

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İL-CEBİRLERİNİN TL-FİLTRELERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Huriye Betül DOĞRU

EYLÜL 2023
TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İL-CEBİRLERİNİN TL-FİLTRELERİ

Huriye Betül DOĞRU
ORCID :

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 04/08/2023

Tezin Savunma Tarihi : 01/09/2023

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Şerife YILMAZ

ORCID :

İkinci Danışmanı : Asst. Prof. Hashem BORDBAR

Trabzon 2023

ÖNSÖZ

“IL-Cebirlerinin TL-filtreleri” isimli bu tez Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı’nda hazırlanmıştır.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan, her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm danışman hoca statüsünü hakkıyla yerine getiren, kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Şerife YILMAZ’a teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

Ayrıca yapıcı eleştirileri ve çok değerli destekleri ile tezime büyük katkıları bulunan ikinci tez danışmanım Sayın Asst. Prof. Hashem BORDBAR’ a bana yeni ufuklar açtığı için teşekkür ediyor, saygılarımı sunuyorum.

Bu günlere gelebilmemde katkısı olan tüm bölüm hocalarıma emekleri için teşekkür ediyorum.

Her anımda yanımda olan ve desteklerini benden hiç esirgemeyen sevgili aileme, biricik Annem Fatma DOĞRU’ ya ve amcam Mustafa DOĞRU’ ya bu süreçte hem benimle ilgilendikleri hem de motivasyonumu hiç düşürmemem için yaptıkları desteklerden dolayı teşekkür eder, minnettarlığımı sunarım.

Son olarak, TÜBİTAK BİDEB’ e ‘2210 A Genel Yurtiçi Yüksek Lisans Burs Programı’ ile bana maddi destek sağladıkları için teşekkür ederim.

Bu tez çalışmasının bundan sonra bu alanda yapılacak olan tüm çalışmalara katkı sağlamasını temenni ederim.

Huriye Betül DOĞRU

Trabzon 2023

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “İL-CEBİRLERİNİN TL-FİLTRELERİ” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Şerife YILMAZ ve ikinci danışmanım Asst. Prof. Hashem BORDBAR sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 01/09/2023

Huriye Betül DOĞRU

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	IX
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Tam Kafes ve T-norm	2
1.3. BL-Cebiri.....	5
1.4. IL-Cebiri.....	7
1.5. IL-Cebirlerinin Filtreleri.....	17
1.6. IL-Cebirlerinin Bulanık Filtreleri.....	24
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR	30
2.1. IL-Cebirlerinin L-Filtre ve TL-Filtreleri	30
3. TARTIŞMA	38
4. SONUÇLAR.....	39
5. ÖNERİLER.....	40
6. KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

IL-CEBİRLERİNİN TL-FİLTRELERİ

Huriye Betül DOĞRU

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Şerife YILMAZ

2023, 41 Sayfa

Bu çalışmanın amacı, Islam, Sanyal ve Sen tarafından ortaya konulan IL-cebirlerindeki bulanık filtre kavramının bazı genellemelerini sunmak ve bulanık filtrelerle ilgili elde edilmiş sonuçlardan hangilerinin bu genellemelerde de sağlandığını araştırmaktır.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ilk olarak BL-cebirlerinde filtrelerle ilgili temel bilgilere yer verilmiştir. Aynı bölümün devamında, çalışmanın ikinci bölümüne temel teşkil etmesi amacıyla IL-cebirleri, IL-cebirlerinde filtreler ve bulanık filtreler ile ilgili bazı tanım ve teoremler sunulmuştur. İkinci bölümde ise, IL-cebirlerinde bulanık filtre kavramının iki farklı genellemesi olarak L-filtre ve TL-filtre kavramları tanıtılarak bunların bazı cebirsel özellikleri araştırılmıştır. Bu filtreler arasındaki ilişkiyi belirleyen bazı teoremler ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: IL-cebiri, TL-filtre, L-filtre

SUMMARY

Master Thesis

TL-FILTERS OF IL-ALGEBRAS

Huriye Betül DOĞRU

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Şerife YILMAZ
2023, 41 Pages

The aim of this study is to present some generalizations of the concept of fuzzy filter which is introduced by Islam, Sanyal, and Sen in IL-algebras and to investigate which of the results obtained about fuzzy filters are also provided in these generalizations.

This study consists of two parts. In the first part, basic information about filters in BL-algebras is given. In the rest of the same section, some definitions and theorems about IL-algebras, filters of IL-algebras and fuzzy filters of IL-algebras are presented in order to provide a basis for the second part of the study. In the second part, the concepts of L-filter and TL-filter as two different generalizations of the concept of fuzzy filter in IL-algebras are introduced and some algebraic properties of them are investigated. Some theorems determining the relationship between these filters are proved.

Keywords: IL-filter, TL-filter, L-filter

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. IL-cebiri, FL _{ew} -cebiri, MTL-cebiri, BL-cebiri ve MV-cebiri	11
Şekil 2. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı	12
Şekil 3. $\{\perp, x, y, z, t, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı	13
Şekil 4. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı	14
Şekil 5. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı	15
Şekil 6. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı	16
Şekil 7. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı	30
Şekil 8. $\{0, t_1, t_2, t_3, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı	31
Şekil 9. $\{0, t_1, t_2, t_3, 1\}$ kafesinin Hasse diyagramı	34
Şekil 10. $\{0, t_1, t_2, t_3, t_4, 1\}$ kafesinin Hasse diyagramı	36

TABLolar DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. $\{0, u, v, \mathbf{1}\}$ kümesi üzerinde $\odot$ işlemi.....	6
Tablo 2. $\{0, u, v, \mathbf{1}\}$ kümesi üzerinde $\rightarrow$ işlemi.....	6
Tablo 3. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi	12
Tablo 4. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $\rightarrow$ işlemi.....	12
Tablo 5. $\{\perp, x, y, z, t, e, \top\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi	13
Tablo 6. $\{\perp, x, y, z, t, e, \top\}$ kümesi üzerinde $\rightarrow$ işlemi.....	13
Tablo 7. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi	14
Tablo 8. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $\rightarrow$ işlemi.....	14
Tablo 9. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi	15
Tablo 10. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $\rightarrow$ işlemi.....	15
Tablo 11. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi	16
Tablo 12. $\{\perp, x, y, d, e, \top\}$ kümesi üzerinde $\rightarrow$ işlemi.	16
Tablo 13. $\{\perp, z, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi	30
Tablo 14. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $\rightarrow$ işlemi.....	31

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

χ_B	: B'nin karakteristik fonksiyonu
T_W	: En küçük t-norm
T_M	: En büyük t-norm
T_P	: <i>Product</i> t-norm
T_D	: <i>Lukasiewicz</i> t-norm
ν_t	: $\nu_t = \{a \in I : \nu(a) \geq t\}$, ν 'nin t-seviye kümesi
L^X	: X 'in L -alt kümelerinin kümesi
$[0,1]^X$	: X 'in bulanık alt kümelerinin kümesi
I/F	: I 'nın bütün kongrüans bağıntılarının kümesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

BL-cebirleri, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde sol-sürekliliği üçgensel normlar ve bu üçgensel normların residuation işlemleri tarafından oluşturulan cebirsel yapılar olarak, Hajek tarafından 1998 yılında tanıtılmıştır. MV-cebirleri, Gödel cebirleri BL-cebirlerinin önemli sınıflarından bazılarıdır. Filtre teorisi, bu cebirsel yapıları ve bunlarla ilgili mantıkları çalışırken önemli bir rol oynar (Rasiowa, 1974). Bu cebirsel yapılardaki çeşitli filtreler, bu cebirsel yapılarla ilgili mantıklarda çeşitli ispatlanabilir formüller sınıfına karşılık gelir. Hajek BL-cebirinde filtre kavramını tanıttıktan sonra birçok yazar BL-cebirlerinde farklı filtre türlerini çalışmışlardır. Örneğin, Havshki (2006) BL-cebirlerinde implikatif filtre, pozitif implikatif filtre, fantastik filtre gibi çeşitli filtre modellerini tanıtarak bunların BL-cebirlerindeki diğer filtrelerle ilişkisini incelemiştir. Liu ve Li (2005) BL-cebirlerinde bulanık filtre, bulanık asal filtre nosyonlarını tanıtarak bunların bazı özelliklerini elde etmişlerdir. Daha sonra Khorami ve Saeid BL-cebirlerinden bulanık filtre kavramının bir genelleştirmesi olarak TL-filtre kavramını tanıtmışlar ve TL-filtrelerin bazı temel özelliklerini araştırmışlardır. Ayrıca L-alt kümeler tarafından üretilen TL-filtreleri hesaplamak için yöntem sunmuşlardır. Dikkat edilmelidir ki, $L = [0,1]$ ve $T = \wedge$ olarak alındığında, BL-cebirlerinde TL-filtre ve bulanık filtre kavramları çıkarılır.

BL-cebirlerinin bir genellemesi olan IL-cebirleri, sezgisel doğrusal mantığın cebirsel karşılığı olarak Troelstra tarafından 1992 yılında ortaya konulmuştur. Islam, Sanyal ve Sen, IL-cebiri kavramı için Troelstra'nın ortaya koyduğundan farklı bir tanım sunarak IL-cebirlerinde filtre ve bulanık filtre kavramlarını vermişlerdir. Bu filtrelerin çeşitli özelliklerini çalışmışlardır. Ayrıca üç tür bulanık asal filtre kavramı sunarak bunları birbirleriyle ilişkilendiren bazı sonuçlar elde etmişlerdir. Bu çalışmanın amacı, Islam, Sanyal ve Sen tarafından literatüre kazandırılan IL-cebirlerindeki bulanık filtre kavramının bazı genellemelerini sunmak ve bulanık filtrelerle ilgili elde edilmiş sonuçlardan hangilerinin bu genellemelerde de sağlandığını araştırmaktır.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ilk olarak BL-cebirlerinde filtrelerle ilgili temel bilgilere yer verilmiştir. Aynı bölümün devamında, çalışmanın ikinci bölümüne temel teşkil etmesi amacıyla IL-cebirleri, IL-cebirlerinde filtreler ve bulanık

filtreler ile ilgili bazı tanım ve teoremler sunulmuştur. İkinci bölümde ise, IL-cebirlerinde bulanık filtre kavramının iki farklı genellemesi olarak L-filtre ve TL-filtre kavramları tanıtılarak bunların bazı cebirsel özellikleri araştırılmıştır. Bu filtreler arasındaki ilişkiyi belirleyen bazı teoremler ispatlanmıştır.

1.2. Tam Kafes ve T-norm

Tanım 1.2.1. (Birkhoff, 1940) $(L, \leq)$ boştan farklı bir L kümesi üzerinde bir bağıntı olsun, $(L, \leq)$ ikilisine bir kısmi sıralı küme denir : $\Leftrightarrow$ Aşağıdaki şartlar sağlanır:

1. Her $x \in L$ için $x \leq x$ dir. (Yansıma)
2. Her $x, y \in L$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise, $x = y$ dir. (Ters simetri)
3. Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ dir. (Geçişme)

Tanım 1.2.2. (Birkhoff, 1940) $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun.

1. Eğer bir $x \in L$ elemanı her $a \in L$ için $x \leq a$ olacak şekilde ise x elemanına L kümesinin en küçük elemanı denir.
2. Eğer bir $y \in L$ elemanı her $a \in L$ için $a \leq y$ olacak şekilde ise y elemanına L kümesinin en büyük elemanı denir.

En küçük ve en büyük elemanlar sırasıyla, 0 ve 1 ile gösterilir.

Tanım 1.2.3. (Birkhoff, 1940) $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $S \subseteq L$ olsun.

1. S kümesindeki her elemandan büyük eşit elemanların kümesi $\bar{S}$ ile gösterilir. $\bar{S}$ kümesinin en küçük elemanı, S kümesinin en küçük üst sınır (veya supremumu) olarak adlandırılır ve $\sup S$ (veya $\vee S$) ile gösterilir.
2. S kümesindeki her elemandan küçük eşit elemanların kümesi $\underline{S}$ ile gösterilir. $\underline{S}$ kümesinin en büyük elemanı, S kümesinin en büyük alt sınırı (veya infimumu) olarak adlandırılır ve $\inf S$ (veya $\wedge S$) ile gösterilir.

Tanım 1.2.4. (Birkhoff, 1940) $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Herhangi x, y eleman çifti için sırasıyla, $x \wedge y = \wedge \{x, y\}$ ve $x \vee y = \vee \{x, y\}$ ile gösterilen supremum ve infimum değerleri mevcut ise $(L, \leq)$ ikilisine bir kafes denir. Herhangi bir $S \subseteq L$ için $\wedge S$ ve $\vee S$ mevcut ise L kafesine bir tam kafes denir. Ayrıca, bir L kafesi en küçük eleman ve en büyük elemana sahip ise L kafesine sınırlı kafes denir. L kafesinde en küçük eleman 0 ve en büyük eleman 1 ile gösterilir. Herhangi $a, b \in L$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ ise L 'ye zincirdir denir.

Açıkça, bir tam kafes, sırasıyla, en küçük elemana ve en büyük elemana sahiptir.

Tanım 1.2.5. (Goguen, 1967; Zadeh, 1965) X herhangi boştan farklı bir küme ve L bir kafes olsun. X 'in L -alt kümesi, $\nu : X \rightarrow L$ olan bir fonksiyondur. X 'in tüm L -alt kümelerine X 'in L -güç kümesi denir ve L^X ile gösterilir. Özellikle L yerine $[0,1]$ kafesini alırsak, yani $\nu : X \rightarrow [0,1]$ olursa, ν 'ye X 'in L -alt kümesi yerine X 'in bulanık alt kümesi denir. X 'in tüm bulanık alt kümelerine X 'in bulanık güç kümesi denir ve $[0,1]^X$ ile gösterilir. $X \neq \emptyset$ ve $\nu \in L^X$ olsun. $t \in L$ için $\nu_t = \{a \in X : \nu(a) \geq t\}$ kümesine ν 'nün t -seviye kümesi denir.

Tanım 1.2.6. (Feyzioğlu, 1990) A , boştan farklı bir küme ve $B \subseteq A$ olsun. Herhangi bir $a \in A$ için A 'dan $\{0,1\}$ kümesine giden χ_B fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\chi_B(a) = \begin{cases} 1, & a \in B, \\ 0, & a \notin B. \end{cases} \quad (1)$$

(1) fonksiyonuna B 'nin karakteristik fonksiyonu denir.

Tanım 1.2.7. (De Baets & Mesiar, 1999) L bir tam kafes olsun. Bir üçgensel norm (t -norm) L üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir ikili işlemdir (yani $T: L \times L \rightarrow L$):

1. T birleşmelidir, yani her $a, b, c \in L$ için,

$$T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c)) \quad (2)$$

dir.

2. T simetriktir, yani her $a, b \in L$ için,

$$T(a, b) = T(b, a) \quad (3)$$

dir.

3. T monotondur, yani her $a, b, c \in L$ için, eğer $a \leq b$ ise,

$$T(a, c) \leq T(b, c) \quad (4)$$

dir.

4. T sınır şartını sağlar, yani $1 \in L$ ve her $a \in L$ için,

$$T(1, a) = a \quad (5)$$

dır. (3) ve (4)'den dolayı L üzerinde herhangi bir T t-normu için,

$$T(a, b) \leq a \text{ ve } T(a, b) \leq b \text{ dir.} \quad (6)$$

Tanım 1.2.8. (De Baets & Mesiar, 1999) T_1 ve T_2 , L üzerinde iki t-norm olsun. $\Leftrightarrow$ Herhangi $a, b \in L$ için $T_1(a, b) \leq T_2(a, b)$ dir. Bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

Aşağıda bir tam kafes üzerinde tanımlı, en büyük ve en küçük t-normlar verilmektedir.

Uyarı 1.2.9. (De Baets & Mesiar, 1999) L bir tam kafes olsun. En küçük t-norm

$$T_W(a, b) = \begin{cases} b, & a = 1 \\ a, & b = 1 \\ 0, & \text{aksi takdirde.} \end{cases} \quad (7)$$

ile tanımlı T_W dir. Yani L üzerindeki keyfi bir T t-normu için

$$T_W \leq T \quad (8)$$

dir. Ayrıca L üzerinde, $T_M(a, b) = a \wedge b$ ile tanımlı T_M en büyük t-normdur. Sonuç olarak, L üzerindeki herhangi bir t-norm T için

$$T_W \leq T \leq T_M \quad (9)$$

dir. Ek olarak, $[0,1]$ kafesi üzerinde $a, b \in [0,1]$ için

$$T_P(a, b) = a \cdot b \text{ ve} \quad (10)$$

$$T_L(a, b) = \max\{a + b - 1, 0\} \quad (11)$$

ile tanımlanan t-normlar sırasıyla, *product* ve *Lukasiewicz t-norm* olarak adlandırılır (Klement vd., 2013). Bu t-normlar için

$$T_L \leq T_P \quad (12)$$

dir.

1.3. BL-Cebiri

Tanım 1.3.1. (Hajek, 1998) Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, $A = (A, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ cebirine bir BL-cebiri denir. $\Leftrightarrow$

1. $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ sınırlı kafestir,
2. $(A, \odot, 1)$ birim elemanı **1** olan değişmeli monoiddir,
3. $\forall a, b \in A$ için $b \geq a \odot c \Leftrightarrow a \rightarrow b \geq c$ dir,
4. $\forall a, b \in A$ için $a \odot (a \rightarrow b) = a \wedge b$ dir,
5. $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = 1$ dir.

Örnek 1.3.2. (Khorami & Saeid, 2012) $[0,1]$ kafesi üzerinde ki $\odot$ ve $\rightarrow$ ikili işlemleri, $u, v \in [0,1]$ için $u \odot v = \min\{u, v\}$, $u \rightarrow v = \begin{cases} 1, & u \leq v \text{ ise,} \\ v, & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$ olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $([0,1], \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ BL-cebiridir.

Teorem 1.3.3. (Hajek, 1998) A bir BL-cebiri olsun. Bu takdirde her $a, b, c \in A$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. $a \rightarrow b = 1 \Leftrightarrow a \leq b$ dir.
2. $b \rightarrow (a \odot b) \geq a$ dir.
3. $a \wedge b \geq a \odot b$ dir.
4. $a \rightarrow c \geq (a \rightarrow b) \odot (b \rightarrow c)$ dir.
5. $b \geq a$ ise $a \rightarrow c \leq b \rightarrow c$ ve $c \rightarrow b \geq c \rightarrow a$ dir.
6. $(c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a) \geq b \rightarrow a$ dir.
7. $(b \rightarrow c) \rightarrow (b \rightarrow c) \geq a \rightarrow b$ dir.
8. $(c \odot a \rightarrow c \odot b) \geq a \rightarrow b$ dir.

Tanım 1.3.4. (Hajek, 1998) A bir BL-cebiri ve F , A 'nın boştan farklı alt kümesi olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan F 'ye A 'nın bir filtresi denir $\Leftrightarrow$

1. $a \in F, b \in A$ ve $b \geq a$ ise $b \in F$ dir,

2. Her $a, b \in F$ için $a \odot b \in F$ dir.

$\{1\}$ ve A kümelerinin, A 'nın filtreleri olduğu açıktır.

Tanım 2.3.5. (Khorami & Saeid, 2012) L bir tam kafes, T L üzerinde herhangi bir t-norm, A bir BL-cebiri ve $\psi \in L^A$ olsun. Her $a, b \in A$ için aşağıdaki koşulları sağlayan ψ 'ye A 'nın bir TL-filtresi denir.

1. $a \geq b$ ise $\psi(a) \geq \psi(b)$,
2. $\psi(a \odot b) \geq T(\psi(a), \psi(b))$,
3. $\psi(1) = 1$ dir.

Örnek 1.3.6. (Khorami & Saeid, 2012) $A = \{0, u, v, 1\}$ ve $0 < u < v < 1$ olsun. A üzerinde " $\odot$ ", ve " $\rightarrow$ " işlemleri, sırasıyla, Tablo 1 ve Tablo 2' deki gibi olsun.

Tablo 1. $\{0, u, v, 1\}$ kümesi üzerinde $\odot$ işlemi

$\odot$	0	u	v	1
0	0	0	0	0
u	0	0	u	u
v	0	u	v	v
1	0	u	v	1

Tablo 2. $\{0, u, v, 1\}$ kümesi üzerinde $\rightarrow$ işlemi

$\rightarrow$	0	u	v	1
0	1	1	1	1
u	u	1	1	1
v	0	u	1	1
1	0	u	v	1

$(A, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ bir BL-cebiridir. $\psi \in L^A$ olmak üzere

- a) $\psi(1) = 1, \psi(v) = t_1, \psi(0) = \psi(u) = t_2$ ve $(0 < t_2 < t_1 < 1)$ olduğunu düşünelim. Eğer $T = T_M$ ise, ψ , A 'nın bir TL-filtresidir.
- b) $\psi(0) = 2/3, \psi(u) = \psi(v) = 4/5$ ve $\psi(1) = 1$ olduğunu düşünelim. $T = T_p$ ise ψ , A 'nın bir TL-filtresidir. Burada $T = T_M$ olursa, ψ , A 'nın bir TL-filtresi olmaz. Çünkü $\psi(u \odot u) = \psi(0) = 2/3 \not\geq T(\psi(u), \psi(u)) = T(4/5, 4/5) = 4/5$ dir.

Önerme 1.3.7. (Khorami & Saeid, 2012) A bir BL-cebiri ve $B \subseteq A$ olsun. B , A 'nın filtresidir $\Leftrightarrow B$ 'nin karakteristik fonksiyonu olan χ_B , A 'nın bir TL-filtresidir. Dahası $A_\psi := \{x \in A: \psi(x) = 1\}$ kümesi A 'nın bir filtresidir.

Teorem 1.3.8. (Khorami & Saeid, 2012) $\psi \in L^A$ olsun. ψ , A 'nın TL-filtresidir. $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in A$ için aşağıdaki şartları sağlanır.

1. $\psi(1) = 1$,
2. $T(\psi(a), \psi(a \rightarrow b)) \leq \psi(b)$ dir.

Teorem 1.3.9. (Khorami & Saeid, 2012) $\psi \in L^A$ olsun. ψ A 'nın bir TL-filtresidir. $\Leftrightarrow$ Her $a, b, c \in A$ için $a \rightarrow (b \rightarrow c) = 1$ ise, $T(\psi(a), \psi(b)) \leq \psi(c)$ ve $\psi(1) = 1$ dir.

Sonuç 1.3.10. (Khorami & Saeid, 2012) $\psi \in L^A$ olsun. ψ A 'nın bir TL-filtresidir $\Leftrightarrow \forall a, b, c \in A$ için $c \geq a \odot b$ ise, $\psi(c) \geq T(\psi(a), \psi(b))$ dir.

1.4. IL-Cebiri

Tanım 1.4.1. (Troelstra, 1992) $I = (I, \vee, \wedge, \perp, \rightarrow, *, e)$ cebirine bir IL-cebiri denir. $\Leftrightarrow$ Her $a, b, c \in I$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. $(I, \vee, \wedge, \perp)$ en küçük elemanı $\perp$ olan kafestir,
2. $(I, *, e)$ birim elemanı e olan bir monoiddir,
3. Eğer $a \geq a'$ ve $b \geq b'$ ise, $a * b \geq a' * b'$ ve $a \rightarrow b' \geq a' \rightarrow b$ dir.
4. $b \rightarrow c \geq a \Leftrightarrow c \geq a * b$ dir.

Lemma 1.4.2. I bir IL-cebiri olsun. $\forall a, b, c \in I$ için aşağıdakiler sağlanır.

1. $a \geq b$ ise $c * a \geq c * b$ dir.
2. $a \geq b$ ise $c \rightarrow a \geq c \rightarrow b$ ve $b \rightarrow c \geq a \rightarrow c$ dir

İspat.

1. Kabul edelim ki herhangi $a, b \in I$ için $a \geq b$ olsun. $a * c \geq a * c$ olduğunu biliyoruz. Buradan Tanım 1.4.1 (4)'ü kullanırsak $c \rightarrow (a * c) \geq a$ olur ve kabulden $c \rightarrow (a * c) \geq b$ olur. Son olarak Tanım 1.4.1 (4) kullanarak $a * c \geq b * c$ olduğunu elde ederiz.
2. Kabul edelim ki keyfi iki eleman $a, b \in I$ için $a \geq b$ olsun. Buradan (i)'yi kullanarak $a * (b \rightarrow c) \geq b * (b \rightarrow c)$ olduğunu elde ederiz. Dahası $b \rightarrow c \geq b \rightarrow c$ olduğundan, Tanım 1.4.1 (4)'ü kullanarak $c \geq a * (a \rightarrow c)$ olduğunu elde ederiz. Dolayısıyla $c \geq a * (a \rightarrow c) \geq b * (a \rightarrow c)$ olur ve Tanım 1.4.1 (4)'ü

kullanarak $b \rightarrow c \geq a \rightarrow c$ olduğunu elde ederiz. Şimdi $c \rightarrow a \geq c \rightarrow b$ olduğunu gösterelim. $c \rightarrow b \geq c \rightarrow b$ olduğunu biliyoruz Tanım 1.4.1 (4)'den $b \geq c * (c \rightarrow b)$ olur ve $a \geq b$ olduğundan da $a \geq c * (c \rightarrow b)$ olur. Son olarak, Tanım 1.4.1 (4)'den $c \rightarrow a \geq c \rightarrow b$ olduğunu elde ederiz.

Tanım 1.4.3. (Islam vd., 2020) I boştan farklı bir küme olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(I, \vee, \wedge, \perp, \rightarrow, *, e)$ cebirine bir IL-cebiri denir.

1. $(I, \vee, \wedge, \perp)$, en küçük elemanı $\perp$ olan bir kafestir,
2. $(I, *, e)$ birim elemanı e olan değişmeli bir monoiddir,
3. Herhangi $a, b, c \in I$ için $b \rightarrow c \geq a \Leftrightarrow c \geq a * b$ dir.

Tanım 1.4.1 de verilen Troelstra'nın yaptığı IL-cebiri tanımı ile Islam, Sanyal, ve Sen'in yaptığı Tanım 1.4.3 de verilen IL-cebiri tanımı aslında denk tanımlardır. Tanım 1.4.1'deki 3. şartı diğer şartlardan elde edebileceğimiz için bu şartı yazmak gereksizdir. Dolayısıyla iki tanım aslında aynı tanım olmuş olur. Aşağıdaki teoremin 8. şartı, bu şartın Tanım 1.4.3'deki şartlar ile ispatlanabileceğini kanıtlanmıştır. Bundan sonra aksi belirtilmedikçe IL-cebiri tanımı olarak Tanım 1.4.3 kullanılacaktır.

Teorem 1.4.4 (Islam vd., 2022) I bir IL-cebiri olsun. Bu takdirde her $a, b, u, v \in I$ için aşağıdakiler sağlanır.

1. $a * (b \vee u) = (a * b) \vee (a * u)$ dir.
2. $\perp \rightarrow \perp$, I 'nin en büyük elemanıdır ve $\top$ olarak yazılır.
3. $\top * \top = \top$ dir.
4. Eğer $e \geq a$ ve $e \geq b$ ise, $a \wedge b \geq a * b$ dir.
5. Eğer $a \geq e$ ve $b \geq e$ ise, $a * b \geq a \vee b$ dir.
6. $a \rightarrow u \geq (b \rightarrow u) * (a \rightarrow b)$ dir.
7. $e \rightarrow a = a$ dir.
8. Eğer $v \geq a$, $u \geq b$ ise, $v * u \geq a * b$ ve $a \rightarrow u \geq v \rightarrow b$ dir.
9. $(a * b) \rightarrow u = a \rightarrow (b \rightarrow u)$ dur.
10. $b \geq a * (a \rightarrow b)$ dir.
11. $e \leq a \rightarrow a$ dir.
12. $u \rightarrow (a \wedge b) = (u \rightarrow a) \wedge (u \rightarrow b)$ dir.
13. $(a \vee b) \rightarrow u = (a \rightarrow u) \wedge (b \rightarrow u)$ dur.

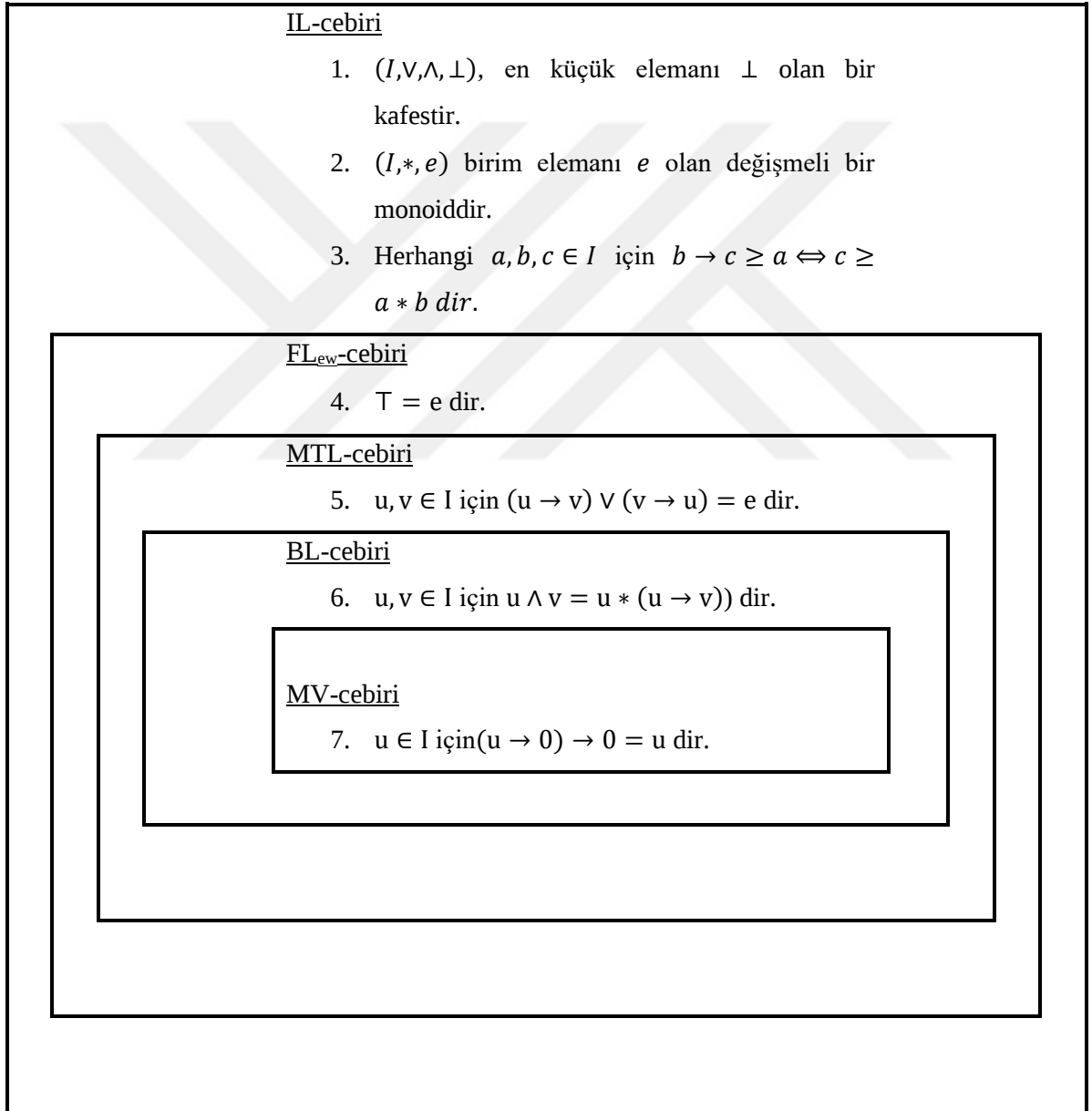
İspat. $a, b, u, v \in I$ keyfi olsun.

1. $b \vee u \geq b$ olduğunu biliyoruz. Lemma 1.4.2 (i)'den $a * (b \vee u) \geq a * b$ olur. Benzer şekilde $a * (b \vee u) \geq a * u$ olur. Bu iki eşitsizliği kullanarak $a * (b \vee u) \geq (a * b) \vee (a * u)$ olduğunu elde ederiz. Diğer taraftan $(a * u) \vee (a * b) \geq a * u$ olduğunu biliyoruz. Buradan Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanarak $a \rightarrow (b * u) \vee (u * b) \geq u$ olur. Benzer şekilde $a \rightarrow (a * u) \vee (u * b) \geq b$ olur. Bu iki eşitsizlikten $a \rightarrow (a * u) \vee (a * b) \geq b \vee u$ olur ve Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanırsak $(a * u) \vee (a * b) \geq a * (b \vee u)$ olduğunu elde ederiz. Sonuç olarak $a * (b \vee u) \geq (a * b) \vee (a * u)$ ve $(a * u) \vee (a * b) \geq a * (b \vee u)$ olduğundan $a * (b \vee u) = (a * b) \vee (a * u)$ olur.
2. Kabul edelim ki $s \in I$ olsun. $\perp$, I 'nin en küçük elemanı olduğu için $s \rightarrow \perp \geq \perp$ dir ve Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanarak $\perp \geq s * \perp$ olduğunu elde ederiz. Burada tekrar Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanırsak $\perp \rightarrow \perp \geq s$ olduğunu elde ederiz.
3. $\top \vee e = \top$ olduğundan $\top * \top = \top * (\top \vee e)$ olur ve (1)'den $\top * \top = (\top * \top) \vee (\top * e) = (\top * \top) \vee \top = \top$ olduğunu elde ederiz.
4. Kabul edelim ki $e \geq a$ ve $e \geq b$ olsun. Lemma 1.4.2 (i)'den $b \geq a * b$ ve $a \geq a * b$ olur. Bu iki eşitsizlikten $a \wedge b \geq a * b$ olduğunu elde ederiz.
5. Kabul edelim ki $a \geq e$ ve $b \geq e$ olsun. Lemma 1.4.2 (i)'den $a * b \geq b$ ve $a * b \geq a$ olur. Bu iki eşitsizlikten $a * b \geq a \vee b$ olduğunu elde ederiz.
6. $a \rightarrow b \geq a \rightarrow b$ olduğunu biliyoruz. Tanım 1.4.3 (3)'den $b \geq a * (a \rightarrow b)$ dir. Lemma 1.4.2 (i)'den $(b \rightarrow u) * b \geq (b \rightarrow u) * a * (a \rightarrow b)$ olur. Dahası $u \geq b * (b \rightarrow u)$ olduğundan da $u \geq (b \rightarrow u) * a * (a \rightarrow b)$ olur. Son olarak Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanarak $a \rightarrow u \geq (b \rightarrow u) * (a \rightarrow b)$ olduğunu elde ederiz.
7. $a \geq a * e$ olduğunu biliyoruz. Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanarak $e \rightarrow a \geq a$ olduğunu elde ederiz. Diğer taraftan $e \rightarrow a \geq e \rightarrow a$ olduğunu biliyoruz ve Tanım 1.4.3 (3)'den $a \geq e * (e \rightarrow a)$ olur. e birim eleman olduğundan $a \geq e \rightarrow a$ olduğu açıktır. Sonuç olarak $e \rightarrow a \geq a$ ve $a \geq e \rightarrow a$ olduğundan $e \rightarrow a = a$ olur.
8. Kabul edelim ki $v \geq a$ ve $u \geq b$ olsun. İlk önce $u * v \geq a * b$ olduğunu gösterelim. Burada $v \geq a$ ve $u \geq b$ olduğundan Lemma 1.4.2 (i)'yi kullanırsak $u * v \geq u * a$ ve $u * a \geq a * b$ elde ederiz. Bu iki eşitsizliği birlikte kullanarak $u * v \geq a * b$ olduğunu elde ederiz. Şimdi $a \rightarrow u \leq a \rightarrow v$ olduğunu gösterelim. Lemma 1.4.2 (ii)'yi kullanarak $u \geq b$ ve $v \geq a$ olduğundan, sırasıyla, $a \rightarrow u \geq a \rightarrow b$ ve $a \rightarrow b \geq v \rightarrow b$ olur. Bu iki eşitsizlikten $a \rightarrow u \geq v \rightarrow b$ dir.

9. $a \rightarrow (b \rightarrow u) \geq a \rightarrow (b \rightarrow u)$ olduğundan, Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanırsak $b \rightarrow u \geq a * (a \rightarrow (b \rightarrow u))$ olur ve tekrar Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanırsak $u \geq (a * b) * (a \rightarrow (b \rightarrow u))$ olur. Buradan tekrardan Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanarak $(a * b) \rightarrow u \geq a \rightarrow (b \rightarrow u)$ olduğunu elde ederiz. Diğer taraftan $(a * b) \rightarrow u \geq (a * b) \rightarrow u$ olduğundan Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanırsak $u \geq a * b * ((a * b) \rightarrow u)$ olur ve tekrar Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanırsak $b \rightarrow u \geq a * ((a * b) \rightarrow u)$ olur. Burada tekrardan Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanarak $a \rightarrow (b \rightarrow u) \geq (a * b) \rightarrow u$ olduğunu elde ederiz.
10. Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanarak $a \rightarrow b \geq a \rightarrow b$ olduğundan $b \geq a * (a \rightarrow b)$ dir.
11. Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanarak $a \geq e * a$ olduğundan $a \rightarrow a \geq e$ dir.
12. $a \geq a \wedge b$ olduğunu biliyoruz. Lemma 1.4.2 (ii)'den $u \rightarrow a \geq u \rightarrow (a \wedge b)$ olur. Benzer şekilde $u \rightarrow b \geq u \rightarrow (a \wedge b)$ olur. Bu iki eşitsizliği birleştirirsek $(u \rightarrow a) \wedge (u \rightarrow b) \geq u \rightarrow (a \wedge b)$ olduğunu elde ederiz. Diğer taraftan $u \rightarrow a \geq (u \rightarrow a) \wedge (u \rightarrow b)$ olduğundan Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanarak $a \geq ((u \rightarrow a) \wedge (u \rightarrow b)) * u$ olduğunu elde ederiz. Benzer şekilde $b \geq ((u \rightarrow a) \wedge (u \rightarrow b)) * u$ olur. Bu iki eşitsizliği birleştirirsek $a \wedge b \geq ((u \rightarrow a) \wedge (u \rightarrow b)) * u$ olur. Son olarak Tanım 1.4.3 (3)'den $u \rightarrow (a \wedge b) \geq (u \rightarrow a) \wedge (u \rightarrow b)$ olduğunu elde ederiz. Sonuç olarak $(u \rightarrow a) \wedge (u \rightarrow b) \geq u \rightarrow (a \wedge b)$ ve $u \rightarrow (a \wedge b) \geq (u \rightarrow a) \wedge (u \rightarrow b)$ olduğundan $(u \rightarrow a) \wedge (u \rightarrow b) = u \rightarrow (a \wedge b)$ dir.
13. $a \vee b \geq b$ olduğunu biliyoruz. Lemma 1.4.2 (ii)'den $b \rightarrow u \geq (a \vee b) \rightarrow u$ olur ve benzer şekilde $a \rightarrow u \geq (a \vee b) \rightarrow u$ olur. Bu iki eşitsizliği birleştirirsek $(a \rightarrow u) \wedge (b \rightarrow u) \geq (a \vee b) \rightarrow u$ olur. Diğer taraftan Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanırsak $a \rightarrow u \geq (a \rightarrow u) \wedge (b \rightarrow u)$ olduğundan $u \geq (a \rightarrow u) \wedge (b \rightarrow u) * a$ olur. Benzer şekilde $u \geq (a \rightarrow u) \wedge (b \rightarrow u) * b$ olur. Bu iki eşitsizlikten $u \geq ((a \rightarrow u) \wedge (b \rightarrow u) * a) \vee ((a \rightarrow u) \wedge (b \rightarrow u) * b)$ olur. (1) den $u \geq ((a \rightarrow u) \wedge (b \rightarrow u)) * (a \vee b)$ olur ve Tanım 1.4.3 (3)'den $(a \vee b) \rightarrow u \geq (a \rightarrow u) \wedge (b \rightarrow u)$ dir.

Uyarı 1.4.5. (Islam vd., 2022) Bir IL-cebirinde en büyük elemanı $*$ işleminin birim elemanı olan e olursa (yani $\mathbf{1} = e$ olursa) bu IL-cebirine FL_{ew} -cebiri denir. Bir FL_{ew} -cebiri, herhangi $u, v \in I$ için pre-lineer (yani $(u \rightarrow v) \vee (v \rightarrow u) = e$) özelliğini sağlıyor ise bu FL_{ew} -cebirine, MTL-cebiri denir. Bir MTL-cebiri, bölünebilirliğin (yani herhangi $u, v \in I$ için $u \wedge v = u * (u \rightarrow v)$) özelliğini sağlıyor ise bu MTL-cebirine, BL-cebiri denir. Bir BL-cebiri, herhangi bir

$u \in I$ için $(u \rightarrow 0) \rightarrow 0 = u$ özelliğini sağlıyor ise bu BL-cebirine, MV-cebiri denir. Bu tanımlardan da görüldüğü üzere bir IL cebiri, bir FL_{ew} -cebirinden, bir FL_{ew} -cebiri, bir MTL-cebirinden, bir MTL-cebiri, bir BL-cebirinden ve bir BL-cebiri, bir MV-cebirinden daha geniş bir yapıdır. Buradan bir IL-cebirinin, FL_{ew} -cebiri, MTL-cebiri, BL-cebiri ve MV-cebirinden daha geniş yapı olduğu anlaşılmaktadır. IL-cebiri, FL_{ew} -cebiri, MTL-cebiri, BL-cebiri ve MV-cebiri tanımları aralarındaki ilişkiler aşağıdaki Şekil 1 de verilmiştir.



Şekil 1. IL-cebiri, FL_{ew} -cebiri, MTL-cebiri, BL-cebiri ve MV-cebiri

Önek 1.4.6. (Islam vd., 2022) $I = \{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı, " $*$ " ve " $\rightarrow$ " ikili işlemleri sırasıyla, Şekil 2, Tablo 3 ve Tablo 4 deki gibi verilsin.



Şekil 2. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı

Tablo 3. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi

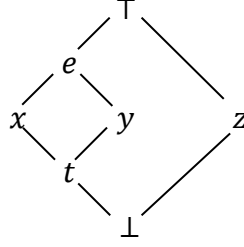
$*$	$\perp$	x	y	z	e	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
x	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	x	$\top$
y	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	y	$\top$
z	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	z	$\top$
e	$\perp$	x	y	z	e	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Tablo 4. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $\rightarrow$ işlemi

$\rightarrow$	$\perp$	x	y	z	e	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
x	$\perp$	e	e	e	$\perp$	$\top$
y	$\perp$	$\perp$	e	e	$\perp$	$\top$
z	$\perp$	$\perp$	$\perp$	e	$\perp$	$\top$
e	$\perp$	x	y	z	e	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

Buna göre I bir IL-cebiridir.

Örnek 1.4.7. (Islam vd., 2022) $I = \{\perp, x, y, z, t, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı, " $*$ " ve " $\rightarrow$ " ikili işlemleri, sırasıyla, Şekil 3, Tablo 5 ve Tablo 6' daki gibi verilsin.



Şekil 3. $\{\perp, x, y, z, t, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı

Tablo 5. $\{\perp, x, y, z, t, e, \top\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi

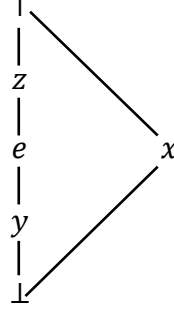
$*$	$\perp$	x	y	z	t	e	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
x	$\perp$	x	t	z	t	x	$\top$
y	$\perp$	t	y	z	t	y	$\top$
z	$\perp$	z	z	t	z	z	$\top$
t	$\perp$	t	t	z	t	t	$\top$
e	$\perp$	a	y	z	t	e	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Tablo 6. $\{\perp, x, y, z, t, e, \top\}$ kümesi üzerinde $\rightarrow$ işlemi

$\rightarrow$	$\perp$	x	y	z	t	e	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
x	$\perp$	e	y	z	y	e	$\top$
y	$\perp$	x	e	z	x	e	$\top$
z	$\perp$	z	z	e	z	z	$\top$
t	$\perp$	e	e	z	e	e	$\top$
e	$\perp$	x	y	z	t	e	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

Buna göre I , bir IL-cebiridir.

Örnek 1.4.8. (Islam vd., 2022) $I = \{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı, $" * "$ ve $" \rightarrow "$ ikili işlemleri, sırasıyla, Şekil 4 , Tablo 7 ve Tablo 8 deki gibi olsun.



Şekil 4. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı

Tablo 7. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi

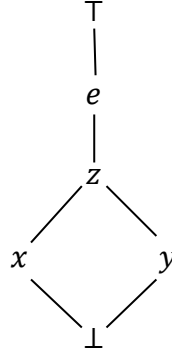
$*$	$\perp$	x	y	z	e	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
x	$\perp$	x	$\perp$	x	x	x
y	$\perp$	$\perp$	y	y	y	y
z	$\perp$	x	y	$\top$	z	$\top$
e	$\perp$	x	y	z	e	$\top$
$\top$	$\perp$	x	y	$\top$	$\top$	$\top$

Tablo 8. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $\rightarrow$ işlemi

$\rightarrow$	$\perp$	x	y	z	e	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
x	y	$\top$	y	y	y	$\top$
y	x	x	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
z	$\perp$	x	y	e	y	$\top$
e	$\perp$	x	y	z	e	$\top$
$\top$	$\perp$	x	y	y	y	$\top$

Buna göre I bir IL-cebiridir.

Örnek 1.4.9 (Islam vd., 2022) $I = \{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı, " $*$ " ve " $\rightarrow$ " ikili işlemleri, sırasıyla, Şekil 5, Tablo 9 ve Tablo 10 daki gibi verilsin.



Şekil 5. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı

Tablo 9. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi

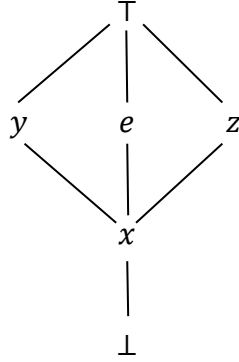
$*$	$\perp$	x	y	z	e	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
x	$\perp$	x	$\perp$	x	x	x
y	$\perp$	$\perp$	y	y	y	y
z	$\perp$	x	y	z	z	z
e	$\perp$	x	y	z	e	$\top$
$\top$	$\perp$	x	y	z	$\top$	$\top$

Tablo 10. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $\rightarrow$ işlemi

$\rightarrow$	$\perp$	x	y	z	e	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
x	$\perp$	$\top$	y	$\top$	$\top$	$\top$
y	x	x	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
z	$\perp$	x	y	$\top$	$\top$	$\top$
e	$\perp$	x	y	z	e	$\top$
$\top$	$\perp$	x	y	z	z	$\top$

Buna göre I bir IL-cebiridir.

Örnek 1.4.10. (Islam vd., 2020) $I = \{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı, " $*$ " ve " $\rightarrow$ " ikili işlemleri sırasıyla, Şekil 6, Tablo 11 ve Tablo 12 deki gibi verilsin.



Şekil 6. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı

Tablo 11. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi

$*$	$\perp$	x	y	z	e	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
x	$\perp$	$\perp$	x	x	x	x
y	$\perp$	x	y	y	y	y
z	$\perp$	x	y	e	z	$\top$
e	$\perp$	x	y	z	e	$\top$
$\top$	$\perp$	x	y	$\top$	$\top$	$\top$

Tablo 12. $\{\perp, x, y, d, e, \top\}$ kümesi üzerinde $\rightarrow$ işlemi

$\rightarrow$	$\perp$	x	y	z	1	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
x	x	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
y	$\perp$	x	$\top$	x	x	$\top$
z	$\perp$	x	y	e	z	e
e	$\perp$	x	y	z	e	$\top$
$\top$	$\perp$	x	y	x	x	$\top$

Buna göre I bir IL cebiridir.

1.5. IL-Cebirlerinin Filtreleri

FL_{ew} cebiri, MTL cebiri, BL cebiri, MV cebiri gibi diğer ilgili cebirsel yapılardaki filtre tanımı IL-cebirinin filtre tanımı için yetersiz kalır. Bölüm 1.4, Örnek 1.4.7’de fark edildiği üzere, $z, t \in I$ için $z * t = \top \not\leq z \wedge t = t$ olduğunu gördük. Aynı örnekte $z, t \geq e$ olduğundan $z \vee t \not\leq z * t$ dir. Bu da bize seçtiğimiz herhangi $a, b \in I$ için $a * b \leq a \wedge b$ eşitsizliğinin her zaman geçerli olmayacağını gösterir. Teorem 1.4.4 (4)’de a ve b elemanlarının e ’den büyük veya e ’ye eşit olduğu durumda $a * b \leq a \wedge b$ olduğunu görmekteyiz. Bu nedenle IL-cebirinin filtre tanımı diğer ilgili cebirlerin filtre tanımından farklı verilmiştir.

Tanım 1.5.1. (Islam vd., 2020) I bir IL-cebiri ve $F \subseteq I$ boştan farklı bir küme olsun. F kümesine I ’nın bir filtresi denir $\Leftrightarrow$ Herhangi $a, b \in I$ için

1. $e \in F$,
2. $a, b \in F$ ise $a * b \in F$ ve $a \wedge b \in F$,
3. $a \in F$ ve $b \geq a$ ise, $b \in F$ dir.

Açık olarak, I ’nin bir filtresidir.

Uyarı 1.5.2. (Islam vd., 2022) FL_{ew} -cebiri ve BL cebiri gibi bilinen diğer cebirsel yapılarda, herhangi $a, b \in F$ için $a \wedge b \geq a * b$ olduğu için bu gibi cebirsel yapıların filtre tanımlarında, $a * b \in F$ olması $a \wedge b \in F$ olmasını da gerektirir. IL cebirinde $a \wedge b \geq a * b$ özelliği her a, b için geçerli olmadığından bu cebirsel yapılar için verilen filtre tanımlarına ek olarak IL-cebirinin filtre tanımına $a \wedge b \in F$ olması da eklenmelidir.

Örnek 1.5.3. (Islam vd., 2022) I , Örnek 1.4.6’daki gibi bir IL-cebiri olsun. $F = \{e, x, y, z, \top\}$ kümesini düşünelim, Tanım 1.5.1’in şartlarını sağladığı açıktır. Bu nedenle F , I ’nin bir filtresidir.

Tanım 1.5.4. (Kihara & Ono, 2008) Bir I IL-cebirinin boştan farklı bir F alt kümesine bir filtre denir $\Leftrightarrow$ Her $a, b, u \in I$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. $a \geq e$ ise $a \in F$,
2. $a, a \rightarrow b \in F$ ise $b \in F$,
3. $a \in F$ ise $a \wedge e \in F$,
4. $u \in I$ için $a \in F$ ise $u \rightarrow (a * u) \in F$.

Uyarı 1.5.5. Bir IL cebiri için Tanım 1.5.4 (4) koşulu gereksizdir. Kabul edelim ki I bir IL-cebiri, I ’nın boştan farklı bir alt kümesi olan F Tanım 1.5.4’e göre I ’nin bir filtresi $u \in I$ ve $a \in F$ olsun. Tanım 1.5.4 (3)’den ve $a * u \geq a * u$ olduğundan $u \rightarrow (u * a) \geq a$

olur ve tekrar Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanırsak $a \rightarrow (u \rightarrow (u * a)) \geq e$ olduğunu elde ederiz. Bu da bize Tanım 1.5.4 (1)'den $a \rightarrow (u \rightarrow (a * a)) \in F$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak Tanım 1.5.4 (2)'den $u \rightarrow (u * a) \in F$ olur. Yani Tanım 1.5.4'ün 4. şartı gereksizdir.

Önerme 1.5.6. (Islam vd., 2022) Bir IL cebiri için Tanım 1.5.1 ve Tanım 1.5.4 denktir.

İspat. I bir IL cebiri olsun ve boştan farklı bir küme olan $F \subseteq I$ Tanım 1.5.1'deki şartları sağlasın.

1. Herhangi bir $a \in I$ için kabul edelim ki $a \geq e$ olsun. $e \in F$ olduğundan, Tanım 1.5.1 (3)'den $a \in F$ olur.
2. $b \in I$ ve $a, a \rightarrow b \in F$ olsun. Tanım 1.5.1 (2)'den $a * (a \rightarrow b) \in F$ 'dir. Teorem 1.4.4 (10)'dan $b \geq a * (a \rightarrow b)$ dir ve Tanım 1.5.1 (3)'den $b \in F$ olur.
3. $a \in F$ olsun. Tanım 1.5.1 (1) ve (2)'den $e \wedge a \in F$ olur.
4. Bu şartın gereksiz olduğunu gösterdik.

Buradan, F Tanım 1.5.4'ün tüm şartlarını sağlamış oldu. Şimdi $F \subseteq I$ Tanım 1.5.4'deki şartları sağlasın.

1. $e \geq e$ olduğundan $e \in F$ dir.
2. $a \in F$ ve $b \geq a$ olsun $a \rightarrow b \geq e$ olur ve Tanım 1.5.4 (1)'den $a \rightarrow b \in F$ olup Tanım 1.5.4 (2)'den $b \in F$ olur.
3. $a, b \in F$ olsun Tanım 1.5.4 (4)'den $b \rightarrow (a * b) \in F$ olup Tanım 1.5.4 (2)'den $a * b \in F$ olur. Tanım 1.5.4 (1)'den $e \wedge a, e \wedge b \in F$ 'dir. $e \geq e \wedge a$ ve $e \geq e \wedge b$ olduğundan Teorem 1.4.4 (4)'den $(e \wedge a) * (e \wedge b) \leq (e \wedge a) \wedge (e \wedge b) = (a \wedge b) \wedge e \leq a \wedge b \in F$ dir.

Böylelikle F Tanım 1.5.1'in tüm şartlarını sağlamış oldu. Sonuç olarak Tanım 1.5.1 ve Tanım 1.5.4 birbirine denktir.

Önerme 1.5.7. (Islam vd., 2022) I bir IL-cebiri ve boştan farklı $F \subseteq I$, I 'nin filtresi olsun. Herhangi $a, b \in I$ için $b \geq a$ ise $a \rightarrow b \in F$ dir.

İspat. $a, b \in I$ için $b \geq a$ olsun. Lemma 1.4.2 (ii)'den $a \rightarrow b \geq a \rightarrow a$ olur. Teorem 1.4.3 (11)'den $a \rightarrow b \geq e$ olur ve Tanım 1.5.1'den $a \rightarrow b \in F$ olur.

Tanım 1.5.8. (Islam vd., 2022) I bir IL-cebiri ve I 'nin boştan farklı alt kümesi olan F I 'nin bir filtresi olsun. $\forall a, b \in I$ için $a \rightarrow b \in F$ veya $b \rightarrow a \in F$ şartı sağlanıyor ise, F birinci türden bir asal filtre denir.

Tanım 1.5.9. (Islam vd., 2022) I bir IL-cebiri ve I 'nın boştan farklı alt kümesi olan F I 'nın bir filtresi olsun. Herhangi $a, b \in I$ için $a \vee b \in F$ iken $a \in F$ veya $b \in F$ oluyor ise, F ikinci türden bir asal filtre olarak adlandırılır.

Tanım 1.5.10. (Islam vd., 2022) I bir IL-cebiri ve I 'nın boştan farklı alt kümesi olan F I 'nın bir filtresi olsun. Herhangi $a, b \in I$ için $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) \in F$ şartı sağlanıyor ise, F üçüncü türden bir asal filtre olarak adlandırılır.

Açıkça I , birinci türden asal filtre, ikinci türden asal filtre ve üçüncü türden asal filtredir.

Örnek 1.5.11. Farz edelim ki I , Örnek 1.4.10'da verilen IL-cebiri ve $T = \{e, \top\}$ olsun. T , I 'nın filtresidir. $y, z \in I$ için $y \rightarrow z = x \notin F$ ve $z \rightarrow y = y \notin F$ olduğundan F , birinci türden asal bir filtre değildir. $y \vee z \in F$ fakat $y \notin F$ ve $z \notin F$ olduğundan F , ikinci türden asal filtre değildir. $z, e \in I$ için $(z \rightarrow e) \vee (e \rightarrow z) = z \vee z = z \notin F$ olduğundan F , üçüncü türden asal filtre değildir.

Bu örnekte görüyoruz ki I 'nın herhangi bir F filtresi birinci türden asal filtre, ikinci türden asal filtre ve üçüncü türden asal filtre olmayabilir.

Teorem 1.5.12. (Islam vd., 2022) I bir IL-cebiri ve boştan farklı $F \subseteq I$, I 'nın filtresi olsun. F birinci türden asal filtredir $\Leftrightarrow F$, ikinci türden asal filtre ve üçüncü türden bir asal filtredir.

İspat. Kabul edelim ki F , birinci türden asal filtre ve herhangi $a, b \in I$ için $a \vee b \in F$ olsun. Birinci türden asal filtre tanımından, $a \rightarrow b \in F$ veya $b \rightarrow a \in F$ dir. İlk olarak $a \rightarrow b \in F$ olduğunu kabul edelim. Teorem 1.4.4 (11)'den $b \rightarrow b \geq e$ olduğunu biliyoruz. F bir filtre olduğundan $b \rightarrow b \in F$ ve $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow b) \in F$ olur. Teorem 1.4.4 (13)'den $(a \vee b) \rightarrow b \in F$ olur. Filtre tanımından ve $a \vee b \in F$ olduğundan $(a \vee b) * ((a \vee b) \rightarrow b) \in F$ olur. Teorem 1.4.4 (10)'dan $b \geq (a \vee b) * ((a \vee b) \rightarrow b)$ olup $b \in F$ olur. Benzer şekilde $b \rightarrow a \in F$ olduğunu kabul edersek $a \in F$ olduğunu elde ederiz. Böylelikle $a \vee b \in F$ olduğunda $a \in F$ veya $b \in F$ olur. Yani F , ikinci türden asal filtre olur. Şimdi F 'nin üçüncü türden asal filtre olduğunu gösterelim. $a, b \in I$ olsun F , birinci türden asal filtre olduğundan $a \rightarrow b \in F$ veya $b \rightarrow a \in F$ 'dir. Hem $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) \geq a \rightarrow b$ olduğundan hem de $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) \geq b \rightarrow a$ olduğundan her iki durumda da $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) \in F$ olur ve böylelikle F , üçüncü türden asal filtre olur. Tersine F , ikinci türden asal filtre ve üçüncü türden asal filtre olsun. F , üçüncü türden asal filtre olduğundan

$\forall a, b \in I$ için $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) \in F$ olup F ikinci türden asal filtre olduğundan $a \rightarrow b \in F$ veya $b \rightarrow a \in F$ olur. Sonuç olarak F , birinci türden asal filtre olur.

Örnek 1.5.13. (Islam vd., 2022) I , Örnek 1.4.8’de verilen IL-cebiri ve $S = \{y, e, z, \top\}$ olsun. S , I ’nin bir filtresidir. S , I ’da birinci türden asal filtre, ikinci türden asal filtre ve üçüncü türden asal filtredir. $K = \{e, z, \top\}$, I ’nin filtresidir. $x \rightarrow y = y \notin K$ ve $y \rightarrow x = x \notin K$ olduğundan K , birinci türden asal filtre değildir. $x \vee y \in K$ fakat $x \notin K$ ve $y \notin K$ olduğundan K , ikinci türden asal filtre değildir. K , üçüncü türden asal filtredir.

Örnek 1.5.14. (Islam vd., 2022) I , Örnek 1.4.7’de verilen IL-cebiri ve $Z = \{x, y, t, e, \top\}$ olsun. Z , I ’nin bir filtresidir ve ikinci türden asal filtredir. Ancak $x \rightarrow z = z \notin Z$ ve $z \rightarrow x = z \notin Z$ olduğundan birinci türden asal filtre değildir. Ayrıca, $(x \rightarrow z) \vee (z \rightarrow x) = z \notin Z$ olduğundan da üçüncü türden asal filtre de değildir.

Tanım 1.5.15. (Islam vd., 2022) I bir IL-cebiri olsun. Herhangi $a, b \in I$ için $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) \geq e$ ise, I ’ya pre-lineerdir denir.

Örnek 1.4.8’deki IL-cebirinin zincir olmadığını fakat pre-lineer olduğunu görüyoruz. Tersini düşünecek olursak, zincir olma koşulu her zaman pre-lineer olmayı gerektirir.

Önerme 1.5.16. (Islam vd., 2022) I bir pre-lineer IL-cebiri olsun. I ’nın bütün filtreleri üçüncü türden asal filtredir ve bütün ikinci türden asal filtreleri, birinci türden asal filtredir.

İspat. I bir pre-lineer IL-cebiri ve A , I ’nin bir filtresi olsun. Tanımdan, herhangi $a, b \in I$ için $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) \geq e$ olur ve $e \in A$ olduğundan $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) \in A$ olur. Yani A , üçüncü türden asal filtre olur. Şimdi A , ikinci türden asal filtre olsun. A hem üçüncü türden asal filtre hem de ikinci türden asal filtre olduğundan, Teorem 1.5.12’den birinci türden asal filtredir.

Önerme 1.5.17. (Islam vd., 2022) I bir IL-cebiri ve C , I ’nin herhangi bir filtresi olsun. $I_e := \{a \in I : a \geq e\}$ ile tanımlanan I_e kümesi, I ’nin bir filtresidir. Ayrıca I_e I ’nin filtresi I ’nin en küçük filtresidir (Yani $C \subseteq I_e$ ’dir). Ek olarak, I_e , birinci türden asal filtredir. $\Leftrightarrow I$ zincirdir.

İspat. İlk önce A ’nın filtre olduğunu gösterelim. $e \in I_e$ olduğu açıktır. $a, b \in I_e$ olsun. I_e kümesinin tanımından $a \geq e$ ve $b \geq e$ olur. Teorem 1.4.4 (8)’den $a * b \geq e$ olur ve dolayısıyla $a * b \in I_e$ olur. Ek olarak, $a \geq e$ ve $b \geq e$ olduğundan $a \wedge b \geq e$ olur ve buradan $a \wedge b \in I_e$ olduğunu da elde ederiz. Şimdi $a \in B$ ve $b \geq a$ olduğunu kabul edelim ve $b \in I_e$ olduğunu gösterelim. I_e kümesinin tanımından, $a \geq e$ olur ve kabulden de $b \geq$

$a \geq e$ olur. Böylelikle $b \in I_e$ olduğunu elde etmiş oluruz. Sonuç olarak I_e , I 'nın bir filtresi olur. Şimdi, C , I 'nın herhangi bir filtresi ve $a \in I_e$ keyfi olsun. I_e kümesinin tanımından $a \geq e$ dir ve C filtre olduğundan $e \in C$ dir. Dolayısıyla $a \in C$ dir. Bu da $I_e \subseteq C$ olduğunu gösterir. Şimdi I_e , birinci türden asal filtre olsun. $\Leftrightarrow a \rightarrow b \geq e$ veya $b \rightarrow a \geq e$ dir.
 $\xLeftrightarrow{\text{Tanım 1.4.3(3)}} b \geq a$ veya $a \geq b$ dir. $\Leftrightarrow I_e$ kümesi zincirdir.

Tanım 1.5.18. (Islam vd., 2022) I bir IL- cebiri ve F , I 'nın bir filtresi olsun. I 'da bir β bağlantısını şu şekilde tanımlarız:

$$a\beta b \Leftrightarrow \forall a, b \in I \text{ için } a \rightarrow b \in F \text{ ve } b \rightarrow a \in F \text{ dir.}$$

β 'nın I 'da kongrüans bağıntısı olduğu açıktır. Gerçekten, $a, b, c, t \in I$ olsun.

1. Yansıma: $a \rightarrow a \geq e$ olduğundan $a \rightarrow a \in F$ olur. Yani $a\beta a$ dır.
2. Simetri: $a\beta b$ olsun. Buradan $a \rightarrow b, b \rightarrow a \in F$ olur yani $b\beta a$ dır.
3. Geçişme: $a\beta b$ ve $b\beta c$ olsun. Buradan $a \rightarrow b, b \rightarrow a, b \rightarrow c, c \rightarrow b \in F$ olur. F filtre olduğundan $(a \rightarrow b) * (b \rightarrow c) \in F$ olur ve Teorem 1.4.4 (6)'dan $\underbrace{(a \rightarrow b) * (b \rightarrow c)}_{\in F} \leq a \rightarrow c \in F$ olur. Benzer şekilde $(c \rightarrow b) * (b \rightarrow a) \leq c \rightarrow a \in F$ olur. Buradan $a\beta c$ olur.
4. Uygunluk: $a\beta b$ ve $c\beta t$ olsun. Yani $a \rightarrow b, b \rightarrow a, c \rightarrow t, t \rightarrow c \in F$ 'dir.
 - $a \vee c \geq a$ olduğundan Lemma 1.4.2 (ii)'yi kullanarak $\underbrace{b \rightarrow a}_{\in F} \leq b \rightarrow (a \vee c) \in F$ olduğundan $(t \rightarrow (a \vee c)) \wedge (b \rightarrow (a \vee c)) \in F$ olup Teorem 1.4.4 (13)'den $(b \vee t) \rightarrow (a \vee c) \in F$ olur. Benzer şekilde $(a \vee c) \rightarrow (b \vee t) \in F$ olur. Sonuç olarak $(a \vee c)\beta(b \vee t)$ olur.
 - $a \wedge c \leq a$ olduğundan Lemma 1.4.2 (ii) kullanarak $\underbrace{a \rightarrow b}_{\in F} \leq (a \wedge c) \rightarrow b \in F$ olduğundan $((a \wedge c) \rightarrow b) \wedge ((a \wedge c) \rightarrow t) \in F$ olup Teorem 1.4.4 (12)'den $(a \wedge c) \rightarrow (b \wedge t) \in F$ olur. Benzer şekilde $(b \wedge t) \rightarrow (a \wedge c) \in F$ olur. Sonuç olarak $(a \wedge c)\beta(b \wedge t)$ olur.
 - F bir filtre olduğundan $(a \rightarrow b) * (c \rightarrow t) \in F$ olur. Teorem 1.4.4 (10)'dan $a * (a \rightarrow b) \leq b$ ve $c * (c \rightarrow t) \leq t$ olduğunu biliyoruz. Teorem 1.4.4 (8)'den $a * (a \rightarrow b) * c * (c \rightarrow t) \leq b * t$ olur Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanarak

$\underbrace{(a \rightarrow b) * (c \rightarrow t)}_{\in F} \leq (a * c) \rightarrow (b * t) \in F$ olduğunu elde ederiz. Benzer şekilde $(b * t) \rightarrow (a * c) \in F$ olduğunu elde ederiz. Sonuç olarak $(a * c)\beta(b * t)$ olur.

- F bir filtre olduğundan $(b \rightarrow a) * (t \rightarrow c) \in F$ olur. Teorem 1.4.4 (6)'dan $(b \rightarrow a) * (a \rightarrow c) \leq b \rightarrow c$ ve Lemma 1.4.2 (i)'den $(b \rightarrow a) * (a \rightarrow c) * (c \rightarrow t) \leq (b \rightarrow c) * (c \rightarrow t)$ olur ve Teorem 1.4.4 (6)'dan $(b \rightarrow c) * (c \rightarrow t) \leq b \rightarrow t$ olduğundan $(b \rightarrow a) * (a \rightarrow c) * (c \rightarrow t) \leq b \rightarrow t$ olur. Burada Tanım 1.4.3 (3)'ü kullanarak $\underbrace{(b \rightarrow a) * (c \rightarrow t)}_{\in F} \leq (a \rightarrow c) \rightarrow (b \rightarrow t) \in F$ olur. Benzer şekilde $(b \rightarrow t) \rightarrow (a \rightarrow c) \in F$ olduğunu elde ederiz. Sonuç olarak $(a \rightarrow c)\beta(b \rightarrow t)$ olur.

I üzerindeki bütün kongrüans bağıntılarının kümesi I/F olarak yazılır.

$$I/F = \{[a]: a \in F\} \text{ ve } [a] = \{b \in I: a\beta b\} \text{ dir.}$$

$\blacksquare \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, *\}$ olmak üzere $[a]\blacksquare[b] = [a\blacksquare b]$ olarak tanımlanır. Ayrıca $[a] \leq [b]$ ile kastedilen her $a_1 \in [a]$ ve $b_1 \in [b]$ için $a_1 \leq b_1$ dir.

Önerme 1.5.19. (Islam vd., 2020) $a, b \in I$ için $[a] \leq [b] \Leftrightarrow a \rightarrow b \in F$ dir.

İspat. $[a] \leq [b]$ olsun. $[a] \wedge [b] = [a]$ olur yani $[a \wedge b] = [a]$ dır. Buradan $a \rightarrow (a \wedge b) \in F$ olur. $b \geq a \wedge b$ olduğundan $e \geq b \rightarrow (a \wedge b)$ olur. Buradan $b \rightarrow (a \wedge b) \in F$ olur. F filtre olduğundan $\underbrace{(a \rightarrow (a \wedge b)) * ((a \wedge b) \rightarrow b)}_{\in F} \leq a \rightarrow b \in F$ olur. Tersine $a \rightarrow$

$b \in F$ olsun. $a \wedge b \leq a$ olduğundan Önerme 1.5.7'den $a \wedge b \rightarrow a \in F$ olur. $a \rightarrow a \in F$ ve $a \rightarrow b \in F$ olduğundan $(a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b) \in F$ olup Teorem 1.4.4 (12) den $a \rightarrow (a \wedge b) \in F$ olur. Buradan $a \wedge b \in [a]$ olup $[a \wedge b] = [a]$ olur ve buda $[a] \leq [b]$ olduğunu gösterir.

Teorem 1.5.20. (Islam vd., 2020) $(I/F, \vee, \wedge, [\perp], \rightarrow, *, [e])$, IL-cebiridir.

İspat. İlk önce $\wedge, \vee, \rightarrow$ ve $*$ işlemlerinin I/F kümesinde kapalı olduklarını gösterelim.

$a, b, a_1, b_1 \in I$ ve $[a] = [a_1]$ ve $[b] = [b_1]$ olsun. Açıkça $a \rightarrow a_1, a_1 \rightarrow a, b \rightarrow b_1, b_1 \rightarrow b \in F$ dir.

- $a \geq a \wedge b$ ve Lemma 1.4.2 (ii)'den $\underbrace{a \rightarrow a_1}_{\in F} \leq (a \wedge b) \rightarrow a_1 \in F$ olur. Benzer şekilde $(a \wedge b) \rightarrow b_1 \in F$ olur. F bir filtre olduğundan, $((a \wedge b) \rightarrow a_1) \wedge ((a \wedge b) \rightarrow b_1) \in F$ olur. Teorem 1.4.4 (12)'den $(a \wedge b) \rightarrow (a_1 \wedge b_1) \in F$ olup Önerme 1.5.19'dan $[a \wedge b] \leq [a_1 \wedge b_1]$ olur. Benzer şekilde $(a_1 \wedge b_1) \rightarrow$

$(a \wedge b) \in F$ olup Önerme 1.5.19'dan dolayı $[a_1 \wedge b_1] \leq [a \wedge b]$ olur. Bu iki eşitsizlikten $[a \wedge b] = [a_1 \wedge b_1]$ olduğunu elde ederiz.

- $a \vee b \geq a$ ve Lemma 1.4.2 (ii)'den $\underbrace{a_1 \rightarrow a}_{\in F} \leq a_1 \rightarrow (a \vee b) \in F$ dir. Benzer şekilde $b_1 \rightarrow (a \vee b) \in F$ olup F bir filtre olduğundan $(a_1 \rightarrow (a \vee b)) \wedge (b_1 \rightarrow (a \vee b)) \in F$ olur. Teorem 1.4.4 (13)'den $(a_1 \vee b_1) \rightarrow (a \vee b) \in F$ olup Önerme 1.5.19'dan $[a \vee b] \leq [a_1 \vee b_1]$ olur. Benzer şekilde $(a \vee b) \rightarrow (a_1 \vee b_1) \in F$ olduğundan $[a_1 \vee b_1] \leq [a \vee b]$ olur. Bu iki eşitsizliği kullanarak $[a \vee b] = [a_1 \vee b_1]$ olduğunu elde ederiz.
 - F bir filtre olduğundan $(a \rightarrow a_1) * (b \rightarrow b_1) \in F$ dir. Teorem 1.4.4 (10)'dan $a_1 \geq a * (a \rightarrow a_1)$ ve $b_1 \geq b * (b \rightarrow b_1)$ dir. Buradan Teorem 1.4.4 (8)'i kullanarak $a * b * (a \rightarrow a_1) * (b \rightarrow b_1) \leq a_1 * b_1$ olduğunu elde ederiz. Tanım 1.4.3 (3)'den de $\underbrace{(a \rightarrow a_1) * (b \rightarrow b_1)}_{\in F} \leq (a * b) \rightarrow (a_1 * b_1) \in F$ olur. Dolayısıyla, Önerme 1.5.19'dan $[a * b] \leq [a_1 * b_1]$ olur. Benzer şekilde $(a_1 * b_1) \rightarrow (a * b) \in F$ olduğundan $[a_1 * b_1] \leq [a * b]$ olur. Bu iki eşitsizlikten $[a * b] = [a_1 * b_1]$ olduğu sonucunu elde ederiz.
 - F bir filtre olduğundan $(a_1 \rightarrow a) * (b_1 \rightarrow b) \in F$ dir. Teorem 1.4.4 (6)'dan $(a_1 \rightarrow a) * (a \rightarrow b) \leq a_1 \rightarrow b$ olur ve Lemma 1.4.2 (i)'den $(a_1 \rightarrow a) * (a \rightarrow b) * (b \rightarrow b_1) \leq (a_1 \rightarrow b) * (b \rightarrow b_1)$ olur. Tekrar Teorem 1.4.4 (6)'dan $(a_1 \rightarrow a) * (a \rightarrow b) * (b \rightarrow b_1) \leq a_1 \rightarrow b_1$ olur ve Tanım 1.4.3 (3)'den $(a_1 \rightarrow a) * (b \rightarrow b_1) \leq (a \rightarrow b) \rightarrow (a_1 \rightarrow b_1) \in F$ olur. Önerme 1.5.19'dan $[a \rightarrow b] \leq [a_1 \rightarrow b_1]$ olur. Benzer şekilde $(a_1 \rightarrow b_1) \rightarrow (a \rightarrow b) \in F$ olduğundan $[a_1 \rightarrow b_1] \leq [a \rightarrow b]$ olur. Bu iki eşitsizlikten $[a \rightarrow b] = [a_1 \rightarrow b_1]$ olduğu sonucunu elde ederiz.
1. $(I/F, \wedge, \vee)$ nin bir kafes olduğu açıktır. Kabul edelim ki $[a] \in I/F$ ve $[a] \leq [\perp]$ olsun. $\perp \leq a$ olduğunu biliyoruz. Tanım 1.4.3 (3)'den $\perp \rightarrow a \geq e$ olduğundan, $\perp \rightarrow a \in F$ olur ve Önerme 1.5.19'dan de $[\perp] \leq [a]$ olur. Yani $[\perp]$ elemanı, I/F kafesinin en küçük elemanıdır.
 2. $(I/F, *, [e])$ birim elemanı $[e]$ olan değişmeli monoiddir.
 $[a], [b], [c] \in I/F$ olsun.

1. $[a] * ([b] * [c]) = [a] * [b * c] = [a * (b * c)] = [(a * b) * c] = [a * b] * [c] = ([a] * [b]) * [c]$ dir.
2. $[a] * [b] = [a * b] = [b * a] = [b] * [a]$ dir.
3. $[a] * [e] = [a * e] = [a]$ dir.
3. $[a], [b], [c] \in I/F$ olsun. $[c] \geq [a] * [b] \Leftrightarrow [c] \geq [a * b] \xLeftrightarrow{\text{Önerme 1.5.19}} (a * b) \rightarrow c \in F \xLeftrightarrow{\text{Teorem 1.4.4(9)}} a \rightarrow (b \rightarrow c) \in F \xLeftrightarrow{\text{Önerme 1.5.19}} [b \rightarrow c] \geq [a] \Leftrightarrow [b] \rightarrow [c] \geq [a]$.

Teorem 1.5.21. (Islam vd., 2020) Eğer $b \in I_e$ ise bu takdirde $[b] = \{b\}$ dir.

İspat. $[b] = \{c \in I : b \rightarrow c, c \rightarrow b \in I_e\} = \{c \in I : b \rightarrow c \geq e \text{ ve } c \rightarrow b \geq e\} = \{y \in I : c \geq b \text{ ve } b \geq c\} = \{b\}$ dir.

Teorem 1.5.22. (Islam vd., 2022) I bir IL-cebiri ve F I 'nin bir filtresi olsun. F birinci türden asal filtredir $\Leftrightarrow I/F$ kümesi zincirdir.

İspat. F birinci türden asal filtredir. $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in I$ için $a \rightarrow b \in F$ veya $b \rightarrow a \in F$ dir. $\xLeftrightarrow{\text{önerme 1.5.19}}$ Her $a, b \in I$ için $[a] \leq [b]$ veya $[b] \leq [a]$ dır. $\Leftrightarrow I/F$ kümesi zincirdir.

Örnek 1.5.23. I , Örnek 1.4.7'de verilen IL-cebiri ve $D = \{x, y, t, e, \top\}$ olsun. D , I 'nin filtresidir. D ikinci türden asal filtredir, fakat I/F zincir değildir. Çünkü $[z] = \{z\}$ ve $[e] = \{x, y, t, e\}$ için $[z]$ ve $[e]$ karşılaştırılmaz.

Örnek 1.5.24. I , Örnek 1.4.8'de verilen IL-cebiri ve $E = \{e, z, \top\}$ olsun. E , I 'nin bir filtresi ve üçüncü türden asal filtredir. Fakat I/F zincir değildir. Çünkü $[x] = \{x\}$ ve $[z] = \{z\}$ için $[x]$ ve $[z]$ karşılaştırılmaz.

Bu örnekte görüyoruz ki, Teorem 1.3.23 ikinci türden asal filtre ve üçüncü türden asal filtre için her zaman doğru olmayabilir.

1.6. IL-Cebirlerinin Bulanık Filtreleri

Tanım 1.2.5'de verilen seviye küme tanımı bize IL-cebirinin bulanık filtre tanımını yaparken yardımcı olacaktır. Bu bölüm için, aksi belirtilmedikçe, her $a, b \in [0,1]$ için $a \wedge b$ ve $a \vee b$ değerleri, sırasıyla, $\min\{a, b\}$ ve $\max\{a, b\}$ olarak alınacaktır. Bu da $[0,1]$ kafesi üzerinde alınan T t-normunun T_M olduğunu göstermektedir.

Tanım 1.6.1. (Islam vd., 2022) Eğer herhangi $s \in [0,1]$ için $\phi_s = \emptyset$ veya ϕ_s , I 'nin bir filtresi ise, ϕ 'ya I 'nin bir bulanık filtresi denir.

Örnek 1.6.2 (İslam vd., 2022) I Örnek 1.4.6’da verilen IL-cebiri olsun ve I ’nın bir bulanık alt kümesi olan ϕ , $\phi(x) = \phi(y) = \phi(z) = \phi(e) = \phi(\top) = 0.8$ ve $\phi(\perp) = 0.5$ olacak şekilde tanımlansın. ϕ ’nın tüm seviye kümeleri aşağıdaki gibidir.

$$\phi_s = \begin{cases} \emptyset & , s > 0.8 \\ \{e, x, y, z, \top\} & , 0.5 < s \leq 0.8 \\ I & , s \leq 0.5 \end{cases}$$

Tanım 1.6.1 gereği ϕ , I ’nın bir bulanık filtresidir.

Önerme 1.6.3. (İslam vd., 2022) I bir IL-cebiri olsun. F , I ’nın bir filtresidir. $\Leftrightarrow F$ ’nin karakteristik fonksiyonu olan χ_F , I ’nın bulanık filtresidir.

İspat. F , I ’nın filtresi olsun. $\chi_F(x) = \begin{cases} 1, & x \in F \\ 0, & x \notin F \end{cases}$ olduğunu biliyoruz. Buradan χ_F ’nin tüm seviye kümelerine bakacak olursak $\chi_{F_0} = I$ ve $0 < s \leq 1$ için $\chi_{F_s} = \{x \in I : \chi_F(x) = 1\} = F$ dir. Bu da bize her durumda χ_F ’nin I ’nın bir filtresi olduğunu gösterir. Sonuç olarak, tanım gereği χ_F , I ’nın bir bulanık filtresidir. Tersine χ_F , I ’nın bulanık filtresi olsun. Tanımdan, herhangi bir $s \in [0,1]$ için χ_{F_s} filtre olacağından $\chi_{F_1} = F$ de bir filtre olur.

Önerme 1.6.4. (İslam vd., 2022) ϕ I ’nın bulanık filtresi olsun. ϕ sırankordur; yani her $a, b \in I$ için $a \geq b$ ise $\phi(a) \geq \phi(b)$ dir.

İspat. ϕ , I ’nın bir bulanık filtresi olsun. İlk önce $a, b \in I$ için $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\phi(a) \wedge \phi(b) = s_1$, $s_1 \in [0,1]$ olduğunu kabul edelim. Buradan, açıkça, $\phi(a) \geq s_1$ ve $\phi(b) \geq s_1$ olur. Dolayısıyla $a, b \in \phi_{s_1}$ olur ve ϕ_{s_1} filtre olduğundan $a \wedge b \in \phi_{s_1}$ olur. Buradan $\phi(a \wedge b) \geq s_1 = \phi(a) \wedge \phi(b)$ olduğunu elde ederiz. Şimdi $\phi(a \wedge b) = s_2$, $s_2 \in [0,1]$ olsun. Buradan $a \wedge b \in \phi_{s_2}$ olur yani $\phi(a) \geq s_2$ ve $\phi(b) \geq s_2$ dir. Bu iki eşitsizlikten $\phi(a) \wedge \phi(b) \geq s_2 = \phi(a \wedge b)$ olur. Sonuç olarak $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$ dir. Şimdi $a \geq b$ olsun. $\phi(a) = \phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$ olup $\phi(a) \leq \phi(b)$ olur.

Teorem 1.6.5. (İslam vd., 2022) $\phi \in [0,1]^I$ olsun. ϕ I ’nın bir bulanık filtredir. $\Leftrightarrow$ Herhangi $a, b \in I$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. $\phi(e) \geq \phi(a)$ dır,
2. $\phi(a * b) \geq \phi(a) \wedge \phi(b)$ dir,
3. $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$ dir.

İspat. Kabul edelim ki I bir IL-cebiri, $a, b \in I$ ve ϕ , I ’nın bir bulanık filtresi olsun.

1. $\phi(a) = s_0, s_0 \in [0,1]$ olduğunu düşünelim. Dolayısıyla $a \in \phi_{s_0}$ olur. ϕ bulanık filtre olduğundan ϕ_{s_0}, I 'nin bir filtresidir. Yani $e \in \phi_{s_0}$ dir. Buradan $\phi(e) \geq s_0 = \phi(a)$ olur.
2. $\phi(a) \wedge \phi(b) = s_1, s_1 \in [0,1]$ olduğunu düşünelim. Buradan $\phi(a), \phi(b) \geq s_1$ olup $a, b \in \phi_{s_1}$ olur. ϕ_{s_1}, I 'nin filtresi olduğundan $a * b \in \phi_{s_1}$ olur. Dolayısıyla $\phi(a * b) \geq s_1$ dir. Yani $\phi(a * b) \geq s_1 = \phi(a) \wedge \phi(b)$ dir.
3. Önerme 1.6.4 ün ispatında yapıldı.

Tersine I 'nin bulanık alt kümesi olan ϕ teoremden verilen üç şartı sağlasın ve $s \in [0,1]$ için $\phi_s \neq \emptyset$ olsun.

1. Açıkça $\exists a \in I$ öyle ki $a \in \phi_s$ dir. Buradan $\phi(a) \geq s$ olur ve (1) den $\phi(e) \geq \phi(a) \geq s$ olup $e \in \phi_s$ olur.
2. $x, y \in \phi_s$ olsun. Buradan $\phi(a) \geq s$ ve $\phi(b) \geq s$ olur ve bu iki eşitsizliği ve (2) şartını kullanırsak, $\phi(a * b) \geq \phi(a) \wedge \phi(b) \geq s$ olur. Dolayısıyla $a * b \in \phi_s$ dir. (3) şartından $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b) \geq s$ olur. Sonuç olarak $a \wedge b \in \phi_s$ olur.
3. $b \geq a$ ve $a \in \phi_s$ olsun. $\phi(a) \geq s$ olur ve (3) şartından $\phi(a) = \phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b) = s$ olup $\phi(b) \geq s$ olur. Sonuç olarak $b \in \phi_s$ olur.

Buradan herhangi bir $s \in [0,1]$ için boştan farklı bir küme olan ϕ_s, I 'nin bir filtresidir. Sonuç olarak ϕ I 'nin bir bulanık filtredir.

Önerme 1.6.6. (Islam vd., 2022) I bir IL-cebiri olsun. ϕ, I 'nin bulanık filtresi ise her $a, b \in I$ için $\phi(a) \wedge \phi(a \rightarrow b) \leq \phi(b)$ dir.

İspat. ϕ I 'nin bir bulanık filtresi, $\phi(a) \wedge \phi(a \rightarrow b) = s, s \in [0,1]$ olacak şekilde $a, b \in I$ keyfi olsun. $\phi(a) \geq s$ ve $\phi(a \rightarrow b) \geq s$ olduğundan $a, a \rightarrow b \in \phi_s$ olup ϕ_s filtre olduğundan $a * (a \rightarrow b) \in \phi_s$ olur. Teorem 1.4.4 (10)'dan biliyoruz ki $b \geq a * (a \rightarrow b)$ dir. Dolayısıyla $b \in \phi_s$ olur. Açıkça, $\forall a, b \in I$ için $\phi(b) \geq s$ dir. Sonuç olarak $\phi(a) \wedge \phi(a \rightarrow b) \leq \phi(b)$ olur.

Örnek 1.6.7. (Islam vd., 2022) I , Örnek1.4.7'de verilen IL-cebiri olsun. I 'nin bulanık alt kümesi olan $\phi: I \rightarrow [0,1]$ fonksiyonunun $\phi(x) = 0.5, \phi(y) = 0.7, \phi(t) = 0.3, \phi(\top) = \phi(\perp) = \phi(z) = \phi(e) = 1$ olacak şekilde tanımlandığını düşünelim. ϕ, I 'da bir bulanık kümesidir. $\phi(x) \wedge \phi(x \rightarrow y) = 0.5$ olup $\phi(x) \wedge \phi(x \rightarrow y) \leq \phi(y)$ dir. Fakat $s=0.4$ için $\phi_s = \{y, x, e, \perp, \top, z\}$ filtre değildir, çünkü $x, y \in \phi_s$ için $x \wedge y = t \notin \phi_s$ dir.

Bu örnek Önerme 1.6.6'nın tersinin doğru olmadığını kanıtlamamız için yeterli değildir. Çünkü bu örnekte ϕ teoremin tersini her $a, b \in I$ için sağlamamaktadır. Örneğin

$(0.3 = \phi(t) \not\geq \phi(x) \wedge \phi(x \rightarrow y) = \phi(x) \wedge \phi(y) = 0.5)$ dir. Bu örnekte $\phi(\perp) = 0, \phi(z) = 0.1, \phi(t) = \phi(x) = \phi(y) = 0.5$ ve $\phi(e) = \phi(\top) = 1$ olursa, her $x, y \in I$ için $\phi(y) \geq \phi(x) \wedge \phi(x \rightarrow y)$ olur. $s = 0.1$ için $\phi_s = \{x, y, z, e, \top\}$ olur ve $x, z \in \phi_s$ için $x \wedge z = \perp \notin \phi_s$ olduğundan ϕ_s filtre olmaz. Dolayısıyla ϕ, I 'nin bulanık filtresi değildir ve bu da bize Önerme 1.6.6'nın tersinin her zaman doğru olmayacağını gösterir.

Önerme 1.6.8. (Islam vd., 2022) I bir IL-cebiri olsun ϕ, I 'nin bir bulanık filtresi ise $\forall a \in I_e$ için $\phi(a) = \phi(e)$ dir.

İspat. Önerme 1.6.5 (1)'den $\phi(e) \geq \phi(a)$ olduğunu biliyoruz. $a \in I_e$ olsun. Dolayısıyla $a \geq e$ olup bulanık filtrenin sırankorur olma özelliğinden dolayı $\phi(a) \geq \phi(e)$ olur. Sonuç olarak $\phi(x) = \phi(e)$ olur.

Teorem 1.6.9. (Islam vd., 2022) I bir IL-cebiri ve ϕ, I 'nin bir bulanık kümesi olsun. ϕ, I 'nin bir bulanık filtresidir $\Leftrightarrow$ Herhangi $a, b, c \in I$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. $\forall a \in I_e$ için $\phi(a) = \phi(e)$ dir,
2. $c \geq a * b$ ise $\phi(c) \geq \phi(a) \wedge \phi(b)$ dir,
3. $c \geq a \wedge b$ ise $\phi(c) \geq \phi(a) \wedge \phi(b)$ dir.

İspat. İlk önce, ϕ 'nin, I 'nin bulanık filtresi olduğunu kabul edelim.

1. Önerme 1.6.8'den herhangi bir $a \in I_e$ için $\phi(a) = \phi(e)$ olduğunu biliyoruz.
2. $c \geq a * b$ olduğunu kabul edelim. ϕ , sırankorur olduğundan $\phi(z) \geq \phi(a * b)$ olup Teorem 1.6.5 (2)'den $\phi(c) \geq \phi(a * b) \geq \phi(a) \wedge \phi(b)$ olur.
3. $a \wedge b \leq c$ olduğunu kabul edelim. ϕ , sırankorur olduğundan $\phi(z) \geq \phi(a \wedge b)$ olup Teorem 1.6.5 (3)'den $\phi(c) \geq \phi(a) \wedge \phi(b)$ olur.

Tersine, I bulanık kümesi olan ϕ teoremden verilen üç şartı sağlasın

1. Herhangi bir $a \in I$ için $\top \geq a * a$ olduğunu biliyoruz. ϕ sırankorur olduğundan $\phi(\top) \geq \phi(a * a)$ olur. (2)'den $\phi(\top) \geq \phi(a) \wedge \phi(a)$ olur ve $\phi(\top) \geq \phi(a)$ olur. (1)'den ve $\top \in I_e$ olduğundan $\phi(\top) = \phi(e)$ olur ve $\phi(e) \geq \phi(a)$ 'dir.
2. $a * b \geq a * b$ olduğunu biliyoruz. (2)'den $\phi(a) \wedge \phi(b) \geq \phi(a * b)$ olur.
3. $a \wedge b \geq a \wedge b$ olduğunu biliyoruz. (3)'den $\phi(a \wedge b) \geq \phi(a) \wedge \phi(b)$ olur. Diğer taraftan $a \geq a \wedge b$ ve $b \geq a \wedge b$ olduğundan $\phi(a) \geq \phi(a \wedge b)$ ve $\phi(b) \geq \phi(a \wedge b)$ olur. Bu iki eşitsizlikten $\phi(a) \wedge \phi(b) \geq \phi(a \wedge b)$ olur.

Sonuç olarak Teorem 1.6.5'den ϕ, I 'nin bulanık filtresidir.

Teorem 1.6.10. (Islam vd., 2022) ϕ, I 'nin bir bulanık kümesi olsun ϕ, I 'nin bir bulanık filtresidir $\Leftrightarrow \phi$ her $a, b \in I$ için aşağıdaki koşulları sağlar.

1. ϕ , sırankorurdur,
2. $a \in I_e$ için $\phi(e) = \phi(a)$ dır,
3. $\phi(a) \wedge \phi(b) \leq \phi(a * b)$ dir,
4. $\phi(a) \wedge \phi(b) = \phi(x \wedge y)$ dir.

İspat. ϕ , I 'nin bulanık filtresi olsun. Önerme 1.6.4'den (1) şartı sağlanır. Teorem 1.6.5'den (3) ve (4) şartları sağlanır. Önerme 1.6.8'den de (2) şartı sağlanır. Böylelikle tüm şartlar sağlanmış oldu. Şimdi, ϕ , tersine bu şartların hepsini sağlansın.

1. (2)'den her $a \in I_e$ için $\phi(e) = \phi(a)$ dır.
2. $c \geq a * b$ olduğunu kabul edelim. ϕ , sırankorur olduğundan $\phi(c) \geq \phi(a * b)$ olur. (3)'den $\phi(c) \geq \phi(a) \wedge \phi(b)$ dir.
3. $c \geq a \wedge b$ olduğunu kabul edelim. (1)'den $\phi(c) \geq \phi(a \wedge b)$ olur. (4)'den $\phi(c) \geq \phi(a) \wedge \phi(b)$ dir.

Sonuç olarak Teorem 1.6.5'den ϕ , I 'nin bulanık filtresidir.

Teorem 1.6.11. (Islam vd., 2022) ϕ , I 'nin bulanık filtresi olsun. Her $a, b, c \in I$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. Eğer $\phi(a \rightarrow b) = \phi(e)$ ise, $\phi(a) \leq \phi(b)$ dir.
2. $\phi(a \rightarrow c) \geq \phi(a \rightarrow b) \wedge \phi(b \rightarrow c)$ dir.

İspat. ϕ , I 'da bir bulanık filtre olsun.

1. Önerme 1.6.6'dan $\phi(b) \geq \phi(a) \wedge \phi(a \rightarrow b)$ olduğunu biliyoruz. Kabul edelim ki $\phi(a \rightarrow b) = \phi(e)$ olsun. Dolayısıyla kabulden $\phi(b) \geq \phi(a) \wedge \phi(e)$ olur. Teorem 1.6.5 (1)'den de her $a \in I$ için $\phi(e) \geq \phi(a)$ olduğunu biliyoruz. Buradan $\phi(a) \geq \phi(b)$ olur.
2. Teorem 1.4.4 (6)'dan $a \rightarrow c \geq (a \rightarrow b) * (b \rightarrow c)$ olduğunu biliyoruz. ϕ , sırankorur olduğundan $\phi(a \rightarrow c) \geq \phi((a \rightarrow b) * (b \rightarrow c))$ olur ve Teorem 1.6.5 (2)'den $\phi(a \rightarrow c) \geq \phi(a \rightarrow b) \wedge \phi(b \rightarrow c)$ olur.

Aşağıdaki örnekte bir IL-cebirinde aldığımız herhangi iki a ve b elemanları için IL-cebirinde bulanık filtre olan herhangi bir ϕ bulanık alt küme için $\phi(a * b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$ ve $\phi(a^n) = \phi(a)$ özelliklerinin geçerli olmadığını göreceğiz. Burada a^n ile kastedile $a * a * \dots * a$ dır.

Örnek 1.6.12 (Islam vd., 2022) I , Örnek 1.4.7'de verilen IL-cebiri olsun. I 'nin bulanık alt kümesi olan ϕ 'nin $\phi(t) = \phi(x) = \phi(y) = \phi(e) = \phi(\top) = 0.9$ ve $\phi(\perp) =$

$\phi(z) = 0.1$ şeklinde tanımlandığını düşünelim. ϕ , I 'nin bulanık filtresidir. Burada ϕ 'nin $s \in [0,1]$ için seviye kümeleri aşağıdaki gibidir.

$$\phi = \begin{cases} I & , 0 \leq s \leq 0.1 \\ \{t, x, y, e, T\} & , 0.1 < s \leq 0.9 \\ \emptyset & , s > 0.9 \end{cases}$$

Burada $\phi(z * z) = \phi(t) = 0.9 \neq \phi(z) \wedge \phi(z) = 0.1$ dir. Bu da bize hem $\phi(a * b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$ olmadığını hem de $\phi(a^n) = \phi(a)$ olmadığını gösterir.



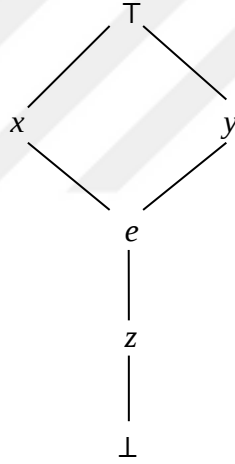
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. IL-Cebirlerinin L-Filtre ve TL-Filtreleri

Bu bölümde IL-cebirlerinde bulanık filtre kavramının iki farklı genellemesi olarak, IL-cebirlerinde L-filtre ve TL-filtre kavramları tanıtılacak bazı özellikleri araştırılacaktır. Burada aksi belirtilmedikçe I bir IL-cebirini gösterecektir.

Tanım 2.1.1. L bir tam kafes ve ϕ , I 'nın bir L-alt kümesi olsun. Eğer ϕ 'nin boştan farklı tüm seviye kümeleri I 'nın filtresi ise ϕ 'ye I 'nın L-filtresi denir.

Örnek 2.1.2. $I = \{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı, bu küme üzerinde $" * "$ ve $" \rightarrow "$ ikili işlemleri, sırasıyla, Şekil 7, Tablo 13 ve Tablo 14 deki gibi verilsin.



Şekil 7. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı

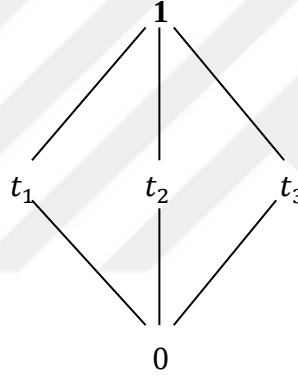
Tablo 13. $\{\perp, z, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi

$*$	$\perp$	x	y	e	z	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
x	$\perp$	x	$\top$	x	x	$\top$
y	$\perp$	$\top$	y	y	y	$\top$
e	$\perp$	x	y	e	z	$\top$
z	$\perp$	x	y	z	z	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Tablo 14. $\{\perp, x, y, z, e, \top\}$ kümesi üzerinde $\rightarrow$ işlemi

$\rightarrow$	$\perp$	x	y	e	z	$\top$
$\perp$	$\top$	x	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
x	$\perp$	x	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
y	$\perp$	$\perp$	$\perp$	y	$\perp$	$\top$
e	$\perp$	x	y	$\top$	z	$\top$
z	$\perp$	x	y	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

Bunlara göre $(I, \wedge, \vee, \perp, \rightarrow, *, e)$ bir IL-cebiridir. $L = \{0, t_1, t_2, t_3, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı Şekil 8 deki gibi olsun.

Şekil 8. $\{0, t_1, t_2, t_3, \top\}$ kafesinin Hasse diyagramı

I 'nin bir L-alt kümesi olan ϕ kabul edelim ki $\phi(\top) = \phi(e) = \phi(x) = \phi(y) = 1$, $\phi(z) = t_1$ ve $\phi(\perp) = 0$ olacak şekilde tanımlansın. ϕ 'nin L 'nin tüm elemanlarına göre tüm seviye kümeleri $\phi_0 = I$, $\phi_{t_1} = \{z, e, x, y, \top\}$, $\phi_{t_2} = \phi_{t_3} = \phi_1 = \{e, x, y, \top\}$ şeklinde olur. Tüm bu seviye kümeleri filtre tanımından I 'nin filtresi olduğu açıktır. Dolayısıyla, ϕ , Tanım 2.1.1'den dolayı bir L-filtredir.

Önerme 2.1.3. $F \subseteq I$ olsun. F , I 'nin bir filtresidir ancak ve ancak F 'nin karakteristik fonksiyonu olan χ_F , I 'nin L-filtresidir.

İspat. F , I 'nin filtresi olsun. F 'nin karakteristik fonksiyonu olan χ_F 'in $\chi_F: I \rightarrow \{0,1\}$, $\chi_F(x) = \begin{cases} 1, & x \in F \\ 0, & x \notin F \end{cases}$ şeklinde tanımlı olduğunu biliyoruz. Burada iki durum söz konusudur. $s \in \{0,1\}$ için bu durumların ilki $s = 0$ olması durumudur. Bu durumda

$(\chi_F)_0 = I$ olur. İkinci durum ise $s = 1$ olması durumudur. Bu durumda ise $(\chi_F)_1 = \{a \in I : 1 \geq \chi_F(a)\} = \{a \in I : \chi_F(a) = 1\} = F$ olur. I ve F , I 'nin bir filtresi olduğundan χ_F , I 'nin bir L-filtresidir. Tersine χ_F , I 'nin L-filtresi olsun. Tanım 2.1.1 gereği χ_F 'nin tüm seviye kümeleri I 'nin filtresi olur. Dolayısıyla, $(\chi_F)_1 = F$, I 'nin filtresidir.

Önerme 2.1.4. ϕ , I 'nin bir L-filtresi olsun. Eğer $a, b \in I$ için $a \geq b$ ise $\phi(a) \geq \phi(b)$ dir.

İspat. Herhangi $a, b \in I$ için $a \geq b$ olduğunu kabul edelim ve $\phi(b) = s$, $s \in L$ olsun. Bu durumda $a \wedge b = b$ olur ve dolayısıyla $a, a \wedge b \in \phi_s$ olur. Burada ϕ_s , I 'nin filtresi ve $a \wedge b \leq a$ olduğundan $a \in \phi_t$ olur. Sonuç olarak $\phi(a) \geq s = \phi(b)$ olur.

Önerme 2.1.4 bize herhangi bir IL-cebirinin L-filtresinin sırakorur olduğunu gösterir. Daha önce IL-cebirinin bulanık filtre tanımında da bu durumun böyle olduğu gösterilmişti.

Önerme 2.1.5. Eğer ϕ , I 'nin L-filtresi ise herhangi $a, b \in I$ için $T(\phi(a), \phi(b)) \leq \phi(a \wedge b)$ dir.

İspat. ϕ , L-filtre ve $T(\phi(a), \phi(b)) = s$, $s \in L$ olsun. Uyarı 1.2.8'den en büyük T t-normun $T_M(x, y) = x \wedge y$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $s \leq \phi(a)$ ve $s \leq \phi(b)$ olur. Buradan $a, b \in \phi_s$ olduğu açıktır. ϕ_s , I 'nin filtresi olduğundan $a \wedge b \in \phi_s$ olur. Sonuç olarak $T(\phi(a), \phi(b)) = s \leq \phi(a \wedge b)$ dir.

Teorem 2.1.6. ϕ , I 'nin herhangi bir L-alt kümesi olsun. Eğer ϕ , I 'nin L-filtresi ise her $a, b \in I$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. $\phi(x) \leq \phi(e)$ dir
2. $T(\phi(a), \phi(b)) \leq \phi(a * b)$ dir.

İspat. ϕ , I 'nin bir L-filtresi olsun.

1. $\phi(a) = s_0$, $s_0 \in L$ ve $a \in I$ keyfi olsun. Buradan $a \in \phi_{s_0}$ olur. Dahası ϕ_{s_0} , I 'nin filtresi olduğundan $e \in \phi_{s_0}$ dir. Sonuç olarak $\phi(a) = s \leq \phi(e)$ olur.
2. $T(\phi(a), \phi(b)) = s_1$, $s_1 \in L$ ve $a, b \in I$ olsun. Uyarı 1.2.8'den $T(\phi(a), \phi(b)) \leq \phi(a)$ ve $T(\phi(a), \phi(b)) \leq \phi(b)$ olduğunu biliyoruz. Buradan $\phi(a) \geq s_1$ ve $\phi(b) \geq s_1$ olur ve dolayısıyla $a, b \in \phi_{s_1}$ olur. Dahası ϕ_{s_1} , I 'nin filtresi olduğundan $a * b \in \phi_{s_1}$ olur ve sonuç olarak $T(\phi(a), \phi(b)) = s_1 \leq \phi(a * b)$ olur.

Önerme 2.1.7. ϕ , I 'nin bir L-alt kümesi olsun. ϕ , I 'nin L-filtresi ise $T(\phi(a), \phi(a \rightarrow b)) \leq \phi(b)$ dir.

İspat. ϕ I 'nın L -filtresi olsun. Teorem 1.4.4'den $a * (a \rightarrow b) \leq b$ olduğunu biliyoruz. Önerme 2.1.4'den $\phi(a * (a \rightarrow b)) \leq \phi(b)$ olur ve Teorem 2.1.6 (ii)'den $\phi(b) \geq \phi(a * (a \rightarrow b)) \geq T(\phi(a), \phi(a \rightarrow b))$ olur.

Önerme 2.1.8. ϕ , I 'nın L -alt kümesi olsun. Eğer ϕ , I 'nın L -filtresi ise her $a \in B$ için $\phi(a) = \phi(e)$ dir, burada $B = \{a \in I : a \geq e\}$ dir.

İspat. $a \in B$ olsun. B kümesinin tanımından $a \geq e$ dir. Önerme 2.1.4'den $\phi(a) \geq \phi(e)$ olur. Dahası Teorem 2.1.6 (i)'den de her $a \in I$ için $\phi(a) \geq \phi(e)$ olduğunu biliyoruz. Bu iki eşitsizlikten $\phi(a) = \phi(e)$ olur.

Teorem 2.1.9. Eğer I 'nın L -alt kümesi olan ϕ , I 'nın L -filtresi ise her $a, b, c \in I$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. $c \geq a \wedge b$ ise $T(\phi(a), \phi(b)) \leq \phi(c)$ dir.
2. $c \geq a * b$ ise $T(\phi(a), \phi(b)) \leq \phi(c)$ dir.

İspat. ϕ , I 'nın L -filtresi ve $a, b, c \in I$ keyfi olsun.

1. Kabul edelim ki $c \geq a \wedge b$ olsun. Önerme 2.1.4'den $\phi(a \wedge b) \leq \phi(c)$ olur ve Önerme 2.1.5 (ii)'den de $T(\phi(a), \phi(b)) \leq \phi(a \wedge b) \leq \phi(c)$ olur.
2. Kabul edelim ki $c \geq a * b$ olsun. Önerme 2.1.4'den $\phi(a * b) \leq \phi(c)$ olur ve Teorem 2.1.6'den de $T(\phi(a), \phi(b)) \leq \phi(a * b) \leq \phi(c)$ olur.

Teorem 2.1.10. ϕ I 'nın bir L -filtresi olsun. O zaman herhangi $a, b, c \in I$ için aşağıdakileri şartlar sağlanır.

1. Eğer $\phi(a \rightarrow b) = \phi(e)$ ise $\phi(b) \geq \phi(a)$ dır,
2. $T(\phi(a \rightarrow b), \phi(b \rightarrow c)) \leq \phi(a \rightarrow b)$ dir.

İspat. ϕ , I 'nın bir L -filtresi ve $a, b, c \in I$ keyfi olsun.

1. $\phi(a \rightarrow b) = \phi(e)$, $\phi(a) = s$ ve $s \in L$ olduğunu kabul edelim. Açıkça $a \in \phi_s$ olur. Ek olarak ϕ_s filtre olduğundan $e \in \phi_s$ olduğunu biliyoruz. Buradan $s \leq \phi(e) = \phi(a \rightarrow b)$ olur. Yani $a \rightarrow b \in \phi_s$ olur. Dolayısıyla $a, a \rightarrow b \in \phi_s$ olduğundan $b \in \phi_s$ olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak $\phi(b) \geq s = \phi(a)$ olur.
2. Teorem 1.4.4'den $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \leq (a \rightarrow c)$ olduğunu biliyoruz. Önerme 2.4'ü kullanarak $\phi((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \leq \phi((a \rightarrow c))$ olduğunu elde ederiz. Son olarak Önerme 2.1.5'den $T(\phi(a \rightarrow b), \phi(b \rightarrow c)) \leq \phi(a \rightarrow c)$ olur.

Tanım 2.1.11. ϕ , I 'nın bir L -alt kümesi olsun. Her $a, b \in I$ için aşağıdaki şartları sağlayan ϕ ye I 'nın TL -filtresi denir.

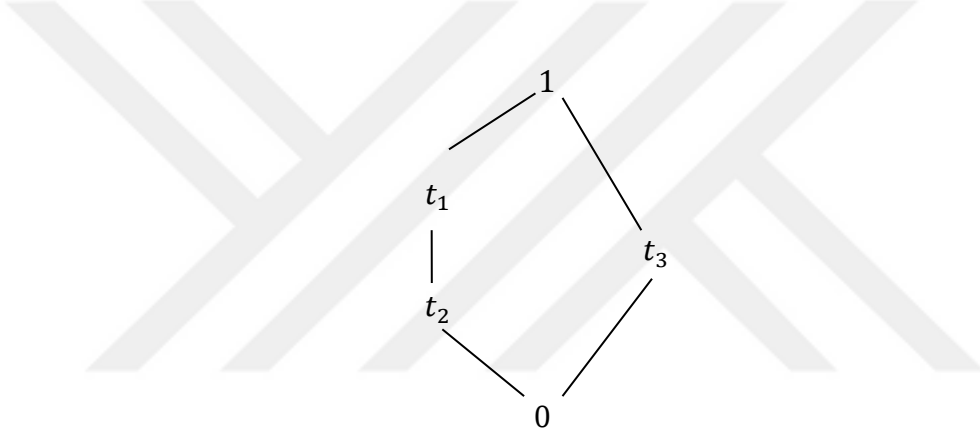
1. Eğer $a \geq b$ ise $\phi(a) \geq \phi(b)$ dir,
2. $T(\phi(a)\phi(b)) \leq \phi(a \wedge b)$ dir,
3. $T(\phi(a)\phi(b)) \leq \phi(x * b)$ dir,
4. $\phi(a) \leq \phi(e)$ dir.

Teorem 2.1.12. ϕ , I 'nın bir L-alt kümesi olsun. Eğer ϕ , I 'nın bir L-filtre ise I 'nın bir TL-filtresidir.

İspat. Önerme 2.1.4, Önerme 2.1.5 ve Teorem 2.1.6'dan açıktır.

Aşağıdaki örnek Teorem 2.1.12'nin tersinin her zaman doğru olmayacağını gösterir.

Örnek 2.1.13. I, Örnek 1.4.9'da verilen IL-cebiri ve $L = \{0, t_1, t_2, t_3, 1\}$ kafesinin Hasse diyagramı Şekil 9 daki gibi olsun.



Şekil 9. $\{0, t_1, t_2, t_3, 1\}$ kafesinin Hasse diyagramı

Kabul edelim ki $\phi: I \rightarrow L$ fonksiyonu $\phi(e) = \phi(z) = \phi(\top) = t_1$, $\phi(y) = \phi(x) = t_2$ ve $\phi(\perp) = 0$ olacak şekilde tanımlansın ve $T = T_W$ olsun. Bu durumda ϕ , I 'nın bir TL-filtresidir. Burada ϕ 'nin t_2 'ye göre seviye kümesi olan $\phi_{t_2} = \{x, y, z, \top\}$, I 'nin filtresi değildir; çünkü $x, y \in \phi_{t_2}$ olmasına rağmen $x \wedge y \notin \phi_{t_2}$ dir. Dolayısıyla ϕ , I 'nın bir L-filtre değildir.

Bu örnekten de görüldüğü üzere, TL-filtre tanımı L-filtre tanımından daha geniş bir tanımdır. Yine bu örnekte $\phi(z \wedge y) = \phi(y) = t_2 \neq T(\phi(z), \phi(y)) = T(t_1, t_2) = 0$ olduğunu görüyoruz. Bu da bize $\phi(a \wedge b) = T(\phi(a), \phi(b))$ eşitliğinin her zaman doğru olmadığını da gösterir. Bu özellik IL-cebirinin bulanık filtre tanımına göre her $a, b \in I$ için $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$ olacak şekildeydi.

Önerme 2.1.14. F boştan farklı bir küme ve $F \subseteq I$ olsun. F I 'nın bir filtresidir $\Leftrightarrow \chi_F$, I 'nın bir TL-filtresidir.

İspat. Varsayalım ki F , I 'nin bir filtresi olsun.

1. Tanım 1.5.1'den biliyoruz ki $e \in F$ dir. Böylelikle açıktır ki $\chi_F(e) = 1$ olur. $\{0,1\}$ kümesinin en büyük elemanı 1 olduğundan herhangi $a \in I$ için $\chi_F(e) = 1 \geq \chi_F(a)$ olur.
2. $a, b \in I$ ve $b \geq a$ olsun. $\chi_F(b) \geq \chi_F(a)$ eşitsizliğini göstermeyi iki durumda inceleyeceğiz :
 - i. $a \in F$ ise açıkça $\chi_F(a) = 1$ olur. Öte yandan Tanım 1.5.1'den $b \in F$ olur Buradan açıkça $\chi_F(a) = \chi_F(b) = 1$ olur.
 - ii. $a \notin F$ ise açıkça $\chi_F(a) = 0$ olur. $\{0,1\}$ kümesinin en küçük elemanı 0 olduğundan herhangi bir $b \in I$ için $0 = \chi_F(a) \leq \chi_F(b)$ olur.

Sonuç olarak $a, b \in I$ için $\chi_F(b) \geq \chi_F(a)$ dir.

3. $T(\chi_F(a), \chi_F(b)) \geq \chi_F(a * b)$ olduğunu göstermeyi üç durumda inceleyeceğiz:
 - i. Eğer $a, b \in F$ ise açıkça $\chi_F(a) = \chi_F(b) = 1$ dir. Tanım 1.5.1'den $a * b \in F$ olur; açıkça $\chi_F(a * b) = 1$ dir. Buradan $T(\chi_F(a), \chi_F(b)) = T(1,1) = 1$ olur. Sonuç olarak $T(\chi_F(a), \chi_F(b)) = 1 = \chi_F(a * b)$ olur.
 - ii. Eğer $a \in F$ ve $b \notin F$ ise, açıkça $\chi_F(a) = 1$ ve $\chi_F(b) = 0$ olur. Buradan $T(\chi_F(a), \chi_F(b)) = T(1,0) = 0$ olur. $\{0,1\}$ kümesinin en küçük elemanı 0 olduğundan $T(\chi_F(a), \chi_F(b)) = 0 \leq \chi_F(a * b)$ olur.
 - iii. Eğer $a, b \notin F$ ise açıkça $\chi_F(a) = \chi_F(b) = 0$ olur. Buradan $T(\chi_F(a), \chi_F(b)) = T(0,0) = 0 \leq \chi_F(a * b)$ olur.

Sonuç olarak keyfi $a, b \in I$ için $T(\chi_F(a), \chi_F(b)) \geq \chi_F(a * b)$ dir.

4. Benzer şekilde $a, b \in I$ için $T(\chi_F(a), \chi_F(b)) \geq \chi_F(a \wedge b)$ olduğu gösterilebilir.

Sonuç olarak χ_F , I 'nin bir TL-filtresidir. Şimdi bu önermenin tersini gösterelim. Kabul edelim ki F boştan farklı bir küme ve χ_F , I 'nin bir TL-filtresi olsun. Açıkça $\exists a \in F$ dir. Buradan $\chi_F(a) = 1$ dir. Tanım 2.1.11 (iv)'den biliyoruz ki keyfi bir $a \in I$ için $\chi_F(e) \geq \chi_F(a)$ dır. Dolayısıyla $1 = \chi_F(a) \leq \chi_F(e)$ olur. $\{0,1\}$ kümesinin en büyük elemanı 1 olduğundan $\chi_F(e) = 1$ olduğu açıktır. Yani $e \in F$ dir. Kabul edelim ki $a, b \in F$ keyfi olsun. Açıkça $\chi_F(a) = \chi_F(b) = 1$ olur. Tanım 2.1.11 (iii)'den $\chi_F(a * b) \geq T(\chi_F(a), \chi_F(b)) = T(1,1) = 1$ olur ve buradan $a * b \in F$ olur. Benzer şekilde Tanım 2.1.11 (iv)'den $a \wedge b \in F$ olur. Son olarak, kabul edelim ki keyfi $a, b \in I$ için $a \leq b$ ve $a \in F$ olsun. Açıkça $\chi_F(a) = 1$ olur ve Tanım 2.11 (i)'den $\chi_F(a) \leq \chi_F(b)$ olur. Buradan

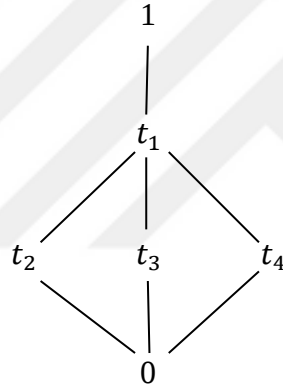
$1 \leq \chi_F(b)$ olur. $\{0,1\}$ kümesinin en büyük elemanı 1 olduğundan $\chi_F(b) = 1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $b \in F$ olur. Sonuç olarak F, I 'nın bir filtresidir.

Önerme 2.15. Eğer ϕ, I 'nın TL-filtresi ise, keyfi $a, b \in I$ için $T(\phi(a), \phi(a \rightarrow b)) \geq \phi(b)$ dir.

İspat. Teorem 1.4.4'den $b \geq a * (a \rightarrow b)$ olduğunu biliyoruz ve ϕ, I 'nın TL-filtresi olduğundan $\phi(b) \geq \phi(a * (a \rightarrow b))$ olur. Dahası Tanım 2.1.11 (iii)'den $T(\phi(a), \phi(a \rightarrow b)) \leq \phi(a * (a \rightarrow b)) \leq \phi(b)$ dır.

IL cebirinin bulanık filtre tanımına, L-filtre tanımına ve hatta BL-cebirinin TL-filtre tanımına göre, herhangi $a, b \in I$ için eğer $\phi(a \rightarrow b) = \phi(e)$ ise $\phi(b) \geq \phi(a)$ olur. Aşağıdaki örnek bu durumun TL-filtrede geçerli olmayacağını gösterir.

Örnek 2.17. I , Örnek 1.4.7'deki verilen IL-cebiri olsun. $L = \{0, t_1, t_2, t_3, t_4, 1\}$ Hasse diyagramı Şekil 10 daki gibi olsun.



Şekil 10. $\{0, t_1, t_2, t_3, t_4, 1\}$ kafesinin Hasse diyagramı

$x, y \in I$ için $T = T_W$ alalım. $x, y \in I$ için $\phi(e) = \phi(\top) = \phi(x) = 1$, $\phi(y) = t_2$, $\phi(z) = t_3$ ve $\phi(t) = \phi(\perp) = 0$ olarak tanımlanan ϕ, I 'nın bir TL-filtresidir. Bu örnekte $\phi(y \rightarrow t) = \phi(x) = \phi(e)$ olur fakat $\phi(y) = t_2 \not\geq \phi(t) = 0$ dır.

Bu durum BL-cebiri için farklıdır. BL-cebirinde $\psi(\top) = 1$ olduğu için (bkz. Tanım 1.3.5) keyfi $a, b \in A$ için eğer $\psi(a \rightarrow b) = \psi(\top) = 1$ ise, $\psi(b) \geq T(\psi(a), \psi(a \rightarrow b)) = T(\psi(a), \psi(e)) = T(\psi(a), 1) = \psi(a)$ dir.

Aşağıda IL-cebirlerinin TL-filtre tanımına göre bir BL-cebirinde TL-filtre örneği verilmiştir.

Örnek 2.18. $A = \{0, u, v, 1\}$ kümesi, Örnek 1.3.6'da verilen BL-cebiri, $L = \{0, t_1, t_2, 1\}$ ve $0 < t_1 < t_2 < 1$ ve $T = T_M$ olsun. $\psi: A \rightarrow L$, A 'nın L -alt kümesinin $\psi(0) =$

$\psi(u) = 0, \psi(v) = t_1$ ve $\psi(\mathbf{1}) = t_2$ şeklinde tanımlandığını düşünelim. Burada ψ , Tanım 2.12'ye göre A 'nın bir TL-filtresidir.



3. TARTIŞMA

Bu çalışmanın amacı, MV-cebiri, BL-cebiri, MTL-cebiri ve FL_{ew} -cebirinden daha geniş bir yapı olan IL-cebirlerinin bulanık filtre kavramının bazı genellemelerini sunmak ve bulanık filtrelerle ilgili elde edilmiş sonuçlardan hangilerinin bu genellemelerde de sağlandığını araştırmaktır. Bu amaç doğrultusunda IL-cebirlerinde L-filtre ve TL-filtre tanımları yapılmıştır. IL-cebirlerinde L-filtreler ve TL-filtreler ile ilgili teoremler sunulmuştur.



4. SONUÇLAR

Bu çalışmanın sonucunda, IL-cebirlerinin bulanık filtreleri tanımının bir genellemesi olarak L-filtre kavramı tanıtılarak ilgili özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca, daha genel olarak, IL-cebirlerinde TL-filtre kavramı verilmiş ve bu kavramın L-filtre kavramı ile ilişkisini ortaya koyan teoremler ispatlanmıştır.



5. ÖNERİLER

IL-cebirlerinde başka filtre tanımları (implikatif filtre, pozitif implikatif filtre gibi) verilebilir ve bunlar arasındaki ilişki incelenebilir. TL-filtrelerin homomorfiler altındaki görüntüleri ve bir IL-cebirinin bir TL-filtreye göre bölüm cebirinin özellikleri araştırılabilir.



6. KAYNAKLAR

- Birkhoff, G. (1940). *Lattice theory* (Cilt 25). American Mathematical Soc.
- De Baets, B., & Mesiar, R. (1999). Triangular norms on product lattices. *Fuzzy sets and systems*, 104(1), 61-75.
- Feyzioğlu, A. K. (1990). A Course on Agebra. 1. Boğaziçi Üniversitesi Yayinevi.
- Goguen, J. A. (1967). L-Fuzzy Sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 18(1), 145-174.
- Hajek, P. (1998). *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Haveshki, M., A., B. S., & Eslami, E. (2006). Some typ of filters of BL-algebras. *Soft computing*, 10, 657-664.
- Islam, S., Sanyal, A., & Sen, J. (2020). *Filter theory of IL-algebras*. arXiv preprint arXiv:2003.01524.
- Islam, S., Sanyal, A., & Sen, J. (2022). Fuzzy filters of IL-algebras. *Soft Computing*, 26(15), 7017-7027.
- Khorami, R. T., & Saeid, A. B. (2012). New representation for filters of BL-algebras. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 23(5), 225-235.
- Kihara, H., & Ono, H. (2008). Algebraic characterizations of variable separation properties. *Reports on Mathematical Logic*.
- Klement, E. P., Mesiar, R., & Pap, E. (2013). *Triangular Norms* (Cilt 8). Springer Science & Business Media.
- Liu, L., & Li, K. (2005). Fuzzy Filters of BL-algebras. *Information Sciences*, 173(1-3), 141-154.
- Rasiowa, H. (1974). *An Algebraic Approach to non-lassical Logics*. Amsterdam, North Holland.
- Troelstra, A. S. (1992). *Lectures on Linear Logic*. Stanford: Center for the Study of Language and Information Publications.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Huriye Betül DOĞRU, İlkokulunu Aydınlikevler ilköğretim okulunda tamamladı. 2016 yılından Trabzon Anadolu İmam Hatip lisesinden mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz teknik üniversitesi Matematik bölümünü kazandı ve 2020 yılında bölümü ikincilikle bitirdi. Mezun olduktan hemen sonra Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa kabul aldı. 2020-2021 eğitim öğretim yılında Yabancı diller Yüksek okulunda İngilizce hazırlık okudu. 2021 yılında TÜBİTAK BİDEB tarafından genel yurtiçi yüksek lisans bursu almaya hak kazandı.