb{C}$  olmak üzere  $L, F$  üzerinde bir vektör uzay olsun.  $f : L \rightarrow F$  operatörüne fonksiyonel denir.

**Tanım 2.3 (Kapalı Küme):**  $X$  kümesinde her yakınsak dizinin yakınsadığı nokta bu kümeye ait ise  $X$  kümesine kapalı küme denir.

**Tanım 2.4 (Konveks Küme):**  $X \subset \mathbb{R}^n$  herhangi bir küme olsun. Eğer her  $\lambda \in [0,1]$  ve her  $x_1, x_2 \in X$  için  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$  şartı sağlanıyorsa  $X$  kümesine konveks küme denir.

**Tanım 2.5 (Konveks Fonksiyon):**  $X, \mathbb{R}^n$  uzayının boştan farklı konveks bir alt kümesi olsun.  $f : X \rightarrow R$  fonksiyonu her  $\lambda \in [0,1]$  ve her  $x_1, x_2 \in X$  için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyona  $X$  kümesi üzerinde konveks fonksiyon denir.

**Tanım 2.6 (Güçlü Konveks Fonksiyon):**  $X, \mathbb{R}^n$  uzayının boştan farklı konveks bir alt kümesi olsun.  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu her  $\lambda \in [0,1]$  ve her  $x_1, x_2 \in X$  için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - \chi \lambda(1 - \lambda) \|x_1 - x_2\|^2$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $\chi > 0$  sabiti varsa bu fonksiyona  $\chi$  sabiti ile güçlü konveks fonksiyon adı verilir.

**Tanım 2.7 (Gradyen – Frechet Türevi):**  $W$  kümesinde tanımlanan  $J(w)$  fonksiyoneli için,

$$\Delta J(w) = J(w + \Delta w) - J(w) = \langle J'(w), \Delta w \rangle_w + o(\|\Delta w\|_w)$$

şartı sağlanırsa bu fonksiyonele  $w \in W$  elemanında frechet anlamında diferansiyellenen fonksiyonel,  $J'(w)$  elemanına ise  $J(w)$  fonksiyonelinin gradyeni veya Frechet türevi denir.

**Tanım 2.8 (Yakınsaklık):**  $X_n, X$  norm uzayında bir dizi olsun. Eğer bir  $x \in X$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$  şartını sağlıyorsa güçlü yakınsaktır denir.

**Lemma 2. 1 ( $\varepsilon$ -Cauchy Eşitsizliği):** Keyfi  $a, b$  sayıları ve herhangi  $\varepsilon > 0$  için

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir (Ladyzhenskaya 1985).

**Lemma 2.2 (Cauchy-Schwartz Eşitsizliği):**  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , bir iç çarpım uzayı olsun.

$x, y \in X$  için

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada norm,  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  olarak tanımlanmaktadır.

**Tanım 2.9:**  $X \subset \mathbb{R}$  ve  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $f$  fonksiyonunun görüntü kümesi alttan sınırlı ise,  $f$  fonksiyonu  $X$  üzerinde alttan sınırlıdır denir. Diğer bir ifadeyle, eğer her  $x \in X$  için  $f(x) \geq m$  olacak şekilde  $m \in \mathbb{R}$  sayısı varsa,  $f$  fonksiyonu  $X$  üzerinde alttan sınırlıdır denir.

**Tanım 2.10:**  $L_2[a, b]$ ,  $[a, b]$  aralığında karesel olarak integrallenebilir fonksiyonların oluşturduğu bir uzaydır. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle f, g \rangle_{L_2[a, b]} = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

$$\|f\|_{L_2[a, b]} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L_2[a, b]}}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 2.11:**  $W_2^1(a, b) = H^1(a, b)$ , Hilbert uzayı olup kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri  $L_2(0, l)$  uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır.

Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{H^1[a, b]} = \int_a^b \left( u(x)v(x) + \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} \right) dx,$$

$$\|u\|_{H^1[a,b]} = \sqrt{\langle u, v \rangle_{H^1[a,b]}}$$

şeklinde tanımlanır.





### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Diferansiyel denklemler için optimal kontrol problemlerinde, denklemde yer alan bir fonksiyon amaç fonksiyoneli minimum yapma yoluyla kontrol edilmeye çalışılır.

Genel olarak optimal kontrol problemlerinde, problemin çözümünün varlığı ve tekliğinin incelenmesi ve nümerik çözüm için uygun yöntemlerin sunulması durumları ele alınır.

Optimal çözümün varlığı ve tekliğini göstermek için (İskenderov *et al.* 2002) çalışmasında verilen aşağıdaki teorem kullanılır. Bu teorem aynı zamanda çözümün kararlılığını da ifade etmektedir.

**Teorem 3.1:**  $X \subset \mathbb{R}^n$  kapalı ve konveks bir küme,  $f(x)$  fonksiyonu da bu kümede sürekli ve  $\chi > 0$  sabiti ile güçlü konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

- a)  $f(x)$  fonksiyonu  $X$  kümesinde alttan sınırlıdır.
- b) Tek bir  $x^* \in X$  için  $f(x^*) = f^*$  olur.
- c) Herhangi bir minimalleştirici  $\{x_k\}$  dizisi  $f^*$  elemanına güçlü yakınsar ve

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{2}{\chi} [f(x_k) - f(x^*)], \quad k = 1, 2, \dots$$

eşitsizliği sağlanır (İskenderov *et al.* 2002).

Gradyen metodu, optimal kontrol probleminin nümerik çözümü için oldukça yaygın kullanılan bir metottur. Bu metoda göre optimal çözümü elde etmek için minimalleştirici dizi kurulmaktadır.  $f(x)$  türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere bir  $x_0$  başlangıç elemanı seçilerek dizi

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k f'(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

şeklinde kurulur. Burada  $\beta_k > 0$  yeterince küçük bir sayıdır ve  $f'(x_k)$  ile  $f$  fonksiyonunun türevinin  $x_k$  elemanına karşılık gelen değeri gösterilmektedir.

(3.1) ile kurulan dizi minimalleştirici dizidir. Gerçekten  $f$  fonksiyonunun diferansiyellenebilir olma şartından

$$f(x + h) - f(x) = \langle f'(x), h \rangle + o(\|h\|) \quad (3.2)$$

yazılır. Burada  $o(\|h\|)$ ,  $\|h\|$  göre yüksek mertebeden sonsuz küçülendir. (3.2) ifadesinde (3.1) ifadesi yazılırsa

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = \langle f'(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + o(\|x_{k+1} - x_k\|)$$

veya

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = \langle f'(x_k), -\beta_k f'(x_k) \rangle + o(\|-\beta_k f'(x_k)\|)$$

elde edilir. Buradan

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = \beta_k \left[ -\|f'(x_k)\|^2 + \frac{o(\beta_k)}{\beta_k} \right]$$

bulunur. O halde  $\beta_k > 0$  şartından  $f(x_{k+1}) - f(x_k) < 0$  olduğu anlaşılır. Bu da (3.1) ile kurulan dizinin minimalleştirici dizi olduğunu gösterir.  $\beta_k$  sabitinin seçiminin nasıl yapılabileceğine dair bilgiler (İskenderov *et al.* 2002) çalışmasında bulunmaktadır. Ayrıca Teorem 3.1 bu minimalleştirici dizinin optimal çözüme yakınsadığını garanti etmektedir.

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

##### 4.1. Optimal Kontrol Probleminin Konulması

İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklem için aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x), \quad x \in (a, b) \quad (4.1)$$

$$y(a) = a_0, \quad p(b)y'(b) = b_0 \quad (4.2)$$

Burada  $a_0$  ve  $b_0$  verilmiş sabit değerlerdir.  $p = p(x)$  ve  $q = q(x)$  katsayı fonksiyonlarının

$$0 < c_0 \leq p(x) \leq c_1 \quad (4.3)$$

$$0 \leq c_2 \leq q(x) \leq c_3 \quad (4.4)$$

şartlarını sağladığı kabul edilsin.

Verilen  $p, q$  ve  $f$  fonksiyonları için (4.1)-(4.2) sınır değer probleminin tek çözümünün bulunması mümkün olabilir. (4.1)-(4.2) sınır değer problemi direk problem olarak adlandırılır.

(4.1)-(4.2) probleminin  $y = y(x)$  çözümünün  $x = b$  noktasında bir  $y_b$  sabit değerine eşit olmasını isteyelim. Yani

$$y(b) = y_b \quad (4.5)$$

olmasını talep edelim.  $p$  ve  $q$  fonksiyonları (4.3)-(4.4) şartlarını sağlayacak şekilde verilmiş iki fonksiyon olmak üzere (4.5) koşulunun sağlanması için  $f$  fonksiyonu nasıl seçilmelidir? Diğer bir ifadeyle, (4.5) şartının sağlayacak şekilde  $y$  çözümünü verecek

olan (4.1)-(4.2) probleminde  $f$  fonksiyonu nedir? (4.1)-(4.2) probleminin fiziksel bir sürecin matematiksel modeli olması durumunda  $f$  fonksiyonu sisteme olan dış etkiyi ifade eder.

$y(b)$  değerinin  $y_b$  verilen sabitine eşit olmasa bile en azından arzu edilen değere yakın olmasını sağlayan bir  $f$  fonksiyonu bulmak isteyelim. Bunun için

$$J(f) = [y(b; f) - y_b]^2 \quad (4.6)$$

fonksiyonelinin minimum değerini arayalım. (4.6) ile verilen fonksiyonelin oldukça küçük bir değer alması  $y(b)$  değerinin  $y_b$  noktasına oldukça yaklaşması olarak yorumlanabilir.  $y(b; f)$  gösterimi, belirli bir  $f$  fonksiyonuna karşılık gelen (4.1)-(4.2) sınır değer probleminin  $x = b$  noktasında aldığı değeri ifade etmektedir.

İyi tanımlanmamış problemler için oldukça yaygın olan Tikhonov düzenleme yöntemini kullanarak problemi yeniden düzenleyelim (Tikhonov and Samarskii 1963).  $f \in L_2[a, b]$  olsun ve (4.6) fonksiyonelinin yerine

$$J_\alpha(f) = [y(b; f) - y_b]^2 + \alpha \|f\|_{L_2[a, b]}^2 \quad (4.7)$$

fonksiyonelinin minimum yapmak isteyelim. Burada  $\alpha > 0$  düzenleme parametresi olarak adlandırılmaktadır.  $J_\alpha(f)$  fonksiyoneline amaç fonksiyoneli adı verilmektedir. (4.7) ile verilen amaç fonksiyonelinin minimum yapılması isteği ile hem  $y(b)$  değerini  $y_b$  noktasına yaklaştıran hem de normu küçük olan bir  $f$  fonksiyonunun bulunması hedeflenmektedir.

Optimal kontrol probleminde, diğer önemli bir husus da aday kontrol fonksiyonlarının kümesinin belirlenmesidir. Bu kümeyi

$$F = \{f: f(x) \in L_2[a, b], \|f\|_{L_2[a, b]} \leq k\}$$

olarak seçelim. Bu  $F$  kümesi,  $L_2[a, b]$  uzayının kapalı ve sınırlı bir alt kümesidir. Bu şartlar incelenen optimal kontrol probleminin iyi tanımlanmış olduğunu gösterebilmek için önemlidir.

Bu çalışmada amacımız;

$$\begin{cases} J_\alpha(f^*) = \min_{f \in F} J_\alpha(f) \\ -(p(x)y')' + q(x)y = f(x) \\ y(a) = a_0, \quad p(b)y'(b) = b_0 \end{cases} \quad (4.8)$$

probleminin  $f^* \in F$  çözüm fonksiyonunu belirlemektir.

#### 4.2. Optimal Çözümünün Varlığı, Tekliği ve Kararlılığı

Bir optimal kontrol probleminde çözümün varlığı, tekliği ve kararlılığının gösterilmesi durumunda problem iyi konulmuş olarak adlandırılır. Bu bölümde, (4.1)-(4.2) problemi ile yönetilen (4.7) amaç fonksiyoneli minimum yapma probleminin iyi tanımlı olduğu gösterilecektir. Yani ele alınan optimal kontrol probleminin tek bir  $f^*$  çözümüne sahip olduğu ispatlanacaktır. Ayrıca problemin kararlı olduğu yani  $\{f_n\}$  minimalleştirici dizi olmak üzere,  $n \rightarrow \infty$  iken  $J_\alpha(\{f_n\}) \rightarrow J_\alpha(f^*)$  olduğunda  $\|f_n - f^*\|_{L_2[a,b]} \rightarrow 0$  olması gerektiği ispatlanmıştır.

Öncelikle (4.1)-(4.2) sınır değer probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini araştıralım. (4.1) denklemin her iki tarafını  $v \in H^1[a, b]$  test fonksiyonu ile çarpalım ve  $[a, b]$  da integralini alalım. Bu durumda

$$\int_a^b (-(p(x)y')' + q(x)y)v dx = \int_a^b f v dx$$

olur. Sol tarafta yer alan ilk integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$-p(x)y'v|_a^b + \int_a^b p(x)y'v'dx + \int_a^b q(x)yvdx = \int_a^b fvd x$$

veya (4.2) sınır şartları göz önüne alınırsa

$$\langle v', py' \rangle + \langle v, qy \rangle = \langle f, v \rangle + b_0 v(b) - y'(a)p(a)v(a) \quad (4.9)$$

elde edilir. Burada  $\langle ., . \rangle$  ile  $L_2[a, b]$  uzayında iç çarpım gösterilmektedir. (4.1)-(4.2) probleminin çözümü deyince her  $v \in H^1[a, b]$  fonksiyonu için (4.9) eşitliğini sağlayan  $u \in H^1[a, b]$  fonksiyonu anlaşılabilir.  $p, q \in L_2[a, b]$  olmak üzere her bir  $f \in F$  fonksiyonu için (4.1)-(4.2) sınır değer probleminin  $u \in H^1[a, b]$  uzayında tek bir çözümü vardır (Hasanov, 1997).

Şimdi (4.1)-(4.2) problemi için fark problemini oluşturalım.  $f$  fonksiyonuna  $\Delta f$  artımını verelim ve  $f + \Delta f \in F$  elemanına karşılık gelen diferansiyel denklemin çözümünü  $y_\Delta(x) = y(x; f + \Delta f)$  ile gösterelim. O halde

$$-(p(x)y'_\Delta)' + q(x)y_\Delta = f(x) + \Delta f(x), \quad x \in (a, b)$$

$$y_\Delta(a) = a_0, \quad p(b)y'_\Delta(b) = b_0$$

problemi yazılır.  $\Delta y = y(x; f + \Delta f) - y(x; f)$  olmak üzere yukarıdaki problemten (4.1)-(4.2) sınır değer problemini çıkarırsak

$$-(p(x)\Delta y')' + q(x)\Delta y = \Delta f(x), \quad x \in (a, b) \quad (4.10)$$

$$\Delta y(a) = 0, \quad p(b)\Delta y'(b) = 0 \quad (4.11)$$

problemi bulunur. (4.10)-(4.11) problemine fark problemi denir.

Aşağıdaki lemmada bu fark probleminin çözümüne ait bir kestirim verilmiştir.

**Lemma 4.1:**  $\Delta y(x)$ , (4.10)-(4.11) probleminin çözümü olsun. Bu durumda

$$[\Delta y(b; f)]^2 \leq c_4 \|\Delta f\|_{L_2[a,b]}^2 \quad (4.12)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada  $c_4 = \frac{\varepsilon_1(b-a)}{2c_0}$  şeklindedir.

**İspat:** (4.10) denkleminin her iki yanını  $\Delta y$  ile çarpalım ve  $[a, b]$  aralığında integralleyelim.

$$\int_a^b -(p\Delta y')' \Delta y dx + \int_a^b q\Delta y^2 dx = \int_a^b \Delta f \Delta y dx$$

olur. Sol tarafta yer alan ilk integrale kısmi integral uygulanırsa

$$-p\Delta y' \Delta y \Big|_a^b + \int_a^b p(\Delta y')^2 dx + \int_a^b q\Delta y^2 dx = \int_a^b \Delta f \Delta y dx$$

yazılır. (4.11) sınır şartları göz önüne alınırsa, yukarıdaki integral ifadesinde ilk terimin sıfır olduğu görülür. O halde

$$\int_a^b p(\Delta y')^2 dx + \int_a^b q\Delta y^2 dx = \int_a^b \Delta f \Delta y dx$$

yazılır. Buradan

$$c_0 \int_a^b (\Delta y')^2 dx + c_2 \int_a^b \Delta y^2 dx \leq \int_a^b \Delta f \Delta y dx$$

elde edilir. Cauchy-Schwarz eşizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
c_0 \int_a^b (\Delta y')^2 dx + c_2 \int_a^b \Delta y^2 dx &= c_0 \|\Delta y'\|_{L_2[a,b]}^2 + c_2 \|\Delta y\|_{L_2[a,b]}^2 \\
&\leq \left( \int_a^b \Delta f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b \Delta y^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|\Delta f\|_{L_2[a,b]} \|\Delta y\|_{L_2[a,b]}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $\varepsilon$  –Cauchy eşitsizliği ile  $\varepsilon_1 > 0$  için

$$c_0 \|\Delta y'\|_{L_2[a,b]}^2 + c_2 \|\Delta y\|_{L_2[a,b]}^2 \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \|\Delta f\|_{L_2[a,b]}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\Delta y\|_{L_2[a,b]}^2$$

veya

$$c_0 \|\Delta y'\|_{L_2[a,b]}^2 + \left( c_2 - \frac{1}{2\varepsilon_1} \right) \|\Delta y\|_{L_2[a,b]}^2 \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \|\Delta f\|_{L_2[a,b]}^2$$

bulunur.  $c_2 > \frac{1}{2\varepsilon_1}$  kabulü ile

$$c_0 \|\Delta y'\|_{L_2[a,b]}^2 \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \|\Delta f\|_{L_2[a,b]}^2$$

veya

$$\|\Delta y'\|_{L_2[a,b]}^2 \leq \frac{\varepsilon_1}{2c_0} \|\Delta f\|_{L_2[a,b]}^2 \quad (4.13)$$

yazılabilir.

İntegral hesabının ikinci temel teoremine göre

$$[\Delta y(b; f)]^2 = \left[ \int_a^b \Delta y'(x) dx \right]^2$$

olduğu biliniyor. Cauchy-Schwarz eşitsizliği ile



$$[\Delta y(b; f)]^2 \leq (b - a) \|\Delta y'\|_{L_2[a, b]}^2$$

elde edilir. Son eşitsizlikte (4.13) ifadesi kullanılırsa

$$[\Delta y(b; f)]^2 \leq \frac{\varepsilon_1(b-a)}{2c_0} \|\Delta f\|_{L_2[a, b]}^2$$

bulunur. Böylelikle Lemma 4.1 için ispat tamamlanır.

Fark probleminin çözümü için ispat edilen (4.12) eşitsizliği, amaç fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterebilmek ve türevini elde edebilmek için önemli bir kestirimdir.

Aşağıdaki teorem optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı, tekliği ve kararlılığını vermektedir.

**Teorem 4.1:**  $F \subseteq L_2[a, b]$  kapalı ve konveks bir küme,  $J_\alpha(f)$  de bu kümede sürekli ve  $\chi > 0$  güçlü konvekslik sabiti ile güçlü konveks bir fonksiyonel olsun. Bu durumda

a)  $J_\alpha(f)$  fonksiyoneli  $F$  kümesinde aşağıdan sınırlıdır.

$$\inf_F J_\alpha(f) = J_\alpha^* > -\infty.$$

b) Tek bir  $f^* \in F$  için  $J_\alpha(f^*) = J_\alpha^*$  olur.

c) Herhangi bir minimalleştirici  $\{f_k\}$  dizisi  $L_2[a, b]$  uzayında  $f^*$  elemanına güçlü yakınsar ve

$$\|f_k - f^*\|_{L_2[a, b]}^2 \leq \frac{2}{\chi} [J_\alpha(f_k) - J_\alpha(f^*)], \quad k = 1, 2, \dots$$

eşitsizliği sağlanır (İskenderov *et al.* 2002).

**İspat:** Seçilen  $F$  kümesinin kapalı ve konveks olduğunu gösterelim.  $\{f_n\}$  dizisi  $F$  kümesinde yakınsak bir dizi olsun. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_1\|_{L_2[a,b]} = 0$$

olur. Kapalı küme tanımına göre bu dizinin yakınsadığı  $f_1$  fonksiyonunun  $F$  kümesine ait olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\|f_1\|_{L_2[a,b]} - \|f_n\|_{L_2[a,b]} \leq \|f_1 - f_n\|_{L_2[a,b]}$$

özellliği mevcut olup,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|f_1\|_{L_2[a,b]} - \|f_n\|_{L_2[a,b]}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_1 - f_n\|_{L_2[a,b]}$$

yazılır. Buradan

$$\|f_1\|_{L_2[a,b]} - \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L_2[a,b]} \leq 0$$

olup,

$$\|f_1\|_{L_2[a,b]} \leq k$$

elde edilir. O halde  $f_1 \in F$  dir ve sonuç olarak  $F$  kümesi kapalıdır.

Şimdi  $F$  kümesinin konveks olduğunu gösterelim. Konveks küme tanımına göre her  $f_1, f_2 \in F$  ve  $\lambda \in [0,1]$  için  $\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2 \in F$  olduğu gösterilmelidir.

$$\int_a^b (\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2)^2 dx = \int_a^b (\lambda^2 f_1^2 + 2\lambda(1 - \lambda) f_1 f_2 + (1 - \lambda)^2 f_2^2) dx$$

olup,  $2ab \leq a^2 + b^2$  eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2)^2 dx &\leq \int_a^b (\lambda f_1^2 + (1 - \lambda) f_2^2) dx \\ &\leq \lambda \int_a^b f_1^2 dx + (1 - \lambda) \int_a^b f_2^2 dx \end{aligned}$$

elde edilir.  $f_1, f_2 \in F$  olduğundan  $\int_a^b f_1^2 dx \leq k^2$  ve  $\int_a^b f_2^2 dx \leq k^2$  olur. O halde

$$\int_a^b (\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2)^2 dx \leq \lambda k^2 + (1 - \lambda) k^2 = k^2$$

bulunur. O halde  $\|\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2\|_{L_2[a,b]} \leq k$  olur ve bu eşitsizlik  $\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 \in F$  olduğunu gösterir. Böylece kümenin konveks olduğu ispatlanmıştır.

Şimdi de  $J_\alpha(f)$  amaç fonksiyonelinin sürekli ve güçlü konveks olduğunu ispat edelim.

**Lemma 4. 2:**  $J_\alpha(f)$  fonksiyonelinin  $\Delta J_\alpha(f)$  farkı için

$$|\Delta J_\alpha(f)| \leq c_5 \|\Delta f\|_{L_2[a,b]} + c_6 \|\Delta f\|_{L_2[a,b]}^2 \quad (4.14)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada  $c_5$  ve  $c_6$  sabitlerdir.

**İspat:**  $\Delta J_\alpha(f) = J_\alpha(f + \Delta f) - J_\alpha(f)$  farkını değerlendirelim.

$$\begin{aligned} \Delta J_\alpha(f) &= [y(b; f + \Delta f) - y_b]^2 + \alpha \int_a^b (f + \Delta f)^2 dx \\ &\quad - [y(b; f) - y_b]^2 - \alpha \int_a^b f^2 dx \end{aligned}$$

yazılır. İki kare farkı özdeşliği kullanılarak

$$\Delta J_\alpha(f) = [2y(b; f) - 2y_b + \Delta y(b; f)]\Delta y(b; f) + \alpha \int_a^b (2f + \Delta f)\Delta f dx$$

veya

$$\begin{aligned} \Delta J_\alpha(f) &= [2y(b; f) - 2y_b]\Delta y(b; f) + [\Delta y(b; f)]^2 + 2\alpha \int_a^b f\Delta f dx \\ &\quad + \alpha \int_a^b (\Delta f)^2 dx \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir.

(4.15) ifadesinde (4.12) kestirimi ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |\Delta J_\alpha(f)| &\leq C \sqrt{\frac{\varepsilon_1(b-a)}{2c_0}} \|\Delta f\|_{L_2[a,b]} + \frac{\varepsilon_1(b-a)}{2c_0} \|\Delta f\|_{L_2[a,b]}^2 \\ &\quad + 2\alpha \|f\|_{L_2[a,b]} \|\Delta f\|_{L_2[a,b]} + \alpha \|\Delta f\|_{L_2[a,b]}^2 \end{aligned}$$

bulunur. Burada  $C = |y(b; f)| + |y_b|$  şeklindedir. Son ifadede  $\|f\|_{L_2[a,b]} \leq k$  olduğu kullanılırsa

$$|\Delta J_\alpha(f)| \leq \left( C \sqrt{\frac{\varepsilon_1(b-a)}{2c_0}} + 2k\alpha \right) \|\Delta f\|_{L_2[a,b]} + \left( \frac{\varepsilon_1(b-a)}{2c_0} + \alpha \right) \|\Delta f\|_{L_2[a,b]}^2$$

yazılır. O halde  $c_5 = C \sqrt{\frac{\varepsilon_1(b-a)}{2c_0}} + 2k\alpha$  ve  $c_6 = \frac{\varepsilon_1(b-a)}{2c_0} + \alpha$  için lemma 4. 2 nin ispatı tamamlanır.

$J_\alpha(f)$  amaç fonksiyonelinin sürekliliği, Lemma 4.2 ile verilen (4.14) eşitsizliğinin sonucu olarak söylenebilir.

Şimdi  $J_\alpha(f)$  amaç fonksiyonelinin güçlü konveks olduğunu ispat edelim.

**Lemma 4. 3:** (4.7) amaç fonksiyoneli  $F$  kümesinde  $\chi = \alpha$  güçlü konvekslik sabiti ile güçlü konvektir.

**İspat:** Her  $f_1, f_2 \in F$  ve  $\lambda \in [0,1]$  için

$$J_\alpha(\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2) \leq \lambda J_\alpha(f_1) + (1 - \lambda)J_\alpha(f_2) - \chi \lambda(1 - \lambda) \|f_1 - f_2\|_{L_2[a,b]}^2$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilirse amaç fonksiyonelinin güçlü konveks olduğu ispatlanır. Amaç fonksiyonelinin seçimine göre

$$J_\alpha(\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2) = [y(b; \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2) - y_b]^2 + \alpha \int_a^b (\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2)^2 dx$$

şeklindedir.  $(\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2)^2 = \lambda f_1^2 + (1 - \lambda)f_2^2 - \lambda(1 - \lambda)(f_1 - f_2)^2$  özdeşliği kullanılırsa ve lineer adi diferansiyel denklemler teorisine göre

$$\begin{aligned} J_\alpha(\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2) &= [\lambda y(b; f_1) + (1 - \lambda)y(b; f_2) - y_b]^2 \\ &\quad + \alpha \int_a^b (\lambda f_1^2 + (1 - \lambda)f_2^2 - \lambda(1 - \lambda)(f_1 - f_2)^2) dx \end{aligned}$$

yazılır. Buradan sağ tarafta yer alan ilk terime  $\lambda y_b$  eklenip çıkarılarak

$$\begin{aligned} J_\alpha(\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2) &= \lambda^2 [y(b; f_1) - y_b]^2 + 2\lambda(1 - \lambda)[y(b; f_1) - y_b][y(b; f_2) - y_b] \\ &\quad + (1 - \lambda)^2 [y(b; f_2) - y_b]^2 \\ &\quad + \alpha \int_a^b (\lambda f_1^2 + (1 - \lambda)f_2^2 - \lambda(1 - \lambda)(f_1 - f_2)^2) dx \end{aligned}$$

elde edilir.  $\varepsilon$  –Cauchy eşitsizliği ile her  $\varepsilon > 0$  için

$$[y(b; f_1) - y_b][y(b; f_2) - y_b] \leq \frac{\varepsilon}{2} [y(b; f_1) - y_b]^2 + \frac{1}{2\varepsilon} [y(b; f_2) - y_b]^2$$

olur. Bu eşitsizlikte  $\varepsilon = 1$  alınırsa ve basit düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} J_\alpha(\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2) &\leq \lambda[y(b; f_1) - y_b]^2 + (1 - \lambda)[y(b; f_2) - y_b]^2 \\ &\quad + \alpha \int_a^b (\lambda f_1^2 + (1 - \lambda)f_2^2 - \lambda(1 - \lambda)(f_1 - f_2)^2) dx \\ &\leq \lambda J_\alpha(f_1) + (1 - \lambda)J_\alpha(f_2) - \alpha\lambda(1 - \lambda) \|f_1 - f_2\|_{L_2[a,b]}^2 \end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle ispat tamamlanır.

O halde Teorem 4.1 de verilen tüm şartların sağlandığı gösterilmiş olup, ele alınan optimal kontrol problemi için çözümün varlık, teklik ve kararlılığı ispat edilmiştir.

#### 4.3. Eşlenik Problem ve Amaç Fonksiyonelinin Frechet Türevlenebilirliği

Bu bölümde, öncelikle optimal kontrol problemine karşılık gelen eşlenik problem Lagrange çarpanı yöntemi ile bulunmuştur. Bu eşlenik problem aracılığıyla  $J_\alpha(f)$  amaç fonksiyonelinin Frechet türevi elde edilmiştir.

Ele alınan optimal kontrol problemi için Lagrange fonksiyoneli,

$$\begin{aligned} L(y, f, \eta) &= J_\alpha(y) + \langle \eta, (py')' - qy + f \rangle_{L[a,b]} \\ &= [y(b; f) - y_b]^2 + \alpha \int_a^b f^2 dx + \int_a^b \{(py')' - qy + f\} \eta dx \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.  $y$  çözümüne

$$\delta y(a) = 0, \quad \delta y'(b) = 0$$

olacak şekilde  $\delta y$  artımını verelim. Buna göre

$$\begin{aligned}
L(y + \varepsilon \delta y, f, \eta) - L(y, f, \eta) &= [(y + \varepsilon \delta y)(b; f) - y_b]^2 + \alpha \int_a^b f^2 dx \\
&+ \int_a^b \{(p(y + \varepsilon \delta y)')' - q(y + \varepsilon \delta y) + f\} \eta dx \\
&- [y(b; f) - y_b]^2 - \alpha \int_a^b f^2 dx \\
&- \int_a^b \{(py')' - qy + f\} \eta dx
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki ifadede iki kare farkı özdeşliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
L(y + \varepsilon \delta y, f, \eta) - L(y, f, \eta) &= [2y(b; f) - 2y_b + \varepsilon \delta y(b; f)] \varepsilon \delta y(b; f) \\
&+ \int_a^b \{(p \varepsilon \delta y')' - q \varepsilon \delta y\} \eta dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Lagrange fonksiyonelin birinci varyasyonu

$$\delta L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(y + \varepsilon \delta y, f, \eta) - L(y, f, \eta)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Buna göre

$$\delta L = [2y(b; f) - 2y_b] \delta y(b; f) + \int_a^b \{(p \delta y')' - q \delta y\} \eta dx \quad (4.16)$$

şeklinde bulunur.

Şimdi (4.16) ifadesinde sağ tarafta yer alan integral ifadesini kısmi integral formülünü kullanarak düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
\int_a^b (p \delta y')' \eta dx &= p \delta y' \eta \Big|_a^b - \int_a^b p \delta y' \eta' dx \\
&= p(b) \delta y'(b) \eta(b) - p(a) \delta y'(a) \eta(a) \\
&- \left\{ p \delta y \eta' \Big|_a^b - \int_a^b \delta y (p \eta')' dx \right\}
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki ifadede  $\delta y(a) = 0$  ve  $\delta y'(b) = 0$  koşulları kullanılırsa

$$\int_a^b (p\delta y')' \eta dx = -p(a)\delta y'(a)\eta(a) - p(b)\delta y(b)\eta'(b) + \int_a^b \delta y (p\eta')' dx$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlik, (4.16) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \delta L = [2y(b; f) - 2y_b]\delta y(b; f) + \int_a^b ((p\eta')' - q\eta)\delta y dx \\ - p(a)\delta y'(a)\eta(a) - p(b)\delta y(b)\eta'(b) \end{aligned}$$

olur.  $\delta L = 0$  optimallik şartından

$$(p\eta')' - q\eta = 0, \quad x \in (a, b) \quad (4.17)$$

$$\eta(a) = 0, \quad p(b)\eta'(b) = 2[y(b; f) - y_b] \quad (4.18)$$

eşlenik problemi elde edilir.

Şimdi  $J_\alpha(f)$  amaç fonksiyonelinin Frechet türevlenebildiğini gösterelim. (4.15) ile verilen  $\Delta J_\alpha(f)$  ifadesini yeniden ele alalım. (4.15) ifadesi

$$\begin{aligned} \Delta J_\alpha(f) = [2y(b; f) - 2y_b]\Delta y(b; f) + [\Delta y(b; f)]^2 \\ + \langle 2\alpha f, \Delta f \rangle + \alpha \|\Delta f\|_{L_2[a, b]}^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\langle ., . \rangle$  ile  $L_2[a, b]$  uzayında iç çarpım gösterilmektedir.

İlk olarak (4.17) denkleminin her iki tarafını  $\Delta y$  ile çarpalım ve  $[a, b]$  da integralini alalım.



$$\int_a^b \{(p\eta')' - q\eta\} \Delta y \, dx = 0$$

olur. Sol tarafta yer alan ilk integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$p\eta' \Delta y|_a^b - \int_a^b p \eta' \Delta y' \, dx - \int_a^b q\eta \Delta y \, dx = 0$$

olup, (4.11) ve (4.18) şartları göz önüne alınır ve tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$2[y(b; f) - y_b] \Delta y(b; f) - \left\{ p\eta \Delta y'|_a^b - \int_a^b \eta (p \Delta y')' \, dx \right\} - \int_a^b q\eta \Delta y \, dx = 0$$

elde edilir. Tekrar (4.11) ve (4.18) şartları göz önüne alınır

$$2[y(b; f) - y_b] \Delta y(b; f) + \int_a^b \{(p \Delta y')' - q \Delta y\} \eta \, dx = 0 \quad (4.20)$$

yazılır. (4.10) fark problemi  $\eta$  ile çarpılarak,  $[a, b]$  integral alınır

$$\int_a^b \{-(p \Delta y')' + q \Delta y\} \eta \, dx = \int_a^b \Delta f \eta \, dx$$

olur. Yukarıdaki ifade (4.20) de değerlendirilirse

$$2[y(b; f) - y_b] \Delta y(b; f) = \int_a^b \Delta f \eta \, dx \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.21) ile verilen eşitlik (4.19) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Delta J_\alpha(f) &= \int_a^b \Delta f \eta \, dx + [\Delta y(b; f)]^2 \\ &\quad + \langle 2\alpha f, \Delta f \rangle + \alpha \|\Delta f\|_{L_2[a,b]}^2 \end{aligned}$$

veya

$$\Delta J_\alpha(f) = \langle \eta + 2\alpha f, \Delta f \rangle + [\Delta y(b; f)]^2 + \alpha \|\Delta f\|_{L_2[a,b]}^2$$

bulunur. Son olarak yukarıdaki ifadede (4.12) eşitsizliği kullanılırsa

$$\Delta J_\alpha(f) = \langle \eta + 2\alpha f, \Delta f \rangle + o\left(\|\Delta f\|_{L_2[a,b]}^2\right) \quad (4.22)$$

yazılır.  $f \in F$  noktasında Frechet türevin tanımı

$$\Delta J_\alpha(f) = \langle J'_\alpha(f), \Delta f \rangle + o\left(\|\Delta f\|_{L_2[a,b]}^2\right)$$

şeklindedir. Buna göre amaç fonksiyoneli için Frechet türevi

$$J'_\alpha(f) = \eta + 2\alpha f \quad (4.23)$$

şeklinde olmaktadır.

#### 4.4. Minimalleştirici Dizi

Bu bölümde incelenen optimal kontrol problemi için bir minimalleştirici dizi kurulmuş ve optimal çözüme ulaşmayı sağlayan bir algoritma oluşturulmuştur.

Optimizasyon problemlerinde oldukça yaygın olarak kullanılan Gradyen metodu ile  $J_\alpha(f)$  amaç fonksiyoneli için bir minimalleştirici dizi kuralım. Bu metoda göre minimalleştirici dizi

$$f_{k+1} = f_k - \beta_k J'_\alpha(f_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.24)$$

şeklindedir. Burada  $\beta_k > 0$  sabitleri  $J_\alpha(f_{k+1}) < J_\alpha(f_k)$  olmasını temin edecek sayılar olarak seçilir. Ayrıca  $J'_\alpha(f_k)$  ile  $f_k$  elemanına karşılık gelen amaç fonksiyonelinin Frechet türevi gösterilmektedir.  $\beta_k$  seçimi için (İskenderov *et al.* 2002) çalışmasında bahsedilen yöntemlerden biri kullanılabilir. Teorem 4.1, (4.24) ile verilen  $\{f_k\}$  dizisinin  $J_\alpha(f)$  amaç fonksiyonelinin minimum yapan elemana yakınsadığını garanti etmektedir.

Şimdi optimal çözümü elde etmek için bir algoritma oluşturalım.

Öncelikle  $k = 0$  için  $f_0$  başlangıç elemanı seçilir ve daha sonra aşağıdaki adımlar ile  $k > 0$  için  $f_k$  biliniyorken  $f_{k+1}$  elemanı bulunur.

1. adım: (4.1)-(4.2) probleminin  $f_k$  elemanına karşılık gelen  $y_k$  çözümü bulunur.

2.adım: Bir önceki adımda bulunun çözüme karşılık eşlenik problemin çözümü elde edilir.

3. adım: Eşlenik problemin çözümü kullanılarak,  $J'_\alpha(f_k)$  gradyeni hesaplanır.

4.adım: (4.24) ile verilen kural kullanılarak,  $f_k$  elemanından  $f_{k+1}$  elemanı hesaplanır.

$J_\alpha(f_{k+1}) - J_\alpha(f_k) < 0$  şartı sağlanacak şekilde pozitif bir  $\beta_k$  sabiti seçilir.

5. adım: Eğer durdurma kriteri sağlanıyorsa 6. adıma geçilir, aksi takdirde 1. adıma geri dönülür.

Bu adımda durdurma kriteri olarak

$$\|f_{k+1} - f_k\| \leq \varepsilon_1$$

veya

$$|J_\alpha(f_{k+1}) - J_\alpha(f_k)| \leq \varepsilon_2$$

seçilebilir.

6.adım: İterasyon süreci sonlandırılır ve  $f_k$  elemanı optimal çözüm olarak alınır.

#### 4.5. Nümerik Örnekler

Bu bölümde iki farklı nümerik örnek ele alınmış ve farklı  $\alpha$  değerleri için amaç fonksiyonelinin aldığı değerler hesaplanmıştır.

##### Örnek 4.5.1:

$$\begin{aligned} -y'' + y &= f(x), \quad x \in [0,2] \\ y(0) &= 0, \quad y'(2) = 1 \end{aligned} \tag{4.25}$$

sınır değer probleminde

$$J_\alpha(f) = [y(2; f) - 2]^2 + \alpha \|f\|_{L_2[0,2]}^2 \tag{4.26}$$

fonksiyonelinin minimum yapacak olan  $f$  fonksiyonunu belirleme problemini ele alalım.

$f_0 = 0$  başlangıç elemanı ve  $B_k = 0.001$  sayısı  $J_\alpha(f_{k+1}) < J_\alpha(f_k)$  olmasını sağlayacak sabit olarak seçilsin.  $\alpha = 0.1$  ve durdurma kriteri olarak  $\|f_{k+1} - f_k\| \leq 0.001182$  alınır. 115 iterasyonunun ardından sembolik optimal çözüm

$$f_{115} = -0.0298899274e^{-x} + 0.0298899274e^x$$

olarak elde edilir. Ayrıca bu optimal çözüme karşılık amaç fonksiyonelinin

$$J_{0.1}(f_{115}) = 0.8935866928$$

değeri elde edilir.

Aşağıdaki tabloda farklı  $\alpha$  değerleri için  $[y(2; f) - 2]^2$  ve  $\|f\|_{L_2[0,2]}^2$  değerleri amaç fonksiyonelinin değerleri verilmiştir. Tabloda görüldüğü gibi  $\alpha$  parametresi  $[y(2; f) - 2]^2$  ve  $\|f\|_{L_2[0,2]}^2$  değerleri arasında denge kurmaktadır. Tabloda verilen değerler Bölüm 3.4 de verilen iterasyonun 50 adım uygulanması ile elde edilmiştir.

**Çizelge 4.1.** Farklı  $\alpha$  değerleri için  $[y(2; f) - 2]^2$  ve  $\|f\|_{L_2[0,2]}^2$

| $\alpha$ | $[y(2; f) - 2]^2$ | $\ f\ _{L_2[0,2]}^2$ |
|----------|-------------------|----------------------|
| 0.9      | 0.9934760234      | 0.003743063293       |
| 0.6      | 0.9923613034      | 0.003850534980       |
| 0.3      | 0.9912262137      | 0.003961597345       |
| 0.1      | 0.9904579678      | 0.004037698430       |
| 0.001    | 0.9900742312      | 0.004075992857       |

#### Örnek 4.5.2:

Aşağıdaki değişken katsayılı lineer sınır değer problemini ele alalım:

$$\begin{aligned} -(xy')' + \frac{4}{x}y &= f(x), x \in [1,2] \\ y(1) &= 0, \quad y'(2) = 1 \end{aligned} \tag{4.27}$$

(4.27) sınır değer problemi için

$$J_\alpha(f) = \left[ y(2; f) - \frac{69}{68} \right]^2 + \alpha \|f\|_{L_2[1,2]}^2 \tag{4.28}$$

fonksiyoneli minimum yapma problemini düşünelim.

$f_0 = \frac{1}{8}x$  başlangıç elemanı ve  $B_k = 0.01$  parametresini alalım.  $\alpha = 0.2$  ve durdurma kriteri olarak  $\|f_{k+1} - f_k\| \leq 0.0003$  alınırsa 52 iterasyonunun ardından optimal çözüm

$$f_{52} = 0.1018911052x - \frac{0.0096732839}{x^2} + 0.0096732839x^2$$

olarak elde edilir. Ayrıca bu optimal çözüme karşılık amaç fonksiyonelinin aldığı değer

$$J_{0.2}(f_{52}) = 0.0143342092$$

bulunur.

Aşağıdaki tabloda farklı  $\alpha$  değerleri için  $\left[y(2; f) - \frac{69}{68}\right]^2$  ve  $\|f\|_{L_2[1,2]}^2$  değerleri verilmiştir.

**Çizelge 4.2.** Farklı  $\alpha$  değerleri için  $[y(2; f) - 2]^2$  ve  $\|f\|_{L_2[1,2]}^2$  değerleri

| $\alpha$ | $[y(2; f) - 2]^2$ | $\ f\ _{L_2[1,2]}^2$ |
|----------|-------------------|----------------------|
| 0.9      | 0.01062696602     | 0.01515513008        |
| 0.6      | 0.00957047991     | 0.02113468248        |
| 0.3      | 0.00839525147     | 0.02946893239        |
| 0.1      | 0.00754798257     | 0.03678154123        |
| 0.001    | 0.00711130248     | 0.04104621987        |

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemin sağ tarafında yer alan fonksiyonun optimal kontrolü çalışılmıştır. Öncelikle problemin iyi konulmuş olması isteği göz önüne alınarak uygun bir amaç fonksiyoneli seçimi yapılmıştır. Aday kontrollerin kümesi  $L_2[a, b]$  uzayının bir alt kümesi olarak alınmış ve incelenen optimal kontrol probleminin bu kümede tek çözüme sahip olduğu ispatlanmıştır. Eşlenik problem elde edilmiş ve bu problem aracılığıyla amaç fonksiyonelinin Frechet türevi bulunmuştur. Optimal çözüme yakınsayan bir minimalleştirici dizi kurulmuştur. Nümerik örnek üzerinden sembolik optimal çözüm bulunmuştur ve böylelikle teori desteklenmiştir.

## KAYNAKLAR

- Çağlayan, M., Çelik, N. and Doğan, S., 2013. Adi Diferansiyel Denklemler, Dora basım yayın.
- Hasanov, A., 1997. Solution of an Inverse Coefficient Problem for an Ordinary Differential Equation. *Applicable Analysis*, 67, 11-20.
- Hunter, J. K. and Nachtergaele, B., 2001. *Applied Analysis*. World Scientific, 439 p, Singapore.
- İskenderov, A. D., Tagiev, R. G. and Yagubov, G. Ya., 2002. Optimalleştirme Metodları. Çarşıoğlu, 400 s, Bakü.
- Kahina, L. and Mohamed, A. 2012. Direct Method of Resolution of Optimal Control Problem with Free Initial Condition, 2012. 1-18.
- Kreyszig E., 1989. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wile, 688 p.
- Lebedev, L. P., Cloud M. J., 2003. *The Calculus of Variations and Functional Analysis*, World Scientific.
- Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N. and Ekincioglu, İ. 2007. *Analiz I*, Seçkin Yayıncılık, 593 s.
- Nagle, K. B., Saff E. B., and Snider A. D., 2003. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*, Addison Wesley.
- Saraç, Y. and Subaşı, M., 2010. A regularized Optimal Control Problem for First Order Linear Differential Equations. *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, 3(1), 17-29.
- Seyidmamedov, Z. and Hasanov, A., 2002. Determination of Leading Coefficients in Sturm-Liouville operator from boundary measurements. I. A Stripping Algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, 125, 1-21.
- Tikhonov, A. N. and Samarskii, A. A., 1963. *Equations of Mathematical Physics*. Dover Publications, 765 p, New York.
- Vasilyev, F.P., 1981. *Ekstremal problemlerin Çözüm Metotları*. Nauka, 400 s, Moskova. (Rusça)
- Yousefi, S. A., Dehghan, M. and Lofti, A. 2010. Finding the Optimal Control of Linear Systems Via He's Variational Iteration Method. *International Journal of Computer Mathematics*, 87(5), 1042-1050.
- Zeidler, E., 1995. *Applied Functional Analysis*. Springer Verlag, 404 p, New York.



## ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Gümüşhane’de doğdu. İlköğretimini Gümüşhanede, ortaöğretimini Sakarya’da tamamladı. 2002 yılında Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde Lisans öğrenimine başladı. 2014 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik alanında yüksek lisans öğrenimine başladı.

