

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİNCİ MERTEBEDEN
RASYONEL FARK DENKLEMLERİNİN
ASİMPOTİK DAVRANIŞI

Mehmet GÜMÜŞ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2012

TEZ ONAY SAYFASI

Mehmet GÜMÜŞ tarafından hazırlanan “İkinci Mertebeden Rasyonel Fark Denklemlerinin Asimptotik Davranışı” adlı tez çalışması lisanüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 25/06/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

Başkan : Doç. Dr. Mehmet KARABACAK.....

Üye : Doç. Dr. Özkan ÖCALAN.....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ.....

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun

...../...../..... tarih ve

..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı beyan ederim.

25/06/2012

Mehmet GÜMÜŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİNCİ MERTEBEDEN RASYONEL FARK DENKLEMLERİNİN ASİMPOTOTİK DAVRANIŞI

Mehmet GÜMÜŞ

Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

Fark denklemleri biyoloji, genetik, popülasyon dinamiği, olasılık teorisi, psikoloji, sosyoloji ve daha bir çok bilim dalının içindeki matematiksel modellere uygulanır. Bu nedenden dolayıdır ki, son zamanlarda fark denklemlerinin çalışmasına çok büyük bir ilgi mevcuttur. Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde fark denklemleri hakkında genel bilgiler verilmiş ve lineer olmayan rasyonel fark denklemleri ile ilgili yapılan çalışmaların literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}/x_n)$ denkleminin, dördüncü bölümde ise $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}/x_n)^p$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin davranışları ele alınmıştır.

2012, vii+49 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sınırlılık, Periyodiklik, Salınımlılık, Fark denklemleri.

ABSTRACT

M.Sc Thesis

THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE SECOND ORDER RATIONAL DIFFERENCE EQUATIONS

Mehmet GÜMÜŞ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Associate Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

Difference equations have been applied in several mathematical models in biology, economics, genetics, population dynamics, probability theory, sociology, psychology, and so forth. For this reason, recently there has been a great interest in studying difference equations. This study consists of four sections. In the first section, general informations were given about the difference equations and a summary of literature on nonlinear difference equations was given. In the second section, general definitions and theorems about difference equations were given. In the third section, of the $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}/x_n)$ equation, and in the forth section of the $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}/x_n)^p$ equation the behaviour of positive solutions of difference equations are discussed.

2012, vii+49 pages

Key words: Boundedness, Periodicity, Oscillatory, Difference equation.

TEŞEKKÜR

Tüm eğitim ve öğretim hayatım boyunca desteklerini hep yanımda hissettiğim ve bana çalışmalarında hep pozitif enerji katan aileme sonsuz teşekkür ederim. Bana bu çalışması zevkli ve ilginç konuyu tez çalışması olarak veren, benim için çok değerli ve üzerimde çok emeği olan danışman hocam Doc. Dr. Özkan ÖCALAN'a tüm yardımlarından, öğretilerinden, bilimsel çalışmalarına başlamamda öncü olmasından dolayı ne kadar teşekkür etsem azdır. Ayrıca kıymetli hocam Yard. Doc. Dr. Hasan Ögünmez'e çalışmalarım boyunca hep yanımda olduğundan sonsuz şükranlarımı sunarım.

Literatür taramalarımnda yabancı dil ile ilgili bir problemimde ilk başvurduğum, her zaman için yanımda olan değerli ingilizce öğretmeni ablam İlknur GÜMÜŞ'e, ayrıca hayatımın her alanında olduğu gibi matematik çalışmalarında da beni hiç yalnız bırakmayan, desteğini hep ilerleyici bir kuvvet olarak bana hissettiren, aynı zamanda matematikçi olan canım sevgilim F. Hilal ERGİN'e, ve tez çalışmamda yardımlarını hiç esirgemeyen mesai arkadaşım Arş. Gör. Yavuz YAZICI (Bülent Ecevit Üniversitesi)'ya teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet GÜMÜŞ

AFYONKARAHİSAR, 2012

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ JÜRİSİ VE ENSTİTÜ ONAYI	i
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER	vii
1. GİRİŞ	1
1.1 Fark denklemlerinin Sınırlılığı, Kararlılığı ve Periyodikliği ile ilgili Yapılmış Çalışmalar	4
2. FARK DENKLEMLERİYLE İLGİLİ GENEL TANIMLAR	8
3. $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}/x_n)$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DİNAMİĞİ	15
3.1 (3.0.1) Denkleminin Yarı döngü Analizi	17
3.2 (3.0.1) Denkleminin Sınırlılık Karakteri	19
3.3 (3.0.1) Denkleminin Periyodiklik Doğası	21
3.4 (3.0.1) Denkleminin Global Asimptotik Kararlılığı	24
4. $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}/x_n)^p$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DİNAMİĞİ	28
4.1 (4.0.1) Denkleminin Yarı döngü Analizi	31
4.2 (4.0.1) Denkleminin Sınırlılık Karakteri	33
4.3 (4.0.1) Denkleminin Periyodiklik Doğası	38
4.4 (4.0.1) Denkleminin Global Asimptotik Kararlılığı	42
5. KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ	49

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	:	Tam Sayılar
$\mathbb{R}^+$	:	$(0, \infty)$ aralığı
$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar
$\subset$	:	Kapsar
$=$	:	Eşittir
$\leq$	:	Küçük veya eşittir
$\geq$	:	Büyük veya eşittir
$\in$	:	Elemanıdır
$\notin$	:	Elemanı değildir
$\sum$	:	Toplam Sembolü
$\log$	:	Logaritma Fonksiyonu

1. GİRİŞ

Fark denklemler teorisi matematiğin sistematik olarak gelişmesiyle birlikte ortaya çıkan ilk teorilerden birisidir. Bu teori zamana bağlı ayırık olayların matematiksel ifadesinde kullanılmıştır. Fark denklemleri bir çok doğa olayını ifade etmekte kullanılır. Bununla birlikte fark denklemleri, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin incelenmesinde de kullanılır. Yani, verilen bir diferansiyel denklemin, ayırık benzeri olan fark denklem ifade edilir ve bu fark denklem, diferansiyel denklemin çözümünün yapısını araştırmak için incelenir. Fark denklemler teorisi yaklaşık sekiz asırlık çalışmalar sonucunda sistematik bir hale gelmiştir. Fark denklemleri Fibonacci tarafından çalışma konusu olarak dikkate alınmıştır ve onun çok başarılı çalışmaları sonucunda bir çok matematikçi daha sonralarda bu ilginç alana yönelmiştir. Örneğin, Laplace sabit katsayılı homojen doğrusal fark denklemleri, Guichard ise aynı denklemin homojen olmayan özel hallerini ve Gelgrum bu denklemlerin çözümlerinin asimptotik davranışını inceleme konusu olarak seçmiştir.

Fark denklemler genellikle zamanın gidişatı üzerindeki olağanüstü oluşumu tanımlar. Örneğin belli bir popülasyon ayırık jenerasyona sahip ise, $(n + 1)$ 'inci jenerasyon olan $x(n + 1)$ 'in büyüklüğü, n 'inci jenerasyon olan $x(n)$ 'in bir fonksiyonudur.

Bu ilişki kendini

$$x(n + 1) = f(x(n)) \quad (1.0.1)$$

denkleminde açıklar. Bu probleme diğer bir açıdan da bakabiliriz. Bir x_0 noktasından başlayarak,

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots \quad (1.0.2)$$

dizisi olarak genelleyebiliriz. Kolaylık için şu notasyonu da benimsenebilir:

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)), f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \dots \text{ vs.}$$

Eğer

$$x(n) = f^n(x_0) \quad (1.0.3)$$

denilirse,

$$x(n+1) = f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x(n)) \quad (1.0.4)$$

elde edilir.

$f(x_0)$, f 'nin herhangi bir x_0 noktasındaki birinci iterasyonunu, $f^2(x_0)$ ise f 'nin x_0 noktasındaki ikinci iterasyonunu ve daha genellemek gerekirse, $f^n(x_0)$, f 'nin x_0 noktasındaki n 'inci iterasyonunu gösterir. $f^0(x_0)=x_0$ olmak üzere $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ tüm pozitif iterasyonların kümesine x_0 'ın pozitif yörüngesi denir. Bu iterasyon prosedürü ayrık dinamik sistemin bir örneğidir.

Bu tartışmalardan sonra tam olarak fark denklemleri ve ayrık dinamik sistemler aynı paranın iki yüzünü gösterdiği sonucuna varabiliriz. Mesela matematikçiler fark denklemler hakkında konuştuklarında genellikle konunun analitik kısmına değinirken, ayrık dinamik sistemler hakkında konuştuklarında genellikle konunun geometrik ve topolojik yönüne gönderme yaparlar.

Şayet (1.0.1)'de tanımlanan f fonksiyonu $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olarak tanımlanan g fonksiyonu ile yer değiştirilirse, o zaman

$$x(n+1) = g(n, x(n)) \quad (1.0.5)$$

elde edilir. (1.0.5) denkleminde otonom olmayan veya zaman değişkenli denir iken, (1.0.1) denkleminde otonom veya zaman değişkensiz denir. (1.0.5)'nin çalışılması çok daha karışıktır ve birinci mertebeden denklemlerin ayrık dinamik sistem teorisine uygun düşmez.

Bu çalışmada lineer olmayan, rasyonel, ikinci mertebeden fark denklemleri ve bu fark denklemlerinin pozitif çözümlerinin davranışları ele alınmıştır.

Bu tip denklemlerin çalışması oldukça zorlayıcıdır, ancak uğraşmaya değerdir ve bu denklemlerle ilgili çalışmalar hala emekleme evresindedir.

Biz lineer olmayan rasyonel fark denklemlerinin sahip olduğu gerçeklerle çok önemli olduğuna inanıyoruz. Buna ilaveten bu gibi denklemler hakkındaki sonuçlar, lineer olmayan fark denklemlerinin global davranışlarının temel teorisindeki gelişmeler için orijinal çalışmalar sunabilmektedir.

Fark denklemleri biyoloji, genetik, ekonomi, popülasyon dinamiği ve bunun gibi birçoğunun içindeki matematiksel modellemelerde kullanılır. Bu ve yukarıda

bahsettiğimiz nedenlerden dolayıdır ki son zamanlarda fark denklemlerin çalışmasına artan bir ilgi mevcuttur.

α_n sınırlı bir dizi, $p, q \in [0, \infty)$ ve $k, m, n \in N$, $k \neq m$ olmak üzere

$$x_n = \alpha_n + \frac{x_{n-m}^p}{x_{n-k}^q} \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.0.6)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin araştırması, Stevo Stević tarafından bir çok konferansta önerilmiş olup, bu alanda bir çok yapılmış ve yapılması gereken çalışma mevcuttur. Ayrıca şunu da not edelim ki tez içindeki Sonuç 4.15 ve Teorem 4.19 tamamen orjinaldir.

Bu genel hali verilen (1.0.6) denklemin litaretür özeti aşağıda ele alınmıştır.

1.1 Fark Denklemlerinin Sınırlılığı, Kararlılığı ve Periyodikliği ile İlgili Yapılmış Çalışmalar

Bu kısımda (1.0.6) denkleminin özel halleri için literatür özeti verilmiştir.

Devault, Ladas ve Schultz 1997 yılında yaptıkları çalışmada A ve başlangıç koşulları pozitif sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{A}{x_n} + \frac{1}{x_{n-2}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1.1)$$

fark denkleminin bütün pozitif çözümlerinin iki periyodik bir çözüme yakınsadığını ve $x_{n+1} = A + \frac{x_n}{x_{n-1}}$, $n = 0, 1, \dots$ fark denkleminin $A, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ için tek denge noktası olan $\bar{x} = A + 1$ 'in global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Amleh, Grove ve Ladas 1999 yılındaki çalışmalarında α pozitif bir reel sayı ve başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1.2)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin α 'nın durumlarına göre global asimptotik kararlılığını, sınırlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Feuer 2003 yılında yaptığı çalışmada (1.1.2) denkleminde özellikle $0 < \alpha < 1$ durumuna yoğunlaşmış ve bu durum için pozitif çözümlerin denge noktası civarındaki davranışlarını incelemiştir. Ayrıca α 'nın diğer durumları içinde alternatif ispatlar vermiştir.

Devault, Kent ve Kosmala 2003 yılındaki çalışmalarında p pozitif reel sayı, $k \in \{2, 3, \dots\}$ ve başlangıç koşulları $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0$ keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1.3)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir. k 'nın tek olma durumunda sınırlılık karakteri, global kararlılığı ve periyodikliği için p 'nin durumlarına göre gerek ve yeter şartlar verilmiştir. $k = 2$ durumu için de ayrıntılı bir yarı döngü analizi verilmiş ve çözümlerin sınırlılığının ne zaman olacağını açık problem olarak bırakılmıştır.

El-Owaidy, Ahmed ve Mousa 2004 yılındaki çalışmalarında (1.1.3) denkleminin pozitif çözümlerinin bazı özel koşullar altında periyodikliğini ve global asimptotik kararlılığını araştırmışlardır.

Abu-Saris ve Devault 2002 yılında yaptıkları çalışmada $A \in (0, \infty)$, $k \in \{2, 3, \dots\}$ ve pozitif başlangıç koşulları için

$$y_{n+1} = A + \frac{y_n}{y_{n-k}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1.4)$$

tekrarlı dizisinin denge noktasının global asimptotik kararlılığı için gerekli koşulları elde etmişlerdir.

Berenhaut, Foley ve Stević 2005 yılında yaptıkları çalışmada $A \in (0, \infty)$, $k \in \{2, 3, \dots\}$ ve pozitif başlangıç koşulları için (1.1.4) fark denkleminin ilişkin nice-lik özellikler vermişler ve çözümlerin yakınsaklığı ile ilgili bazı sonuçlar elde etmişlerdir.

Stević 2003 yılındaki çalışmasında α_n negatif olmayan, α pozitif sayısına yakınsayan bir dizi, başlangıç koşulları keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1.5)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, global kararlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Stević 2003 yılındaki bir diğer çalışmasında α_n negatif olmayan iki periyodik bir dizi, başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere, (1.1.5) fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakterini, salınımlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

El-Owaidy, Ahmed ve Mousa 2003 yılındaki çalışmalarında α pozitif bir reel sayı, $p \in [1, \infty)$ ve başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^p}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1.6)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin lokal kararlılığını, salınımlılığını ve sınırlılık karakterini araştırmışlardır.

Stević 2005 yılındaki çalışmasında, El-Owaidy ve arkadaşlarının 2003 yılında yaptığı çalışmayı daha da geliştirmiştir. Bu yaptığı çalışmada α pozitif bir reel

sayı, $p \in (0, 1)$ ve başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere (1.1.6) denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, global çekiciliğini, salınımlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Berenhaut ve Stević 2006 yılındaki çalışmalarında (1.1.6) fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakterini, global asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir. Bu fark denkleminde α, p parametreleri ve başlangıç koşullarının pozitif reel sayı olduklarını varsaymışlar ve çalışma sonucunda bu denklemin çözümlerinin sınırsız, periyodik ve kararlı olma şartlarını p parametresine bağlı olarak elde etmişlerdir.

Schinas, Papaschinopoulos ve Stefanidou 2009 yılında yaptıkları çalışmalarında α, p, q ve başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^q}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1.7)$$

lineer olmayan fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakterini, global kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Stević 2006 yılında yaptığı çalışmasında, A, p ve başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1.8)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, global çekiciliğini ve periyodikliğini çalışmıştır.

Stević 2007 yılında yaptığı çalışmasında, A, p, r ve başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n^p}{x_{n-1}^r}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1.9)$$

ve $x_{n+1} = \max\{A, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^r}\}$ fark denklemlerinin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakteri için önemli sonuçlar elde etmiştir.

Öcalan 2012 yılında yaptığı çalışmada (1.1.2) denklemi için yarı döngü analizi yapmış, ve Ladas tarafından 1999 yılında bırakılmış açık probleme olumsuz yanıt vermiştir.

Papaschinopoulos, Schinas ve Stefanidou 2011 yılında yaptıkları çalışmalarında A_n pozitif sınırlı bir dizi, p, q ve başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A_n + \frac{x_n^p}{x_n^q}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1.10)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin asimptotik davranışlarını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

2. FARK DENKLEMLERİYLE İLGİLİ GENEL TANIMLAR

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan genel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1 (Fark Denklemi): n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişkeninde y olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y), E^3(y), \dots, E^n(y), \dots$ gibi farklarını içeren bağıntılara Fark Denklemi denir (Kulenović and Ladas 2001).

Teorem 2.2: I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I \times I \rightarrow I$ sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x_{-1}, x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.1.1)$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir (Kulenović and Ladas 2001).

Tanım 2.3 (Denge Noktası): Eğer $\bar{x}$ noktası için (2.1.1) denkleminde $f(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$ şartı sağlanıyor ise $\bar{x}$ noktasına (2.1.1) denkleminin denge noktası denir. Eğer her $n \geq 0$ için $\bar{x} = x_n$ ise, $\bar{x}$ 'e f 'nin sabit noktası denir (Elaydi 1996).

Tanım 2.4 (Değişmez (Sabit) Aralık): Eğer her $n > 0$ için $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ alt aralığı varsa, bu aralığa (2.1.1) denkleminin değişmez (yada sabit) aralığı denir (Kulenović and Ladas 2001).

Teorem 2.5: $\bar{x}$, (2.1.1) denkleminin denge noktası olmak üzere:

i. Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$ iken $\forall n \geq 0$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

ii. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde, $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

iii. Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ ise, $\bar{x}$ denge noktasına çekici nokta denir.

iv. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekici nokta ise, $\bar{x}$ denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir.

v. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.

vi. Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < r$ ve bazı $N \geq -1$ sayıları için $|x_N - \bar{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktasına repeller (geri itici nokta) denir (Kulenović and Ladas 2001).

Tanım 2.6 (p-periyot): Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayıdır denir (Kulenović and Ladas 2001).

Tanım 2.7 (Er geç p-periyot): Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır (Kulenović and Ladas 2001).

Tanım 2.8 (Lineer Denklem): (2.1.1) denkleminde $f(x_n, x_{n-1})$ fonksiyonunu $f(u, v)$ şeklinde düşünelim:

$$r = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial u} \quad s = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial v}$$

olmak üzere

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} \quad (2.1.2)$$

denklemini elde edilir. Bu denkleme $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(2.1.2) denkleminin karakteristik denklemi:

$$\lambda^2 - r\lambda - s = 0 \quad (2.1.3)$$

dir (Kulenović and Ladas 2001).

Teorem 2.9 (Lineer Kararlılık Teoremi):

i. Eğer (2.1.3) denkleminin her iki kökünde mutlak değerce 1'den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

ii. Eğer (2.1.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

iii. (2.1.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart

$$|r| < 1 - s < 2$$

olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Aynı zamanda $\bar{x}$ sink (çukur nokta) diye de adlandırılır.

iv. (2.1.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den büyük olması için gerek ve yeter şart

$$|s| > 1 \text{ ve } |r| < |1 - s|$$

olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası repeller (geri itici nokta)'dır.

v. (2.1.3) denkleminin bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart

$$r^2 + 4s > 0 \text{ ve } |r| > |1 - s|$$

olmasıdır. Bu durumda $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır ve eyer noktası diye adlandırılır.

vi. (2.1.3) denkleminin bir kökünün mutlak değerce 1'e eşit olması için gerek ve yeter şart

$$|r| = |1 - s| \text{ veya } s = -1 \text{ ve } |r| \leq 2$$

olmasıdır. Bu durumda $\bar{x}$ denge noktasına hiperbolik olmayan nokta denir. (Kulenović and Ladas 2001).

Benzer şekilde, mertebesi 3 olan fark denklemleri için Teorem 2.9 aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.1.4)$$

fark denklemini ele alalım.

(2.1.4) denkleminde $f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$ fonksiyonunu $f(u, v, w)$ şeklinde düşünelim:

$$r = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})}{\partial u} \quad s = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})}{\partial v} \quad t = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})}{\partial w}$$

olmak üzere,

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} + ty_{n-2} \quad (2.1.5)$$

denklemini elde edilir. Bu denkleme $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(2.1.5) denkleminin karakteristik denklemi:

$$\lambda^3 - r\lambda^2 - s\lambda - t = 0 \quad (2.1.6)$$

dır (Kulenović and Ladas 2001).

Teorem 2.10:

i. Eğer (2.1.6) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

ii. Eğer (2.1.6) denkleminin bütün köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

iii. (2.1.6) denkleminin bütün köklerinin mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şartlar

$$|r + t| < 1 - s, \quad |r - 3t| < 3 + s \text{ ve } t^2 - s - rt < 1$$

olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır (Kocić and Ladas 1993).

Tanım 2.11 (Pozitif Yarı Döngü): $\bar{x}$, (2.1.1) denkleminin denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ de pozitif bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün pozitif yarı döngüsü $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ terimlerinin art arda gelmesinden oluşur. Bu dizinin bütün terimleri $\bar{x}$ 'dan büyük veya eşit, $l \geq -1$ ve $m \leq \infty$ öyle ki,

$$\text{ya } l = -1 \text{ veya } l > -1 \text{ ve } x_{l-1} < \bar{x}$$

ve

$$\text{ya } m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ ve } x_{m+1} < \bar{x}$$

dır (Kocić and Ladas 1993).

Tanım 2.12 (Negatif Yarı Döngü): $\bar{x}$, (2.1.1) denkleminin denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ de pozitif bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün negatif yarı döngüsü $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ terimlerinin art arda gelmesinden oluşur. Bu dizinin bütün terimleri $\bar{x}$ 'dan küçük, $l \geq -1$ ve $m \leq \infty$ öyle ki,

$$\text{ya } l = -1 \text{ veya } l > -1 \text{ ve } x_{l-1} \geq \bar{x}$$

ve

$$\text{ya } m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ ve } x_{m+1} \geq \bar{x}$$

dır (Kocić and Ladas 1993).

Tanım 2.13 (Sıfır Civarında Salınımlılık): (2.1.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden ne pozitif ne de negatif ise, bu çözümlere sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir denir (Kulenović and Ladas 2001).

Tanım 2.14 ($\bar{x}$ Denge Noktası Civarında Salınımlılık): $\bar{x}$, (2.1.1) denkleminin denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ de pozitif bir çözümü olmak üzere $\{x_n - \bar{x}\}$ dizisi salınımlı ise, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne $\bar{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir. Aksi halde $\bar{x}$ denge noktası civarında salınımlı değildir denir (Kocić and Ladas 1993).

Tanım 2.15 (Sınırlı Dizi): $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinde $\forall n \geq -1$ için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizine sınırlıdır denir (Kulenovic and Ladas 2001).

Teorem 2.16 (Clark Teoremi): $a, b \in \mathbb{R}$ ve $k \in \{1, 2, \dots\}$ olsun. O zaman

$$z_{n+1} - az_n + bz_{n-k} = 0 \quad n = 0, 1, \dots,$$

fark denkleminin asimptotik kararlılığı için $|a| + |b| < 1$ olması yeterli bir koşuldur.

Buna ilaveten aşağıdaki iki durumdan birinin doğru olduğunu varsayalım.

- i. k tek ve $b < 0$.
- ii. k çift ve $ab < 0$.

Durumlarından birinin sağlanması $|a| + |b| < 1$ olması için gerekli bir koşuldur (Kocić and Ladas, 1993).

Teorem 2.17: Varsayalım ki $b > 0$ ve k çift olsun. O zaman

$$z_{n+1} + bz_n - bz_{n-k} = 0 \quad n = 0, 1, \dots,$$

fark denkleminin asimptotik kararlılığı için gerek ve yeter şart

$$b < \frac{1}{2 \cos(\frac{\pi}{k+2})}$$

olmasıdır (Kocić and Ladas 1993).

Tanım 2.18 (Hiperbolik Nokta): Eğer $\bar{x}$ noktası için (2.1.1) denkleminde $|f'(\bar{x}, \bar{x})| \neq 1$ şartı sağlanıyor ise $\bar{x}$ denge noktasına (2.1.1) denkleminin hiperbolik noktası denir (Elaydi 1996).

Tanım 2.19 (Schwarzian Türevi): (1.0.1)'de tanımlanan bir f fonksiyonunun schwarzian türevi şu şekilde tanımlanır:

$$sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2.$$

(Elaydi 1996).

Teorem 2.20: $\bar{x}$, (1.0.1) denkleminin denge noktası olsun. (1.0.1) de tanımlanan f fonksiyonu sürekli ve diferensiyellenebilir olmak üzere durumları doğrudur.

- i. Eğer $|f'(\bar{x})| < 1$ ise, o zaman $\bar{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.
- ii. Eğer $|f'(\bar{x})| > 1$ ise, o zaman $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

(Elaydi 1996).

Teorem 2.21: $\bar{x}$, (1.0.1) denkleminin denge noktası ve $f'(x) = 1$ için durumları doğrudur.

- i. Eğer $f''(\bar{x}) \neq 0$ ise, o zaman $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.
- ii. Eğer $f''(\bar{x}) = 0$ ve $f'''(\bar{x}) > 0$ ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.
- iii. Eğer $f''(\bar{x}) = 0$ ve $f'''(\bar{x}) < 0$ ise, $\bar{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

Burada $f'''(\bar{x}) = 0$ olması halinde teorem başarısız olur (Elaydi 1996).

Teorem 2.22: $\bar{x}$, (1.0.1) denkleminin denge noktası ve $f'(x) = -1$ olsun. O halde

- i. Eğer $sf(\bar{x}) < 0$ ise, o zaman $\bar{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.
- ii. Eğer $sf(\bar{x}) > 0$ ise, o zaman $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

durumları doğrudur. Burada $sf(\bar{x}) = 0$ olması durumunda teorem başarısız olur (Elaydi 1996).

Teorem 2.23:

$$x_{n+1} = g(x_n, \dots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.1.7)$$

fark denklemini düşünelim. $g \in C[(0, \infty)^{k+1}, (0, \infty)]$ fonksiyonu her bir bileşeni için artan olsun. Başlangıç koşulları $x_{-k}, \dots, x_0$ pozitif sayılar olmak üzere,

(2.1.7) denklemi tek bir pozitif denge noktasına sahip olsun.

$$h(x) = g(x, \dots, x), \quad x \in (0, \infty) \quad (2.1.8)$$

şeklinde tanımlanan ve

$$(h(x) - x)(x - \bar{x}) < 0, \quad x \neq \bar{x} \text{ için}$$

negatif feedback (geri besleme) özelliğini sağlayan h fonksiyonunu ele alalım. O halde $\bar{x}$, (2.1.7) denkleminin bütün pozitif çözümlerinin bir global çekicisidir. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

dır.

3. $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DİNAMİĞİ

Bu bölümde $\alpha \in [0, \infty)$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n} \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.0.1)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliği, sınırlılığı, yarı döngü analizi ve global kararlılığı çalışılacaktır.

Açık bir şekilde görülür ki, (3.0.1) denkleminin tek denge noktası $\bar{x} = \alpha + 1$ dir. Bu bölümde, (3.0.1) denkleminin bütün pozitif çözümlerinin sınırlı olabilmesi için gerek ve yeter şart durumu $\alpha \geq 1$ olduğu. eğer $\alpha = 1$ ise, o zaman (3.0.1) denkleminin her pozitif çözümünün 2-periyodik çözümlere yakınsadığı, $\alpha > 1$ ise, o zaman (3.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktasının global asimptotik kararlı olduğu gösterilip, çözümlerin denge noktası civarındaki davranışları ayrıntılı olarak incelenecektir.

(3.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası civarında lineerleştirilmiş denklemi

$$y_{n+1} + \frac{1}{\alpha + 1}y_n - \frac{1}{\alpha + 1}y_{n-1} = 0 \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.0.2)$$

dir.

İleride işimize yarayacak bazı önermeler vererek bu kısma başlayalım.

Önerme 3.1: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.0.1) denkleminin eninde sonunda sabit bir çözümünü olsun. O zaman

$$x_n = \alpha + 1 \quad n = -1, 0, \dots,$$

aşikâr bir çözümdür (Elaydi 1996).

Önerme 3.2: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.0.1) denkleminin bir çözümü olsun ve $L > \alpha$ olmak üzere aşağıdaki durumlar doğrudur.

i. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = L$ gerek ve yeter şart $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \frac{L}{(L-\alpha)}$.

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = L$ gerek ve yeter şart $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \frac{L}{(L-\alpha)}$.

Teorem 3.3: $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun ve

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \quad (3.0.3)$$

fark denklemini $x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ başlangıç koşulları altında düşünelim. Varsayalım ki f aşağıdaki koşulları sağlasın;

(a) $a < b$ olacak şekilde a, b pozitif sayıları vardır, öyle ki

$$a \leq f(x, y) \leq b \quad \forall x, y \in [a, b].$$

(b) $f(x, y)$ her bir $y \in [a, b]$ için $x \in [a, b]$ içinde artmayan ve $f(x, y)$, her bir $x \in [a, b]$ için $y \in [a, b]$ içinde azalmayan olsun.

(c) (3.0.3) denklemi, $[a, b]$ içinde 2-asli periyotlu çözümlere sahip olmasın. O zaman, $[a, b]$ içinde (3.0.3) denkleminin tam olarak bir denge noktası vardır. Buna ilaveten, (3.0.3) denkleminin $[a, b]$ içinde her bir çözümü $\bar{x}$ 'a yakınsar (Kulenović *et al.* 1998).

3.1 (3.0.1) Denklemi için Yarı Döngü Analizi

Önerme 3.4: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.0.1) denkleminin tek yarı döngüden oluşan pozitif bir çözümü olsun. O zaman $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ monoton olarak $\bar{x} = \alpha + 1$ 'e yakınsar (Amleh *et al.* 1999).

İspat: Varsayalım ki, $0 < x_{n-1} < \alpha + 1$, $n \geq 0$ 'lar için olsun. $x_{n-1} \geq \alpha + 1$, $n \geq 0$ 'lar için olma durumu da benzerdir ve ihmal edilebilir.

$$0 < \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n} = x_{n+1} < \alpha + 1$$

ve böylece

$$0 < x_{n-1} < x_n < \alpha + 1$$

olur. Buradan $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, sınırlı ve monoton olduğu görülür. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Önerme 3.5: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.0.1) denkleminin en az iki yarı döngüden oluşan pozitif bir çözümü olsun. O zaman $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ salınımlıdır. Dahası, ilk yarı döngünün olası istinası ile, her yarı döngü bir uzunluğundadır ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ 'nin her bir terimi α 'dan daha büyüktür ve ilk iki yarı döngünün olası istinası ile hiçbir terim $\alpha + 1$ e eşit değildir (Amleh *et al.* 1999).

İspat: Aşağıdaki iki durumu düşünmek ispat için yetecektir.

i. Varsayalım ki, $x_{-1} < \alpha + 1 \leq x_0$ olsun. O zaman

$$x_1 = \alpha + \frac{x_{-1}}{x_0} < \alpha + 1 \text{ ve } x_2 = \alpha + \frac{x_0}{x_1} > \alpha + 1.$$

ii. Varsayalım ki, $x_0 < \alpha + 1 \leq x_{-1}$ olsun. O zaman $x_1 = \alpha + \frac{x_{-1}}{x_0} > \alpha + 1$ ve $x_2 = \alpha + \frac{x_0}{x_1} < \alpha + 1$.

Aşağıdaki önerme, (3.0.1) denkleminin pozitif çözümlerinin limit davranışlarına karar vermekte yararlı olacaktır.

Önerme 3.6: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.0.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun ve $N \geq 0$ için aşağıdaki durumlar doğrudur (Amleh *et al.* 1999).

$$1. \ x_{N+1} > x_{N-1} \iff x_{N-1} - \alpha x_N - x_{N-1}x_N > 0.$$

$$2. \ x_{N+1} = x_{N-1} \iff x_{N-1} - \alpha x_N - x_{N-1}x_N = 0.$$

3. $x_{N+1} < x_{N-1} \iff x_{N-1} - \alpha x_N - x_{N-1}x_N < 0.$

İspat: İspat aşağıdaki hesaplama ile kolayca yapılabilir.

$$x_{N+1} - x_{N-1} = \alpha + \frac{x_{N-1}}{x_N} - x_{N-1} = \frac{\alpha x_N + x_{N-1} - x_{N-1}x_N}{x_{N-1}}.$$

3.2 (3.0.1) Denkleminin Sınırlılık Karakteri

Önerme 3.7: $\alpha > 1$ durumunu düşünelim ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.0.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. O zaman

$$\alpha + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}$$

durumu doğrudur (Amleh *et al.* 1999).

İspat: Önerme 3.4 ve Önerme 3.5'i düşünelim. Varsayalım ki $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ 'nin her yarı döngüsü bir uzunluğunda olsun. $\forall n \geq -1$ için

$$\alpha < x_n \quad \alpha < x_0 < \alpha + 1 < x_{-1}$$

dir. Biz ilk olarak gösterelim ki $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}$. Şunuda not edelim ki

$$x_{2n+1} = \alpha + \frac{x_{2n-1}}{x_{2n}} < \alpha + \frac{x_{2n-1}}{\alpha}$$

dir. Şimdi

$$y_{m+1} = \alpha + \frac{1}{\alpha} y_m \quad m = 0, 1, \dots$$

fark denklemini düşünecek olursak, bu fark denkleminin her bir çözümü $\frac{\alpha^2}{\alpha - 1}$ sayısına yakınsar. Dolayısıyla $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}$ olduğu açıkça görülmektedir.

Şimdi eşitsizliğin diğer tarafı olan $\alpha + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ kısmını gösterelim. $\varepsilon > 0$ olsun. $N \geq 0$ sayısı vardır, öyle ki $\forall n \geq N$ için

$$x_{2n-1} < \frac{\alpha^2 + \varepsilon}{\alpha - 1}.$$

O zaman

$$x_{2n} = \alpha + \frac{x_{2n-2}}{x_{2n-1}} > \alpha + \alpha \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 + \varepsilon} = \frac{\alpha^3 + \alpha\varepsilon + \alpha(\alpha - 1)}{\alpha^2 + \varepsilon}$$

ve buradan

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \frac{\alpha^3 + \alpha\varepsilon + \alpha(\alpha - 1)}{\alpha^2 + \varepsilon}$$

bulunur. ε keyfi olduğundan

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \frac{\alpha^3 + \alpha(\alpha - 1)}{\alpha^2} = \alpha + \frac{\alpha - 1}{\alpha}.$$

Teorem 3.8: $0 \leq \alpha < 1$ ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.0.1) denkleminin bir çözümü olsun. Öyle ki, $0 < x_{-1} \leq 1$ ve $x_0 \geq \frac{1}{1-\alpha}$ başlangıç koşullarını alalım. O zaman aşağıdaki durumlar doğrudur.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \infty$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \alpha$ (Amleh *et al.* 1999).

İspat: Not edelim ki, $1/(1-\alpha) > \alpha + 1$ ve bu yüzden $x_0 > \alpha + 1$. $x_1 \in (\alpha, 1]$ ve $x_2 \geq \alpha + x_0$ durumlarını göstermek yeterli olacaktır.

$$x_1 = \alpha + \frac{x_{-1}}{x_0} > \alpha$$

dır. Aynı zamanda

$$x_1 = \alpha + \frac{x_{-1}}{x_0} \leq x_1 = \alpha + \frac{1}{x_0} \leq \alpha + (1 - \alpha) = 1$$

ve bu yüzden $x_1 \in (\alpha, 1]$. Dolayısıyla $x_2 = \alpha + \frac{x_0}{x_{-1}} \geq \alpha + x_0$. Tümevarımla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \infty$$

olduğu kolayca görülür.

$$x_{2n+1} = \alpha + \frac{x_{2n-1}}{x_{2n}}$$

olduğundan, eşitliğin her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \alpha$$

durumuda gösterilmiş olur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

3.3 (3.0.1) Denkleminin Periyodiklik Doğası

Önerme 3.9: Aşağıdaki durumlar doğrudur.

i. (3.0.1) denklemini 2-asli periyotlu çözümlere sahiptir gerek ve yeter şart $\alpha = 1$ dir.

ii. Varsayalım ki, $\alpha = 1$ olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.0.1) denkleminin bir çözümü olsun. O zaman $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, 2-periyodu ile periyodiktir gerek ve yeter şart $x_{-1} \neq 1$ ve $x_0 = \frac{x_{-1}}{x_{-1}-1}$ olmasıdır (Amleh *et al.* 1999).

İspat:

i. Varsayalım ki

$$\dots, x, y, x, y, \dots$$

$x, y \in (0, \infty)$ olmak üzere, (3.0.1) denkleminin 2-periyodik bir çözümü olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanmak zorundadır;

$$x = \alpha + \frac{x}{y} \text{ ve } y = \alpha + \frac{y}{x}.$$

Buradan

$$x = \frac{\alpha y}{y - 1},$$
$$y = \frac{\alpha x}{x - 1}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden

$$x = \frac{\alpha \left(\frac{\alpha x}{x-1} \right)}{\left(\frac{\alpha x}{x-1} \right) - 1},$$

ve buradan

$$x(\alpha - 1) = (\alpha + 1)(\alpha - 1)$$

durumu elde edilir. Bu eşitlik $\alpha = 1$ durumunda $\forall x \in (0, \infty)$ için sağlanır. $\alpha \neq 1$ olduğunda ise $x = \alpha + 1$ aşikar çözümü olur. O halde açık bir şekilde görülür ki çözüm

$$\dots, x, \frac{x}{x-1}, x, \frac{x}{x-1}, \dots$$

formundadır.

ii. Varsayalım ki $x_{-1} \neq 1$ ve $x_0 = \frac{x_{-1}}{x_{-1}-1}$ olsun. O halde

$$x_1 = 1 + \frac{x_{-1}}{\frac{x_{-1}}{x_{-1}-1}} = x_{-1}$$

ve

$$x_2 = 1 + \frac{x_0}{\frac{x_0}{x_0-1}} = x_0$$

olur. O halde $n \geq -1$ için açıkça $x_{n+2} = x_n$ olduğu görülür. Şimdi, varsayalım ki $x_1 = \Psi$, $x_2 = \frac{\Psi}{\Psi-1}$ olsun. (3.0.1) denkleminde açık bir biçimde görülür ki $x_{-1} \neq 1$ ve $x_0 = \frac{x_{-1}}{x_{-1}-1}$ olmalıdır. İspat tamamlanır.

Teorem 3.10: $\alpha = 1$ ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.0.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Varsayalım ki, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ en az iki yarı döngüden oluşsun. O zaman $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ (3.0.1) denkleminin 2-prime (asli) periyotlu bir çözümüne yakınsar (Amleh *et al.* 1999).

İspat: Varsayalım ki, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ en az iki yarı döngüden oluşsun. Önerme 3.5 'den biliyoruz ki, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ salınımlıdır. İlk yarı döngünün istisnası ile her yarı döngü bir uzunluğundadır. Ayrıca $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ 'nin her bir terimi $\alpha = 1$ 'den büyüktür. $n \geq 0$ için

$$x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + x_n - x_n x_{n-1}}{x_n} < x_{n-1} + x_n - x_n x_{n-1}.$$

Dolayısıyla

$$x_{n+1} - x_{n-1} < x_n(x_{n+1} - x_{n-1})$$

dır. Burada $x_n > 1$ olduğundan

$$x_{n+1} > x_{n-1}$$

bulunur. Dolayısıyla Önerme 3.6' dan aşağıdaki durumlar doğrudur.

(a) Varsayalım ki $x_{-1} < x_1$ olsun. O zaman

$$x_{-1} < x_1 < \dots < x_{2n+1} < \dots$$

$$x_0 < x_2 < \dots < x_{2n} < \dots$$

bulunur.

(b) Varsayalım ki $x_{-1} = x_1$ olsun. O zaman

$$x_{-1} = x_1 = \dots = x_{2n+1} = \dots$$

$$x_0 = x_2 = \dots = x_{2n} = \dots$$

bulunur.

(c) Varsayalım ki $x_{-1} > x_1$ olsun. O zaman

$$x_{-1} > x_1 > \dots > x_{2n+1} > \dots$$

$$x_0 > x_2 > \dots > x_{2n} > \dots$$

bulunur. İspat Önerme 3.2 takip edilerek ispat sonlanır.

3.4 (3.0.1) Denkleminin Global Asimptotik Kararlılığı

Önerme 3.11: Aşağıdaki durumlar doğrudur.

- i. Eğer $\alpha > 1$ ise, (3.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- ii. Eğer $0 \leq \alpha < 1$ ise, (3.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası kararlı değildir (Aslında o bir eyer noktası olur) (Amleh *et al.* 1999).

İspat:

- i. Lineer kararlılık teoremi ve (3.0.2)'den

$$\left| \frac{-1}{\alpha + 1} \right| < 1 - \frac{1}{\alpha + 1} < 2$$

şartının sağlanması durumunda (3.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır diyebiliriz. $\alpha \in [0, \infty)$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik

$$\frac{1}{\alpha + 1} < \frac{\alpha}{\alpha + 1} < 2$$

olarak yazılabilir. Bu eşitsizliğin

$$\alpha > 1$$

olduğunda sağlandığı açıktır. O halde $\alpha > 1$ için, (3.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası lokal asimptotik kararlı olur.

- ii. Kararlı olmayan noktaya kararsızdır denir. Dolayısıyla $0 \leq \alpha < 1$ için (3.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktasının kararlı olmadığı i'den açık bir biçimde görülmektedir.

Teorem 3.12: $\alpha > 1$ olsun. O zaman (3.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır (Amleh *et al.* 1999).

İspat : Önerme 3.11' den (3.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğunu biliyoruz. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.0.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. O halde x_n çözümlerinin (3.0.1) denkleminin bir global çekicisi olduğunu, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = \alpha + 1$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $x, y \in (0, \infty)$ için $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$

$$f(x, y) = \alpha + \frac{y}{x}$$

şeklinde tanımlı sürekli f sürekli fonksiyonunu düşünelim. f , her bir $y \in (0, \infty)$ için, $x \in (0, \infty)$ içinde azalan ve f , her bir $x \in (0, \infty)$ için, $y \in (0, \infty)$ içinde artandır. Önerme 3.9 ile (3.0.1) denkleminin 2-periyodu ile periyodik hiçbir çözümü yoktur. $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$a = \alpha \text{ ve } b = \frac{\alpha^2 + \varepsilon}{\alpha - 1}$$

alalım. Burada,

$$f\left(\frac{\alpha^2 + \varepsilon}{\alpha - 1}, \alpha\right) = \alpha + \alpha\left(\frac{\alpha^2 + \varepsilon}{\alpha - 1}\right) > \alpha$$

ve

$$f\left(\alpha, \frac{\alpha^2 + \varepsilon}{\alpha - 1}\right) = \alpha + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2 + \varepsilon}{\alpha - 1}\right) = \frac{\alpha^3 + \varepsilon}{\alpha^2 - \alpha} < \frac{\alpha^3 + \alpha\varepsilon}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha^2 + \varepsilon}{\alpha - 1}.$$

Dolayısıyla

$$\alpha < f(x, y) < \frac{\alpha^2 + \varepsilon}{\alpha - 1} \quad \forall x, y \in \left[\alpha, \frac{\alpha^2 + \varepsilon}{\alpha - 1}\right].$$

Önerme 3.7 ile

$$\alpha < \alpha + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \frac{\alpha^2}{\alpha - 1} < \frac{\alpha^2 + \varepsilon}{\alpha - 1}.$$

Bu yüzden Teorem 3.3 ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = \alpha + 1$$

dir. İspat tamamlanır.

Son olarak, son zamanlarda (3.0.1) denkleminin yarı döngü analizi ile ilgili elde edilen yeni bir sonucu vereceğiz. Bu teoremden çözümlerin sınırlılığı, kararlılığı ve periyodikliği kompakt bir şekilde kullanıldığından bu teoremi en son olarak vermeyi uygun bulduk. Öcalan (3.0.1) denkleminin yarı döngü analizinde çok önemli bir sonuç elde etti. Şimdi bu teoremi aşağıda ele alalım.

Teorem 3.13: Varsayalım ki $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.0.1) denkleminin pozitif bir çözümü

olsun. O halde $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$, hiçbir zaman aşikar olmayan tek yarı döngüden oluşmaz (Öcalan 2012).

İspat: İspatı üç durumda düşünmek yeterli olacaktır.

Durum 1: $\alpha > 1$ olsun. Bu durumda Teorem 3.12'den biliyoruz ki (3.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = \alpha + 1$ olmalıdır. Buradan diyebiliriz ki en az bir $m \in \mathbb{N}$ vardır, öyle ki, eğer $x_{2m-1} > x_{2m+1} > \alpha + 1$ (diğer olasılıklar benzerdir ve ihmal edilebilir) ise, o zaman

$$x_{2m} = \frac{x_{2m-1}}{x_{2m+1} - \alpha}. \quad (3.0.4)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = \alpha + 1$ olduğundan, ε keyfi pozitif bir sayı olmak üzere $x_{2m-1} = \alpha + 1 + 2\varepsilon$ ve $x_{2m+1} = \alpha + 1 + \varepsilon$ olarak seçebiliriz. O zaman (3.0.4)'den $x_{2m} < \alpha + 1$ elde ederiz. Dolayısıyla Önerme 3.5'den $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$, salımlıdır ve her yarı döngü bir uzunluğundadır. Sonuç olarak, $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$ tek bir yarı döngüden oluşmaz.

Durum 2: $\alpha < 1$ olsun. Teorem 3.8'dan biliyoruz ki bu durumda (3.0.1) sınırsız çözümlere sahiptir. Varsayalım ki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \alpha$ olsun ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \alpha$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \infty$ olma durumu benzerdir). Dolayısıyla açık şekilde görülür ki $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$ tek bir yarı döngüden oluşmaz. Varsayalım ki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \infty$ olsun. O zaman Önerme 3.4 ile çelişki bulmuş oluruz.

Son olarak $\alpha < 1$ ve $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$, sınırlı bir çözüm olsun. Eğer $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$, aşikar olmayan tek bir yarı döngüden oluşuyorsa, Önerme 3.4 ile diyebiliriz ki, $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$, $\bar{x}$ 'a yakınsar. Ancak bu durumda (3.0.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır. Bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$ tek bir yarı döngüye sahip değildir.

Durum 3: $\alpha = 1$ olsun. O zaman Önerme 3.10'den biliyoruz ki (3.0.1) denkleminin her çözümü iki periyodik bir çözüme yakınsar. O halde ispatı iki alt durum için inceleyelim.

(a) Varsayalım ki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = L > 2$ olsun. O zaman Önerme 3.2'den $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \frac{L}{L-\alpha} < 2$. Dolayısıyla $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$, tek bir yarı döngüden oluş-

maz.

(b) Varsayalım ki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ olsun. Bu durumda, Durum 1'e tekrar geri döneriz ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, salınımlı olduğu ve her yarı dögütün bir uzunluğunda olduğu elde edilir.

Sonuç olarak (3.0.1) denkleminin herhangi pozitif bir çözümü olan $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ hiçbir zaman tek bir yarı dögüden oluşmaz.

Dahası

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.0.5)$$

denkleminin 2'ye yakınsayan hiçbir pozitif çözüme sahip olmadığını söyleyebiliriz. Çünkü, Teorem 3.10'den biliyoruz ki, eğer $\{x_{2n}\}_{n=-1}^{\infty}$ artan ise, o zaman $\{x_{2n+1}\}_{n=-1}^{\infty}$ 'de artandır. Eğer $\{x_{2n}\}_{n=-1}^{\infty}$ azalan ise, o zaman $\{x_{2n+1}\}_{n=-1}^{\infty}$ 'de azalandır.

Dolayısıyla yukarıdaki fark denkleminin pozitif çözümü olan $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ hiçbir zaman 2'ye yakınsamaz.

4. $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^p}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DİNAMIĞI

Bu bölümde $\alpha \in [0, \infty)$, $p \in (0, \infty)$ ve x_{-1} , x_0 başlangıç koşulları keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^p} \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.0.1)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliği, sınırlılığı, yarı döngü analizi ve global kararlılığı çalışılacaktır.

Açık bir şekilde görülür ki, (4.0.1) denkleminin tek denge noktası $\bar{x} = \alpha + 1$ dir. Biz göstereceğiz ki, (4.0.1) denkleminin bütün pozitif çözümlerinin sınırlı olabilmesi için gerek ve yeter şart durumu $p \in (0, 1)$ olmasıdır. Eğer $p \in (\frac{\alpha+1}{2}, 1)$ ise, o zaman (4.0.1) denkleminin her pozitif çözümü 2-periyodik çözümlere yakınsar. $p \leq \min\{1, \frac{\alpha+1}{2}\}$ ise, o zaman (4.0.1) denkleminin bütün çözümleri $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktasına yakınsar. $p < \frac{\alpha+1}{2}$ olduğunda, (4.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası kararlıdır. $p > 1$ ise, (4.0.1) denkleminin sınırsız çözümleri mevcuttur.

(4.0.1) denkleminin ilişkin lineer denklem,

$$(\alpha + 1)z_n + pz_{n-1} - pz_{n-2} = 0 \quad (4.0.2)$$

dir. (4.0.2) denkleminin karakteristik denklemi:

$$\lambda^2 + \frac{p}{(\alpha + 1)}\lambda - \frac{p}{(\alpha + 1)} = 0 \quad (4.0.3)$$

dir.

Bolzano Weierstrass Teoremi: $\mathbb{R}$ 'de sınırlı her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Önerme 4.1: (4.0.7) denklemini pozitif başlangıç koşulları $x_{-k}, \dots, x_0$, $\alpha \in [0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, f negatif olmayan fonksiyon, $[0, \infty)$ aralığında kuvvetli biçimde artan ve $f(1) = 1$ olmak üzere ele alalım. Bu koşullar altında (4.0.7) denklemi k -periyodlu aşıkart olmayan periyodik çözüme sahip değildir (asli periyot olması şart değil) (Stević 2005).

Teorem 4.2:

$$x_{n+1} = \alpha + f\left(\frac{x_{n-k}}{x_n}\right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.0.4)$$

pozitif başlangıç koşulları $x_{-k}, \dots, x_0, \alpha \in [0, \infty), k \in \mathbb{N}$ ve f negatif olmayan bir fonksiyon, $[0, \infty)$ aralığında kuvvetli şekilde artan ve $f(1) = 1$ koşulunu sağlayan fark denklemini düşünelim. $\{x_n\}_{n=-k}^\infty$, (4.0.4) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. O zaman $(x_n), \bar{x} = \alpha + 1$ 'e yakınsar (Stević 2005).

İspat: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq \alpha + 1$ olduğunu kabul edebiliriz. $x_n < \alpha + 1, \forall n \in \mathbb{N}$ durumu benzerdir ve ihmal edilebilir. $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}$ veya p pozitif bir sayı olmak üzere $x_{n+1} = \alpha + \left(\frac{x_{n-k}}{x_n}\right)^p$ şeklindeki denklemler için

$$x_{n+1} = \alpha + f\left(\frac{x_{n-k}}{x_n}\right) \geq \alpha + 1$$

durumuna sahibiz. Çünkü f artandır.

$$\alpha + 1 \leq x_n \leq x_{n-k}, n = 1, 2, \dots \quad (4.0.5)$$

olduğundan $\{x_n\}_{n=-k}^\infty$, sınırlıdır. Dolayısıyla Bolzano Weierstrass Teoreminden sonlu $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{mk+i} = pi, i = 1, 2, \dots, k$ vardır ve $p_1, p_2, \dots, p_k$ (4.0.4) denkleminin k - periyodlu periyodik bir çözümüdür. Önerme 4.1 ile $p_1 = p_2 = \dots = p_k$ olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3: $\alpha = 1$ olsun ve $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$, (4.0.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$ tek bir yarı döngüden oluşmuş ise, o zaman $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$ monoton olarak $\bar{x} = 2$ 'e yakınsar (El-Owaidy *et al.* 2003).

Önerme 4.4: $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$, (4.0.1) denkleminin bir çözümü olsun. O zaman $\{x_{2n}\}$ ve $\{x_{2n+1}\}$ eninde sonunda monotondur (Berenhaut and Stević 2006).

İspat: $z_n = x_n - \alpha$ dönüşümü yardımı ile oluşan $\{z_i\}$ dizisini düşünmek yeterli olacaktır.

$\{x_n\}_{n=-1}^\infty$, (4.0.1) denkleminin bir çözümü olsun.

$$r_n = \begin{cases} 1, & \frac{z_n}{z_{n-2}} \geq 1 \\ 0, & d.h. \end{cases} \quad (4.0.6)$$

$\{r_{2i}\}, \{r_{2i+1}\}$ 'in sabit olduğunu göstermek yeterlidir.

$h(x) = (x + \alpha)^p$ fonksiyonunu düşünelim. h artandır ve aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{z_n}{z_{n-2}} = \frac{h(z_{n-2})h(z_{n-3})}{h(z_{n-1})h(z_{n-4})} = \frac{h(z_{n-2})h(z_{n-3})}{h(z_{n-4})h(z_{n-1})} \quad (4.0.7)$$

Eğer $r_{n-2} = 1$ ve $r_{n-1} = 0$ ise (4.0.6) ile ve h 'nin monotonluğu ile $\frac{z_n}{z_{n-2}} \geq 1$ olur ve dolayısıyla $r_n = 1$ olur. Benzer şekilde eğer $r_{n-2} = 0$ ve $r_{n-1} = 1$ ise, o zaman $r_n = 0$ olur. Dolayısıyla $r_{n_0} \neq r_{n_0+1}$, $n_0 \geq 0$ olduğundan $\{r_{n_0+2i}\}$ ve $\{r_{n_0+2i+1}\}$ arzu edildiği gibi ikiside sabit olur. Bu da teorem içindeki ifadeyi tasdik eder. Aksi takdirde $\{r_i\}, i \geq 0$ kendisi sabit bir dizidir ve sonuç tekrar sağlanır. İspat tamamlanır.

4.1 (4.0.1) Denklemi için Yarı Döngü Analizi

Teorem 4.5: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (4.0.1) denkleminin bir tek yarı döngüden oluşan pozitif bir çözümü olsun. O zaman $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ monoton olarak $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktasına yakınsar (El-Owaidy *et al.* 2003).

İspat: Varsayalım ki, $0 < x_{n-1} < \alpha + 1$, $n \geq 0$ 'lar için olsun. $x_{n-1} \geq \alpha + 1$, $n \geq 0$ 'lar için olma durumu da benzerdir ve ihmal edilebilir.

$$0 < \alpha + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^p} = x_{n+1} < \alpha + 1 \quad n = 0, 1, \dots,$$

ve böylece

$$0 < x_{n-1} < x_n < \alpha + 1$$

olur. Buradan $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, sınırlı ve monoton olduğu görülür. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 4.6: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (4.0.1) denkleminin en az iki yarı döngüden oluşan pozitif bir çözümü olsun. O zaman $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ salınımlıdır. Dahası, ilk yarı döngünün olası istisnası ile, her yarı döngü bir uzunluğundadır ve ilk iki yarı döngünün olası istisnası $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ 'in hiçbir terim $\alpha + 1$ e eşit değildir (El-Owaidy *et al.* 2003).

İspat: Aşağıdaki iki durumu düşünmek ispat için yetecektir.

i. Varsayalım ki, $x_{N-1} < \alpha + 1 \leq x_N$, bazı $N \geq 0$ 'lar için olsun. O zaman

$$x_{N+1} = \alpha + \frac{x_{N-1}^p}{x_N^p} < \alpha + 1 \text{ ve } x_{N+2} = \alpha + \frac{x_N^p}{x_{N+1}^p} > \alpha + 1.$$

Böylece,

$$x_{N+1} < \alpha + 1 < x_{N+2}.$$

ii. Varsayalım ki, $x_N < \alpha + 1 \leq x_{N-1}$, bazı $N \geq 0$ 'lar için olsun. O zaman

$$x_{N+1} = \alpha + \frac{x_{N-1}^p}{x_N^p} > \alpha + 1 \text{ ve } x_{N+2} = \alpha + \frac{x_N^p}{x_{N+1}^p} < \alpha + 1.$$

Böylece,

$$x_{N+2} < \alpha + 1 < x_{N+1}.$$

İspat tamamlanır.

Sonuç 4.7: (4.0.4) denklemin $k = 1$, x_0 ve x_{-1} pozitif başlangıç koşulları, $\alpha \in [0, \infty)$ ve f fonksiyonu negatif olmayan, $[0, \infty)$ aralığında kuvvetli şekilde artan ve $f(1) = 1$ durumlarına sahip olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$, tek yarı döngüden oluşan bir çözümü olsun. O zaman $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$ monoton olarak $\bar{x} = \alpha + 1$ 'e yakınsar (Stević 2005).

İspat: Teorem 4.2'nin direkt bir sonucudur ve (4.0.5) eşitsizliğinde $k = 1$ alınır.

4.2 (4.0.1) Denkleminin Sınırlılık Karakteri

Teorem 4.8: (4.0.1) denklemini için $p \in (0, 1)$ ise, o zaman (4.0.1) denkleminin her pozitif çözümleri sınırlıdır (Stević 2005).

İspat: Teorem 4.2'den dolayı, (4.0.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün salınımlı olduğunu varsayalım. Çünkü (4.0.1) denkleminin salınımlı olmayan her çözümü yakınsaktır. Teorem 4.6 ile çözüm, birinci yarı döngünün olası istisnası ile bir uzunluğunda yarı döngülere sahiptir. Dolayısıyla

$$x_{2n} \in (\alpha, \alpha + 1] \text{ ve } x_{2n+1} \geq \alpha + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

olduğunu varsayalım.

$$x_{2n+1} \in (\alpha, \alpha + 1] \text{ ve } x_{2n} \geq \alpha + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

olma durumu benzerdir ve ispatı ihmal edilebilir.

$$x_{2n+1} = \alpha + \frac{x_{2n}^p}{x_{2n}^p} \leq \alpha + \frac{x_{2n-1}^p}{\alpha^p}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.2.1)$$

$$\{y_n\}_{n=-1}^{\infty},$$

$$y_{n+1} = \alpha + \frac{y_n^p}{\alpha^p}, \quad y_1 = x_1$$

fark denkleminin bir çözümü olsun. (4.2.1)'den tümevarımla

$$x_{2n-1} \leq y_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, $\{y_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinin sınırlı olduğunu göstermek kafidir.

$$f(x) = \alpha + \frac{x^p}{\alpha^p}, \quad x \in (0, \infty)$$

fonksiyonu $p \in (0, 1)$ için artan ve konkav olduğundan,

$$(f(x) - x)(x - \bar{x}) < 0, \quad x \in (0, \infty)$$

koşulunu sağlayan f vardır ve $f(x) = x$ 'i sağlayan denkleminin $\bar{x}$ biricik sabit noktası vardır.

Buradan şunu görmek kolaydır ki, eğer $y_1 \in (0, \bar{x})$ ise, dizi azalmayan ve $\bar{x}$

üstten sınırlıdır. Eğer $y_1 \geq \bar{x}$ ise, dizi azalmayandır ve $\bar{x}$ alttan sınırlıdır. Dolayısıyla $\forall y_1 \in (0, \infty)$ için dizi sınırlıdır. İspat tamamlanır.

Teorem 4.9: $0 \leq \alpha < 1$ olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (4.0.1) denkleminin bir çözümü öyle ki başlangıç koşulları

$$0 < x_{-1} \leq 1 \text{ ve } x_0 \geq \frac{1}{(1-\alpha)^{1/p}}$$

olsun. O zaman aşağıdaki durumlar doğrudur.

i. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \infty$.

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \alpha$ (El-Owaidy *et al.* 2003).

İspat: $0 \leq \alpha < 1$ olduğundan

$$\alpha + 1 \leq \frac{1}{(1-\alpha)}$$

dır. Dolayısıyla

$$\alpha + 1 \leq x_0^p$$

olur.

$$x_1 = \alpha + \frac{x_{-1}^p}{x_0^p} \leq \alpha + \frac{1}{x_0^p} \leq \alpha + \frac{1}{\frac{1}{(1-\alpha)}} \leq 1$$

ve

$$x_1 = \alpha + \frac{x_{-1}^p}{x_0^p} > \alpha.$$

Böylece

$$x_1 \in (\alpha, 1]$$

olur. Benzer şekilde

$$x_2 = \alpha + \frac{x_0^p}{x_1^p} \geq \alpha + x_0^p.$$

$$x_3 = \alpha + \frac{x_1^p}{x_2^p} \leq \alpha + \frac{1}{(\alpha + x_0^p)^p} \leq \alpha + \frac{1}{\alpha + x_0^p} \leq \alpha + \frac{1}{x_0^p} \leq \alpha + \frac{1}{\frac{1}{(1-\alpha)}} \leq 1.$$

Böylece

$$x_3 \in (\alpha, 1].$$

Ayrıca

$$x_4 = \alpha + \frac{x_2^p}{x_3^p} \geq \alpha + x_2^p \geq \alpha + (\alpha + x_0^p)^p \geq \alpha + (\alpha + x_0^p) \geq 2\alpha + x_0^p.$$

Böylece

$$x_4 \geq 2\alpha + x_0^p$$

olduğu görülür. Tümevarımla

$$x_{2n} \geq n\alpha + x_0^p$$

ve

$$\alpha < x_{2n+1} < 1 \quad n = 0, 1, \dots, .$$

Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \infty$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n-1}^p}{x_{2n}^p} = 0.$$

Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \alpha + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n-1}^p}{x_{2n}^p} = \alpha.$$

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.10: (4.0.1) denkleminde $p \geq 1$ ve $\alpha = 0$ olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$, (4.0.1) denkleminin bir çözümü olsun öyleki $0 < x - 1 \leq 1$ ve $x_0 \geq \frac{1}{1-\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0, 1)$ dır.

O zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = 0$$

dır (Stević 2005).

İspat:

$$0 < x_1 = \frac{x_{-1}^p}{x_0^p} \leq \frac{1}{x_0^p} \leq 1$$

ve böylelikle $x_1 \in (0, 1]$ dır.

Dahası

$$x_2 = \frac{x_0^p}{x_1^p} \geq x_0^p$$

ve

$$0 < x_3 = \frac{x_1^p}{x_2^p} \leq \frac{1}{x_2^p} \leq \frac{1}{[x_0^p]^2} \leq \frac{1}{x_0^p} \leq 1$$

Dolayısıyla $x_3 \in (0, 1]$ dır. Aynı zamanda

$$x_4 = \frac{x_2^p}{x_3^p} \geq x_2^p \geq [x_0^p]^p = [x_0^p]^2$$

dır.

Tümevarımla, şu elde edilir.

$$x_{2n} \geq x_0^{p^n} \text{ ve } 0 < x_{2n+1} \leq 1.$$

$x_0 \geq 1/1 - \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, 1)$ olduğu için, aşağıdaki durum elde edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = 0.$$

Sonuç 4.11: Not edelim ki $\alpha = 0$ olduğunda, pozitif başlangıç koşulları ile (4.0.1) denklemi $y_n = \ln x_n$ değişikliği ile çözülebilir. Ashında, bu durumda (4.0.1) denklemi

$$y_{n+1} + py_n - py_{n-1} = 0 \quad n = 0, 1, \dots,$$

ikinci mertebeden lineer fark denklemine dönüşür. Bu denklemin genel çözümleri

$$y_n = \frac{\lambda_2 y_0 - y_{-1}}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1^n + \frac{y_1 - \lambda_1 y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_2^n - \lambda_2^n,$$

burada

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4p}}{2}$$

dir. (4.0.1) denkleminin bir çözümü sınırsızdır $\Leftrightarrow x_{-1}^p \neq x_0^{-\lambda_2}$ (Stević 2005).

Teorem 4.12: (4.0.1) denklemini ele alalım. Eğer

$$p > 1$$

ise, o zaman denklemin sınırsız çözümleri mevcuttur (Berenhaut and Stević 2006).

İspat: $z_n = x_n - \alpha$ değişken değişimi (4.0.1) denklemine uygulanırsa

$$z_n = \left(\frac{\alpha + z_{n-2}}{\alpha + z_{n-1}} \right)^p \quad (4.1.2)$$

haline dönüşür.

(4.1.2) denkleminin sınırsız çözümlere sahip olduğunu ispatlayacağız ki bu durumda (4.0.1) denkleminin sınırsız çözümlere sahip olduğunu gerçeklenir.

$\varepsilon \in (0, 1)$ yeterince küçük bir sayı olsun ve aşağıdaki eşitlikleri sağlasın.

$$\left(\frac{\alpha + \frac{1}{\varepsilon}}{\alpha + \varepsilon}\right)^{p-1} \frac{1}{\alpha + \varepsilon} > 1 \quad (4.1.3)$$

$$\left(\frac{\alpha + \varepsilon}{1 + \frac{1}{\varepsilon}}\right)^p < \varepsilon \quad (4.1.4)$$

$p > 1$ olduğundan böyle bir ε sayısının varlığını göstermek zor değildir.

Burada başlangıç koşullarını da $z_{-2} > \frac{1}{\varepsilon}$ ve $z_{-1} \in (0, \varepsilon)$ alalım.

$$\begin{aligned} z_0 &= \left(\frac{\alpha + z_{-2}}{\alpha + z_{-1}}\right)^p = \left(\frac{\alpha + z_{-2}}{\alpha + z_{-1}}\right)^{p-1} \left(\frac{\alpha + z_{-2}}{\alpha + z_{-1}}\right) \\ &> \left(\frac{\alpha + \frac{1}{\varepsilon}}{\alpha + \varepsilon}\right)^{p-1} \left(\frac{\alpha + z_{-2}}{\alpha + \varepsilon}\right) > \left(\frac{\alpha + \frac{1}{\varepsilon}}{\alpha + \varepsilon}\right)^{p-1} \frac{1}{\alpha + \varepsilon} z_{-2} > \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

(4.1.4) denklemi kullanılarak söylenebilir ki,

$$z_1 = \left(\frac{\alpha + z_{-1}}{\alpha + z_0}\right)^p < \left(\frac{\alpha + \varepsilon}{\alpha + \frac{1}{\varepsilon}}\right)^p < \varepsilon \quad (4.1.6)$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \left(\frac{\alpha + z_0}{\alpha + z_1}\right)^p > \left(\frac{\alpha + z_0}{\alpha + z_1}\right)^{p-1} \left(\frac{\alpha + z_0}{\alpha + \varepsilon}\right)^p \\ &> \left(\frac{\alpha + \frac{1}{\varepsilon}}{\alpha + \varepsilon}\right)^{p-1} \frac{1}{\alpha + \varepsilon} z_0 > \left[\left(\frac{\alpha + \frac{1}{\varepsilon}}{\alpha + \varepsilon}\right)^{p-1} \frac{1}{\alpha + \varepsilon}\right]^2 z_{-2} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Dolayısıyla tümearımla

$$z_{2l} > \left[\left(\frac{\alpha + \frac{1}{\varepsilon}}{\alpha + \varepsilon}\right)^{p-1} \frac{1}{\alpha + \varepsilon}\right]^{l+1} z_{-2} \text{ ve } z_i < \varepsilon, i \text{ tek} \quad (4.1.8)$$

(4.1.8)' de $l \rightarrow \infty$ için ve (4.1.3)' den $\lim_{l \rightarrow \infty} z_{2l} = \infty$ elde edilir. İspat tamamlanır.

Sonuç 4.13: Şunu not edelim ki Teorem 4.13'ün koşulları aşağıdaki koşulları sağlar.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_{2i} = \infty \text{ ve } \lim_{i \rightarrow \infty} y_{2i+1} = \alpha.$$

(Berenhaut and Stević 2006).

4.3 (4.0.1) Denkleminin Periyodiklik Doğası

Önerme 4.14: $\alpha, p \in (0, \infty)$ ve $p \neq 1$ olsun. O halde (4.0.1) denklemi iki prime (asli) periyodlu çözüme sahiptir gerek ve yeter şart $1 < p < \frac{\alpha+1}{2}$ veya $\frac{\alpha+1}{2} < p < 1$ olmasıdır (Berenhaut and Stević 2006).

İspat: (4.0.1) denklemi 2 prime (asli) periyodlu çözüme sahipse, çözümler

$$x, y, x, y, \dots, x, y, \dots$$

şeklindedir ve

$$x = \alpha + \left(\frac{x}{y}\right)^p \text{ ve } y = \alpha + \left(\frac{y}{x}\right)^p \quad (4.2.1)$$

sağlanır. Buradan,

$$y = \alpha + \frac{1}{x - \alpha} \text{ ve } x, y > \alpha \quad (4.2.2)$$

dır. Dolayısıyla

$$x = \alpha + \left(\frac{x}{\alpha + \frac{1}{x - \alpha}}\right)^p \quad (4.2.3)$$

olur. Bu denklem düzenlenirse

$$(x - \alpha)^{1-p} = \left(\frac{x}{\alpha(x - \alpha + 1)}\right)^p$$

elde edilir. Buradan $p \in (0, 1)$ için

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{(x - \alpha)^{1-p}}{\frac{x^p}{(\alpha(x - \alpha + 1))^p}} = 0$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \alpha)^{1-p}}{\frac{x^p}{(\alpha(x - \alpha + 1))^p}} = \infty$$

olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla f fonksiyonunun sürekliliğinden

$$f(x) = \frac{(x - \alpha)^{1-p}}{\frac{x^p}{(\alpha(x - \alpha + 1))^p}}$$

dir. Dolayısıyla, (4.2.3) denklemi (α, ∞) aralığında bir tek çözüme sahiptir.

$\bar{x} = \alpha + 1$ aşikar bir çözüm olduğundan, iki prime (asli) periyodlu çözümler için bazı koşullar altında (4.2.3) denkleminin birden daha çok çözümü olmasını gerektirir. (4.2.3) denklemi

$$F(x) = (1 - p) \ln(x - \alpha) - p \ln x + p \ln(\alpha x + 1 - \alpha^2) = 0 \quad (4.2.4)$$

denklemine eşittir.

İlk olarak $p \in (0, 1)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$F(\alpha + 0) = -\infty, F(\bar{x}) = 0 \quad (4.2.5)$$

ve

$$F'(\bar{x}) = \frac{\alpha + 1 - 2p}{\alpha + 1} \quad (4.2.6)$$

dır. Dolayısıyla

$$F'(\bar{x}) < 0 \iff p > \frac{\alpha + 1}{2} \text{ ve } p < 1 \quad (4.2.7)$$

dır.

(4.2.5) ve (4.2.7) denklemlerinden $F, (\alpha, \alpha + 1)$ aralığında bir x_0 sıfırına sahiptir ve $y_0 = \alpha + \frac{1}{\alpha - x_0} > \alpha$ dır. Bu durum (4.0.1) denkleminin 2 prime (asli) periyodlu çözüme sahip olmasını garantiler. Burada not edelim ki $p \in (0, \frac{1}{2})$ ve $\alpha \in (0, 1)$ için $F'(x) > 0, x > \alpha$ için (4.2.3) denkleminin bir tek $\bar{x} = \alpha + 1$ çözümüne sahip olduğunu gösterir,

Şimdi $F'(x)$ 'in payını düşünersek

$$g(x) = (1 - p)\alpha x^2 + (1 - 2p)(1 - \alpha^2)x + p\alpha(2 - \alpha^2) \quad (4.2.8)$$

(4.2.8) denkleminin diskriminantı

$$\Delta = (1 - \alpha^2)[(2p - 1)^2 - \alpha^2] \quad (4.2.9)$$

dır. $F'(x)$ 'in kökleri

$$x_{1,2} = \frac{(2p - 1)(1 - \alpha^2) \pm \sqrt{(1 - \alpha^2)[(2p - 1)^2 - \alpha^2]}}{2(1 - p)\alpha} \quad (4.2.10)$$

olur. Δ değeri için, α 'yı düşünersek, eğer $\alpha \in (0, 1]$ ve $\frac{1}{2} < p \leq \frac{\alpha+1}{2}$ ise, o zaman $F'(x) \geq 0$ olur, $x > \alpha$ (sadece $p = \frac{\alpha+1}{2}$ olduğunda, $x_1 = x_2 = \frac{\alpha+1}{2}$ olur).

Dolayısıyla yine $\bar{x} = \alpha + 1$ tek çözümdür.

Şimdi $p > 1$ ve $\alpha > 1$ durumunu düşünelim. $g(x)$ fonksiyonunun maksimumu

$$M = g\left(\frac{(2p - 1)(1 - \alpha^2)}{2(1 - p)\alpha}\right) = \frac{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - (2p - 1)^2)}{4\alpha(p - 1)} \quad (4.2.11)$$

dır. Bu durumda eğer $p \geq \frac{\alpha+1}{2}$ ise o zaman M negatif sayı ve $F'(x) < 0$, $x > \alpha$ olur. Dolayısıyla $\bar{x} = \alpha + 1$ tek çözüm olur.

Varsayalım ki $p < \frac{\alpha+1}{2}$ olsun. O zaman

$$F(\alpha + 0) = \infty, F(\bar{x}) = 0 \text{ ve } F'(\bar{x}) = \frac{\alpha + 1 - 2p}{\alpha + 1} > 0$$

elde ederiz. O halde $(\alpha, \alpha + 1)$ aralığında bir x_0 vardır öyleki $F(x_0) = 0$ dır.

Dolayısıyla (4.0.1) denkleminin 2 periyodlu çözümü vardır. İspat tamamlanır.

Sonuç 4.15: Biz iddia ediyoruz ki, eğer $1 < p < \frac{\alpha+1}{2}$ ise, o zaman Önerme 4.14 doğru değildir. Çünkü, eğer $p > 1$ ise, o zaman biliyoruz ki (4.0.1) denkleminin bir $\{x_n\}$ sınırlı çözümünü ele alalım. $p < \frac{\alpha+1}{2}$ olduğundan (4.0.1) denkleminin lokal asimptotik kararlıdır. Yani, $\{x_n\}$ sınırlı ve lokal kararlıdır, dolayısıyla kararsız değildir. Sonuç olarak $\{x_n\}$ iki periyodik çözüm olamaz.

Daha açık olarak, eğer (4.0.1) denkleminin iki periyodik çözüme sahipse, o zaman denklemin denge noktası kararsız olmalıdır. Bu yüzden, periyodik çözüm denge noktasının kararsız olduğu yerde aranmalıdır. Yani, (4.0.1) denkleminde $\frac{\alpha+1}{2} < p$ durumunda periyodik çözümün varlığı incelenmelidir. Önerme 4.14'ün ispatından kolayca görülür ki denklemin $1 < p < \frac{\alpha+1}{2}$ durumunda aşık ol-
mayan iki periyodik çözümü yoktur (Öcalan *et al.* 2012).

Teorem 4.16: Kabul edelim ki $p, \alpha \in (0, \infty)$ ve $p \neq 1$ olsun. O zaman, aşağıdaki durumlar doğrudur.

(a) $p \leq \min\{\frac{\alpha+1}{2}, 1\}$ bütün çözümler $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktasına yakınsar.

(b) $\frac{\alpha+1}{2} < p < 1$ (4.0.1) denkleminin bütün çözümleri 2- periyodlu bir çözüme yakınsar ve (4.0.1) denkleminin 2- periyodlu çözümü mevcuttur (Berenhaut and Stević 2006).

İspat: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (4.0.1) denkleminin bir çözümü olsun. Önerme 4.4 ve Teorem 4.8' den $\{x_{2n}\}$ ve $\{x_{2n-1}\}$ dizileri sınırlı ve monotondur. Dolayısıyla yakınsaktır. Buradan (4.0.1) denkleminin her çözümü iki periyodik bir çözüme yakınsar. Diğer taraftan Önerme 4.14'den (4.0.1) denkleminin $\frac{\alpha+1}{2} < p < 1$ durumunda iki periyodik çözüme sahiptir. Bunu (4.0.1) denkleminin her çözümü iki periyodik bir çözüme yakınsar. Diğer durumda ise (4.0.1) denkleminin her

çözümü $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktasına yakınsar.

4.4 (4.0.1) Denkleminin Global Asimptotik Kararlılığı

Teorem 4.17: Aşağıdaki durumlar doğrudur.

- i. Eğer $\alpha > 2p - 1$ ise, (4.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- ii. Eğer $0 \leq \alpha \leq 2p - 1$ ise, (1.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası kararlı değildir (El-Owaidy *et al.* 2003).

İspat:

- i. (4.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş denklemi

$$y_{n+1} + \frac{p}{\alpha + 1}y_n - \frac{p}{\alpha + 1}y_{n-1} = 0 \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.3.1)$$

Lineer kararlılık teoremini kullanarak

$$\left| \frac{-p}{\alpha + 1} \right| < 1 - \frac{p}{\alpha + 1} < 2,$$

$$\frac{|-p|}{|\alpha + 1|} < \frac{\alpha + 1 - p}{\alpha + 1} < 2,$$

$\alpha \in (0, \infty)$ ve $p \in [1, \infty)$ olduğundan,

$$\frac{p}{\alpha + 1} < \frac{\alpha + 1 - p}{\alpha + 1}$$

ve dolayısıyla buradan

$$2p - 1 < \alpha$$

olduğunda (4.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. İspat tamamlanır. İspatı Teorem 2.10'dan da gösterebilirdik. Şöyle ki, (4.0.3) denklemin kökleri;

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4p(\alpha + 1)}}{2(\alpha + 1)} \text{ ve } \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4p(\alpha + 1)}}{2(\alpha + 1)}. \quad (4.3.2)$$

Buradan kolayca görülür ki,

$$|\lambda_1| = \frac{2p}{p + \sqrt{p^2 + 4p(\alpha + 1)}} < 1, \quad \forall p, \alpha \in (0, \infty) \quad (4.3.3)$$

ve birkaç basit hesaplama ile

$$|\lambda_2| < 1 \iff 2p < \alpha + 1. \quad (4.3.4)$$

Doayısıyla Teorem 2.10'dan, (4.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

ii. Kararlı olmayan noktaya kararsızdır denir. Dolayısıyla $0 \leq \alpha \leq 2p - 1$ için (4.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktasının kararlı olmadığı i'den açık bir biçimde görülmektedir.

Sonuç 4.18: (4.0.1) denklemini için $p \in (0, 1)$ ve $\alpha \geq 1$ olsun. O zaman (4.0.1) denkleminin her pozitif çözümü $\bar{x}$ 'e yakınsar (Stević 2005).

İspat: Teorem 4.8'den (4.0.1) denkleminin her $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü sınırlıdır. O halde

$$\liminf x_n = l \text{ ve } \limsup x_n = L$$

sonlu limitleri mevcuttur. $l < L$ olduğunu varsayalım. O halde aşağıdaki durumlar sağlanır:

$$\alpha + \frac{l^p}{L^p} \leq l \text{ ve } L \leq \alpha + \frac{L^p}{l^p}.$$

Buradan şu durum yazılabilir,

$$\begin{aligned} \alpha L^p + l^p &\leq L^p l < L l^p \leq \alpha l^p + L^p, \\ (\alpha - 1)L^p &< (\alpha - 1)l^p. \end{aligned}$$

$\alpha \geq 1$ olduğundan bu durum mümkün değildir. Dolayısıyla $l = L$ olmalıdır. İspat tamamlanır.

Son olarak, (4.0.1) denkleminin yarı döngü analizi ile ilgili elde ettiğimiz yeni bir sonucu vereceğiz. Bu teoremden çözümlerin sınırlılığı, kararlılığı ve periyodikliği kompakt bir şekilde kullanıldığından bu teoremi en son olarak vermeyi uygun bulduk. Şimdi bu teoremi aşağıda ele alalım.

Teorem 4.19: Varsayalım ki $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (4.0.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun ve $p \neq 1$ olsun. O halde $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, hiçbir zaman aşikar olmayan tek yarı döngüden oluşmaz (Öcalan *et al.* 2012).

İspat: İspatı iki durumda düşünmek yeterli olacaktır.

Durum 1: $p \in (0, 1)$ olsun. O zaman (4.0.1) denkleminin bütün pozitif çözümleri sınırlıdır. Aynı zamanda, eğer $p < \frac{\alpha+1}{2}$ ise, o zaman (4.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = \alpha + 1$ olmalıdır. Dolayısıyla üç durum meydana gelir.

- i. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ azalarak denge noktasına yakınsar.
- ii. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ artarak denge noktasına yakınsar.
- iii. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ salınımlı olarak denge noktasına yakınsar.

İddia ediyoruz ki (i) ve (ii) hiçbir zaman mümkün değildir. Şimdi, varsayalım ki (i) sağlansın. Yani, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ azalarak denge noktasına yakınsasın. Buradan diyebiliriz ki en az bir $m \in \mathbb{N}$ vardır, öyle ki, $x_{2m-1} > x_{2m} > x_{2m+1} > \alpha + 1$. Diğer yandan

$$x_{2m} = \frac{x_{2m-1}}{(x_{2m+1} - \alpha)^{1/p}} \quad (4.3.5)$$

dir. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = \alpha + 1$ olduğundan, ε keyfi pozitif bir sayı olmak üzere $x_{2m-1} = \alpha + 1 + 2\varepsilon$ ve $x_{2m+1} = \alpha + 1 + \varepsilon$ olarak seçebiliriz. Özel olarak $\alpha = 3$ ve $p = 1/2$ alalım. O zaman (4.3.5) ile

$$x_{2m} = \frac{4 + 2\varepsilon}{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2} = 3 + \frac{1 - 4\varepsilon - 3\varepsilon^2}{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2} < 4 \leq \alpha + 1$$

elde edilir. Dolayısıyla bu da $x_{2m} > \alpha + 1$ ile çelişir. Dolayısıyla, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ azalarak denge noktasına yakınsamaz. Teorem 4.6 ile $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ salınımlıdır ve her yarı döngü bir uzunluğundadır. Sonuç olarak, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ tek bir yarı döngüden oluşmaz. (ii)'nin ispatı da benzerdir ve ihmal edilebilir. (iii) durumunda zaten açık bir şekilde $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ 'nin tek bir yarı döngüden oluşmadığı görülmektedir. Eğer $\frac{\alpha+1}{2} < p < 1$ ise, o zaman Teorem 4.16'dan biliyoruz ki $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, iki periyodik bir çözüme yakınsar. Dolayısıyla, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ tek bir yarı döngüden oluşmaz.

Durum 2: $p > 1$ olsun. Teorem 12'den biliyoruz ki bu durumda (4.0.1) sınırsız çözümlere sahiptir. Varsayalım ki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \alpha$ olsun ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \alpha$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \infty$ olma durumu benzerdir). Dolayısıyla açık şekilde görülür ki $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ tek bir yarı döngüden oluşmaz. Varsayalım ki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \infty$ olsun. O zaman Teorem 4.5 ile çelişki bulmuş oluruz.

Son olarak $p > 1$ ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, sınırlı bir çözüm olsun. Eğer $p < \frac{\alpha+1}{2}$ ise, Teorem 4.17 ile biz biliyoruz ki (4.0.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası lokal asimptotik karardır. Dolayısıyla tek yarı döngüden oluşmaz. Eğer $p > \frac{\alpha+1}{2}$ ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ tek bir yarı döngüden oluşuyorsa, o zaman biliyoruz ki (4.0.1)

denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktası kararsızdır. Bu durum da Teorem 4.5 ile çelişki oluşturur. Sonuç olarak (4.0.1) denkleminin herhangi pozitif bir çözümü olan $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ hiçbir zaman tek bir yarı döngüden oluşmaz.

KAYNAKLAR

- Amleh, A.M., Grove, E.A., Ladas G. and Georgiou, D.A. (1999). On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}/x_n)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **233**: 790-798.
- Berenhaut, K.S. and Stević, S. (2006). The behavior of the positive solutions of the difference equation $x_n = A + (x_{n-2}/x_{n-1})^p$, *Journal of Difference Equations and Applications*, **12**(9): 909-918.
- Berenhaut, K.S and Stevic, S. (2006). A note on positive non-oscillatory solutions of the difference equation $x_{n+1} = A + (x_{n-k}^p/x_{n-1}^p)$. *Journal of Difference Equations and Applications*, **12**(5): 495-499.
- Berenhaut, K.S., Foley, J.D. and Stevic (2006). Quantative bounds for the recursive sequence $y_{n+1} = A + (y_n/y_{n-k})$. *Applied Mathematics Letters*, **19**: 983-989.
- Berenhaut, K.S., Foley, J.D. and Stevic, S. (2008). The global attractivity of the rational difference equation $y_n = A + (y_{n-k}/y_{n-m})^p$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **136**(1): 103-110.
- Devault, R., Ladas, G. and Schultz, W. (1998). On the recursive sequence $x_{n+1} = (A/x_n) + (1/x_{n-2})$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **126**(11): 3257-3261.
- Devault, R., Kent, C. and Kosmala, W. (2003). On the recursive sequence $x_{n+1} = p + (x_{n-k}/x_n)$. *Journal of Difference Equations and Applications*, **9**(8): 721-730.
- Devault, R., Kocić, V. and Stutson, D. (2005). Global behavior of solutions of the nonlinear difference equation $x_{n+1} = p_n + (x_{n-1}/x_n)$. *Journal of Difference Equations and Applications*, **11**(8): 707-719.
- Elaydi, S.N. (1996) An Introduction to Difference Equations. Springer-Verlag, New York, Inc.
- El-Owaidy, H.M., Ahmed, A.M. and Mousa, M.S. (2003) On the asymptotic behavior of the difference equation $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}^p/x_n^p)$. *Journal of Applied Mathematics & Computing*, **12**(1-2): 31-37.

- Kocić, V. and Ladas, G. (1993). Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Kulenović M.R.S and Ladas G. (2001). Dynamics of second order rational difference equations, Chapman & Hall/CRC.
- Kulenović M.R.S, Ladas G and Overdeep C.B. (2004). On the dynamics of $x_{n+1} = p_n + (x_{n-1}/x_n)$ with a period-two coefficient. *Journal of Difference Equations and Applications*, **10**(10): 905-914.
- Kulenović M.R.S, Ladas, G. and Sizer W.S. (1998). On the recursive sequence $x_{n+1} = (\alpha x_n + \beta x_{n-1})/(\gamma x_n + \delta x_{n-1})$ *Math. Sci. Res. Hot-line* **2**, no:5 1-16.
- Öcalan Ö. (2012) A note on the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}/x_n)$. *Discrete Dynamics in Nature and Society* (Baskıda).
- Öcalan Ö., Ögünmez H. and Gümüş M. (2012). Some results for the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-k}^p/x_n^p)$, *Journal of Applied Mathematics & Computing* (Baskıda).
- Papaschinopoulos, G., Schinas, C.J. and Stefanidou, G. (2011). On the nonautonomous difference equation $x_{n+1} = A_n + (x_{n-1}^p/x_n^q)$. *Applied Mathematics and Computation*, **217**: 5573-5580.
- Schinas, C.J., Papaschinopoulos, G. and Stefanidou, G. (2009). On the recursive sequence $x_{n+1} = A + (x_{n-1}^p/x_n^q)$. *Advances in Difference Equations*, Article ID 327649: 11 pages.
- Stević, S. (2003). On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha_n + (x_{n-1}/x_n)$ II, Dynamics of Continuous. *Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, **10**: 911-916.
- Stević, S. (2003). On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha_n + (x_{n-1}/x_n)$. *International Journal of Mathematical Sciences*, **2**(2): 237-243.
- Stević, S. (2005). On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}^p/x_n^p)$. *Journal of Applied Mathematics & Computing*, **18**(1-2): 229-234.
- Stević, S. (2007). On the recursive sequence $x_n = 1 + \sum_{i=1}^k \alpha_i x_{n-p_i} / \sum_{j=1}^m \beta_j x_{n-q_j}$.

Discrete Dyn. Nat. Soc., Art. ID 39404: 7 pp.

Stević, S. (2007). On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + (x_n^p/x_{n-1}^p)$. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2007)., Article ID 34517: 9 pages.

Stević, S. (2009). On a class of higher-order difference equations. *Chaos Solitons Fractals* **42**(1): 138-145.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet GÜMÜŞ
Doğum Yeri : KARABÜK
Doğum Tarihi : 18.05.1987
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Mustafa Yazıcı Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi, 2005
Lisans : Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü, 2010

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2011-?

Yayımları (SCI)

1. Mehmet Gümüş and Özkan Öcalan, **2012**, " Some notes for the difference equation $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}/x_n^k)$. *Discrete Dynamics in Nature and Society*" (Baskıda).
2. Mehmet Gümüş, Özkan Öcalan and Nilüfer B. Felah, " Dynamics of the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-k}^p/x_n^q)$. *Discrete Dynamics in Nature and Society*" (Yayına gönderildi).
3. Özkan Öcalan, Hasan Öğünmez and Mehmet Gümüş, " Some results for the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-k}^p/x_n^p)$. *Journal of Applied Mathematics & Computing*" (Yayına gönderildi).
4. Özkan Öcalan, Mehmet Gümüş and Hasan Öğünmez, "On the dynamics of the nonlinear difference equation with a period-two coefficient. *Advances in Difference Equations*" (Yayına gönderildi).