

T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İKTİSAT ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

İKTİSAT BİLİMİNDE DİNAMİK DENGİ MODELLERİ VE
SERMAYE BİRİKİM SÜRECİ

Barkın AKÇAYER
2502120142

TEZ DANIŞMANI
PROF. DR. Dündar Murat DEMİRÖZ

İSTANBUL – 2022

ÖZ

İKTİSAT BİLİMİNDE DİNAMİK DENGE MODELLERİ VE SERMAYE BİRİKİM SÜRECİ BARKIN AKÇAYER

Tez çalışmamda beş tane kapalı ekonomi iki tane de açık ekonomi olmak üzere toplamda yedi tane ekonomik büyüme modelini inceledim. Bu inceledeğim modellerden Solow Modeli'ni temel alarak orta büyüklükte bir ülkenin Solow Modeli yapısı altında dış tasarruflarla sermaye birikimi sürecini inceledim. Ekonomik büyüme modellerinin incelenmesinde diferansiyel denklemler ile optimal kontrol kuramını yöntem olarak kullandım.

Solow Modeli'ne bir dış tasarruf fonksiyonu ekleyerek bir Açık Ekonomi Kırılmalı Solow Modeli oluşturdum. Bu modelde Solow Modeli'nde olduğu gibi uzun dönem kişi başı sermaye ve kişi başı gelirin büyüme oranı sıfırdır. Yalnız dış faiz oranı ile yurtiçi sermayenin marjinal getirisini eşitleyen eşik kişi başı sermaye değişkeninin aldığı değere bağlı olarak, ülkenin ulaşacağı kişi başı sermaye değerini belirleyen üç tane senaryo ortaya çıkmaktadır.

Bu üç senaryoda üç tane farklı durağan durum denge kişi başı sermaye değeri elde edilir. Model ülkenin hangi durağan durum noktasında bulunacağı eşik kişi başı sermaye değerine göre belirlenir. Eşik kişi başı sermaye değeri değiştiğinde durağan durum dengesi de değişir.

Açık Ekonomi Kırılmalı Solow Modeli'ndeki üç senaryoya bağlı olarak ortaya çıkan üç şekli Python programlama dilini kullanarak oluşturdum.

Anahtar Kelimeler: Ekonomik Büyüme, Dinamik Denge, Harrod-Domar, Solow Büyüme Modeli, Optimal Büyüme Modeli, İçsel Büyüme Modeli, Açık Ekonomi

ABSTRACT

DYNAMIC EQUILIBRIUM MODELS AND CAPITAL ACCUMULATION PROCESS IN ECONOMICS BARKIN AKÇAYER

In my thesis, I examined a total of seven economic growth models, five of which are closed economies and two open economies. Based on the Solow Model, one of the models I examined, I examined the capital accumulation process of a medium-sized country under the Solow Model structure. I used differential equations and optimal control theory as a method in the study of economic growth models.

I created an Open Economy Solow Model by adding an external savings function to the Solow Model. In this model, as in the Solow Model, the growth rate of long-term capital per capita and income per capita is zero. Three scenarios emerge that determine the per capita capital value that the country will reach, depending on the value taken by the threshold variable of capital per capita, which equates only the foreign interest rate with the marginal return of domestic capital.

In these three scenarios, three different steady-state equilibrium capital value per capita are obtained. The steady state point of the model country is determined by the threshold capital value per capita. When the threshold value of capital per capita changes, the steady-state equilibrium changes as well.

I drew three graphs that emerged depending on the three scenarios in the Open Economy Solow Model using Python programming language.

Keywords: Economic Growth, Dynamic Equilibrium, Harrod Domar, Solow Growth Model, Optimal Growth Model, Endogenous Growth Model, Open Economy

ÖNSÖZ

Beni Ekonomik Büyüme alanına yönlendiren öğrenme sürecimde ve çalışmalarımdaya benden desteğini esirgemeyen sevgili hocam Prof. Dr. Dündar Murat Demiröz'e yardımlarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Tez çalışması sürecinde maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen her türlü sıkıntıya katlanan en zor zamanlarımda yanımda olan sevgili eşim Janina Klein-Akçayer, annem Sevim Akçayer, babam Ahmet Akçayer ve kardeşim Özge Akçayer benim en büyük manevi güç kaynaklarım olmuşlardır. Sabırları, anlayışları ve destekleri için çok teşekkür ederim. Haklarını hiçbir zaman ödeyemem. Ağabeyim Hakan Dayanç ne zaman ihtiyacım olsa her zaman yardımına koşmuştur. Ne kadar teşekkür etsem azdır. Kayınpederim Alfred Klein ve kayıinvalidem Martina Klein'a Almanya'daki tez çalışmalarım sırasındaki maddi ve manevi destekleri için çok teşekkür ederim. Her zaman yanımda olmuşlardır. Arkadaşım Freya Oxford'a tez konum ile ilgili aradığım kaynakları bulmamdaki yardımları için ayrıca teşekkür ederim.

Üç ve beş yaşındaki sevgili oğullarım Levin ve Edvin benim neşe ve motivasyon kaynaklarımdır. Onların katkısını görmezden gelemem.

Barkın AKÇAYER

İstanbul 2022

İÇİNDEKİLER

Öz.....	ii
ABSTRACT.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
 GİRİŞ.....	 1
 1.KAPALI EKONOMİ BÜYÜME MODELLERİ	 2
1.1 Ramsey-Cass-Koopmans Modeli	2
1.1.1 Model.....	2
1.1.2 Denge Dinamiği	8
1.1.3 Dengenin Kararlılık İncelemesi	13
1.2 Harrod-Domar Modeli	15
1.2.1 Model.....	15
1.2.2 Denge Dinamiği	16
1.2.3 Dengenin Kararlılık İncelemesi	17
1.3 Solow-Swan Modeli	20
1.3.1 Model.....	20
1.3.2 Denge Dinamiği	21
1.3.3 Altın Kural	24
1.3.4 Geçiş Dinamiği	25
1.4 Romer Modeli.....	27
1.4.1 Model.....	28
1.4.2 Denge Dinamiği.....	29
1.5 Aghion-Howitt Modeli.....	35
1.5.1 Model.....	35
1.5.2 Denge Dinamiği.....	36
 2.DIŞ EKONOMİK İLİŞKİLERİ AÇIKLAYAN MODELLER.....	 46
2.1 Batiz-Romer Ekonomik Bütünleşme ve İçsel Büyüme Modeli.....	46
2.1.1 Model.....	46
2.1.2 Denge Dinamiği.....	47
2.2 Grossman-Helpman Karşılaştırmalı Üstünlük ve Uzun Dönem Büyüme Modeli.....	55
2.2.1 Model.....	55
2.2.2 Denge Dinamiği.....	59
 3. AÇIK EKONOMİ KIRILMALI SOLOW MODELİ.....	 64
3.1 Model.....	64
3.2 Denge Dinamiği.....	66
3.3 Politika Analizi.....	67

SONUÇ.....	72
KAYNAKÇA.....	74
MATEMATİKSEL YÖNTEMLER.....	84
1 Diferansiyel Denklemler.....	84
1.1 Birinci Derece Diferansiyel Denklemler ve Çözümleri.....	88
1.1.1 Doğrusal Diferansiyel Denklemler.....	88
1.1.2 Integrasyon Faktörü.....	89
1.1.3 Tamamlayıcı Fonksiyon ve Özel Integral.....	92
1.1.4 Ayrılabilir Diferansiyel Denklemler.....	95
1.1.5 Bernoulli Denklemi.....	98
2 Hamilton Denklemleri'nin Çözümü.....	99
2.1 Current Value Hamiltonian.....	103

ŞEKİLLER LİSTESİ

1.1 Ramsey Faz Diyagramı	11
1.2 Solow-Swan Modeli	21
1.3 Solow-Swan Modelinin Dinamiği	24
1.4 Aghion-Howitt Modeli	42
1.5 Knowledge-Driven Modeli	53
1.6 Lab-Equipment Modeli	53
1.7 Grossman-Helpman Modeli I	63
1.8 Grossman-Helpman Modeli II	64
2.1 Senaryo I	70
2.2 Senaryo II	71
2.3 Senaryo III	72

GİRİŞ

Bir ekonominin uzun dönemde sağlayacağı doğal büyüme trendini bulmak ve bu trendden sapmaların sebeplerini ortaya koymak Büyüme İktisadı'nın araştırma konusudur. Dolayısıyla Büyüme İktisadı uzun dönemle ilgilenir. Uzun Dönem ise, sermaye stokunun, potansiyel gelirin, tam istihdam milli gelir düzeyinin ve üretim kapasitesinin değiştiği dönemdir.

Tez çalışmamın temel sorusu şudur: Dış tasarrufların bir ülkenin sermaye birikimi üzerindeki etkisi nedir? Bunu Solow Modeli'ni temel alarak inceledim.

Tez çalışmamda Ramsey-Cass-Koopmans, Harrod-Domar, Solow-Swan, Romer ve Aghion-Howitt olmak üzere 5 tane ekonomik büyüme modeli incelenmiştir. Büyüme iktisadında çok sayıda ve çeşitli büyüme modelleri vardır. (Aghion and Durlauf, 2005; Acemoglu, 2010; Barro, 2004) Ben tez çalışmama büyüme iktisadında mihenk taşı olma özelliği taşıdığını düşündüğüm bu beş ekonomik büyüme modelini aldım. Bunlar sırasıyla Ramsey-Cass-Koopmans optimal ekonomik büyüme, Harrod-Domar kararsız durağan durum, Solow-Swan kararlı durağan durum ve teknolojinin içselleştirildiği Romer ve Aghion-Howitt modelleridir. Bu büyüme modelleri kapalı ekonomi varsayımı altında oluşturulmuştur. Dış ekonomik ilişkileri açıklayan Batiz-Romer ve Grossman-Helpman modelleri sırasıyla ekonomik bütünleşme ve karşılaştırmalı üstünlük bağlamında ekonomik büyümeyi incelemişlerdir.

Benim oluşturduğum büyüme modelinde ise, Solow tipi dışa açık bir ekonomide, bu ekonominin veri dünya faiz oranından dış sermaye olarak büyümesi incelenmiştir.

Birinci bölümde kapalı ekonomi büyüme modelleri incelenmiştir. İkinci bölümde dış ekonomik ilişkileri açıklayan modeller incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise, Açık Ekonomi Kırılmalı Solow Modeli oluşturulup incelenmiştir. Sonuç bölümünden sonra büyüme modellerinde kullanılan matematiksel yöntemler anlatılmıştır.

BİRİNCİ BÖLÜM

KAPALI EKONOMİ BÜYÜME MODELLERİ

1.1 Ramsey-Cass-Koopmans Modeli

Ramsey-Cass-Koopmans modeli [Ramsey,1928; Cass,1965; Koopmans et al.,1963] bir optimal ekonomik büyüme modelidir.Bu modelin amacı optimal ekonomik büyümeyi sağlayacak temel ilkeyi, prensibi ortaya koymaktır.

Ramsey çalışmasında, bir ulusun gelirinin ne kadarını tasarruf etmesi gerektiği sorusu üzerinde durmuştur. [Ramsey, 1928:543] Daha açık bir şekilde sorun, toplumun şu andan sonsuza uzanan zaman aralığı içinde tüketimden elde ettiği toplam faydasını en çoklaştıracak bir tasarruf miktarını nasıl belirlemesi gerektiğidir. Eğer gelirinin tamamını tasarrufa ayırırsa gelecek zamanlarda tüketimini arttırır ve dolayısıyla faydasını arttırır. Yalnız bugün tüketiceği hiçbirşey kalmaz. Bugünkü faydası sıfır olur. Diğer taraftan gelirinin tamamını şimdi tüketime harcarsa bu sefer de bugünkü faydası artar yalnız gelecekte tüketiceği hiçbirşey kalmaz. Gelecekteki faydası sıfır olur. Bu durumda en uygun tasarruf miktarı ne olmalıdır ki bugünden sonsuza uzanan zaman aralığında toplumun toplam faydası en çok olsun? Bu en çok faydayı Ramsey çalışmasında '*Bliss*' yani çok büyük mutluluk olarak tanımlıyor.[Ramsey, 1928:545] Gerçekleşen toplam faydayı bu çok büyük mutluluk noktasına ulaştıracak tasarruf miktarı nasıl bulunmalıdır sorusuna yanıt arıyor.

1.1.1 Model

Bu modelin varsayımları şöyledir: [Ramsey, 1928: 543-544]

1)Sonsuz ömürlü bir toplumdur.

2)Nüfus artış oranı sıfırdır.

3)Tüketici tercihlerinde zaman içinde bir değişiklik yoktur.

4)Çalışma yükünde bir değişiklik yoktur.

5)Teknolojik gelişme büyüme oranı sıfırdır.

6)Tüketicilerin zaman tercihi oranı sıfırdır.

7)Tüketimin ve emeğin toplumun üyeleri arasında nasıl dağıldığı gözönüne alınmıyor.

Toplam fayda sadece tüketimin ve emeğin toplam değerlerinin fonksiyonudur.

8)Sermaye ürünleri, tüketim ürünleri ve emek türleri arasındaki farklılıklar önemsenmiyor.

9)Ülkeler arasındaki borç alma borç verme ilişkileri gözönünde bulunduruluyor fakat uzun süreli bir borçluluk durumu olasılığı göz ardı ediliyor.

10)Toplumun tasarruf güdüsünde bir değişiklik olmadığı varsayılıyor. Yani bu dönemki tasarruflar, bir sonraki nesil tarafından bencilce tüketilmiyor.

11)Tasarrufların savaş, doğal afet gibi talihsiz bir olay sonucu tamamen yok olmadığı varsayılıyor.

Üretim fonksiyonu zamandan bağımsızdır. Dolayısı ile teknolojik gelişimin sabit olduğu varsayılmıştır. Bu durumda üretim fonksiyonu şu şekildedir.

$$Q = Q(K, L)$$

Sermaye değer düşüm oranı sıfırdır. Çıktı ya tüketilir (C) ya da tasarruf (S) edilir. Tasarruf edilen kısım yatırıma ($\dot{K}$) dönüştürülür.

$$Q = C + S = C + \dot{K}$$

$$C = Q(K, L) - \dot{K}$$

Bu tüketimden elde edilen fayda, fayda fonksiyonu aracılığıyla gösterilir.

$$U(C)$$

Bu fazda fonksiyonunun tüketime göre birinci türevi pozitif, ikinci türevi ise negatiftir. Bunun anlamı şudur; tüketim arttıkça tüketimden elde edilen fayda artmaktadır ve bu artış azalarak artan bir artıştır.

$$U'(C) > 0$$

$$U(C)'' < 0$$

Toplum, tüketim ürünlerini üretmek için ıstırap, sıkıntı çekmektedir. Bu faydasızlık kavramı $D(L)$ ile ifade edilir. Marjinal faydasızlık emeğin artan bir fonksiyondur. Bir birimlik emek artışı sonucu marjinal faydasızlık (marjinal disutility) artar.

$$D''(L) \geq 0$$

Bu durumda toplam net fayda şu şekilde gösterilir. C ve L zamanın fonksiyonudurlar.

$$U(C) - D(L)$$

Ekonomik plancının amacı bu fayda fonksiyonunu en çoklaştırmaktır.

$$\max \int_0^{\infty} [U(C) - D(L)]dt$$

Bu denklemde faydanın iskonto faktörü ya da Barro'nun (Barro 2004) deyişyle zaman tercihi oranı (ρ) sıfırdır. Bu Ramsey'nin gelecek nesillerin faydalarını iskonto etmeyi ahlaki olarak uygun bulmamasından kaynaklanmaktadır. Bu sebeple bu integral yakınsamaz (nonconvergent). Net faydanın pozitif olması beklendiğinden dolayı bu durumda net fayda zaman geçtikçe sonsuz olur ve integral uzaksar. Bu sebeple Ramsey denklemi değiştirerek şu şekilde ifade etmiştir.

$$\min \int_0^{\infty} [B - U(C) + D(L)]dt$$

$$K(0) = K_0$$

B (Bliss), net faydanın ulaşabileceği en yüksek değeri ifade eder. Integrali en çoklaştırmadan en azlaştırmaya dönüştürmeye 'Ramsey Aracı' denir. Yani $[U(C)-D(L)]$ integrandını maksimize etmek yerine, $B-[U(C)-D(L)]$ haline dönüştürerek minimize etmeye çalışır. Bu sayede integralin yakınsaması sağlanmış olur.

Yukarıdaki integralde iki tane durum değişkeni (state variables) K ve L vardır. Varyasyon kalkülüsü (Calculus of Variations)[Gelfand and Fomin, 1963; Hadley and Kemp, 2014; Kamien and Schwartz, 2012] kullanarak her iki durum değişkeni ele alınarak Euler denklemi ile bu integralin çözümü aşağıdaki şekilde yapılır.

$$F = B - U(C) + D(L)$$

$$C = Q(K, L) - \dot{K}$$

$$F = B - U[Q(K, L) - \dot{K}] + D(L)$$

$$F_K = -U'(C)Q_K$$

$$F_{\dot{K}} = U'(C)$$

$$F_K - \frac{dF_{\dot{K}}}{dt} = 0$$

$$-Q_K = \frac{dU'(C)/dt}{U'(C)}$$

Bu denklemde sıfırdan sonsuza uzanan zaman aralığı içinde $[0, \infty)$ faydasını en çoklaştıracak (maksimize edecek) ya da Bliss noktası ile net fayda arasındaki farkı kapatacak bir bireyin tüketim kuralı verilmektedir. Tüketime marjinal faydasının büyüme oranı, sermayenin marjinal getirisinin negatifine eşit olmak durumundadır. Bu denkleme *Keynes – Ramsey kuralı* denir. Keynes-Ramsey kuralı düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\dot{C}}{C} = -\frac{U'(C)}{CU''(C)} Q_K$$

İkinci durum değişkeni olan L için de Euler denklemi uygulanır.

$$F_L = -U'(C)Q_L + D'(L)$$

$$F_L = 0$$

$$F_L - \frac{dF_L}{dt} = 0$$

$$D'(L) = U'(C)Q_L$$

Emeğin marjinal faydasızlığı, tüketimin marjinal faydası ile emeğin marjinal ürününün çarpımına eşit olmak durumundadır. [Chiang,200: 111-114]

Aynı zamanda buraya kadar yapılan işlemlerde zaman tercihi oranı (ρ) sıfır olarak kabul edilmiştir. Şimdi ρ değerini sıfır olmayan sabit bir değer olarak alıp işlemleri yapalım. Bu noktada Barro'nun [Barro, 2004:85-91] kitabını takip edelim. Barro hanehalkının fayda fonksiyonu ve bütçe kısıtını oluşturup Hamilton yöntemini [Van Tu,1984; Kuhn and Szegö,2013; Dorfman 1969] kullanarak sonucu elde etmiştir. Hanehalkının fayda fonksiyonu ve bütçe kısıtı aşağıdaki gibidir.¹

¹ Nüfus $L(t) = L(0)e^{nt}$ göre büyüyor. $L(0) = 1$ olduğu varsayılıyor. Bu durumda $L(t) = e^{nt}$ olur. $c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}$ kişi başı tüketim, $u(c(t))$ kişi başı fayda fonksiyonudur. ρ bireyin zaman tercihi oranıdır ve sabittir. Eğer c zaman boyunca sabit ise toplam faydanın sonsuza kadar artmaması için $\rho > n$ olarak varsayılmıştır. $w(t)$ kişi başı ücret, $r(t)$ faiz oranı, $k(t)$ kişi başı sermayedir. Bireyin bütçe kısıtı şu şekilde bulunur. K , toplam sermaye, $w(t)L(t)$ toplam gelir olmak üzere, toplam varlıklardaki değişim aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\frac{dK}{dt} = rK + wL - C$$

$$U = \int_0^{\infty} u[c(t)]e^{nt}e^{-\rho t} dt$$

$$\dot{k} = w + rk - c - nk$$

Hamilton denklemi aşağıdaki gibidir.

$$J = u[c(t)]e^{-(p-n)t} + v(t)[w(t) + (r(t) - n)k(t) - c(t)]$$

Hamilton denklemi çözüldüğünde aşağıdaki eşitlikler elde edilir. Aşağıdaki (1) ve (2) numaralı kısmi türevler çözüldüğünde (4) numaralı eşitlik elde edilir. (3) numaralı eşitlik ise transversality şartıdır. (De la Fuente (2000); Kamihigashi et al. (2006); Michel (1982))²

1)

$$\frac{\partial J}{\partial c(t)} = 0$$

2)

$$-\frac{\partial J}{\partial k(t)} = \dot{v}(t)$$

3)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [v(t)k(t)] = 0$$

4)

$$r = \rho - \left[\frac{u''(c)c}{u'(c)} \right] \left(\frac{\dot{c}}{c} \right)$$

Bu denklemdaki $\left[-\frac{u''(c)c}{u'(c)} \right]$ ifadesi tüketimin marjinal faydasının esnekliğidir. (Bergstrom, 2011:1-2) Durağan durum denge halinde tüketimin büyüme oranı ve faiz oranı sabit olur.

Bunu düzenlediğimizde

$$\dot{k} = w + rk - c - nk$$

elde edilir.

² Ayrıntılı çözümü için tezin ikinci bölümündeki Hamilton Denklemi'nin Çözümü kısmına bakılabilir.

Tüketicilerin zaman tercihi oranının da sabit olduğu varsayıldığından, tüketimin marjinal faydasının esnekliği de sabit olmak zorundadır. Bu sabiti θ olarak adlandıralım. Bu durumda,

$$-\frac{u''(c)c}{u'(c)} = \theta$$

olur. Bu diferansiyel denklemi çözdüğümüzde aşağıdaki fayda fonksiyonu elde edilir.³

$$u(c) = c^{1-\theta}$$

Marjinal faydanın esnekliği Allen, 1938:251-252), zamanlararası ikame esnekliğinin tersidir. (Blanchard et al., 1989:40) ⁴

³ Yalnız iktisat yazınında $c^{1-\theta}$ ifadesi, bu ifadenin doğrusal dönüşümü (Linear Transformation) yapılarak şu şekilde gösterilir.

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}$$

⁴ Zamanlararası ikame esnekliğinin formülü şu şekildedir:[?, 99]

$$\sigma = \frac{\frac{dc(t_2)/c(t_1)}{c(t_2)/c(t_1)}}{\frac{du'(c(t_1))/u'(c(t_2))}{-u'(c(t_1))/u'(c(t_2))}} = \frac{dc(t_2)/c(t_1)}{c(t_2)/c(t_1)} \frac{u'(c(t_1))/u'(c(t_2))}{du'(c(t_1))/u'(c(t_2))}$$

Fayda fonksiyonu $u(c) = c^{1-\theta}$ 'dir. t_1 ve t_2 zamanlarındaki tüketimleri bu fayda fonksiyonunda yerine koyarsak,

$$u(c(t_1)) = c(t_1)^{1-\theta}$$

$$u(c(t_2)) = c(t_2)^{1-\theta}$$

olarak yazılır. Bu fonksiyonların türevleri alınarak yukarıdaki formülde yerine konulur ve t_2 t_1 'e yaklaşırsa,

$$u'(c(t_1)) = (1-\theta)c(t_1)^{-\theta}$$

$$u'(c(t_2)) = (1-\theta)c(t_2)^{-\theta}$$

Yukarıdaki formülde düzenlenerek şu şekilde yazılabilir.

$$\sigma = \left[\frac{du'(c(t_1))/u'(c(t_2))}{dc(t_2)/c(t_1)} \frac{c(t_2)/c(t_1)}{-u'(c(t_1))/u'(c(t_2))} \right]$$

t_1 ve t_2 zamanlarındaki marjinal faydalar formülde yerine koyup çözümü yapıldığında,

$$\sigma = \frac{1}{\theta}$$

elde edilir. θ marjinal faydanın esnekliğini ifade etmektedir. Dolayısıyla zamanlararası ikame esnekliği, marjinal faydanın esnekliğinin tersidir. Pignalosa:5)

$$\sigma = \frac{1}{-\frac{u''(c)c}{u'(c)}} = -\frac{u'(c)}{u''(c)c}$$

Böylece (1) numaralı denklem düzenlenerek aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma(r - \rho)$$

ya da

5)

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho)$$

Bu denkleme göre tüketimin büyüme oranı, faiz oranına (r), bireyin zaman tercihi oranına (ρ) ve tüketimin zamanlararası ikame esnekliğine (σ) (ya da tüketimin marjinal faydasının esnekliğine(θ)) bağlıdır.

1.1.2 Denge Dinamiği

Tüketicinin bütçe kısıtı altında fayda en çoklaştırması incelendi. Şimdi üreticinin kar en çoklaştırmasını inceleyelim. (Barro, 2004:94-104) Bunun için Yeni Klasik üretim fonksiyonu⁵ oluşturulur.

$$Y(t) = F[K(t), L(t), T(t)]$$

Eğer üretim fonksiyonu emek arttırıcı bir üretim fonksiyonu ise (Labour Augmenting) sabit teknolojik ilerleme ile durağan durum aynı anda varolabilir. (Inada (1969) Bu durumda üretim fonksiyonunu emek arttırıcı üretim fonksiyonu olarak yazalım.

$$Y = F[K, T(t)L]$$

$\hat{L} = T(t)L$ olarak tanımlansın. Bu etkin emek yani teknoloji ile güçlendirilmiş emektir (effective labour). Böylece, $Y = F(K, \hat{L})$ olur.

$\hat{y} = \frac{Y}{\hat{L}}$ ve $\hat{k} = \frac{Y}{\hat{L}}$ olmak üzere, $\hat{y} = f(\hat{k})$ olarak yazılır. Bu durumda sermayenin ve emeğin marjinal getirileri,

⁵ $Y(t)$ çıktıyı, $K(t)$ sermayeyi, $L(t)$ emeği, $T(t)$ teknolojiyi temsil ediyor. Bu fonksiyon ölçeğe göre sabit getirilidir. Bütün girdilerin marjinal getirileri pozitif ve azalandır. Teknoloji sabit $x \geq 0$ oranında büyüdüğü varsayılıyor. $T(t) = T(0)e^{xt}$, $T(0) = 1$ olduğu varsayılıyor.

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = f'(\hat{k})$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = [f(\hat{k}) - \hat{k}f'(\hat{k})]e^{xt}$$

olur.⁶

Sermayenin amortisman oranı $\delta \geq 0$ 'dır. Bir birim sermayenin kiralama fiyatı R 'dir. Bu durumda sermayenin üreticiye toplam maliyeti RK 'dır. Bir birey verdiği borç karşılığında r oranında faiz getirisi elde eder. Sermayenin ve borcun değer saklama aracı olarak tam ikame edilebilir olduğu varsayılıyor. Bu durumda sermayenin net getirisi faiz oranına eşit ($R - \delta = r$) olur. Üreticinin karı aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\pi = F(K, \hat{L}) - (r + \delta)K - wL$$

Bu eşitliğin her iki tarafını $\hat{L}$ ile bölüp düzenlersek,

$$\pi = \hat{L}[f(\hat{k}) - (r + \delta)\hat{k} - we^{-xt}]$$

elde edilir. Bu $\hat{k}$ fonksiyonu, K değişkenine göre türevi alınıp en çoklaştırılırsa,

$$f'(\hat{k}) = r + \delta$$

elde edilir. Tam rekabetçi denge durumunda ücret, emeğin marjinal getirisine eşit olur.

$$[f(\hat{k}) - \hat{k}f'(\hat{k})]e^{xt} = w$$

Hanehalkının bütçe kısıtı ($\dot{k} = w + rk - c - nk$) aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenebilir.⁷

6)

$$\hat{k} = f(\hat{k}) - \hat{c} - \hat{k}(\delta + n + x)$$

⁶ İnada şartları geçerlidir. $\lim_{\hat{k} \rightarrow 0} f'(\hat{k}) = \infty$ ve $\lim_{\hat{k} \rightarrow \infty} f'(\hat{k}) = 0$

⁷ $\frac{K}{\hat{L}} = \hat{k}$ ve $\frac{c}{\hat{L}} = \hat{c}$ olsun. $K = \hat{k}\hat{L} = \hat{k}e^{xt}L \rightarrow k = \hat{k}e^{xt}$ ve $c = \hat{c}e^{xt}$ olur. k 'nin zamana göre türevi alınır $\dot{k} = \hat{k}e^{xt} + \hat{k}xe^{xt}$ olur. w yerine $[f(\hat{k}) - \hat{k}f'(\hat{k})]e^{xt}$ ve r yerine $f'(\hat{k}) - \delta$, c ve k yerine de sırasıyla $c = \hat{c}e^{xt}$ ve $k = \hat{k}e^{xt}$ konular ve sadeleştirmeler yapılırsa hanehalkının bütçe kısıtının yeni düzenlenmiş şekli elde edilir.

Bu diferansiyel denklem $\hat{k}$ ve dolayısıyla $\hat{y} = f(\hat{k})$ değerlerinin zaman içindeki evrimlerini verir.

(5) numaralı eşitlikte $c = \hat{c}e^{xt}$ ve $r = f'(\hat{k}) - \delta$ eşitlikleri yerlerine konulursa,
7)

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} [f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x]$$

elde edilir. (6) ve (7) numaralı denklemler bir diferansiyel denklem sistemini oluşturur ve çözümü $\hat{c}$ ve $\hat{k}$ değerlerinin zaman patikalarını verir. Shone (2001); Simon et al. (1994)) Bu denklemler yardımıyla ekonominin durağan durum denge hâlini inceleyelim.

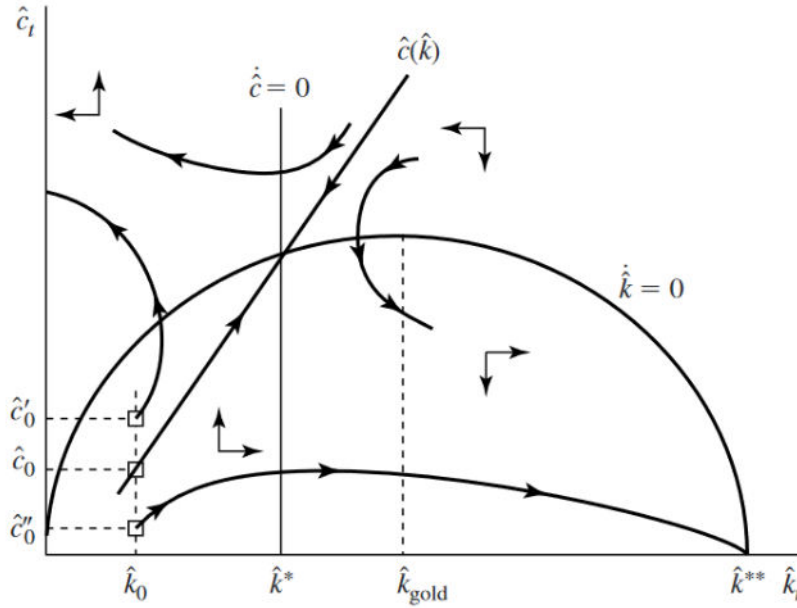
Durağan durum hâlinde $\dot{\hat{k}} = 0$ ve $\dot{\hat{c}} = 0$ olurlar. Önce $\dot{\hat{k}} = 0$ durumunu inceleyelim.

Eğer (6) numaralı eşitlikte $\dot{\hat{k}} = 0$ ise,
8)

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - \hat{k}(\delta + n + x)$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki $f(\hat{k})$ ve $\hat{k}(\delta + n + x)$ fonksiyonlarının arasındaki fark aşağıdaki şekilde $\dot{\hat{k}} = 0$ eğrisidir.⁸

⁸ Bütün $k > 0$ için $f'(\hat{k}) > 0$, $f''(\hat{k}) < 0$ şeklindedir. Ayrıca, $\lim_{k \rightarrow 0} f'(\hat{k}) = \infty$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(\hat{k}) = 0$ olarak Inada şartları geçerlidir. $\hat{k}(\delta + n + x)$ ise eğimi $(\delta + n + x)$ olan bir doğrudur. $\hat{c}\hat{k}$ düzleminde bu iki fonksiyonun arasındaki fark $\dot{\hat{k}}$ eğrisi olarak gösterilmiştir.



Şekil 1.1: Ramsey Faz Diyagramı Barro, R. J. , Sala-i Martin X: 2004 Economic Growth. Aufl. Massachusetts Institute of Technology (MIT.) sayfa 100

(8) numaralı eşitliğin $\hat{k}$ değişkenine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse $\hat{c}$ değişkeninin durağan durumdaki en yüksek değerini veren $\hat{k}$ değeri belirlenir.

$$\frac{d\hat{c}}{d\hat{k}} = \frac{d}{d\hat{k}} [f(\hat{k}) - \hat{k}(\delta + n + x)] = 0$$

9)

$$f'(\hat{k}_g) = \delta + n + x$$

Bu eşitlik şartını sağlayan $\hat{k}$ değeri $\hat{c}$ değerini en çoklaştırır. Bu şarta Altın Kural ("Golden-Rule") denir. Bu sebeple $\hat{k}$, $\hat{k}_g$ olarak gösterilmiştir.

(7) numaralı denklemde durağan durumda $\hat{c} = 0$ olur. Bu durumda denklem şu hale gelir.

10)

$$f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + \theta x$$

$\rho + \theta x > n + x$ olduğundan dolayı $f'(\hat{k}^*) > f'(\hat{k}_g)$ olur. Böylece, $\hat{k}^* < \hat{k}_g$ olur.⁹

$\hat{k}^*$ değerinde $\hat{c} = 0$ olur. $\hat{c} = 0$, $\hat{c}_t$ eksenine paralel bir doğru olacak şekilde çizilir. (7) numaralı denkleme göre $\hat{k} > \hat{k}^*$ olduğu durumda $\hat{c}$ azalır. $\hat{k} < \hat{k}^*$ olduğunda ise $\hat{c}$ artar. (6) numaralı denklemden de görüleceği üzere eğer $\hat{c}$, $\hat{k} = 0$ sağlayan değerinden sapıp artarsa $\dot{\hat{k}} < 0$ olur. Eğer azalırsa $\dot{\hat{k}} > 0$ olur. Bunlar grafik üzerinde oklar ile gösterilmiştir.

Grafikte üç tane durağan durum noktası vardır. Birincisi, $\hat{c} = \hat{k} = 0$ noktasıdır. İkincisi, $\hat{k}^*, \hat{c}^*$ noktasıdır. Üçüncüsü ise, $\hat{c} = 0$ ve $\hat{k}^{**}$ olduğu noktadır.

İkinci durağan durum noktası kararlı eyer patikası noktasıdır(saddle-path stable).

⁹ İnada şartlarından dolayı $\hat{k}^* < \hat{k}_g$ şeklindedir. $\rho + \theta x > n + x$ transversality şartından elde edilmektedir: Transversality şartı $\lim_{t \rightarrow \infty} [v(t)k(t)] = 0$, $-\frac{\partial J}{\partial k(t)} = \dot{v}(t)$ eşitliğinden $\dot{v}(t) = -v(t)(r(t) - n)$ olur. Bu diferansiyel denklem çözüldüğünde, $v(t) = v(0)e^{-\int r(t)-ndt}$ elde edilir. $\frac{\partial J}{\partial c(t)} = 0$ eşitliğinden $u'[c(t)]e^{-(\rho-n)t} = v(t)$ elde edilir. $t = 0$ olursa, $v(0) = u'[c(0)]$ elde edilir. Dolayısıyla, $v(t) = u'[c(0)]e^{-\int r(t)-ndt}$ elde edilir. Bu ifade transversality şartında yerine konulursa, $\lim_{t \rightarrow \infty} [u'[c(0)]e^{-\int r(t)-ndt}k(t)] = 0$ elde edilir. $\int r(t) - ndt$ ifadesi $\int_0^t r(v) - ndv$ olarak yazılabilir. Bunu bir örnekle gösterelim:

$$\int 2tdt = \int_0^t 2xdx$$

$$2 \frac{t^2}{2} = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^t$$

$$t^2 = x^2 \Big|_0^t = t^2 - 0^2 = t^2$$

Böylece, transversality şartı $\lim_{t \rightarrow \infty} [u'[c(0)]e^{-\int_0^t r(v)-ndv}k(t)] = 0$ olur. $k(t)$ yerine $k(t) = \hat{k}e^{xt}$ koyalım. Transversality şartı $\lim_{t \rightarrow \infty} [u'[c(0)]e^{-\int_0^t r(v)-ndv}\hat{k}e^{xt}] = 0$ olur. $xt = \int_0^t dv$ olarak yazılabilir. Bu durumda $e^{xt} = e^{\int_0^t dv}$ olur. Bu ifade transversality şartında yerine konulduğunda, $\lim_{t \rightarrow \infty} [u'[c(0)]e^{-\int_0^t r(v)-ndv}\hat{k}e^{\int_0^t dv}] = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} [u'[c(0)]e^{-\int_0^t r(v)-n-xdv}\hat{k}]$ elde edilir. $f'(\hat{k}) = r + \delta \rightarrow r = f'(\hat{k} - \delta)$ ifadesi de transversality şartında yerine konulursa sonuç olarak transversality şartı

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [u'[c(0)]e^{-\int_0^t f'(\hat{k})-\delta-n-xdv}\hat{k}(t)] = 0$$

hâlini alır. Bu ifadenin t sonsuza giderken sıfır olması için $f'(\hat{k}) - \delta - n - x > 0$ olmalıdır. $t \rightarrow \infty$ ise $k(t) \rightarrow \hat{k}^*$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik $f'(\hat{k}^*) - \delta > n + x$ olarak yazılır. (10) numaralı eşitlikten $\rho + \theta x > n + x$ olur.

1.1.3 Dengenin Kararlılık İncelemesi

(6) ve (7) numaralı doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri durağan durum $(\hat{k}^*, \hat{c}^*)$ noktası etrafında doğrusallaştırarak bu noktanın kararlı eyer patikası noktası olduğu doğrulanabilir. (Barro, 2004:103) (6) ve (7) numaralı denklemlerin kısmi türevleri alınıp durağan durum dengesinde değerlendirilerek Jacobian matrisi oluşturulur. (Chiang, 2000:262-263)

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} & \frac{\partial \dot{k}}{\partial c} \\ \frac{\partial \dot{c}}{\partial k} & \frac{\partial \dot{c}}{\partial c} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial k} = f'(\hat{k}^*) - (\delta + n + x) \rightarrow [f'(\hat{k}^*) - \delta] - (n + x)$$

$\dot{c} = 0$ denge durumunda $f'(\hat{k}^*) - \delta = \rho + \theta x$ olur. Transversality şartından dolayı $\rho + \theta x > n + x$ olur. Dolayısıyla, $f'(\hat{k}^*) - \delta > n + x$ olur. Sonuç olarak,

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial k} = [f'(\hat{k}^*) - \delta] - (n + x) > 0$$

elde edilir.

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial c} = -1 < 0$$

$$\frac{\partial \dot{c}}{\partial c} = \frac{f'(\hat{k}^*) - \delta - \rho - \theta x}{\theta} = 0$$

Burada denge durumunda $f'(\hat{k}^*) - \delta - \rho - \theta x = 0$ olduğundan dolayı sonuç sıfırdır.

$$\frac{\partial \dot{c}}{\partial k} = -\frac{u'(\hat{c}^*)}{u''(\hat{c}^*)} f''(\hat{k}^*) < 0$$

(Wainwright et al., 2005:653)

Bu kısmi türevleri Jacobian matrisinde yerlerine koyalım.

$$J = \begin{bmatrix} [f'(\hat{k}^*) - \delta] - (n + x) & -1 \\ -\frac{w'(\hat{c}^*)}{w''(\hat{c}^*)} f''(\hat{k}^*) & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobian matrisinin determinantını alalım.

$$|J| = \begin{vmatrix} [f'(\hat{k}^*) - \delta] - (n + x) & -1 \\ -\frac{w'(\hat{c}^*)}{w''(\hat{c}^*)} f''(\hat{k}^*) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{w'(\hat{c}^*)}{w''(\hat{c}^*)} f''(\hat{k}^*) < 0$$

elde edilir. Bu determinant negatiftir. Jacobian matrisinin karakteristik köklerinin çarpımı Jacobian matrisinin determinantına eşittir. Dolayısıyla karakteristik kökler ters işaretlidir. Bu sebeple, $(\hat{k}^*, \hat{c}^*)$ denge noktası yerel eyer noktasıdır (local saddle point).

Böylece, eğer ekonomi başlangıç $(\hat{k}_0, \hat{c}_0)$ noktasından hareket ederse, kararlı eyer patikasını izleyerek $\hat{k}^*, \hat{c}^*$ kararlı durağan durum değerine ulaşır.

Eğer başlangıç noktası $(\hat{k}_0, \hat{c}'_0)$ ise, ekonominin kararlı patika üzerinde olabilmesi için gereken tasarruf oranı düşüktür. Bu durumda bu noktadan hareket eden patika $\hat{k} = 0$ eğrisine ulaşır. Bu eğriyi geçtikten sonra şekil üzerinde de görüldüğü gibi sola kıvrılarak belirli bir zaman sonra $\hat{c}_t$ eksenine ulaşır. Böylece $\hat{k} = 0$ olur. Kişi başı sermayenin sıfır olduğu noktada kişi başı tüketimde sıfır olur. Yani tüketim $\hat{c}_t$ eksenine ulaştığı noktadan sıfıra düşer. Dolayısıyla bu bir denge noktası değildir.

Üçüncü durumda, yani $\hat{c}''_0$ noktasında tasarruflar ekonominin kararlı patika üzerinde olması gereken tasarruf oranından yüksektir. Bu durumda buradan hareket eden patika $\hat{c} = 0$ doğrusunu geçer. Şekilden de görüldüğü gibi bu patika takip edildiğinde kişi başı sermaye $\hat{k}^{**}$ noktasına ulaşır ve $\hat{c} = 0$ olur. Bu durumda, kişi başı sermaye $\hat{k}_g$ seviyesini geçer ve $f'(\hat{k}_g) - \delta < n + x$ olur. Bu da transversality şartını ihlal eder. Bu sebeple $\hat{c}''_0$ noktasından başlayan patika bir denge patikası değildir.

Sonuç olarak, $(\hat{k}^*, \hat{c}^*)$ noktası tek kararlı durağan durum (Stable steady state) noktasıdır. (Barro, 2004:102-104)

1.2 Harrod-Domar Modeli

Harrod-Domar Modeli'nde (Harrod, 1939; Domar, 1946; Hamberg, 1952) temel soru sermayenin tam kapasite kullanımı ve emeğin tam istihdamı ile uyumlu büyüme oranının ne olduğu sorusudur.

Bu modelin iki versiyonu vardır. Birincisi sabit katsayılı üretim fonksiyonu diğeri ise hızlandırıcı-çarpan versiyonudur. İki versiyonda da matematiksel olarak aynı denklemler elde edilir. Burada model sabit katsayılı üretim fonksiyonu üzerinden anlatılacaktır. (Allen, 1967:197-201)

1.2.1 Model

Üretim fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılır.

$$Y = \min\left(\frac{K}{v}, \frac{L}{u}\right)$$

Sermayenin ve emeğin tam istihdamı durumunda, $Y = \frac{K}{v} = \frac{L}{u}$ olur. (Sengupta, 2011:19-20) Burada $\frac{1}{v}$ sabit çıktı-sermaye oranıdır. Tasarruflar yatırıma eşittir. Yatırım da sermaye stoğundaki değişime eşittir. Tasarruflar gelirin sabit bir fonksiyonudur. Bu şu şekilde gösterilebilir.

$$\dot{K} = I = sY, \quad 0 < s < 1$$

Emek n sabit oranında artmaktadır. Bu durumda emek arzı aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$L = L_0 e^{nt}$$

Böylece Harrod-Domar Modeli'ni tanımlayan üç tane denge şartı elde edilir. Birincisi tam kapasite sermaye kullanımı, ikincisi yatırım tasarruf eşitliği, üçüncüsü ise emeğin tam istihdamıdır. Bunlar aşağıdaki şekilde gösterilir.

(1)

$$K = vY$$

(2)

$$\dot{K} = sY$$

(3)

$$L = uY = L_0 e^{nt}$$

1.2.2 Denge Dinamiği

(1) numaralı eşitlikte her iki tarafın zamana göre türevi alınırsa, $\dot{K} = v\dot{Y}$ elde edilir. Bu (2) numaralı eşitlikte yerine konulursa, $v\dot{Y} = sY$ elde edilir. Buradan tam kapasite ve tam istihdam durumunda denge büyüme oranı elde edilir.

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{s}{v} = g$$

Bu diferansiyel denklem çözüldüğünde $t = 0$ zamanında $Y = Y_0$ olmak üzere aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$Y = Y_0 e^{gt}$$

K'nın büyüme oranını bulmak için ise, (1) numaralı eşitlik (2) numaralı eşitlikte Y yerine konulur ve aşağıdaki büyüme oranı elde edilir.

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{s}{v} = g$$

Bu diferansiyel denklem çözüldüğünde $t = 0$ zamanında $K = K_0$ olmak üzere aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$K = K_0 e^{gt}$$

$I = sY$ olduğundan dolayı, $I = sY_0 e^{gt}$ olarak yazılır. $I_0 = sY_0$ olmak üzere,

$$I = I_0 e^{gt}$$

elde edilir. Böylece görüldüğü üzere Y, K, I değişkenlerinin hepsi tam kapasite ve tam istihdam durumunda sabit g oranında büyürler.

$l = uY$ eşitliği, $L = uY_0 e^{gt}$ olarak yazılır. $uY = L_0$ olmak üzere, $L = L_0 e^{gt}$ olarak yazılır. $L = L_0 e^{nt}$ bir önceki eşitlikte yerine konulursa, $L_0 e^{nt} = L_0 e^{gt}$ elde edilir. Buradan da görüldüğü üzere, $n = g$ 'dir. Yani, tam kapasite ve tam istihdam durumunda büyüme oranı emeğin doğal büyüme oranı olan n 'ye eşittir. (Harrod, 1974)

$$g = \frac{s}{v} = n$$

Buradan anlaşılacağı üzere, çıktının ve sermayenin büyüme oranı emeğin büyüme oranı ile aynıdır. Bu durumda kişi başı çıktının, kişi başı sermayenin büyüme oranı sıfırdır. Yani tam kapasite tam istihdam durumunda durağan durum mevcuttur. Harrod-Domar Modeli'nde ekonominin bir doğal büyüme oranı vardır. Bu oran $g = \frac{s}{v} = n$ 'dir.

1.2.3 Dengenin Kararlılık İncelemesi

Tam kapasite sermaye kullanımı durumunda $K = vY$ olur. Başlangıç durumunda $K_0 = vY_0$ olur. Bu durumda bir kapasite fazlalığı olduğu varsayalım ve ekonominin tekrar dengeye dönme mekanizmasını oluşturalım. Başlangıçta ekonomide kapasite fazlalığı olduğu durumda K^* denge kapasite miktarı olmak üzere, $K_0 > K^* = vY$ olur. Burada $K - K^*$ olarak fazla kapasite vardır. Bu kapasiteyi zaman içinde eritip tekrar denge seviyesine getirecek mekanizma hata ayarlama mekanizmasıdır. (Allen, 1967:94) Oransal olarak $\frac{K-K^*}{K}$ fazla kapasite vardır. Bu kapasitenin T sabit zamanda eritileceği varsayılırsa, birim zamanda $\frac{1}{T} \frac{K-K^*}{K}$ oranında eritilmesi gerekiyor. Denge büyüme oranı g 'dir. Bu durumda, planlanan yatırımların büyüme oranı g oranında değil $g - \frac{1}{T} \frac{K-K^*}{K}$ oranında olmalıdır. $K^* = vY$ ifadesi bir önceki ifade de yerine konulursa, $g - \frac{1}{T} (1 - v \frac{Y}{K})$ elde edilir. Böylece hata ayarlama mekanizmasının yatırım fonksiyonu

aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\frac{1}{K}DK = \frac{\kappa}{D + \kappa} \left\{ g - \frac{1}{T} \left(1 - v \frac{Y}{K} \right) \right\}$$

Sermaye, çıktıya bir gecikme ile intibak eder. Bu gecikmenin üssel formu aldığı varsayılıyor. κ sermayenin intibak hızıdır. Denge sermaye düzeyinden (K^*) sapma gösteren sermaye düzeyinin (K) büyüme oranı differential operator (Allen, 1963:725-727) cinsinden $x = \frac{DK}{K}$ olarak ifade edilir. Bu büyüme oranı denge büyüme oranı olan g 'den büyüktür. Bunun başlangıç değeri, $x_0 > g$ şeklindedir. Tekrar denge durumuna gelmesi aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$x \rightarrow g \quad t \rightarrow \infty$$

(2) numaralı eşitlik differential operator cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır.

$$DK = sY$$

K sermaye düzeyinin büyüme oranı $x = \frac{DK}{K}$ şeklindedir. Bu iki eşitliği kullanarak yatırım fonksiyonundaki $v \frac{Y}{K}$ ifadesi $\frac{x}{g}$ olarak yazılabilir. Bu durumda yatırım fonksiyonu aşağıdaki hale gelir.

$$x = \frac{\kappa}{D + \kappa} \left\{ g - \frac{1}{T} \left(1 - \frac{x}{g} \right) \right\}$$

Bu denklem düzenlendiğinde aşağıdaki birinci derece diferansiyel denklem elde edilir.

$$Dx + \kappa \left(1 - \frac{1}{gT} \right) x = \kappa g \left(1 - \frac{1}{gT} \right)$$

Bu diferansiyel denklem çözüldüğünde aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$x = g + B e^{-\kappa \left[1 - \left(\frac{1}{gT} \right) \right] t}$$

$t = 0$ iken $x = x_0$ olur. Buradan da $B = x_0 - g$ elde edilir. Bu yukarıdaki denklemde yerine konulursa,

$$x = g + (x_0 - g)e^{-\kappa[1-(\frac{1}{gT})]t}$$

elde edilir. Bu denklemden görüleceği üzere eğer sermayenin başlangıç büyüme oranı $x_0 = g$ olursa, $x = g$ elde edilir. Böylece, durağan durum denge büyüme oranı diferansiyel denklemin özel çözümüdür. Eğer sermayenin başlangıç büyüme oranı $x_0 \neq g$ olduğu durumda başlangıçta dengeden sapan sermayenin büyüme oranının tekrar dengeye gelip gelmeyeceği $1 - (\frac{1}{gT})$ terimi tarafından belirlenir. Denge kararlılık ve kararsızlık şartları şunlardır.

Eğer $1 - (\frac{1}{gT}) > 0$ olduğunda yani $T > \frac{1}{g}$ ise kararlı

Eğer $1 - (\frac{1}{gT}) \leq 0$ olduğunda yani $T \leq \frac{1}{g}$ ise kararsızdır.

Bu modelde dengesizlik durumuna göre, yatırım planlama periyodu ne kadar uzun ise, durağan durum kararlıdır. Kısa yatırım planlama periyodunda ise durağan durum kararsızdır. (Allen, 1967:187-190)

1.3 Solow-Swan Modeli

Solow-Swan Modeli (Solow, 1956; Swan, 1956; Sengupta, 2011; Wickens, 2012; Mankiw et al., 1995; Obstfeld et al., 1996; Raut and Srinivasan, 1992; Romer, 2011) bir Neoklasik uzun dönem büyüme modelidir. Uzun dönem büyüme oranı sabit nüfus büyüme oranı tarafından belirlenir. Dışsal teknolojik değişim bu büyüme oranını artırır.

Solow Modeli, bir ekonomide sadece tasarruf yapılarak ve bu tasarruflar sermaye yatırıma dönüştürülerek sürekli pozitif büyüme oranı elde edilip edilemeyeceği sorusuna yanıt arar. Bunun için iki temel denklem kullanılır. Bunlar yeniklasik üretim fonksiyonu ve sermaye birikimi denklemleridir.¹⁰ Solow Modeli bir kapalı ekonomi modelidir.

1.3.1 Model

Ekonomi kapalı bir ekonomidir. Üretim fonksiyonu neoklasik üretim fonksiyonudur. Ölçeğe göre sabit getirili, sermaye ve emeğin birinci türevleri pozitif, ikinci türevleri negatiftir. Inada şartları geçerlidir. (Okamoto and Inada, 1962; Inada, 1963) Nüfus üssel olarak artış göstermektedir. Ekonomide tek ürün üretilmektedir. Bu ürünün bir kısmı tüketilir. Geri kalan kısmı ise tasarruf edilip yatırıma dönüştürülür. Sermaye belli bir oranda amortisman edilir. Hem sermaye hem emek üretim için olmazsa olmazdır. Modelin bütün bu varsayımlarını matematiksel notasyonla aşağıdaki şekilde gösterebiliriz. (Barro, 2004)

$$Y = F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$$

$$\lim_{K \rightarrow 0} \left(\frac{\partial F}{\partial K} \right) = \lim_{K \rightarrow 0} \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right) = \infty$$

¹⁰ Yeniklasik üretim fonksiyonunun özellikleri şu şekildedir: $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$, $F_K(K, L) > 0$, $F_L(K, L) > 0$, $F_{KK}(K, L) < 0$, $F_{LL}(K, L) < 0$ ve Inada şartları $\lim_{K \rightarrow 0} F_K = \lim_{L \rightarrow 0} F_L = \infty$, $\lim_{K \rightarrow \infty} F_K = \lim_{L \rightarrow \infty} F_L = 0$, $F(0, L) = F(K, 0) = 0$

$$\dot{K} = I - \delta K$$

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0$$

$$L = L_0 e^{nt}$$

1.3.2 Denge Dinamiği

Bir ülkenin zenginliği ya da fakirliği kişi başı değerler üzerinden düşünülür. Bu nedenle kişi başı ekonomik büyüme, kişi başı sermaye birikimi ve kişi başı tüketim değerleri üzerinden model geliştirilir. (Blanchard and Johnson, 2015) Bu bağlamda ölçeğe göre sabit getiri varsayımı kullanılarak üretim fonksiyonu ve sermaye birikimi fonksiyonu kişi başı değerler üzerinden ifade edilerek temel Solow denklemi bulunur.¹¹ (Barro, 2004:23-31)

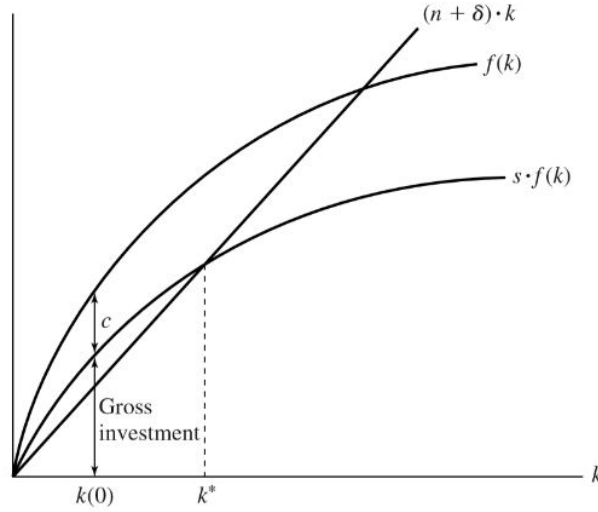
$$y = f(k)$$

$$\dot{k} = sf(k) - k(\delta + n)$$

Bu diferansiyel denklem temel Solow denklemidir. Solow denkleminin grafiği aşağıda gösterilmiştir.¹²

¹¹ $Y = F(K, L)$ olmak üzere eşitliğin her iki tarafını L ile bölerek kişi başı çıktı bulunur. $\frac{Y}{L} = \frac{F(K, L)}{L}$. Üretim fonksiyonu ölçeğe göre sabit getirili bir fonksiyondur. Yani $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ şeklindedir. Burada $\lambda = \frac{1}{L}$ yazarsak fonksiyon $y = \frac{Y}{L}$ ve $k = \frac{K}{L}$ olmak üzere $y = F(k, 1)$ şekline dönüşür. y , k 'nın fonksiyonu olduğundan dolayı fonksiyon sonuç olarak şöyle yazılır. $y = f(k)$
Solow Modeli'nde yatırımlar tasarruflara eşittir $I = S$. Ayrıca çıktının sabit s oranı tasarruf edilir $sY = S$. Bunlar gözönünde bulundurularak sermaye birikimi denkleminin her iki tarafını L ile bölelim. $\frac{\dot{K}}{L} = \frac{sY}{L} - \frac{\delta K}{L}$ elde edilir. Sadeleştirilirse, $\frac{\dot{K}}{L} = sf(k) - \delta k$ elde edilir. $k = \frac{K}{L}$ eşitliğinin t 'ye göre türevi alınır, $\frac{dk}{dt} = \dot{k} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - kn \rightarrow \dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - kn$ elde edilir. Burada $n = \frac{\dot{L}}{L}$ emek artış oranıdır. Buradan $\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + kn$ olur. Bunu $\frac{\dot{K}}{L} = sf(k) - \delta k$ eşitliğinde yerine koyup düzenlediğimizde temel Solow denklemi elde edilir.

¹² $f(0) = 0$, $n + \delta < \lim_{k \rightarrow 0} [sf'(k)] = \infty$, $n + \delta > \lim_{k \rightarrow \infty} [sf'(k)] = 0$ olduğundan Solow denkleminin grafiği şekildeki gibi çizilir.



Şekil 1.2: Solow-Swan Modeli Barro, R. J. , Sala-i Martin X: 2004 Economic Growth. Aufl. Massachusetts Institute of Technology (MIT.) sayfa 29

Durağan durumda büyüme oranı sabittir. Solow Modeli'nde durağan durumda $\frac{\dot{k}}{k} = 0$ 'dır.¹³ (*) değişkenlerin denge durumundaki değerlerini ifade etmek üzere, Solow Modeli'nde durağan durumda $\dot{k}^* = 0$ 'dır. Dolayısıyla k^* sabittir. k^* ifadesi kişi başı sermayenin durağan durum denge değerini gösterir. $y = f(k)$ olduğundan dolayı kişi başı çıktı (y) değeri de durağan durumda sabittir. $c = (1 - s)f(k)$ olduğundan dolayı kişi başı tüketim de (c) durağan durumda sabittir.

Bu durumda durağan durumda k^* , y^* , c^* değerlerinin hepsi sabittir. Bu da durağan durumda bu değerlerin büyüme oranlarının sıfır olduğu anlamına gelir. (Barro, 2004:34)

$k = \frac{K}{L}$ ifadesinin logaritmasını sonra da türevini alırsak k değerinin büyüme oranını buluruz.¹⁴

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$$

¹³ Bunun ispatı şu şekildedir: Solow denkleminin her iki tarafını k ile bölelim. $\frac{\dot{k}}{k} = s \frac{f(k)}{k} - (\delta + n)$ elde edilir. Durağan durumda $\frac{\dot{k}}{k}$ sabit olduğu için $s \frac{f(k)}{k} - (\delta + n) = \text{sabit}$ olarak yazılır. Her iki tarafın zamana göre türevi alınırsa, $(\frac{-[f(k) - f'(k)k]}{k}) \frac{\dot{k}}{k} = 0$ elde edilir. $-[f(k) - f'(k)k]$ emeğin marjinal ürünüdür ve tam rekabetçi piyasa şartlarında ücrete eşittir. Dolayısıyla pozitiftir. Bu durumda $(\frac{-[f(k) - f'(k)k]}{k}) \frac{\dot{k}}{k} = 0$ ifadesinin sıfır olabilmesi için $\frac{\dot{k}}{k} = 0$ olmak zorundadır. Sonuç olarak Solow Modeli'nde durağan durumda $\dot{k}$ sıfırdır.

¹⁴ $\log k = \log(\frac{K}{L}), \log k = \log K - \log L, \frac{d \log k}{dt} = \frac{d \log K}{dt} - \frac{d \log L}{dt}$

k değerinin büyüme oranı sıfır olduğundan dolayı

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{L}}{L} = n$$

olur. Sermaye nüfus artış oranında büyür. Aynı şekilde $Y = Lf(k)$ ($y = \frac{Y}{L}$, $y = f(k)$) eşitliğinin logaritmasını sonra da türevini alırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = n + \frac{\dot{y}}{y}$$

Durağan durumda y değerinin büyüme oranı sıfır olduğundan dolayı durağan durumda çıktı, nüfus artış oranında büyür.

$c = (1 - s)f(k)$ eşitliğinin her iki tarafını L ile çarparsak $C = (1 - s)Y$ elde ederiz. Bu eşitliğin logaritmasını sonra türevini alırsak

$$\frac{\dot{C}}{C} = (1 - s) \frac{\dot{Y}}{Y}$$

elde ederiz. Bu durumda tüketim de nüfus artış oranında büyür. Sonuç olarak, durağan durum olması halinde kişi başı değerler olan k,c,y değerlerinin büyüme oranları sıfırdır. K,C,Y değerleri ise nüfus artış oranı olan sabit n oranında büyürler. Solow modeli bu şekli ile uzun dönem kişi başı büyümenin belirleyicileri hakkında bir açıklama getirmez.

1.3.3 Altın Kural

Veri teknolojik ilerleme, n ve δ değerlerinde, her s değeri için bir durağan durum k^* değeri vardır. Bu durağan durum kişi başı sermaye değerini tasarruf oranının fonksiyonu olarak ifade edebiliriz. $k^*(s)$.

Durağan durum kişi başı tüketim değeri $c^* = (1 - s)f[k^*(s)]$ olarak gösterilir. Durağan durumda Solow Denklemi şu hale gelir.

$$sf(k^*) = k^*(n + \delta)$$

Buradaki $sf(k^*)$ ifadesini kişi başı tüketim denkleminde yerine koyarsak,

$$c^* = f[k^*(s)] - k^*(s)(n + \delta)$$

elde ederiz. Bu son ifadenin tasarruf oranına göre türevini alıp sıfıra eşitlersek, durağan durum kişi başı tüketim değerini en çoklaştırmış (maksimize etmiş) oluruz.

$$\frac{dc^*}{ds} = \frac{df[k^*(s)]}{ds} - \frac{dk^*(s)}{ds}(n + \delta) = 0$$

$$f'[k^*(s)_{gold}] = n + \delta$$

Bu ifade sermayenin altın kuralı olarak adlandırılır. ([?, ?]) Bu durağan durum kişi başı sermaye değerini sağlayan tasarruf oranına da s_{gold} denir. Bu şu anlama gelmektedir. s_{gold} tasarruf oranı durağan durumda en yüksek kişi başı tüketimi sağlıyor. s_{gold} oranından farklı tasarruf oranları yüksek kişi başı tüketimi sağlamıyorlar. Bu tasarruf oranları etkin olmayan tasarruf oranlarıdır. Çünkü bu tasarruf oranlarını s_{gold} oranına getirerek daha yüksek kişi başı tüketimi elde etmek olanaklıdır. (Phelps (1961; 1965))

1.3.4 Geçiş Dinamiği

Geçiş dinamiği, bir ekonominin kişi başı gelirin nasıl durağan durum değerine yakınsadığını gösterir. Solow Temel Denklemi'ni k değerine bölüp grafiğini çizerek geçiş dinamiğini inceleyebiliriz.

$$\dot{k} = sf(k) - k(n + \delta)$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (n + \delta)$$

$\frac{f(k)}{k}$ ifadesinin k 'ya göre türevini alalım.

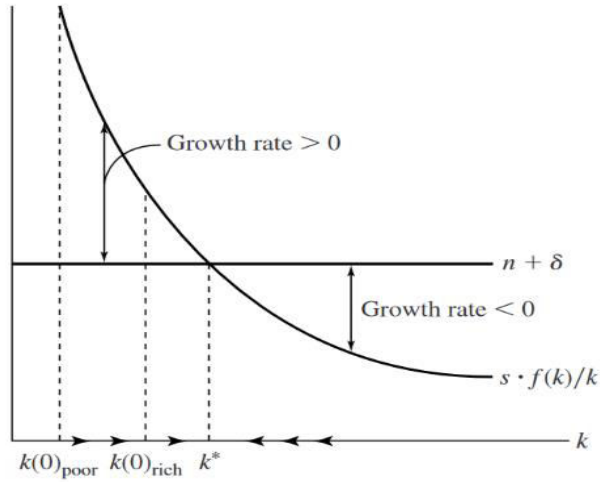
$$\frac{d(\frac{f(k)}{k})}{dk} = \frac{-[\frac{f(k)}{k} - f'(k)]}{k}$$

Köşeli parantez içindeki ifade emeğin marjinal ürünüdür ve pozitiftir. Dolayısıyla $\frac{f(k)}{k}$ ifadesinin k 'ya göre türevi negatiftir. Bu nedenle grafiği negatif eğimlidir. k limitte sıfıra ve sonsuza giderken $\frac{sf(k)}{k}$ ifadesinin aldığı şekli bulmak için aşağıdaki gibi L'hospital kuralını kullanarak limitini alalım. Böylece yukarıdaki denklemin ilk kısmının grafiğini çizmiş oluruz.

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{sf(k)}{k} \rightarrow f'(k) = \infty$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{sf(k)}{k} \rightarrow f'(k) = 0$$

$n + \delta$ ifadesi k eksenine paralel bir doğrudur. $\frac{sf(k)}{k}$ ve $n + \delta$ ifadesi bir kere kesişir. Dolayısıyla k^* değeri vardır ve tektir.



Şekil 1.3: Solow-Swan Modelinin Dinamiği Barro, R. J. , Sala-i Martin X: 2004
Economic Growth. Aufl. Massachusetts Institute of Technology (MIT.) sayfa 38

Grafikten de görüleceği üzere, durağan durumun sol tarafında $\frac{sf(k)}{k}$ ifadesi $n + \delta$ ifadesinden büyüktür. Bu durumda kişi başı sermayenin büyüme oranı pozitifdir ve k değeri artar. k değeri arttıkça $\frac{k}{k}$ değeri düşer ve k , k^* değerine ulaştığında $\frac{k}{k}$ değeri sıfır olur. Azalan büyüme oranının nedeni, sermayenin azalan getirisidir. k değeri düşük olduğunda $\frac{sf(k)}{k}$ yani sermayenin ortalama getirisi artar. $n + \delta$ sabit olduğundan dolayı $\frac{k}{k}$ artar. Ekonomi durağan durum k değerinin üzerinde bir yerde ise, bu durumda büyüme oranı negatif olur ve k azalmaya başlar. Sonuç olarak, k^* değeri durağandır. Ekonomi bu değerde dengeye gelir. (Barro, 2004:37-40)

İki ekonomiyi ele alalım. Eğer bu iki ekonominin s, n, δ değerleri ve üretim fonksiyonu aynı ise, durağan durum değerleri de aynıdır. Tek fark başlangıç kişi başı sermaye değerleri ise, bu iki ekonomiden kişi başı sermaye değeri daha düşük olan daha hızlı büyüyecektir ve sonunda iki ekonomi de aynı durağan durum değerine ulaşacaklardır. Buna mutlak yakınsama denir. Fakir ekonomiler daha hızlı büyür.

Temel parametreleri farklı olan iki ekonominin farklı durağan durum değerleri olacaktır. Dolayısıyla her ekonomi kendi durağan durum değerine ulaşacaktır. Buna şartla bağlı yakınsama denir. (Barro and Sala-i Martin, 1992:226) Her ekonomi kendi durağan durum değerinden ne kadar uzakta ise o kadar hızlı büyür. (Barro, 2004:44-50)

1.4 Romer Modeli

Romer Modeli'nde (Romer, 1990; 2011; Sengupta, 2011; Acemoglu, 2010; Barro, 2004; Grossman and Helpman, 1991a; Helpman, 2009; Jones and Vollrath, 2013; Jones, 1998; Obstfeld et al., 1996) üç temel öncül vardır. Birincisi, ekonomik büyümenin motoru teknolojik değişimdir. İkincisi, teknolojik değişim kar maksimizasyonu yapan girişimcilerin yatırım kararlarına bağlıdır. Yani girişimcilerin yatırım kararı alma süreçleri de modele dahildir. Dolayısıyla, teknoloji Solow Modeli'ndeki gibi dışsal değil içseldir. Modelin içinde belirlenir. Üçüncüsü ise, bir ürünü üretmek için gerekli olan plan, proje ya da tasarımın maliyeti bir kere oluştuktan sonra, bu plan,proje, tasarımlar ek bir maliyet ortaya çıkmadan tekrar tekrar kullanılabilir.

Malların rakiplik ve dışlanabilirlik özellikleri vardır. Rakiplik, bir malın bir şirket ya da bir kişi tarafından kullanılmasının diğer şirket ya da kişi tarafından kullanılmasının önünde engel teşkil etmesidir. Böyle mallara rakip mal denir. Eğer bir mal, sahibi tarafından o malın diğer kişiler tarafında kullanılmasından men edilebiliyorsa o mal dışlanabilirlik özelliği olan bir maldır. Büyüme kuramı açısından önemli olan ise malların hem rakip olmayan hem de dışlanabilen mallar olmasıdır. Romer Modeli'ndeki üçüncü öncül teknolojinin rakip olmayan bir mal olduğu ima eder. İkinci öncül, teknolojik gelişmenin kar maksimizasyonu yapan girişimciler tarafından meydana getirildiğini ima eder. Bu durumda bu teknolojik gelişmeden elde edilen getirilerin bir kısmından diğer kişi ya da şirketler dışlanabilir.¹⁵ Dolayısıyla, birinci öncül büyümenin motorunu kısmen dışlanabilirliği olan rakipsiz bir malın oluşturduğunu ima eder.

Teknolojinin rakipsiz mal olma özelliği üretim fonksiyonunun convex olmayan bir fonksiyon olmasını gerektirir. Üretim fonksiyonu ölçeğe göre sabit getirili bir fonksiyon olamaz.¹⁶ Eğer şirket piyasa fiyatını veri alıp girdilere marjinal katkılarına göre ödeme yaparsa şirket zarar eder.¹⁷

¹⁵ Teknolojik gelişmenin iki getirisi var. Birincisi yeni bir ürünün üretilmesini sağlaması, ikincisi ise bilgi stoğunun artışına yaptığı katkıdır. Şirketin yeni üretilen ürün üzerinde patent hakkı olduğu varsayıldığında diğer şirketler bu ürünü şirketin izni olmadan üretemezler. Yani birinci getiriden pay alamazlar. Teknolojik gelişmenin bu kısmı dışlanabilir. Yalnız bilgi stoğunun artışı dışlanamaz olduğundan ikinci getiriden yararlanırlar. Rakipsiz girdi olan teknolojik gelişme bu sebeple kısmen dışlanabilir.

¹⁶ A rakip olmayan, X rakip olan girdi, λ pozitif bir katsayı ve $F(A, X)$ üretim fonksiyonu olmak üzere, X rakip girdiyi λ kat kadar arttırsak $F(A, \lambda X) = \lambda F(A, X)$ olur. Eğer A rakip olmayan girdide verimlilik artışı olursa yani A'yı λ kat kadar arttırsak, $F(\lambda A, \lambda X) > F(A, \lambda X) = \lambda F(A, X)$ ve dolayısıyla $F(\lambda A, \lambda X) > \lambda F(A, X)$ olur. Yani birinci dereceden homojen bir fonksiyon olmaz.

¹⁷ $F(\lambda A, \lambda X) > \lambda F(A, X)$ eşitsizliğinin her iki tarafının λ 'ya göre türevini alalım.

1.4.1 Model

Ekonomi üç sektörden oluşmaktadır. Araştırma sektörü, beşeri sermaye ve bilgi stoğunu kullanarak yeni bilgi üretir. Ara ürün sektörü, araştırma sektöründe elde edilen yeni bilgiyi ve çıktının tüketimden arta kalan kısmını kullanarak ara ürün üretir. Son ürün sektörü ise, emek, beşeri sermaye ve ara ürünleri kullanarak çıktıyı üretir. Modelde nüfus ve emek arzı sabittir. Beşeri sermaye stoğu da sabittir. Bunu aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

Ar-Ge → Ara ürün sektörü → Son ürün sektörü

Son ürün sektörü, emek (L), beşeri sermayenin son ürün sektörüne ayrılan kısmı (H_Y)¹⁸ ve ara ürün (x_i) kullanılarak çıktı üretiyor. Bu Cobb-Douglas üretim fonksiyonu çerçevesi içinde aşağıdaki şekilde gösterilir. (Ethier, 1982)

$$Y(H_Y, L; x) = H_Y^\alpha L^\beta \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{1-\alpha-\beta}$$

Ara ürünler için i indeksini sürekli değişken olarak yazarsak üretim fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$Y(H_Y, L; x) = H_Y^\alpha L^\beta \int_{i=0}^{\infty} x(i)^{1-\alpha-\beta} di$$

Sermaye aşağıdaki kurala göre birikir.

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t)$$

Araştırma sektöründe bilgi stoğundaki birikim aşağıdaki şekildedir.

$$\dot{A} = \delta H_A A$$

H_A toplam beşeri sermayenin araştırma sektöründe istihdam edilen kısmıdır. A var olan bilgi stoğudur. δ beşeri sermayenin verimliliğini gösterir.

$$\frac{\partial F(\lambda A, \lambda X)}{\partial \lambda A} \frac{d\lambda A}{d\lambda} + \frac{\partial F(\lambda A, \lambda X)}{\partial \lambda X} \frac{d\lambda X}{d\lambda} > F(A, X)$$

olur. Eğer $\lambda = 1$ olursa,

$F_A A + F_X X > F(A, X)$ elde edilir.

¹⁸ H_Y beşeri sermayenin son ürün sektöründe kullanılan kısmı, H_A ise araştırma sektöründe kullanılan kısmı olmak üzere toplam beşeri sermaye $H = H_Y + H_A$ olur.

1.4.2 Denge Dinamiği

P_A araştırma sektöründe üretilen yeni bilginin fiyatı ve w_H bir birim beşeri sermayenin ücreti olmak üzere, beşeri sermayenin araştırma sektöründe elde ettiği ücret, beşeri sermayenin marjinal ürünü ile bu ürünün fiyatının çarpımına eşittir.¹⁹

$$w_H = P_A \delta A$$

Son ürünü üreten firmanın karını maksimize eden ara ürün miktarı aşağıdaki şekilde belirlenir.²⁰

$$\max \int_{i=1}^{\infty} H_Y^\alpha L^\beta x(i)^{1-\alpha-\beta} - p(i)x(i) di$$

Bunun x_i 'ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse aşağıdaki ters talep fonksiyonu elde edilir.

$$p(i) = (1 - \alpha - \beta) H_Y^\alpha L^\beta x(i)^{-\alpha-\beta}$$

Ara ürün üreticileri, son ürün üreticisi firmanın bu talep fonksiyonunu gözününe alarak kendi karlarını maksimize edecek ara ürün fiyatını belirlerler. Bu kar maksimizasyonu sonucu ara ürün fiyatı,²¹

¹⁹ $\dot{A} = \delta H_A A$ araştırma sektöründeki üretim fonksiyonu olarak görülebilir. Bu fonksiyonun beşeri sermayeye göre türevi alınırse beşeri sermayenin marjinal ürünü elde edilir. $\frac{\partial \dot{A}}{\partial H_A} = \delta A$ Buradan, $w_H = P_A \delta A$ elde edilir.

²⁰ $\int_{i=1}^{\infty} H_Y^\alpha L^\beta x(i)^{1-\alpha-\beta}$ toplam çıktıyı, p_i ara ürününün fiyatını temsil etmek üzere $p(i)x(i)$ toplam maliyeti ifade eder.

²¹ π karı simgeleri. Bir birim ara ürün üretmek için η birim sermaye gerekiyor. $x(i)$ birim ara ürün üretebilmek için $\eta x(i)$ birim sermaye gerekir. Sermayenin fiyatı r 'dir. Dolayısıyla, $x(i)$ birim ara ürün üretmenin ara ürün üreticisi firmaya maliyeti $r\eta x$ olur. Ara ürünün fiyatı $p(i)$ olmak üzere, ara ürün üreticisi kar maksimizasyonu yapar.

$$\pi = \max p(i)x(i) - r\eta x(i)$$

$p(i)$ yerine ters talep fonksiyonunu koyarsak,

$$\pi = \max (1 - \alpha - \beta) H_Y^\alpha L^\beta x^{1-\alpha-\beta} - r\eta x$$

elde edilir. $x(i)$ 'e göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek ara ürün üreticilerinin karını maksimize edecek ara ürün fiyatı bulunur.

$$\frac{d\pi}{dx(i)} = (1 - \alpha - \beta) H_Y^\alpha L^\beta (1 - \alpha - \beta) x(i)^{-\alpha-\beta} - r\eta = 0$$

$p(i)$ değerini yukarıdaki denklemde $(1 - \alpha - \beta) H_Y^\alpha L^\beta x(i)^{-\alpha-\beta}$ ifadesinin yerine koyalım. Böylece,

$$\bar{p} = r\eta/1 - \alpha - \beta$$

22

olur. Bu $\bar{p}$ değeri kar denkleminde yerine konulursa ara ürün üreticisinin karı elde edilir.²³

$$\pi = \bar{p}\bar{x}(\alpha + \beta)$$

24

Ara ürün üretme kararı, bu ara üründen elde edilecek iskonto edilmiş net gelirler ile bu ara ürünü üretebilmek için kullanılan araştırma sektöründeki çalışmalar sonucu elde edilmiş yeni bilginin maliyetini (P_A) karşılaştırma sonucu verilir. Denge durumunda aşağıdaki eşitlik geçerli olur.²⁵

$$\int_t^\infty e^{-\int_t^\tau r(s)ds} \pi(\tau) d\tau = P_A(t)$$

Eğer $P_A(t)$ sabit ise, $P_A(t)$ 'nin zamana göre türevi sıfır olur. Bunu gözönüne alarak yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının zamana göre türevi alınır,

$$\pi(t) = r(t)P_A(t)$$

elde edilir.²⁶ Bu eşitlik şu anlama gelir. Her t zamanında araştırma sektöründe elde edilen

$$(1 - \alpha - \beta)p(i) = r\eta$$

buradan da ara ürün fiyatı,

$$p(i) = r\eta/1 - \alpha - \beta$$

olarak elde edilir.

²² Bütün $x(i)$ ara ürününü üreten firmalar için $p(i)$ fiyatı aynı olduğundan dolayı (Çünkü η, α, β sabittir ve r bütün ara ürün üreticileri için aynıdır.) $p(i)$ yerine $\bar{p}$ simgesi kullanılmıştır.

²³ Kar denklemi, $\pi = p(i)x(i) - r\eta x(i)$ olmak üzere, $r\eta$ yerine $\bar{p}(1 - \alpha - \beta)$ ifadesini koyalım. $\pi = \bar{p}x(i) - \bar{p}x(i)(1 - \alpha - \beta)$ elde edilir. Sadeleştirme yapıldığında $\pi = \bar{p}x(i)(\alpha + \beta)$ olarak kar elde edilir.

²⁴ $x(i)$ ara ürününü üreten bütün üreticilerin karını maksimize eden $\bar{p}$ fiyatı hepsi için tek olduğundan dolayı bu fiyattan bütün ara ürün üreticileri aynı miktarda ara ürün üretir. Bu nedenle bu ara ürün miktarı $x(i)$ yerine $\bar{x}$ ile gösterilir.

²⁵ Yeni bilgi pazarı rekabetçidir. Bütün ara ürün üreticileri yeni bilgiyi talep edeceklerdir. Çünkü bu yeni bilgiyi kullanarak üretim yapacaklardır. Bu da yeni bilginin fiyatını yükseltecektir. Fiyat yükselmesi, bu fiyatın ara ürün üreticilerinin ara üründen elde edecekleri iskonto edilmiş net gelirlerine eşit olmasına kadar devam edecektir. Denge noktasında da yukarıdaki eşitlik geçerli olacaktır.

²⁶ Eşitliğin sağ tarafının zamana göre türevi $\dot{P}_A(t)$ 'dir. Sol tarafının türevi ise Leibniz yöntemi (Sydsaeter et al.) ile alınır.

yeni bilgiyi kullanarak ara ürün üreten ara ürün üreticisi firmanın elde ettiği kar, yeni bilginin faiz maliyetini karşılar.

Romer Modeli'nde son ürün sektörü, ara ürün sektörü ve araştırma sektörü vardır. Modeli tamamlamak için tüketici tercihleri de modele eklenir. Keynes-Ramsey kuralı geçerlidir.²⁷

$$\frac{d}{dt} \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau r(s)ds} \pi(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} P_A(t)$$

Eşitliğin sol tarafına Leibniz yöntemi (Sydsaeter et al.) uygulandığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$-e^{-\int_t^\tau r(s)ds} \pi(\tau) + \int_t^\infty \frac{d}{dt} e^{-\int_t^\tau r(s)ds} \pi(\tau) d\tau = \dot{P}_A(t)$$

Eşitliğin sol tarafındaki ilk ifadede (t,t) aralığında tümlev (integral) sıfır olur. Dolayısıyla $e^{-\int_t^\tau r(s)ds} = e^{-0} = 1$ olur. İkinci ifadede chain rule kullanılarak $e^{-\int_t^\tau r(s)ds}$ ifadesinin türevi t'ye göre aşağıdaki şekilde alınır.

$$\frac{d}{dt} e^{-\int_t^\tau r(s)ds} = \frac{de^{-\int_t^\tau r(s)ds}}{d(-\int_t^\infty r(s)ds)} \frac{d(-\int_t^\infty r(s)ds)}{dt} = e^{-\int_t^\tau r(s)ds} r(t)$$

Elde edilen bu ifadeyi $\frac{d}{dt} e^{-\int_t^\tau r(s)ds}$ ifadesi yerine koyarsak,

$$-\pi(t) + \int_t^\infty \pi(\tau) r(t) e^{-\int_t^\tau r(s)ds} d\tau = \dot{P}_A(t)$$

elde edilir. Tümlevin (integralin) diferansiyeli $d\tau$ olduğundan dolayı $r(t)$ tümlev dışına çıkarılabilir.

$$-\pi(t) + r(t) \int_t^\infty \pi(\tau) e^{-\int_t^\tau r(s)ds} d\tau = \dot{P}_A(t)$$

$\int_t^\infty \pi(\tau) e^{-\int_t^\tau r(s)ds} d\tau$ ifadesinin yerine $P_A(t)$ konulduğunda,

$$-\pi(t) + r(t) P_A(t) = \dot{P}_A(t)$$

elde edilir. $P_A(t)$ sabit kabul edildiğinden $\dot{P}_A(t) = 0$ olur. Bu durumda yukarıdaki eşitlik,

$$\pi(t) = r(t) P_A(t)$$

haline gelir.

Not: Leibniz yöntemi ile ilgili olarak [?] kitabının 153-155 sayfalarına bakılabilir.

²⁷ Tez çalışmasındaki Ramsey Modeli'nde Keynes-Ramsey kuralı $\frac{c}{c} = \frac{1}{\theta} (r - \rho)$ olarak yazılmıştır.

Romer'ın makalesindeki notasyona sadık kalmak için onun kullandığı şekilde Keynes-Ramsey kuralı burada gösterilmiştir. Buradaki σ , tez çalışmasındaki Ramsey kısmında θ simgesi ile gösterilmiştir. r faiz oranı sabittir. Ayrıca Romer'da C toplam tüketimi temsil ediyor. Tez çalışmasındaki Ramsey Modeli'nde c kişi başı tüketimi temsil ediyor. Yalnız bu iki denklem arasında anlamlı bir fark oluşturmuyor. Tüketici tercihindeki integralin sonlu olması için cari faydanın büyüme oranı $((1 - \sigma)g)$, tüketicinin zaman tercihi oranından (ρ) küçük olmalıdır.

$$U(C) = \frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$$

$$\log U(C) = \log\left(\frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right)$$

$$\frac{\dot{C}}{C} = (r - \rho)/\sigma$$

Denge durumunda beşeri sermayenin son ürün sektöründe ve araştırma sektöründe elde ettiği ücretler birbirine eşit olmalıdır. Beşeri sermayenin araştırma sektöründe elde ettiği ücret $w_H = P_A \delta A$ 'dır. Son ürün sektöründe elde ettiği ücret ise beşeri sermayenin marjinal getirisine eşittir. Beşeri sermayenin marjinal getirisi, $\alpha H_Y^{\alpha-1} L^\beta A \bar{x}^{1-\alpha-\beta}$ olmak üzere²⁸

$$P_A \delta A = \alpha H_Y^{\alpha-1} L^\beta A \bar{x}^{1-\alpha-\beta}$$

$$\frac{d \log U(C)}{dt} = (1 - \sigma) \frac{dC^{1-\sigma-1}}{dt} - \frac{d \log(1-\sigma)}{dt}$$

$$\frac{\dot{U}}{U} = (1 - \sigma) \frac{\dot{C}}{C}$$

$$\frac{\dot{U}}{U} = (1 - \sigma)g$$

Bu birinci dereceden bir diferansiyel denklemdir. Çözümü,

$$U(C) = e^{t(1-\sigma)g}$$

olur.

$$\int_0^\infty e^{t(1-\sigma)g} e^{-\rho t} dt$$

$$\int_0^\infty e^{-t[\rho-(1-\sigma)g]} dt$$

$$\rho - (1 - \sigma)g > 0$$

$$\rho > (1 - \sigma)g$$

²⁸ Üretim fonksiyonu,

$$Y(H_Y, L; x) = H_Y^\alpha L^\beta \int_{i=0}^\infty x(i)^{1-\alpha-\beta} di$$

şeklindedir. Kar maksimizasyonu yapan son ürün üreticisi firmanın ters talep fonksiyonunu veri alarak kendi karını maksimize eden ara ürün üreticilerinin ara ürün miktarı $\bar{x}$ şeklindedir ve bütün ara ürün üreticileri için aynıdır. t zamanındaki yeni bilgi seviyesi A olarak kabul edildiğinde üretim fonksiyonu aşağıdaki hali alır.

$$Y(H_Y, L; x) = H_Y^\alpha L^\beta \int_{i=0}^A \bar{x}^{1-\alpha-\beta} di$$

Buradan tümlev (integral) hesaplanarak,

$$Y(H_Y, L; x) = H_Y^\alpha L^\beta A \bar{x}^{1-\alpha-\beta}$$

elde edilir. Bu üretim fonksiyonunun H_Y göre türevi alınırsa beşeri sermayenin marjinal getirisi elde edilir.

$$\alpha H_Y^{\alpha-1} L^\beta A \bar{x}^{1-\alpha-\beta}$$

P_A yerine $\frac{\alpha+\beta}{r}(1-\alpha-\beta)H_Y^\alpha L^\beta \bar{x}^{1-\alpha-\beta}$ koyduğumuzda,²⁹

$$H_Y = \frac{1}{\delta} \frac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} r$$

elde edilir. Bilgi stoğunun büyüme oranı δH_A .³⁰ 29 numaralı dipnotta elde ettiğimiz $Y(H_Y, L; x) = H_Y^\alpha L^\beta A \bar{x}^{1-\alpha-\beta}$ şeklindeki üretim fonksiyonunda eğer L , H_Y ve $\bar{x}$ sabit olursa, çıktı A ile aynı oranda büyür. $\bar{x}$ sabit ise K , A ile aynı oranda büyür.³¹ Böylece, A, Y, K aynı oranda büyür. Bu durumda, $\frac{K}{Y}$ oranı sabit olur. C'de, A ile aynı oranda büyür.³²

A büyüme oranını g ile gösterirsek,

$$g = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{A}}{A} = \delta H_A$$

olur. $g = \delta H_A$ ifadesini $H = H_A + H_Y$ eşitliğini kullanarak düzenlediğimizde aşağıdaki denklemi elde ederiz.³³

²⁹ $P_A = \frac{\pi(t)}{r(t)}$ şeklindedir. $\pi(t)$ yerine $\bar{p}\bar{x}(\alpha+\beta)$ ifadesini koyalım. $P_A = \frac{\bar{p}\bar{x}(\alpha+\beta)}{r(t)}$ elde edilir. $\bar{p}$ yerine $p(i) = (1-\alpha-\beta)H_Y^\alpha L^\beta x(i)^{-\alpha-\beta}$ ($p(i)$ ve $x(i)$ değerleri son ürün üreticilerinin kar en çoklaştırması sonucunda $\bar{p}$ ve $\bar{x}$ olurlar.) ifadeyi koyarsak,

$$\frac{\alpha+\beta}{r}(1-\alpha-\beta)H_Y^\alpha L^\beta \bar{x}^{1-\alpha-\beta}$$

elde edilir.

³⁰ $\dot{A} = \delta H_A A$ denkleminin her iki tarafını A ile bölersek, bilgi stoğunun büyüme oranını elde ederiz.

³¹ Bir birim ara ürün üretmek için gerekli olan sermaye η' 'dir. Bu durumda toplam sermaye, $K = \eta \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ olarak gösterilir. Belli bir t zamanında yeni bilgi seviyesi A olarak kabul edildiğinde ve ara ürün miktarı $\bar{x}$ olursa bu ifade $K = \eta \sum_{i=1}^A \bar{x}$ olur. Buradan da $K = \eta A \bar{x}$ elde edilir.

³² $Y = C + \dot{K}$ olmak üzere, her iki tarafı Y ile bölelim.

$$1 = \frac{C}{Y} + \frac{\dot{K}}{Y}$$

$$\frac{C}{Y} = 1 - \frac{\dot{K}}{Y}$$

elde edilir. $\frac{K}{Y}$ oranı sabit olduğundan dolayı $\frac{C}{Y}$ oranı da sabittir. Y , A oranında büyüdüğüne göre $\frac{C}{Y}$ oranının sabit olması için C de A oranında büyümelidir.

³³ $H_A = H - H_Y$ olur. Buradan, $g = \delta H - H_Y$ olmak üzere,

$$g = \delta H - \frac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} r$$

elde edilir.

$$g = \delta H - \frac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} r$$

$\Lambda = \frac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}$ olarak tanımlarsak,

$$g = \alpha H - \Lambda r$$

olur. Tüketici tercihi optimizasyonu denklemini de modele dahil edersek, Romer Modeli'nin büyüme oranı elde edilir.³⁴

$$g = \frac{\delta H - \Lambda \rho}{\sigma \Lambda + 1}$$

veya

$$g = \delta H - \frac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} r$$

Araştırma sektörüne yapılan beşeri sermaye yatırımının getirisi, bu araştırma sektöründe üretilecek yeni bilgiden gelecekte elde edilecek gelirlerdir. Eğer faiz oranı (r) artarsa bu net gelirlerin bugünkü değerleri azalır. Daha az beşeri sermaye araştırma sektörüne yönlendirilir ve büyüme oranı düşür. Tüketicilerin zaman tercihi oranındaki (ρ) azalış ve zamanlararası ikame elastikiyeti oranındaki artış büyüme oranını artırır. L 'deki artışın büyüme oranı üzerinde bir etkisi yoktur. Beşeri sermayedeki artış büyüme oranını artırır.

1.5 Aghion-Howitt Modeli

Aghion-Howitt Modeli'nin (Aghion and Howitt, 1992; Aghion and Durlauf, 2005;

³⁴ $\frac{\dot{C}}{C} = (r - \rho)/\sigma$ olmak üzere, $r = g\sigma + \rho$ olur. Buradan, $g = \delta H - g\Lambda\sigma - \Lambda\rho$ olmak üzere, $g = \frac{\delta H - \Lambda\rho}{\sigma\Lambda + 1}$ elde edilir.

Grossman and Helpman, 1991b; Jones, 1999; Sengupta, 2011) temelini Schumpeter'in "yaratıcı yıkım" fikri oluşturur. Niteliği arttırılmış ara ürünler eski ara ürünlerin yerine geçiyor. Eski ara ürünleri piyasadan siliyor. Teknolojik gelişmenin temelini de bu oluşturuyor.

1.5.1 Model

Aghion-Howitt Modeli'nde (Aghion et al., 1998) üç tane sektör vardır. Tüketim malı üreten sektör, ara malı üreten sektör ve araştırma-geliştirme sektörü. **Tüketim malının üretim fonksiyonu** aşağıdaki gibidir.³⁵

$$y = Ax_t^\alpha$$

Ara ürün sektörü dışındaki sektörlerde tam rekabet şartları geçerlidir.

Her bir yenilik ara ürünün niteliğini $\gamma > 1$ olmak üzere A'dan γA 'ya arttırıyor.³⁶ Emek arzı L'dir. Emeğin x miktarı ara ürün üretiminde, n miktarı ise araştırma sektöründe kullanılmak üzere,

$$L = x_t + n_t$$

Araştırma sektöründe n miktarında emek kullanıldığında yenilikler λn poisson varış oranı (Montgomery and Runger, 2018; Dinopoulos and Thompson, 1999) ile ortaya çıkarlar.³⁷ Modelde $\lambda > 0$ olmak üzere araştırma sektörünün verimliliğini ifade

³⁵ y çıktıyı, x ara ara ürün, A ara ürünün şu anki niteliğini temsil etmek üzere teknoloji parametresini ifade ediyor ve $0 < \alpha < 1$

³⁶ $A_{t+1} = \gamma A_t$

³⁷ Poisson olasılık dağılımı birim zaman ya da uzunluk, alan, hacim içinde, λ ortalama meydana gelen olay(event) sayısı olmak üzere, bir rassal olayın belli bir sıklıkta ($x=0,1,2,3,..$) gelme olasılıklarının dağılımını gösteriyor. Formülü aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}$$

t zaman, uzunluk v.s aralığını gösteriyor. Ama burada anlattığımız model açısından zaman aralığını ifade ediyor. λ , poisson olasılık dağılımının parametresidir. Yani, poisson olasılık dağılımında belli bir zaman aralığında bir olayın meydana gelme sıklığı bir rassal değişkendir. Arka arkaya meydana gelen iki olay arasındaki bekleme zamanı da bir rassal değişkendir. Yani araştırma sektöründe bir yenilik ortaya çıktıktan sonra bir sonraki yeniliğin gelmesi için geçmesi gereken zaman da bir rassal değişkendir ve bunun olasılık dağılımı üssel olasılık dağılımı (exponential probability distribution) fonksiyonu ile belirlenir. Bu üssel olasılık dağılımı fonksiyonu, poisson olasılık dağılımı fonksiyonundan elde edilir. Şöyle ki; poisson olasılık fonksiyonunda belli bir t zaman aralığında sıfır yeniliğin ortaya çıkma olasılığı $x = 0$ olarak,

$$P(x = 0) = e^{-\lambda t}$$

etmektedir.

1.5.2 Denge Dinamiği

Ara ürün sektöründe çalışan emeğin bir saatlik değeri w_t 'dir. Araştırma sektöründe çalışmasının değeri ise λV_{t+1} 'dir.³⁸

Bu iki gelirin birbirine eşit olduğu durumda emek iki sektör arasında kayıtsız kalır.

$$w_t = \lambda V_{t+1}$$

V_{t+1} 'nin değeri araştırma sektöründe meydana getirilen yeniliğin kullanılması sonucu elde edilen beklenen getirilerin bugünkü değerleri toplamıdır. Bu aşağıdaki şekilde gösterilir.

şeklindedir. T , bir sonraki olayın yani yeniliğin ortaya çıkması için geçen süreyi ifade eden bir rassal değişken olsun. Bir sonraki olayın gerçekleşmesi için geçmesi gereken en az süre t ise, yeni bir olayın ortaya çıkması için en az t zamanı kadar beklemenin olasılığı $P(T > t)$ olarak gösterilir. Bu olasılık, t zaman aralığında sıfır olay meydana gelme olasılığına eşittir. Bu durumda yukarıdaki formül şu şekilde de ifade edilebilir.

$$P(T > t) = P(x = 0) = e^{-\lambda t}$$

Bir olayın t zamanına eşit ya da t zamanından daha az bir zamanda ortaya çıkma olasılığı $T \leq t$

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

eşittir. Bu kümülatif olasılık dağılımıdır. Olasılık yoğunluk fonksiyonu bunun türevi alınarak bulunur.

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ kümülatif fonksiyonunun türevi alındığında

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

üssel olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir. Bu üssel olasılık dağılımı fonksiyonudur. Bu formülden bir olayın gerçekleşmesi için t zaman kadar beklemenin olasılığı nedir sorusunun yanıtı bulunur. Araştırma sektöründe bir yenilik yaratıldıktan sonra ikinci bir yeniliğin ortaya çıkması için gereken süre rassal bir değişkendir ve parametresi λ olan üssel olasılık dağılımı ile ifade edilir. λ birim zamanda ortalama meydana gelen olay (yenilik) sayısıdır. n adet araştırmacı olduğuna göre n adet araştırmacının ortalama yenilik yaratma sayısı λn 'dir.

³⁸ V_{t+1} araştırma sektöründe yaratılan yenilikten beklenen gelirlerin bugünkü değerleri toplamıdır. $t + 1$ ifadesi $t + 1$ 'nci yeniliği ifade eder. V_{t+1} bir saat çalışma sonucu elde edilen bir yeniliğin kullanımından elde edilecek gelecekteki gelirlerin bugünkü değerleri toplamıdır. Bu yeniliğin meydana gelme olasılığı λdt 'dir. Bu üssel olasılık dağılımından şu şekilde elde edilir. Üssel olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

olarak yazılır. $t = 0$ olmak üzere 0 ile dt arasındaki çok küçük aralıkta bir olayın meydana gelme olasılığı λdt 'dir. Aghion-Howitt'in notasyonuna sadık kaldığım için $w_t = \lambda dt V_{t+1}$ yerine $w_t = \lambda V_{t+1}$ olarak yazdım.

$$\int_t^{\infty} e^{-r(\tau-t)} e^{-\lambda n_{t+1}(\tau-t)} \pi(\tau) d\tau = V_{t+1}$$

Denge durumunda V_{t+1} değeri değişmez. Yani zamana göre türevi sıfır olur. Bu durumda yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının türevi alınır,

$$rV_{t+1} = \pi_{t+1} - \lambda n_{t+1} V_{t+1}$$

elde edilir.³⁹ Bu eşitliğin anlamı şudur: $t + 1$. yeniliğin kullanılması sonucu elde edilen

³⁹ Romer Modeli'ndeki gibi bir yeniliğin değeri, o yeniliğin kullanılmasından elde edilecek gelirlerin bugünkü değerleri toplamına eşittir. Aghion-Howitt Modeli'ndeki fark bu gelirlerin belirli bir olasılıkla ortaya çıkmasıdır. Çünkü, bir yeniliğin t zamanında ortaya çıkması olasılıksaldır. Dolayısıyla bu yenilikten elde edilecek gelir de olasılıksaldır. Bu aşağıdaki denklem ile gösterilir.

$$\int_t^{\infty} e^{-r(\tau-t)} e^{-\lambda n_{t+1}(\tau-t)} \pi(\tau) d\tau = V_{t+1}$$

Burada r faiz oranını temsil eder. $e^{-\lambda n_{t+1}(\tau-t)}$, τ zamanına kadar bir yeniliğin meydana gelmeme olasılığını ifade ediyor. Poisson varış oranı λn_{t+1} 'dir. Eğer poisson varış oranı artarsa yeniliğin meydana gelmeme olasılığı azalır. Ters taraftan bakarsak yeniliğin meydana gelme olasılığı artar. Bu da τ zamanında elde edilen getirinin bugünkü değerini azaltır. n_{t+1} , $t + 1$. yenilikten sonra araştırma sektöründe kullanılacak emek miktarıdır. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$$\frac{d}{dt} \int_t^{\infty} e^{-r(\tau-t)} e^{-\lambda n_{t+1}(\tau-t)} \pi(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} V_{t+1}$$

Eşitliğin sol tarafının türevi Leibniz yöntemi ile alınır. Böylece,

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} e^{-r(\tau-t)} e^{-\lambda n_{t+1}(\tau-t)} \pi_{t+1}(\tau) d\tau = \dot{V}_{t+1}$$

$$-\pi_{t+1}(t) + \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} e^{-(\tau-t)(r+\lambda n_{t+1})} \pi_{t+1}(\tau) d\tau = \dot{V}_{t+1}$$

$$-\pi_{t+1}(t) + \int_0^{\infty} (r + \lambda n_{t+1}) e^{-(\tau-t)(r+\lambda n_{t+1})} \pi_{t+1}(\tau) d\tau = \dot{V}_{t+1}$$

$$-\pi_{t+1}(t) + (r + \lambda n_{t+1}) \int_0^{\infty} e^{-(\tau-t)(r+\lambda n_{t+1})} \pi_{t+1}(\tau) d\tau = \dot{V}_{t+1}$$

$e^{-(\tau-t)(r+\lambda n_{t+1})} \pi_{t+1}(\tau) d\tau$ ifadesi V_{t+1} 'e eşittir. Dolayısıyla,

$$-\pi_{t+1}(t) + (r + \lambda n_{t+1}) V_{t+1} = \dot{V}_{t+1}$$

elde edilir. Denge durumunda $\dot{V}_{t+1} = 0$ olduğundan dolayı yukarıdaki eşitlik,

$$-\pi_{t+1}(t) + (r + \lambda n_{t+1}) V_{t+1} = 0$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$rV_{t+1} = \pi_{t+1} - \lambda n_{t+1} V_{t+1}$$

beklenen gelir, $t + 1$. yeniliğin kullanılması sonucu üretilen ara üründen elde edilen kar eksi beklenen sermaye kaybıdır. Bu kayıp bu üreticinin başka bir yenilikçi üretici tarafından yerinden edilmesi sonucu oluşan kayıptır. Schumpeter'in yaratıcı yıkım dediği yeni icatlar eski icatları piyasadan siliyor. Yani yeni tüketici ürünleri, üretim yöntemleri vs. Dolayısıyla yeni icatlar yenilikler, eski icatlardan yeniliklerden gelir elde eden ara ürün üreticilerinin gelirlerinden olmasına neden oluyor. Bunun olasılığı da λn 'dir. Bu denklem bu üreticinin araştırma geliştirme yapmadığı varsayımına dayanıyor. Çünkü başka üreticiler araştırma geliştirme yapıyor ve başarılı olduklarında bu üreticinin yerine geçiyorlar. Bu $t + 1$. yeniliği meydana getiren üreticinin araştırma geliştirme yapmamasının nedeni şudur. Bir sonraki yeniliği meydana getirmesinin bu üreticiye değeri $V_{t+2} - V_{t+1}$ 'dir. Başka bir firmanın yenilik $t + 2$. yeniliği yaratmasının ona değeri V_{t+2} 'dir. $V_{t+2} - V_{t+1} < V_{t+2}$ olduğundan dolayı, $t + 1$. yeniliği yaratmış olan üretici $t + 2$. yeniliği meydana getirmek için araştırma geliştirme yapmaz. Buna 'Arrow etkisi' denir. Yukarıdaki eşitliği düzenlersk,

$$V_{t+1} = \frac{\pi_{t+1}}{r + \lambda n_{t+1}}$$

elde edilir. Bu eşitlikteki payda $(r + \lambda n_{t+1})$ yaratıcı yıkımın etkisini göstermektedir.

$t + 1$. yenilik meydana gelmeden önce piyasada var olan ve t . yeniliği kullanan ara ürün üreticisi karını maksimize etmeye çalışır. Bu maksimizasyon aşağıdaki denklem ile gösterilir.

$$\pi_t = \max_x [p_t(x)x - w_t x]$$

Son ürün sektörünün rekabetçi olduğu varsayılıyor. Dolayısıyla, son ürün sektörünün üretim fonksiyonu $y = Ax^\alpha$ ve girdi maliyeti $p_t x_t$ olmak üzere son ürün sektöründe kar maksimizasyonu sonucu

$$p_t = A_t \alpha x_t^{\alpha-1}$$

elde edilir.⁴⁰ Bu eşitlik ara ürün üreticisinin ters talep fonksiyonudur. Ara ürün üreticisi bu

elde edilir.

⁴⁰ Son ürün üreticisinin kar maksimizasyonu denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\max_{x_t} y - p_t x_t$$

eşitliğe göre üreteceği ara ürün miktarını belirler. p_t yukarıdaki ara ürün üreticisinin kar maksimizasyonu denkleminde yerine konulursa,

$$\pi_t = \max_{x_t} [A_t \alpha x_t^\alpha - w_t x_t]$$

Bu denklemin çözümü sonucu karı maksimize eden x_t ve ara ürünün fiyatı olan p_t elde edilir.⁴¹

$$x_t = \left(\frac{\alpha^2}{w_t/A_t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \equiv \frac{w_t}{A_t}$$

Burada y yerine Ax^α yazılır. p_t ara ürünün çıktı cinsinden fiyatıdır. Bu durumda yukarıdaki denklemi x'e göre maksimize ettiğimizde aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\max_x Ax_t^\alpha - p_t x_t$$

$$p_t = A_t \alpha x_t^{\alpha-1}$$

⁴¹ Ara ürün üreticisinin kar maksimizasyonu denklemini $\pi_t = \max_{x_t} [p_t(x_t)x_t - w_t x_t]$ şeklindedir. Bu denklemi bu haliyle yani p_t yerine $A_t \alpha x_t^{\alpha-1}$ yazmadan maksimizasyonunu yapalım.

$$\frac{d\pi}{dx_t} = p_t'(x_t)x_t + p_t(x_t) - w_t = 0$$

elde edilir. $p_t'(x_t)x_t + p_t(x_t) - w_t = 0$ eşitliğinin her iki tarafını $p(x)$ ile bölelim.

$$\frac{p_t'(x_t)x_t}{p_t(x_t)} + 1 - w_t = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlendiğinde,

$$p_t(x_t) = \frac{1}{1 + \frac{p_t'(x_t)x_t}{p_t(x_t)}} w_t$$

elde edilir. $\frac{p_t'(x_t)x_t}{p_t(x_t)}$ ifadesinin değeri ara ürün üreticisinin ters talep fonksiyonundan elde edilir. Bu değer $\alpha - 1$ 'dir. Bunu yukarıdaki eşitlikte yerine koyduğumuzda,

$$p_t(x_t) = \frac{1}{\alpha} w_t$$

elde edilir. Bunu ara ürünün talebinin fiyat esnekliği (Bergstrom, 2011) cinsinden de yazabiliriz. Ters talep fonksiyonunu talep fonksiyonuna çevirirsek $x_t = \left(\frac{p_t}{A_t \alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ elde edilir. Buradan talebin fiyat esnekliği hesaplanırsa $\epsilon = -\frac{1}{1-\alpha}$ olarak elde edilir. Buradan ϵ mutlak değer olmak üzere,

$$p_t(x_t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{|\epsilon|}} w_t$$

olarak yazılır.

$$p_t(x) = \frac{1}{\alpha} w_t$$

Böylece, ara ürün üreticisi firma marjinal maliyetin (w) üzerinde bir fiyatla ara ürününü son ürün üreticisine satar. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere, $\alpha = 1$ olduğunda $p_t = w_t$ olur. Yani fiyat marjinal maliyete eşit olur. Bu tam rekabet piyasası şartıdır. Dolayısıyla, α değerinin sıfıra yaklaşması tam rekabet piyasası şartlarından uzaklaşıldığını, 1'e yaklaşması ise tam rekabet piyasası şartlarına yaklaşıldığını ifade eder. (Tirole, 1988; Varian, 2014; Varian and Varian, 1992)

Yukarıdaki ilk eşitlikte, x_t , $\frac{w_t}{A_t}$ 'nin fonksiyonu olduğundan dolayı $\omega_t = \frac{w_t}{A_t}$ olmak üzere, $x_t = \tilde{x}(\omega_t)$ yazılır. $\pi_t = A_t \alpha x_t^\alpha - w_t x_t$ şeklindeki kar denkleminde x_t 'nin yukarıdaki değeri bu denklemde yerine konulursa,

$$\pi_t = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) w_t x_t$$

elde edilir. x_t , ω 'nın yani verimlilik ile ayarlanmış ücretin negatif bir fonksiyonudur. Kar da aynı şekilde $\frac{w_t}{A_t}$ 'nin negatif fonksiyonudur. $\pi_t = A_t [\alpha x_t^\alpha - \frac{w_t}{A_t} x_t]$ şeklinde gösterilir.⁴² $\tilde{\pi}_t(\frac{w_t}{A_t}) = \alpha x_t^\alpha - \frac{w_t}{A_t} x_t$ olarak tanımlarsak, kar denklemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\pi_t = A_t \tilde{\pi}_t(\frac{w_t}{A_t})$$

Karın, verimlilik ile ayarlanmış ücretin negatif fonksiyonu olmasının sebebi şudur. Gelecekte yapılacak araştırmaya yüksek talep olursa ω_{t+1} ücreti artar. Dolayısıyla yenilik yaratıcının $t + 1$. yenilikten elde edeceği karı π_{t+1} azalır. Bu da sonuç olarak bugün yapılacak araştırmadan vazgeçilmesine yani n_t 'nin düşmesine neden olur. Bu, bugünkü araştırmanın, beklenen gelecekteki araştırmanın miktarına negatif olarak bağlı olduğu anlamına geliyor.

Böylece Aghion-Howitt Modeli iki tane denklem ile ifade edilir. Birincisi arbitraj denklemi, ikincisi ise emek piyasası dengesidir. Bu denklemler aşağıdaki şekilde gösterilir.⁴³

⁴² $\pi_t = A_t \alpha x_t^\alpha - w_t x_t$ şeklindeki kar denkleminde A_t 'yi dışarı çekersek denklemi $\pi_t = A_t [\alpha x_t^\alpha - \frac{w_t}{A_t} x_t]$ olarak yazabiliriz. Bu denklemden görüldüğü üzere π_t , $\frac{w_t}{A_t}$ 'nin negatif fonksiyonudur.

⁴³ $w_t = \lambda V_{t+1}$ eşitliğinde V_{t+1} yerine $V_{t+1} = \frac{\pi_{t+1}}{r + \lambda n_{t+1}}$ yazılır. π_{t+1} yerine $A_{t+1} \tilde{\pi}(\omega_{t+1})$ yazılır ve $A_{t+1} = \gamma A_t$ ve $\omega_t = \frac{w_t}{A_t}$ olmak üzere $\omega_t = \lambda \frac{\gamma \tilde{\pi}(\omega_{t+1})}{r + \lambda n_{t+1}}$ bulunur. (A) arbitraj denklemini, (L) emek piyasası denklemini simgeliyor.

(A)

$$\omega_t = \lambda \frac{\gamma \tilde{\pi}(\omega_{t+1})}{r + \lambda n_{t+1}}$$

(L)

$$L = n_t + \tilde{x}(\omega_t)$$

$\omega_t = \omega$ ve $n_t = n$ olduğu duruma durağan durum dengesi denir. Yani, verimlilik ile ayarlanmış ücret olan ω ve emeğin üretim sektörü ile araştırma sektörü arasındaki dağılımı (burada n değeri) zaman boyunca sabit olmalıdır. Durağan durumda yukarıdaki iki eşitlik aşağıdaki hale gelir.⁴⁴

($\hat{A}$)

$$\omega = \lambda \frac{\gamma \tilde{\pi}(\omega)}{r + \lambda n}$$

($\hat{L}$)

$$L = n + \tilde{x}(\omega)$$

Bu iki denklem (n, ω) düzleminde aşağıdaki şekilde çizilir. Şekilden de görüleceği üzere durağan durum değeri tektir.⁴⁵

⁴⁴ ($\hat{A}$) denge durumundaki arbitraj denklemini, ($\hat{L}$) denge durumundaki emek piyasası denklemini ifade ediyor.

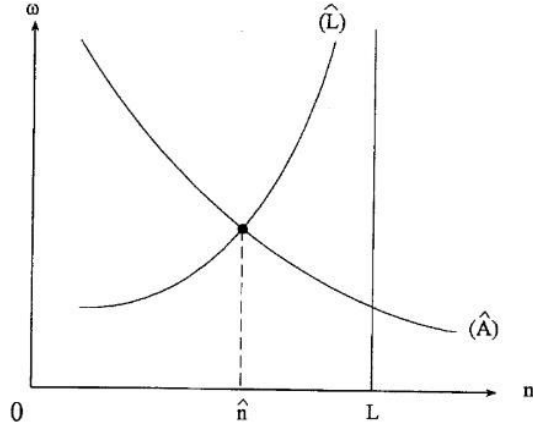
⁴⁵ ($\hat{A}$) denkleminde $\tilde{\pi}(\omega)$ yerine $\tilde{\pi}_t(\frac{w_t}{A_t}) = \alpha x_t^\alpha - \frac{w_t}{A_t} x_t$ yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$\omega = \frac{\lambda \gamma \alpha x^\alpha}{r + \lambda n + \lambda \gamma x}$$

elde edilir. Buradan denklemin negatif eğimli bir eğri olduğu görülür. ($\hat{L}$) denkleminde ise L sabit olduğundan dolayı n artarsa, $\tilde{x}(\omega)$ azalır. $x_t = \tilde{x}(\omega)$ olmak üzere ve x_t , ω_t 'nin negatif fonksiyonu olduğundan dolayı $\tilde{x}(\omega)$ azalıyorsa ω artıyordur. Yani n ve ω arasında pozitif eğimli bir ilişki vardır. Başka bir şekilde, $x_t = (\frac{\alpha^2}{w_t/A_t})^{\frac{1}{1-\alpha}}$ eşitliği, ($\hat{L}$) denkleminde yerine konulursa,

$$\omega = \frac{\alpha^2}{(L-n)^{1-\alpha}}$$

elde edilir. Bu denklemden de görüldüğü üzere, n ve ω arasında pozitif yönlü bir ilişki vardır.



Şekil 1.4: Aghion-Howitt Modeli Endogenous growth theory 1998 MIT press. sayfa 59

$\hat{n}$ araştırma sektöründe kullanılan denge emek miktarıdır. $\hat{n}$, faiz oranı düştüğü, toplam emek miktarı (L), araştırma sektöründeki verimlilik (λ), ve yenilik sayısı (γ) arttığı zaman artar. Durağan durumda, verimlilik ile ayarlanmış ara ürün üreticisinin karı

$$\tilde{\pi} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \omega (L - n)$$

olarak yazılır.⁴⁶ Bunu $\hat{A}$ denkleminde yerine koyarsak,

$$1 = \lambda \frac{\gamma \frac{1-\alpha}{\alpha} L - n}{r + \lambda n}$$

elde edilir. Bu eşitlikten görüleceği üzere, α ile n arasında ters yönlü bir ilişki vardır. α

⁴⁶ Ara ürün üreticisinin karı $\pi_t = (\frac{1}{\alpha} - 1)w_t x_t$ 'dir. $\omega_t = \frac{w_t}{A_t}$ olmak üzere, bu eşitliğin her iki tarafını A_t ile bölersek,

$$\frac{\pi_t}{A_t} = (\frac{1}{\alpha} - 1)\omega_t x_t$$

elde edilir. $\tilde{\pi}_t = \frac{\pi_t}{A_t}$ ve durağan durumda $\hat{L}$ denkleminde $x = L - n$ olmak üzere, durağan durumda verimlilik ile ayarlanmış kar

$$\tilde{\pi} = (\frac{1}{\alpha} - 1)\omega(L - n)$$

olur.

pazar rekabetinin derecesini ifade ettiğine göre, α değerindeki azalma n değerinde artışa neden olur. Yani tersinden bakılırsa, daha rekabetçi bir piyasada ara ürün üreticilerinin tekel karı azalır. Bu yenilik üretmek için güdülerinin azalması dolayısıyla araştırma sektörüne daha az emek gücü (n) ayrılmasına neden olur.

Durağan durum büyüme oranı şu şekilde elde edilir. $y_t = A_t x^\alpha$ olmak üzere, durağan durumda $\hat{L}$ denkleminde $x = L - n$ olur. L ve n sabittir. Bunu $y_t = A_t x^\alpha$ eşitliğinde x 'in yerine koyarsak,

$$y_t = A_t (L - n)^\alpha$$

elde edilir. Bu durumda y_t 'nin ve A_t 'nin büyüme oranı birbirine eşit olur. $A_{t+1} = \gamma A_t$ olduğundan dolayı A_t 'nin büyüme oranı,

$$\gamma - 1$$

olur. Bu büyüme oranı y_t 'nin büyüme oranına eşittir. Böylece,

$$y_{t+1} = \gamma y_t$$

olarak elde edilir.⁴⁷ t ve $t + 1$ zamanı değil yeniliklerin sırasını gösterir. Zamanı τ olarak tanımlarsak, son çıktının (y_t) büyümesini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$y(\tau + 1) = \gamma y(\tau)$$

Her iki tarafın logaritmasını alalım.

⁴⁷ $A_{t+1} = \gamma A_t$ olmak üzere, bu denklemin her iki tarafını A_t ile bölüp -1 ile toplarsak,

$$\frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \gamma - 1$$

elde edilir. Bu değer y_t 'nin büyüme oranına eşit olduğundan dolayı,

$$\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} = \gamma - 1$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlendiğinde,

$$y_{t+1} = \gamma y_t$$

elde edilir.

$$\ln y(\tau + 1) = \ln \gamma + \ln y(\tau)$$

Buradan da görüleceği üzere, son çıktı $\ln \gamma$ miktarında artış gösterir. Bu artışın olabilmesi için bir yeniliğin ortaya çıkması gerekiyor. Bu yeniliğin ortaya çıkma olasılığı $\lambda \hat{n}$ 'dir.⁴⁸ Birim zamanda $y(\tau)$ 'nin büyüme oranı

$$\ln y(\tau + 1) - \ln y(\tau) = \ln \gamma$$

olarak yazılabilir. Yalnız $\ln \gamma$ olasılıksaldır. $\lambda \hat{n}$ olasılıkla $\ln \gamma$ büyüme oranı elde edilecektir. $1 - \lambda \hat{n}$ olasılıkla da sıfır büyüme oranı elde edilecektir. Bu durumda ortalama büyüme oranı

$$\lambda \hat{n} \ln \gamma + (1 - \lambda \hat{n})0 = \lambda \hat{n} \ln \gamma$$

olur.⁴⁹ Buradan sonuç olarak,

⁴⁸ Bu olasılık değeri üssel olasılık dağılımı fonksiyonundan elde edilir. Şöyle ki; $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ üssel olasılık dağılımı fonksiyonudur. t zaman aralığında 1 olayın meydana gelme olasılığını verir. λ poisson olasılık dağılımındaki parametredir. Yani birim zamanda bir olayın ortalama meydana gelme sayısını ifade eder. Araştırma sektöründe n tane araştırmacı olduğundan dolayı, bir araştırmacının birim zamanda ortalama buluş yapma, yenilik ortaya çıkarma sayısı λ ise n araştırmacının λn 'dir. Buradan üssel olasılık dağılımının parametresi λn olur. $t \rightarrow 0$ olursa, yani zaman aralığı sıfıra yaklaşırken bir olayın meydana gelme olasılığı λn olur.

⁴⁹ x büyüme oranı, n zaman olmak üzere,

$$y(\tau + 1) = y(\tau)(1 + x)^n$$

olsun. Her iki tarafın logaritmasını alalım.

$$\ln y(\tau + 1) = \ln y(\tau) + n \ln(1 + x)$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\frac{\ln y(\tau+1) - \ln y(\tau)}{n} = \ln(1 + x)$$

elde edilir. Küçük büyüme oranlarında $\ln(1 + x) \approx x$ olur. Bu $\ln(1 + x)$ 'in Taylor yayılımı yapılarak bulunur. Bu durumda,

$$\frac{\ln y(\tau+1) - \ln y(\tau)}{n} = x$$

olur. Eğer $n = 1$ olarak kabul edilirse,

$$\ln y(\tau + 1) - \ln y(\tau) = x$$

$$\ln y(\tau + 1) - \ln y(\tau) = \lambda \hat{n} \ln \gamma$$

elde edilir. Yani ortalama büyüme oranına g dersek,

$$g = \lambda \hat{n} \ln \gamma$$

olarak yazılır. Emek (L) arttıkça, faiz oranı (r) ve rekabetin derecesi α azaldıkça, $\hat{n}$ artar. Dolayısıyla ortalama büyüme oranı da artar.



İKİNCİ BÖLÜM

DIŞ EKONOMİK İLİŞKİLERİ AÇIKLAYAN MODELLER

2.1 Batiz-Romer Ekonomik Bütünleşme ve İçsel Büyüme Modeli

2.1.1 Model

Rivera-Batiz Romer Modeli'nde (Rivera-Batiz and Romer, 1991; Grossman and Helpman, 1994) gelişmekte olan ülkeler arasındaki ekonomik integrasyonun iki farklı araştırma-geliştirme sektörü yapısı altında uzun dönem büyüme oranı üzerindeki etkisi incelenmektedir. Bu bağlamda Romer (Romer, 1990) tipi üretim fonksiyonu kullanılır. İki tane üretim aktivitesi var. Birincisi tüketim malı üretimi, ikincisi ise sermaye malları $x(i)$ üretimidir. Bu üretim fonksiyonu her ikisi içinde aynıdır. Her iki ülkenin üretim fonksiyonu ve araştırma-geliştirme sektöründeki bilgi üretimi denklemleri aynıdır.

(1)

$$Y(H, L, x) = H^\alpha L^\beta \int_0^A x(i)^{1-\alpha-\beta} di$$

Araştırma-geliştirme sektöründeki teknolojik gelişmeyi, bilgi birikimini temsil eden iki farklı diferansiyel denklem vardır. Birincisi 'knowledge-driven' adı verilen bir araştırma-geliştirme sektörü yapısıdır. Bunun anlamı şudur: Bilgi birikimindeki değişim daha önce üretilen, keşfedilen bilgi stoğuna bağlıdır. Diferansiyel denklem aşağıdaki şekildedir.

$$\dot{A} = \delta HA$$

İkinci denklem ise 'lab-equipment' adlı bir araştırma-geliştirme sektörü yapısıdır. Bu modellemeye geçmiş dönemde elde edilen bilgiler bilgi üretimine bir katkı sağlamıyor. Bu denklem üretim sektörü ile aynı girdileri kullanıyor.

$$\dot{A} = BH^\alpha L^\beta \int_0^A x(i)^{1-\alpha-\beta} di$$

İki ülke arasında ticaretin başlamadığı durumda büyüme oranları iki farklı araştırma-geliştirme sektörü yapısına bağlı olarak hesaplanır.

2.1.2 Denge Dinamiği

Öncelikle 'knowledge driven' modellemesi altında büyüme oranını bulalım. Bu durumda beşeri sermayenin (H) bir kısmı (H_Y) üretim sektöründe diğer kısmı (H_A) bilgi üretiminde kullanılır.

Üretim sektöründeki firma karını maksimize eder. $p(i)$ her bir sermaye malının fiyatını temsil eder. Bir birim tüketim malının fiyatı 1 olarak alınırsa firmanın kar maksimizasyonu aşağıdaki şekilde olur.

$$\max \int_0^A H^\alpha L^\beta x(i)^{1-\alpha-\beta} - p(i)x(i)di$$

Bu maksimizasyon problemi çözüldüğünde aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$p(i) = (1 - \alpha - \beta)H^\alpha L^\beta x(i)^{-(\alpha+\beta)}$$

Bu $x(i)$ sermaye ara malını üreten üreticilerin ters talep fonksiyonudur. Sermaye ara malını üreten üreticiler bu ters talep fonksiyonunu gözönüne alarak karlarını maksimize ederler. r faiz oranıdır.

$$\max p(i)x(i) - rx(i)$$

Bu maksimizasyon problemi çözüldüğünde, sermaye ara malının $p(i)$ fiyatı belirlenir.

$$\bar{p} = \frac{r}{1-\alpha-\beta}$$

Bu fiyat kar denkleminde yerine konulduğunda, sermaye ara malı üreticisinin karı elde edilir. π karı temsil etmek üzere,

$$\pi = (\alpha + \beta)\bar{p}\bar{x}$$

Sermaye ara malının üretimine karar verilmesi karın iskonto edilmiş bugünkü değeri ile, sermaye ara malını üretmek için kullanılan tasarımın maliyetinin (P_A) karşılaştırılması sonucu verilir. Denge durumunda ikisi birbirine eşitlenir.

$$\int_t^\infty e^{-\int_t^\tau r(s)ds} \pi(\tau) d\tau = P_A(t)$$

Her iki tarafın Leibniz yöntemi ile türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\pi(t) = r(t)P_A(t)$$

Buradan bilginin ya da tasarımın fiyatı P_A aşağıdaki şekilde yazılır.

$$P_A = \frac{\pi}{r} = \frac{(\alpha+\beta)\bar{p}\bar{x}}{r} = \frac{\alpha+\beta}{r}(1-\alpha-\beta)H_Y^\alpha L^\beta \bar{x}^{1-\alpha-\beta}$$

Beşeri sermayenin üretim sektöründen aldığı ücret ile araştırma-geliştirme sektöründen aldığı ücret birbirine eşit olduğu durumda ekonomi dengeye gelir. İki sektörde rekabetçi olduğu için beşeri sermayenin her iki sektörden aldığı ücretler o sektördeki marjinal ürünlerine eşittir.

Beşeri sermayenin üretim sektöründeki marjinal ürünü ve dolayısıyla ücreti, üretim fonksiyonunun beşeri sermayeye göre türevi alınarak bulunur.⁵⁰

$$\alpha H_Y^{\alpha-1} L^\beta A \bar{x}^{1-\alpha-\beta}$$

Beşeri sermayenin araştırma-geliştirme sektöründeki marjinal getirisi dolayısıyla ücreti aşağıdaki gibidir.⁵¹

$$P_A \delta A$$

Denge durumunda her iki ücret birbirine eşit olur.

$$P_A \delta A = \alpha H_Y^{\alpha-1} L^\beta A \bar{x}^{1-\alpha-\beta}$$

Buradan denge durumunda üretim sektöründe kullanılacak beşeri sermaye miktarı (H_Y) elde edilir.

⁵⁰ Toplam sermaye $K = \int_0^A x(i)di$ şeklindedir. Modeldeki simetri nedeniyle yani bütün sermaye ara mali üreten üreticilerin ters talep fonksiyonu ve maliyetleri aynı olduğundan dolayı $x(i)$, $\bar{x}$ olur. Böylece, $K = \int_0^A \bar{x}di = A\bar{x}$ olur. Üretim fonksiyonu $Y = H_Y^\alpha L^\beta A \bar{x}^{1-\alpha-\beta}$ olur.

⁵¹ $\dot{A} = \delta H_A A$ diferansiyel denklemini çözüldüğünde, $A(t) = A(0)e^{\int \delta H_A dt}$ elde edilir. Buradan, beşeri sermayenin marjinal ürünü hesaplandığında, $P_A \delta A$ elde edilir.

$$H_Y = r\alpha(\alpha + \beta)^{-1}(1 - \alpha - \beta)^{\frac{1}{\delta}}$$

Tasarımların büyüme oranı,

$$g = \delta H_A$$

olduğundan dolayı, ve toplam beşeri sermaye, üretim sektöründeki ve araştırma-geliştirme sektöründeki beşeri sermayenin toplamı ($H = H_Y + H_A$) olduğu için, üretim sektöründeki büyüme oranı aşağıdaki şekilde elde edilir.⁵²

$$g = \delta H_A = \delta(H - H_Y) = \delta H - \Lambda r$$

Bu denklemi faiz oranını dışarı çekerek yeniden düzenlediğimizde aşağıdaki eşitlik elde ederiz.

$$r_{technology} = \frac{\delta H - g}{\Lambda}$$

Bu eşitlikten görüldüğü üzere 'knowledge-driven' yapısındaki araştırma-geliştirme sektörü ile denge durumunda faiz oranı ile büyüme oranı arasında negatif yönlü bir ilişki vardır.

Araştırma-geliştirme sektöründeki 'Knowledge-driven' teknoloji yapısıyla büyüme oranı elde edildi. Şimdi 'Lab-equipment' teknoloji yapısıyla faiz oranını elde edelim.

'Knowledge-driven' teknoloji yapısında olduğu gibi 'Lab-equipment' yapısındaki teknolojide de sermaye ara malı üreten üreticilerin ters talep fonksiyonu aynıdır. Buradan elde edilen sermaye ara malının fiyatı ve karı da aynıdır. Tasarımın fiyatı da aynı şekilde belirlenir.

$$p(i) = (1 * \alpha - \beta)H^\alpha L^\beta x(i)^{-\alpha-\beta}$$

$$\bar{p} = \frac{r}{1-\alpha-\beta}$$

$$\pi = (\alpha + \beta)\bar{p}x$$

⁵² $\Lambda = \alpha(\alpha + \beta)^{-1}(1 - \alpha - \beta)^{-1}$

$$P_A = \frac{\pi}{r}$$

Ters talep fonksiyonundaki $p(i)$ ifadesini sermaye ara malının fiyat denkleminde yerine koyarsak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$r = (1 - \alpha - \beta)^2 H^\alpha L^\beta x^{-\alpha-\beta}$$

Karı tasarımın fiyatı denkleminde yerine koyarsak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$P_A = \frac{(\alpha+\beta)\bar{p}\bar{x}}{r}$$

r yerine $\bar{p}(1 - \alpha - \beta)$ koyulup denklem düzenlenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$P_A = \frac{(\alpha+\beta)\bar{x}}{1-\alpha-\beta}$$

$P_A = \frac{1}{B}$ olduğundan dolayı yukarıdaki denklem tekrar düzenlenirse ve $\bar{x}$ denklemden çekilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\bar{x} = \frac{1-\alpha-\beta}{B(\alpha+\beta)}$$

Bu eşitliği yukarıdaki faiz denklemindeki $x(i)$ 'nin yerine koyarsak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$r = B^{\alpha+\beta} (\alpha + \beta)^{\alpha+\beta} (1 - \alpha - \beta)^{2-\alpha-\beta} H^\alpha L^\beta$$

$\Gamma = B^{\alpha+\beta} (\alpha + \beta)^{\alpha+\beta} (1 - \alpha - \beta)^{2-\alpha-\beta}$ olarak tanımlarsak, 'Lab-equipment' yapısındaki ekonominin faiz denklemi elde edilir.

(7)

$$r_{technology} = \Gamma H^\alpha L^\beta$$

Sabit elastic fayda altında Ramsey tercihleri ile tüketimin büyüme oranı aşağıdaki gibidir.

$$r_{preferences} = \rho + \sigma g$$

Bunu her iki knowledge-driven ve lab-equipment modellemelerinde elde edilen denklemlerde yerine koyarsak, sırasıyla her iki modelleme için büyüme oranları elde edilir.

knowledge-driven modelinde büyüme oranı,

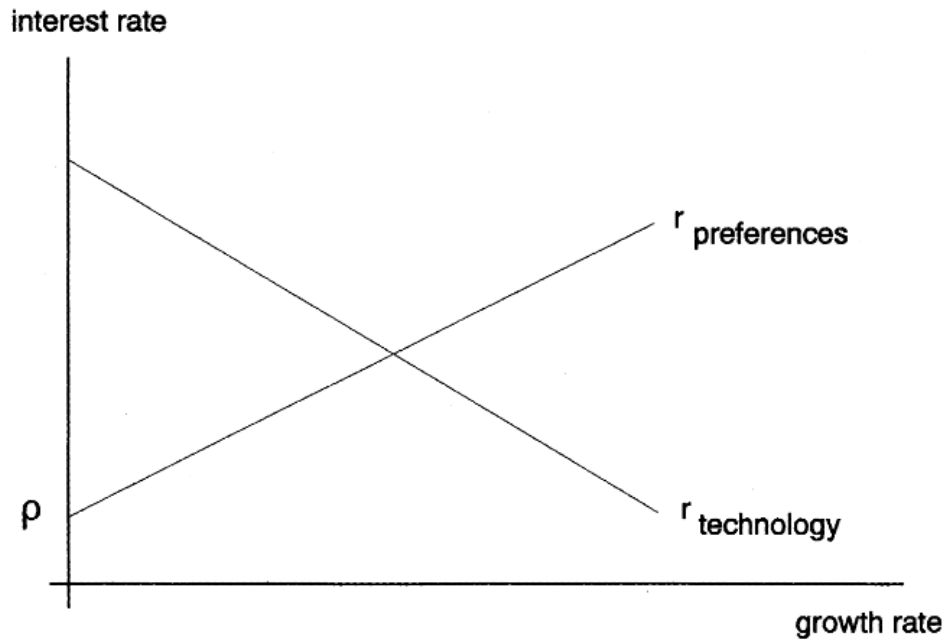
(9)

$$g = \frac{\delta H - \rho \Lambda}{1 + \sigma \Lambda}$$

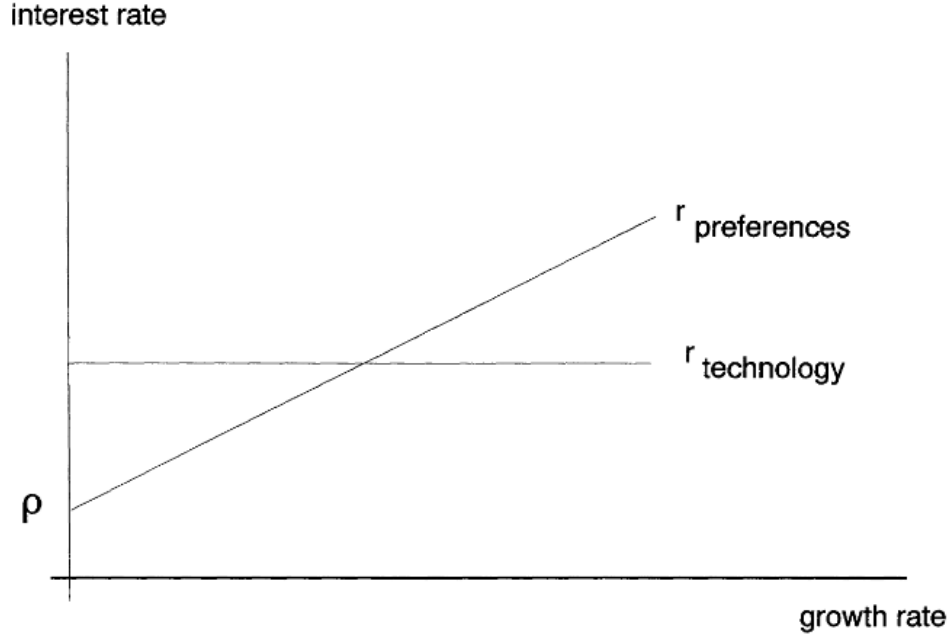
lab-equipment modelinde büyüme oranı,

$$g = \frac{\Gamma H^{\alpha} L^{\beta} - \rho}{\sigma}$$

Bu iki ekonominin denge büyüme oranı sırasıyla aşağıdaki iki grafik ile gösterilmektedir.



Şekil 1.5: Knowledge-Driven Modeli Rivera-Batiz, Romer, 1991 Economic integration and endogenous growth. The Quarterly Journal of Economics, 539



Şekil 1.6: Lab-Equipment Modeli Rivera-Batiz, Romer, 1991 Economic integration and endogenous growth. The Quarterly Journal of Economics, 541

Her iki araştırma-geliştirme teknolojisi altında eğer iki ekonomi ekonomik olarak bütünleşip tek bir ekonomi olursa, H ve L , $2H$ ve $2L$ olur. Bu durumda, her iki grafikte $r_{technology}$ eğrisi yukarı kayar. Böylece, hem faiz hem de büyüme oranı artar.

Şimdi iki ekonomi arasında önce knowledge-driven teknoloji yapısıyla sonra da lab-equipment teknoloji yapısıyla malların ve fikirlerin akışına izin verelim ve büyüme oranları üzerindeki etkilerini inceleyelim.

Önce knowledge-driven teknoloji yapısına iki ekonomi arasında malların akışına izin verelim. Burada ülkeler arasında fikir akışlarının olmadığı varsayılıyor. Sadece iki ülke arasında malların akışına izin veriliyor. Bir ülkenin dışalım yaptığı mal üzerinde ters mühendislik yaparak o ürünün tasarımının sırlarını öğrenemediği varsayılıyor.

Denge durumunda çıktının büyüme oranı tasarımların büyüme oranı olan $\frac{\dot{A}}{A} = \delta H_A$ 'ya eşittir. Bu da beşeri sermayenin üretim sektörü ve araştırma-geliştirme sektörü arasındaki dağılımına bağlıdır. $H = H_Y + H_A$

İki ülke arasında ticaret olmadan önce, bir ülkede üretim sektöründe kullanılan çeşitli ara sermaye mallarının sayısı, o ülkede üretilen tasarımların sayısına eşittir.

İki ülke arasında malların ticaretine izin verildiği zaman, her iki ülkede üretimde kullanılan

ara sermaye mallarının sayısı, o ülkelerde üretilen tasarımların iki katına çıkar. Bu durumda tek el getirisi peşindeki araştırmacılar farklı tasarımların üretiminde uzmanlaşacaklardır ve tasarım üretimini iki katına çıkaracaklardır.

Böylece A'daki artış beşeri sermayenin üretim sektöründeki marjinal getirisini, $\frac{\partial Y}{\partial H} = \alpha H_A^{\alpha-1} L^\beta \bar{x}^{1-\alpha-\beta} A$ 'dan $\frac{\partial Y}{\partial H} = \alpha H_A^{\alpha-1} L^\beta \bar{x}^{1-\alpha-\beta} (A + A^*)$ 'ya yükseltir. A^* yurtdışından gelen ara sermaye malları sayısını gösterir.

Araştırma-geliştirme sektörü için ülkeler arasında ticaretin serbestleşmesi, bu sektördeki yeni tasarımlar için pazarın da iki katına çıkması demektir. Bu patentlerin fiyatının iki katına çıkması demektir. Böylece araştırma-geliştirme sektörüne yapılacak beşeri sermaye yatırımının getirisi $P_A \delta A$ 'dan $2P_A \delta A$ 'ya yükselir.

Böylece beşeri sermayenin getirisi hem üretim sektöründe hem de araştırma-geliştirme sektöründe iki katına çıktığından dolayı, iki ülke arasında malların serbest ticareti, beşeri sermayenin üretim ve araştırma-geliştirme sektörü arasındaki dağılımını etkilemez.

Sonuç olarak bu durum denge büyüme oranını ya da faiz oranını değiştirmez. Uzun dönem büyüme oranı değişmez.

Araştırma-geliştirmenin knowledge-driven modelinde fikirlerin iki ülke arasında akışına izin verilsin. Bu durumda her bir ülkenin bilgi stoğu diğer ülkenin de bilgi stoğu ile birleşerek iki katına çıkar. Bu da beşeri sermayenin sayısı artmasa da A'nın büyüme oranı iki katına çıkar. Yani beşeri sermayenin araştırma-geliştirme sektöründeki verimliliği artar. Bu kapalı ekonomi durumunda araştırma verimlilik parametresi olan δ 'nın iki katına çıkması anlamına gelir. Bu da bir numaralı şekilde $r_{technology}$ eğrisinin yukarı kaymasına neden olur. Böylece, daha yüksek bir denge büyüme oranı ve faiz oranına neden olur.

(9) numaralı denklemde δ yerine 2δ konularak yeni büyüme oranı elde edilir.

$$g = \frac{2\delta H - \Lambda \rho}{1 + \sigma \Lambda}$$

Fikirlerin ve malların iki ülke arasındaki serbest akışı büyüme üzerinde tam bütünleşmenin yaptığı etkiyi yapmaktadır.

Lab-Equipment modelinde fikirlerin üretim üzerinde bir etkisi yoktur. Dolayısıyla iki ülke arasında fikirlerin serbest akışına izin verildiğinde bunun ekonomik olarak bir etkisi yoktur. Buna rağmen bu modelde büyüme artıyor

2.2 Grossman-Helpman Karşılaştırmalı Üstünlük ve Uzun Dönem Büyüme Modeli

Dinamik iki ülkeli ticaret ve büyüme modelidir. (Grossman and Helpman, 1990; 1989) Kar maksimizasyonu yapan girişimcilerin eylemleri sonucu teknolojik ilerleme sağlanıyor.

Modelin katkısı her iki ülkedeki AR-GE ve ara ürün sektörlerindeki göreceli verimlilik ve bunun büyüme üzerindeki etkisidir. Yani, karşılaştırmalı üstünlüktür.

Son ürün sektöründeki toplam ürün verimliliği ara ürünlerin sayısındaki artışa bağlı olarak artmaktadır. Dolayısıyla araştırma-geliştirme sektörüne ayrılan kaynaklar son ürün sektöründeki verimliliği artırıyor. Aynı zamanda bilgi birikimini de artırıyor.

Bu modelin temel katkısı karşılaştırmalı üstünlüktür. Burada bahsedilen bir ülkenin araştırma-geliştirme sektöründe mi yoksa ara ürün sektöründe mi diğer ülkeye göre karşılaştırmalı üstünlüğe sahip olduğu (Grossman and Helpman, 1990) ve bunun uzun dönem büyüme üzerindeki etkisinin ne olduğudur.

2.2.1 Model

Modelde iki ülke vardır. Her iki ülkede son ürün, ara ürün ve araştırma-geliştirme sektörü olmak üzere üç tane üretim aktivitesi vardır. Her iki ülkedeki son ürünler arasında tam olmayan ikame vardır.

Ekonomide üç tane sektör vardır. Bunlar tüketim malı üreten son ürün sektörü, ara ürün sektörü ve araştırma-geliştirme sektörüdür.

Son ürün sektöründeki toplam faktör verimliliği ara ürün çeşitliliğindeki artış ile beraber artmaktadır. Dolayısıyla araştırma-geliştirme (AR-GE) sektörüne ayrılan kaynaklar son ürün sektöründeki verimliliğin artmasına ayrıca bilimsel ve teknolojik bilgi stoğunun artmasına neden olur.

Her iki ülkede üretilen son ürünlerde yani tüketim mallarının arasında tam olmayan bir ikame vardır (Imperfect substitution). Temel üretim faktörü emektir.

AR-GE'nin iki çıktısı vardır. Birincisi AR-GE çalışmaları sonucu yeni ürün tasarımları ortaya çıkar. Bu tasarımların getirisi, tek el kar akışı şeklinde elde edilir. Çünkü bu tasarımlar ya patent haklarıyla koruma altındadır. Ya da diğer firmalar tarafından üretilmesinin önünde teknik engeller vardır.

İkincisi, AR-GE çalışmaları bilimsel bilgi birikimine katkıda bulunur. Bu bilgi birikimi, yeni bir tasarım geliştirilmesi için gereken emek miktarını azaltarak AR-GE'nin verimliliğinin artmasını sağlar. AR-GE'nin bu çıktısı patentlendirilemediği için getirisinin elde edilmesi sorunludur.

Ara ürünler emek girdisi ile ölçöğö göre sabit getiri şartları altında üretilir. Ülkeler arasında ticareti serbestöe yapılır.

Bu ara ürünler emek ile beraber son ürünün üretiminde kullanılır. Bu üretim fonksiyonu ölçöğö göre sabit getirilidir. Ara ürünlerin çeşitliliğindeki artış toplam faktör verimliliğini arttırmaktadır. Yani uzmanlaşma teknik etkinlikte ilerlemeyi sağlar.

Rekabetçi son ürün üreticileri sıfır kar elde ederler. Ara ürün üreticileri tekel karı elde ederler. AR-GE sektöründe girişimciler elde edecekleri gelecekteki karların bugünkü değöerlerinin değöeri tasarımı geliştirmenin maliyetinden yüksek olduğı sürece AR-GE'ye kaynak ayıracaklardır.

Tüketiciler zamanlararası fayda fonksiyonunu maksimizde ederler.

Modelde yukarıdaki şekilde tanımlanan ekonominin dinamik evrimi inceleniyor. Zaman içinde ara ürün çeşitliliğindeki artış oluyor. Bu hem ara ürün üreticilerinin karlılığını etkiliyor hem de son ürün sektöründeki verimliliğı arttırıyor.

Modelin talep tarafında **tüketicilerin zamanlararası fayda fonksiyonu** aşağıdaki gibidir.

(1)

$$U_t = \int_t^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)} \log u[y_1(\tau), y_2(\tau)] d\tau$$

ρ subjektif iskonto oranıdır. $y_i(\tau)$ τ periyodunda i ülkesinde tüketilen son ürün miktarını temsil etmektedir. Bu fayda fonksiyonu zamanlararası bütöe kısıtı altında maksimize edilir. $p_{Y1}(\tau)$ ve $p_{Y2}(\tau)$ her iki ülkedeki son ürünlerin fiyatları ve E harcamalar ve R kümülatif faiz oranı olmak üzere, **tüketimein optimal patikası** aşağıdaki kurala uyar.⁵³

(2)

$$\frac{\dot{E}}{E} = \dot{R} - \rho$$

Modelin arz tarafı şu şekilde oluşturulur. i ülkesinde son ürün çıktısı aşağıdaki **üretim fonksiyonu** ile ifade edilir.

(3)

$$Y_i = B A_i L_{Yi}^{1-\beta} \left[\int_0^n x_i(\omega)^\alpha d\omega \right]^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$0 < \alpha, \beta < 1$ olmak üzere, L_{Yi} son ürün sektöründeki emek miktarını, $x_i(\omega)$ ω ara ürün girdisinin miktarının, A_i i ülkesine özöü verimlilik parametresini, n ise o anda piyasada varolan ara ürün çeşitlerinin sayısını ifade eder. Verimlilik parametresi A_i dışında bu üretim fonksiyonu her iki ülke için aynıdır. B bir sabittir. α değöerinin yüksek olması ara ürünlerin (ω) kolaylıkla ikame

⁵³ Zamanlararası bütöe kısıtı $\int_t^{\infty} e^{-[R(\tau)-R(t)]} E(\tau) \leq \int_t^{\infty} e^{-[R(\tau)-R(t)]} w(\tau) L d\tau + Z(t)$ şeklindedir. $w(\tau)$ ücret, L emek arzı, $Z(t)$ tüketicinin t zamanındaki varlıklarının değöeridir. Bu maksimizasyon problemi iki aşamada çözölüyor. Birinci aşamada tüketici veri $E(\tau)$ harcama seviyesine göre durağan faydasını maksimize ediyor. Bu maksimizasyonun sonucunda $v[p_{Y1}(\tau), p_{Y2}(\tau)]E(\tau)$ şeklindeki dolaylı fayda fonksiyonu elde edilir. İkinci aşamada, bu dolaylı fayda fonksiyonu (1) numaralı denklemden yerine konulur ve zamanlararası bütöe kısıtı altında maksimize edilir.

edileceğini, düşük olması ikamenin zorlaşacağını gösterir.

Rekabetçi son ürün sektöründe **fiyat marjinal maliyete** eşittir. **Marjinal maliyet Cobb-Douglas tipi fonksiyon** ile ifade ediliyor.

(4)

$$p_{Yi} = \left(\frac{w_i}{A_i}\right)^{1-\beta} \left[\int_0^n p_X(\omega)^{1-\epsilon} d\omega\right]^{\frac{\beta}{(1-\epsilon)}}$$

$\epsilon = \frac{1}{1-\alpha} > 1$ ara ürünler arasındaki ikame elastikiyeti, p_{Yi} i ülkesindeki son ürünün fiyatını, w_i i ülkesindeki ücreti, $p_X(\omega)$, ω ara ürününün fiyatıdır.

Ara ürün üreticileri oligopolistic fiyat rekabetine girerler. i ülkesindeki ω ara ürünü üreticisi $p_X(\omega)$ fiyatını temel alarak karını maksimize eder. **Ara ürün üreticisinin kar denklemi** aşağıdaki gibidir.

(5)

$$\pi_i(\omega) = [p_X(\omega) - w_i a_{LXi}] * \frac{p_X(\omega)^{-\epsilon}}{\int_0^n p_X(\omega)^{1-\epsilon} d\omega} \beta \Sigma_i p_{Yi} Y_i$$

a_{LXi} i ülkesinde ara ürün üretmek için gerekli olan birim emek miktarıdır. Bu kar denkleminde yıldız(çarpımı ifade ediyor) işaretinin sol tarafı birim başına karı, sağ tarafı ise türetilmiş talebi ifade ediyor. Kar maksimizasyonunun birinci derece şartına göre aşağıdaki **sabit markup fiyat** kuralı ortaya çıkıyor.

(6)

$$p_X(\omega) = \frac{1}{\alpha} (w_i a_{LXi})$$

p_{Xi} i ülkesinde üretilen ara ürün çeşidinin fiyatı ve n_i i ülkesindeki ara ürün sayısını göstermek üzere, (4) ve (5) numaralı denklemlerden aşağıdaki denklemlere ulaşılır.⁵⁴

(7)

$$p_{Yi} = \left(\frac{w_i}{A_i}\right)^{1-\beta} (\Sigma_j n_j p_{Xj})^{\frac{\beta}{(1-\epsilon)}}$$

⁵⁴ $\frac{w_i}{A_i}$ efektif ücrettir. A_i , bir birim son ürün için gereken emek miktarıdır.

(8)

$$\alpha p_{Xi} = w_i a_{LXi}$$

Bu fiyatlarla **ara ürün firmasının karı** aşağıdaki şekilde ifade edilir.

(9)

$$\pi_i = (1 - \alpha) p_{Xi} \frac{X_i}{n_i}$$

X_i i ülkesindeki **ara ürünlerin toplam çıktısıdır**.

(10)

$$X_i = \frac{n_i p_{Xi}^{-\epsilon}}{\sum_j n_j p_{Xj}^{1-\epsilon}} \beta (\sum_j p_{Yj} Y_j)$$

c_{ni} i ülkesindeki araştırma-geliştirme maliyeti olmak üzere **sıfır kar şartı** aşağıdaki şekilde gösterilir.

(11)

$$\int_t^\infty e^{-[R(\tau)-R(t)]} \pi_i(\tau) d\tau = c_{ni}(t)$$

$R(t)$ kümülatif faiz faktörüdür. Bu eşitliğin zamana göre türevi alınırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

(12)

$$\frac{\pi_i + \dot{c}_{ni}}{c_{ni}} = \dot{R}$$

Bu **no-arbitrage** şartıdır.

Araştırma-geliştirme sektörü varolan bilgi birikimini artırır. Bilginin anlık olarak tüm dünyaya yayıldığı varsayılıyor. **Araştırma-geliştirme sektöründeki teknoloji** aşağıdaki şekilde ifade edilir.

(13)

$$\dot{n}_i = L_{ni} \frac{K}{a_{Lni}}$$

K şu anki bilgi stoğu, a_{Lni} araştırma-geliştirme sektöründe tasarımın yaratılması için gereken birim emek miktarıdır. K bilgi stoğu, araştırma-geliştirme sektöründeki kümülatif tecrübe yani n ile orantılıdır. Oran katsayısı 1 olarak alınırsa $K = n$ olur. Bu durumda yukarıdaki denklem aşağıdaki şekilde yazılır.

(14)

$$\dot{K} = \sum_i L_{ni} \frac{K}{a_{Lni}}$$

Bilgi her bireysel girişimci için serbest bir girdi olduğundan dolayı, i ülkesinde **ürün geliştirmenin maliyeti** aşağıdaki gibidir.

(15)

$$c_{ni} = w_i \frac{a_{Lni}}{n}$$

2.2.2 Denge Dinamiği

Son ürün sektörleri piyasasındaki statik denge aşağıdaki şekilde gösterilir.

(16)

$$p_{Yi} Y_i = s_i E$$

E tüketime yapılan dünyadaki toplam harcamaları simgeliyor. s_i , bu toplam harcamalardan i ülkesine ayrılan oranı simgeliyor.

Emek piyasasındaki dengede toplam talep toplam arza eşit oluyor.

(17)

$$(a_{Lni}/n)\dot{n}_i + a_{LXi}X_i + (1 - \beta)p_{Yi}Y_i/w_i = L_i$$

$(a_{Lni}/n)\dot{n}_i$ araştırma-geliştirme sektörünün emek talebini, $a_{LXi}X_i$ ara ürün üreticilerinin emek talebini, $(1 - \beta)p_{Yi}Y_i/w_i$ son ürün üreticilerinin emek talebini simgeler.

1 ve 2 numaralı ülkelerdeki **ara ürünlerin fiyatları** aşağıdaki gibidir.

(18a)

$$p_{X1} = n(a_{LX1}/a_{Ln1})^{1/\epsilon}$$

(18b)

$$p_{X2} = n(a_{LX2}/a_{Ln2})^{1/\epsilon}$$

g(t) ara ürünlerin ve bilgi stoğunun büyüme oranı olsun.

(19)

$$g = \frac{\dot{n}}{n} = \frac{\dot{K}}{K}$$

(9),(10),(12),(15),(16),(18a),(18b) denklemleri kullanılarak **toplam ara ürün çıktısı ve faiz oranı** sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılır.

(20)

$$X_i = \frac{n_i b_i^{1/\alpha}}{\sum_j n_j b_j} \frac{\beta E}{n}$$

(21)

$$\dot{R} = \frac{1}{\epsilon - 1} \frac{\beta E}{\sum_j n_j b_j}$$

Burada $b_i = (\frac{a_{Lni}}{a_{LXi}})^\alpha$ şeklindedir. b_i katsayısı karşılaştırmalı üstünlük ölçüsüdür. Sadece ve sadece $b_1 < b_2$ olursa 1 numaralı ülke araştırma-geliştirme sektöründe karşılaştırmalı üstünlüğe sahiptir.

(6), (18a) ve (18b) numaralı denklemler gözönüne alındığında ara ürünlerin fiyatlarının ve ücretlerin g oranında büyüdüğü görülür. (15) numaralı denklemden de ürün geliştirme maliyetinin yani araştırma-geliştirme maliyetinin sabit olduğu görülür.

$e = \frac{E}{n}$ ara ürün başına yapılan harcama, $\sigma_i = n_i/n$ ve $g = \Sigma_i = \dot{n}_i/n$ olmak üzere (6), (16), (17), (18a), (18b) ve (20) numaralı denklemlerden aşağıdaki **büyüme oranı** elde edilir.

(22)

$$g = H - \frac{\beta e}{\sigma} - \frac{1 - \beta}{\alpha} se$$

Bu denklemde, $H = \Sigma_i L_i / a_{Lni}$ toplam efektif emek gücü, $\sigma = \Sigma_i \sigma_i b_i$ karşılaştırmalı üstünlük parametrelerinin ağırlıklı ortalaması ve $s = \Sigma_i s_i b_i$ şeklindedir.

Dünya ekonomisinin **dinamik evrimi** iki denklemle ifade ediliyor. Bunlar sırasıyla,⁵⁵⁵⁶

(23)

$$\frac{\dot{e}}{e} = \frac{\beta e}{\alpha \sigma} + \frac{1 - \beta}{\alpha} se - H - \rho$$

(24)

$$\dot{\sigma} = h - \frac{1 - \beta}{\alpha} e - \sigma \left(H - \frac{1 - \beta}{\alpha} se \right)$$

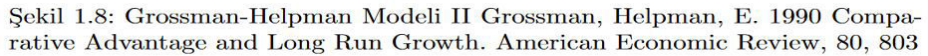
Bu iki diferansiyel denklemler (22) numaralı denklem, zamanlararası bütçe kısıtı ve σ 'nın tanımı ile beraber, harcamanın ve her ülkedeki ara ürün sayısının evrimini belirler. Bu iki denklem kullanılarak modelin denge dinamiği incelenir. Durağan durumda $\dot{e} = 0$ ve $\dot{\sigma} = 0$ olur.⁵⁷ Bunun sonucu ortaya çıkan $\dot{e} = 0$ ve $\dot{\sigma} = 0$ eğrilerinin kesişim noktası denge noktasıdır. $\frac{1}{s} < \frac{h}{H}$ ve $\frac{1}{s} > \frac{h}{H}$

⁵⁵ e'nin tanımından $\frac{\dot{e}}{e} = \frac{\dot{E}}{E} - g$ elde edilir. (2), (21), (22) numaralı denklemler kullanılarak (23) numaralı denklem elde edilir.

⁵⁶ Ülkelerin ara ürün oranlarını ifade eden σ_i 'nin büyüme oranı $\frac{\dot{\sigma}_i}{\sigma_i} = \frac{\dot{n}_i}{n_i} - \frac{\dot{n}}{n}$ olarak yazılır. (6), (17), (20), (22) numaralı denklemler kullanılarak $\dot{\sigma}_i = h_i - \frac{s_i}{b_i} \frac{1 - \beta}{\alpha} e - \sigma_i \left(H - \frac{1 - \beta}{\alpha} se \right)$ elde edilir. Burada $h_i = L_i / a_{Lni}$ i ülkesindeki efektif emeği ve $\Sigma_i h_i = H$ ifade ediyor. Ara ürün payları $\Sigma_i \dot{\sigma}_i$ olacak şekilde birbiri ile ilişkilidir. $\dot{\sigma} = \Sigma_i \dot{\sigma}_i b_i$ olmak üzere buradan (24) numaralı denklem elde edilir. $h = \Sigma_i h_i b_i$

⁵⁷ $\dot{e} = 0 \rightarrow e = \frac{\alpha \sigma (H + \rho)}{\beta + (1 - \beta) \sigma s}$ olur. Buradan $\sigma = 0$ iken $e = 0$ olur. $\sigma \rightarrow \infty$ durumunda $e \rightarrow \frac{\alpha (H + \rho)}{s(1 - \beta)}$ olur. $\dot{\sigma} = 0 \rightarrow e = \frac{h - \sigma H}{\frac{1 - \beta}{\alpha} - \sigma s \frac{1 - \beta}{\alpha}}$ olur. $\sigma = 0 \rightarrow e = \frac{\alpha h}{1 - \beta}$ olur. Eğer, $\sigma = \frac{h}{H} \rightarrow e = 0$. Bu 1 numaralı şekilde sol alttaki $\dot{\sigma} = 0$ eğrisidir. 1 numaralı şeklin sağ üst tarafındaki $\dot{\sigma} = 0$ eğrisi ise şu şekilde elde edilir. $\sigma = \frac{1}{s}$ iken $e \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow \infty$ olduğunda $e = \frac{\alpha H}{(1 - \beta)s}$ olur.

Yukarıdaki şekilde 1 noktası durağan durum denge noktasıdır.



Her iki ülkenin araştırma-geliştirme sektöründe karşılaştırmalı üstünlüğe sahip olmadığı

62

durumda $b_1 = b_2$ olur. Bu durumda uzun dönem büyüme oranı,

(25)

$$\bar{g} = \frac{\beta(H + \rho)}{\sigma} - \rho$$

olarak elde edilir. Bu kapalı ekonomi Romer Modeli'nin (Romer, 1990:92) büyüme oranı ile bezerlik gösterir. Büyüme oranı, efektif emek⁵⁹ (H) arttığında artar, subjektif iskonto oranı (ρ) arttığında azalır. (Grossman and Helpman, 1990)

Araştırma-geliştirme sektöründe karşılaştırmalı üstünlüğe sahip olan ülkenin son ürünlerine göreceli talep artarsa, bu durum ülkenin ara ürün üretimindeki payını azaltır. Dolayısı ile dünya ekonomisinin uzun dönem büyüme oranını yavaşlatır. Eğer AR-GE sektöründe karşılaştırmalı üstünlük yoksa, uzun dönem büyüme oranı son ürünlere olan göreceli talepten bağımsızdır.

Karşılaştırmalı üstünlüğe sahip ülkede efektif emek gücü yüksek ise uzun dönem büyüme oranı da yüksek olur.

Her iki ülkedeki efektif emekte eşit orantılı artış uzun dönem büyümeyi hızlandırır. AR-GE sektöründe karşılaştırmalı üstünlüğe sahip olan ülkedeki ara ürün oranı sadece ve sadece $\frac{1}{a} < \frac{h}{H}$ olduğunda artar.

AR-GE'de karşılaştırmalı üstünlüğe sahip olan ülkede eğer efektif emek daha büyük olursa uzun dönem büyüme oranı da daha yüksek olur. Buradan çıkan sonuç şudur. Bir ülke eğer AR-GE'de karşılaştırmalı üstünlüğe sahip ise bütünleşmiş dünya ekonomisine (integrated world economy) girmesine gerek yoktur.

⁵⁹ $H = \sum_i \frac{L_i}{a_{Lni}}$

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

AÇIK EKONOMİ KIRILMALI SOLOW MODELİ

Açık Ekonomi Kırılmalı Solow Modeli'nde, veri dış faiz oranı ile yurt içi sermayenin marjinal getirisi arasındaki farka göre sermaye girişi ya da sermaye çıkışı olan orta büyüklükte bir ülkenin sermaye birikim süreci incelenmektedir.

3.1 Model

Modelde yurtiçi tasarruflar gelirin sabit bir fonksiyonudur. Yurtiçi ve yurtdışı tasarrufların toplamından oluşan toplam tasarruflar yatırımlara eşittir. Üretim fonksiyonu ölçeğe göre sabit getirili Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur. Bu fonksiyon ölçeğe göre sabit getirili bir fonksiyon olduğu için kişi başı değerler cinsinden yazılabilir.

$$S = \sigma Y \quad 0 < \sigma < 1$$

σ yurtiçi tasarruf oranıdır.

$$S = I$$

$$Y = K^\alpha L^{1-\alpha}$$

$$y = k^\alpha = f(k)$$

Yurt içi sermayenin marjinal getirisi kişi başı üretim fonksiyonunun birinci türevine eşittir.

$$f'(k) = \alpha \left(\frac{1}{k}\right)^{1-\alpha}$$

Model ülke, orta büyüklükte bir ülke olduğu için dünya faizlerini etkileyemiyor. Dolayısıyla dünya faizini veri olarak alıyor. Dış dünya faizi r 'dir. Yurtiçi sermayenin marjinal getirisi ile dış

dünya faizinin birbirine eşit olduğu nokta kritik kişi başı sermaye düzeyidir. $\bar{k}$ ile gösterilir.

$$f'(k) = r$$

$$\alpha \left(\frac{1}{k}\right)^{1-\alpha} = r$$

$$\bar{k} = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Kritik kişi başı sermaye düzeyi, sermaye girdisinin üretimdeki payını ifade eden α ile dış dünya faizine bağlıdır.

Model ülkeye dış tasarruflar, yurtiçi sermayenin marjinal getirisi ile veri dış dünya faizinin arasındaki farka bağlı olarak girmektedir. Bu fark pozitif ise, ülkeye dış tasarruf girişi olur. Eğer fark negatif ise, ülkeye dış tasarruf girişi olmaz. Bunu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$d = \begin{cases} \gamma f(k), & f'(k) \geq r \rightarrow k \leq \bar{k}. \\ 0, & f'(k) < r \rightarrow k > \bar{k}. \end{cases} \quad (1)$$

Kişi başı dış tasarrufun, kişi başı gelirin doğrusal bir fonksiyonu olduğu varsayılmıştır. Yani, dış tasarruflar kişi başı gelirin yüksek olduğu ülkeye daha kolay gelmektedir. Çünkü, kişi başı geliri yüksek ülkenin borcu geri ödeme gücü de yüksektir. Böylece, model ülkedeki sermayenin marjinal getirisi dış dünya faiz oranından büyük ise dış tasarruflar ülkeye kişi başı gelirin doğrusal bir fonksiyonu olarak girerler.

$$d = \gamma f(k) = \gamma k^\alpha$$

Toplam kişi başına tasarruf, kişi başı yurt içi tasarruf ve kişi başına dış borç toplamına eşittir.

$$s = \sigma f(k) + d = \sigma k^\alpha + d$$

Model ekonominin toplam kişi başına tasarrufları da, doğal olarak, yurt içi sermayenin getirisi ile dış dünya faizinin farkına bağlıdır.

$$s = \begin{cases} \sigma f(k) + \gamma f(\bar{k}), & k \leq \bar{k}, \\ \sigma f(k), & k > \bar{k}. \end{cases} \quad (2)$$

3.2 Denge Dinamiği

Model ekonomide sermaye birikim modeli Solow Büyüme Modelini takip eder.

$$\dot{k} + (\delta + n)k = \begin{cases} \sigma f(k), & k > \bar{k}, (DurumI) \\ (\sigma + \gamma)f(k), & k \leq \bar{k}, (DurumII) \end{cases} \quad (3)$$

Durum I'de kişi başı sermaye ve gelir aşağıdaki gibidir.

$$k^* = \left(\frac{\sigma}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y^* = \left(\frac{\sigma}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Durum II'de kişi başı sermaye ve gelir aşağıdaki gibidir.

$$k^{**} = \left(\frac{\sigma + \gamma}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y^{**} = \left(\frac{\sigma + \gamma}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Durum I'de model ekonomide kişi başına tasarruf sadece kişi başına yurt içi tasarruflardan oluşmaktadır. Durum II'de ise model ekonomide kişi başına toplam tasarruf, kişi başına yurt içi tasarruf ve kişi başı dış borç toplamından oluşmaktadır. Durum II'deki denge kişi başına sermaye ve üretim düzeyleri Durum I'dekilerden daha yüksektir. Her iki durumda 3.3 numaralı diferansiyel denklemin çözümü aşağıda verilmiştir.

$$(DurumI) \rightarrow k(t) = \left[[k^{1-\alpha}(0) - k^{*(1-\alpha)}] e^{-(1-\alpha)(\delta+n)t} + k^{*(1-\alpha)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$(DurumII) \rightarrow k(t) = [[k^{1-\alpha}(0) - k^{**}(1-\alpha)]e^{-(1-\alpha)(\delta+n)t} + k^{**}(1-\alpha)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

3.3 Politika Analizi

Ülkeye dış sermaye girişinin gerçekleşmesi için kritik değer olan sermaye düzeyi aşağıda verilmiştir:

$$\bar{k} = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Buna göre kritik kişi başı sermaye düzeyi dış dünya faizi ile ters orantılı ve üretim fonksiyonunun sermaye elastikiyetini gösteren teknoloji katsayısı ile doğru orantılıdır.

Dış dünya faizi, kritik $\bar{k}$ düzeyini sağlayan faiz oranından yüksek(düşük) olursa, $\bar{k}$ düzeyi azalır(artar). Kritik kişi başı sermaye düzeyinin yüksek olması, ülkenin dış tasarruflardan yararlanma olanaklarını kolaylaştırmaktadır. Çünkü dünya faizi düşüktür. Likidite bolluğu vardır. Ters durumda ise, yani kritik kişi başı sermaye düzeyinin düşük olması, ülkenin dış tasarruf olanaklarından yararlanmasını zorlaştırmaktadır. Çünkü faiz oranları yüksektir. Likidite darlığı vardır. Üretim fonksiyonunun sermaye elastikiyeti artarsa(azalır), kritik kişi başı sermaye düzeyi de artar(azalır). Yine faizde olduğu gib aynı şekilde teknoloji katsayısı artarsa model ülkenin dış tasarruf olanaklarından yararlanması kolaylaşır aksi halde zorlaşır. Sermayenin marjinal getirisi eşitliğini gözönüne getirsek, oradan da görüleceği üzere α teknoloji katsayısının artması sermayenin marjinal getirisini yükseltir. Bu durumda model ülkeye dış tasarruf girişi olur.

Sonuç olarak buna bağlı olarak $\bar{k}$ düzeyinin, iki denge durumuna (k^* ve k^{**}) göre bulunduğu yer bakımından üç senaryo ortaya çıkar.

$$(SenaryoI) \rightarrow k^* < k^{**} < \bar{k} \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = k^{**}$$

$$(SenaryoII) \rightarrow k^* < \bar{k} \leq k^{**} \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = \bar{k}$$

$$(SenaryoIII) \rightarrow \bar{k} \leq k^* < k^{**} \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = k^*$$

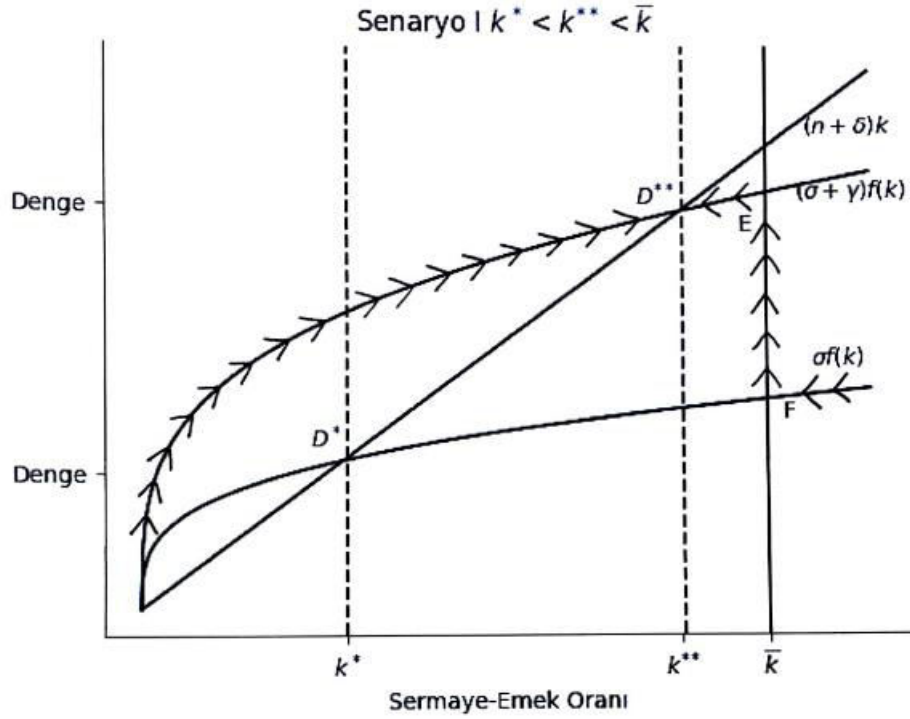
Bu üç senaryonun gerçekleşmesi için gerekli şartlar sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$(SenaryoI) \rightarrow \left(\frac{\sigma}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < \left(\frac{\sigma+\gamma}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \rightarrow \frac{r}{\alpha} < \frac{\delta+n}{\sigma+\gamma}$$

$$(SenaryoII) \rightarrow \left(\frac{\sigma}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \left(\frac{\sigma+\gamma}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \rightarrow \frac{\delta+n}{\sigma+\gamma} \leq \frac{r}{\alpha} < \frac{\delta+n}{\sigma}$$

$$(SenaryoIII) \rightarrow \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \left(\frac{\sigma}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < \left(\frac{\sigma+\gamma}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \rightarrow \frac{\delta+n}{\sigma} \leq \frac{r}{\alpha}$$

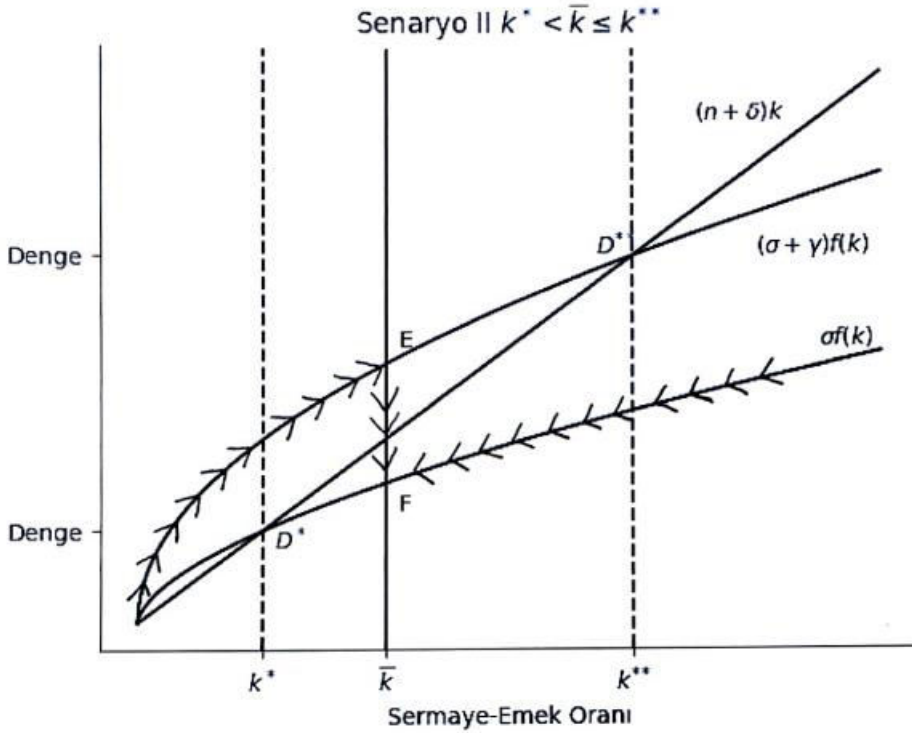
Senaryo I'in grafiği aşağıda gösterilmektedir.



Şekil 2.1: Senaryo I

Senaryo I durumunda kritik kişi başı sermaye düzeyi $k^* < k^{**} < \bar{k}$ şeklindedir. Bu iki şekilde gerçekleşebilir. Birincisi yurt içi kişi başı sermaye düzeyi k^{**} 'nin altında olabilir. Bu durumda sermayenin marjinal getirisi dış dünya faiz oranından yüksektir. Böylece dış sermaye girişi gerçekleşir ve toplam tasarruflar artar. Dolayısıyla tasarruf eğrisi yukarıya kayar. $(\sigma + \gamma)f(k) > (\delta + n)k$ olduğundan dolayı kişi başı sermaye artarak denge noktası olan k^{**} ulaşır. İkinci şekilde eğer yurt içi kişi başı sermaye düzeyi $k^{**} < k < \bar{k}$ arasında ise yine sermayenin marjinal getirisi dış dünya faiz oranından yüksektir ve ekonomi $(\sigma + \gamma)f(k)$ tasarruf eğrisi üzerindedir. Bu durumda $(n + \delta)k > (\sigma + \gamma)f(k)$ şeklindedir ve yurt içi sermaye k^{**} değerine ulaşır. Eğer yurt içi kişi başı sermaye düzeyi, kritik sermaye düzeyinden fazla ise bu durumda, sermayenin marjinal getirisi dış dünya faiz oranından düşük olur. Dış sermaye çıkışı olur. Tasarruf eğrisi $\sigma f(k)$ olur. $(n + \delta)k < \sigma f(k)$ olduğundan dolayı kişi başı sermaye kritik sermaye düzeyine ulaşır. k^{**} kişi başı sermaye düzeyi kararlı bir denge noktasıdır.

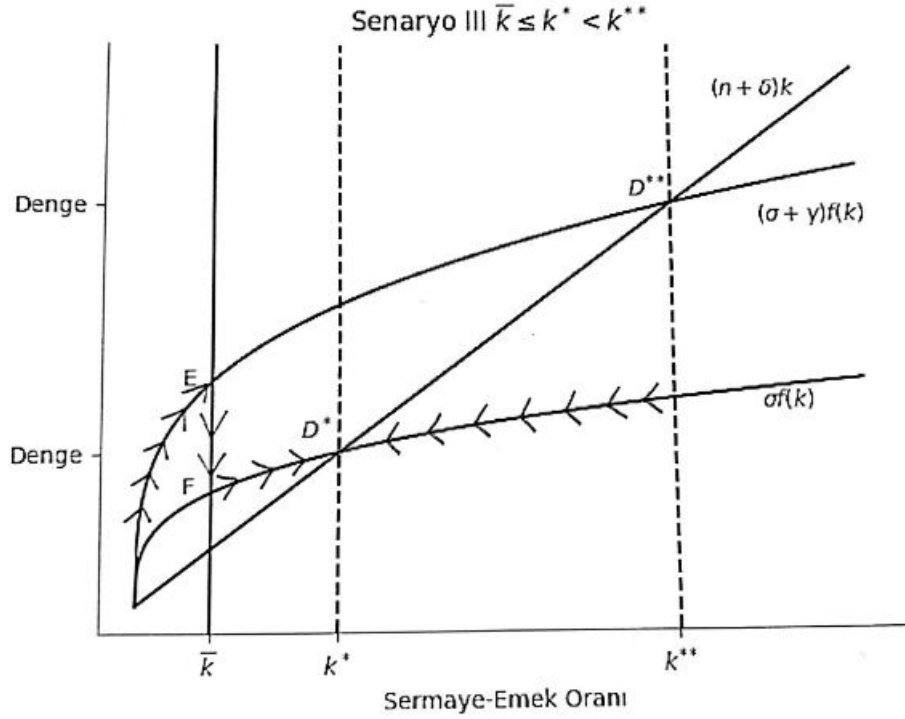
Senaryo II'in grafiği aşağıda gösterilmektedir.



Şekil 2.2: Senaryo II

Senaryo II durumunda kritik kişi başı sermaye düzeyi iki denge noktasının arasında yer almaktadır. Eğer yurt içi kişi başı sermaye kritik kişi başı sermaye düzeyinin altında ise, sermayenin marjinal getirisi dış dünya faiz oranından yüksektir. Bu durumda sermaye girişi olur ve tasarruf eğrisi $(\sigma + \gamma)f(k)$ olur. $(\sigma + \gamma)f(k) > (n + \delta)k$ olduğundan dolayı yurt içi sermaye kritik sermaye düzeyine ulaşır. Eğer yurt içi kişi başı sermaye kritik kişi başı sermaye düzeyinden yüksek ise, sermayenin marjinal getirisi dış dünya faiz oranından düşük olur ve sermaye çıkışı olur. Ekonomi $\sigma f(k)$ tasarruf eğrisine döner. Bu durumda $(n + \delta)k > \sigma f(k)$ olduğundan dolayı yurt içi kişi başı sermaye kritik kişi başı sermaye düzeyine ulaşır. Bu senaryoda $\bar{k}$ kritik kişi sermaye düzeyi kararlı bir denge noktasıdır.

Senaryo III'ün grafiği aşağıda gösterilmektedir.



Şekil 2.3: Senaryo III

Senaryo III durumunda kritik kişi başı sermaye düzeyi $\bar{k} \leq k^* < k^{**}$ şeklindedir. Eğer kişi başı sermaye düzeyi $\bar{k} < k < k^*$ arasında ise, sermayenin marjinal getirisi dış dünya faiz oranından düşüktür. Bu durumda ülkeden sermaye çıkışı olur ve tasarruf eğrisi $\sigma f(k)$ olur. $\sigma f(k) > (n + \delta)k$ olduğundan dolayı kişi başı sermaye k^* değerine ulaşır. Eğer kişi başı sermaye k^* değerinden büyük ise, hala $\bar{k}$ kritik kişi başı sermaye değerinden büyük olduğundan dolayı, ekonomi $\sigma f(k)$ tasarruf eğrisi üzerinde olur. $\sigma f(k) < (n + \delta)k$ olduğundan dolayı kişi başı sermaye k^* denge değerine ulaşır. Böylece, senaryo III'de k^* kararlı bir dengedir. Eğer kişi başı sermaye düzeyi kritik kişi başı sermayenin altında ise, sermayenin marjinal getirisi dış dünya faiz oranından yüksek olur ve sermaye girişi gerçekleşir. Ekonomi $(\sigma + \gamma)f(k)$ tasarruf eğrisine geçer. Böylece kişi başı sermaye kritik kişi başı sermaye seviyesine ulaşır.

SONUÇ

Tez çalışmamızda beş temel büyüme modeli incelenmiştir. Bunlardan Ramsey-Cass-Koopmans ve Solow modellerinde durağan durumda kişi başı sermaye, kişi başı tüketim ve kişi başı çıktı değerlerinin büyüme oranları sıfırdır. Toplam sermaye, toplam tüketim ve toplam çıktı nüfus ve teknolojik gelişme büyüme oranlarının toplamı oranında büyürler. Bu modellerde teknolojik gelişme dışsaldır. Ramsey Modeli'nde büyüme, tüketici maksimizasyonu sonucu belirlenir. Tüketici bütçe kısıtı altında faydasını maksimize eder. Bunun sonucunda Keynes-Ramsey kuralı elde edilir. Durağan durumda faiz oranı tüketicinin zaman tercihi oranına eşittir. Denge durumunda kişi başı sermaye, kişi başı tüketim ve kişi başı çıktı büyüme oranları sıfırdır. Toplam sermaye, toplam tüketim, toplam çıktı nüfus büyüme oranı ile teknolojik gelişme büyüme oranının toplamı oranında büyürler. Harrod-Domar Modeli'nde sabit oranlı üretim fonksiyonundan kaynaklı bıçak sırtı denge söz konusudur. Denge noktası kararsızdır. Dengeden en ufak bir sapma durumunda ekonomi ya sürekli atıl kapasite durumuna geçer ya da sürekli işsizlik durumunda bulunur. Solow Modeli'nde büyümenin motoru dışsal olan teknolojik gelişmedir. Durağan durumda kişi başı büyüme oranları sıfırdır. Ekonomi, Ramsey Modeli'ndeki gibi nüfus ve teknolojik gelişme büyüme oranları toplamı oranında büyür. Tek farkı, modelde tüketici optimizasyonunun olmamasıdır. Tasarruf oranı, tüketici optimizasyonu ile belirlenmez sabittir. Romer Modeli'nde, Solow ve Ramsey modellerinde dışsal olan teknolojik gelişme içselleştirilmiştir. Teknolojik gelişme ürün çeşitliliğinin artışı olarak ele alınmıştır. Ürün çeşitliliğini meydana getiren ana etken ise beşeri sermayedir. Beşeri sermayenin üretim sektörü ve araştırma sektörü arasındaki dağılımı kar maksimizasyonu yapan firma tarafından belirlenir. Aghion-Howitt Modeli de Romer Modeli gibi bir içsel büyüme modelidir. Teknolojik gelişme ürün kalitesindeki artış ile gösterilir. Yeni ürünler eski ürünleri piyasadan silerler. Schumpeter'in 'yaratıcı yıkım' kavramı temel alınarak oluşturulmuş bir modeldir. Bu modelde büyümenin ana belirleyeni Romer Modeli'ndeki gibi beşeri sermayedir. Yalnız bir fark vardır. Büyüme aynı zamanda yeniliğin ortaya çıkma olasılığına da bağlıdır. Araştırma sektörüne ayrılan beşeri sermaye arttıkça yeniliğin ortaya çıkma olasılığı da artmaktadır.

Açık Ekonomi Kırılmalı Solow Modeli'nde dış borç alan ve aldığı dış borcu tasarruflara yönlendiren orta büyüklükte, dünya faiz oranlarını veri alan bir ekonomi söz konusudur. Ülkeye dış sermaye girişi, yurt içi sermayenin marjinal getirisi ile dış dünya faiz oranının arasındaki fark tarafından belirlenir. Dış dünya faiz oranı ile yurt içi sermayenin marjinal getirisinin eşit olduğu nokta eşik noktasıdır. Bu noktayı sağlayan kişi başı sermaye değeri de kritik kişi başı sermaye değeridir. Eğer yurt içi sermayenin marjinal getirisi veri dış dünya faiz oranından küçükse, o ülkede

kişi başi sermaye düzeyi kritik sermaye düzeyinin üzerindedir. Bu durumda ülkeye sermaye girişi olmaz. Ülke iç tasarrufları ile büyümesini gerçekleştirir. Bu modelimizde Durum I olarak ifade edilir. Eğer yurt içi sermayenin marjinal getirisi veri dış dünya faiz oranından büyükse o ülkede kişi başi sermaye düzeyi kritik sermaye düzeyinin altındadır. Bu Durum II olarak ifade edilir. Bu durumda ülkeye dış sermaye girişi olur ve yurt içi toplam tasarruflar artar. Böylece denge kişi başi sermaye ve üretim düzeyleri Durum I'dekine göre daha yüksek olur. Bu iki duruma bağlı olarak iki kişi başi sermaye denge noktası vardır. Birincisi (k^*) yurt içi tasarruflarla ulaşılan denge noktasıdır. İkincisi (k^{**}) ise dış sermaye girişi sonucu ulaşılan daha yüksek kişi başi sermaye denge noktasıdır.

Kritik kişi başi sermaye değerinin bu iki denge noktasına göre bulunduğu yer bakımından üç senaryo ortaya çıkar. Bu senaryolarda kritik kişi başi sermayenin, sermayenin marjinal getirisinin dış dünya faiz oranından düşük ya da yüksek olmasına bağlı olarak ortaya çıkan iki denge durumuna göre aldığı değere bağlı olarak üç tane kararlı denge noktası oluşur.

Dolayısıyla ekonominin kritik kişi başi sermaye düzeyinin nerede olduğu ve kişi başi sermaye düzeyinin bu kritik kişi başi sermaye düzeyinin altında mı üstünde mi olduğuna göre, ekonomide denge kişi başi sermaye düzeyi değışiklik gösterir.

Model ekonomiye ülkenin risk primi, beşeri sermaye, teknolojik gelişme, devlet harcamaları eklenerek model geliştirilebilir.

KAYNAKÇA

Acemoglu, D.: 2010	Introduction to modern economic growth. <i>Privredna Kretanja i Ekonomska Politika</i> , 123, 89.
Aghion, P., & Durlauf, S. :2005	<i>Handbook of economic growth</i> . Elsevier.
Aghion, P., & Howitt, P. :1992	A Model of Growth Through Creative Destruction. <i>Econometrica</i> , 60(2), 323–351. http://www.jstor.org/stable/2951599
Aghion, P., & Howitt, P. W. :2008	<i>The economics of growth</i> . MIT press.
Aghion, P., Ljungqvist, L., Howitt, P., Howitt, P. W., Brant-Collett, M., García-Peñalosa, C., & others. :1998	<i>Endogenous growth theory</i> . MIT press.
Allen, R. G. D. :1938	<i>Mathematical analysis for economists</i> .
Allen, R. G. D. :1963	<i>Mathematical economics</i> [Techreport].
Allen, R. G. D. :1967	<i>Macro-economic theory: a mathematical treatment</i> . [Techreport].
Arrow, K. J. :1971	The economic implications of learning by doing. In <i>Readings in the Theory of Growth</i> (pp. 131–149). Springer.
Barro, R. J. , Sala-i Martin X: 2004	Economic Growth. <i>Aufl. Massachusetts Institute of Technology (MIT)</i> .

Barro, R. J., & Sala-i Martin, X. :1992	Convergence. <i>Journal of Political Economy</i> , 100(2), 223–251.
Barro, R. J., & Sala-i Martin, X. (1994).	<i>Quality improvements in models of growth</i> [Techreport]. National Bureau of Economic Research.
Bergstrom, T. :2011	<i>Lecture notes on elasticity of substitution</i> .
Blanchard, O. J., Fischer, S., BLANCHARD, O. A., & others. :1989	<i>Lectures on macroeconomics</i> . MIT press.
Blanchard, O., & Johnson, D. :2015	<i>Macroeconomics, 5th</i> . Pearson.
Cass, D. :1965	Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. <i>The Review of Economic Studies</i> , 32(3), 233–240.
Chiang, A. C. :2000	<i>Elements of dynamic optimization</i> . Waveland Press.
Dawkins, P. :2007	<i>Differential equations</i> . Retrieved on November 22, 2012.
De la Fuente, A. :2000	<i>Mathematical methods and models for economists</i> . Cambridge University Press.
Dinopoulos, E., & Thompson, P. :1999	Scale effects in Schumpeterian models of economic growth. <i>Journal of Evolutionary Economics</i> , 9(2), 157–185.
Dixit, A. K., & Stiglitz, J. E. :1977	Monopolistic competition and optimum

	product diversity. <i>The American Economic Review</i> , 67(3), 297–308.
Domar, E. D. :1946	Capital expansion, rate of growth, and employment. <i>Econometrica, Journal of the Econometric Society</i> , 137–147.
Dorfman, R. :1969	An economic interpretation of optimal control theory. <i>The American Economic Review</i> , 59(5), 817–831.
Ethier, W. J. :1982	National and international returns to scale in the modern theory of international trade. <i>The American Economic Review</i> , 72(3), 389–405.
Gelfand, I., & Fomin, S. :1963	Calculus of variations. 1963. <i>Revised English Edition Translated and Edited by Richard A. Silverman</i> .
Gravelle, H., & Rees, R. :2004	<i>Microeconomics</i> . Pearson education.
Grossman, G., & Helpman, E. :1990	Comparative Advantage and Long Run Growth. <i>American Economic Review</i> , 80, 796–815.
Grossman, G. M., & Helpman, E. :1989	<i>Comparative advantage and long-run growth</i> [Techreport]. National Bureau of Economic Research.
Grossman, G. M., & Helpman, E. :1991a	<i>Innovation and growth in the global economy</i> . MIT press.

Grossman, G. M., & Helpman, E. :1991b	Quality ladders in the theory of growth. <i>The Review of Economic Studies</i> , 58(1), 43–61.
Grossman, G. M., & Helpman, E. :1994	Endogenous innovation in the theory of growth. <i>Journal of Economic Perspectives</i> , 8(1), 23–44.
Hadley, G., & Kemp, M. C. :2014	<i>Variational methods in economics</i> . Elsevier.
Hamberg, D. :1952	Full capacity vs. full employment growth. <i>The Quarterly Journal of Economics</i> , 66(3), 444–449.
Harrod, R. :1974	Pure theory of growth economics. <i>Zeitschrift Für Nationalökonomie/Journal of Economics</i> , H. 3/4, 241–247.
Harrod, R. F. :1939	An essay in dynamic theory. <i>The Economic Journal</i> , 49(193), 14–33.
Helpman, E. :2009	<i>The mystery of economic growth</i> . Harvard University Press.
Henry, R. :2017	<i>A Modern Introduction to Differential Equations Second Edition</i> . ACADEMIC PRESS.
Inada, K.-I. :1963	On a two-sector model of economic growth: Comments and a generalization. <i>The Review of Economic Studies</i> , 30(2), 119–127.
Inada, K.-I. :1969	Fixed Factor Coefficients and

	Harrod-Neutral Technical Progress. <i>The Review of Economic Studies</i> , 36(1), 89–97.
Intriligator, M. D. :2002	<i>Mathematical optimization and economic theory</i> . SIAM.
Jones, C. I. :1999	Growth: with or without scale effects? <i>American Economic Review</i> , 89(2), 139–144.
Jones, C, & Vollrath, D. :2013	Introduction to Economic Growth WW Norton. New York.
Jones, Charles. :1998	<i>introduction to economic growth 2nd edition</i> .
Kaldor, N. :1961	Capital accumulation and economic growth. In <i>The theory of capital</i> (pp. 177–222). Springer.
Kamien, M. I., & Schwartz, N. L. :2012	<i>Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management</i> . Courier Corporation.
Kamihigashi, T., & others. :2006	Transversality conditions and dynamic economic behavior. <i>The New Palgrave Dictionary of Economics (Segunda Edición)</i> . Londres: MacMillan Palgrave.
Kirk, D. E. :2004	<i>Optimal control theory: an introduction</i> . Courier Corporation.
Koopmans, T. C., & others. :1963	<i>On the concept of optimal economic growth</i> [Techreport]. Cowles Foundation for

	Research in Economics, Yale University.
Krueger, D. :2012	Macroeconomic theory. <i>Lecture Notes</i> .
Kuhn, H. W., & Szegö, G. P. :2013	<i>Mathematical Systems Theory and Economics I/II: Proceeding of an International Summer School held in Varenna, Italy, June 1–12, 1967</i> (Vol. 11). Springer Science & Business Media.
Lewis, F. L., Vrabie, D., & Syrmos, V. L. :2012	<i>Optimal control</i> . John Wiley & Sons.
Mankiw, N. G., Phelps, E. S., & Romer, P. M. (1995	The growth of nations. <i>Brookings Papers on Economic Activity</i> , 1995(1), 275–326.
Michel, P. :1982	On the transversality condition in infinite horizon optimal problems. <i>Econometrica: Journal of the Econometric Society</i> , 975–985.
Montgomery, D. C., & Runger, G. C. :2018	<i>Applied statistics and probability for engineers</i> . Wiley Hoboken, NJ.
Nagle, R. K., Saff, E. B., Snider, A. D., & West, B. :1996	<i>Fundamentals of differential equations and boundary value problems</i> . Addison-Wesley Reading.
Obstfeld, M., Rogoff, K. S., & Wren-Lewis, S. :1996	<i>Foundations of international macroeconomics</i> (Vol. 30). MIT press Cambridge, MA.
Okamoto, T., & Inada, K. :1962	A note on the theory of economic growth. <i>The Quarterly Journal of Economics</i> , 76(3), 503–507.

Phelps, E. :1961	The golden rule of accumulation: a fable for growthmen. <i>The American Economic Review</i> , 51(4), 638–643.
Phelps, E. S. :1965	Second essay on the golden rule of accumulation. <i>The American Economic Review</i> , 55(4), 793–814.
Pignalosa, D. (n.d.).	<i>The Euler Equation approach and utility functions: a critical view.</i>
Ramsey, F. P. :1928	A mathematical theory of saving. <i>The Economic Journal</i> , 38(152), 543–559.
Raut, L. K., & Srinivasan, T. N. :1992	<i>Theories of long-run growth: Old and new.</i> Department of Economics, University of California.
Ricardo, H. J. :2020	<i>A modern introduction to differential equations.</i> Academic Press.
Rivera-Batiz, L. A., & Romer, P. M. :1991	Economic integration and endogenous growth. <i>The Quarterly Journal of Economics</i> , 106(2), 531–555.
Romer, D. :2011	<i>Advanced macroeconomics fourth edition.</i> McGraw-Hill.
Romer, P. M. :1986	Increasing returns and long-run growth. <i>Journal of Political Economy</i> , 94(5), 1002–1037.

Romer, P. M. :1990	Endogenous technological change. <i>Journal of Political Economy</i> , 98(5, Part 2), S71–S102.
Savvides, A., & Stengos, T. :2008	<i>Human capital and economic growth</i> . Stanford University Press.
Seierstad, A., & Sydsaeter, K. :1986	<i>Optimal control theory with economic applications</i> . Elsevier North-Holland, Inc.
Sengupta, J. :2011	<i>Understanding economic growth: Modern theory and experience</i> . Springer Science & Business Media.
Shone, R. :2001	<i>An introduction to economic dynamics</i> . Cambridge University Press.
Simon, C. P., Blume, L., & others. :1994	<i>Mathematics for economists</i> (Vol. 7). Norton New York.
Solow, R. M. :1956	A contribution to the theory of economic growth. <i>The Quarterly Journal of Economics</i> , 70(1), 65–94.
Strang, G. :2014	<i>Differential equations and linear algebra</i> . Wellesley-Cambridge Press Wellesley.
Swan, T. W. :1956	Economic growth and capital accumulation. <i>Economic Record</i> , 32(2), 334–361.
Sydsaeter, K., Hammond, P., & Seierstad, A. (n.d.). A. Strom.:2005	<i>Further Mathematics for Economic Analysis</i> . Prentice Hall, Harlow (England).

Takayama, A. :1993	<i>Analytical methods in economics</i> . University of Michigan Press.
Takayama, A., & Akira, T. :1985	<i>Mathematical economics</i> . Cambridge university press.
Tenenbaum, M., & Pollard, H. :1963	<i>Ordinary Differential Equations: An Elementary Textbook for Students of Mathematics, Engineering, and the Sciences</i> . Harper & Row New York.
Tirole, J. :1988	<i>The theory of industrial organization</i> . MIT press.
Trench, W. F. :2013	<i>Elementary differential equations with boundary value problems</i> .
Tu, P. N. :2012	<i>Dynamical systems: an introduction with applications in economics and biology</i> . Springer Science & Business Media.
Van Tu, P. N. :1984	<i>Introductory optimization dynamics: optimal control with economics and management science applications</i> . Springer.
Varian, H. R. :2014	<i>Intermediate microeconomics with calculus: a modern approach</i> . WW Norton & Company.
Varian, H. R., & Varian, H. R. :1992	<i>Microeconomic analysis</i> (Vol. 3). Norton New York.

Wainwright, K., & others. :2005	<i>Fundamental methods of mathematical economics/Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright.</i> Boston, Mass.: McGraw-Hill/Irwin,.
Wickens, M. :2012	<i>Macroeconomic theory: a dynamic general equilibrium approach.</i> Princeton University Press.
Zill, D. G. :2016	<i>Differential Equations with Boundary-Value Problems.</i> Cengage Learning.

MATEMATİKSEL YÖNTEMLER

1 Diferansiyel Denklemler

Adi diferansiyel denklem, bir değişkenli bilinmeyen bir fonksiyon, onun bağımsız değişkeni ve bir ya da birden fazla türevinden oluşan denkleme denir. Adi diferansiyel denkleme aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

$$3 \frac{dy}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}$$

$$x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3t^2 + 4t + 2}{2(x-1)}$$

Bir adi diferansiyel denklemdeki bilinmeyen fonksiyonun en yüksek türevi n . türev ise, o diferansiyel denkleme n . dereceden diferansiyel denklem denir. Aşağıdaki bütün denklemler birinci derece diferansiyel denklemlerdir. Çünkü bu denklemlerdeki en yüksek türev birinci türevdir.

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3t^2 + 4t + 2}{2(x-1)}$$

$$(w')^2 + 2t^3w' - 4t^2w = 0$$

Aşağıdaki diferansiyel denklemler ise ikinci derece diferansiyel denklemlerdir.

$$x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0$$

$$\ddot{x} + 3t\dot{x} + 2x = \sin(\omega t)$$

Bu denklem ise 5. dereceden bir diferansiyel denklemdir.

$$e^{-x}y^{(5)} + \sin(x)y''' = 3e^x$$

Eğer y, tek bağımsız değişken x'in bilinmeyen bir fonksiyonu ise ve $y^{(k)}$, y'nin k. türevini gösteriyorsa, bu durumda n. dereceden bir diferansiyel denklemi aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

ya da

$$y^{(n)} = G(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)})$$

Örneğin aşağıdaki ikinci derece adi diferansiyel denklemi şu şekilde gösterebiliriz.

$$2 \frac{d^2y}{dx^2} + e^x \frac{dy}{dx} = y + \sin x$$

$$2 \frac{d^2y}{dx^2} + e^x \frac{dy}{dx} - y - \sin x$$

Eşitliğin sol tarafı, x bağımsız değişkeninin, y bağımlı değişkeninin, y' birinci türevinin ve y'' ikinci türevinin fonksiyonu olacak şekilde

$$F(x, y, y', y'')$$

olarak gösterilir.

Eğer y, x'in fonksiyonu ise, o zaman n. dereceden doğrusal adi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi gösterilir.

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Aşağıdaki ikinci derece diferansiyel denklem doğrusaldır.

$$x'' + 3tx' + 2x = \sin(\omega t)$$

n. dereceden bir diferansiyel denklemin yani,

$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ 'ın çözümü $y = y(x)$ 'fonksiyonudur. Şöyle ki; $y = y(x)$ 'in bütün gerekli türevleri (a,b) aralığında var olsun ve $y = y(x)$, x'in (a,b) aralığındaki bütün değerleri için bu diferansiyel denklemi sağlasın.

Aşağıdaki diferansiyel denklemi çözelim.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x + 7$$

Bu denklemin iki tarafının integralini alalım.

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int x^2 - 2x + 7 dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 7x + C$$

Bu diferansiyel denklemin, sonsuz sayıda çözümü vardır. Çünkü, C'ye sonsuz sayıda değer verebiliriz. Bu sonsuz sayıdaki çözümleri bir aile olarak düşünürsek, C'nin her farklı değeri bu sonsuz sayıdaki çözüm ailesinin üyelerinden birini verir. C'ye bu sonsuz sayıdaki değerlerden herhangi birini vererek elde edilen çözüme diferansiyel denklemin özel çözümü denir. Örneğin yukarıdaki çözümde C'ye sıfır değerini verirse, diferansiyel denklemin özel çözümü,

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 7x$$

olur.

C'ye -10 değerini verirse, özel çözüm,

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 7x - 10$$

olur.

Bu özel çözümler diferansiyel denklemin integrali olarak adlandırılır. Bu integrallerin grafiği integral eğrisi olarak ya da çözüm eğrisi olarak adlandırılır. Bağımsız değişkeni t, bağımlı değişkeni y olan bir diferansiyel denklemi çözmeye çalıştığımızı varsayalım. Bu denklemim integral eğrisinin belli bir noktadan yani (t_0, y_0) noktasından geçmesini istediğimizi varsayalım. Bu durumda $y(t_0) = y_0$ şartını koymuş oluyoruz. Bu şarta başlangıç şartı denir. Bu probleme de başlangıç değer problemi denir. Bu şekilde özel çözümü bulmaya çalışıyoruz. Bu çözümü de integral sabitinin belirli bir değerini seçerek buluyoruz.

$$\frac{dx}{dt} = 12 - t^2$$

diferansiyel denklemini iki tarafının integralini alarak çözelim.

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int 12 - t^2 dt$$

$$x(t) = 12t - \frac{t^3}{3} + C$$

Eğer $t = 1$ zamanında $x(t) = -5$ ise diferansiyel denklemin çözümü şu şekli alır.

$$x(1) = 12 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} + C$$

$$-5 = 12 - \frac{1}{3} + C$$

$$-5 = \frac{35}{3} + C$$

$$C = \frac{-50}{3}$$

$$x(t) = 12t - \frac{t^3}{3} - \frac{50}{3}$$

Sonuç olarak diferansiyel denklemin özel çözümünü elde ederiz.

$t = 1, x(t) = -5$ başlangıç koşulu olarak adlandırılır. (Henry, 2017; Nagle et al., 1996; Trench, 2013; Zill, 2016; Tu, 2012; Tenenbaum and Pollard, 1963; Strang, 2014)

1.1 Birinci Derece Diferansiyel Denklemler ve Çözümleri

1.1.1 Doğrusal Diferansiyel Denklemler

Doğrusal birinci derece diferansiyel denklem şu şekilde yazılır.

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

Bu denklemi $a_1(x)$ 'e bölelim.

$$\frac{a_1(x)}{a_1(x)} \frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)} y = \frac{f(x)}{a_1(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)} y = \frac{f(x)}{a_1(x)}$$

$$\frac{a_0(x)}{a_1(x)} = P(x),$$

$$\frac{f(x)}{a_1(x)} = Q(x)$$

olarak ifade edersek, denklemi şu şekilde yazabiliriz.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Bu denkleme standart form denir. Eğer, $Q(x) = 0$ ise bu diferansiyel denklem homojendir. Eğer, $Q(x) \neq 0$ ise homojen değildir. $Q(x) = 0$ olduğunda diferansiyel denklem ayrılabilir diferansiyel denkleme dönüşür.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y$$

$$\frac{1}{y} dy = -P(x)dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -P(x)dx$$

(Ricardo, 2020:38-39)

1.1.2 İntegrasyon Faktörü

$\mu(x)$ şeklinde bir fonksiyon olduğunu varsayalım.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

diferansiyel denklemini $\mu(x)$ fonksiyonu ile çarpalım.

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$$

$$\mu(x)P(x) = \mu'(x)$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda yukarıdaki denklemi şu şekilde yazarız.

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu'(x)y = \mu(x)Q(x)$$

Bu eşitlik iki fonksiyonun çarpımının türevidir.

$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

O halde,

$$[\mu(x).y]' = \mu(x)Q(x)$$

olur. İki tarafın integralini alalım.

$$\int [\mu(x).y]'dx = \int \mu(x).Q(x)dx$$

$$\mu(x)y + C = \int \mu(x)Q(x)dx$$

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)dx - C$$

$$y = \frac{\int \mu(x)Q(x)dx - C}{\mu(x)}$$

Eksi işaretini C sabitinin içine alırsak, yukarıdaki ifadeyi

$$y = \frac{\int \mu(x) Q(x)dx + C}{\mu(x)}$$

olarak yazabiliriz. Bu, Diferansiyel denklemin çözümüdür. Şimdi $\mu(x)$ fonksiyonunu bulalım.

$$\mu(x)P(x) = \mu'(x)$$

$$P(x) = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$$

Eşitliğin sağ tarafındaki ifade $\ln f(x)$ 'in türevidir.

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Bu durumda,

$$P(x) = [\ln \mu(x)]'$$

olur.

İki tarafın integralini alalım.

$$\int P(x) dx = \int [\ln \mu(x)]' dx$$

$$\int P(x) dx = \ln \mu(x) + K$$

$$\ln \mu(x) = \int P(x) dx - K$$

$$\log_e \mu(x) = \int P(x) dx - K$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx - K}$$

$$e^{-K} = k$$

olarak tanımlayalım.

$$\mu(x) = ke^{\int P(x)dx}$$

Bu değeri,

$$y = \frac{\int \mu(x) Q(x)dx + C}{\mu(x)}$$

eşitliğinde yerine koyalım.

$$y = \frac{\int ke^{\int P(x) dx} Q(x)dx + C}{ke^{\int P(x) dx}}$$

$$y = \frac{k \int e^{\int P(x) dx} Q(x)dx}{ke^{\int P(x) dx}} + \frac{C}{ke^{\int P(x) dx}}$$

$$y = \frac{\int e^{\int P(x) dx} Q(x)dx}{e^{\int P(x) dx}} + \frac{\frac{C}{k}}{e^{\int P(x) dx}}$$

$\frac{C}{k}$ ifadesi sabittir. Bunu C sabitinin içine alalım sadece C olarak gösterelim.

$$y = \frac{\int e^{\int P(x) dx} Q(x)dx + C}{e^{\int P(x) dx}}$$

Dolayısıyla,

$$y = \frac{\int \mu(x) Q(x)dx + C}{\mu(x)}$$

eşitliği,

$$y = \frac{\int e^{\int P(x) dx} Q(x)dx + C}{e^{\int P(x) dx}}$$

haline gelir. Bu durumda,

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

olur. (Dawkins, 2007:21-24)

1.1.3 Tamamlayıcı fonksiyon ve Özel İntegral

$$\frac{dy}{dx} + ay = b$$

şeklinde homojen olmayan birinci derece sabit katsayılı doğrusal bir diferansiyel denklemin çözümü, tamamlayıcı fonksiyon (y_c) ve özel integralin (y_p) toplamından oluşur. Tamamlayıcı fonksiyon yukarıdaki diferansiyel denklemin homojen şeklinin genel çözümüdür. Özel integral ise, yukarıdaki diferansiyel denklemin herhangi bir özel çözümüdür.

Diferansiyel denklemin homojen olmayan şekli şöyle yazılır.

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0$$

İntegrasyon faktörünü kullanarak bu homojen diferansiyel denklemi çözelim.

$$\mu(x) = e^{\int a dx}$$

$$\mu(x) = e^{ax}$$

$$\int (e^{ax}y)' dx = \int e^{ax} \cdot 0 dx$$

$$e^{ax}y = A$$

$$y = Ae^{-ax}$$

Bu homojen diferansiyel denklemin çözümüdür. Özel integrali, homojen olmayan diferansiyel denklemin herhangi bir özel çözümü olduğundan, en basit çözümü deneyelim. $y = k$

Bu durumda,

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

olur.

Homojen olmayan diferansiyel denklem aşağıdaki şekli alır.

$$\frac{dy}{dx} + ay = b$$

$$0 + ak = b$$

$$ak = b$$

$y = k$ olduğundan,

$$y = \frac{b}{a}$$

olur.

Bu da özel integraldir. Tamamlayıcı fonksiyon ile özel integrali topladığımız zaman homojen olmayan birinci derece sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemin genel çözümünü bulmuş oluruz.

$$y(x) = y_c + y_p$$

$$y(x) = Ae^{-ax} + \frac{b}{a}$$

Eğer, $x = 0$, $y(0)$ şeklinde bir başlangıç koşulu belirtirsek,

$$y(0) = Ae^{-a \cdot 0} + \frac{b}{a}$$

$$y(0) = A + \frac{b}{a}$$

$$A = y(0) - \frac{b}{a}$$

olur. Buradan da diferansiyel denklemin gerçek çözümünü elde ederiz.

$$y(x) = [y(0) - \frac{b}{a}]e^{-ax} + \frac{b}{a}$$

Eğer $a = 0$ ise,

$$\frac{dy}{dx} = b$$

olur.

İki tarafın integralini alırsak, ,

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int b dx$$

$$y(x) = bx + c$$

genel çözümünü elde ederiz. Bu genel çözümdeki iki kısım tamamlayıcı fonksiyon c ve özel integral bx olarak tanımlanabilir.

$a = 0$ olduğundan dolayı, tamamlayıcı fonksiyon,

$$y_c = Ae^{-ax}$$

$$y_c = Ae^{-a.0}$$

$$c = y_c = A$$

olur. Özel integralde ise, $a = 0$ olduğundan dolayı $y = k$ çözümü başarısız olacaktır. O halde sabit olmayan bir çözüm denemeliyiz. $y = kx$ çözümünü deneyelim. Bu durumda ,

$$\frac{dy}{dx} = k$$

olur. Homojen diferansiyel denklemin özel çözümü,

$$\frac{dy}{dx} + ay = b$$

$$y_p = k = b$$

$$y_p = kx$$

$$y_p = bx$$

olur.

Sonuç olarak çözümü şu şekilde elde ederiz.

$$y(x) = y_c + y_p$$

$$y(x) = A + bx$$

olarak bulunur. Bu sonuç yukarıda elde ettiğimiz $y(x) = bx + c$ sonucuyla aynıdır. c ve A keyfi

sabitlerdir. Sadece notasyonları farklıdır.

$x = 0$, $y(0)$ başlangıç koşulunda diferansiyel denklemin gerçek çözümü,

$$y(x) = A + bx$$

$$y(0) = A + b \cdot 0$$

$$y(0) = A$$

$$y(x) = y(0) + bx$$

olur. (Wainwright et al., 2005:472-474)

1.1.4 Ayrılabilir Diferansiyel Denklemler

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

şeklindeki birinci derece diferansiyel denklem eğer,

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

şeklinde yazılabiliyorsa bu denkleme ayrılabilir diferansiyel denklem denir. Örneğin,

$$\frac{dy}{dx} = e^x y^2$$

bir ayrılabilir diferansiyel denklemdir. Ayrılabilir diferansiyel denklemlerin üç durumu vardır.

Birinci durum: $g(y) = 1$

Bu durumda

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

şeklini alır. İkinci durum: $f(x) = 1$

Bu durumda

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

şeklini alır. Üçüncü durum ise bu iki durumun dışında kalan durumlardır.

Örnek: birinci durum

$$\frac{dy}{dx} = -x^3 + \cos x$$

,

$$y(1) = 1$$

$$dy = -x^3 + \cos x dx$$

$$\int dy = \int -x^3 + \cos x dx$$

$$y(x) = -\frac{x^4}{4} + \sin x + C$$

$$1 = -\frac{1^4}{4} + \sin 1 + C$$

$$C = \frac{5}{4} - \sin 1$$

$$y(x) = -\frac{x^4}{4} + \sin x + \frac{5}{4} - \sin 1$$

Örnek: ikinci durum

$$\frac{dB}{dt} = rB,$$

$$t = 0 \Rightarrow B(t) = B(0)$$

$$rBdt = dB$$

$$r dt = \frac{dB}{B}$$

$$\int r dt = \int \frac{dB}{B}$$

$$rt = \ln B + C$$

$$rt - C = \ln B = \log_e B$$

$$B(t) = e^{rt - C}$$

$$B(t) = e^{rt} e^C$$

$$B(0) = e^C$$

$$B(t) = e^{rt} B(0)$$

Örnek: üçüncü durum

$$\frac{dP}{dt} = kP \cos(\omega t),$$

$$t = 0 \Rightarrow P(t) = P_0$$

Bu diferansiyel denklem $\frac{dP}{dt} = f(P)g(t)$ şeklinde ayrılabilir. Yani,

$$f(P) = P, g(t) = k \cos(\omega t)$$

olarak yazılabilir.

$$\frac{dP}{P} = k \cos(\omega t) dt$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int k \cos(\omega t) dt$$

$$\ln P = \frac{k}{\omega} \sin(\omega t) + C$$

$$\log_e P = \frac{k}{\omega} \sin(\omega t) + C$$

$$P(t) = e^{\frac{k}{\omega} \sin(\omega t)} e^C$$

$$P_0 = e^C$$

$$P(t) = e^{\frac{k}{\omega} \sin(\omega t)} P_0$$

1.1.5 Bernoulli Denklemi

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

şeklindeki diferansiyel denkleme Bernoulli Denklemi denir. Eşitliğin iki tarafını y^n ile bölelim.

$$\frac{dy}{dx} y^{-n} + P(x)y \cdot y^{-n} = Q(x)$$

$$v = y \cdot y^{-n}$$

olarak tanımlayalım.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dy(x)^{1-n}}{dx} = \frac{dy(x)^{1-n}}{dy(x)} \cdot \frac{dy(x)}{dx} = (1-n) \cdot y(x)^{-n} \cdot y'(x)$$

$$v' = (1-n) \cdot y(x)^{-n} \cdot y'(x)$$

$$v' = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$$

Bu bir doğrusal diferansiyel denklemdir. Böylece Bernoulli Denklemi doğrusal diferansiyel denkleme dönüştürmüş oluruz. (Dawkins, 2007:56)

2 Hamilton Denklemi'nin Çözümü

$$\max_{c(t)} V(0) = \int_0^T v[k(t), c(t), t] dt$$

$$\dot{k}(t) = g[k(t), c(t), t]$$

$$k(0) = k_0 > 0$$

$$k(T)e^{-\bar{r}(T)T} \geq 0$$

Lagrange fonksiyonu oluşturulur.

$$L = \int_0^T v[k(t), c(t), t] dt + \int_0^T (\mu(t)(g[k(t), c(t), t] - \dot{k}(t))) dt + vk(T)e^{-\bar{r}(T)T}$$

Bu Lagrange fonksiyonunun $c(t)$ ve $k(t)$ 'ye göre türevi alınır. Bunun için önce $\int_0^T \mu(t)\dot{k}(t)dt$ ifadesi kısımlara ayırarak bütünleme yöntemi (integration by parts yöntemi) ile sadeleştirilir.⁶⁰

⁶⁰ $u(t)$ ve $v(t)$ iki fonksiyon olsun. Bu iki fonksiyonun çarpımının türevini sonra da $[t_1, t_2]$ aralığında integralini alıp düzenlediğimizde kısımlara ayırarak bütünleme yöntemini buluruz.

$$\frac{d(u(t)v(t))}{dt} = \dot{u}v + \dot{v}u$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d(uv)}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}v dt + \int_{t_1}^{t_2} u\dot{v} dt$$

$$uv|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}v dt + \int_{t_1}^{t_2} u\dot{v} dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} u\dot{v} dt = uv|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}v dt$$

$\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ ve $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ olduğundan dolayı yukarıdaki eşitlik şu şekilde de yazılabilir.

$$\int_{t_1}^{t_2} u dv = uv|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} v du$$

$\int_0^T \mu(t)\dot{k}(t)dt$ ifadesine kısımlara ayırarak bütünleme yöntemini uygulayalım.

$$\int_0^T \mu(t)\dot{k}(t)dt = \int_0^T \mu(t) \frac{dk(t)}{dt} dt = \int_0^T \mu(t) dk(t)$$

$$\int_0^T \mu dk = \mu k|_0^T - \int_0^T k d\mu$$

$\frac{d\mu}{dt} = \dot{\mu} \rightarrow d\mu = \dot{\mu} dt$ olduğundan dolayı yukarıdaki eşitlik aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

Böylece,

$$\int_0^T \mu(t) \dot{k}(t) dt = \mu(T)k(T) - \mu(0)k(0) - \int_0^T k(t) \dot{\mu}(t) dt$$

olur. Bu ifade Lagrange fonksiyonunda yerine koyularak Lagrange fonksiyonu düzenlendiğinde,

$$L = \int_0^T v[k(t), c(t), t] + \mu(t)g[k(t), c(t), t] dt + \int_0^T \dot{\mu} k dt + \mu(0)k(0) - \mu(T)k(T) + vk(T)e^{-\bar{r}(T)T}$$

elde edilir. İlk integralin içindeki ifadeye *Hamilton Fonksiyonu* denir.

$$H[k(t), c(t), t, \mu(t)] = v[k(t), c(t), t] + \mu(t)g[k(t), c(t), t]$$

Bu ifadeyi yukarıdaki Lagrange fonksiyonunda $k(0) = k_0$ olmak üzere yerine koyarsak,

$$L = \int_0^T H[k(t), c(t), t, \mu(t)] + \dot{\mu}(t)k(t) dt + \mu(0)k_0 - \mu(T)k(T) + vk(T)e^{-\bar{r}(T)T}$$

elde edilir. $\bar{c}(t)$ ve $\bar{k}(t)$ sırasıyla en iyi kontrol ve stok zaman patikaları olsun. Bu en iyi zaman patikaları, Lagrange fonksiyonunda yerine konulup Lagrange fonksiyonunun bu patikalara göre türevi alınırsa sonuç sıfıra eşit olur. Çünkü bu patikalar en iyi patikalardır. Diğer bir deyişle, yukarıdaki Lagrange fonksiyonunun $c(t)$, $k(t)$ ve $k(T)$ 'ye göre türevi alınır. Eğer bu türev sıfıra eşit ise $c(t)$, $k(t)$, $k(T)$ patikaları en iyi patika yani $\bar{c}(t)$, $\bar{k}(t)$ ve $\bar{k}(T)$ olur.

Bu en iyi zaman patikalarının diğer patikalardan farklı bir özelliğinin olması gerekir ki Lagrange fonksiyonuna konulup bu fonksiyonun türevi alındığında türev sıfıra eşit olsun. Bu nedenle bu ayırt edici özelliği bulmak için, öncelikle bu en iyi patikalardan $\bar{c}(t)$ patikasına $\epsilon p(t)$ fonksiyonunu ekleyerek en iyi patika olma özelliği olmayan diğer patikayı bulalım. Stok patikası olan $\bar{k}(t)$ kontrol patikasına $\bar{c}(t)$ bağlı olduğundan dolayı, kontrol patikasındaki bir değişiklik stok

$$\int_0^T \mu dk = \mu k|_0^T - \int_0^T k \dot{\mu} dt = \mu(T)k(T) - \mu(0)k(0) - \int_0^T k \dot{\mu} dt$$

sonuç olarak,

$$\int_0^T \mu(t) \dot{k}(t) dt = \mu(T)k(T) - \mu(0)k(0) - \int_0^T k \dot{\mu} dt$$

olur.

patikasında da değişikliğe sebep olur. Bunları şu şekilde gösterebiliriz.

$$c(t) = \bar{c}(t) + \epsilon p_1(t)$$

$$k(t) = \bar{k}(t) + \epsilon p_2(t)$$

Sınır değeri olan $k(T)$ değeri de değişir. Bu değişim $\epsilon dK(T)$ ile gösterilir.

$$k(T) = \bar{k}(T) + \epsilon dK(T)$$

Şimdi bunları Langrange fonksiyonunda $c(t)$, $k(t)$ ve $k(T)$ 'nin yerlerine koyalım. Elde edilen yeni Lagrange fonksiyonunu $\bar{L}$ olarak gösterelim.

$$\bar{L} = \int_0^T H[\bar{k}(t) + \epsilon p_2(t), \bar{c}(t) + \epsilon p_1(t), t, \mu(t)] + \dot{\mu}(t)[\bar{k}(t) + \epsilon p_2(t)] dt + \mu(0)k_0 - \mu(T)[\bar{k}(T) + \epsilon dk(T)] +$$

$$ve^{-\dot{r}(T)T} [\bar{k}(T) + \epsilon dk(T)]$$

Bu Langrange fonksiyonunda $c(t)$, $k(t)$ ve $k(T)$ ϵ 'un aldığı değere göre değiştiği için bu Lagrange ϵ 'un fonksiyonu olarak yazılabilir. Dolayısıyla Lagrange fonksiyonunun ϵ 'a göre türevi alınıp sıfıra eşitlenir. Sonuç olarak en iyi patikaların elde edilmesi için gerekli olan şartlara ulaşılır.

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \epsilon} = \int_0^T \frac{\partial}{\partial \epsilon} H[\bar{k}(t) + \epsilon p_2(t), \bar{c}(t) + \epsilon p_1(t), t, \mu(t)] + \frac{\partial}{\partial \epsilon} \dot{\mu}(t)[\bar{k}(t) + \epsilon p_2(t)] + \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mu(0)k_0$$

$$- \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mu(T)[\bar{k}(T) + \epsilon dk(T)] + \frac{\partial}{\partial \epsilon} ve^{-\dot{r}(T)T} [\bar{k}(T) + \epsilon dk(T)] = 0$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \epsilon} = \int_0^T \frac{\partial H}{\partial c(t)} p_1(t) + [\frac{\partial H}{\partial k(t)} + \dot{\mu}(t)] p_2(t) + [ve^{-\dot{r}(T)T} - \mu(T)] dk(T) = 0$$

Yukarıdaki integralin sonucunun sıfır olması için her $p_1(t)$, $p_2(t)$ ve $k(T)$ fonksiyonları için,

1)

$$\frac{\partial H}{\partial c(t)} = 0$$

2)

$$\frac{\partial H}{\partial k(t)} + \dot{\mu}(t) = 0$$

3)

$$ve^{-\bar{r}(T)T} - \mu(T) = 0$$

olması gerekir. (1) numaralı eşitlik yani Hamilton fonksiyonunun control değişkenine ($c(t)$) göre alınan türevi *maksimum prensibi* olarak adlandırılır.

Kuhn-Tucker birinci derece gereklilik şartlarında eşitsizlik kısıtları ile ilgili bir şart vardır. Buna *complementary slackness* şartı denir. Bu şart basit bir şekilde iki değişkenli bir fonksiyon $f(x, y)$ ve bir eşitsizlik kısıtı $g(x, y) \leq b$ ile beraber λ Lagrange çarpanı olmak üzere aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\lambda[g(x, y) - b] = 0$$

Yukarıdaki dinamik optimizasyon sorununda $k(T)e^{-\bar{r}(T)T} \geq 0$ eşitsizlik kısıtı vardır. Bu kısıtın Lagrange çarpanı v 'dir. Dolayısıyla complementary slackness şartını buna uyguladığımızda,

$$vk(T)e^{-\bar{r}(T)T} = 0$$

olmalıdır. Dinamik optimizasyon sorununun çözümü sonucunda elde edilen (3) numaralı eşitlikte $ve^{-\bar{r}(T)T} = \mu(T)$ 'dir. Bunu yukarıdaki eşitlikte yerine koyduğumuzda,

$$\mu(T)k(T) = 0$$

elde edilir. Buna *Transversality şartı* denir. Bunun iktisadi anlamı şudur. Eğer, dönem sonunda sermaye pozitif ise ($k(T) > 0$) sermayenin gölge fiyatı sıfır ($\mu(T) = 0$) olmalıdır. Eğer, dönem sonunda sermayenin gölge fiyatı sıfırdan büyükse ($\mu(T) > 0$) birey dönem sonunda sermayesini sıfırlar ($k(T) = 0$).

Sonsuz planlama ufkunda ise eşitsizlik kısıtı

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [k(t)e^{-\bar{r}(T)T}] \geq 0$$

olur. Bu durumda transversality şartı (Kamihigashi et al. (2006); Michel

(1982)),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mu(t)k(t)] = 0$$

halini alır.

2.1 Current Value Hamiltonian

Optimizasyonu yapılacak ana fonksiyon aşağıdaki gibi olsun.

$$\int_0^T e^{-\rho t} u[k(t), c(t)] dt$$

$e^{-\rho t}$ iskonto faktörüdür. Hamilton fonksiyonunu oluşturalım.

$$H = e^{-\rho t} u(k, c) + \mu g(k, c, t)$$

Bu Hamilton fonksiyonundan $e^{-\rho t}$ ifadesini çıkarırsak current value Hamilton elde edilir. Bunun için Hamilton denkleminin her iki tarafını $e^{\rho t}$ çarpalım.

$$e^{\rho t} H = e^{\rho t} e^{-\rho t} u(k, c) + e^{\rho t} \mu g(k, c, t)$$

$\hat{H} = e^{\rho t} H$ ve $q = e^{\rho t} \mu$ olarak tanımlayalım. Bu durumda,⁶¹

$$\hat{H} = u(k, c) + qg(k, c, t)$$

olur. Birinci derece şartları, $\frac{\partial H}{\partial c(t)} = 0$ ve $\frac{\partial H}{\partial k(t)} + \dot{\mu}(t) = 0$, $\mu(T)k(T) = 0$ şeklindedir.

Burada $H = e^{-\rho t} \hat{H}$ değişimini yaparak çözelim.

1)

$$\frac{\partial H}{\partial c(t)} = \frac{\partial e^{-\rho t} \hat{H}}{\partial c(t)} = 0 \rightarrow \frac{\partial \hat{H}}{\partial c(t)} = 0$$

⁶¹ $q = q(t)$ ve $\mu = \mu(t)$

$\mu = qe^{-\rho t}$ olmak üzere zamana göre alınır, $\dot{\mu} = e^{-\rho t}[\dot{q} - \rho q]$ elde edilir. Bunu $\frac{\partial H}{\partial k(t)} + \dot{\mu}(t) = 0$ eşitliğinde yerine koyarsak,

$$\frac{\partial e^{-\rho t} \hat{H}}{k(t)} = e^{-\rho t}[\rho q - \dot{q}]$$

Bu ifade sadeleştirilirse,

2)

$$\frac{\partial \hat{H}}{k(t)} = \rho q - \dot{q}$$

elde edilir. Transversality şartında $\mu = qe^{-\rho t}$ yerine konulursa,

3)

$$\mu = qe^{-\rho T} k(T) = 0$$

olarak transversality şartı elde edilir. (Intriligator, 2002; Kirk, 2004; Van Tu, 1984; Tu, 2012; Takayama and Akira, 1985; Takayama, 1993; Lewis et al., 2012; Seierstad and Sydsaeter, 1986)