



T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ



**İKİNCİ MERTEBEDEN SÜPERLİNEER NEUTRAL TERİMLİ
FONKSİYONEL DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIM
SONUÇLARI**

Ayla KILIÇ

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Dr. Öğr. Üyesi Orhan ÖZDEMİR
2022
Her hakkı saklıdır**

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİNCİ MERTEBEDEN SÜPERLİNEER NEUTRAL TERİMLİ
FONKSİYONEL DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIM
SONUÇLARI

Ayla KILIÇ

TOKAT
2022

Her hakkı saklıdır

JÜRİ KABUL VE ONAY

Ayla KILIÇ tarafından hazırlanan “İkinci Mertebeden Süperlineer Neutral Terimli Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler İçin Salınım Sonuçları” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 17.11.2022 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmzası

Üye : Prof. Dr. Ercan TUNÇ
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
(Başkan)

.....

Üye : Prof. Dr. Ali YAKAR
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

.....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN
Amasya Üniversitesi

.....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

.....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Orhan ÖZDEMİR
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
(Danışman)

.....

ONAY

...../...../.....

Prof. Dr. Mehmet GÜNEŞ
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Ayla KILIÇ
17/11/2022

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİNCİ MERTEBEDEN SÜPERLİNEER NEUTRAL TERİMLİ FONKSİYONEL DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIM SONUÇLARI

Ayla KILIÇ

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Orhan ÖZDEMİR

Bu tez çalışmasında, süperlineer neutral terim içeren ikinci mertebeden bir fonksiyonel diferensiyel denklem sınıfı göz önüne alınmış ve bu denklem sınıfının bütün aşikar olmayan çözümlerinin salınımlı olduğunu gösteren yeni yeter şartlar elde edilmiştir. Sunulan yeni sonuçlar, söz konusu diferensiyel denklem hem gecikmeli hem de ileri tipten sapma argümentleri ihtiva etse bile uygulanabilecek olan varsayımlar altında inşa edilmiştir. Sonuçların uygulanabilirliğini göstermek için açıklayıcı örnekler de verilmiştir.

2022, 67 sayfa

ANAHTAR KELİMELEER: Salınım, neutral diferensiyel denklemler, süperlineerlik.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

OSCILLATION RESULTS FOR SECOND-ORDER FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SUPERLINEAR NEUTRAL TERMS

Ayla KILIÇ

Tokat Gaziosmanpasa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Orhan ÖZDEMİR

In this thesis, a class of second-order functional differential equations containing a superlinear neutral term is considered and new sufficient conditions are obtained showing that all nontrivial solutions of this class of equations are oscillatory. The new results presented here are constructed under assumptions that are applicable even if the differential equation in consideration contains both delayed and advanced type deviating arguments. Illustrative examples are also provided to demonstrate applicability of the results.

2022, 67 pages

KEYWORDS: Oscillation, neutral differential equations, superlinearity.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iv
SİMGE ve KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	4
2.1. İkinci Mertebeden Diferensiyel Denklemler ve Salınım Davranışları	4
2.2. Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler: Tanım ve Sınıflandırma	11
2.3. Sapma Argümentinin Salınıma Etkisi	15
2.4. İkinci Mertebeden Neutral Diferensiyel Denklemlerle İlgili Salınım Sonuçları	18
3. SALINIM TEOREMLERİ	31
3.1. İkinci Mertebeden Süperlineer Neutral Terimli Fonksiyonel Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı	31
3.2. Yardımcı Lemmalar	35
3.3. Temel Sonuçlar	39
3.4. Örnekler ve Notlar	49
4. TARTIŞMA VE SONUÇ	51
4.1. Tartışma ve Sonuç	51
KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ	57

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlangıcından sonuna kadar bana hep destek olan, konunun seçilmesi, yürütülmesi ve sonuçlandırılması aşamalarında engin bilgi ve tecrübesi ile ihtiyacım olan bütün yardımı yakın ilgi ile yaparak tavsiye ve yönlendirmeleri ile karşılaştığım sorunların çözümünde bana yol gösteren, sonuçların değerlendirmesini titizlikle yaparak çalışmanın bilimsel temeller üzerinde şekillenmesini sağlayan tez danışmanım, değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Orhan ÖZDEMİR'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma ve bu süreçte desteklerini esirgemeyip maddi manevi yanımda olan başta sevgili eşim Murat KILIÇ'a, varlığı bana ilham ve huzur veren biricik sevgili kızım Arya Ecrin KILIÇ'a ve aileme teşekkür ederim.

Ayla KILIÇ

Kasım 2022

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
ψ	Psi
ϕ	Phi
Ω	Omega
δ	Delta
χ	Chi
β	Beta
α	Alpha
θ	Theta
σ	Sigma
ρ	Rho
ζ	Zeta
ϑ	Vartheta
κ	Kappa
λ	Lambda
η	Eta
$\circ$	Bileşke fonksiyon

1. GİRİŞ

Doğa bilimlerinde ortaya çıkan problemlere matematiksel model olarak bir adi ya da kısmi diferensiyel denklem karşılık gelir ve uygulamalarda ortaya çıkan bir çok sistemin matematik modeli oluşturulurken, sistemin gelecekteki davranışının geçmişten bağımsız olarak, bağımsız değişkenin tek bir değerine bağlı biçimde ortaya çıktığı varsayılır. Buna karşılık, daha rafine bir analiz yapılırsa, bu fikrin gerçek duruma sadece bir ilk yaklaşım olduğu ve bir sisteme karşılık gelecek modelin daha gerçekçi olması için, geçmiş hafızayı da (en azından belirli bir kısmını) içermesinin gerekli olduğu ortaya çıkar. Üstelik bazı problemlere karşılık gelen sistemlerin geçmişle bağının olmadığını düşünmek modeli anlamsız hale getirir. Bu yüzden de, sapma argümentli diferensiyel denklemlerin teorik olarak incelenmesi kaçınılmazdır. Diferensiyel denklemlerde sapma argümentlerinin bu özellikleri uzun süredir biliniyor olmasına rağmen, ilgili teorinin ayrıntılı olarak geliştirilmesi son yıllarda gerçekleşmiştir (Hale ve Lunel, 1993).

Zaman gecikmeli sistemler teorisi, son zamanlarda yoğun ilgiyle çalışılmaktadır ve bilim dallarındaki uygulamaları düşünüldüğünde, uygulamalı matematiğin önemli bir sınıfını oluşturur. Fonksiyonel diferensiyel denklemler (sapma argümentli diferensiyel denklemler) ile tanımlanan bu sınıf, bağımlı değişken ve türevlerinin, bağımsız değişkenin farklı değerlerine bağlı olarak ortaya çıktığı problemleri ihtiva eder. Bu tür denklemlerin XVIII. yüzyılın başından bu yana Johann Bernoulli ve Leonhard Euler gibi öncü matematikçiler tarafından çalışıldığı bilinmektedir (Kolmanovskii ve Myshkis, 1999).

Diferensiyel denklemlerde kalitatif teori, denklemin açık çözümlerini elde etmeksizin çözümlerin özelliklerinin incelenmesini ifade eder. Bilindiği üzere, bir adi diferensiyel denklemin analitik çözümlerini bulmak çoğu zaman mümkün olmaz. Bununla birlikte, fonksiyonel diferensiyel denklemler, kısmi diferensiyel denklemler, fraksiyonel (kesirli mertebeden) diferensiyel denklemler ve integro-diferensiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi, çok daha kompleks problemler ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla çözüm analitik olarak bulunamadığında, çözümlerin davranışı hakkında

bilgi sahibi olmak uygulamalarda önem arz etmektedir. Salınım teorisi de, denklemleri bu yaklaşımla inceleyen teori içinde, sonsuzun bir komşuluğunda çözümlerin davranışları hakkında bilgi vermesi bakımından önemli bir yere sahiptir.

Salınım teorisinin ortaya çıkışı, Sturm'un diferensiyel denklemlerin çözümlerinin özelliklerini (sıfır noktalarının sayısı, sıfır noktaları arasındaki uzaklık, çözümün işaret değişikliği, çözümün sınırlılığı, sıfırların kümesinin üstten sınırlı olup olmaması vb.), çözümün kendisinden değil de, direkt olarak denklemin kendisinden elde etmek fikrinden yola çıkarak, ikinci mertebeden lineer denklemler üzerine ortaya koyduğu (Sturm, 1836) çalışmasıyla birlikte olmuştur. Bu yaklaşım günümüzde, fonksiyonel, kısmi, kesirli mertebeden diferensiyel denklemler ve integro-diferensiyel denklemler gibi uygulamalı matematiğin hemen hemen her problemine yönlendirilmiş olup, artan bir ilgiyle çalışılmaktadır (Hale ve Lunel, 1993).

Bu tez çalışmasında, benzer bir yaklaşımla, fonksiyonel diferensiyel denklemlerin neutral sınıfına ait olan ikinci mertebeden

$$\left(m(t)u'(t)\right)' + q(t)f(y(e(t))) = 0, \quad t \geq t_0 > 0,$$

diferensiyel denklemi, hem gecikmeli hem de ileri tipten sapma argümentleri ihtiva eden

$$u(t) = y(t) + \tilde{r}(t)y^\theta(\vartheta(t)) + r(t)y^\theta(\zeta(t))$$

formunda süperlineer bir neutral terim ile birlikte göz önüne alınmıştır.

Tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Çalışılan konu hakkında genel bilgiler verdiğimiz bu ilk bölümden sonra, ikinci bölümde önce ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemler için verilen salınım tanımları ve kısa bir literatür özetine değinilmiştir. Daha sonra fonksiyonel diferensiyel denklemler ve sapma argümentlerinin sınıflandırılmasıyla ilgili temel tanımlar verilerek, çeşitli bilim dallarında ortaya çıkan modellere örnekler verilmiştir. Son olarak, neutral denklemlerin salınımlılığı üzerine literatürde mevcut olan sonuçlardan, çalışmamızda bize yön göstermesi bakımından önemli olan bir kaç özet halinde sunulmuştur.

Üçüncü bölüm, tez çalışmasının ana sonuçlarına ayrılmıştır. Önce çalışılan problem tanıtılmış, ilgili denklemde görülen fonksiyonların hangi varsayımlar altında tanımlandığı ortaya konulmuş, sonuçların ispatında gerekli olan bir kaç öncül lemma ispatlanmıştır. Daha sonra söz konusu neutral denklemin bütün çözümlerinin salımlı olmasını garanti eden yeter şartlar ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Elde edilen sonuçların uygulanabilirliği ve çok yönlülüğü örneklerle açıklanmıştır.

Dördüncü ve son bölümde ise, üçüncü bölümde elde edilen sonuçlardan farklı olarak, neutral diferensiyel denklemler üzerine yapılabilecek yeni çalışmalara bir kaç örnek verilmiş ve açık problemler belirtilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin genel teorisi ile ilgili, tez boyunca kullanılacak genel bilgiler üzerinde durulacaktır. Fonksiyonel diferensiyel denklemlerin tanım ve sınıflandırması yapılarak, bu denklemlerin salınım teorisinde adi diferensiyel denklemlerden daha farklı problemler ortaya çıkardığı gösterilecektir. Ayrıca, ikinci mertebeden adi ve fonksiyonel diferensiyel denklemler üzerine, literatürde mevcut olan sonuçlar özet olarak sunulacaktır.

2.1. İkinci Mertebeden Diferensiyel Denklemler ve Salınım Davranışları

$F : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t)) = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad (2.1.1)$$

denklemini göz önüne alalım.

Tanım 2.1.1. $t \in [t_y, \infty) \subset [t_0, \infty)$ olmak üzere $[t_y, \infty)$ aralığı üzerinde iki kez sürekli diferensiyellenebilir olan ve (2.1.1) denklemini sağlayan bir $y(t)$ fonksiyonuna (2.1.1) denkleminin çözümü denir. Burada $t_y \geq t_0 \geq 0$ sayısı $y(t)$ özel çözümüne bağlı bir değerdir (Agarwal ve ark., 2002, 2004).

Tanım 2.1.2. $y(t)$, (2.1.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer, en az bir $t \in [t_0, \infty)$ için $y(t) \neq 0$ oluyorsa bu çözüme aşık olmaya (sıfır olmaya) çözüm denir.

Tanım 2.1.3. $[t_0, \infty)$ üzerinde aşık olmaya bir çözüm $y(t)$ olsun. Eğer $t \geq t_0$ için $y(t)$ çözümü keyfi sayıda yeterince büyük sıfırlara sahipse bu $y(t)$ çözümüne salınımlıdır denir. Yani $y(t)$ salınımlı bir çözüm ise, nihai olarak pozitif (eventually positive) ya da nihai negatif (eventually negative) bir çözüm değildir (Agarwal ve ark., 2002, 2004).

Tanım 2.1.4. Aşık olmaya bir $y(t)$ çözümü $[t_0, \infty)$ aralığında salınım yapan bir çözüm değilse, yani her $t \geq t_1$ için $y(t) \neq 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in [t_0, \infty)$ sayısı mevcutsa, o halde bu çözüme salınımsız (salınım yapmayan) çözüm denir. Yani salınım yapmayan bir çözüm, nihai pozitif (eventually positive) ya da nihai negatif (eventually negative) bir çözümdür (Agarwal ve ark., 2002, 2004).

Tanım 2.1.5. (2.1.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlı ise, denklemin kendisine salınımlıdır (salınımlı denklem) denir (Agarwal ve ark., 2002, 2004).

Örnek 2.1.6.

$$y''(t) + 3y(t) = 0$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin lineer bağımsız çözümleri $y_1 = \cos \sqrt{3}t$ ve $y_2 = \sin \sqrt{3}t$ olup, çözümlerin her ikisi de salınımlı olduğundan verilen denklem salınımlıdır.

Örnek 2.1.7.

$$y''(t) - 3y(t) = 0$$

diferensiyel denklemini verilsin. Verilen denklemin lineer bağımsız çözümleri $y_1 = e^{\sqrt{3}t}$ ve $y_2 = e^{-\sqrt{3}t}$ ve bu çözümlerin her ikisi de salınımsız olduğundan verilen denklem salınımsızdır.

Örnek 2.1.8.

$$y''(t) = t^2(30t^2 - 1) \sin \frac{1}{t} - 10t^3 \cos \frac{1}{t} + 21t^5, \quad t > 0$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin bir çözümü

$$y(t) = t^6 \left(\sin \frac{1}{t} + \frac{t}{2} \right)$$

fonksiyonudur. Bu çözümün $(0, 1]$ aralığında sonsuz sayıda sıfır noktası, $[1, 2]$ aralığında ise sonlu sayıda sıfır noktası vardır, ancak bu çözüm $(2, \infty)$ aralığında pozitifdir. Dolayısıyla, sonsuz sayıda sıfır noktasına sahip olmasına rağmen, sıfırlarının kümesi üstten sınırlı olduğundan bu çözüm salınımlı değildir (Padhi ve Pati, 2014).

Salınım, diferensiyel denklemlerin en önemli kalitatif (nitel) özelliklerinden biridir. Sturm'un teoremi ortaya koyan çalışmasından (Sturm, 1836) bu yana bu alanda çok sayıda önemli çalışma yapılmıştır. Salınım teorisinin en temel sonuçlarından birisi, günümüzde Sturm'un karşılaştırma teoremi olarak bilinen, ikinci mertebeden

lineer diferensiyel denklemlerin çözümlerinin karşılaştırılmasına dayanan aşağıdaki teoremdir:

Teorem 2.1.9. r_1, r_2, q_1, q_2 fonksiyonları $[a, b]$ kapalı aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar, $0 < r_2(t) \leq r_1(t)$ ve $q_1(t) \leq q_2(t)$ olmak üzere

$$\left(r_1(t)y'(t)\right)' + q_1(t)y(t) = 0, \quad (2.1.2)$$

$$\left(r_2(t)y'(t)\right)' + q_2(t)y(t) = 0, \quad (2.1.3)$$

ikinci mertebeden lineer homojen diferensiyel denklemleri göz önüne alalım. Eğer u , (2.1.2) denkleminin t_1 ve t_2 noktalarında ardışık iki sıfırı olan aşikar olmayan bir çözümü ve v de (2.1.3) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü ise aşağıdaki iki durumdan birisi geçerlidir:

- (t_1, t_2) açık aralığında $v(t_*) = 0$ olacak şekilde en az bir t_* noktası vardır.
- $v(t) = \lambda u(t)$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır (Meng ve Zheng, 2018).

Yukarıdaki teoremin ilk maddesi Sturm'un 1836 yılındaki çalışmasının (Sturm, 1836) sonucudur, ikinci maddesi ise Picone'nin 1910 tarihli çalışmasından (Picone, 1910) elde edilmektedir. Picone'nin bu durum için verdiği kısa ispat bugün Picone özdeşliği olarak bilinir. Buna göre $v(t) \neq 0$ olacak şekildeki her t değeri için

$$\left(\frac{u}{v}(r_1 u'v - r_2 uv')\right)' = (r_1 - r_2)(u')^2 + r_2 \left(u' - v' \frac{u}{v}\right)^2 + (q_2 - q_1)u^2$$

özdeşliği sağlanır. Burada, (2.1.2) ve (2.1.3) denklemlerinin özdeş olduğu durumda Sturm Ayırma Teoremi elde edilir (Meng ve Zheng, 2018).

İkinci mertebeden lineer diferensiyel denklemlerin en klasik formu, mekanik sistemlerin fizik problemlerinde ortaya çıkan ve Hill denklemi olarak adlandırılan

$$y''(t) + q(t)y(t) = 0 \quad (2.1.4)$$

formundaki denklemdir ve bu denklemin çözümlerinin kalitatif davranışları yaygın olarak araştırılmış ve araştırılmaya devam edilmektedir (Meng ve Zheng, 2018). Bu denklemin çok sayıda genelleştirilmesi mevcuttur. Örneğin, bir sönüm terimi (damping term) eklenirse,

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \quad (2.1.5)$$

denklemini elde edilir. (2.1.5) denklemini bir integrasyon çarpanı ile çarpılırsa, ikinci mertebeden lineer diferensiyel denklemlerin normal formu olarak adlandırılan

$$\left(r(t)y'(t)\right)' + q(t)y(t) = 0 \quad (2.1.6)$$

denklemini elde edilir. Eğer (2.1.6) denkleminde bir zorlayıcı terim (forcing term) eklenirse

$$\left(r(t)y'(t)\right)' + q(t)y(t) = e(t) \quad (2.1.7)$$

elde edilir. Bu lineer denklemler ve birçok genelleştirmesi için çözümlerin salınım ve salınımsızlık davranışı son yüzyıldan fazla bir süredir geniş çapta araştırılmaktadır. Aşağıda (2.1.4) denklemini için elde edilen bazı önemli salınım kriterleri sırayla verilmiştir (Meng ve Zheng, 2018):

$$\epsilon > 0 \text{ için } \limsup_{t \rightarrow \infty} t^2 q(t) > \frac{1 + \epsilon}{4}, \quad (\text{Kneser, 1893}), \quad (2.1.8)$$

$$q(t) \geq 0 \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t q(s) ds = \infty, \quad (\text{Fite, 1918}), \quad (2.1.9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s q(\tau) d\tau ds = \infty, \quad (\text{Wintner, 1949}), \quad (2.1.10)$$

$$\begin{aligned}
-\infty &< \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s q(\tau) d\tau ds \\
&< \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s q(\tau) d\tau ds \leq \infty, \quad (\text{Hartman, 1952}). \quad (2.1.11)
\end{aligned}$$

1978 yılında Kamenev, (2.1.4) denklemi için, özel durumda Wintner'in sonuçlarını da içeren yeni bir salınım kriteri elde etmiştir. Buna göre, $m > 1$ bir tam sayı olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^m} \int_{t_0}^t (t-s)^m q(s) ds = \infty$$

şartının sağlanması (2.1.4) nin salınımlı olması için yeterlidir (Kamenev, 1978).

Şimdi, vereceğimiz sıradaki teoremin yazımında kolaylık olması için, $\mathcal{H}_p$ fonksiyon sınıfını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

Tanım 2.1.10. Aşağıdaki şartları sağlayan $H = H(t, s)$ fonksiyonuna $\mathcal{H}_p$ sınıfına aittir denir ve $H \in \mathcal{H}_p$ ile gösterilir:

- $H : D \equiv \{(t, s) : t \geq s \geq t_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $t \geq t_0$ için $H(t, t) = 0$ ve $t > s \geq t_0$ için $H(t, s) > 0$,
- $H(t, s)$ fonksiyonu $D_0 \equiv \{(t, s) : t > s \geq t_0\}$ üzerinde ikinci değişkene göre sürekli ve pozitif olmayan kısmi türevlere sahiptir. Ayrıca $h : D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $(t, s) \in D_0$ için

$$-\frac{\partial H}{\partial s}(t, s) = h(t, s)\sqrt{H(t, s)}$$

kalır.

1989 yılında Philos yukarıda tanımlanan $\mathcal{H}_p$ fonksiyon sınıfını kullanarak Kamenev'in sonuçlarını iyileştirdi. Buna göre:

Teorem 2.1.11. $H \in \mathcal{H}_p$ olsun. Bu taktirde, eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left[H(t, s)q(s) - \frac{1}{4}h^2(t, s) \right] ds = \infty$$

ise (2.1.4) denklemi salınımlıdır (Philos, 1989).

Teorem 2.1.12. $H \in \mathcal{H}_p$ olsun. Dahası

$$0 < \inf_{s \geq t_0} \left[\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, t_0)} \right] \leq \infty$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t h^2(t, s) ds < \infty$$

olsun. Ayrıca $A : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $A_+(t) = \max\{A(t), 0\}$ olmak üzere her $T \geq t_0$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[H(t, s)q(s) - \frac{1}{4}h^2(t, s) \right] ds \geq A(T)$$

sağlansın. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} A_+^2(t) dt = \infty$$

ise (2.1.4) denklemi salınımlıdır (Philos, 1989).

Kong 1999 yılında

$$\left(r(t)y'(t) \right)' + q(t)y(t) = 0$$

ile gösterdiğimiz (2.1.6) denklemi için aşağıdaki aralık (interval) kriterini vermiştir.

Teorem 2.1.13. $H \in \mathcal{H}_p$ ve $h_1, h_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, s) = h_1(t, s)\sqrt{H(t, s)} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial H}{\partial s}(t, s) = -h_2(t, s)\sqrt{H(t, s)}$$

olsun. Bu taktirde her $T \geq t_0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H(c, a)} \int_a^c H(s, a)q(s)ds + \frac{1}{H(b, c)} \int_c^b H(b, s)q(s)ds \\ & \geq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{H(c, a)} \int_a^c r(s)h_1^2(t, s)ds + \frac{1}{H(b, c)} \int_c^b r(s)h_2^2(b, s)ds \right] ds \end{aligned}$$

olacak şekilde $T \leq a < c < b$ eşitsizliğini sağlayan $a, b, c \in \mathbb{R}$ varsa (2.1.6) denklemi salınımlıdır (Kong, 1999, Teorem 2.1).

Leighton varyasyon prensibi olarak bilinen aşağıdaki teorem, (2.1.6) denkleminin çözümlerinin salınım davranışını incelemeye farklı bir yöntem sunar. Önce, verilen her bir $[a, b]$ aralığı için D fonksiyonlar sınıfını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$D(a, b) = \{u(t) : u, u' \in C^1[a, b], u(a) = u(b) = 0 \text{ ve } (a, b) \text{ aralığında } u(t) \neq 0\}.$$

Teorem 2.1.14. Kabul edelim ki

$$\int_a^b (qu^2 - r(u')^2) ds > 0$$

olacak şekilde $u \in D(a, b)$ olsun. Bu taktirde $y(a) = 0$ olacak şekildeki (2.1.6) denkleminin bir çözümünün (a, b) aralığında bir sıfırı olmak zorundadır (Leighton, 1962; Meng ve Zheng, 2018).

Komkov, Leighton'ın varyasyon prensibini aşağıdaki teorem ile genelleştirmiştir.

Teorem 2.1.15. Kabul edelim ki $[s_1, t_1]$ üzerinde tanımlı sürekli türevlenebilir bir $u(t)$ fonksiyonu ve yine $[s_1, t_1]$ üzerinde $G(u(t))$ sabit olmayacak şekilde bir $G(u)$ fonksiyonu var olsun. Ayrıca $G(u(s_1)) = G(u(t_1)) = 0$ sağlansın ve $g(u) = G'(u)$ fonksiyonu da sürekli olsun. Eğer her $t \in [s_1, t_1]$ için

$$\int_{s_1}^{t_1} [q(t)G(u(t)) - r(t)(u'(t))^2] dt > 0$$

ve

$$(g(u(t)))^2 \leq 4G(u(t))$$

şartları sağlanırsa, bu taktirde (2.1.6) denkleminin her bir çözümünün $[s_1, t_1]$ üzerinde en az bir sıfırı vardır (Komkov, 1972; Meng ve Zheng, 2018).

2.2. Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler: Tanım ve Sınıflandırma

Eğer bir diferensiyel denklemde bağımlı değişken ve türevleri, bağımsız değişkenin (argüment) farklı değerlerine bağlı olarak ortaya çıkıyorsa bu tür denklemlere sapma argümentli diferensiyel denklemler (differential equations with deviating arguments) veya fonksiyonel diferensiyel denklemler (functional differential equations) denir (Zafer, 1992).

Doğa bilimlerinde ortaya çıkan problemlere matematiksel model olarak bir adi ya da kısmi diferensiyel denklem karşılık gelir ve uygulamalarda ortaya çıkan bir çok sistemin matematik modeli oluşturulurken, sistemin gelecekteki davranışının geçmişten bağımsız olarak, bağımsız değişkenin tek bir değerine bağlı biçimde ortaya çıktığı varsayılır. Buna karşılık, daha rafine bir analiz yapılırsa, bu fikrin gerçek duruma sadece bir ilk yaklaşım olduğu ve bir sisteme karşılık gelecek modelin daha gerçekçi olması için, geçmiş hafızayı da (en azından belirli bir kısmını) içermesinin gerekli olduğu ortaya çıkar. Üstelik bazı problemlere karşılık gelen sistemlerin geçmişle bağının olmadığını düşünmek modeli anlamsız hale getirir. Bu yüzden de, sapma argümentli diferensiyel denklemlerin teorik olarak incelenmesi kaçınılmazdır. Diferensiyel denklemlerde sapma argümentlerinin bu özellikleri uzun süredir biliniyor olmasına rağmen, ilgili teoremin ayrıntılı olarak geliştirilmesi son yıllarda gerçekleşmiştir.

Bir fonksiyonel diferensiyel denklemde bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi, bağımsız değişkenin (argüment) sadece bir değerine bağlı ve en yüksek mertebeden türevde görülen bu argüment, denklemde görülen diğer tüm argümentlerden daha küçük değilse, bu denklemlere gecikmeli (delay, retarded) diferensiyel denklem denir (Zafer, 1992).

$$y''(t) = t^3 y'(t/2) + \sqrt{t} y(t - e) + \cos t$$

ve

$$y'''(2t) + t y''(2t - 1) + \sqrt{t} y(t - \pi) = e^t \ln t$$

denklemleri $t > 0$ için birer gecikmeli diferensiyel denklemdir.

Bir fonksiyonel diferensiyel denklemde bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi, bağımsız değişkenin (argüment) sadece bir değerine bağlı ve en yüksek mertebeden türevde görülen bu argüment, denklemde görülen diğer tüm argümentlerden daha büyük değilse, bu tür denklemlere ileri tipten (advanced) diferensiyel denklem denir (Zafer, 1992).

$$y'(t) = y(3t) + \frac{t}{1+t^3}y\left(t + \frac{5}{7}\right) - \tan t$$

ve

$$y'(t + \pi) = y''(t) + \frac{e^t}{t^{1/2}}y(t + 3\pi) - t^3 - t + 1$$

denklemleri $t > 0$ için birer ileri tipten diferensiyel denklemdir.

Bir fonksiyonel diferensiyel denklemde bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi, bağımsız değişkenin (argüment) sadece bir değerine bağlı ise ve denklem, en yüksek mertebeden türevde görülen bu argümentten daha küçük ve daha büyük argümentler içeriyorsa, bu tip denklemlere karma tipten (mixed) diferensiyel denklem denir (Zafer, 1992).

$$y'(t) = (\cos t)y(t/5) - 5y(t + 3\pi) + t$$

ve

$$y''(t) = (t - 1)y'(t - 4) + (\ln t)y'(t + \sqrt{7})$$

denklemleri $t > 0$ için birer karma diferensiyel denklemdir.

Bir fonksiyonel diferensiyel denklemde bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi, hem sapma argümentine bağlı hem de sapma argümentine bağlı olmadan ortaya çıkıyorsa, bu tür denklemlere nötral veya neutral diferensiyel denklem denir (Zafer, 1992).

$$y'(t) + \frac{2}{t^2}y'(t/2) = y(t - \pi) + \sinh t$$

ve

$$y''(t) + (t^3 + t)y''(t + 2\pi) + y(t - e^2) = t^2 - t - 3$$

denklemleri $t > 0$ için birer neutral diferensiyel denklemdir.

Gecikmeli diferensiyel denklemlerin fiziksel uygulamalarına bir örnek olarak

$$y'(x) = H(x, y(x), y(x - \sigma))$$

denkleminin, Minorsky tarafından kontrol problemlerine uygulanması gösterilebilir (Hale, 1971). Ayrıca bir metropolde kızamık yayılımını tanımlamaya çalışırken, $S(t)$ fonksiyonu t anındaki duyarlı bireylerin sayısını, γ kişilerin popülasyona girme hızını, $\beta(t)$ popülasyonun karakteristik fonksiyonunu göstermek üzere, t anında hastalığa maruz kalan bir kişinin, $[t - 14, t - 12]$ zaman aralığında enfekte olduğu düşünülerek

$$S'(t) = -\beta(t)S(t)[2\gamma + S(t - 14) - S(t - 12)] + \gamma$$

denklemini London ve Yorke tarafından ortaya konulmuştur (Hale, 1971). x nötron yoğunluğunu göstermek üzere

$$x'(t) = - \int_{t-r}^t a(t-u)g(x(u))du$$

gecikmeli integro-diferensiyel denkleminin, Ergen tarafından nükleer reaktörler teorisinde ortaya çıktığı gösterilmiştir ve bu denklem Levin ve Nohel tarafından kapsamlı bir şekilde çalışılmıştır. Aynı zamanda bu son denklem x gerginliği ve a da gevşeme fonksiyonunu göstermek üzere bir boyutlu viskoelastisite problemi için

iyi bir modeldir (Hale, 1971). Triyot osilatöründeki iletim süresini dikkate alarak, τ gecikme argümenti olmak üzere, Rubanik ikinci mertebeden

$$x''(t) + \alpha x'(t) - f(x(t-r))x'(t-r) + x(t) = 0$$

van der Pol denklemiyle karşılaşmıştır (Hale ve Lunel, 1993). Salınlı sistemler arasındaki zaman gecikmeli bağımlıları dikkate alarak, Starik

$$y''(t) + [w^2 + \epsilon \lambda \sin \phi(t-r_1)]y(t) = -\epsilon[hy'(t) + \gamma y^3(t-r^2)]$$

$$I\phi''(t) = \epsilon[L(\phi'(t)) - H(\phi(t) - \sigma_1^2 y^2(t-r_3) \cos \phi(t)) - \sigma_2 \sin \phi(t) - \sigma_3 \cos \phi(t)]$$

sistemini incelemiştir (Hale ve Lunel, 1993). Optimal kontrol teorisinde Krasovskii,

$$x'(t) = P(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = Q(t)x(t)$$

$$u'(t) = \int_{-r}^0 d[\eta(t, \theta)]y(t+\theta) + \int_{-r}^0 d[\mu(t, \theta)]u(t+\theta)$$

ileri tipten sapma argümentleri içeren denklem sistemini ayrıntılı bir şekilde incelemiştir (Hale ve Lunel, 1993).

Diğer taraftan Rubanik elastik bir çubuğa bağlı titreşen kütlelerin incelenmesi probleminde

$$x''(t) + w_1^2 x(t) = \epsilon f_1(x(t), x'(t), y(t), y'(t)) + \gamma_1 y''(t-r)$$

$$y''(t) + w_2^2 x(t) = \epsilon f_1(x(t), x'(t), y(t), y'(t)) + \gamma_2 x''(t-r)$$

ikinci mertebeden neutral diferensiyel denklem sisteminin ortaya çıktığını göstermiştir (Hale ve Lunel, 1993).

Elektrodinamik teorisinde bir çarpışma problemi üzerinde çalışırken, Driver, $h(t) \leq t$ olmak üzere

$$u'(t) = F(t, u(t), u(h(t))) + G(t, u(t), u(h(t)))u'(h(t))$$

formunda neutral bir denklem modeli ortaya koymuştur (Hale ve Lunel, 1993). Bir nükleer reaktördeki nötronların yavaşlaması probleminde

$$x'(t) = k(t+1)x(t+1) - k(t)x(t)$$

ileri tipten diferensiyel denkleminin $t \rightarrow \infty$ iken asimptotik davranışının önemli bir rol oynadığı Slater ve Wilf tarafından gösterilmiştir (Hale ve Lunel, 1993).

2.3. Sapma Argmentinin Salınım Etkisi

Belirli formdaki denklemler hariç, genelde diferensiyel denklemlerin açık gzmlerinin elde edilememesi yani gzmler için analitik ifade bulunamaması durumu, araştırmacıları diferensiyel denklemlerin gzmlerini elde etmeden gzmlerin davranışlarını araştırmaya yöneltmiştir. Bu yaklaşım diferensiyel denklemlerde kalitatif (nitel) teori olarak bilinmektedir. Kalitatif teorinin önemli bir konusu da salınım teorisidir. Salınım teorisinin temeli Jacques Charles François Sturm tarafından yayınlanan (Sturm, 1836), ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin gzmlerinin sıfırlarıyla ilgili iyi bilinen sonuçlara dayanmaktadır. O zamandan beri farklı sınıftaki lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin gzmlerinin salınım davranışı farklı yöntemlerle araştırılmış ve araştırılmaya devam edilmektedir.

Adi diferensiyel denklemlerin gzmlerinin salınımlılığı hakkında yapılan çalışmaların büyük çoğunluğu ikinci ya da daha yüksek mertebeden diferensiyel denklemleri kapsamaktadır. Çünkü birinci mertebeden lineer homojen adi diferensiyel denklemlerin gzmleri salınımlı değildir. Ancak birinci mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemler için durum oldukça farklıdır. Zira bu denklemler salınım yapan gzmlere sahip olabilir. Gerçekten,

$$y'(t) + 16y(t) = 0$$

birinci mertebeden adi diferensiyel denklemi salınımlı çözümlere sahip değildir. Ancak

$$y'(t) + 16y\left(t - \frac{\pi}{32}\right) = 0$$

ve

$$y'(t) - 16y\left(t + \frac{\pi}{32}\right) = 0$$

birinci mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemleri $y_1 = \sin 16t$ ve $y_2 = \cos 16t$ salınımlı çözümlere sahiptir. Diğer yandan,

$$y'(t) + \frac{3\pi}{2}y(t+1) = 0$$

ileri tipten fonksiyonel diferensiyel denklemi, $y_1(t) = \sin(\frac{3\pi}{2}t) + \cos(\frac{3\pi}{2}t)$ şeklinde bir salınımlı çözüme, ayrıca $B \in \mathbb{R}$ ve $\lambda + (3/2)\pi e^\lambda = 0$ denkleminin bir kökü λ olmak üzere $y_2(t) = Be^{\lambda t}$ salınımsız çözümüne sahiptir (Ladde ve ark., 1987).

Sturm Ayırma Teoreminden iyi bilinmektedir ki, mertebesi iki olan homojen lineer adi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin ya tamamı salınımlı ya da tamamı salınımsızdır. Aşağıda verilen örnekleri inceleyelim:

$$y''(t) + 9y(t) = 0$$

denkleminin bütün çözümleri salınımlı,

$$y''(t) - 9y(t) = 0 \tag{2.3.1}$$

denkleminin bütün çözümleri salınımsızdır. Ancak (2.3.1) denkleminin bütün çözümleri salınımsız olduğu halde,

$$y''(t) - 9y(t - \pi) = 0$$

fonksiyonel diferensiyel denkleminin $y_1 = \sin 3t$ ve $y_2 = \cos 3t$ salınımlı çözümleri vardır.

Bir fonksiyonel diferensiyel denklemde neutral terim, salınım neden olabileceği gibi, denklemin salınım özelliklerini yok da edebilir. Örneğin,

$$\left(e^t y'(t)\right)' + (e^{3t} - 6e^{t+6})y(t+2) = 0$$

formundaki ileri tipten diferensiyel denklem salınımlıdır (Chatzarakis ve ark., 2019, Teorem 2). Buna karşılık,

$$\left[e^t \left(y(t) + e^{2t}y(t-2) + te^{2t}y(t+2)\right)\right]' + (e^{3t} - 6e^{t+6})y(t+2) = 0$$

neutral diferensiyel denkleminin $y(t) = e^{-3t}$ salınımsız çözümü vardır. Diğer taraftan,

$$\left[e^t \left(y(t) + \frac{1}{e^t}y(t-2) + e^t y(t+2)\right)\right]' + (e^{3t} - 6e^{t+6})y(t+2) = 0$$

denklemini $t \geq 7$ için salınımlı bir denklemdir (Özdemir, to appear, Teorem 3.1). Buradan anlaşılmaktadır ki, neutral terimin farklı seçilmesi, denklemin çözümlerinin salınım davranışını değiştirebilir.

2.4. İkinci Mertebeden Neutral Diferensiyel Denklemlerle İlgili Salınım Sonuçları

Bu bölümde, tez çalışmasında ele alınan problemi belirlerken, çalışmamıza ışık tutan bazı önemli salınım sonuçları üzerinde durulacaktır. Baculíková ve Džurina,

$$z(t) = u(t) + p(t)u(\tau(t))$$

olacak şekilde neutral terimde sadece bir sapma argümenti içeren

$$\left(a(t)[z'(t)]^\gamma\right)' + q(t)u^\beta(\sigma(t)) = 0 \quad (2.4.1)$$

ikinci mertebeden diferensiyel denkleminin salınımlılığı için,

(D1) γ ve β sayıları, iki pozitif tek tam sayının oranı;

(D2) a, p, q fonksiyonları, $[t_0, \infty)$ aralığında tanımlı pozitif reel değerli sürekli fonksiyonlar, $0 \leq p(t) \leq p_0 < \infty$ ve

$$\int_{t_0}^{\infty} a^{-1/\gamma}(s)ds = \infty;$$

(D3) $\tau, \sigma \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $\sigma(t)$ azalmayan, $\sigma(t) \leq t$, $\tau'(t) \geq \tau_0 > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$ ve $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$;

şartları altında aşağıdaki salınım sonuçlarını elde etmiştir (Baculíková ve Džurina, 2011). Yazımda kolaylık olması açısından yeterince büyük t_1 değerleri için

$$Q(t) = \min\{q(t), q(\tau(t))\} \quad Q^*(t) = Q(t) \left(\int_{t_1}^{\sigma(t)} a^{-1/\gamma}(s)ds \right)^\beta$$

notasyonları kullanılacaktır.

Teorem 2.4.1. $0 < \beta \leq 1$ olsun. Eğer

$$\left(w(t) + \frac{p_0^\beta}{\tau_0} w(\tau(t))\right)' + Q^*(t)w^{\beta/\gamma}(\sigma(t)) \leq 0$$

birinci mertebeden neutral gecikmeli diferensiyel eşitsizliği pozitif bir çözüme sahip değilse, bu taktirde (2.4.1) denklemi salınımlıdır (Baculíková ve Džurina, 2011).

Teorem 2.4.2. $0 < \beta \leq 1$ ve $\tau(t) \geq t$ olsun. Eğer

$$y'(t) + \frac{\tau_0^{\beta/\gamma}}{(\tau_0 + p_0^\beta)^{\beta/\gamma}} Q^*(t) y^{\beta/\gamma}(\sigma(t)) = 0$$

birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemi salınımlı ise, bu taktirde (2.4.1) denklemi de salınımlıdır (Baculíková ve Džurina, 2011).

Teorem 2.4.3. $0 < \beta \leq 1$ ve $\sigma(t) \leq \tau(t) \leq t$ olsun. Eğer

$$y'(t) + \frac{\tau_0^{\beta/\gamma}}{(\tau_0 + p_0^\beta)^{\beta/\gamma}} Q^*(t) y^{\beta/\gamma}(\tau^{-1}(\sigma(t))) = 0$$

birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemi salınımlı ise, bu taktirde (2.4.1) denklemi de salınımlıdır (Baculíková ve Džurina, 2011).

Teorem 2.4.4. $\beta \geq 1$ olsun. Eğer

$$\left(w(t) + \frac{p_0^\beta}{\tau_0} w(\tau(t)) \right)' + 2^{1-\beta} Q^*(t) w^{\beta/\gamma}(\sigma(t)) \leq 0$$

birinci mertebeden neutral gecikmeli diferensiyel eşitsizliğinin pozitif bir çözümü yoksa, bu taktirde bu taktirde (2.4.1) denklemi salınımlıdır (Baculíková ve Džurina, 2011).

Teorem 2.4.5. $\beta \geq 1$ ve $\tau(t) \geq t$ olsun. Eğer

$$y'(t) + \frac{\tau_0^{\beta/\gamma}}{(\tau_0 + p_0^\beta)^{\beta/\gamma}} 2^{1-\beta} Q^*(t) y^{\beta/\gamma}(\sigma(t)) = 0$$

birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemi salınımlı ise, bu taktirde (2.4.1) denklemi de salınımlıdır (Baculíková ve Džurina, 2011).

Teorem 2.4.6. $\beta \geq 1$ ve $\sigma(t) \leq \tau(t) \leq t$ olsun. Eğer

$$y'(t) + \frac{\tau_0^{\beta/\gamma}}{(\tau_0 + p_0^\beta)^{\beta/\gamma}} 2^{1-\beta} Q^*(t) y^{\beta/\gamma}(\tau^{-1}(\sigma(t))) = 0$$

birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemi salınımlı ise, bu taktirde (2.4.1) denklemi de salınımlıdır (Baculíková ve Džurina, 2011).

Örnek 2.4.7. $\alpha > 0$, $b > 0$ ve $0 < \lambda < 1$ olmak üzere

$$\left(t^2 \left((u(t) + (3 + \sin t)u(\alpha t))'\right)^3\right)' + \frac{b}{t^{16/9}} u^{7/3}(\lambda t) = 0 \quad (2.4.2)$$

neutral diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Eğer

$$\frac{b(\alpha\lambda)^{7/9}}{(\alpha + 4^{7/3})^{7/9}} \ln \frac{\alpha}{\lambda} > \frac{2^{4/3}}{e3^{7/3}}$$

ise, (2.4.2) denklemi salınımlıdır (Baculíková ve Džurina, 2011).

Şimdi, neutral terimi hem gecikmeli hem de ileri tipten sapma argümentleri içeren ikinci mertebeden fonksiyonel denklemler için verilen salınım teoremleri üzerinde duracağız. α pozitif tek tam sayıların bir oranı olmak üzere,

$$\left(r(t)(z'(t))^\alpha\right)' + q(t)y^\alpha(h(t)) = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (2.4.3)$$

yarı-linear diferensiyel denklemini

$$z(t) = y(t) + p_1(t)y(g_1(t)) + p_2(t)y(g_2(t))$$

ile tanımlanan neutral terim ile birlikte göz önüne alalım. Tunç ve Özdemir, (2.4.3) denkleminin çözümlerinin kalitatif davranışlarını incelerken,

(C1) $r, q : [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ reel değerli sürekli fonksiyonlar ve

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{-1/\alpha}(s)ds = \infty;$$

(C2) $g_1, g_2, h : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar, $g_1(t) < t < g_2(t)$, g_1 ve g_2 kesin artan fonksiyonlar ve $\lim_{t \rightarrow \infty} g_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} g_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$;

(C3 _{ξ}) $p_1, p_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar, $p_1(t) \geq 0$, $p_2(t) \geq 1$ ve yeterince büyük t değerleri için $p_2(t) \not\equiv 1$;

(C3_φ) $p_1, p_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar, $p_2(t) \geq 0$, $p_1(t) \geq 1$ ve yeterince büyük t değerleri için $p_1(t) \neq 1$

şartları altında aşağıdaki kriterleri elde etmiştir (Tunç ve Özdemir, 2019). Yazımda kolaylık olması açısından, d herhangi bir sürekli fonksiyon olmak üzere

$$d_+ := \max\{0, d(t)\}, \quad R(t, t_1) := \int_{t_1}^t r^{-1/\alpha}(s) ds,$$

ayrıca g_1^{-1} ve g_2^{-1} fonksiyonları sırasıyla g_1 ve g_2 nin ters fonksiyonlarını ve m fonksiyonu da ileride tanımlanacak spesifik bir fonksiyonu belirtmek üzere

$$\xi(t) := \frac{1}{p_2(g_2^{-1}(t))} \left[1 - \frac{1}{p_2(g_2^{-1}(g_2^{-1}(t)))} - \frac{p_1(g_2^{-1}(t))}{p_2(g_2^{-1}(g_1(g_2^{-1}(t))))} \right],$$

$$\varphi(t) := \frac{1}{p_1(g_1^{-1}(t))} \left[1 - \frac{1}{p_1(g_1^{-1}(g_1^{-1}(t)))} \frac{m(g_1^{-1}(g_1^{-1}(t)))}{m(g_1^{-1}(t))} - \frac{p_2(g_1^{-1}(t))}{p_1(g_1^{-1}(g_2(g_1^{-1}(t))))} \frac{m(g_1^{-1}(g_2(g_1^{-1}(t))))}{m(g_1^{-1}(t))} \right]$$

notasyonları kullanılacaktır.

Teorem 2.4.8. (C1) – (C3_ξ) sağlansın, $\xi(t) > 0$ ve $g_2(t) \geq h(t)$ olsun, ayrıca her $t \geq t_2$ için,

$$\frac{m(t)}{r^{1/\alpha}(t)R(t, t_1)} - m'(t) \leq 0 \quad (2.4.4)$$

kalacak şekilde pozitif bir $m \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer

$$\chi(t) = \eta(t)q(t)\xi^\alpha(h(t)) \frac{m^\alpha(g_2^{-1}(h(t)))}{m^\alpha(t)}$$

olmak üzere, yeterince büyük her $t_1 \in [t_0, \infty)$ ve bazı $T \in (t_1, \infty)$ değerleri için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\chi_1(s) - \frac{\eta'_+(s)r(s)(m'(s))^\alpha}{m^\alpha(s)} \right) ds = \infty,$$

olacak şekilde pozitif bir $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var ise, (2.4.3) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır (Tunç ve Özdemir, 2019).

Teorem 2.4.9. $(C1) - (C3_\xi)$ sağlansın, $\xi(t) > 0$ ve $g_2(t) \geq h(t)$ olsun, ayrıca (2.4.4) sağlanacak şekilde pozitif bir $m \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer $\chi_1(t)$ Teorem 2.4.8'deki gibi tanımlı olmak üzere yeterince büyük her $t_1 \in [t_0, \infty)$ ve bazı $T \in (t_1, \infty)$ değerleri için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\chi_1(s) - \frac{1}{(\alpha + 1)^{\alpha+1}} \frac{r(s)(\eta'_+(s))^{\alpha+1}}{\eta^\alpha(s)} \right) ds = \infty,$$

sağlanacak şekilde pozitif bir $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu taktirde (2.4.3) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır (Tunç ve Özdemir, 2019).

Teorem 2.4.10. $(C1) - (C3_\xi)$ sağlansın, $\alpha \geq 1$, $\xi(t) > 0$ ve $g_2(t) \geq h(t)$ olsun, ayrıca (2.4.4) eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif bir $m \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer $\chi_1(t)$ fonksiyonu Teorem 2.4.8'deki gibi tanımlanmak üzere yeterince büyük her $t_1 \in [t_0, \infty)$ ve bazı $T \in (t_1, \infty)$ değerleri için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\chi_1(s) - \frac{r^{1/\alpha}(s)(\eta'_+(s))^2}{4\alpha\eta(s)(R(s, t_1))^{\alpha-1}} \right) ds = \infty,$$

sağlanacak şekilde pozitif bir $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu taktirde (2.4.3) denkleminin her bir çözümü salınımlıdır (Tunç ve Özdemir, 2019).

Teorem 2.4.11. $(C1) - (C3_\xi)$ sağlansın, $\xi(t) > 0$ ve $g_2(t) \leq h(t)$ olsun. Eğer

$$\chi_2(t) = \eta(t)q(t)\xi^\alpha(h(t))$$

olmak üzere yeterince büyük her $t_1 \in [t_0, \infty)$ ve bazı $T \in (t_1, \infty)$ değerleri için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\chi_2(s) - \frac{\eta'_+(s)}{R^\alpha(s, t_1)} \right) ds = \infty$$

kalacak şekilde pozitif bir $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, (2.4.3) denkleminin her bir çözümü salınımlıdır (Tunç ve Özdemir, 2019).

Teorem 2.4.12. $(C1) - (C3_\xi)$ sağlansın, $\xi(t) > 0$ ve $g_2(t) \leq h(t)$ olsun. Eğer $\chi_2(t)$ Teorem 2.4.11'deki gibi tanımlı olmak üzere yeterince büyük her $t_1 \in [t_0, \infty)$ ve bazı

$T \in (t_1, \infty)$ değerleri için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\chi_2(s) - \frac{1}{(\alpha + 1)^{\alpha+1}} \frac{r(s)(\eta'_+(s))^{\alpha+1}}{\eta^\alpha(s)} \right) ds = \infty,$$

sağlanacak şekilde pozitif bir $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, (2.4.3) denkleminin bütün çözümleri salınır (Tunç ve Özdemir, 2019).

Teorem 2.4.13. $(C1) - (C3_\xi)$ sağlansın, $\alpha \geq 1$, $\xi(t) > 0$ ve $g_2(t) \leq h(t)$ olsun. Eğer $\chi_2(t)$ Teorem 2.4.11'deki gibi tanımlı olmak üzere, yeterince büyük her $t_1 \in [t_0, \infty)$ ve bazı $T \in (t_1, \infty)$ değerleri için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\chi_2(s) - \frac{r^{1/\alpha}(s)(\eta'_+(s))^2}{4\alpha\eta(s)(R(s, t_1))^{\alpha-1}} \right) ds = \infty,$$

sağlanacak şekilde pozitif bir $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, (2.4.3) denkleminin bütün çözümleri salınır (Tunç ve Özdemir, 2019).

Teorem 2.4.14. $(C1)-(C2)$ ve $(C3_\varphi)$ sağlansın, $g_1(t) \geq h(t)$ olsun, ayrıca $\varphi(t) > 0$ ve (2.4.4) sağlanacak şekilde pozitif bir $m \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer

$$\chi_3(t) = \eta(t)q(t)\varphi^\alpha(h(t)) \frac{m^\alpha(g_1^{-1}(h(t)))}{m^\alpha(t)}$$

olmak üzere yeterince büyük her $t_1 \in [t_0, \infty)$ ve bazı $T \in [t_2, \infty) \subseteq (t_1, \infty)$ değerleri için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\chi_3(s) - \frac{\eta'_+(s)r(s)(m'(s))^\alpha}{m^\alpha(s)} \right) ds = \infty$$

sağlanacak şekilde pozitif bir $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu taktirde (2.4.3) denkleminin bütün çözümleri salınır (Tunç ve Özdemir, 2019).

Teorem 2.4.15. $(C1)-(C2)$ ve $(C3_\varphi)$ sağlansın, $g_1(t) \geq h(t)$ olsun, ayrıca $\varphi(t) > 0$ ve (2.4.4) sağlanacak şekilde pozitif bir $m \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer $\chi_3(t)$ fonksiyonu Teorem 2.4.14'deki gibi olmak üzere yeterince büyük her $t_1 \in [t_0, \infty)$ ve bazı $T \in [t_2, \infty) \subseteq (t_1, \infty)$ değerleri için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\chi_3(s) - \frac{1}{(\alpha + 1)^{\alpha+1}} \frac{r(s)(\eta'_+(s))^{\alpha+1}}{\eta^\alpha(s)} \right) ds = \infty,$$

sağlanacak şekilde pozitif bir $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, (2.4.3) denkleminin bütün çözümleri salınır (Tunç ve Özdemir, 2019).

Teorem 2.4.16. $(C1)$, $(C2)$ ve $(C3_\varphi)$ sağlansın, $\alpha \geq 1$, $g_1(t) \geq h(t)$ olsun, ayrıca $\varphi(t) > 0$ ve (2.4.4) sağlanacak şekilde pozitif bir $m \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer $\chi_3(t)$ fonksiyonu Teorem 2.4.14'deki gibi olmak üzere, yeterince büyük her $t_1 \in [t_0, \infty)$ ve bazı $T \in [t_2, \infty) \subseteq (t_1, \infty)$ değerleri için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\chi_3(s) - \frac{r^{1/\alpha}(s)(\eta'_+(s))^2}{4\alpha\eta(s)(R(s, t_1))^{\alpha-1}} \right) ds = \infty$$

sağlanacak şekilde pozitif bir $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu taktirde (2.4.3) denkleminin bütün çözümleri salınır (Tunç ve Özdemir, 2019).

Teorem 2.4.17. $(C1)$, $(C2)$ ve $(C3_\varphi)$ sağlansın, $g_1(t) \leq h(t)$ olsun, ayrıca $\varphi(t) > 0$ ve (2.4.4) sağlanacak şekilde pozitif bir $m \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer

$$\chi_4(t) = \eta(t)q(t)\varphi^\alpha(h(t))$$

olmak üzere yeterince büyük her $t_1 \in [t_0, \infty)$ ve bazı $T \in [t_2, \infty) \subseteq (t_1, \infty)$ değerleri için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\chi_4(s) - \frac{\eta'_+(s)}{R^\alpha(s, t_1)} \right) ds = \infty$$

sağlanacak şekilde pozitif bir $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu taktirde (2.4.3) denkleminin bütün çözümleri salınır (Tunç ve Özdemir, 2019).

Teorem 2.4.18. $(C1) - (C2)$ ve $(C3_\varphi)$ sağlansın, $g_1(t) \leq h(t)$ olsun, ayrıca $\varphi(t) > 0$ ve (2.4.4) eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif bir $m \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer $\chi_4(t)$ fonksiyonu Teorem 2.4.17'deki gibi tanımlı olmak üzere yeterince büyük her $t_1 \in [t_0, \infty)$ ve bazı $T \in [t_2, \infty) \subseteq (t_1, \infty)$ değerleri için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\chi_4(s) - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{r(s)(\eta'_+(s))^{\alpha+1}}{\eta^\alpha(s)} \right) ds = \infty$$

sağlanacak şekilde pozitif bir $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu taktirde bu taktirde (2.4.3) denkleminin bütün çözümleri salınır (Tunç ve Özdemir, 2019).

Teorem 2.4.19. $(C1)$, $(C2)$ ve $(C3_\varphi)$ sağlansın, $\alpha \geq 1$, $g_1(t) \leq h(t)$ olsun, ayrıca $\varphi(t) > 0$ ve (2.4.4) eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif bir $m \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer $\chi_4(t)$ fonksiyonu Teorem 2.4.17'deki gibi tanımlı olmak üzere, yeterince büyük her $t_1 \in [t_0, \infty)$ ve bazı $T \in [t_2, \infty) \subseteq (t_1, \infty)$ değerleri için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\chi_4(s) - \frac{r^{1/\alpha}(s)(\eta'_+(s))^2}{4\alpha\eta(s)(R(s, t_1))^{\alpha-1}} \right) ds = \infty$$

olacak şekilde pozitif bir $\eta \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu taktirde (2.4.3) denkleminin bütün çözümleri salınır (Tunç ve Özdemir, 2019).

Örnek 2.4.20. $t \geq 2$ için

$$\left(\frac{1}{t^{1/3}} \left(\left(y(t) + 2y\left(\frac{t}{3}\right) + 8y(4t) \right)' \right)^{1/3} \right)' + (t^2 + t)y^{1/3}(5t) = 0$$

ile verilen yarı-linear neutral diferensiyel denklem, Teorem 2.4.11'in bütün şartlarını sağladığından salınımlıdır (Tunç ve Özdemir, 2019).

Örnek 2.4.21. $t \geq 2$ için

$$\left(\left(\left(y(t) + 3ty\left(\frac{t}{3}\right) + ty(2t) \right)' \right)^3 \right)' + (t^5 + t)y^3\left(\frac{t}{4}\right) = 0$$

ile verilen yarı-linear neutral diferensiyel denklem, Teorem 2.4.14'ün bütün şartlarını sağladığından salınımlıdır (Tunç ve Özdemir, 2019).

Şimdi, linear olmayan neutral terim içeren ikinci mertebeden fonksiyonel denklemler için verilen salınım teoremleri üzerinde duracağız.

$$z(t) = y(t) + p(t)y^\alpha(\tau(t)) \tag{2.4.5}$$

formunda linear olmayan bir neutral terim ile tanımlı

$$(a(y + p(y^\alpha \circ \tau)))'(t) + q(t)f(y(\sigma(t))) = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \tag{2.4.6}$$

ikinci mertebeden neutral diferensiyel denklemi göz önüne alalım. $\alpha > 1$ olduğu durumda (2.4.5) formunda tanımlanan $z(t)$ fonksiyonuna süperlineer neutral terim, $0 < \alpha < 1$ olduğu durumda da sublineer neutral terim denir. Oldukça yakın bir zamanda Bohner, Sudha, Tangavelu ve Thandapani, (2.4.6) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olmasını garanti eden yeni kriterler ortaya koymuştur (Bohner ve ark., 2019). Buna göre,

(H1) $a \in C^1([t_0, \infty), (0, \infty))$, $p, q \in ([t_0, \infty), [0, \infty))$, $t_* \geq t_0$ olmak üzere $[t_*, \infty)$ üzerinde q fonksiyonu özdeş olarak sıfıra eşit değildir ve $t \rightarrow \infty$ iken $p(t) \rightarrow \infty$;

(H2) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve her $u \neq 0$ için $f(u)/u^\beta \geq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır;

(H3) α ve β pozitif tek tam sayıların oranıdır ve $\alpha \geq 1$;

(H4) $\tau, \sigma \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $\tau(t) \leq t$, $\sigma(t) \leq t$, $\tau'(t) > 0$ ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty;$$

koşulları altında aşağıda tanıtacağımız sonuçlar, (2.4.6) denkleminin salınımlı olması için yeter şartlardır. Yazımda kolaylık olması açısından her $t \geq T$ için

$$R(t) = \int_T^t \frac{ds}{a(s)}, \quad A(t) = \int_t^\infty \frac{ds}{a(s)},$$

$$Q_1(t) = \frac{1 - \frac{1}{\alpha p^{\frac{1}{\alpha}}(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} \left(\frac{R(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))}{R(\tau^{-1}(t))} + \frac{\alpha-1}{\mu(\tau^{-1}(t))} \right)}{p(\tau^{-1}(t))} > 0,$$

$$Q_2(t) = \frac{1 - \frac{1}{\alpha p^{\frac{1}{\alpha}}(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} \left(1 + \frac{\alpha-1}{A^2(\tau^{-1}(t))} \right)}{p(\tau^{-1}(t))} > 0$$

notasyonları kullanılacaktır. Burada τ^{-1} fonksiyonu, τ 'nın ters fonksiyonunu göstermektedir.

Teorem 2.4.22. Varsayalım ki $\beta \geq \alpha$,

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{a(t)} = \infty \quad (2.4.7)$$

her $t \geq T$ için $\sigma(t) \leq \tau(t)$ olsun. Eğer her $M_2 > 0$ sabiti için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[\rho(s)q(s)Q_1^{\frac{\beta}{\alpha}}(\sigma(s)) \frac{R^{\frac{\beta}{\alpha}}(\tau^{-1}(\sigma(s)))}{R^{\frac{\beta}{\alpha}}(s)} - \frac{a(s)(\rho'(s))^2}{4M_2\rho(s)} \right] ds = \infty$$

olacak şekilde pozitif, azalmayan ve diferensiyellenebilir bir ρ fonksiyonu varsa, bu taktirde (2.4.6) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır (Bohner ve ark., 2019).

Teorem 2.4.23. Varsayalım ki (2.4.7) sağlansın, $\beta \leq \alpha$ olsun ve her $t \geq T$ için $\sigma(t) \leq \tau(t)$ olsun. Eğer her $M_3 > 0$ sabiti için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[\rho(s)q(s)Q_1^{\frac{\beta}{\alpha}}(\sigma(s)) \frac{R^{\frac{\beta}{\alpha}}(\tau^{-1}(\sigma(s)))}{R(s)} - \frac{a(s)(\rho'(s))^2}{4M_3\rho(s)} \right] ds = \infty$$

olacak şekilde pozitif, azalmayan ve diferensiyellenebilir bir ρ fonksiyonu varsa, bu taktirde (2.4.6) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır (Bohner ve ark., 2019).

Teorem 2.4.24. Varsayalım ki

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{a(t)} < \infty \quad (2.4.8)$$

sağlansın. Eğer

$$\int_T^{\infty} q(t)Q_1^{\frac{\beta}{\alpha}}(\sigma(t))dt = \infty$$

ve

$$\int_T^{\infty} \frac{1}{a(t)} \left[\int_T^t q(s)Q_2^{\frac{\beta}{\alpha}}(\sigma(s))A^{\frac{\beta}{\alpha}}(\tau^{-1}(\sigma(s)))ds \right] dt = \infty \quad (2.4.9)$$

sağlanırsa, bu taktirde (2.4.6) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır (Bohner ve ark., 2019).

Teorem 2.4.25. Varsayalım ki (2.4.8) ve (2.4.9) sağlansın ve $\sigma(t) < \tau(t)$ olsun. Eğer $M > 0$ ve her $t \geq T \geq t_0$ için

$$w'(t) + Mq(t)Q_1^{\frac{\beta}{\alpha}}(\sigma(t))R^{\frac{\beta}{\alpha}}(\tau^{-1}(\sigma(t)))w^{\frac{\beta}{\alpha}}(\tau^{-1}(\sigma(t))) \leq 0,$$

birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel eşitsizliği pozitif çözüme sahip değil ise, (2.4.6) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Bohner ve ark., 2019).

Örnek 2.4.26. $t \geq 1$ için

$$\left(t^2 \left(y(t) + e^t y^3 \left(\frac{t}{2} \right) \right)' \right)' + e^t y \left(\frac{t}{3} \right) = 0$$

süperlineer neutral terimli diferensiyel denklem, Teorem 2.4.24'ün bütün şartlarını sağladığından salınımlıdır (Bohner ve ark., 2019).

Bu bölümde ele alacağımız son denklem,

$$z(t) = x(t) + b(t)x^\alpha(\tau(t))$$

formunda bir lineer olmayan neutral terim içeren ve (2.4.6) denkleminde bir sönüm terimi (damping term) eklenerek elde edilen

$$(az')'(t) + e(t)z'(t) + f(t)x^\beta(\sigma(t)) = 0, \quad t \geq t_0 > 0 \quad (2.4.10)$$

denklemdir. Bohner, Srinivasan ve Thandapani, (2.4.10) denklemini çalışırken

(N1) α ve β üstelleri pozitif tek tam sayıların oranı ve $\alpha \geq 1$;

(N2) $b(t) < 1$ olacak şekilde $b, f \in C([t_0, \infty), [0, \infty))$, ve yeterince büyük t değerleri için $f(t)$ özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyon;

(N3) $a, e \in C([t_0, \infty), [0, \infty))$, $A(t) := \int_{t_0}^t \frac{ds}{a(s)}$ ile tanımlı $A(t)$, sınırlı bir fonksiyon ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b(t)A^\alpha(\tau(t))}{A(t)} = 0;$$

(N4) $\tau, \sigma \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $\tau(t) \geq t$, $\sigma(t) \leq t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$;

koşulları altında aşağıda tanıtılacak sonuçları inşa etmiştir (Bohner ve ark., 2021).
Yazımda kolaylık olması için

$$E(t) := \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{e(s)}{a(s)} ds \right) \quad F(t) := \int_t^\infty \frac{ds}{E(s)a(s)}$$

notasyonları kullanılacaktır.

Teorem 2.4.27. $(N_1) - (N_4)$ sağlansın ve

$$\int_{t_0}^\infty f(t) dt = \infty \tag{2.4.11}$$

olsun. Eğer

$$\rho'(t)a(t) - \rho(t)e(t) \geq 0$$

ve

$$\int_{t_0}^\infty \frac{1}{a(t)\rho(t)} \left(\int_{t_0}^t \rho(s)f(s) ds \right) dt = \infty$$

sağlanacak şekilde bir $\rho \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ fonksiyonu varsa, (2.4.10) denkleminin her bir $x(t)$ çözümü ya salınımlıdır ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ kalır (Bohner ve ark., 2021).

Teorem 2.4.28. $(N_1) - (N_4)$ şartları ve (2.4.11) sağlansın. Eğer

$$\int_{t_0}^\infty \frac{1}{a(t)E(t)} \left(\int_{t_0}^t f(s)E(s)F^\beta(\sigma(s))ds \right) dt = \infty$$

ise, (2.4.10) denkleminin her $x(t)$ çözümü salınımlıdır (Bohner ve ark., 2021).

Teorem 2.4.29. $(N_1) - (N_4)$ şartları ve (2.4.11) sağlansın. Eğer $\beta = 1$ ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ F(t) \int_{t_0}^t E(s)f(s)ds \right\} > 1$$

ise, (2.4.10) denkleminin her $x(t)$ çözümü salınımlıdır (Bohner ve ark., 2021).

Teorem 2.4.30. $(N_1)-(N_4)$ şartları ve (2.4.11) sağlansın, ayrıca $\sigma(t) < t$ azalmayan olsun. Eğer $\beta = 1$ iken

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma(t)}^t \frac{1}{a(s)E(s)} \left(\int_{t_0}^s E(u)f(u)du \right) ds > \frac{1}{e}$$

ya da $\beta < 1$ iken

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{a(t)E(t)} \left(\int_{t_0}^t E(s)f(s)ds \right) dt = \infty$$

ise, (2.4.10) denkleminin her $x(t)$ çözümü salınımlıdır (Bohner ve ark., 2021).

Örnek 2.4.31. $t \geq 1$ için

$$z(t) = x(t) + \frac{x^3(2t)}{t^2}$$

olmak üzere

$$\left(t^2 z'(t) \right)' + t z'(t) + t^6 x^3(t/3) = 0$$

ile verilen süperlineer neutral terimli diferensiyel denklem, Teorem 2.4.27'nin bütün şartlarını sağladığından salınımlıdır (Bohner ve ark., 2021).

3. SALINIM TEOREMLERİ

3.1. İkinci Mertebeden Süperlineer Neutral Terimli Fonksiyonel Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı

Bu bölümde, $u(t)$ ile göstereceğimiz neutral terim, süperlineer formda ve hem ileri tipten hem de gecikmeli sapma argümentleri ihtiva edecek şekilde

$$u(t) = y(t) + \tilde{r}(t)y^\theta(\vartheta(t)) + r(t)y^\theta(\zeta(t)) \quad (\text{NT})$$

ile tanımlı olmak üzere, ikinci mertebeden

$$\left(m(t)u'(t)\right)' + q(t)f(y(e(t))) = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (\text{E})$$

fonksiyonel diferensiyel denklemi göz önüne alınacaktır. Eğer $\theta > 1$ ise (NT) eşitliğiyle tanımlanan ve lineer olmayan $u(t)$ fonksiyonu süperlineer neutral terim, eğer $0 < \theta < 1$ ise sublineer neutral terim olarak sınıflandırılır.

Bu bölüm boyunca, tekrar belirtmeye gerek duyulmaksızın aşağıdaki şartların sağlandığı kabul edilecektir:

- (i) θ pozitif tek tam sayıların bir oranı olacak şekilde $\theta \geq 1$ dir;
- (ii) $m \in C([t_0, \infty), (0, \infty))$, $q \in C([t_0, \infty), [0, \infty))$ ile tanımlı sürekli fonksiyonlar ve q fonksiyonu $t_y \geq t_0$ olmak üzere $[t_y, \infty)$ formundaki herhangi bir yarı aralıkta özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyon;
- (iii) $\vartheta, \zeta, e : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı sapmalar sürekli fonksiyonlar, ϑ ve ζ kesin artan, $\vartheta(t) \leq t \leq \zeta(t)$ ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \infty;$$

- (iv) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı sürekli bir fonksiyon ve λ pozitif tek tam sayıların bir oranı olmak üzere, her $v \neq 0$ için $vf(v) > 0$ ve $f(v)/v^\lambda \geq \kappa$ olacak biçimde bir $\kappa > 0$ sayısı vardır;

(v) $\tilde{r}, r : [t_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ile tanımlı sürekli fonksiyonlar ve $t \rightarrow \infty$ iken $r(t) \rightarrow \infty$.

Çeşitli sınıftan ikinci veya daha yüksek mertebeden neutral diferensiyel denklemlerin ve zaman skalasında neutral dinamik denklemlerin çözümlerinin salınım davranışlarının incelenmesi, literatürde aktif olarak çalışılan önemli bir araştırma konusudur. Bu konu üzerine yapılan araştırmalara örnek olarak (Agarwal ve ark., 2001, 2003, 2014a,b; Baculíková ve Džurina, 2011; Bolat ve Akın, 2004; Candan ve Dahiya, 2008; Grace ve ark., 2018; Graef ve ark., 2017, 2019, 2021; Karpuz ve ark., 2009; Karpuz, 2013; Karpuz ve Santra, 2020; Li ve ark., 2012; Li ve ark., 2012; Li ve ark., 2013; Li ve Rogovchenko, 2014, 2015; Lin ve ark., 2007; Liu ve Ma, 2013; Özdemir ve Tunç, 2018; Özdemir, 2020; Prabakaran ve ark., 2019; Saker, 2006; Saker ve Graef, 2012; Santra ve ark., 2020a,b, 2021a,b,c,d,e; Tamilvanan ve ark., 2017; Tunç ve Graef, 2014; Tunç ve Grace, 2016; Tunç, 2017; Tunç ve Özdemir, 2017; Tunç ve ark., 2021; Yan, 1997; Zhang ve Liu, 2014) çalışmaları okuyucuya referans olarak verilebilir. İlgili literatür incelendiğinde lineer olmayan neutral terimli fonksiyonel diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili yapılan çalışmaların nispeten daha az sayıda olduğu açıkça görülmektedir, örneğin bkz. (Agarwal ve ark., 2014a; Bohner ve ark., 2019, 2021; Grace ve ark., 2018; Graef ve ark., 2019; Lin ve ark., 2007; Tamilvanan ve ark., 2017). Bunun yanında bu çalışmalar incelendiğinde lineer olmayan neutral terimli diferensiyel denklemlerle ilgili salınım sonuçlarının bir çoğunun sublineer durumla ($0 < \theta < 1$) ilgilendiği açıktır.

Son zamanlarda Bohner, Sudha, Tangavelu ve Thandapani, (Bohner ve ark., 2019) ikinci mertebeden süperlineer neutral terimli (2.4.6) diferensiyel denklemini göz önüne aldı. $\tau(t) \leq t$, $\tau'(t) > 0$, $\sigma(t) \leq t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$ şartları altında ve $\alpha \geq 1$ olmak üzere bu denklem için yeni salınım sonuçları elde etti. Ancak dikkat edilmelidir ki, söz konusu çalışmada elde edilen salınım sonuçları $\tau(t) \geq t$ ve/veya $\sigma(t) \geq t$ olduğu durumlarda (2.4.6) neutral diferensiyel denklemine uygulanamamaktadır.

2021 yılında Bohner, Srinivasan ve Thandapani, (Bohner ve ark., 2021), (2.4.6) denkleminin bir sönüm terimi eklenmesiyle elde edilen süperlineer neutral terimli (2.4.10) denkleminin kalitatif özellikleri üzerine çalıştı. Söz konusu çalışmada neutral katsayı fonksiyonu $b(t)$ için $b(t) < 1$, ve sapma argümentleri için $\tau(t) \geq t$ ve $\sigma(t) \leq t$ şartları altında (2.4.10) denkleminin salınım davranışları incelendi. Not edilmelidir ki söz konusu çalışma, neutral katsayı fonksiyonlarının üstten sınırsız olduğu veya neutral terimin bir gecikmeli argüment içerdiği fonksiyonel diferensiyel denklemlere uygulanabilecek bir salınım kriteri sunmamaktadır.

Yukarıdaki gözlemler ışığında, bu çalışmada neutral terimin süperlineer formda olduğu ($\theta \geq 1$) ve hem gecikmeli hem de ileri tipten sapma argümentleri içerdiği, ikinci mertebeden (E) fonksiyonel diferensiyel denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olduğunu gösteren yeter şartlar elde etmek hedeflenmiştir. Dolayısıyla bu çalışmada elde edilen sonuçlar, literatürde mevcut olan bazı sonuçları genelleştirmekte ve genişletmektedir. Ayrıca belirtmelidir ki $e(t)$ sapma argümenti, hem $e(t) \leq t$, hem de uygun t değerleri için $e(t) \geq t$ olarak seçilebilir, bkz. Örnek 3.4.3-3.4.4.

(E) neutral diferensiyel denkleminin bir çözümü, $T_y \in [t_0, +\infty)$ olmak üzere $u \in C^1([T_y, \infty), \mathbb{R})$, $m(u') \in C^1([T_y, \infty), \mathbb{R})$ özelliklerine sahip ve $[T_y, \infty)$ aralığında (E) denklemini sağlayan bir $y : [T_y, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonudur. Bu çalışma boyunca tekrar belirtmeye ihtiyaç duyulmaksızın, (E) denkleminin göz önüne alınan her $y(t)$ çözümünün sağa doğru sürdürülebilir ve aşık olmaya bir çözüm olduğu, yani $y(t)$ çözümünün bütün $[T_y, \infty)$ aralığında tanımlı ve

$$\sup\{|y(t)| : t \geq T\} > 0, \quad \text{her } T \geq T_y \text{ için}$$

olduğu kabul edilecektir.

Ayrıca (E) denkleminin bu şekilde tanımlanan $y(t)$ çözümlerine sahip olduğu da kabul edilecektir. (E) denkleminin böyle bir aşık olmaya $y(t)$ çözümü, eğer $[T_y, \infty)$ aralığında keyfi sayıda yeterince büyük sıfırlara sahip ise, yani sıfırlarının kümesi üstten sınırlı değilse salınımlıdır denir. Aksi taktirde salınımsız çözüm

adını alır. Eğer (E) denkleminin bütün çözümleri salınımlıysa denklemin kendisine salınımlıdır (salınımlı denklem) denir.

Eğer

$$\int_t^\infty \frac{1}{m(\eta)} d\eta = \infty \quad (3.1.1)$$

ise (E) denkleminde kanonik formda,

$$\int_t^\infty \frac{1}{m(\eta)} d\eta < \infty \quad (3.1.2)$$

ise (E) denkleminde kanonik olmayan formdadır denir (Trench, 1974). (E) denklemini hem kanonik hem de kanonik olmayan formda ayrı ayrı göz önüne alınacak, her iki durum için de salınım sonuçları elde edilecektir.

Yazımda kolaylık olması adına aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır:

Yeterince büyük t_1 değerleri için

$$\chi(t) := \int_t^\infty \frac{d\eta}{m(\eta)}, \quad A(t) := \int_{t_1}^t \frac{d\eta}{m(\eta)},$$

ayrıca ζ^{-1} ifadesi, ζ 'nın ters fonksiyonunu ve δ da daha sonra tanımlanacak spesifik bir fonksiyonu göstermek üzere

$$\psi_1(t) := \frac{1}{r(\zeta^{-1}(t))} \left[1 - \frac{\tilde{r}(\zeta^{-1}(t))}{r(\zeta^{-1}(\vartheta(\zeta^{-1}(t))))} - \frac{1}{\theta r^{1/\theta}(\zeta^{-1}(\zeta^{-1}(t)))} \left(1 + \frac{\theta - 1}{\delta(\zeta^{-1}(t))} \right) \right]$$

ve

$$\begin{aligned} \psi_2(t) := & \frac{1}{r(\zeta^{-1}(t))} \left[1 - \frac{\tilde{r}(\zeta^{-1}(t))}{r(\zeta^{-1}(\vartheta(\zeta^{-1}(t))))} \frac{\chi(\zeta^{-1}(\vartheta(\zeta^{-1}(t))))}{\chi(\zeta^{-1}(t))} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\theta r^{1/\theta}(\zeta^{-1}(\zeta^{-1}(t)))} \left(\frac{\chi(\zeta^{-1}(\zeta^{-1}(t)))}{\chi(\zeta^{-1}(t))} + \frac{\theta - 1}{\chi^2(\zeta^{-1}(t))} \right) \right]. \end{aligned}$$

Üstelik, yeterince büyük t değerleri için $\psi_1(t)$ ve $\psi_2(t)$ fonksiyonlarının her ikisinin de pozitif değerli olduğu kabul edilecektir.

3.2. Yardımcı Lemmalar

Bu alt bölümde, ana sonuçlarımızı ispatlamak için kullanacağımız bazı yardımcı lemmaları sunacağız.

Lemma 3.2.1. $\varepsilon > 0$ ve $0 < \beta \leq 1$ olsun. Bu taktirde

$$\varepsilon^\beta \leq \beta\varepsilon + (1 - \beta). \quad (3.2.1)$$

kalır. (Hardy ve ark., 1988, Teorem 41)

Lemma 3.2.2. (3.1.1) sağlansın ve $[t_0, \infty)$ üzerinde (E) denkleminin nihai pozitif bir çözümü $y(t)$ olsun. Bu taktirde her $t \geq t_1 \in [t_0, \infty)$ için

$$u(t) > 0, \quad u'(t) > 0 \quad \text{ve} \quad (mu')'(t) \leq 0 \quad (3.2.2)$$

olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır.

Yukarıdaki Lemma'nın ispatı (Baculíková ve Džurina, 2011, Lemma 3) ile benzerdir. Bu nedenle ispatın detaylarına yer verilmemiştir.

Lemma 3.2.3. Kabul edelim ki $y(t)$ çözümü, $u(t)$ fonksiyonu (3.2.2) durumunu sağlayacak şekilde (E) denkleminin nihai pozitif bir çözümü olsun. Eğer sıfıra yakınsayan, pozitif ve azalan bir $\delta(t)$ fonksiyonu varsa, her $t \geq t_2 \geq t_1$ için

$$y^\theta(t) \geq \psi_1(t)u(\zeta^{-1}(t)) \quad (3.2.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Neutral terim $u(t)$ 'nin tanımından, her $t \geq t_1 \geq t_0$ için

$$u(t) \geq y(t) \quad \text{ve} \quad u(t) \geq y(t) + \tilde{r}(t)y^\theta(\vartheta(t))$$

olduğu açıktır ve

$$\begin{aligned}
y^\theta(\zeta(t)) &= \frac{u(t)}{r(t)} - \frac{y(t)}{r(t)} - \frac{\tilde{r}(t)y^\theta(\vartheta(t))}{r(t)} \\
&= \frac{u(t)}{r(t)} - \frac{1}{r(t)} \left[\frac{u(\zeta^{-1}(t))}{r(\zeta^{-1}(t))} - \frac{y(\zeta^{-1}(t))}{r(\zeta^{-1}(t))} - \frac{\tilde{r}(\zeta^{-1}(t))y^\theta(\vartheta(\zeta^{-1}(t)))}{r(\zeta^{-1}(t))} \right]^{1/\theta} \\
&\quad - \frac{\tilde{r}(t)}{r(t)} \left[\frac{u(\zeta^{-1}(\vartheta(t)))}{r(\zeta^{-1}(\vartheta(t)))} - \frac{y(\zeta^{-1}(\vartheta(t)))}{r(\zeta^{-1}(\vartheta(t)))} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\tilde{r}(\zeta^{-1}(\vartheta(t)))y^\theta(\vartheta(\zeta^{-1}(\vartheta(t))))}{r(\zeta^{-1}(\vartheta(t)))} \right] \\
&\geq \frac{u(t)}{r(t)} - \frac{1}{r(t)} \frac{u^{1/\theta}(\zeta^{-1}(t))}{r^{1/\theta}(\zeta^{-1}(t))} \left[1 - \frac{y(\zeta^{-1}(t)) + \tilde{r}(\zeta^{-1}(t))y^\theta(\vartheta(\zeta^{-1}(t)))}{u(\zeta^{-1}(t))} \right]^{1/\theta} \\
&\quad - \frac{\tilde{r}(t)u(\zeta^{-1}(\vartheta(t)))}{r(t)r(\zeta^{-1}(\vartheta(t)))}. \tag{3.2.4}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.2.4) eşitsizliğine Lemma 3.2.1 uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
y^\theta(\zeta(t)) &\geq \frac{u(t)}{r(t)} - \frac{u^{1/\theta}(\zeta^{-1}(t))}{r(t)r^{1/\theta}(\zeta^{-1}(t))} \left[1 - \frac{1}{\theta} \frac{y(\zeta^{-1}(t)) + \tilde{r}(\zeta^{-1}(t))x^\theta(\vartheta(\zeta^{-1}(t)))}{u(\zeta^{-1}(t))} \right] \\
&\quad - \frac{\tilde{r}(t)u(\zeta^{-1}(\vartheta(t)))}{r(t)r(\zeta^{-1}(\vartheta(t)))} \\
&\geq \frac{1}{r(t)} \left[u(t) - \frac{u^{1/\theta}(\zeta^{-1}(t))}{r^{1/\theta}(\zeta^{-1}(t))} - \frac{\tilde{r}(t)u(\zeta^{-1}(\vartheta(t)))}{r(\zeta^{-1}(\vartheta(t)))} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğe tekrar Lemma 3.2.1 uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
y^\theta(t) &\geq \frac{1}{r(\zeta^{-1}(t))} \left[u(\zeta^{-1}(t)) - \frac{\tilde{r}(\zeta^{-1}(t))u(\zeta^{-1}(\vartheta(\zeta^{-1}(t))))}{r(\zeta^{-1}(\vartheta(\zeta^{-1}(t))))} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r^{1/\theta}(\zeta^{-1}(\zeta^{-1}(t)))} \left(\frac{1}{\theta} u(\zeta^{-1}(\zeta^{-1}(t))) + \frac{\theta-1}{\theta} \right) \right] \tag{3.2.5}
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Diğer taraftan (iii) şartından

$$\zeta^{-1}(\zeta^{-1}(t)) \leq \zeta^{-1}(t) \tag{3.2.6}$$

ve

$$\zeta^{-1}(\vartheta(\zeta^{-1}(t))) \leq \zeta^{-1}(t) \tag{3.2.7}$$

olduğu görülür. $u(t)$ artan olduğundan, (3.2.6) ve (3.2.7) eşitsizliklerinden sırasıyla

$$u\left(\zeta^{-1}(\zeta^{-1}(t))\right) \leq u\left(\zeta^{-1}(t)\right) \quad (3.2.8)$$

ve

$$u\left(\zeta^{-1}(\vartheta(\zeta^{-1}(t)))\right) \leq u\left(\zeta^{-1}(t)\right) \quad (3.2.9)$$

elde edilir. (3.2.8) ve (3.2.9) ifadeleri (3.2.5) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$y^\theta(t) \geq \frac{1 - \frac{\tilde{r}(\zeta^{-1}(t))}{r(\zeta^{-1}(\vartheta(\zeta^{-1}(t))))} - \frac{1}{\theta r^{1/\theta}(\zeta^{-1}(\zeta^{-1}(t)))} \left[1 + \frac{\theta-1}{u(\zeta^{-1}(t))}\right]}{r(\zeta^{-1}(t))} u(\zeta^{-1}(t)) \quad (3.2.10)$$

bulunur. $u(t)$ artan ve $\delta(t)$ azalan ve sifıra yakınsayan fonksiyon olduğundan, her $t \geq t_2$ için

$$u(t) \geq \delta(t)$$

olacak biçimde bir $t_2 \geq t_1$ vardır. Bu son eşitsizlik (3.2.10)'da yerine yazılır ve yeniden düzenlenirse, (3.2.3) elde edilir ve ispat tamamlanır.

Lemma 3.2.4. (3.1.2) sağlansın ve $[t_0, \infty)$ üzerinde (E) denkleminin nihai pozitif bir çözümü $y(t)$ olsun. Bu taktirde, her $t \geq t_1 \geq t_0$ için, $u(t)$ fonksiyonu aşağıdaki iki durumdan birini sağlar.

$$(I) \quad u(t) > 0, u'(t) > 0, (mu')'(t) \leq 0;$$

$$(II) \quad u(t) > 0, u'(t) < 0, (mu')'(t) \leq 0.$$

Yukarıdaki Lemma, Kiguradze ve Chanturia'nın (Kiguradze ve Chanturia, 1993) iyi bilinen lemmasının bir genelleştirmesi olduğundan, ispatın detayları verilmemiştir, ayrıca bkz. (Baculíková, 2019).

Lemma 3.2.5. (3.1.2) sağlansın, (E) denkleminin nihai pozitif bir çözümü $y(t)$ olsun ve $u(t)$ fonksiyonu da Lemma 3.2.4'te belirtilen Durum II'yi sağlasın. Bu taktirde her $t \geq t_2$ için,

$$y^\theta(t) \geq \psi_2(t)u(\zeta^{-1}(t)) \quad (3.2.11)$$

olacak şekilde bir $t_2 \geq t_1 \geq t_0$ vardır.

İspat. Lemma 3.2.3'ün ispatında izlenen yol aynen takip edilirse, tekrar (3.2.5), (3.2.6) ve (3.2.7) eşitsizlikleri elde edilir. Dahası, $\eta \geq t$ için

$$u'(\eta) \leq \frac{m(t)u'(t)}{m(\eta)}$$

olduğu kullanılarak, üstteki bu eşitsizlik t den ℓ ye kadar integre edilirse

$$u(\ell) \leq u(t) + m(t)u'(t) \int_t^\ell \frac{d\eta}{m(\eta)}$$

bulunur. $\ell \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse,

$$0 \leq u(t) + \chi(t)m(t)u'(t)$$

elde edilir ve buradan, $t \geq t_1$ için

$$\left(\frac{u(t)}{\chi(t)} \right)' \geq 0 \quad (3.2.12)$$

sonucuna varılır. (3.2.12) ışığında, (3.2.6) ve (3.2.7) eşitsizliklerinden sırasıyla

$$u(\zeta^{-1}(\zeta^{-1}(t))) \leq \frac{\chi(\zeta^{-1}(\zeta^{-1}(t)))}{\chi(\zeta^{-1}(t))} u(\zeta^{-1}(t)) \quad (3.2.13)$$

ve

$$u(\zeta^{-1}(\vartheta(\zeta^{-1}(t)))) \leq \frac{\chi(\zeta^{-1}(\vartheta(\zeta^{-1}(t))))}{\chi(\zeta^{-1}(t))} u(\zeta^{-1}(t)) \quad (3.2.14)$$

elde edilir. (3.2.13) ve (3.2.14) ifadeleri, (3.2.5)'te kullanılarak

$$\begin{aligned}
y^\theta(t) &\geq \frac{1}{r(\zeta^{-1}(t))} \left[u(\zeta^{-1}(t)) - \frac{\tilde{r}(\zeta^{-1}(t))}{r(\zeta^{-1}(\vartheta(\zeta^{-1}(t))))} \frac{\chi(\zeta^{-1}(\vartheta(\zeta^{-1}(t))))}{\chi(\zeta^{-1}(t))} u(\zeta^{-1}(t)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\theta r^{1/\theta}(\zeta^{-1}(\zeta^{-1}(t)))} \left[\frac{\chi(\zeta^{-1}(\zeta^{-1}(t)))}{\chi(\zeta^{-1}(t))} u(\zeta^{-1}(t)) + \theta - 1 \right] \right] \\
&= \frac{u(\zeta^{-1}(t))}{r(\zeta^{-1}(t))} \left[1 - \frac{\tilde{r}(\zeta^{-1}(t))}{r(\zeta^{-1}(\vartheta(\zeta^{-1}(t))))} \frac{\chi(\zeta^{-1}(\vartheta(\zeta^{-1}(t))))}{\chi(\zeta^{-1}(t))} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\theta r^{1/\theta}(\zeta^{-1}(\zeta^{-1}(t)))} \left[\frac{\chi(\zeta^{-1}(\zeta^{-1}(t)))}{\chi(\zeta^{-1}(t))} + \frac{\theta - 1}{u(\zeta^{-1}(t))} \right] \right] \quad (3.2.15)
\end{aligned}$$

bulunur. $u(t)/\chi(t)$ pozitif ve artan fonksiyon, $\chi(t)$ ise sifıra yakınsayan ve azalan olduğundan, her $t \geq t_2$ için

$$\frac{u(t)}{\chi(t)} \geq \chi(t)$$

olacak şekilde bir $t_2 \geq t_1$ vardır. Dolayısıyla, her $t \geq t_2$ için $u(t) \geq \chi^2(t)$ olduğu (3.2.15)'te yerine yazılırsa (3.2.11) elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

3.3. Temel Sonuçlar

Kanonik formdaki (E) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili ilk kriterimizi aşağıdaki teorem ile veriyoruz.

Teorem 3.3.1. (3.1.1) sağlansın, $\lambda \geq \theta$ ve $e(t) \leq \zeta(t)$ olsun. Eğer her $\kappa_1 > 0$ ve $t > T \geq t_1 \in [t_0, \infty)$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\phi(\eta) q(\eta) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(\eta)) \frac{A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(\eta)))}{A^{\lambda/\theta}(\eta)} - \frac{m(\eta) (\phi'(\eta))^2}{4\kappa_1 \phi(\eta)} \right) d\eta = \infty \quad (3.3.1)$$

sağlanacak şekilde pozitif ve azalmayan bir $\phi \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ varsa, bu takdirde (E) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat. Aksine kabul edelim ki $y(t)$, (E) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın, her $t \geq t_1$ için $y(t) > 0$, $y(\vartheta(t)) > 0$, $y(\zeta(t)) > 0$ ve $y(e(t)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in [t_0, \infty)$ vardır. $y(t)$ nihai negatif olduğu

durumda ispat tamamen benzer olduğundan burada ve tez çalışmasındaki diğer ispatlarda, negatif çözüm ile ilgili detaylara yer verilmeyecektir. (E) denklemi ve (3.2.3) eşitsizliğinden, her $t \geq t_2 \in [t_1, \infty)$ için

$$\left(m(t)u'(t)\right)' + \kappa q(t)\psi_1^{\lambda/\theta}(e(t))u^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(t))) \leq 0, \quad (3.3.2)$$

kahr. $[t_1, \infty)$ üzerinde $m(t)u'(t)$ azalan olduğundan

$$u(t) = u(t_1) + \int_{t_1}^t \frac{m(\eta)u'(\eta)}{m(\eta)}d\eta \geq m(t)u'(t)A(t) \quad (3.3.3)$$

elde edilir. (3.3.3)'ten, her $t \geq t_2 \in [t_1, \infty)$ için

$$\left(\frac{u(t)}{A(t)}\right)' \leq 0 \quad (3.3.4)$$

kaldığı açıktır. (3.3.4) ve $\zeta^{-1}(e(t)) \leq t$ olduğu kullanılarak, her $t \geq t_2$ için

$$\frac{u(\zeta^{-1}(e(t)))}{A(\zeta^{-1}(e(t)))} \geq \frac{u(t)}{A(t)} \quad (3.3.5)$$

bulunur. (3.3.5) ışığında (3.3.2) eşitsizliği, her $t \geq t_2$ için

$$\left(m(t)u'(t)\right)' + \kappa q(t)\psi_1^{\lambda/\theta}(e(t)) \frac{A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(t)))}{A^{\lambda/\theta}(t)} u^{\lambda/\theta}(t) \leq 0, \quad (3.3.6)$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi $t \geq t_2$ için

$$\Psi(t) = \phi(t) \frac{m(t)u'(t)}{u(t)} \quad (3.3.7)$$

formundaki Riccati tipi dönüşümü tanımayalım. $\Psi(t) > 0$ olduğu açıktır. (3.3.7)

diferensiyellenir ve (3.3.6) göz önüne alınırsa, her $t \geq t_2$ için

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}\Psi(t) + \frac{\phi(t)(m(t)u'(t))'}{u(t)} - \frac{\Psi^2(t)}{\phi(t)m(t)} \\ &\leq \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}\Psi(t) - \kappa\phi(t)q(t)\psi_1^{\lambda/\theta}(e(t)) \frac{A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(t)))}{A^{\lambda/\theta}(t)} \frac{u^{\lambda/\theta}(t)}{u(t)} - \frac{\Psi^2(t)}{\phi(t)m(t)} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

elde edilir. $u(t)$ pozitif ve kesin artan olduğundan, her $t \geq t_2$ için $u(t) \geq C > 0$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. Buna göre (3.3.8) eşitsizliği Ψ 'ye göre tam kareye tamamlanırsa, $\kappa_1 = \kappa C^{(\lambda-\theta)/\theta}$ olmak üzere

$$\Psi'(t) \leq -\kappa_1 \phi(t) q(t) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(t)) \frac{A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(t)))}{A^{\lambda/\theta}(t)} + \frac{m(t)(\phi'(t))^2}{4\phi(t)}, \quad (3.3.9)$$

bulunur. (3.3.9) ifadesi t_2 'den t 'ye kadar integralenirse

$$\int_{t_2}^t \left(\phi(\eta) q(\eta) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(\eta)) \frac{A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(\eta)))}{A^{\lambda/\theta}(\eta)} - \frac{m(\eta)(\phi'(\eta))^2}{4\kappa_1 \phi(\eta)} \right) d\eta \leq \Psi(t_2),$$

sonucuna varılır, ki bu son eşitsizlik (3.3.1) ile çelişir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.1'den $\phi(t)$ fonksiyonunun farklı seçimlerini kullanarak (E) denkleminin salınımlılığı için farklı yeter şartlar ortaya konulabilir. Örneğin $\phi(t) = 1$ ve $\rho \geq 1$ olmak üzere $\phi(t) = t^\rho$ için sırasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.3.2. (3.1.1) sağlansın, $\lambda \geq \theta$ ve $e(t) \leq \zeta(t)$ olsun. Eğer her $t > T \geq t_1 \in [t_0, \infty)$ için,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t q(\eta) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(\eta)) \frac{A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(\eta)))}{A^{\lambda/\theta}(\eta)} d\eta = \infty \quad (3.3.10)$$

sağlanıyorsa, bu taktirde (E) denklemin salınımlıdır.

Sonuç 3.3.3. (3.1.1) sağlansın, $\lambda \geq \theta$ ve $e(t) \leq \zeta(t)$ olsun. Eğer her $t > T \geq t_1 \in [t_0, \infty)$ ve her $\kappa_1 > 0$ sabiti için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\eta^\rho q(\eta) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(\eta)) \frac{A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(\eta)))}{A^{\lambda/\theta}(\eta)} - \frac{\rho^2 m(\eta) \eta^{\rho-2}}{4\kappa_1} \right) d\eta = \infty \quad (3.3.11)$$

sağlanırsa, bu taktirde (E) denklemin salınımlıdır.

Sıradaki teorem ile Philos'un (Philos, 1989) çalışmasındaki sonuçlar yardımıyla, integral ortalama tekniği kullanılarak (E) denkleminin salınımlılığı için yeter şartlar verilecektir. Bunun için öncelikle $\mathcal{P}$ fonksiyonlar sınıfı olarak adlandıracağımız aşağıdaki fonksiyonlar sınıfını tanımlayalım.

$S_0 \equiv \{(t, \eta) \in \mathbb{R}^2 : t > \eta \geq t_0\}$ ve $S \equiv \{(t, \eta) \in \mathbb{R}^2 : t \geq \eta \geq t_0\}$ olsun. Eğer aşağıdaki iki şart sağlanıyorsa $J \in C(S, \mathbb{R})$ fonksiyonuna $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyondur denir ve $J \in \mathcal{P}$ ile gösterilir:

($\mathcal{P}_1$) $t \geq t_0$ için $J(t, t) = 0$ ve S_0 üzerinde $J(t, \eta) > 0$;

($\mathcal{P}_2$) $J(t, \eta)$ fonksiyonu S_0 üzerinde ikinci değişkene göre sürekli ve pozitif olmayan kısmi türevlere sahiptir.

Teorem 3.3.4. (3.1.1) sağlansın, $\lambda \geq \theta$ ve $e(t) \leq \zeta(t)$ olsun. Ayrıca kabul edelim ki $J \in \mathcal{P}$ olacak şekilde $j, J : S \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsun ve her $(t, \eta) \in S_0$ için

$$-\frac{\partial J}{\partial \eta}(t, \eta) = j(t, \eta)\sqrt{J(t, \eta)} \quad (3.3.12)$$

sağlansın. Eğer

$$\Phi(t, \eta) = -j(t, \eta) + \frac{\phi'(\eta)}{\phi(\eta)}\sqrt{J(t, \eta)}, \quad (3.3.13)$$

olmak üzere her $\kappa_1 > 0$ sabiti ve her $t > T \geq t_1 \in [t_0, \infty)$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{J(t, T)} \int_T^t \left[J(t, \eta) \phi(\eta) q(\eta) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(\eta)) \frac{A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(\eta)))}{A^{\lambda/\theta}(\eta)} - \frac{\phi(\eta) m(\eta) \Phi^2(t, \eta)}{4\kappa_1} \right] d\eta = \infty \quad (3.3.14)$$

kalacak şekilde pozitif ve azalmayan bir $\phi \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu taktirde (E) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat. $y(t)$, (E) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü olsun. Teorem 3.3.1'in ispatındaki süreç takip edilirse, tekrar (3.3.8) elde edilir. (3.3.8) ifadesinden her $t > t_2 \in [t_1, \infty)$ için

$$\begin{aligned} \int_{t_2}^t J(t, \eta) \kappa_1 \phi(\eta) q(\eta) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(\eta)) \frac{A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(\eta)))}{A^{\lambda/\theta}(\eta)} d\eta &\leq - \int_{t_2}^t J(t, \eta) \Psi'(\eta) d\eta \\ &+ \int_{t_2}^t J(t, \eta) \frac{\phi'(\eta)}{\phi(\eta)} \Psi(\eta) d\eta - \int_{t_2}^t J(t, \eta) \frac{\Psi^2(\eta)}{\phi(\eta) m(\eta)} d\eta \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

sonucuna varılır. (3.3.15) eşitsizliğinin sağ tarafındaki birinci terime kısmi integral yöntemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\int_{t_2}^t J(t, \eta) \Psi'(\eta) d\eta &= J(t, \eta) \Psi(\eta) \Big|_{t_2}^t - \int_{t_2}^t \frac{\partial J}{\partial \eta}(t, \eta) \Psi(\eta) d\eta \\ &= -J(t, t_2) \Psi(t_2) - \int_{t_2}^t \frac{\partial J}{\partial \eta}(t, \eta) \Psi(\eta) d\eta\end{aligned}\quad (3.3.16)$$

elde ederiz. (3.3.12) ve (3.3.16) ifadeleri, (3.3.15) içinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\int_{t_2}^t J(t, \eta) \kappa_1 \phi(\eta) q(\eta) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(\eta)) \frac{A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(\eta)))}{A^{\lambda/\theta}(\eta)} d\eta &\leq J(t, t_2) \Psi(t_2) \\ &+ \int_{t_2}^t \left[-j(t, \eta) \sqrt{J(t, \eta)} + J(t, \eta) \frac{\phi'(\eta)}{\phi(\eta)} \right] \Psi(\eta) d\eta \\ &- \int_{t_2}^t J(t, \eta) \frac{\Psi^2(\eta)}{\phi(\eta) m(\eta)} d\eta\end{aligned}\quad (3.3.17)$$

bulunur. (3.3.17) ifadesi Ψ 'ye göre tam kareye tamamlanır,

$$\begin{aligned}\int_{t_2}^t J(t, \eta) \kappa_1 \phi(\eta) q(\eta) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(\eta)) \frac{A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(\eta)))}{A^{\lambda/\theta}(\eta)} d\eta \\ \leq J(t, t_2) \Psi(t_2) + \frac{1}{4} \int_{t_2}^t \phi(\eta) m(\eta) \Phi^2(t, \eta) d\eta\end{aligned}\quad (3.3.18)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse, her $t > t_2$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{J(t, t_2)} \int_{t_2}^t \left[J(t, \eta) \phi(\eta) q(\eta) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(\eta)) \frac{A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(\eta)))}{A^{\lambda/\theta}(\eta)} \right. \\ \left. - \frac{\phi(\eta) m(\eta) \Phi^2(t, \eta)}{4\kappa_1} \right] d\eta \leq \Psi(t_2),\end{aligned}$$

olduğu görülür ve (3.3.14) ile çelişir. Bu çelişki ispatı tamamlar.

Şimdi $\lambda < \theta$ olduğu durumda salınım sonuçları verilecektir.

Teorem 3.3.5. (3.1.1) sağlansın, $\lambda < \theta$ ve $e(t) \leq \zeta(t)$ olsun. Eğer her $\kappa_2 > 0$ sabiti ve her $t > T \geq t_1 \in [t_0, \infty)$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\phi(\eta) q(\eta) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(\eta)) \frac{A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(\eta)))}{A(\eta)} - \frac{m(\eta) (\phi'(\eta))^2}{4\kappa_2 \phi(\eta)} \right) d\eta = \infty \quad (3.3.19)$$

olacak şekilde pozitif ve azalmayan bir $\phi \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu taktirde (E) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat. $y(t)$, (E) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü olsun. Teorem 3.3.1'in ispatındaki yol aynı şekilde takip edilirse, tekrar (3.3.2)-(3.3.5) eşitsizlikleri elde edilir. $\lambda < \theta$ ve $u(t)/A(t)$ fonksiyonu $[t_1, \infty)$ üzerinde artmayan olduğundan, her $t \geq t_2 \in [t_1, \infty)$ için

$$\left(\frac{u(t)}{A(t)} \right)^{\frac{\lambda-\theta}{\theta}} \geq \frac{1}{C_1^{1-\frac{\lambda}{\theta}}} \quad (3.3.20)$$

olacak şekilde bir $C_1 > 0$ vardır. (3.3.2) eşitsizliğinin içinde (3.3.5) ve (3.3.20) kullanılırsa, $\kappa_2 = \frac{\kappa}{C_1^{1-\frac{\lambda}{\theta}}}$ olmak üzere

$$\left(m(t) u'(t) \right)' + \kappa_2 q(t) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(t)) \frac{A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(t)))}{A(t)} u(t) \leq 0, \quad (3.3.21)$$

elde edilir. İspatın geriye kalan kısmı Teorem 3.3.1'in ispatı ile tamamen benzer olduğundan ayrıntılara yer verilmemiştir.

Teorem 3.3.6. (3.1.1) sağlansın, $\lambda < \theta$ ve $e(t) \leq \zeta(t)$ olsun. Ayrıca kabul edelim ki $J \in \mathcal{P}$ olacak şekilde $j, J : S \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsun ve (3.3.12) sağlansın. $\Phi(t, \eta)$ fonksiyonu (3.3.13) ile tanımlı olmak üzere, eğer her $\kappa_2 > 0$ ve her $t > T \geq t_1 \in [t_0, \infty)$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{J(t, T)} \int_T^t \left[J(t, \eta) \phi(\eta) q(\eta) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(\eta)) \frac{A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(\eta)))}{A(\eta)} - \frac{\phi(\eta) m(\eta) \Phi^2(t, \eta)}{4\kappa_2} \right] d\eta = \infty \quad (3.3.22)$$

sağlanacak şekilde pozitif ve azalmayan $\phi \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu taktirde (E) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat. Teorem 3.3.4 ve Teorem 3.3.5'ten direkt olarak elde edilebileceği için, ayrıntılar okuyucuya bırakılmıştır.

Şimdi (E) denkleminin kanonik olmayan formda olduğu, yani (3.1.2) integralinin yakınsak olduğu durum için salınım sonuçları verilecektir.

Teorem 3.3.7. (3.1.2) sağlansın ve $e(t) < \zeta(t)$ olsun. Eğer

$$z'(t) + \kappa q(t) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(t)) A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(t))) z^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(t))) \leq 0 \quad (3.3.23)$$

birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel eşitsizliği pozitif bir çözüme sahip değilse, ve her $t > T \geq t_1 \in [t_0, \infty)$ için

$$\int_T^\infty \frac{1}{m(t)} \left(\int_T^t q(\eta) \psi_2^{\lambda/\theta}(e(\eta)) \chi^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(\eta))) d\eta \right) dt = \infty \quad (3.3.24)$$

kalıyorsa, bu taktirde (E) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat. $y(t)$, (E) denkleminin salınım yapmayan bir çözümünü olsun. Genellik bozulmaksızın, her $t \geq t_1$ için $y(t) > 0$, $y(\vartheta(t)) > 0$, $y(\zeta(t)) > 0$ ve $y(e(t)) > 0$ olacak ve $u(t)$ fonksiyonu Lemma 3.2.4 ile belirtilen Durum (I) ve Durum (II)'den bir tanesini sağlayacak şekilde bir $t_1 \in [t_0, \infty)$ vardır. Her iki durumu da ayrı ayrı inceleyelim.

Durum (I): $[t_1, \infty)$ üzerinde $u'(t) > 0$ olsun. Teorem 3.3.1'in ispatında izlenen yol aynen takip edilerek, (3.3.2) ve (3.3.3) elde edilir. $t \geq t_2$ için $z(t)$ fonksiyonunu

$$z(t) = m(t)u'(t)$$

ile tanımlayalım. Bu durumda, $z(t) > 0$ 'dır. (3.3.2) eşitsizliğinde (3.3.3) kullanılırsa, her $t \geq t_2$ için

$$z'(t) + \kappa q(t) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(t)) A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(t))) z^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(t))) \leq 0$$

elde edilir ve $z(t)$ fonksiyonu (3.3.23) eşitsizliğinin pozitif bir çözümü olur. Bu da bir çelişkidir.

Durum (II): $[t_1, \infty)$ üzerinde $u'(t) < 0$ olsun. Lemma 3.2.5'in ispatındaki süreç aynen tekrar edilirse (3.2.11) ve (3.2.12) elde edilir. Buna göre, her $t \geq t_2$ için, (E) denklemi ve (3.2.11) eşitsizliğinden,

$$\left(m(t)u'(t)\right)' + \kappa q(t) \psi_2^{\lambda/\theta}(e(t)) u^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(t))) \leq 0,$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik t_2 'den t 'ye kadar integre edilirse

$$\kappa \int_{t_2}^t q(\eta) \psi_2^{\lambda/\theta}(e(\eta)) u^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(\eta))) d\eta \leq -m(t)u'(t) \quad (3.3.25)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan (3.2.12) eşitsizliği $u(t)/\chi(t)$ fonksiyonun $[t_1, \infty)$ üzerinde azalmayan olduğunu garanti ettiğinden,

$$\text{her } t \geq t_2 \in [t_1, \infty) \text{ için } \frac{u(t)}{\chi(t)} \geq C_2 > 0$$

olacak şekilde bir $C_2 > 0$ vardır. Bu yüzden de (3.3.25) eşitsizliğinden

$$\frac{\kappa C_2^{\lambda/\theta}}{m(t)} \int_{t_2}^t q(\eta) \psi_2^{\lambda/\theta}(e(\eta)) \chi^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(\eta))) d\eta \leq -u'(t) \quad (3.3.26)$$

sonucuna varılır. (3.3.26) ifadesinin t_2 'den t 'ye integrali alınır ve $t \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse, (3.3.24) ile çelişki elde edilir ve bu çelişki ile ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.8. (3.1.2) sağlansın, $\lambda = \theta$ ve $e(t) < \zeta(t)$ olsun. Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\zeta^{-1}(e(t))}^t q(\eta) \psi_1(e(\eta)) A(\zeta^{-1}(e(\eta))) d\eta > \frac{1}{e\kappa} \quad (3.3.27)$$

ve

$$\int_T^\infty \frac{1}{m(t)} \left(\int_T^t q(\eta) \psi_2(e(\eta)) \chi(\zeta^{-1}(e(\eta))) d\eta \right) dt = \infty, \quad (3.3.28)$$

ise, bu taktirde (E) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat. $y(t)$, (E) denkleminin salınımsız (ve nihai pozitif) bir çözümü olsun. Bu taktirde, $u(t)$ Lemma 3.2.4 ile belirtilen Durum (I) yada Durum (II)'den birini sağlayacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır. Eğer Durum (II) sağlanırsa, ispat Teorem 3.3.7'nin ispatındaki ikinci durumla, $\lambda = \theta$ için tamamen aynıdır.

Durum (I): $[t_1, \infty)$ üzerinde $u'(t) > 0$ olsun. Bu taktirde $z(t)$ fonksiyonu (3.3.23) eşitsizliğinin pozitif bir çözümü olur. Diğer taraftan (3.3.27) şartı sağlanırsa, (Ladde ve ark., 1987, Teorem 2.1.1)'den görülür ki (3.3.23) eşitsizliği pozitif bir çözüme sahip olamaz. Bu çelişki ispatı tamamlar.

Sonuç 3.3.9. (3.1.2) sağlansın, $\lambda < \theta$ ve $e(t) < \zeta(t)$ olsun. Eğer

$$\int_T^\infty q(t) \psi_1^{\lambda/\theta}(e(t)) A^{\lambda/\theta}(\zeta^{-1}(e(t))) dt = \infty \quad (3.3.29)$$

ve (3.3.24) sağlanırsa, bu taktirde (E) denkleminin salınımlıdır.

İspat. $y(t)$, (E) denkleminin salınımsız (ve nihai pozitif) bir çözümü olsun. Bu taktirde, $u(t)$ Lemma (3.2.4) ile belirtilen Durum (I) yada Durum (II)'den birini sağlayacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır. Eğer Durum (II) sağlanırsa, ispat Teorem 3.3.7'nin ispatındaki ikinci durumla tamamen benzerdir.

Durum (I): $[t_1, \infty)$ üzerinde $u'(t) > 0$ olsun. Bu taktirde $z(t)$ fonksiyonu (3.3.23) eşitsizliğinin pozitif bir çözümü olur. Buna karşılık, (3.3.29) sağlanırsa (Kitamura ve Kusano, 1980, Teorem 2)'den dolayı (3.3.23) eşitsizliğinin pozitif bir çözümü olamaz. Bu çelişki ispatı tamamlar.

Sonuç 3.3.10. (3.1.2) sağlansın, $\lambda > \theta$ ve $b, c, d > 0$ reel sabitler olmak üzere $e(t) = t - b$, $\vartheta(t) = t - c$ ve $\zeta(t) = t + d$ olsun. Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\lambda}{\theta} \right)^{-\frac{t}{b+d}} \log \left(q(t) \psi_1^{\lambda/\theta}(t-b) A^{\lambda/\theta}(t-b-d) \right) \right] > 0, \quad (3.3.30)$$

ve (3.3.24) sağlanırsa, bu taktirde (E) denklemini salınımlıdır.

İspat. $y(t)$, (E) denkleminin salınımsız (ve nihai pozitif) bir çözümü olsun. Bu taktirde, $u(t)$ Lemma (3.2.4) ile belirtilen Durum (I) yada Durum (II)'den birini sağlayacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır. Eğer Durum (II) sağlanırsa, ispat Teorem 3.3.7'nin ispatındaki ikinci durumla tamamen benzerdir.

Durum (I): $[t_1, \infty)$ üzerinde $u'(t) > 0$ olsun. Bu taktirde, Teorem 3.3.7'den dolayı $z(t)$ fonksiyonu (3.3.23)'e karşılık gelen

$$z'(t) + \kappa q(t) \psi_1^{\lambda/\theta}(t-b) A^{\lambda/\theta}(t-b-d) z^{\lambda/\theta}(t-b-d) \leq 0$$

diferensiyel eşitsizliğinin pozitif bir çözümüdür. Bu yüzden de, (Sakamoto ve Tanaka, 2010, Lemma 2.2)'den dolayı, bu eşitsizliğe karşılık gelen

$$z'(t) + \kappa q(t) \psi_1^{\lambda/\theta}(t-b) A^{\lambda/\theta}(t-b-d) z^{\lambda/\theta}(t-b-d) = 0 \quad (3.3.31)$$

denkleminin pozitif bir çözümü vardır. Diğer taraftan, eğer (3.3.30) sağlanırsa, (Sakamoto ve Tanaka, 2010, Sonuç 1.2)'den dolayı (3.3.31) denklemin pozitif bir çözüme sahip olamaz. Bu çelişki ispatı tamamlar.

3.4. Örnekler ve Notlar

Not 3.4.1. Eğer bu bölümde verilen bütün Teoremler ve Sonuçlar içinde $\tilde{r}(t) = 0$ alınırsa bu durumda $\theta \geq 1$, $e(t) \leq \zeta(t)$ ve $\zeta(t) \geq t$ şartları altında

$$\left(m(t) \left(y(t) + r(t) y^\theta(\zeta(t)) \right)' \right)' + q(t) f(y(e(t))) = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (3.4.1)$$

denkleminin salınımlılığı için yeter şartlar elde edilir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar (i) – (v) şartları altında (3.4.1) ileri tipten neutral diferensiyel denklemi içinde geçerlidir.

Not 3.4.2. Bu çalışmada elde edilen sonuçların, $\zeta(t)$ ve $e(t)$ fonksiyonlarının seçimine göre çok yönlü olduğuna dikkat çekmek istiyoruz. $\zeta(t) \geq t$ ve $e(t) \leq \zeta(t)$ olduğundan $e(t)$ sapma argümenti gecikmeli yada uygun bir ileri tipten sapma argümenti olarak seçilebilir.

Örnek 3.4.3. $t \geq 2$ için, ikinci mertebeden

$$\left(e^{-t} \left[y(t) + y^3(t/2) + e^{3t} y^3(2t) \right]' \right)' + \Omega e^{3t} y^3(2t - 1) = 0 \quad (3.4.2)$$

neutral diferensiyel deklemini göz önüne alalım. Burada

- $m(t) = e^{-t}$, $\lambda = \theta = 3$, $\kappa = 1$ ve Ω bir sabit olmak üzere $q(t) = \Omega e^{3t}$;
- $r(t) = e^{3t}$, $\tilde{r}(t) = 1$, $\zeta(t) = 2t$, $e(t) = 2t - 1$ ve $\vartheta(t) = t/2$

olduğu görülmektedir. (i) – (v) şartları ve (3.1.1) sağlanır. Direkt bir hesaplama ile $A(t) = e^t - e^2$ olarak bulunur. Ayrıca $\delta(t) = 4e^{-t/2}$ olarak seçilirse, $\delta(t)$ 'nin pozitif değerli, azalan ve $t \rightarrow \infty$ iken sifıra yakınsayan bir fonksiyon olduğu açıktır. Dahası, $t \geq T \geq 2$ için

$$\psi_1(t) = \frac{5e^{5t/8} - 2e^{3t/8} - 6e^{t/4}}{6e^{17t/8}} > 0$$

olduğu görülür. $\zeta^{-1}(e(t)) = t - 1/2 < t$ olduğu göz önüne alınır ve $\phi(t) = 1$ seçilirse $\Omega > 0$ ve $t > T \geq 2$ için (3.3.10) şartı sağlanır. Bu yüzden $\Omega > 0$ olmak kaydıyla, Sonuç 3.3.2'nin bütün şartları sağlandığından dolayı (3.4.2) denklemi salınımlıdır.

Örnek 3.4.4. $t \geq 7$ için, ikinci mertebeden

$$\left(t^2 \left[y(t) + ty^{5/3}(t-1) + t^5y^{5/3}(t+2)\right]'\right)' + t^5y(t+1) = 0. \quad (3.4.3)$$

neutral diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada

- $q(t) = t^5$, $\kappa = 1$, $m(t) = t^2$, $\lambda = 1$ ve $\theta = 5/3$;
- $r(t) = t^5$, $\tilde{r}(t) = t$, $e(t) = t + 1$, $\zeta(t) = t + 2$ ve $\vartheta(t) = t - 1$

olduğu açıktır. Bu denklem için, (i) – (v) şartları ve (3.1.2) sağlanır. Ayrıca

$$A(t) = \frac{t-7}{7t} \quad \text{and} \quad \chi(t) = \frac{1}{t}$$

olduğu basit bir hesaplama ile görülebilir. Eğer $\delta(t) = 4(t-2)^{-1}$ seçilirse, $\delta(t)$ pozitif değerli, azalan ve $t \rightarrow \infty$ iken sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur. Diğer taraftan $t \geq 7$ için

$$\psi_1(t) = \frac{1}{(t-2)^5} \left[1 - \frac{t-2}{(t-5)^5} - \frac{3}{5(t-4)^3} - \frac{1}{10(t-4)^2} \right] > 0$$

ve

$$\psi_2(t) = \frac{1}{(t-2)^5} \left[1 - \frac{(t-2)^2}{(t-5)^6} - \frac{3}{5(t-4)^3} \left(\frac{t-2}{t-4} + \frac{2(t-2)^2}{3} \right) \right] > 0$$

elde edilir. $\zeta^{-1}(e(t)) = t - 1 < t$ olduğu göz önüne alınır ve $\phi(t) = 1$ seçilirse $t > T \geq 7$ için (3.3.24) ve (3.3.29) sağlanır. Bu yüzden Sonuç 3.3.9'dan dolayı (3.4.3) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Not 3.4.5. Bu bölümde sunulan sonuçlar "Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society" dergisinde "Oscillation of Second-Order Functional Differential Equations with Superlinear Neutral Terms" başlıklı bilimsel araştırma makalesi olarak yayınlanmıştır (Özdemir ve Kılıç, 2022).

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu bölümde, tez çalışmasında elde edilen ana sonuçlara ek olarak, elde edilebilecek yeni sonuçlar ve bazı açık problemler notlar halinde verilecektir.

4.1. Tartışma ve Sonuç

Not 4.1.1. Kabul edelim ki (v) şartı

(v^*) $t \rightarrow \infty$ iken $\tilde{r}(t) \rightarrow \infty$ olmak üzere $\tilde{r}, r \in C([t_0, \infty), [0, \infty))$

şartı ile değiştirilsin. Bu durumda $\psi_1(t)$ ve $\psi_2(t)$ fonksiyonları yerine sırasıyla

$$\begin{aligned} \psi_3(t) := & \frac{1}{\tilde{r}(\vartheta^{-1}(t))} \left[1 - \frac{r(\vartheta^{-1}(t))}{\tilde{r}(\vartheta^{-1}(\zeta(\vartheta^{-1}(t))))} \frac{A(\vartheta^{-1}(\zeta(\vartheta^{-1}(t))))}{A(\vartheta^{-1}(t))} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\theta \tilde{r}^{1/\theta}(\vartheta^{-1}(\vartheta^{-1}(t))))} \left(\frac{A(\vartheta^{-1}(\vartheta^{-1}(t))))}{A(\vartheta^{-1}(t))} + \frac{\theta - 1}{\delta(\vartheta^{-1}(t))} \right) \right] \end{aligned}$$

ve

$$\psi_4(t) = \frac{1}{\tilde{r}(\vartheta^{-1}(t))} \left[1 - \frac{r(\vartheta^{-1}(t))}{\tilde{r}(\vartheta^{-1}(\zeta(\vartheta^{-1}(t))))} - \frac{1}{\theta \tilde{r}^{1/\theta}(\vartheta^{-1}(\vartheta^{-1}(t))))} \left(1 + \frac{\theta - 1}{\chi^2(\vartheta^{-1}(t))} \right) \right]$$

fonksiyonları tanımlanırsa, $(i) - (v^*)$, $e(t) \leq \vartheta(t)$, $\psi_3(t) > 0$ ve $\psi_4(t) > 0$ şartları altında (E) denkleminin salınımlılığı için yeni sonuçlar elde edilebilir.

Not 4.1.2. (E) denkleminin salınımlılığı $0 < \theta \leq 1$ ve $t \rightarrow \infty$ iken $r(t) \rightarrow \infty$ ve/veya $\tilde{r}(t) \rightarrow \infty$ şartları altında incelenebilir.

Not 4.1.3. $\theta \geq 1$ olmak üzere, süperlineer neutral terimli (E) denklemi için

$$-\infty < r, \tilde{r} < 0 \quad \text{veya} \quad -\infty < r, \tilde{r} < -1$$

şartları altında salınım sonuçları elde etme problemi açıktır.

Not 4.1.4. (iii) şartında ϑ ve ζ sapma argümentleri için monotonluk şartı verilmiştir. Monoton olmayan ϑ ve ζ argümentleri ile tanımlı (E) denklemi için salınım kriterleri elde etme problemi açıktır.

KAYNAKLAR

- Agarwal, R.P., Grace, S. R. ve O'Regan, D., 2001. Oscillation criteria for certain n th order differential equations with deviating arguments. *J. Math. Anal. Appl.*, **37**, 601-622.
- Agarwal, R.P., Grace, S. R. ve O'Regan, D., 2002. *Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-Linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Agarwal, R.P., Grace, S.R. ve O'Regan, D., 2003. The oscillation of certain higher-order functional differential equations. *Math. Comput. Modelling*, **37**, 705–728.
- Agarwal, R.P., Bohner, M. ve Li, W.-T., 2004. *Nonoscillation and Oscillation Theory for Functional Differential Equations*. Marcel Dekker Inc., New York.
- Agarwal, R.P., Bohner, M., Li, T., ve Zhang, C., 2014a. Oscillation of second-order differential equations with a sublinear neutral term. *Carpath. J. Math.*, **30**, 1-6.
- Agarwal, R.P., Bohner, M., Li, T. ve Zhang, C., 2014b. Oscillation of second-order Emden–Fowler neutral delay differential equations. *Ann. Math. Pur. Appl.*, **193**, 1861–1875.
- Baculiková, B. ve Džurina, J., 2011. Oscillation theorems for second-order nonlinear neutral differential equations. *Comput. Math. Appl.*, **62**, 4472-4478.
- Baculiková, B., 2019. Oscillation of second-order nonlinear noncanonical differential equations with deviating argument. *Appl. Math. Lett.*, **91**, 68–75.
- Bereketoğlu, H., Seyhan, G. ve Karakoç, F., 2011. On a second order differential equation with piecewise constant mixed arguments. *Carpath. J. Math.*, **27**(1), 1-12.
- Bohner, M., Sudha, B., Tangavelu, K. ve Thandapani, E., 2019. Oscillation criteria for second-order differential equations with superlinear neutral term. *Nonlinear Stud.*, **227**(2), 425-434.
- Bohner, M., Srinivasan, B. ve Thandapani, E., 2021. Oscillation of second-order damped noncanonical differential equations with superlinear neutral term. *J. Ineq. Spacial Func.*, **12**(3), 44–53.
- Bolat, Y. ve Akın, O., 2004. Oscillatory behaviour of higher order neutral type nonlinear forced differential equation with oscillating coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, **290**(1), 302–309.
- Candan, T. ve Dahiya, R. S., 2008. On the oscillation of certain mixed neutral equations. *Appl. Math. Lett.*, **21**, 222-226.
- Chatzarakis, G. E., Džurina, J., ve Jadlovská, I., 2019. New oscillation criteria for second-order half linear advanced differential equations. *Appl. Math. Comput.*, **347**, 404–416.
- Erbe, L., Kong, Q. ve Zhang, B.G., 1995. *Oscillation Theory for Functional Differential Equations*. Marcel Dekker Inc., New York.

- Fite, W. B., 1918. Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations. *Trans. Am. Math. Soc.*, **19**, 341–352.
- Grace, S. R., Agarwal, R. P., Bohner, M. ve O'Regan, D., 2009. Oscillation of second-order strongly superlinear and strongly sublinear dynamic equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **14**, 3463–3471.
- Grace, S. R. ve Graef, J. R., 2018. Oscillatory behavior of second order nonlinear differential equations with a sublinear neutral term *Math. Model. Anal.*, **23**(2), 217–226.
- Graef, J. R., Tunç, E. ve Grace, S. R., 2017. Oscillatory and asymptotic behavior of a third-order nonlinear neutral differential equation. *Opuscula Math.*, **37**(6), 839–852.
- Graef, J. R., Grace, S. R. ve Tunç, E., 2019. Oscillatory behavior of even order nonlinear differential equations with a sublinear neutral term. *Opuscula Math.*, **39**(1), 39–47.
- Graef, J. R., Özdemir, O., Kaymaz, A. ve Tunç, E., 2021. Oscillation of damped second-order linear mixed neutral differential equations. *Monatsh. Math.*, **194**, 85–104.
- Györi, I. ve Ladas, G., 1991. *Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications*. Clarendon Press, Oxford.
- Hale, J. K., 1971. *Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
- Hale, J. K. ve Lunel, S. M. V. 1993. *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
- Hardy, G. H., Littlewood, J. E. ve Polya, G., 1988. *Inequalities*. Reprint of the 1952 edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- Hartman, P., 1952. On nonoscillatory linear differential equations of second order. *Amer. J. Math.*, **74**, 389–400.
- Kamenev, I. V., Integral criterion for oscillation of linear differential equations of second order. *Math. Zemetki*, **23**, 249–251.
- Karpuz, B., Manojlović, J. V., Öcalan, Ö. ve Shoukaku, Y., 2009. Oscillation criteria for a class of second-order neutral delay differential equations. *Appl. Math. Comput.*, **210**, 303–312.
- Karpuz, B., 2013. Sufficient conditions for the oscillation and asymptotic behaviour of higher-order dynamic equations of neutral type. *Appl. Math. Comput.*, **221**, 453–462.
- Karpuz, B. ve Santra, S. S., 2020. New criteria for the oscillation and asymptotic behavior of second-order neutral differential equations with several delays. *Turk. J. Math.*, **44**, 1990–2003.
- Kiguradze, I. T. ve Chanturia, T. A., 1993. *Asymptotic Properties of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.
- Kitamura, Y. ve Kusano, T., 1980. Oscillation of first-order nonlinear differential equations with deviating arguments. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **78**, 64–68.
- Kolmanovskii, V. ve Myshkis, A., 1999. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

- Komkov, V., 1972. A generalization of Leighton's variational theorem. *Appl. Anal.*, **2**(4), 377–383.
- Kong, Q., 1999. Interval criteria for oscillation of second order linear ordinary differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **229**, 258–270.
- Kneser, A., 1893. Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen. *Math. Ann.*, **42**, 409–435.
- Ladas, G., Sficas, Y.G. ve Stavroulakis, I.P., 1984. Necessary and sufficient conditions for oscillations of higher order delay differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **285**, 81–90.
- Ladde, G.S., Lakshmikantham, V. ve Zhang, B.G., 1987. *Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments*. Marcel Dekker Inc., New York.
- Leighton, W., 1962. Comparison theorems for linear differential equations of second order. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13**, 603–610.
- Li, T., Agarwal, R.P. ve Bohner, M., 2012. Some oscillation results for second-order neutral dynamic equations. *Hacet. J. Math. Stat.*, **41**, 715–721.
- Li, T., Zhang, C. ve Xing, G., 2012. Oscillation of third-order neutral delay differential equations. *Abstr. Appl. Anal.*, **2012**, Article ID 569201, 11 pages.
- Li, T., Şenel, M. T. ve Zhang, C., 2013. Oscillation of solutions to second-order half-linear differential equations with neutral terms. *Electron. J. Differ. Eq.*, **2013**, No. 229, 1-7.
- Li, T. ve Rogovchenko, Y. V., 2014. Oscillatory behavior of second-order nonlinear neutral differential equations. *Abstr Appl Anal.*, **2014**, Article ID:143614, 8 pages.
- Li, T. ve Rogovchenko, Y. V., 2015. Oscillation of second-order neutral differential equations. *Math Nachr.*, **288**, 1150-1162.
- Lin, X., ve Tang, X. H., 2007. Oscillation of solutions of neutral differential equations with a superlinear neutral term. *Appl. Math. Lett.*, **20**, 1016-1022.
- Liu, H. ve Ma, C., 2013. Oscillation criteria for second-order neutral delay dynamic equations with nonlinearities given by Riemann-Stieltjes integrals. *Abstr. Appl. Anal.*, **2013**, Article ID 530457, 9 pages.
- Meng, F. ve Zheng, Z., 2018. Recent development in oscillatory properties of certain differential equations. *J. Appl. Anal. Comput.*, **8**(4), 1282–1306.
- Özdemir, O. ve Tunç, E., 2018. Asymptotic behavior and oscillation of solutions of third order neutral dynamic equations with distributed deviating arguments. *Bull. Math. Anal. Appl.*, **10**(2), 31–52.
- Özdemir, O., 2020. Oscillation results for second order half-linear functional dynamic equations with unbounded neutral coefficients on time scales. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, **69**(1), 668-683.
- Özdemir, O. ve Kılıç, A., 2022. Oscillation of second-order functional differential equations with superlinear neutral terms. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **45**, 83–99.
- Özdemir, O. Oscillation criteria for noncanonical neutral Emden-Fowler differential equations. *Quaestiones Mathematicae*, to appear.
- Padhi, S. ve Pati, S., 2014. *Theory of Third-Order Differential Equations*. Springer, New Delhi.

- Picone, M., 1910. Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.*, **11**, 1–141.
- Pinelas, S., 2014. Asymptotic behavior of solutions to mixed type differential equation. *Electron. J. Diff. Equ.*, **2014**, No. 210, 1–9.
- Philos, Ch. G., 1989. Oscillation theorems for linear differential equations of second order. *Arch. Math.*, **53**, 482–492.
- Prabaharan, N., Dharuman, C. P., Graef, J. R. ve Thandapani, E., 2019. New oscillation criteria for second order quasi-linear differential equations with sub-linear neutral term. *Appl. Math. E-Notes*, **19**, 563–574.
- Sakamoto, T. ve Tanaka, S., 2010. Eventually positive solutions of first order nonlinear differential equations with a deviating argument. *Acta Math. Hungar.*, **127**(1-2), 17–33.
- Saker, S.H., 2006. Oscillation of second-order nonlinear neutral delay dynamic equations on time scales. *J. Comput. Appl. Math.*, **187**, 123–141.
- Saker, S.H., 2010. *Oscillation Theory of Dynamic Equations on Time Scales: Second and Third Orders*. Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, Germany.
- Saker, S.H., 2011. Oscillation of third-order functional dynamic equations on time scales. *Science China Mathematics*, **54**, 2597–2614.
- Saker, S.H. ve Graef, J.R., 2012. Oscillation of third-order nonlinear neutral functional dynamic equations on time scales. *Dyn. Syst. Appl.*, **21**, 583–606.
- Sharkovsky, A.N., Maistrenko Y.L. ve Romanenko, E.Y., 1993. *Difference Equations and Their Applications*. Springer Science+Business Media, Dordrecht.
- Santra, S. S., Ghosh, T. ve Bazighifan, O., 2020a. Explicit criteria for the oscillation of second-order differential equations with several sub-linear neutral coefficients. *Adv. Difference Equ.*, **2020**, 643.
- Santra, S. S., Alotaibi, H. ve Bazighifan, O., 2020b. On the qualitative behavior of the solutions to second-order neutral delay differential equations. *J. Inequal. Appl.*, **2020**, 256.
- Santra, S. S., Ghosh, A., Bazighifan, O., Khedher, K. M. ve Nofal, T. A., 2021a. Second-order impulsive differential systems with mixed and several delays. *Adv. Difference Equ.*, **2021**, 318.
- Santra, S. S., El-Nabulsi, R. A. ve Khedher, K. M., 2021b. Oscillation of second order differential equations with multiple and mixed delays under a canonical operator. *Mathematics*, **9**(12), 1323.
- Santra, S. S., Khedher, K. M., Nonlaopon, K. ve Ahmad, H., 2021c. New results on qualitative behavior of second order nonlinear neutral impulsive differential systems with canonical and non-canonical conditions. *Symmetry*, **13**(6), 934.
- Santra, S. S., Bazighifan, O. ve Postolache, M., 2021d. New conditions for the oscillation of second order differential equations with sublinear neutral terms. *Mathematics*, **9**(11), 1159.
- Santra, S. S., Sethi, A. K., Moaaz, O., Khedher, K. M. ve Yao, S. W., 2021e. Second-order impulsive differential systems with mixed and several delays. *Mathematics*, **9**(10), 1111.
- Sturm, C., 1836. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **1**, 106–186.

- Tamilvanan, S., Thandapani, E. ve Džurina, J., 2017. Oscillation of second order nonlinear differential equations with sublinear neutral term. *Differ. Equ. Appl.*, **9(1)**, 29-35.
- Trench, W. F., 1974. Canonical forms and principal systems for general disconjugate equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **184**, 319–327.
- Tunç, E. ve Graef, J.R., 2014. Oscillation results for second order neutral dynamic equations with distributed deviating arguments. *Dynam. Systems Appl.*, **23**, 289–303.
- Tunç, E. ve Grace, S. R., 2016. On oscillatory and asymptotic behavior of a second order nonlinear damped neutral differential equation. *International Journal of Differential Equations*, **2016**, Article ID: 3746368, 8 pages.
- Tunç, E., 2017. Oscillatory and asymptotic behavior of third-order neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Electron. J. Differ. Eq.*, **2017**, No. 16, 1–12.
- Tunç, E. ve Özdemir, O., 2017. On the asymptotic and oscillatory behavior of solutions of third-order neutral dynamic equations on time scales. *Adv. Difference Equ.*, **2017:127**, 13 pages.
- Tunç, E. ve Özdemir, O., 2019. On the oscillation of second-order half-linear functional differential equations with mixed neutral term. *J. Taibah Univ. Sci.*, **13(1)**, 481-489.
- Tunç, E., Şahin, S., Graef, J. R. ve Pinelas, S., 2021. New oscillation criteria for third-order differential equations with bounded and unbounded neutral coefficients. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **46**, 1–13.
- Wintner, A., 1949. A criterion of oscillatory stability. *Quart. Appl. Math.*, **7**, 115–117.
- Xiang, H., 2016. Oscillation of third-order nonlinear neutral differential equations with distributed time delay. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **36**, 769–782.
- Yan, J., 1997 Oscillations of second order neutral functional differential equations. *Appl. Math. Comput.*, **83**, 27-41.
- Zafer, A., 1992. Oscillatory and nonoscillatory properties of solutions of functional differential equations and difference equations. Ph.D. Thesis, Iowa State University, Ames, Iowa.
- Zhang, Q. ve Liu, S., 2014. Oscillation theorems for second-order half-linear neutral delay dynamic equations with damping on time scales. *Abstr. Appl. Anal.*, **2014**, Article ID 615374, 12 pages.