

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

**İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN
ADAYLARININ DENKLİK BAĞINTISINA İLİŞKİN
KANIT İMAJLARININ İNCELENMESİ**

Esra Pınar KAYA

İzmir

2018

**T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN
ADAYLARININ DENKLİK BAĞINTISINA İLİŞKİN
KANIT İMAJLARININ İNCELENMESİ**

Esra Pınar KAYA

**Danışman
Prof. Dr. Serkan NARLI**

**İzmir
2018**

YEMİN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Denklik Bağıntısına İlişkin Kanıt İmajlarının İncelenmesi” adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynak dizininde gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

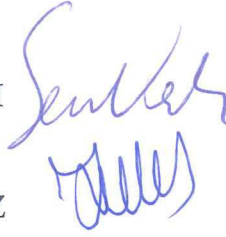
05.06.2018

Esra Pınar Kaya

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İşbu çalışma, jürimiz tarafından Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr. Serkan NARLI



Üye : Prof.Dr. Süha YILMAZ

Üye : Dr.Öğr.Üyesi Emre EV ÇİMEN



Onay

Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

05/06/2018



Prof. Dr. Süha YILMAZ
Enstitü Müdürü V.

TEŞEKKÜR

Hayatımın her anında desteğini hep hissettiğim, her zaman çok güçlü bir kadın olan ve bana güç veren canım annem Miyeser KAYA'ya, çalışkanlığını örnek aldığım, bizim için birçok fedakarlıkta bulunan sevgili babam Murat KAYA'ya ve doğduğu günden bu yana hayatımıza renk katan, benden çok küçük olmasına rağmen her konuda desteğini hissettiğim, çok iyi yerlere geleceğine inandığım canım kardeşim Mert Can KAYA'ya teşekkür ederim. Bu süreçte maddi ve manevi destekleriniz hep yanımdaydı.

Öğrencilerine her zaman çok değer veren, her daim sabırlı ve güleryüzlü, bize matematiğin gücünü gösteren çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Serkan NARLI'ya bu yolda bana gösterdiği rehberlik için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Beni büyüten, bir cümlesinin bile içimi ferahlatmaya yettiği, yol göstericim, anne yarım Kumru Eğrilmez'e, her zaman neşe kaynağım olan ve bu süreçte onunla kısıtlı zaman geçirmemi anlayabilecek olgunluktaki güzeller güzeli yiğenim Nergis Berçem SİĞAK'a, her yönüyle örnek aldığım, bana çok büyük desteği olan, canım abim Prof. Dr. Sait EĞRİLMEZ'e ve aslında ailecek, insana insan olduğu için değer vermeyi anlamamı sağlayan EĞRİLMEZ ailesine sonsuz teşekkürler.

Yanında hep çok güçlü hissettiğim, her zaman destekçim, her zaman neşem, canım Halil Berkuş'a ve hayatıma girmesini sağlayan rastlantılara sonsuz teşekkürler.

Lisans ve lisansüstü eğitimim boyunca bize ışık tutan, eğitim anlayışımı geliştiren çok değerli Dokuz Eylül Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümündeki hocalarıma çok teşekkürler.

Lise eğitimimdeki en büyük şansım, bana matematiği sevdiren, öğretmenliğine hayran olduğum sevgili hocam Süleyman TOZLU'ya, özellikle öğretmenlik yapmaya başladıktan sonra daha çok anar olduğum, örnek aldığım değerli fizik hocam Enver ÖZARSLAN'a çok teşekkürler.

Ne zaman çalışmaktan yorulsam, beni motive eden, birçok şeyi paylaştığım ve beraber büyüdüğüm Nureşşan şADAN'a teşekkürler. Çalışmanın çok kıymetli bir şey olduğunu öğreten, öğrenmeye dair aşk duymamı sağlayan, matematiğin en heyecan verici yanlarını öğrendiğim ve hayata dair bakış aımı derinden etkileyen Matematik Köyü'ne sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

YEMİN.....	i
TEŞEKKÜR	ii
Tablo Listesi.....	v
Şekil Listesi	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT	ix
BÖLÜM I	1
GİRİŞ	1
1.1. Denklik Bağıntısı.....	2
1.2. Kanıt İmajı	3
1.3. Problem Durumu	5
1.4. Amaç ve Önem	6
1.5. Problem Cümlesi.....	6
1.6. Alt Problemler.....	7
1.7. Sayıtlar	7
1.8. Sınırlıklar	7
1.9. Tanımlar	7
1.10. Kısaltmalar	8
BÖLÜM II	9
İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR.....	9
2.1. Denklik Bağıntısı İle İlgili Literatür	9
2.2. Teorik Çerçeve.....	10
BÖLÜM III.....	16
YÖNTEM.....	16
3.1.Araştırma Modeli	16
3.2. Çalışma Grubu.....	17
3.3. Veri Toplama Araçları.....	18
3.3.1. Denklik Kavramına İlişkin Form (DKİF).....	19
3.3.2. Denklik Bağıntısı Kavramları Bilgi Formu (DBKBF).....	19
3.3.3. Kanıt İmajı Formu (KİF)	19
3.4. Veri Toplama Süreci	20
3.5. Veri Çözümleme Teknikleri.....	20

3.6.Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği	21
BÖLÜM IV	22
BULGULAR VE YORUMLAR	22
4.1. Birinci Alt Probleme Ait Bulgular	22
4.1.1. Soru 1'e İlişkin Bulgular.....	22
4.1.2. Soru 2'ye İlişkin Bulgular.....	24
4.1.3. Soru 3'e İlişkin Bulgular.....	26
4.1.4. Soru 4'e İlişkin Bulgular.....	29
4.2. Denklik Bağıntısı Kavramları Bilgi Formu (DBKBF)'ndan Elde Edilen Bulgular	31
4.2.1. DBKBF Soru 1'e İlişkin Bulgular	31
4.2.2. DBKBF Soru 2'ye İlişkin Bulgular	33
4.2.3. DBKBF Soru 3'e İlişkin Bulgular	37
4.2.4. DBKBF Soru 4'e İlişkin Bulgular	41
4.3. İkinci Alt Probleme Ait Bulgular	46
4.3.1. Teorem 1'e İlişkin Kanıt İmajları.....	46
4.3.2. Teorem 2'ye İlişkin Kanıt İmajları.....	55
4.3.3. Teorem 3'e İlişkin Kanıt İmajları.....	72
4.3.4. Teorem 4'e İlişkin Kanıt İmajları.....	81
BÖLÜM V.....	94
SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER	94
5.1. Sonuç ve Tartışma	94
5.1.1. Denklik Kavramına İlişkin Sonuçlar.....	94
5.1.2. Denklik Bağıntısı Kavramları Bilgi Formuna İlişkin Sonuçlar	95
5.1.3. Denklik Bağıntısına İlişkin Kanıt İmajı Teorik Çerçevesiyle Elde Edilen Sonuçlar	96
5.2. Öneriler.....	99
KAYNAKÇA	100
EKLER.....	106

Tablo Listesi

Tablo 1 DKİF Soru 1’e Ait Kategoriler	23
Tablo 2 DKİF Soru 2’ye Ait Kategoriler	24
Tablo 3 DKİF Soru 3’e Ait Kategoriler	26
Tablo 4 DKİF Soru 4’e Ait Kategoriler	30
Tablo 5 DBKBF Soru 1’e Ait Kategoriler.....	32
Tablo 6 DBKBF Soru 2’ye Ait Kategoriler.....	34
Tablo 7 DBKBF Soru 3’e Ait Kategoriler.....	38
Tablo 8 DBKBF Soru 4’e Ait Kategoriler.....	41

Şekil Listesi

Şekil 1: Kanıt İmajı Nedir?	5
Şekil 2: Teorik Çerçeveler Arasındaki İlişki	13
Şekil 3: DBKBF 1. Soru Doğru Tanım Örneği.....	32
Şekil 4: DBKBF 1. Soru Yanlış Tanım Örneği.....	33
Şekil 5: DBKBF 2. Soru Doğru İlişkilendirme Örneği	35
Şekil 6: DBKBF 2. Soruda Doğru İlişkilendirme Örneği.....	35
Şekil 7: DBKBF 2. Soruda Eksik veya Hatalı Açıklama Örneği	37
Şekil 8: DBKBF 2. Soruda Açıklamasız Örneği.....	37
Şekil 9: DBKBF 3.Soruda Doğru Açıklama Örneği	39
Şekil 10: DBKBF 3.Soruda Geçersiz Açıklama Örneği.....	40
Şekil 11: DBKBF 3.Soruda Gereksiz Cevap Örneği	40
Şekil 12: DBKBF 3.Soruda Geçersiz Yanıt Örneği.....	40
Şekil 13: DBKBF 4. Soru Doğru Yanıt Örneği	42
Şekil 14: DBKBF 4. Soru Doğru Yanıt Örneği	43
Şekil 15: DBKBF 4. Soru Geçersiz Yanıt Örneği.....	44
Şekil 16: Mehmet'in Olayı.....	50
Şekil 17: İdil'in 2. Teorem İçin Çalışması.....	65
Şekil 18: İdil'in 2. Teoremdeki Çalışmasının Devamı	67
Şekil 19: İdil'in 2. Teoremdeki Çalışması	68
Şekil 20: Mehmet'in 3. Teoremdeki Çalışması.....	76
Şekil 21: Sena'nın 3. Teoremdeki Çalışması	81
Şekil 22: İdil'in 4. Teoremdeki Çalışması	89
Şekil 23: İdil'in 4. Teoremdeki Çalışmasının Devamı	89
Şekil 24: Sena'nın 4. Teoremdeki Çalışması	93

ÖZET

İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Denklik Bağıntısına İlişkin Kanıt İmajlarının İncelenmesi

Esra Pınar KAYA

Bu araştırmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının denklik bağıntısına ait kanıt imajlarını; Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından geliştirilen, “Kanıt İmajı” kuramsal çerçevesinden yararlanarak incelemektir. Kanıt imajı Bilişsel Anlayış ve Duyuşsal Anlayış olmak üzere iki bileşene sahiptir. Öğretmen adaylarının ispat süreçleri incelenirken bu özellikler dikkate alınmıştır.

Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması (case study) kullanılmıştır. Araştırmanın katılımcılarını, bir devlet üniversitesinde soyut matematik dersini almakta olan birinci sınıf ilköğretim matematik öğretmen adayları oluşturmaktadır. Çalışmada açık uçlu sorulardan oluşan üç adet form geliştirilmiştir. Bunlardan ilki (Ek-1) öğrencilerin ‘denklik’ kavramına ilişkin sezgisel yaklaşımlarını ölçen açık uçlu sorular içermektedir. İkincisi (Ek-2) öğrencilerin denklik bağıntısına yönelik formal bilgi ve becerilerini ölçmeye yönelik sorulardan oluşmaktadır. Sonuncusu (Ek-3) ise öğretmen adaylarının denklik bağıntısına yönelik kanıt imajlarını ortaya çıkarmak amacıyla hazırlanan ispat formudur. Öncelikle öğretmen adaylarına, soyut matematik dersinde, öğrencilerin ‘denklik’ kavramına ilişkin sezgisel yaklaşımlarını ölçmek amacı ile bağıntı konusu işlenmeden önce ilk form uygulanmıştır. ‘Denklik bağıntısı’ konusu işlendikten sonra ikinci form uygulanmıştır. Sonrasında belirlenen kriterler göz önüne alınarak üç öğretmen adayı seçilerek denklik bağıntısına yönelik kanıt imajlarını ortaya çıkarmak amacıyla ispat formu doğrultusunda yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Ayrıca çalışmada öğrenciler üç hafta boyunca gözlenmiştir. Tüm dersler video kaydına alınmıştır. Sınıf içi gözlemler ile öğretmen adaylarının konuya yönelik genel yaklaşımları incelenirken bireysel çalışmalar ile ispat süreçlerine ve kanıt imajlarına ilişkin analizler yapılmıştır. Araştırmanın sonucunda öğretmen adaylarının konuya ilişkin bilgileri ve ispatlama süreçleri derinlemesine analiz edilerek kanıt imajlarının benzer ve farklı yönleri tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kanıt İmajı, Denklik, Denklik Bağıntısı, İlköğretim Matematik Öğretmen Adayı.

ABSTRACT

An Examination of Primary School Mathematics Pre-Service Teachers' Proof Images Regarding Equivalence Relations

The aim of this research was to investigate proving processes about equivalence relations of pre-service mathematics teachers using by Proof Image theoretical framework which was introduced by Dreyfus and Kidron (2014). Proof image has two components: the cognitive understanding and affective feeling. Therefore, this study is focused on prospective elementary mathematics teachers proving processes in the context of these components.

In this qualitative case study, data were gathered from first grade students by using multi- sampling method. Participants of the research are first-year elementary school mathematics teacher candidates who take abstract mathematics courses at a state university. Three forms of open-ended questions were developed in the study. Firstly, a form which includes equivalence questions is applied to 102 student (Appendix - 1). The second form is applied after the 'equivalence relation' had been processed (Appendix - 2). After that, 3 pre-service elementary mathematics teachers selected based on the skills of using mathematical language and semi-structured interviews were conducted in the direction of the proof form in order to reveal proof images about equivalence relations (Appendix -3). In addition, students were observed during the study for 3 weeks and all lessons are taken in video recording. Analyzes were made on individual studies proving processes and proof images when examining general approaches to the subject with in-class observations. As a result of the research, similarity and difference in proof images were determined by in depth analysis of prospective teachers' information and proving processes.

Keywords: Proof, Proof Image, Equivalence, Equivalence Relations, Pre-Service Elementary Mathematics Teacher

BÖLÜM I

GİRİŞ

Birçok araştırmacıya göre ispat, matematik ve matematik eğitiminin merkezinde yer almaktadır (Knuth, 2002; Lee, 2002; Padraig, MacLoughlin, 2002). İspat, matematikçiler ve matematik eğitimcileri için hem ortak hem de farklı amaçlara hizmet edebilmektedir. Örneğin Tall (1991), matematiksel ispatın amacının bir kavramı veya durumu anlamakla birlikte kavramın tanımının özünü ve mantıksal sürecinin nasıl işlediğini anlamayı da içerdiğini ifade etmiştir. Bu açıdan bakıldığında ispatın, matematiksel kavram ve bilgiler arasında mantıksal bağlar kurmaya ve böylece matematikteki konu ve kavramların birbirinden bağımsız olmadığını anlamaya katkı sağladığı söylenebilir.

İspat ve ispatlamanın matematik eğitimi içindeki yeri değerlendirildiğinde, ispatların öğrencilere genellikle hazır bir şekilde sunulduğu görülmekte ve bu durumun uzun vadede öğrenciler açısından birtakım sorunlara yol açabileceği düşünülmektedir (Weber ve Alcock, 2009). Örneğin; bu şekilde bir eğitim bireylerin kendi görüşlerini oluşturmalarını, düşüncelerini matematiksel yolla ifade etmeyi öğrenmelerini engelleyebilir. Matematik, öğrencinin zihinsel eylemleri ile büyüyen ve kendi kavramlarını önceki kavramları üzerinden inşa eden doğurgan bir yapıdadır (Akar, 2010). Öğrencinin matematiğin ilişkisel yapısını, ispat yapma sürecinde var olan bilgilerinden yeni matematiksel yapılar oluştururken görebileceği düşünülmektedir. Matematiksel yapıların oluşturulma sürecini incelemeye olanak sunduğu için bu çalışmada kanıt imajı teorik çerçevesi kullanılmıştır (Kidron ve Dreyfus, 2014). Bu çerçeveden ilerleyen bölümlerde detaylıca bahsedilmiştir. Kanıt imajı teorik çerçevesiyle incelenecek ispatlar denklik bağıntısı konusundan seçilmiştir.

Denklik kavramı matematikte ve günlük hayatta sıkça kullanılmaktadır. Skemp'e (1971) göre, denklik kavramı zekanın günlük işlevi ile matematiksel

düşünme arasında bir köprü kurmaya yarayan en temel kavramlardan biridir. Denklik kavramı pek çok yerde kullanılabilmektedir ve kullanımı muhakeme etme, akıl yürütme gibi becerileri gerektirmektedir. Örneğin iki grup nesnenin sayıca eşitliği denklik kavramını akla getirmektedir. Denklik kavramına bu şekilde günlük hayatta aşına olunmasına karşın, matematikte denklik bağıntısı konusu öğrencilerin zorlandıkları konulardan biri olmuştur (Chin ve Tall, 2000). Matematik eğitimi literatürü incelendiğinde özellikle denklik bağıntısı ve denklik sınıfı kavramlarının anlamlarına yönelik çalışmalar mevcuttur (Ashgari, 2005; Chin ve Tall 2000, 2001; Kar, Çiltaş ve Işık, 2011). Ancak denklik bağıntısı konusundaki ispat süreçlerini ayrıntılı bir şekilde inceleyen çalışmaya rastlanmamıştır. Bu araştırmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının denklik bağıntısı konusundaki ispatlarını Kidron ve Dreyfus'un (2014) geliştirdiği ve bilgiyi oluşturma özel bir durumu olarak gördükleri 'kanıt imajı' teorik çerçevesiyle incelemek amaçlanmıştır. Bir sonraki bölümde araştırmanın en önemli kavramlarından biri olan denklik kavramı, denklik bağıntısı kavramı ve bu kavramın tanımı hakkındaki tartışmalar ile kavramın önemi sunulmuştur. Ardından çalışmanın daha iyi anlaşılması için kanıt imajı kavramı açıklanmıştır.

1.1. Denklik Bağıntısı

Denklik kavramı günlük hayatta ve matematikte birçok anlamda kullanılan bir kavramdır. Türk Dil Kurumu (TDK), (2018), denklik kelimesinin anlamını denk olma durumu, eşitlik, müsavat, akreditasyon olarak açıklamıştır. Karakaş'ın matematikte denklik kavramı ile denklik bağıntısı arasındaki ilişkiye dair açıklaması aşağıda verilmiştir.

Matematikte belli bir ortamda tamamen farklı kabul edilen iki nesne, başka bir ortamda denk ya da eşit kabul edilebilirler. Örneğin günlük aritmetikte $1+1$ ve $3+4$ kuşkusuz farklı sayılardır, ancak 5 modülüne göre modüler aritmetikte bunlar denktir. Düzlemde yönleri ve uzunlukları aynı olan iki yönlendirilmiş doğru parçası, nerede yerleşmiş olurlarsa olsunlar, birbirlerine denk kabul edilerek vektör kavramı tanımlanır. Düzlemde, eşlenik (veya özdeş) üçgenler için aynı şey söylenebilir. Bu örnekler çoğaltılabilir. Bu durumu matematiksel bir tabana oturtmak için temel kavram, denklik bağıntısı kavramıdır. (Karakaş, 2008: 18)

Araştırmada sıkça bahsedileceği için denklik bağıntısının formal tanımının yapılmasının yararlı olacağı düşünülmektedir. ‘Boştan farklı bir A kümesi üzerinde tanımlanan β bağıntısı; yansıma, simetri ve geçişme özelliklerinin üçünü birden sağlıyorsa, β bağıntısına A’da tanımlı denklik bağıntısı denir’ (Narlı, 2013: 323). Literatürde denklik bağıntısının tanımının farklı şekilleri de mevcuttur. Örneğin; Skemp (1971) matematiksel tanımlı yapmadan önce günlük hayattan birçok örneklerle denklik bağıntısını açıklamış ve tanımlı yaparken geçişme özelliğine odaklanmıştır. Skemp’e göre bir denklik bağıntısı sırasıyla geçişme, yansıma ve simetri özelliklerini sağlamalıdır. Dienes (1976) denklik bağıntısı tanımını birçok matematik kitabında anlatıldığı şekliyle yapmış ve özellikleri yansıma, simetri, geçişme olarak sıralamıştır. Freudenthal (1966) ise bir denklik bağıntısı tanımlamak için yansıma ve geçişme özelliklerinin yeterli olacağını savunmuştur. Bu araştırmada birçok matematik kitabında yer alan şekli olan ilk tanım ile Narlı (2013) tarafından yapılan tanım baz alınmıştır.

Denklik bağıntısının önemi birçok kavramın temelini oluşturmasından gelmektedir. Denklik bağıntısı öncelikle denklik sınıflarının anlaşılabilmesi için gereklidir. Hatta denklik sınıflarını oluşturmak için denklik bağıntısının var olduğu düşünülebilir (Güney, 1993). Denklik bağıntısı ve denklik sınıfları yardımıyla doğal sayılar, tam sayılar ve rasyonel sayılar inşa edilebilir ve mod kavramı tanımlanabilir (Narlı, 2013). Bu açıdan denklik bağıntısı kavramı matematikte birçok matematiksel yapı ile arasında ilişki barındırmakta ve bu kavramları inşa etmede kullanılmaktadır. Bu nedenle bu konuya ilişkin ispatlama süreçleri kanıt imajı teorik çerçevesi ile incelenmeye uygun bulunmuştur. Kanıt imajı ile ilgili açıklamalar bir sonraki başlık altında açıklanmıştır.

1.2. Kanıt İmajı

Bu araştırmada öğretmen adaylarının denklik bağıntısına ilişkin ispatlama süreçleri, bu süreçte oluşturulan ve kullanılan matematiksel yapıları derinlemesine analiz etme imkanı sağlayacağından kanıt imajı teorik çerçevesi kullanılmıştır. Kanıt

imajı, Kidron ve Dreyfus'un bilgiyi oluşturma'nın özel bir durumu olarak ele aldıkları ispatlama süreçlerinde ortaya çıkmıştır. Kanıt imajı bireylerin formal bilgi olmadan doğrulama oluşturma girişimiyle başlar ve bu gerekçelendirme ile ilgili mantıksal bağların tamamlanması ve bireyin kesin açıklama yapması sürecine odaklanır. Kanıt imajı birçok teorik çerçeveden yararlanarak oluşturulmuştur. Örneğin bireyin sezgisi ve mantıksal düşüncesi arasındaki karşılıklı etkileşim ve bu şekilde bilginin oluşturulması 'Bağlamda Soyutlama' (Abstraction in Context) teorik çerçevesi ile incelenir. Bağlamda soyutlama teorik çatısı ise Freudenthal ve Davydov'un fikirlerine dayanmaktadır. Bağlamda soyutlama, kanıt imajı yapılandırma önceki kopuk kimi yapıların bağlı bir ağa dönüşerek gerekçelendirme sağlama sürecini analiz etmede kullanılır.

Bu kavram çerçevesinde, bir iddianın neden doğru olduğunu anlamaya çalışan bir bireyin kanıt imajına sahip olması mümkündür denilebilir. Kanıt imajının birinci basamağında birey soru ile ilgili alakalı gördüğü önceki bilgi yapılarını seçer. Örneğin, alakalı bulduğu kavramlar veya örnekler üzerine düşünür ve bunlardan ispat yaparken nasıl yararlanabileceğini irdeler. Seçtiği yapılar arasında bağ kurmaya çalışır. Bu sırada ortaya koyduğu ürün iki bileşene sahiptir. İddianın neden doğru olduğuyla ilgili bireyin *bilişsel anlayışı* ve kanıt süresince etkili olan *duyuşsal histir*.

- a) Bilişsel anlayış; iddianın doğruluğuyla ilgili bireyin sahip olduğu bu anlayışın özellikleri şöyledir;
 - kişisel
 - dinamik olma
 - mantıksal bağlantılar içermesi
 - bütünlük oluşturma
- b) Duyuşsal his; ikinci bileşen ise bireyin sezgisel olarak ikna olmasını sağlayan duyuşsal kesinlik hissidir.

Şekil 1: Kanıt İmajı Nedir?

Yukarıdaki şekil, araştırmacı tarafından oluşturulmuş olup kanıt imajı sürecini özetlemektedir. Kanıt imajı teorik çerçevesi ile ilgili kapsamlı bilgi ikinci bölümde anlatılmaktadır.

1.3. Problem Durumu

Öğrencilerin matematiksel kavramları anlaması, matematiksel tahminler yapabilmesi ve mantıksal düşünme yolları geliştirmeleri açısından ispat kavramı önemlidir (NCTM, 2000). Öğrencilerin ispat yapabilmeleri için bu süreçte bahsedilen bu becerileri deneyimlemeleri gerekmektedir. Bu çalışmanın amacı da, öğrencilerin ispat yapma sürecinde matematiksel yapılar arasında kurdukları ilişkileri ve bu ilişkilerden yola çıkarak yaptıkları çıkarımlar sonucunda oluşturdukları yeni yapıları derinlemesine incelemektir. Kanıt imajı, ispat yaparken bilgiyi oluşturma sürecini analiz etmeye olanak sağlayan bir teorik çerçeve olduğu için bu amaca uygun bir kuramsal çerçeve olduğu düşünülmüştür. Kanıt imajı kullanılarak incelenecek uygulama soruları (teoremler) denklik bağıntısı konusundan seçilmiştir.

Matematik eğitimi literatüründe kanıt imajı ile ilgili yapılmış çalışmalara bakıldığında genellikle çalışmaların belirlenen bir teorem üzerine yapıldığı görülmektedir (Kidron ve Dreyfus, 2014). Yalnızca bir çalışmada öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili kanıt imajlarının incelendiği görülmüştür (Pala, 2015). Bu çalışmada bireylerin kanıt imajlarına bütüncül bir bakış açısı sağlayacağı düşünüldüğünden denklik bağıntısı konusu baz alınarak uygulama soruları belirlenmiştir. Denklik bağıntısının matematiksel düşüncenin yapıtaşlarını oluşturması (Halmos, 1982), matematiksel birçok kavrama temel oluşturması bu konunun seçiminde rol oynamıştır.

1.4. Amaç ve Önem

Matematiğin olup bitmiş, kesin doğrular içeren donuk bir konu olmadığını, yeni buluşlara açık, canlı bir çalışma alanı olduğunu (Yıldırım, 2000) öğrencilere benimsetmek soyutlama ve ispatlama gibi matematiksel düşünmenin gelişmesini sağlayacak yöntemlerle mümkün olabilir. İspatın bu kadar önemli olmasına karşın her seviyeden öğrencinin ispat yapmada zorlandığı görülmüştür (Aydoğdu, Olkun ve Toluk, 2003). Yapılan araştırmalar öğretmenlerin de ispatlamaya yönelik bakış açılarının öğrenciler kadar yetersiz ve yanlış olduğunu göstermiştir (Healy & Hoyles, 2000). Bu araştırmada ispatlama süreçlerini incelemek amacıyla, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının denklik bağıntısı ile ilgili ispatlarına yönelik kanıt imajları incelenmiştir. Öğretmen adaylarının ispat yapılandırma süreçlerinin incelenmesi, gelecekteki öğrencilerini doğru yönlendirmeleri açısından faydalı olacağı düşünülmektedir.

1.5. Problem Cümlesi

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının denklik bağıntısına ilişkin kanıt imajları nelerdir?

1.6. Alt Problemler

1. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının denklik kavramına yönelik sezgisel bakış açıları nasıldır?
2. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının denklik bağıntısına ilişkin kanıt imajları nasıldır?

1.7. Sayıtlılar

1. Araştırmada öğretmen adaylarının var olan bilgilerini doğru bir şekilde çalışmaya yansıtacakları kabul edilmektedir.
2. Veri toplama araçları görüşleri ortaya çıkaracak niteliktedir.

1.8. Sınırlıklar

1. Araştırma süresi 2016-2017 eğitim-öğretim yılı ikinci dönemi ile sınırlıdır.
2. Araştırmanın katılımcıları, bir devlet üniversitesinde İlköğretim Matematik Öğretmenliği, Soyut Matematik dersini alan öğretmen adayları ile sınırlıdır.

1.9. Tanımlar

Kanıt İmajı: Kidron ve Dreyfus tarafından 2014 yılında tanımlanan, bilgiyi yapılandırma ve doğrulama çalışmalarında ortaya çıkan bir kavramdır. Kanıt imajı bireylerin formal bilgi olmadan doğrulama oluşturma girişimiyle başlar ve bu gerekçelendirme ile ilgili imajların tamamlanması ve bireyin kesin açıklama sağlaması sürecine odaklanır. İki bileşenden oluşmaktadır. Bunlar; bilişsel anlayış (kişisel, dinamik olma, mantıksal bağlantılar içermeye, oluşuma sebebiyet verme) ve duygusal his (kesinlik hissi) bileşenleridir.

Denklik Bağıntısı: Boştan farklı bir A kümesi üzerinde; yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlayacak şekilde tanımlanan bağıntılara denklik bağıntısı denir.

Yapı: Matematiksel bir etkinlik sonucunda ortaya çıkan üründür.

Oluşturma: Var olan matematiksel bilgilerin kısmi değişikliğe uğratılarak yeniden yapılandırılması ve düzenlenmesi sürecidir (Bikner – Ahsbahs, 2004).

Epistemik Eylem: Bilginin oluşturulması ve kullanılması sırasında gözlenebilir eylem.

1.10. Kısaltmalar

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics

Kİ: Kanıt imajı

DB: Denklik Bağıntısı

AiC: Abstraction in Context (Bağlamda Soyutlama)

RBC: Recognizing, Building with, Construction (Tanıma, Kullanma, Oluşturma)

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

DKİF: Denklik Kavramına İlişkin Form

DBKBF: Denklik Bağıntısı Kavramlarına İlişkin Bilgi Formu

KİF: Kanıt İmajı Formu

BÖLÜM II

İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde denklik bağıntısı ve kanıt imajı ile ilgili yapılan yayın ve araştırmalar yer almaktadır. Ayrıca kanıt imajı teorik çerçevesinin dayandığı temel kuramlarla ilgili bilgiler ele alınmış ve bu teorinin seçilme sebepleri açıklanmıştır.

2.1. Denklik Bağıntısı İle İlgili Literatür

Denklik bağıntısı Soyut Matematik dersinin temel konularından biridir. Bu konuyla ilişkili diğer konular bağıntı, denklik sınıfları, bölüntüler ve oran kümesidir. Literatürde bu kavramlarla ilgili araştırmalara rastlamak mümkündür. Chin ve Tall (2000) matematik bölümünde lisans eğitimine birinci sınıf öğrencilerinin denklik bağıntısı konusundaki formal tanım ve temel ispatları görmesinin ardından denklik bağıntısı ve bölüntüler ile ilgili kavramsal gelişimlerini incelemiş ve öğrencilerin yarısından fazlasının yalnızca informal cevaplar verebildiğini gözlemlemiştir. Denklik bağıntısının formal tanımının öğrenciler tarafından ne kadar anlaşıldığını tespit etmek amacıyla yapılan bir çalışmada öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun verilen bir bağıntının denklik bağıntısı olup olmadığını incelerken yanlış gerekçeler sundukları ortaya çıkarılmıştır (Chin ve Tall, 2002). Aynı çalışmada öğrencilerin sıralama bağıntısına ilişkin kavram imajlarının kolaylıkla oluştuğu ancak bu durumun denklik bağıntısı için geçerli olmadığı sonucuna varılmıştır. Ashgari (2005) doktora tezinde matematik bölümü öğrencileri ile yaptığı bir çalışmada fenomenografik yaklaşımı kullanarak denklik bağıntısını deneyimlemenin nitel yollarının neler olduğunu araştırmıştır. Bu amaçla geliştirdiği bir etkinlik ile öğrencilerin denklik bağıntısına ilişkin kendi tanımlarını yapmalarını sağlamıştır. Araştırmanın sonucunda günlük hayattaki deneyimlerinden bilinen denklik kavramının, matematiksel bir terim olan denklik kavramı ile farklı olduğunu ortaya koymuştur. Kar, Çiltaş ve Işık (2011)

fonksiyon, birebir fonksiyon, örten fonksiyon, bağıntı, denklik sınıfı, kartezyen çarpım kümesi ve alt cisim kavramlarına yönelik öğrenme güçlüklerini belirlemek amacıyla ilköğretim matematik öğretmen adaylarıyla bir çalışma yapmış, verilerin analizi sonucu bu kavramların tanımlarını yaparken informal bir dil kullandıkları ve kavramlar arasındaki farkı ayırt etmede güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin kavramlara yönelik işlemsel bilgi düzeylerinin kavramsal bilgi düzeylerine göre daha iyi olduğu görülmüştür. Denklik sınıfı kavramına yönelik yapılan tanımlarda sıklıkla görülen hata ise öğrencilerin bu kavramı denklik bağıntısı kavramı ile aynı görmesi olmuştur. Mills (2004) matematik bölümündeki öğrencilere denklik bağıntısının sadece tanımını değil aynı zamanda önemini ve kullanım alanlarını da kavramaları gerektiği fikrinden yola çıkarak; matematik ve bilgisayar bilimleri alanında kullanılabilecek işbirlikçi etkinlikler uygulamıştır. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin süreç içerisinde bu konudaki ispat yapma becerilerini geliştirdikleri ve denklik bağıntısının önemini daha iyi anladıklarını savunmuştur. Hamdan (2006) Apos Teorisini kullandığı çalışmada, öğrencilerin denklik bağıntısı, denklik sınıfları ve fonksiyon kavramları arasında kurdukları ilişkileri araştırmıştır.

Literatürde öğretmen adaylarının denklik kavramına yönelik sezgisel bakışlarını ve denklik bağıntısına ilişkin teoremleri ispatlama süreçlerini inceleyen çalışmaya rastlanmamıştır. Bu araştırma öğretmen adaylarının kanıt imajı teorik çerçevesi ile denklik bağıntısı konusundaki teoremleri ispatlama süreçlerinde bu konudaki bilgi yapılarını ortaya çıkarmalarını ve var olan yapılarını kullanarak yeni bir yapı oluşturmalarını incelediği için diğer araştırmalardan ayrılmaktadır. Teori ile ilgili kapsamlı bilgi ve literatür aşağıda sunulmuştur.

2.2. Teorik Çerçeve

Kanıt imajı, Kidron ve Dreyfus (2014)'un bilgiyi oluşturma özel bir durumu olarak ele aldıkları bir teoridir. Kidron ve Dreyfus matematik bölümü doktora öğrencileri üzerinde iki durum çalışması yaptıkları araştırmalarında bireylere bir teorem sormuşlar ve ispat süreçlerini incelemişlerdir. Araştırmanın sonucunda bir

iddianın doğru olduğuna dair düşüncesi olan kişinin bir kanıt imajına sahip olduğunu ortaya koymuşlardır. Kanıt imajı matematik eğitimindeki birçok teoriye ilişkilidir ve teorinin daha iyi anlaşılması için bu teoriler açıklanmıştır.

Kanıt imajına göre bireyin ispatlama süreci, bir teorem ile karşılaştığı anda önceden sahip olduğu ve alakalı gördüğü bilgi yapılarını seçmesi ve bunlar arasında anlamlı bağlar kurması ile başlar. Böylece birey yeni bilgiyi oluşturma sürecine girer. Bu süreçte bireyin yaptığı eylem *soyutlama* eylemidir. Soyutlama bilişsel yapının yeniden inşa süreci ve matematiksel yapılardan zihinsel yapıların oluşturulmasıdır. Matematiksel nesneler arasındaki ilişki soyutlama faaliyetiyle kurulur (Dreyfus, 1991'den akt. Biber ve Argun, 2012). Kanıt imajının dayandığı temel teorilerden biri *Bağlamda Soyutlama*dır ve bu dinamik süreci mikroanalitik düzeyde analiz etme imkanı sağlar. Bağlamda soyutlama, matematiksel soyutlama ile ilgili Freudenthal'ın öncülük ettiği 'dikey matematikleştirme' kavramını, öğrenenin bazı önceki matematiksel yapılarının matematik içerisinde ve matematiksel anlamda yeni bir bilgi üretmek amacıyla dikey olarak yeniden organize edilmesi olarak tanımlar ve benimser. Bu düşünce kanıt imajının oluşma sürecinde de gözlenmektedir. Kanıt imajı Davydov'un (1990) soyutlama görüşüyle de ilişkilidir. Davydov soyut ve somut arasındaki çelişkileri ele alan ve bu çelişkileri gidermeye çalışan bir teori geliştirmiştir. Bilinci "deneysel düşünce ve teorik düşünce" olmak üzere iki düzeyde inceler.

Davydov'a göre (1990) günlük yaşamda kavram ve görüşler deneysel düşünce ile ilgilidir. Bilimsel kavram ve görüşler ise teorik düşünce ile elde edilir. Deneysel düşünce soyutlamayı sağlamaz, teorik düşünceye faydası yoktur. Bu nedenle soyutlama somuttan soyuta değil, soyutun gelişmemiş formundan soyutun gelişmiş formuna doğrudur. Davydov'un bu görüşü; kanıt imajının bireyin yeni bilgi oluştururken yaptığı soyutlama sürecine öncelikle bir gelişim süreci olarak bakması bakımından ilgilidir.

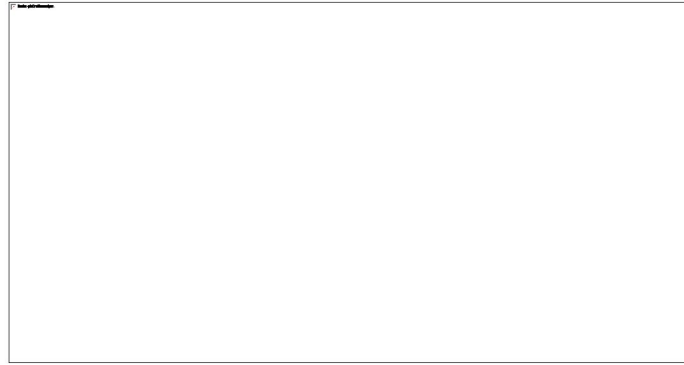
Bağlamda soyutlama, aktivite teorisini teorik bir temel olarak gören ve yapılandırmacı felsefeye vurgu yapan Giest'i takip etmektedir (Giest, 2005'den akt.

Kidron ve Dreyfus, 2014). Aktivite teorisi öğrenmenin gerçekleştiği matematiksel, tarihsel, sosyal ve öğrenme bağlamlarını dikkate alırken öncelikli olarak bilişsel süreçleri göz önüne alan bir çerçeve sunar. Aktivite teorisine göre önceki aktivitelerin ürünleri doğal olarak başka olgulara dönüşür, aktiviteler devam ettikçe soyutlamanın oluşumu ve gelişimi görülür. Soyutlama ile alakalı bu eylemler epistemik eylemlerdir -öğrenenin bilgisiyle alakalı ve gözlenebilir eylemlerdir. Davydov'un (1990) bilgi oluşturma felsefesine ve Leont'ev'in (1981) Aktivite Teorisine dayanan matematiksel soyutlama ve bilgi oluşturma sürecini açıklayan ve epistemik eylemlere dayanan teorilerden biri de RBC soyutlama teorisidir (Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus, 2001). RBC soyutlama teorisinin ismi Tanıma (Recognizing), Kullanma (Building with), Oluşturma (Constructing) epistemik eylemlerinin İngilizce karşılıklarının ilk harflerinin bir araya getirilmesi ile oluşmuştur. Tanıma (R), daha önce oluşturulan bir yapının fark edilmesidir (Hershkowitz ve diğer., 2001). Burada bahsedilen 'yapı' matematiksel bir etkinlik süreci ortaya çıkan kavram veya yöntemdir (Tsamir ve Dreyfus, 2005). Kullanma (B), belirli bir amacı gerçekleştirmek için önceden oluşturulan matematiksel yapıların kullanılmasıdır (Schwarz, Dreyfus, Hadas & Hershkowitz, 2004). Kullanma eylemi bir durumu anlama, anlamlandırma veya açıklama esnasında görülür. Bu eylemin gerçekleşmesi için öğretmen veya araştırmacı düşünmeye yönlendirecek bir soru sorabilir veya bir ipucu verebilir (Hershkowitz ve diğer., 2001). Oluşturma (C) var olan matematiksel bilgilerin yeniden yapılandırılması ve düzenlenmesi sürecidir (Bikner – Ahsbabs, 2004). RBC Soyutlama Teorisinin önemli bir aşamasıdır. Teoriye göre 'oluşturma' epistemik eylemi olmadan soyutlama gerçekleşmez. Oluşturma eyleminin sonucunda birey bir problemi çözer veya bir hipotezi kanıtlar. Böylece bireyin zihninde yeni bir matematiksel yapı ortaya çıkar (İmre ve Türnüklü, 2016). Oluşturma eylemi gerçekleşirken tanıma ve kullanma eylemleri de gerçekleşebilir. Yani bu epistemik eylemler birbiriyle etkileşimlidir ve iç içe geçmiştir. Kanıt imajında da alakalı matematiksel yapıları biraraya getirme ve yeni yapı oluşturma eylemleri doğrusal olmaktan ziyade genellikle paralel ve etkileşimli olarak ilerlemektedir.

Soyutlamayı klasik anlayışla ele alıp bağlamdan ayırma olarak yorumlanmayan Piaget soyutlamanın kavramın özelliklerine ve diğer kavramlarla ilişkisine dayalı

olarak gerçekleştiğini belirtmiştir (İmre ve Türnüklü, 2016) Ernst von Glasersfeld (1995) yapılandırmacılık kuramının Piaget ile oluştuğunu ve temel koşulunun bilginin pasif olarak alınamayacağı ancak sahibi tarafından inşa edileceğini belirtir. Bu anlayış bağlamda soyutlama ve RBC soyutlama teorisinin dolayısıyla kanıt imajı teorisinin de alt yapısını oluşturmaktadır.

şekil 2: Teorik ereveler Arasındaki İlişki



Kaynak: Pala, 2015, s. 8

Kanıt imajına göre kanıtlama, formal matematikten başlamaktan ziyade öğrenenin sezgisel düşüncesi ve sözel açıklamaları ile başlar. Kanıt imajı ve kanıt arasındaki bu ilişki kavram imajı ve kavram tanımı arasındaki ayrımı hatırlatmaktadır. Vinner ve Hershkowitz (1980) kavram imajı terimini kişinin kavram ile ilgili zihinde yer alan tüm resimlerin kümesi olarak üretmişlerdir. Bu bağlamda kavram imajı ve kanıt imajı kimi benzerlik ve farklılıklar göstermektedir (Kidron ve Dreyfus, 2014). Örneğin, kavram imajı ve kanıt imajı, kavram tanımı ve formal kanıt göre daha kişisel ve daha az objektiftir. Her kavram imajı, kavram tanımına yöneltecek potansiyelde değildir. Aynı şekilde her kanıt imajı formal ispata götürmez. Kanıt imajı ve kavram imajı formal kanıt ve tanıma geçişte belli bir matematiksel olgunluk gerektirir. Kanıt imajı ve kavram imajı oluşturmanın dinamiği de oldukça benzerdir. İkisinin de yapılandırma sürecinde bir anlam formundan başlayarak daha ayrıntılı ve kesin forma ulaşma vardır. Ancak kanıt imajı mantıksal ilişkiler içerirken kavram imajında mantıksal görüş olmayabilir. Kanıt imajının ilgili olduğu teorilerden sonra kanıt imajının özellikleri ele alınacaktır.

Birey ispat yaparken yeni bir yapı oluşturur ve böylece ortaya bir ürün koyar.

Bu ürün kanıt imajıdır. Kanıt imajı, *bilişsel* ve *duyuşsal* olmak üzere iki bileşene sahiptir. Kanıt imajının bilişsel boyutu *kişisel olma*, *dinamik olma*, *mantıksal bağlar içermeye* ve *bütünlük oluşturma* özelliklerine sahiptir. Kanıt imajı ilerleme gösteren bir süreci kapsadığından dinamik olma özelliğine sahiptir. Önceki bilgi yapılarından alakalı olanları seçerek tek ve bütün bir resim oluşması ile ortaya çıktığı için bütünlük oluşturur. Bu esnada kişi düşüncelerini matematiksel terimlerle açıklamakta güçlük çekebilir, ancak zihninde verilen teoremin veya bir iddianın doğru olduğunu düşünmektedir. Bu durum kanıt imajının kişisel olma özelliği ile ilgilidir. Sahip olduğu bütün bilgi yapıları arasında ilişkiler kurarak yeni bir yapı oluşturmaya kanıt imajının mantıksal bağlar içermesi ile ilgilidir. Kanıt imajının duyuşsal boyutu, bireyin kendi ispatına yönelik *sezgisel iknası*dır. Fischbein (1994'ten aktaran Kidron ve Dreyfus, 2014) matematiksel aktivitelerde birey formal bilgilere sahip olsa bile sezgisel yaklaşımının muhakeme etme biçimlerini etkileyeceğini savunmuştur. Kidron ve Dreyfus (2014), kanıt imajının duyuşsal boyutu olan sezgisel ikna özelliğinde bu görüşten etkilenmiştir. Buna göre bireyin düşüncesine veya ispatına dair kesinlik hissi yaşaması kanıt imajının sezgisel ikna karakteristiğini yansıtmaktadır.

Birey zihninde kanıt imajı oluşurken matematiksel terimlerle bu durumu ifade edemeyebilir veya kanıt imajı gözden kaybolabilir. Bireyin sorunun veya ispatın çözümü için gerekli yapıların zihinde canlandığı ancak doğru kombinasyonlarla bu yapıları biraraya getirmenin gerekli olduğu önemli anı Van der Waerden (1954'ten akt. Kidron ve Dreyfus, 2014) 'Einfall' diyerek ifade etmiştir. Bu terim İngilizcede 'inspiration' olarak karşılık bulmuştur. Türkçede ise Einfall'a 'ilham' demek doğru olabilir. Bu durum kanıt imajı sürecinde de görülmektedir.

Pala (2015), yüksek lisans tezinde öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin kanıt imajlarını incelemiştir. Kanıt imajının kullanıldığı bir diğer çalışmada ise öncelikle Soyut Matematik dersi alan matematik öğretmenliği bölümündeki 120 öğrenciye açık uçlu sorular uygulanmış, doğru cevap veren 2 öğrenciye ispat soruları yönelterek bu süreçte kanıt imajları incelenmiştir (Narli, Aksoy, Pala, Ercire ve Uysal, 2016). Kanıt imajı literatüre yeni giren kuramsal bir çerçevedir. Bu araştırmada öğretmen adaylarının denklik ve denklik bağıntısına

yönelik sahip oldukları bilgileri ve bu bilgiler yardımıyla ispat yaparken kuracakları yeni yapıları incelemeyi sağlayacağı için bu kuramsal çerçeve uygun görülmüştür.

BÖLÜM III

YÖNTEM

3.1.Araştırma Modeli

Bu çalışma; amacı, problemleri, araştırma tasarımı, veri toplama biçimi ve verilerin analizinde yararlanılan yaklaşımlar düşünüldüğünde bir nitel araştırma özelliği taşımaktadır. Nitel araştırma; gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi yöntemlerin kullanıldığı, olayların doğal ortamda, gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasını sağlayan araştırma yöntemidir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Nitel araştırmalarda belli bir konu ile ilgili araştırma yaparken konuyla ilgili geniş ve derinlemesine bir bakış açısı elde edilmeye çalışılır (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2014). Bu araştırma öğretmen adaylarının ispatlama süreçlerini kanıt imajı teorik çerçevesiyle derinlemesine araştırmayı amaçlamaktadır ve durum çalışması desenindedir.

Durum çalışması (case study), derinlemesine çalışma ve karşılaştırma yapmak için verinin özel olduğu durumlara göre düzenlenmesidir (Patton,1990). Yin (2003)'e göre durum çalışması, araştırmacının olaylar üzerinde kontrole sahip olduğunda, nasıl veya niçin soruları araştırıldığında ve gerçek hayat ortamları içindeki olgular üzerine odaklanıldığında tercih edilen bir stratejidir. Durum çalışmasında, bir veya birkaç duruma ilişkin etkenler bütüncül bir yaklaşımla araştırılır ve ilgili durumu nasıl etkiledikleri ve ilgili durumdan nasıl etkilendikleri üzerine derinlemesine araştırma yapılır (Yıldırım, 2013). Durum çalışmaları yürütülürken aşağıdaki basamaklar takip edilir (Yıldırım ve Şimşek, 2013: 194):

- Araştırılacak soruların geliştirilmesi,
- Araştırmanın alt problemlerinin geliştirilmesi,
- Analiz biriminin belirlenmesi,

- Çalışılacak durumun belirlenmesi,
- Araştırmaya katılacak bireylerin seçimi,
- Verilerin toplanması ve alt problemlerle ilişkilerinin sağlanması,
- Verilerin analiz edilmesi ve yorumlanması,
- Durum çalışmalarının raporlaştırılması.

Bu araştırmada bu basamaklara uygun bir şekilde hareket edilerek nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Durum çalışmalarında geçerlik ve güvenilirliği artırıp, inandırıcılığı kuvvetlendirmek için çeşitleme (triangulation) kullanılabilir. Denzin (1978)'e göre ise çeşitleme (triangulation) dört boyutta yapılabilir (Akt. Patton, 1990): veri çeşitlemesi, araştırmacı çeşitlemesi, kuram çeşitlemesi ve yöntem çeşitlemesi. Bu bağlamda bu araştırmada görüşme, gözlem, doküman analizi gibi yöntemlerle çoklu veri toplama yoluna gidilmiştir. Veri toplama sürecinin anlatıldığı bölümde bu veri toplama yöntemlerinin nasıl kullanıldığı detaylı olarak açıklanmıştır.

3.2. Çalışma Grubu

Bu çalışmada, çok aşamalı örnekleme modeli kullanılmıştır. İlk aşamada kolay ulaşılabilir durum örnekleme (*convenience sampling*) tercih edilmiştir. Verilerin toplanması sürecinde kolaylık sağlaması sebebiyle bir devlet üniversitesinde İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde 2016-2017 bahar döneminde Soyut Matematik dersi alan 102 öğretmen adayına, soyut matematik dersi kapsamındaki *bağıntı* konusu işlenmeden önce bir form uygulanmıştır (EK-1). 'Denklik bağıntısı' konusu işlendikten sonra 96 öğretmen adayına ikinci bir form (EK-2) ile bir uygulama daha yapılmıştır. Bu uygulama öğretmen adaylarının denklik bağıntısına yönelik formal bilgilerini ölçen sorulardan oluşmaktadır (EK-3). İki uygulamadaki kişi sayısının farklı olması okula gelen kişi sayısından kaynaklanmaktadır. Bu iki uygulamanın ardından durum çalışması yapılacak kişiler amaçlı örneklem çeşitlerinden ölçüt örneklem ile belirlenmiştir. Ölçüt örneklem önceden belirlenmiş bazı önemli ölçütleri karşılayan tüm durumları çalışma ve gözden geçirmedir (Patton, 1990). Öğretmen adaylarının ispat yaparken yeni bir matematiksel yapı oluşturma

süreçleri inceleneceği için, bireylerin yeterli ön bilgiye sahip olmalarının gerekli olduğu düşünülmektedir. Bu bağlamda araştırmacı tarafından belirlenen kriterler;

- öğretmen adaylarının denklik kavramını matematiksel kavramlarla ilişkilendirebilmesi
- öğretmen adaylarının denklik bağıntısı ile ilgili temel kavramları tanınması
- öğretmen adaylarının derse katkıları
- öğretmen adaylarının araştırmaya katılmak için gönüllü olması

şeklindedir. Öğretmen adaylarına uygulanan iki formun analizinden sonra on kişinin bu kriterleri sağladığı görülmüştür. Araştırmanın sonraki kısmında yapılacak uygulamalar göz önünde bulundurulduğunda derinlemesine analiz yapabilmek amacıyla kişi sayısının üç ile sınırlandırılmasına karar verilmiştir. Bu üç kişinin belirlenmesinde ders içi gözlemler belirleyici olmuştur.

3.3. Veri Toplama Araçları

Nitel çalışmalarda genellikle birden fazla veri toplama yöntemi kullanılmaktadır. Bu şekilde birbirini teyit edebilecek veri çeşitliliğine ulaşılmaya çalışılmaktadır (Büyüköztürk ve diğer., 2009; Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu araştırmada da, çalışmayı güçlendirmek amacıyla Denzin (1978b)'in belirlediği dört temel üçgenleme türünden veri üçgenlemesi kullanılmıştır. (akt. Patton, 1990). Veri üçgenlemesi, bir çalışmada farklı veri kaynaklarının kullanılmasıdır (Patton, 1990). Araştırmanın verilerini;

- Soyut matematik dersinde öğrencilere uygulanacak formlar
- bireysel görüşmelerin ses ve video kayıtları
- araştırmacının ders gözlemleri

oluşturmaktadır.

Veri toplama aracı olarak açık uçlu üç ayrı form geliştirilmiştir. Bunlar sırasıyla, denklik kavramı ile ilgili genel ifadeli sorulardan oluşan olan “Denklik Kavramına İlişkin Form” (DKİF), denklik bağıntısı konusundaki kavramlar ile ilgili “Denklik Bağıntısı Kavramları Bilgi Formu” (DBKBF) ve denklik bağıntısı ile ilgili ispatlar barındıran “Kanit İmajı Formu” (KİF) dur. Formların her biri uzman görüşü

alınarak hazırlanmıştır. Bu formlar aşağıda tanıtılmıştır. Bundan sonraki kısımlarda formların kısaltması kullanılacaktır.

3.3.1. Denklik Kavramına İlişkin Form (DKİF)

DKİF, denklik kavramını temel alınarak hazırlanmış 4 açık uçlu sorudan oluşturulmuştur (EK-1). Bu sorular, öğretmen adaylarının denklik kavramına ilişkin informal bilgileri hakkında bilgi sahibi olma ve örneklem seçimi için belirlenen kriterleri sağlayanları belirleme amacıyla oluşturulmuştur. Bu formdaki sorulardan birincisi denklik kavramının genel olarak ne anlam ifade ettiğine yöneliktir ve öğretmen adaylarının bu kavrama yönelik zihinlerindeki diğer kavramları ortaya çıkarmak amaçlanmaktadır. İkinci soru denklik kavramının günlük hayatta kullanımına yöneliktir. Üçüncü ve dördüncü sorularda denklik kavramının matematikte hangi kavramlarla ilgili olduğu ve hangi kavramlarla ilişkilendirilebileceği ile ilgilidir. Bu sorulara ait yanıtlar doğru ya da yanlış şekilde değerlendirmeye alınmayacaktır.

3.3.2. Denklik Bağıntısı Kavramları Bilgi Formu (DBKBF)

DBKBF, denklik bağıntısı temel alınarak 4 açık uçlu sorudan oluşturulmuştur (EK-2). Bu formun hazırlık aşamasında denklik bağıntısı konusundaki var olan literatüre ve Soyut Matematik ders kitaplarına bakılmış ve kritik olan kavramlar belirlenmeye çalışılmıştır. Bu kavramlar denklik bağıntısının tanımı ve özellikleri, denklik sınıfı ve oran kümesi olarak belirlenmiştir. Bu formun içeriği de bu kavramlara göre oluşturulmuştur.

3.3.3. Kanıt İmajı Formu (KİF)

KİF, öğretmen adaylarının denklik bağıntısı ile ilgili bilgi yapılarını kullanarak yeni bir yapı oluşturmalarını sağlayacak dört adet ispat sorusundan oluşturulmuştur (EK-3). Bu soruların hazırlanmasında Soyut Matematik ders kitaplarından ve var olan literatürden yararlanılmıştır (Chin ve Tall, 2000).

3.4. Veri Toplama Süreci

Veri toplama sürecinin başlangıcında 2016-2017 bahar döneminde Soyut Matematik dersi alan 102 öğretmen adayına bağıntı konusu işlenmeden önce DKİF ve denklik bağıntısı konusunun işlenmesinin ardından 96 öğretmen adayına DBKBF uygulanmıştır. Her iki uygulama da yaklaşık bir ders saati sürmüştür. Sonrasında bu iki formdan alınan yanıtlar ve ders içi gözlemler değerlendirildiğinde durum çalışması için üç öğretmen adayı belirlenmiştir. Belirlenen üç öğretmen adayına denklik bağıntısı ile ilgili dört adet ispat sorusu içeren KİF soruları yöneltilmiştir. KİF'nin uygulanması sırasında öğretmen adayları ile her bir soru için klinik mülakat yapılmıştır. KİF'de yer alan her soru öğretmen adaylarına farklı zamanlarda sorulmuştur. Bu sebeple her bir katılımcı ile 4 kez mülakat yapılmıştır. Mülakatlar öğretmen adaylarına soruların yöneltildiği anda gerçekleştirilmiştir. Mülakatlar yalnızca araştırmacı ve öğretmen adayının bulunduğu sessiz bir odada gerçekleştirilmiştir ve zaman sınırlaması koyulmamıştır. Görüşmeler esnasında öğretmen adaylarından sesli düşünceleri istenmiş ve mümkün olduğunda düşünce süreçleri sorularla bölünmemeye çalışılmıştır. Her bir mülakat video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Uygulama sırasında öğretmen adaylarının rahat hissetmeleri sağlanmaya çalışılmış, verilerin sadece akademik çalışmalarda kullanılacağı ve gerçek isimlerinin kullanılmayacağı belirtilmiştir.

3.5. Veri Çözümleme Teknikleri

Nitel araştırmalar sonucunda elde edilen verilerin analizi konusunda, her analiz için geçerli olabilecek, belirli bir standardın ve sistematikğin olmadığı, araştırmacının, süreç içinde elde edeceği veriler doğrultusunda özgün analizler tercih edilebileceği bilinmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu araştırmada DKİF, DBKBF ve KİF'dan elde edilen verilerin analiz edilmesinde içerik analizi kullanılmıştır. İçerik analizi belirli kurallara dayalı kodlamalarla bir metnin bazı sözcüklerinin daha küçük içerik kategorileri ile özetlendiği sistematik bir tekniktir (Büyüköztürk ve diğer., 2014). DKİF ve DBKBF uygulamaların ardından kanıt imajları incelenmek üzere seçilen öğretmen adaylarına KİF soruları yöneltilmiş ve görüşmeler esnasındaki konuşmalar transkript edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlama süreçleri Kidron ve Dreyfus'un

ortaya koyduğu Bağlamda Soyutlama çatısı altında kanıt imajı teorik çerçevesi ile incelenmiştir (2014).

3.6.Araştırmanın Geçerliliği ve Güvenirliği

Karasar'a göre bir ölçmenin güvenirliliği, aynı şeyin bağımsız ölçümleri arasındaki kararlılık, geçerliliği ise, ölçülmek istenen şeyin ölçülebilmiş olma derecesidir (2009). Araştırma alanına olan yakınlık, yüz yüze görüşmeler yoluyla ayrıntılı ve derinlemesine bilgi toplama, gözlemler yoluyla doğrudan ve olayın gerçekleştiği doğal ortam içinde bilgi toplama, uzun süreli bilgi toplama ve elde edilen bulguların teyit edilmesi için alana geri gidebilme ve ek bilgi toplama olanağının olması nitel araştırmada geçerliliği oluşturmayı sağlayan önemli özelliklerdir (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

Nitel bir araştırmanın güvenilirliğini arttırmak için üçgenleme, araştırma alanında uzun süre geçirme, veriler ve analizlerin araştırılan kişilerin kontrolüne sunulması, veriler, analizler ve yorumların başka araştırmacıya sunulması gibi yöntemler vardır (Ekiz, 2009). DKİF ve DBKBF'den elde edilen veriler iki araştırmacı tarafından kodlanarak benzerlikler ve farklılıklar sayısal olarak karşılaştırılmış ve uyum yüzdesi %83 olarak bulunmuştur. KİF'den elde edilen veriler tarafsız bir araştırmacı ile ele alınmış ve yapılan yorumlar üzerine yeniden değerlendirilmeye alınmıştır. İspat formunun (KİF) hazırlanması, değerlendirilmesi, transkriptlerin analiz edilmesi sürecinde öğretim üyelerinin görüş ve fikirleri alınmıştır.

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde denklik kavramına ilişkin form, denklik bağıntısı kavramları bilgi formu, ders gözlemleri ve durum çalışmalarından elde edilen bulgular ve yorumlar yer almaktadır. Öğretmen adaylarına uygulanan formlardan elde edilen veriler her soru için ayrı ayrı incelenmiştir.

4.1. Birinci Alt Probleme Ait Bulgular

Araştırmanın alt problemi: “İlköğretim matematik öğretmen adaylarının denklik kavramına ilişkin sezgisel bakış açıları nasıldır?” şeklindedir. Bu amaçla 102 öğretmen adayına DKİF formu uygulanmıştır. DKİF dört açık uçlu sorudan oluşmakta ve denklik kavramının anlamına ve kullanıma yönelik sorular yer almaktadır. Bu form aracılığı ile elde edilen veriler her soru için tek tek incelenmiştir. Öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlar içerik analizi yöntemiyle incelenmiştir. Verilen cevaplar doğru ya da yanlış şeklinde değerlendirmeye alınmayıp, zihinlerinde denklik kavramı ile ilişkili olan yapıları açığa çıkarmayı amaçlamaktadır. Elde edilen bulgular tablolar ve öğretmen adaylarının cevaplarından örnek kesitler ile aktarılmıştır.

4.1.1. Soru 1’e İlişkin Bulgular

Öğretmen adaylarına denklik kavramı deyince ne anladıkları sorulmuştur. Verilen yanıtlar incelendiğinde oluşan kategoriler aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 1
DKİF Soru 1'e Ait Kategoriler

Kategoriler	Açıklama	f	%
Eşitlik	Birebir aynı, eşit	10	9,8
Herhangi bir özellik bakımından eşitlik	Sayısal eşitlik	61	59,80
	Önermelerde doğruluk değeri açısından eşitlik	17	16,67
	Muadili olma	8	7,84
Bağıntı	Denklik bağıntısı	3	2,94
Diğer	Cevapsız	3	2,94
Toplam		102	100

Öğretmen adaylarının %9,8'i denklik kavramını eşitlik kavramı ile ilişkilendirirken, %80,98'i herhangi bir özellik bakımından eşitlik olarak yorumlamışlardır. Burada öğretmen adaylarının verdikleri örnekler; sayısal eşitlik, doğruluk değeri açısından eşitlik ve muadili olma olarak gruplandırılmıştır. Öğretmen adaylarının denklik kavramını sıklıkla sayısal eşitlik olarak yorumladıkları görülmüştür. Aşağıda kategorilerin daha iyi anlaşılması için örnek yanıtlar sunulmuştur.

“Denk; eşit, birebir aynı anlamında kullanılıyor.” (Eşitlik)

“Eşitlik değildir. Aynı değere sahip olmaktır.” (Muadili olma)

“Herhangi iki şeyin aşağı yukarı birbiriyle aynı olması, benzemesi.” (Muadili olma)

“Doğruluk değerleri aynı olan önermeler birbirine denktir.” (Doğruluk değeri açısından eşitlik)

“Denklik iki kümenin eleman sayısının birbirine eşit olduğunu belirten kavramdır.” (Sayısal eşitlik)

“İki veya daha fazla şeyin sayısal olarak eşit olması.” (Sayısal eşitlik)

“Denklik bağıntısı ve sıralama bağıntısı geliyor aklıma. Denglik bağıntısında yansıma, simetri ve geçişme özelliklerinin olduğu geliyor.” (Denklik bağıntısı)

Çalışmanın dikkate değer bir noktası olarak görülen bir diğer bulgu ise denklik kavramını denklik bağıntısı ile ilişkilendiren yalnızca üç öğretmen adayının olmasıdır.

4.1.2. Soru 2’ye İlişkin Bulgular

Soru 2’de öğretmen adaylarından denklik kavramının günlük hayattaki kullanımlarına örnekler verilmesi beklenmiştir. Verilen yanıtlar incelendiğinde oluşan kategoriler aşağıdaki tabloda sunulmuştur. Öğretmen adaylarının birden fazla örnek vermesi sebebiyle kişi frekans ve yüzde toplamı verilmemiştir.

Tablo 2
DKİF Soru 2’ye Ait Kategoriler

Kategoriler	Açıklama	f	%
Pahada denklik	Aynı değere sahip nesnelerde	52	50,98
İşlevsel denklik	Aynı işleve sahip nesnelerde	14	13,73
Sayıcı eşitlik	Eşit miktardaki nesnelerde	28	27,45
Benzerlik	Benzer kişi veya nesnelerde	20	19,61
Diğer	Anlaşılmayan yorum	4	3,92

Öğretmen adaylarının denklik kavramının günlük hayattaki kullanımına verdikleri örneklerin %50,98'i *pahada denklik* kategorisinde toplanmıştır. Denklik kavramını aynı değere sahip nesneler olarak açıklayan yanıtlayan bu kategoriye dahil edilmiştir. Öğretmen adaylarının %13,73'ü denklik kavramını günlük hayatta aynı işleve sahip olma olarak kullandıklarını belirtmiştir. Bu yanıtlar *işlevsel denklik* kategorisini oluşturmuştur. Öğretmen adaylarının %27,45'i ise denklik kavramını günlük hayatta *sayıca eşitlik* olarak kullanılabileceğini ifade etmiştir. Aşağıda temaların daha iyi anlaşılması için öğretmen adaylarının yanıtlarından kesitler sunulmuştur.

“Geçmişte takas usulüyle ticaret yaparken insanlar ellerindeki ürüne denk olan yani aynı maddi değere sahip nesneleri değişim yaparlardı.” (Pahada denklik)

“Örneğin 1 dolar 3-4 liraya karşılık gelir, yani denktir.” (Pahada denklik)

“Mesela aslan ile kaplanı karşılaştıracak olursak ikisi de güç bakımından birbirine benzerdir. Gerek vücut ölçüleri, diş ve ağız yapıları, gerek avlanma yapıları birbirine benzemektedir ve bu hayvanlar birbirine denktir diyebiliriz.” (Benzerlik)

“Davul bile dengi dengine diye bir söz vardır örneğin. Birbirine denk olan kişilerin bir arada olabileceğini söyler.” (Benzerlik)

“Mesela 2 portakal ve 2 elma birbirine denktir diyebiliriz. Çünkü ikisi de eşit miktarda bulunuyor.” (Sayıca eşitlik)

“Örneğin 1 kg pamuk ile 1 kg demir birbirine denktir.” (Sayıca eşitlik)

“Misal 2 farklı telefonu ele alalım. Özellikleri aynı olsun. Bunlar birbirine eşit değil ama işlev bakımından denktir.” (İşlevsel denklik)

Öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde denklik kavramını genellikle pahada denklik olarak yorumladıkları görülmüştür. Bu durum denklik kavramını daha çok maddi değerlerle kullandıklarını gösterebilir.

4.1.3. Soru 3'e İlişkin Bulgular

Soru 3'te öğretmen adaylarına denklik kavramının matematikteki kullanımına örnekler vermesi istenmiştir. Alınan yanıtlar incelendiğinde oluşan kategoriler aşağıdaki tabloda sunulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya çoğunlukla birden fazla örnek vermesi sebebiyle frekans ve yüzde toplamaları yazılmamıştır.

Tablo 3
DKİF Soru 3'e Ait Kategoriler

Temalar	Açıklama	f	%
Küme	Kümelerin denkliği	67	65,6
Mantık	Önermelerin denkliği	66	64,70
Matematiksel ifadelerin denkliği	Aynı çözüm kümesine sahip denklemler	9	8,82
	Sayısal ifadelerin denkliği	8	7,84
	Özdeşlikler	7	6,86
	Fonksiyonların denkliği	6	4,90
	Aynı anlama gelen matematiksel semboller	2	1,96
Bağıntı	Denklik bağıntısı	1	0,98
Üçgenlerde benzerlik	Benzer üçgenlerin denk olması	2	1,96

Kategorilerin daha iyi anlaşılması amacıyla alt kategoriler aşağıda başlıklar halinde açıklanmıştır.

4.1.3.1. Küme

Öğretmen adaylarının denklik kavramının kullanımına sıklıkla kümelerin denkliği örneği verdiği görülmüştür. Burada öğretmen adayları eleman sayısı eşit iki kümenin denk küme olduğunu açıklamışlardır. Ancak kümelerin eleman sayısının sonlu ve sonsuz olmasını inceleyen cevaplara rastlanmamıştır.

4.1.3.2. Mantık

Öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar incelendiğinde kümelerden sonra en çok mantık konusu ile ilgili örnekler verdikleri görülmüştür. Öğretmen adayları iki önermenin doğruluk değeri eşit ise bu önermelerin denk olduğunu söylemişlerdir.

4.1.3.3. Matematiksel İfadelerin Denkliği

Öğretmen adaylarından 32 kişi denklik kavramını matematiksel ifadelerin denkliğinde kullandıklarını ifade etmişlerdir. Bu başlık altında toplanan cevapların ayrıntılı bir şekilde anlaşılması için öğretmen adaylarının verdiği yanıtlardan kesitler alt kategoriler halinde aşağıda sunulmuştur.

- **Çözüm Kümesi Aynı Olan Denklemler**

Öğretmen adaylarından dokuz kişi denklik kavramının kullanımına çözüm kümesi aynı olan matematiksel denklemleri örnek vermişlerdir.

“ $x + 4 = 5$ ise $x = 1$ ve $2x + 1 = 3$ ise iki denklem de aynı çözüm kümesine sahiptir.”

- **Sayısal İfadelerin Denkliği**

Öğretmen adaylarından sekiz kişi denklik kavramının sayısal ifadelere kullanıldığını ifade etmişlerdir.

“Eşitliğin iki tarafında aynı şey yazmadığı halde aynı değerdeyse kullanılır.

Örneğin $2 + 2 = 4$ ”

“Kesirlerde kullanılır. $\frac{1}{2} \equiv \frac{100}{200}$. Denktir yani eşittir. Bu kesre denk sonsuz tane sayı yazılabilir.”

“ $4^2 = 2^4$ Bu örnekteki gibi farklı sayıların farklı kuvvetleri alındığında birbirine denk olma durumu vardır.”

- **Özdeşlikler**

Öğretmen adaylardan yedi kişi bu soruya cevap olarak özdeşlikleri örnek göstermiştir.

“ $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$ Burada bir denklikten bahsedebiliriz.”

“Eşitliğin iki tarafında farklı bulunan cebirsel ifadeler için denk diyebiliriz.”

- **Fonksiyonların Denklığı**

Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının dokuzu denklik kavramının fonksiyonların denklığında kullanıldıkları söylemişlerdir. Burada denk fonksiyon kavramını açıklayan cevaplar olduğu gibi açıklamayan cevaplara da rastlanmıştır.

“ $f(x) = \sqrt{x^2}$ ve $g(x) = |x|$ ise $f(x) \equiv g(x)$ ”

Verilen yanıtta öğretmen adayı kuralı aynı olan iki fonksiyonun denk olduğunu ifade etmiştir. Ancak tanım ve değer kümesinden bahsetmemiştir.

- **Aynı Anlama Gelen Matematiksel Semboller**

Öğretmen adaylarından iki kişi denklik kavramının kullanımına örnek olarak aynı matematiksel terimi ifade eden farklı sembollerin birbirine denk olabileceğini ifade etmişlerdir.

“Boş kümenin $\emptyset$ ve $\{\}$ şeklinde iki gösteriminin olması, çarpma işaretinin hem $\cdot$ hem $\times$ ile gösterilmesi...”

4.1.3.4. Üçgenlerde Benzerlik

İki öğretmen adayı denklik kavramının kullanımına örnek olarak üçgenlerde benzerlik kavramından bahsetmişlerdir. Aşağıda öğrencilerinden birinin açıklamasına yer verilmiştir.

“Üçgenlerde benzerlik var mesela. Benzer üçgenler denk sayılıyor.”

4.1.3.5. Bağıntı

Yalnızca bir öğretmen adayı denklik kavramının denklik bağıntısında kullanıldığını ifade etmiştir. Ancak kavramın ne olduğunu hatırlayamadığını ifade etmiştir.

“Denklik bağıntısı diye bir şey hatırlıyorum ama emin olamadım.”

4.1.4. Soru 4’e İlişkin Bulgular

Öğretmen adaylarına denklik kavramını matematikteki hangi kavramlarla ilişkilendirebilecekleri sorulmuş ve bunun üzerine alınan yanıtlar aşağıda Tablo 4’te kategoriler halinde sunulmuştur.

Tablo 4
DKİF Soru 4'e Ait Kategoriler

Kategoriler	Açıklama	f	%
Küme	Kümelerin denkliği	44	43,14
Eşitlik	Eşitlik kavramı	37	36,27
Önerme	Önermelerin doğruluk değerinin denkliği	36	35,29
Matematiksel Olarak Denk İfadelerde	Sayısal İfadeler (Kesir, Üslü Sayılar vs.)	10	9,80
	Kökü aynı denklemler	8	7,84
	Özdeşlikler	5	4,90
	Fonksiyonlar	7	6,86
	Modüler Aritmetikte Sayıların Denkliği	1	0,98
Bağıntı	Denklik bağıntısı	7	6,86
Üçgenlerde Benzerlik	Benzer üçgenlerin denkliği	1	0,98

Öğretmen adaylarının çoğunluğu (%43,14) denklik kavramını matematikte kümelerin denkliği ile ilişkilendirmiştir. Bunun dışında en fazla yığılma olan kategori (%36,27) eşitlik kavramı olmuştur. Çalışmaya katılan 102 öğretmen adayının 37'si denklik ve eşitlik kavramlarını ilişkili görmüşlerdir. Ayrıca 102 öğretmen adayından 36'sının denklik kavramını önermelerin denkliği ile ilişkilendirdiği görülmüştür.

Bu formdaki tüm sorulardan elde edilen veriler değerlendirildiğinde; genel olarak öğretmen adaylarının denklik ve eşitlik kavramlarını farklı gördükleri, denklik

kavramını *sayısal eşitlik* olarak yorumladıkları görülmüştür. Ayrıca 17 kişi denklik kavramını *mantıksal önermelerde doğruluk değerinin eşitliği* ile ilgili bulmuştur. Öğretmen adayları denklik kavramının günlük hayattaki kullanımına çoğunlukla *aynı değere sahip nesneler* örneğini vermiştir. Denklik kavramının matematikteki kullanımına ise çoğunlukla *kümelerde denklik* ve *önermelerin denkliği* örneğini vermişlerdir. Araştırmanın bağlamı düşünüldüğünde, denklik ve denklik bağıntısı arasındaki ilişkiyi kurma kritik bir nokta olarak görülmektedir. Ancak çalışmaya katılan öğretmen adaylarından yalnızca üçü denklik kavramı deyince *denklik bağıntısı*nı anladıklarını söylemişlerdir. Bu kişilerin açıklamalarına bakıldığında bu ilişkiyi nasıl kurduklarını ifade etmedikleri görülmüştür. Denklik kavramının hangi kavramlarla ilişkili olduğu sorulduğunda ise yedi kişinin denklik kavramının denklik bağıntısı ile ilişkili olduğunu söylediği görülmüştür.

4.2. Denklik Bağıntısı Kavramları Bilgi Formu (DBKBF)’ndan Elde Edilen Bulgular

DBKBF açık uçlu dört sorudan oluşup denklik bağıntısına ilişkin formal bilgileri gerektirmektedir. Bu form 96 öğretmen adayına uygulanmıştır. Her soru için yapılan analizler ayrı başlıklar halinde sunulmuştur.

4.2.1. DBKBF Soru 1’e İlişkin Bulgular

Öğretmen adaylarından denklik bağıntısının formal tanımını yapmaları beklenmiştir. Verilen yanıtlar analiz edilerek aşağıda Tablo 5’teki kategoriler ile sunulmuştur.

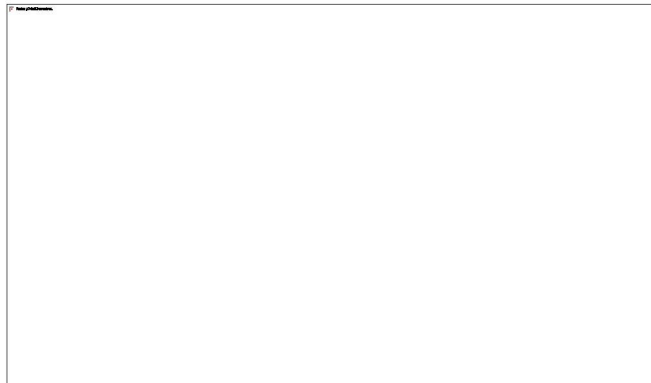
Tablo 5
DBKBF Soru 1'e Ait Kategoriler

Kategori	Açıklama	f	%
Doğru tanım yapanlar	Denklik bağıntısını formal bir şekilde tanımlayanlar	87	90,62
Hatalı tanım yapanlar	Tanım yapmayanlar veya Yanlış tanım yapanlar	9	9,38
Toplam	96	96	100

Bu soruda öğretmen adaylarının denklik bağıntısının formal tanımını yapmaları beklenmiştir. Öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar incelendiğinde, büyük bir çoğunluğunun (%90,62) denklik bağıntısının tanımını doğru bir şekilde yaptıkları görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının %9'u denklik bağıntısının tanımını yanlış ifade etmiş veya denklik bağıntısının tanımını yapmak yerine denklik bağıntısının nerede kullanıldığını açıklayarak bir tanım yapmamışlardır. Aşağıda Şekil 3 ve Şekil 4 ile kategorilere ait örnek cevaplara yer verilmiştir.

Şekil 3'te denklik bağıntısı için *doğru tanım yapanlar* kategorisinde olan öğretmen adayının cevabı sunulmuştur.

Şekil 3
DBKBF 1. Soru Doğru Tanım Örneği



Şekil 4'te denklik bağıntısını *hatalı tanım yapanlar* kategorisinde olan öğretmen adayının cevabı sunulmuştur.

Şekil 4
DBKBF 1. Soru Yanlış Tanım Örneği



Bu cevap denklik bağıntısının tanımını içermediği için bu kategoriye dahil edilmiştir.

4.2.2. DBKBF Soru 2'ye İlişkin Bulgular

Bu soruda öğretmen adaylarının denklik bağıntısının özelliklerini yazmaları ve niçin bu özelliklere sahip bağıntıya denklik bağıntısı denilmiş olabileceğine dair yorumlamalar yapmaları beklenmiştir. Alınan yanıtlar incelendiğinde oluşan kategoriler aşağıda Tablo 6'da sunulmuştur.

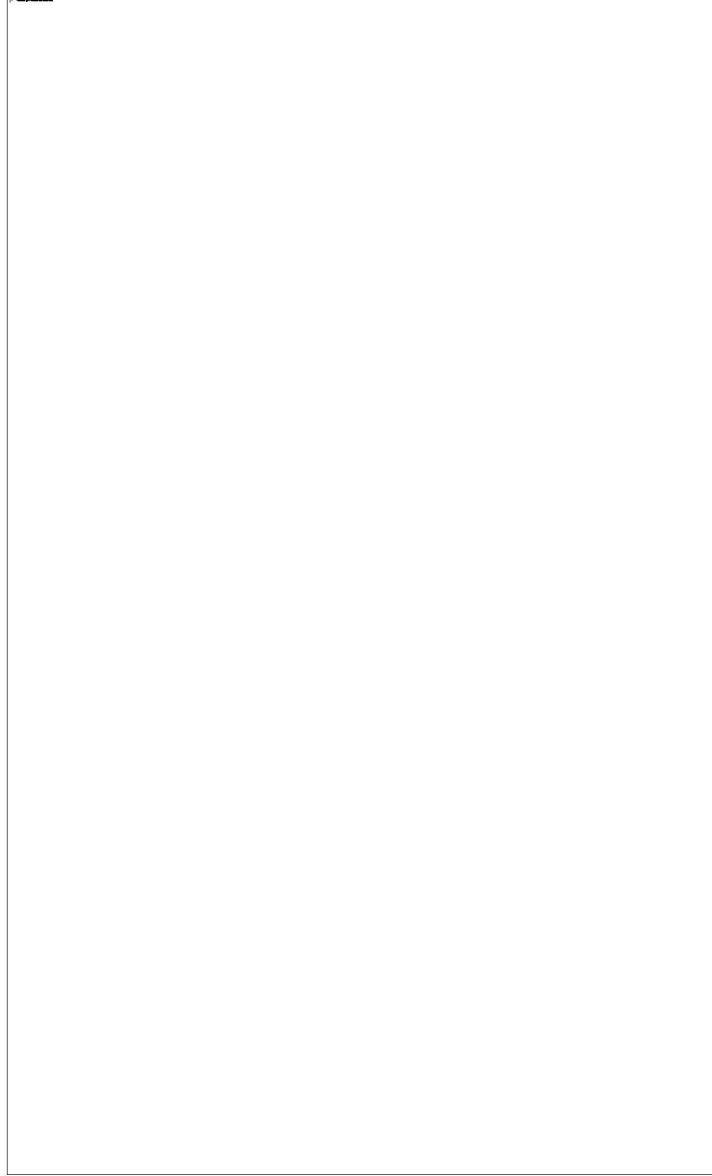
Tablo 6
DBKBF Soru 2'ye Ait Kategoriler

Denklik Bağıntısının Özelliklerini Yazanlar	Kategoriler	f	%
	Denklik bağıntısının niçin bu özellikleri gösterdiğini doğru bir ilişkilendirme ile açıklayanlar	18	18,75
	Denklik bağıntısının niçin bu özellikleri gösterdiğini eksik veya hatalı açıklayanlar	61	63,54
	Denklik bağıntısının özelliklerini yazıp niçin bu özellikleri gösterdiği hakkında herhangi bir açıklama yapmayanlar	17	17,7
	Toplam	96	100

DBKBF 2. soruda öğretmen adaylarının öncelikle denklik bağıntısının özelliklerini yazmaları beklenmiş ve bu özellikler ile denklik bağıntısı kavramı arasında bir ilişki kurmaları istenmiştir. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının tamamı denklik bağıntısını özelliklerini doğru bir şekilde tanımlamış ve bu öğrencilerin büyük bir çoğunluğu (%63,54) niçin bu özellikleri gösteren bağıntıya denklik bağıntısı denilmiş olabileceğini açıklamaya çalışmıştır. Ancak öğretmen adaylarının yalnızca %18,75'i doğru bir ilişkilendirme kurarak bir açıklama yapmıştır. Aşağıda öğrencilerin verdiği cevaplardan kesitler sunulmuştur.

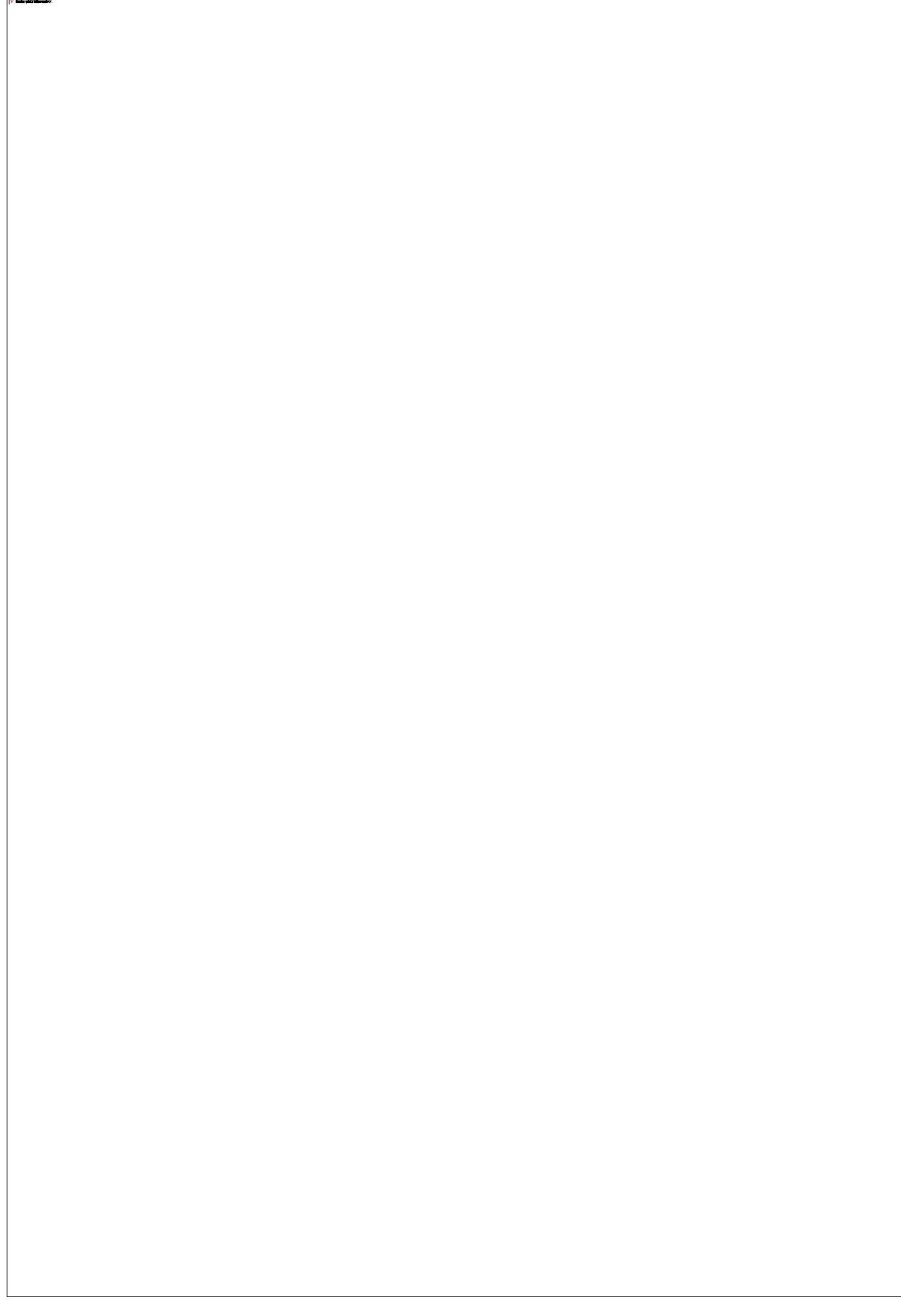
Şekil 5'te denklik bağıntısının özelliklerini yazarak niçin bu özellikleri gösterdiğini doğru bir ilişkilendirme ile açıklayan öğretmen adayının cevabı sunulmuştur.

Şekil 5
DBKBF 2. Soru Doğru İlişkilendirme Örneği



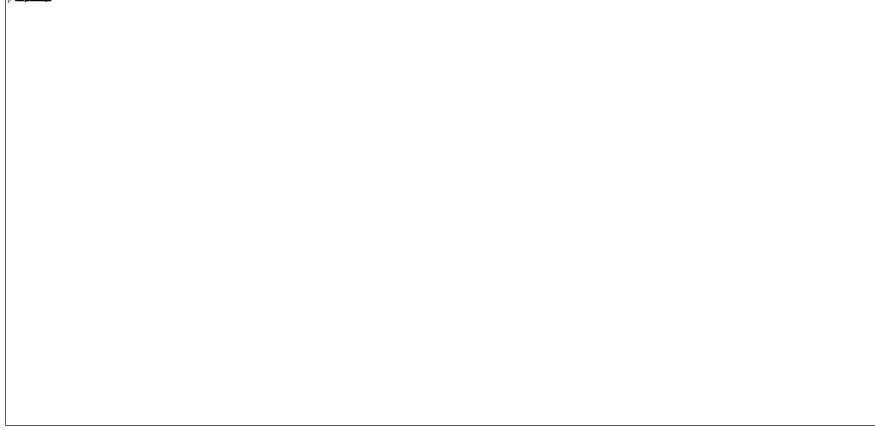
Şekil 6’da, denklik bağıntısının özelliklerini yazarak niçin bu özellikleri gösterdiğini doğru bir ilişkilendirme ile açıklayan diğer bir cevap sunulmuştur.

Şekil 6
DBKBF 2. Soruda Doğru İlişkilendirme Örneği



Şekil 7’de denklik bağıntısının özelliklerini yazarak, niçin bu özellikleri gösterdiğine dair bir açıklama yapmak yerine bir örnek veren öğretmen adayının cevabı sunulmuştur. Bu nedenle bu cevap *eksik veya hatalı açıklama* kategorisine dahil edilmiştir.

Şekil 7
DBKBF 2. Soruda Eksik veya Hatalı Açıklama Örneği



Şekil 8’de yalnızca denklik bağıntısının özelliklerini yazan ancak niçin bu özellikleri gösterdiği hakkında hiçbir açıklamada bulunmayan öğretmen adayının cevabı sunulmuştur.

Şekil 8
DBKBF 2. Soruda Açıklamasız Örneği



Şekil 8’de denklik bağıntısının özellikleri ile denklik kavramı arasında hiçbir ilişki kurulmadığı için bu cevap *açıklamasız* kategorisine dahil edilmiştir.

4.2.3. DBKBF Soru 3’e İlişkin Bulgular

Bu soruda öğretmen adaylarından düzlemdeki üçgenler kümesi üzerinde tanımlı benzerlik bağıntısının bir denklik bağıntısı olup olmadığını araştırmaları

beklenmektedir. Ayrıca bu bağıntıya göre oluşacak oran kümesini belirlemeleri istenmiştir. Kategoriler aşağıda Tablo 7 ile sunulmuştur.

Tablo 7
DBKBF Soru 3'e Ait Kategoriler

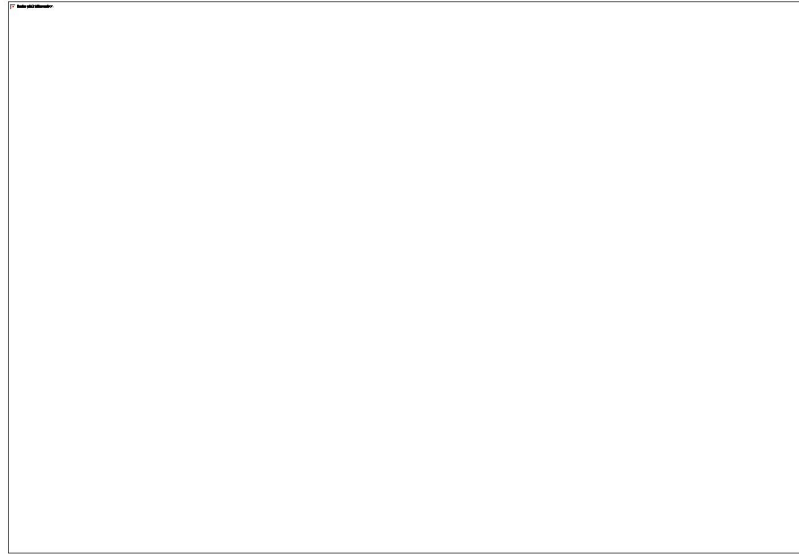
Kategoriler	Açıklama	f	%
	Doğru açıklama	6	6,25
Denklik bağıntısıdır	Geçersiz açıklama	42	43,75
	Gerekçesiz	26	27,08
Denklik bağıntısı değildir	Gerekçesiz	1	1,04
Geçersiz yanıt	Geçersiz açıklama	11	11,45
	Gerekçesiz	10	10,41
Toplam		96	100

DBKBF 3.soruda öğretmen adaylarından denklik bağıntısının tanımından yararlanarak verilen bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu göstermeleri ve buna göre oluşacak oran kümesini belirlemeleri beklenmektedir. Bu soruda öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu (%77,08) bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu söylemesine karşın, yarısı (%50) bir açıklama getirmiş ve bunlardan yalnızca altısı doğru bir açıklama ile denklik bağıntısı olduğunu ifade etmişlerdir. Yalnızca 1 öğrenci bağıntının bir denklik bağıntısı olmadığını ifade etmiş ancak bu konuda herhangi bir açıklama yapmamıştır. Ayrıca verilen cevapların %22'si cevapsız veya alakasız olduğundan geçersiz sayılmıştır. Bu soruda ortaya çıkan önemli bir durum, çalışmaya katılan öğretmen adaylarının hiçbirinin oran kümesini belirleyememesidir. Aşağıda

kategorilere örnek olarak öğretmen adaylarının verdikleri cevaplardan bir kesit sunulmuştur.

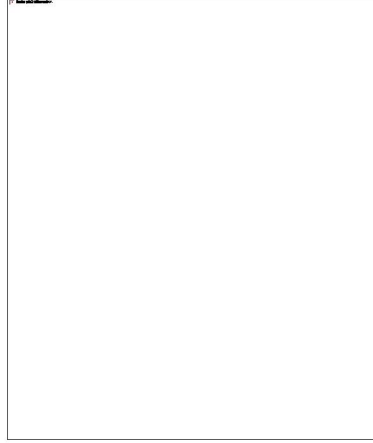
Şekil 9’da verilen bağıntının denklik bağıntısını olduğunu ifade eden ve özellikleri inceleyerek bu durumu gösteren öğretmen adayının cevabı sunulmuştur.

Şekil 9
DBKBF 3.Soruda Doğru Açıklama Örneği



Şekil 10’da verilen bağıntının denklik bağıntısı olduğunu sembolden yola çıkarak açıklayan öğretmen adayının cevabı sunulmuştur. Ancak özellikleri tek tek incelemediği için *geçersiz açıklama* kategorisine dahil edilmiştir.

Şekil 10
DBKBF 3.Soruda Geçersiz Açıklama Örneği



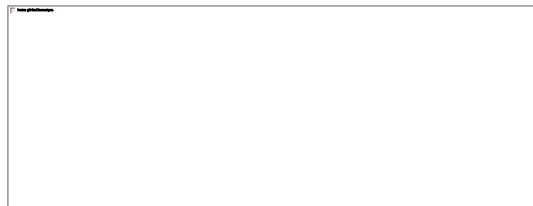
Şekil 11’de verilen bağıntının denklik bağıntısı olduğunu söyleyen fakat bu konuda açıklama yapmayan öğretmen adayının cevabı sunulmuştur. Bu nedenle bu cevap *gereksiz* kategorisine dahil edilmiştir.

Şekil 11
DBKBF 3.Soruda Gereksiz Cevap Örneği



Şekil 12’de öğretmen adayı denklik bağıntısıdır veya denklik bağıntısı değildir şeklinde bir açıklama yapmadığı için cevabı *geçersiz* kategorisine dahil edilmiştir.

Şekil 12
DBKBF 3.Soruda Geçersiz Yanıt Örneği



4.2.4. DBKBF Soru 4'e İlişkin Bulgular

Bu soruda bir küme verilmiş ve bu küme üzerinde tanımlı bir bağıntının denklik bağıntısı olup olmadığını göstermeleri istenmiştir. Ayrıca denklik sınıfını göstermeleri ve oran kümesi belirlemeleri beklenmiştir. Öğretmen adaylarının DBKBF 4.soruya verdikleri cevaplar incelendiğinde Tablo 8'deki kategoriler oluşturulmuştur.

Tablo 8
DBKBF Soru 4'e Ait Kategoriler

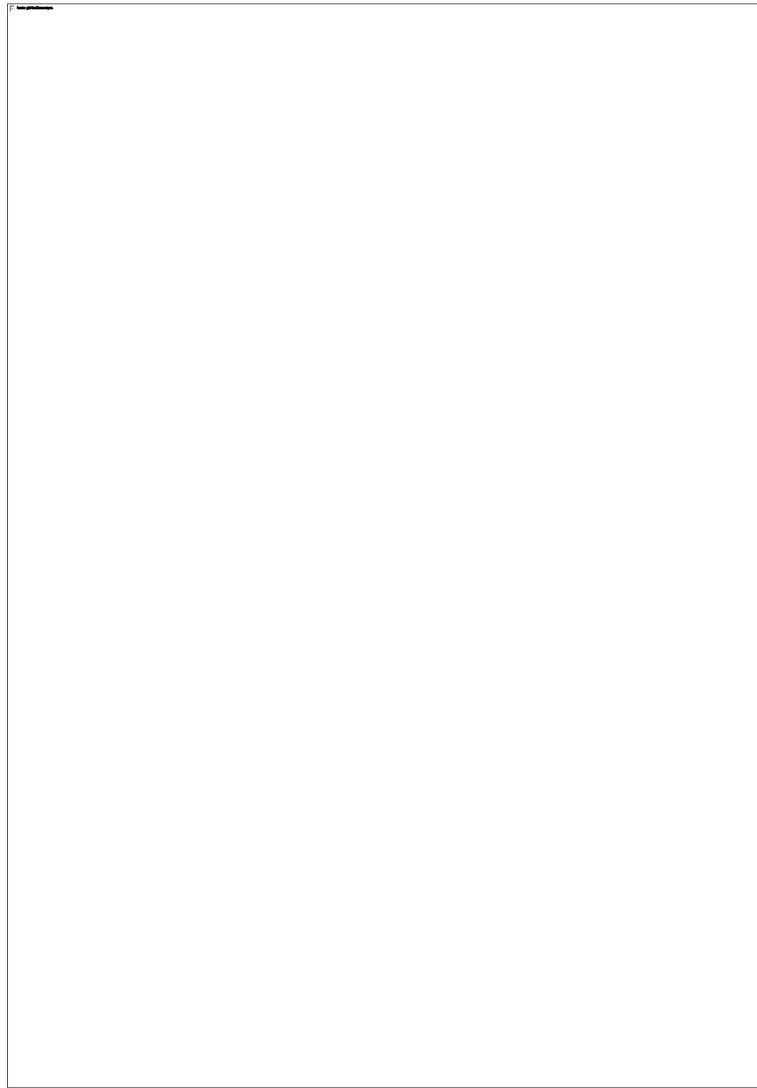
Kategoriler	Açıklama	f	%
Doğru Yanıt	• Denklik bağıntısı olduğunu gösterme • Verilen bir elemanın denklik sınıfı gösterme • Oran kümesini belirleme	16	16,66
Kısmen Doğru Yanıt	Yalnızca denklik bağıntısı olduğunu gösterme	26	27,08
	Denklik bağıntısı olduğunu göstererek bir elemanın denklik sınıfını belirleme	33	34,38
Geçersiz Yanıt	Yetersiz açıklama	21	21,88
Toplam		96	100

Soruda istenen, bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterme, verilen bir elemanın denklik sınıfını belirleme ve oran kümesini belirlemedir. Öğretmen adaylarının yalnızca %16,66'sı sorunun tamamını doğru yanıtlamıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının %78'i verilen bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterebilmiştir. Ancak denklik sınıfı ve oran kümesi belirlemede öğretmen adaylarının sorunlar yaşadığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının %27,08'inin

bağıntının denklik bağıntısı olduğunu incelemelerine karşın elemanların denklik sınıfını ve bağıntının oran kümesini belirleyemediği görülmüştür.

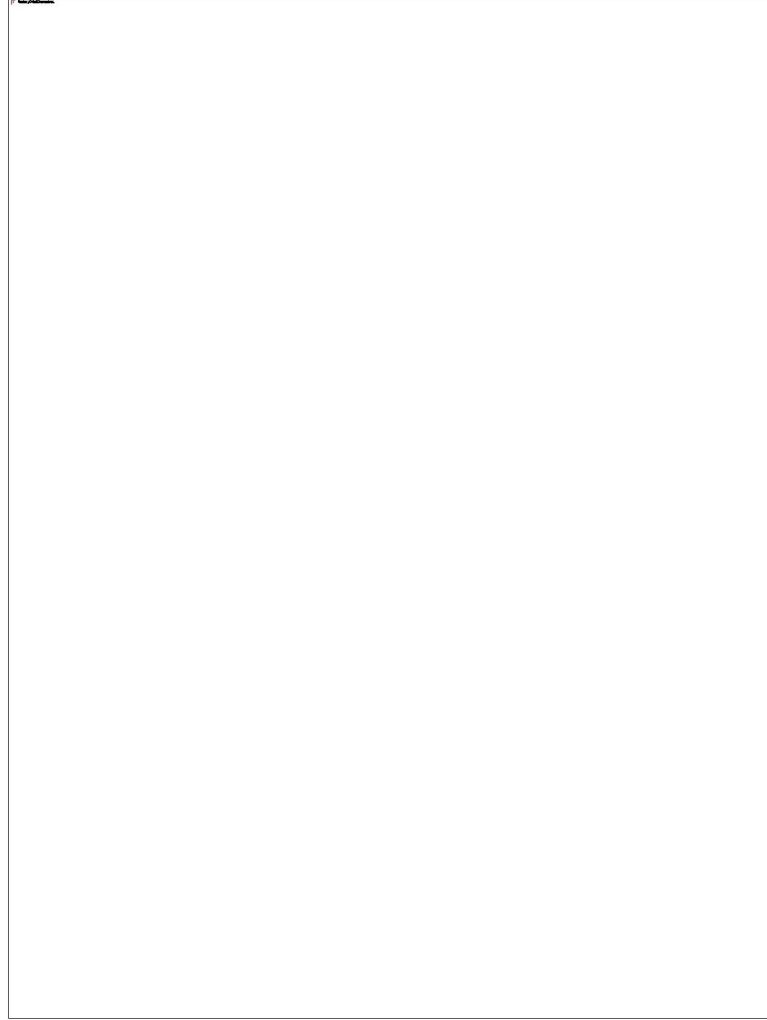
Şekil 13'te soruyu tamamen doğru yanıtlayan öğretmen adayının cevabı sunulmuştur.

Şekil 13
DBKBF 4. Soru Doğru Yanıt Örneği



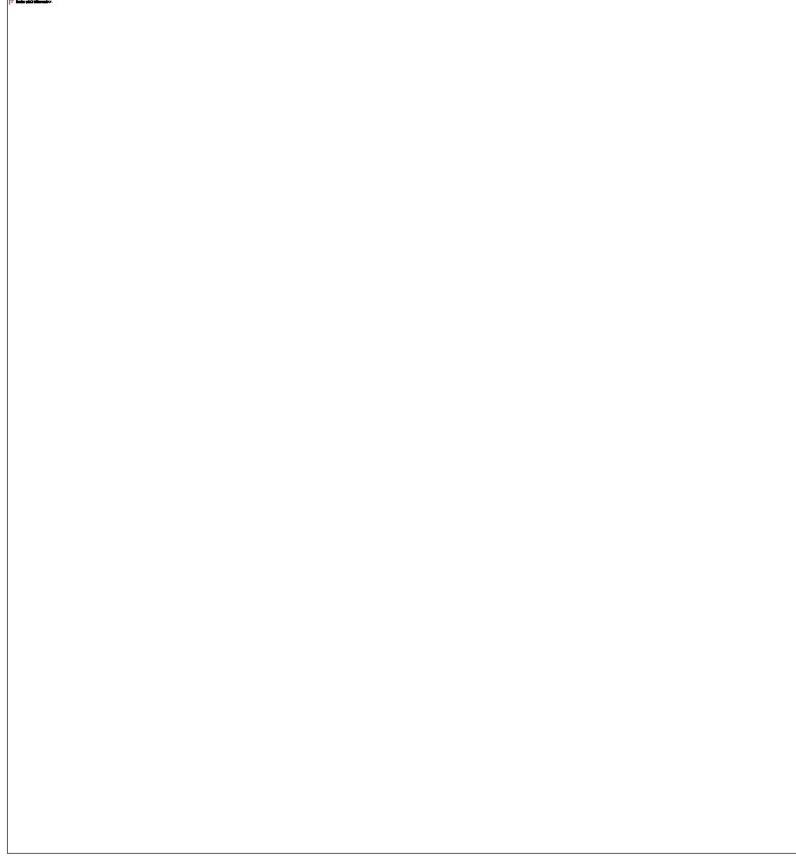
Şekil 14'te soruyu tamamen doğru yanıtlayan öğretmen adayının cevabı sunulmuştur.

Şekil 14
DBKBF 4. Soru Doğru Yanıt Örneği



Şekil 15’te verilen bağıntının bir denklik bağıntısı olmadığını söyleyen öğretmen adayının cevabı sunulmuştur. Denklik bağıntısı olmayan bağıntı da denklik sınıfı ve oran kümesi belirlenemeyeceği için bu cevap *geçersiz* kategorisine dahil edilmiştir.

Şekil 15
DBKBF 4. Soru Geçersiz Yanıt Örneği



Bu formda yer alan sorulara yönelik açıklamaların tamamına bakıldığında, öğretmen adaylarının büyük bir kısmının denklik bağıntısının tanımını yazabildikleri görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının tamamı denklik bağıntısının özelliklerini doğru bir şekilde yazmıştır. Ancak denklik bağıntısının niçin bu özellikleri gösterdiğini denklik kavramını düşünerek yorumlamaları istendiğinde öğretmen adaylarının %18'i doğru bir ilişkilendirme ile açıklama yapabilmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının denklik kavramı ile denklik bağıntısı kavramlarını birbirinden ayrı kavramlar olarak gördüklerine işaret edebilir. Bu formda yer alan diğer iki soruda öğretmen adaylarına bir bağıntı verilmiş ve bu bağıntıların denklik bağıntısı olup olmadığını incelemeleri istenmiştir. Bu bağıntılardan biri sonlu bir küme üzerinde tanımlı iken diğeri sonsuz bir küme üzerine tanımlıdır. Öğretmen adaylarının yetmiş dördü sonsuz küme üzerine tanımlı bağıntının denklik bağıntısı olduğunu

söylemişlerdir. Ancak yalnızca altısı doğru bir açıklama ile cevap verebilmiştir. Oran kümesini belirleyebilen kişiye ise rastlanmamıştır. Sonlu küme üzerinde tanımlı bağıntıyı incelerken ise çoğunlukla denklik bağıntısının özelliklerini gösterebildikleri görülmüştür. Ancak burada da öğretmen adaylarının denklik sınıfı ve oran kümesi belirlemede zorluk yaşadıkları görülmüştür.

DKİF ve DBKBF formlarından alınan cevapların yanı sıra yapılan ders içi gözlemler de örneklem belirlemede rol oynamıştır. Ders gözlemleri ile amaç öğretmen adaylarının derse katılımlarına ve matematiksel ifade becerilerine göre durum çalışması için uygun olan kişileri belirlemektir. Ayrıca ispat formundaki (KİF) sorular ile daha önce karşılaşmamış olmaları kanıt imajı teorik çerçevesini kullanarak inceleme yapmayı daha anlamlı kılacağından ders esnasında yapılan ispatlar formda kullanılmamak üzere not alınmıştır.

Genel olarak sınıfın kalabalık olması öğretmen adaylarını tanımayı güçleştirmiştir. Ancak yine de kritik olarak belirlenen bazı durumlar yaşanmıştır. Örneğin öğretim üyesinin öğretmen adaylarına ‘Denklik bağıntısı nedir?’ sorusunu yöneltmesi üzerine alınan cevaplardan biri ‘Eleman sayısı eşit bağıntılara denk bağıntılar denir’ olmuştur. Bu durum bu kişinin denklik kavramını yalnızca sayısal eşitlik olarak yorumladığını gösterebilir. Bu cevabın ardından öğretmen adaylarından Mehmet, bu tanımın denk kümeler için kullanabileceğini söylemiş ve ardından denklik bağıntısının formal tanımını yapmıştır. Denklik kavramı ile denklik bağıntısı arasındaki ilişkiyi kurmuş olması açısından Mehmet’in yorumu örneklem seçiminde önemli olmuştur. Sonrasında öğretmen adaylarına çeşitli bağıntılar verilmiş ve bunların denklik bağıntısı olup olmadığını incelemeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının özellikle denklik sınıfı belirleme ve oran kümesi oluşturma konularında birbirlerinden farklı cevaplar verdikleri ve cevaplarından emin olmadıklarını dile getirdikleri görülmüştür. Bu esnada İdil ve Sena’nın derse katılma isteği dikkat çekmiştir. Ders gözlemleri ile beraber DKİF ve DBKBF’den elde edilen bulgular incelendiğinde Mehmet, İdil ve Sena adlı kişilerin durum çalışması için uygun kişiler olduğu düşünülmüştür.

4.3. İkinci Alt Probleme Ait Bulgular

Bu bölümde Mehmet (M), İdil (İ) ve Sena (S) adlı ilköğretim matematik öğretmen adaylarının denklik bağıntısına ilişkin dört adet teoremi ispatlama süreçlerini kanıt imajı teorik çerçevesiyle incelemek amacıyla gerçekleştirilen durum çalışması bulguları yer almaktadır. Öğretmen adaylarının teorem ile karşılaşma anından itibaren aldıkları notlar ve teorem üzerine yaptıkları konuşmalar yorumlar ile birlikte sunulmuştur. Bulgular her teorem ve her öğretmen adayı için ayrı ayrı ele alınmıştır. Öğretmen adaylarına sunulan 4 teorem aşağıda sırasıyla verilmiştir.

1. A bir küme ve $\sim$, A üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı ve $a, b \in A$ olsun.
 $[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b$ 'dir. Kanıtlayınız.
2. İki denklik sınıfı özdeşdir ya da ayrıktır. Kanıtlayınız.
3. a, b ve $n \in \mathbb{Z}$ olsun. $a \equiv b \pmod{n}$ bağıntısı $\mathbb{Z}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Kanıtlayınız.
4. Boş küme hariç tüm sonlu kümelerden oluşan aile $\mathcal{A}$ ve
 $\beta = \{f \mid f : X \rightarrow Y \text{ birebir ve örten}, X, Y \subset \mathcal{A}\}$ olsun. Bu bağıntı $\mathcal{A}$ üzerinde bir denklik bağıntısı mıdır?

Bu sorularda bireylerin genel olarak sahip olunması gereken ön bilgiler; denklik bağıntısı, denklik bağıntısının özellikleri, denklik sınıfı, modüler aritmetik kavramı, fonksiyon kavramı, matematiksel notasyonları tanımadır. Araştırmacı (A) ile öğretmen adayları arasında geçen diyaloglar kısaca M, İ ve S şeklinde sunulmuştur.

4.3.1. Teorem 1'e İlişkin Kanıt İmajları

Mehmet, İdil ve Sena adlı öğretmen adaylarının birinci teoremden elde edilen bulguları aşağıda sırasıyla sunulmuştur.

Mehmet'in Kanıt İmajı

Mehmet teorem ile karşılaştıktan hemen sonra ispatlama sürecine başlamaktadır.

1M: $[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b$

Önce gerek koşulu ispatlamalıyım.

$(\Rightarrow)$: $[a] = [b] \Rightarrow a \sim b$

$x \in [a]$

Bir an duraksar ve silgisine yönelir.

1A: Neden siliyorsun?

2M: Ters yazmalıydım. (Önermelerin yerlerini işaret eder.)

2A: Farkeder mi?

3M: Gidişatı biraz değiştirir.

Mehmet gerek koşul önermesini yazdıktan sonra silgisine yönelir ve gerek koşul ile yeter koşul önermelerin yerlerini değiştirmesi gerektiğini düşünür. Burada Mehmet;

- Çift yönlü koşullu önermelerin ispatında gerek ve yeter koşulu ispatlaması gerektiğini belirttiğinde (1M),
- İspata başladığında önermelerin yerini değiştirmeye karar verdiğinde (2M),
- Gerek koşul ve yeter koşul önermelerinin yerlerini değiştirmez ise gidişatın etkileneceğini belirttiğinde (3M),

sahip olduğu bilgi yapılarını göstermektedir. Mehmet çift yönlü koşullu önermelerin ispatının nasıl yapacağını bilmektedir. Ancak burada Mehmet'in çift yönlü koşullu önermelerin yerlerini değiştirerek ispatı yapmak istemesi ve eğer değiştirmez ise sonucun bundan etkileneceğini belirtmesi ilk olarak Mehmet'in bu ifadeyi ($\Leftrightarrow$) anlamlandıramadığını akla getirmektedir. Mehmet'in zihninde çift yönlü koşullu önermelerin ispatı ile ilgili eksik bir bilginin varlığından söz edilebilir. Burada farkedilen diğer bir durum ise Mehmet'in yeter koşul önermesini nasıl ispatlayacağına dair zihninde bir yapı oluşması ve bu yüzden bu kısımdan başlamayı tercih etmesidir.

Mehmet önermelerin yerini değiştirerek ispata yeniden başladığında şu açıklamaları yapar:

4M: Şöyle olmalı:

$$a \sim b \Leftrightarrow [a] = [b]$$

$$x \in [a] \Rightarrow x \sim a \Rightarrow a \sim b \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \in [b] \Rightarrow [a] \subset [b] \quad (1)$$

$$x \in [b] \Rightarrow x \sim b \Rightarrow a \sim b \Rightarrow x \sim a \Rightarrow x \in [a] \Rightarrow [b] \subset [a] \quad (2)$$

(1) ve (2)'den $[a] = [b]$ olur.

3A: Yaptıklarını açıklar mısın?

5M: $[a]$ 'dan bir eleman aldım. Denklik bağıntısının özelliklerini kullanarak $[a] \subset [b]$ olduğunu gösterdim. Aynı şekilde $[b]$ 'nin denklik sınıfından eleman aldım sonucunda $[b] \subset [a]$ oldu. İki küme birbirinin alt kümesiye bunlar birbirine eşittir. Bu gerek koşulu. Şimdi yeter koşulu ispatlamam lazım.

Burada Mehmet;

- Denklik sınıfının tanımı
- Denklik bağıntısının özellikleri
- İki kümenin eşit olması için birbirlerinin alt kümesi olması gerektiği

ile ilgili bilgi yapılarını tanımaktadır (4M, 5M). Mehmet alakalı gördüğü bu bilgileri sahip olduğu matematiksel bilgiler arasından seçerek ve onları kullanarak yeni bir yapı oluşturmaktadır. Ardından Mehmet ispatın yeter koşul önermesini de aynı bilgiler yardımı ile tamamladığı görülmektedir (6M, 7M).

$$\mathbf{6M:} (\Leftarrow): [a] = [b] \Rightarrow a \sim b$$

Bunu az önce de yazmıştım.

Bir süre düşünür. Sonra yazmaya başlar.

$$x \in [a] \Rightarrow [a] = [b] \Rightarrow x \in [b] \Rightarrow x \sim a \wedge x \sim b \Rightarrow a \sim x \wedge x \sim b \Rightarrow a \sim b$$

Açıklamaya başlar:

7M: iki denklik sınıfının eşit olmasından yararlandım. x bunun elemanıysa ($[a]$), bunun da ($[b]$) elemanıdır. Sonra özellikleri kullandım. Değişme ve geçişme...

Bu süreçte Mehmet'in matematiksel ifadeleri de doğru kullandığı görülmektedir. Mehmet'in ispat süresince kullandığı yapılar Mehmet'in zihninde vardır ve Mehmet

alakalı gördüğü bu yapıları seçerek yeni bir yapı oluşturmaktadır. Bu yeni yapının oluşumu ani ve beklenmedik bir durum değildir. Mehmet sahip olduğu yapılar arasında bağlar kurdukça yeni yapı oluşmaktadır. Bu durum kanıt imajının yeni yapılar oluşturma eylemlerinin doğrusal olmamakla birlikte paralel ve etkileşimli olduğunu doğrulamaktadır.

Mehmet süreç boyunca;

- Çift yönlü koşullu önermelerin ispatı
- Denklik bağıntısının özellikleri ve denklik sınıfının tanımı
- İki kümenin eşitliğini ispatlama
- Matematiksel sembollerin kullanımı

yapılarını kullanmaktadır.

4A: Bitti mi ispatın?

8M: Evet. Bu kadar.

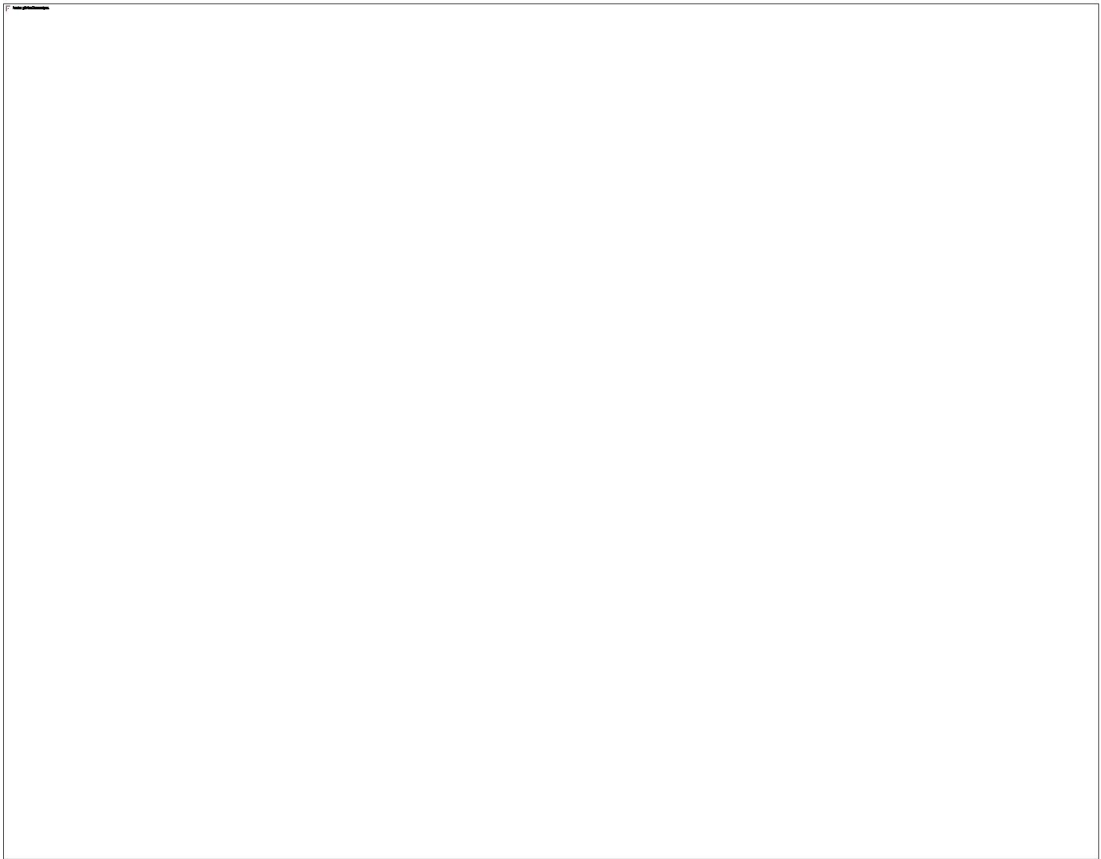
5A: Emin misin yaptıklarından?

9M: Şurda hem ' $\Rightarrow$ ' hem ' $\wedge$ ' kullandım. Aradaki bağıntıyı tam kuramamış olabilirim. Ama geneli doğrudur herhalde.

Mehmet'in ispatı tamamlaması yeni bir yapı oluşturma bağlamında ele alındığında, oluşan bu yeni yapıyı, sahip olduğu ve alakalı gördüğü matematiksel yapıları seçerek ve bunlar arasında ilişkiler kurarak sağladığı görülmektedir. Bu durum kanıt imajının bilişsel boyutunun özelliklerinden olan *mantıksal bağlar içirme* özelliğini gösterir. Mehmet'in kanıt imajı bir süreci yansıttığından *dinamiktir*. Mehmet'in sahip olduğu matematiksel bilgi yapılarıyla mantıksal bağlar kurarak oluşturduğu bu yeni yapı bir *bütünlük oluşturmaktadır*. Mehmet ispatı tamamladığında yaptıklarının genelinden emin olduğunu ifade etmekte ancak matematiksel ifadeleri kullanmada hataya düşmüş olabileceğini söylemektedir. Bu durum kanıt imajının duyuşsal boyutu olan sezgisel ikna bağlamında değerlendirildiğinde Mehmet'in oluşturduğu yeni bilgidен emin olduğu ve bu konuda kesinlik hissinin oluştuğunu ancak sadece matematiksel ifadeleri kullanmada kendisinden emin olmadığı görülmektedir. Mehmet'in bu konuda kesinlik hissinin oluşmaması yanlış

yapmasından kaynaklanmamaktadır. Mehmet'in kullandığı matematiksel dil genel itibariyle doğrudur. Ancak yine de bu konuda kesinlik hissinin oluşmaması Mehmet'in matematiksel notasyonları kullanarak ispat yapma konusundaki bilgi yapılarının yeni oluşmuş olmasından kaynaklanabilir. Bu durum yeni oluşan bilginin kırılganlığı olarak da yorumlanabilir. Şekil 16'da Mehmet'in ispat süreci özetlenmiştir.

Şekil 16
Mehmet'in Olayı



İdil'in Kanıt İmajı

İdil teoremi sesli olarak okuduktan hemen sonra ilk olarak teorem ile ilgili yorumunu yapmaktadır.

$$1İ: a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$$

Bu simetri özelliğidir. O zaman $[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b$

1A: Simetri özelliğinden bahsetmek yeterli mi?

2İ: Böyledir. Bundan başka da ne söylenebilir. He... Bunlar küme olduğu için eleman alıp göstereceğim.

Burada İdil;

- denklik bağıntısının simetri özelliğini

açıklamakta ve tanıdığı yapılar arasında olduğunu göstermektedir (1İ). Ancak bu açıklamanın teoremin ispatı için yeterli olduğu görüşündedir. Araştırmacı İ'ye yönelttiği soru ile yeniden düşünmesini amaçlamaktadır. İ tekrar düşündüğünde ne yapması gerektiğinin farkına varır.

Bir süre düşündükten sonra aşağıdaki satırları yazmaya başlar.

3İ: $x \in [a] \Rightarrow x \sim a \wedge a \sim b \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \in [b] \Rightarrow [a] \subset [b]$

$x \in [b] \Rightarrow x \sim b \wedge a \sim b \Rightarrow x \sim a \Rightarrow x \in [a] \Rightarrow [b] \subset [a]$

Bu ikisinin sonucunda $[a] = [b]$ oldu.

Bu aşamada İdil'in;

- denklik sınıflarının öncelikle birer küme olduğu,
- küme ile ilgili ispat sorularında ispata nereden başlaması gerektiği,

bilgi yapıları doğru kombinasyon ile zihninde canlanmaktadır (2İ). Ardından ispatı yapmaya başlayan İdil'in

- denklik bağıntısının özellikleri,
- denklik sınıfının tanımı,
- eşit küme olma koşulu,

sahip olduğu matematiksel yapılar arasındadır (3İ). İdil tanıdığı bu yapılar arasında mantıksal bağlar kurarak ispatın ilk adımını tamamlamaktadır. Araştırmacının ispatı bitirip bitirmediğini sorması üzerine İdil, yeter koşulu ispatlaması gerektiğini farkederek.

4İ: Bitmedi mi... Gerek ve yeter koşul var burda doğru. O zaman yine eleman alayım.

$$x \in [a] \Rightarrow x \sim a \Rightarrow [a] = [b] \Rightarrow x \in [b] \Rightarrow x \sim b \wedge x \sim a \Rightarrow a \sim b$$

Bu sefer oldu.

3A: Emin misin yaptıklarından?

5i: Evet.

Bu durum İdil'in;

- çift yönlü koşullu önermelerin ispatı

hakkında bilgi sahibi olduğunu göstermektedir (4İ). Bu bilgiyi tanıması ve kullanması eş zamanlı olmaktadır. Böylece ispatı tamamlamaktadır. Ancak bu bilgi yapısını hatırlaması araştırmacının sorduğu soru ile eş zamanlı olmaktadır.

İdil'in kanıt imajının bilişsel boyutu incelendiğinde alakalı gördüğü matematiksel yapıları seçmesi süreç boyunca devam etmektedir. İdil iki ayrı yerde ispatı tamamladığını düşündüğü halde araştırmacının İdil'i tekrar düşünmeye teşviki üzerine düşünmeye devam ettiği görülmektedir (1İ, 3İ). İdil'in verdiği cevaplar O'nun ispatı tamamlayabilmesi için gerekli olan bilgi yapılarına sahip olduğunu ancak bu bilgi yapılarını kullanabilmesi için araştırmacının sorularla sürece dahil olmasını gerektirmektedir. İdil, sorular üzerine tekrar düşündüğünde ispatın bitmediğini farketmekte ve böylece sahip olduğu matematiksel yapılar arasında *mantıksal bağlar* kurarak yeni bir yapı oluşturmaktadır. Bu durum ilerleme gösteren bir süreç olduğundan *dinamiktir*. İdil'in ispatın doğruluğuna ilişkin *kişisel anlayışının* teorem ile karşılaştığı anda oluştuğu görülmektedir (1İ). Ancak teoremin ispatı için açıklamaları yetersizdir. Bu durum İdil'in zihninde neler canlandığını söylemek için yetersiz olmakla birlikte kanıt imajının kalıcı olmadığı, gözden kaybolabildiği veya kanıt imajını ifade etmenin güç olduğu ile açıklanabilir. İdil bu süreci tamamlayarak, sahip olduğu matematiksel yapılardan hareketle yeni bir bilginin oluşumunu sağlamaktadır. Böylece kanıt imajının *bütünlük* karakteristiğini sağlamaktadır.

İdil'in kanıt imajının duyuşsal boyutuna bakıldığında, ispatı tamamladığına dair bir kesinlik hissinin oluştuğu görülmektedir (5İ). Bu durum *sezgisel ikna* karakteristiğine örnektir.

Sena'nın Kanıt İmajı

Sena teoremi okur okumaz ispatlama sürecine başlamaktadır. Sena'nın ne yapması gerektiğinin farkında olduğu gözlenmektedir.

$$1S: [a] = [b] \Rightarrow a \sim b$$

$$x \in [a] \Rightarrow x \in [b] \Rightarrow x \sim b \wedge x \sim a \Rightarrow a \sim b$$

En son geçişme özelliğinden $a \sim b$ elde ederiz.

$$2S: a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$$

Şimdi bunu ispatlamam lazım.

Yine bir eleman alalım denklik sınıfından.

$$x \in [a] \Rightarrow x \sim a \Rightarrow a \sim b \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \in [b]$$

3S: O zaman $[a] = [b]$ derim, değil mi?

Kısa bir süre içinde ispatın ilk adımını doğru bir şekilde tamamlayan Sena'nın (1S);

- Çift koşullu önermeleri ispatlama
- Denklik sınıfının tanımı
- Denklik bağıntısının özellikleri

ile ilgili matematiksel yapılara sahip olduğu ve teoremin ispatı için bu yapılar arasında anlamlı ilişkiler kurarak ispatın ilk adımını doğru bir şekilde tamamladığı görülmektedir. İspatın ikinci basamağı olan yeter koşul kısmını ispatlamaya başlayan Sena, iki denklik sınıfında da var olan bir eleman olduğunu gösterdikten sonra bu iki denklik sınıfının eşit olduğunu gösterdiğini düşünmektedir (3S). Ardından şu açıklamaları yapar:

4S: x öyle bir eleman ki hem $[a]$ 'nin hem de $[b]$ 'nin denklik sınıfında.

Bu sözlerin hemen arkasından şu yorumu yapar:

5S: Böyle bir şey olamaz ki. İkisi denk olmasa olamaz. Normalde öyle ama bunu kanıtlamam lazım galiba. Burdan direkt $[a] = [b]$ diyemem yani.

Bu esnada Sena'nın iki denklik sınıfının eşitliğini aşikar olarak görmektedir (4S). Bu durum Sena'nın zihninde varolan "İki denklik sınıfı kesişemez." bilgi yapısı ile alakalı olabilir. Ancak durum böyle ise bu teoremin ispatlanması doğru olacaktır. Bu noktada araştırmacı Sena'nın yeniden düşünmesini sağlamak amacıyla iki kümenin eşitliğinin ne anlama geldiğini sorar.

2A: İki kümenin eşit olması ne demek?

6S: He. İkisinin birbirinin alt kümesi olması gerek.

O zaman ilk başta $[a] \subset [b]$ deriz. Yani şöyle.

$$x \in [a] \Rightarrow x \sim a \Rightarrow a \sim b \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \in [b] \Rightarrow [a] \subset [b] \quad (1)$$

Bir de $[b] \subset [a]$ bunu göstermem gerek.

$$x \in [b] \Rightarrow x \sim b \wedge a \sim b \Rightarrow x \sim a \Rightarrow x \in [a] \Rightarrow [b] \subset [a] \quad (2)$$

(1) ve (2)' den $[a] = [b]$ olur.

Böylece Sena;

- Eşit küme olma koşulunu (6S),

açıklayarak bu bilgiye sahip olduğunu gösterir. Ancak bu bilgiyi kullanması gerektiğini araştırmacı tarafından gelen soru ile farkeder. Ardından kendinden emin bir şekilde ispatı tamamlar.

3A: Emin misin yaptıklarından?

7S: Bence evet. Gerek ve yeter koşulu yaptık. Bu kadar.

Sena'nın kanıt imajının bilişsel boyutu incelendiğinde alakalı matematiksel yapıları seçtiği ve bunlar üzerine yeni bir yapı kurduğu gözlenmektedir. Bu süreçte araştırmacı kritik anlarda (1A, 2A) sorduğu sorular ile Sena'nın bildiği fakat kullanmayı düşünemediği matematiksel yapıları kullanmasını sağlamayı amaçlamaktadır. Böylece Sena, sahip olduğu yapılar arasında *mantıksal bağlar* kurarak yeni bir yapı oluşturur. Oluşturduğu yeni yapı kendi içinde tutarlıdır ve kanıt imajının *bütünlük oluşturma* karakteristiği sağlanmaktadır. Sena'nın kanıt imajı gelişme gösteren bir süreci temsil ettiğinden *dinamiktir*. Sena bu süreçte daha önceden

bilmediği yeni bir yapıyı oluşturduğu için *kişisel anlayış* karakteristiğini sağlamaktadır. Sena'nın ispatı tamamlaması ve bittiğini ifade etmesi üzerine kanıt imajının duyuşsal boyutu olan *sezgisel iknâ*nın oluştuğu söylenebilir.

4.2.2. Teorem 2'ye İlişkin Kanıt İmajları

Mehmet, İdil ve Sena adlı öğretmen adaylarının ikinci teoremden elde edilen bulguları aşağıda sırasıyla sunulmuştur.

Mehmet'in Kanıt İmajı

Mehmet teorem ile karşılaştıktan sonra soruyu önce sesli olarak birkaç kez okumaktadır. Teoremde verilen sözlü ifadeyi matematiksel sembollerle göstermeye çalışmaktadır.

1M: $[a] \neq [b] \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$. Doğru mu yazdım?

1A: Acele etmene gerek yok. Tekrar düşünebilirsin.

Soruyu tekrar sesli bir şekilde okur ve yazdığı ifadenin doğruluğu üzerinde düşünür.

2M: Tamam doğru bu, bence böyle. Olmayana ergi yöntemi ile bunu ispatlayabilirim.

Mehmet teoremi sesli olarak birçok defa okuduktan sonra öncelikle sözel olarak verilen ifadeyi matematiksel sembollerle doğru bir şekilde ifade etme üzerinde durmaktadır. Kısa bir süre içinde ifadeyi matematiksel olarak yazar (1M). Ancak yazdığının doğruluğundan emin olmadığı görülmektedir. Bunun üzerine yeniden düşünür ve daha sonra emin olur. Mehmet'in bu ifadeyi doğru olarak yazması teoremi doğru anladığını ve anladığını ifade edebilecek matematiksel notasyonları bildiğini ve doğru kullandığını göstermektedir. Hemen sonrasında ispatı nasıl yapacağı ile ilgili strateji geliştirmeye çalışan Mehmet, olmayana ergi ile ispat yöntemini seçer ve bu yöntemi açıklar (2M, 3M). Mehmet'in bu aşamada hangi ispat yönteminin O'na kolaylık sağlayacağını tespit etmesi ve bu yöntemi doğru bir şekilde açıklaması alakalı

olan önceki yapılarını seçtiğini ve aralarında bağ kurmaya hazırlandığını göstermektedir.

2A: Olmayana ergi ile ispat nasıl yapılır?

3M: Karşıt tersini ispatlıyorsun. $p \Rightarrow q$ yerine $q' \Rightarrow p'$. Ama burda çift yönlü gerektirme olduğu için yer değişimine gerek yok. O zaman şöyle olacak;

$$[a]=[b] \Leftrightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

Ardından ispata başlar.

$(\Rightarrow): [a]=[b] \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$ (olmayana ergi)

$$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow x \in [a] \cap [b] \Rightarrow x \in [a] \wedge x \in [b]$$

Duraksar.

4M: a' nın (elemanının) denklik sınıfı ile b' nin (elemanının) denklik sınıfı eşit ise kesişimleri boş kümeden farklıdır. İki denklik sınıfı... Bunlar küme sonuçta. Kesişimleri boş kümeden farklı ise o kümeden x diye bir eleman aldım. x elemanı kesişimde ise hem a hem de b' nin denklik sınıfında yer alır.

Ardından soruya tekrar bakar ve bir süre düşünür.

3A: Ne düşünüyorsun?

5M: Şu an galiba yanlış gidiyorum. Şimdi burada $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

önermesinden eleman alıp $[a][b]$ önermesinin yardımı ile

$[a] \cap [b] \neq \emptyset$ önermesine varmalıydım. Öyle olmayacak.

Yazmayı yarım bıraktığı ispata döner.

$$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow x \in [a] \cap [b] \Rightarrow x \in [a] \wedge x \in [b] \Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$$

4A: Neresi yanlış oldu?

6M: Benim sonuç olarak bu kısmı ($[a] \cap [b] \neq \emptyset$) bulmam lazım ama ben burayı ($[a] = [b]$) buldum.

Bir süre sessiz kalır.

Mehmet ispat için uygun stratejiyi seçtikten sonra gerek koşul önermesini yazarak ispatlamaya başlamaktadır (3M). Mehmet çift yönlü gerektirmeden ötürü hipotez ve hükmün yerini değiştirmenin gerekli olmadığını ifade etmektedir. Ancak

bir süre sonra ispatını yarım bırakarak bir sorun yaşadığını açıklar. Bu aşamada Mehmet'in öncelikle ifadelerin yerini değiştirmemesine karşın hükmü varsayarak hipoteze ulaşmaya çalıştığı ve bu durumun bir karışıklığa sebep olduğu görülmektedir. Daha sonra Mehmet'in ispatı nasıl yapması gerektiği ile ilgili açıklaması bu karışıklığın sebebini açıklayabilir. Burada yaşanan durumun sebebi olarak Mehmet'in, hipotezi varsayarak ve hükmü kullanarak hükmün doğruluğunu göstermesi gerektiğini düşünmesi gösterilebilir. Bu düşünce Mehmet'in zihninde oluşmuş yanlış bir bilgi yapısından kaynaklanmaktadır. Bu yanlış yapı Mehmet'in Teorem 1'de doğrudan ispat yöntemini kullanırken ortaya çıkmamasına karşın olmayana ergi yöntemi ile ispat yaparken belirmesi Mehmet'in zihnindeki yanlış matematiksel yapının bu yöntemle alakalı olduğunu göstermektedir.

7M: Çelişki bulma yöntemi...

Bir süre daha soruyu okur ve yaptığı matematiksel ifadenin doğruluğunu yeniden kontrol eder.

8M: Yöntemi düşünmeden bir ispatlamaya çalışacağım...

$$x \in [a] \cap [b] \Rightarrow x \in [a] \wedge x \in [b] \Rightarrow x \sim a \wedge x \sim b \Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$$

9M: Bence p ve q ifadelerinin yerini değiştirmeliyim. Olmayana ergi yöntemi için öyle yapmam lazımdı zaten. Ters olmuş.

Yaptığı ispat üzerinde göz gezdirir.

Zaten burdan gitmek kolay diye başlangıçta olmayana ergi yöntemi demiştim.

5A: Şimdi oldu mu?

Bir süre düşünür.

10M: Bence yine de bir sorun var. Şimdi burada $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ önermesinden eleman alıp $[a] = [b]$ önermesinin yardımı ile $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ varmalıydım. Öyle olmadı. Ama nasıl kullanayım ki... Bilmiyorum ama bence burda bir sorun var. Acaba çelişki bulma yöntemi ile mi ispatlasaydım...

Bir süre daha sessiz kalır.

Mehmet, ardından gerek koşul önermesinden emin olmasa da devam etmek ister ve yeter koşul önermesini yazar.

11M: Yeter koşulu ispatlayayım. Yeter koşul önermesini yazar.

$$[a] = [b] \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

İki denklik sınıfı eşitse bunları kesişimi boş kümeden farklıdır. Burası net. Bariz. İkisi birbirinin aynısıysa kesişimi boş olamaz. İlla göstermem gerekirse A'nın denklik sınıfından bir eleman alırım, iki denklik sınıfı eşit olduğu için bu eleman b'nin denklik sınıfında da yer alır. Böylece kesişim kümesi boş olmaz.

Önermeyi yazmasının ardından doğruluğunun bariz olduğunu açıklar. Böylece Mehmet'in matematiksel notasyonları doğru okuduğu ve anlamlandığı görülmektedir.

6A: Bitti mi ispatın?

12M: Evet bitti.

Bir süre daha yaptıklarını yeniden gözden geçirir.

13M: Dediğim gibi şurada bir sorun var (gerek koşul önermesinin ispatını gösterir). Ama başka türlü bir çözüm de düşünemiyorum.

7A: Sorunun ne olduğunu tekrar açıklar mısın?

14M: Biz normalde hep derslerde örneğin $p \Rightarrow q$ önermesini ispatlarken, q (önermesinden) eleman alıp p (önermesinin) yardımıyla q (önermesinin) doğruluğunu gösteriyorduk. Ama burda p önermesinden hareketip edip q önermesinin doğruluğunu göstermiş oldum.

Bir süre daha gözlerini yazdıkları üstünde gezdirir.

15M: Çelişki bulma yöntemi... $\sqrt{2}'$ nin rasyonel olmadığının ispatı çelişki bulma yöntemi ile gösteriyorduk mesela. İfadenin olumsuzunu varsayıyorduk. Sonra bir çelişki buluyorduk. Burda onu mu yapmalıydım...

$$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]$$

$$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow a \sim b$$

Belki buradan düşünmenin bir yararı olur.

Yani $[a] = [b]$ 'i kullanamadım. Belki bunun ispatlanma stilinde bir farklılık vardır.

16M: Bilmiyorum orada bir sorun var.

Ardından kalemini bırakır.

Mehmet yarım bıraktığı ispatı tamamlamaktadır. Ancak kanıt imajının duyuşsal boyutu olan *sezgisel ikna* karakteristiği oluşmamaktadır. Mehmet, bir de herhangi bir ispat yöntemi düşünmeksizin nasıl ispat yapacağını görmek ister ve yeniden aynı ifadeleri yazdığını görür. Bu sırada olmayana ergi yöntemi için ifadelerin yerini değiştirmesi gerektiğini farkeder. Böylece yaptığı ispattaki hatayı düzeltir. Ancak yine de Mehmet'in kesinlik hissinin oluşmadığı görülmektedir. Bunun sebebi ise daha öncede karşılaşılan Mehmet'in olmayana ergi yöntemi ile alakalı zihninde oluşmuş yanlış yapıdan kaynaklanmaktadır. Mehmet, ispat yaparken hipotezden hareketle ve hükmün kullanılmasıyla hükme varılması gerektiğini düşünmektedir. Mehmet'in yazdığı ifadeler incelendiğinde, Mehmet'in gerek koşul önermesini yazması çift gerektirme içeren teoremlere nasıl yaklaşması gerektiğini bildiğini göstermektedir. Ardından;

$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow x \in [a] \cap [b]$	Boş kümenin tanımı
$\Rightarrow x \in [a] \wedge x \in [b]$	Kesişim kümesinin tanımı
$\Rightarrow x \sim a \wedge x \sim b$	Denklik sınıfının tanımı
$\Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$	Denklik bağıntısının özellikleri, Teorem 1

matematiksel yapılarına sahip olduğu görülmektedir.

Mehmet'in ispat sürecinde en çok dikkat çeken durum, Mehmet'in ispatın henüz başındayken olmayana ergi yöntemi ile ispatı tercih etmesi ancak sonrasında sıklıkla bu yöntemi kullanmasının doğru olup olmadığını sorgulaması olmaktadır. Bu durum Mehmet'nin zihninde en başta bir kanıt imajı oluştuğuna ancak zaman içerisinde gözden kaybolduğuna işaret edebilir. Çünkü Mehmet ispatın ilerleyen kısımlarında; başlangıçta işini kolaylaştıracağını düşündüğü için bu yöntemi seçtiğini söylemektedir (9M).

Mehmet'in ispatının ilk adımını doğru yapmasına karşın *sezgisel ikna hissinin* oluşmaması dikkate değer bir noktadır. Bu durumun sebebi, Mehmet'in zihnindeki olmayana ergi yöntemi ile ilgili önceden oluşmuş yanlış yapı olabilir. Mehmet, ispatı

doğru yaptığı halde başka bir çözüm aramakta ve başka ispat yöntemleri kullanmayı düşünmektedir. Ayrıca Mehmet'in zihnindeki bu yanlış yapıyı birden fazla kez ifade etmesi bu bilginin doğruluğundan emin olduğunu göstermektedir.

Mehmet, yeter koşul önermesinin doğruluğunun aşık olmasını açıklamasının ardından ispatının bittiğini söyler. Mehmet, ispatını doğru şekilde tamamlamıştır. Ancak yine de soru üzerinde düşünmeye devam ettiği görülmektedir. Bu durum kanıt imajının duyuşsal boyutu olan *sezgisel ikna* özelliğinin oluşmamasından kaynaklanmaktadır. Ardından emin olamadığı noktayı açıklar. Mehmet'in tekrar tekrar dile getirdiği olmayana ergi yöntemi ile ispat hakkında zihninde önceden oluşmuş olan yanlış yapı Mehmet'in sezgisel iknasının oluşumunu engellemektedir ve Mehmet ispat için başka yöntemler düşünmektedir.

Mehmet'in kanıt imajının bilişsel özellikleri incelendiğinde, Mehmet'in teorem ile alakalı sahip olduğu matematiksel bilgi yapıları arasında *mantıksal bağlar* kurduğu görülmektedir. Mehmet bildiği yapılardan hareketle yeni bir yapı oluşturmaktadır. Ancak ispatı doğru şekilde tamamlayarak yeni bir yapı oluşturduğu halde oluşan bu yeni yapının doğruluğundan emin olamamaktadır. Mehmet'in ispat süreci gelişme gösteren bir süreç olduğundan *dinamiktir*. Mehmet'in teoremi matematiksel notasyonları kullanarak çok kısa bir sürede yazması ve ispat için hangi yöntemi uygulayacağına da hemen karar vermesi Mehmet'in *kişisel anlayışının* yansıması olarak görülebilir.

Mehmet, ispatı tamamlayarak yeni bir matematiksel yapı oluşturduğu halde zihnindeki yanlış bir yapı sezgisel iknasının oluşmasını engellemektedir. Öyleyse oluşan bu yeni yapının bütünlük oluşturma özelliğinden bahsedilebilir mi? Mehmet ispatı doğru yaptığını düşünmediği için zihninde yeni bir yapının olduğundan söz etmek doğru olur mu? Bu durum tartışma kısmında tartışılacaktır.

İdil' in Kanıt İmaja

İdil, soruyu sesli olarak birkaç kez okuduktan sonra teoremin doğru olduğunu ancak nasıl ispatlayacağını bilmediğini ifade etmektedir.

1İ: Bunun doğru olduğunu biliyorum ancak ispatı nasıl olur bilemiyorum.

1A: İstediğin kadar düşünebilirsin.

Bir süre sessiz kalır.

2A: Sence neden doğru?

2İ: Yani mesela kesirler üstünde düşünelim. Bir tarafta $\frac{1}{3}$ kesrinin denklik sınıfı olsun diğer tarafta $\frac{2}{3}$ kesrinin... Bunların kesişimi yoktur. Ama nasıl ispatlanır bu...

İdil, denk olmayan iki kesrin denklik sınıflarında ortak bir eleman bulunamayacağını açıklayarak teoremi nasıl anladığını göstermektedir (2İ). Böylece İdil önceki alakalı bilgilerini seçerek ve aralarında bağ kurarak soyutlama eylemine başlamaktadır. İdil'in verdiği örnek ile;

- Denklik
- Denklik sınıfları
- Denk kesirler
- Denklik sınıfı ve küme ilişkisi

kavramlarını bildiği görülmektedir. Ancak bu aşamada ispatı nasıl yapacağını bilemediğini ifade etmektedir. Bunun üzerine araştırmacı İdil'den soruyu matematiksel sembollerle göstermesini istemektedir.

3A: Soruyu matematiksel sembollerle ifade edebilir misin?

3İ: Şöyle olabilir:

$$[a] = [b] \Rightarrow a \sim b$$

$$[a] \neq [b] \Rightarrow a \not\sim b$$

4A: İki denklik sınıfının ayrık olmasını nasıl ifade edebilirsin?

4İ: İkisi de birbirinin alt kümesi değildir şeklinde düşünsem olabilir mi öyle? Ya da kesişimleri boş küme olacak.

$$[a] \cap [b] = \emptyset \Rightarrow a \not\sim b$$

5İ: Bunu nasıl yapabilirim?

a 'nın denklik sınıfından bir eleman alalım.

$$x \in [a] \Rightarrow x \sim a \wedge x \not\sim b$$

Bu şekilde işin içinden nasıl çıkarım bilmiyorum. Sonuçta burda geçişmeden bahsedemem.

Tekrar matematiksel gösterime odaklanılır.

6İ: Soruda ya da demiş ya ben onu veya olarak ifade etmeliyim.

$$[a] = [b] \vee [a] \cap [b] = \emptyset$$

Şimdi her iki kısmı ayrı ayrı ispatlasam.

7İ: Ama bu şekilde bir ispat ne kadar doğru olur bilemiyorum.

Daha önce içinde veya geçen bir ispat görmedim. Ancak belki şöyle olabilir.

Bunlara doğruluk değeri versem... Off kafam karıştı.

Bir süre sessiz kalır.

İdil'in sorunun sözel olarak ifade ettiğini matematiksel olarak ifade etmesinin uzun bir zaman aldığı görülmektedir. İdil, önceki bilgi yapılarını seçerek bir düşünce yolu oluşturmaya çalışmaktadır. İdil denklik sınıflarının öncelikle birer küme olduğunun farkındadır ve iki denklik sınıfının eşit olması için birbirlerinin alt kümeleri olmaları gerektiğini bilmektedir (4İ). Yazdığı matematiksel gösterimi ispatlamaya çalışırken denklik olmadığı için denklik bağıntısının özelliği olan geçişme özelliğini kullanamayacağını farkındadır (5İ). Bu noktada İdil'in denklik bağıntısının özelliklerini, denklik sınıflarını, iki kümenin eşit olduğunun nasıl ispatlanacağı ile bilgi yapılarına sahip olduğu söylenebilir. Bunun üzerine yazdığı ifadenin ona yardımcı olamayacağını düşünerek matematiksel ifadesini değiştirmektedir (6İ). Ancak bunun da doğruluğundan emin olamadığı görülmektedir. Bir süre doğruluk değerlerini göstererek ispatı yapabileceğini düşünür fakat bunun üzerinde fazla durmaz (7İ). Soru üzerinde tekrar düşünürken sorudaki ifadeyi tekrar matematiksel sembollerle göstermeye çalıştığı görülmektedir.

Şunları yazar:

$$\mathbf{8İ:} [a] = [b] \Leftrightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

$[a]'$ dan bir eleman alalım. Önce bunu göstericez.

$$x \in [a] \Rightarrow x \sim a \xRightarrow{[a]=[b]} x \sim b \Rightarrow x \in [b]$$

$$\Rightarrow [a] \cap [b] = \{x\} \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

Doğru yoldan gidiyor muyum?

5A: Sence?

Yaptıklarını tekrar gözden geçirir.

9İ: Adımlarım doğru ama başlangıç düşüncem doğru mu emin değilim. Ben burda tek bir duruma odaklandım galiba. Ayırık olma durumuyla ilgili bir şey ispatlamadım.

10İ: İki denklik sınıfı özdeşse ayırık değildir. Bunu ispatlamak çok kolay. Sürekli aynı yere çıkıyorum.

İdil'in bu kez matematiksel ifadesini değiştirdiği ve yazdığı ifadeyi ispatlamaya başladığı görülmektedir. Ancak bu noktada İdil'in yazdığı önerme teoremi ispatlamak için yeterli değildir. Kendisinin de emin olmadığını ifade etmesi üzerine (8İ) tekrar düşündüğü gözlenmektedir. Bu noktada kanıt imajının duyuşsal boyutu olan *sezgisel ikna* oluşmadığı için İdil'in sürece devam ettiği söylenebilir. Bir süre sonra yazdığı önermenin kendisine yardımcı olmayacağını farkına vardığı görülmektedir. (9İ). İki denklik sınıfının özdeş ise ayırık olduğunu ispatlamanın çok kolay olacağını ifade etmesi üzerine (10İ), araştırmacı İdil'e iki denklik sınıfı özdeş değil ise ne olacağını sorar.

6A: Peki iki denklik sınıfı özdeş değilse?

11i: Aa bunun tam tersini mi yazmalıyım?

7A: Biraz daha düşünebilirsin.

12İ: İki denklik sınıfı özdeştir ya da ayırıktır.

$[a] \neq [b] \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$ Burdan gidebilirim sanırım. Bu ifade her durumu kapsıyo. O zaman gerek yeter koşulu ispatlamaya çalışayım.

$$[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$$

İdil, ifadeyi bu açıdan değerlendirdiğinde Van der Waerden'in *Einfall* diye ifade ettiği ani bir biçimde zihninde yeni bir yapının oluştuğu bir an yaşamaktadır. Hemen ardından sorudaki ifadeyi matematiksel sembollerle doğru bir şekilde gösterdiği ve doğruluğundan emin olduğu görülmektedir (12İ). Sonrasında formal ispata yönelen İdil, ispat yöntemi olarak çelişki yöntemini seçmektedir.

13İ: Burda bir çelişki oluşturabilirim. $p \Rightarrow q$ yerine $q' \Rightarrow p'$ önermesinin doğruluğunu göstermem lazım. Yok o karşıt tersiydi. Nasıldı? Dönemin başında kaldığı için konu tam olarak hatırlamıyorum.

Bir süre düşünür.

8A: Neden çelişki yöntemi ile ispatı seçtin?

14İ: Açıkçası $[a] \cap [b] = \emptyset$ önermesi yerine olumsuzuyla uğraşmak daha kolay geliyor. Çelişki ile ilgili $\sqrt{2}$ 'nin ispatını hatırlıyorum. $\sqrt{2}$ 'nin rasyonel olduğunu varsayıyorduk.

O zaman

$[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$ olsun diyelim.

$[a] \cap [b]$ 'den eleman alayım hemen.

$x \in [a] \cap [b] \Rightarrow x \in [a] \wedge x \in [b] \Rightarrow x \sim a \wedge x \sim b \Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$

Çelişki oldu. Demek ki kabulümüz yanlış. O zaman bu doğru.

$[a] \neq [b] \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

İdil, çelişki bulma yöntemi ile ispatın tanımını tam olarak hatırlamamasına ve kısa bir süreliğine olmayana ergi yöntemi ile karıştırmasına karşın, bu yöntemle yapılan ve iyi bildiği bir örnek üzerinden bilgilerini hatırlamaya çalışmaktadır. Böylece İdil'in alakalı önceki yapıları seçerek soyutlama eylemine devam ettiği görülmektedir. İdil'in başlangıçta çelişki bulma yöntemi ile ispatı tam olarak hatırlamamasına karşın bu yöntemi seçmesi dikkate değer bir noktadır. İdil, bu durumu, ifadenin olumsuzundan hareket etmenin işini kolaylaştıracağını söyleyerek açıklamaktadır. İdil, bu aşamada ne yapması gerektiğinin farkında olmasına rağmen, öncesinde yöntemin ismini söylemek onu zorlayan kısım olmaktadır. İdil, bu sürecin ardından çelişki bulma yöntemi ile ispatı soru üzerinde uygulamaktadır (14İ). Böylece ispatın ilk adımını doğru bir şekilde ve kendinden emin olarak tamamlamaktadır (14İ).

9A: Burda ancak ve ancak ifadesini kullanabilir misin?

15İ: Diyemem değil mi? Yine mi çelişki oluşturacağım?

10A: Önce yeter koşulu da bir yaz istersen.

16İ: $[a] \cap [b] = \emptyset \Rightarrow [a] \neq [b]$

Denklik sınıflarının kesişiminden eleman alamıyorum çünkü eleman yok orada.

Çelişki mi oluştursam. $p' \Rightarrow q$ önermesini göstersem.

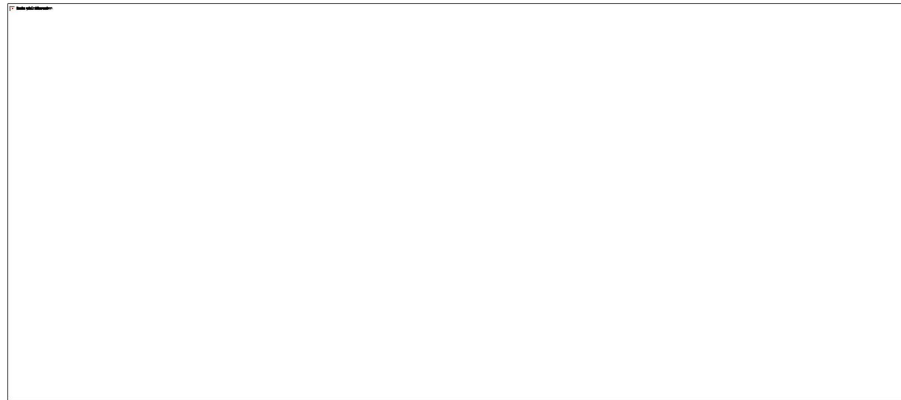
11A: $p \Rightarrow q$ önermesi ile sonuçları denk olur mu?

17İ: Olmaz di mi... Ben bu kısmı yapamayacağım galiba.

Ardından gerek koşul önermesinin ispatına geçer. Şekil 17'de İdil'in çalışmasından bir kesit sunulmuştur.

Şekil 17

İdil'in 2. Teorem İçin Çalışması



İdil'in kanıt imajının özelliklerini iki ayrı başlık altında incelemek uygun olacaktır. Çünkü İdil, ispatın gerek koşul önermesinin ispatı için oldukça uzun bir süre çaba harcayarak doğru bir şekilde tamamlarken, yeter koşul önermesinin ispat sürecinde aynı özellikleri göstermemektedir.

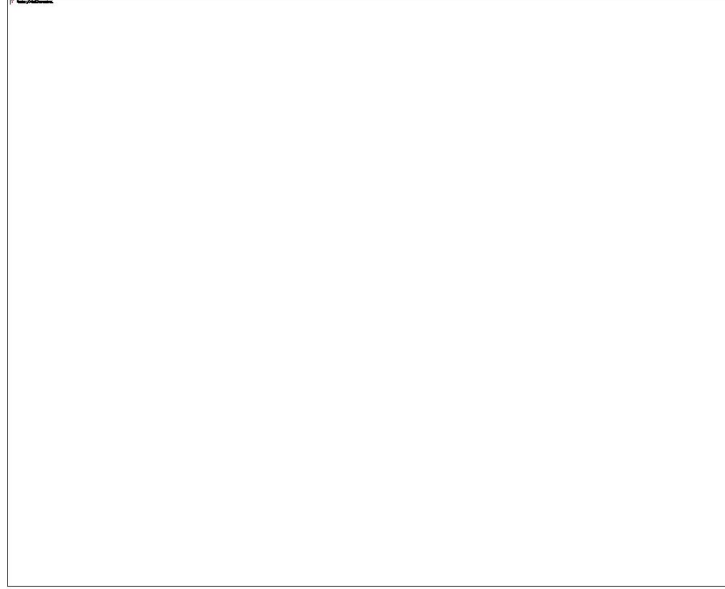
İdil'in Gerek Koşul İspatı

İdil'in ispat süresince en çok zorlandığı kısım teoremi matematiksel ifadelerle yazmak olmaktadır. İdil, sahip olduğu matematiksel yapıları arasında ilişkiler kurarak, kullanabileceği örnekler üstünde durarak uzun bir düşünce aşaması gerçekleştirmekte (3İ-12İ) ve sonunda bilgiyi yapılandırma sürecinin ürünü olarak yeni bir yapı ortaya koymaktadır (12İ).

İdil'in ispatlama süreci boyunca ona yardımcı dokunabilecek bilgileri seçmesi ve bunlar arasında mantıksal bağlar kurması kanıt imajının *mantıksal bağlar içermesinin* göstergesidir. İdil, teoremi ilk kez yorumladığı sırada bir örnek vererek teoremin doğru olduğunu açıklamasına karşın nasıl ispatlayacağını bilmediğini ifade etmektedir (2İ). Bu durum kanıt imajının bilişsel boyutunun *kişisel anlayış* özelliğine bir örnektir. İdil'in kişisel anlayışı teoremin doğru olduğu yönündedir. İdil, sahip olduğu matematiksel yapılar arasında teorem için gerekli olan bilgileri seçmiş ve ispatı bütün bir resim olarak görmüştür. Bu durum kanıt imajının *bütünlük oluşturma* özelliğine örnektir.

İdil'in kanıt imajının sezgisel iknasının en çok ifadeyi matematiksel sembollerle doğru şekilde yazdığı anda görülmektedir (12İ). Bu aşamadan sonra ispatın geri kalan kısmını formal bir şekilde tamamlamaktadır. Tamamladığı anda da kesinlik hissinin olduğu gözlenmektedir. Böylece kanıt imajının duyuşsal boyutunun *sezgisel ikna* özelliği görülmektedir. Şekil 18'de İdil'in çalışmasından bir kesit sunulmuştur.

Şekil 18
İdil'in 2. Teoremdeki Çalışmasının Devamı



İdil'in Yeter Koşul İspatı

İdil, ispatının ikinci adımına yeter koşul önermesini yazarak başlamaktadır.

12A: Peki sence doğru bir ifade mi?

18İ: Doğru bence sorun yok.

$$x \in [a] \Rightarrow x \sim a \Rightarrow x \not\sim b \Rightarrow x \notin [b] \Rightarrow [a] \neq [b]$$

Aynı şekilde $[b]$ içinde yapmalıyım.

$$x \in [b] \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \not\sim a \Rightarrow x \notin [a] \Rightarrow [a] \neq [b]$$

$$[a] \not\subset [b], [b] \not\subset [a] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset \text{ olur.}$$

Bitti mi yeterli mi?

13A: Sence bitti mi?

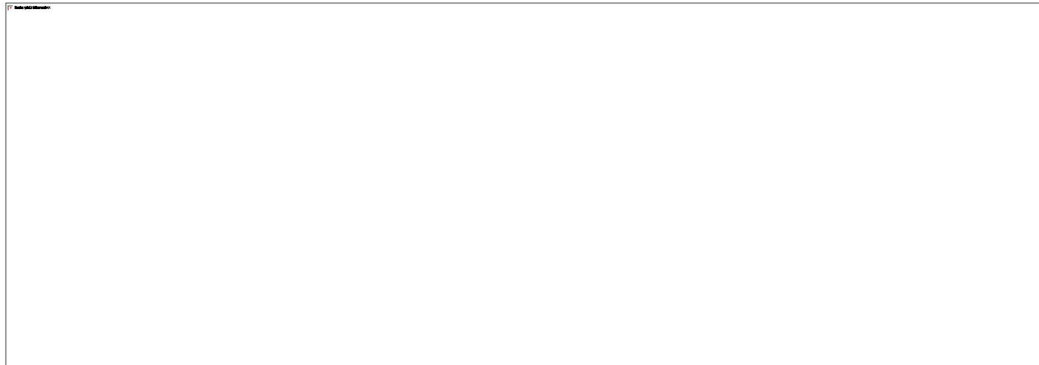
19İ: Aklıma yapılacak başka bir şey gelmiyor açıkçası.

İdil, yeter koşul sembolünü kullanmak yerine ancak ve ancak sembolünü kullanmaktadır. Araştırmacının bu durumu sorgulaması üzerine hatasını farkettiği ve önermeyi doğru sembollerle ifade ederek yeniden yazdığı gözlenmektedir. Hemen ardından ispat için bir strateji seçmeye odaklandığı görülmektedir (16İ). Bu aşamadan

sonra İdil'in ispat süreci giderek karmaşıklaşmaktadır. Yeter koşulunun ispatı aşikar iken, İdil'in doğrudan formal ispat yapmaya çalıştığı görülmektedir. Bu durum İdil'in önermeyi anlamlandırmadığını göstermektedir. İdil, önermenin ispatı için çelişki yöntemi ile ispatı seçer. Burada önemli bir nokta dikkat çekmektedir. İdil, ispatın birinci adımında çelişki ile ispat yönteminin formal tanımını yapamadığı halde, bu yöntemle yapılan ve iyi bildiği bir ispattan ($\sqrt{2}$ 'nin rasyonel olmadığının ispatı) yola çıkarak yöntemi hatırlamakta ve doğru bir şekilde kullanmaktadır. Oysa ispatın ikinci adımında bu yöntemi yanlış kullanmaktadır. İdil'in birinci adımda bildiği matematiksel yapılar arasında mantıksal bağlar kurarak yeni bir yapı oluşturduğu gözlenirken, oluşturduğu bu yapıyı ikinci adımda doğru bir şekilde kullanamadığı görülmektedir. Bu durum *yeni oluşan yapının kırılabilirliği* olarak yorumlanabilir. Ayrıca kanıt imajının bilişsel boyutunun mantıksal bağlar kurma özelliği de bu aşamada gözlenememektedir. İdil'in ispatı yapamayacağını söylemesi üzerine araştırmacı İdil'e önermenin doğruluğu ile ilgili kişisel anlayışını sormaktadır. Burada araştırmacının amacı İdil'in önermeyi tekrar okuyarak anlamlandırmasını sağlamaktır. İdil, önermenin doğru olduğunu söyleyerek kişisel anlayışını yansıtmaya karşın yine de önermeyi anlamadığı görülmektedir. Çünkü hemen ardından formal bir ispat yapmaya çalışır. Ancak İdil'in aslında doğruluğu bariz olan önermeyi, matematiksel semboller kullanarak formal bir ispat yapma çabası içerisinde oluşu matematiksel dili kullanırken önermenin anlamı üzerinde düşünmediğini göstermektedir. Şekil 19'da İdil'in yeter koşul önermesinin ispatı için yaptığı çalışmaya yer verilmiştir.

Şekil 19

İdil'in 2. Teoremdeki Çalışması



İdil, ispatın ikinci adımını doğru bir şekilde tamamlayamadan soru üzerinde düşünmeyi bıraktığı gözlenmektedir. Kanıt imajının özellikleri bu aşamada gözlenememektedir.

Sena'nın Kanıt İmajı

Sena soruyu öncelikli olarak sesli bir biçimde birkaç kez okumaktadır. Teoremi anlamaya çalıştığı görülmektedir.

1S: Bunu şu şekilde ifade edebilirim.

İki denklik sınıfı özdeşdir ya da ayrıktır. İki denklik sınıfı ayrıkse kesişimleri boş küme olur.

Zaten denklik sınıfı hiçbir zaman boş olamaz bunu biliyorum.

1A: Neden böyle olur?

2S: Çünkü her eleman kendisine denktir bu yüzden en azından küme de kendisi olacak. Mesela diyelim ki $[a]'$ a bakıyoruz orda a olmak zorunda. Ama bu bana nasıl yardımcı olacak?

Soruyu tekrar tekrar okuyor.

Denklik sınıfı dediği küme zaten. Kümelerde de özdeş olabilmeleri için birbirlerinin (iki denklik sınıfının) alt kümeleri olmaları gerekir. Ya böyle olmalı, ya da hiç ortak elemanı olmamalı. Yani kesişimleri boş olmalı.

2A: Sana mantıklı geliyor mu bu?

3S: Evet. Sonuçta iki denklik sınıfı kesişirse nasıl olur hayal bile edemedim.

3A: Peki nasıl ispatlarsın bunu?

4S: Nasıl ispatlarım...

Sena, teoremi kendi anladığı şekilde ifade etmektedir. Hemen sonrasında denklik sınıflarının hiçbir zaman boş kalamayacağını sebebiyle birlikte açıklamaktadır (1S). Burada Sena'nın teorem ile alakalı gördüğü bilgi yapılarını seçmeye başladığı ve bu bilgi yapılarını nasıl kullanacağını düşündüğü görülmektedir. Ardından denklik sınıfları ile küme arasındaki ilişkiyi düşündüğü gözlenmektedir. Kümelerin birbirine eşit olması için birbirlerinin alt kümesi olması gerektiğini ifade eder. Böylece Sena'nın

sahip olduğu bilgi yapıları arasında mantıksal bağlar kurarak oluşturma sürecini sürdürdüğü görülmektedir. Ardından iki denklik sınıfının kesişmesi durumunun mümkün olmadığını ifade eder. Burada Sena'nın teoremi daha önceden bir bilgi yapısı olarak bilmesine karşın bunun ispatı üzerinde düşünmemiş olduğu söylenebilir. Araştırmacının Sena'dan teoremi matematiksel sembollerle göstermesini istemesi üzerine bununla ilgili düşünmeye ve yazmaya başladığı görülmektedir.

4A: Bu teoremi matematiksel bir gösterimle ifade edebilir misin?

5S: Edebilir miyim... Düşünüyorum.

$[a] = [b] \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$ pardon $[a] \neq [b]$ olmalı.

6S: Ancak ve ancak olduğu için yeter koşulu ve gerek koşulu ispatlamalıyım.

Şimdi daha kolay oldu işim. $[a] \cap [b]$ kümesinin boş olmadığını varsayalım. Olmayana ergi ile bunu ispatlayabilirim.

5A: Neden bu yöntemi seçtiğini açıklar mısın?

7S: $p \Rightarrow q$ 'nun doğruluğunu ispatlamak yerine $q' \Rightarrow p'$ önermesinin doğruluğunu gösteriyoruz. Yani şöyle:

$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Leftrightarrow [a] = [b]$ İspata buradan başlamak kolay gibi.

6A: Yazdığını açıklar mısın?

8S: Bir saniye kafam karıştı. Burda ancak ve ancak olmamalı...

Silgisine yönelir.

7A: Silmene gerek yok. Aşağıdan devam edebilirsin.

Önermeyi baştan yazar.

Sena'nın teoremi ilk yazımında bir hata olmasına karşın bunu hemen farkederek düzeltmektedir (5S). Sena'nın teoremi matematiksel ifadelerle göstermesinin kısa bir zaman alması, Sena'nın bu ifadeleri tanıdığı ve doğru şekilde anlamlandırıdığını göstermektedir. Bu aşamadan sonra Sena'nın ne yapacağını farkında olduğu görülmektedir. Teoremde çift koşullu gerektirme yer aldığı için gerek ve yeter koşulu ispatlaması gerektiğini söyleyen Sena'nın bu konuda matematiksel olarak bilgi sahibi olduğu görülmektedir. Ardından gerek koşul önermesini okumakta ve teoreme nereden başlayacağına dair fikri olduğunu açıklamaktadır. Teoremi ispatlamak için olmaya ergi yöntemini uygun gördüğünü ifade etmektedir (6S-7S). Burada Sena'nın

ispat yöntemleriyle ilgili matematiksel bilgi yapılarının mevcut olduğu görülmektedir. Sena, olmayana ergi yöntemini ve neden bu yöntemi seçtiğini açıklamaktadır. Bu durum Sena'nın bilinçli bir şekilde ilerlediğini ve var olan bilgi yapıları arasında mantıksal bağlar kurduğunu göstermektedir. Gerek koşul önermesini yazarken ' $\Leftrightarrow$ ' ifadesini kullanması kısa bir süre kafa karışıklığı aşamasına sebep olsa da, ardından hatasını farkederek ve gerekli düzenlemeyi yapmaktadır.

9S: $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]$

$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow \forall x \in [a] \cap [b]$

10S: İki denklik sınıfının kesişimi boş değilse orda en azından bir eleman vardır. Gösterimlerle aram iyi değil. Bu her miydi yoksa?

8A: Evet.

11S: Tamam.

Düzenleme yapar.

$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in [a] \cap [b] \Rightarrow x \in [a] \wedge x \in [b] \Rightarrow x \sim a \wedge x \sim b$

$\Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$
geçişme

9A: Yazdıklarını açıklayabilir misin?

12S: Kesişimde bir eleman varsa bu hem $[a]$ ' da vardır hem de $[b]$ ' nin. Bu eleman $[a]$ ' da ise a'ya denktir, ve aynı şekilde b'ye de denktir. Önce simetri özelliğini kullandım, sonra geçişme. $a \sim b$ çıktı. Burdan da a ve b'nin denklik sınıfları eşittir diyebilirim.

Şimdi p' i elde ettim. Böylece ispatlamış oldum.

10A: Emin misin yaptıklarından?

13S: Evet, baya mantıklı oldu. Ama bi de yeter koşul var tabi.

14S: Besbelli burası.

11A: Açıklayabilir misin?

Yeter koşul önermesini yazar.

15S: $[a] = [b] \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$

İki kümenin kesişimi boş ise asla eşit olamazlar. Bariz. Nasıl olsun ki...

Sena, teoremi matematiksel olarak yazdıktan sonra, denklik sınıfının tanımını, denklik bağıntısının özelliklerini kullanarak ispatın geri kalanını doğru adımlarla tamamlamaktadır (9S-14S). Ayrıca Sena'nın bu bilgi yapılarına sahip olduğu ve doğru bir şekilde kullanarak ispatı tamamladığı ve böylece yeni bilgiyi oluşturduğu görülmektedir. Bu süreç içerisinde “ $\exists$ ” ve “ $\forall$ ” matematiksel notasyonları karıştırdığını ifade etmektedir. Bu durum Sena'nın zihninde matematiksel ifadelerle ilgili yapıların tam oturmadığı ancak bu durumun farkında olduğunu göstermektedir. Ardından yeter koşul önermesinin ispatına geçen Sena, önermeyi yazmasının ardından önermenin besbelli olduğunu ifade ederek gerekli açıklamayı yaptığı görülmektedir. Böylece matematiksel sembolleri okumayı ve anlamlandırmayı bildiği gözlenmektedir.

12A: Emin misin yaptıklarından?

16S: Evet eminim.

Sena'nın kanıt imajının duyuşsal boyutu olan *sezgisel ikna* özelliği incelendiğinde Sena'nın hem gerek koşulu hem de yeter koşulu ispatlamasının ardından kesinlik hissinin oluştuğu görülmektedir (13S, 16S). Sena'nın kanıt imajının *mantıksal bağlar içermesi* sayesinde başlangıçta karışık olan düşünceleri bir kesinliğe ulaşmaktadır. Bu süreç *dinamiktir*. Sena, teoremi matematiksel sembollerle ifade ettikten hemen sonra ispat için bir strateji seçerek, ispatı nasıl tamamlayacağına dair zihninde bütün bir matematiksel resim oluştuğunu göstermektedir (11S). Bu durum kanıt imajının *bütünlük oluşturma karakteristiğini* yansıtmaktadır. Sena, teoremi yorumladığı ilk aşamalarda teoremin doğruluğundan emin olduğunu matematiksel ifadeler kullanmaksızın açıklaması kanıt imajının *kişisel anlayışının* örneğidir (3S).

4.3.3. Teorem 3'e İlişkin Kanıt İmajları

Mehmet, İdil ve Sena adlı öğretmen adaylarının üçüncü teoremden elde edilen bulguları aşağıda sırasıyla sunulmuştur.

Mehmet'in Kanıt imajı

Mehmet teorem ile karşılaştıktan sonra önce soruyu sesli bir biçimde okumakta, ardından bir süre sessizce düşündüğü gözlenmektedir.

1M: Şöyle bir şey yazabilir miyim?

$$\beta = \{(a, b): n|a - b, a, b, n \in \mathbb{Z}\}$$

Bunun üstünden yapıcam, olur mu?

1A: İstediğin şekilde düşünebilirsin.

2M: Tamam. Ben aslında sorunun söylediği şeyi yazdım aynen. Yani ne demek bu... n böler $a-b$ ' yi. Tamam. Bunu yazdım çünkü bu şekilde bir bağıntı olduğunu görmek daha kolay.

2A: Peki denklik bağıntısı mı?

3M: Bence kesin. Sonuçta bir denklik var burda. Ama böyle demek yetmiyor tabi.

Sessiz kalıp düşündüğü gözlenmektedir.

Mehmet, soruyu birkaç kez sesli okuduktan sonra bir bağıntı yazar. Mehmet'in yazdığı bu bağıntı, kongruent olma bağıntısıdır. Mehmet'in önceki bilgi yapılarını hemen kullanmaya başladığı görülmektedir. Kongruent olma bağıntısının tam sayılar kümesi üzerinde denklik bağıntısı olup olmadığını anlamak için öncelikle bir bağıntı olduğunu açık bir şekilde görmek isteyen Mehmet, henüz zihninde ilişkili olmayan 'denklik bağıntısı' ve 'modüler aritmetik' yapıları arasında bağ kurmaya çalışmaktadır. Mehmet verilen bağıntının denklik bağıntısı olduğunu düşünmektedir ancak henüz bunu nasıl ispatlayacağını bilmemektedir (3M). Bu durum kanıt imajının *kişisel anlayışının* bir ürünüdür.

4M: Geçişme, yansıma ve simetri özelliklerini göstermem lazım. Onun için bu β bağıntısını tanımladım. Bundan sonra yazıcam artık, tabi bağıntı doğruysa.

3A: Doğru olmayabilir mi?

5M: Tam sayılara takıldım. $a - b$ her zaman tam sayı olmak zorunda mı? Zorunda. Bence doğru ya.

4A: Nasıl emin oldun?

6M: a tamsayı, b tam sayı farkları da tamsayı olmalı tabii.

Daha sonra yazmaya başlar.

Burada Mehmet'in bu teoremi nasıl ispatlayacağını bildiği görülmektedir (4M). Ancak yazdığı bağıntının doğruluğunu kontrol etme ihtiyacı duyduğu gözlenmektedir. Bu bağıntının tam sayılar kümesi üzerinde olması Mehmet'in zihninde bir karışıklığa sebep olmaktadır. Ancak hemen sonrasında tam sayılarla çıkarma işlemi yaptığından sonucun da tam sayı olması gerektiğini farkettiği gözlenmektedir. Böylece Mehmet, sahip olduğu bilgi yapıları üzerinde soyutlama yaparak genel bir fikre varmaktadır.

7M: $\forall a \in \mathbb{Z} \text{ için } (a, a) \in \beta$ olmalı.

$\forall a \in \mathbb{Z} \text{ için } n|a - a$

$n|0$.

Ben modüler aritmetiği şöyle aklımda tutuyorum.

$$n|a - b \Rightarrow \frac{a-b}{n} = k$$

Tamam tamsayı olmayı sağlıyor. $\frac{0}{n} = 0$. O zaman

$(a, a) \in \beta \Rightarrow \beta$ yansıyan

$\forall (a, b) \in \beta \Rightarrow n|a - b \Rightarrow n|b - a \Rightarrow (b, a) \in \beta \Rightarrow \beta$ simetrik

Sonuçta k bir tam sayı. Yani negatif de olabilir. O yüzden simetri özelliği de sağlanır.

$(a, b) \in \beta$ ve $(b, c) \in \beta \Rightarrow (a, c) \in \beta$ sağlanmalı.

$n|a - b \wedge n|b - c \Rightarrow n|a - c \Rightarrow (a, c) \in \beta \Rightarrow \beta$ geçişken

Şurda $n|a - c$ dedim direkt ama, şöyle de gösterebilirdim.

$$\frac{a-b}{n} + \frac{b-c}{n} = \frac{a-c}{n}$$

Burdan gelir.

Yani bir denklik bağıntısıdır.

5A: Peki $\frac{a-c}{n}$ tam sayı mıdır?

8M: Çıkmayabilir. (*Hemen ardından*) Yoo çıkar çıkar. Sonuçta tam sayı üzerinde çalışıyoruz. Diğer ikisi tam sayı olduğu için toplamaları da tam sayı olacak. Tam sayı olmak zorunda zaten.

Mehmet'in yazdığı ispat incelendiğinde sahip olduğu matematiksel yapıları kullandığı gözlenmektedir (7M). Mehmet, bağıntının; yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini incelediğinde, denklik bağıntısının özelliklerini bildiği ve bu özellikleri nasıl göstereceği konusunda da bilgi sahibi olduğu söylenebilir (7M). Ayrıca Mehmet geçişme özelliğini incelerken bu özelliğin doğruluğunu göstermeyi ihmal etmiş olmasına karşın hemen ardından açıklama yapma ihtiyacı hisseder. Bu durum Mehmet'in ne yaptığının farkında olduğunu göstermektedir.

6A: Emin misin yaptıklarından?

9M: Yani sorunun tam sayı demesine biraz takıldım. Şu ifade de $\frac{a-b}{n}$ sonuç her zaman tam sayı çıkar mı diye düşünüyorum. Çıkar. Tanım gereği çıkar. Bence doğru ya.

Mehmet'in zihninde modüler aritmetik ve denklik bağıntısı ile ilgili bilgi yapılarının başlangıçta bir arada olmamasına karşın, bu yapılar arasında kurduğu *mantıksal bağlar* sayesinde yeni bir yapı oluşturmaktadır. Böylece Mehmet'in ispatı *bütünlük oluşturmaktadır*. Bu süreçte düşünerek harcadığı çaba, bir sonraki adıma geçerken önceki adımlarını tekrar sorgulaması kanıt imajının *dinamik* bir süreç olduğunu göstermektedir. Şekil 20'de Mehmet'in bu soru için çalışmasına yer verilmiştir.

Şekil 20
Mehmet'in 3. Teoremdeki Çalışması



Mehmet, ispatı tamamladığında yaptıklarından emin olduğunu ifade ederek (7M) kanıt imajının duyuşsal boyutunun *sezgisel iknasının* oluştuğunu göstermektedir.

İdil'in Kanıt İmajı

İdil'in, soruyu okuduktan sonra uzunca bir süre sessiz bir şekilde düşündüğü gözlenmektedir. Daha sonra ilk olarak denklik bağıntısının ne işe yaradığına dair matematiksel bilgisini hatırlamaktadır.

1İ: Bu bana yalnızca hocanın sınıfta sürekli söylediği 'denklik bağıntısı denkleştirir'i anımsatıyor.

2İ: O zaman bunun denklik sınıfının içinde yer alması gerekir. Denklik sınıfının içinde yer aldığında o zaman a ve b'nin denk olduğunu söylüyorduk.

Öyleyse mod n'de (a, b) şeklinde ifade edebiliriz.

1A: Modüler aritmetik ile ilgili ne biliyorsun?

3İ: Açıkçası modüler aritmetik ile ilgili çok fazla bir şey hatırlamıyorum. Lisede daha çok soru çözümüne odaklandığımız için. Genel olarak hocanın derste yaptırdığı örnekleri düşünüyorum ama...

Bir süre sessiz kalır.

İdil'in alakalı bilgi yapılarını seçerek soyutlama eylemine başladığından söz edilebilir. Ardından İdil'in denklik bağıntısına dair bildiği yapıları gözden geçirdiği görülmektedir. İdil, iki elemanın denk olması durumunda aynı denklik sınıfında yer alacağını ifade ettiğinde denklik bağıntısı ve denklik sınıfı ile alakalı bilgi yapılarını informal bir dille açıklamaktadır (2İ). Ancak modüler aritmetik ile ilgili bilgisinin çoktan seçmeli sorularla sınırlı olduğunu ve bu yüzden derinlemesine bir bilgisinin olmadığını söylemektedir (3İ).

2A: Peki sence bu önerme doğru mu?

4İ: Doğru mu... Aslında öyleyse yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini göstermesi lazım. Öyle mi?

3A: Sen ne düşünüyorsun?

5İ: Bir bakayım o zaman. Yansıma için

$\forall a \in A \text{ için } (a, a) \in \beta$

Buna bakmalıyız.

Tabi burda aslında küme A değil $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi.

$a \sim a \pmod{n}$

Bir şey kendisine denktir sonuçta. O yüzden $(a, a) \in \beta$

Yansıma sağlanacaktır.

Simetriyle devam edelim.

$\forall (a, b) \in \beta \text{ iken } (b, a) \in \beta \stackrel{?}{\Rightarrow} \text{simetrik}$

$a \sim b \pmod{n} \Rightarrow b \sim a \pmod{n} \Rightarrow (b, a) \in \beta \Rightarrow \text{Simetrik}$

Geçişmeye bakalım.

$(a, b) \in \beta \wedge (b, c) \in \beta \text{ iken } (a, c) \in \beta$ olması gerekir.

$a \equiv c \pmod{n} \wedge b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n} \Rightarrow (a, c) \in \beta \Rightarrow \text{Geçişme}$

Aynı şeye eşit olan iki şey birbirine eşittir sonuçta. O yüzden geçişme de sağlanır.

Bu bir denklik bağıntısıdır.

Daha önce karşılaştığı örnekler üzerinde düşünürken teoremin doğru ise denklik bağıntısının özelliklerini göstermesi gerektiğini farketmektedir. Bunun üzerine denklik bağıntısının özellikleri olan yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini tek tek kontrol ettiği görülmektedir. İdil'in ispatı incelendiğinde, matematiksel notasyonları tanıdığı ve doğru kullandığı görülmektedir. İdil, bir bağıntıda yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini nasıl arayacağını da bilmektedir.

4A: $a \sim b(mod n) \Rightarrow b \sim a(mod n)$ bu ifadenin doğruluğundan nasıl emin oldun?

6İ: Açıkçası düşünmeye gerek yok gibi. Ama $a - b = n.k$, k tam sayı burda. Bu eşitliği kullanabilirdim. Sonuç aynı çıkardı tabii.

5A: Yani zihinden mi yaptın bunları?

7i: Açıkçası aynı şeye eşit olan iki şey birbirine eşittir diye düşündüm.

6A: Emin misin yaptıklarından?

8İ: Evet.

İdil'in bağıntının özelliklerini göstermesi incelendiğinde, matematiksel ilişkiler kurmaksızın bir çıkarım yaptığı görülmektedir. Araştırmacının İdil'e ifadenin doğruluğundan nasıl emin olduğunu sorması üzerine, İdil'in kullanması gereken cebirsel denklikleri kullanmadığı halde bildiği gözlenmektedir. İdil, bu ifadeleri ispatlanması gerektiğinin farkında olmamakla birlikte, "Aynı şeye eşit olan iki şey birbirine eşittir." bilgi yapısından yola çıkarak denklik kavramı ile eşitlik kavramını karıştırdığı söylenebilir.

İdil, başlangıçta teoreme nasıl yaklaşacağını bilmediği halde, bildiği yapılar üzerinden mantık yürüterek belirsiz düşüncelerini bir kesinliğe ulaştırmaktadır. Bu durum, İdil'in kanıt imajının *mantıksal bağlar içerdiğini* ve *dinamik* olduğunu göstermektedir. İdil ispatı yaparken yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini göstermek için cebirsel denklemler kurmak yerine, sözel ifadeler kullanmayı tercih eder. Bu durum, İdil'in bu ifadeleri bilmemesinden değil, kullansa da aynı sonucu

bulacağını düşünmesinden kaynaklanmaktadır. İdil'in ispatının bu şekilde olması, ispata informal bir özellik katmaktadır. İdil, aslında bu şekilde *kişisel anlayışını* yansıtmaktadır. İdil, ispatı tamamladığını düşünerek modüler aritmetik ve denklik bağıntısı ilişkisini kurarak yeni bir yapı oluşturmaktadır. Böylece kanıt imajının *bütünlük oluşturma karakteristiği* görülmektedir. İdil'in kanıt imajının duyuşsal boyutu incelendiğinde *sezgisel iknasının* da oluştuğu gözlenmektedir.

Sena'nın Kanıt İmajı

Sena soruyu okur okumaz modüler aritmetik ve denklik bağıntısı arasındaki ilişkiyi açıklamaktadır (1S).

1S: Modüler aritmetik denklik bağıntılarından meydana gelmiştir. Mesela derste 3 la-b yapmıştık galiba. Bu 3 değil de n olsun. $n|a - b$. İşte bundan modüler aritmetik çıkıyor. Ama bunu nasıl kanıtlarız?

Bir süre düşünür. Soruyu tekrar okur.

2S: $a \equiv b(mod n)$ Mesela $n = 2$ desek. a ve b sayıları 2 ile bölündüğünde kalanlar eşit demek bu. O yüzden denk. O zaman yansıma var mı? Yansıma var. Çünkü a ile b eşit olursa denk de olurlar. $a \equiv a(mod n)$. Şu anda bunu nasıl tam olarak açıklayacağımı unuttum.

1A: Düşünebilirsin vaktimiz var.

Sena'nın alakalı önceki bilgi yapılarını seçerek soyutlama eylemine başladığı ve ardından teoremi özel bir forma indirgeyerek üzerinde düşünmeye devam ettiği gözlenmektedir (2S). Derste gördüğü örneklerden modüler aritmetik bilgisi içeren yapıları anımsamaya çalıştığını ifade eden Sena teoremin doğru olduğunu bildiğini ancak nasıl kanıtlayacağını bilmediğini söylemektedir. Bir süre sessiz kaldıktan sonra kağıda bir örnek yazarak, örnek üzerinden modüler aritmetik ile ilgili bilgi yapılarını düşündüğü gözlenmektedir.

3S: $a \equiv b(mod n)$ ise $n|a - b$ özelliğinden gitsek... Yani burada ancak yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini gösterebilirim.

$n|a - a$ yani $n|0$.

$a \sim a \pmod{n}$ olduğundan yansıyandır. Yansıma sağlandı. Bi de diğer özelliklerine bakalım.

$n|a - b$ ve $n|b - a$ çünkü $a - b = k$ desek $b - a = -k$ olacak. Bu bağıntı tam sayılar üzerinde olduğuna göre sorun yok. Demek ki $b \equiv a \pmod{n}$. Yani simetriktir.

Şimdi geçişmeye bakalım.

$n|a - b$ ve $n|b - c$ ise $n|a - c$ doğru mu bakmalıyız.

$$a - b = n.k, k \in \mathbb{Z}$$

$$b - c = n.t, t \in \mathbb{Z}$$

$$a - c = n(k + t) k + t \in \mathbb{Z}$$

$n|a - c$ doğrudur. Dolayısıyla geçişkendir.

Böylelikle denklik bağıntısıdır demiş oluruz.

İfadenin genel halini yazdıktan sonra bu ifadenin denklik bağıntısı özelliklerini gösterip göstermediğini inceleyerek ispatı yapabileceğini düşünmektedir. Bu aşamada Sena'nın aklına gelen yapıları bir kombinasyon ile bir araya getirdiği ve uygulamaya koyduğu görülmektedir. İlk olarak bağıntının yansıma özelliğini incelemektedir (3S). Bağıntının yansıma özelliğini sağlaması üzerine simetri ve geçişme özelliklerini de incelemektedir. Bu bağıntının denklik bağıntısının özelliklerini nasıl sağladığını açıklayarak ispatlamaktadır. Burada Sena'nın, kongruent olma bağıntısı, denklik bağıntısının özellikleri ile matematiksel bilgi yapılarına sahip olduğu ve kullandığı görülmektedir.

2A: Emin misin yaptıklarından?

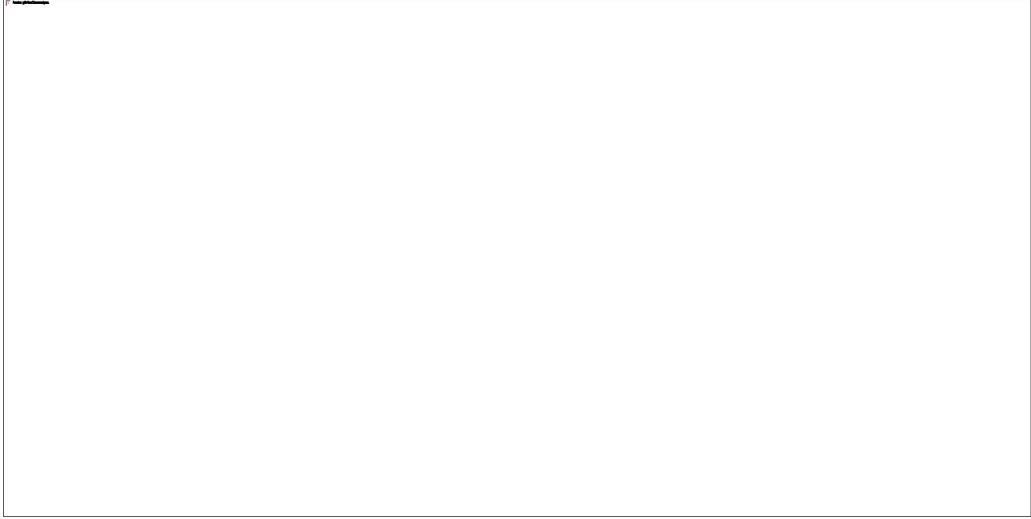
4S: Evet ama nasıl göstereceğimi bilemedim. Notasyonlardan emin değilim ama az çok doğru yapmışımdır heralde. Bu ispatı tek başıma evde yapmaya çalışsaydım herhalde yapamazdım.

Sena, ispatı tamamladıktan sonra matematiksel sembolleri doğru kullanıp kullanmadığından emin olmamakla birlikte ispatının emin olduğunu ifade ederek kanıt imajının *sezgisel iknasının* oluştuğunu göstermektedir (4S). Sena, sahip olduğu

matematiksel yapılardan alakalı olanları seçerek ve üstünde düşünerek yeni bir yapı oluşturmaktadır. Oluşan bu yeni yapı önceki yapılarıyla *mantıksal bağlar* içermektedir. Sena'nın ispatı *dinamik* bir süreçtir. Sena, henüz düşünmeye yeni başladığı anda teoremin doğru olduğunu bildiği ifade ederek (1S) kanıt imajının *kişisel anlayış* özelliğini göstermektedir. Şekil 21'de Sena'nın ispat için yazdıklarına yer verilmiştir.

Şekil 21

Sena'nın 3. Teoremdeki Çalışması



Sena'nın kanıt imajının karakteristik özelliklerinin tamamını gösterdiği görülmektedir.

4.3.4. Teorem 4'e İlişkin Kanıt İmajları

Mehmet, İdil ve Sena'nın adlı öğretmen adaylarının dördüncü teoremde elde edilen bulguları aşağıda sırasıyla sunulmuştur.

Mehmet'in Kanıt İmajı

Mehmet soruyu öncelikli olarak birkaç kez sesli biçimde okuduktan sonra bir süre düşündüğü gözlenmektedir.

1M: Birebir ve örtense her biri bir tanesiyle eşleşecek ve bu kümede (*B kümesi*) de açıkta eleman kalmayacak. Öyleyse pardon bu elemanı silmeliyim. (*B kümesindeki bir elemanı siliyor.*)

2M: Yani burda aslında yansıma, simetri ve geçişmeye bakmamız lazım ama...

1A: Evet...

3M: $f: A \rightarrow A'$ ya tanımlı bir fonksiyon olsaydı yansıma olurdu. Ama $f: A \rightarrow B$ 'e tanımlı. O yüzden bence bu bir denklik bağıntısı değildir.

Bir süre sessiz kalır.

Mehmet'in teorem ile karşılaştıktan hemen sonra teoremden geçen kavramları yorumladığı görülmektedir. Mehmet, iki küme çizerek birebir ve örten fonksiyon kavramları üzerinde düşünür (1M). Böylece Mehmet, alakalı önceki bilgi yapılarını seçerek onları nasıl kullanacağını düşünmektedir. Bu sırada Mehmet'in bu kavramları açıklarken kullandığı dil formal değildir. Ardından Mehmet, teoremi ispatlamak için ne yapması gerektiğini bildiğini ifade etmektedir (2M). Mehmet, teoremi ispatlamak için yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini incelemesi gerektiğini belirttiğinde, zihninde birçok matematiksel yapının varlığından söz edilebilir. Mehmet, fonksiyon ve bağıntı ilişkisini, bir bağıntının denklik bağıntısı olduğunu nasıl inceleyeceğini, denklik bağıntısının özelliklerini bildiğini göstermektedir. Ancak bu aşamada kendinden emin olmadığı gözlenmektedir. Mehmet'in burada ve süreç boyunca çelişkide kaldığı durum bu bağıntının yansıma özelliğini sağladığını ispatlamaktır. Mehmet, ilk olarak bu bağıntının yansıma özelliğini göstermediğini bu nedenle denklik bağıntısı olmadığını iddia etmektedir. Ancak yine de düşünmeye devam ettiği görülmektedir. Aslında Mehmet, bağıntının denklik bağıntısı olmadığını ifade etmesine karşın yine de düşünmeye devam ederken kanıt imajının duyuşsal boyutu olan sezgisel iknanın oluşmadığını göstermektedir (3M).

4M: Sonuçta denklik bağıntısı olabilmesi için 3 özelliği de sağlaması lazım. Bunun için de aynı küme üzerinden aynı küme üzerine tanımlı olması lazım. Mesela çizdiğim şekilde (x, a) yansımayı sağlamaz ki. Ama örnek üzerinden gittim. Bu şekilde kanıtlayamam.

2A: Bir bağıntının yansıma özelliğini nasıl incellersin?

5M: Derim ki $\forall x \in A$ için $(x, x) \in f$

Ama böyle olmayabilir. B kümesinin A'dan farklı elemanları varsa olmaz.

Bir süre düşünür.

Mehmet, yansıma özelliği üzerine düşünmeye devam ederken aslında bu özelliğin tanımını bildiği ancak zihninde tek tip örnekler var olduğu için bilgisini bu soruya uygulamakta zorlandığı söylenebilir (4M, 5M). Bir süre sonra Mehmet'in geriye dönerek düşünme eylemini gerçekleştirdiği görülmektedir.

6M: Şimdi baştan düşünelim. Bir fonksiyon vermiş. Bu bir bağıntı, doğru. Ama denklik bağıntısı mı?

3A: Denklik bağıntısı olması için ne gerekir?

7M: Denklik bağıntısı olması için A ve B kümeleri eşit olmalı kesinlikle. Öyleyse $f: A \rightarrow A$ 'ya birebir ve örten olur. Simetri ve geçişmeyi rahatlıkla gösteririm. Ama burada $f: A \rightarrow B$ 'ye demesi kafamı karıştırıyor.

4A: Peki bu bağıntı nerede tanımlı?

8M: $f: A \rightarrow B$ 'e tanımlı... Ama aslında asıl bağıntı bu değil burada değil mi? $\mathcal{B}$ bağıntısı asıl bağıntı. Heralde onunla ilgili bir durum var. Ben şimdi simetriyle devam edebilir miyim?

$\forall (A, B) \in f$ için $(B, A) \in f$. Bunun doğruluğunu incelemem lazım.

Bir süre sessiz kalır.

9M: Kendi yazdığımı ben bile anlamadım.

Mehmet, yeniden bağıntı ve fonksiyon matematiksel yapıları arasındaki ilişkiyi inceler. Verilen fonksiyonun bağıntı olduğunu inceledikten sonra kendisine denklik bağıntısı olup olmadığını sorduğu görülmektedir. Böylece Mehmet, önceki matematiksel yapılar arasında matematiksel bağlar kurarak yeni bir yapı oluşturmaya başlamaktadır. Bağıntının denklik bağıntısı olabilmesi için A ve B kümelerinin eşit olması gerektiği söyleyen Mehmet, simetri ve geçişme özelliklerini rahatlıkla gösterebileceğini söylemektedir. Bu sırada Mehmet'in zihninde bütün bir matematiksel resim oluştuğu söylenebilir. Fakat gerekli bağlantıları kurarak yeni bir yapıyı oluşturamamasının sebebi yansıma özelliğini gösterememesidir. Mehmet

burada, f bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu göstermeye çalışıyor olabilir mi? sorusu akla gelen sorulardan biridir. Ancak Mehmet, incelemesi gereken bağıntının $\mathcal{B}$ bağıntısı olması gerektiğini ifade etmektedir (8M). Yine de bu noktada Mehmet'in zihninin karışık olduğu söylenebilir.

5A: Burdaki bağıntı nedir açıklar mısın?

10M: $f: A \rightarrow B$ birebir ve örten fonksiyonlardan oluşan bir bağıntı. Bu bir denklik bağıntısı mı diye bakıyoruz. Hı.. O zaman şöyle mi diyeceğiz?

11M: $f: A \rightarrow A$, $f: B \rightarrow B$ birebir ve örten bir fonksiyon ise f yansıyan.

6A: Peki birebir ve örten mi?

12M: Yani aynı elemanları içeren iki küme arasındaki fonksiyon birebir ve örten fonksiyon olabilir.

Tereddütli görünse de devam ediyor.

$f: A \rightarrow B'$ ye birebir ve örten iken $f: B \rightarrow A'$ a da birebir ve örten midir? Sonuçta A' dan bir eleman B' deki bir elemana gidiyorsa bunun tersi de doğrudur. B' de boşta eleman kalmaz. A kümesinde zaten fonksiyonun tanımı gereği boşta eleman kalmaz. Öyleyse sorun yok: $f: B \rightarrow A'$ a birebir ve örten. Demek ki simetri var.

Geçişme için $f: A \rightarrow B'$ e birebir ve örten ve $f: B \rightarrow C$ birebir ve örten iken, $f: A \rightarrow C$ birebir ve örten midir?

A' nın her elemanı B' ye gidiyor. Açıkta hiç eleman kalmıyor. B' nin her elemanı C' ye gidiyor. Yine açıkta eleman kalmıyor. Öyleyse A' dan C' ye giden fonksiyon da birebir ve örten olur. Yani geçişme sağlanır. Üç özelliği de sağladığından bu bir denklik bağıntısıdır.

Burada Mehmet'in hangi bağıntının denklik bağıntısı olduğunu incelediğinin farkında olduğu söylenebilir (10M). Ardından bağıntının özelliklerini incelemektedir. Mehmet, bağıntının yansıma özelliğini sağladığını ifade etmektedir. Ancak ifadesi eksiktir (11M). Bunun üzerine araştırmacı açıklama yapmasını istemektedir. Böylece Mehmet, f 'nin aynı küme üzerinde birebir ve örten fonksiyon olacağını açıklamaktadır. Ancak yine de tereddütli görünmektedir. Ardından simetri ve geçişme

özelliklerini de inceleyerek, bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu ifade etmektedir.

6A: Yansıma bağıntısını sağladığından nasıl emin oldun?

12M: Aslında olmadım. Ama herhalde böyledir.

Mehmet, teoremle karşılaştıktan kısa bir süre sonra bağıntının bir denklik bağıntısı olmadığını iddia etmesine karşın düşünmeye devam etmektedir. Bu durumun kanıt imajının bileşeni olan sezgisel iknanın oluşmamasından kaynaklandığı söylenebilir. Ardından önceki matematiksel yapıları arasından alakalı gördüklerini seçerek ve arasında *mantıksal bağlar* kurarak yeni bir yapı oluşturmaya çalışmaktadır. Bu süreç *dinamik* olma özelliğini göstermektedir. Mehmet'in kanıt imajı baştan sona *kişisel olma* özelliğini göstermektedir. Mehmet'in süreç boyunca en çok üzerinde durduğu nokta bağıntının yansıma özelliğinin sağlayıp sağlamadığı olmaktadır. Burada Mehmet'in zihninde tek tip örneklerle dayalı yansıma özelliğine ilişkin eksik oluşmuş bir yapının varlığından bahsedilebilir. Bu yapı Mehmet'in yeni yapı oluşturma sürecine etki etmektedir. Ancak Mehmet, kurduğu mantıksal bağlar ile yapması gerekenleri düşünerek teoremin ispatı tamamlamaktadır. Buna karşın yine de kanıt imajının *sezgisel iknasının* oluşmaması Mehmet'in zihninde varolan yansıma özelliğine ilişkin eksik yapıdan kaynaklandığı söylenebilir. Yine bu yapı Mehmet'in kanıt imajının bütünlük oluşturmaya da engel olmaktadır. Buna göre alakalı önceki matematiksel yapıların yanlış ya da eksik oluşması yeni bir yapıyı oluşturmaya engellediği söylenebilir mi? Birey zihnindeki yanlış yapının farkında olmasa da kurduğu mantıksal bağlar ile bir çıkarım yaparak yeni bir yapı oluşturduğunda ancak bu yapının doğruluğu ile ilgili kesinlik hissi oluşmadığında yeni bir yapının varlığından söz edilebilir mi?

Mehmet ispatı tamamlamaktadır. Mehmet'in düşünce sürecini bilmeyen ve yalnızca yazdıklarını inceleyen biri kolaylıkla yeni bir yapı oluşturduğunu söyleyebilir. Ancak Mehmet'in zihninde gerçekten yeni bir yapı oluşmuş mudur? Bu durumda oluşan yeni yapının da eksik olduğu söylenebilir. Tartışma bölümünde bu sorulara yer verilecektir.

İdil'in Kanıt İmajı

İdil'in teorem ile karşılaştıktan sonra uzunca bir süre sessizce düşündüğü gözlenmektedir.

1İ: Soru değişik geldi. Ancak yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine bakmamız lazım sanırım.

Soruyu tekrar sesli olarak okur.

2İ: Birebir ve örten bir fonksiyon... Güzel. Birebir ve örten fonksiyon neydi?

1A: Ben sana sorayım?

3İ: Birebir olunca her eleman sadece bir elemana gidiyordu.

Kümeleri çizer.

Birebir olunca bir eleman sadece bir elemana gidiyordu, örten olunca değer kümesinde hiç boşta eleman kalmıyordu.

Söyledikten sonra düşünür.

4İ: Tanım kümesinde zaten eleman boşta kalamaz.

Soru üzerinde yeniden gözlerini gezdirir.

5İ: Bağıntı derken neyi kastediyor? $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ nin alt kümelerini kastediyor. Kafam karıştı şu an.

İdil, soruyu birkaç kez okuduktan sonra, soruyu farklı bulduğunu ifade etmesine karşın ispatını nasıl yapacağını belirtmesi İdil'in bir bağıntının denklik bağıntısı olduğunu gösterme ile ilgili matematiksel yapılara sahip olduğunu göstermektedir (1İ). Ardından teoremden geçen kavramlar üzerine düşündüğü görülmektedir. İdil'in fonksiyon ve birebir örten fonksiyon ile ilgili zihninde önceden oluşmuş yapıların olduğu ve bu yapıları informal bir dil ile açıkladığı görülmektedir (3İ, 4İ). Ardından bağıntı ve kartezyen çarpım arasındaki ilişki üzerine düşünür (5İ).

6İ: $\forall a \in \mathcal{A} \text{ için } (a, a) \in \beta$ olmalı ki denklik bağıntısının bir adımı sağlansın.

Böyle olabilmesi için $A = B$ olmalı. Ya da $A \subset B$ olabilir.

Bir süre sessiz kalır.

2A: Ne düşünüyorsun?

7İ: Birebir ve örtenlikle ilgili matematiksel bir ifade var mıydı onu hatırlamaya çalışıyorum.

Yazdıklarımı yeniden gözden geçirir.

8İ: $A = B$ ve $A \subset B$. Bu ihtimaller bana çok doğru geliyor.

İdil, ispatın nasıl olacağına dair hemen bir tahminde bulunsa da, zihninde henüz ispatın ‘bütün bir matematiksel resmi’ bulunmadığı için teoremi tekrar tekrar okumaktadır. İdil’in bilinçli bir şekilde alakalı önceki yapılar üzerinde durduğu görülmektedir. Ancak yansıma özelliğini göstermekte zorlandığı söylenebilir. Bu bağıntının yansıma özelliğini sağlaması için A ve B kümeleri arasında eşitlik ya da alt küme olma ilişkilerinin olması gerektiğini düşünmektedir.

3A: Sorun nerede peki?

9İ: $f: A \rightarrow B$ ’e birebir ve örten bir fonksiyon. A’dan aldığımız bir a elemanı için (a, a) ’nın bu bağıntıda olması gerekiyor. Eğer (a, a) bu bağıntının elemanıysa $A \subset B$ veya $A = B$ dir. Böylece A’daki her eleman B’de de olacak. Ama A ve B kümeleri arasındaki ilişkiden hiç bahsedilmemiş.

Duraksar.

10İ: Ancak şöyle bir durum var. Değer kümesinde açıkta eleman kalabilir mi? Birebir ve örten fonksiyon için eşleme denildiğini bile duydum. Yani kalmaması lazım.

11İ: O zaman kesinlikle $A = B$ olmalı.

O zaman bu fonksiyon A’dan A’ya birebir ve örten olduğundan yansıma sağlanır. Çünkü bu bir birim fonksiyon olur. O zaman birebir ve örtenlik sağlanır. Yani yansıma olur.

İdil, hangi durumlar için yansıma özelliğinin sağlanacağını düşünmektedir. A ve B kümelerinin eşit olması durumunda yansıma özelliğinin sağlanacağını ifade etmektedir. İki kümenin eşit olması koşulunda bir birim fonksiyon olacağını ve birim fonksiyonun yansıma özelliğini sağlayacağını açıklamaktadır. Ardından simetri ve geçişme özellikleri üstüne düşündüğü gözlenmektedir.

12İ: $(a, b) \in f$ için $(b, a) \in f^{-1}$ olmalı ki simetri sağlansın.

İki küme çizer.

13İ: f fonksiyonunun tersine bakıyorum. A 'daki eleman B 'ye gidiyorsa tersi de doğru olacaktır. Bu nedenle simetriktir diye düşünüyorum. Çünkü sonuçta değer kümesinde boşta eleman yok, demek ki bu fonksiyonun tersi var. O zaman simetrik.

Geçişmeyi göstermem için üç eleman almam gerekiyor. Üç küme alacağım yani, A , B , C kümelerini alıyorum.

Kümeler üzerinde çizerek anlatır.

$(a, b) \in \beta$ ve $(b, c) \in \beta$ iken $(a, c) \in \beta$ doğru mu?

Evet doğru. Geçişme sağlanır. Bu nedenle bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

İdil, simetri özelliğini incelerken ters fonksiyon üstünden düşünmektedir. Birebir ve örten fonksiyonun tersi olduğunu ve buna ters fonksiyon denildiğini bilmektedir. İdil'in bu esnada ve aslında süreç boyunca kullandığı dil informaldır. Bağıntının geçişme özelliğini sağladığını kümeleri çizerek anlatmaktadır.

4A: Emin misin?

15İ: Bana bu yaptığım çok doğru geliyor.

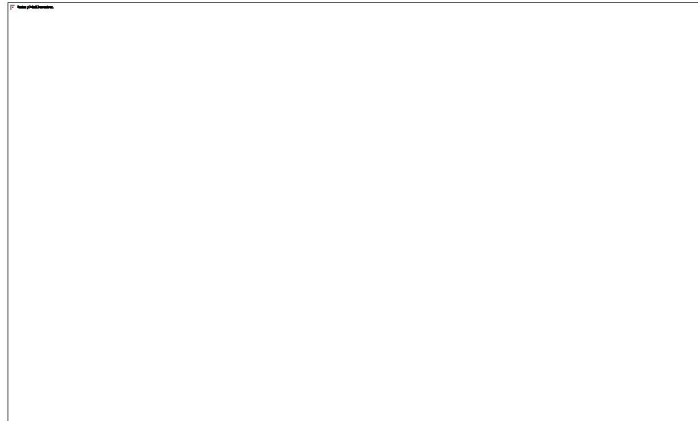
İdil'in kanıt imajının duyuşsal boyutu olan *kesinlik hissinin* oluştuğu söylenebilir. Böylece İdil'in kanıt imajı bir *bütünlük* oluşturmaktadır. İdil, başlangıçta soruyu farklı bulduğunu ifade etse de, ne yapması gerektiğinin bilincindedir. Bu durum İdil'in verilen bir bağıntının denklik bağıntısı olduğunu gösterme ile ilgili sahip olduğu matematiksel bilgiler ile alakalıdır. İdil, öncelikle teoremde geçen matematiksel kavramların üzerinde tek tek durarak teoremin doğruluğunu nasıl ispatlayacağını düşünmektedir. İdil'in ilk aşamada gösterdiği bu durum önceki matematiksel yapıları seçme ve aralarında *mantıksal bağlar* kurma ile açıklanabilir. Böylece İdil, sahip olduğu yapıların üstüne yeni bir yapı daha oluşturmaktadır. İdil'in teorem ile ilgili yaptığı açıklamalar *kişisel anlayışını* yansıtmaktadır. Şekil 22 ve Şekil 23'te İdil'in çalışmaları yer almaktadır.

Şekil 22
İdil'in 4. Teoremdeki Çalışması



Şekil 22'de İdil'in düşüncelerini görsele döktüğü görülmektedir.

Şekil 23
İdil'in 4. Teoremdeki Çalışmasının Devamı



Şekil 23'te İdil, bağıntının geçişme özelliğini göstermektedir.

Sena'nın Kanıt İmajı

Sena, soruyu önce sesli olarak okumaktadır. Ardından bir süre daha soru üstünde gözlerini gezdirdiği görülmektedir. Daha sonra araştırmacı ile arasında aşağıdaki diyolog gerçekleşmektedir.

1S: Birebir ve örten ise bu fonksiyonun tersi vardır. Örten demek değer kümesinde boşta eleman kalmayacak demek.

1A: Tanım kümesinde boşta eleman kalabilir mi?

Hemen cevap vermez ve şekil çizer.

2S: Kalamaz. Çünkü A'ya (kümesine) ben çocuk dersem bu çocuğun muhakkak bir annesi vardır. Ama bir kadının çocuğu olmayabilir normalde. Ama örten olduğu için olacak. İki çocuğun bir annesi olabilir normalde. Ama birebir (fonksiyon) ise olamaz. Her çocuğa bir anne denk gelecek.

Soruyu sesli biçimde birkaç kez okuyan Sena, ilk olarak birebir ve örten fonksiyonların tersinin var olduğu yorumunu yapmaktadır (1S). İlk aşama olarak Sena'nın teoremi ispatlamak için hangi kavramlara ihtiyaç duyduğu ve bu kavramların özelliklerinin neler olduğuna odaklandığı görülmektedir. Böylece Sena, önceki alakalı bilgi yapılarını seçmekte ve bunlar arasında bağ kurmaya çalışmaktadır. Ardından birebir ve örten fonksiyonun tanımını ayrıntılı bir şekilde hatırlamak için bilgilerini şekle döken Sena, fonksiyon ve birebir ve örten fonksiyon kavramlarını zihninde var olan bir örnek ile açıklamaktadır (2S). Sena, soyut bir kavramın tanımını günlük hayattan bir örnekle anlamlandırmayı tercih etmektedir. Sena'nın bu örneği, matematiksel açıdan bir doğruluk değeri taşımamaktadır. Ancak tanım için kritik olan noktaları belirleyebildiği gözlenmektedir (fonksiyon olma koşulu, birebir-örten olma koşulu). Sena verdiği bu örnekle, fonksiyon ve birebir örten fonksiyon kavramlarının formal tanımlarının zihninde henüz bir yapı olarak bulunmadığına işaret etmektedir. Bu durum diğer konularda ve diğer öğrencilerle görüşmeler esnasında da farkedilmiştir.

3S: Mesela birebir ve örten bir fonksiyon yazalım.

$f: N \rightarrow N$ ve $f(x) = 2x$ olsun.

Yazdığı örneğe bakarak uzunca bir süre düşünür.

2A: Ne düşünüyorsun?

4S: Burada kesin bir denklik var. Ama örnekle ispatlayamam soruyu. Ancak bir önermenin yanlışlığına örnek verirsem o ispat olur. Doğruluğu için bir örnek yeterli olamaz. *(Örneğin üstünü çizer.)*

Sena'nın fonksiyon ve birebir fonksiyon kavramlarına ilişkin açıklamalarından sonra, bir örnek yazarak bu örnek üzerinde düşünmeye karar verdiği gözlenmektedir. Bir fonksiyon tanımlayarak üzerinde düşünürken, teoremin kesinlikle doğru olduğunu ancak nasıl ispatlayacağını bilmediğini ifade etmektedir (4S). Burada Sena'nın, kanıt imajının *kişisel anlayışını* yansıttığı söylenebilir. Bu aşamada Sena'nın zihninde henüz 'paylaşılabilir' olmayan bir kanıt imajının varlığından söz edilebilir. Ayrıca verdiği bir örnek ile ispat yapmanın ancak aksi bir örnek ile mümkün olduğunu açıklayarak önceki matematiksel bilgi yapılarını gözden geçirdiği görülmektedir. Sena, tek bir örneği bütün durumlara genelleymeyeceği sebebiyle yazdığı örnekten vazgeçmektedir.

Soruyu bir kez daha sesli okur.

5S: Bu bir denklik bağıntısı mıdır? Fonksiyonlar da bağıntıdır sonuçta, ama bu özel olarak denklik bağıntısı mı?

3A: Nasıl anlayabilirsin bunu?

6S: Yansıma, simetri, geçişme...

Sena'nın soruyu yeniden okuyarak alakalı önceki matematiksel bilgi yapıları üzerinde durduğu görülmektedir. Önce fonksiyon ve bağıntı kavramları arasındaki ilişkiyi ele almaktadır (5S). Fonksiyon ve bağıntı arasında kurduğu ilişkinin ardından bağıntı ve denklik bağıntısı arasındaki ilişkiyi düşünmesi ile Sena'nın zihninde, sahip olduğu bütün matematiksel yapılar arasında doğru bir kombinasyon gerçekleştiği söylenebilir. Böylece ispatı nasıl yapacağını farkeder.

7S: $f: A \rightarrow A$ 'ya fonksiyonu birebir ve örten midir? Bence kesin birebir ve örtendir. Çünkü aynı küme üzerinde tanımlı zaten. Her elemanı kendisine yollarız.

Simetrik mi? Simetrik olduğu bariz bence. Çünkü birebir ve örtense bu fonksiyonun tersi vardır. Hatta tersi de birebir ve örten. Sadece tanım kümesiyle değer kümesinin yerleri değişecek. Eşlemeler değişmeyecek. O yüzden simetrik. Geçişme?

$f: A \rightarrow B$ 'e birebir ve örten bir fonksiyon

$f: B \rightarrow C$ 'e birebir ve örten bir fonksiyon ise

$f: A \rightarrow C$ 'e birebir ve örten bir fonksiyon mu?

Şekil çizer.

A'dan B'ye giden yolları C'ye çevirirsek hiçbir sorun olmaz. Bu nedenle geçişme de sağlanır.

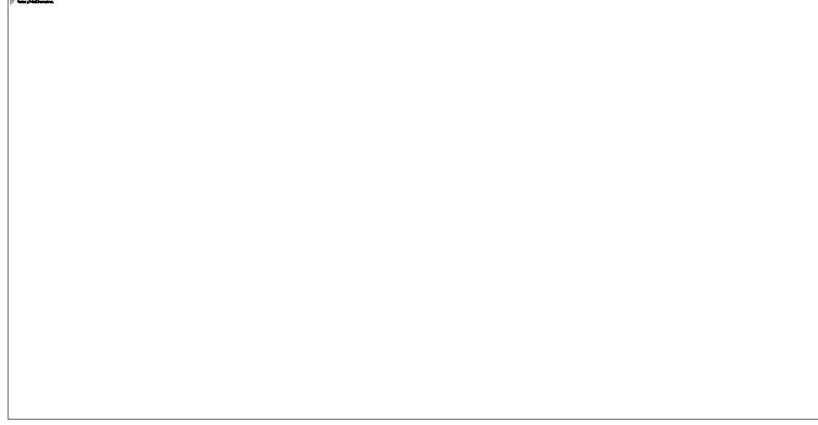
Burada Sena'nın, teoremin ispatı için ne yapması gerektiğini farkettilikten sonra hızlı ve kendinden emin bir şekilde bağıntının özelliklerini incelediği görülmektedir. Sena'nın, denklik bağıntısının özelliklerini ve bir bağıntının bu özellikleri gösterip göstermediğini incelemeyi bildiği görülmektedir. Böylece teoremin doğruluğunu göstermektedir. Sena, teorem ile karşılaştığında ispatı nasıl yapacağını henüz bilmemektedir. Ancak alakalı olarak gördüğü matematiksel yapılar üzerinde düşünerek ve bu yapılar arasında *mantıksal bağlar* kurarak ispatı tamamlamaktadır. Soruyu gördüğü andan ispatı tamamlayıncaya kadar yapmış olduğu soyutlama, kavramlar arasında kurmuş olduğu ilişkiler ile *dinamik* bir süreç gözlenmektedir. Sena, ispatı nasıl yapacağını anladığı anda tüm süreci ve matematiksel kavramları bir bütün olarak görmekte, zihninde yeni bir yapı oluşturmakta ve Sena'nın kanıt imajında bir *bütünlük* oluşmaktadır. Böylece önce Sena, teoremin doğruluğuna ilişkin olan düşüncelerini açıklayamasa da daha sonra kanıt imajı 'paylaşılabilir' bir hal almaktadır.

4A: Bitti mi ispatın?

8S: Düşünce yolum kesin doğru. Ama matematiksel bir açıklama yapamadım. Sanki Türkçe gibi oldu. Mantıklı oldu ama belki daha düzgün açıklayabilirdim.

Sena'nın kanıt imajının duyuşsal boyutu incelendiğinde, ispata ilişkin sezgisel iknasının olduğu fakat kullandığı matematiksel sembollerin doğruluğundan emin olmadığı ve aslında yaptığı ispatı formal bulmadığı gözlenmektedir. Sena'nın bu soru için yaptığı çalışmalar Şekil 24'te sunulmuştur.

Şekil 24
Sena'nın 4. Teoremdeki Çalışması



Sena bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu ispatlamaya çalışırken Şekil 22'deki satırları yazmıştır.

BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında ilköğretim matematik öğretmenliği bölümündeki 1. Sınıf öğrencilerinin denklik bağıntısına ilişkin ispatlama süreçleri kanıt imajı teorik çerçevesiyle incelemek amaçlanmıştır. Öğretmen adaylarının bu konuya ilişkin bilgilerinin derinlemesine incelemek amacıyla uygulanan iki form ve durum çalışmasından elde edilen bulgular doğrultusunda ortaya çıkan sonuç, tartışma ve öneriler bu bölümde ele alınmıştır.

5.1. Sonuç ve Tartışma

Araştırmanın sonuçları, uygulanan DKİF ve DBKBF formlarından ve öğretmen adaylarının kanıt imajlarından elde edilen sonuçlar olmak üzere üç alt başlık altında incelenecektir.

5.1.1. Denklik Kavramına İlişkin Sonuçlar

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının 102'sine uygulanan DKİF'de denklik kavramının anlamına ve kullanımına dair sorular yer almaktadır. Bu formdan elde edilen bulgular sonucunda öğretmen adaylarının denklik kavramını çoğunlukla sayısal eşitlik (%59,8) olarak yorumladıkları görülmüştür. Denklik kavramının kullanımına günlük hayattan örnekler vermeleri istendiğinde genellikle (%50,98) aynı değere sahip nesneler için örneğini vermişlerdir. Ayrıca öğretmen adaylarının büyük bir kısmının denklik kavramını kümelerde denklik (%65,6) ve mantıksal önermelerin denkliği (64,7) ile ilişkilendirdikleri tespit edilmiştir. Çalışmanın yapıldığı esnada işlenen konunun Mantık olmasının bu sonuca etki ettiği düşünülebilir. Bu formun analizlerinden ortaya çıkan diğer bir sonuç ise denklik kavramını 102 öğretmen adayından yalnızca 3'ünün denklik bağıntısı kavramı ile ilişkilendirdiğidir. Bu durum

öğretmen adaylarının denklik kavramına, günlük hayattaki ve matematik içindeki kullanımına aşina olmalarına karşın, denklik bağıntısı konusu ile bağdaştırmadıklarını göstermektedir.

5.1.2. Denklik Bağıntısı Kavramları Bilgi Formuna İlişkin Sonuçlar

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının 96'sına uygulanan DBKBF' den elde edilen bulgular sonucunda öğretmen adaylarının çoğunluğunun (%90,62) denklik bağıntısını doğru tanımladığı görülmüştür. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının tamamı denklik bağıntısının özelliklerini bildiği halde çok az bir kısmı (18,75) bu özellikleri denklik kavramı ile ilişkilendirerek açıklama yapmıştır. Bu durum öğretmen adaylarının denklik bağıntısı konusunu denklik kavramı ile ilişkilendiremediğinin göstergesi olabilir.

Öğretmen adaylarına bir bağıntı verilerek bu bağıntının denklik bağıntısı olup olmadığını incelemeleri istenmiş ve soruya çok az kişinin (%6,25) doğru cevap verebildiği görülmüştür. Bu soruda ortaya çıkan bir diğer önemli durum ise, öğretmen adaylarından hiçbirinin bu soruda oran kümesi belirleyememesi olmuştur. Verilen bağıntının sonsuz bir küme üzerinde tanımlı olması sebebiyle soruyu anlamakta zorluk çektikleri söylenebilir. Diğer soruda sonlu bir küme üzerinde tanımlı bir bağıntının denklik bağıntısı olup olmadığını incelemeleri istendiğinde, çoğu öğretmen adayı bağıntının denklik bağıntısı olduğunu gösterebilmiştir. Buradan hareketle öğretmen adaylarının sonsuz kümeler üzerinde incelemeler yapmada güçlük çektiklerini söyleyebiliriz. Bunun yanı sıra bu soruda da, çoğunluğun denklik sınıfı ve oran kümesi belirlemede zorlandıkları görülmüştür. Bu durum Chin ve Tall (2000)'un matematik dersi alan öğrencilere yaptığı çalışmada elde ettiği sonuçlar ile paralellik göstermektedir.

5.1.3. Denklik Bağıntısına İlişkin Kanıt İmajı Teorik Çerçevesiyle Elde Edilen Sonuçlar

Öğretmen adaylarının denklik bağıntısına ilişkin teoremleri ispatlama süreçleri incelendiğinde kanıt imajları arasında benzerlikler ve farklılıklar tespit edilmiştir. Bu alt başlık altında bu durumlar ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir.

Öğretmen adaylarının teoremle ilk karşılaştıkları anda teoremi birkaç kez sesli okuma davranışına yöneldikleri görülmüştür. Bu şekilde hem teoremi anlamaya çalıştıkları hem de teoremin zihinlerinde önceden oluşmuş ve teorem ile alakalı olan matematiksel yapıları biraraya getirmeye çalıştıkları söylenebilir. Uğurel, Moralı, Koyunkaya ve Karahan (2015), matematik öğretmeni adaylarının ispatlama süreçlerindeki davranışlarını incelemiş ve bireylerin öncelikle verilen önermeyi sesli şekilde okudukları ve açıklamaya çalıştıkları sonucuna varmışlardır. Bu çalışmada, teoremi sesli okumanın ardından öğretmen adaylarının çoğunlukla sözel olarak verilen bir ifadeyi matematiksel notasyonları kullanarak yazmaya yöneldikleri görülmüştür. Bu süreç kişiden kişiye büyük farklılıklar göstermiştir. Kimi öğretmen adayları matematiksel sembollerini kullanırken hızlı ve kendinden emin olurken, kimileri ispat sürecini tamamladığında dahi sembollerini doğru kullanıp kullanmadığına dair kesinlik hissi yaşayamamıştır. Örneğin Sena, ispatların genelinde kullandığı notasyonların doğruluğundan emin olmadığını ifade etmiştir. Moore (1994), matematik ve matematik öğretmenliği bölümündeki öğrencilerin formal ispat yaparken yaşadığı zorlukları incelediğinde, bu zorluklardan birinin de matematiksel dili kullanma kaynaklı olduğunu söylemiştir. Bu araştırmada bu duruma bir başka örnek olarak İdil'in özellikle KİF soru 2'de (İki denklik sınıfı özdeşdir ya da ayrıktır. Kanıtlayınız.) *gerek koşul önermesinin* ispatını yaparken matematiksel notasyonları kullanmada sorun yaşamadığı ancak *yeter koşul önermesinin* ispatında bu konuda birtakım zorluklar yaşadığı gözlenmektedir. İdil, doğruluğu açık olarak kabul edilebilecek olan önermeyi ispatlayamayacağını ifade etmiştir. İdil'in matematiksel notasyonları kullanarak formal bir ispat yapmaya çabalarken bu sırada önermenin anlamını ihmal ettiği görülmüştür. Yani İdil'in yaşadığı zorluğun kaynağı notasyonları bilmemesi

değil, notasyonları kullanarak formal bir şekilde ispat yapmaya çalışması ve bu nedenle ifadelerin anlamlarını kaçırmaması olmuştur.

Öğretmen adaylarının kanıt imajlarının bilişsel boyutları incelendiğinde, çoğunlukla mantıksal bağlar içerme, kişisel anlayış, dinamik olma ve bütünlük oluşturma özelliklerini gösterdikleri görülmüştür. Buna paralel olarak Pala (2016), öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin kanıt imajlarının da bu özellikleri sağladığını belirtmiştir.

Bu çalışmada ortaya çıkan bir diğer sonuç ise, kanıt imajının duyuşsal boyutu olan sezgisel ikna hissinin oluşmasının sadece ispatı tamamlamaya bağlı olmadığıdır. Örneğin KİF soru 2’de Mehmet’in cevabı incelendiğinde, zihninde ispat yöntemlerinden olmayana ergi yöntemi ile ilgili önceden oluşmuş yanlış bir yapıya sahip olduğu farkedilmiştir. Mehmet, birçok defa sahip olduğu bu yapıyı açıklamış ve yanlış olan bilgisinin doğruluğundan emin olduğunu söylemiştir. Buna rağmen ispatı doğru bir şekilde tamamlayabilmiştir. Fakat Mehmet’in kanıt imajının, sezgisel ikna ve bütünlük oluşturma özelliğini göstermediği düşünülmektedir. Çünkü Mehmet’in ispatı tamamlamış olmasına rağmen ispatından emin olamadığı görülmüştür. Bu durumda Mehmet’in yeni bir yapı oluşturduğu söylenebilir mi? Yeşildere (2006), 6, 7 ve 8. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerini incelediği doktora tezinde, yanlış yapıya sahip öğrencilerin bu yapıyı kullanarak yeni bir yapı oluşturma süreçlerine girdiklerinde yaptıkları eylemin yine de yeni bir yapı oluşturma olduğunu savunmuştur. Diğer yandan Mehmet’in yaşadığı duruma bakıldığında, Mehmet ispatı tamamlayarak yeni bir yapı ortaya koymuş, ancak sezgisel olarak ikna olamamıştır. Dolayısıyla oluşan bu yeni yapının kalıcılığı tartışmalıdır. Buradan hareketle Mehmet’in durumunun, kanıt imajının bilişsel anlayış ve duyuşsal anlayış bileşenleri arasındaki etkileşimi yansıttığı düşünülmektedir. Böyle bir durumda Mehmet’in zihninde bütün bir matematiksel resim oluşmadığı söylenebilir. Buradan hareketle eğer birey yanlış bir bilgiye sahipse ve bu sebeple sezgisel olarak ikna olamıyorsa bireyin kanıt imajının bütünlük oluşturma karakteristiğini göstermediği de söylenebilir. Bu da bize kanıt imajının sezgisel ikna

ve bütünlük oluşturma karakterististlerinin birbirleriyle etkileşimli olduğuna işaret etmektedir.

Öğretmen adaylarının, KİF soru 4'te (verilen bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu göstermeleri istendiğinde), bir süre ne yapacaklarını bilemedikleri görülmüştür. Bu soruda verilen teorem denklik bağıntısının tanımından yararlanarak ispatlanmaktadır. Öğretmen adaylarının bu durumu anladıktan sonra çok kısa bir süre sonra ispatı tamamlayabildikleri görülmüştür. Bu durum Moore'un (1994)'un çalışmasında ortaya koyduğu, ispat yaparken karşılaşılan zorluklardan biri olan ispata nereden başlayacağını bilememe zorluğuna bir örnek olarak gösterilebilir. Bu soruda ortaya çıkan bir diğer durum, öğretmen adaylarının verilen bağıntının yansıma özelliğini göstermede zorlanmasıdır. Bu zorlanmanın nedenlerinin; verilen bağıntının birebir ve örten bir fonksiyon olması sebebiyle birden fazla matematiksel yapının birlikte kullanımını gerektirmesi ve öğretmen adaylarının sorunun derste gördükleri örneklerden farklı olduğunu düşünmeleri olduğu söylenebilir. Kanıt imajı teorik çerçevesinde ifade edildiği gibi; bireylerin zihninde ayrı duran bu bilgi yapıları, süreç içerisinde kurulan mantıksal bağlar ile yeni bir bilgi yapısına dönüşmektedir. Öğretmen adaylarının her biri ispatı tamamlayarak bu yeni bilgi yapısını oluşturmuştur. Ancak yine aynı soruda ve yansıma özelliğini göstermede karşılaşılan bir diğer durum, bu özelliği gösterirken birim fonksiyondan yararlanmamalarıdır. Chin ve Tall'un (2000) yaptığı çalışmada aynı teorem öğrencilere verilmiş ve verdikleri yaptıkları ispatlar incelendiğinde çoğunluğun formal olmayan ispatlar yazdığı görülmüştür. Diğer yandan öğrencilerin çok az bir kısmı yansıma özelliğini birim fonksiyon kavramından yararlanarak incelemiştir. Bu çalışmada da yalnızca İdil, birim fonksiyon kavramını kullanarak teoremi ispatlamıştır.

Araştırmanın sonuçlarına genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının denklik kavramı ile denklik bağıntısı kavramını ilişkilendirmediği tespit edilmiştir. Bu durum hem denklik kavramını ilişkili olduğu matematiksel kavramları açıklamaları beklendiğinde (DKİF, soru 4) hem de denklik bağıntısının özelliklerini denklik kavramını düşünerek yorumlamaları istendiğinde (DBKBF, soru 2) ortaya çıkmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının çoğunlukla denklik bağıntısı kavramını

tanımlayabilmelerine karşın tanıma dayanan ispatları yapmada zorlandıkları sonucuna ulaşılmıştır (DBKBF, soru 3 ve KİF soru, 4). Araştırmanın sonuçlarından hareketle oluştural önerilere aşağıda yer verilmiştir.

5.2. Öneriler

Bu araştırmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının denklik bağıntısına ilişkin bilişsel ve duyuşsal bileşenler bağlamında kanıt imajları incelenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlama süreçlerinde var olan matematiksel yapılarını kullanarak ispatı tamamlamaları yeni bir yapı oluşturmaları bağlamında ele alındığından öncelikle öğretmen adaylarının konuya ilişkin bilgileri derinlemesine analiz edilmiştir. Daha sonra ispat soruları yöneltilerek sesli düşünceleri ve yaptıkları her basamağı açıklamaları beklenmiştir. Ancak bu süreçte öğretmen adaylarının akıllarından geçen her durumu paylaşmadıkları, uzun süre sessiz kaldıkları görülmüştür. Bu duruma bir öneri olarak birden fazla öğretmen adayının bir araya getirilerek odak grup tartışması ile bir soru üzerine düşünceleri sürecin daha ayrıntılı analizi için yararlı olabileceği düşünülmüştür. Ayrıca kanıt imajının duyuşsal boyutu olan sezgisel ikna özelliğinin süreçte oldukça önemli rol oynadığı görülmüştür. Sezgisel ikna hissi oluşmayan bireyin zihninde yeni bir yapı oluşup oluşmadığını incelemek amacıyla, bireye özellikle bu kısmı incelemeye fırsat sunacak sorular yöneltilerek araştırma yapılabilir. Duyuşsal özellikler ile bilişsel özellikler arasındaki ilişki ve birbirleri üzerine etkisi daha ayrıntılı bir şekilde ele alınarak yeni bir araştırma konusu olarak önerilebilir. Ayrıca farklı kademelerdeki öğrencilerin kanıt imajları incelenebilir.

KAYNAKÇA

- Akar, G. K. (2016). Nicel muhakeme ve Nicel Muhakeme ile Kesirler Üzerinden Gerçek Sayıların İnşası. Bingölbalı, E., Arslan, S. ve Zembat İ.Ö. (Ed.) *Matematik Eğitiminde Teoriler*. Ankara: Pegem Akademi. s. 117-132.
- Asghari, H.A. (2004). Organizing with a focus on defining, a phenomenographic approach. In M.J. Hoines & A.B. Fuglestad (Eds), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*, 2, pp. 63-70.
- Ashgari A. (2005). Equivalence. Yayınlanmamış Doktora Tezi, England: University of Warwick, Eğitim Fakültesi.
- Aydoğdu, T., Olkun, S., & Toluk, Z. (2003). İlköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin matematik problemlerine ürettikleri çözümleri kanıtlama süreçleri. *Eğitim Araştırmaları*, 4(12), 64-74.
- Biber, A. ve Argun, Z. (2012). Matematik Öğretmen Adaylarının Tek Değişkenli Fonksiyonlarda Limit Kavram Bilgilerini Kullanarak Yürüttükleri Bazı Genelleme ve Soyutlamalar. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 2.
- Bikner-Ahsbahs, A. (2004). Towards the Emergence of Constructing Mathematical Meanings, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2. pp. 119-126.
- Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E.K., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2014). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri*. (16.Baskı). Ankara: Pegem Akademi.
- Chin E. ve Lin, F. (2009). A comparative study on junior high school students' proof conceptions in algebra between Taiwan and the UK. *Journal of Mathematics*

Education, 2(2), pp. 52-67.

Chin, E. T. ve Tall, D. O. (2000). Making, having and compressing formal mathematical concepts. In T. Nakahara, & M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp. 177-184

Chin, E-T. and Tall, D. O. (2001). Developing formal mathematical concepts over time. In M. van den Heuvel-Pabhuizen(Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*, 2, pp. 241-248

Davydov, V.V.: 1990, *Soviet Studies in Mathematics Education: Vol. 2. Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula*, J. Kilpatrick (ed.) and J. Teller (Trans.), National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA (Original work published in 1972).

Dienes, Z. P. (1976). *Relations and Functions*, Hodder and Stoughton, London.

Ekiz, D. (2009). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri*. (2.Baskı), Ankara: Anı Yayıncılık.

Erkuş, A. (2005). *Bilimsel Araştırma Sarmalı*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Freudenthal, H. (1966). *The Language of Logic*. Elsevier Publishing Company.

Güney, Z. (1993b). *Soyut Matematiğe Giriş (Ders Kitabı)*. İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi Yayınları.

Halmos, P.R., 1982. The thrills of abstraction. *The Two-Year College Mathematics Journal*, 13(4), pp. 243-251.

- Hamdan, M. (2006). Equivalent structures on sets: Equivalence classes, partitions and fiber structures of functions. *Educational Studies in Mathematics*. 62(2), pp. 127-147.
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), pp. 6-13.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), pp. 396-428.
- Herskowitz, R., Schwarz, B, Dreyfus, T. (2001) Abstraction in Context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, pp. 195-222.
- İmre Y.S. & Türnüklü E. (2016). RBC Soyutlama Teorisi. Bingölbalı, E., Arslan, S. ve Zembat İ.Ö. (Ed.) *Matematik Eğitiminde Teoriler*. Ankara: Pegem Akademi. s. 459-472.
- Karakaş H. İ. (2008). *Cebir dersleri*. Tüba Yayınları, 1.Baskı, Ankara.
- Karasar, N. (2008). *Bilimsel Araştırma Yöntemi*. Ankara: Nobel.
- Kidron I., & Dreyfus T. (2014) Proof Image. *Educational Studies in Mathematics*, 87(3). pp. 297-321.
- Knuth, E. (2002) Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics teacher*, vol:95, no:7, pp. 486-490
- Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education, *Philosophy of Mathematics Education*, vol.16. pp. 1-13.
- Leont'ev, A.N. (1981) The problem of activity in psychology. In J. V. Wertsch(Ed.), *The concept of activity in soviet psychology*. New York, NY; Sharpe. pp. 36-71.

- Mills, J. E. (2004). Teaching equivalence relations using collaborative activities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(4), pp. 517-522.
- Moore, R. C. (1994). Making the Transition to Formal Proof, *Educational Studies in Mathematics*, 27, pp. 249-266
- Narlı, S. (2013). Bağını Kavramı ve Bu Kavrama Temel Teşkil Eden Kavramlar. Editörler: İsmail Özgür Zembat, Mehmet Fatih Özmantar, Erhan Bingölbalı, Hakan Şandır, Ali Delice, *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar*, Ankara, s. 309-328.
- Narlı, S., Aksoy E., Pala O., Ercire Y.E., Uysal M. (2016). Analysing proving process of prospective elementary mathematics teacher in the concept of proof image. *International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology*. (19 –22 Mayıs 2016). Bodrum, Turkey. pp. 21-22.
- NCTM. (2000). *Principles and Standarts for School Mathematics*. USA.
- Padraig, M. & McLoughlin, M. M. (2002). The Central Role of Proof in the Mathematics Canon: The Efficacy of Teaching Students to Create Proofs Using a Fusion of Modified Moore, Traditional, and Reform Methods. *The Annual Summer Meeting of the Mathematical Association of America*, (3 August) Burlington, Vermont.
- Pala O. (2016). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sonsuz Kümelerin Denkliği Konusundaki Kanıt İmajlarının İncelenmesi. *Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, İzmir.
- Patton, M. Q. (1990). *Qualitative Evaluation and Research Methods* (2nd Ed.). Newbury Park, CA: Sage.

- Schwarz, B., Dreyfus, T., Hadas, N., Hershkowitz, R. (2004). *Teacher Guidance of Knowledge Construction*, Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4: pp. 169-176.
- Schwarz, B. B., Dreyfus, T., & Hershkowitz, R. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. In B. B. Schwarz, T. Dreyfus, & R. Hershkowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction*. London, UK: Routledge. pp. 19-49.
- Skemp, R. R.: 1971, *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin Books, Harmondsworth, Eng.: Baltimore
- Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*, The Netherlands: Kluwer.
- Tsamir, P., Dreyfus, T. (2005). How Fragile Is Consolidated Knowledge? Ben's Comparisons of Infinite Sets, *Journal of Mathematical Behavior*, 24, pp. 15-38.
- Türk Dil Kurumu (2018). <www.tdk.org.tr> (20/04/2018).
- Uğurel, I., Morali S., Koyunkaya Yiğit M., Karahan Ö. (2016). Pre-service Secondary Mathematics Teachers' Behaviours in the Proving Process, *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, İzmir. pp. 203-231
- Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the 4th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Berkeley, CA: PME. pp. 177-184.
- Von Glasersfeld, E (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. London: Falmer

- Weber, K., & Alcock, L. (2009). Proof in advanced mathematics classes: Semantic and syntactic reasoning in the representation system of proof. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades* (pp. 323–338). New York, NY: Routledge, Studies in Mathematical Thinking and Learning.
- Yeşildere, S. (2006). Farklı Matematiksel Güce Sahip İlköğretim 6, 7 ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme ve Bilgiyi Oluşturma Süreçlerinin İncelenmesi. Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2013). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. (9.Basım) Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel Düşünme*, (3. Basım), Remzi Kitapevi, İstanbul.
- Yin, R. K. (2003). Case Study Research : Design and Methods (Third Edition). *Applied Social Research Methods Series*, 5, New Delhi: Sage Publications.

EKLER

EK-1

Denklik Kavramı Bilgi Formu

1. Denklik kavramı deyince ne anlıyorsunuz? Açıklayınız.
2. Günlük hayattan denklik kavramının kullanıldığı örnekler veriniz.
3. Matematikte denklik kavramının kullanımına örnek veriniz.
4. Sizce denklik kavramı matematikte hangi kavramlarla ilişkilendirilebilir? Örnekleyerek açıklayınız.

EK-2**Denklik Bağıntısı Kavramları Bilgi Formu**

1. Denklik bağıntısı nedir? Açıklayınız.

2. Denklik bağıntısı hangi özelliklere sahiptir? Niçin bu özelliklere sahip bağıntıya denklik bağıntısı denilmiş olabilir? Denklik kavramını düşünerek yorumlayınız.

3. Düzlemdeki üçgenler kümesi üzerinde tanımlı benzerlik bağıntısı bir denklik bağıntısı mıdır? Gösteriniz. Bu bağıntıya göre oluşacak oran kümesi nedir? Belirleyiniz.

4. $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

kümesinde tanımlı,

$$\beta=\{(x,y) : 4 \mid (x - y)\}$$

bağıntısı bir denklik bağıntısı mıdır? Gösteriniz. Bu bağıntıya göre 2 elemanının denklik sınıfını bulunuz. Ayrıca oran kümesini belirleyiniz.

EK-3**Kanıt İmajı Formu**

1. A bir küme ve $\sim$, A üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı ve $a, b \in A$ olsun.
 $[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b$ 'dir. Kanıtlayınız.
2. İki denklik sınıfı özdeştir ya da ayrıktır. Kanıtlayınız.
3. a, b ve $n \in \mathbb{Z}$ olsun. $a \equiv b \pmod{n}$ bağıntısı $\mathbb{Z}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Kanıtlayınız.
4. Boş küme hariç tüm sonlu kümelerden oluşan aile $\mathcal{A}$ ve
 $\beta = \{f \mid f : X \rightarrow Y \text{ birebir ve örten}, X, Y \subset \mathcal{A}\}$ olsun. Bu bağıntı $\mathcal{A}$ üzerinde bir denklik bağıntısı mıdır?



DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU



Tarih: 22/05/2018

Tez Başlığı:

İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Denklik Bağıntısına İlişkin Kanıt İmajlarının İncelenmesi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 119 sayfalık kısmına ilişkin, 22/05/2018 tarihinde **tez danışmanım tarafından** Dokuz Eylül Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı'nın sağladığı İntihal Tespit Programından (Turnitin-Tez İntihal Analiz Programı) aşağıda belirtilen **filtreleme tiplerinden biri** (uygun olanı işaretleyiniz) uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezin **benzerlik oranı % 8 dir**.

- <http://www.kutuphane.deu.edu.tr/tr/turnitin-tez-intihal-analiz-programi/> adresindeki Tez İntihal Analiz Programı

Kullanım Kılavuzunu okudum ✓

Filtreleme Tipi 1(Maksimum %15) ☐

Filtreleme Tipi 2(Maksimum %30) ✓

☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☐ Kaynakça hariç, ☐ Alıntılar dâhil, ☐ Altı (6) kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.	☒ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☒ Kaynakça dâhil, ☒ Alıntılar dâhil.
EK 1- İntihal Tespit Programı Raporu İLK SAYFA Çıktısı. ✓	
EK 2- İntihal Tespit Programı Raporu (Tümü) Cd İçinde. ✓	

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve yukarıda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Adı Soyadı : Esra Pınar KAYA
Öğrenci No : 2015950014
Anabilim Dalı : İlköğretim
Programı : İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Statüsü : Yüksek Lisans ✓ Doktora ☐

ÖĞRENCİ

DANIŞMAN

Esra Pınar KAYA
22/05/2018

Prof.Dr. Serkan NARLI
22/05/2018

Açıklamalar

- 1: Bu formu teslim etmeden önce sizden istenen bilgileri uygun kutucuğu (☐) işaretleyerek doldurunuz.
Kullanıcı şifre vb. konusunda sorun yaşanması durumunda Üniversitemiz Merkez Kütüphanesinde bulunan Turnitin yetkilisine (Ali Taş Tel: +90 (232) 3018026 veya ali.tas@deu.edu.tr) başvurunuz.
- 2: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu" formu tezin ciltlenmiş ve elektronik nüshalarının içerisinde ekler kısmında yer alır.
- 3: Tez savunmasında düzeltme alınması durumunda bu form güncellenerek yeniden hazırlanır.
- 4: Turnitin-Tez İntihal Analiz Programına yükleme yapılırken Dosya Başlığı (document title) olarak **tez başlığının tamamı**, Yazar Adı (author's first name) olarak **öğrencinin adı**, Yazar Soyadı (author's last name) olarak **öğrencinin soyadı** bilgisini yazınız.