



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ
SAYILAR VE İŞLEMLER ÖĞRENME ALANINA İLİŞKİN
ALAN VE PEDAGOJİK ALAN BİLGİLERİNİN İNCELENMESİ

YUSUF EMRE ERCİRE

İzmir
2022

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ
SAYILAR VE İŞLEMLER ÖĞRENME ALANINA İLİŞKİN
ALAN VE PEDAGOJİK ALAN BİLGİLERİNİN İNCELENMESİ

YUSUF EMRE ERCİRE

DANIŞMAN
Prof. Dr. Serkan Narlı

İzmir
2022

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum “*İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanına İlişkin Alan ve Pedagojik Alan Bilgilerinin İncelenmesi*” adlı çalışmanın içerdığı fikri izinsiz başka bir yerden almadığımı; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında ve bölümlerinin yazımında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yaptığımı ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, ayrıca bu çalışmanın Dokuz Eylül Üniversitesi tarafından kullanılan bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve *intihal içermediğini* beyan ederim. Herhangi bir zamanda aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonuca razı olduğumu bildiririm.

01/09/2022

Yusuf Emre ERCİRE

TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU



DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU



Tarih: 05/09/2022

Tez Başlığı:

İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanına İlişkin Alan ve Pedagojik Alan Bilgilerinin İncelenmesi
Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 571 sayfalık kısmına ilişkin, 03/09/2022 tarihinde tez danışmanım tarafından Dokuz Eylül Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı'nın sağladığı İntihal Tespit Programından (Turnitin-Tez İntihal Analiz Programı) aşağıda belirtilen filtreleme tiplerinden biri (uygun olanı işaretleyiniz) uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 12'dir.

- <http://www.kutuphane.deu.edu.tr/turnitin-tez-intihal-analiz-programi/> adresindeki Tez İntihal Analiz Programı Kullanım Kılavuzunu okudum. ☒

Filtreleme Tipi 1(Maksimum %15) ☐

Filtreleme Tipi 2(Maksimum %30) ☒

☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☐ Kaynakça hariç, ☐ Alıntılar dâhil, ☐ Altı (6) kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.	☒ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☒ Kaynakça dâhil, ☒ Alıntılar dâhil.
EK 1- İntihal Tespit Programı Raporu İLK SAYFA Çıktısı. ☒	
EK 2- İntihal Tespit Programı Raporu (Tümü) Cd İçinde. ☒	

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve yukarıda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Adı Soyadı : Yusuf Emre Ercire
Öğrenci No : 201495001
Anabilim Dalı : İlköğretim
Programı : İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Statüsü : Yüksek Lisans ☐ Doktora ☒

ÖĞRENCİ

DANIŞMAN

05/09/2022
Yusuf Emre ERCİRE

05/09/2022
Prof. Dr. Serkan Narlı

Açıklamalar

1: Bu formu teslim etmeden önce sizden istenen bilgileri uygun kutucuğu (□) işaretleyerek doldurunuz.

Kullanıcı: şifre vb. konusunda sorun yaşanması durumunda Üniversitemiz Merkez Kütüphanesinde bulunan Turnitin yetkilisine (Ali Taş Tel: +90 (232) 3018026 veya ali.tas@deu.edu.tr) başvurunuz.

2: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu' formu tezin çıktısı ve elektronik nüshalarının içerisinde ekler kısmında yer alır.

3: Tez savunmasında düzeltme alınması durumunda bu form güncellenerek yeniden hazırlanır.

4: Turnitin-Tez İntihal Analiz Programına yükleme yapılırken Dosya Başlığı (document title) olarak tez başlığının tamamı, Yazar Adı (author's first name) olarak öğrencinin adı, Yazar Soyadı (author's last name) olarak öğrencinin soyadı bilgisini yazınız.

TEŞEKKÜR

Uzun bir yolu geride bırakıyoruz...

Bu yolculukta bilgi birikimiyle, tecrübesiyle, güler yüzüyle ve motive ediciliği ile, tezin en içinden çıkılmaz bölümlerinde kurtarıcı fikirleri ile her daim yanımda olan değerli

danışmanım,

Prof. Dr. Serkan NARLI'ya;

Lisansüstü eğitimi düşünmezken başvurmam için beni bu süreçte motive eden gerek ders gerekse tez aşamasında tüm samimiyetiyle yanımda olan değerli hocam

Prof. Dr. Süha YILMAZ'a;

Uzun süren doktora sürecindeki hoşgörölü ve destekleyici tavrı, lisans ve lisansüstü eğitimimde aktardığı değerli bilgileri ile katkılarını eksik etmeyen saygıdeğer hocam,

Doç. Dr. Burak KARABEY'e;

Literatür incelemesi, veri toplama süreci, veri analizi derken tezin her bir aşamasında desteği olan her zaman en iyisini hak eden değerli yol arkadaşım;

Dr. Esra AKSOY'a;

Yüksek lisans ve doktora eğitimim süresince çalışmalarına maddi olarak destek sunan TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Dairesi Başkanlığı'na (BİDEB).ve çalışmamın katılımcıları olarak çok sayıda testi içtenlikle cevaplayan Dokuz Eylül Üniversitesi lisans öğrencilerine;

Vermiş oldukları destek ve göstermiş oldukları özveri ile bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan, çalışmam için her türlü ortamı sağlayan Ercire ailesinin değerli üyeleri annem, babam ve kardeşime;

Ve son olarak bu uzun süreçte daima yanımda olan, uykusuz geçen yoğun çalışma günlerinde maddi manevi desteğini hissettiren, varlığı ile hayatıma anlam kazandıran sevgili eşim Büşra ERCİRE'ye,

TEŞEKKÜR EDİYORUM

İÇİNDEKİLER

ÖZET	xviii
ABSTRACT.....	xx
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu	1
1.2. Amaç ve Önem.....	5
1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri	6
1.3.1. Alt problemler	6
1.4. Sınırlılıklar	7
1.5. Varsayımlar	7
1.6. Tanımlar	7
1.7. Kısaltmalar	7
BÖLÜM II	8
KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR.....	8
2.1. Öğretmen Bilgisi ve Bileşenleri	8
2.1.1. Alan bilgisi	12
2.1.2. Pedagojik alan bilgisi (PAB).....	26
2.2. Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı.....	30
2.2.1. Geçmişten günümüze matematik öğretim programının değişimi	30
2.2.2. MEB (2018) matematik dersi öğretim programı.....	32
2.2.3. NCTM ilke ve standartları	36
2.2.4. Alt öğrenme alanları.....	38
2.3. Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanında Yapılmış Olan Öğretmen Bilgisi Çalışmaları	100
2.3.1. Doğal sayılarla ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları	100
2.3.2. Tam sayılarla ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları	104
2.3.3. Çarpanlar ve katlarla ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları	106

2.3.4. Kümelerle ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları	110
2.3.5. Kesirler, ondalık ifadeler ve yüzdelere ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları	112
2.3.6. Oran ve orantı ile ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları	119
2.3.7. Üslü ifadelerle ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları	123
2.3.8. Kareköklü ifadelerle ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları ..	127
2.3.9. Rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayılarla ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları	130
BÖLÜM III	138
YÖNTEM	138
3.1. Araştırmanın Deseni.....	138
3.2. Çalışma Grubu	140
3.3. Veri Toplama Süreci ve Araçları	141
3.3.1. Pilot çalışma öncesi.....	143
3.3.2. Pilot uygulama ve testlerin geçerlik güvenirliği	144
3.3.3. Asıl uygulamanın yapılış süreci	148
3.3.4. Yarı yapılandırılmış görüşmeler	148
3.4. Veri Çözümleme Teknikleri.....	149
3.4.1. Konu testinin analizi	150
3.4.2. Kavram testinin analizi	151
3.4.3. Problem çözme testinin analizi	153
3.4.4. Epistemik testin analizi	155
3.4.5. PAB-Öğrenci bilgisi testinin analizi	156
3.4.6. PAB-Öğretim stratejileri bilgisi testinin analizi.....	158
3.4.7. Program bilgisi testinin analizi	159
3.4.8. Yarı yapılandırılmış görüşme verilerinin analizi	161
3.5. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği.....	161

3.6. Araştırmacının Rolü	167
BÖLÜM IV	168
BULGULAR.....	168
4.1. Konu Bilgi Düzeyi ile İlgili Bulgular	168
4.1.1. KNT 1. soruya ilişkin bulgular (basamak ve bölüklere ayırma).....	168
4.1.2. KNT 2. soruya ilişkin bulgular (basamak değeri hesaplama).....	169
4.1.3. KNT 3. soruya ilişkin bulgular (yuvarlama)	171
4.1.4. KNT 4. soruya ilişkin bulgular (bölme işlemi)	171
4.1.5. KNT 5. soruya ilişkin bulgular (doğal sayılarda işlem önceliği).....	173
4.1.6. KNT 6. soruya ilişkin bulgular (kesirlerde işlemler)	174
4.1.7. KNT 7. soruya ilişkin bulgular (ondalık ifadelerde basamaklar).....	175
4.1.8. KNT 8. soruya ilişkin bulgular (bir sayının çözümlenmesi).....	177
4.1.9. KNT 9. soruya ilişkin bulgular (tam sayılarda işlemler).....	179
4.1.10. KNT 10. soruya ilişkin bulgular (tam sayılarda birleşme özelliği).....	180
4.1.11. KNT 11. soruya ilişkin bulgular (rasyonel sayılarda işlem)	183
4.1.12. KNT 12. soruya ilişkin bulgular (devirli sayı sorusu ve basamak sorusu)	184
4.1.13. KNT 13. soruya ilişkin bulgular (devirli sayıyı a/b haline getirme)....	186
4.1.14. KNT 14. soruya ilişkin bulgular (iki devirli sayının toplamı)	188
4.1.15. KNT 15. soruya ilişkin bulgular (çarpan sayısı bulma)	190
4.1.16. KNT 16. soruya ilişkin bulgular (asal sayı ikilisi)	191
4.1.17. KNT 17. soruya ilişkin bulgular (bölünebilme).....	192
4.1.18. KNT 18. soruya ilişkin bulgular (bölünebilme-modüler aritmetik işlemleri)	194
4.1.19. KNT 19. soruya ilişkin bulgular (doğru ve ters orantıda orantı sabiti)	195
4.1.20. KNT 20. soruya ilişkin bulgular (üslü ifadelerde işlemler)	197

4.1.21. KNT 21. soruya ilişkin bulgular (üslü ifadelerde basamak sayısı bulma)	198
4.1.22. KNT 22. soruya ilişkin bulgular (kareköklü sayı)	199
4.1.23. KNT 23. soruya ilişkin bulgular (tam kare sayılar)	201
4.1.24. KNT 24. soruya ilişkin bulgular (kareköklü sayılarda işlemler)	202
4.1.25. KNT 25. soruya ilişkin bulgular (ondalık ifadelerin rasyonellik ve irrasyonelliği)	204
4.1.26. Konu bilgi düzeyi ile ilgili genel değerlendirme	205
4.2. Kavram Bilgi Düzeyi ile İlgili Bulgular	211
4.2.1. Tanımlamalarla ilgili bulgular	211
4.2.2. Kavramlar arası ilişkilere yönelik bulgular	273
4.2.3. Kavram bilgi düzeyi ile ilgili genel değerlendirme	302
4.3. Problem Çözme Bilgi Düzeyi ile İlgili Bulgular	304
4.4. Epistemik Bilgi Düzeyi ile İlgili Bulgular	313
4.4.1. Çarpma işleminde sola kaydırmanın gerekçesine yönelik bulgular	313
4.4.2. Devirli sayıların en fazla 10. basamaktan itibaren devretmeye başlayacağı önermesine yönelik bulgular	316
4.4.3. $0, aaa... = a/9$ eşitliğinin gerekçesine yönelik bulgular	319
4.4.4. Çarpımları irrasyonel olan iki sayıdan biri rasyonel ise diğerinin irrasyonel olma gerekçesine yönelik bulgular	323
4.4.5. Ardışık sayıların aralarında asallık gerekçesine yönelik bulgular	325
4.4.6. Tabanları aynı olan iki üslü sayıda çarpma kuralına yönelik bulgular	327
4.4.7. $a^0 = 1$ eşitliğinin gerekçesine yönelik bulgular	330
4.4.8. Üç ile bölünebilme kuralının gerekçesine yönelik bulgular	332
4.4.9. Asal çarpanlara ayırarak pozitif çarpan sayısını bulma kuralının gerekçesine yönelik bulgular	335
4.4.10. Orantılı çoklukların toplamında orantı sabitinin değişmeme gerekçesine yönelik bulgular	338

4.4.11. Epistemik bilgi düzeyi ile ilgili genel değerlendirme	340
4.5. Pedagojik Alan Bilgisi Kapsamında Öğrenci (Öğrenen) Bilgisine Yönelik Bulgular.....	344
4.5.1. ÖBT çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanına ilişkin soruya yönelik bulgular	344
4.5.2. ÖBT orantı sorusuna ilişkin bulgular	349
4.5.3. ÖBT rasyonel sayı ve irrasyonel sayı sorusuna ilişkin bulgular	352
4.5.4. ÖBT oran sorusuna ilişkin bulgular	355
4.5.5. ÖBT tam sayılarda sıfırcı kuvvetin etkisi ile ilgili soruya ilişkin bulgular	358
4.5.6. ÖBT kesir sorularına ilişkin bulgular.....	360
4.5.7. ÖBT ondalık gösterim sorusuna ilişkin bulgular	363
4.5.8. ÖBT toplama işlemi sorusuna ilişkin bulgular.....	367
4.5.9. ÖBT devirli ondalık gösterim sorusuna ilişkin bulgular.....	369
4.5.10. ÖBT kareköklü sayılara ilişkin bulgular	372
4.5.11. Öğrenci bilgisi bileşenine yönelik genel değerlendirme	374
4.6. Pedagojik Alan Bilgisi Kapsamında Öğretim Stratejileri Bilgisine Yönelik Bulgular.....	379
4.6.1. ÖST 1. soruya ilişkin bulgular	379
4.6.2. ÖST 2. soruya ilişkin bulgular	382
4.6.3. ÖST 3. soruya ilişkin bulgular	384
4.6.4. ÖST 4. soruya ilişkin bulgular	386
4.6.5. ÖST 5. soruya ilişkin bulgular	389
4.6.6. ÖST 6. soruya ilişkin bulgular	391
4.6.7. ÖST 7. soruya ilişkin bulgular (sayma pulları).....	394
4.6.8. ÖST 8. soruya ilişkin bulgular	397
4.6.9. ÖST 9. soruya ilişkin bulgular (şeffaf kesir kartları)	401

4.6.10. ÖST 10. soruya ilişkin bulgular	404
4.6.11. Öğretim stratejileri bilgisi bileşenine yönelik genel değerlendirme	406
4.7. Pedagojik Alan Bilgisi Kapsamında Program Bilgisine Yönelik Bulgular ..	409
4.7.1. İlk üç soruya (uzamsal düşünme, matematiksel okuryazarlık, üstbilişsel bilgi) ilişkin bulgular.....	409
4.7.2. Sayılar ve işlemler öğrenme alanında kullanılan materyal bilgisine yönelik bulgular	416
4.7.3. Öğretim programında hangi bölünebilme kurallarının yer aldığı bilgisine ilişkin bulgular	420
4.7.4. Alt öğrenme alanlarının ve çeşitli kazanımların sınıf düzeyleri bilgisine yönelik bulgular	420
4.7.5. Öğretim programında yer alan doğal sayılarda işlemlere yönelik kazanım bilgisine ilişkin bulgular.....	425
4.7.6. Öğretim programında kesir kazanımlarının sınıf düzeyleri bilgisine ilişkin bulgular	426
4.7.7. Hangi konuların ilk kez ortaokul düzeyinde görüldüğüne ilişkin soruya ait bulgular	427
4.7.8. Kümeler alt öğrenme alanında yer alan kavramların bilgisine yönelik bulgular	429
4.7.9. Program bilgisi bileşenine yönelik genel değerlendirme	430
BÖLÜM V	432
TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....	432
5.1. Tartışma.....	432
5.1.1. Doğal sayılar alt öğrenme alanına ilişkin tartışma.....	432
5.1.2. Tam sayılar alt öğrenme alanına ilişkin tartışma	437
5.1.3. Kesir, ondalık gösterim ve yüzdelere ilişkin tartışma.....	439
5.1.4. Oran ve orantı kavramlarına ilişkin tartışma.....	446
5.1.5. Çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanına ilişkin tartışma.....	449

5.1.6. Üslü ifadeler alt öğrenme alanına ilişkin tartışma.....	454
5.1.7. Kareköklü ifadeler alt öğrenme alanına ilişkin tartışma	458
5.1.8. Rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayılara ilişkin tartışma	460
5.2. Sonuç ve Öneriler.....	468
5.2.1. Alan ve pedagojik alan bilgisine yönelik sonuç ve öneriler	469
5.2.2. Sayıların öğretimi dersine yönelik öneriler.....	484
5.2.3. Gelecek araştırmalara yönelik öneriler	485
KAYNAKÇA.....	487
EKLER.....	519
EK 1. Akademik özgeçmiş.....	519
EK 2. Etik Kurul ve Uygulama İzni.....	521
EK 3. Konu düzeyi testi (KNT)	522
EK 4. Kavram düzeyi testi (KVT)	526
EK 5. Problem çözme düzeyi testi (PÇT)	530
EK 6. Epistemik düzey testi (EPT)	533
EK 7. PAB- Öğrenci bilgisi testi (ÖBT)	535
EK 8. PAB- Öğretim stratejileri bilgisi testi (ÖST).....	539
EK 9. Program bilgisi testi (PBT)	542
EK 10. Bilgilendirilmiş onam formu	545

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1. Anlama düzeyleri ile ilgili sınıflandırmaların karşılaştırılması	16
Tablo 2. Kinach (2002a) Anlama Düzeyleri	17
Tablo 3. Öğretmen tanımlarının analizi teorik çatısına ait kriterler	20
Tablo 4 Öğretim Programında (2018) Yer Alan Öğrenme Alanları ve Kazanım Sayılarının Dağılımı	35
Tablo 5 İlkokul programı sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait alt öğrenme alanları.....	38
Tablo 6 Ortaokul kademesi sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait alt öğrenme alanları	39
Tablo 7 Doğal sayılarla ilgili kazanımlar.....	40
Tablo 8 Tam sayılarla ilgili kazanımlar	46
Tablo 9 Çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanına ilişkin kazanımlar.....	51
Tablo 10 Kesirlerle ilgili kazanımlar	64
Tablo 11 Ondalık gösterimle ilgili kazanımlar	65
Tablo 12 Yüzdelere ilgili kazanımlar	66
Tablo 13 Oran ve orantıyla ilgili kazanımlar	76
Tablo 14 Üslü ifadelerle ilgili öğretim programında yer alan kazanımlar	81
Tablo 15 Rasyonel sayılarla ilgili kazanımlar.....	92
Tablo 16 Testlerin pilot çalışmada uygulandığı gruplar	145
Tablo 17 Katılımcılarla her bir test için yapılan görüşme süreleri.....	149
Tablo 18 KNT soruları için analiz örnekleri	151
Tablo 19 KVT tanım soruları için analiz örnekleri	152
Tablo 20 KVT kavramlar arası ilişki sorularına yönelik analiz örnekleri.....	153
Tablo 21 Problem çözme bütüncül dereceli puanlama anahtarı (MEB, 2009)	154
Tablo 22 EPT değerlendirme ölçütleri.....	155
Tablo 23 PBT soru bazında yapılan değerlendirmeler.....	160
Tablo 24 İnandırıcılığı arttırmak için çalışmada yapılanlar	162
Tablo 25 Aktarılabilirliği arttırmak için çalışmada yapılanlar.....	164
Tablo 26 Tutarlılığı arttırmak için çalışmada yapılanlar	165
Tablo 27 Teyit edilebilirliği arttırmak için çalışmada yapılanlar.....	166
Tablo 28 KNT 1. soruya ilişkin yanıtların dağılımı	168
Tablo 29 KNT 2. soruya ilişkin yanıtların dağılımı	170
Tablo 30 KNT 3.soruya ilişkin yanıtların dağılımı	171
Tablo 31 KNT 4.soruya ilişkin yanıtların dağılımı	172

Tablo 32 KNT 5.soruya ilişkin yanıtların dağılımı	174
Tablo 33 KNT 6. soruya ilişkin yanıtların dağılımı	175
Tablo 34 KNT 7.soruya ilişkin yanıtların dağılımı	176
Tablo 35 Yapılan hatalı basamak isimlendirmelerinin frekansları	176
Tablo 36 KNT 8.soruya ilişkin yanıtların dağılımı	178
Tablo 37 KNT 9.soruya ilişkin yanıtların dağılımı	179
Tablo 38 KNT 10. soruya ilişkin yanıtların dağılımı	180
Tablo 39 KNT 11. soruya ilişkin yanıtların dağılımı	183
Tablo 40 KNT 12.soruya ilişkin yanıtların dağılımı	185
Tablo 41 KNT 13. soruya ilişkin yanıtların dağılımı	187
Tablo 42 Devirli sayıyı rasyonel hale getirirken payda kısmında yapılan hataların dağılımı	187
Tablo 43 Devirli sayıyı rasyonel hale getirirken pay kısmında yapılan hataların dağılımı ..	188
Tablo 44 KNT 14. soruya ilişkin yanıtların dağılımı	188
Tablo 45 KNT 15. soruya ilişkin yanıtların dağılımı	190
Tablo 46 KNT 16. soruya ilişkin yanıtların dağılımı	191
Tablo 47 Verilen hatalı örneklerin frekansları	192
Tablo 48 KNT 17. soruya ilişkin yanıtların dağılımı	193
Tablo 49 KNT 18.soruya ilişkin yanıtların dağılımı	194
Tablo 50 KNT 19. soruya ilişkin yanıtların dağılımı	196
Tablo 51 KNT 20.soruya ilişkin yanıtların dağılımı	197
Tablo 52 KNT 20.soruya ilişkin yanlış yanıtların dağılımı	197
Tablo 53 KNT 21.soruya ilişkin yanıtların dağılımı	199
Tablo 54 KNT 22.soruya ilişkin yanıtların dağılımı	200
Tablo 55 KNT 23.soruya ilişkin yanıtların dağılımı	201
Tablo 56 Son iki rakamı verilen sayıların hangilerinin tam kare olabileceğine yönelik işaretlemelerin dağılımı	201
Tablo 57 KNT 24.soruya ilişkin yanıtların dağılımı	203
Tablo 58 Öğretmen adaylarına göre verilen sayıların kümelere dağılımı	204
Tablo 59 KNT 25. soruya ilişkin yanıtların dağılımı	205
Tablo 60 KNT ortalamaları	206
Tablo 61 Doğal sayı kavramına ilişkin tanımların dağılımı	212
Tablo 62 Tam sayı kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı	216
Tablo 63 Rasyonel sayı kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı	221

Tablo 64 İrrasyonel sayı kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı	227
Tablo 65 Gerçek sayı kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı	231
Tablo 66 Mutlak değer kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı.....	235
Tablo 67 Birim kesir kavramına ilişkin tanımların dağılımı.....	238
Tablo 68 Asal sayı kavramına ilişkin tanımların dağılımı	242
Tablo 69 Aralarında asal kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı.....	247
Tablo 70 EBOB kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı	251
Tablo 71 Çözümleme kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı.....	256
Tablo 72 Bilimsel gösterim kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı.....	260
Tablo 73 Karekök alma işlemi kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı.....	266
Tablo 74 π sayısına ilişkin tanımlamaların dağılımı	269
Tablo 75 KVT 1. soruya ilişkin yanıtların dağılımı.....	274
Tablo 76 Basamak ve bölük kavramına yönelik yapılan açıklamaların dağılımı	274
Tablo 77 KVT 2. soruya ilişkin yanıtların dağılımı.....	276
Tablo 78 KVT 3. soruya ilişkin yanıtların dağılımı.....	278
Tablo 79 KVT 4. soruya ilişkin yanıtların dağılımı.....	282
Tablo 80 Orantı sabitine yönelik yapılan açıklamaların dağılımı	282
Tablo 81 KVT 5. soruya ilişkin yanıtların dağılımı.....	284
Tablo 82 “İki pozitif irrasyonel sayının toplamı her zaman irrasyonel midir?” sorusuna ilişkin yanıtların dağılımı	286
Tablo 83 “Farklı iki irrasyonel sayının çarpımı her zaman irrasyonel midir?” sorusuna ilişkin yanıtların dağılımı	291
Tablo 84 “Her iki irrasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı var mıdır?” sorusuna ilişkin yanıtların dağılımı.....	294
Tablo 85 π sayısına ilişkin yapılan işaretlemelerin sayısı.....	295
Tablo 86 π sayısının bulunduğu kümeye ve değerine ilişkin verilen yanıtların dağılımı	296
Tablo 87 0,12345678910... sayısına ilişkin yapılan işaretlemelerin sayısı.....	298
Tablo 88 0,12345678910... sayısının bulunduğu kümeye ve yapılan açıklamalara göre yanıtların dağılımı.....	299
Tablo 89 “0,999 ... sayısı 1’e eşit midir?” sorusuna ait yanıtların dağılımı.....	300
Tablo 90 Kavram bilgi düzeyi test ortalamaları.....	303
Tablo 91 Tüm tanımların uygunluk oranları.....	303
Tablo 92 Problem çözme testindeki her bir soruya ilişkin bütüncül değerlendirme seviyelerine göre öğretmen adaylarının (160 kişi) dağılımı.....	304

Tablo 93 Problem çözme testindeki her bir sorunun sınıf düzeylerine göre puan ortalamaları	305
Tablo 94 PÇT 1. soruda yer alan hatalı yanıtlara örnekler	306
Tablo 95 PÇT 2. soruya ilişkin yanıtların dağılımı.....	308
Tablo 96 PÇT 5. soruya ilişkin yanıtların dağılımı.....	309
Tablo 97 PÇT ortalamaları.....	313
Tablo 98 EPT 1. soruya ait yanıtlardan örnekler	314
Tablo 99 EPT 1. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı.....	315
Tablo 100 EPT 2. soruya ait yanıtlardan örnekler	316
Tablo 101 EPT 2. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı.....	317
Tablo 102 Epistemik bilgi testi 3. soruya ait yanıtlardan örnekler	320
Tablo 103 EPT 3. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı.....	321
Tablo 104 EPT 4. soruya ait yanıtlardan örnekler	323
Tablo 105 EPT 4. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı.....	324
Tablo 106 EPT 5. soruya ait yanıtlardan örnekler	325
Tablo 107 EPT 5. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı.....	327
Tablo 108 EPT 6. soruya ait yanıtlardan örnekler	328
Tablo 109 EPT 6. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı.....	329
Tablo 110 EPT 7. soruya ait yanıtlardan örnekler	330
Tablo 111 EPT 7. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı.....	331
Tablo 112 EPT 8. soruya ait yanıtlardan örnekler	333
Tablo 113 EPT 8. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı.....	334
Tablo 114 EPT 9. soruya ait yanıtlardan örnekler	336
Tablo 115 EPT 9. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı.....	337
Tablo 116 EPT 10. soruya ait yanıtlardan örnekler	338
Tablo 117 EPT 10. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı.....	340
Tablo 118 EPT genel ortalamaları (100 üzerinden).....	341
Tablo 119 EPT her bir soruya ait puan ortalamaları	342
Tablo 120 ÖBT 1. soruda yer alan her bir ifadeye ait doğru-yanlış sayılarının dağılımı	345
Tablo 121 “Aralarında asal sayılardan en az biri asal sayıdır.” önermesinin yanlışlığını belirten öğretmen adaylarının açıklamalarının dağılımı	346
Tablo 122 “1 sayısına ve kendisine bölünebilen sayılara asal sayı denir.” ifadesini yanlış bulan öğretmen adaylarının açıklamalarının dağılımı	348
Tablo 123 ÖBT 1. soru puan ortalamaları (4 üzerinden)	349

Tablo 124 ÖBT orantı sorusuna verilen yanıtların dağılımı	351
Tablo 125 Rasyonel olduğu halde irrasyonel olarak düşünülebilecek sayılara verilen örnekler	352
Tablo 126 İrrasyonel olduğu halde rasyonel olarak düşünülebilecek sayılara verilen örnekler	353
Tablo 127 ÖBT 4. soruda yer alan her bir ifadeye ait doğru-yanlış işaretleme sayılarının dağılımı	355
Tablo 128 ÖBT 5. soruya ilişkin yanıtların dağılımı	359
Tablo 129 ÖBT kesirlere ilişkin birinci alt soruya verilen yanıtların dağılımı	361
Tablo 130 ÖBT kesirlere ilişkin ikinci alt soruya verilen yanıtların dağılımı	362
Tablo 131 ÖBT ondalık gösterim sorusuna ait yanıtların dağılımı.....	364
Tablo 132 ÖBT 8. soruya verilen doğru yanıtların sayısı ve oranı	367
Tablo 133 ÖBT devirli ondalık gösterim sorusuna ait yanıtların dağılımı	370
Tablo 134 ÖBT 10. soruda yer alan eşitliklerin doğru-yanlış işaretlenme sayılarının dağılımı	372
Tablo 135 ÖBT genel ortalamaları (100 üzerinden).....	375
Tablo 136 ÖBT’de yer alan her bir soruya ait puan ortalamaları	376
Tablo 137 ÖST 1. soruya ilişkin yanıtların dağılımı.....	381
Tablo 138 ÖST 2. soruya ait yanıtların dağılımı	382
Tablo 139 ÖST 3. soruya ait yanıtların dağılımı.....	385
Tablo 140 ÖST 4. soruya ait yanıtların dağılımı.....	387
Tablo 141 EKOK bulurken öğretmen adaylarının kullandıkları yöntemler	389
Tablo 142 Öğretmen adaylarının EKOK hesaplarırken göstermiş oldukları yöntem sayıları	390
Tablo 143 ÖST 6. soruya ait yanıtların dağılımı.....	392
Tablo 144 Öğretmen adaylarının sayma pullarıyla yapmış oldukları modellemelerin dağılımları	395
Tablo 145 Öğretmen adaylarının hatalı bölme işlemine yapmış oldukları dönütlerin dağılımı	398
Tablo 146 Öğretmen adaylarının alternatif çarpma işlemlerine yönelik görüşlerinin dağılımı	399
Tablo 147 ÖST 9. soruya ait yanıtların dağılımı.....	401
Tablo 148 ÖST genel ortalamaları (100 üzerinden)	406
Tablo 149 ÖST her bir soruya ait puan ortalamaları.....	407
Tablo 150 Uzamsal düşünmeye yönelik açıklamaların kategorilere göre dağılımı	410

Tablo 151 Matematiksel okuryazarlığa yönelik açıklamaların kategorilere göre dağılımı..	412
Tablo 152 Üstbilişsel bilgiye yönelik açıklamaların kategorilere göre dağılımı	414
Tablo 153 PBT ilk üç soru ortalamaları (4'er puan üzerinden)	416
Tablo 154 Konulara göre materyallerin belirtilme sayıları ve belirten öğretmen adaylarının oranları	417
Tablo 155 Materyal belirleme sorusuna ilişkin puanların dağılımı	419
Tablo 156 PBT 5..soruya ilişkin puanların dağılımı	420
Tablo 157 PBT 6. soru ortalamaları (19 madde üzerinden).....	421
Tablo 158 PBT 6. soru doğru sayılarının dağılımı (19 maddeden).....	421
Tablo 159 PBT 11. soru doğru sayılarının dağılımı (19 kazanım)	422
Tablo 160 PBT 11. soru ortalamaları (19 kazanım).....	422
Tablo 161 PBT 7. soru doğru sayılarının dağılımı.....	425
Tablo 162 PBT 7. soru doğru sayısı ortalamaları (4 kazanımdan).....	426
Tablo 163 PBT 8. soru doğru sayısı ortalamaları (12 alt sorudan)	426
Tablo 164 PBT 8. soru doğru sayılarının dağılımı (12 sorudan)	427
Tablo 165 “Hangi kavramlarla ilk kez ortaokulda karşılaşmıştır?” sorusunda kavramların işaretlenme oranları.....	428
Tablo 166 PBT 9. soru doğru sayılarının dağılımı (8 kavramdan)	428
Tablo 167 PBT 10. soru doğru sayılarının dağılımı (8 kavramdan)	429
Tablo 168 PBT 10. soru doğru sayısı ortalamaları (8 kavramdan)	429
Tablo 169 PBT genel ortalaması (100 üzerinden)	431

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Öğretmenlik Mesleği Genel Yeterlikleri (MEB, 2017a)	2
Şekil 2. ÖMB modeline ait bileşenler (Ball, Thames ve Phelps; 2008)	12
Şekil 3. Doğruluk kriterinin alt kategorileri	21
Şekil 4. İçinde ve arasında oran (Van de Walle ve diğerleri, 2012, sy.444).....	79
Şekil 5. Durum çalışmasına göre şekillendirilen araştırmanın aşamaları	139
Şekil 6. Alan ve pedagojik alan bilgisi testlerinin geliştirme aşamaları	142
Şekil 7. Basamak ve bölüklere ayırmada hatalı yanıtlara örnekler	169
Şekil 8. KNT 2. soruya ait doğru yanıtlara örnekler	170
Şekil 9. KNT 2.soruya ait kısmen doğru ve yanlış kategorisindeki yanıtlara örnekler	170
Şekil 10. Kısmen doğru kategorisinde yer alan bir bölme işlemi	172
Şekil 11. Bölme işlemine verilen hatalı yanıtların dağılımı.....	172
Şekil 12. Bölme işlemine yönelik bir öğretmen adayının yorumu	173
Şekil 13. En sık yapılan işlem önceliği uygulama hatasına yönelik bir örnek.....	173
Şekil 14. İşlem önceliği sorusunu hatalı bulan yanıtlardan biri	173
Şekil 15. Kesirlerde işlemlere yönelik yapılan işlem hatasına bir örnek	174
Şekil 16. Kesirlerde işlemlere yönelik yapılan yanlış bir çözüm örneği.....	175
Şekil 17. Ondalık ifadelerdeki basamak isimleriyle ilgili hatalı bir yanıt örneği	177
Şekil 18. Bazı öğretmen adaylarının doğru çözümleme örnekleri.....	177
Şekil 19. Sadece basamak değerleri yazılmış çözümleme örneği.....	178
Şekil 20. En sık yapılan yanlış çözümlemelere örnekler	178
Şekil 21. İşlem önceliğine uyulmasına rağmen işlem hatası yapılan bir örnek	179
Şekil 22. İşlem önceliği hatası yapılan bir örnek	180
Şekil 23. “Tam sayılarda çıkarma işleminin birleşme özelliği var mıdır?” sorusuna verilen bazı yanıtlar.....	181
Şekil 24. Simre’nin KNT 10.soruya ilişkin yanıtı.....	181
Şekil 25. Negatif sembolünü sadece tam sayıya atfeden çözüm örnekleri	183
Şekil 26. Tam sayılı kesri çarpma işlemi olarak uygulayan bir çözüm	184
Şekil 27. Sonucu 1,111...0 bulan öğretmen adaylarının yanıtlarına örnekler	189

Şekil 28. Sonucu 1 bulan öğretmen adaylarının yanıtlarına örnekler	189
Şekil 29. Çarpan sayısını doğru bulan çözüm örnekleri	190
Şekil 30. Çarpan sayısını eksik bulan adayların yanıtlarına örnekler	191
Şekil 31. KNT 18. soru ile ilgili kısa yoldan çözüm örnekleri	195
Şekil 32. KNT 18. soru uzun işlemlerle çözüm örnekleri.....	195
Şekil 33. Doğru orantı sabitine yönelik hatalı yanıt.....	196
Şekil 34. $(0,2)^{-2}$ ifadesinin sayısının hatalı çözümlerine örnekler.....	198
Şekil 35. KNT 20. Soruya ilişkin hatalı çözümleri örnekler.....	198
Şekil 36. Üslü sayı doğru bulunmasına rağmen basamak sayısı hatalı yazılan örnekler	199
Şekil 37. KNT 24.soruya ilişkin hatalı çözümlere örnekler.....	203
Şekil 38. Konu bilgi düzeyi test puanlarının dağılımı	206
Şekil 39. “Uygun olmayan” bir gerçek sayı tanımı	233
Şekil 40. Kavram bilgi düzeyi test puanlarının dağılımı.....	302
Şekil 41. PÇT 1. soruya verilen doğru yanıt örneği.....	306
Şekil 42. Problem çözme düzeyi test puanlarının dağılımı.....	312
Şekil 43. Epistemik bilgi düzeyi testi puan dağılımları	341
Şekil 44. Öğretmen adayının 3 ile bölünebilme kuralının gerekçesine vermiş olduğu yanıt.....	343
Şekil 45. Paydaların ortalamasını alan yanlış açıklamalara örnekler.....	356
Şekil 46. Payda eşitleyerek iki oranı toplayan yanlış açıklamalara örnekler.....	357
Şekil 47. İki oranın ortalamasını alan yanlış açıklamalara örnekler	357
Şekil 48. Payları ve paydaları kendi arasında toplayan hatalı açıklamalara örnekler	358
Şekil 49. 0,1 ve 0,11 sayılarının ortasındaki sayının 0,6 olduğunu belirten bazı örnekler	366
Şekil 50. Azime’nin ifadesini doğru kabul eden bazı yanıtlar	373
Şekil 51. Azime’nin ifadesini yanlış gerekçelendirmelerle hatalı kabul eden bazı yanıtlar.....	374
Şekil 52. ÖBT puan dağılımları	375
Şekil 53. Melek için yapılan yanlış önerilere örnekler	392
Şekil 54. Yaşar için yapılan yanlış önerilere örnekler	393

Şekil 55. Sayma pullarıyla yapılmış doğru modelleme örneği	394
Şekil 56. Kurala dayalı açıklama ve sayı doğrusu ile modelleme yapılan örnekler	395
Şekil 57. Yanlış yapılan modellemelere örnekler	395
Şekil 58. Çarpma işlemleri ile ilgili alternatif yöntemlerin her zaman geçerli olmayacağını belirten örnekler.....	400
Şekil 59. Şeffaf kesir kartlarıyla doğru yapılmış bir modelleme örneği	401
Şekil 60.Kartların birleştirilerek gösterildiği bir modelleme örneği.....	402
Şekil 61. Çok sayıda kart kullanılarak yapılan bir modelleme	402
Şekil 62. Kısmen doğru kategorisinde yer alan modelleme örneği	403
Şekil 63. Yanlış modelleme örnekleri.....	403
Şekil 64. Öğretim stratejileri bilgisi testi puan dağılımları.....	406
Şekil 65. Program bilgisi testi puan dağılımları.....	431

ÖZET

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ SAYILAR VE İŞLEMLER ÖĞRENME ALANINA İLİŞKİN ALAN VE PEDAGOJİK ALAN BİLGİLERİNİN İNCELENMESİ

Matematiğin en önemli öğrenme alanlarından biri olan sayılar ve işlemler öğrenme alanıyla ilgili öğrencilerin çok fazla öğrenme güçlüğüne sahip oldukları söylenebilir. Yapılan birçok araştırma bu öğrenme güçlüklerinin kaynağının yalnızca öğrenciler olmadığı öğretmenden kaynaklı güçlüklerin de var olduğu sonucunu ortaya koymaktadır. Araştırmacılar iyi bir öğretmende bulunması gereken özellikleri açıklayabilmek için birçok model geliştirmişlerdir. Bu modeller en genel itibariyle öğretmende bulunması gereken yeterlikleri alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi olarak sınıflamıştır.

Alan bilgisi, matematikteki anahtar kavram, ilke ve kurallarda ustalık, problem çözme teknik ve stratejilerini içerir. Bir öğretmenin öğrenciyi gerektiği zaman matematiksel tartışmalara sokabilmesi ve öğrencilerin kavramlar arası ilişkileri anlamlandırılmalarına yardımcı olabilmesi için o alanı derinlemesine bilmesi gerektiği söylenebilir. Bu nedenle öğretmenlerin özellikle anlattığı kavramlar ve konularla ilgili derinlemesine alan bilgisine sahip olması gerektiği ifade edilebilir. Bir öğretmenin alan bilgisine sahip olması da yeterli değildir. İyi bir alan bilgisine sahip olmasının yanı sıra alanı nasıl öğrettiği, sahip olduğu alan bilgisini öğretime nasıl yansıttığı konusu da önemlidir. Bu da pedagojik alan bilgi düzeyinin önemini ortaya koymaktadır.

Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin alan ve pedagojik alan bilgileri incelenmesi amaçlanmaktadır. Öğretmen adaylarının alan bilgilerini inceleyebilmek için Kinach (2002a) tarafından düzenlenen “anlama düzeyleri” teorik çerçevesi kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının alan bilgileri konu, kavram, problem çözme ve epistemik bilgi düzeyleri bileşenlerinde; pedagojik alan bilgileri ise öğrenci bilgisi, öğretim stratejileri bilgisi ve program bilgisi bileşenlerinde incelenmiştir.

Araştırma kapsamında incelenen yedi bileşenin her biri için açık uçlu sorulardan oluşan testler geliştirilmiştir. Bu testler araştırmanın çalışma grubunu oluşturan Dokuz Eylül Üniversitesi ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan 160 öğretmen adayına uygulanmıştır. Ayrıca her bir sınıf düzeyinden ikişer öğrenciyle yazılı veriler kapsamında yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Elde edilen tüm veriler çeşitli kuramsal çerçeveler

ışığında içerik analizine tabi tutulmuş ve analiz sonuçları frekans ve yüzdelere eşliğinde tablolar halinde sunulmuştur.

Öğretmen adaylarının öğretime yönelik olan alan bilgilerinde eksiklikler olduğu görülmüştür. En çok güçlük yaşanan bileşen kavram bilgi düzeyi olmuştur. Öğretmen adayları, öğrenme alanının temel kavramlarını matematiksel olarak tanımlamakta zorlanmışlardır. Basamak-bölük, çarpan-bölen-kat, rasyonel sayı-irrasyonel sayı, birimli-birimsiz oran gibi kavramların birbirleriyle ilişkilerini ortaya koymada güçlük yaşadıkları ve öğrencilere benzer kavram yanlışlarına sahip oldukları görülmüştür. Alan bilgisinin bir diğer bileşeni olan epistemik bilgi düzeyinde öğretmen adaylarının ispat etme ve gerekçelendirme becerileri incelenmiştir. Öğretim sürecinde yer alan üslû ifade, bölünebilme, devirli sayıları kesirli hale getirme gibi kuralların altında yatan matematiksel gerekçeleri ortaya koyamayabildikleri görülmüştür.

Alan bilgisindeki eksikliklerin pedagojik alan bilgisi üzerinde de etkisi olduğu gözlenmiştir. Öğrencilerin muhtemel kavram yanlışlarını teşhis etme, öğrenci hatalarının kaynağını anlayabilme ve öğrencilere etkili dönüt verebilme noktasında güçlük yaşandığı anlaşılmıştır. Ayrıca program bilgisi ile ilgili incelemeler bazı eksiklikleri ortaya çıkarmıştır. Bazı öğretmen adaylarının programın amacı ve felsefesinin ortaya konduğu giriş kısmında yer alan kavramlar, programda yer alan kazanımlar, konuların öğretim sırası ve matematik materyalleri ile ilgili yeterli bilgiye sahip olmadıkları belirlenmiştir.

Çalışma sonuçları öğretmen eğitimi sürecinde sayılar ve işlemler öğrenme alanının öğretimine önem verilmesi gerektiğini göstermektedir. Öğrenci güçlükleri ve kavram yanlışları, öğretim yöntem ve stratejileri, öğretim programı ve materyalleri ile ilgili yapılacak çalışmaların öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgisi gelişimleri için faydalı olacağı söylenebilir. Ayrıca öğretmen adaylarının alan bilgilerini geliştirici çalışmalara hizmet öncesi eğitimde daha çok yer verilmesi gerektiği önerilebilir. Böylece, öğretmen adayları öğretecekleri konulardaki kavramların matematiksel tanımlarını yapabilir, kavramların birbirleriyle olan ilişkilerini öğrenebilir, kuralların altında yatan matematiksel yapıyı açıklayabilir, prosedürel işlemleri doğru bir şekilde gerçekleştirebilir ve rutin olmayan problemleri çözebilirler.

Anahtar Kelimeler: Alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi, sayılar ve işlemler öğrenme alanı, tanımlama, ispatlama, anlama düzeyleri.

ABSTRACT

AN EXAMINATION OF PRESERVICE PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS' CONTENT AND PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE RELATED TO NUMBERS AND OPERATIONS LEARNING DOMAIN

It can be said that students related to numbers and operations learning domain, which is one of the most important learning domain of mathematics, have a lot of learning difficulties. Many studies reveal that the source of these learning difficulties is not only the students but also the difficulties stemming from the teacher. Researchers have developed many models to explain the characteristics that a good teacher should have. These models, in general, classified the competencies that a teacher should have as content knowledge and pedagogical content knowledge.

Content knowledge includes mastery of key concepts, principles, and rules in mathematics, problem-solving techniques, and strategies. It can be said that a teacher should know the field in depth in order to engage students in mathematical discussions when necessary and to help students make sense of the relationships between concepts. For this reason, it can be stated that teachers should have in-depth content knowledge about the concepts and topics they teach. It is not enough for a teacher to have content knowledge. In addition to having good content knowledge, how he teaches the field and how he reflects his content knowledge to teaching is also important. This reveals the importance of pedagogical content knowledge level.

In this study, it is aimed to examine primary school mathematics teacher candidates' content and pedagogical content knowledge related to numbers and operations learning domain. To examine pre-service teachers' content knowledge, the theoretical framework of "level of understandings" organized by Kinach (2002a) was used. Pre-service teachers' content knowledge in the components of the content, concept, problem-solving, and epistemic knowledge levels; pedagogical content knowledge was examined in the components of student knowledge, instructional strategies knowledge, and curriculum knowledge.

Tests consisting of open-ended questions were developed for each of the seven components examined within the scope of the research. These tests were applied to 160 pre-service teachers studying at Dokuz Eylul University, primary school mathematics teaching, constituting the study group of the research. In addition, semi-structured interviews were conducted with two students from each grade level within the scope of written data. All the

data obtained were subjected to content analysis in the light of various theoretical frameworks and the analysis results were presented in tables with frequencies and percentages.

It has been observed that teacher candidates have deficiencies in their content knowledge about teaching. The most difficult component was the level of concept knowledge. Pre-service teachers had difficulties in defining the basic concepts of the learning domain mathematically. It has been observed that the concepts such as places-periods, factor-divisor-multiple, rational number-irrational number, and ratio-rate have difficulty in revealing their relations with each other and they have similar misconceptions to the students. At the level of epistemic knowledge, another component of content knowledge, pre-service teachers' proving, and justification skills were examined. It was seen that they could not reveal the mathematical reasons underlying the rules in the teaching process such as exponential numbers, divisibility, and converting repeating decimal numbers to fractions.

It has been observed that deficiencies in content knowledge also influence pedagogical content knowledge. It was understood that pre-service teachers had difficulties in diagnosing students' possible misconceptions, understanding the source of student errors, and giving effective feedback to students. In addition, the examinations of curriculum knowledge revealed some deficiencies. It has been determined that some pre-service teachers do not have sufficient knowledge about the concepts in the introduction part, where the purpose and philosophy of the curriculum are revealed, the goals in the curriculum, the order of instruction of the subjects and the materials.

The results of the study show that the teaching of numbers and operations learning domain should be given importance in the teacher education process. It can be said that studies on student difficulties and misconceptions, teaching methods and strategies, curriculum, and materials will be beneficial for the development of pre-service teachers' pedagogical content knowledge. In addition, it can be suggested that studies that improve content knowledge should be given more place in teacher education. Thus, pre-service teachers can make mathematical definitions of the concepts in the subjects they will teach, learn the relations of concepts with each other, explain the mathematical structure underlying the rules, perform procedural operations correctly, and solve non-routine problems.

Keywords: Content knowledge, pedagogical content knowledge, numbers and operations learning domain, defining, proving, level of understandings.

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu bölümde öncelikle araştırmanın problem durumu, amacı ve önemi açıklanmış olup; araştırma problemi ve alt problemler ortaya konulmuştur. Ayrıca bölümde; araştırmanın sınırlılıkları, varsayımları, çalışmada yer alan tanımlar ve kullanılan kısaltmalara yer verilmiştir.

1.1. Problem Durumu

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2018) matematik öğretim programında en büyük ağırlığa sahip olan “sayılar ve işlemler” öğrenme alanına ait birçok kavramda öğrencilerin çeşitli öğrenme güçlüklerine sahip olduğu ortaya konulmuştur (Kocaoğlu ve Yenilmez, 2010; Soylu ve Soylu, 2005). Dikici ve İşleyen (2004), herhangi bir konuda öğrenme güçlüğü çeken bir öğrencinin daha sonra gelecek konularda başarıya ulaşmasının zor olacağını belirtmiştir. Bu nedenle öğrencilerin matematikteki öğrenme güçlüklerinin en kısa sürede tespit edilip giderilmesi elzemdir (Yudariah ve Roselainy, 2001a).

Alanyazında yapılan çalışmalarda öğrencilerin yaşadıkları matematiksel güçlükler ve kavram yanlışlarının üç temel sebebe dayandığı belirtilmektedir (Cornu, 1991; Bingölbali ve Özmantar, 2009). Bunlar epistemolojik, psikolojik (bilişsel) ve pedagojik nedenlerdir:

- *Epistemolojik nedenler* konunun doğasından gelen zorluklardır. Bunlar bilimsel düşüncenin tarihinde var olduğu gibi eğitim öğretim sürecinde de ortaya çıkabilmektedir. π sayısı veya irrasyonel sayı kavramının öğreniminde yaşanan zorluklar bu kapsamda ele alınabilir.
- *Psikolojik veya bilişsel nedenler* öğrencinin kendisinden kaynaklanmaktadır. Bu duruma öğrencinin kişisel gelişimi, hazırbulunuşluk düzeyi ve matematiksel yeterliği dahil edilebilir.
- *Pedagojik nedenler* öğretimden kaynaklı güçlüklerdir. Sadece konunun kendisi veya öğrencinin durumu öğrenme güçlüklerinin nedeni olmayıp öğretmenin veya öğretim şeklinin de bu konuda etkili olduğu söylenebilir. Konunun işleniş sırası, kullanılan yöntem ve teknikler, yapılan benzetimler, tanımlar gibi bazı sebepler de konunun öğreniminde zorluklara ve kavram yanlışlarına neden olabilmektedir (Stewart;2013).

İngiliz Ulusal Araştırma Komisyonu (National Research Council [NRC], 2000), yapılan akademik çalışmaları göz önüne alarak öğretmen faktörünün öğrenci başarısı üzerinde diğer faktörlere göre daha önemli olduğunu belirtmiştir. Benzer şekilde Cockburn

(2005), öğrenme güçlüklerinin veya kavram yanlışlarının sebebi öğrencinin kendisi veya konunun zorluğu da olsa öğretmenlere bunlarda dahi sorumluluk düştüğünü ifade etmiştir. Çünkü etkili ve nitelikli bir öğretmen konudaki potansiyel zorlukların farkında olarak konunun öğretiminde kullandığı yöntem, izlediği strateji ile kavram yanlışlarını veya hataları oluşmadan engelleyebilir, var olan kavram yanlışları veya hataların ise tekrar etmemesi için önlemler alabilir.

Eğitime ayrılan kaynak arttıkça ülkenin gelişmişlik düzeyinin de olumlu yönde etkilendiği birçok çalışmada ortaya konmuş ancak son zamanlarda eğitimin niteliğinin gelişmişlik üzerinde etkisinin göz önüne alındığı ve çalışmaların bu yönde yoğunlaştığı MEB (2017a) “Öğretmenlik Mesleği Genel Yeterlikleri” belgesinde belirtilmiştir. Eğitimin niteliğinin de doğrudan öğretmene bağlı olduğu ve bu nedenle pek çok ülkenin kendilerini uzun vadeli hedeflere ulaştıracak olan öğretmenlerin sahip olması gereken nitelikleri belirlemeye çalıştıkları ifade edilmiştir. Her ülke kendi felsefesine ve kendi şartlarına uyacak şekilde öğretmen yeterlikleri belirlemeye çalışmış ve bu yeterlikleri de güncel ihtiyaçlarına göre dinamik bir şekilde sürekli değiştirmiştir.

MEB (2017a), “Öğretmenlik Mesleği Genel Yeterlikleri” ismiyle yayınlanan belgede öğretmen yeterlikleri, “Öğretmenlerin öğretmenlik mesleğini etkili ve verimli bir biçimde yerine getirebilmeleri için sahip olmaları gereken bilgi, beceri ve tutumlar” olarak tanımlanmıştır. Ulusal ve uluslararası pek çok araştırmacı, öğretmenler, akademisyenler, çalıştay sonuçları ve paydaşların görüşleriyle birlikte “Mesleki bilgi”, “Mesleki beceri” ve “Tutum ve değerler” olmak üzere 3 ana yeterlik alanı belirlenmiştir (Şekil 1). Bu alanlar ise 11 yeterlik ve 65 göstergeden oluşturulmuştur.



Şekil 1. Öğretmenlik Mesleği Genel Yeterlikleri (MEB, 2017a)

“Mesleki bilgi” yeterlik alanı öğretmenlerin mesleğe ilişkin sahip olması gereken alan bilgisi, alan eğitimi bilgisi ve mevzuat bilgisi yeterliklerini kapsamaktadır. MEB (2017a) belgesi öğretmenlerde olması gereken alan ve pedagojik alan bilgisini “alan

bilgisi” ve “alan eğitimi bilgisi” yeterlikleri ile ifade etmiştir. Belgeye göre alan bilgisi yeterliğine sahip bir öğretmen; alanı ile ilgili konu ve kavramları analiz etmeli; alanındaki temel kuram ve yaklaşımların alanına yansımalarını yorumlayabilmeli; alanı ile ilgili temel bilgi ve veri kaynaklarını sınıflandırabilmeli; alanına ilişkin temel araştırma yöntem ve tekniklerini sınıflandırabilmeli ve milli ve manevi değerlerin alanına yansımalarını yorumlayabilmelidir. Alan eğitimi bilgisine sahip bir öğretmen ise alanının öğretim programını tüm öğeleriyle açıklayabilmeli; öğretim programını diğer öğretim programları ile ilişkilendirebilmeli; öğrencilerin gelişim ve öğrenme özellikleri ile ilgili olan bilgisini öğretim süreçleri ile ilişkilendirebilmeli; alanın öğretiminde kullanılabilecek farklı strateji, yöntem ve teknikleri karşılaştırabilmeli; ölçme ve değerlendirme yöntemlerini karşılaştırabilmeli ve öğretim sırasında milli ve manevi değerlerden nasıl yararlanacağına karar verebilmelidir.

Alan eğitimi bilgisi yeterliliğinin belgede geçen “mesleki beceri yeterlikleri” ile de örtüştüğü söylenebilir. Mesleki beceri yeterlikleri, eğitim öğretim sürecini etkin şekilde planlayabilme, öğrenme ortamını ve materyalleri etkili bir öğrenme gerçekleşmesi için hazırlayabilme, öğretme ve öğrenme sürecini etkili şekilde yürütebilme ve ölçme değerlendirme araçları ile sürecin etkililiğini ortaya koyabilmedir. Dolayısıyla tüm bunları yapabilmek için “alan eğitimi bilgisine” yani alanyazında yer aldığı şekliyle “pedagojik alan bilgisine” ihtiyaç olduğu söylenebilir.

Alan eğitimi bilgisi olarak da adlandırılabilir olan pedagojik alan bilgisi kavramı ilk kez 80’li yıllarda ortaya çıkmıştır. Shulman (1986,1987), iyi bir öğretmende bulunması gereken mesleki bilgi ve becerileri daha net bir şekilde ortaya koymak amacıyla çalışmalar yapmış ve bir model ortaya koymuştur. Öğretmenlerin öğretme bilgisini; alan bilgisi, müfredat bilgisi ve pedagojik alan bilgisi olarak kategorize etmiştir. “Pedagojik alan bilgisi” kavramı birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve bu bilgi türünü çeşitli alt bileşenlere ayırarak incelemişlerdir (Grossmann, 1990; Tamir, 1988; Marks, 1999; Ma, 1999; Park ve Oliver, 2008; Ball, Thames ve Phelps, 2008; Hill, Schilling ve Ball, 2008; Baki, 2010). MEB (2017a) yeterlik belgesinin de öğretim bilgisi modellerinde ortaya konulan çerçeveler ışığında “Nitelikli bir öğretmen nasıl olmalıdır?” sorusunu cevaplar nitelikte olduğu söylenebilir. MEB aynı yıl matematik öğretmenleri özelinde bir belge daha yayınlamıştır. “Matematik Öğretmeni Özel Alan Yeterlikleri” belgesi (MEB, 2017b) ile matematik öğretmenlerinden beklenen özel yeterlikleri listelemiştir. MEB (2017b) belgesine göre matematik öğretmenlerinden;

- Öğretim sürecini matematik dersi öğretim programı rehberliğinde, öğrencilerin matematiksel gelişim düzeylerini göz önüne alarak planlamaları beklenmektedir. Bu planlamada kavramlar arasında bağlantılar kurmaya ve

tutarlı bir düşünce sistemi geliştirmeye sevk edici olmasına dikkat edilmesi gerektiği belgede belirtilir.

- Öğrenme ortamı ve öğretim stratejileri düzenlenirken öğrencinin ilgi, yetenek, becerileri ve gelişim düzeylerinin dikkate almaları gerektiği beklenmektedir.
- Öğrenme ve öğretme süreçlerini zenginleştirmek için var olan materyallerle birlikte şema, tablo, resim, grafik, drama gibi farklı yöntemlerden yararlanmaları ve gerekirse özgün araç-gereçler hazırlamaları beklenmektedir.
- Sayılar, geometri, ölçme, olasılık ve istatistik, cebir gibi alanlarla ilgili bilgilerini öğretim sürecinde etkin bir biçimde kullanabilmeleri beklenmektedir.
- Öğrencilerin problem çözme, akıl yürütme, ilişkilendirme ve iletişim becerilerini geliştirmeleri beklenmektedir.
- Öğrencilerin öğretim sürecindeki gelişimini izlemeleri ve değerlendirmeleri gerekliliği belgede belirtilmektedir. Ayrıca öğrencilerin kavram yanlışlarının ve eksik öğrenmelerinin tespit edilmesi gerekliliğine vurgu yapılmaktadır.

Tüm bu beklentiler bir matematik öğretmeninden planlama yapma, öğrencinin genel durumunu bilme, öğretim materyalleri geliştirebilme ve kullanabilme, kendi matematiksel bilgisini öğretime dönüştürebilme, öğrencinin matematiksel becerilerini geliştirebilme ve öğretim sürecini değerlendirebilme gibi çeşitli alanlarda yeterli bilgiye sahip olmasını gerektirdiği söylenebilir. MEB (2017b) belgesinde yer alan yeterlikler listesinde her bir öğrenme alanı ayrı ayrı vurgulanmış ve tüm öğrenme alanlarıyla ilgili matematik öğretmenlerinin sahip oldukları alan bilgilerini öğretim sürecinde kullanmaları beklenmiştir.

Shulman (1987), öğretmenlerin öğretimde etkili olmak için öncelikle alan bilgilerinin iyi olması gerektiğini belirtmiş; böylece konu içeriklerini pedagojik değerlendirme yoluyla esnek bir şekilde öğretim bilgisine dönüştürebileceklerini ifade etmiştir. Öğretmen adaylarının; öğrencilikten, uzman öğrenciliğe (4. sınıf), tecrübesiz öğretmenlere ve nihayet tecrübeli öğretmenlere dönüştükçe öğretme becerilerini geliştirdiklerini söylemiştir. Buna göre; geleceğin öğretmenleri olarak öğretmen adayları, öğrencilerde matematiksel kavram ve uygulamaların uygun bir şekilde öğrenilmesini kolaylaştırmak için matematiksel fikir ve uygulamaları aynı anda kavrayacak ve öğrencilere aktarabilecek donanıma sahip olmalıdır (Adams, 1998; Ball, 2000). Aynı şekilde, içerik ve içeriğin nasıl öğretileceği bilgisine sahip olmanın yanı sıra, öğrencilerin matematiksel yanlış anlamalarını ve yanlış matematiksel uygulamalarını tespit etme ve düzeltme becerisi de başlangıç düzeyindeki etkili matematik öğretiminin bir bileşenidir (Menon, 1998).

1.2. Amaç ve Önem

Bu çalışmanın amacı öğretim programında hem süre açısından hem de kazanım sayısı açısından en geniş yere sahip olan “sayılar ve işlemler” öğrenme alanına ilişkin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının alan ve pedagojik alan bilgilerini incelemektir. Bu öğrenme alanında yapılmış çok sayıda alan ve pedagojik alan bilgisi çalışması mevcuttur. Ancak bu çalışmalar; tüm öğrenme alanını kapsamayıp kesirler, tam sayılar, kareköklü ifadeler gibi tek bir konuya veya kavrama ağırlık vermektedir. Ayrıca alan ve pedagojik alan bilgisinin bazı çalışmalarda tek başına incelendiği bazılarında ise öğrenciyi anlama bilgisi, öğretim stratejileri bilgisi gibi sadece alt bileşenlerinin ele alındığı dikkat çekmiştir. Bu çalışmada ise bu durumlar göz önüne alınarak kapsam genişletilmeye çalışılmıştır. Çalışmada, “sayılar ve işlemler” öğrenme alanının bütünü incelenmiş olup öğrenme alanına ait birçok kavram bir arada ele alınmaya çalışılmıştır. Alan bilgisi; okul ortalaması veya sınav ortalaması gibi verilerle değil problem çözme, kavram bilgisi, ispat ve gerekçelendirme bilgisi, işlemsel bilgi gibi farklı boyutların ayrı ayrı ele alındığı Kinach (2002a) tarafından geliştirilen “bir disiplini anlama düzeyleri (konu bilgi düzeyi, kavram bilgi düzeyi, problem çözme düzeyi, epistemik bilgi düzeyi)” ile incelenmiştir. Pedagojik alan bilgisi de tek bir bilgi türü olarak değil öğrenci bilgisi (öğrenciyi anlama bilgisi), öğretim stratejileri bilgisi ve program (müfredat) bilgisi bileşenleri kapsamında ayrı ayrı ele alınmıştır. İkinci bölümde, öğretmen adaylarının alan ve pedagojik alan bilgilerinin incelemesinde kullanılan teorik çatılar detaylı bir şekilde açıklanmıştır.

Matematik eğitiminde, öğretmen adaylarının alan bilgilerini ve alanı öğretme bilgilerini incelemenin oldukça önemli olduğu söylenebilir. Bu konuda yapılacak olan çalışmaların matematik öğretmeni yetiştirme programlarını desteklemek, geliştirmek ve hatta reform yapmak için kullanılabileceği Martin Lo (2006) tarafından belirtilmiştir. Ayrıca ne öğretilene ve nasıl öğretilene bilgisini anlayabilmeleri konusunda en iyi grubun yeni kavramları keşfetmeye açık olan öğretmen adayları olduğu ifade edilmiştir (Grossman, 1990; Shulman, 1987).

Matematik eğitimi, öğretmen adaylarının matematiği daha iyi anlamalarına ve uygun öğretim için gerekli içerik ve pedagojiyi bütünleştirmelerine yardımcı olmalıdır (Cooney, 1999). Hizmet öncesi öğretmen eğitimi, gelecekte sınıf içinde yapılacak olan öğretimin kalitesini artırmak için, öğretmen adaylarına kavramsal ve yöntemsel bir bakış açısı sağlayabilmelidir (Grossman, 1990; Hiebert ve Carpenter, 1992; Hiebert ve Lefevre, 1986) Bu nedenle birçok araştırmacının öğretmen adayları üzerinde yapmış olduğu alan ve pedagojik alan bilgisi çalışmalarının (örn., Even, 1993; Kinach, 2002b) hizmet öncesi eğitimdeki durumu ortaya koymak için de önemli olduğu söylenebilir.

Öğretmenlerin sahip oldukları alan ve pedagojik alan bilgilerinin, yapmış oldukları öğretimin niteliği ve dolayısıyla öğrenci başarısı üzerinde de etkili olduğu birçok çalışmada ortaya konmuştur (örn., Baştürk ve Dönmez, 2011; Işıksal, 2006). Bu nedenle de bir öğretmenin bir öğrenme alanına ait kazanımları öğrencilere aktarırken başarılı olabilmesi için yeterli alan ve pedagojik alan bilgisine sahip olması gerektiği söylenebilir.

Yukarıda belirtilen tüm sebepler ışığında bu çalışma, hizmet öncesi eğitim sürecinde olan öğretmen adaylarının alan ve pedagojik alan bilgilerini ortaya koymayı hedeflemiştir. Çalışmada tüm sınıf düzeyleri ayrı ayrı incelenmiş olup bu sayede öğretmen adaylarının alan ve pedagojik alan bilgisi gelişimlerinin de ortaya konulabileceği düşünülmüştür. Ayrıca sayılar ve işlemler alanında yer alan kavramlar farklı bileşenlerle birlikte detaylı bir şekilde incelendiği için hem ortaokul öğrencilerine yapılacak olan derslerde hem de öğretmen adaylarına yapılacak olan “sayılar ve işlemler öğrenme alanının öğretimi” derslerinde öğreticilerin dikkat etmesi ve üzerinde durması gereken noktalar hususunda çalışmanın kaynak teşkil edeceği söylenebilir. Öğretmen adaylarının kesirler, ondalık sayılar ve sayı kümeleri gibi öğrenme alanında yer alan çeşitli kavramlar arasındaki bağlantılara ilişkin anlayışlarını üretken ve verimli bir şekilde geliştirebilecek müfredatın geliştirilmesini de desteklemektedir.

1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin alan ve pedagojik alan bilgileri nasıldır?

1.3.1. Alt problemler

- 1) Öğretmen adaylarının sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin konu bilgi düzeyleri nasıldır?
- 2) Öğretmen adaylarının sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin kavram bilgi düzeyleri nasıldır?
- 3) Öğretmen adaylarının sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin problem çözme düzeyleri nasıldır?
- 4) Öğretmen adaylarının sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin epistemik bilgi düzeyleri nasıldır?
- 5) Öğretmen adaylarının sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin pedagojik alan bilgileri (öğrenci bilgisi, öğretim stratejileri bilgisi ve program bilgisi bileşenleri açısından) nasıldır?

1.4. Sınırlılıklar

- Bu araştırma 2017-2018 eğitim öğretim yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesinde öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencileri ile sınırlıdır.
- Testlerde kullanılan sorular ve toplanan veriler “sayılar ve işlemler öğrenme alanı” ile sınırlı olup öğretmen adaylarının diğer öğrenme alanlarındaki alan ve pedagojik alan bilgilerini içermemektedir.

1.5. Varsayımlar

- Çalışmaya katılan öğrencilerin tüm testlere içtenlikle yanıt verdikleri ve test uygulamalarında farklı grupların birbirleriyle araştırmayı etkileyecek bir etkileşimde bulunmadıkları varsayılmıştır.
- Görüşme yapılan öğrencilerin görüşme sorularına samimiyetle cevap verdikleri ve görüşme yapılan diğer öğrencilerle görüşme öncesinde araştırmayı etkileyecek bir etkileşimde bulunmadıkları varsayılmıştır.

1.6. Tanımlar

Alan Bilgisi (AB): Genel anlamda, bir alanı oluşturan yapıların ve kavramsal olarak organize eden prensiplerin bilgisidir (Öner, 2010). Eğitim özelinde; öğretmenlerin öğretimde etkili olabilmeleri için kendi alanlarıyla ilgili ustalaşmaları gereken olgular, teoriler, ilkeler, fikirler ve kavramlardan oluşan bilgi bütünüdür (Cooper ve Alvarado, 2006).

Pedagojik Alan Bilgisi (PAB): Hem alan uzmanının bilgisinden hem de farklı alan öğretmenleri de dahil tüm öğretmenlerin genel pedagojik bilgisinden farklılaşmış olan pedagojinin alan bilgisiyle iç içe geçtiği bilgidir (Shulman, 1988) Öğretim stratejileri ve temsilleri, öğrencilerin anlayışları, olası yanlış anlamaları, öğretim programı ve programda yer alan materyaller hakkında bilgileri de içeren bir konunun nasıl öğretileceğinin kavramsal haritasıdır (Villegas-Reimers, 2003: 39).

1.7. Kısaltmalar

AB: Alan bilgisi

PAB: Pedagojik alan bilgisi

KNT: Konu bilgi düzeyi testi

KVT: Kavram bilgi düzeyi testi

EPT: Epistemik bilgi düzeyi testi

PÇT: Problem çözme bilgi düzeyi testi

ÖBT: Öğrenci bilgisi testi

ÖST: Öğretim stratejileri bilgisi testi

PBT: Program bilgisi testi

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

BÖLÜM II

KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde araştırmanın konusuna yönelik kuramsal çerçeve ve araştırmanın kapsamını oluşturan öğrenme alanı ele alınmış, ilgili alanyazın incelenerek yapılan çalışmalar örneklendirilmiştir.

İlk olarak öğretmen bilgisi kapsamında olan alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi tanıtılmış olup çalışmada kullanılan bileşenler ve bu bileşenlerin incelenmesinde yararlanılan “Matematik Disiplinini Anlama Düzeyleri (Kinach, 2002a)”, “Tanımlama Kriterleri (Zazkis ve Leikin, 2008)” gibi kuramsal çerçeveler tanıtılmıştır. İkinci bölümde “sayılar ve işlemler öğrenme alanı” ele alınmış olup öğrenme alanında yer alan kazanımlar, kavramlar ve tanımlarına odaklanılmıştır. Son bölümde “sayılar ve işlemler öğrenme alanı” kapsamında öğretmen ve öğretmen adaylarıyla yapılmış olan alan ve pedagojik alan bilgisi çalışmalarına yer verilmiştir.

2.1. Öğretmen Bilgisi ve Bileşenleri

Öğretimin kalitesinin nasıl geliştirileceğine yönelik arayışlar 80’li yıllarda sınıf ve zaman yönetimi, ödevler, pekiştirme ve ceza türleri, ders planlamaları gibi konularla sınırlı kalmıştır (Bostan ve Osmanoğlu, 2016). Shulman (1986) ABD’nin çeşitli eyaletlerinde öğretmen değerlendirmelerinin aşağıda da yer alan bazı konularla sınırlı olduğunu ifade etmiştir:

1. Öğretim planlarının hazırlanması ve uygulanmasının organizasyonu,
2. Değerlendirme
3. Bireysel farklılıkların tanınması
4. Kültürel farkındalık
5. Gençliği anlamak
6. Yönetim
7. Eğitim politikaları ve prosedürleri.

Bu değerlendirme kriterleri arasında konu alanının ve içeriğin eksikliğini vurgulayan Shulman (1986), öğretmen eğitimi için dönüm noktası sayılabilecek olan “pedagojik alan bilgisi” kavramını ortaya atmıştır. Aslında Shulman’dan (1986) 3 sene önce Elbaz (1983), öğretmen bilgisi ile ilgili ilk sınıflamayı oluşturmuştur. Öğretmen bilgisini, alan bilgisi, öğretme bilgisi, bağlam bilgisi, öğretim programı bilgisi ve öğretmenin kendisi hakkında bilgi olarak beş kategoriye ayırmış ve bu bilgiler bütünü “pratik bilgi” olarak adlandırmıştır. Bu pratik bilgilerin deneyimlerle oluştuğunu ve öğretmene özgü olduğunu ifade etmiştir. Shulman (1986), öğretmen bilgisini alan bilgisi,

pedagojik alan bilgisi ve müfredat (öğretim programı) bilgisi olarak üç kategoride incelemiştir. Ancak 1 sene sonra yaptığı çalışmada kapsamını genişletmiştir. Shulman (1987) “öğretim için bilgi tabanı” olarak adlandırdığı öğretmen bilgisini yedi kategoriye ayırmıştır:

- Alan bilgisi,
- Sınıf organizasyonu/yönetimiyle ilgili strateji ve ilkeleri içeren genel pedagojik bilgi,
- Çeşitli materyal ve programları içeren öğretim programı bilgisi,
- Alan ve pedagoji bilgisinin birleşiminden oluşan pedagojik alan bilgisi,
- Öğrenenler ve durumları ile ilgili bilgi,
- Eğitimin bağlamıyla (çevre, topluluklar, hükümet ve okul finansmanı vb.) ilgili bilgisi,
- Eğitimin amaçları, hedefleri, değerleri ve bunların felsefi/tarihsel temelleri ile ilgili bilgisidir.

Bu sınıflandırmada alan bilgisi, öğretim programı bilgisi ve pedagojik alan bilgisinin öğretim yapılan alana özgü olduğu söylenebilir. Bu da Shulman’ın (1986) “öğretmen değerlendirme kriterleri” ile ilgili konu içeriğinin göz ardı edildiği eleştirisine getirmiş olduğu çözüm önerisi olarak değerlendirilebilir.

Shulman’a (1986) göre *alan bilgisi*; öğretilecek olan alanın içeriğine ve yapısına hâkim olmaktır. Yani sadece alanla ilgili olgu ve kavramların bilgisiyle sınırlanmayıp bu alana yön veren kuralların, ispatların ve yeni kavramlar oluşturulurken doğruluk/yanlışlık değerlendirmesi yapılabilecek yolların bilgisini de içermektedir. Öğretim programı bilgisi; alanının öğretiminde hangi sınıf seviyesinde hangi kavramların öğretileceği, konu ve kavramların önceki ve sonraki yıllarda nasıl ele alındığı ve alınacağı bilgisi ile programa göre hazırlanmış olan ders materyallerinin nasıl kullanılacağına ilişkin bilgiyi de kapsamaktadır. Son olarak ilk kez Shulman (1986) tarafından ortaya atılmış olan pedagoji bilgisinin ve alan bilgisinin özel bir karışımı olarak nitelendirdiği pedagojik alan bilgisi (PAB) kavramı; öğretim için gerekli olan alan bilgisi olarak da tanımlanabilir. “Bir öğretmen alanla ilgili bir alan uzmanından farklı olarak ne bilmelidir? Konuyu daha iyi nasıl öğretebilir? Öğrencilerin ön öğrenmeleri ve kavramsal gelişimleri ne durumdadır? Hangi temsilleri, örnekleri ve açıklamaları kullanırsa öğrenci açısından daha faydalı olur?” gibi soruların cevaplarının *pedagojik alan bilgisinin* kapsamını gösterdiği söylenebilir.

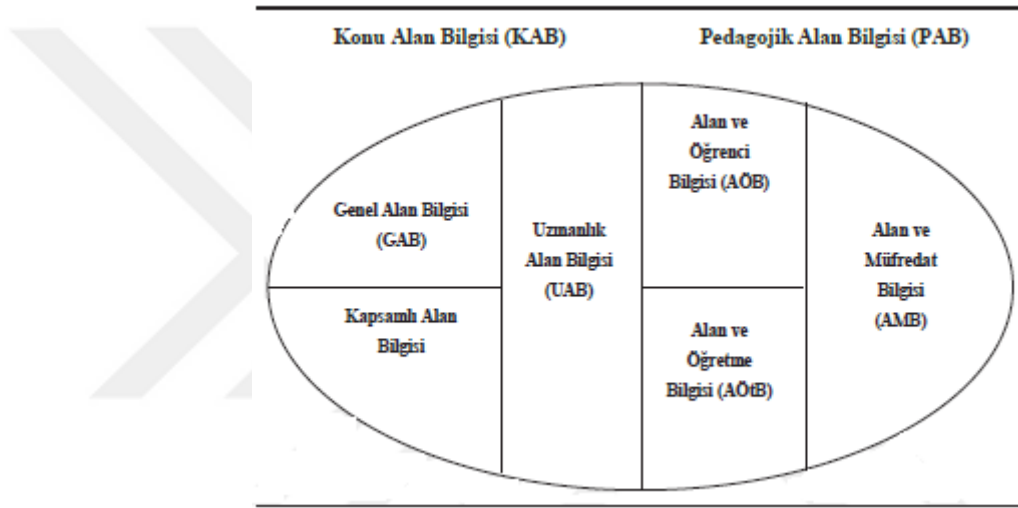
Shulman’ın (1986, 1987) *öğretmen bilgisi* ile ilgili koymuş olduğu model, pek çok araştırmacı tarafından tartışılmış, çeşitli derecelerde değiştirilmiş, daha fazla açıklamalar eklenmiş ve geliştirilmiştir.

- Grossman (1990), Shulman'ın (1986) ortaya attığı yedi kategoriyi, “konu alanı bilgisi, genel pedagoji bilgisi, alanı öğretme bilgisi ve bağlam bilgisi” olarak dört ayrı boyutta ele almıştır. Alanı öğretme bilgisi yani Shulman'da (1986) yer alan ismiyle PAB'ı da “alan öğretiminin amaçlarına yönelik bilgi, öğrenci anlayışları bilgisi, öğretim programı bilgisi, öğretim stratejileri bilgisi” şeklinde dört alt boyuta ayırmıştır. *Amaçlara yönelik bilgi*, bir konunun öğretiminde nereye ulaşmak istediğimize ve öğrenciye kazandırmaya çalıştığımız becerilere ilişkin bilgi türü olarak açıklanabilir. *Öğrenci anlayışları bilgisi*, konuya ilişkin öğrencilerin anlamalarına, kavrayışlarına ve yanlışlarına yönelik bilgidir. *Öğretim stratejileri bilgisi*, öğrencinin daha iyi anlayabilmesine olanak sağlayacak olan örneklerin, yöntemlerin ve açıklamaların bilgisi olarak belirtilmiştir. Son alt boyut olan *öğretim programı (müfredat) bilgisini* ise Shulman (1986) üç ana bileşenden biri olarak ele almış olsa da Grossmann (1990) PAB'ın alt boyutu olarak değerlendirmiştir.
- Marks (1990), pedagojik alan bilgisi ile alan bilgisinin birbirinden ayırt etmenin zorluğuna dikkat çekmiştir. Bu nedenle ikisi arasında ayrım yapılmaması gerektiğini savunmuştur. Bunların aynı durumlar içerisinde yer alabileceği düşüncesiyle sınır çekmeye karşı çıkmıştır.
- Magnusson, Krajcik ve Borko (1999) modelinde Grossman (1990) bileşenlerini temel olarak almış ancak fen öğretimi için özelleştirdikleri modellerinde alan öğretme bilgisinin (PAB) alt boyutlarına *öğrenimi değerlendirme bilgisine* de eklemiştir.
- Matematik öğretimi alanında yapılmış olan çalışmalardan biri olan Fennema ve Franke (1992) modelinde ise bilgi türleri pedagoji bilgisi, matematik bilgisi, öğrenenlerin matematik biliş bilgisi ve inançlar olarak dört bileşen bulunmaktadır. *Matematik bilgisi*, alan bilgisini ifade ederken; *öğrenenlerin matematik biliş bilgisi*, öğrencilerin işlenen matematiksel içeriği nasıl algıladıklarına ve yaşadıkları zorluklara yönelik bilgidir. Bu bağlamda Grossman'ın (1990) *öğrenci anlayışları bilgisi* ile örtüştükleri söylenebilir.
- Carpenter ve Fennema (1991) tarafından önerilen model, öğretmenlerin alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi, öğretmenlerin inançları ve öğretmenlerin bilgi ve inançlarının sınıf öğretimini ve öğrencilerin öğrenmesini nasıl etkilediğini incelemek için bilişsel ve öğretimsel bakış açılarını bütünleştirdi. Çerçeve, öğretmenlerin alan içeriği hakkındaki bilgilerini, alanın göreceli zorluklarını ve öğretmenlerin öğrencilerin sorunları çözmek için kullandıkları farklı stratejiler hakkındaki bilgilerini incelemek için bir temel sağlar. Bu durumda,

öğretmenlerin bilgileri ile bu bilgilerin belirli sınıf etkinliklerinde nasıl kullanıldığı arasında bağlantılar kurmak veya belirli öğretim etkinliklerinin bir alanda öğrencilerin öğrenmelerine nasıl yansıdığını araştırmak mümkündür. Çerçeve, öğretmenlerin alan ve pedagojik alan bilgisi ile öğretmenlerin karar verme süreçleri arasında önemli bir rol oynadığını ima eder.

- An, Kulm ve Wu (2004) pedagojik alan bilgisini; alan, müfredat ve öğretim bilgisi bileşenlerinden oluşturmuştur. Bu bilgi boyutunun odağında öğrenci düşüncesi bilgisi yer almaktadır. An ve diğerleri (2004) diğer öğretmen bilgisi modellerinden farklı noktalara da değinmiştir. Öğretmen inançlarının PAB ile etkileşim içinde olduğunu net biçimde belirtmişlerdir. PAB ağının odağında öğrenci düşüncesi bilgisine yer vermişler ve bu bilgi türünün öğretimi şekillendirebileceği ve öğrenci öğrenmelerini etkileyeceğini modellerinde göstermişlerdir. Shulman'ın (1986) PAB bileşeni olarak ifade ettiği “öğrencileri anlama bilgisi”, “öğrenci düşüncesi bilgisi” adıyla PAB'in bileşenlerini şekillendiren bir odak noktası olarak yerleştirilmiştir.
- Rowland, Huckstep ve Thwaites (2003) matematik bilgisi ile matematik öğretimi bilgisini bir arada inceleyerek bir matematik öğretmenin sahip olması gereken dört bilgi boyutundan bahsetmiştir: Temel bilgi, dönüşüm bilgisi, bağlantı kurma bilgisi, beklenmeyen olaylar bilgisi. *Temel bilgi boyutu*, bir öğretmenin matematiksel amaçların farkında olması, ders kitaplarına uyum göstermesi, öğrenci hatalarını belirleyebilmesi, matematik alan bilgisini açıkça gösterebilmesi, matematiksel terminolojiyi doğru kullanabilmesi gibi göstergeleri içermektedir. *Dönüşüm bilgi boyutu*, ders sırasında öğretmenin doğru örnekleri ve doğru temsilleri seçebilmesi, öğretim materyallerini kullanabilmesi gibi tercihlerini içermektedir. *Bağlantı kurma bilgi boyutu*, öğretmenin konular arasındaki bağlantıları sağlarken vermiş olduğu kararları içermektedir. Matematiksel kavramlar arasındaki ilişkilerin de farkında olarak bunların öğretim sırasını belirleme, kavramlar arası öğretim geçişini sağlayabilme ve kavramlar arasındaki bağlantıyı öğrencilere de gösterebilme gibi göstergeleri içermektedir. Son bilgi boyutu olan *beklenmeyen olaylar bilgisi*, öğrencilerin sorularına ve yorumlarına hazır olma durumunu ifade etmektedir. Öğrenci düşüncelerine nasıl karşılık verileceği, öğrencinin muhtemel sorularının tahmin edilebilmesi, öğrencinin soru ve düşüncelerinin konunun önemli noktalarının öğretimi için fırsata dönüştürülebilmesi gibi durumlar *beklenmeyen olaylar bilgisi* kapsamında yer almaktadır.

- Ball ve diğerleri (2008), Shulman’dan (1986) yola çıkarak matematiğe özgü olan “Öğretim için Matematik Bilgisi (ÖMB)” modelini ortaya koymuştur. Bu modelle bir öğretmenin diğer bireylerden farklı olarak konu ile ilgili sahip olmaları gereken bilgi alanları sınıflandırılmıştır. Bu modelin Shulman (1986) modelinin bir alternatifi olmadığını aksine daha derin anlayış oluşturmak için o modeli detaylandırmak için yapılan bir çalışma olduğunu belirtmişlerdir. Ball ve diğerleri (2008), ÖMB modelini alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi olarak iki başlığa, bunları da kendi içinde üçer alt başlığa ayırmıştır. Shulman’ın (1986) aksine, program bilgisi ayrı bir bileşen değil PAB’ın bir alt bileşeni olarak ele alınmıştır. Modele ait alt bileşenler Şekil 2’de yer alan görselde sunulmuştur:



Şekil 2. ÖMB modeline ait bileşenler (Ball, Thames ve Phelps; 2008)

Şekil 2’de görüldüğü gibi öğretmen bilgisine yönelik bilgi tabanları Shulman’dan (1986) bu yana değişiklikler göstermiştir. Ancak genel olarak bakıldığında *öğretmen bilgisinde* Ball, ve diğerlerinin (2008) ana bileşenlerinde belirtildiği gibi “alan bilgisi (konu alan bilgisi)” ve “pedagojik alan bilgisi” olarak iki temel bilgi türünün varlığı söylenebilir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının alan ve pedagojik alan bilgileri incelenirken yukarıda listelenen araştırmalarda bu iki bilgi türü ile ilgili yapılan açıklamalar ve sınıflandırmalar göz önüne alınmıştır. Alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi ve çalışmada ele alınacak olan PAB bileşenleri ile ilgili detaylı bilgiler sonraki bölümlerde yer almaktadır.

2.1.1. Alan bilgisi

“Alan bilgisi nedir?” sorusunun cevabı tekrar verilecek olursa Shulman’a (1986) göre öğretmen bilgisinin temel bileşenlerinden biridir ve esas olarak konunun bilgisine ve onun organizasyon yapısına atıfta bulunur. Öğretmenlerin konuyu anlamalarını, konunun

önemli yapılarının farkındalığını içerir ve olgusal bilginin ötesine geçer (Petrou ve Goulding, 2011). Benzer şekilde, matematikte alan bilgisi, hem cebir, geometri, sayı ve veri gibi matematiğin çeşitli dallarının temel olgusal bilgilerini hem de matematiğin yapısal ve organize edici ilkelerinin kavramsal bilgisini içerir (Blömeke ve Delaney, 2012). Ayrıca, öğretmenler alan bilgilerinin bir parçası olarak hem “bir şeyin böyle olduğunu” hem de “neden böyle olduğunu” anlamaları gerekmektedir (Yang, Kaiser, König ve Blömeke, 2020). Ball’a (1991) göre alan bilgisi kapsamında öğretmenler matematiksel konuların epistemolojisini, bu konuların öğretiminde kullanılan tanımları, kavramların birbirleriyle ilişkilerini, kuralları, bu kuralların gerekçelerini, formülleri ve ispat yöntemlerini de bilmelidir. Matematiksel kavramları öğretebilmek için kritik önemde olan derin ve esnek içerik bilgisi olarak da belirtilebilir.

Alan bilgisinin ne olduğunun yanı sıra ne derece önemli olduğu da araştırılmaktadır. Pek çok araştırmacı, etkili bir matematik öğretimi için alan bilgisinin rolüne dikkat çekmiş ve öğretmen eğitiminde alan bilgisinin gelişimine yoğunlaşılması gerektiğini belirtmiştir (Ball, 1990; Ball ve diğerleri, 2008; Beswick, 2012). Etkili bir matematik öğretmeni olmanın ön koşulu, matematik bilgisi açısından kendine güven ve yetkinliktir (Burghes ve Geach, 2011). Rowland ve diğerleri (2009) benzer şekilde matematik alan bilgisinin, matematik öğretimi için kritik bir nitelikte olduğunu ve öğretmenlerin öğretirken aldıkları kararların temelini oluşturduğunu belirtmiştir. Alan bilgisinin genişliği ve derinliği fazla olan öğretmenler farklı matematiksel fikirler arasında bağlantı kurabilirler; öğretirken etkili stratejileri seçip kullanabilirler, kavram yanılgılarını giderebilirler ve oluşmasını önleyebilirler. Bunun yanı sıra öğretim sırasında matematiksel dili iyi kullanabilirler (Askew, Brown, Rhodes, Wiliam ve Johnson, 1997; Cohen ve diğerleri, 1993). Alan bilgisi yetersiz veya yüzeysel olan öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerini de yeterince kullanamayacağı söylenebilir. Bazı materyalleri kullanmakta zorluk yaşayabilirler, öğrencilerin sorularını cevaplamada yetersiz kalabilirler ve öğrencilerin yanlış öğrenmelerine de sebep olabilirler (Davis, 2003). Norton (2019), öğretmenlerin matematik alan bilgisinin, çocukların matematikteki akademik sonuçlarının iyileştirilmesi için kilit bir odak alanı haline geldiğini belirtmiştir. Öğretmenlerin matematik bilgilerinin desteklenmesinin altında yatan şeyin daha fazla matematik bilen öğretmenlerin muhtemelen onu daha iyi öğreteceği şeklindeki basit düşünceden kaynaklandığını ileri sürmüştür. Bu düşüncüyü destekler bir araştırmada, Gess-Newsome (2013), öğretmenlerin alan bilgisinin öğrenci başarısını anlamlı ve olumlu bir şekilde yordadığını göstermiştir.

Alan bilgisinin kapsamı ve alt bileşenleri ile ilgili çeşitli tartışmalar söz konusudur. Birçok kişi, matematik öğretmenlerinin etkili bir şekilde öğretmeleri için alan bilgisinin birincil öneme sahip olduğuna inanır; ancak bu bilgiyi neyin oluşturduğunu konusunda bazı

anlaşmazlıklar vardır (Borko ve diğerleri, 1992). “Bir öğretmen kendi alanının ne kadarını bilmelidir? Bir ortaokul matematik öğretmeni alan bilgisi kapsamında diferansiyel denklem, soyut cebir, lineer cebir gibi üniversite matematiği derslerine de hâkim olmalı mıdır? Yoksa sadece öğreteceği kapsamı bilmesi yeterli midir?” gibi sorular bazı araştırmacıların alan bilgisini alt bileşenlere ayırmasına neden olmuştur.

Ball ve diğerleri (2008) alan bilgisini, “genel alan bilgisi, uzmanlık alan bilgisi, kapsamlı alan bilgisi” olarak üç başlıkta açıklamışlardır.

- Genel alan bilgisi (GAB), herhangi bir öğrenci tarafından öğrenilen öğretim dışındaki ortamlarda da kullanılan matematiksel bilgi ve beceriler olarak söylenebilir. Derinlemesine bilgi sahibi olmayan ancak konuya hâkim olan bir fizik öğretmeni, bir öğrenci veya bir mühendisin de işlemler yapabilmesi ve çıkarımlarda bulunabilmesi bu bilgi türü ile değerlendirilebilir. Hill ve Ball (2004), “35 x 25'i doğru bir şekilde hesaplayabilmek, 10'un hangi kuvvetinin 1'e eşit olduğunu belirlemek, rutin problemleri tatmin edici bir şekilde çözmek vb.” gibi yeterlikleri GAB ile bağdaştırmıştır. Ball ve diğerleri (2008), bir matematik öğretmenin matematiksel tanımları yapabilmesini, terimleri ve notasyonları doğru biçimde ifade edebilmesini, genel matematiksel işlemler yapabilmesini ve öğrencilerin matematiksel yanlışlarını fark edebilmesini GAB bileşeni kapsamında değerlendirmiştir.
- Uzmanlık alan bilgisi (UAB) ise sadece öğretim için gerekli olan, herhangi başka bir meslekte kullanılmayan matematiksel bilgi ve becerileri kapsamaktadır. Aslan Tutak ve Köklü (2016), bu bilgi türü ile ilgili çeşitli örnekler vermiştir: Ortaöğretimde sinüs fonksiyonunun grafiğini çizen öğretmenin görüntü kümesinin esasen birim çemberdeki dik üçgenin sinüs oranından geldiğini bilmesini diğer mesleklerde önem arz etmeyen ama öğretmenlik mesleğine özgü bir bilgi olarak nitelemiştir. Kesirlerde bölme işlemi yaparken ikinci kesri ters çevirip çarpmayı GAB ile açıklarken, bu kuralın neden işe yaradığını ve bunun altında yatan matematiksel fikri bilmeyi UAB ile bağdaştırmıştır. Hill ve diğerleri (2004), UAB'nin “farklı türdeki görevlerde kullanılacak olan temsilleri seçme, açıklama, öğrenci yanıtlarını yorumlama, öğrenci anlayışlarını değerlendirme, öğrenci zorluklarını analiz etme, müfredat materyallerinin doğruluğunu ve yeterliliğini değerlendirme” gibi görevler sırasında kullanıldığını bildirmiştir.
- Kapsamlı alan bilgisi, öğretim programında yer alan konuların nasıl ilişkili olduğuna dair bir farkındalık içerir. Matematiğin bütünselliği ile ilgili bir bilgi türüdür. Bir öğretmen ortaokuldaki eğitim konusu ile lisede görülen fonksiyon

grafikleri veya türev konularının ilişkili olduğunu bilmelidir. Aslan Tutak ve Köklü (2016), kapsamlı alan bilgisine sahip bir öğretmenin önceki konulara dayanan bir öğretim yöntemi seçeceğini ve sonraki konular için de öğrencinin önünü açan bir ders ortamı oluşturacağını ifade etmiştir.

Alan bilgisini bir disiplini anlama düzeyleri ile ilişkilendirip anlamaya odaklanan farklı sınıflandırmalar da mevcuttur. Shulman (1986), bilginin yapısını anlamlandırmak için Bloom (1956), Gagne (1985) ve Schwab (1978) gibi bilim insanlarının bilişsel modellerine atıfta bulunmuştur. Matematik alanında da matematiksel bilginin doğasına özgü sınıflandırmalar mevcuttur. Bunlardan biri olan Skemp (1976), kavramsal ve işlemsel anlama olmak üzere matematiksel bilgiyi anlamayı iki alt bileşende ele almıştır. İşlemsel anlama matematiksel yöntemleri, işlemleri, kuralları ve algoritmaları içermektedir. Kavramsal anlama ise alanda yer alan kavramların anlamlarını, kavramların kendi aralarındaki ilişkileri, kuralları, genellemeleri ve işlemlerin arka planındaki matematiksel anlamları içermektedir.

Shulman'ın (1986) alan bilgisi kavramı ile Perkins ve Simons'un (1988) "bir disiplini anlama düzeyleri" olarak da bahsedilen *dört çerçeve modeli* birbirleriyle uyumludur (Rachel,1995). Perkins ve Simons (1988), bir alanın derinlemesine anlaşılmasını, birbirine kenetlenmiş dört bilgi düzeyini içerecek şekilde sınıflandırmıştır. Her biri kendi içinde tutarlı ve diğerlerinden kısmen bağımsız olan bir şema sistemini hatırlatması için "çerçeve" kavramını kullanmıştır. Bu çerçeveler şunlardır:

- *İçerik (Content) çerçevesi*: Bir konuda yer alan tanımları, işlemleri, algoritmaları izleme veya ezberleme ve hatırlama stratejileri gibi içerik odaklı üstbilişsel bilgileri içerir. Çerçeve ile ilişkilendirilen performanslar, kuralların ve kavramların hatırlanması, uygulanması ve söz konusu alanın kelime dağarcığı kullanılarak örneklerin doğru tanımlanmasıdır.
- *Problem çözme çerçevesi*: Alana özgü ve genel problem çözme stratejilerini, problem çözmeyle ilgili inançları ve problem çözme sırasında kendini organize tutmak için oto-düzenleyici süreçleri içerir. Burada yine ilişkilendirilen performanslar vardır. Bunlar geleneksel ders kitabı problemlerinin ve "nitel" problemlerin çözümüdür.
- *Epistemik çerçeve*: Bu çerçeve, alandaki önermelerin doğrulanmasına ilişkin alana özgü ve genel normları ve stratejileri içerir. İyi gelişmiş bir alan içinde, kavram çerçevesindeki "olgular", epistemik çerçevedeki normların ölçüsü ile geçerlidir. Bu çerçeve ile ilişkilendirilen performanslar kanıt yapmak, gerekçe açıklamak ve önermelerin doğruluğunu kontrol etmektir.

- *Araştırma Çerçevesi:* Bu çerçeve, belirli bir alandaki bilgiyi genişletmek ve sorgulamak için çalışan alana özgü ve genel inançları ve stratejileri içerir. Bu çerçevede gösterilecek olan performans alanının sınırlarını sorgulayan eleştirel ve yaratıcı düşünmedir.

Perkins ve Simons (1988) her çerçevenin çeşitli bilgi türleri içerdiğini, kavram çerçevesinde bile üstbilişsel veya stratejik olarak tanımlanabilecek bilgi türlerinin olduğunu belirtmiştir. Bir disiplindeki konunun anlaşılabilmesi için dört çerçeveden de gelen bilgilere ihtiyaç duyulacağını ifade etmiştir.

2.1.1.1. Kinach (2002a) anlama düzeyleri

Kinach (2002a), Perkins ve Simons'ın (1988) dört çerçeve modelinde yer alan içerik çerçevesini yüzeysel bilgilerle sınırlamıştır. Skemp (1976)'ın işlemsel ve ilişkisel anlama kavramlarını göz önüne almış ve ilişkisel anlamayı dört başlıkta incelemiştir. Perkins ve Simons'ın (1988) problem çözme, epistemik ve araştırma düzeylerinin öncesine daha derin bilgiyi içeren, ezberlenmiş bilgilerin ve rutinlerin ötesinde olan kavramsal bilgiyi de koymuştur. “Çerçeve” yerine “düzey” kelimesini kullanmıştır. Ancak bu düzeylerin hiyerarşik olmadığını, bir bilgi türünün diğerine göre daha iyi olmadığını belirtmiştir. Skemp (1976), Perkins ve Simons (1988) ve Kinach (2002a) tarafından oluşturulan anlama düzeyleri Tablo 1’de yer almaktadır:

Tablo 1

Anlama düzeyleri ile ilgili sınıflandırmaların karşılaştırılması

Skemp (1976)	Perkins ve Simons (1988)	Kinach (2002a)
İşlemsel Anlama	İçerik Çerçevesi	Konu Düzeyi (KND)
Kavramsal (İlişkisel) Anlama		Kavram Düzeyi (KVD)
	Problem Çözme Çerçevesi	Problem Çözme Düzeyi (PÇD)
	Epistemik Çerçeve	Epistemik Düzey (EPD)
	Araştırma Çerçevesi	Araştırma Düzeyi (ARD)

Perkins ve Simons (1988) ile Kinach (2002a) anlama düzeyleri karşılaştırıldığında son üç düzeyin aynı olduğu görülmektedir. Ancak Kinach (2002a), içerik çerçevesini işlemsel anlama içeren “konu düzeyi” ve kavramsal anlama içeren “kavram düzeyi” olarak iki ayrı başlıkta incelemiştir. Kinach'ın (2002a) “anlama düzeyleri” ve hangi bilgi türlerini içerdikleri Tablo 2’de özet halde yer almaktadır:

Tablo 2

Kinach (2002a) Anlama Düzeyleri

	İŞLEMSEL ANLAMA (Skemp,1976)	İLİŞKİSEL ANLAMA (Skemp,1976)
ANLAMA DÜZEYLERİ	Konu Bilgisi Düzeyi (Content) Algoritmalar, terimler, kurallar, işlemler bilgisi ve yüzeysel beceriler	Kavram Bilgisi Düzeyi (Concept) Matematikte tanımlar, kavramlar arası ilişkiler ve sınıflamalar bilgisi Problem Çözme Düzeyi Konuya özgü veya genel stratejileri kullanabilme, sonuç çıkarma, tümdengelimsel düşünme, özel problem çözme teknikleri, matematiksel modelleme gibi analitik stratejiler kullanma Epistemik Bilgi Düzeyi Kuralların altında yatan mantıksal gerekçelendirmeler ve ispatlamalar Araştırma Düzeyi Yeni bir kuramsal çerçeve veya teorem ortaya atma

Kinach (2002a), tam sayılarda toplama çıkarma ile ilgili öğretmen adaylarının öğretimsel açıklamalarını incelemiştir. Öğretmen adaylarının ders içindeki öğretimsel açıklamalarının kendi anlamalarına ve dolayısıyla alan bilgilerine ışık tutacağı düşüncesiyle “Anlama Düzeyleri” modelini kullanmıştır. Öğretmenlerin tanımları ve kuralları doğrudan ifade etmesi “konu” düzeyinde bir açıklama görülürken; tanım, kavramlar arası ilişkiler ve işlemlerle ilgili açıklama yapmaları “kavram” düzeyinde ele alınmıştır. Öğretmen adaylarının açıklama yaparken problem durumlarından yararlanmaları, modelleme kullanmaları “problem çözme” düzeyini; kuralların ve açıklamaların gerekçelerini ispatlamaları da “epistemik” düzeyi işaret etmektedir. Son olarak öğretmen öğrencileri yeni problem kurmaya veya yeni olan matematiksel ilişkileri keşfetmeye yönlendiriyorsa “araştırma” düzeyinde olduğu ele alınmıştır. Kinach’ın (2002a) aslında bu çalışmayla öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerini ön plana aldığı söylenebilir. Ulusal çalışmalarda da Toluk Uçar (2011), Alkan (2016), Baki (2013) öğretmenlerin veya öğretmen adaylarının ders içindeki öğretimsel açıklamalarına odaklandığı ve *anlama düzeyleri modelini* bu doğrultuda kullandıkları görülmüştür. Ancak Kinach (2002a) ve Perkins ve Simons’da (1988) belirttiği üzere model matematiksel bilginin farklı derinliklerini ayırt etmek için kullanışlıdır. Baki (2013), modelin öğretimsel açıklamaları alan bilgisine bağlı olarak değerlendirdiğini belirtmiştir. Dolayısıyla bu modelden yararlanarak öğretmenlerin ders içinde yaptığı öğretimsel açıklamalarından alan bilgilerini veya pedagojik alan bilgilerini yorumlamak yerine doğrudan alan bilgisini incelemenin daha rahat sonuçlar vereceği söylenebilir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının sayılar ve işlemler öğrenme alanındaki alan bilgileri doğrudan her bir anlama düzeyi ile

ilgili hazırlanan testlerle incelenmiştir. Ancak Uçar (2011) ve Baki'nin(2013) çalışmalarında olduğu gibi “araştırma düzeyi” inceleme dışında bırakılmıştır. Araştırma düzeyinde anlama, bir disiplinde yeni bilgi veya teorilerin üretilmesini ifade eder (Perkins, 1992; Perkins ve Simmons, 1988). Problem kurma ve teori oluşturma, neyin incelenmeye değer olduğu ve nasıl çalışılması gerektiğine ilişkin değer yargıları araştırma düzeyine aittir (Donald, 1991). Bu nedenle kısa süreli gözlem, görüşme veya yazılı verilerle değerlendirilmesinin ve ortaya çıkarılmasının zor olduğu söylenebilir.

Alan veya pedagojik alan bilgisi ile ilgili inceleme yapan Alkan (2016), Gökkurt Özdemir ve Soylu (2017) ile Gökkurt, Şahin ve Soylu(2012) öğretimsel açıklamalardan yola çıkarak katılımcıların anlama düzeylerini ortaya koymaya çalışmış ve bu çalışmalarda yer alan hiçbir katılımcıda “araştırma” düzeyinde herhangi bir açıklamaya rastlanmadığı görülmüştür.

Bu çalışmalar da göz önüne alınarak öğretmen adaylarının alan bilgileri, işlemsel anlamaya karşılık gelen konu düzeyi ve ilişkisel anlamaya karşılık gelen kavram düzeyi, problem çözme düzeyi ve epistemik düzeylerle ilgili oluşturulan testlerle incelenmeye çalışılmıştır. Aşağıda her bir bilgi türü ile ilgili açıklamalar ve bu bilgi türlerindeki yeterlikleri değerlendirmek için çalışmada kullanılan yardımcı kuramsal çerçeveler tanıtılacaktır.

2.1.1.1.a. Konu (content) bilgi düzeyi

Matematiksel terimlerin, algoritmaların, kuralların, işlemlerin bilgisi ve yüzeysel beceriler konu bilgi düzeyinde yer almaktadır. Bu düzeydeki bilgilerin derinliği yoktur. İşlemlerin arkasında yatan nedenler bilinmeden algoritmalar ve kurallar matematiksel işlemlerin yürütülmesinde bir araç olarak kullanılır. Öğrenciler tarafından aktif olarak edinilmeyen, ancak onlara bilgi veya izole beceriler şeklinde verilen bu tür "bilgi", matematik veya herhangi bir disiplin hakkında sahip olunabilecek en yüzeysel anlayıştır (Kinach, 2002a). Bölme işlemini sadece “konu” düzeyinde anlayan bir öğrenci algoritmayı adım adım yapabilmekte ancak bölmede yer alan kavramların birbirleriyle ilişkisini anlayamamaktadır.

Basamak ve bölük isimlerini hatırlama, bir sayıyı çözümleyebilme, işlem önceliğini dikkate alarak işlemleri yapabilme, bölünebilme kurallarını uygulayabilme, bir sayıyı asal çarpanlarına ayırabilme, birden fazla sayının ortak kat ve ortak bölenini bulabilme, sayı kümelerindeki sayıları tanıyabilme gibi temel düzeydeki beceriler konu bilgi düzeyinde yer almaktadır. Bu uygulamaları yapabilmek için kişinin derinlemesine bir bilgiye sahip olmasına gerek olmadığı söylenebilir. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının konu bilgi düzeyleri işlemsel anlama kapsamında yüzeysel beceri gerektiren sorularla ölçülmüş ve böylece alan bilgisinin bir bileşenine yönelik bilgi toplanmıştır.

2.1.1.1.b. Kavram (concept) bilgi düzeyi

İlişkisel anlama genel olarak matematiksel fikirlerin, işlemlerin ve bu matematiksel fikirler arasındaki ilişkilerin anlaşılmasıdır [National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000]. İlişkisel anlamanın ilk aşaması olan “kavram bilgi düzeyi” tanımlamaları, kavramlar arası ilişkileri ve sınıflamaları içerir. Bu düzeydeki birey matematikte yapılan tanımları, çözüm aşamalarını ve genellemeleri açıklayabilir ve bunlarla ilgili incelemeler yapabilir (Baki, 2013).

Konu düzeyinden daha derin olan kavram düzeyi incelenen disiplinde yer alan kavramların bilgisini içerir. Öğrenciler kavram düzeyinde çalışırken, örüntüleri ve ilişkileri tanımlayabilir; kavramlara ait sınıflandırmaları yapabilir. Kavram bilgi düzeyindeki kavram bilgisinin, konu bilgi düzeyinde yer alan terim bilgisinden farklı olduğu söylenebilir. Bu düzeyde bilgi doğrudan edinilmez, oluşturulur (Kinach, 2002a).

Kavram bilgi düzeyi, tanımlamalar bilgisi ve kavramlar arası ilişkiler bilgisi olarak iki kısımda incelenebilir. Rasyonel sayı, irrasyonel sayı, asal sayı, oran, orantı, kesir, mutlak değer gibi kavramların tanımlamaları uygun ve titiz (Zazkis ve Leikin, 2008) bir şekilde yapılabilir; tanımda kavramı ortaya çıkaracak olan gerek ve yeter şartlara dikkat ediliyorsa kavramsal bir bilgidir söz edilebilir. Benzer şekilde sayı kümelerinin birbirleriyle olan ilişkisi, doğru orantı ve ters orantı ilişkisi, oran-kesir ilişkisi, çarpan-kat-bölen ilişkisi gibi kavramlarla ilgili daha derin bir anlayış gerektiren bilgilerin kavram bilgi düzeyinde yer aldığı söylenebilir.

Bu çalışmada kavram bilgi düzeyi kapsamında öğretmen adaylarına bazı kavramların tanımları sorulmuş ve öğretmen adaylarının yapmış oldukları tanımlamalar Zazkis ve Leikin (2007, 2008) tarafından oluşturulan “Öğretmen Tanımlarının Analizi” kriterleri ile incelenmiştir. Kavram bilgi düzeyinin önemli sayılabilecek bir kısmını oluşturan tanımlamaların nasıl olması ile ilgili oluşturulan çerçeve bu bölümde detaylı açıklanmıştır:

Matematiksel tanımlar gerek öğrenme gerekse öğretme sürecinde oldukça önemlidir. Bir kavramın doğru tanımlanması sonrasında öğretilecek olan teoremleri ve yapılacak ispatları; dolayısıyla öğretim sürecinin tamamını olumlu yönde etkiler (Zazkis ve Leikin, 2008). Tanımların öğrencilere sunulma biçimleri öğrencilerin düşünme süreçlerini etkiler. Kavram imajı ile kavram tanımı arasındaki ilişkiyi şekillendirir (Tall ve Vinner, 1981; Vinner, 1991). Zazkis ve Leikin (2008) öğretmen tanımlamalarının dört alt kategoride analiz edilebileceğini belirtmiştir. Bunlar; erişilebilirlik, doğruluk, zenginlik ve genelliktir.

Tablo 3

Öğretmen tanımlarının analizi teorik çatısına ait kriterler

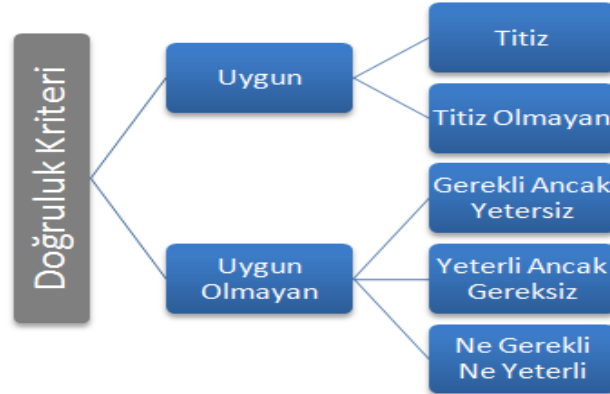
Kriterler	Temel Sorular	Analiz Edilecek Veri
Erişilebilirlik	Tanımdan kavrama kolaylıkla ulaşılabilir mi, yoksa uğraşmak mı gerekiyor? Verilen örnekler yapılan tanımla tutarlı mı?	Sözlü
Zenginlik	Tanımlar hep aynı türden mi? Bir türde herhangi bir sıklık var mı? Rutin veya rutin olmayan türde bir tanım mı?	Sözlü ve Yazılı
Doğruluk	Matematiksel olarak doğru mu? (Verilen şartlar gerekli veya yeterli mi?) Tanım şık mı? Minimal mi?	Sözlü ve Yazılı
Genellik/Somutluk	Yapılan tanım kavrama göre çok mu genel yoksa çok mu spesifik?	Sözlü

Zazkis ve Leikin (2007, 2008 ve 2010), Tablo 3'te belirtilen kriterlerden erişilebilirlik ve genellik kriterinin sözlü mülakat veya ders gözlemi gibi yöntemlerle değerlendirilebileceğini belirtmiştir.

Zenginlik kriteri ise kavram örneklerinin tür ve yapı bakımından farklılık gösterip göstermediği, belirli bir bağlamda bulunup bulunmadığı veya farklı bağlamlardan alınmış olup olmadığı ile ilgilidir. Örneğin, karenin tanımı yapılırken öğrenciler kenar ve açı özelliklerinden yola çıkarak tanım yapıyorken, bir öğrencinin “Kare, köşegenleri birbirini dik ortaltayan yamuktur.” şeklindeki tanımı zenginlik göstergesidir. Benzer şekilde karenin tanımını analitik geometri bağlamında yapması da zenginlik bileşeni kapsamında değerlendirilebilir. Sadece tanımlar değil o tanıma ait verilen örnekler de zenginlik için bir gösterge sayılabilir. İrrasyonel sayı ile ilgili tanım yapan bir öğrencinin sadece kareköklü sayılardan örnekler vermesi bu kriter bakımından olumsuz iken kareköklü sayıların yanı sıra ondalık temsili veya π sayısını da kullanması olumludur. Bu kriter sözlü ve yazılı verilerle incelenebilir.

Doğruluk kriteri, bir tanımın gerek ve yeter şartları sağlayıp sağlamadığı ile ve tanımın minimallliği (kavrama en az sayıda bilgilerle, gereğinden fazla özellik verilmeden ulaşılması) ile ilgilidir. Zazkis ve Leikin (2008) kare kavramını, Zazkis ve Leikin (2010) ise çember, fonksiyon ve türev gibi farklı kavramları doğruluk ve zenginlik kriterleri bağlamında örneklendirmiştir. Çalışmalarda doğruluk kriteri gerek ve yeter şartların

sağlanıp sağlanmamasına ve tanımın minimalliğine göre Şekil 3'te yer alan alt kategorilere ayrılmıştır.



Şekil 3. Doğruluk kriterinin alt kategorileri

Gerek ve yeter şartların her ikisinin de yer aldığı tanımlar *uygun*, en az birinin eksik olduğu tanımlar ise *uygun olmayan* tanımlar olarak değerlendirilmektedir.

Uygun ve *titiz* tanımlar, kavramın gerekli ve yeterli koşullarını sağlamakla birlikte doğru matematiksel terminoloji ve sembolleri içermektedir. Ayrıca bu tanımlar genellikle minimaldir. “Genellikle” denmesinin nedeni de minimalliği önemli derecede bozmayan tanımlar da *uygun* ve *titiz* olarak ele alınmaktadır. Zazkis ve Leikin (2008), karenin tanımı için, “4 kenarı eşit dikdörtgendir.” ve “4 dik açıya sahip eşkenar dörtgendir.” tanımlarının minimal olmadığını belirtmiştir. Çünkü tanımlarda tüm açılarını ve tüm kenarlarını belirtmeye gerek yoktur. “Komşu iki kenarı eşit dikdörtgendir” ve “bir açısı dik olan eşkenar dörtgendir.” tanımları da kavramı karşılamaktadır. Ancak birçok matematik kaynağında ve sözlüklerde minimalliği sağlamak yerine daha şık ve daha kolay akılda kalıcı tanımların yer aldığını belirtmişlerdir. Bu nedenle minimalliği bariz bir şekilde delmeyen tanımları “neredeyse minimal” olarak değerlendirmişler ve bu tanımları da *uygun* ve *titiz* kategorisinde ele almışlardır.

Uygun ancak titiz olmayan tanımlar, gerek ve yeter şartları sağladığı halde dikkat eksikliği ya da matematiksel dildeki hatalı kullanım nedeniyle yanlış terminoloji içeren ya da bazı kısıtlamaları atlayan tanımlardır. Minimalliği ciddi şekilde bozan tanımlar da bu kapsamda değerlendirilmektedir. “ $a^n = a.a.a \dots a$ (n tane)” tanımında n’in doğal sayı olması gerektiğinin söylenmemesi titizliği bozmaktadır. “Tüm açıları 90° olan ve köşegenleri eşit uzunlukta olup birbirini ortalayan dörtgenlere dikdörtgen denir.” tanımı da minimallik kriterine uymamaktadır. Verilen iki özellikten herhangi birinin verilmesi kavramı tanımlamak için yeterlidir.

Uygun olmayan tanımlar ise üç alt başlığa ayrılmıştır. Bunlar *gerek şart olmayan*, *yeter şart olmayan* ve *gerek ve yeter şart olmayan* tanımlardır.

- i) Tüm kenarları 5'er cm olan dörtgene eşkenar dörtgen denir.
- ii) Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgene eşkenar dörtgen denir.
- iii) İki dar ve iki geniş açiya sahip dörtgenlere eşkenar dörtgen denir.

Yukarıdaki tanımlardan ilki bir eşkenar dörtgen oluşturmak için yeterlidir. Ancak gereksiz bir kısıtlamaya gitmekte ve eşkenar dörtgenin spesifik bir durumunu tanımlamaktadır. Bu nedenle ifade gerek şart değildir. Bu tür kavramın bir alt kümesini veya spesifik örneklerini temsil eden tanımlar gerek şart olmayan tanımlar olarak ele alınmaktadır.

İkinci tanım ise eşkenar dörtgenin bir özelliğini vermesine rağmen, bu özellik eşkenar dörtgen oluşturmak için yeterli değildir. Eşkenar dörtgenden daha genel olan paralelkenar kavramını işaret etmektedir. Bu nedenle ifade yeter şart değildir. Bu şekilde kavramın sadece belirli bir özelliğini yansıtan ve kavramdan daha genel bir üst kümeye götüren tanımlara yeter şart olmayan tanım denilmektedir.

Üçüncü tanımda ise bir yandan gereksiz bir kısıtlama mevcutken (eşkenar dörtgenin açıları 90'ar derece de olabilir.), bir yandan da kavrama ulaştıracak yeterlikte özellikler verilmemiştir. Verilen özellikte sıradan bir dörtgen de çizilebilir. Bu tür kavrama ulaştıramayan ve kavramın bir özelliğini yansıtmayan ifadeler *gerek ve yeter şart olmayan* tanımlar kategorisinde ele alınmaktadır.

Bu çalışmada da sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait bazı kavramların tanımları yazılı bir şekilde öğretmen adaylarından istenmiştir. Böylece kavram bilgi düzeyinin en temel sayılabilecek göstergelerinden biri olan tanımların bilgisi Zazkis ve Leikin'de (2008, 2010)'da yer alan "öğretmen tanımlarının analizi" teorik çatısına göre incelenebilmiştir.

2.1.1.1.c. Problem çözme (content) bilgi düzeyi

Kavramları, tanımlarını ve birbirleriyle olan ilişkilerini bilmenin yanı sıra bir disiplini anlamanın en önemli göstergelerinden birinin de o disipline ait bir problemin üstesinden gelebilmek olduğu söylenebilir. Kinach'a (2002a) göre problem çözme düzeyinde anlama, bilim adamlarının ve öğrencilerin matematiğin veya herhangi bir disiplinin bulmacalarını, sorularını ve ikilemlerini oluşturmak ve çözmek için kullandıkları analitik araç ve yöntemleri ifade eder. Genel problem çözme ve çıkarım, tümdengelimli düşünme gibi analitik stratejiler veya matematiksel modelleme gibi daha disipline özgü problem çözme teknikleri bu seviyeye aittir. Bu seviyeye ayrıca kişinin kendi düşüncesini izlemesi için üstbilişsel stratejiler dahildir (Perkins, 1992). Problem çözme bilgi düzeyi kapsamında öğretmenler; matematiksel bir konu, kavram, özellik veya problemler ilgili özgün, bilimsel yorum yapabilirler ve stratejiler geliştirebilirler (Baki, 2013). Bu bilgi türü kapsamında bir öğretmen matematiksel modelleme gibi analitik stratejiler kullanma ve

kavramın ya da sembollerin farklı anlamlarını bir problem durumu içerisinde şekil ile rahatlıkla destekleyebilme gibi özelliklere sahiptir (Toluk Uçar, 2011).

NRC (2001)'de yer alan ve Sabey (2009) tarafından Kinach'ın (2002a) problem çözme bilgi düzeyi ile ilişkili olduğu belirtilen “stratejik yeterlilik”, “verilen bir problemi tahmin etme ve kontrol etme, örüntüleri arama, geriye doğru çalışma ve aritmetik ve/veya cebirsel notasyon uygulama gibi çeşitli tekniklerle çözme yeteneği” olarak tanımlanmıştır. Yaklaşımın esnekliği, rutin olmayan sorunları çözmek için önemli bir bilişsel gerekliliktir.

Alan bilgisinin bir bileşeni olarak incelenen problem çözme bilgi düzeyini değerlendirebilmek oldukça zordur. Çünkü yanlış düşünceyle doğru sonuca ulaşmak mümkünken mükemmel bir strateji yürütülse de doğru sonuca ulaşamayabilir. Bu çalışmada da problem çözme bilgi düzeyini inceleyebilmek için öğretmen adaylarına sayılar ve işlemler öğrenme alanı kapsamında çeşitli problemler sorulmuştur. Test ve değerlendirme yöntemi ile ilgili bilgiler ilerideki bölümlerde verilmiştir.

2.1.1.1.d. Epistemik (content) bilgi düzeyi:

Bu bilgi türü matematiksel kurallar ve bu kuralların gerekçelerini ifade eder. “Neden” sorusuna yanıt verir. Bu düzeyde anlayış sergileyen öğrenciler matematiksel düşüncelerini gerekçelendirebilirler. Ayrıca bilginin kaynakları; doğruluğunun nasıl kontrol edildiği, zaman içinde nasıl değiştiği; neyin kanıt sayılıp sayılmayacağı gibi faktörler de epistemik bilgi düzeyi kapsamındadır (Perkins ve Simmons, 1988). Epistemik bilgi düzeyinde yeterli bilgiye sahip öğretmenler bilginin kaynağının farkındadır ve bunun gerekçelerini de ifade edebilirler. Öğretmen, yaptığı açıklamalarında kuralın nedenini, altında yatan matematiksel prensipleriyle birlikte destekleyerek ifade edebilir (Toluk-Uçar, 2011). Ayrıca öğretmen tarafından matematiksel durumların veya önermelerin doğruluklarıyla ilgili ispatlarda gerek ve yeter şart kullanılarak, soyutlama ve formal çıkarımlar yapılabilir (Baki, 2013).

Sabey (2009), NRC (2001)'de yer alan "uyarlanabilir akıl yürütme" kavramının Kinach'ın (2002a) epistemik düzeyine denk olduğunu belirtmiştir. *Uyarlanabilir akıl yürütme*, kavram ve durumlar arasındaki ilişkiler hakkında mantıklı düşünme kapasitesine atıfta bulunur. Bu tür akıl yürütme, doğru ve geçerlidir, alternatiflerin dikkatli bir şekilde değerlendirilmesinden kaynaklanır ve sonuçların nasıl gerekçelendirileceği bilgisini içerir" (NRC, 2001).

Matematikte ispatlamanın önemi yadsınamaz (Knuth, 2002; Lee, 2002; Padraig ve McLoughlin, 2002; Coe ve Ruthven, 1994; Hanna, 2000; Martin ve Harel, 1989), matematik öğretmeni özellikle öğreteceği kuralların gerekçelerini ve ispatlarını bilebilmelidir. Öğrenci “neden?” sorusunu sorduğunda cevap verebilmelidir. Yoksa öğrenci tarafından matematik mantıksız kurallar bütünü olarak algılanabilir. Öğrenciler

matematiksel önermelerin ispatları yapılırken sadece formülleri bilmenin yeterli olmadığını ulaşılan sonuçların nedenleri ile açıklanması gerektiğini anlarlar (Güven, Çelik ve Karataş, 2005). Matematiksel ispatlar bir ifadenin sadece doğruluğunu değil aynı zamanda doğruluğunun nedenini de açıklar (Tall, 1998).

Sayılar ve işlemler öğrenme alanında da birçok kural öğrenciler tarafından ezberlenmektedir. Bölünebilme kuralları, kesirlerde yapılan işlemler, asal çarpanların çarpımı şeklinde yazılmış sayılarda EBOB EKOK bulma gibi öğretimin içinde yer alan işlemsel bilgilerin gerekçelerini bilen ve öğrencilere açıklayan öğretmen öğrencilerde de epistemik bilgi türünün gelişimini sağlayacağı söylenebilir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının epistemik bilgi düzeylerini ölçebilmek adına Healy ve Hoyles (2000) tarafından ortaya atılan argüman türleri ile Harel ve Sowder (1998) tarafından ortaya konulan ispat şemalarından yararlanılmıştır.

Healy ve Hoyles (2000); Balacheff (1988), Van Dormolen (1977) ve Coe ve Ruthven'in (1994) teorik çerçevelerinden yararlanarak bir çatı oluşturmuştur. Çalışmada argümantasyon kavramından bahsedilmektedir. Argümantasyon, bir teoriyi, eylemi, düşünceyi desteklemek için kullanılan mantıksal gerekçelerdir (Turnball ve diğerleri, 2010). “Bir şeyi açıklamak ya da insanları ikna etmek için kullanılan argümanlar” olarak da ifade edilebilir (McIntosh, 2013). Healy ve Hoyles’a (2000) göre argüman türleri şunlardır:

- a. Deneysel veya az açıklamalı veya hiç açıklama içermeyen somut gösterim veya eylem gerektiren argümanlar
- b. Genel özelliklere veya jenerik (kritik örnek) bir duruma dayanan argümanlar
- c. Açıklamalar içeren öyküsel (sözel) günlük dilde yazılmış argümanlar
- d. Formal stilde yazılmış tümdengelimli argümanlar

Öğretmen adaylarının formül veya önermelerle ilgili öğrencilere sunacakları gerekçelendirmeler Healy ve Hoyles’un (2000) argüman türleri ile; öğretmen adaylarının yaptıkları ispatlar veya ispatlama çalışmaları ise Harel ve Sowder (1998) tarafından geliştirilen ispat şemaları ile incelenebilir. Harel ve Sowder (1998) ispat türlerini; dışsal ikna, deneysel ve tümdengelimli olmak üzere üç sınıfa ayırmıştır. Her bir ispat şemasını kendi içinde alt sınıflara ayırmıştır. İspat şemalarındaki bu kategoriler, ispatlama sürecindeki öğrenci eylemlerinden oluşturulmuştur. Şemalar bir kişiye özel olmayıp bir kişi birden fazla şemaya da dahil olabilir. Harel ve Sowder (1998) tarafından geliştirilen ispat şemaları şunlardır:

1. *Dışsal ikna ispat şeması (External Conviction Proof Scheme)*: Birey sadece formülleri veya rutin kuralları kullanır, dışsal bir otorite olarak öğretmen veya kitaptan yararlanarak kendisini ya da başkalarını ikna etmeye çalışır. Üç alt şemada incelenebilir:

- Otoriteye dayalı ispat şeması (Authoritarian Proof Scheme): Sadece kitaplarda yazılanlar ya da öğretmenin söyledikleri temel alınır. Kişi, verilen bilgilere güvenir ve onları sorgulamaz. “Neden?” sorusu sorulduğunda “Daha önce öğretmenlerimizden böyle duymuştuk.” veya “Kitaplarda bu şekilde geçiyor.” şeklinde yanıtlar alınır.
- Alışkanlık edinilmiş ispat şeması (Ritual Proof Scheme): İspatın içeriğinden ziyade öğrenci ispatın biçimine ve görünüşüne dikkat ederek ikna olur. Gerekçelendirmenin sadece matematiksel notasyonlarla ve sembolik gösterimlerle olacağına inanır.
- Sembolik ispat şeması (Symbolic Proof Scheme): Sembollerin işlevi ve anlamı düşünülmeden, sembolik akıl yürütmeye yapılan ispatlardır. İspatın içerdiği sembolik muhakemelere dayalı olarak birey ikna olur. $2^5 \cdot 2^4 = 4^{20}$ veya $\cos(a+b) = \cos a \cos b$ örneklerinde olduğu gibi birey kavramın gerçek anlamını bilmeden yanlış ilişkiler kurabilmektedir.

2. *Deneysel ispat şemaları (Empirical Proof Schemes)*: Varsayımlar, fiziksel gerçekler ya da duyular yardımıyla oluşturulan deneylerle onaylanmaya çalışılır (kabul edilir ya da reddedilir). İki alt şemada incelenebilir:

- Tümevarımsal ispat şeması (Inductive Proof Scheme): bir veya daha çok örneğin doğru olduğunu göstererek yapılan, özel durumlara ya da örneklerle dayanan ispatlama çalışmalarıdır. “İki çift sayının toplamı da çift sayıdır.” önermesinin ispatı yapılırken birkaç çift sayı örneği ile genellemeye gidilmesi bu duruma örnek gösterilebilir. 3 ile bölünebilme kuralının ispatını yapmaya çalışan bir öğretmen sadece sayı örnekleri vererek durumu açıklıyorsa bu ispat şemasında yer aldığı söylenebilir.
- Algısal ispat şeması (Perceptual Proof Scheme): Bir konuda ilk öğrenme durumu sonucunda zihinde oluşan çıkarımlar kullanılarak gerekçelendirme yapılmaya çalışılır. Büyük oranda yetersiz kalınır. Algılara dayalı zihinsel imgeler kullanılır.

Bu şemadaki birey, iki rasyonel sayının arasında her zaman bir irrasyonel sayı bulunabileceğini sezgisel olarak düşündüğü halde buna matematiksel olarak güçlü bir kanıt gösteremeyebilir.

3. *Analitik ispat şemaları (Analytical Proof Scheme)*: Doğrulamalar mantık kullanılarak ve tümdengelimsel yollarla yapılır.

- Dönüşümsel ispat şeması (Transformational Proof Scheme): Amaca yönelik zihinsel işlemler uygulanır. Akıl yürütme süreci hakimdir. Tanımlar, teoremler ve nesneler arasında geçişler kullanılarak özelden genele doğru yapılan ispatlardır. Bu şemada genelleme, işlemsel düşünme ve mantıksal çıkarım mevcuttur. Tutarlı basamaklar söz konusudur.
- Aksiyomatik ispat şeması (Axiomatic Proof Scheme): Gerekçelendirme, genelleme, işlemsel düşünme ve mantıksal çıkarımın yanı sıra tanımsız terimler, aksiyomlar ve teoremler kullanılarak yapılır. Aksiyomatik bir sistem geliştirilir ve bu sistemi kullanarak teorem kanıtlanır.

Görüldüğü gibi ispat şemaları; tümevarım yöntemi, olmayana ergi, doğrudan ispat gibi ispat türlerinden değildir. Matematiksel olarak ispat sayılmayan söylemler de ispat şemalarında yer almaktadır. Bu çalışmada öğretmen adaylarının epistemik bilgi düzeyleri araştırılırken argüman türlerinden ve ispat şemalarından yararlanılmıştır.

2.1.2. Pedagojik alan bilgisi (PAB)

Carpenter, Fennema, Peterson ve Carey'e (1988) göre pedagojik alan bilgisi, öğrencilerin bir konuyu öğrenmeden önce sahip oldukları kavramsal ve işlemsel bilgileri, konuyla ilgili geliştirmiş olabilecekleri kavram yanlışlarını ve öğrenim sürecinde geçmeleri muhtemel olan anlama aşamaları ile ilgili bilgi türüdür. Ayrıca, öğrencilerin anlamalarını değerlendirme ve kavram yanlışlarını teşhis etme teknikleri bilgisini, öğrencilerin öğrendiklerini halihazırda sahip oldukları bilgilerle ilişkilendirmelerini sağlamak için ve kavram yanlışlarını ortadan kaldırmak için kullanılabilecek olan öğretim stratejileri bilgisini içerir.

Öğretmenler alan bilgisinin yanı sıra matematik konularını sınıf önünde öğretmek için yeterli pedagojik alan bilgisine de sahip olmalıdır. Öğrenciler çalışmalarını gösterdiklerinde, bir cevabın neden yanlış olduğunu sorduklarında öğretmenin açıklamaları yetersiz kalıyorsa burada bir sorundan bahsedilebilir. Öğretmenin pedagojik alan bilgisi yetersiz ise öğrencilerin konu ile ilgili kavram yanlışları tam olarak düzeltilemez. PAB, öğrenci başarısı için son derece önemlidir (Lenhart, 2010).

PAB'ın, Shulman'dan (1986) bu yana geliştirildiği ve ortaya atılan öğretmen bilgisi modellerinde farklı kategorilere ayrıldığı yukarıda belirtilmişti. Bu farklı kategoriler farklı çalışmalarda aynı anlama gelen farklı isimlendirmelerle de alanyazında yer almaktadır. Ayrıca alanyazın incelendiğinde çalışmaların bir kısmında pedagojik alan bilgisinin bütün olarak incelendiği, bazılarında ise sadece bazı bileşenlerinin ele alındığı görülmüştür. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının sayılar ve işlemler öğrenme alanındaki PAB'ları üç bileşen kapsamında incelenmiştir. Farklı araştırmacılarla yapılmış olan PAB

tanımlamaları, ortaya atılan PAB modelleri ve bu modellerle yapılmış olan uygulama çalışmaları göz önüne alınarak öğrenci bilgisi, öğretim stratejileri bilgisi ve program bilgisi bileşenleri doğrultusunda çalışma yürütülmüştür. Farklı isimlendirmelerle de ifade edilen bu bileşenlerin tanıtımı kısaca başlıklar halinde verilmiştir.

2.1.2.1. Öğrenci (öğrenciyi anlama / öğrenen) bilgisi bileşeni

Pedagojik alan bilgisi modellerinde öğrenci bilgisi bileşenine yönelik farklı sayıda adlandırmalar ve tanımlamalar mevcuttur. Shulman'a (1987) göre, öğrencilerin öğrenecekleri konu ile ilgili yanlışları, hataları, zorlukları ve bu zorluk ve yanlışların kaynaklarını belirleyebilmeye yönelik bilgi türüdür. Benzer şekilde Grossmann (1990), bu bileşeni öğrenci anlamalarına yönelik bilgi olarak isimlendirmiş ve bir konu ile ilgili öğrencilerin anlamalarına, kavrayışlarına ve kavram yanlışlarına yönelik bilgi türü olarak tanımlamıştır. Grossmann'a (1990) göre öğrenciye uygun bir öğretim sunabilmek için öğrencilerin sahip oldukları ön bilgilerin neler olduğunu ve öğrencilerin hangi durumlarda zorluk çekebileceklerini bilmek gerekir. Cochran, De Ruiter ve King'in (1993) bu kavramın kapsamını biraz daha genişlettiği söylenebilir. Öğrencinin yetenekleri, öğrenme stilleri, yaşlarına göre gelişim düzeyleri, tutumları ve motivasyonlarının bilgisini de "öğrencileri anlama bilgisi" bileşeninde değerlendirmiştir.

Ball ve diğerleri (2008), "alan ve öğrenci bilgisi" ismini verdikleri bu bilgi türünün öğrenciler hakkında bilgi ile matematik hakkında bilginin birleşiminden oluştuğunu ifade etmiştir. Öğretmenlerin öğrencilerin ne düşüneceğini ve neyi kafa karıştırıcı bulacaklarını tahmin etmeleri gerektiğini belirtmiştir. Alt alta çarpma işlemi yaparken öğrencilerin 1 adım sola kaydırmayı ihmal edebileceğini düşünebilmek bu bilgi türü kapsamında örneklendirilebilir. Sadece hata ve yanlışlar değil, herhangi bir matematiksel fikir hakkında öğrencilerin neler düşünebileceğini tahmin etme, öğrencilerce kolay anlaşılabilir veya zor anlaşılabilir durumların farkında olma, konuyla ilgili bir örnek verirken öğrencilerin neyi ilgi çekici ve motive edici bulacağını düşünebilme de bu bileşen kapsamında değerlendirilmektedir.

Hill, Ball ve Schilling (2008); bu bilgi türünü detaylandırmış ve bilgi türünü ölçebilmek için dört alt kategori belirlemiştir:

1. Yaygın öğrenci hataları: Öğrencilerin sık sık yaptığı hata türlerini bilme ve hangi tür içerik öğretiminin bu hataları tespit edici olduğunun farkına varma
2. Öğrencilerin konuyu anlaması: Öğrencilerin sonuçlarını değerlendirerek anlamayı göstermesi bakımından yeterli veya yetersiz olarak tanımlayabilme, hangi öğrencinin yaptıklarının daha iyi anlamayı gösterdiğine karar verme vb.

3. Öğrenci gelişim dizisi: Belirli yaşlara göre daha kolay/daha zor problem türlerini, konuları veya matematiksel aktiviteleri belirlemez. Öğrencilerin genellikle ilk önce neyi öğrendiğini bilme, hangi sınıf düzeylerinin ne yapabileceğini bilme vb.
4. Yaygın öğrenci hesaplama stratejileri: Öğrencilerin işlemleri yaparken hangi işlem veya tahmin stratejilerini kullandıklarını anlayabilme.

Baki, Çelik, Güler ve Sönmez (2018); yapılan çalışmalarda hizmet içi ve hizmet öncesinde öğretmen veya öğretmen adaylarının öğrenci bilgisi yönünden zorluk yaşadıklarını belirtmiş ve bu yönde çalışmaların artırılması gerektiğini ifade etmiştir.

2.1.2.2. Öğretim stratejileri bilgisi bileşeni

Pedagojik alan bilgisi modellerinde yer alan bileşenlerden biri “Öğretim Stratejileri Bilgisi” bileşenidir. Shulman (1987), öğrenci hataları ve kavram yanılgılarını giderebilmek için öğretim sırasında kullanılacak gösterimlerin, verilebilecek örneklerin ve öğrenciye yapılabilecek açıklamaların bilgisi olarak bileşeni tanımlamıştır. Grossmann (1990) benzer şekilde öğrencinin anlamasını arttırabilmek amacıyla verilebilecek olan örnekleri, izlenecek stratejileri, kullanılacak modelleri ve metaforları bu bileşen kapsamında ele almıştır. Tecrübeli öğretmenlerin etkili bir öğretim gerçekleştirebilmek için daha zengin bir repartuara sahip olduğunu da iddia etmiştir. Fennema ve Franke (1992), matematiksel içeriği öğrenciler tarafından anlaşılacak hale getirebilme becerisi olarak bu bileşeni ele almıştır. Bir matematikçi ile bir matematik öğretmenini ayıran şeyin matematiksel bilgiyi öğrenci seviyesine dönüştürebilme becerisi olduğunu belirtmiştir. Öğretim stratejileri bilgisinin “Nasıl öğretiriz?” sorusuna karşılık gelen tüm yöntem teknik ve stratejileri içerdiği söylenebilir.

Ball ve diğerleri (2008) aynı bileşeni “Alan ve Öğretme Bilgisi” olarak ele almıştır. Derse nasıl başlanacağını, hangi örneklerin verileceğini, hangi materyallerin nasıl kullanılacağını, öğrenciyle nasıl iletişime geçileceğini, öğrencilere nasıl dönüt verileceğini ve yapılacak açıklamaları da içeren öğrencileri kazanımlara ulaştıracak tüm süreç ile ilgili bilgi bu kapsamda yer almaktadır. Matematiksel bilgi ile öğretme bilgisinin birleşimi şeklinde düşünülebilir. Ball ve diğerleri (2008), iki sayının alt alta çarpımında neden toplanan sayıların kaydırılarak yazıldığı ile ilgili öğrenciye hangi açıklamaların yapılacağını, hangi öğretim yöntemlerinin izleneceğini bu bilgi türü kapsamında örneklemiştir.

Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının sınıflarda etkili öğretim yapabilmeleri için bu bilgi türüne ne derece sahip olduklarını belirlemek adına çok sayıda araştırma yapılmıştır (Fennema ve Franke, 1992; Gökkurt, Koçak ve Soylu, 2014; Gökkurt ve Soylu,

2015; Grossmann, 1990 vb.) Yapılan çalışmalar matematik öğretiminin nasıl düzenleneceği konusunda öğretmenlerin zorluk yaşadığını, matematiksel bilgilerini öğrencilere aktaramadığını, onlarla iletişim sağlayamadığını, kavram yanlışlarını gidermekten ziyade kavram yanlışlarına yol açabilecek açıklamalar yaptığını ve uygun olmayan dönütler verebildiğini göstermektedir (Arslan Kılcan, 2006; Koçak, Gökkurt ve Soylu, 2015; Şahin, Erdem, Başbüyük, Gökkurt ve Soylu 2014)

2.1.2.3. Program (müfredat) bilgisi bileşeni

Shulman (1986), öğretim programını bir sınıf seviyesinde bir konunun öğretiminde öğretmenlere yol gösteren bir kaynak olarak nitelemiştir. Bunun yanı sıra programda yer alan konularla ilişkili olan materyallerin neler olduğu ve nasıl kullanılacağı konusunda da rehberlik etmektedir. Program bilgisini Shulman (1986) konu sıralanışı bilgisi, konuyla ilgili materyaller bilgisi, yatay ve dikey program bilgisi olmak üzere dört unsura incelemiştir. Yatay program bilgisi, bir öğretmenin anlattığı ders ile diğer dersler veya diğer öğrenme alanlarını ilişkilendirebilmesine yönelik bilgidir. Dikey program bilgisi ise bir konunun veya kavramın önceki ve sonraki yıllarda programda nasıl yer aldığının bilinmesidir.

Friedrichsen ve diğerleri (2007), program bilgisini üç alt başlıkta incelemiştir. Bunlardan ilki kazanım bilgisidir. Yani öğretmenin neyi öğreteceğini bilmesidir. İkincisi, öğretim materyalleri bilgisidir. Bu materyallerin hangi konularda nasıl kullanıldığını bilmeyi de kapsar. Son alt başlıkta disiplin içi ve disiplinler arası ilişki bilgisidir. Bu alt başlık Shulman'ın (1986) yatay ve dikey program bilgisi ile örtüşmektedir.

Ball ve diğerleri (2008), alan ve müfredat bilgisi bileşeni kapsamında iki ayrı noktaya vurgu yapmıştır. İlki öğretmenlerin konuya uygun öğretim materyalini seçebilmeleridir. Diğer ise konuların hem kendi aralarında hem de disiplinlerarası ilişkilerini kurabilmeleridir. Oran kavramını öğretecek olan bir öğretmen, öğrencilerin hangi sınıf düzeyinde orantı kavramını öğreneceklerini; fen bilimleri dersinde hız, öz kütle gibi kavramların birimli bir oran olarak tanıtılacağını ve kavramın hangi materyallerle öğretiminin daha uygun olacağını bilmelidir. Bu bilgiler program bilgisi kapsamında değerlendirilebilir.

Matematik öğretim programlarında programın vizyonu, felsefesi, öğrenme alanları, etkinlikleri ve ölçme değerlendirme çalışmalarının yanı sıra materyalle ilgili de bilgiler bulunur. Bu konuda yapılmış çalışmalardan birinde İskenderoğlu, Türk ve İskenderoğlu (2016); ilköğretim matematik öğretmen adaylarının materyallerden haberdar olma ve öğretim sürecinde kullanma seviyelerini belirlemeyi ve materyalleri kullanmaya yönelik öz yeterliklerini incelemeyi amaçlamışlardır. Öğretmen adaylarının materyalleri

tanıdıkları, kullanma konusunda kendilerini yeterli buldukları ancak öğretim sırasında kullanmadıkları sonucuna ulaşmışlardır. Çalışmada sayılar ve işlemler öğrenme alanında kullanılacak materyallerin tanınma yüzdeleri incelendiğinde onluk taban bloklarını bilen öğretmen oranı %55, kesir çubukları %57, şeffaf kesir kartları %23 ve sayma pulları %40 olarak belirlenmiştir. Bu materyalleri kullanma oranları ise onluk taban bloklarında %39, kesir çubukları %41, şeffaf kesir kartları %12 ve sayma pulları %25 olarak belirtilmiş ve öğretmen adaylarının büyük bir kısmının materyalleri daha önce kullanmadıkları ortaya çıkmıştır.

2.2. Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı

Bu bölümde ülkemizde uygulanan matematik öğretim programlarındaki değişim süreci, halen yürürlükte olan MEB (2018) matematik dersi öğretim programı, NCTM ilke ve standartlarından biri olan sayılar ve işlemler içerik standardı açıklanmıştır. Ayrıca “sayılar ve işlemler” öğrenme alanında yer alan matematiksel kavramlar detaylandırılmış ve sık yapılan kavram yanlışları açıklanmıştır.

2.2.1. Geçmişten günümüze matematik öğretim programının değişimi

Öğretim programları Cumhuriyet’in ilanından günümüze kadar birçok kez değişmiştir. Tevhid-i Tedrisat kanunu ile birlikte tüm öğretim kurumları Milli Eğitim Bakanlığına bağlanmış dolayısıyla tüm okullarda uygulanacak programlara ihtiyaç duyulmuştur. “1924 İlk Mektep Müfredat Programı”, Osmanlı dönemi eğitim öğretim programlarının da etkisi ile yeni devletin yani cumhuriyetin amaçlarına uygun olacak şekilde yayınlanmıştır (Başkaya, 2016). Karataş (2002), 1924 programında 26 saat olan haftalık ders saatinde 1. ve 5. sınıfta haftada ikişer saat; 2.,3. ve 4. sınıflarda haftada üçer saat “Hesap” dersi olduğunu ayrıca 5 yıllık olan ilk mektebin son iki yılında “Hendese” yani geometri derslerinin de verildiğini belirtmiştir. 1926 yılında ise “Hesap” ve “Hendese” dersleri birleştirilmiştir. Ayrıca ders saatleri artırılarak ilk iki sene dörder, son üç sene beşer saate çıkarılmıştır (Karataş, 2002; Başkaya, 2016). 10 yıl uygulanan 1926 programında 1936’da değişikliğe gidilmiştir. Bu programda ezbercilikten çıkılması gerektiği belirtilmiş ayrıca Çelenk, Tertemiz ve Kalaycı’ya (2000; aktaran Başkaya, 2016) göre, “Çocukta sayı kavramının gelişmesi, çocuklara sayı kavramının verilmesi ve yazdırılması, işlemlerin yapılması, problem çözme aşamaları, ölçüler, grafikler, işlemler ve terimler” üzerinde durulmuştur. 1948 yılında yeni bir program değişikliğine gidilmiştir. 20 yıl yürürlükte kalan 1948 öğretim programı günümüze kadar yapılan programlar içerisinde en uzun süreli olanıdır. Bu programda hesap-hendese dersi isim değiştirilerek aritmetik ve geometri derslerine dönüşmüştür. “Sayıların kavratılması ve yazdırılması, işlemler, tahmin, ölçüler, grafikler ve defter tutma” gibi konular programda yer almıştır. Ayrıca geometri

dersinde ise küp, kare, dikdörtgen, silindir, piramit, üçgen, koni, küre, doğru gibi yeni kavramlara yer verilmiştir (Çelenk ve diğerleri, 2000; aktaran Başkaya, 2016). 1968 yılında program yeniden değiştirilmiş 1983 yılında ise ilk kez matematik dersi özelinde yazılan “ilkokul matematik programı” kabul edilmiştir. Bu program ilk başta sadece ilkokullara yönelik olmasına rağmen daha sonra ortaokullar da dahil edilmiş ve “ilköğretim matematik ders programı” adını almıştır (Taşçı, 2004). 1990 ve 1998 yıllarında program biraz daha geliştirilmiştir. Bu üç programda da geleneksel anlamda öğretmen merkezli eğitim ve hedef davranışlar söz konusudur. Ancak 2004 programı bu geleneksel anlayışı yıkmış; öğrenci merkezli yapılandırmacı bir bakış açısıyla yazılmıştır. Program, her çocuğun matematiği öğrenebileceği ilkesiyle matematiği daha somut hale getirmeyi, çocuğun farklı duyu organlarına hitap edebilmeyi, matematiksel durumları öğrencinin kendi aktif katılımıyla keşfedebilmesini amaçlayacak şekilde oluşturulmuştur (Eski, 2017). Bu programda örüntüler, dönüşüm geometrisi, olasılık ve grafikler gibi bazı yeni konular eklenmiş; kümeler ünitesi ise kaldırılarak diğer konuların içerisine bir araç olarak dağıtılmıştır. Öğretmenlerden alınan geri dönütlerle 2009 yılında güncellemeye gidilen programda 6. 7. ve 8. sınıflara yönelik olacak şekilde 233 kazanıma yer verilmiştir. Bu kazanımlar sayılar, geometri, ölçme, olasılık ve istatistik, öğrenme alanlarına dağıtılmıştır. Kümeler ayrı bir konu olarak yeniden getirilmiştir.

2012 yılında 4+4+4 olmak üzere zorunlu eğitimin 12 yıla çıkarılması sonrası 5. sınıflar ortaokul kademesine geçirilmiştir. 2013 yılında 5-6-7-8. sınıfları kapsayan Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2013) yayınlanmıştır. Ancak bu program tüm sınıf düzeylerinde aynı anda uygulamaya sokulmamıştır. 2012-2013 eğitim öğretiminde tüm kademelerde 2009 programı kullanılmış olup, 2013-2014 eğitim öğretim döneminde 5. sınıflardan başlamak üzere kademeli olarak yeni programa geçilmiştir. 2013 programında öğrenme alanlarının isimleri değiştirilmiştir. “Sayılar ve işlemler, geometri ve ölçme, veri işleme, cebir, olasılık” olmak üzere beş öğrenme alanına yer verilmiştir. Ağırlık “sayılar ve işlemler” öğrenme alanında olup “olasılık” öğrenme alanına ait kazanımlar sadece 8. sınıfta görülmek üzere azaltılmıştır. 2013 programında “kümeler, iz düşüm, bilinçli tüketim aritmetiği, olası durumları belirleme, olay çeşitleri, olasılık çeşitleri, merkezî eğilim ve yayılma ölçüleri, örüntü ve süslemeler” gibi konular kaldırılmıştır. Böylece programda sadeleştirmeye gidilmiştir. 2009 programında 3 yıllık süreye 233 kazanım verilmişken, 2013 programında ise 4 yıllık süreçte 233 kazanım yer almıştır.

2017 yılında yeni bir program taslağı yayınlanmış, ilkokul ve ortaokul matematik dersi programları bir araya getirilmiştir. 2017-2018 eğitim öğretim yılında sadece 1. ve 5. sınıflarda, 2018-2019 eğitim öğretim yılı ile birlikte tüm sınıf düzeylerinde yeni programın

uygulanmasına karar verilmiştir. Kademeli geçişin olmaması nedeniyle bir alt sınıf düzeyine geçirilen bazı konuları öğrencilerin hiç görmemesine, üst sınıf düzeyine geçirilen bazı konuların ise iki kez gösterilmesine neden olduğu söylenebilir. Halen uygulamada olan MEB (2018) öğretim programında kazanım sayısı 215'e düşürülmüştür. Kümeler konusu tek bir kazanımla 6. sınıfa geri getirilmiş olup; tam sayılar ve işlemler, cebirsel ifadeler, doğrusal denklemler, dönüşüm geometrisi alt öğrenme alanlarına ait bazı kazanımların sınıf düzeyleri değiştirilmiş; denklem sistemleri ise programdan çıkarılmıştır.

2.2.2. MEB (2018) matematik dersi öğretim programı

2004 yılı itibarıyla öğrenciyi merkeze alan öğretim programları bireyi;

- Bilgiyi üreten,
- Ürettiği bilgiyi hayatında işlevsel olarak kullanabilen,
- Karşılaştığı problemleri çözebilen,
- Eleştirel düşünceye sahip,
- Girişimci,
- Kararlı,
- İletişim becerilerine sahip,
- Empati yapabilen,
- Bulunduğu topluma ve kültüre katkı sağlayabilen vb. niteliklerle tanımlamaktadır (MEB, 2018).

Bu niteliklere sahip bireylerin yetişebilmesi için sadece bilgi aktaran değil, bireysel farklılıkları da dikkate alan, değer ve beceri kazandırma amacı güden sade ve anlaşılır bir öğretim programına ihtiyaç olduğu söylenebilir. MEB (2018) matematik öğretim programında bu genel durum ortaya konulmuştur. Programların sarmal yapıda olduğu, bunun yanı sıra bütüncül ve tek seferde kazandırılması istenen öğrenme çıktılarına yer verildiği belirtilmiştir. Hedeflenen tüm kazanımların eğitim kademeleri düzeyinde değerler, beceriler ve yetkinlikler ile bütünlük sağlayan bir bakış açısıyla yalın bir içeriğe sahip olduğu ifade edilmiştir. Üst bilişsel becerilerin kullanımına yönlendiren, anlamlı ve kalıcı öğrenmeyi sağlayan, ön öğrenmelerle ilişkilendirilmiş, diğer disiplinlerle ve günlük hayatla değerler, beceriler ve yetkinlikler çevresinde bütünleşmiş öğretim programlarının oluşturulduğu açıklanmıştır.

Öğretim programlarının 1739 sayılı Millî Eğitim Temel Kanununun 2. maddesinde ifade edilen “Türk Millî Eğitiminin Genel Amaçları” ile “Türk Millî Eğitiminin Temel İlkeleri” temel alınarak hazırlandığı programda belirtilmiştir. Eğitim ve öğretimin tüm kademelerinin birbirini tamamlayıcı şekilde amaçlara ulaşmaya yönelik olduğu ifade edilmiştir. Dört maddede tüm öğretim seviyelerine yönelik amaçlardan bahsedilmiştir.

Buradaki açıklamaya göre ortaokulu tamamlayan öğrenciler için, “ilkokulda kazandıkları yetkinlikleri geliştirmek suretiyle millî ve manevi değerleri benimsemiş, haklarını kullanan ve sorumluluklarını yerine getiren, Türkiye Yeterlilikler Çerçevesinde ve ayrıca disiplinlere özgü alanlarda ifadesini bulan temel düzey beceri ve yetkinlikleri kazanmış bireyler olmalarını sağlamak” amacı güdülmektedir.

MEB’de (2018) öğretim programlarının perspektifinden de bahsedilmiştir. Programın bilgi, beceri ve davranışlar kazandırılmaya çalışılırken değerlerimiz ve yetkinliklerin bütünlüğünü sağlayan bağlantı ve ufuk işlevi gördüğü belirtilmiştir. Değerlerimizin, öz mirasımız olduğu, toplumumuzun milli ve manevi kaynaklarından bu günlere ulaştığı, tüm eğitim sürecinde bu değerlerin yer alması gerektiği ve gelecek nesillere aktarılması gerektiği ifade edilmiştir. Öğretim programında yer alan “kök değerler” adalet, dostluk, dürüstlük, öz denetim, sabır, saygı, sevgi, sorumluluk, vatanseverlik ve yardımseverliktir.

Programda değerlerin yanı sıra öğrencilerin hem ulusal hem de uluslararası düzeyde; kişisel, sosyal, akademik ve iş hayatlarında ihtiyaç duyacakları beceriler olarak Türkiye Yeterlilikler Çerçevesinde (TYÇ) belirlenen sekiz adet yetkinlikten bahsedilmiştir. “Ana dilde iletişim”, “yabancı dillerde iletişim”, “öğrenmeyi öğrenme” gibi yetkinliklerden biri de “matematiksel yetkinlik ve bilim/teknolojide temel yetkinlikler” başlığıyla ele alınmıştır. Matematiksel yetkinlik, gündelik yaşamda karşılaşılan bir problemi çözebilmek için matematiksel düşünme tarzını geliştirme ve uygulama olarak ifade edilmiştir. Sağlam bir aritmetik becerisi üzerine inşa edilen süreç, faaliyet ve bilgiye vurgu yapılmıştır. Programa göre matematiksel yetkinlik, mantıksal ve uzamsal düşünebilmenin yanı sıra formüller, modeller, tablo ve grafiklerle bilgiyi sunabilmeyi ve bunları farklı derecelerde kullanabilme becerisini ve isteğini içermektedir. Sekiz anahtar yetkinlikten biri olan “matematiksel yetkinlik ve bilim teknolojide temel yetkinlik” programın perspektifini oluşturan unsurlardan biridir.

MEB’de (2018), öğretim programlarında ölçme ve değerlendirmenin nasıl olması gerektiği ile ilgili de bir bölüm mevcuttur. Eğitimin sadece bilişsel süreçlerden oluşmadığı duyuşsal süreçlerin ve uygulamaları eylemlerin de ölçülmesi gerektiği belirtilmiştir. Bu ölçümlerin sadece eğitim öğretimin sonunda değil sürecin içerisinde de gerçekleştirilmesi gerektiği ve bireysel farkları da dikkate alarak çeşitlendirilmesi gerektiği ifade edilmiştir.

Programın; farklı ülkelerdeki öğretim programları incelenerek, akademik çalışmalar taranarak; mevzuat, hükümet programları, sivil toplum kuruluşu raporları gibi dokümanlar incelenerek; öğretmen, öğrenci ve yöneticilere daha önce uygulanan anketlerin, illerden gelen zümre raporlarının sonuçlarına bakılarak oluşturulduğu

belirtilmektedir (MEB, 2018). 2018-2019 öğretim yılında tüm sınıf düzeylerinde başlatılacağı ve gerekli görülmesi halinde güncellemelerin yapılacağı ifade edilmiştir.

Öğretim programlarının genel amacı, perspektifi, temel aldığı değerleri ve yetkinlikleri, ölçme ve değerlendirme yaklaşımları gibi bölümlerden sonra matematik dersine yönelik özel amaçlara geçilmiştir. Programa göre matematik dersinin özel amaçları şunlardır:

- Matematiksel okuryazarlık becerilerini geliştirebilen ve etkin bir şekilde kullanabilen,
- Matematiksel kavramları anlayabilen ve bu kavramları günlük hayatta kullanabilen,
- Problem çözme sürecinde kendi düşünce ve akıl yürütmelerini rahatlıkla ifade edebilen, başkalarının matematiksel akıl yürütmelerindeki eksiklikleri veya boşlukları görebilen,
- Matematiksel düşüncelerini mantıklı bir şekilde açıklayabilen ve bu düşünceleri paylaşmak için matematiksel terminolojiyi ve dili doğru kullanabilen,
- Matematiğin anlam ve dilini kullanarak insan ile nesneler arasındaki ilişkileri ve nesnelerin birbirleriyle ilişkilerini anlamlandırabilen,
- Üstbilişsel bilgi ve becerilerini geliştirebilen kendi öğrenme süreçlerini bilinçli biçimde yönetebilen,
- Tahmin etme ve zihinden işlem yapma becerilerini etkin bir şekilde kullanabilen,
- Kavramları farklı temsil biçimleri ile ifade edebilen,
- Matematiği öğrenmede deneyimleriyle matematiğe yönelik olumlu tutum geliştiren ve bu sayede matematiksel problemlere öz güvenli bir yaklaşım geliştirebilen,
- Sistemli, dikkatli, sabırlı ve sorumlu olma özelliklerini geliştirebilen,
- Araştırma yapma, bilgi üretme ve kullanma becerilerini geliştirebilen,
- Matematiğin sanat ve estetikle ilişkisini fark edebilen,
- Matematiğin insanlığın ortak bir değeri olduğunun bilincinde olarak matematiğe değer veren öğrenciler yetiştirebilmektir.

MEB (2018) matematik dersi öğretim programında 1-8. sınıflar arası hem ilkokul hem de ortaokul kademesi yer almaktadır. Böylece 4+4+4 sistemi ile ayrılan program yeniden tek belgede birleştirilmiştir.

İlkokul kademesinde, “sayılar ve işlemler, geometri, ölçme, veri işleme” öğrenme alanları; ortaokul kademesinde, “sayılar ve işlemler, cebir, geometri ve ölçme, veri işleme,

olasılık” öğrenme alanları yer almaktadır. Her bir öğrenme alanına ait alt öğrenme alanları ve bu alt öğrenme alanlarında yer alan kazanımlar programda verilmiştir. Bu alt öğrenme alanı ve kazanım sıralamasına göre derslerin işlenmeyeceği özellikle belirtilmiş olup bunun için her sınıf düzeyine göre “üniteler ve zaman dağılımı” başlığıyla tablolar oluşturulmuştur. Tablolara göre 1 yıllık süre altışar üniteye ayrılmıştır. Ünitelerin genel sıralamasının değişmemesi gerektiği ancak içlerindeki kazanımların veriliş sırasında değişikliğe gidilebileceği ifade edilmiştir. 180 ders saatinden oluşan eğitim öğretim yılı her bir alt öğrenme alanına yönelik tavsiye kararı niteliğindeki ders saatlerine bölünmüş ve ağırlıkları belirtilmiştir. Ortaokul düzeyine ait kazanım sayıları ve ders saati ağırlıkları Tablo 4’te sunulmuştur:

Tablo 4

Öğretim Programında (2018) Yer Alan Öğrenme Alanları ve Kazanım Sayılarının Dağılımı

Öğrenme Alanı	Kazanım Sayısı	Ağırlık
Sayılar ve İşlemler	106 kazanım	%49,3
Geometri ve Ölçme	67 kazanım	%31,2
Cebir	23 kazanım	%10,7
Veri İşleme	14 kazanım	%6,5
Olasılık	5 kazanım	%2,3

İlkokul ve ortaokul düzeyinde ortak olarak yer alan “Sayılar ve İşlemler” öğrenme alanına ayrılan ders süresi 357 ders saati olup (108 +101 +98+ 50); dört yıla ait 720 saatlik toplam sürenin %49,58’ini oluşturmaktadır. İkinci sırada “geometri ve ölçme” öğrenme alanı yer almaktadır. Bu öğrenme alanı ilkokulda ayrı olmasına rağmen ortaokulda bir arada ele alınmıştır. Daha sonra gelen “cebir” öğrenme alanına ait az sayıda kazanım olmasına rağmen programda bu kazanımların sırasına dikkat edilmesi gerektiği ve diğer öğrenme alanlarındaki kazanımlarla yeri geldiğinde ilişkilendirilmeleri gerektiği ifade edilmiştir. En az sayıda kazanım “olasılık” öğrenme alanına ait olup var olan beş kazanım da 8. sınıf düzeyinde bulunmaktadır.

2.2.3. NCTM ilke ve standartları

“Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi” yani NCTM (2000), okul öncesi öğretimden başlayarak tüm sınıf düzeylerini kapsayan ilke ve standartlar yayınlamıştır. Okul öncesinden 12. sınıfa kadar öğrencilerin edinmesi gereken matematiksel anlayışı, bilgiyi ve beceriler “okul matematiği standartları” olarak belirtilmektedir. Çocukların bilmesi gereken konuların genel kategorize edilmiş hali içerik standartları ve çocukların bilgiyi öğrenip yaşamda kullanabilmelerini sağlayan süreç standartları olmak üzere beşer standart belirlemiştir.

Süreç standartları “problem çözme, akıl yürütme ve ispat, iletişim, ilişkiler (bağlantılar), temsil (gösterim)” olarak sıralanabilir. Burada sözü edilen “iletişim” Van de Walle’ye (2013) göre matematiksel fikirlerin konuşulabilmesi, yazılabilmesi, nitelendirilebilmesi ve açıklanabilmesinin önemini ifade etmektedir. “İlişkiler (bağlantılar)” standardı ise matematiksel kavramlar arasındaki ilişkiyi anlama ve bu kavramların farklı disiplinlerle arasındaki ilişkiyi anlama olarak iki türlü anlaşılabilceği belirtilmiştir. “Temsil (Gösterim)” standardı ise çoklu temsillerin önemini ortaya koyarken matematiksel fikir veya ilişkilerin grafik, tablo, sembol veya resimler gibi farklı biçimlerde gösterilebilmesinin ve esnek bir şekilde bu geçişlerin yapılabilmesinin önemini ifade eder.

İçerik standartları ise matematiksel konuları içermektedir. Öğretim programımızda da yer alan öğrenme alanları olarak ifade edilebilir. NCTM’e (2000) göre içerik standartları şunlardır:

1. Sayılar ve İşlemler
2. Cebir
3. Geometri
4. Ölçme
5. Veri Analizi ve Olasılık

Waltemire (2018) sayma ve sayı kavramına ilişkin temel becerileri elde edemeyen öğrencilerin sonraki dönemlerde ileri düzey hesaplamalarda veya kesirler gibi farklı konularda başarı sağlayamadıklarını belirtmiştir. NCTM (2000; aktaran Van de Walle, 2013) sayılarla çalışan bir öğrencinin yaptığı işi diğer matematik konularıyla ilişkilendirebilmesi gerektiğini belirterek sayı gelişiminin müfredatın diğer alanlarıyla bir arada yürütülmesinin önemini vurgulamıştır.

NCTM (2000) “sayılar ve işlemler” içerik standardını üç başlık altında incelemiştir: Bu başlıklar sayılar, işlemler ve hesaplamalardır.

Sayılar; sayıları temsil etme yollarını, sayılar arasındaki ilişkileri ve sayı kümelerini anlamayı içermektedir. İşlemler; işlemlerin anlamlarını ve birbirleriyle nasıl

ilişkili olduklarını anlamayı içermektedir. Hesaplamalar ise akıcı bir şekilde hesaplama yapmayı ve sonraki aşamalarda tutarlı tahminler yapabilmeyi belirtmektedir.

NCTM (2000) içerik standartlarını belirlerken sınıf düzeylerine göre hedefler belirtmiştir. Ortaokul kademesi 6-8. sınıf arasını kapsamaktadır. Bu kademeye ait sayılar, işlemler ve hesaplamalarla ilgili hedefler şu şekilde sıralanabilir:

a. Sayılar

- Problemleri çözmek için kesirler, ondalık sayılar ve yüzdelerle esnek bir şekilde çalışabilme,
- Kesirleri, ondalık sayıları ve yüzdeleri verimli bir şekilde karşılaştırabilme, sıralayabilme ve bir sayı doğrusunda yaklaşık konumlarını bulabilme,
- 100'den büyük ve 1'den küçük yüzdeler için anlam geliştirebilme,
- Nicel ilişkileri temsil etmek için oranları anlayabilme ve kullanabilme;
- Büyük sayılarla ilgili bir anlayış geliştirebilme; üstel, bilimsel ve hesap makinesi gösterimini tanıyabilme ve uygun şekilde kullanabilme,
- Problemleri çözmek için çarpanları, katları, asal çarpanlara ayırmayı ve nispeten asal sayıları kullanabilme,
- Tamsayılar için anlam geliştirme ve miktarları onlarla temsil edip karşılaştırabilme

b. İşlemler

- Kesirler, ondalık sayılar ve tam sayılarla aritmetik işlemlerin anlamını ve etkilerini anlayabilme,
- Tamsayılar, kesirler ve ondalık sayılarla hesaplamaları daha kolay yapabilmek için toplama ve çarpmanın birleşme ve değişme özelliklerini ve çarpmanın toplamaya göre dağılma özelliğini kullanabilme;
- Hesaplamaları kolaylaştırmak ve problemleri çözmek için “toplama, ile çıkarma”, “çarpma ile bölme” ve “karesini alma ile karekök bulma” ters ilişkilerini anlayabilme ve kullanabilme

c. Hesaplama

- Duruma göre, kesirler ve ondalık sayılarla işlemleri yapabilmek için “zihinden hesaplama, tahmin, hesap makineleri, kâğıt ve kalem” gibi seçenekler arasından uygun yöntem ve araçları seçebilme ve seçilen yöntemleri uygulayabilme;

- Kesirler, ondalık sayılar ve tam sayılarla işlem yapabilmek için algoritmalar geliştirip, analiz edebilme ve bunların kullanımında akıcılık geliştirebilme
- Rasyonel sayılarda işlemlerin sonuçlarını tahmin etmek ve tahminlerin gerçek sonuçla tutarlı olup olmadığını yargılamak için stratejiler geliştirebilme ve kullanabilme;
- Orantı problemlerini çözmek için ölçekleme ve denk oranları bulma gibi yöntemleri geliştirebilme, analiz edebilme ve açıklayabilme.

Ülkemizde oluşturulan matematik dersi öğretim programlarında da NCTM (2000) içerik standartlarına benzer şekilde öğrenme alanlarının oluşturulduğu ve oradaki hedeflere benzer şekilde kazanımların belirlendiği söylenebilir. MEB (2018) matematik dersi öğretim programında gerek kazanım sayısı olarak gerekse tavsiye edilen ders süresi olarak en büyük ağırlığa sahip öğrenme alanı “sayılar ve işlemler” öğrenme alanıdır.

Sayılar ve işlemler öğrenme alanı doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel ve irrasyonel sayıları ve bunlarla yapılan işlemleri, sayı kümeleri arasındaki ilişkileri, kesirleri, ondalık gösterimi, oran ve orantıyı, yüzdeleri, küme kavramını, çarpanlar ve katları içeren çeşitli alt öğrenme alanlarını kapsamaktadır. Sınıf düzeylerine göre öğrencilerin elde etmesi beklenen kazanımların neler olduğu; bu kazanımların gerçekleşmesi için bilinmesi gereken matematiksel kavramlar; bu kazanımları elde etme sürecinde yaşanan zorluklar, kavram yanılgıları ve öğrenme güçlükleri ile tüm bunlarla ilgili yapılmış alan ve pedagojik alan bilgisi çalışmaları “alt öğrenme alanları” başlığıyla aşağıdaki bölümde detaylandırılmıştır.

2.2.4. Alt öğrenme alanları

MEB (2018) programına göre “sayılar ve işlemler” öğrenme alanında ilkokulda 7, ortaokulda 16 olmak üzere 23 adet alt öğrenme alanı mevcuttur. Alt öğrenme alanlarında matematiksel kavram ve bu kavrama yönelik işlemler ayrı ayrı ele alınmıştır. Buna göre ilkokul seviyesinde yer alan alt öğrenme alanları ve kazanımların yer aldığı sınıf seviyeleri Tablo 5’te verilmiştir:

Tablo 5

İlkokul programı sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait alt öğrenme alanları

ALT ÖĞRENME ALANLARI	1. Sınıf	2. Sınıf	3. Sınıf	4. Sınıf
<i>Doğal Sayılar</i>	X	X	X	X
<i>Doğal Sayılarla Toplama İşlemi</i>	X	X	X	X
<i>Doğal Sayılarla Çıkarma İşlemi</i>	X	X	X	X
<i>Doğal Sayılarla Çarpma İşlemi</i>		X	X	X
<i>Doğal Sayılarla Bölme İşlemi</i>		X	X	X
<i>Kesirler</i>	X	X	X	X
<i>Kesirlerde İşlemler</i>				X

Ortaokul düzeyinde yer alan 16 alt öğrenme alanı ve görüldükleri sınıf düzeyleri ise Tablo 6’da sunulmuştur.

Tablo 6

Ortaokul kademesi sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait alt öğrenme alanları

ALT ÖĞRENME ALANLARI	5. Sınıf	6. Sınıf	7. Sınıf	8. Sınıf
<i>Doğal Sayılar</i>	X			
<i>Doğal Sayılarla İşlemler</i>	X	X		
<i>Kesirler</i>	X			
<i>Kesirlerle İşlemler</i>	X	X		
<i>Ondalık Gösterim</i>	X	X		
<i>Yüzdele</i>	X		X	
<i>Çarpanlar ve Katlar</i>		X		X
<i>Kümeler</i>		X		
<i>Tam Sayılar</i>		X		
<i>Tam Sayılarla İşlemler</i>			X	
<i>Rasyonel Sayılar</i>			X	
<i>Rasyonel Sayılarla İşlemler</i>			X	
<i>Oran</i>		X		
<i>Oran ve Orantı</i>			X	
<i>Üslü İfadeler</i>				X
<i>Kareköklü İfade</i>				X

Sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait alt öğrenme alanlarından birlikte değerlendirilebilecek olanlar alt başlıklar halinde bu bölümde incelenmiş olup her bir bölümde öncelikle kavramın öğretim programındaki yeri ve ilgili kazanımlar verilmiştir. İkinci alt başlıkta, alt öğrenme alanında yer alan kavramlara ve bu kavramların tanımlarına yer verilmiştir. Üçüncü alt başlıkta ise alanyazında yer alan kavramla ilgili öğrenme güçlüğü ve kavram yanlışlarından bahsedilmiştir.

2.2.4.1. Doğal sayılar ve öğretimi

2.2.4.1.a. Öğretim programındaki yeri ve ilgili kazanımlar

İlkokulda tüm sınıf düzeylerinde yer alan doğal sayılar ve doğal sayılarda işlemler alt öğrenme alanları ortaokulda 5. ve 6. sınıfta yer almaktadır. En çok kazanıma sahip (3 adet doğal sayılar, 16 adet doğal sayılarda işlemler) konudur. Öğrenciler ilkokulda toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini, sayıları okumayı, basamak ve bölük kavramlarını, sayı örüntülerini, Romen rakamlarını, zihinden işlem yapma ve tahmin etme stratejilerini öğrenmektedirler. Her sınıf düzeyinde basamak sayıları artacak şekilde benzer kazanımlar yer almaktadır. Ortaokulda yer alan kazanımlar ise Tablo 7

Tablo 7’de verilmiştir:

Tablo 7

Doğal sayılarla ilgili kazanımlar

Sınıf Düzeyi	İlgili Kazanımlar
5 Doğal Sayılar	K1: En çok <i>dokuz</i> basamaklı doğal sayıları okur ve yazar. K2: En çok <i>dokuz</i> basamaklı doğal sayıların bölüklerini, basamaklarını ve rakamların basamak değerlerini belirtir. K3: Kuralı verilen sayı ve şekil örüntülerinin istenen adımlarını oluşturur.
5 Doğal Sayılarda İşlemler	K1: En çok <i>beş</i> basamaklı doğal sayılarla toplama ve çıkarma işlemi yapar. K2: <i>İki</i> basamaklı doğal sayılarla zihinden toplama ve çıkarma işlemlerinde strateji belirler ve kullanır. K3: Doğal sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerinin sonuçlarını tahmin eder. K4: En çok <i>üç</i> basamaklı iki doğal sayının çarpma işlemini yapar. K5: En çok <i>dört</i> basamaklı bir doğal sayıyı, en çok <i>iki</i> basamaklı bir doğal sayıya böler. K6: Doğal sayılarla çarpma ve bölme işlemlerinin sonuçlarını tahmin eder. K7: Doğal sayılarla zihinden çarpma ve bölme işlemlerinde uygun stratejiyi belirler ve kullanır. K8: Bölme işlemine ilişkin problem durumlarında kalanı yorumlar. K9: Çarpma ve bölme işlemleri arasındaki ilişkiyi anlayarak işlemlerde verilmeyen öğeleri (çarpan, bölüm veya bölünen) bulur. K10: Bir doğal sayının karesini ve küpünü üslü ifade olarak gösterir ve değerini hesaplar. K11: En çok iki işlem türü içeren parantezli ifadelerin sonucunu bulur. K12: Dört işlem içeren problemleri çözer.
6 Doğal Sayılarda İşlemler	K1: Bir doğal sayının kendisiyle tekrarlı çarpımını üslü ifade olarak yazar ve değerini hesaplar. K2: İşlem önceliğini dikkate alarak doğal sayılarla dört işlem yapar. K3: Doğal sayılarda ortak çarpan parantezine alma ve dağılma özelliğini uygulamaya yönelik işlemler yapar. K4: Doğal sayılarla dört işlem yapmayı gerektiren problemleri çözer ve kurar.

Tablo 7 incelendiğinde ilkökulda binler bölümüne kadar öğrenen öğrencilerin ortaokulda milyonlar bölümü ile tanıştığı görülmektedir. Ancak 7, 8 veya 9 basamaklı sayılarla işlem yapmaktan ziyade sadece sayıların okunuşuna, basamak ve bölüklere ayrılmasına yönelik kazanımlar mevcuttur. Toplama-çıkarma işlemi 5 basamaklı sayılar ile, çarpma işlemi 3 basamaklı ve 2 basamaklı iki sayının çarpımı ile, bölme işlemi de 4 basamaklı sayının 2 basamaklı sayıya bölümü ile sınırlı kalmaktadır. İlkokuldan ortaokula kadar sürekli artan basamak sayıları ile ilerleyen kazanımlar 5. sınıf kazanımları ile son noktaya ulaşmaktadır. Öğrenciler 5. sınıf düzeyinde aritmetik dizilerle sınırlı kalmak kaydıyla sayı ve şekil örüntüleri arasındaki ilişkiyi de incelemektedir. Sayı örüntüsü kavramı son kez bu sınıf düzeyinde sayılar ve işlemler öğrenme alanında yer alıp 7. sınıftan itibaren cebir alt öğrenme alanında bulunmaktadır.

6. sınıf düzeyinde öğrenciler doğal sayılarda işlem önceliğini tüm çeşitleri ile öğrenmektedir. İşlem önceliği kazanımı ile matematiksel yazımın öneminin öğrencilere hissettirebileceği söylenebilir. Bu sınıf düzeyinde öğrenciler ortak çarpan parantezine alma ve dağılma özelliğini de öğrenmektedir. Ayrıca o zamana kadar “x” şeklinde olan çarpma sembolünün “.” sembolüne dönüşümü de 6. sınıfta gerçekleşmektedir.

2.2.4.1.b. İlgili kavramlar ve tanımları

Doğal sayılara ve doğal sayılarla işlemlere yönelik gerek ilkökul gerek ortaokul seviyesinde çok sayıda kavram mevcuttur. Bu kavramların başında da doğal sayının kendisi gelmektedir. Doğal sayılar matematiksel olarak Peano aksiyomları ile aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

1. Sıfır bir doğal sayıdır
2. Her doğal sayının (n), ardışığı olan ($n+1$) bir doğal sayı vardır.
3. Sıfır hiçbir doğal sayının ardışığı değildir.
4. Farklı doğal sayıların ardışıkları da farklıdır.
5. D , doğal sayıların alt kümesi olsun. Eğer “0” D ’nin elemanı ise ve bir sayının D ’de bulunması ardışığının da bulunmasını gerektiriyor ise D kümesi doğal sayılar kümesine eşittir.

Yukarıdaki aksiyomlar yardımı ile doğal sayılar kümesi oluşturulabilmektedir (Gedik Altun, 2019) Bu kümenin her bir elemanına da doğal sayı denilmektedir.

Doğal sayılar kümesi, sayma sayıları kümesinden yola çıkılarak da tanımlanabilir. Ev Çimen (2016), “Sayma sayılarının kümesine 0’ın eklenmesiyle oluşturulan yeni kümeye doğal sayılar kümesi denir.” şeklinde tanım yapmıştır. Genellikle tanımlar doğal sayıların sıfırdan başladığını vurgulasa da bazı tanımlarda doğal sayılar 1’den başlatılmaktadır. Ancak doğal sayıların sıfırdan veya 1’den başlaması küme teorisini çelişkiye uğratmamaktadır (Güney ve Özkoç, 2015). Ancak, ilköğretim ve ortaöğretim düzeyinde öğrencilere doğal sayıların sıfırdan başladığı öğretilmektedir.

Doğal sayı kavramıyla birlikte basamak, bölük, sayı değeri ve basamak değeri kavramları da ele alınabilir. Doğal sayılarda, rakamın bulunduğu yere basamak ve sağdan sola doğru basamaklar üçerli gruplandığında oluşan her bir gruba bölük denilmektedir. Bir rakamın bulunduğu basamağa göre aldığı değere basamak değeri ve bir rakamın kendi değerine ise sayı değeri denilmektedir. (Cırıtcı, Gönen, Araç, Özarslan, Pekcan ve Şahin; 2017). Çalışılan tabana göre basamak isimleri ve basamak değeri hesaplamaları değişebilmektedir ancak ortaokul düzeyinde kavramlar 10’luk tabanda ele alınmaktadır. Bir sayının çözümlenmesi de 10’luk tabana göre yapılmaktadır. Çözümleme kavramı ile öğrenciler ilkökul düzeyinde karşılaşmaktadır. Bir doğal sayının çözümlenmesi sayının basamak değerlerinin toplama işlemi şeklinde yazılmasıdır (Komisyon, 2016).

Doğal sayılarla ilgili yukarıda ele alınan temel kavramların yanı sıra doğal sayılarda toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinde yer alan kavramlar da mevcuttur. Bilen (2019) tarafından yazılmış 5. sınıf ders kitabında yer alan doğal sayılarda işlemlere ilişkin kavramların tanımları aşağıdaki gibi listelenebilir:

Toplam: Toplama işleminin sonucu.

Toplanan: Toplama işleminde, toplamı oluşturan sayıların her biri.

Eksilen: Çıkarma işlemindeki ilk sayı, kendisinden sayı çıkarılan sayı.

Elde: Çarpma ve toplama işlemlerinde bir sonraki sıranın rakamlarına katılacak olan sayı

Çarpan: Bir çarpma işleminde çarpılan sayılardan her biri.

Çarpım: Çarpma işleminin sonucu olan sayı.

Bölen: Bir bölme işleminde bölünen sayının kaç eş parçaya ayrıldığını gösteren sayı.

Bölüm: Bölme işlemi sonunda elde edilen sayı.

Bölünen: Bölme işleminde eşit bölümlere ayrılması gereken miktar veya sayı.

Kalan: Bölme işleminde bölünenden artan sayı

Yukarıda tanımları listelenen kavramlarla öğrenciler ilköğretim seviyesinde tanışmaktadır. Ancak ilköğretimde doğal sayılarla ilişkilendirilen bu kavramlar ortaokuldan itibaren farklı sayı kümeleri ile birlikte de kullanılmaktadır.

2.2.4.1.c. Doğal sayılarla ilgili öğrenme güçlükleri ve kavram yanlışları

Doğal sayıların sayılar ve işlemler öğrenme alanının en temel konusu olduğu söylenebilir. İlkokul kademesi ile başlayan doğal sayı kavramı ile ilgili kazanımlar ortaokul kademesinde de devam etmektedir. Gerek ilköğretim gerek ortaokul kademesinde öğrencilerle ilgili yapılmış çalışmalar doğal sayılarda çeşitli kavram yanlışlarının ve öğrenme güçlüklerinin olduğunu ortaya koymaktadır. Yapılmış çalışmalar ışığında bu güçlükler şu kategoriler altında incelenebilir:

- Basamak ve sayı kavramı ile ilgili yanlışlar
- Sayıların okunması ve yazılması ile ilgili zorluklar
- Toplama işlemi ile ilgili yanlışlar
- Çıkarma işlemi ile ilgili yanlışlar
- Çarpma işlemi ile ilgili yanlışlar
- Bölme işlemi ile ilgili yanlışlar

Basamak ve sayı kavramı ile ilgili yapılmış çalışmalardan biri Gedik Altun'a (2019) aittir. Gedik Altun (2019) çalışmasında öğrencilerin basamak değeri kavramını anlamada yaşadığı zorlukları ve kavram yanlışlarını ele almıştır. Bu zorlukları ve

zorlukların olası sebeplerini ortaya koymuş ardından öğretim aşaması için çeşitli öneriler sunmuştur. Tekinkır (2008) öğrencilerin tahmin stratejileri ile başarıları arasındaki ilişkiyi inceledikleri çalışmada işlemsel stratejilerle ilgili öğrenci zorluklarını da tespit etmiştir. Bingolbali ve Özmantar (2014) doğal sayılarda toplama ve çıkarma işlemleri ve basamak kavramı ile ilgili öğrenme güçlüklerini ortaya koymuştur. Özdeş (2013) yüksek lisans tezinde 9. sınıf öğrencilerinin doğal sayılar konusundaki kavram yanlışlarını incelemiştir. Her dört çalışma göz önüne alındığında öğrenme güçlükleri ve yanlışlar şu şekilde sıralanabilir:

- Doğal sayıları diğer sayı kümelerinden ayırt etme ile ilgili güçlükler
- Sıfırın çift olmadığını düşünme
- Sıfırın rakam olmadığını düşünme
- Rakamları ve sayıları ayırt edememe
- Basamak değeri ile basamak kavramlarının aynı anlamda olduğunu düşünme
- Basamak değeri kavramının çokluk değerine indirgenmesi (48 sayısı 40 ve 8'den oluştuğu bilinmesine rağmen onluk ve birlik olarak ifade edememe)
- Basamaklar arasındaki ilişkiyi anlama ile ilgili güçlükler (1,3,0 ve 2 rakamları ile yazılabilecek en küçük sayıyı 1230 olarak ifade etme)
- Sayı değeri ile basamak değerini ayırt edememe ve iki kavramı birbirine karıştırma
- Rakamın konumunun değişmesi ile değerinin değişmesini anlayamama

Albayrak, Yazıcı ve Şimşek (2019), 7. sınıf öğrencilerinin büyük doğal sayıları okuma ve yazma ile ilgili güçlüklerini araştırmıştır. Karaca (2012), beşinci sınıf öğrencilerinin doğal sayılarda işlemlerle ilgili rutin olmayan problem çözümlerini incelediği yüksek lisans tezinde doğal sayılarla ilgili öğrencilerin yaşadığı çeşitli güçlükleri ortaya koymuştur. Bu çalışmalarla birlikte Gedik Altun (2019) ve Bingolbali ve Özmantar'ın (2015) bulguları da bir araya getirilerek doğal sayıların okunuşu ve yazılması ile ilgili güçlükler aşağıda listelenmiştir.

Rakamla ifade edilen sayıları okuyabilmede yaşanan güçlükler:

- Basamak değerlerini soldan sağa doğru ayıramama
- 6 basamaktan sonrasını okuyamama
- Rakamları gruplandırdıktan sonra grupları basamak değerlerine göre yazamama
- Binler bölümünde 001 varsa “Bir bin” şeklinde okuma
- Çözümlemiş olarak verilen sayıları okuyamama veya yazamama

Okunuşu verilen sayıyı rakamla yazabilmede yaşanan güçlükler

- Altı basamaktan daha büyük sayıları rakamla ifade edememe
- Rakamları gruplandırırken “0” rakamını dikkate almama
- Sıfırı bir “yer tutucu” olarak kabul etmedeki güçlükler (Altı yüz beşi, 65 olarak yazma)
- Sıfırın yanlış yerde eksik ya da fazladan kullanımı

Doğal sayılarla ilgili yapılmış öğrenme güçlüğü ve kavram yanlışları çalışmalarının büyük bir bölümü dört işlemlerle ilgilidir. Morkoyunlu (2019) ve Bingolbali ve Özmantar (2015) çalışmalarında doğal sayılarda dört işlemle ilgili yanlışları bir araya getirmiştir. Bu iki çalışmaya göre toplama ve çıkarma ile ilgili yanlışlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

Toplama işlemi ile ilgili yanlışlar;

- Her basamağı birbiri ile ilişkisiz düşünüp ayrı hesaplama ($24+9=213$)
- İşlemlerde soldan sağa gitme ($46+71=18$)
- Eldeleri işlem sonuna basamak olarak ekleme ($48+35=173$)
- Sayıdaki tüm rakamları toplama ($43+8=15$)
- Toplamada eldeyi hem sonraki sütuna hem de işlem sonuna ekleme ($35+48=183$)
- Toplamada her sütunda toplamın sadece onlar basamağını yazma ($87+93=11$)

Çıkarma işlemi ile ilgili yanlışlar;

- Onluk bozmayı gerekmeyen durumlarda da onluk bozma ($47-23=14$)
- Büyük rakamdan küçük rakamı çıkarma ($35-19=24$)
- Toplama veya çıkarma işleminde 0’ı yutan eleman olarak alma ($5-0=0$)
- Çıkarmada sıfırı etkisiz eleman olarak kullanma
- Çıkarmada sıfırı atlayarak sonraki basamaktan ödünç alma
- Çıkarma işleminde soldan hizalama
- Çıkarmada her seferinde en büyük basamaktan ödünç alma
- Çıkarmada sıfırdan ödünç alma (Sıfır yerine 9 yazarken sıfırın solundaki basamağı değiştirmeme)

Morkoyunlu’nun (2019) yanı sıra kesirlerde çarpma işlemi ile ilgili yanlışları derleyen bir diğer araştırmacı da Harris (2001) olmuştur. Harris (2001) çarpma ve bölme işlemi ile ilgili kitapta işlemlerin kavramsal boyutundan modellemelerine, öğrenme güçlüklerinden, çeşitli etkinliklere kadar geniş bir yelpazede konuyu sunmuştur. Bu iki çalışma ışığında çarpma işlemi ile ilgili yanlışlar şu şekilde sıralanabilir:

- Çarpma her zaman büyültür yanılgısı
- Çarpanların sırayla çarpılması gerektiğini düşünme ($2.3.6 \neq 2.6.3$)
- 10 ve 10'un kuvvetleri ile çarparken fazladan sıfır ekleme eğilimi
- Çarpma yerine toplama yapma
- Eldeyi doğrudan yazma ($36 \times 3 = 918$)
- Eldeyi unutma ($36 \times 3 = 98$)
- Birler basamağını çarptıktan sonra eldeyi onlar basamağına ekleme ($36 \times 3 = 48$)
- Onlar basamağının elde ile çarpılması ($36 \times 3 = 38$)
- Sıfır ile çarpmada sayının kendisini yazma ($6 \times 0 = 6$)
- Bir basamak sola kaydırma işlemi yapmadan toplama
- Çapraz çarpım ihtiyacı duymama (72×36 işleminde 6 ile 2'yi; 7 ile 3'ü çarpıp birbirleri ile toplama)
- Son kısımda toplama yapacağına çıkarma yapma

Bölme işlemi ile ilgili yanılgıları ve öğrenme güçlüklerini bir araya getiren Morkoyunlu (2019), Harris (2001) ve Özdeş'in (2013) yanı sıra sadece bölme işlemine odaklanan Oral (2020), yüksek lisans tezinde 5. sınıf öğrencilerinin doğal sayılarda bölme işleminde yaşadığı zorlukları ve zorlukların nedenlerini araştırmıştır. Bu çalışmaların elde ettiği sonuçlara göre bölme işlemi ile ilgili yaşanan güçlükler şunlardır:

- Bölmede yer alan çıkarma işleminde yapılan hataların bölme sonucuna yansımaları
- Bölmede yapılan çarpma işleminin neden olduğu zorluklar
- Bölme işleminde bölene ne zaman "sıfır" konulacağını belirleyememe
- Basamak indirme ve içinde arama ile ilgili zorluklar
- Algoritmayı yanlış uygulama ile ilgili zorluklar (Sıralamayı ve işlemleri karıştırma)
- Maksimum bölümün bulunması ile ilgili zorluklar (Kalanı bölenden büyük yazabilme)
- Bölmede birleşme özelliğini kullanma
- Bölme işleminde ortak çarpan parantezine alma
- 1'e bölme işleminde "1 kişi ile paylaşma yapılmaz." düşüncesi
- Sıfıra bölme işleminde, "Hiç kimse ile paylaşmıyorsam elimdeki aynı kalır." düşüncesi
- Bir sayının sıfıra bölümünün sıfır veya kendisine eşit olduğunu düşünme
- Küçük sayıyı büyük sayıya bölme

- Bir sonraki basamağa geçmeyi unutmama
- İşleme sol taraftan değil sağ taraftan başlama
- Kalan kısmı sonraki basamağa eklemeyi unutmama
- Bölümün 10'un katı olduğu kalanlı bölmelerde en sona sıfır eklemeyi unutmama
- Bölünen ile bölen her ikisinin de son basamaklarında sıfırlar mevcut ise kısa yoldan yapılan sadeleştirme işleminde kalan mevcutsa kalana sıfır eklememe (250:60 işleminde bölümü 4, kalanı 1 bulma)

Görüldüğü gibi öğrencilerin doğal sayılarla ilgili birçok farklı türde öğrenme güçlükleri ve kavram yanlışları literatürde yer almaktadır. En temel sayı kümesi ile ilgili mevcut olan bu güçlüklerin tespit edilmesi ve giderilmesi ile ilgili öğretmenlere de çok iş düştüğü öngörülebilir.

2.2.4.2. Tam sayılar ve öğretimi

2.2.4.2.a. Öğretim programındaki yeri ve ilgili kazanımlar

Doğal sayılar ardından tanışılan ilk sayı kümesi tam sayılar olmaktadır. Öğretim programında 6. sınıfta tam sayılar alt öğrenme alanı, 7. sınıfta ise tam sayılarda işlemler alt öğrenme alanı yer almaktadır. Bu alt öğrenme alanlarına ilişkin kazanımlar Tablo 8'de sırasıyla verilmektedir:

Tablo 8

Tam sayılarla ilgili kazanımlar

Sınıf Düzeyi	İlgili Kazanımlar
6	K1: Tam sayıları tanıy ve sayı doğrusunda gösterir. K2: Tam sayıları karşılaştırır ve sıralar. K3: Bir tam sayının mutlak değerini belirler ve anlamlandırır.
7	K1: Tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerini yapar, ilgili problemleri çözer. K2: Toplama işleminin özelliklerini akıcı işlem yapmak için birer strateji olarak kullanır. K3: Tam sayılarla çarpma ve bölme işlemlerini yapar. K4: Tam sayıların kendileri ile tekrarlı çarpımını üslü nicelik olarak ifade eder. K5: Tam sayılarla işlemler yapmayı gerektiren problemleri çözer.

Öğrenciler sayı doğrusunda sıfırın solunda yer alan sayılarla ilk kez 6. sınıfta karşılaşmakta sıfırdan daha küçük sayıların da olduğunu öğrenmektedir. İlk kazanımın uyarılarında tam sayılara olan ihtiyacın fark edilmesine yönelik çalışmalara yer verilmesi gerektiği belirtilmektedir. İkinci uyarıda ise pozitif ve negatif tam sayıların zıt yön ve değerleri ifade etmede kullanıldığının vurgulanması gerektiği söylenmekte ve asansördeki katlar ve hava sıcaklıkları örnekleri verilmektedir. Ayrıca $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$ ve $\mathbb{Z}^-$ sembolleri

gösterilmektedir. Tam sayıları karşılaştırmaya yönelik ikinci ve üçüncü kazanımda da sayı doğrusunda sayıların konumlarının vurgulanması ve gerçek hayat durumlarını içeren çalışmalara yer verilmesi gerektiği uyarısı yer almaktadır.

7. sınıf düzeyinde yer alan ilk kazanımda çıkarma işlemi yapılırken çıkanın ters işaretlisi ile toplama işlemi yapmanın aynı anlama geldiği vurgulanmakta; asansör ve termometre gibi araçlar, yatay ve dikey sayı doğrusu gibi modellerle ilişkilendirmelere yer verilmesi gerektiği ifade edilmektedir. 2. kazanımla birlikte değişme, birleşme, ters eleman ve etkisiz eleman özellikleri ele alınmaktadır. Çarpma ve bölme işlemlerinin yer aldığı 3. kazanımda uygun modellerin kullanılması gerektiği, 0, 1 ve -1'in etkilerinin ve çarpmanın değişme, birleşme, etkisiz ve yutan eleman ile dağılma özelliğinin inceleneceği bildirilmektedir. Üslü ifadeler başlığında da ele alınacak olan 4. kazanımla öğrenciler tam sayıların üslü kuvvetlerini görmekte ve üssün tek ve çift olduğu durumları incelemektedir. Son olarak da tam sayılarla ilgili problem çözme kazanımı yer almaktadır.

2.2.4.2.b. İlgili kavramlar ve tanımları

Öğrencilerin doğal sayılardan sonra karşılaştığı sayı kümesi tam sayılardır. Tam sayı tanımı Argün, Arıkan, Bulut ve Halıcıoğlu'na (2014) göre aşağıdaki gibi yapılabilir.

- $\mathbb{Z}^- = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^-$ kümesinin her bir elemanına tam sayı denir.
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde $(a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow a+d = b+c$ şeklindeki $\sim$ bağıntısına göre $\{(\overline{a,b}) : (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ şeklinde tanımlanan kümeye tam sayılar kümesi denir.

Bu notasyonik tanımların dışında, Biber (2016) tam sayıları “doğal sayılara toplama işlemine göre terslerinin eklenmesiyle oluşan küme” şeklinde tanımlamıştır. Van de Walle, Karp ve Bay-Williams (2010), negatif tam sayıları doğal sayılar üzerinden tanımlamaktadır. $n+x=0$ denkleminde n 'i bir doğal sayı seçip denklemin çözümünden yola çıkarak $-n$ sayısını oluşturmaktadır. Negatif tam sayılar ve doğal sayıların birleşimi ile de tam sayılar kümesini elde etmektedir.

MEB 6. sınıf ders kitabında Bektaş, Kahraman ve Temel (2018) “Tam olan pozitif ve negatif sayılar ile 0'ın birleşiminden oluşan sayılar kümesine tam sayılar denir.” şeklinde bir tanım yapmıştır. Bir başka MEB ders kitabında Özdemir (2019), $\mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,4,\dots\}$ kümesine pozitif tam sayılar kümesi, $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4,\dots\}$ kümesini negatif tam sayılar kümesi olarak tanıttıktan sonra bu iki kümenin ve sıfırın birleşimi ile oluşan kümenin tam sayılar kümesi olduğunu belirtmiştir.

Tam sayılara ilişkin temel kavramlardan biri de mutlak değerdir. Karmaşık sayı genelinde kavrama bakıldığında $a+ib$ karmaşık sayısının (a,b) şeklindeki vektörel yazımında vektörün orijine olan uzaklığı olarak ifade edilebilir. Reel sayı ekseninde mutlak değer kavramı ise o sayı ile sıfır arasındaki uzaklık olarak tanımlanmaktadır. Parçalı

fonksiyon şeklinde ele alındığında $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ biçiminde tanımlanabilmekte ve $|x|$ sayısına x 'in mutlak değeri denilmektedir (Topbaş Tat, 2019). Lane ve Birkhoff (1999) bir x sayısının mutlak değerini işaret fonksiyonundan yola çıkarak " $|x| = x \cdot \text{sgn}x$ " şeklinde tanımlamıştır.

MEB ders kitaplarındaki tanımlarda sıfıra olan uzaklıktan yola çıkıldığı görülmüştür. Bu kitaplardan biri olan Bektaş ve diğerleri (2018) tarafından yazılan 6. sınıf ders kitabında "Bir sayının sayı doğrusunda sıfıra uzaklığının sayısal değerine mutlak değer denir." tanımı yapılmıştır. Benzer bir ifade ile Özdemir (2019) bir tam sayının 0'a (başlangıç noktasına) olan uzaklığını bu tam sayının mutlak değeri olarak tanımlamıştır.

2.2.4.2.c. Tam sayılarla ilgili öğrenme güçlükleri ve kavram yanılgıları

Tam sayıların matematik eğitimindeki önemi yadsınamaz. Öğrenciler, doğal sayılardan sonra tam sayılarla karşılaşır. Doğal sayılarda yer alan özelliklerin ortak yönlerini ve ayrışan yönlerini dikkate alarak tam sayılara aktarabilme, cebirsel yeterliliğe ulaşabilme ve bu sayede matematiğin önemli becerileri arasında yer alan problem çözebilme adına oldukça önemlidir (Gallardo, 2008). Literatürde yer alan birçok çalışma tam sayılarla ilgili gerek kavramın kendi zorluğundan gerekse öğrencilerin doğal sayılardaki alışkanlıklarından ötürü öğrenme güçlükleri ve kavram yanılgıları yaşandığını ortaya koymaktadır (Koroğlu ve Yeşildere, 2009; Spang, 2009; Melezoğlu, 2005; İşgüden 2008; Ercan, 2010; Erdem, Başbüyük, Gökkurt, Şahin ve Soylu, 2015; Zehir ve Zehir, 2019; Ertuğrul, 2009; Işıksal Bostan, 2009). Bu zorluklar ve kavram yanılgıları kategoriler halinde aşağıda listelenmiştir:

- Tam sayılar kümesini ifade etmede zorluklar
 - Pozitif ve negatif tam sayıları tanımlayamama (İşgüden, 2008)
 - Sıfırı tam sayı kabul etmeme (Koroğlu ve Yeşildere, 2004; İşgüden, 2008)
 - Tam sayıları sadece negatifler olarak düşünme (Koroğlu ve Yeşildere, 2004),
 - Ondalık ve kesir biçiminde yazıldığında tam sayı olarak algılayama (Ercan, 2010)
- İşaretlerin anlamları ile ilgili zorluklar
 - Aradaki sembollerin sayıya ait mi yoksa işleme ait mi olduğunu anlayamama (Koroğlu ve Yeşildere, 2009; Spang, 2009)
 - Eksi işaretine anlam verememe (Erdem ve diğerleri, 2015)
 - Parantezlerin kullanımını anlayamama (Van de Walle, Karp, ve Bay-Williams, 2012)

- Üslü ifadeler ve işlem önceliği ile ilgili zorluklar
 - Tam sayıların kuvvetlerini bulmada yaşanan zorluk (Köroğlu ve Yeşildere, 2004; İşgüden 2008)
 - Negatif tam sayıların çift ve tek kuvvetlerini bulmada yaşanan zorluk (İşgüden 2008)
 - İşlem önceliğini uygulamada zorluk (İşgüden, 2008)
- Toplama ve çıkarma işlemlerine yönelik zorluklar (Işıksal Bostan, 2009; Hativa ve Cohen, 1995)
 - + ve – sembollerinin işlem anlamının dışına çıkmasını kavrayamama
 - Sayının başındaki işaretin sayının yönü mü yoksa işlem mi olduğunu anlayamama (+1-2 işlemindeki –‘nin anlamı gibi)
 - Sıfırdan pozitif bir sayı çıkarmada yaşanan zorluklar [0-4=? sorusuna 0, 4 veya 6 yanıtlarının verilmesi gibi]
 - Pozitif bir sayıdan daha büyük bir pozitif sayıyı çıkarmada yaşanan zorluklar (3-8 sorusuna 3,5,8,11 veya -11 gibi yanıtlar verilmesi)
 - İki negatif sayının toplamına ilişkin zorluklar [(-3)+(-5)=? sorusuna -2, 2, 8, 3 gibi yanıtlar verilmesi]
 - Birbirinin tersi olan iki sayıyı toplama ile ilgili zorluklar (-3+3=? sorusuna 3 veya 6 yanıtlarının verilmesi)
 - Pozitif bir sayının kendisinden mutlak değerce daha büyük olan negatif sayıya eklenmesi ile ilgili zorluklar [-8+3=? sorusuna 5, 11, -11, 8 veya 3 yanıtlarının verilmesi]
 - Tam sayılarda toplama veya çıkarma işlemlerinde verilmeyen terimin bulunması ile ilgili zorluklar (İşgüden, 2008)
- Çarpma ve bölme işlemine ilişkin zorluklar (Işıksal Bostan, 2009; Hativa ve Cohen, 1995)
 - Çarpma işleminde sonuç her zaman çarpanlardan büyüktür düşüncesi ile sonucu her zaman pozitif yazma
 - Bölme işlemi sonucu her zaman küçültür yanılgısı ile sonucu her zaman negatif yazma
 - İki negatif sayının çarpımının neden pozitif olduğunu anlayamama
 - Tam sayılarda toplama işlemindeki kuralları çarpma ve bölmeye genelleme
 - Sıfır ile bölmenin tanımsız olduğunu anlayamama (Köroğlu ve Yeşildere, 2004)

- Tam sayıların modellenmesi ile ilgili zorluklar
 - Sayma pullarını anlamada zorluk (Erdem ve diğerleri, 2015; Zehir ve Zehir, 2019)
 - Tam sayıların sayı doğrusunda gösteriminde zorluk (İşgüden, 2008; Ertuğrul, 2009)
 - Sayma pulları ile modellenmiş işlemi matematiksel dille yazamama (Ertuğrul, 2009)
 - Verilen işlemi sayma pulları ile gösterememe (Ertuğrul, 2009)
- Tam sayılarda sıralama ile ilgili zorluklar (Melezoğlu, 2005; İşgüden 2008; Erdem vd., 2015; Ertuğrul, 2009)
 - Negatif sayıların büyüklüklerini karşılaştırmada yaşanan güçlük (Işıksal Bostan, 2009)
 - Sıralamaları işaretten bağımsız ele alma (Işıksal Bostan, 2009)
 - Sembol kullanarak tam sayıları sıralamada yaşanan güçlük (İşgüden, 2008)
- Problemlerle ilgili zorluklar
 - Sözel problemleri çözmede zorluklar (Melezoğlu, 2005)
 - Matematiksel dille verilen bir işlemle ilgili problem kuramama (Ertuğrul, 2009)
 - Günlük hayatla ilişkilendirmede zorluk (Erdem ve diğerleri, 2015)
- Mutlak değerle ilgili zorluklar
 - Mutlak değerın anlamına yönelik zorluklar (İşgüden, 2008)
 - Mutlak değerin başında eksi varsa onu göz ardı etme (Van de Walle ve diğerleri, 2012)
 - Sayıların mutlak değerini bulamama (İşgüden, 2008; Ertuğrul, 2009)
 - Mutlak değeri işaret değiştirici olarak düşünme (Ertuğrul, 2009)
 - Mutlak değerli sıralamalarda mutlak değeri göz ardı etme (Ertuğrul, 2009)

Görüldüğü gibi tam sayılarla ilgili zorluklar; tam sayı kümesinin anlaşılabilmesi, negatif işareti ile ilgili güçlükler, dört işlem yaparken yaşanan sorunlar, sayıların sıralanması ile ilgili güçlükler, sayı doğrusu ve sayma pulları ile ilgili modelleme güçlükleri, mutlak değerle ilgili güçlükler ve tam sayıların günlük hayattaki veya problem

durumlarındaki sözel ifadelerle ilişkisini anlamada yaşanan zorluklar olmak üzere çeşitli şekillerde karşımıza çıkmaktadır.

2.2.4.3. Çarpınlar ve katlar alt öğrenme alanının öğretimi

2.2.4.3.a. Öğretim programındaki yeri ve ilgili kazanımlar

Çarpma ve bölme işlemlerinde öğrencilerin ilkokulda tanıştığı çarpın, kat ve bölen gibi kavramlar ortaokul 6. sınıfta bir alt öğrenme alanı olarak özelleşmektedir. Bu alt öğrenme alanında öğrenciler bölünebilme kurallarından asal sayılara kadar yeni kavramlarla tanışır. Yedinci sınıfta bu alt öğrenme alanına yönelik herhangi bir kazanım mevcut olmayıp 8. sınıf düzeyinde 3 kazanım yer almaktadır. Tablo 9’da programda yer alan kazanımlar verilmektedir:

Tablo 9

Çarpınlar ve katlar alt öğrenme alanına ilişkin kazanımlar

Sınıf Düzeyi	İlgili Kazanımlar
6	K1: Doğal sayıların çarpınlarını ve katlarını belirler. K2: 2, 3, 4, 5, 6, 9 ve 10’a kalansız bölünebilme kurallarını açıklar ve kullanır. K3: Asal sayıları özellikleriyle belirler. K4: Doğal sayıların asal çarpınlarını belirler. K5: İki doğal sayının ortak bölenleri ile ortak katlarını belirler, ilgili problemleri çözer.
8	K1: Verilen pozitif tam sayıların pozitif tam sayı çarpınlarını bulur, pozitif tam sayıların pozitif tam sayı çarpınlarını üslü ifadelerin çarpımı şeklinde yazar. K2: İki doğal sayının en büyük ortak bölenini (EBOB) ve en küçük ortak katını (EKOK) hesaplar, ilgili problemleri çözer K3: Verilen iki doğal sayının aralarında asal olup olmadığını belirler

Altıncı sınıfta öğrenciler bir sayının çarpınları ve katları kavramını öğrenmekte, asal sayıların öğrenimini de kolaylaştırmak ve desteklemek için bölünebilme kuralları ile tanışmaktadır. Asal sayıları öğrendikten sonra asal çarpınları ayırt edebilmektedir. Son olarak iki doğal sayının ortak kat ve ortak bölenlerini bulmaktadır. Programdaki uyarı ve kısıtlamalara bakıldığında, bölünebilme kurallarında harfli ifade kullanımından kaçınılması gerektiği belirtilmektedir. 3. kazanımda asal sayıları bulurken Erothenes kalburundan yararlanılması gerektiği ve 100’e kadar olan asalların bulunması gerektiği belirtilmektedir. 5. kazanımda ise daha önceki programlarda bu sınıf düzeyinde yer alan EBOB ve EKOK kavramlarına girilmeyeceği uyarısında bulunmaktadır.

Sekizinci sınıfta öğrenciler bir doğal sayının çarpınlarını üslü biçimde yazmayı öğrenmekte ve bu kazanımda asal çarpınları bulmaya yönelik çalışmaların da yapılması gerektiği belirtilmektedir. Öğrenciler EBOB ve EKOK kavramları ile tanışmakta ancak

alan ve hacim hesaplamayı gerektiren problemler çözülmemektedir. Son olarak öğrenciler “aralarında asallık” kavramını öğrenmektedir.

2.2.4.3.b. *İlgili kavramlar ve tanımları*

Çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanında bölünebilme, çarpan ve kat, ortak bölen ve ortak katlar, asal sayılar gibi çeşitli konular mevcuttur. Öğrenciler 6. sınıf düzeyinde bu alt öğrenme alanı ile ilk kez karşılaşmalarına rağmen alt öğrenme alanının bazı kavramlarına ilkokuldan aşinalıkları olmaktadır. Örneğin, öğrenciler ilkokul düzeyinde çarpma işlemi öğrenirken çarpan ve kat kavramları ile; bölme işlemi öğrenirken bölen kavramları ile karşılaşmaktadır. Ancak ortaokulda karşılaştıkları çarpan, bölen ve bölünebilme ifadelerinin önceki öğrenmelerinden bir miktar farklılaştığı söylenebilir.

Bölünebilme kavramından yola çıkarak çarpan ve bölen kavramları da tanımlanabilir. Akkan ve Öztürk (2019), “Herhangi iki $a, b \in \mathbb{Z}$ ($b \neq 0$) olmak üzere verilen a tam sayıları için $a = qb$ olacak şekilde bir $q \in \mathbb{Z}$ varsa; b, a’yı böler denir. Aksi halde b, a’yı bölmez denir.” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Burada yer alan bölünebilme ifadesi ile kalansız bölünebilme kastedilmektedir.

Ortaokul düzeyinde 6. sınıfta görülen bölünebilme kuralları sadece doğal sayılar özelinde ele alınmaktadır. Bu nedenle çarpan, kat, ortak bölen, ortak kat gibi kavramlar tanıtılırken de doğal sayılar kümesinde çalışılmaktadır. Çarpan kavramını tanımlayabilmek için her doğal sayının herhangi iki doğal sayının çarpımı şeklinde yazılabildiğini belirtmek gerekir. Bu iki doğal sayıdan her birine o doğal sayının bir çarpanı denir. (Akkan ve Öztürk, 2019). Ortaokul ders kitaplarında da genelde yukarıdaki tanım yer alırken Özdemir (2019) tarafından yazılan 6. sınıf ders kitabında çarpma işlemi yerine bölme işleminden yola çıkılarak, “Bir doğal sayıyı kalansız olarak bölebilen sayılara o doğal sayının çarpanları denir.” tanımı yapılmıştır. Bir doğal sayının çarpanlarını bulmakla onu kalansız olarak bölebilen sayıları bulmak aynı şeydir. Bu durumda bölen kavramı ile çarpan kavramı birbirinin yerine kullanılabilir. Bir doğal sayıyı tam olarak bölen sayıya sayılarına o sayının bölenleri denilmektedir (Akkan ve Öztürk, 2019). Tanımda yer alan tam olarak bölme ile kastedilen kalansız bir bölme işlemidir. MEB ders kitaplarında genelde çarpan kavramı çarpma işlemi ile bölen kavramı ise bölme işlemi ile ilişkilendirilerek tanımlanmaktadır. Çağlayan, Dağıstan ve Korkmaz (2018) tarafından yazılan 6. sınıf ders kitabında, “Bir bölme işleminde bir doğal sayı sıfırın dışındaki bir doğal sayıya bölündüğünde kalan sıfır oluyor ise bu işleme kalansız (tam) bölme denir. Bölen sayıya da kalansız (tam) bölen denir.” şeklindeki ifade ile kavramı tanımlamıştır. Bölen kavramının en farklı tanımı Bektaş ve diğerleri (2018) tarafından yazılan ders kitabında, “Bir sayıyı eş gruplara ayıran sayılara bölen denir.” ifadesi olmuştur. Tanımın öğrenciler açısından açık ve anlaşılır olmadığı söylenebilir.

Çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanının isminde de yer alan temel kavramlardan biri de “kat” kavramıdır. Weisstein (t.y.), “Bir x sayısının katı, n tam sayı olmak üzere $y=nx$ eşitliği ile oluşan y sayılarıdır.” şeklinde tanım yapmıştır. Bu tanımda dikkat çeken unsur x ve y sayılarının tam sayı olması gerekliliğinin belirtilmemesidir. Bu durumda $1/4$ ’ün 2 katı olarak $1/2$ ele alınabilmektedir. Ancak, “6 sayısı 4’ün $3/2$ katıdır.” ifadesi tanıma uymamaktadır. Akkan ve Öztürk (2019), “Sıfırdan farklı herhangi bir doğal sayının başka bir doğal sayı ile çarpılması sonucu elde edilen sayılara o doğal sayının katları denilmektedir. Buna göre bir n doğal sayısının katları kümesi $\{0, n, 2n, 3n, \dots\}$ şeklinde gösterilebilir.” tanımını yapmıştır. Tanımın sadece doğal sayılar kümesi göz önüne alınarak yapıldığı anlaşılmaktadır. Ancak tanım, sıfırın katlarını (sadece kendisi) dışlamaktadır. Ancak bir sayının katları kümesini ele alırken sıfırın her sayının bir katı olduğu gerçeğini belirtmektedir. MEB 6. sınıf ders kitabında, “Bir doğal sayının katları bu sayının sırasıyla 1, 2, 3, 4, 5, ... gibi doğal sayılarla çarpımından oluşur.” tanımı yer almaktadır (Çağlayan ve diğerleri, 2018). Bu tanımda ise bir öncekinin aksine bir sayının sıfır katı yer almamaktadır.

Kat kavramının tanımı ortak kat ve EKOK kavramları açısından da oldukça önemlidir. Sıfır her sayının katı olarak ele alındığında sıfırın ortak katlar arasında da yer alması gerektiği de söylenebilir. Formel olarak Akkan ve Öztürk (2019) tarafından “ $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid k$ ve $b \mid k$ olacak şekilde bir $k > 0$ tam sayısı varsa k ’ya a ve b tam sayılarının bir ortak katı denir.” şeklinde kavramın tanımı yapılmıştır. Tanıma göre a ve b sayılarının tam olarak bölebildiği k pozitif tam sayılarına ortak kat denilmektedir. $k > 0$ ifadesi ile 0’ın her sayı ikilisinin ortak bir katı olmadığı belirtilmektedir. Formal tanımın yanı sıra Akkan ve Öztürk (2019) ortaokul öğrencileri için farklı bir tanım önermiştir. Öğrenciler ortak kat kavramı ile tanıştığında henüz tam sayıları görmedikleri için, “İki veya daha fazla sayının katları içerisinde ortak olanlara bu sayıların ortak katları denir.” şeklinde de tanımlama yapmıştır. Ancak bu tanıma göre öğrenci her iki sayının ortak katı alınması gerektiğinde sıfırı da dahil edecektir. 6. sınıf ders kitabında da Çağlayan ve diğerleri (2018) ortak katı, “iki veya daha fazla sayının ortak katı” şeklinde tanımlamıştır. Bu tanıma göre de sıfır bir ortak kat olarak ele alınabilir. Bu durum EKOK kavramı ile ilgili çalışılırken, “5 ve 8 sayılarının EKOK’u neden sıfır değildir?” sorusunu öğrencilerin aklına getirebilir.

8. sınıf ders kitabında, “İki doğal sayının ortak katlarından en küçüğüne bu sayıların en küçük ortak katı (EKOK) denir.” tanımı yapılmıştır (Çetin, Aksakal, Ertürk, Şay ve Tıgılı, 2019). Eğer kat kavramında sıfırcı kat kümeye dahil edilirse, ortak kat ve EKOK kavramları da MEB ders kitaplarında yer aldığı gibi olursa iki sayının EKOK’unu öğrenci her zaman sıfır olarak ifade edebilir. Formel olarak EKOK kavramı, “ a ve b her

ikisi birden sıfır olmayan iki tam sayı olsun. Bu durumda i) $k \in \mathbb{Z}^+$ ii) $a \mid k$ ve $b \mid k$ iii) $t \in \mathbb{Z}$ için $a \mid t$ ve $b \mid t$ ise $k \mid t$ şartlarını sağlayan k tamsayısına a ile b 'nin en küçük ortak katı denir (Argün ve diğerleri, 2014).” şeklinde tanımlanmaktadır. Bu durum daha sade bir ifadeyle, “ a ve b sayısının tüm ortak katlarını bölen negatif olmayan m sayısına a ve b sayılarının en küçük ortak katı denir (Akkan ve Öztürk, 2019).” şeklinde de ifade edilebilir. Sıfır sayısı ortak kat kabul edilse dahi diğer ortak katları bölemeyeceği için tanımlara göre EKOK olamaz.

Kat, ortak kat ve EKOK kavramları arasındaki ilişkinin bir benzeri bölen, ortak bölen ve EBOB kavramları arasında da mevcuttur. Aslında ortaokul düzeyinde bölen kavramından daha çok aynı sayılara işaret eden çarpan kavramı kullanılmaktadır. Ancak “en büyük ortak çarpan” şeklinde aynı anlama gelebilecek isimlendirme kullanılmamaktadır. Akkan ve Öztürk’e (2019) göre “ $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer bir $d \neq 0$ tam sayısı için $d \mid a$ ve $d \mid b$ koşulları sağlanıyorsa d 'ye a ile b tam sayılarının bir ortak böleni denir.” şeklinde ortak bölen tanımı yapılmaktadır. Ancak ortaokul düzeyinde yer alan öğrenciler için, “İki veya daha fazla sayıyı aynı anda bölen sayılara, bu sayıların ortak böleni denir.” tanımını tavsiye etmişlerdir. Argün ve diğerleri (2014) sayıların ikisinin birden sıfır olmaması gerektiğini de belirterek, “ a ve b her ikisi birden sıfır olmayan iki tam sayı olsun. Bu durumda i) $d \in \mathbb{Z}^+$ ii) $d \mid a$ ve $d \mid b$ iii) $c \in \mathbb{Z}$ için $c \mid a$ ve $c \mid b$ ise $c \mid d$ şartlarını sağlayan d tamsayısına a ile b 'nin en büyük ortak böleni denir.” şeklinde tanım yapmıştır. Sıfır hariç tüm tam sayılar sıfırın bir böleni olduğu için $(0,0)$ çiftinin en büyük ortak böleni bulunamaz. Bu nedenle tanımda “ikisi birden sıfır olmayan” şeklinde belirtilmiştir. 8. sınıf ders kitabında Çetin ve diğerleri (2019), “İki doğal sayının ortak bölenlerinden en büyüğüne bu sayıların en büyük ortak böleni (EBOB) denir.” şeklinde tanım yapmışlar ve $(0,0)$ ikilisinin durumunu belirtmemişlerdir.

Çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanına ait en temel kavramlardan biri asal sayı kavramıdır. Asal sayılarla ilgili literatürde birçok farklı tanım bulunmaktadır. “1 ve kendisinden başka pozitif böleni olmayan, 1’den büyük tam sayı”, “Kendisinden daha küçük iki doğal sayının çarpımı şeklinde yazılamayan 1’den büyük doğal sayılardır.” ve “Sade ve sadece 4 tam sayı böleni olan pozitif tam sayılardır.” tanımları bunlardan bazılarıdır (Gardner, 1987). Akkan ve Öztürk (2019) ise “-1, 1, -p ve p sayıları dışında hiçbir sayıya bölünmeyen $p > 1$ tam sayısına asal sayı denir.” şeklinde tanım yapmıştır. Tanımların her biri asal sayı kavramını tam olarak karşılamaktadır. Ancak 6. sınıf ders kitaplarında öğrenciler henüz tam sayılarla tanışmadığı için bölenler sadece pozitif olmak zorundaymış gibi onlar yok sayılarak tanımlar yapılmıştır. Bektaş ve diğerleri (2018) tarafından yazılan 6. sınıf ders kitabında, “Sadece 1’e ve kendisine tam bölünebilen 1’den büyük doğal sayılara asal sayı denir.” tanımı bulunmaktadır. Çok benzer bir ifade ile

Özdemir (2019) tarafından yazılan ders kitabında ise “1 ve kendisinden başka tam böleni olmayan 1’den büyük doğal sayılara asal sayılar denir.” tanımı yer almaktadır. Asal sayı kavramı ile çarpan kavramının birleşimi ile asal çarpan kavramı ortaya çıkmaktadır. Bir sayıyı kalansız olarak bölen sayılardan asal olanlara asal çarpan denir. $n > 1$ olmak üzere her bir n pozitif tam sayısı $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k$ ($k \geq 1$) şeklinde $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ asal sayılarının çarpımı olarak yazılabilir. Bir n sayısını bu şekilde yazmaya da asal çarpanlara ayırma denir (Akkan ve Öztürk, 2019).

Öğrencilerin 8. sınıfta tanıştığı kavramlardan biri aralarında asallıktır. Formel olarak, “1’den başka pozitif ortak böleni olmayan sayı gruplarına aralarında asal sayılar denir.” tanımı yapılabilir (Hıdıroğlu, 2016). Akkan ve Öztürk’e (2019) göre, ikisi birden sıfır olmayan a ve b iki tam sayısının en büyük ortak bölenleri 1 ise bu iki sayıya aralarında asal sayı denir. MEB 8. sınıf ders kitaplarında ise öğrenciler tam sayıları da görmüş olmalarına rağmen negatif çarpanları göz ardı eden tanımların olduğu görülmüştür. Serfiçeli ve Atmaz (2018) aralarında asal sayıları, “1’den başka ortak çarpanı (böleni) olmayan doğal sayı çiftleridir.” şeklinde tanımlamaktadır. Böge ve Akıllı (2018) ders kitabında da benzer bir durum söz konusudur. Öğretim programında pozitif tam sayı çarpanların bulunmasına yönelik kazanım mevcut olsa da tanımlamalarda yapılan eksiklik öğrencilerde yanlış öğrenmelere neden olabilir.

2.2.4.3.c. Çarpanlar ve katlar ile ilgili öğrenme güçlükleri ve kavram yanılgıları

Asal sayı, çarpan, kat ve bölen kavramları, bölünebilme kuralları gibi çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanına ilişkin birçok matematiksel kavramla ilgili öğrenci veya öğretmen adaylarının kavram yanılgılarını inceleyen çalışmalar bulunmaktadır. Bu bölümde alt öğrenme alanına ilişkin kavramlar ayrı ayrı ele alınmış olup araştırmalar sonucu her bir kavrama ilişkin ortaya çıkan öğrenme güçlükleri ve kavram yanılgıları listelenmiştir.

Crilly (2011) tarafından tüm sayı sisteminin yapı taşları olarak kabul edilen asal sayı kavramı ile ilgili zorluklar ve kavram yanılgıları şunlardır:

- 0’ın ve 1’in asal sayı olduğunu düşünme (Özdeş, 2013)
- Asal sayıların negatiflerinin de asal sayı olduğunu düşünme (Özdeş, 2013)
- 2’nin çift olması nedeniyle asal olmadığını düşünme (Akkan ve Öztürk, 2019)
- Asal sayıların büyük sayılar olamayacağını (sadece küçük sayılar olabileceğini) düşünme (Akkan ve Öztürk, 2019)
- Tek sayıların asal olduğunu düşünme veya tek sayıların asal olmadığını düşünme (Akkan ve Öztürk, 2019; Zazkis, 1995)
- Asal sayıların sonlu olduğunu düşünme (Akkan ve Öztürk, 2012)

- İki asal sayının çarpımının da asal sayı olacağını düşünme (Zazkis ve Liljedahl, 2004)
- Bir sayının asallığını kontrol ederken sadece 2, 3 ve 5 gibi küçük sayılarla deneme (Zazkis ve Liljedahl, 2004)
- a ve b asal iki sayı iken a.b sayısının asallığını sorgularken önce çarpımı bulup 2'den başlayarak tek tek tüm asallara bölmeyi deneme (Zazkis ve Liljedahl, 2004)
- Bir sayının asallığına rakamların toplamından yola çıkarak karar verme (Zazkis ve Liljedahl, 2004)
- Son iki basamağı asal olan sayıları asal olarak düşünme (Zazkis ve Campell, 1996a)

Asal sayılarla ilgili yukarıda listelenen çalışmalardan Özdeş (2013) 9. sınıf öğrencilerinin, Zazkis ve Liljedahl (2004) ve Zazkis ve Cambell (1996a) ise öğretmen adaylarının öğrenme güçlüklerini ortaya koymuştur. Akkan ve Öztürk (2012) çalışması ise alanyazın taraması sonucu bazı güçlükleri listelemiştir.

Asal sayılarla ilgili en çok karıştırılabilen kavramlardan biri aralarında asallık durumudur. Özdeş (2013), aralarında asal kavramına yönelik sorular sormuş ve çeşitli güçlükler ortaya koymuştur. Aralarında asallıkla ilgili öğrenci güçlükleri ve kavram yanılgıları şu şekilde sıralanabilir:

- Aralarında asal sayıların, asal sayı olmaları gerektiğini düşünme (Özdeş, 2013)
- 1'den başka pozitif ortak böleni olmayan doğal sayıların, aralarında asal olmadığını düşünme (Özdeş, 2013)
- 1'in diğer doğal sayılarla aralarında asal olmadığını düşünme (Özdeş, 2013)
- İkidenden çok doğal sayının bir kısmının ortak böleninin olması halinde, bu sayıların aralarında asal olmadığını düşünme (Özdeş, 2013)
- Asal sayı ve aralarında asal sayı kavramlarını karıştırma (Akkan ve Öztürk, 2019)

Çarpan, bölen ve kat kavramlarının birbirleri ile ilişkisi çok karıştırılabilmektedir. Zazkis (2000) doğrudan bu kavramlara yönelmiş olup; Özdeş (2013) ile Mohyuddin ve Khalil (2016) ise bu kavramları içeren çeşitli sorularla kavram yanılgılarını ortaya koymaya çalışmışlardır. Çarpan, bölen ve kat kavramları ile ilgili araştırmalarca ortaya konan çeşitli yanılgılar ve öğrenme güçlükleri aşağıda listelenmiştir:

- Bir doğal sayının tam sayı bölenleri sorulduğu halde pozitif bölenlerin sayısını bulma (Özdeş, 2013)
- Sıfırın pozitif bölen olduğunu düşünme (Özdeş, 2013)

- Bir doğal sayının pozitif çarpanlarının sayının katları olduğunu düşünme (Özdeş, 2013)
- Bir doğal sayının pozitif bölenlerinin sayısı sorulduğu halde asal bölenlerinin sayısını bulma (Özdeş, 2013)
- Bir doğal sayının pozitif tam bölenlerinin sayısını bulmak için kullanılan formülü yanlış bir şekilde kullanma (Özdeş, 2013)
- Çarpan, bölen ve kat kavramlarını birbirlerinin yerine kullanma. (3'ün katlarının 3'ün çarpanları olduğunu düşünme) (Akkan ve Öztürk, 2019; Zazkis, 2000)
- Çarpan asal olmalı, kat ise asal olmamalı yanılgısı (Zazkis, 2000)
- Çarpan ve bölen arasındaki ilişkinin kurulamaması (Zazkis, 2000)
- Sayılar büyüdükçe çarpan sayısının artacağını düşünme (Akkan ve Öztürk, 2019)
- Tüm doğal sayıların (sıfır hariç) herhangi bir sayının çarpanları olduğunu düşünme (Akkan ve Öztürk, 2019)
- Çarpanları listelerken sayının kendisini liste dışı bırakma (Akkan ve Öztürk, 2019)
- 1 sayısını çarpan olarak almama (Mohyuddin ve Khalil, 2016)
- Sıfırın pozitif bir bölen olduğunu düşünme (Akkan ve Öztürk, 2019)
- En küçük katın sayının kendisi olduğunu anlayamama (Akkan ve Öztürk, 2019)
- $A = p \cdot q \cdot r$ şeklinde asal çarpanların çarpımı olarak verilen sayıda dahi asal çarpan ve tüm çarpanları bulurken sadece A sayısından yola çıkarak işlem yapma (Zazkis, 2000)

Bölme algoritması veya çarpan ağacı yöntemleri ile bir sayının asal çarpanlara ayrılması sürecinde de çeşitli zorluklar mevcuttur. Asal çarpanlara ayırma ile ilgili hatalı düşüncelerden bazıları şunlardır:

- Asal çarpanlara ayırmada asal çarpanların katlarının da asal olduğunu varsayma (Akkan ve Öztürk, 2019)
- Asal çarpanlarına ayrılması istenen bir sayı verildiğinde doğal sayı çarpanlarına ayırma (Akkan ve Öztürk, 2019)
- Daha büyük sayının daha fazla asal çarpanı olacağını düşünme (Akkan ve Öztürk, 2019)
- Asal çarpanların yazılışında notasyonları yanlış kullanma (çarpım yerine toplam) (Akkan ve Öztürk, 2019)

- Bir sayının farklı biçimlerde asal çarpanların çarpımı şeklinde yazılabileceğini düşünme (Zazkis ve Campell, 1996b)
- Asal çarpanlarının çarpımının üslü biçimde gösteriminden bir sayının tam kare olup olmadığını anlayamama (Zazkis ve Campell, 1996b)

2014 yılı öğretim programında 6. sınıf düzeyinde ele alınan ancak 2018 öğretim programı ile 8. sınıf düzeyine kaydırılan EBOB ve EKOK konusu ile ilgili özellikle problem çözümünde öğrencilerin zorluk yaşadığı söylenebilir. Karadeniz, Kıdıl ve Erol (2019) 8. sınıf öğrencilerinin; Çabukluöz, Adıgüzel, Gökkurt Özdemir ve Akkaya; (2018) 7. sınıf öğrencilerinin; Yünkül (2006) ile Gürsul ve Kızılkaya (2004) 6. sınıf öğrencilerinin EBOB ve EKOK kavramları ile ilgili yanlışlarını ve öğrenme güçlüklerini ortaya koymuştur. Bu yanlışlar şu şekilde listelenebilir:

- Problemlerde yer alan “en az” kelimesi ile EBOB, “en fazla” kelimesi ile EKOK kavramını düşünme (Karadeniz ve diğerleri, 2019)
- Üslü ifade olarak verilen iki sayının EKOK ve EBOB’unu bulmada zorluk (Çabukluöz ve diğerleri, 2018)
- Kat ve bölen kavramlarının karıştırılması EBOB VE EKOK kavramlarını da etkilemesi (Yünkül, 2006)
- EBOB kavramında yer alan bölen ile çarpan kavramının aynı anlama geldiğinin fark edilememesi (Yünkül, 2006)
- EBOB bulurken, en büyük kavramı yer aldığı için verilen tam sayıların EBOB dan küçük olduğunun düşünülmesi (Yünkül, 2006)
- Aynı şekilde EKOK hesaplanırken sayıların EKOK’larının sayılardan küçük olduğunun düşünülmesi (Yünkül, 2006)
- Verilen sayıların çarpımının EKOK’u vereceğinin düşünülmesi (Yünkül, 2006; Çabukluöz ve diğerleri, 2018)
- “Bir A sayısının B sayısına bölümünden kalan k ise A sayısı $B + k$ ya tam bölünür.” yanılması (Gürsul ve Kızılkaya; 2004)
- “Bir A sayısının sırasıyla a, b, c sayılarına bölümünden kalanlar eşit ve m ise A sayısı a, b, c sayılarının EKOK’unun m eksikğine eşittir.” yanılmasıdır (Gürsul ve Kızılkaya; 2004)
- Verilen sayılardan en büyüğünü EKOK olarak düşünme (Mohyuddin ve Khalil, 2016)
- Problemlerde EBOB veya EKOK’tan hangisinin sorulduğunu anlayamama (Mohyuddin ve Khalil, 2016)

- a ve b sayılarının ilk n ortak katının bulunması gerektiği durumlarda a'nın ve b'nin n. katına kadar listeleme (7 ve 9'un ilk 10 ortak katı bulunurken 70 ve 90'a kadar sayıların ilk 10 katını ele alma) (Mohyuddin ve Khalil, 2016)

Çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanının ele alınabilecek konularından biri de bölünebilirliktir. Zazkis (1998), Zazkis ve Campbell (1996a) ve Zazkis ve Campbell (1996b) bölünebilme ile ilgili çeşitli öğrenci zorluklarını ve kavram yanlışlarını ortaya koymuştur. Bu zorluk ve kavram yanlışları şunlardır:

- Bir sayının 2'ye tam bölünebilmesini çiftlikten ziyade son rakama bağlı özellik olarak düşünme (Zazkis, 1998)
- Bir sayının çarpanları arasında 2'nin eksikliğinin tekliğin göstergesi olarak düşünememe (Zazkis, 1998)
- Asal çarpanların çarpımı şeklinde verilmiş bir sayıda bölünebilirliği asal çarpanlardan bağımsız olarak bölünebilirlik kurallarına bağlı olarak düşünme (Zazkis ve Campbell, 1996a)
- 3, 7 ve 9 ile bölünebilme gibi kurallarda son rakama veya son iki basamağa bakarak karar vermeye çalışma (Zazkis ve Campbell, 1996a)
- Bölünebilirlik kurallarının aşırı genelleştirerek kullanımı (Zazkis ve Campbell, 1996a)
- Ardışık n sayı arasında n'den küçük bir sayıya tam bölünebilen bir sayının kesinlikle bulunması gerektiğini düşünememe (Zazkis ve Campbell, 1996a)
- Bir tek sayının bir çift sayıya kesinlikle tam bölünemeyeceğini düşünememe (Zazkis ve Campbell, 1996b)

Görüldüğü gibi çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanının en temel sayılabilecek kavramlarının tamamına yönelik çeşitli kavram yanlışları mevcuttur. Bu nedenle bu konunun öğretiminin kavramsal boyutta titizlikle ele alınması gerektiği söylenebilir.

2.2.4.4. Kümeler ve öğretimi

2.2.4.4.a. Öğretim programındaki yeri ve ilgili kazanımlar

Kümeler alt öğrenme alanı, MEB (2013) öğretim programı ile kaldırılmış, MEB (2018) öğretim programında hafifletilmiş bir biçimde yeniden konulmuştur. Özellikle sayı kümelerinin öğreniminde ihtiyacı hissedilen küme ve kümelerle ilgili diğer temel kavramlar tek bir kazanımla 6. sınıfta yer almaktadır: “Kümeler ile ilgili temel kavramları anlar.”

Temel kavramlardan hangilerinin ele alınacağı kazanımın altında yer alan notlarda belirtilmiştir. Bu notların ilkinde, “Kümelerin farklı gösterimlerine (liste, ortak özellik ve venn şeması yöntemi) yer verilir.”; ikinci notta ise, “Küme, eleman, eleman sayısı, boş

küme, birleşim, kesişim kavramları verilir. Çalışmalarda kavramsal düzeyde kalınır.” açıklamaları yapılmaktadır. Bu durumda kümelerle ilgili problemlere veya alt küme, evrensel küme, tümeleme gibi bazı temel kavramlara programda yer verilmediği görülmektedir.

Küme kavramının ortaokul seviyesinde öğretimi ile ilgili alanyazında çeşitli tartışmalar yürütülmüştür. Freudenthal (1969a) kümenin ilköğretimde formel olarak tanıtılmasına karşı çıkmıştır. Aynı yıl Freudenthal (1969b), küme gösterimlerini tartışmış ve Venn şeması ve parantez gösteriminin ders kitaplarında doğru olmayan gösterimlerinin olduğunu ifade etmiştir. Feinstein (1973) de kavramın ilköğretim seviyesinde öğretilmemesi gerektiğini belirtmiş ve ders kitaplarında yer alan küme örneklerinde sürekli ortak özellikli elemanların kullanılmasını ve yapılan tanımlarda “ortak özelliğe sahip nesneler topluluğu” şeklindeki ifadeleri eleştirmiştir.

2.2.4.4.b. *İlgili kavramlar ve tanımları*

Ortaokul matematik öğretim programında tek kazanımla yer alan Kümeler konusuna ait temel kavramlar kazanıma ait açıklamalarda yer almaktadır. Bu açıklamalardan ilkinde liste yöntemi, Venn şeması yöntemi ve ortak özellik yöntemi olmak üzere kümelerin farklı gösterimlerine ait kavramlar yer almaktadır. İkinci açıklamada ise; küme, eleman, eleman sayısı, boş küme, birleşim ve kesişim kavramları bulunmaktadır.

İlk açıklamada Venn şeması, ortak özellik ve liste yöntemleri olmak üzere üç adet küme gösteriminden söz edilmektedir. Bektaş ve diğerleri (2018) 6. sınıf ders kitabında, “Bir kümeyi oluşturan elemanları herhangi bir kapalı şekil içerisinde gösterebiliriz. Kümelerin bu şekilde gösterimine Venn şemasıyla gösterim denir. Elemanların küme parantezleri arasında ve virgüllerle ayrılarak gösterimine liste yöntemiyle gösterim denir. Elemanların ortak özelliğinin küme parantezleri arasına yazılarak gösterilmesine ortak özellik yöntemiyle gösterim denir.” şeklindeki tanımlarla her üç özelliği de tanımlamıştır.

Kümelerin gösterimine yönelik kavramlardan önce küme ve eleman gibi temel kavramlardan da söz etmek gerekir. Ancak bu kavramların tanımlarının yapılabilirliği tartışmalıdır. Nesin (2010a), küme teorisi ile ilgili iki kavramın tanımsız olduğunu belirtmektedir. Bu kavramlardan biri “küme”, diğeri “elemanı olmak” ifadeleridir. Bu iki kavram tanımsız olarak kabul edilip, diğer kavramlar bu kavramlar üzerine inşa edilmektedir. Ancak gerek ortaokul ders kitaplarında gerekse bazı akademik yayınlarda “küme” kavramını açıklayabilmek için tanımlar yapılmaktadır. Bu tanımlardan biri Aksu ve Kul (2019) tarafından yapılmış olan “İyi tanımlanmış birbirinden farklı (tekrarsız) nesneler topluluğuna küme denir.” tanımıdır. Buradaki, “iyi tanımlanmış” ifadesi “herkes tarafından aynı şekilde bilinen, belirli olan varlıklar” anlamı taşımaktadır. “Birbirinden farklı” ifadesi ile de her elemanın sadece bir kere kullanılması gerektiği belirtilmektedir.

Kümeye “nesneler topluluğu” şeklinde yapılan bir tanım, boş küme veya tek elemanlı bir kümenin küme olamayacağı yanılıgına götürebilir. Bu nedenle kümenin tanımsız olarak ele alınmasının daha doğru olabileceği söylenebilir. 6. sınıf ders kitaplarında da grup, topluluk gibi kavramların tanımda yer aldığı görülmektedir. Bektaş ve diğerleri (2018) kümeyi iyi tanımlanmış nesneler topluluğu olarak tanımlamıştır. Çağlayan ve diğerleri (2018) ise; kümeyi, çeşitli nesnelerin bir araya getirilmesiyle oluşturulan gruplar olarak tanımlamıştır. Küme kavramının ortaokul seviyesinde öğretimi ile ilgili alanyazında çeşitli tartışmalar yürütülmüştür. Freudenthal (1969a) kümenin ilköğretimde formel olarak tanıtılmasına karşı çıkmıştır. Aynı yıl Freudenthal (1969b), küme gösterimlerini tartışmış ve Venn şeması ve parantez gösteriminin ders kitaplarında doğru olmayan gösterimlerinin olduğunu ifade etmiştir. Feinstein (1973) de kavramın ilköğretim seviyesinde öğretilmemesi gerektiğini ifade etmiş ve ders kitaplarındaki küme tanımlarında yer alan “ortak özellik” ifadesini ve verilen örneklerde kümenin içerisinde yer alan ortak özellikli elemanları eleştirmiştir.

“Eleman” kavramı da Nesin (2010a)’ya göre tanımsız kavramlardan biridir. Özdemir (2019) ders kitabında, “Kümeyi oluşturan nesnelerin her birine eleman denir.” şeklinde tanım yapılmıştır. Diğer ders kitaplarında da benzer ifadeler mevcuttur. Bektaş ve diğerleri (2018) benzer şekilde “Kümeyi oluşturan nesnelere eleman ya da öge ismi verilir.” tanımını yapmıştır. Hiç elemanı olmayan küme ya da eleman sayısı sıfır olan küme “boş küme” denilmektedir (Aksu ve Kul, 2019).

Kümelerde kesişim ve birleşim işlemleri öğretim programında yer alırken fark işlemi programda yer almamaktadır. A, B iki küme olsun. A ve B kümelerinin birleşimi $\{x | x \in A \text{ veya } x \in B\}$ şeklinde tanımlanır ve $A \cup B$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde; E bir evrensel küme ve $A, B \subseteq E$ olsun. A ve B kümelerinin kesişimi $\{x | x \in A \text{ ve } x \in B\}$ şeklinde tanımlanır ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir (Argün ve diğerleri, 2014). 6. sınıf ders kitabında Bektaş ve diğerleri (2018), “Birden fazla kümenin tüm elemanlarını içeren küme ya da kümelerin birleşim kümesi denir. Birden fazla kümenin ortak elemanlarını içeren küme ya da kümelerin kesişim kümesi denir.” şeklinde sözel bir ifadeyle kesişim ve birleşim kümelerini tanımlamıştır.

2.2.4.4.c. Küme kavramı ile ilgili öğrenme güçlükleri ve kavram yanlışları

MEB (2018) öğretim programı ile sınırlı kavramlarla da olsa geri getirilen kümelerle ilgili yapılmış olan çeşitli güçlüklerin ve kavram yanlışlarının ortaya konduğu çalışmalar mevcuttur. Ortaokul ve lise düzeyindeki öğrenciler ve öğretmen adaylarıyla ilgili yapılmış çalışmaların sonucunda ortaya konulan yanlışlar başlıklar halinde aşağıda listelenmiştir.

- Küme kavramına yönelik yanlışlar

- Boş kümenin küme olarak düşünülmemesi (Fischbein ve Baltsan, 1998; Gür, 2009; Demir, 2012)
- Tek elemanlı kümenin küme olarak düşünülmemesi (Fischbein ve Baltsan, 1998; Linchevski ve Vinner, 1988)
- Birbirinden alakasız nesnelerin küme olmayacağı (ortak özellik olması gerektiği) düşüncesi (Fischbein ve Baltsan, 1998; Linchevski ve Vinner, 1988; Bingolbali ve Demir ve Monaghan, 2020; Demir, 2012)
- İyi tanımlanmamış öznel ifadelerin de elemanları varsa küme olacağının düşünülmesi (Demir, 2012)
- Mantığa aykırı olan ifadelerin küme olarak düşünülmemesi (Demir, 2012)
- Şematik olmayan ifadelerin küme olarak düşünülmemesi (Demir, 2012)
- Sonsuz elemanlı kümenin olmayacağı düşüncesi (Gür, 2009)
- Küme olmayan göreceli kavramların kişiden kişiye değişebilir eleman sayıları olan kümeler olarak görülmesi (Gür, 2009)

- Eleman ve eleman sayısına yönelik yanlışlar

- Boş küme ve içerisinde sıfır elemanı olan kümenin karıştırılması (Fischbein ve Baltsan, 1998)
- Tekrarlı elemanların farklı elemanlar olarak ele alınması (Fischbein ve Baltsan, 1998; Linchevski ve Vinner, 1988)
- Eşit kümenin sadece eleman sayılarının eşit olacağının düşünülmesi (Fischbein ve Baltsan, 1998; Linchevski ve Vinner, 1988; Yazıcı ve Kültür;2017)
- Bir kümenin elemanının başka bir kümenin elemanı olamayacağı düşüncesi (Linchevski ve Vinner, 1988)
- Ortak elemanları olan kümeleri alt kümeler olarak düşünme (Yazıcı ve Kültür; 2017)
- Boş kümenin 1 elemanlı olduğu düşüncesi (Gür, 2009)

- Liste yöntemine ilişkin zorluklar
 - Liste yönteminde elemanları ve eleman sayılarını belirleyememe (Gür, 2009)
 - Kendisi de küme olan elemanların alt kümelerle karıştırılması (Zazkis ve Gunn, 1997; Gür, 2009)
 - İç içe parantezler yer alan liste yönteminde eleman sayısını bulmada zorluk (Zazkis ve Gunn, 1997)
- Sonsuz kümelere yönelik yanlışlıklar
 - Tüm sonsuz kümeler aynı sayıda elemana sahiptir (Narlı ve Narlı, 2012).
 - Sonsuz kümeler denk olamaz (Narlı ve Narlı, 2012).
 - Sadece aynı çoklukta elemana sahipmiş gibi görünen sonsuz kümeler denk olabilir (Narlı ve Narlı, 2012).
 - Herhangi bir sonsuz küme kendi özalt kümesine denk olamaz (Narlı ve Narlı, 2012).
 - Evrensel küme çok büyük ve sonsuz elemanlı olmalıdır (Yazıcı ve Kültür; 2017).

Küme kavramı her ne kadar 6. sınıf düzeyinde, en temel birkaç kavramla ve sınırlı bir biçimde ele alınıyor olsa da öğrenilen eleman kavramı, kesişim, birleşim gibi kavramların oldukça önemli olduğu söylenebilir. Bu nedenle yukarıda listelenen kavram yanlışlıklarına dikkat etmek ve öğretim sürecini buna göre yönlendirmek faydalı olabilir.

2.2.4.5. Kesirler, ondalık gösterim ve yüzdelerin öğretimi

Bu bölümde kesirler, kesirlerde işlemler, ondalık gösterim ve yüzdeler alt öğrenme alanları birlikte ele alınmıştır.

2.2.4.5.a. Öğretim programındaki yeri ve ilgili kazanımlar

Öğrencilerin doğal sayılar gibi ilkökul 1. sınıftan itibaren her sınıf düzeyinde karşılaştığı kavramlardan biri de kesirdir. İlk üç sınıf düzeyinde kavramsal kazanımlar yer almakta iken 4. sınıfta öğrenciler kesirlerde işlemler alt öğrenme alanı ile işlem yapmaya da başlamaktadır. Ondalık gösterim ve yüzdeler alt öğrenme alanları ise öğretim programında ilk kez ortaokul kademesinde yer almaktadır.

Ortaokulda, kesirler ve kesirlerde işlemler alt öğrenme alanlarına ilişkin kazanımlar 5. ve 6. sınıfta yer almaktadır. Tablo 10'da kazanımlar listelenmiştir.

Tablo 10

Kesirlerle ilgili kazanımlar

Sınıf Düzeyi	İlgili Kazanımlar
5 Kesirler	K1: Birim kesirleri sayı doğrusunda gösterir ve sıralar. K2: Tam sayılı kesrin, bir doğal sayı ile bir basit kesrin toplamı olduğunu anlar ve tam sayılı kesri bileşik kesre, bileşik kesri tam sayılı kesre dönüştürür. K3: Bir doğal sayı ile bir bileşik kesri karşılaştırır. K4: Sadeleştirme ve genişletmenin kesrin değerini değiştirmeyeceğini anlar ve bir kesre denk olan kesirler oluşturur. K5: Payları veya paydaları eşit kesirleri sıralar. K6: Bir çokluğun istenen basit kesir kadarını ve basit kesir kadarı verilen bir çokluğun tamamını birim kesirlerden yararlanarak hesaplar.
5 Kesirlerde İşlemler	K1: Paydaları eşit veya birinin paydası diğerinin paydasının katı olan iki kesrin toplama ve çıkarma işlemini yapar ve anlamlandırır. K2: Paydaları eşit veya birinin paydası diğerinin paydasının katı olan kesirlerle toplama ve çıkarma işlemleri gerektiren problemleri çözer ve kurar.
6 Kesirlerde İşlemler	K1: Kesirleri karşılaştırır, sıralar ve sayı doğrusunda gösterir. K2: Kesirlerle toplama ve çıkarma işlemlerini yapar. K3: Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır. K4: İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır. K5: Bir doğal sayıyı bir kesre ve bir kesri bir doğal sayıya böler, bu işlemi anlamlandırır. K6: İki kesrin bölme işlemini yapar ve anlamlandırır. K7: Kesirlerle yapılan işlemlerin sonucunu tahmin eder. K8: Kesirlerle işlem yapmayı gerektiren problemleri çözer.

Kesirlerle ilgili kazanımlar incelenirken öğrencilerin ilkokuldan ön öğrenmelerinin olduğu unutulmamalıdır. Öğrenciler ilkokul 1. sınıfta bütün ve yarım ile başladığı kesir öğreniminde ilkokul boyunca kesirlerle ilgili birim, basit, bileşik ve tam sayılı kesir gibi kavramları görmekte, paydaları eşit kesirlerde toplama çıkarma işlemleri yapabilmektedir. 5. sınıfta öğrenci ilk kez kesirlerin sayı doğrusunda gösterimi, bileşik kesir-tam sayılı kesir dönüşümü, sadeleştirme-genişletme işlemleri ve denk kesir kavramı ile tanışmaktadır. Kesirlerde işlemler alt öğrenme alanında ise paydaları eşit olmayan iki kesir arasında toplama çıkarma işlemini ilk kez görmektedir. Ancak bu kazanımda bir kesrin paydasının diğerlerinin katı olması şartı aranmaktadır. 6. sınıfta ise kesirlerle ilgili sıralama, dört temel işlem ve problemlerle ilgili kazanımlar mevcut olup hiçbir sınırlılık yer almamaktadır. Kazanımların birçoğunda modelleme yapılması gerektiğine vurgu yapılmaktadır.

Rasyonel sayıların bir başka gösterim türü olan ondalık ifadeler öğrencilerin ilk kez ortaokul düzeyinde karşılaştığı bir kavramdır. İlkokul kazanımlarında sıvı, uzunluk, ağırlık ölçme kazanımlarında ondalık gösterime girilmemesi gerektiği vurgulanmaktadır. 5. ve 6. sınıf düzeyinde ondalık gösterim alt öğrenme alanı olarak yer alan kazanımlara Tablo 11’de yer verilmektedir.

Tablo 11

Ondalık gösterimle ilgili kazanımlar

Sınıf Düzeyi	İlgili Kazanımlar
5 Ondalık Gösterim	K1: Bir bütün 10, 100 veya 1000 eş parçaya bölündüğünde, ortaya çıkan kesrin birimlerinin ondalık gösterimle ifade edilebileceğini belirler. K2: Paydası 10, 100 veya 1000 olan bir kesri ondalık gösterim şeklinde ifade eder. K3: Ondalık gösterimde tam kısım ve ondalık kısımdaki rakamların bulunduğu basamağın değeriyle ilişkisini anlar. K4: Paydası 10, 100 veya 1000 olacak şekilde genişletilebilen veya sadeleştirilebilen kesirlerin ondalık gösterimini yazar ve okur. K5: Ondalık gösterimleri verilen sayıları sayı doğrusunda gösterir ve sıralar. K6: Ondalık gösterimleri verilen sayılarla toplama ve çıkarma işlemleri yapar.
6 Ondalık Gösterim	K1: Bölme işlemi ile kesir kavramını ilişkilendirir. K2: Ondalık gösterimleri verilen sayıları çözümler. K3: Ondalık gösterimleri verilen sayıları belirli bir basamağa kadar yuvarlar. K4: Ondalık gösterimleri verilen sayılarla çarpma işlemi yapar. K5: Ondalık gösterimleri verilen sayılarla bölme işlemi yapar. K6: Ondalık gösterimleri verilen sayılarla; 10, 100 ve 1000 ile kısa yoldan çarpma ve bölme işlemlerini yapar. K7: Sayıların ondalık gösterimleriyle yapılan işlemlerin sonucunu tahmin eder. K8: Ondalık ifadelerle dört işlem yapmayı gerektiren problemleri çözer.

Ondalık gösterimin ilk kazanımında programın vurguladığı bazı noktalar bulunmaktadır. Bu kazanım ondalık gösterim ve kesir ilişkisini, ondalık gösterimin modellemelerini ve okunuşlarını içermektedir. Ancak ondalık kısmı en çok üç basamaklı sayılara yer verilmesi gerektiği ifade edilmektedir. 5. sınıfta paydası 10,100 ve 1000 olabilecek kesirlerin dönüşümleri yapılmakta; devirli sayılara girilmemektedir. Toplama çıkarma işlemleri yapılırken de programda lira-kuruş ilişkisini ifade eden çalışmalara yer verilmesi gerektiği söylenmektedir. 6. sınıfta kesrin aynı zamanda bölme anlamı taşıdığı vurgulanmakta, böylece öğrencilere $\frac{5}{3}$ kesri gibi paydası 10'un kuvveti olamayacak kesirlerin ondalık gösterimi için yeni bir yol sunulmaktadır. Öğrenci böylece devirli sayılarla tanışmaktadır. Bir önceki sınıf düzeyinde görülen toplama ve çıkarma işlemleri sonrası bu sınıf düzeyinde çarpma ve bölme işlemleri öğrenilmektedir. Çarpma ile ilgili kazanımında yer alan uyarıda 1'den küçük ondalık ifadelerle çarpmanın sayıyı küçülteceğinin fark ettirilmesi gerektiği ifade edilmektedir.

Ondalık gösterim alt öğrenme alanı 6. sınıfta son bulmasına karşın rasyonel sayılarda, üslü ifadelerde ve kareköklü ifadelerde ondalık gösterimle ilgili kazanımlar yer almaktadır. Kesir ve ondalık gösterimle ilişkilendirilebilecek bir diğer kavram yüzde kavramıdır. Yüzde gösterimi de ondalık gösterim gibi kesirlerin bir başka temsil biçimi olarak ele alınabilir. Öğrenciler yüzde kavramı ile ilk kez 5. sınıfta karşılaşmaktadır. Yüzdelere alt öğrenme alanına ilişkin kazanımlar Tablo 12'de sunulmuştur.

Tablo 12

Yüzdelikle ilgili kazanımlar

Sınıf Düzeyi	İlgili Kazanımlar
5 Yüzdeliler	K1: Paydası 100 olan kesirleri yüzde sembolü (%) ile gösterir. K2: Bir yüzdelik ifadeyi aynı büyüklüğü temsil eden kesir ve ondalık gösterimle ilişkilendirir, bu gösterimleri birbirine dönüştürür. K3: Kesir, ondalık ve yüzdelik gösterimlerle belirtilen çoklukları karşılaştırır. K4: Bir çokluğun belirtilen bir yüzdesine karşılık gelen miktarı bulur.
7 Yüzdeliler	K1: Bir çokluğun belirtilen bir yüzdesine karşılık gelen miktarını ve belirli bir yüzdesi verilen çokluğun tamamını bulur. K2: Bir çokluğu diğer bir çokluğun yüzdesi olarak hesaplar. K3: Bir çokluğu belirli bir yüzde ile arttırmaya veya azaltmaya yönelik hesaplamalar yapar. K4: Yüzde ile ilgili problemleri çözer.

Kesirlerin yüzde sembolü ile gösteriminde %100'den daha küçük olan yüzdelik ifadelerin ele alınması gerektiği programda belirtilmektedir. Ayrıca 5. sınıfın son kazanımında bir sınırlama mevcuttur. Bir çokluğun belirli bir yüzdesi (%100'den küçük) bulunurken, yüzdesi verilen çokluğun tamamını bulmaya yönelik işlemlere girilmeyeceği ifade edilmektedir. 7. sınıfta yer alan ilk kazanımda ise her iki yönde de işlemler yapılmakta ve %100'den büyük veya %1'den küçük yüzdelilerin de anlaşılmasına yönelik çalışmalara yer verilmesi gerektiği ifade edilmektedir. Ayrıca iki çokluk verilerek yüzde miktarını bulmaya yönelik de işlemler yapılmaktadır.

Görüldüğü gibi öğrencilerden yukarıda yer alan toplamda 38 kazanımla kesir, ondalık gösterim ve yüzde gösterimleri arasında ilişkiyi anlayabilmeleri ve dönüşümleri yapabilmeleri beklenmektedir. Rasyonel sayıların temsil biçimleri olan bu kavramlar rasyonel sayı öğretiminde de bir ön koşul olarak düşünülebilir.

2.2.4.5.b. İlgili kavramlar ve tanımları

Kesir kavramı ile ilgili alanyazında farklı tanımlar mevcuttur. Her bir tanım farklı tartışmaları da gündeme getirmektedir. “Kesirler negatif olabilir mi?”, “Kesirler irrasyonel olabilir mi?” gibi sorulara tanımdan tanıma değişen yanıtlar mümkün olmaktadır. Horzum (2019), “a ve b birer tam sayı (erken dönemlerde negatif olmayan tam sayı) ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ veya a/b formunda yazılan sayısal gösterimlerin her biri” şeklinde kesir kavramını tanımlamıştır. Kesirlerin küme gösterimi ise $K = \{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$ şeklindedir. Burada a'ya pay b'ye payda denir.” tanımından yola çıkarak kesirlerin negatif olabileceği yorumu yapılabilir. Benzer şekilde, “ $K = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : b \neq 0\}$ kümesinin her bir elemanına bir

kesir denir.” tanımında da negatif tam sayı ikilileri kümenin elemanı olarak kabul edilmiştir. Aynı çalışmada öğrencilere sözel dille yapılabilecek, “İki tam sayının veya bölünebilen iki niceliğin oranını temsil eden $\frac{2}{3}$, $\frac{11}{5}$ gibi sayısal gösterimlerin her birine kesir denir.” tanımı da önerilmiştir. Niven (1961) ise “pay ve paydadın oluşan herhangi bir cebirsel veya nümerik gösterim.” şeklinde kesri tanımlamıştır. Bu tanıma göre $\frac{x+5}{y}$, $\frac{\sqrt{5}}{4}$ gibi cebirsel veya irrasyonel ifadeler de kesir kavramını karşılamaktadır. Niven (1961) sadece gösterim üzerine durarak a / b biçimindeki gösterimlerin tamamını kesir sınıfında ele almıştır. Kesirler ilköğretim ve ortaokul düzeyinde genelde parça-bütün ilişkisi kurularak anlatılır. Ders kitaplarında da tanımlar buna göre yapılmaktadır. Bilen (2019) ders kitabında payı, “bir bütünün eş parçalarından kaçının alındığını gösteren sayı” olarak; paydayı, “bir bütünün kaç eş parçaya ayrıldığını gösteren sayı”; kesri de “bir bütünün bölündüğü eş parçalardan birini veya birkaçını anlatan sayı” olarak tanımlamıştır.

Birim kesir, basit kesir, bileşik kesir ve tam sayılı kesir olmak üzere kesir çeşitleri ilköğretim seviyesinde gösterilmektedir. Öğrenciler 3. sınıf düzeyinde “birim kesir” kavramı ile karşılaşmaktadır. Birim kesir, payı 1 olan kesirlerdir (Wells, 1997). Ancak Özgen, (2014) birim kesri “Payı 1 olan basit kesirlerdir.” şeklinde tanımlamıştır. Bu iki tanım 1/1 kesrinin birim kesir olup olmadığı sorusunu ortaya çıkarmaktadır. MEB ders kitaplarında da çelişkili ifadeler mevcuttur. Bilen (2019), “Payı 1 olan kesir. Bir bütünün eş parçalarından her birini belirten kesre birim kesir denir.” şeklinde tanım yaparken, bir başka ders kitabında “Bir bütünün eş parçalarından her birine birim kesir denir. Birim kesirler 1’den küçük olduğu için sayı doğrusunda 0 ile 1 arasında yer alır (Komisyon, 2016).” ifadesi mevcuttur. Birim kesrin 1’den küçük olduğu vurgulanmıştır. Öğrenciler bu tanımlardan yola çıkarak çelişkiye düşebilir. Tanım yapılırken basit kesir kısıtlamasına gidilmemesinin, 1/1’in de bir bütünün tek parçası olarak görülmesinin doğru olacağı söylenebilir.

Bir diğer kesir türü olan basit kesir, payı paydasından mutlak değerce küçük olan kesirlere denilmektedir. Payı paydasından mutlak değerce büyük ya da eşit olan kesre bileşik kesir; bir tamsayı ve bir basit kesrin birlikte yazılmasıyla oluşan kesre tam sayılı kesir denilmektedir (Özgen, 2016). Tanım bu şekilde yapıldığında negatif rasyonel sayıları da kapsamaktadır. Ders kitaplarında ise kesirlerin sadece pozitif olabileceği düşüncesiyle, “Payı paydasından küçük olan kesirlere basit kesir, payı paydasına eşit ya da paydasından büyük olan kesirlere bileşik kesir denir.” tanımları yapılmıştır. Tam sayılı kesir ise “basit kesirlere bir veya daha fazla bütün eklenerek elde edilen kesirler” olarak ifade edilmiştir (Bilen, 2019).

Ortaokul düzeyinde öğrenciler kesirler alt öğrenme alanında; genişletme, sadeleştirme ve denk kesir gibi yeni kavramlarla tanışmaktadır. Bir kesrin payını ve paydasını 1’den büyük olan aynı sayıya bölme işlemine kesri sadeleştirme, bir kesrin payını ve paydasını 1’den büyük olan aynı sayı ile çarpma işlemine ise kesri genişletme denir (Bilen, 2019). Bölme ve çarpma işlemlerinde “1’den büyük” şartı konulmadığı takdirde 0 ve 1 aralığından seçilen bir sayı ile kesir genişletmek istenirken sadeleşebilir veya sadeleştirme istenirken genişletilebilir.

Denk kesir kavramının tanımı için Özgen (2016), “Bir kesrin genişletilmesiyle veya sadeleştirilmesiyle oluşan kesirlere denk kesirler denir.” ifadesini kullanmıştır. 5. sınıf ders kitabında ise “bütünün aynı miktarını gösteren kesirlere denk kesir denir.” şeklinde tanım yapılmıştır (Cırıtcı, 2017). Görüldüğü gibi kesirlerle ilgili gerek kesir kavramının kendisi gerek birim kesir gibi kesir türlerinde farklı kaynaklarda farklı tanımlamalar mevcuttur.

Rasyonel sayıların bir diğer temsil biçimi olan ondalık gösterim, sayıların basamak değerlerinin ondalık işaretinin soluna ve sağına doğru 10’ un tam sayı kuvvetleri şeklinde değerler aldığı gösterim şeklidir. Ortaokul düzeyinde; ondalık gösterim kavramı basitçe, kesirlerin ve rasyonel sayıların onluk tabanda kesir çizgisi kullanılmadan tam sayılı kısım ile ondalık kısmın virgöl ile ayrılarak ifade edildiği matematiksel bir sistem olarak tanımlanabilir (Özçakır, 2019). Kavramın formal tanımını Argün ve diğerleri (2014), “Her y reel sayısına karşılık; $\text{supa} = \sup\{n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \frac{n_3}{10^3} + \dots + \frac{n_k}{10^k} : k \in \mathbb{Z}^+\} = y$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $n_k \in \mathbb{D}$ olmak üzere bir $\{n_k\}$ dizisi varsa o zaman $y = n_0, n_1 n_2 \dots n_k \dots$ yazılır. $n_0, n_1 n_2 \dots n_k \dots$ ifadesine y ’nin ondalık gösterimi denir.

Öğrencilerin ilk kez 5. sınıfta karşılaştığı ondalık gösterimle ilgili 5. sınıf ve 6. sınıf ders kitaplarında basit düzeyde tanımlamalar yapılmıştır. Kitaplarda yapılan bazı tanımlar aşağıda verilmiştir:

- Paydası 10, 100, 1000 olan kesirler ondalık gösterim olarak ifade edilebilir. (Cırıtcı ve diğerleri, 2017)
- Paydası 10, 100, 1000 vb. sayı olan kesirlerin farklı gösterim biçimi; bir rasyonel sayının a,b şeklinde yazılmış hâli. (Bilen, 2019)
- Bir kesrin virgöl kullanılarak yazılmasına o kesrin ondalık gösterimi denir. (Özdemir, 2019)

Birbirinden farklı olan yukarıdaki ifadeler tanımdan ziyade kavramı açıklamaya yöneliktir. Bilen’in (2019) 5. sınıf ders kitabında yapmış olduğu tanımda rasyonel sayı ifadesinin kullanıldığı görülmektedir. Rasyonel sayı kavramı ile öğrencilerin 7. sınıfta karşılaştığı düşünüldüğünde tanımın öğrenci ön bilgilerine uygun olmadığı söylenebilir.

Bazı kitaplarda ondalık gösterimin yanı sıra ondalık kesir kavramı da kullanılmakta ve tanımlanmaktadır. Özdemir (2019), “Ondalık kesirler, paydası 10 ve 10’un kuvveti olan kesirlerdir.” şeklinde; Bilen (2019) ise “paydaları 10, 100, 1000 vb. olan kesirler” şeklinde ondalık kesir kavramını tanımlamıştır.

Ondalık gösterimlerle ilgili tanımlanabilecek bir diğer kavram devirli ondalık gösterimdir. Bir rasyonel sayının ondalık kısmındaki rakam veya rakamlar dizisi sürekli tekrar ediyorsa rasyonel sayıların bu gösterimine devirli ondalık gösterim denir. (Çelik, 2006). Öğretim programında bir temsil biçimi olarak devirli ondalık gösterim şeklinde yer aldığı için ders kitaplarında da genel olarak devirli ondalık gösterim kavramı tanımlanmaktadır. 6. ve 7. sınıf ders kitaplarında yer alan bazı tanımlamalar aşağıda verilmiştir:

1. Paydası 10’un kuvvetleri hâline getirilemeyen kesirlerin ondalık gösterimi bölme işlemi ile yapılır. Bölme işleminin ondalık kısmında tekrar eden rakamlar varsa bu tür ondalık gösterimlere devirli ondalık gösterim denir. (Bektaş ve diğerleri 2018)
2. Paydası 10 veya 10’un kuvvetine genişletilemeyen kesirlerin belirli bir düzen içinde ondalık kısımlarında devreden sayılar varsa bu tür ondalık gösterimlere devirli ondalık gösterimler denir. (Çağlayan ve diğerleri, 2018)
3. Bazı ondalık gösterimlerin ondalık kısmında tekrar eden rakamlar bulunur. Bu tür ondalık gösterimlere devirli ondalık gösterim denir. (Özdemir, 2019)

Yukarıda yer alan 2. tanımda rakamların tekrarlı ilerlediğini belirtmek yerine belirli bir düzen içinde ilerlediği ifade edilmiştir. Bu durum 0,1223334444... gibi belirli bir kural ile ilerleyen ancak tekrarlı olmayan sayıların da devirli olarak düşünülebilmesine neden olabilir.

Bu başlık altında ele alınabilecek son kavram “yüzde” kavramıdır. Weisstein’a (t.y.) göre, bir oran veya kesrin 100 ile çarpımının yanına % sembolü eklenerek yazımına yüzde denir. 5. sınıf ders kitabında geçen ifadeye göre ise aynı çokluğu farklı şekilde ifade etmenin bir yolu olan yüzde ifadesi, paydası 100 olan kesirler için kullanılır. “Yüzde” kelimesi, “her yüz eş parçada” veya “her bir yüzlükte” anlamına gelmektedir. Paydası 100 olan kesirler “% (yüzde)” sembolü ile gösterilebilir (Cırırcı ve diğerleri, 2017 MEB).

2.2.4.5.c. Kesir, ondalık gösterim ve yüzde kavramları ile ilgili öğrenme güçlükleri ve kavram yanılgıları

Kesir, ondalık gösterim ve yüzde kavramları ile ilgili yapılmış çalışmalar ışığında her bir kavrama ait öğrenme güçlükleri ve kavram yanılgıları bu bölümde ayrı ayrı ele alınmaktadır.

Öğrencilerin ilkökul düzeyinden itibaren karşılaştığı kesir kavramı ile ilgili kesir türleri, kesirlerde işlemler, kesirlerin sıralanması, kesir problemleri gibi alanlarda yanlışları mevcuttur. Yapılmış çalışmalar ışığında kesir kavramına yönelik yanlışlar aşağıdaki gibi listelenebilir:

- Sıfırın pay veya paydada olduğu durumlarda kesrin sonucunu ifade edememe (Horzum, 2019)
- Sayı doğrusunda modelleme ile ilgili zorluklar (Alacacı, 2009),
 - Sayı doğrusunda belirlenen noktaya karşılık gelen kesri yazamama
 - Sayı doğrusu üzerinde eş parçalara ayırmada yaşanan zorluk
 - Bileşik kesirlerde birimi belirleyememe
- Kesirlerde sıralama ile ilgili zorluklar (Horzum, 2019; Alacacı, 2009)
 - Payda eşitleme yaparken sadece paydayı genişletme
 - Payların eşit olduğu durumlarda paydası büyük olan kesrin büyük olduğunu düşünme
 - Paydası farklı olan kesirleri sıralayamama
 - Pay veya paydanın sayısal değeri arttığında kesrin değerinin artacağını düşünme
- Parça bütün ilişkisine yönelik zorluklar (Horzum, 2019; Alacacı, 2009; Ersoy ve Ardahan, 2003; Işık ve Kar, 2012; Ersoy ve Biber, 2020; Eroğlu, Camcı ve Tanışlı, 2019)
 - Bir bütünü parçalara ayırırken eş parçalara ayırmama
 - Eş parçaya ayrılmamış bütünü kesirle göstermeye çalışma
 - Aynı rakamlar ve sembollerle gösterilen kesrin aynı miktarı gösterdiğini düşünme
 - Birden fazla bütün içeren sorularda gösterimler ile kesirler arasında tutarsızlıkların olması
 - Kesrin ifade ettiği büyüklükleri belirlemek için referans alınan bütünün dikkate alınmaması
 - Birim kesir kavramını anlayamama
 - Kesirlerin diğer anlamları görmezden gelinerek bütünün veya miktarının sadece belirli bir bölümü olarak düşünülmesi
- Kesirlerde toplama ve çıkarma işlemine yönelik yanlışlar
 - Kesirlerde toplama çıkarma işlemlerinde ortak paydada eşitleme yaparken sadece payı ya da paydayı değiştirme (Hasemann, 1981)

- İki kesri toplarken birinci kesrin pay ve paydasını toplayıp paya, ikinci kesrin pay ve paydasını toplayıp paydaya yazma ($2/5+3/8=7/11$) (Abdul Ghani ve Maat, 2018; Alacacı 2009)
- Payları toplayıp paya, paydaları toplayıp paydaya yazma ($2/5+3/8=5/13$) (Abdul Ghani ve Maat, 2018)
- İki kesrin paylarını toplayıp paya yazıp, paydalar arasındaki en büyük olanını paydaya yazma ($2/5+3/8=5/8$) (Abdul Ghani ve Maat, 2018)
- Kesirlerde toplama işleminde ondalık ifadeyi kesre yanlış dönüştürme ($1/2+1/4=0,75=7/5$) (Alghozo ve Alghozo. 2017)
- Kesirlerde çarpma bölme öğrenilen kuralları toplama çıkarma işleminde uygulama ($2/5+3/8=6/40$) (Abdul Ghani ve Maat, 2018)
- Kesirlerde çarpma ve bölme işlemine yönelik yanlışlar
 - Paydaları eşit iki kesrin çarpımında paylar çarpılırken paydanın olduğu gibi yazılması (Hecht, 1998)
 - Çarpma işleminin sonucunun her zaman çarpanlardan büyük olduğunun düşünülmesi (Zembat, 2010; Alacacı, 2009)
 - Bölme işleminde bölen yerine bölüneni ters çevirme (Ashlock, 1990)
 - Bölme işleminin değişmeli olduğunu düşünme (Hart, 1993)
 - Bölme işleminin sonucun her zaman küçük olacağını düşünme (Tirosh ve Graeber, 1989; Alacacı, 2009)
 - Bir doğal sayıyı kesre bölerken iki doğal sayıyı bölüyor gibi düşünme [$3:(1/5) = 3/5$ gibi] (Ma, 1999)
 - Kesrin yarısını bulmak için $1/2$ 'ye bölme yanlışlığı (Alacacı, 2009)

Görüldüğü gibi kesirlerde işlemsel zorluklarla birlikte kavramsal zorluklar ve modellemeye yönelik zorluklar da mevcuttur. Bu zorluklar kesirlerin bir başka gösterim türü olan ondalık gösterimlerde de benzer şekilde görülmektedir. Ondalık sayı ve kesir dönüşümleri, ondalık sayıların okunuşu, sıralanması ve ondalık sayılarda işlemler gibi konularda güçlükler mevcuttur. Ondalık gösterimlerle ilgili öğrencilerin kavram yanlışlıklarına yönelik yapılan çalışmalar ve sınıflandırmalar incelenmiş maddeler halinde aşağıda sıralanmıştır.

- Ondalık işaretini (virgülü) yanlış yorumlama
 - Ondalık gösterimin yanlış okunması (Özçakır, 2019)
 - Parça bütün ilişkisinin hatalı aktarımı ($0,4=1/4$)
 - Virgülü bir ayıraç olarak algılama (Kaya, 2015; Yılmaz, 2007; Gür ve Seyhan, 2004)

- Ondalık gösterimin anlamını kavrayamama (Gür ve Seyhan, 2004)
- Kesir-ondalık gösterim dönüşümüne ilişkin zorluklar (Yenil, 2020)
 - Kesirlerle ondalık sayılar arasındaki ilişkiyi kavrayamama (Gür ve Seyhan, 2004; Bell ve Baki, 1997)
 - Payı tam paydayı ondalık kısım olarak düşünme (Kaya, 2015)
 - Paydayı tam kısım payı ondalık kısım olarak düşünme (Kaya, 2015)
 - Ondalık gösterimi pay olarak düşünüp paydaya 10,100,1000 yazma (Kaya, 2015)
 - Tam kısmı pay ondalık kısmı payda olarak düşünme (Altıparmak ve Palabıyık, 2017; Kaya, 2015)
 - Ondalık kısmı pay tam kısmı payda olarak düşünme (Kaya, 2015)
- Ondalık sayıları çözümleme ve basamak değerleri ile ilgili zorluklar (Yenil, 2020)
 - Ondalık gösterim kısmındaki basamakları doğru olarak isimlendirememe (Kaya, 2015)
 - Basamak değeri kavramı yerine basamak kavramını kullanma (Yavuz Mumcu, 2015)
- Ondalık sayıları sıralama ve karşılaştırma ile ilgili zorluklar
 - Virgüli göz ardı ederek sıralama (Çok basamaklı sayı daha büyüktür) (Özçakır, 2019; Steinle ve Stacey, 1998; Gür ve Seyhan, 2004; Mason ve Tooley, 1992)
 - Kısa (az basamaklı) olan sayı daha büyüktür yanılgısı (Steinle ve Stacey, 1998; Gür ve Seyhan, 2004)
 - Ondalık kısmı uzun olan daha büyüktür yanılgısı ($4,54 > 4,8$) (Altun, 1998)
 - Kesirlerin sıralaması ile ondalık sayıların sıralamasını karıştırma ($1/3 < 1/2$ olduğu için $1,3 < 1,2$) (Steinle ve Stacey, 1998)
 - Sıfırı göz ardı ederek sıralama (Gür ve Seyhan, 2004)
 - Ondalık sayıların yoğunluğunu anlayamama (Bell ve Baki, 1997; Veloo, 2012)
- Toplama ve çıkarma işlemi ile ilgili zorluklar (Yenil, 2020; Özçakır, 2019)
 - Virgüli önemsemeden tamsayı gibi işlem yapma (Kaya, 2015)
 - Ondalık kısımdaki tüm eldeleri tam kısma aktarma (Kaya, 2015)
 - Tam kısmı kendi arasında toplama/çıkarma ondalık kısmı kendi arasında toplama/çıkarma (Aykaç, 2008; Kaya, 2015, Özçakır, 2019)

- Çarpma ve bölme işlemi ile ilgili zorluklar
 - 10 ile çarpma veya bölmede ondalık kısma sıfır ekleme veya sıfır kaldırma (Yenil, 2020)
 - Virgülleri görmezden gelerek tamsayılarda çarpma işlemi yapma (Kaya, 2015)
 - Virgülü yanlış yere koyma (Kaya, 2015)
 - Çarpma işleminin her zaman çarpanlardan büyük sonuç verdiğini düşünme (Kaya, 2015; Yavuz Mumcu, 2015; Yılmaz, 2007)
 - Çarpma işlemini sadece tam kısım ile yapma (Kaya, 2015)
 - Çarpma işleminin sonucu her zaman büyüteceğini düşünme (Altun, 1998)
 - Bölme işleminin her zaman sonucu küçülteceğini düşünme (Yavuz Mumcu, 2015; Yılmaz, 2007)
 - Bölme işleminde bölüme ne zaman sıfır yazılacağını kestirememe (Arslan ve Ubuz, 2009)
- Devirli ondalık gösterimlerle ilgili zorluklar
 - Devreden kısımları atarak a,bbb... sayısını a,b'ye eşitleme (Baki ve Güç, 2014; Steinle ve Pierce, 2006)
 - 0,999...<1 yanılgısı (Burroughs ve Yopp, 2010).
 - Yuvarlayarak sıralama yapma yanılgısı 3,777... sayısını 3,8 olarak ele alma (Stacey ve Steinle, 1998)
 - $a / 7$ gibi ondalık kısmı geç devreden sayılarda n. sıradaki basamağı belirleyememe (Vinner ve Kidron, 1985; Baki ve Güç, 2014)
 - İki devirli sayının çarpımının her zaman devirli olacağını düşünme (Baki ve Güç, 2014)
 - 0,999... sayısı ile bir x sayısı çarpıldığında sonucun x'den küçük olacağını düşünme (Baki ve Güç, 2014)
 - Devirli sayıları okuyamama (Baki ve Güç, 2014)

Yukarıda bahsi geçen çalışmaların bir kısmında sadece ortaokul (Kaya, 2015; Yılmaz, 2007; Yavuz Mumcu 2015; Aykaç, 2008 vb.), bir kısmında sadece lise (Mason ve Tooley, 1992 vb.), bir kısmında ise her iki sınıf düzeyindeki (Baki ve Güç, 2014; Stacey ve Steinle, 1998 vb.) öğrenciler yer almaktadır. Farklı öğretim seviyesindeki öğrencilerde kavram ile ilgili yaşanan zorlukların ve yanılgıların benzer şekilde ortaya çıktığı söylenebilir.

Kesirlerin ondalık gösterim haricindeki bir diğer gösterimi de yüzdendir. Ortaokul öğrencilerinin yüzdelerle ilgili karşılaştıkları zorluklar ve kavram yanılgıları Akpınar (2018) ve Yıldız'ın (2017) 7. sınıf öğrencileri ile yaptıkları çalışmalarda doğrudan

araştırma konusu olmuştur. Ayrıca Yapıcı (2013), 5. 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin yüzdelere konusundaki sayı duyularını incelemiş ve öğrencilerin yüzdelere ilgili çeşitli yanlışlara sahip olduklarını ortaya koymuştur. Bu üç çalışma ışığında yüzdelere konusundaki öğrenme zorlukları ve kavram yanlışları aşağıdaki gibi listelenebilir:

- Yüzde kesir dönüşümüne yönelik zorluklar (Yapıcı, 2013; Yıldız, 2017; Akpınar,2018)
 - Bir doğal sayıyı yüzdeye çevirirken sayının kendisini yüzde sembolü ile yazma ($5 = \%5$) (Yıldız, 2017; Akpınar,2018)
 - Yüzdeyi kesre çevirirken paya 100 yazma (Akpınar,2018)
 - Paydayı göz ardı edip payı yüzde sembolü ile gösterme (Yıldız, 2017; Akpınar,2018)
 - Payı paydaya bölerek çıkan sonucu yüzde sembolü ile gösterme (Yıldız, 2017; Akpınar,2018)
 - Paydası genişletme veya sadeleştirme ile 100 olamayacak olan kesirleri yüzde ile gösterememe (Yıldız, 2017; Akpınar,2018)
 - Kesrin paydası 10 ve kuvvetlerinden herhangi biri olacak şekilde genişletip payı yüzde sembolü ile gösterme ($5/8 = \%675$) (Yıldız, 2017)
 - Yüzdeyi kesir olarak gösterdikten sonra da yüzde sembolünü kullanma (Akpınar, 2018)
- Yüzde-ondalık gösterim dönüşümüne yönelik zorluklar
 - Ondalık kısmın tamamını yüzde sembolü ile gösterme ($0,5 = \%5$ ve $0,245 = \%245$) (Yıldız, 2017)
 - Ondalık kısım 100'den büyükse $\%100$ olarak ele alma (Yıldız, 2017)
 - Tam kısmı paya, ondalık kısmı paydaya yazıp oluşan kesri yüzdeye çevirme ($1,2 = \%50$) (Yıldız, 2017)
 - Virgülü göz ardı edip sayının tamamını yüzde ile gösterme ($1,5 = \%15$) (Yıldız, 2017)
 - Yüzdeyi ondalık kesir olarak gösterdikten sonra da yüzde sembolünü kullanma (Akpınar, 2018)
- Bir çokluğun belirtilen bir yüzdesine karşılık gelen miktarı bulma ve belirli bir yüzdesi verilen çokluğu bulmada zorluk (Yapıcı 2013; Yıldız, 2017; Akpınar 2018)
 - Bir sayının $\%a$ kadarı bulunduğu anda sayıyı önce 100 ile çarpıp a'ya bölme yanlışlığı (Akpınar, 2018)

- Bir bütünün belirli bir yüzdesi bulunurken veya belirli bir yüzdesi verilen sayının tamamı bulunurken orantıyı kurmada zorluk (Yıldız, 2017)
- %a'sı verilen bir sayının tamamı bulunurken sayıyı %a ile çarpma (Akpınar, 2018)
- Bir çokluğu belirli bir yüzde ile arttırmaya veya azaltmaya yönelik hesaplamalarda zorluk (Yapıcı, 2013; Yıldız, 2017; Akpınar 2018)
 - %x fazla veya eksik ifadelerini anlamlandıramama (Yapıcı, 2013; Yıldız, 2017; Akpınar 2018)
 - Sayının %x fazlasını veya eksikliğini o sayıya x'i ekleyerek veya çıkararak bulma (Yıldız, 2017; Akpınar, 2018)
 - %x fazlası ifadesini $100 + x$ olarak düşünüp sonucu 200'den çıkararak işlem yapma (Yıldız, 2017; Akpınar, 2018)
 - Fazla veya eksik ifadesini dikkate almayarak %x üzerinden işlem yapma (Yıldız, 2017; Akpınar, 2018)
- %1'in altında ve %100'ün üzerinde yapılan hesaplamalarda zorluk ve yüzdeleri anlamlandıramama (Yapıcı, 2013; Yıldız, 2017; Akpınar, 2018)
- A sayısının B sayısının yüzde kaç olduğunu bulmak için B'yi A'ya bölme (Yıldız, 2017)
- Bir sayının %x'ni bulup daha sonra %y'sini bulmayı sayının $\%(x+y)$ 'sini bulmakla aynı olduğunu düşünme (Yıldız, 2017; Akpınar, 2018)
- Bir sayının a katının onun %100.a fazlası olduğunu düşünme (Akpınar, 2018)
- Bir sayıyı 0,ab ile çarpmanın sayıyı %ab azaltmakla aynı şey olduğu düşüncesi (Akpınar, 2018)
- Alışveriş problemlerinde kar, zarar, iskonto, maliyet gibi kavramları anlamlandıramama (Yıldız, 2017; Akpınar, 2018)
- KDV dahil ve KDV hariç kavramlarını karıştırma (Akpınar, 2018)
- Yüzde hesaplamayı gerektiren problemleri anlayamama veya çözüm yolunu bulamama (Bozkurt, 2010; Memnun, 2014; Aykurtlu, 2019; Yıldız, 2017)

Yüzdelerle ilgili zorluklar incelendiğinde bazı zorlukların kesir, ondalık kesir ve yüzde dönüşümlerinden meydana geldiği görülmektedir. Öğrencilerin bütün, parça veya aralarındaki yüzde miktarlarından birinin verilmediği sorularda eksik olanı bulmada ve kar, zarar, maliyet, iskonto, KDV gibi kavramlar içeren alışveriş problemlerinin çözümünde zorlandıkları söylenebilir.

2.2.4.6. Oran orantı ve öğretimi

2.2.4.6.a. Öğretim programındaki yeri ve ilgili kazanımlar

Günlük hayatımızın birçok yerinde farkında olmadan kullandığımız oran ve orantı kavramları ilk kez ortaokul düzeyinde öğretim programında yer almaktadır. Öğrencilerden 6. sınıfta oran kavramını anlamlandırmaları, 7. sınıfta ise iki oranın eşitliğinden yola çıkarak orantılı çokluklardan verilmeyenini bulabilmeleri, gerçek hayat durumları ile orantı kavramını ilişkilendirmeleri beklenmektedir. İlgili kazanımlar Tablo 13'te yer almaktadır:

Tablo 13

Oran ve orantıyla ilgili kazanımlar

Sınıf Düzeyi	İlgili Kazanımlar
6 Oran	K1: Çoklukları karşılaştırmada oran kullanır ve oranı farklı biçimlerde gösterir K2: Bir bütünün iki parçaya ayrıldığı durumlarda iki parçanın birbirine veya her bir parçanın bütüne oranını belirler, problem durumlarında oranlardan biri verildiğinde diğerini bulur. K3: Aynı veya farklı birimlerdeki iki çokluğun birbirine oranını belirler.
7 Oran ve Orantı	K1: Oranda çokluklardan birinin 1 olması durumunda diğerinin alacağı değeri belirler. K2: Birbirine oranı verilen iki çokluktan biri verildiğinde diğerini bulur. K3: Gerçek hayat durumlarını inceleyerek iki çokluğun orantılı olup olmadığına karar verir. K4: Doğru orantılı iki çokluk arasındaki ilişkiyi ifade eder. K5: Doğru orantılı iki çokluğa ait orantı sabitini belirler ve yorumlar. K6: Gerçek hayat durumlarını inceleyerek iki çokluğun ters orantılı olup olmadığına karar verir. K7: Doğru ve ters orantıyla ilgili problemleri çözer.

Öğrenciler 6. sınıfta kesirlerden farklı olarak $a:b$ ve a/b ifadelerinin oranın farklı biçimleri olduğunu görmekte birimli ve birimsiz oran kavramları ile tanışmaktadır. Programda özellikle km/sa ve m/sn . dönüşümlerinin yapılması gerektiği ifade edilmektedir. Bu dönüşüm fen bilimleri dersinde de yer almaktadır. Öğrenciler 7. sınıfta orantı kavramı ile tanışmaktadır. Doğru orantı ve ters orantı kavramları programda yer almasına rağmen bu orantılara yönelik grafiklerin işlenmeyeceği ayrıca belirtilmiştir. Her iki orantı türü için de orantı sabitlerini bulmaya yönelik çalışmaların yapılması gerektiği programda yer alan notlarda ifade edilmiştir.

2.2.4.6.b. İlgili kavramlar ve tanımları

Oran ve orantı alt öğrenme alanına ait temel kavramlar oran, orantı, birimli oran, birimsiz oran, doğru orantı, ters orantı ve orantı sabiti kavramları olarak sıralanabilir.

Oran, $K=\{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : b \neq 0 \text{ veya } a \neq 0\}$ kümesinin her bir elemanına denilmektedir. Biçimsel olarak iki matematiksel ifadenin birbirlerine bölünerek gösterimi

oran niteliği taşımaktadır. Bu matematiksel ifadeler iki veya daha fazla niceliğin, büyüklüğün veya miktarın kıyaslanması sonucu ortaya çıkan ilişkiler de olabilir. Oranda herhangi iki sayı ikilisinin rastgele bölünmesinden ziyade mukayese etme eğilimi daha fazladır (Argün vd., 2014). Oran kavramı 6. sınıf düzeyinde ders kitaplarında çoklukların karşılaştırılması temelinde tanımlanmıştır. Ders kitaplarında yer alan tanımlardan bazıları şunlardır:

- İki çokluğun birbirine bölünerek karşılaştırılmasına oran denir (Bektaş ve diğerleri, 2018).
- Aynı veya farklı birimle ölçülen iki çokluğun ölçülerinin birbirine bölünerek karşılaştırılmasına oran denir. (Çağlayan ve diğerleri, 2018)

Oran kavramı için parça parça / parça bütün oranı, birimli / birimsiz oran ve içinde/arasında oran olarak farklı sınıflandırmalar mevcuttur.

Parça Parça / Parça Bütün: Bir sınıftaki kız öğrenci sayısının erkek öğrenci sayısına oranı sınıfın iki parçasının karşılaştırılmasından dolayı parça parça orana örnek teşkil ederken; kızların sayısının sınıf mevcuduna oranı parça bütün oranını temsil etmektedir. Bu sınıflandırmada oranın kesirle ilişkisi de ortaya konabilir. Çokluklardan birinin sıfır olması durumunda oran $a/0$ gibi bir ifade olabilirken $a/0$ ifadesi bir kesir belirtmez.

Birimli / Birimsiz: Farklı ölçüm uzaylarına ait çoklukların karşılaştırılmasına birimli oran, aynı ölçüm uzayına ait çoklukların karşılaştırılmasına birimsiz oran denir (Noelting, 1980a). 6. sınıf ders kitabında Bektaş ve diğerleri (2018), “Farklı birimli iki çokluk oranlandığında birimleri farklı olduğu için birim yazılır. Bu oranlara birimli oran denir. Aynı birimli iki çokluk oranlandığında ise birimleri aynı olduğu için yazılmaz. Bu tür oranlara birimsiz oran denir.” şeklinde iki kavramı da tanımlamıştır. Bu durumda iki kişinin ağırlıkları oranı olarak yazılan $\frac{60}{57}$ oranı birimsiz oran iken, bir kişinin ağırlığının boy uzunluğuna oranı $\frac{60}{159}$ kg/cm birimli orandır. Bu tanımlar ve örnekler incelendiğinde birimli ve birimsiz oranların iki ayrı ifade oldukları birbirini kapsamadıkları görülebilmektedir. Kertil, Erbaş ve Çetinkaya (2017) “rate” kavramının ortaokul kitaplarında yer alan “birimli oran”; “ratio” kavramının ise “birimsiz oran” kavramına karşılık geldiğini ifade etmiştir. Bu iki kavramın İngilizcedeki “rate” ve “ratio” kavramlarından çevrildiği ve onlara karşılık geldiği düşünülebilir. Ancak “rate” ve “ratio” arasındaki ilişkinin birimli ve birimsiz orandaki gibi zıt bir ilişki olup olmadığı tartışmalıdır. Thompson’a (1994) göre, çoklukların aynı ya da farklı birimlerde olmasına bakılmaksızın, statik değerlerin oranlanması “ratio”, dinamik ve sürekli değişen değerlerin oranlanması “rate” denilmektedir. Bu ifadeye göre iki çokluğun birimlerinden bağımsız olarak sınıflandırma yapılmaktadır.

Benzer şekilde Van de Walle ve diğerlerinin (2012) Türkçe çeviri kitabında “ratio” ifadesi için “oran”, “rate” ifadesi için ise “birimli oran” karşılıkları kullanılmıştır. Burada da birbirine zıt iki kavram yerine birinin diğerini kapsadığı iki kavramdan söz edilebilir. İki niceliğin çarpımsal olarak karşılaştırılması oran (ratio) kavramını ifade ederken. Karşılaştırılan iki nicelik aynı veya farklı birimlere sahip olabilir. Birimli oranda (rate) ise bir bağımsız değişken karşısında başka bir değişkenin değişimi gösterilmektedir. Kızların sayısının erkeklerin sayısına oranı, kapının eninin uzunluğunun boyunun uzunluğuna oranı “oran (ratio)” kavramına karşılık gelmektedir. Ancak boy uzunluğunun kiloya oranı, benzin miktarının verilen ücrete oranı gibi ifadelerde iki farklı değişken karşılaştırılmaktadır ve bu durum “birimli oran (rate)” kavramına karşılık gelmektedir.

Akar’ın (2007) İngilizce olan tez çalışması ve Akar’ın (2009) Türkçe yazılmış olan kitap bölümü incelendiğinde oranı birimli ve birimsiz oran olarak ayırdığı görülmektedir. Birimsiz oranın özellikle geometride sıklıkla kullanıldığı ve birimli orandan çok daha önce matematikte yer aldığı ifade edilmiştir. Ancak çok sonraları hız gibi yoğunluk gibi yeni kavramların ortaya çıkması ile “birimli oran” kavramına eğilimin zorunlu hale geldiğinden bahsedilmiştir. Birimli oranı Kaput ve West (1994) durumsal oran (particular ratio) ve genelleştirilmiş oran (rate ratio) olarak sınıflandırmıştır. Bu sınıflandırmaya göre $60 \text{ m}^2/25 \text{ dk}$ ifadesi, “25 dakika içerisinde yapılan iş miktarının 60 m^2 olduğunu gösterir. İki farklı birime sahip iki farklı miktar arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Bu şekilde düşünüldüğünde durumsal orandan söz edilmektedir. Ancak aynı ifadeyi “1 dakikalık süreçte $12/5$ yani $2,4 \text{ m}^2$ iş yapılmaktadır.” şeklinde birim orana dönüştürüp iki çokluk arasındaki ilişkiyi her durum için genelleyebiliyorsak genelleştirilmiş orandan bahsedilebilir. Bu tek bir durumdan ziyade iki miktarın çarpımsal ilişkisini veren sonsuz durumun matematiksel gösterimi olarak düşünülebilir.

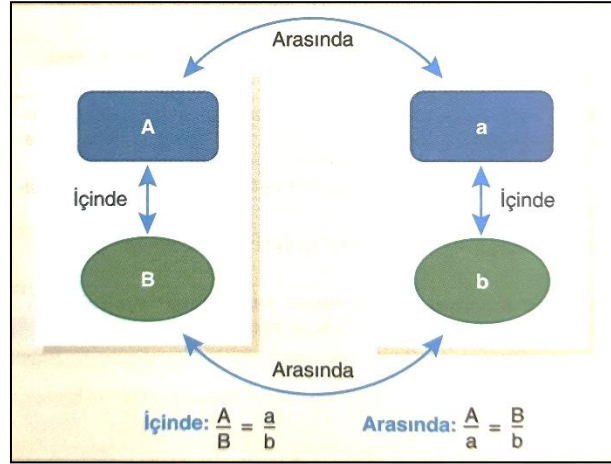
İçinde/Arasında: İçinde ve arasında kavramı iki oranın eşitliğinde söz konusu olmaktadır. Ülkemizde her ne kadar öğretilmiyor olsa da bu ayrımı öğretmenin faydalı olacağına ilişkin çeşitli çalışmalar da mevcuttur (Van de Walle ve diğerleri, 2012; Akar, 2007). Aynı durum veya aynı koşullardaki iki çokluğun oranına içinde (within) oran denilmektedir. Birbiriyle kıyaslanan farklı bağlamlardaki çoklukların oranına da arasında (between) oran denilebilmektedir. Boyu 5cm, eni 3 cm olan bir resmin, aynı oranda (2 kat)

fotokopi ile büyütüldüğünü düşünelim. Bu durumda
$$\frac{\text{Orjinal resmin boy uzunluğu}}{\text{Orjinal resmin en uzunluğu}} = \frac{\text{Fotokopinin boy uzunluğu}}{\text{Fotokopinin en uzunluğu}}$$
 eşitliği mevcuttur ($\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$). Buradaki $5/3$ oranına *içinde*

oran denilmektedir. Çünkü orijinal resmin eni ve boyu kendi içinde oranlanmakta veya fotokopinin eni ve boyu kendi içinde oranlanmaktadır. Aynı örnekte

$$\frac{\text{Orjinal resmin boy uzunluğu}}{\text{Fotokopinin boy uzunluğu}} = \frac{\text{Orjinal resmin en uzunluğu}}{\text{Fotokopinin en uzunluğu}}$$
 eşitliği de mevcuttur

$(\frac{5}{10} = \frac{3}{6})$. Buradaki $1/2$ oranına *arasında oran* denilmektedir. Burada ise farklı iki kağıttaki boy uzunlukları ve farklı iki kağıttaki en uzunlukları karşılaştırılmaktadır. Yani farklı iki durum arasında bir oran söz konusudur. Şekil 4'te bu durum gösterilmektedir.



Şekil 4. İçinde ve arasında oran (Van de Walle ve diğerleri, 2012, sy.444)

Oran kavramından sonra ele alınabilecek en temel kavramlardan biri orantı kavramıdır. Orantı, basitçe, ilk çiftin oranının ikinci çiftin oranına eşit olduğu ve $a/b = c/d$ olarak yazılan dört sayı veya miktar arasındaki bir ilişki olarak tanımlanır (Ekawati, Lin ve Yang, 2015, s. 515). Ortaokul ders kitaplarında da birebir aynı ifadelerin geçtiği söylenebilir (Oğan ve Öztürk, 2019 vb.). Ortaokul düzeyinde öğrenciler sadece doğru ve ters orantı kavramlarını öğrenmektedir. Formel olarak, “x ve y iki değişken olmak üzere $y=kx$ olacak şekilde sabit bir k reel sayısı varsa y değişkeni x değişkeni ile doğru orantılı (lineer orantılı) denir. x ve y iki değişken olmak üzere $xy = k$ ya da $y = k/x$ olacak şekilde bir k reel sayısı varsa y değişkeni x değişkeni ile ters orantılı veya x ve y ters orantılıdır denir. (Argün ve diğerleri, 2014)” tanımları yapılabilmektedir. Ders kitaplarında ise daha basit anlatımların yapıldığı söylenebilir. 7. sınıf ders kitabında Oğan ve Öztürk (2019), “İki çokluktan biri artarken diğeri de aynı oranda artıyorsa ya da biri azalırken diğeri de aynı oranda azalıyorsa bu çokluklara “doğru orantılı çokluklar” denir. İki çokluktan biri artarken diğeri aynı oranda azalıyorsa ya da biri azalırken diğeri aynı oranda artıyorsa böyle çokluklara “ters orantılı çokluklar” denir.” şeklinde tanım yapmıştır. Ders kitaplarında cebirsel gösterimden ziyade sözel ifadeler kullanılarak doğru ve ters orantı kavramlarının tanımlandığı söylenebilir.

Her orantıda bir orantı sabiti mevcuttur. Bu orantı sabiti, doğru ve ters orantılar için farklı hesaplanmaktadır. y ile x değişkenleri doğru orantılı ise $y/x = k$ veya $y = kx$ eşitliği vardır. Bu eşitlikteki k sayısına orantı sabiti denir. x ile y ters orantılı ise $y=k/x$ veya $y.x=k$ 'dir. Buradaki k yine orantı sabitidir (Altıntaş ve Keskin, 2019). 7. sınıf ders kitabında

orantı sabiti, “Doğru orantılı iki çokluğun birbirine bölümü sabit bir sayıdır. Bu sayıya “orantı sabiti” denir. Ters orantılı iki çokluğun çarpımı sabittir. Bu çarpıma “orantı sabiti” denir (Oğan ve Öztürk, 2019).” şeklinde tanımlanmaktadır.

2.2.4.6.c. Oran ve orantı kavramları ile ilgili öğrenme güçlükleri ve kavram yanlışları

Alanyazın incelendiğinde oran ve orantı kavramı ile ilgili yapılmış çeşitli çalışmalar öğrencilerin her iki kavrama ilişkin öğrenme güçlüklerinin ve kavram yanlışlarının olduğunu ortaya koymuştur. Bu çalışmalar ışığında her iki kavrama ilişkin yanlışlar maddeler halinde aşağıda listelenmiştir:

- Oran kavramına yönelik yanlışlar,
 - Oranda karşılaştırılan sayıların sadece pozitif olabileceğini düşünme, sıfırı göz ardı etme (Çetin, 2009)
 - Oranı, bölme işlemi olarak görme (Çetin, 2009)
 - Orandaki sayıları gerçek miktar olarak düşünme (Kaplan, İşleyen ve Öztürk, 2011)
 - Oranı nicelikler arasındaki ilişkiden ziyade bir sayı gibi düşünme
 - Eşdeğer oranları fark edememe $\frac{2}{4} > \frac{1}{2}$ (Adak ve Aliustaoğlu, 2020)
 - İki çokluk arasındaki ilişkiyi kuramama (4 kaşık tuz olan yemek 2 kaşık tuz olan yemekten her zaman daha tuzludur) (Adak ve Aliustaoğlu, 2020)
 - Birimli ve birimsiz oran kavramlarını bilmeme (Koçyiğit Gürbüz, 2018)
- Orantı kavramına yönelik yanlışlar,
 - İçler ve dışlar kavramlarını bilmeme (Çetin, 2009)
 - İçler ve dışlar yer değiştiğinde orantı sabitinin de değişmeyeceğini düşünme (Çetin, 2009)
 - Orantısal ve orantısız olmayan durumları ayırt edememe (Karaca, 2019)
 - Doğru orantı ve ters orantıyı karıştırma (Adak ve Aliustaoğlu, 2020)
 - İki çokluktan biri azalırken diğerrinin de azalması durumunu ters orantı olarak düşünme (Çetin, 2009)
 - Bir çokluğun birden fazla çoklukla ayrı ayrı doğru veya ters orantılı olarak ilişkili olduğu durumlarda, belirtilen bu çokluk dışındaki diğer çoklukların arasındaki orantı çeşidini belirlemede zorluk (Çetin, 2009)
 - Çarpımsal akıl yürütme yerine toplamsal akıl yürütme (Çetin, 2009; Adak ve Aliustaoğlu, 2020; Karagöz Akar, 2009; Simon ve Blume, 1994)
 - Öğrencilerin hangi oran çiftlerinde eşitlik bozulmaksızın aynı sayı ile çarpılacağı ya da bölüneceği kısmını anlayamamaları (Çalışıcı, 2015)

- Değişmezlik ile ilgili yanlışlar (Aralarında orantısal ilişki bulunan iki ölçüm arasındaki oranın aynı kalması gerektiğini düşünememe) (Karaca, 2019; Karagöz Akar, 2009)
- Orantı sabitini belirleyememe (Külcüoğlu, 2019)

Yapılmış çalışmalar ışığında oran ve orantı kavramlarına ait yukarıda listelenen yanlışların öğrencinin orantısal düşünme becerisine yönelik olduğu söylenebilir. Adak ve Aliustaoğlu (2020) ile Kaplan ve diğerleri (2011) doğru ve ters orantı problemlerine yönelik çalışma yapmıştır. Bu çalışmalar iki orantı türünün karıştırılabildiğini ve özellikle problemlerde hangisinin kullanılması gerektiğinin anlaşılamadığını ortaya koymuştur.

2.2.4.7. Üslü ifadeler ve öğretimi

2.2.4.7.a. Öğretim programındaki yeri ve ilgili kazanımlar

Öğrencilerin ilk kez ortaokul 5. sınıfta karşılaştıkları üslü ifade kavramı her sınıf düzeyinde var olmasına karşın 8. sınıfta bir alt öğrenme alanı olarak yer almaktadır. Sınıf düzeylerine göre kazanımlar Tablo 14’te verilmiştir.

Tablo 14

Üslü ifadelerle ilgili öğretim programında yer alan kazanımlar

Sınıf Düzeyi	İlgili Kazanımlar
5	K1: Bir doğal sayının karesini ve küpünü üslü ifade olarak gösterir ve değerini hesaplar.
6	K1: Bir doğal sayının kendisiyle tekrarlı çarpımını üslü ifade olarak yazar ve değerini hesaplar.
7	K1: Tam sayıların kendileri ile tekrarlı çarpımını üslü nicelik olarak ifade eder.
8	K1: Tam sayıların, tam sayı kuvvetlerini hesaplar. K2: Üslü ifadelerle ilgili temel kuralları anlar, birbirine denk ifadeler oluşturur. K3: Sayıların ondalık gösterimlerini 10’un tam sayı kuvvetlerini kullanarak çözümler K4: Verilen bir sayıyı 10’un farklı tam sayı kuvvetlerini kullanarak ifade eder. K5: Çok büyük ve çok küçük sayıları bilimsel gösterimle ifade eder ve karşılaştırır.

2. ve 3. kuvvetle başlayan üslü ifade gösterimi 6. sınıfta genel gösterime dönüşmekte, 7. sınıfta yeni sayı kümesinin öğrenimi ile tam sayıların kuvvetlerine geçilmektedir. Ortaokulun son sınıf düzeyinde ise kuvveti tam sayı olan üslü ifadeler görülmekte, üslü ifadelerde yer alan çeşitli işlemsel kurallar öğrenilmektedir. Ayrıca öğrenciler çok büyük ve çok küçük sayıların bilimsel gösterimle yazımını öğrenmektedir.

2.2.4.7.b. İlgili kavramlar ve tanımları

Öğrenciler ilk kez 5. sınıfta bir sayının karesi ve bir sayının küpü kavramları ile karşılaşmaktadır. Öğretim programında da 5. sınıfta üslü ifade kavramına değinilmeden kare ve küp kavramları kazanımlarda yer almıştır. MEB yayınlarının komisyon tarafından yazılan 5. sınıf ders kitabında (Komisyon, 2016), “Bir sayının kendisi ile çarpımına bu sayının karesi denir.” ve “Bir sayının kendisi ile iki kez çarpımına bu sayının küpü denir.” şeklinde tanımlar yapılmış ve “üslü ifade” kavramına değinilmeden “bir sayının karesi” ve “bir sayının küpü” tanımları yapılmıştır.

6. sınıf düzeyinde ise üslü ifade, taban ve üs (kuvvet) kavramları tanıtılmaktadır. Formel olarak üslü ifade, “G bir yarıgrup, X bir küme ve $f: G \times X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. $g \in G$, $x \in X$ olmak üzere $f(g, x) = x^g$ şeklinde gösterilsin. Eğer $(x_1 x_2)^g = x_1^g \cdot x_2^g$ şartı sağlanıyorsa o zaman G yarıgrubu, X kümesine etki eder denir. Bu etkide x^g gösterimine bir üslü ifade denir.” şeklinde Argün ve diğerleri (2014) tarafından tanımlanmıştır.

Argün ve diğerleri (2014) formel tanımın yanı sıra ortaokul düzeyi için şu açıklamayı yapmıştır: “Kuvvet, bir sayının kendisiyle kaç kez çarpıldığını ifade eden sayı anlamında kullanılmaktadır. Bu sayıya üs denilmesinin sebebi ise sembolik gösterimde bir sayının kendisiyle kaç defa çarpma işlemi uygulandığını gösteren sayının sağ üst tarafına yazılmasıdır. Örneğin $\langle a \text{ üssü } 5 \rangle$ ifadesi, a’nın kendisiyle beş kez çarpıldığını göstermektedir. Dolayısıyla 5, a’nın sağ üst tarafına yerleştirilmiştir. Kuvvet kelimesi de ‘başkalarının üzerine etki etme’ niteliğidir. $\langle a \text{ üssü } 5 \rangle$ ifadesinde 5’in etki etme niteliği a’yı kendisiyle 5 defa çarpmasıdır.”

6. sınıf ders kitapları incelendiğinde bazı kitaplarda sözel, bazılarında ise cebirsel gösterimlerle tanımlamalar yapıldığı görülmektedir. Bektaş ve diğerleri (2018), 6. sınıf ders kitabında üslü ifadeyi, “Üslü ifadeler, sayıların kendileriyle tekrarlı çarpımlarını kısaca göstermenin bir yolu olarak kullanılır. Bir üslü ifadede aşağıya yazılan sayıya taban, sağ üste yazılan sayıya kuvvet ya da üs denir. Taban bir doğal sayı ve kuvvet sıfırdan farklı bir doğal sayı ise taban kendisiyle tekrarlı çarpılan sayıyı, kuvvet ise tabandaki sayının kaç defa tekrarlı çarpılacağını gösterir.” şeklinde sözel ifadelerle açıklamıştır. Özdemir (2019) ders kitabında, “a, b ve n birer doğal sayı olmak üzere a^n ifadesine üslü ifade denir. a^n üslü ifadesi, n tane a sayısının yan yana tekrarlı çarpımıdır. $a^n = b$ üslü ifadesinde a’ya taban, n’ye kuvvet veya üs, b’ye bu üslü ifadenin değeri denir.” şeklinde cebirsel bir tanım yapmıştır.

Üslü ifadelerle ilgili bir diğer kavram ise bilimsel gösterimdir. Bilimsel gösterim, bir n sayısının, $1 \leq |a| < 10$, $a \in \mathbb{R}$ ve $p = \lceil \log_{10} |n| \rceil$ olmak üzere $a \cdot 10^p$ şeklinde gösterimidir (Stover ve Weisstein, t.y.). Milli Eğitim Bakanlığı ders kitabında Böge ve Akıllı (2018) “|a|, 1 veya 1’den büyük, 10’dan küçük bir gerçektek sayı ve n bir tam sayı olmak

üzere a .10ⁿ gösterimine bilimsel gösterim denir.” şeklinde tanım yapmıştır. Çok büyük ve çok küçük sayıların yazımında bilimsel gösterimden yararlanıldığı ifade edilmektedir.

2.2.4.7.c. Üslü ifadelerle ilgili öğrenme güçlükleri ve kavram yanlışları

Üslü ifadelerle ilgili gerek ortaokul gerek lise seviyesinde yapılmış birçok çalışma bulunmaktadır. Çalışmalar her sınıf seviyesinde çeşitli güçlüklerin ve kavram yanlışlarının olduğunu ortaya koymaktadır. Öğretmen adayları veya öğretmenlerle yapılmış çalışmalar bir sonraki bölümde verilecek olup bu bölümde öğrencilerle yapılmış çalışmalar ve çalışmaların odaklandığı konulardan kısaca bahsedilecektir.

Bazı çalışmalarda üslü ifadelerin tamamı ele alınırken bazılarında ise sadece belirli kazanımlara odaklanılmıştır. Güzel ve Yılmaz (2020) 8. sınıf öğrencilerinin üslü ifadeler konusunda matematiksel dili anlayabilme ve kullanabilme düzeylerini incelemiştir. Bayram (2013) ise yüksek lisans tez çalışmasında 8. sınıf öğrencilerinin üslü ifadelerle ilişkin sayı duyuları ve matematik başarıları arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Çalışmada üslü ifadelerle ilişkin kapsamlı bir test hazırlayıp bilimsel gösterim, bir sayının kaç basamaklı olduğunu üslü ifadelerden yararlanarak bulma gibi birçok soru tipinde öğrenci zorluklarını ortaya çıkarmıştır. Ortaöğretim düzeyinde yapılan üslü ifadelerin tamamını ele alan çalışmalara da Cengiz (2006) örnek gösterilebilir. Cengiz (2006), reel sayıların öğretiminde 9. sınıf lise öğrencilerinin yanlışlarını ve yanlışlarını tespit etmeyi amaçlamıştır. Bu amaca ulaşmak için lise öğrencilerinin rasyonel sayılar, üslü ifadeler ve köklü ifadeler konularındaki olası kavram yanlışlarını araştırmıştır.

Üslü ifadelerle ilgili sınırlı prototipler veya belirli kazanımlara odaklanan çalışmalar da mevcuttur. Örneğin Ulusoy (2019), 8. sınıf düzeyindeki 12 öğrenci ile yapmış olduğu mülakatla öğrencilerin üslü sayıların tam sayı kuvvetlerine yönelik güçlüklerini incelemiş; üssün sıfır ve negatif olduğu durumlarda yaşanan zorlukları kategorilendirmiştir. Benzer şekilde Rabin, Fuller ve Harel (2013) 10. sınıf öğrencileri ile yaptığı çalışmada negatif üs ve sıfırıncı kuvvete odaklanmıştır. Aynı şekilde Cangelosi, Madrid, Cooper, Olson ve Hartter (2013) lise ve üniversite düzeyindeki öğrencilerle yaptığı çalışmada üslü ifadelerin özellikle negatif taban veya üsleriyle ilgili kavram yanlışlarını incelemiştir. Her iki düzeyde de öğrencilerin üslü ifadelerle ilgili yaptıkları hataların oldukça benzer olduğu aktarılmıştır. Bu durumun nedeni olarak bazı hataların kalıcı olmasını ve öğrencilerin bir üst seviyeye çıkmalarına rağmen bu hataları yapmaya devam etmelerini göstermişlerdir. Farklı taban prototipleri kullanılan çalışmada Özkan ve Özkan (2012) ortaokul ve lise öğrencilerinin tam sayılar ve ondalık sayıların üslü kuvvetleri ile ilgili kavram yanlışlarını araştırmıştır.

Üslü ifadelerin sıralanmasına odaklanan çeşitli çalışmalar da mevcuttur. Avcu (2010) 8. sınıf öğrencilerinin üslü ifadelerle ilgili zihinsel hesaplamalarındaki başarı

düzeyine karar vermeyi ve öğrencilerin ortalama puanları üzerinde üslü ifadelerin farklı prototip örneklerinin bir etkisi olup olmadığını görmeyi amaçlamış ve sonuç olarak öğrencilerin üslü ifadelerin karşılaştırmasında çeşitli yanlışlarının olduğunu ortaya koymuştur.

Duatepe-Paksu (2008) öğrencilerin üslü ve köklü sayılarla ilgili öğrenme güçlüklerini başlıklar halinde ele almış ve çözüm önerileri sunmuştur. O çalışmada yer alan kategoriler ve yukarıda bahsi geçen diğer çalışmalardaki yanlışlar da bir arada değerlendirildiğinde alanyazında belirlenmiş güçlükler şunlardır:

- Üslü sayının değerini belirleyememe
 - Taban ve üssü çarpma (Cengiz 2006, Güzel ve Yılmaz 2020; Zazkis, 1998; Weber 2002)
 - Sayı doğrusunda yerini bulamama (Crider 1998)
 - Üssü taban kadar yazıp çarpma (Ulusoy 2019)
- Sıfırcı kuvvetin anlamını kavrayamama
 - Sonucu sıfır bulma (Crider 1998 Özkan ve Özkan, 2012; Ulusoy 2019, Rabin, Fuller ve Harel 2013; Satan, Aksakal ve Ay , 2021)
 - Sayının kendisine eşit sanma (Cengiz 2006; Ulusoy 2019)
 - Üs sıfır olduğunda sayının başındaki negatif işarete anlam verememe (Ulusoy 2019, Rabin ve diğerleri, 2013)
 - $-a^n$ ile $(-a)^n$ ifadelerini ayırt edememe (Cengiz, 2006; Crider, 1998; Orhun 1998) Cangelosi ve diğerleri 2013; Özkan ve Özkan 2012; Rabin ve diğerleri, 2013)
- Negatif üssü algılayamama,
 - Tabanın negatifi ile çarpma (Crider 1998)
 - Üssün negatifi yok sayıp en son başa negatif ekleme (Crider 1998) Cangelosi ve diğerleri, (2013), Ulusoy 2017;
 - Ardışık bölme işlemi yapılacağını zannetme (Crider 1998; Cangelosi ve diğerleri, 2013)
 - Tabanın ters çevirip toplamaya göre de tersini alarak işlem yapma (Şenay, 2002)
 - Üssü kesrin payı olarak düşünme: $2^{-3} = 3/2$ (Cengiz 2006; Cangelosi ve diğerleri, 2013)
 - Tabanı ondalık olarak ifade etme: $2^{-3} = 0,002$ gibi (Crider 1998)
 - Üssün kesir olarak yazılacağını düşünme: $2^{-3} = 2^{1/3}$ (Cangelosi ve diğerleri, 2013; Ulusoy 2017)

- a pozitif ve b çift olmak üzere $(-a)^b = a^b$ kuralını aşırı genelleterek $a^{-b} = a^b$ yazma.
- x^n ve n^x ifadelerini birbirinden ayırt edememe (Crider 1998)
- Tabanı negatif olan üslü ifadelerinin sonucunun her zaman negatif olacağını düşünme (Cengiz, 2006; Şenay, 2002).
- Üssünün üssünü bulamama,
 - Üsleri toplama (Crider 1998)
 - 2. üssü ilk üssün üssü olarak hesaplama: $(2^3)^4 = 2^{81}$ (Şenay 2002)
- Toplama ve çıkarma işlemlerinde karşılaşılan güçlükler
 - Aynı üslü ifadelerin toplamında üsleri toplama, İki üslü ifadenin farkında üsleri çıkarma (Cengiz, 2006; Güzel ve Yılmaz, 2020)
 - Üsler aynı olduğunda tabanlarda doğal sayı işlemi yapma (Cengiz 2006)
 - Tabanın eşit üslerin zıt işaretli olduğu iki üslü sayının toplamının sıfır olduğunu düşünme (Crider, 1998).
- Çarpma ve bölme işlemlerinde karşılaşılan güçlükler
 - Katsayılarla tabanı çarpma (Cengiz 2006)
 - Tabanla tabanı üsle üssü çarpma/bölme (Crider, 1998).
 - Tabanları çarpıp üsleri toplama/ Tabanları bölüp üsleri çıkarma (Crider, 1998).
 - Tabanların aynı olduğu çarpmalarda üsleri çarpma (Güzel ve Yılmaz, 2020)
- Üslü ifadeleri karşılaştırma ile ilgili güçlükler (ondalık ifade) (Avcu, 2010)
- Çok büyük ve çok küçük sayıları bilimsel olarak gösterememe (Bayram, 2013)
- Bilimsel gösterim kavramını bilmeme (Aydın ve Temel, 2012)

Duatepe-Paksu (2008) tarafından belirlenen kavram yanlışlarına bazı eklemelerle oluşturulmuş yukarıdaki kategoriler üslü ifadelerle ilgili çok sayıda ve farklı türde güçlüklerin olduğunu ortaya koymaktadır. Çalışmaların farklı sınıf düzeyindeki öğrencilerden alınmış olması ve benzer hataların hem ortaokul hem lisede görülüyor olması anlamlı öğretim için kavram yanlışlarına ve öğrenme güçlüklerine dikkat edilmesi gerektiğini göstermektedir.

Ortaokul düzeyinde yer alan negatif üs, sıfırcı kuvvet, negatif tam sayıların kuvvetleri, bilimsel gösterim, üslü ifadelerde işlemler gibi konularda literatürde çok sayıda kavram yanlışlığı ortaya konmuştur. Bu kavram yanlışlarının farkında olması ve öğretim

sırasında bu yanlışların oluşmasını engelleyecek önlemleri alması beklenen öğretmenlerin benzer yanlışlara sahip olmamasının oldukça önemli olduğu söylenebilir.

2.2.4.8. Kareköklü ifadeler ve öğretimi

2.2.4.8.a. Öğretim programındaki yeri ve ilgili kazanımlar

MEB (2018) matematik dersi öğretim programında “kareköklü işlemler” alt öğrenme alanı ilk kez 8. sınıf düzeyinde yer almaktadır. Alt öğrenme alanında sekiz kazanım mevcuttur. Bu kazanımlar sırasıyla aşağıda verilmiştir:

K1: “Tam kare pozitif tam sayılarla bu sayıların karekökleri arasındaki ilişkiyi belirler.”

K2: “Tam kare olmayan kareköklü bir sayının hangi iki doğal sayı arasında olduğunu belirler.”

K3: “Kareköklü bir ifadeyi $a\sqrt{b}$ şeklinde yazar ve $a\sqrt{b}$ şeklindeki ifadede katsayıyı kök içine alır.”

K4: “Kareköklü ifadelerde çarpma ve bölme işlemlerini yapar.”

K5: “Kareköklü ifadelerde toplama ve çıkarma işlemlerini yapar.”

K6: “Kareköklü bir ifade ile çarpıldığında, sonucu bir doğal sayı yapan çarpanlara örnek verir.”

K7: “Ondalık ifadelerin kareköklerini belirler.”

K8: “Gerçek sayıları tanır, rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilişkilendirir.”

(MEB, 2018)

Öğrenciler öncelikle tam kare (karesel) ve tam kare olmayan doğal sayıları ayırarak tam kare olan doğal sayılarla karekökleri arasındaki ilişkiyi belirler. Bu ilişkinin anlaşılması için kare modellerinden yararlanılması ve karenin alanı ile bir kenarı arasındaki ilişkinin tartışılması önerilmektedir. Alanı verilen bir karenin bir kenar uzunluğunu bulmak için öğrencinin şimdiye kadar gördüğü toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin yetersiz kaldığının hissettirilmesiyle karekök alma işlemine duyulan ihtiyaç ortaya konulabilir. Karesel sayıların kareköklerinin tam değerleri bulunup sayı doğrusu modeli üzerinde ortaya konduktan sonra karesel olmayan sayıların sayı doğrusunda hangi noktalarda yer aldığı sorunu ortaya çıkmaktadır. 2. kazanımla birlikte bu sorunun yanıtı öğrencilerce aranır. $\sqrt{31}$ gibi karesel olmayan sayıların kareköklerinin hangi doğal sayıların arasında olduğu ve hatta hangisine daha yakın olduğu sorgulanmaktadır. Böylece köklü sayılar ve doğal sayılar arasında bir sıralama ilişkisi kurulabilmektedir. Ancak $a\sqrt{b}$ şeklindeki bir sayının sıralanması için a katsayısının kök içine alınması gerekir ki öğrenciler bunun nasıl yapılacağı sorunuyla 3. kazanımla birlikte yüzleşmektedir. Katsayıyı içeri almanın yanı sıra aynı kazanımda bunun tersinin de gerçekleşmesi

istenmektedir. Öğrencilerden “asal çarpanlara ayırma” bilgilerini de kullanarak $\sqrt{a^2 \cdot b}$ şeklindeki bir sayının $a\sqrt{b}$ şekline getirilmesi beklenmektedir. 4. ve 5. kazanımda ise öğrenciler kareköklü sayılarda dört işlemin nasıl yapılacağını öğrenmektedir. Bu noktada programın bir kısıtlaması mevcuttur. Paydasında köklü sayı içerecek şekilde birden fazla terim bulunan ifadelerin kullanılmaması gerektiği vurgulanmaktadır. Bir sonraki kazanımda kareköklü bir sayının hangi sayılarla çarpıldığında doğal sayı elde edilebileceğine dair örnekler üzerine çalışılmaktadır. Bu kazanımın rasyonel sayı-irrasyonel sayı ilişkisini anlamada kritik olduğu söylenebilir. Çünkü öğrenciler iki tane irrasyonel sayının çarpımıyla bir doğal sayı yani bir rasyonel sayı elde edilebildiğini görmektedir. Bu kareköklü sayıların ondalık açınımları göz önüne alındığında ondalık kısmı sonsuza kadar giden iki tane sayının çarpımından bir doğal sayı elde edilebileceği görülebilmektedir. 7. kazanımda öğrenciler ondalık ifadelerin de kareköklerinin bulunabildiğini öğrenmekte ve rasyonel sayıların kareköklerini bulmaya çalışmaktadır. Ancak burada payı ve paydası tam kare olan sayılarla sınırlandırmaya gidilmiştir. Kareköklü ifadelerin sekizinci yani son kazanımı sayı kümeleri ile ilgili olup detaylarına irrasyonel sayı bölümünde yer verilecektir.

2.2.4.8.b. İlgili kavramlar ve tanımları

Kareköklü işlemler alt öğrenme alanında “tam kare (karesel) sayı” ve “karekök” kavramları mevcuttur. Karekök kavramının öğretimi için tam kare kavramının bilinmesi bir ön koşul olarak değerlendirilebilir. Zaten programda yer alan kazanım sırası öğrencilerin önce tam kare sayının ne olduğunu anlamaları gerektiğini göstermektedir. Goodman ve Weisstein (t.y.) karesel sayıyı “karesel yani tam kare sayı, n bir tam sayı olmak üzere $S_n = n^2$ formundaki sayılardır.” şeklinde tanımlamıştır. Bu tanıma göre karesel sayılar 0, 1, 4, 9,... şeklinde ilerlemektedir. Ancak aynı yazıda bazı araştırmacılara göre n ’in rasyonel sayı olarak ele alındığı da belirtilmektedir. Bu çatışmadan “ $\frac{16}{25}$ sayısı da tam kare bir sayı mıdır?” sorusu ortaya çıkmaktadır. Learn (2000, sy.75), “İki eşit rasyonel sayının çarpımı şeklinde yazılabilen sayılara tam kare sayı denir.” şeklinde bir tanım yapmıştır. Alan-kenar ilişkisi olarak bakıldığında oranlı şekilde yazılan bir alana sahip karenin kenar uzunluğu da oranlı olabilmektedir. Bu durumda tanımın rasyonel olarak yapılmasının bir sakınca doğurmayacağı da düşünülebilir.

MEB (2018) öğretim programında ilk kazanımda yer alan “tam sayı” kısıtlaması ile öğretim sürecinde yaşanabilecek bir kafa karışıklığının önüne geçilmiştir. 7. kazanımda ondalık ifadelerin karekökleri alınırken payın ve paydanın tam kare olması şartını koymuştur. Programda pay ve paydanın ayrı ayrı vurgulanması rasyonel ifadenin kendisinin tam kare olup olmadığı tartışmasından dışarı çıkılmasını sağlamıştır. 2019-2020

eğitim öğretim döneminde okullara dağıtımı yapılan 8. sınıf matematik kitaplarının tamamında “Bir tam sayının karesi olan pozitif tam sayılara tam kare pozitif tam sayılar denir.” tanımı yer almaktadır.

MEB (2018) programı ile önceki yıllarda yapılan bir başka tartışma da son bulmuştur: “Sıfır, tam kare sayı mıdır? Değil midir?”. MEB (2013) programında, “Tam kare doğal sayıları tanır.” kazanımı yer almaktadır. 2016-2017 eğitim öğretim dönemi itibariyle 5 yıl okutulmak üzere dağıtılan Aydın (2015) 8. sınıf matematik ders kitabında “Karekökleri tam sayı olan 1, 4, 9, 16... gibi doğal sayılara tam kare sayılar denir.” tanımı yapılmıştır. Çeşitli forumlarda ve sosyal medya gruplarında matematik öğretmenlerinin sıfırın tanımı sağlayıp sağlamadığı konusunda tartıştıkları görülmüştür. MEB (2018) programında “pozitif” ifadesi yer alarak bu tartışmaya da son verilmiştir.

“Karekök” ve “karekök alma işlemi” ile ilgili literatürde ve ders kitaplarında çeşitli tanımlar mevcuttur. Weisstein (t.y.), “ $r^2=x$ şeklinde yazılabilen bir x sayısının karekökü r sayısıdır.” şeklinde bir tanım yapmıştır. Bu tanımdan yola çıkarak 25 sayısı hem 5^2 hem de $(-5)^2$ olduğu için $\sqrt{25}$ ’in -5 veya +5 olarak iki değerinin olduğu söylenebilir. Euler (1770), “...her sayının karekökü her zaman iki değere sahiptir. Biri pozitif diğeri negatiftir. Örneğin $\sqrt{4}$ ’ün +2 ve -2 olmak üzere iki değeri vardır. Genel ifadeyle bir a sayısının karekökünü $\pm\sqrt{a}$ şeklinde alabiliriz.” şeklindeki tanımıyla karekökün negatif olabileceği düşüncesine ilham olmuştur (Gomez ve Buhlea, 2009). Gomez ve Buhlea (2009) iki ülkenin (İspanya ve Romanya) radikal (kök) kavramına ilişkin öğretim farklılıklarını incelemiştir. Hem ders kitaplarını inceleyerek hem de öğretmenlerle görüşerek yapmış olduğu çalışmada İspanya’da $\sqrt[3]{9} = \pm 3$ şeklinde bir radikale iki farklı değer verildiğini Romanya’da ise tek değer olarak 3’ün kabul edildiğini görmüştür. İspanya’da cebirsel yaklaşımla $x^2=9$ denkleminin *kökünü* bulunurken diğer ülkede $\sqrt{x^2} = |x|$ kabul edilip pozitif kök alındığı anlaşılmıştır. Çalışma, İspanya’daki gibi iki farklı değer atamanın aritmetiksel işlemlerde öğretmenlerde dahi kafa karışıklığına neden olduğunu ortaya koymuştur. Lang (1974) $\sqrt{a^2}$ ifadesinin değerinin bir tercih olduğunu söylemiştir. Matematik camiasında a ’nın sadece pozitif olan değerinin kabul edildiğini ve “ a ’nın pozitif karekökü” yerine kısaca “ a ’nın karekökü” ifadesinin kullanıldığını belirtmiştir. $\sqrt{4}$ ’ün kareköküne iki farklı değer atamanın aritmetiksel sorunlara neden olacağını da ifade etmiştir. Weisstein (t.y), pozitif köke “temel karekök (*principal square root*)” demiştir. Aritmetikte *temel karekök* kullanımının yaygın olduğu, süreçten ziyade yapısal bir nesne niteliği taşıdığı söylenebilir.

Ulusal alanyazın incelendiğinde Argün ve arkadaşlarının (2014) karekök tanımını üç farklı şekilde yaptıkları görülmüştür:

1. “ $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ bir sıralı tamlık bölgesi ve $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $b^2 = a$ ise o zaman $b \in \mathbb{R}$ ’ye $a \in \mathbb{R}$ ’nin bir karekökü denir.”
2. “ $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere $x^2 = a$ denkleminin çözümlerinden her birine a ’nın bir karekökü denir.”
3. “ $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere $x^2 = a$ denkleminin negatif olmayan çözümüne a ’nın karekökü denir.”

İlk tanım bir sayının karekökünün negatif reel sayı olabileceğini ifade etmektedir. İkinci tanım ise reel sayıların yanı sıra karmaşık sayı köklerini de kavrama dahil etmiştir. Son tanımı ise ilköğretim seviyesine göre yaptıklarını belirtmiş olup sadece negatif olmayan reel sayıları ele almışlardır. Bu ifadeler göz önüne alındığında çalışılan kümeye bağlı olarak farklı tanımların kullanılabileceği söylenebilir.

Peki, MEB ders kitaplarında yapılan tanımlar nasıldır? Son yıllarda dağıtımı yapılan 8. sınıf ders kitaplarına bakıldığında üç farklı tanımla karşılaşmıştır. Bu tanımlar şunlardır:

1. Karekök alma, negatif olmayan bir sayının hangi sayının karesi olduğunu bulma işlemidir. (Çetin ve diğerleri, 2019)
2. “Karesi a olan sayı $\sqrt{a}$ ’dır. $x^2 = a$ ifadesindeki x ’in değeri $\sqrt{a}$ ’dır.” (Serfiçeli ve Atmaz, 2018)
3. “Bir sayının hangi sayının karesi olduğunu bulma işlemine karekök alma işlemi denir. Tam kare bir sayının karekökü bulunurken pozitif olan sayı alınır. $\sqrt{x^2} = |x|$ olmaktadır.” (Aydın, 2016)

Kitaplar incelendiğinde her üç ders kitabında da sadece pozitif karekök örneklerinin yer aldığı görülmektedir ancak ilk iki tanım negatif karekökü düşünmek için engel değildir. Bu nedenle öğrencide kafa kırılgılığına neden olabilir.

Görüldüğü gibi karekök kavramı gerek ilgili alanyazında gerekse yazılı materyallerde farklı şekilde tanımlanabilmektedir. Programa uygun ve öğrencilerde kavram yanlışlığına sebep olmayacak tanımların seçilmesi ve öğretimde kullanılması gerektiği söylenebilir.

2.2.4.8.c. Kareköklü ifadelerle ilgili öğrenme güçlükleri ve kavram yanlışlıkları

Kareköklü ifadelerle ilgili yapılmış olan alan ve pedagojik alan bilgisi çalışmaları öncesinde öğrenci bilgisi ve öğretim stratejileri bileşenlerine de ışık tutması amacıyla öğrencilerle yapılmış çalışmalar incelenmiştir. Bu çalışmalardan irrasyonel sayı ve gerçek sayılarla ilgili olanlar ilgili bölümde detaylı incelenecektir. Bu bölümde ise kareköklü işlemler alt öğrenme alanının ilk 7 kazanımına yönelik çalışmalar ele alınmıştır. İncelenen çalışmalar öğrencilerin 8. sınıfta ilk kez karşılaştıkları kareköklü ifadelerle ilgili çeşitli

öğrenme güçlüklerine ve kavram yanlışlarına sahip olduğunu göstermektedir (Duatepe-Paksu, 2008; Yücesan, 2013; Tuna, Aliustaoğlu ve Biber, 2019; Kaplan, Altaylı ve Öztürk, 2014).

Tuna, Aliustaoğlu ve Biber (2019), ortaokul öğrencilerinin kareköklü ifadelerle ilgili kavram yanlışlarını tespit etmeye çalışırken, Yücesan (2013) yüksek lisans tezinde lise öğrencilerinin hem karekök hem de üslü ifadelerle ilgili öğrenme güçlükleri ve kavram yanlışlarını tespit etmeye çalışmıştır. Kaplan, Altaylı ve Öztürk (2014) ise ortaokul öğrencilerinin kavram yanlışlarını *tespit etmenin yanı sıra* bu yanlışları giderebilmek amacıyla kavram karikatürlerinin etkisini inceleyen bir *deneyisel* çalışma yürütmüştür. Duatepe-Paksu (2008) “Matematiksel kavram yanlışları ve çözüm önerileri” kitabında üslü ve köklü sayılarla ilgili kavram yanlışlarını geniş bir literatür desteği ile ele almış ve öğrencilerde sıklıkla görülen kavram yanlışlarını örneklendirmiştir. Tüm bu çalışmalar ışığında öğrencilerde görülen kavram yanlışları ve öğrenme güçlükleri şu şekilde listelenebilir:

- Kavramsal zorluklar,
 - İrrasyonel sayıların anlaşılmasına yönelik güçlükler
 - Her köklü sayının irrasyonel sayı olarak düşünülmesi
 - Rasyonel- irrasyonel sayı ilişkisine yönelik güçlükler
- Kökten çıkarma ve kök içine alma zorlukları,
 - Kök içerisinde toplam halinde bulunan tam kare sayıları ayrı ayrı kökten dışarı çıkarma yanılığı: $\sqrt{12^2 + 5^2} = 12 + 5$
 - Köklü sayıyı $a\sqrt{b}$ şeklinde yazamama
 - $a\sqrt{b}$ şeklindeki sayıda katsayıyı kök içine alamama
 - Ondalık sayıların kökten çıkarılması ile ilgili yanlışlar: $\sqrt{0,4} = 0,2$ veya $\sqrt{0,444...} = 0,222... vb.$
 - Üslü sayıların kareköklerini bulmada zorlanma: $\sqrt{3^{16}} = 3^4 vb.$
 - Köklü sayıyı üslü biçimde ifade edememe
- Yaklaşık değer bulma ve sıralama zorlukları
 - Köklü ifadelerde sıralama güçlükleri; sadece kök içine bakarak sıralama yanılığı: $5\sqrt{7} > 6\sqrt{5} vb.$
 - Tam kare olmayan kareköklü bir sayının karekökünü tahmin edememe
 - Köklü sayının büyüklüğüne karar verememe ve sayı doğrusunda gösterememe
- Köklü ifadelerde işlemlerle ilgili zorluklar

- Kök içleri farklı olan köklü sayıların toplama çıkarma işlemlerinde sonucu o şekilde bırakmak yerine işlem yapmaya çalışma: $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ifadesinde işlem yapmaya çalışma vb.
- Doğal sayılardaki işlem özelliklerini köklü ifadelerde de uygulamaktan kaynaklanan yanlışlar
- Köklü sayıların tekrarlı çarpımında çarpma yerine toplama yapma: $\sqrt{6}.\sqrt{6}.\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$ vb.
- Köklü sayılarda çarpma bölme yaparken sadece katsayılarla işlem yapma: $2\sqrt{3}.5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ vb.
- Negatiflik ile ilgili yanlışlar
 - Negatif sayıların kök içerisine alınmasındaki yanlışlar: $3\sqrt{2}=\sqrt{2.(-3)^2}=\sqrt{18}$
 - Her sayının karesinin karekökü ile karekökünün karesini eşit sanma
 - $\sqrt{a^2}=a$ eşitliğinin her a sayısı için doğru olduğunu düşünme yanlışısı
 - Bir sayının karekökünün hem pozitif hem negatif değerini alma: $\sqrt{25}=\mp 5$

Görüldüğü gibi öğrencilerin gerek kavramsal gerekse işlemsel düzeyde öğrenme güçlükleri mevcuttur. Aşırı genelleme veya aşırı özelleme gibi farklı türde kavram yanlışları bu güçlüklerden bazılarını kaynak oluşturmaktadır. Bu kavram yanlışlarının ve kaynaklarının farkında olup öğretim aşamasında bunlara önlem alabilmenin gerekli olduğu söylenebilir. Bu bağlamda bu öğrenme zorlukları öğretmen veya öğretmen adayları ile kareköklü ifadelerle ilgili yapılmış olan alan ve pedagojik alan bilgisi çalışmalarına da ışık tutmaktadır.

2.2.4.9. Rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayıların öğretimi

2.2.4.9.a. Öğretim programındaki yeri ve ilgili kazanımlar

Doğal sayı ve tam sayı kümelerinin ardından öğrencilerin karşılaştığı ilk sayı kümesi rasyonel sayılardır. Aslında öğrenciler kesirlerden ve ondalık ifadelerden dolayı rasyonel sayılara aşinadır. Ancak bir sayı kümesi olarak ilk kez 7. sınıf düzeyinde negatiflik kavramını da öğrenmelerinden sonra ele alınmaktadır. Rasyonel sayılar ve rasyonel sayılarda işlemler alt öğrenme alanlarında yer alan kazanımlar Tablo 15'te görülmektedir:

Tablo 15

Rasyonel sayılarla ilgili kazanımlar

Sınıf Düzeyi	İlgili Kazanımlar
7 Rasyonel Sayılar	K1: Rasyonel sayıları tanır ve sayı doğrusunda gösterir. K2: Rasyonel sayıları ondalık gösterimle ifade eder. K3: Devirli olan ve olmayan ondalık gösterimleri rasyonel sayı olarak ifade eder. K4: Rasyonel sayıları sıralar ve karşılaştırır.
7 Rasyonel Sayılarda İşlemler	K1: Rasyonel sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerini yapar. K2: Rasyonel sayılarla çarpma ve bölme işlemlerini yapar. K3: Rasyonel sayılarla çok adımlı işlemleri yapar. K4: Rasyonel sayıların kare ve küplerini hesaplar. K5: Rasyonel sayılarla işlem yapmayı gerektiren problemleri çözer.

Rasyonel sayılarla ilgili kazanımlar görüldüğü gibi sadece 7. sınıf düzeyinde yer almaktadır. Kesirler ve ondalık gösterim alt öğrenme alanlarına benzer olan kazanımlar bazı yönlerle ve programda yer alan notlarla diğerlerinden ayrılmaktadır. Örneğin, ilk kazanımda $-\frac{a}{b}, \frac{-a}{b}, \frac{a}{-b}$ durumlarının incelenmesi gerektiği belirtilmektedir. Öğrenciler için bu negatiflik durumu yenidir. 2. kazanımda negatif rasyonel sayıların ondalık gösterimleri verilmekte; 3. kazanımda ise devirli sayıların $\frac{a}{b}$ şeklinde yazımına ilk kez yer verilmektedir. Bir sayı kümesi olarak kesirlerden farklılaşan rasyonel sayılarda toplama ve çarpma işlemlerindeki değişme, birleşme, etkisiz ve ters eleman gibi özellikler incelenmektedir. Çok adımlı işlemler, rasyonel sayıların üslü gösterimleri ve problemler ile alt öğrenme alanı son bulmaktadır. Öğrencilerin böylece bir sonraki sene görecekları yeni sayı kümesi için ön bilgileri tamamlanmaktadır.

Rasyonel sayıların ardından öğrenciler ortaokulun son kademesinde iki yeni sayı kümesi ile birden karşılaşmaktadır. Kareköklü ifadelerle birlikte rasyonel olmayan sayıların farkına varıp sayı kavramını genişletmek zorunda kalan öğrenciler, “Gerçek sayıları tanır, rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilişkilendirir.” kazanımı ile rasyonel olmayan sayıların bir küme belirttiğini öğrenirken o döneme kadar gördüğü π sayısı da dahil tüm sayıları kapsayan gerçek sayıları öğrenmektedir.

Programda ilgili kazanımın alt notunda, tam kare olmayan sayıların kareköklerinin iki tam sayının oranı şeklinde yazılamayacağına yani rasyonel olmadığına dikkat çekilmesi istenmektedir. π sayısının irrasyonel bir sayı olduğunun ancak işlem kolaylığı açısından onun yerine 3, 3,14 ve $\frac{22}{7}$ gibi rasyonel sayıların kullanılabildiğinin vurgusu da yapılmaktadır.

2.2.4.9.b. İlgili kavramlar ve tanımları

Rasyonel sayılar alt öğrenme alanı ile ilgili ele alınabilecek tek kavram rasyonel sayının kendisidir. Rasyonel sayılar $\mathbb{Z}^2$ üzerinde tanımlanan denklik sınıflarından yararlanarak kurulabilir. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ üzerinden seçilmiş keyfî (a,b) ve (c,d) elemanları için $\sim$ bağıntısı $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad=bc, b,d \neq 0$ olarak tanımlansın. Bu bağıntıya göre oluşan denklik sınıflarının her birine rasyonel sayı denir. $\frac{a}{b} = \overline{(a,b)}$ olarak ifade edilir (Özgen, 2016). Bu tanımın yanı sıra Zazkis ve Sirotic (2004) “a bir tam sayı ve b, 0’dan farklı bir tam sayı olmak üzere a/b şeklinde yazılabilen sayı” şeklinde bir tanım yapmıştır Ayrıca ondalık temsilden yola çıkarak, “Ondalık biçimde yazıldığında ondalık kısmı sonlu veya periyodik (tekrarlı) olan sayılara rasyonel sayı denir.” tanımı da yapılabilir.

Rasyonel sayı oluştururken seçilen a ve b sayısının aralarında asallığı alanyazında tartışılmaktadır. Örneğin, Yanık (2013), “ $\mathbb{Q} = \{x: x = \frac{a}{b}, a \text{ ve } b \text{ tam sayı, } a \text{ ve } b \text{ aralarında asal, } b \neq 0\}$ kümesinin her bir elemanına rasyonel sayı denir.” şeklinde rasyonel sayı tanımını yapmıştır. Denklik sınıflarının her bir elemanı en sade hali ile rasyonel sayılar kümesinde temsil edilebilmektedir. Ancak bu durumda $\frac{4}{6}$ sayısı aralarında asallığı şart olarak kabul eden tanımlara göre rasyonel olmayan bir sayı olarak düşünülmektedir. Çelik (2006) benzer şekilde $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ sayısının rasyonel sayı olmadığını bu sayıya denk olan 2 sayısının ise bir rasyonel sayı olduğunu düşünen katılımcıların varlığından bahsetmiştir.

Alanyazında yer alan tanımlardaki farklılıklar ortaokul ders kitaplarına yansımamıştır. 7. sınıf ders kitaplarından bir kısmı incelendiğinde rasyonel sayıları aynı kelimelerle tanımladıkları görülmüştür. Kitaplarda, “a ve b birer tam sayı ve $b \neq 0$ olmak üzere a/b biçiminde yazılabilen sayılara rasyonel sayılar denir.” tanımı mevcuttur (Altıntaş ve Keskin, 2019; Oğan-Keskin ve Öztürk, 2019; Keskin, 2015). Görüldüğü gibi ders kitaplarında aralarında asallık şartından bahsedilmemektedir. Ayrıca “yazılan” kelimesi yerine “yazılabilen” ifadesinin kullanılmasının öğrencinin aşırı özelleme yapmasına engel olduğu söylenebilir. Öğrenci böylece rasyonel sayıyı sadece kesir kalıbı ile sınırlandırmayacaktır.

Rasyonel sayıdan sonra öğrenilen ve 8. sınıf düzeyinde öğrencilerin ilk kez karşılaştıkları iki yeni kavram mevcuttur. Bunlardan biri irrasyonel sayı kavramı diğeri ise gerçek (reel) sayı kavramıdır. Bu iki kavramın tanımlanması genelden özele veya özelden genele olmak üzere iki türlü yapılabilir. Bu durumda gerçek sayıdan yola çıkarak irrasyonel sayı tanımlanabilir veya irrasyonel sayıdan yola çıkarak gerçek sayı tanımlanabilir.

Gerçek sayıların irrasyonel sayı tanımından bağımsız olarak Cauchy dizisi ve Dedekind kesimi kullanılarak yapılan tanımları aşağıda verilmiştir.

- Cauchy dizilerinin kümesi $C_{\mathbb{Q}}$ olsun. $\{a_n\}, \{b_n\} \in C_{\mathbb{Q}}$ olmak üzere “ $\sim$ ” denklik bağıntısı, “ $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ olması için gerek ve yeter şart $\{a_n - b_n\} \rightarrow 0$ olmasıdır” şeklinde tanımlanırsa; $C_{\mathbb{Q}}$ üzerinde tanımlanan “ $\sim$ ” denklik bağıntısına göre her bir $[\{a_n\}]$ denklik sınıfına bir reel sayı denir (Argün vd., 2014).
- Dedekind kesimi yoluyla $\mathbb{Q}$ ’nun bütün kesimlerinin ailesine reel sayılar kümesi denilmektedir. (Argün vd., 2014)

Gerçek sayılardan ve rasyonel sayılardan yola çıkarak “Rasyonel olmayan gerçek sayılara irrasyonel sayı denir.” tanımı yapılabilir. Daha geniş bir açıklama ile “Rasyonel olmayan bir reel sayıya, yani $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde ifade edilemeyen bir reel sayıya irrasyonel sayı denir.” tanımı yapılabilir. İrrasyonel sayılar ondalık gösterim baz alınarak da tanımlanabilir. “Ondalık açılımı sonlu veya periyodik olmayan reel sayılara irrasyonel sayı denir.” biçiminde yapılan tanımla rasyonel sayıların sonlu veya periyodik (devirli) olan ondalık açılımları dışlanarak irrasyonel sayılar elde edilebilir (Argün vd., 2014).

MEB 8. sınıf ders kitaplarında irrasyonel ve gerçek sayı tanımlarının benzer şekilde yapıldığı görülmektedir. Yapılan tanımlardan bazıları aşağıda verilmiştir:

- İki tam sayının oranı biçiminde yazılamayan sayılara irrasyonel sayılar denir. Rasyonel ve irrasyonel sayıların hepsi gerçek sayıları oluşturur (Serfiçeli ve Atmaz, 2018).
- İki tam sayının birbirine oranı $(a/b, b \neq 0)$ şeklinde yazılamayan sayılara irrasyonel sayı denir. Rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşmesiyle oluşan sayılara gerçek sayılar denir (Çetin ve diğerleri, 2019).

İki kavramın öğretiminde diğer sayı kümelerinde olduğu gibi özelden genele doğru gidiş söz konusudur. Önce irrasyonel sayı tanımının daha sonra gerçek sayı tanımının verildiği görülmektedir.

2.2.4.9.c. Rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayılarla ilgili öğrenme güçlükleri ve kavram yanlışları

Bu bölümde rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar ve gerçek sayılarla ilgili çeşitli çalışmalardan yola çıkarak öğrenme güçlükleri ve kavram yanlışları sınıflandırılmıştır.

Öncelikle rasyonel sayılarla ilgili öğrenme güçlükleri ele alınmıştır. Yapılan incelemelerde rasyonel sayılara ilişkin zorlukların kesirler, ondalık ifadeler, yüzdeler gibi farklı konulardan da kaynaklanabildiği görülmüştür. Rasyonel sayılarla ilgili yanlışlar ve zorluklar aşağıda kategoriler halinde listelenmiştir.

- Rasyonel sayıların tanımından kaynaklı yanlışlar (Zengin, 2013; Özçiftçi, 2007)

- Ondalık ifadelerin a/b biçiminde olmadığı için rasyonel olmadığını düşünme
- Doğal veya tam sayıların a/b biçiminde olmadığı için rasyonel olmadığını düşünme
- Rasyonel sayı kümesine yönelik yanlışlar (Tezcan, 2003)
 - Rasyonel sayılar kümesini yazma ve sembolle göstermede yapılan hatalar
 - Doğal sayı, tam sayı ve rasyonel sayı kümeleri arasındaki alt küme ve kapsama ilişkisine yönelik yanlışlar
- Sıfır ile ilgili yanlışlar (Özçiftçi, 2007)
 - $0/a$ sayısının rasyonel olmadığını düşünme
 - $a/0$ ifadesi kesir belirttiği için rasyonel olarak düşünme
- Rasyonel sayıların özelliklerine yönelik yanlışlar (Özçiftçi, 2007)
 - Toplama ve çarpma işlemine göre ters elemanları bulamama
 - Birleşme özelliğini kullanmadan eşitlikte verilmeyen sayıyı bulmaya çalışma
- Tam sayılardan kaynaklı yanlışlar
 - Toplama çıkarma gibi işlemlerde işarete dikkat etmeme (Cengiz, 2006; Özçiftçi, 2007)
 - Ters işaretli ifadeleri toplayamama etmeme (Cengiz, 2006; Özçiftçi, 2007)
 - Çarpma ve bölme işlemlerinde yanlış işaret kullanma (Cengiz, 2006; Özçiftçi, 2007)
 - Negatif rasyonel sayılarda sıralamaya yönelik hatalar (Tezcan, 2003; Özçiftçi, 2007; Zengin, 2013; Başgün ve Ersoy, 2000)
 - Negatifliğin pay veya paydada olmasının aynı anlama gelmediğini düşünme (Tezcan, 2003)
- Kesirler ve ondalık ifadelerden kaynaklı yanlışlar
 - Toplama ve çıkarma işlemlerinde payda eşitlememe, tam kesri bileşiğe çevirememe gibi hatalar (Özçiftçi, 2007; Zengin, 2013; Cengiz, 2006)
 - Toplama çıkarma işlemlerinde sadeleştirme yapılması (Özçiftçi, 2007; Zengin, 2014)
 - Çarpma işlemlerinde payda eşitlemeye çalışma, paydaları çarpmadan doğrudan yazma gibi hatalar (Özçiftçi, 2007; Zengin, 2013; Cengiz, 2006)

- Bir tamsayıyla bir rasyonel sayıyı çarparken payda eşitleme veya çarpma işlemini dikkate almadan tam sayılı kesir gibi düşünerek bileşik kesre çevirme (Başgün ve Ersoy, 2000)
- İlk sayıyı ters çevirme gibi bölme işlemlerinden kaynaklı hatalar (Özçiftçi, 2007; Zengin, 2013)
- Kesirlerde veya ondalık kesirlerde sıralama yapamamaktan kaynaklı hatalar (Tezcan, 2003; Özçiftçi, 2007; Zengin, 2013; Başgün ve Ersoy, 2000; Cengiz, 2006)
- Ondalık ifadelerde işlemlerden kaynaklı hatalar (Tezcan, 2003; Özçiftçi, 2007; Zengin, 2013; Başgün ve Ersoy, 2000; Cengiz, 2006)
- Devirli rasyonel sayıları devirsiz ondalık gibi düşünerek işlemler yapma (Zengin, 2013)
- Rasyonel sayıların modellenmesine yönelik zorluklar
 - Sayı doğrusunda rasyonel sayıları gösterememe (Başgün ve Ersoy, 2000; Özçiftçi, 2007; Zengin, 2013; Cengiz, 2006)
 - Sayı doğrusu ile gösterimde bütünü parçalara ayıramama (Özçiftçi, 2007; Zengin, 2013)
 - Sayı doğrusu ile gösterimde sıfırdan küçük sayıları ters taraftan başlatma (Özçiftçi, 2007; Zengin, 2013)
- Üslü ifadelerden kaynaklı yanlışlar (Cengiz, 2006; Zengin, 2013)
 - Verilen üsle pay ve paydayı çarpma
 - Üslü ifadenin değerinin işaretini belirleyememe
 - Rasyonel sayıyı 10'un kuvvetlerini kullanarak çözümleyememe
 - Verilen sayıdaki basamak sayısını 10'un kuvveti biçiminde yazma
 - 10'un kuvvetlerini eşitlemeden işlem yapma
- İşlem önceliğinden kaynaklanan zorluklar (Özçiftçi, 2007; Zengin, 2013, Tezcan, 2003; Başgün ve Ersoy, 2000; Cengiz, 2006)
 - Çok adımlı işlemleri yapmada zorluk (Zengin, 2013)
 - Aralardaki işaretlerin sayının mı işlemin mi işareti olduğunu anlayamama (Tezcan, 2003)
- Rasyonel sayıların yoğunluğuna ilişkin zorluklar
 - Verilen iki rasyonel sayının arasında sayılamaz çoklukta rasyonel sayı olduğunu düşünmeme (Aktaş, Apaydın ve Aktaş, 2014; Voskoglou ve Kosyvas, 2011)

- Kesir veya ondalık gösterim biçiminde verilen iki sayı arasında sınırlı sayıda rasyonel sayının bulunduğunu veya hiç sayı olmadığını belirtme (Aktaş ve diğerleri, 2014; Voskoglou ve Kosyvas, 2011)
- İki rasyonel sayı arasında yer alan herhangi bir rasyonel sayı bulmada zorluk (Aktaş ve diğerleri, 2014; Voskoglou ve Kosyvas, 2011)
- Her iki rasyonel sayının arasında sonsuz rasyonel sayı bulunabileceğini düşünememe (Aktaş ve diğerleri, 2014; Voskoglou ve Kosyvas, 2011; Özçiftçi 2007)

Görüldüğü gibi araştırmalar rasyonel sayının kendi tanımına, yoğunluğuna, özelliklerine ve modellenmelerine yönelik zorlukların yanı sıra kesirler, ondalık ifadeler, üslü ifadeler, tam sayılar ve işlem önceliği gibi ön öğrenmelerden kaynaklanan yanlışların da olduğunu ortaya koymaktadır.

İrrasyonel ve gerçek sayılar sayı kümeleri için ön bilgi sayılabilecek olan rasyonel sayılar iki sayı kümesi için çeşitli kavramsal zorluklara neden olabilmektedir. İrrasyonel ve gerçek sayılarla ilgili yapılmış çalışmaların incelenmesi ile oluşturulan kategoriler aşağıda listelenmektedir:

- İrrasyonel sayının tanımına yönelik yanlışlar
 - Rasyonel olmayan tüm sayıların irrasyonel olarak düşünülmesi (Arbour, 2012; Kara ve Delice, 2012; Ercire, 2014)
 - Tam sayı olmayan sayıları irrasyonel olarak düşünme (Arbour, 2012; Kara ve Delice, 2012)
 - Ondalık kısmı sonsuza giden sayıları irrasyonel olarak düşünme (Arbour, 2012; Kara ve Delice, 2012; Ercire, 2014)
 - Gerçek olmayan sayılar olarak düşünme (Ercire, 2014; Adıgüzel, 2013)
 - $a/0$ sayısını rasyonel olmadığı için irrasyonel olarak düşünme (Ercire, 2014)
 - Sayı doğrusu üzerinde yer almayan sayılar olarak tanımlama (Ercire, 2014; Fichbein, Jehiam ve Cohan, 1995)
- İrrasyonel sayıların sınıflandırılmasına yönelik yanlışlar
 - π ve e sayılarını hem irrasyonel hem de irrasyonel sayı olarak görme (Arbour, 2012; Kara ve Delice, 2012; Ercire, 2014)
 - Devirli sayıları irrasyonel olarak düşünme (Arbour, 2012; Kara ve Delice, 2012; Ercire, 2014; Fichbein ve diğerleri, 1995; Baştürk ve Dönmez, 2008)

- 3,14 ve 22/7 sayısını irrasyonel olarak düşünme (Ercire, 2014; Fichbein ve diğerleri, 1995; Baştürk ve Dönmez, 2008)
- Ondalık kısmı ilerideki basamaklarda devretmeye başlayan 23/17 gibi sayıların ondalık değerini irrasyonel olarak düşünme (Arbour, 2012; Kara ve Delice, 2012; Ercire, 2014; Zazkis, 2004)
- Ondalık kısmı belirli bir kurala göre ancak devirsiz şekilde sonsuza giden sayıların irrasyonel olmadığını düşünme (0,10203040...) (Ercire, 2014)
- Belirli işlemler sonrasında rasyonel olan ve içerisinde irrasyonel sayılar barındıran $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ gibi sayıları irrasyonel olarak düşünme
- Ondalık kısmı düzensiz ancak sonlu olan sayıları irrasyonel olarak düşünme
- Köklü sayıların tamamını irrasyonel sayı olarak düşünme (Ercire, 2014; Fichbein ve diğerleri, 1995; Baştürk ve Dönmez, 2008; Voskoglou ve Kosyvas, 2011)
- Karmaşık sayıların irrasyonel olduğunu düşünme (Fichbein ve diğerleri, 1995)
- İki terimli irrasyonel sayıların bulunduğu sayı kümesini belirleyememe (Adıgüzel, 2013)
- İrrasyonel sayının diğer sayı kümeleri ile ilişkisine yönelik yanlışlar
 - İrrasyonel sayıların gerçek sayı olmadığını düşünme (Arbour, 2012; Kara ve Delice, 2012; Ercire, Narlı ve Aksoy, 2016; Baştürk ve Dönmez, 2008)
 - İrrasyonel sayıların doğal sayı ve tam sayıları kapsadığını düşünme (Arbour, 2012; Kara ve Delice, 2012; Ercire ve diğerleri, 2016)
 - İrrasyonel sayının yaklaşık rasyonel değerini belirleyememe (Peled ve Hershkovitz, 1999)
 - Rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayı kümeleri arasındaki ilişkiyi belirleyememe (Adıgüzel, 2013)
- İrrasyonel sayılarda çarpma ve toplama işlemlerinde kapalılık özelliğine yönelik yanlışlar (Arbour, 2012; Ercire, 2014; Adıgüzel, 2013; Voskoglou ve Kosyvas, 2011)
 - İki irrasyonel sayının toplamının her zaman irrasyonel olması gerektiği düşüncesi
 - İki irrasyonel sayının çarpımının her zaman irrasyonel olması gerektiği düşüncesi

- İrrasyonel sayıların sayı doğrusunda gösterimi ile ilgili yanlışlar
 - İrrasyonel sayıların sayı doğrusunda gösterilemeyeceği yanlışlığı (Kara ve Delice, 2012; Ercire, 2014)
 - İrrasyonel sayıların sayı doğrusunda gösterememe (Peled ve Hershkovitz 1999)
- İrrasyonel sayıların yaklaşık değerlerine ilişkin yanlışlar
 - π sayısının 3'e, 3,14'e veya 22/7'ye eşit olduğu düşüncesi (Ercire, 2014)
 - Köklü biçimde yazılan irrasyonel sayılar ile rasyonel yaklaşımlarının eşit olduğu düşüncesi (Voskoglou ve Kosyvas, 2011)
- İrrasyonel sayıların yoğunluğuna ilişkin yanlışlar
 - Rasyonel sayıların irrasyonel sayılardan daha fazla olduğu düşüncesi (Ercire, 2014)
 - İki irrasyonel sayı arasında her zaman bir rasyonel sayı veya irrasyonel sayı bulunamayabileceği düşüncesi (Ercire, 2014; Voskoglou ve Kosyvas, 2011)
 - İki rasyonel sayı arasında irrasyonel sayı bulunamayabileceği veya sınırlı sayıda bulunabileceği düşüncesi (Ercire, 2014; Voskoglou ve Kosyvas, 2011)
- Gerçek sayı tanımına yönelik yanlışlar
 - Gerçek sayıların tam sayıdan olduğu düşüncesi (Fichbein ve diğerleri, 1995; Ercire ve diğerleri, 2016; Arbour, 2012)
 - Gerçek sayıların asal sayılar olduğu düşüncesi (Ercire, 2014)
 - Gerçek sayıların kesirli yazılması gerektiği düşüncesi (Ercire, 2014; Fichbein ve diğerleri, 1995)
 - Negatif sayıların gerçek sayı olmadığı düşüncesi (Fichbein ve diğerleri, 1995; Ercire, 2014)
 - e ve π sayılarının gerçek sayı olmadığı düşüncesi (Ercire, 2014)
 - Kareköklü sayıların gerçek sayı olmadığı düşüncesi (Ercire, 2014)
 - Gerçek sayıların karmaşık sayı olmadığı düşüncesi (Ercire, 2014)

Görüldüğü gibi gerek sayı kümelerinin kendi tanımlarına gerekse diğer sayı kümeleri ile ilişkilerine yönelik çeşitli öğrenme güçlükleri mevcuttur.

2.3. Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanında Yapılmış Olan Öğretmen Bilgisi Çalışmaları

Bu bölümde sayılar ve işlemler öğrenme alanında yapılan öğretmen bilgisine yönelik çalışmalar alt öğrenme alanlarına ve konulara göre alt başlıklara ayrılarak yer almaktadır.

2.3.1. Doğal sayılarla ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları

Bu bölümde doğal sayılarla ilgili öğretmen adayları ve öğretmenlerle yapılmış olan alan ve pedagojik alan bilgisi çalışmalarına yer verilmektedir.

Alan bilgisi çalışmalarından biri olan Thanheiser ve Rhoads (2009); ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sayı değeri, basamak değeri gibi kavramlarla ilgili bilgilerini ortaya koyabilmeyi amaçlamıştır. Bu amaçla öğretmen adayları ile maya sayı sistemi ile ilgili soruların yer aldığı görüşmeler yapmıştır. Araştırmacılar bu şekilde matematiği farklı bir sayı sisteminin merceğinden değerlendirmenin öğretmenlerin onluk tabandaki karmaşıklıklarını anlamalarına yardımcı olacağını düşünmüşlerdir. Maya sayı sistemi 20 tane rakamdan oluşan 20'lik tabanda bir sayı sistemidir. Bir nokta bir birimi, bir çubuk beş birimi ve bir kabuk sıfır birimi temsil eder. Bu semboller, 0'dan 19'a kadar rakamlar oluşturmak için gruplandırılmıştır. Yapılan araştırmada öğretmen adaylarının özellikle 3 basamaklı sayıları yorumlamakta zorlandığı belirtilmiştir. Sola hareket ettiğimizde her basamak değeri için sıfır ekleme kuralının, sayıları akıcı okunmasıyla birlikte bir sayıdaki her bir basamağın değerinin, basamağın değerinin 10 katı olduğu gerçeğini maskeleydiği 20'lik sayı sisteminde ortaya çıkmıştır. Çünkü burada yer alan bir sıfır sayıyı 10 kat değil 20 kat büyötmektedir. Bir öğretmen adayı, “Onluk taban sistemine ilişkin kendi anlayışım hakkında öğrendiğim en önemli şeyi Maya sayı sistemini keşfederek fark ettim. ... Mayaların her yeni seviyeyi 20 ile çarpması gibi, bizim sistemimiz gerçekten de her bir rakamı on ile çarpıyor. Örneğin 326 sayısında, bu $6 + (2.10) + (3.10.10)$ olarak görülebilir çünkü her bir basamak bir başka on ile çarpılmaktadır.” Şeklinde açıklama yapmıştır. Araştırma sonuçları farklı bir sayı sistemi ile çalışmanın 10'luk sayı sistemini anlamada temel kavramları yorumlamada faydalı olduğunu göstermiştir.

Basamak değeri kavramıyla ilgili Arslan, Yıldız ve Yavuz (2011), ders kitaplarının ve öğretim programının analizini yaparak basamak değeri kavramıyla ilgili literatürde yaşanan güçlüklerle ve önerilere ne derece dikkat edildiğini ortaya koymaya çalışmıştır. Basamak kavramının öğretiminde abaküs, birim küpler, onluk taban blokları gibi materyallerden yararlanıldığı ve çokluk değerinden ziyade sayı değerinin ön plana çıkarıldığı belirtilmiştir. Öğretmen görüşlerini de değerlendiren araştırmacılar öğretim

programında ve ders kitaplarında 1. sınıftan itibaren yer alan basamak değeri kavramını öğretmenlerin 2. sınıftan itibaren öğretmeyi tercih ettiğini ifade etmiştir. Ayrıca bu kavramın diğer konularla ilişkilendirilerek anlatılmasının gerekliliği öğretmenler tarafından belirtilmiştir.

Alan bilgisine yönelik olan tez çalışmalarından birinde, öğretmen adaylarının işlemsel tahmin becerilerini incelemeyi amaçlayan Özcan (2015), öğretmen adaylarının işlemsel tahmin ile ilgili kavramsal bilgi düzeylerinin düşük olduğunu belirtmiştir. Ayrıca tahmin stratejilerinden sadece yuvarlamayı teorik olarak bildikleri fakat uyuşan sayıları kullanma, gruplandırma, dağılma, parçadan bütüne ulaşma gibi stratejileri de kullandıklarını açıklamıştır. Bir diğer tez çalışmasında Süzen (2019), ortaokul matematik öğretmenlerinin işlem önceliğinin öğretimi konusunda yaptıkları hataları incelemiştir. İşlem önceliği ile ilgili hataları öğrenci kaynaklı, öğretmen kaynaklı ve konudan kaynaklı olmak üzere ayırmışlardır. Öğretmenlerin işlem önceliği ile ilgili yanlışlarının olduğu ve kendi sebep olduğu hataların deneyimsizlikten, uzmanlık bilgisinden, tutumdan ve yaratıcılıktan kaynaklandığı tespit edilmiştir.

Bir başka alan bilgisi çalışmasında Nayir ve arkadaşları (2018) sınıf öğretmenliği programı birinci sınıf öğretmen adaylarının sayı kümelerine yönelik hazırbulunuşluklarını belirlemeyi amaçlamışlardır. Çalışmada 61 öğretmen adayının sayma sayıları, doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, gerçel sayılar ve karmaşık sayıları sözel, model ve matematiksel temsiller ile ifade etmeleri istemişlerdir. Doğal sayıları sözel olarak ifade eden öğretmen adaylarının %65'inin "sıfırdan başlayan" ifadesini, %46'sının "sonsuz kadar giden" ifadelerini kullandıkları belirtilmiştir. Ayrıca, "sıfırdan dokuz kadar olan sayılar", "tam sayı olmayan sayılar" şeklinde hatalı yanıtlara da yer verilmiştir.

Ball (1988), matematik bilgisi ile matematik hakkındaki bilginin farklı anlamlar taşıdığını ifade etmiştir. 19 öğretmen adayıyla mülakat yaparak bir öğrencinin sorusuna yanıt olarak ne yapacaklarına karar verme, bir grup çocuğun belirli bir konuyu veya fikri öğrenmesine yardımcı olma ve müfredat materyallerini analiz etme gibi becerilerini görebileceği senaryolar sunmuştur. Bu etkinlikler, belirli matematiksel konular ve fikirlerin içine yerleştirilmiştir. Görüşmede öğretmen adaylarının konu bilgilerinin yanı sıra matematik öğretme ve öğrenme hakkındaki inançlarına ve öğrenciler hakkındaki inançlarına odaklanmıştır. Ayrıca Ball (1988) bu fikirlerin ve anlayışların öğretmen adaylarının öğretim hakkındaki düşüncelerinde nasıl etkileşim kurduğunu da incelemiştir. Ball (1998), öğretmen adaylarından bazılarının yaptıklarından daha fazlasını bildiklerini ancak bildiklerini açıklarken belirsiz veya garip davrandıklarını ifade etmiştir. Bu çalışmada yer alan ve öğretmen adaylarına yöneltilen senaryolardan biri doğal sayılarda çarpma işlemi yapılırken bir basamak sola kaydırma yapmadan toplayarak sonucu yanlış

bulan öğrencilerin yanlıının nasıl düzeltilebileceği ile ilgili olmuştur. 19 öğretmen adayından yalnızca 5'i çarpma algoritmasının altında yatan basamak değeri ve sayma kavramlarından açıkça bahsedilmiştir. Diğerleri belirsiz veya yalnızca sürece odaklanarak cevaplar verebilmiştir.

Ball (1990b), ilk ve ortaokul öğretmen adaylarının bölme işlemini anlamalarını incelemiştir. 19 katılımcıdan 17'si verilen bölme işlemini bölme algoritmasını kullanarak doğru cevaplayabilmiştir. Bazı katılımcılar ise kuralları hatırlayamamıştır. Ayrıca sadece 7 öğretmen sıfıra bölmenin neden imkansız olduğunu açıklayabilmiştir. Bölme işleminin ele alındığı bir başka çalışmada Ma (1999), Amerikalı öğretmenlerin sadece %43'ünün kesirlerde bölme işlemlerini hesaplamada başarılı olduğunu bulmuştur. Hiçbiri geleneksel algoritmanın mantığını anlamayıp, birçoğunun bu hesaplamaları yapmak zorunda kaldıklarında endişe duyduklarını bildirmiştir. Çinli öğretmenler ise hesaplarında başarılı olmuşlardır.

Pedagojik alan bilgisi çalışmalarında en sık ele alınan bileşenlerden ikisi öğrenci bilgisi ve öğretim stratejileri bilgisi olmaktadır. Bu bileşenlerin yer aldığı çalışmalardan biri olan Şahin, Gökkurt, Başbüyük, Erdem, Nergiz ve Soylu (2013), sınıf öğretmeni adayları ile matematik öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerini karşılaştırmayı amaçlamıştır. Öğretmen adaylarına ilköğretim birinci kademeyle ilişkili dördü doğal sayılar, dördü kesirlerle ilgili olmak üzere sekiz açık uçlu sorudan oluşan “Matematik Pedagojik Alan Bilgi Testi” uygulamışlardır. Testteki bazı sorular öğrenci bilgisi, bazı sorular ise öğretim stratejileri bilgisine yönelik olmuştur. Öğretmen adaylarının doğal sayı sorularında kesirlere göre daha başarılı olduğu belirtilmiştir. Ayrıca Matematik öğretmen adaylarının test ortalamalarının ilköğretim birinci kademeyle yönelik herhangi bir eğitim almamasına rağmen sınıf öğretmenlerinin test ortalamalarına göre anlamlı derecede daha yüksek olduğu araştırmada ifade edilmiştir.

Basamak değeri kavramına ve sayma sistemine ilişkin öğrenci hatalarını tespit etme ve onlara açıklayıcı dil kullanabilme düzeylerini belirleyebilme amacıyla öğretmen adayları ile çalışan Tarım ve Dinç Artut (2013), öğretmen adaylarının hatayı belirleme noktasında daha iyi oldukları ancak hatayı analiz etme ve hataları açıklama boyutlarında kullandıkları dilin yeterli düzeyde olmadığı belirtilmiştir.

Şahin ve diğerleri (2014), ortaokul matematik öğretmenlerinin öğrenciyi anlama ve öğretim stratejileri bilgilerinin nasıl bir gelişim gösterdiğini anlayabilmek amacıyla 3. ve 4. sınıf öğretmen adaylarından ve görev yapan matematik öğretmenlerinden oluşan 210 kişilik gruba Kwong vd. (2007) tarafından hazırlanan “Matematik Pedagojik Alan Bilgi Testi” uygulanmıştır. Dördü doğal sayı, dördü kesir konularından olan sekiz soruluk testte öğrenciyi anlama bilgisi ve öğretim stratejileri bilgisinden altışar soru yer almıştır (Dört

soru her iki bilgi türüne de hitap ediyor.). Araştırmacılar, katılımcıların yanıtlarını puanlayarak 3. ve 4. sınıf öğretmen adayları ile öğretmenlerin puan ortalamalarını karşılaştırmışlardır. Çalışmanın sonunda katılımcıların öğrenciyi anlama bilgilerinin ve öğretim stratejileri bilgilerinin orta düzeyde olduğu ve beklentinin altında olduğu belirtilmiştir. Ayrıca her iki bileşende de 3. sınıf öğretmen adaylarından öğretmenlere kadar gelişimin artarak devam ettiği ortaya çıkmıştır.

Pedagojik alan bilgisi gelişimini inceleyen bir başka çalışmada Bütün (2012), çeşitli etkinliklerle zenginleştirilmiş öğretim ortamının ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiği öğretme bilgilerinin gelişimlerine etkisini boylamsal olarak incelemiştir. Çalışmada; öğretimsel açıklamalar, öğretim yöntemleri ve inançlar bileşenlerine odaklanılmıştır. 3. sınıfın başında, özel öğretim yöntemleri I, özel öğretim yöntemleri II ve okul deneyimi derslerinin sonrasında olmak üzere dört uygulama yapılmış, öğretmen adaylarının gelişimlerini ortaya koymak amacıyla; senaryolar, ders planları, gözlem ve öz değerlendirme formları gibi çeşitli veri toplama araçlarından yararlanılmıştır. Çalışmanın genel sonucu olarak Bütün (2012), öğretmen adaylarının öğretimsel açıklamalar ve inanç bileşenlerinde belirgin bir gelişim olduğunu ifade ederken, öğretim yöntemi bileşeninde gelişimin istenen düzeyde olmadığını belirtmiştir. Doğal sayılarda çarpma işlemi yer alan senaryolardan birinde sola kaydırma yapmadan çarpma işlemi yapan bir öğrencinin hatasının kaynağı ve öğretmenin ne yapması gerektiğini öğretmen adaylarına sormuştur. Öğretmen adaylarının öğretimsel açıklamalarını; konuma odaklanan anlayışlar (“Kural olarak anlatırım, bir basamak kaydırması gerektiğini söylerim.” vb.), basamağa odaklanan anlayışlar (“Birler basamağındaki sayı ile üstteki sayılar çarpıldıktan sonra alttaki sayının onlar basamağına geçilir. Bu nedenle de sonuçlar da onlar basamağından itibaren yazılır.” vb.) ve yapısal anlayışlar (Basamak çözümlemesi ve dağılma özelliği kullanılan açıklamalar) olarak üç seviyede ele almıştır. 3. sınıfın başında %6 olan yapısal anlayışlar seviyesinin özel öğretim yöntemleri dersi sonrasında %40'lara çıktığı, son uygulamada ise %70'lere çıktığı çalışmanın bulgularında yer almaktadır. Araştırmacı, aynı soru ile ilgili öğretmen adaylarının açıklamalarını öğretim yöntemi bilgilerini değerlendirmek amacıyla da üç seviyede ele almıştır (S1: işlem yolunu gösterme, S2: anlamı gösterme, S3: anlama yönlendirme). Öğretmen adaylarının dört uygulama boyunca “anlamı gösterme” seviyesinde ki oranları %50'lerden %97'lere çıkarken; anlamı yönlendirme seviyesinde ise %0'a varan düşüş olduğu ortaya konmuştur.

2.3.2. Tam sayılarla ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları

Bu bölümde tam sayılarla ilgili yapılmış alan ve pedagojik alan bilgisi çalışmalarından bazılarına yer verilecektir. Çalışmalardan ikisi hem alan hem de pedagojik alan bilgisini aynı anda incelerken, diğerleri pedagojik alan bilgisinin öğretim stratejileri bileşenini kapsamaktadır.

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının tamsayıların tanımına ilişkin alan ve pedagojik alan bilgilerini incelemeyi amaçlayan Kubar (2012), öncelikle katılımcılara tam sayının tanımı ve tam sayı kümesini oluşturan elemanları sormuştur. Bu soru alan bilgisini ortaya koyma amacı taşımaktadır. Ayrıca öğrencilerin tam sayı tanımını yaparken karşılaşılabilecekleri zorluklar ve kavram yanılgıları ile bu kavram yanılgılarının olası sebepleri katılımcılara sorulmuş ve pedagojik alan bilgileri ortaya konmak istenmiştir. Tanımlar, bu çalışmada da yer alan Leikin ve Zazkis (2010) tarafından geliştirilen teorik çatı ile incelenmiştir. Öğretmen adaylarının %43'ünün doğal sayı, sayma sayısı ve rasyonel sayı gibi temel kavramlara dayalı %30'unun ise temsillere dayalı tanımlar yaptıkları ortaya konulmuştur. Tanımların %36'sı uygun ve titiz, %30'u uygun ancak titiz olmayan, %30'u ise uygun olmayan kategorisinde yer almıştır. Pedagojik alan bilgisi ile ilgili soruya verilen yanıtlara göre öğrencilerin sıfırın tam sayılığı konusunda yanlış yaşayabilecekleri veya sıfırın en küçük tam sayı olarak düşünülebileceği belirtilmiştir. Ayrıca tam sayılar olarak sadece pozitiflerin alınabileceği, doğal sayılarla karıştırılabileceği şeklinde muhtemel yanlışlar ortaya konmuştur. Bu yanlışların sebepleri olarak da ön öğrenmelerin eksikliği veya yeni konuya transfer edilememesi, öğretimden kaynaklı sorunlar ve öğrencilerin yetersizliği gösterilmiştir.

Daha önce “kesirler” kısmında bahsedilen ve matematik öğretmenlerinin matematiksel alan bilgileri ile pedagojik alan bilgileri arasındaki ilişkiyi inceleyen Gökçurt ve diğerleri (2012) Kinach'ın geliştirmiş olduğu anlama düzeylerini baz almıştır. Bu çalışmada yer alan sorulardan bir tanesi tam sayılarla ilgilidir. Öğretmenlere negatif iki tam sayının çarpımının neden pozitif olduğu sorulmuştur. Öğretmenlerin %15'i (6 öğretmen) matematik alan bilgisi açısından tamamen doğru açıklamalarda bulunabilmiştir. %34'ü ise bunun bir kural olduğu gibi gerekçelerle yanlış yanıtlarda bulunmuşlardır. Tamamen doğru açıklama yapan öğretmenlerden 4 tanesi epistemik düzeyde açıklamalar yapmıştır. Öğretmenlerin %80'inin konu düzeyinde açıklamalar yaptığı ifade edilmektedir.

Reeder ve Bateiha (2016) matematik öğretmen adaylarının tamsayıların ne olduğuna dair ne derece anlamlı ve kavramsal bir anlayış geliştirdiklerini incelemiş ve iki tam sayının çarpımındaki her bir kombinasyon için öğretmen adaylarından günlük yaşama uygun bir hikaye veya senaryo yazmalarını istemişlerdir. Bu amaç alan bilgisinin yanı sıra öğretim stratejileri bilgisini de içermektedir. Araştırma sonuçlarında, katılımcıların

tamamının tam sayıların ne olduğunu ve günlük faaliyetlerde nerede karşılaşılabilceğini doğru bir şekilde tartışabildikleri ifade edilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının yarısının pozitif ve negatif sayılarla çarpma kombinasyonlarının tamamında uygun senaryolar ortaya koyabildiklerini belirtmişlerdir. İki negatif sayının çarpımı ile ilgili öğretmen adaylarının günlük hayata uygun senaryo bulamadıkları öğretmenlerin %20'sinin tam sayılarla çarpmayı öğretmek için yalnızca ezberleme yöntemlerine, şarkılara veya "sözlere" güveneceklerini belirttikleri de ayrıca ifade edilmiştir.

Tam sayılarla ilgili yapılmış pedagojik alan bilgisi çalışmalarının bir bölümü modellemeler üzerine olmuştur. Şanlı ve Işık (2019) ders ortamında öğretmenlerin tam sayılarla ilgili modellemelerini incelemiştir. 5 öğretmenin yer aldığı çalışmada modellerin öğretmenler tarafından düzenli olarak kullanılmadığı ifade edilmiştir. Özellikle tam sayılarda çarpma ve bölme ile ilgili kazanımlarda sayı doğrusu veya sayma pulları gibi modellemelere çok az yer verildiği belirtilmiştir. Tam sayılarda toplama çıkarma işlemi yapılırken öğretmenlerin sayma pullarını kullandıkları ve faydalı buldukları ifade edilmiştir ancak modeli verilen bir işlemi matematiksel olarak yazma şeklinde bir etkinliği katılımcı öğretmenlerden hiçbirinin gerçekleştirmediği belirtilmektedir. Ayrıca öğretmenlerin ders sürecinde ders kitaplarından ve kitaptaki modellerden yararlanmadığı, kendi modellerini kullanmayı tercih ettikleri araştırmanın sonuçlarından biri olarak söylenebilir.

Durmaz (2017) matematik öğretmen adaylarının ve matematik öğretmenlerinin tam sayılarda dört işlem konusunda sayma pulları ile yaptıkları modelleme başarılarını incelemiş ve katılımcıların sayma pulları ile ilgili görüşlerini almıştır. Hem öğretmenlerin hem de öğretmen adaylarının tam sayılarla toplama işleminin modellenmesinde diğer işlemlere göre daha başarılı oldukları görülmüştür. Diğer üç işlemin modellenmesinde ise zorluk yaşadıkları görülmüştür. Öğretmenlerin öğretmen adaylarına göre sayma pullarının olumlu ve olumsuz yönlerini daha iyi analiz edebildiği ve alternatif daha fazla materyal sunabildikleri belirtilmiştir.

Öğretim stratejileri bilgisi kapsamında ele alınabilecek çalışmalardan birinde Almeida ve Bruno (2014) negatif sayılar içeren basit toplama işlemlerinde öğretmen adaylarının kullandıkları stratejileri incelemiştir. Çalışmada 8 tane tek işlemli basit problem kullanılmış ve öğretmen adaylarının bu problemlerin çözümünde şekil çizme, sayı doğrusu çizme, sırayla sayma gibi çeşitli stratejiler kullandıkları belirtilmiştir. Bu çözümlerde hata oranının da %8 ile %32 arasında değiştiği yani öğretmen adaylarının da basit sorularda yanlış sonuç bulabildiği ortaya konmuştur.

İncelenen araştırmalar tam sayılarda öğretmenlerin veya öğretmen adaylarının kavramsal düzeyde yanlışlarının olabildiği ancak öğretim stratejileri bilgisi bağlamında daha çok zorluk yaşadıklarını göstermiştir.

2.3.3. Çarpanlar ve katlarla ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları

Çarpanlar ve katlar öğrenme alanına ilişkin yapılan çalışmalarda öğretmen adaylarının daha çok kavramsal bilgilerinin incelendiği söylenebilir. Asal sayı, çarpan, kat, bölünebilme gibi kavramların yanı sıra EBOB, EKOK bulma süreci, asal çarpanlara ayırma, bölünebilme kurallarını uygulama gibi konu bilgi düzeyinde yer alan beceriler de incelenmiştir.

Öğrenme alanının en temel kavramlarından biri sayılabilecek olan asal sayı kavramını ele alan Gürefe ve Aktaş (2020) matematik öğretmen adaylarının kavramı nasıl tanımladıklarını ve kavramı açıklamak için hangi stratejileri kullandıklarını araştırmıştır. Son sınıf öğretmen adaylarına, "Asal sayı nedir?", "Asal sayı için başka alternatif tanımlar var mıdır? Varsa lütfen bu tanımları açıklayın." ve "Asal sayı kavramını ortaokul veya lise öğrencilerine nasıl açıklarsınız?" soruları sorulmuştur. 48 öğretmen adayının ilk yaptıkları tanımlardan sadece 3'ü gerek ve yeter şartları sağladığı için uygun tanım kategorisinde ele alınmıştır. Diğer yanıtlar ise "gerekli ancak yeterli değil" kategorisinde değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının yapmış oldukları alternatif tanımlar incelendiğinde de tanımların yarısının "gerekli ancak yeterli değil" kategorisinde olduğu görülmüştür. Katılımcıların yarısı alternatif bir tanım sunamamış ya da "ne gerek ne de yeter şart" kategorisinde yer alan tanımlar yapmışlardır. Öğretmen adaylarının asal sayı tanımında daha çok "tam sayı", "sayı", "doğal sayı" gibi ifadeler kullanarak daha geniş bir sayı kümesini ifade edebildikleri ve bu nedenle tanımların kavramı karşılamak için yetersiz olduğu belirtilmiştir. Ayrıca 0 veya 1'i de asal sayı kabul eden tanımlamalar da uygun olmayan tanımlar kategorisinde ele alınmıştır. Zazkis ve Campbell (1996a, 1996b), asal sayı tanımında negatif ifadelerin kavramın anlaşılmasını zorlaştırdığını belirtirken Zazkis'de (2005) asal sayı tanımında "bölünemeyen", "olmayan" gibi olumsuz ifadeler içeren tanımlamaların yapıldığı ifade edilmiştir. Gürefe ve Aktaş (2020) çalışmasında da olumsuz ifadeli tanımlar mevcuttur. Öğretmen adaylarının asal sayı kavramını öğrencilere açıklarken tanımlardan, analogilerden ve Erotesthes kalburu gibi materyallerden yararlanma stratejilerini tercih ettikleri görülmüştür.

Asal sayı kavramı ile ilgili yapılmış bir başka çalışmada Zazkis ve Liljedahl (2004) ortaokul matematik öğretmen adaylarından asal ve asal olmayan (bileşik) sayının tanımını istemiştir. $F=151 \times 157$ sayısının bir asal sayı olup olmadığı öğretmen adaylarına sorulmuştur. Öğretmen adaylarının büyük bir bölümü asallığı doğru tarif edebilmesine rağmen verilen sayının asal mı birleşik mi olduğu sorularına vermiş oldukları yanıtları ile bilgilerini uygulamaya dökemedikleri anlaşılmaktadır. Öğretmen adaylarının %64'ü F sayısının asal sayı olmadığını belirtebilmiştir. Bu oranın içinde yanlış gerekçelendirme yapanların olduğu da çalışmada yer almaktadır. Bazı öğretmen adayları ise sayıları çarpıp

daha sonra algoritma uygulamaya çalışmışlardır. “Hem 151 hem de 157 asal sayılardır ve birlikte çarpılan iki asal sayı başka bir asal sayı verecektir.” ve “F asaldır çünkü sayının son rakamı 7’dir ve rakamların toplamı 19 sayıdır. 19 asal bir sayıdır ve kendisi ve 1’den başka hiçbir şeye bölünemez. Yani F asaldır.” şeklinde hatalı yanıtların da olduğu araştırmada ortaya konmuştur. Çarpım şeklinde verilen bir sayının asal olup olmadığını bulmada öğretmen adaylarının zorlandığı göz önüne alındığında asal sayıların eksik, tutarsız, algoritma (kural) güdümlü ve belirli örneklerinden önemli ölçüde etkilenmiş oldukları söylenebilir. Benzer şekilde Zazkis (2000), öğretmen adaylarına $117 = 3^2 \times 13$ işlemini göstermiş ve bu sayının hem asal çarpanları hem de tüm çarpanlarını belirlemelerini istemiştir. Bazı öğretmen adayları bunu hemen yapamamış; iki tanesi çarpan ağacı oluşturmuş ve başka iki tanesi ise elinde hesap makinasıyla bölme işlemleri yaparak asal çarpanları bulmuştur.

Zazkis (2000) çarpan, bölen ve kat kavramları ile ilgili öğretmen adaylarının kavrayışlarına odaklanmıştır. Bu üç kavram arasında çarpan kavramının en az problemli kavram olduğu ifade edilmiştir. Öğrencilerin çoğu çarpan kavramını doğru tarif etmiş ve açıklayabilmiştir. Bununla birlikte daha detaylı analizde ise öğretmen adaylarının çarpan kavramı ile ilgili anlayışlarının eksik olabileceği söylenmiştir. Bazı öğretmen adaylarının “B, A’nın bir çarpanıdır” ifadesinin “A, B ile bölünebilir” ifadesine denk olduğunu bilmediğini/fark etmediği belirtilmiştir. Ayrıca Zazkis (2000) “çarpan” kelimesinin iki farklı anlamının olduğunu ve öğretmen adaylarının tanımlarında bu farklı anlamlardan bahsedilmediği ifade edilmiştir. Çarpma işlemindeki çarpan ile sayılar kuramındaki çarpan kavramlarının farklı anlamlara geldiği örneklendirilmiştir. Bir $C.B=A$ çarpma işleminde C ve B sayılarına çarpılan veya çarpan denilmekte; sayılar kuramına giriş dersinde ise çarpan için (factor) farklı bir tanım yapılarak “A ve B doğal sayıları için $C.B=A$ olacak şekilde bir C doğal sayısı (natural) varsa B, A’nın bir çarpanı olarak adlandırılır.” ifadesi kullanılmaktadır. Benzer şekilde bölen kavramının da öğretmen adaylarının büyük bir bölümü tarafından bölme işleminde yer alan $A:B=C$ ifadesindeki B olarak anlaşıldığı ve tanımlandığı ifade edilmektedir. Yapılan mülakatta doğal sayı olmayan örneklerle bölme işlemi yaptırılınca bölen kavramının iki anlamını da bilen öğretmen adaylarının tanımlarını ayarlayamadıkları ifade edilmiştir. Zazkis (1998b), bölen kavramının bölme işlemindeki anlamının ve sayılar kuramındaki “çarpan” ile eş değer olan anlamının karışıklık yaratabileceğinden ve öğretmen adaylarının bu çok anlamlılık konusunda zorluk yaşadığından bahsetmiştir. “5 sayısı, $12:5=2,4$ matematiksel ifadesinin bir böleni iken, 5, 12’nin böleni değildir.” cümlesinde yer alan “bölen” gibi çok anlamlı terimlerin farkında olarak öğrencileri bu potansiyel zorluklara karşı uyarmak gerektiğini önermiştir.

Öğretmen adaylarının kat kavramında da zorlandığı 19 öğretmen adayından sadece dördünün doğru tanım yapabildiğini Zazkis (2000) ifade etmiştir. Bazı öğretmen adaylarının çarpan ve kat kavramlarının aynı anlama geldiğini; çarpanın asal olması gerektiği ancak katın asal olamayacağını belirttikleri ortaya çıkmıştır.

Çarpanlar ve katlar öğrenme alanının temel kavramlarından biri de bölünebilme kavramıdır. Bölünebilirlikle ilgili yapılan çalışmalardan birinde Zazkis (1998a), öğretmen adaylarına doğal sayı ve üslü ifade içeren dokuz ifade vermiş ve bu sayıların tekliğini ve çiftliğini sorgulamıştır. Çift olmanın birçok öğretmen adayı tarafından 2'ye bölünebilirliğe eşdeğer olarak algılanmadığı genellikle bir sayının son rakamına bağlı bir özellik olarak düşünüldüğü belirtilmiştir. Ayrıca, bir çarpan olarak 2'nin varlığı, öğretmen adayları tarafından bir sayının 'çiftliğini' belirleyen bir düşünce olarak kullanılırken, 2'nin bir çarpan olarak olmaması 'teklik' ile tanımlanmamıştır.

Zazkis ve Campbell (1996a; 1996b) bölünebilirlik kavramına odaklanmış ve bu kavramın bölme, çarpma, asal ve bileşik sayılar, bölen, bölünebilme kuralları ve asal ayrıştırma ile ilişkisini incelemişlerdir. Her iki çalışmada da öğretmen adaylarına $M=33.52.7$ sayısı verilerek M sayısının 2, 5, 7, 9, 11, 15 ve 63 sayıları ile kalansız bölünüp bölünemediği sorulmuştur. Zazkis ve Campbell (1996b) çalışmasında 21 katılımcıdan 13'ü, M sayısının 3, 5 ve 7'ye bölünebildiğini M 'nin asal çarpanları olduğunu ifade ederek çıkarabilmiştir. Ancak bu 13 kişiden sadece 6'sı bu bölünebilirlik sürecini 15'e veya 63'e bölünebilirliğe taşıyabilmiştir. Bazı öğretmen adayları çarpan/bölen ilişkisi ile ilgili bilgilerini 2 ve 11 ile bölünebilme sorusunda kullanamamıştır. Zazkis ve Campbell (1996a) çalışmasında da 54 öğretmen adayına aynı soru sorulmuş ilk çalışmaya benzer düşünceler bu çalışmada da görülmüştür. Bazı öğretmen adayları 3, 5 ve 7 için doğru cevaplar vermesine karşın sayının 2 ve 11 ile bölünebilme ihtimalinden bahsetmişler ve sayıyı hesaplamayı tercih etmişlerdir. Bu durum aynı sayının farklı asal ayrışımalarının olabileceği ihtimalini düşündüklerini göstermektedir. Ayrıca çalışmadaki öğretmen adaylarının yaklaşık yarısı (25 kişi) çarpan ve bölen kavramına odaklanmadan M sayısını hesap etmiş ve sonradan bölünebilme kurallarını uygulama yoluna gitmiştir. Bazıları tüm bölünebilirlikleri doğru ifade ederken bazıları son basamağa veya son iki basamağa bakarak yanlış yorumlarda bulunmuşlardır. Bölünebilme kurallarının uygulanmasında da sorunlar olduğu belirlenmiştir. Zazkis ve Campbell (1996a) öğretmen adaylarına “12358 ve 12368 sayıları arasında 7'ye bölünebilen bir sayı var mıdır?” sorusunu da sormuştur. 21 öğretmen adayından sadece 7 tanesi ardışık 10 sayı arasında 7'ye kalansız bölünen bir sayının kesinlikle olacağını açıklayabilmiştir. Bir öğretmen adayı bu aralıkta rakamları toplamı 7 olan bir sayı aramıştır. Başka bir katılımcı ise 7 ye bölünebilme kuralını bilmediği

için hepsini tek tek denemek gerektiğini belirtmiştir. Üç öğretmen adayı 12363 sayısının son iki rakamından yola çıkarak 7'ye tam bölünebildiğini ifade etmiştir.

Bölünebilirlik ile ilgili çalışmalardan bazıları öğretmen adaylarının epistemik bilgilerine yönelik olmuştur. Şahin (2016) son sınıf ilköğretim matematik öğretmen adaylarının bölünebilme konusundaki ispat yapabilme becerilerini inceledikleri araştırmada katılımcılara “ a, b, c birer tamsayı olmak üzere $a|b$ ve $a+b=c$ ise $a|c$ olduğunu gösteriniz.” ve “Ardışık dört tamsayının 24 ile bölünebildiğini gösteriniz.” sorularını sormuştur. Öğretmen adayları ile yapılan görüşmede ilk soruda aksiyomatik ispatların yapıldığı ancak ikinci soruda örnekler yoluyla önermenin doğruluğuna karar verildiği ifade edilmektedir. Altı öğretmenden sadece ikisinin soruda aksiyomatik ispat yapabildiği anlaşılmıştır. Ayrıca bazı öğretmenler bölünebilme kavramının kalanlı bölünebilmeyi de kapsadığını düşünebilmektedir.

İspatla ilgili yapılan bir başka çalışmada Contay ve Duatepe -Paksu (2019) ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarının neler olduğunu ve bu şemaları nasıl ortaya koyduklarını araştırmayı amaçlamıştır. Bu amaçla 3 kız öğrenci ile klinik görüşmeler yapmıştır. Görüşmede ispatlama istenen bölünebilme, asal sayı, karmaşık sayı gibi konuların yer aldığı teoremler veya önermeler verilmiştir. Ayrıca iki soruda önerme ve önermeye ait 3 ispat tipi verilmiş ve ispatların geçerliliği sorulmuştur. Araştırmacılar Harel ve Sowder tarafından geliştirilen ispat şemalarını kullanarak yaptıkları içerik analizi ile öğretmen adaylarının en çok dışsal, daha sonra analitik ve en az deneysel ispat şemalarına sahip olduğunu belirlemiştir. Başarılı öğrencilerin daha çok analitik düzeyde ispatlar yaptıkları da ifade edilmiştir.

Alt öğrenme alanına ait en temel kavramlardan biri de EBOB ve EKOK kavramıdır. Pasmaz ve Küpcü (2010), ilköğretim matematik öğretmen adaylarının en büyük ortak bölen (EBOB) ve en küçük ortak kat (EKOK) kavramlarına ilişkin pedagojik alan bilgilerini tespit ederek, “öğretmenlik uygulaması” dersinde yapılan çalışmaların bu duruma etkisini incelemiştir. Beş öğretmen adayına EBOB ve EKOK tanımları, iki sayının EBOB ve EKOK'unun farklı yollarla bulunması, asal çarpanlarına ayrılarak verilmiş sayıda EBOB ve EKOK bulunması gibi konularda sorular sorulmuştur. Ayrıca öğretmen adaylarından çalışmalar öncesinde ve sonrasında ders planları istenmiştir. Verilen iki sayının EBOB ve EKOK'unu bulurken öğretmen adaylarının genellikle bölme algoritmasını kullandıkları ifade edilmiştir. Ancak ondan farklı nasıl bulunabileceği sorulduğunda diğer yöntemlere yöneledikleri görülmüştür. Ortak bölme algoritması, listeleme, asal çarpanların çarpımı şeklinde üslü yazılarak en küçük veya en büyük derecelilerle EBOB EKOK bulunması ve sadeleştirme ile aralarında asal yapma gibi yöntemler kullanmışlardır. Ders planlarında ortak bölen ve ortak kat kavramları ile

ilişkilendirme yapılmasına rağmen kat ve bölen ile olan ilişkiler ihmal edilmiştir. Öğretmenlik uygulaması çalışmalarının; öğretmenlerin yöntemleri çeşitlendirmesi, farklı temsil biçimlerini kullanmaları gibi bazı durumlarda olumlu yönde değişimleri sağladığı araştırmada belirtilmektedir. Bölünebilirlik kavramı ile ilgili yapılan bir başka çalışmada Brown, Thomas ve Tolias, (2002) görüşme yaptıkları öğretmen adaylarının EKOK bulurken üç yöntem kullandığını belirtmiştir. “Kümelerin kesişimi (listeleme)” yönteminde, her sayının sırayla katları alınarak listelenir ve her iki listede de yer alan ilk ortak sayı bulunur. “Katları oluşturun ve bölün” yönteminde sayılardan birinin ardışık katları listelenir ve aynı anda bu katların diğer sayıya bölünüp bölünmediği de kontrol edilir. Diğer sayıyı da bölen ilk kat EKOK’tur. “Asal çarpanlara ayırma” yönteminde ise A ve B sayıları asal çarpanlarının kuvvetleri şeklinde yazılır ve her asal çarpanın en yüksek dereceli kuvvetleri alınarak çarpılır. Dias (2005), EKOK bulmaya yarayan başka bir yöntem olarak kafes yönteminden (lattice diagram) söz etmiştir. Bu yöntem diğerlerinden farklı olarak görsel bir yapı üzerine inşa edilmektedir.

2.3.4. Kümelerle ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları

Küme kavramı ile ilgili öğretmen ve öğretmen adaylarını merkeze alan çalışmaların büyük bir bölümü alan bilgisine yönelik olmuştur. Katılımcıların doğrudan küme veya sonsuz küme, alt küme, evrensel küme gibi diğer kavramlarla ilgili bilgileri üzerine çalışmalar yapılmıştır. Fischbein ve Baltsan (1998), Baki ve Şahin (2005) küme kavramının tanımına; Morali, Köroğlu ve Çelik (2004), alt küme ve sayı kümelerine odaklanırken; İpek, Albayrak ve Işık (2009); Linchevski ve Vinner (1988) ile Zehir, Işık ve Zehir (2008); Demir (2012); Zazkis ve Gunn (1997) öğretmenlerin veya öğretmen adaylarının kavram yanlışlarını araştırmıştır. Sonuç olarak öğretmenlerin de öğrencilere benzer kavram yanlışlarına sahip olduklarını ifade etmişlerdir. Bu çalışmalarda ortaya konulan kavram yanlışları bir üst bölümde yer almaktadır. Bu bölümde ise bu çalışmalardan bazılarının yer verilmiştir.

Tezden üretilen bir çalışmada Yazıcı ve Kültür (2017); “Kümelerde temel kavramlar” konusuna ilişkin ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenlerinin konu alan bilgilerini incelemiştir. Öğretim için matematik bilgisi modeli (MKT) kapsamında beş öğretmen ile görüşmeler yapılmıştır. Bu model konu alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi olarak iki bileşenden oluşmaktadır. Çalışmada incelenen konu alan bilgisi bileşeninin üç alt bileşeni mevcuttur. Genel alan bilgisi alt bileşeni altında, “Küme, Evrensel Küme, Boş Küme, Sonlu Küme, Sonsuz Küme, Alt Küme ve Eşit Küme” kavramlarının tanımları sorulmuş ve her bir tanıma uygun örnekler verilmesi istenmiştir. Öğretmenlerin küme, evrensel küme, sonsuz küme ve alt küme kavramlarını tanımlamakta veya ifade etmede zorluklar yaşadıkları boş küme ve eşit küme tanımlarında ise doğru açıklamalar yaptıkları

belirtilmiştir. Uzmanlık alan bilgisi alt bileşeni için, yine kazanımlar doğrultusunda hazırlanan “Boş küme, her kümenin alt kümesi midir?.”, “Kümenin elemanları arasında ortak bir özellik olmasına gerek var mıdır?” gibi beş sorudan yanıtlar istenmiş ve verilen yanıtları derinleştirmek amacıyla “Neden” ve “Niçin” sorularına cevap aranmıştır. Uzmanlık alan bilgisi gerektiren sorularda ise öğretmenlerin genel olarak sorulara doğru cevaplar verdikleri, fakat ifadelerin “Neden” ve “Niçin” böyle olduklarını matematiksel olarak açıklamada yetersiz kaldıkları ifade edilmiştir. Son olarak, “Kapsamlı Alan Bilgisi” bileşeni ile ilgili literatürde çok net bir ayrım olmadığı için, yalnızca “Matematik öğretene kişinin matematikteki konuları ilişkilendirirken geniş bir bakış açısına sahip olması ve Matematiksel konuları hem yatay hem de dikey olarak birbirleriyle ilişkilendirebilmesi” baz alınarak, “Küme-Fonksiyon, Küme-Bağıntı, Küme-Olasılık, Küme-Limit ve Küme-Vektör” konuları arasındaki ilişki ve bu ilişkinin “Nasıl?” olduğu sorulmuştur. Tüm kavramlar “küme” kavramı üzerine inşa edilmesine rağmen öğretmen adaylarının ilişki kurmada zorlandığı görülmüştür.

Yazıcı ve Kültür’ün (2017) üretildiği tez çalışması olan Yazıcı (2017) matematik öğretmenlerinin kümelerle ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini incelenmiştir. Genel alan bilgileri bağlamında kümelerde temel kavramlara ilişkin bilgi eksikliklerinin olduğu ancak notasyon kullanımında öğretmenlerin oldukça iyi olduğu ifade edilmiştir. Uzmanlık alan bilgisi bağlamında ise öğretmenlerin “Neden? Niçin?” gibi sorulara yüzeysel cevap verdikleri ders içerisinde de kavramsal anlamayı sağlayacak bazı açıklamaları yapmadıklarını belirtilmiştir. “Alan ve öğrenci bilgisi” kapsamında öğretmenlerin öğrenci yanılgılarını anlamada veya anlatım için strateji belirleme noktasında kısmen yeterli oldukları ancak kendilerinin de yanılgılara sahip olduğu “tek elemanlı evrensel küme”, “sonsuz küme” gibi kavramlarda öğrencilere de yeterli açıklama yapamadıkları belirtilmiştir. Eşit kümenin tanımında alt kümeden hiç bahsedilmemesini konu alan bilgisindeki eksikliğin alan ve öğrenci bilgisine yansması olarak görülmüştür. “Alan ve öğretme bilgisi” bağlamında öğretmenlerin daha çok sayı kümeleri gibi soyut örnekler verdiklerini ve kümeleri yeterince somutlaştırmadıkları ifade edilmiştir. Ayrıca materyal seçiminde ders kitaplarının kullanılmadığı çoktan seçmeli testler üzerinden soru çözüldüğü, kavram öğretiminde teknolojiye yararlanılmadığı eleştirilerinde bulunulmuş; öğretmenlerin geleneksel öğretim yöntemleriyle ders işlediği belirtilmiştir.

Yazıcı ve Albayrak (2019), matematik öğretmenlerinin evrensel küme ve sonsuz küme kavramlarına ilişkin genel alan bilgilerinin incelenmesini amaçlamıştır. Bu bağlamda 18 matematik öğretmenin yer aldığı çalışmada hem ders gözlemleri hem de yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Ders gözleminde, “problemleri doğru olarak çözebilme, öğrencilerin yanlış cevaplarını fark edebilme, öğrencilerin eksik matematiksel

tanımlarını fark edebilme, matematiksel terimleri ve terminolojiyi doğru olarak kullanabilme” şeklinde dört gösterge incelenmiştir. Araştırma sonucu olarak öğretmenlerin tanımlamaları genel veya yüzeysel yaptığı, eksik veya yanlış tanımlamaların mevcut olduğu ifade edilmiştir. Bu durumun ders öğretim sürecine de olumsuz yansiyabileceği uyarısında bulunulmuştur.

2.3.5. Kesirler, ondalık ifadeler ve yüzdelerle ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları

Kesirler, ondalık ifadeler ve yüzdelerle ilgili çalışmalarından bir kısmı sadece alan bilgisi kapsamındadır. Öğretmen veya öğretmen adaylarının işlemsel ve kavramsal bilgilerini inceleyen çalışmaların yanı sıra problem çözme veya kurmayı temel alan ya da epistemik bilgi denilen gerekçelendirme becerilerini ele alan çalışmalar da mevcuttur. Steenbrugge, Lesage, Valcke ve Desoete (2014), 290 öğretmen adayının kesirlerle ilgili kavramsal ve işlemsel bilgileri ile bir işlemin gerekçesini veya kavramsal anlamını açıklama yeteneğini konu alan bilgisi bağlamında incelemişlerdir. Buna ek olarak son sınıf öğretmen adayları ile birinci sınıf öğretmen adaylarının sonuçlarını da karşılaştırmışlar. Sonuç olarak, öğretmen adaylarının kesirler hakkındaki bilgilerinin yetersiz olduğunu, bir işlemin gerekçesini veya altında yatan kavramsal anlamı açıklama becerisinden yoksun olduklarını ve son sınıf öğretmen adaylarının birinci sınıf öğretmen adaylarından daha iyi performans göstermediğini aktarmışlardır.

Öğretmen veya öğretmen adaylarında da öğrencilere benzer yanılgılar olduğu çeşitli araştırmalarda ortaya konmuştur. Bu zorluklardan biri devirli sayılarda devreden sayının 9 olması durumudur. Weller, Arnon ve Dubinsky (2009), APOS teorisini çatı aldığı deneysel çalışmasında ondalık sayılar üzerine özel olarak tasarlanmış bir öğretimi tamamlayan ortaokul öğretmen adaylarının matematiksel performansını incelemiştir. Geleneksel öğretim ve APOS teorisine dayalı öğretim yapılan iki grubun $0,999...=1$ eşitliğine yaklaşımlarını konu edinmiştir. Öğretmen adaylarının her iki grupta da %70’den fazlası iki sayının birbirine eşitliğini savunmuştur. Bu eşitliği savunanların bir kısmı kavramsal bir kısım ise kuralı uygulamak gibi işlemsel süreçler izlemiştir. Ancak bazı öğretmen adayları da bu iki sayının birbirine eşit olmadığını, yaklaşık olarak eşit olduğunu belirtmiştir. Kimileri aralarında bir sayı olduğunu belirtmiş kimileri $0,999...$ sayısının dinamik ve sürekli devam ettiğini ancak 1 sayısının statik yani durağan olduğunu belirtmiştir. Çalışmada sonuç olarak bir kesir ve ondalık gösterim arasındaki ilişkiyi hem işlemsel hem de kavramsal olarak derinlemesine anlamının, ilkökul ve ortaokul öğretmenleri de dahil olmak üzere birçok üniversite öğrencisi için çok zor olduğu tespit edilmiştir. Tall ve Schwarzenberger (1978) de üniversite birinci sınıf öğretmen adayları ile

yaptığı çalışmada $0,\bar{9}$ 'un 1'e eşit olup olmadığını sormuştur. Katılımcıların çoğunluğunun $0,\bar{9}$ 'un 1'den küçük olduğunu düşündüğünü not etmiştir.

Bir başka yanılının da kesirler ve ondalık sayıların yoğunlukları üzerine olduğu söylenebilir. Ondalık sayılardaki yoğunlukla ilgili öğretmen adaylarının kavram yanılığları olduğunu gösteren birçok çalışma mevcuttur (Depeape ve diğerleri, 2015; Hart, 1981; Merenluoto ve Lehtinen, 2002) Öğretmen ve öğretmen adaylarında iki ondalık sayı arasında kaç tane sayı olduğuna ilişkin sorularda genelde yanıtlar “sonlu” olmaktadır. Tirosh, Fischbein, Graeber ve Wilson (1999) İsrailli öğretmen adaylarının yalnızca % 40'ının 0,23 ile 0,24 arasında sonsuz sayıda sayı olduğunu bildiğini göstermiştir. (Tian ve Siegler, 2018). Hart (1981) ise öğretmen adaylarının 0,41 ile 0,42 arasındaki sayıları sıralamak için 0,411'den 0,419'a kadar saydıklarını belirtmiştir.

Ball (1990b) öğretmen adaylarının bölme işlemi ile ilgili anlayışlarını incelemiştir. 19 öğretmen adayından sadece beşinin kesirlerde bölme problemleri için uygun bir model oluşturabildikleri ortaya çıkmıştır. En sık yapılan yanlış gösterimin yarıya bölme ile ikiye bölme arasında olduğu belirtilmiştir. Borko ve diğerleri (1992), ilköğretim öğretmen adayları üzerinde yaptıkları çalışmada, çoğu katılımcının bir kesre bölünen tam sayı için sözel bir problemi oluşturamadıklarını ve genellikle oluşturulan problemin bölme işlemi yerine bir çarpma durumunu temsil ettiğini bulmuşlardır.

Graeber ve Tirosh (1988) ilköğretim öğretmen adaylarını incelediler ve Ball (1990b) gibi, öğretmen adaylarının bölme işlemleri hakkında yanılığlara sahip olduklarını buldular. Örneğin, bazı katılımcılar bir sayıyı ondalık sayıya bölmenin mümkün olmadığını düşündüler. Bir başka yanılı da bir sayının kesre bölünemeyeceği ile ilgiliydi. Bunun yerine ters çevrilmeli ve çarpılmalı düşüncesi hakimdi. Araştırmada öğretmen adaylarının yalnızca ondalık sayıdaki virgülü hareket ettirme gibi ezberci uygulamalara aşına oldukları belirtilmiş ve bu sürecin arkasında ne yattığına dair hiçbir anlayışlarının olmadığı ifade edilmiştir.

Öğrencilerin kavram yanılıklarını öğretmen açıklamalarından yola çıkarak inceleyen Gökkurt, Bayraktar ve Yılmaz (2017), sekiz öğretmenin kavram yanılıklarına yönelik açıklamalarını incelemiştir. Bazı matematik öğretmenlerinin kesir tanımını eksik bildikleri ve kısıtlı algılamaya sahip olduklarını belirtmiştir ve öğretmenlerin kesirle ilgili kısıtlı algılamaya sahip olmalarının öğrencilerin benzer yanılığa sahip olmalarına neden olabileceğini belirtmiştir. Çalışmanın ondalık sayılarla ilgili olan sonuçlarından biri bazı öğretmenlerin pedagojiden kaynaklı kavram yanılıklarını tespit edememeleri olmuştur. Bu öğretmenler, 10 ya da 10'nun kuvvetiyle çarpmada çarpılan sayının sonuna sıfır eklenmesi ya da kuvveti kadar sıfır eklenmesi ifadelerinin kavram yanılığı oluşturmayacağını belirtmişlerdir. Halbuki bu kural doğal sayılarda geçerli olmasına rağmen ondalık gösterimi

ifade eden sayıları 10 ile çarpmada kavram yanılgısına neden olmaktadır. 10 sayısı ile çarpma işleminde “Sayıyı 10 kat büyütür” şeklinde bir anlatım yapılması çalışmada tavsiye edilmiştir.

Gerek alan bilgisi bağlamında gerekse pedagojik alan bilgisi bağlamında kesirlerdeki işlemlerin modellenebilmesi de birçok çalışmada araştırma konusu olmuştur. Yavuz Mumcu (2018) öğretmen adaylarının kesir işlemlerinde matematiksel model kullanma performanslarının incelenmeyi amaçladığı çalışmada matematiksel modelleme seçmeli dersini almış olan 29 öğretmen adayına 12 adet açık uçlu sorudan oluşan Başarı Testi uygulamıştır. Bu testte kesirlerde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri verilmiş; öğretmen adaylarının alan, küme ve sayı doğrusu modellerini kullanımları incelenmiştir. Öğretmenlerin en iyi performansı alan modelinde daha sonra sayı doğrusunda ve en son küme modelinde gösterdikleri belirtilmiştir. Ayrıca alan modelini toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerinde doğru kullanabilirken bölme işleminde zorluk yaşadıkları tespit edilmiştir. Küme ve sayı doğrusu modellerinde de çarpma ve bölme işleminde zorlandıkları ifade edilmiştir. Ayrıca öğretmenlerin modelleme yapmadan önce işlemleri aritmetik olarak hesaplayıp, daha sonra model yapmaya giriştikleri tespit edilmiş, bu da araştırmacı tarafından, adayların yaptıkları modelleme işleminden emin olmadıklarının göstergesi olarak kabul edilmiştir. Bir başka çalışmada Bayazıt, Aksoy ve Kırnay (2011), ilköğretim matematik öğretmenlerinin matematiksel modelleri anlama ve model oluşturma yeterliliklerini incelemiştir. Çalışmada ders kitaplarında yer alan modelleri anlamada veya verilen matematiksel ifadelerle uygun modeller oluşturup kullanmada zorluk yaşandığı tespit edilmiştir. Özellikle çarpma ve bölme işlemlerinde bu zorlukların daha yaygın olduğu, öğretmenlerin hiçbirinin kesirlerle bölme işlemine uygun modeli oluşturamadığı sonucu ortaya konulmuştur. Erdem, Gökkurt, Şahin, Başıbüyük ve Soylu (2015), 104 ortaokul matematik öğretmen adayının kesirlerle çarpma ve bölmeyi modelleme becerilerini incelenmişlerdir. Öğretmen adaylarının çarpma veya bölme işlemlerinde bileşenleri doğru şekilde modelleyebilmelerine rağmen işlemleri eksik veya yanlış modelledikleri veya hiç modelleyemedikleri görülmüştür. Örneğin, araştırmaya göre bazı öğretmen adayları, $1/2 \times 2/3$ işleminde $1/2$ ve $2/3$ kesirlerini doğru bir şekilde modellerken, çarpma işleminin kendisini modellemede zorluk yaşamışlardır.

Alan bilgisi kapsamında epistemik bilgiye yönelik bir çalışma olan Koçak (2015) 84 ilköğretim matematik öğretmen adayı ile yapmış olduğu araştırmada onların matematiksel formülleri gerekçelendirebilme ve anlamlandırabilme düzeylerini ölçmeyi amaçlamıştır. Bu çalışmada devirli ondalık gösterimin rasyonel sayıya dönüştürülmesi ile ilgili formülü öğretmen adaylarına sormuştur. 10 öğretmenden 7’si formülü gerekçelendirmiş ancak 3’ü formülsüz bir dönüşümün yapılamayacağını belirtmiştir.

Bazı çalışmalar sadece pedagojik alan bilgisine yönelik olup çeşitli bileşenleri merkeze almıştır. Girit ve Akyüz (2016) ile Türnüklü ve Yeşildere (2007) öğretmen adaylarının öğrencilerin kesirler ve ondalık sayılarla ilgili kavram yanlışlarını tanımlamakta ve öğrencilerin stratejilerini öngörmede zorlandıklarını belirterek pedagojik alan bilgilerinin bu konular kapsamında zayıf olduğunu göstermişlerdir. Gökkurt, Şahin, Soylu ve Soylu (2013) sınıf öğretmeni adaylarının pedagojik alan bilgilerini öğrenci hataları bağlamında incelemiştir. Çalışmada öğrenci hataları içeren sorular öğretmen adaylarına gösterilmiş olup öğrenci hatasını tespit etmeleri ve bu hatanın nasıl giderilebileceğine yönelik öneri sunmaları beklenmiştir. Sınıf öğretmeni adaylarının kesirlerdeki işlemlerle ilgili öğrenci hatalarını kısmen de olsa doğru tespit etmişlerdir. Ancak, hataların nasıl düzeltilebileceğine ilişkin soruya yönelik yaptıkları öğretimsel açıklamaların yetersiz olduğu belirtilmiştir. Öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgisinin alt bileşeni olan öğrenci (öğrencilerin anlamalarını bilme) bilgilerinin orta düzeyde olduğu, bu hatalara ilişkin öğretim stratejileri bilgilerinin ise yetersiz olduğu ortaya konmuştur. Bu iki bileşen göz önüne alınarak öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerinin kesirlerde sıralama, toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerinde istenen düzeyde olmadığı sonucuna varılmıştır. Ortak yazarların olduğu bir başka çalışma olan Şahin, Gökkurt ve Soylu (2016) 98 matematik öğretmen adayının kesirlere yönelik pedagojik alan bilgilerini, öğrenci bilgisi ve öğretim stratejileri bilgisi bileşenleri açısından incelemiştir. Sonuç olarak, matematik öğretmen adaylarının kesirler üzerindeki pedagojik alan bilgilerinin, öğrencilerin hatalarını belirleme ve düzeltme konusunda yeterli düzeyde olmadığını aktarmışlardır. Bununla birlikte, öğretmen adaylarının, öğrenci bilgilerine göre öğretim stratejileri bilgilerinde daha fazla zorluk yaşadıkları da eklenmiştir. Çalışmada yer alan birçok soruda öğrencilerin hatalarını kısmen tespit etmeyi başaran matematik öğretmeni adaylarının “öğrencilerin hatalarını nasıl düzeltirsiniz?” sorusuna yönelik öğretimsel açıklamalarının ise yetersiz olduğu ifade edilmiştir.

Sadece öğretim stratejileri bileşenine odaklanıp öğretmenlerin öğretim stratejileri bilgilerinin incelemeyi ve geliştirmeyi amaçlayan çalışmalar da mevcuttur. Naiser, Wright ve Capraro (2003), ortaokul öğretmenlerinin kesir öğretimini geliştirmelerinin yollarını bulmak için kullandıkları etkili stratejileri belirlemeyi amaçlamıştır. Dört ay boyunca beş farklı ortaokuldan 6. ve 7. sınıf öğrencileri kesir derslerinde gözlemlenmiş ve videoya alınmıştır. Dört aylık bir süre boyunca mevcut sınıflarda toplam 12 kesir dersi gözlemlenmiş ve çalışmaya toplam 8 öğretmen katılmıştır. Çalışmada öğretilen içeriğe değil, daha çok dersleri öğretmek için kullanılan pedagojik stratejilere odaklanılmıştır. “Katılım stratejileri, öğretim stilleri, sınıf materyalleri, düşünmeyi teşvik etmek” başlıkları altında göstergeler kullanılarak veriler analiz edilmiş ve sonuç olarak ortaokul

öğrencilerine kesirleri daha iyi öğretmek adına önerilerde bulunulmuştur. Çalışmada materyal kullanımının, öğretmenlerin uygulamalı bir deneyim yaratarak dersleri daha ilgi çekici hale getirmesinin bir yolu olduğu belirtilmiştir. Öğrencilerin anlamalarını ve verilen görevle ilgilenmelerini izlemenin en iyi yolunun kesir şeritleri gibi materyallerin derste kullanımı olduğu ifade edilmiştir. Araştırmacılara göre, bu durum öğrencileri daha çok düşünmeye teşvik etmektedir.

Alan ve pedagojik alan bilgisini birlikte ele alan çalışmalar da mevcuttur. Işıksal (2006) yüksek lisans tez çalışmasında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının 6. ve 7. sınıf konularını içerecek şekilde kesirlerde çarpma ve bölmeye yönelik alan ve pedagojik alan bilgilerini ve bu bilgileri arasındaki ilişkilerini incelemiştir. 28 öğretmen adayına ölçek uygulamış ve 17'si ile görüşme yapmıştır. Bulgular, öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma ve bölmeye ilişkin problemleri kolaylıkla çözebildiklerini ancak kavramsal olarak bu işlemleri anlamlandırmada yeterli olmadıklarını göstermiştir. Sonuçlar, öğretmen adaylarının kesirlerin çarpımı ve bölünmesiyle ilgili temel işlemlerin ispatı ile ilgili alan bilgilerinin yeterince güçlü olmadığı gerçeğini de ortaya koymuştur. Bölme işleminde neden ters çevirip çarptığımız veya kesişim alanının (çarpma alan modeli) neden iki kesrin çarpımını temsil ettiği veya çarpma ve bölme ifadelerinin nasıl kanıtlanacağı gibi sorular sorulduğunda öğretmen adaylarının yarısından fazlası yeterli açıklama yapamamıştır. Temel kavramları açıklamak için kavramsal stratejiler kullanmakta ısrar etseler de ilişkileri keşfetme ve ispat gerektiren sorularla karşılaştıklarında işlemsel stratejilere geçmişlerdir. Yazar öğretmen adaylarının öğrenci hatalarını tanımlarken kendilerinin sahip olduğu yanlışlara işaret ettikleri sonucuna da varmıştır.

Pedagojik alan bilgisi ile birlikte alan bilgisi kapsamında epistemik bilgi düzeyini yoklayan Agbozo ve Fletcher (2020), 26 öğretmen adayının kesirlerle ilgili kavramlar bağlamında çalışmıştır. Öğretmen adaylarına uygulanan başarı testi sonucunda öğretmen adaylarının çoğunun hesaplama konusunda yetkin olduğunu ancak yöntemlerin "nasıl ve neden" çalıştığını göstermekte zorlandıklarını aktarmışlardır. Katılımcıların neredeyse yarısı, kesirlerin bölünmesini öğretmek için etkili bir yaklaşım geliştiremediği belirtilmiştir. Alan bilgisi açısından çalışmanın sonuçlarından bazıları şu şekilde sıralanabilir: Öğretmen adaylarının, kesir kavramını açıklamada %50'si, denk kesirlerde %58'i, kesirlere toplama ve çıkarma işlemlerinde %85'i başarılı bulunmuş. Kesir problemini ise öğretmen adaylarının sadece %8'i çözebilmiş. Kesirlerdeki pedagojik bilgileriyle ilgili olarak ise öğretmen adayları, kesir kavramı onların deyimi ile "soyut ve kafa karıştırıcı" olduğu için kuralları, ilkeleri ve prosedürleri uygulayarak kesirleri öğretmeye eğilimli oldukları bulunmuştur. Kesirleri modellemede genel olarak başarılı bulunurken materyal kullanımında ise hangi işlemin yapıldığına göre durumlarının

değiştirdiği belirtilmiştir. Çarpma işleminde kullanılabilecek materyali söyleyebilen öğretmen adayı sayısı 10'da (%38) kalmış ancak bunlardan sadece 4 tanesi (%15) materyali kullanarak çarpmayı gösterebilmiştir. Toplama işleminde ise 14 öğretmen adayı (%54) materyali doğru seçebilmiş, sadece 2 tanesi (%8) materyali doğru kullanabilmiştir. Li ve Smith (2007) de benzer bir araştırmayla öğretmen adaylarının kesirlerde işlemlerle ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini incelemiştir. Bulguları öğretmen adaylarının alan ve pedagoji konusundaki bilgilerinin işlemsel açıdan sağlam ve ama kavramsal açıdan zayıf olduğunu göstermiştir.

Benzer bir şekilde Avcu (2019) da 4. sınıf 51 matematik öğretmen adayının kesirleri öğretme konusundaki bilgilerinin kapsamını keşfetmeye çalışmıştır. Öğretmen adaylarına genel alan bilgisi, uzmanlaşmış alan bilgisi, öğrenci bilgisi, öğretme (öğretim stratejileri) bilgisi ve müfredat bilgisini içeren test uygulamışlardır. İşlemsel soruların ve rutin problemlerin yer aldığı genel alan bilgisi bölümünde öğretmenlerin sağlam bilgiye sahip oldukları ifade edilmiştir. Kesirlerin farklı anlamlarını içeren, kesir problemleri kurulması gerektiren, bazı kuralların genelleştirilebilirliğini ölçen uzmanlaşmış alan bilgisi sorularında ise öğretmen adaylarının çok zayıf olduğu ve sınırlı bilgiye sahip oldukları belirtildi. Öğretmen adaylarının problem kurmada ve işlemsel kuralların altında yatan nedenleri açıklamada başarısız oldukları görüldü. Çalışmanın pedagojik alan bilgisi kısmında ise ilk bölüm öğrenci ve alan bilgisi sorularıydı. Öğrenci bilgisinde öğretmen adaylarının yüksek bir performans gösterdiği, öğrenci hatalarını ve yanlışlarını tespit etmede başarılı oldukları belirtilse de bazı sorularda alan bilgilerinin eksikliği nedeniyle öğrenci hatalarını doğru tespit edememişlerdir. Avcu (2019), bu durumu Even ve Tirosh (1995)'in “bir öğretmenin belirli bir öğrencinin cevabının doğru olup olmadığı konusundaki kararının, o öğretmenin alan bilgisine dayandığı” iddiasını destekler bulmuştur. Pedagojik alan bilgisinin ikinci kısmında alan ve öğretim bilgisi soruları yer almıştır. Öğretmen adaylarının bu bölümde yer alan sorulardaki başarılarının sorudan soruya farklılık gösterdiği ve bu nedenle de tatminkâr olmadığı ifade edilmiştir. Bazı sorularda verilen dönütler yeterliyken, özellikle materyal seçiminde ve kullanımında zorlukların yaşandığı belirtilmiştir. Müfredat bilgisi bölümünde ise kesirlerde sıralama, sayı doğrusunda gösterme, dört işlem, sadeleştirme ve genişletme gibi kesirlerle ilgili alt öğrenme alanlarının hangi sınıf düzeylerinde görüldüğüne ilişkin sorular yer almıştır. Öğretmen adaylarının müfredat bilgilerinin tatmin edici olduğu belirtilmiştir. Öğretmen adaylarının en çok zorlandığı soru verilen kavramların ilk kez hangi sınıf düzeyinde görüldüğüne ilişkin soru olmuştur. Yarıdan azı sınıf düzeylerini doğru belirtebilmiştir.

Can (2019), ortaokul matematik öğretmenlerinin kesirler konusundaki öğrenci kavram yanlışları ve öğrenme güçlükleri ile ilgili konu alan bilgilerini ve pedagojik alan

bilgilerini incelemiştir. Öğretmenlerin kesirlerde işlemlere ilişkin kavramsal bilgilerinin yetersiz olduğunu ortaya koymuşlardır. Ayrıca öğrencilerin yanlış nedenlerini ifade etmede zorluk yaşadıkları belirtilmiştir. Öğretmenlerin de parça bütün ve ölçü bağlamında kesirlerin anlamlarına yönelik zorluklar yaşayabildiği belirtilmiştir. Örneğin çalışmada PAB testinde yer alan “ $\frac{3}{4}$ dönümlük bir tarlanın $\frac{5}{6}$ ’sına çilek ekilmiş ise çilek ekilen alanın miktarı ne kadardır?” Başlangıçtaki alan ile çilek ekili alan arasında nasıl bir ilişki vardır? Karşılaştırınız.” senaryosuna yönelik öğretmen adaylarının bir kısmının öğrencilerin yaşayabileceği zorlukları belirtmedikleri ve çözüm önerisi sunmadıkları ifade edilmiştir.

Öğrenci bilgisi bileşenine bağlı olarak Kula Ünver (2016), ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirlerle ilgili olası kavram yanlışlarını 40 öğretmen adayına sorarak aldığı yanıtları içerik analizine tabi tutmuştur. Alanyazında olup da öğretmen adaylarının belirtmediği kavram yanlışları türlerinin olduğunu tespit etmiştir. Diğer yanlış türlerini öğrenmenin öğretim sırasında muhtemel kavram yanlışlarını önlemede etkili olacağını açıklamıştır.

Bu araştırmanın alan bilgisi bağlamında teorik çatısını oluşturan Kinach’ın (2002a) anlama düzeylerinin kullanıldığı çalışmada Gökçurt ve diğerleri (2012) matematik öğretmenlerinin matematiksel alan bilgileri ile pedagojik alan bilgileri arasındaki ilişkisini incelemiştir. 41 öğretmene kesirler, tam sayılar, üslü sayılar gibi konuları içeren sekiz soru yöneltilmiştir. Her bir soru için öğretmenlerin yarı yapılandırılmış görüşmede yapmış oldukları açıklamalar matematik alan bilgisi açısından doğruluklarına göre sınıflandırılmış; pedagojik alan bilgisi açısından ise Kinach’ın (2002a) geliştirmiş olduğu anlama düzeyleri baz alınmıştır. Kesirler konusundaki çıkarma ve bölme işlemleriyle ilgili 96 öğretimsel açıklamadan, 72’sinin pedagojik yönden konu düzeyinde olduğu belirtilmiştir. Ayrıca çalışmada bu 72 açıklamadan sadece ikisinin pedagojik yönden yeterli olduğu ifade edilmiştir. Kesirlerde çıkarma sorusunda yapılan 50 öğretimsel açıklamadan 12 tanesi kavram düzeyinde, 1’i problem çözme ve 2’si epistemik düzeyde yer almıştır. Kesirlerde bölme işlemiyle ilgili soruda ise 46 öğretimsel açıklamadan 5’i kavram düzeyinde, 1’i problem çözme düzeyinde, 3 açıklama da epistemik düzeyde 2. kesrin neden ters çevrildiğini açıklayan gerekçelerden oluşmaktadır.

Yüzde kavramıyla ilgili yapılmış çeşitli çalışmalar da mevcuttur. Ngu (2018), 20 öğretmen adayının yüzde değişim problemleri için kullandıkları çözüm temsillerini incelemiştir. Öğretmen adaylarına basit ve karmaşık yüzde değişim problemlerinden oluşan ölçek uygulamıştır. Öğretmen adaylarının yüzde değişim problemlerinde %100’ün üzerinde bir yüzde ile karşılaştıklarında zorlandıklarını ortaya koymuştur. Öğretmen adaylarının birim kesirden yararlanarak problemleri çözmek yerine daha çok denklem

kurma stratejisini benimsedikleri belirtilmiştir. Denklem yaklaşımının düşük bilişsel yük getirdiği ve bu nedenle birim kesir yaklaşımından daha kolay ve verimli olduğu açıklanmıştır. Cincinatus ve Sheffet (2016), 17 matematik öğretmen adayının kavramsal anlama ve problem çözme stratejilerini incelemeyi amaçlamıştır. Öğretmen adaylarının kavram yanlışlarını ve yetersiz ya da yanlış problem çözme stratejilerini ortaya koymuşlardır. "Yüzde problemlerinin çözümlerinde paydada her zaman 100 vardır.", "Bir bütünün %66'sı %34'sinden %32 fazladır.", "İki sayıdan biri diğerinden %32 büyükse, o da büyük sayıdan %32 küçüktür." şeklinde üç temel kavram yanlışısı tespit etmişlerdir. Öğretmen adaylarının sayısal problemleri yüzdelere aşırı genelleyeabildikleri belirtilmiştir.

2.3.6. Oran ve orantı ile ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları

Oran ve orantı kavramı ile ilgili yapılmış alan ve pedagojik alan bilgisi çalışmaları incelendiğinde öğretmen veya öğretmen adaylarının öğrencilere benzer yanlışlara sahip olabildiği görülmüştür. Akar (2010), bir matematik öğretmenin neler bilmesi gerektiği konusunu incelemiştir. Kesirlerin orandan en bariz farkı olarak kesirlerin parça-bütün ilişkisini ifade etmekte olduğunu oranın ise parça parça ilişkisini göstermekte olduğunu belirtmiştir. Ayrıca kesirler bir miktarın matematiksel gösterimi olabilmekte iken oranın bir ilişkiyi gösterdiğini ifade etmiştir. Öğretmenlerin bu kavramlar arasındaki farkları ve benzerlikleri bilmeleri gerektiğini, mutlak miktar olan kesir ve çarpımsal ilişki olan oran ile ilgili örneklendirmeler ile bu bilgilerin öğrencilerinin matematik bilgisini de güçlendirebileceğini dile getirmiştir. Öğretmenlerin oranı iki büyüklük arasındaki çarpımsal bir ilişki olarak görememelerinin rasyonel sayı kavramının da öğrencilere benimsetilmesi noktasında ciddi bir sorun yaratabileceğini ifade etmiştir. Bu durumun sadece çözümsel olan işlemleri yapabilen ancak oran ve kesirli sayıları ayırt etme gerektiren ileri matematik seviyelerinde sorun yaşayan öğrencilerin yetişmesine neden olabileceğini vurgulamıştır. Nitekim, Parker (1999) formal olarak henüz orantı kavramını görmeyen öğrencilerin genellikle bilinmeyen değeri bulma sorularında toplamsal artırma stratejisini kullandıklarını belirtmiştir. İlköğretim öğretmen adaylarının, informal bir şekilde artırma stratejilerini oluşturduklarını gözlemlemiştir. Problem çözmenin öğretmen adaylarının orantısal ilişkilerini ve çarpımsal ilişki yapılarını geliştirdiği sonucuna varmışlardır.

Oran ve orantı kavramının gelişimi üzerine problem çözmenin temel alındığı çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Arıcan (2020), matematik öğretmen adaylarının çözüm yöntemlerini, orantısal olan ve olmayan ilişkileri belirleyebilmelerini ve temsil edebilmelerini problem içerikleri bağlamında incelemiştir. Problem içeriklerinin öğretmen adaylarının çözüm yöntemlerini, orantısal olan ve olmayan ilişkileri belirleyebilmelerini ve temsil edebilmelerini etkilemiştir. Alanyazında, öğretmen adaylarının doğru orantıyı

belirlemede daha başarılı olduğu belirtilse de Arıcan (2020)'de ters orantılı ilişkiyi belirlemede ve temsil etmede daha iyi oldukları tespit edilmiştir. Orantısız olmayan ilişkinin belirlenmesi ve temsilinde ise öğretmen adayları zorlanmışlardır. Ayrıca çalışmada iyi yapılandırılmış ve analiz etmeyi gerektiren problemlerin orantısız düşünmeyi geliştirdiği sonucuna varılmıştır. Birinci sınıf öğretmen adayları (Livy ve Vale, 2011) ve ikinci sınıf öğretmen adayları (Livy ve Herbert, 2013) ile yapılan araştırmanın sonuçları da öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun, özellikle oran ve orantı ile ilgili problem bağlamları içinde matematiksel yapı ve matematiksel bağlantılara ilişkin anlayışlarını geliştirmeleri gerektiğini göstermiştir.

Brown, Epstein ve Orrill (2020), ortaokul öğretmenlerine sunulan bir kişisel gelişim atölyesinden bir öğretmenin oranda yer alan sabit değişim kavramı ile ilgili anlayışını ve bu anlayışının altı saatlik bir mesleki eğitim deneyimi boyunca nasıl değiştiğini incelemişlerdir. Öğretmenin eğitim süreci sonunda dahi problem çözme yeteneklerinde tutarsızlıklar olduğu ve çaba göstermesine rağmen bazen başarılı olamadığını belirtmişlerdir. Çıkla ve Duatepe (2002) ise öğretmen adaylarının oran orantı problemlerini çözebilmelerine rağmen oran ve orantı kavramlarını tanımlamada güçlük çektiklerini ve bu terimler hakkında kavramsal bilgi eksikliğine sahip olduklarını göstermiştir. Bu durum bir kişinin kavram bilgi düzeyi düşük olmasına rağmen problem çözme düzeyinde iyi olabileceğini göstermektedir.

Oran ve orantı ile ilgili alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisini birlikte inceleyen çeşitli çalışmalar da mevcuttur. Bu çalışmalardan birinde Bahar (2019), matematik öğretmen adaylarının oran ve orantı konularındaki AB ve PAB'larını incelemiştir. Çalışma araştırmacının yüksek lisans tezidir. Literatürden oran ve orantı ile ilgili bir AB ve PAB ölçeğinin çevirisini yaparak 590 ilköğretim ve lise matematik öğretmenine uygulamıştır. Sonuç olarak işlemsel bilgi gerektiren sorularda öğretmen adaylarının başarılı olduğu ancak orantılı durumları orantısız durumlardan ayırmaları gereken sorularda veya şekilli sorularda yeterli düzeyde başarı gösteremedikleri aktarılmıştır. Buna ek olarak öğretmen adaylarının oran orantı içeren problem oluşturabildikleri ancak öğrencilerin hatalarını veya kavram yanlışlarını belirleyemedikleri ve de bu yanlışları düzeltmek için gereken dönütleri veremedikleri bulunmuştur. Ayrıca öğretmen adaylarının oran orantı ile ilgili öğretim stratejileri bilgilerinin de yetersiz olduğu belirtilmiştir. Matematik öğretmen adaylarının, öğrencilerin oran ve orantı problemlerini çözerken kullanabilecekleri farklı stratejiler konusunda bilgili olmadıkları birkaç strateji bilseler bile, öğrencilerin bunları neden kullanabileceklerine dair nedenler sunamadıkları ifade edilmiştir.

Öğrenci bilgisi bileşeni kapsamında Külcüoğlu (2019), ortaokul matematik öğretmen adaylarının öğrencilerin oran kavramına yönelik matematiksel düşüncelerini

ortaya çıkarabilme becerilerini incelemişlerdir. Yaptıkları uygulamalar boyunca öğretmen adayları öğrencilerle görüşmüş ve daha sonra görüşme videolarını analiz etmişlerdir. Öğretmen adaylarının öğrencilerin oran konusundaki yanlışlarına yönelik farkındalıklarının arttığı ortaya konulmuştur. Yapılan çalışmalarda öğretmen adaylarının da orantı sabiti, birimli/birimsiz oran gibi bazı temel kavramlarda öğrenciler gibi güçlük yaşadığı ortaya konulmuştur. Oran kavramı üzerine yapılan araştırmada Ekawati ve meslektaşları (2015), ilkokul öğretmenleriyle çalışmış; alan ve pedagojik alan bilgilerini içeren sorular sormuştur. Şekilsel oran sorularında zorluk yaşamalarına rağmen, sayısal sorularda daha iyi olduklarını ifade etmiştir. Ayrıca orantılı ve orantısız durumları ayırt etmede bazı öğretmenlerin yanlış bilgiye sahip olduğu belirtilmiştir. Pedagojik alan bilgisi bağlamında ise bazı öğretmenlerin öğrencilerin kavramsal anlayışlarını bilme konusunda zorluklar yaşadığı orantısız problemleri çözmede öğrencilerin kavram yanlışları ve farklı öğrenci stratejileri gibi anlayışlarında daha fazla hassasiyete ihtiyaçları olduğu ifade edilmiştir. Yani bazı öğretmenler için geri bildirim vermek ve öğrenci çözümlerini değerlendirmek ve analiz etmek en zor maddeler olarak kabul edilmiştir.

Son (2013), 57 öğretmen adayının, oran orantı ile ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini ve bu bilgileri arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Katılımcıların alan bilgisini değerlendirmek için, iki dikdörtgenin benzer olması koşuluyla bir dikdörtgenin eksik tarafını bulmaları ve çözüm yöntemlerini açıklamaları istenmiştir. Pedagojik alan bilgilerini değerlendirmek için bir öğrencinin aynı soruya yönelik yanlış çözümünü yorumlamaları ve yanıtlamaları istenmiştir. Bir öğrencinin benzer dikdörtgenlerde bir eksik uzunluğu bulmak için eklemeli akıl yürütme içeren hatasını göstererek öğretmen adaylarının böyle bir hatayı nasıl yorumlayıp yanıtlayacağına ve öğretmen adaylarının matematiksel bilgileriyle ilgili yaklaşımlarının nasıl olduğuna bakılmıştır. Benzer dikdörtgenler probleminde, lise öğretmen adaylarının tümü doğru yanıt verirken, ilköğretim öğretmen adaylarının %77'si (31 üzerinden 24'ü) doğru yanıtlamıştır. Yanlış cevaplar veren yedi katılımcı, verilen miktarlar arasındaki farklara odaklanarak toplamalı akıl yürütmeyi kullanmıştır. Öğrencinin hatası, benzerlik kavramının yetersiz anlaşılmasından kaynaklanıyor gibi görünse de öğretmen adaylarının çoğu, hataların benzerliğin işlemsel yönlerindeki yanlış anlamalardan kaynaklandığını tespit etmişlerdir. Öğretmenlerin bu soruna nasıl müdahale edecekleri konusunda yaptıkları açıklamaların yetersiz olduğu ifade edilmiştir. Sonuç olarak çalışmada öğretmen adaylarının alan bilgileri iyi olmasına rağmen pedagojik alan bilgileri daha zayıf bulunmuştur. Bu çalışma, iyi matematik bilgisinin iyi öğretim uygulamasını garanti etmediğini göstermektedir. Güçlü bir oran ve orantı bilgisi sergileyen öğretmen adaylarının büyük bir kısmı, öğrenci hatasını belirlerken benzerliğin prosedürel yönlerine odaklanmış. Bu çalışma aynı zamanda hatanın

kaynağının belirleyememenin öğrencilere doğru cevap verme becerisinin eksikliğini beslediğini de ortaya koymuştur.

Öğretim için matematik bilgisi (MKT) bağlamında yapılan araştırmada Doğruel (2019) matematik öğretmenlerinin alan ve pedagojik alan bilgilerini incelemeyi amaçlamıştır. Genel alan bilgisi, uzmanlık alan bilgisi, alan ve öğrenci bilgisi ile alan ve öğretmen bilgisi alt bileşenleriyle ilgili 14 sorunun yer aldığı anket 90 öğretmene uygulanmış, 13'ü ile yarı yapılandırılmış görüşme yapılmış ve gönüllü olan 6 öğretmenin dörder saatlik ders gözleminden veriler toplanmıştır. Öğretmenlerin uzmanlık alan bilgisi ile öğretim ve alan bilgisi (ÖtAB) bileşenlerinde yeterli düzeyde olmadıkları ifade edilmiştir. Genel alan bilgileri (GAB) ile öğrenci ve alan bilgilerinin (ÖğAB) ise yeterli düzeyde olduğu buna rağmen öğretmenlerin çok büyük bir kısmının oran tanımını bilmedikleri belirlenmiştir. Yanlış cevap veren öğrenciye kural temelli açıklamalar yapmayı tercih ettikleri anlaşılmıştır. Ayrıca kıdemli öğretmenlerin genel alan bilgisi, öğrenci ve alan bilgisi ile öğretim ve alan bilgisi bileşenlerinde daha az kıdemli olanlara göre daha başarısız oldukları fakat uzmanlık alan bilgisinde daha iyi oldukları ifade edilmiştir. Çalışmada oran kavramının tanımı bilinmese dahi oran belirten örneklerin doğru tespit edilebildiği görülmüştür. Öğretmenlerin oranı rasyonel sayı ve kesir ile birbirine karıştırabildiği belirtilmiştir. Öğretmenlerin problem durumlarında çarpımsal ilişki ve toplamsal ilişkiye karar vermekte zorlandıkları belirtilmiştir. Öğretmenlerin veya öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerini incelemenin ötesinde bu bilgi türünün gelişimlerini sağlamak amacıyla da çeşitli çalışmalar yürütülmüştür. Şermetoğlu ve Baki (2019), oran ve orantı konusunun öğretimi sürecinde bir öğretmenin dersini kaydetmişler ve dersi öğretmenin izleyip analiz etmesini istemişlerdir. Öğretmenin fark etme becerisini inceledikleri bu çalışmada dersi veren öğretmen ders akışı sırasında gözden kaçırdığı noktaları fark etmiş ve daha sonraki dersler için öğretimi düzenleme noktasında farkındalığa sahip olmuştur. Bu çalışmada orantıda verilmeyeni bulurken önce içler dışlar çarpımının öğretilmesiyle çocukların diğer çarpımsal ilişkileri göz ardı ettiğini her soruyu içler dışlar çarpımı ile yapmaya çalıştıklarını fark etmiştir. İleride yapacağı ders planlarında önce paylar veya paydalar arası ilişkilere bakarak verilmeyeni bulma ile başlayıp öğretimin sonunda içler dışlar çarpımını vereceğini ifade etmiştir. Benzer şekilde Valverde ve Castro (2012), öğretmen adaylarının çapraz çarpıma çok fazla güvenmeleri ve farklı öğrenci muhakemelerine aşına olmamaları nedeniyle, öğrencilerin akıl yürütmelerini yanlış olarak görme eğiliminde olduklarını belirtmiştir. Öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerindeki gelişimi incelemeyi amaçlayan Küpcü ve Pusmaz (2010) 5 ilköğretim matematik öğretmen adayıyla öğretmenlik uygulaması dersi kapsamında çalışmıştır. Oran ve orantı konularında öğretmen adaylarından ders planları hazırlamaları istenmiş ve beş

haftalık süreçte öğretmen adaylarıyla çalışma yapılmıştır. Çalışma kapsamında oran ve orantı ile ilgili kavramların özellikleri ve en yaygın yapılan kavram yanlışları incelenmiş grup içi tartışmalar yapıp, örnek ders video kayıtları izlenmiş ve öğretmen adaylarından yeniden ders planı yapmaları istenmiştir. Çalışma sadece “Konu veya kavramla ilgili öğrenci zorlukları ve öğrenci anlayışları bilgisi” bileşeni doğrultusunda yapılmıştır. Yapılan uygulamaların öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerini arttırdıkları, ders planları hazırlarken öğrenci zorluklarını daha çok dikkate almalarını sağladıkları görülmüştür. Öğrencilere verilen problemlerde orantısız olmayan veya bağlamdan kopuk durumlar yerine günlük hayattan orantısız düşünmeye uygun örneklerin verilmesi gerektiği, sorularda ondalık ifadeler gibi işlemsel zorluk da içeren örneklerin yer alması gerektiği, sadece içler dışlar çarpımı ile çözülebilen soruların yanı sıra tablo ile, grafik ile destekli bir öğretimin planlanmasının faydalı olabileceği ifade edilmiştir.

Sadece tek bir PAB bileşenine yönelik çalışmalardan biri olan Şen (2022), ortaokul matematik öğretmenlerinin alan ve öğretme bilgilerini (öğretim stratejileri bilgisi) incelemiştir. Öğretmenlerin oran orantı öğretiminde günlük hayattan örnekler verdiklerini ancak öğrenci hazırbulunuşluğunu belirlemekte yetersiz kaldıklarını tespit etmiştir. Diğer disiplinlerle konunun ilişkili olduğunu bildiklerini ancak öğretim sırasında disiplinlerarası ilişkilendirilmede bulunmadıklarını ifade etmiştir. Çoklu temsillerle ilgili öğretmenlerin bilgi sahibi olduğunu ve en çok sözel problemleri tercih ettiklerini belirtmiştir. Gerek problem çözme stratejileri bağlamında gerekse öğrencilerin bireysel özelliklerine göre dersi planlayabilme konusunda öğretmenlerin yeterli bilgiye sahip olmadıklarını ortaya koymuşlardır.

2.3.7. Üslü ifadelerle ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları

Üslü ifadelere ilişkin öğretmen veya öğretmen adaylarıyla yapılmış alan veya pedagojik alan bilgisi çalışmaları mevcuttur. Bazı çalışmalar doğrudan alan bilgisine bazıları ise öğretmenlik bilgisine yöneliktir.

Alan bilgisine odaklanan çalışmalardan biri olan Zazkis (1998), öğretmen adaylarının teklik ve çiftlik ile ilgili anlayışlarını incelemiştir. Üslü ifadelerde teklik ve çiftlik kavramı ile pozitiflik ve negatiflik kavramının birbirine karıştırılabildiğini belirtmiştir. Ayrıca bazı öğretmen adaylarının taban ve üssün çarpımının tek veya çift olması ile üslü ifadenin değerinin de tekliği ve çiftliği konusunda hatalı yorum yapabildiğini ifade etmiştir.

Bir başka alan bilgisi çalışmasında Levenson (2012) üslü ifadelerle ilgili öğretimin ilk seviyelerinde yapılan, “üs kadar tabanın çarpımı” şeklindeki bir tanımlamanın üssün sıfır olduğu durumlarla karşılaşıncı veya üssün negatif olduğu durumlarla karşılaşıncı öğretmenler tarafından değiştirilip tanımın alanının genişletilip genişletilmediğini

incelemek istemiştir. $a^0 = 1$ ve $a^m = a.a.a. \dots a$ (m tane) ifadelerinin bir tanım mı yoksa ispatlanabilir bir teorem mi sorularını da değerlendirerek üç lise matematik öğretmenleriyle görüşmeler yapmıştır. Öğretmenlerin üslü ifadelerde tanım ve teorem arasında ayırım yapmakta zorlandıklarını ifade etmiştir. Üç öğretmenden birinin $a^0 = 1$ ifadesini tanım olarak değerlendirdiği, diğerlerinin ise azalan geometrik dizi ve üslü ifadelerde bölme kuralından yararlanarak ispatlamaya çalıştıkları belirtilmiştir. Levenson (2012) matematikte tanımların keyfiliğinden yola çıkarak tanımın genişletilebileceğini, $(-1).(-1)=1$ eşitliği gibi ifadelerin bir tanım olduğunu bu nedenle de ispat yapmaktan ziyade sadece açıklama yapılabileceğini ifade etmiştir.

Koçak (2015) 84 ilköğretim matematik öğretmen adayı ile yapmış olduğu çalışmada öğretmen adaylarının matematiksel formülleri gerekçelendirebilme ve anlamlandırabilme düzeylerini ölçmek amacıyla farklı öğrenme alanlarına ait formülleri içeren bir test uygulamıştır. Öğretmen adaylarına çeşitli kurallar verilip bu kuralların gerekçeleri ve bu kuralın öğrenciye verilmesinin gerekli olup olmadığı sorulmuştur. Verilen yanıtlara göre aralarından seçilen 10 öğretmen adayı ile de ders gözlemi ve mülakat yapılmıştır. Sorulardan biri “ $a \neq 0$ ise, $a^0=1$ dir.” kuralıdır. 84 öğretmen adayından sadece biri eşitliği tam olarak açıklayabilirken, %19’u kısmen doğru gerekçeler sunmuştur. %80’i ise bir gerekçe sunamamış veya yanlış gerekçe sunmuştur. Öğretmen adaylarının yaklaşık yarısı kuralın öğrencilere verilmesi gerektiğini ifade ederken, diğer yarısı kuralı vermenin gerekli olmadığını ifade etmiştir. Bir başka sorulan kural ise $a^m/a^n=a^{m-n}$ olmuştur. Öğretmen adaylarının %64’ü kuralın gerekçesini doğru açıklayabilmiş, %31’i yanlış gerekçe sunmuş veya soruyu boş bırakmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının %80’i kuralın verilmesinin gereksiz olduğunu ifade ederken %19’u gerekli olduğunu belirtmiştir.

Alan bilgisini temele alan, konu bazlı pedagojik alan bilgisi çalışmaları da mevcuttur. Cankoy (2010), a^0 , $0!$ ve $a \neq 0$ ifadeleri ile ilgili 58 lise matematik öğretmenlerinin konu bazlı pedagojik alan bilgilerini incelemiştir. Öğretmenleri acemi ve tecrübeli olarak iki gruba ayırmış, öğretmenlerin a^0 ile ilgili açıklamalarını üçe ayırarak değerlendirmiştir: (1) bir kural yaklaşımı (%75,9), (2) örüntü yaklaşımı (%15,5) ve (3) cebirsel yaklaşım (%8,6). Sonuçlara göre, en sık gözlenen yaklaşım deneyimli öğretmenlerin %44’ünün ve acemi öğretmenlerin tamamının benimsediği kural yaklaşımı olmuştur. Gerekçe sunarak yapılan açıklamalarda deneyimli öğretmenlerin %20’si cebirsel, %36’sı ise örüntü yaklaşımında bulunmuştur. Araştırmacı bu sonuçlardan sonra, yeni öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerinin zayıf olduğunu ve bunun zayıf bir alan bilgisinin göstergesi olabileceği yorumunu yapmıştır. Öğretmenlik yetiştirme programlarında deneyimli öğretmenlerin mentor olarak kullanılması ve konuya özel

pedagojik alan bilgisinin genel pedagojik alan bilgisine göre daha fazla vurgulanması gerektiği önerisinde bulunmuşlardır.

Gökkurt ve diğerleri (2012) matematik öğretmenlerinin matematiksel alan bilgileri ve pedagojik alan bilgileri arasındaki ilişkiyi inceleme amacıyla kesirler, tam sayılar, üslü sayılar, faktöriyel ve denklem çözümü konularını içeren sekiz soru hazırlamış ve 41 matematik öğretmeni ile görüşme yapmıştır. Öğretmenlerin sorulara verdiği yanıtların matematiksel olarak doğruluğunu alan bilgisinin bir ölçütü olarak ele almıştır. Ayrıca aynı soruya yapılan öğretimsel açıklamaları Kinach'ın (2002a) geliştirmiş olduğu anlama düzeylerine göre inceleyip bu öğretimsel açıklamaları pedagojik alan bilgisi kapsamında değerlendirmiştir. Öğretmenlerin sahip oldukları pedagojik alan bilgisi ile matematiksel alan bilgileri arasında sıkı bir ilişki olduğu ortaya çıkmıştır. Çalışma sonunda, sekiz sorudan elde edilen 346 öğretimsel açıklamadan 236'sının konu düzeyinde olduğu ve konu düzeyinde olan bu öğretimsel açıklamalardan da sadece 13'ünün matematiksel alan bilgisinde yeterli olduğu söylenmiştir. Buna karşın, yapılan mülakatlardan bu öğretmenler, derslerinde bu gerekçeyi ifade etmenin zaman kaybı olduğunu düşündüklerini ve öğrencilerine kural olarak verip, bu kuralın neden böyle olduğu üzerinde fazla durmadıklarını belirtmişlerdir. Doğal olarak öğretmen adayları epistemik düzeyde yeterince açıklama yapmamışlardır. Üslü ifadelerle ilgili olan sorular incelendiğinde, $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ kuralına yönelik 41 öğretmen adayının 13'ünün (%31,7) epistemik düzeyde ve doğru açıklamalar yaptığı, sıfırcı kuvvetin neden 1 olduğu ile ilgili soruda ise 16 öğretmen (%39) doğru açıklama yaptığı ancak bunların sadece 7'sinin (%17) epistemik düzeyde yer aldığı görülmüştür.

Alan ve pedagojik alan bilgilerinin her ikisinin de incelendiği çalışmalar haricinde pedagojik alan bilgisinin bileşenlerine yönelik yapılmış çalışmalar da mevcuttur. Bu çalışmalardan öğrenci bilgisi bileşenine odaklanan Gökkurt ve diğerleri (2017) dördü sınıf dördü ortaokul matematik öğretmeni olmak üzere sekiz öğretmenin kavram yanlışlarına ilişkin açıklamalarını incelemişlerdir. Öğretmenlere örnek durumlar içeren senaryolar verilmiş; senaryodaki öğretmen veya öğrenci açıklamalarının, doğru olup olmadığı; bu açıklamaların kavram yanlışısına sebep olup olmayacağı ve kavram yanlışısının türü ve nedeni gibi sorular sormuşlardır. Çalışmanın sonunda hem sınıf öğretmenlerinin hem de matematik öğretmenlerinin psikolojik nedenli kavram yanlışlarını tespit etmede pek fazla zorlanmadıkları ancak kavram yanlışısının türü ve nedeni konusunda bilgilerinin eksik olduğu görülmüştür. Öğretmenlerin pedagojik nedenli kavram yanlışlarını belirlemede daha çok zorlandıkları ortaya çıkmıştır. Kavram yanlışısını tespit edemeyen öğretmenlerden bazılarının kendilerinin kavram yanlışısına sahip oldukları görülmüştür. Ayrıca "Her sayının sıfırcı kuvveti 1'dir" ifadesini kullanan bir öğretmenin benzer

şekilde öğrencileri hataya düşürerek, öğrencilerin $0^0 = 1$ ifadesini düşünmelerine neden olabileceği belirtilmiş; öğretmenin kendi kavram yanılgıları kadar ders içinde yaptığı açıklamaların da önemli olduğu vurgulanmıştır.

Sonuç olarak öğrenci bilgisi bileşeni ve öğretim stratejileri bileşenini birlikte ele alan çalışmalardan birinde Güler ve Çelik (2019) son sınıf matematik öğretmen adaylarına, “Öğrencilerin çoğu $1^2.4^2.3^0$ işleminin sonucuna sıfır yanıtını veriyor. Öğrencilerin kavram yanılgısı nedir? Bunu düzeltmek için nasıl dönüt verirsiniz?” sorusunu sormuş ve öğretmen adaylarının %93’ünün hatanın nedenini doğru tespit ettiğini ancak yalnızca %18’inin sıfırcı kuvvetin neden 1’e eşit olduğuna yönelik yeterli bir açıklama ile dönüt verebildiğini söylemiştir. Öğretmen adaylarının öğrenci bilgisine sahip olmasına rağmen, öğretim stratejileri bilgisi yönünden yeterli olmadıklarını belirtmişlerdir.

Öğretmen adayları ve öğretmenleri birlikte değerlendiren ve pedagojik alan bilgisinin iki bileşeninde gelişimleri incelemeyi amaçlayan Johnson (2016), 78 öğretmen ve öğretmen adayı ile çalışmıştır. Çalışmada, katılımcılara öğrenci güçlüklerini anlamalarını, içeriği sunma yöntemlerini, öğretimde kullanabilecek etkinlik ve materyal bilgilerini gösteren çeşitli sorular sormuşlardır. Bu sorular içerisinde üslü sayılarla ilgili iki soru yer almaktadır. İlki, “Öğrenciler genellikle $a^0 = 1$ eşitliğini kabul etmekte güçlük çekerler. Bunun nedeni ne olabilir? Lütfen olabildiğince çok nedeni listeleyin.” sorusudur. İkincisi ise, “Bu eşitliği öğrenciler için daha anlaşılabilir hale getirmek için lütfen mümkün olduğunca yol gösterin.” sorusudur. Katılımcılardan bir kısmının örüntü ile sıfırcı kuvvetin 1 olduğunu ifade ettiği, bir kısmının ise tabanları aynı olan iki üslü sayıda bölme işlemi yapılırken üslerin çıkarılabileceği kuralı ile öğretim yöntemini tercih ettiği belirtilmektedir. Genel sonuçlara bakıldığında ise 15 yıldan fazla öğretmenlik yapan yaşlı öğretmenlerin yeni mezun olanlara göre daha düşük pedagojik alan bilgisine sahip olduğu ifade edilmiştir.

Üslü ifade özelinde bakıldığında öğretmen veya öğretmen adaylarının kuralları gerekçelendirmede sorun yaşadığı söylenebilir. Koçak’ın (2015) çalışmasında da görüldüğü gibi özellikle üssün sıfır olduğu durumları açıklarken zorlandıkları görülmüştür. Johnson (2016) ve Cankoy (2010) çalışmalarının her ikisinde de örüntü yolu ve üslü ifadelerde bölme işlemi kuralları ile açıklama yapmaya çalıştıkları ifade edilmiştir. Levenson (2012) ise bu ifadelerin bir tanım olduğunu savunmakta, bu nedenle bir ispat çabasında olmamak gerektiğini belirtmektedir.

Pedagojik alan bilgisi gelişimini yorumlayan Johnson (2016) ve Cankoy (2010) deneyimli öğretmenler konusunda farklı sonuçlara ulaşmıştır. Cankoy’un (2010) çalışmasında deneyimli grup daha başarılı olmuştur. Bu nedenle de yazar, yeni mezunların alan bilgisinin yetersiz olduğunu ifade etmiş, deneyimli öğretmenlerin hizmet öncesi

eğitimde mentor olarak görevlendirilebileceği önerisinde bulunmuştur. Johnson'da (2016) ise 15 yıldan fazla öğretmenlik yapan öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerinin yeni öğretmenlere göre daha zayıf olduğu ortaya konulmuştur.

Çalışmalar değerlendirildiğinde öğretmen adaylarının da öğrencilere benzer kavram yanlışlarının mevcut olduğu görülmüştür. Alan bilgisindeki zayıflığın pedagojik alan bilgisinde de eksikliklere neden olduğu dikkat çekilmiştir. Gökkurt ve diğerlerinde (2017) olduğu gibi yaptığı hatanın farkında olmayan öğretmen, özellikle öğretmen kaynaklı kavram yanlışlarını tespit etmede zorlanmaktadır. Bu durum alan bilgisi eksikliğinin öğrenci bilgisine olumsuz yansımadır. Bazen de alan bilgisi eksikliği Güler ve Çelik'de (2009) olduğu gibi kavram yanlışını tespit edebildiği halde öğrenciyi ikna edecek dönüştürme vermede yani öğretim stratejileri bilgisinde sorun yaratabilmektedir.

2.3.8. Kareköklü ifadelerle ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları

Kareköklü ifadelerle ilgili yapılmış gerek öğretmenler gerek öğretmen adayları ile yapılan çeşitli alan ve pedagojik alan bilgisi çalışmaları mevcuttur. Bu bölümde bu çalışmalardan bazılarına yer verilmiştir.

Öğretmen adaylarının bir kareköklü sayının sayı doğrusu üzerinde yerinin belirlenmesine yönelik alan bilgilerinin incelendiği Aksu, Gedik ve Konyalıoğlu (2013) çalışmasında 47 matematik öğretmen adayından $1 - \sqrt{5}$ sayısını sayı doğrusu üzerinde göstermeleri istenmiştir. Aksu, Gedik ve Konyalıoğlu (2013) çalışması daha önce yapılmış olan Sirotic (1998) çalışmasıyla benzer bir amacı taşımaktadır. Sirotic (1998) öğretmen adaylarına $\sqrt{5}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki yerini sormuş ve öğretmen adaylarının bunu belirlemede zorluk yaşadığı belirtilmiştir. Aksu, Gedik ve Konyalıoğlu (2013) da öğretmen adaylarının $\sqrt{5}$ 'in yaklaşık değerinden yararlanarak $1 - \sqrt{5}$ değeri için bir aralık belirttiklerini veya yaklaşık değerini kesirle gösterip bir nokta işaretlediklerini ifade etmiştir. Öğretmen adaylarının hiçbirinin yay çizme yoluyla noktayı göstermedikleri, bazılarının yapmış olduğu gösterimlerin hiçbir matematiksel dayanağının olmadığı ayrıca vurgulanmıştır. Öğrencilerde de yaşanan bu güçlüğü önlenmesi için öğretmen adaylarının yeterince alan bilgisine sahip olmadıkları, bu nedenle de öğrencilere de kaçamak cevaplar verebilecekleri ifade edilmiştir.

Öğretmen adaylarının alan bilgisi eksikliklerinin öğrenci hatalarını anlama noktasında pedagojik alan bilgilerine etkisinin göz önüne konulduğu bir çalışma olan Özkaya, Konyalıoğlu ve Gedik (2013) çalışmasında üslü ve kareköklü sayılar bağlamında ortaokul öğrencilerinin sahip olabileceği hatalara ilişkin görüşlerini incelemek üzere son sınıfta okuyan 37 matematik öğretmen adayı ile mülakat yapmıştır. Matematik öğretmen adayları ilk olarak $\sqrt{1} = \sqrt{(-1)^2} = -1$ ve $\sqrt{2^{16}} = 2^4$ gibi doğru olmayan eşitlikler ve

önermelerden oluşan yedi soruluk matematik alan testini cevaplamışlar. Bu eşitliklerin doğru olup olmadığı ve yanlış ise nedenlerini sormuşlardır. Böylece öğretmen adaylarının yanıtlarını hatayı tespit edip edememeleri ve kaynağını doğru veya yanlış açıklamalarına göre kategorilere ayırmışlardır. Sonrasında öğretmen adaylarından bazıları ile öğrencilerde bu tür hataların oluşma sebepleri ve bu tür hataların ortadan kaldırılabilmesi için alınabilecek önlemlere cevap aranan görüşmeler yapmışlardır. Öğretmen adayların kareköklü ifadeler bağlamında yer alan sorulardan “ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ” eşitliğinin her zaman doğru olduğu önermesinin hatalı olduğunu tespit etmede zorlandıkları görülmüştür. En düşük doğruluk oranı bu soruda gerçekleşmiştir. Öğretmen adaylarının sadece %3’ü (1 kişi) hatayı doğru tespit edip doğru açıklamada bulunabilmiştir. Testin geneline de bakıldığında öğretmen adaylarının öğrencilerde de görülebilecek muhtemel kavram yanlışlarını tespit edemedikleri anlaşılmıştır. Görüşme yapılan öğretmen adayları da öğrencilerde oluşabilecek matematiksel hataların oluşma sebepleri olarak öncelikle öğretmenlerin kendisinde bulunan kavram yanlışlarını ve kavramların tanımlarına yeterince önem verilmemesini göstermiştir. Araştırmacılar öğretmen adaylarının hataları tespit edememesini ve doğru açıklamalar yapamamasını matematiksel bilgi yoksunluğuna bağlamışlar ve bu bilgi yoksunluğunun öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerini de etkilediklerini ifade etmişlerdir. Özkaya ve diğerlerinin (2013) bu çalışması öğrenci bilgisi bileşeni açısından matematik alan bilgisinin önemini de ortaya koymaktadır.

Öğrencilerin öğrenme güçlükleri bağlamında yapılmış kapsamlı çalışmalardan biri de Shabanifar (2014) tarafından köklü sayılar özelinde yapılmış olan doktora tezidir. Çalışmada, lise matematik öğretmenlerinin pedagojik alan bilgileri öğrencilerin öğrenme güçlükleri bağlamında incelenmiştir. İran’da yapılan çalışmanın ilk aşamasında 40 matematik öğretmenine “köklü sayılar alan bilgi testi” ve “köklü sayılardaki hata ve nedenlerini tespit testi” uygulanmıştır. İlk test kareköklü sayılarla ilgili alan bilgisini ikinci test ise pedagojik alan bilgisi bileşenlerinden öğrenci bilgisi bileşenini ölçmektedir. Test sonuçlarına göre 5 öğretmenle ayrıca görüşmeler de yapılmıştır. Alan bilgisi testi sonuçlarına göre öğretmenlerin kareköklü ifadelerle ilgili öğrencilere benzer hatalar yapabildikleri sonucuna ulaşmışlardır. Ayrıca öğretmenlerin öğrencilerin öğrenme güçlüklerine dair yeterli bilgi ve bu güçlüklerin tespit edilip giderilmesine yönelik yeterli beceriye sahip olmadıkları ifade edilmiştir.

Öğretmen veya öğretmen adaylarının öğrenci bilgilerini tespit etmenin ötesinde aynı zamanda bu bilgi türünün gelişimini amaçlayan Özaltun ve Bukova (2017) 3 lise matematik öğretmeni ile yürüttüğü çalışmada ders imecesi kapsamında öğretmenlere ortak bir ders planı hazırlatmıştır. Öğretmenlerden biri bu planı uygulamış diğer iki öğretmen dersi gözlemlemiştir. Öğretmenlerin yansıtıcı düşünceleri ve gözlemleri sonucu plan revize

edilip yeni plan doğrultusunda revizyon dersleri yapılmıştır. Bu dersler sonucunda da tekrar bir araya gelinip nihai plan oluşturulmuştur. Çalışmada araştırmacıların desteğiyle öğretmenlerce yapılan tartışmaların onları kavramların kritik noktaları üzerine derinlemesine düşünmeye teşvik ettikleri vurgulanmıştır. Bu tartışma ortamının, kareköklü sayıların öğretiminde de gerek öğrencilerin öğrenme güçlüklerinin giderilmesi gerekse öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerinin gelişimi açısından oldukça faydalı olduğu ifade edilmiştir.

Öğrenci bilgisi bileşeni dışında farklı pedagojik alan bilgisi modellerinin farklı bileşenlerine yönelik yapılmış çalışmalar da mevcuttur. Kovarik (2008) modelini temel alan Orman (2020), farklı mesleki deneyimlere ve öğrenim düzeylerine (lisans/lisansüstü) sahip 5 ortaokul matematik öğretmenin öğrenci bilgilerinin yanı sıra matematiksel gösterimler bilgilerini de incelemiştir. Öğretmen adayları ile öğrencilerin kareköklü ifadelerle ilgili kavram yanlışlarını temele alan geniş kapsamlı bir görüşme yapmıştır. Görüşmede öğretim programında kareköklü sayılarla ilgili yer alan her bir kazanımın öğretiminde hangi öğretim yöntem ve teknikleri, hangi matematiksel gösterimleri, ne tür örnekleri kullandıkları ve bunları seçerken nelere dikkat ettikleri, problem seçiminde ve çözümünde önem verdikleri hususları sormuştur. Ayrıca öğrencide olması gereken ön bilgiler, muhtemel kavram yanlışları, öğretim sırasında yapılacak ilişkilendirmeler ve kullanılacak ölçme değerlendirme araçları gibi pedagojik alan bilgisinin farklı bileşenlerine yönelik sorular da araştırmada yer almaktadır. Araştırmada sonuç olarak yüksek lisans mezunu ve mesleki deneyimi fazla olan öğretmenlerin diğer öğretmenlere göre kareköklü sayılar konusundaki pedagojik alan bilgilerinin daha iyi düzeyde olduğu belirtilmiştir.

Farklı pedagojik alan bilgisinin bileşenlerinin yer aldığı bir diğer çalışma Güler ve Çelik (2019) tarafından yapılmıştır. Çalışmada, 83 ortaokul matematik öğretmen adayının (4. sınıf) sayılar ve işlemler öğrenme alanı kapsamında sorulan çeşitli sorularla öğrenen bilgisi (öğrenci bilgisi) ve içeriği sunma (öğretim stratejileri) bilgileri incelenmiştir. Sonuç olarak öğretmen adaylarının öğrenen bilgisi bileşeni açısından yüksek düzeyde performans gösterdiğini ama içerik sunma bilgisi konusunda kötü performans gösterdiklerini aktarmışlardır. Yani, öğretmen adayları, belirli senaryolarda öğrenci zorluklarını veya kavram yanlışlarını belirlemede başarılı olmakla birlikte senaryodaki öğrenci zorluklarının veya yanlış anlamalarının içeriğin sunumunda üstesinden nasıl gelineceği veya nasıl giderileceği konusunda, çoğu oldukça düşük düzeyde performans göstermiştir. Araştırmada kareköklü ifadelerin sıralaması ile ilgili olan, " $a=5\sqrt{2}$, $b=3\sqrt{5}$, $c=5\sqrt{3}$. Öğrencilerinizden bazıları $b=c>a$ sıralamasını yaptığına göre öğrencide hangi kavram yanlışlığı olabilir? Onlara yardım etmek için ne yaparsın?" sorusunda öğretmen adaylarının %80'i öğrenci yanlışlığını belirlemede başarılı olmuşken, birçoğu bu zorluğu

ortadan kaldıracak bir fikir üretememiştir. Ayrıca bazı öğretmen adaylarının kendilerinin de yanlıya sahip olduğu ortaya çıkmıştır. Araştırmada bazı öğretmen adaylarının “Önce dıştaki sayılar karşılaştırılmalı, eşit olması durumunda kök içleri karşılaştırılmalıdır.” şeklinde yorum yaptıkları görülmüştür. Bu sonuç, öğretmen adaylarının öğrencilerin düşünme yollarını anlamada başarılı olduklarını, ancak matematiksel içeriğin etkili bir sunumunu sağlama konusunda yetersiz olduklarını göstermektedir. Katılımcılardan bazıları belirledikleri yanlışların nasıl giderileceğine ilişkin olarak herhangi bir eğitici açıklama yapmadan sınıfta daha fazla soru çözmeyi veya daha fazla alıştırmaya ve ev ödevi vermeyi önermiştir.

Kareköklü ifadeler özelinde öğretmen veya öğretmen adayları ile yapılan çalışmalar incelendiğinde daha çok pedagojik alan bilgisinin öğrenci bilgisi bileşenine yönelik çalışmalar olduğu görülmektedir. Bu çalışmaların birçoğu öğretmen veya öğretmen adaylarının öğrenci kavram yanlışları ve hatalarına karşı farkındalıklarını araştırma amacı taşımaktadır (Shabinifar, 2014 vb.). Durum tespitinin yanı sıra öğrenci bilgisinin gelişimi için yapılmış çalışmalar da mevcuttur (Özaltun ve Bukova, 2017 vb.). Öğrenci bilgisi bileşenini merkeze alan çalışmalar kadar olmasa da içeriği sunma bilgisi, matematiksel gösterimler bilgisi gibi diğer pedagojik alan bilgisi bileşenlerine yönelik de çalışmalar mevcuttur (Güler ve Çelik, 2019; Orman, 2020 vb.).

2.3.9. Rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayılarla ilgili yapılmış olan öğretmen bilgisi çalışmaları

Bu bölümde gerçek sayılarla (rasyonel ve irrasyonel) ilgili yapılmış alan ve pedagojik alan bilgilerine yönelik çeşitli çalışmalar incelenmiştir. Öğretmen ve öğretmen adaylarının da tıpkı öğrencilerde olduğu gibi gerçek sayılarla ilgili çeşitli kavram yanlışlarına sahip olduğunu belirten araştırmalar mevcuttur. Adams (1998), gerçek sayı sistemi ile ilgili olarak ilköğretim öğretmen adaylarının alan bilgisine odaklanmaktadır. 93 öğretmen adayına uygulanan açık uçlu testlerden elde edilen sonuçlar, katılımcıların gerçek sayı sistemini (özellikle tam sayılar, doğal (sayma) sayılar, rasyonel sayılar ve tam sayılar) anlamalarının yetersiz olduğunu göstermiştir. Çalışmada öğretmen adaylarından sadece %29'u sayı kümelerini Venn şemasıyla doğru gösterebilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının, tam sayıları %31, doğal sayıları %53, rasyonel sayıları %21 ve gerçek sayıları %12 oranında doğru tanımlayabilmiştir. Çalışmada matematiksel kavramlarla ilgili bilgileri yeterli olmadan özel öğretim yöntemleri derslerinin etkili olmadığı ifade edilmiştir. Sadece matematiksel bilgi derslerinin yapılması ya da matematiksel bilgideki sınırlılıkları göz ardı ederek yapılan pedagoji derslerinin etkisiz olduğu ifade edilmiştir.

Öğretmen adaylarının ve lise öğrencilerinin irrasyonel sayılarla ilgili sahip oldukları alan bilgilerinin araştırıldığı çalışmada Fischbein, Jehiam ve Cohen (1995), her

iki gruptaki bazı katılımcıların rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarını açıklayamadıklarını ve sayıları rasyonel, irrasyonel veya gerçek olarak tanımlayamadıklarını bildirmişlerdir. İrrasyonel sayılarla ilgili sezgisel zorlukları ortaya koymak adına 9. 10. sınıf ve öğretmen adaylarından oluşan üç gruba çeşitli sorular sormuştur. Öğretmen adaylarının büyük bir bölümü verilen sayıları gerçek sayı olarak doğru sınıflandırmalarına rağmen devirli sayıların köklü sayıların veya π sayısının gerçek sayı olmadığını belirtenlerin de olduğu dikkat çekmiştir. Sayı kümelerinin tanımlarında öğretmen adaylarının çok az bir kısmının zorluk yaşadığı belirtilmiş ancak sayı doğrusu ile ilgili kavram yanılgılarının olduğu ortaya konulmuştur.

Alan bilgisi kapsamında sayılabilecek, irrasyonel sayıların temsiline yönelik çeşitli çalışmalar yapılmıştır. İrrasyonel sayılarla ilgili ondalık temsil kavram imgesinin öğretmen adaylarınca daha ağır bastığı bazı çalışmalarda ortaya konmuştur. Arcavi, Bruckheimer ve Ben-Zvi. (1987) tarafından 84 öğretmen ile yürütülen çalışmada, birçok öğretmenin sayıları rasyonel veya irrasyonel olarak tanımlayamadığı bulunmuş ve irrasyonelliğin ondalık temsillere dayandığına dair öğretmenler arasında ortak bir inanç olduğu fark edilmiştir. Zazkis ve Sirotic (2004), ortaöğretim öğretmen adaylarının irrasyonel sayılarla ilgili anlayışlarını araştırmışlar ve öğrencilerin kesir temsiline göre ondalık sayı temsili daha çok tercih ettiklerini bildirmişlerdir. O çalışmada Zazkis ve Sirotic (2004), opaklık ve şeffaflık bağlamında irrasyonel sayıların temsillerinin öğretmen adaylarının düşüncelerine etkisini incelemiştir. Çalışmada yer alan bir soruda ortaokul matematik öğretmen adaylarına “53/83’ü düşünün. Bu sayıyı M diyelim. Bu bölmeyi gerçekleştirirken, hesap makinesi ekranı 0.63855421687’yi gösterir. M rasyonel mi yoksa irrasyonel bir sayı mı? Açıklayın.” sorusunu sormuştur. 46 öğretmen adayının yer aldığı çalışmada öğretmen adaylarının %60’ı soruya doğru yanıt verebilmiş, M sayısının iki tam sayı oranı olduğu için rasyonel olduğunu ifade etmiştir. Ancak katılımcılardan bazıları ondalık kısımda bir düzen olmadığını, bazıları ondalık kısmının sonlu olduğunu ileri sürerek sayının irrasyonel olduğunu belirtmiştir. Bazıları ise rakamların belirli bir kısmının gösterildiğini bölme işlemini tamamen yapmadan ondalık kısmın devredip devretmeyeceğini veya bir yerde son bulup bulmayacağını anlayamayacaklarını belirtmişlerdir. Bu durumu Zazkis ve Sirotic (2004) kesirler ve devirli sayılar arasındaki ilişkinin öğretmen adaylarınca yeterince anlaşılamamasının bir göstergesi olarak nitelemiştir.

Gerçek sayıların temsiline yönelik bir başka çalışmada Toluk Uçar (2016), 158 ortaokul matematik öğretmen adayının gerçek sayıları kavrayışlarında temsil türlerinin rolünü incelemeyi amaçlamıştır. Çalışmada rasyonel ve irrasyonel sayıların tanımları, sayı kümelerinin Venn şeması ile gösterilmesi ve verilen sayıların rasyonel veya irrasyonel olarak sınıflandırılmasına yönelik sorular yer almakta olup 10 öğretmen adayıyla yarı

yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Öğretmen adaylarının rasyonel sayı temsiliinde en çok kesir gösterimini en az ise karekök gösterimini kullandıkları; irrasyonel sayı temsiliinde ise en yüksek köklü en düşük ise ondalık gösterimin kullandıkları belirlenmiştir. Rasyonel sayı tanımında en yüksek oranın “Pay ve payda şeklinde ifade edilen” şeklinde yapıldığı irrasyonel sayı tanımında ise “rasyonel olmayan” şeklinde yapıldığı ifade edilmiştir. Öğretmen adaylarının temsile göre sayının türünün değişebileceği düşüncesinde de olabildiği anlaşılmıştır. Bir öğretmen adayı $1/3$ şeklinde yazınca rasyonel $0,333\dots$ şeklinde yazınca irrasyonel olarak sınıflandırma yapmıştır. Benzer şekilde bir öğretmen adayı $\sqrt{16}$ olarak verilince sayıyı irrasyonel ancak 4 olarak çıkarınca rasyonel olarak sınıflamıştır. Bir öğretmen adayı ise hem $\sqrt{2}/7$ sayısını hem rasyonel hem irrasyonel olarak sınıflamış, kesir ve köklü temsilin bir arada olmasından dolayı bu şekilde düşündüğünü ifade etmiştir.

Sayıları sınıflandırmada öğretmen adaylarınca yaşanan zorlukları ortaya koyan Peled ve HersHKovitz (1999) yapmış olduğu çalışmada $\sqrt{5}$ ’in tam rasyonel, irrasyonel veya gerçek sayı olup olmadığını ve bu sayıyla birlikte verdiği toplamda 8 sayının gerçek sayı doğrusundaki yerinin bulunup bulunamayacağını sormuştur. Öğretmen adaylarının çoğu sayının irrasyonel olduğu, tam sayı olmadığı konusunda görüş bildirmiştir. Gerçek sayı olarak tanımlayanlar da %87’lik bir oranda olmuştur. Ancak verilen sekiz sayıyı da gerçek sayı doğrusuna yerleştirebilen öğretmen adaylarının oranı %27’de kalmıştır, Bazı öğretmen adayları π , $\sqrt{5}$, $0,333\dots$ gibi sayıların sayı doğrusu üzerinde gösterilemeyeceğini belirtmiştir. Araştırmacılar öğretmen adaylarının gerçek sayı olarak belirttikleri sayıların dahi sayı doğrusunda olmadığını düşünebildiklerini ifade etmiştir. İrrasyonel sayıların sayı doğrusu üzerinde olmadığını düşünen öğretmen adayları olduğu gibi bu sayıların 3,14 gibi bir yaklaşımını alıp o sayının birebir eşiti olduğunu belirten öğretmen adayları da yer almaktadır.

Alan bilgisinin gelişiminin incelendiği çalışmada Rae Pettis (2015), ilköğretim öğretmen adaylarının kesirler, ondalıklar, rasyonel ve irrasyonel sayı kümeleri arasındaki ilişkileri anlama yollarını araştırmıştır. 32 öğretmen adayı, üniversitede 1 yarıyıl boyunca devam eden matematik içerik bilgisi dersine katılmıştır. Öğretim deneyinin başlangıcından elde edilen sonuçlar, ilköğretim öğretmenlerinin kesirler, ondalıklar ve rasyonel sayılar dizisi arasındaki bağlantılara ilişkin ilk anlayışlarının sınırlı ve genellikle yanlış olduğunu göstermektedir. Öğretimden sonra, öğretmen adayları kesirler, ondalık sayılar ve rasyonel sayılar kümesi arasındaki ilişkileri daha bağlantılı bir şekilde anlamıştır. Öğretmen adaylarının çoğu, kesirler ve ondalık sayılar arasındaki bağlantıları bulmak ve açıklamak için çoklu, sembolik olmayan temsilleri kullanma becerisini göstermiştir. Çalışmada yer alan sorular ve elde edilen sonuçların bir kısmı şu şekildedir:

32 öğretmen adayından sadece 12'sinin (%38) rasyonel sayılara örnek olan ve olmayan örnekler verebildikleri, 10'unun ise (%31) irrasyonel sayılara doğru olan ve olmayan örnekler verdikleri belirlenmiştir. Ayrıca birçok öğretmen adayı (%25) devirli sayıları irrasyonel olarak nitelemiştir. “0,66 ile $2/3$ arasında herhangi bir sayı var mıdır? Varsa, örnek verin ve 0.66 ile $2/3$ arasında olduğunu nasıl anladığınızı kısaca açıklayın. Eğer yoksa, neden olmadığını açıklayın.” sorusuna sınıftaki 32 öğretmen adayından sadece 14'ü (yaklaşık %44) doğru yanıt verebilmiştir. 0,66 ile 0,666... devirli sayısının ve $2/3$ 'ün eşdeğer olduğunu belirtenler olmuştur. Öğretmen adaylarının devirli ondalık sayıları kategorize etme biçimleriyle ilgili verilerden en temel üç sorun ortaya çıkarılmıştır. Elde edilen bulgular ışığında öğretmen adaylarının devirli ondalık sayıları iyi anlamadığı; rasyonel (ve irrasyonel) sayı kümelerine ilişkin anlayışlarının genellikle yanlış olduğu; kesirler ve ondalık sayılar arasındaki ilişkinin yeterince anlaşılmamış olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının π 'yi içeren kesir gösterimlerini kategorize ederken de yanlışlara sahip olabildiği görülmüştür. Bir öğretmen adayı $\pi/1$ 'i ne rasyonel ne de irrasyonel ancak gerçek olarak sınıflandırmıştır (çünkü bir sayı doğrusundaydı). Başka bir öğretmen adayı ise $\pi/3$ 'ün kesir şeklinde yazıldığı için hem rasyonel hem de irrasyonel olabileceğini düşünmüştür. π sayısının değeri ile ilgili de yaşanan karışıklıkların sayıları sınıflandırmada zorluklara neden olduğu söylenebilir. Sirotic ve Zazkis (2007) ve Arcavi ve arkadaşları (1987), irrasyonel bir sayının rasyonel yaklaşımlarının bir örneği olarak π ve $22/7$ arasındaki farkı anlamayan bazı öğretmen adaylarının derin bir yanılgıya ve açık kafa karışıklığına sahip olduklarını işaret etmiştir. Bu durumun $22/7$ ve 3,14 gibi rasyonel sayıların irrasyonel sayı olarak düşünülebilmesine neden olduğunu belirtmiştir.

Güler (2017) sekiz ilköğretim matematik öğretmeni ile yarı yapılandırılmış görüşme yapmış ve onların irrasyonel sayılara ilişkin kavram bilgilerini incelemeyi amaçlamıştır. İrrasyonel sayının tanımına ilişkin soruda tüm öğretmenlerin eksik ve yetersiz tanımlar verdiği belirtilmiştir. Öğretmenlerin irrasyonel sayıyı “rasyonel olmayan sayılar” şeklinde tanımlamasına rağmen rasyonel sayı tanımında kritik noktaları (a ve b'nin tam sayı olması gerektiği gibi) atladıkları ortaya çıkmıştır. Sayıları sınıflandırmaya yönelik soruda öğretmenlerin $22/7$, $3/\pi$, $\sqrt{36}$, $3 + \sqrt{2}$ ve 1,92713... sayılarında zorluk yaşadığı ifade edilmiştir. Bir öğretmen öğrencilerin sürekli sorması üzerine $22/7$ 'yi bölerek sonucun π 'ye eşit olmadığını fark ettiğini açıklamıştır. Ancak başka bir öğretmen adayı $22/7$ 'yi görüşme sırasında 7'ye bölmüş ilk 2 basamağın 14 olduğunu gördükten sonra sayıyı irrasyonel olarak kategorize etmiştir. Rasyonel sayı tanımında kullanılabilen a ve b aralarında asal ifadesi de bazı öğretmenlerde yanılgılara neden olmuştur. Bir öğretmen, pay ve paydanın aralarında asal olması gerektiğinden yola çıkarak $3/\pi$ sayısında pay ve paydanın aralarında asal olduğunu, sadeleşmediğini ve bu nedenle rasyonel olduğunu ifade

etmiştir. Benzer şekilde 1,192713... sayısının da paydasına 1 yazılabileceğini ve aralarında asal olacaklarını düşünerek sayıyı rasyonel olarak sınıflamıştır. Sadece kök dışına çıkmayan sayıların irrasyonel olduğunu belirtmiştir. Çalışmada ayrıca iki rasyonel ve irrasyonel sayı arasına her zaman başka bir rasyonel veya irrasyonel sayı yazılıp yazılamayacağı da sorulmuş ve öğretmenlerin sayıyı bulurken kullandıkları stratejiler incelenmiştir. Öğretmenlerin tamamı her zaman iki rasyonel veya iki irrasyonel sayı arasında rasyonel veya irrasyonel başka bir sayının bulunabileceğini belirttikleri görülmüştür. İrrasyonel sayıların toplama işlemine göre kapalılığı ile ilgili soruda sekiz öğretmen adayından beşi iki irrasyonel sayının toplamının her zaman irrasyonel sayı olacağını belirttikleri görülmüştür.

Gerçek sayılarla ilgili yapılmış geniş kapsamlı çalışmalardan biri sayılabilecek Güven, Çekmez ve Karataş (2011)'da 80 ilköğretim matematik öğretmen adayının (1. ve 4. sınıf) irrasyonel sayılar hakkındaki kavrayışlarını 10 sorudan oluşan açık uçlu bir test ile incelenmiştir. Matematik öğretmen adaylarının alan bilgileri; rasyonel ve irrasyonel sayıları tanımlama, rasyonel ve irrasyonel sayıları sayı doğrusuna yerleştirme ve rasyonel ve irrasyonel sayılarla işlemler bağlamında araştırılmıştır.

Tanımlarla ilgili bulgularda birinci sınıf öğrencilerinin %17'sinin ve dördüncü sınıf öğrencilerinin %44'ünün rasyonel ve irrasyonel sayılar için doğru tanımlar verdiği belirlenmiştir. π sayısını 1. sınıf öğretmen adaylarının sadece %37'si irrasyonel olarak sınıflarken %56'sı rasyonel,%73'ü gerçek sayı olarak sınıflamıştır. 4. sınıf öğretmen adaylarında ise irrasyonel sayı diyenlerin oranı %74'e gerçek sayı diyenlerin oranı %92'ye yükselmiştir. 0,1923712... şeklinde giden sayıyı 1. sınıf öğretmen adaylarının sadece %29'u, 4. sınıf öğretmen adaylarının %69'u irrasyonel sayı olarak sınıflayabilmiştir. 2,0777... devirli sayısında ise tam tersi bir durum söz konusu olmuştur. 1. sınıf öğretmen adaylarının %73'ü sayıyı rasyonel olarak nitelerken bu oran son sınıf öğretmen adaylarında %49'da kalmıştır. $2/\pi$ sayısı kesir biçiminde gösterilen bir irrasyonel sayı olmasına rağmen 1. sınıf öğretmen adaylarının %29'u, son sınıf öğretmen adaylarının %69'u doğru yanıtı verebilmiştir. 1.sınıf öğretmen adaylarında gerçek sayı sınıflandırmalarında da sorun yaşandığı çalışmada tespit edilmiştir.

Her iki rasyonel sayı veya irrasyonel sayının arasında rasyonel veya irrasyonel sayı bulunup bulunmayacağına yönelik 4 soruda öğretmen adayları en çok iki irrasyonel sayı arasında rasyonel sayı bulabilmeyle ilgili soruda yanılmışlardır. 1. sınıf öğretmen adaylarının yaklaşık yarısı, 4. sınıf öğretmen adaylarının %64'ü soruya “evet” yanıtını verebilmiştir. “İki irrasyonel sayının toplamı her zaman irrasyonel midir?” sorusuna her iki sınıf düzeyinde de öğretmenlerin yarıdan fazlası “evet” yanıtını vermiştir. 4. sınıf öğretmen adaylarında bu oran %77 ile en yüksek değerdedir. Rasyonel sayıların toplama ve çarpmaya

göre kapalılığı ile irrasyonel sayıların çarpmaya göre kapalılığı sorularında ise öğretmen adaylarının %70'den fazlası doğru yanıtlar verebilmiştir.

Özetle; bulgular, katılımcıların irrasyonel sayıların tanımları, rasyonel ve irrasyonel sayı kümeleri arasındaki işlemler ve sayı doğrusundaki ilişkileri hakkında yanlış anlamalara sahip olduklarını göstermiştir. Katılımcıların çoğunluğu tarafından kullanılan açıklamaların temsillere ve sezgilere dayandığı bulunmuştur.

Rasyonel sayı ve irrasyonel sayıların yoğunlukları çeşitli araştırmalarda ele alınmış ve bazı kavram yanılgılarına işaret ettikleri görülmüştür. Sirotic ve Zazkis (2007), matematik öğretmen adaylarının (son sınıf) rasyonel ve irrasyonel sayıları (Sayıların zenginliği ve yoğunluğu, rasyonel ve irrasyonel sayıların gerçek sayı doğrusuna yerleştirilmesi ve iki kümenin öğeleri arasındaki işlemler) anlayışlarını incelemişlerdir. Sonuç olarak, katılımcıların sezgileri ile formel ve algoritmik bilgileri arasında tutarsızlıklar olduğunu aktarmışlardır. Katılımcıların yaklaşık %70'i iki irrasyonel veya iki rasyonel sayı arasına her zaman bir irrasyonel sayı bulunabileceğini ifade ederken sadece %52'si iki irrasyonel sayı veya iki rasyonel sayı arasında her zaman rasyonel sayı bulunabileceğini belirtmiştir. Doğru verilen yanıtlar genelde yaklaşık değerleri bularak ortalamasını alma veya ondalık ifadelerden yararlanarak sayılar bulma şeklinde olmuştur. İki irrasyonel sayının arasında her zaman rasyonel sayı bulunamayacağını belirten yanıtlardan bazıları şunlardır:

“İrrasyonel sayılar o kadar yoğun ki, aralarında rasyonel olmayan iki tane bulabilirsiniz.”

“Çok fazla rasyonel yoktur, irrasyoneller rasyonellerin arasındaki boşlukları doldurur.”

Bazı öğretmen adayları ise “evet bulabiliriz” demesine rağmen yanlış açıklamalar yapmıştır. Bir öğretmen adayının, “Sayıların dönüşümlü olduğuna inanıyorum: rasyonel, irrasyonel, rasyonel, irrasyonel. . . Dolayısıyla, yalnızca irrasyonel bulunabilecek en yakın rasyonel sayılar olacaktır. Benzer şekilde, en yakın iki irrasyonel arasında irrasyonel değil rasyonel bulursunuz.” şeklindeki açıklaması buna örnek teşkil etmektedir.

Çalışmada yer alan, “iki pozitif irrasyonel sayının toplamı her zaman irrasyonel midir?” sorusuna öğretmen adaylarının yalnızca %41'i “Hayır” yanıtını vermiştir. “Evet” diyen adayların bir kısmı ondalık gösterimlerinden yola çıkarak devirsiz ondalık ifadeleri toptasak da yine de devirsiz ve karmaşık bir sayı çıkacağını belirtmiştir. Bir kısmı kareköklü ifadelerden örnekler vererek sonucun yine irrasyonel olacağını ifade etmiştir. Benzer sebeplerle “İki farklı irrasyonel sayının çarpımı her zaman irrasyonel midir?” sorusuna öğretmen adaylarının %35'i “hayır” doğru yanıtını verebilmiştir.

Belin ve Karagöz Akar (2017), öğretmen adaylarıyla gerçek sayıların ondalık gösterimleri ile ilgili nicel akıl yürütme içeren sınıf içi ders deneyimi gerçekleştirmişlerdir.

Bu ders içi deneyimde diyagramlarda gösterilen nicelikler üzerinde akıl yürüttüklerinde, öğretmen adayları kesirler, denk kesirler ve ondalık sayılar gibi rasyonel sayıların çoklu temsilleri ile eşit bölme, gruptama ve sayma eylemleriyle ilişkilendirdikten sonra, tüm bu temsillerin aynı sayıya karşılık geldiğini görmüşlerdir. Bu ilişkilendirmenin önemli olduğu söylenebilir çünkü Voskoglou ve Kosyvas (2012) gibi çeşitli araştırmalar öğrencilerin aynı sayıyı gösteren farklı temsiller konusunda zorluk yaşadığını göstermiştir. Belin ve Karagöz Akar (2017) sınıf içi deneyimlerin pozitif rasyonel sayılar arasında yeni bir rasyonel sayı oluşturulabileceği konusunda da olumlu olduğunu belirtmiştir. Ayrıca, araştırmacıların belirttiklerine göre öğretmen adayları bir irrasyonel sayının ondalık açılımından yararlanarak, aralıkları bölerek ve yeniden bölümlendirerek, irrasyonel sayıların da iki rasyonel sayı tarafından sıkıştırılabileceğini fark ettiler. Bu nedenle öğretmen adayları yalnızca rasyonel sayıların değil, irrasyonel sayıların da rasyonel sayıların sınırları olarak düşünülebilecekleri sonucuna varabildiler.

Sadece rasyonel sayılarla ilgili olan alan ve pedagojik alan bilgisi çalışmaları da mevcuttur. Alan bilgisi kapsamında rasyonel sayılara yönelik çalışmalar incelendiğinde rasyonel sayı kavramı ve rasyonel sayılardaki işlemlerin ön planda olduğu söylenebilir. Ercan ve Aktaş (2021), öğrenci ve öğretmenlerin kesir ve rasyonel sayı ile ilgili kavram tanımlarını inceledikleri çalışmada 24 öğretmenin %50'sinin rasyonel sayıları tanımlarken aralarında asallığa vurgu yaptıkları %33'ünün ise aralarında asallığı belirtmeyerek kitaplarda yer alan " a/b biçiminde yazılabilen sayılar" tanımını yaptıkları ifade edilmiştir. Ayrıca öğretmenlerin %79'u öğrencilerinde kesir ve rasyonel sayının aynı şey olduğu yanlışlığının varlığını deneyimlediklerini belirtmiştir. Benzer bir çalışmada Macit ve Nacar (2019), ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kesir ve rasyonel sayı kavram imajlarını incelemiş ve a/b kesir gösteriminin öğrencilerde rasyonel sayı belirteci olarak görüldüğünü aktarmıştır. Bu biçimde yazılan köklü veya π kullanılan irrasyonel sayıları rasyonel olarak sınıflayabildikleri ifade edilmiştir.

Depaepe ve arkadaşları (2015), sınıf öğretmenliği ve ortaokul matematik öğretmenliğinde öğrenim gören öğrencilerin alan bilgisini ve pedagojik alan bilgisini (PAB) incelemişlerdir. Sonuçlar, öğretmen adaylarının alan bilgisi ile PAB arasında pozitif bir korelasyon olduğunu ve sınıf öğretmenlerine kıyasla ortaokul öğretmenlerinin alan bilgisinin daha iyi olduğunu ancak pedagojik alan bilgileri arasında anlamlı bir fark olmadığını göstermiştir.

Öğretmen adaylarının verilen iki rasyonel sayı arasında sonlu sayıda rasyonel sayı olduğunu belirttikleri ve yaklaşık üçte ikisinin belirli bir sözel problem için uygun bir matematiksel model belirlemede zorluklar yaşadıkları tespit edildi. PAB'nin alt bileşenlerinden olan öğrenci bilgisi ile öğretim stratejileri ve temsilleri hakkında sınırlı bilgiye sahip oldukları, bu bileşenlere ait maddelerde düşük performans gösterdikleri bulunmuştur. Ayrıca, öğretmenlerin öğrencilerin kavram yanlışları ve öğrenme güçlükleri

hakkındaki bilgileriyle ilgili maddeler, öğretmenlerin öğretim stratejileri ve temsilleri hakkındaki bilgileriyle ilgili maddelere göre daha doğru çözülmüştür.

Çalışmaya göre, aday öğretmenler ondalık sayıları öğretmeye kıyasla kesirleri öğretme ile ilgili maddeleri çözmede daha fazla zorluk yaşamışlardır. Bu fark istatistiksel olarak anlamlı bulunmuştur. Ayrıca öğretmen adayları, kesir veya ondalık sayı kavramına ilişkin maddelerde rasyonel sayılarla işlemlerle ilgili maddelere göre anlamlı düzeyde daha iyi performans göstermiştir.

Rasyonel sayılara ilişkin bir başka pedagojik alan bilgisi çalışması Avcu (2014) tarafından ortaokul matematik öğretmenleriyle gerçekleştirilmiştir. Çalışmada öğretmenlerin rasyonel sayılar konusunda kullandıkları örnekler ele alınmıştır. Öğretmenlerin yanlış örnek seçimlerine dikkat çekilmiştir. Ders sırasında öğretmenler tarafından örneklerin birçoğunun anlık olarak belirlendiği ve kullanıldığı tespit edilmiş hatta rasyonel sayılara örnek olmayan sayıların da kullanılabildiği belirtilmiştir. Bazı öğretmenlerin örnekleri kullanırken öğrenci güçlüklerini ve kavram yanılgılarını dikkate aldıkları ve örneklerin kritik özelliklerine dikkat çektikleri ifade edilmiştir. Öğretmenlerin vermiş oldukları örneklerin içerisinde matematiksel olarak, dil ve terminoloji olarak ve pedagojik olarak hatalı örneklerin yer aldığı belirtilmiştir.

Öğretim stratejileri bilgisi kapsamında değerlendirilebilecek Pala (2016), ortaokul matematik öğretmenlerinin rasyonel sayılar ve rasyonel sayılarla yapılan dört işlemin öğretiminde en çok kullandıkları kuralları belirlemeyi amaçlamıştır. Devirli bir sayının rasyonel hale getirilmesinde öğretmenlerin %86'sı formülle, %8'i denklemle çözüm yapmayı tercih etmiştir. Pozitif rasyonel sayılardan paydaları veya payları aynı olan kesirlerin sıralanmasında öğretmenlerin yaklaşık %67'sinin kuralla öğretim yaptığı, yaklaşık %29'unun parça bütün ilişkisi kurduğu, çok az bir kısmının da sayı doğrusu ile sıralama yaptığı belirtilmiştir. Negatif rasyonel sayıların sıralanmasında da öğretmenlerin %80'i "pozitif gibi sırala sonra yönü tersine çevir" şeklinde kuralla öğretim stratejisini kullanmışlardır. Bir neden açıklamaksızın kuralla öğretimin yapıldığı bir başka konu da rasyonel sayılarda bölme işlemi olmuştur. Öğretmenlerin %90'ı "İkinci kesri ters çevir, carp" şeklinde kuralla öğretim yapmıştır.

Altı matematik öğretmenin rasyonel sayılar konusundaki yaygın öğrenci yanılgıları ile ilgili çözüm önerilerini inceleyen Doruk (2020)'de alanyazında yer alan bazı kavram yanılgıları örneklendirilmiş ve öğretmenlere öğretim sürecinde öyle bir durumla karşılaştığında ne gibi bir yol izleyeceği ve nasıl bir çözüm önerisi getirdikleri sorulmuştur. Bu bakımdan öğretim strateji bilgilerini yoklayan çalışmada öğretmen adaylarının konuyu tekrar anlatma, kuralı yeniden hatırlatma gibi yapılandırmacı olmayan yöntemler önerdikleri ortaya çıkarılmıştır.

Öğretmen bilgisi ile ilgili yapılmış tüm çalışmalar göz önüne alındığında bu öğrenme alanına genel bakış sağlayacak kapsamlı bir çalışmaya da ihtiyaç duyulduğu söylenebilir. Bu bağlamda bu çalışmada tüm öğrenme alanına ilişkin öğretmen adaylarının alan ve pedagojik bilgileri incelenmiştir.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde araştırma modeli, katılımcılar, araştırmada kullanılan tüm veri toplama araçları ve elde edilen verilerin analizine ilişkin bilgiler yer almaktadır. Ayrıca veri toplama araçlarını oluşturmak için yapılan pilot çalışmalar ile araştırmanın geçerlik ve güvenilirliğine ilişkin bilgiler açıklanmıştır.

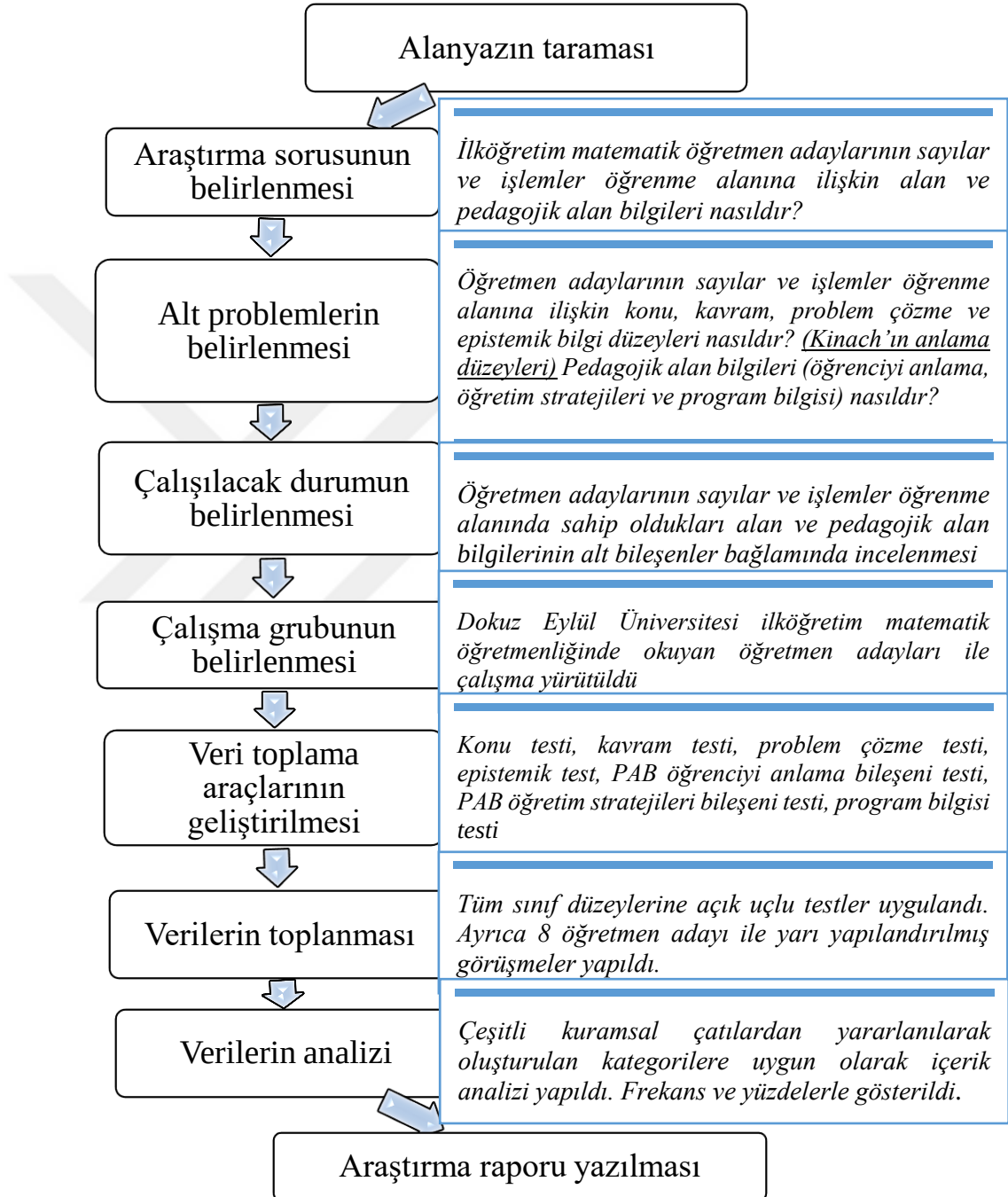
3.1. Araştırmanın Deseni

Araştırma deseni, araştırmacıyı araştırma sürecinin en başından son aşamasına kadar götüren bir eylem planı olarak tanımlanabilir. Amaca uygun verilerin toplanması ile bu verilerin analiz edilmesi gibi bir süreci içerir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu tez çalışması sonuçtan çok sürece odaklanmakta; algı ve olayların doğal ortamında gerçekçi, derinlemesine ve bütüncül bir şekilde ortaya konulabilmesini amaçlamaktadır. Bu nedenle nitel türde bir araştırma olarak sınıflandırılabilir (Patton, 2002). Nitel araştırmalarda yazılı ölçekler, gözlem, görüşme ve doküman incelemesi gibi veri toplama yöntemleri kullanılmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu çalışmada da açık uçlu sorulardan oluşan testler ve yarı yapılandırılmış görüşme ile veri toplama gerçekleştirilmiştir.

Var olan durumları, var olduğu şekliyle tespit edip ortaya koymaya yönelik olan bu çalışma nitel türde betimsel bir araştırmadır. Durumu olduğu gibi betimleyebilmek adına araştırmada tarama modeli kullanılmıştır. Betimsel tarama çalışmalarında, herhangi bir etkilme çabası güdülmez. Bireyler kendi koşulları içinde ve olduğu gibi tanımlanmaya çalışılır (Karasar, 2008). Tarama modeli, genel tarama modeli ve durum çalışması (örnek olay) olmak üzere iki alt başlığa ayrılmaktadır. (Karasar, 2008) Çok sayıda kişinin yer aldığı ve evren hakkında genel bir yargıya varmak amacıyla yapılan tarama modeline genel tarama modeli denilmektedir. Durum çalışması ise bir olayı veya durumu az sayıda örneklem ile derinlemesine incelemeye olanak tanıyan yaklaşımdır (Denscombe, 2010). Bu derinlemesine inceleme gözlem, görüşme ve dokümanlar gibi veri toplama yöntemleri ile gerçekleştirilir. Karasar (2008), durum çalışması ile yapılan araştırmaların, genel tarama modelleri ile yapılanlara oranla daha ayrıntılı ve gerçeğe yakın bilgiler verdiğini belirtmiştir.

Bu araştırmada alan bilgisi incelemesi için Kinach'ın (2002a) matematik disiplinini anlama düzeyleri, pedagojik alan bilgisi incelemesi için de Shulman'dan (1987) itibaren birçok araştırmada da yer alan PAB bileşenleri (öğrenci bilgisi, öğretim stratejileri bilgisi, program bilgisi) kullanılmıştır. Problem cümlesinden anlaşıldığı üzere sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin öğretmen adaylarının alan ve pedagojik alan bilgileri olduğu gibi

tespit edilmeye çalışılmıştır. Bu nedenle durum çalışması modeli esas alınarak araştırma yürütülmüştür. Çalışmada genelleme amacı güdülmemiş bulgular kendi bağlamında değerlendirilmiştir. Yıldırım ve Şimşek (2013) tarafından belirtilen ve durum çalışmalarında takip edilen süreçte göre araştırma gerçekleştirilmiştir. Bu süreç Şekil 5'te sunulmuştur.



Şekil 5. Durum çalışmasına göre şekillendirilen araştırmanın aşamaları

3.2. Çalışma Grubu

Çalışma grubu Dokuz Eylül Üniversitesindeki 1. 2. 3. ve 4.sınıf ilköğretim matematik öğretmen adaylarından oluşmaktadır. Nicel araştırmalardaki çok sayıda bireyden oluşan evreni temsil etmek üzere çeşitli örnekleme yöntemleriyle seçilen kişilerin aksine nitel çalışmalarda araştırılan konu ile ilgili daha derinlemesine bilgi edinebilmeye olanak sağlayacak az sayıda bireyle çalışılır (Baltacı, 2018). Çalışmada ilköğretim matematik öğretmenlerinin alan ve pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Öğretmen adaylarına bir sonraki bölümde daha detaylı açıklanan ve açık uçlu sorulardan oluşan yedi adet test uygulanmıştır. Yedi ölçeğin uygulanma sürecinin uzunluğu ve sonrasında yapılacak görüşmeler göz önüne alınarak araştırmanın araştırmacının doktora öğrenimi gördüğü üniversitede yapılması kararlaştırılmıştır. Yani çalışma grubu amaçlı örnekleme yöntemlerinden kolay ulaşılabilir örnekleme yöntemiyle seçilmiştir. Araştırmanın ilk aşamasında 2017/2018 eğitim öğretim yılında ilköğretim matematik öğretmenliği 1. 2. 3. ve 4.sınıf öğretmen adaylarından 20'şer kişiye hazırlanan testler uygulanmış ve iki aşamalı pilot çalışma yapılmıştır. Bu çalışma sonrası uzman görüşleri de alınarak testler son halini almıştır. Geliştirilen testler 2018/2019 eğitim öğretim yılında tüm sınıf düzeylerinde öğrenim gören 300 öğretmen adayına (1. sınıf 90 kişi, 2. 3. ve 4.sınıflarda geçerlik güvenirlik çalışmasında yer almayan 70'er kişi) uygulanmıştır. 7 test 7 ayrı oturumda yapılmış ve bu nedenle de her bir teste tüm öğretmen adaylarının katılımı mümkün olmamıştır. Gönüllü olmayan veya testlerin bazılarını yeterince açıklama yapmadan hızlı bir şekilde dolduran bazı öğretmen adayları da çalışmadan çıkarılmıştır. Uygulama yapılacak adayların her birine EK-10'da yer alan bilgilendirilmiş onam formu doldurtulmuştur. Son durumda her sınıf düzeyinden eşit sayıda kişi olması amacıyla rastgele seçilen 40'ar öğretmen adayının verileri çalışmada değerlendirilmiştir.

Testlerin uygulanmasının ardından yarı yapılandırılmış görüşme yapılacak 8 öğretmen adayı amaçlı örnekleme çeşitlerinden ölçüt örnekleme yöntemiyle seçilmiştir. Ancak her bir sınıf düzeyinden ikişer öğretmen adayının seçilmesine karar verilmiştir. Ölçüt örnekleme yönteminde araştırmacının önceden belirlediği bir ölçüt listesinden yararlanılır ve bu ölçütleri sağlayan adaylar arasından seçim yapılır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu araştırmada görüşme yapılacak öğretmen adaylarını belirlemek için dikkate alınan ölçütler şunlardır:

- 1.Ölçüt: Testlerde yer alan açık uçlu sorulara içtenlikle, doğru ya da yanlış, detaylı açıklamalarda bulunma
- 2.Ölçüt: Testlerde yer alan sorulara vermiş oldukları yanlış yanıtların altında yatan nedeni anlayabilmek için ek sorularla detaylı açıklamalara ihtiyaç duyulma
- 3.Ölçüt : Görüşmelere katılmaya istekli olma

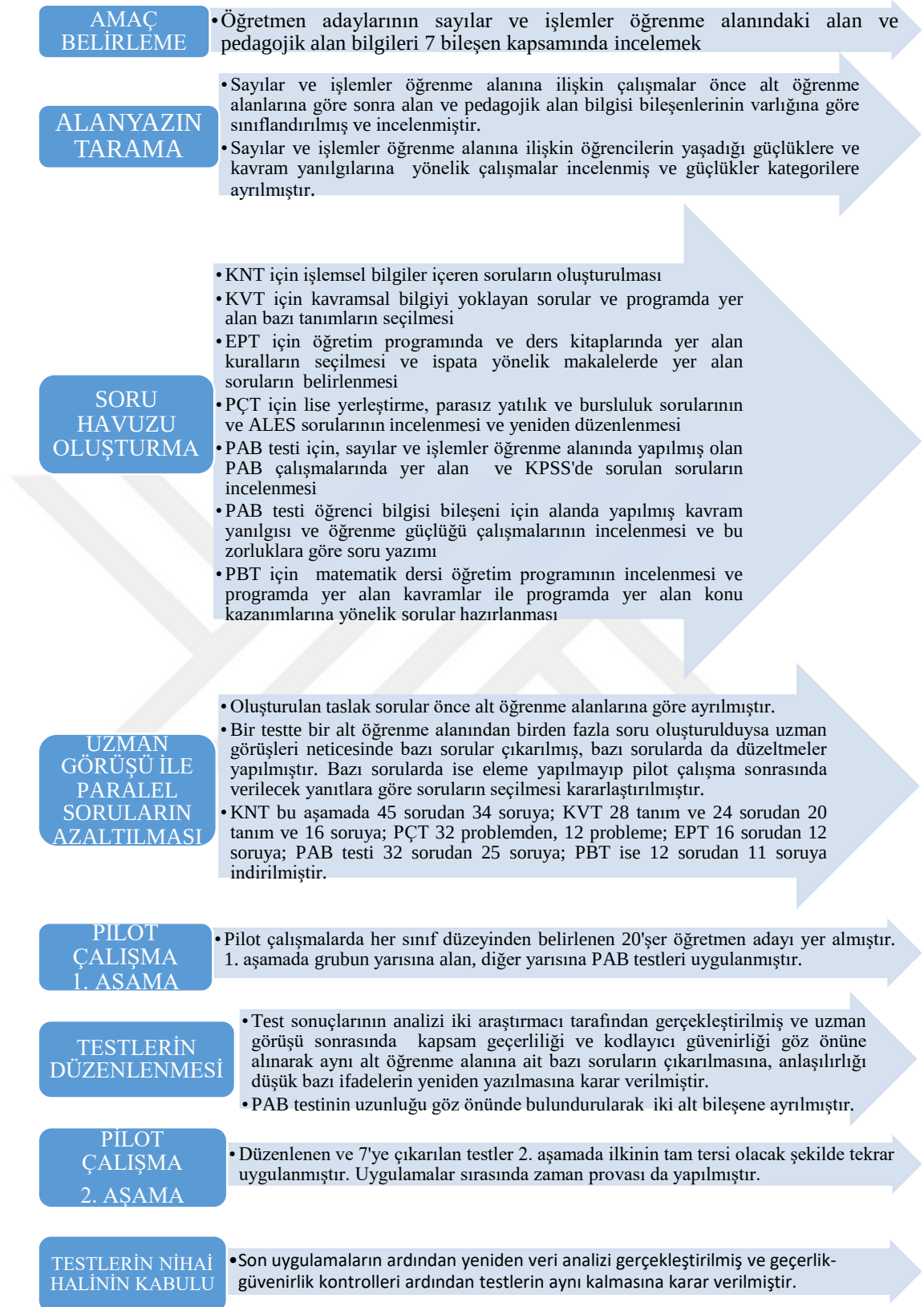
2018/2019 eğitim öğretim yılı bahar döneminde toplanan yazılı veriler yukarıda yazılı 1. ölçüte göre elemenden geçirilmiştir. Tüm testlerin analizinin uzun zaman alacağı ve öğretmen adaylarının bir üst sınıfta öğrenim göreceği düşüncesiyle her bir testten rastgele seçilen birer soru analiz edilmiş ve bu analizler sonrası her bir testle ilgili ilk iki ölçütü sağlayan adaylar listelenmiştir. İlk iki ölçütü her bir test için sağlayan 25 öğretmen adayı belirlenmiştir. Belirlenen bu adaylarla ilgili derslerine giren bir öğretim üyesinden görüşler alınmış ve sayı 15'e düşürülmüştür. 15 öğretmen adayının tüm testlerdeki sorulara vermiş oldukları yanıtlar incelenmiştir. Bu yanıtlara göre ilk iki ölçüt yeniden değerlendirilmiş ve her bir sınıf düzeyinden ikişer toplamda sekiz öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış görüşmelerin yapılması kararlaştırılmıştır. 3. ölçüt de değerlendirilerek seçilen öğretmen adaylarının gönüllü olduğu da teyit edilmiştir. Görüşmeler 2018/2019 eğitim öğretim yılı sonunda gerçekleşmiş olup öğretmen adaylarının yeni geçecekleri bir üst sınıfta alacakları derslerin görüşlerini etkilemesinin önüne geçilmesi amaçlanmıştır. Görüşmelerin yürütüldüğü öğretmen adaylarının çalışmada gerçek isimleri kullanılmamıştır. Sınıf düzeylerine göre öğretmen adaylarının çalışmada kullanılan isimleri şu şekildedir:

1.Sınıf	2. Sınıf	3. Sınıf	4. Sınıf
Tuğçe ve Burçe	Halit ve Çise	Simre ve Orhan	Maksude ve Şeyma

Çalışmanın bulgular bölümünde yer alan görüşme diyaloglarında araştırmacı “A” harfi ile öğretmen adayları ise isimlerinin baş harfleri ile gösterilmiştir.

3.3. Veri Toplama Süreci ve Araçları

Araştırma kapsamında öğretmen adaylarının alan bilgilerini belirlemek amacıyla Konu Düzeyi Testi (KNT) (EK 3. Konu düzeyi testi (KNT), Kavram Düzeyi Testi (KVT) (EK4), Problem Çözme Testi (PÇT) (EK5) ve Epistemik Test (EPT) (EK6) uygulanması, öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerini belirlemek amacıyla da öğrenci bilgisi ve öğretim stratejileri bilgisi bileşenlerini içeren “Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı Pedagojik Alan Bilgisi Testi” ile program bilgisi bileşenini içeren “Program Bilgisi Testi (PBT) (EK9)” geliştirilip uygulanması amaçlanmıştır. Bu amaçla önce etik kurul izni alınarak testlerin geliştirme çalışmaları yapılmıştır. Pilot çalışmalar sonrasında uzman görüşüyle PAB testi iki alt bileşene ayrılmış ve iki ayrı test olarak [PAB Öğrenci Bilgisi Bileşeni Testi (ÖBT) ve PAB Öğretim Stratejileri Bileşeni Testi (ÖST) (EK 7 ve EK 8)] uygulanmasına karar verilmiştir. Veri analizi sonrasında testlere vermiş oldukları yanıtları daha da derinleştirebilmek amacıyla sekiz öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde öğretmen adaylarının kendi yazılı verileri ele alınmış; görüşme soruları da kişiye özgü olmak üzere testteki sorulardan oluşturulmuştur. Uygulanan 7 testin geliştirme aşamaları özet halinde Şekil 6’da sunulmuştur. Testlerin nihai hallerinin kapsamı ile ilgili bilgiler de her bir test ayrı ayrı ele alınarak açıklanmıştır:



Şekil 6. Alan ve pedagojik alan bilgisi testlerinin geliştirme aşamaları

3.3.1. Pilot çalışma öncesi

Konu testi (KNT), öğretmen adaylarının alan bilgilerinin işlemsel bilgi boyutunu incelemek için hazırlanmıştır. Bu testte öğretmen adaylarının ortaokul kademesinde öğretimlerini yapacakları konulara yönelik işlemsel bilgi içeren açık uçlu sorular sorulmuştur. Alt öğrenme alanları ve alanyazında en çok hata yapılan konular göz önünde bulundurularak 45 soruluk bir havuz oluşturulmuştur. Oluşturulan sorular MEB’de görev yapan ve matematik eğitiminde lisansüstü eğitimini tamamlamış iki uzman ve üniversitede görev yapan bir öğretim üyesi tarafından incelenmiş ve aynı alt öğrenme alanlarına denk gelen bazı soruların çıkarılmasına karar verilmiştir. Böylece test 34 soru ile taslak halini almıştır.

Kavram bilgi düzeyi öğretmen adaylarının alan bilgilerinin kavramsal (ilişkisel) anlama boyutunda yer almaktadır. Kavram bilgi düzeyi tanımların ve kavramlar arasındaki ilişkilerin bilgisi olarak tanımlanabilir. Bu bilgi düzeyini inceleyebilmek adına iki aşamalı bir test hazırlanmasına karar verilmiştir. İlk aşamada matematik öğretim programında yer alan bazı kavramların tanımları, ikinci aşamada alanyazın göz önünde bulundurularak en çok yanlışla sahip olunabilecek kavramların birbirleriyle ilişkisine yönelik açık uçlu sorular hazırlanmıştır. Tanımları sorulmak üzere sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait 28 kavram belirlenmiş ve uzman görüşü ile bu kavramlar 20’ye düşürülerek kavram testine (KVT) konulmuştur. Bu kavramların birbirleriyle ilişkisine yönelik ise hazırlanan 24 soru arasından KVT’ye konmak üzere 16 tanesi uzman görüşü ile seçilmiştir. Böylece KVT pilot çalışmaya uygun hale gelmiştir.

Alan bilgisinin problem çözme boyutunda öğretmen adaylarının rutin olmayan soruları çözebilme becerileri incelenmek istenmiştir. Sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait birçok soru sorulabileceği için önce TEOG ve bursluluk sınavlarında çıkan problemler incelenmiş ve sorular biraz daha zorlaştırılarak yeni sorular yazılmıştır. Ayrıca ALES’de çıkmış sayılar ve işlemler öğrenme alanı kapsamında yer alan sorular da incelenmiştir. Aynı doğrultuda sorular yazılmıştır. Yazılan 32 problem 2 uzman tarafından incelenmiş ve öğretmen adaylarından detaylı çözümlerin de isteneceği bu nedenle de zaman sıkıntısı yaşanabileceği görüşüyle içlerinden seçilen 12 problemin problem çözme testine (PÇT) konulmasına karar verilmiştir.

Alan bilgisinin gerekçelendirme ve ispat etme boyutunu belirlemeye yönelik olan epistemik test (EPT) için öncelikle ortaokulda yer alan ve öğrenciye doğrudan verilen sayılar ve işlemler öğrenme alanı ile ilgili kurallar listelenmiştir. Ayrıca ispat ile ilgili alanyazında yer alan öğretmen adaylarına yönelik çalışmalar incelenmiş ve öncelikle belirlenen 16 kural ve soru içerisinden uzman görüşü ile 12 tanesi seçilmiş ve pilot çalışmada uygulanmak üzere taslak EPT hazırlanmıştır.

Pedagojik alan bilgisinin öğrenciyi anlama bilgisi ve öğretim stratejileri bileşenlerine yönelik soruları belirlemek üzere literatürde bulunan sayılar ve işlemler öğrenme alanı ile ilgili pedagojik alan bilgisi çalışmaları ve KPSS soruları incelenmiştir. Ayrıca öğrenci bilgisi bileşeni öğrenci öğrenmelerinin, öğrenme güçlüklerinin ve kavram yanılgılarının bilgisini içerdiği için öğretmen adaylarına yönelik olan çalışmalar dışında öğrencilere yönelik çalışmalar da incelenmiş ve sorular oluşturulmuştur. Öğretim stratejileri bileşeni, öğrencilere verilecek dönütleri ve öğretim için gerekli olan materyallerin kullanım bilgisini içerdiği için ortaokul matematik kitaplarında yer alan materyallerin kullanımına yönelik de sorular hazırlanmıştır. 32 soru uzman görüşü ile 25'e düşürülmüş ve pilot çalışmaya uygun hale getirilmiştir.

Pedagojik alan bilgisinin son bileşeni olan program bilgisi testinde (PBT) 2018 yılında yayımlanmış olan öğretim programı baz alınmıştır. Programın giriş kısmında yer alan bazı kavramların anlamları, programın sayılar ve işlemler öğrenme alanını ilgilendiren alt öğrenme alanları ve hangi sınıf düzeyinde nelerin görüldüğüne dair boşluk doldurmalı, yapılandırılmış grid tarzında, çoktan seçmeli veya açık uçlu soru gibi farklı tipte sorular hazırlanmıştır. Testte yer alan 12 soru uzman görüşü ile 11'e düşürülmüş ve pilot çalışmaya uygun hale getirilmiştir.

3.3.2. Pilot uygulama ve testlerin geçerlik güvenirliği

Taslak haline getirilen 6 testi uygulamak üzere Dokuz Eylül Üniversitesi ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan öğretmen adayları arasından her sınıf düzeyinde 20'şer kişi rastgele seçilmiştir. Tüm katılımcılara her testin uygulanması çok zaman alacağından 80 kişinin 8 gruba ayrılmasına ve her bir gruba bazı testlerin uygulanmasına karar verilmiştir. Bir sınıf düzeyinde yer alan 20 kişi 10'ar kişilik iki gruba (A ve B) bölünmüş ve böylece toplamda 8 grup oluşturulmuştur. İlk aşamada bu 8 gruptan 4'üne alan bilgisi testleri, diğer 4'üne ise PAB testleri uygulanmıştır. Tüm testlere 45'er dakika süre verilmiştir. Araştırmacı ayrı oturumlar halinde her bir gruba testleri uygulamıştır. Her bir testin uygulandığı gruplar Tablo 16'da sunulmuştur.

Tablo 16

Testlerin pilot çalışmada uygulandığı gruplar

	1. Aşama				2. Aşama		
	ALAN BİLGİSİ (AB)				PEDAGOJİK ALAN BİLGİSİ (PAB)		AB
	KNT	KVT	PÇT	EPT	PAB	PBT	Son Hali (4 test)
1/A	+	+	+	+			+
1/B					+	+	+
2/A	+	+	+	+			+
2/B					+	+	+
3/A	+	+	+	+			+
3/B					+	+	+
4/A	+	+	+	+			+
4/B					+	+	+

Görüldüğü gibi 1. aşamada 40 öğrenciye 4 adet AB testleri, 40 öğrenciye ise 2 adet olan PAB testleri uygulanmıştır. Uygulama sonrası soruların anlaşılabilirliği ve süre ile ilgili katılımcılardan dönütler alınmıştır. Her bir bileşenle ilgili 40 öğretmen adayından toplanan veriler iki uzman tarafından analiz edilmiştir. Bunlardan biri tezin yazarı iken diğeri matematik eğitiminde doktora öğrenimini sürdüren ve MEB’de öğretmen olarak görev yapan bir uzmandır. Analiz öncesi araştırmacılar her bir testin analizinde hangi teorik çatının kullanılacağı, hangi sorularda hazır kodların kullanılacağı ve hangi sorularda içerik analizi yapılacağını kararlaştırmıştır. Veri analizi, sonraki bölümlerde detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Gerek uygulama sonrası öğrencilerden alınan dönütler gerekse veri analizleri sonrası yapılan karşılaştırmalar sonrasında her bir testle ilgili verilen kararlar aşağıda sırayla sunulmuştur.

1.Aşama

Konu Testi (KNT): Uygulama ve analizler sonrası iki sorun görülmüştür. Bunlardan ilki öğrencilerin çok işlemden dolayı zaman sıkıntısı yaşadığı ve soruları çözerken sıkıldıkları görülmüştür. İkinci sorun ise veri analizi sırasında alt soruların ayrı ayrı değerlendirilip ortalamasının alınması değerlendirmenin çok zaman almasına neden olmuştur. Ayrıca alt soruların ayrı sorularda değerlendirilmesinin testin amacına daha iyi hizmet edeceği uzman görüşlerince ifade edilmiştir. Bu sorunlar nedeniyle ondalık ifade, kesirler, yüzdeler, tam sayılar gibi işlem içeren sorularda amacın dışına çıkmayacak şekilde sayılar değiştirilerek basitleştirme yapılmıştır. Alt sorulardan oluşan bazı soruların ayrı ayrı sorulmasına karar verilmiştir. Bazı sorular ise birleştirilmiştir. Kapsam geçerliliğini bozmayacak şekilde ortalamaları 2 üzerinden 1,95’i geçen bazı soruların testten çıkarılmasına karar verilmiş böylece uygulama süresinin uzamasının ve öğrencilerin sıkılmasının önüne geçilmesi amaçlanmıştır. Son durumda test 34 sorudan 25 soruya

indirilmiştir. Bu düzenlemeler sonrası kapsam geçerliğinin korunmasına dikkat edilmiştir. Testin daha kolay uygulanmasının ve değerlendirilmesinin de önü açılmıştır.

Kavram Testi (KVT): 20 tanım ve 16 kavramlar arası ilişkiye yönelik sorunun olduğu kavram testinin uygulanması sonrası öğretmen adaylarından 45 dakikanın yetersiz olduğu, tanımları ve açık uçlu soruları yeterince düşünmeden yazmak zorunda kaldıkları dönütü alınmıştır. Yapılan analizler sonrası tanımların birçoğunun gerek ve yeter şartlardan (Zazkis ve Leikin, 2010) yoksun olduğu görülmüştür. 3. bir uzman olarak tez danışmanının da görüşü alınarak tanımların sayısı 14'e düşürülmüştür. Ayrıca kavram testinde yer alan kavramlar arası ilişkilere yönelik 16 soru arasından uyum yüzdesi (Miles ve Huberman, 1994) %70'in altında çıkan "Üslü sayı mı üslü ifade mi daha doğru bir ifadedir? Üslü sayılar bir sayı kümesi midir?" gibi sorular (5 soru) testten çıkarılmıştır. Son halinde test 14'ü tanım ve 11'i kavramlar arası ilişkilere yönelik açık uçlu sorular olmak üzere 25 soruya düşürülmüş ve sürenin uzatılmasına karar verilmiştir. Böylece öğretmen adaylarının her bir soruyu daha çok düşünebilmesine ve daha detaylı açıklayabilmesine olanak sağlanmak istenmiştir.

Problem Çözme Testi (PÇT): 12 problemden oluşan problem çözme testinin uygulama sonrasında öğretmen adaylarından ve testin süresi ile ilgili alınan dönütlerde zamanın yeterli olduğu belirtilmiştir. Ancak bazı problemlerle ilgili uygulama sırasında ve sonrasında öğretmen adaylarının anlamadıkları yerleri sordukları görülmüş ve bu kısımların soruda daha detaylı açıklanmasına karar verilmiştir. Sorular iki araştırmacı tarafından MEB'de (2009) bulunan "problem çözme için bütüncül dereceli puanlama anahtarı" ile değerlendirilmiş ve kodlayıcı güvenilirliğini arttırmak amacıyla uyum yüzdesi %70'in altında olan bir soru testten çıkarılmıştır. Birbirleriyle bağlantılı olan iki soru ise birleştirilerek testin nihai hali 10 soruya düşürülmüştür.

Epistemik Test (EPT): 16 sorudan oluşan ve öğretmen adaylarının gerekçelendirme ve ispatlama ile ilgili epistemik bilgi düzeylerini ortaya koymaya çalışan testin uygulama sonrasında öğretmen adayları sürenin biraz daha uzun olması gerektiği dönütünü vermiştir. Her bir soru önceden belirlenen ve veri analizi kısmında açıklanan kategorilere göre iki uzman tarafından analiz edilmiş ve testin kodlayıcı güvenilirliğinin %70'in üzerinde olduğu anlaşılmıştır. Test süresini uzatmak yerine aynı alt öğrenme alanına ait puan ortalamaları da birbirine yakın olan bazı paralel soruların testten çıkarılmasına karar verilmiştir. Üslü ifadelerle ilgili kuralları içeren dört ispat sorusunun ikiye, bölünebilme kurallarının ispatını da ayrı ayrı isteyen üç sorunun da teke düşürülmesine karar verilmiştir. Son değişikliklerle soru sayısı 12'ye düşürülmüştür. Uzman görüşü ile kapsam geçerliliğinin korunduğu teyit edilmiştir.

Pedagojik Alan Bilgisi Testi: Öğrenci bilgisi ve öğretim stratejileri bilgisini içeren 25 sorudan ve bu soruların alt sorularından oluşan testin uygulanmasında öğretmen adaylarına 45 dakika yetersiz gelmiş, birçok soruyu kısa açıklamalarla geçiştirmişlerdir. Uygulama sonrası alınan dönütler daha çok zamanın kısıllığı üzerine olmuştur. Toplanan veriler iki uzman tarafından kodlanmış ve öğretmen adaylarının sorulara yaptıkları açıklamaların yetersiz olması nedeniyle birçok soruda ortalama 4 üzerinden 2'nin altında kalmıştır. Ayrıca 5 soruda kodlayıcıların uyumu %70'in altında kalmıştır. Bunun üzerine uzman görüşü alınarak testin iki alt bileşene (öğrenci bilgisi (ÖBT) ve öğretim stratejileri bilgisi (ÖST)) göre 10'ar sorudan oluşacak şekilde ikiye ayrılmasına karar verilmiştir. Böylece hem süre yetersizliğinin önüne geçilmesi hem de veri analizi sırasında iki bileşene ait soruların karışık sırada olmasının yarattığı zorluğun ortadan kaldırılması sağlanmıştır.

Program Bilgisi Testi (PBT): 2018 yılında yayınlanan matematik öğretim programı doğrultusunda hazırlanan program bilgisi testinin uygulanması sırasında zaman veya anlaşılabilirlik üzerine öğretmen adaylarından herhangi bir olumsuz dönüt alınmamıştır. Testte açık uçlu soruların yanı sıra yapılandırılmış grid ve çoktan seçmeli gibi farklı soru tiplerinin bir arada olması nedeniyle veri analizine başlamadan önce yapılacak kodlamalar detaylı bir şekilde iki uzman tarafından belirlenmiştir. Analizler neticesinde kodlama güvenilirliği %95 olarak hesaplanmıştır. Bu nedenle testte değişiklik yapılmamıştır.

2. Aşama

Testlerde yapılan düzenlemeler sonrası iki öğretim üyesinden testlerin nihai halleri ile ilgili dönüt alınmış, uygunluk geçerliği ve kapsam geçerliliğinin sağlandığı anlaşılmıştır. Daha önce testin uygulanmadığı gruplara alan bilgisi testleri ve pedagojik alan bilgisi testleri uygulanmıştır. Kavram testine 60, diğer testlere 45'er dakika süre verilmiştir. Yapılan uygulamalar sonrasında öğretmen adaylarından soruların anlaşılabilirliği ve test süresi ile ilgili dönüt alınmıştır. Hiçbir öğretmen adayı süre ile ilgili sıkıntı yaşadığını belirtmemiş, sürenin yeterli olduğunu ifade etmiştir. İki uzman matematik eğitimcisi tarafından yeni veriler ayrı ayrı kodlanmış ve her bir test için kodlama güvenilirliğinin en az %75 olduğu tüm testlerdeki kodlama güvenilirliği ortalamasının %88 olduğu görülmüştür. Birden fazla araştırmacının birlikte çalıştığı durumlarda, aynı veri seti kodlanır ve ortaya çıkan kodların benzerlikleri ve farklılıkları sayısal olarak karşılaştırılarak en az %70 düzeyinde bir güvenilirlik yüzdesine ulaşmak gerekmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2013, s. 233) Bu sonuçlar neticesinde testlerin son hali ile (EK3, EK4, EK5, EK6, EK7, EK8, EK9) uygulanmasına karar verilmiştir.

3.3.3. Asıl uygulamanın yapılış süreci

Pilot çalışmalar sonrasında son halini alan dördü alan bilgisi, üçü pedagojik alan bilgisi testleri 2018/2019 eğitim öğretim yılının bahar döneminde uygulanmıştır. Dokuz Eylül Üniversitesi ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan 360 öğretmen adayından 2017/2018 eğitim öğretim yılında pilot çalışmaya katılan 60 öğretmen adayını (2. 3. ve 4. sınıf) haricindeki 300 öğretmen adayına uygulanmıştır. 7 test 7 ayrı oturumda uygulanmış ve kavram testine 60, diğer testlere 45'er dakika süre verilmiştir. Ancak isteyen öğretmen adaylarına ek süre verilmiştir. Öğretmen adaylarına çalışmanın amacı önceden belirtilmiş, gönüllülükleri esas alınmıştır. Ancak uygulamaların yapıldığı saatlerde çalışmaya katılamayan öğretmen adayları da olduğu için her bir öğretmen adayının 7 testi tamamlanamamıştır. Bu nedenle eksik testleri olan adaylar örneklemden çıkarılmıştır. Ayrıca tüm testler incelendikten sonra isteksiz ve kısa yanıtlarla soruları geçiştiren adaylar da tespit edilmiş olup bu adayların uzman onayı ile örneklemden çıkarılmasına karar verilmiştir. Son durumda her gruptan eşit sayıda kişi olmasına da dikkat edilmiş ve her sınıf düzeyinden 40'ar olmak üzere 160 öğretmen adayının verileri ile çalışma sürdürülmüştür.

3.3.4. Yarı yapılandırılmış görüşmeler

Aynı araştırmada en az iki veri toplama aracının veya araştırma yönteminin birlikte kullanılmasına veri çeşitlemesi denilmektedir (Denzin, 1970). Bu araştırmada da öğretmen adaylarının alan ve pedagojik alan bilgilerini inceleme amacıyla hem yazılı verilerden hem de yarı yapılandırılmış görüşme verilerinden yararlanılarak veri çeşitlemesi yapılmıştır. Görüşme; araştırmanın öznesi durumundaki bireyin veya bireylerin düşünceleri, deneyimleri, tutumları ve zihinsel algıları gibi gözlenemeyen durumları derinlemesine inceleyebilmek için araştırmacı ve görüşülen kişi arasında geçen kontrollü ve amaçlı bir sözel iletişim yöntemidir (Cohen ve Manion, 1994). Görüşmenin çeşitlerinden biri olan yarı yapılandırılmış görüşme ise sorulması planlanan soruları içeren bir formun önceden hazırlandığı ancak görüşme esnasında ek soruların da eklenebildiği ve bu şekilde kişinin yanıtlarını açması ve ayrıştılandırmasını sağlayan görüşme türüdür (Türnüklü, 2000).

Bu çalışmada da öğretmen adaylarının yazılı verilerde yeterince açıklayamadığı bazı bilgilerin derinlemesine anlaşılmasını sağlamak için yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Görüşmeler öncesinde her bir katılımcının testleri önceden incelenmiş ve PÇT hariç her bir test ile ilgili merak edilen ve derinlemesine incelenmek istenen bazı noktalar not alınmıştır. Bu nedenle görüşmelerde form olarak öğretmen adaylarının kendi testleri kullanılmıştır. Ayrıca tüm katılımcılara görüşmenin amacı ve içeriği ile ilgili bilgi verilmiş, istedikleri zaman görüşmeyi sonlandırabilecekleri ifade edilmiştir. Görüşmelerin transkripsiyonunun kolay olması için katılımcıların izinleri dahilinde ses kayıt cihazı

kullanılmıştır. Aynı sınıf düzeyinde olan katılımcılarla aynı gün içerisinde ayrı ayrı görüşülmüştür. Testlerin ve soruların çokluğundan dolayı her bir katılımcı ile yapılan görüşmeler tek oturumda bitmemiştir. KNT ve KVT ile ilgili yapılan görüşmenin ardından 20 dakika ara verilmiş sonrasında kalan dört test tamamlanmıştır. Her bir katılımcıyla her bir test için ne kadar süre görüşüldüğü Tablo 17’de detaylı olarak verilmiştir.

Tablo 17

Katılımcılarla her bir test için yapılan görüşme süreleri

SINIF		KNT (dk,sn)	KVT (dk,sn)	EPT (dk,sn)	ÖBT (dk,sn)	ÖST (dk,sn)	PBT (dk,sn)	TOPLAM (dk,sn)
1	Burçe	09,13	22,49	09,37	15,00	06,41	10,32	72,72
1	Tuğçe	11,35	29,59	10,30	10,37	06,31	10,35	78,27
2	Çise	12,36	22,27	14,39	11,11	07,15	14,01	81,29
2	Halit	11,30	27,01	14,01	14,57	09,17	07,01	83,07
3	Simre	17,27	28,46	18,01	21,12	07,53	16,35	108,74
3	Orhan	11,42	20,36	09,13	22,28	06,32	07,41	76,92
4	Maksude	23,25	34,37	13,02	11,25	07,52	11,14	100,55
4	Şeyma	13,37	43,58	16,51	18,15	10,24	17,13	118,98

Tablo 17’den de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının testlere ayırdıkları süreler farklılaşmıştır. Ancak sınıf düzeylerinin artışıyla görüşme sürelerindeki artış da dikkat çekici olmuştur. 4. sınıf öğretmen adayları sorulara detaylı yanıtlar vermişlerdir. Görüşmelerin ardından konuşmaların transkripsiyonu yapılmış ve her bir katılımcının ortaya çıkan görüşme kayıtları ile ilgili teyidi alınmıştır.

3.4. Veri Çözümleme Teknikleri

Bir çalışmada toplanan verilerin anlamlandırılması ve sonuçlandırılması için veri analizi süreci önemli bir rol oynamaktadır. İçerik analizi ile toplanan veriler ayrıntılı bir şekilde incelenir. Katılımcıların sıklıkla tekrarladığı veya vurgu yaptığı bilgilerden kodlar çıkarılır. Kodlar bir araya getirilerek kategoriler oluşturulur. Bu kategorilerden de temalar oluşturulur. Kısaca birbirine benzeyen ve birbiri ile ilişkisi olan veriler (kodlar) belirli kavramlar (kategoriler) ve temalar çerçevesinde bir araya getirilir ve yorumlanır (Baltacı, 2019). Miles ve Huberman (1994), bu sürecin üç aşamada gerçekleşmesi gerektiğini belirtmektedir. İlk aşamada veriler incelenir ve kodlanır. İkinci aşamada kodlamalarda ortaya çıkan temalardan yola çıkarak ilişkiler görsel hale getirilir. Bunun için tablo veya grafiklerden yararlanılabilir. Son aşamada ise ortaya çıkan temalar, ilişkiler ve kavramlar karşılaştırılır ve yorumlanır.

İlk aşama olan kodlama aşamasında da izlenebilecek çeşitli yollar vardır. Fraenkel ve Wallen (2006), kodlama türlerini üçe ayırmıştır. Bunlardan ilki araştırmanın kuramsal

çerçevesinde yer alan hazır kodlardan yararlanarak araştırma verilerinin kodlanmasıdır. İkincisi, herhangi bir kavramsal çerçeve yoksa araştırmacının tüm verilerden kodları kendi başına üretmesidir. Son tür ise genel bir kavramsal yapı oluşturup ona göre kodlama yapılması ve analiz sırasında ortaya çıkan yeni kodların listeye dahil edilmesidir. Bu çalışmada genelde bu son tür kullanılmış ve analiz öncesi genel bir çerçeve çizilip kodlamalar buna göre yapılmıştır. Ancak bazı testlerde (KVT, PÇT, EPT) çeşitli kuramsal çatılar ışığında hazır olan kategorilerden de yararlanılmış ve kodlamalar bu kategorilere göre yapılmıştır. Ayrıca bazı sorularda hataların nedenlerini ortaya koyabilmek adına çerçeveye bağlı kalmadan tüm verilerden yola çıkarak kodlama yapılmış ve kodlar analiz sürecinde oluşturulmuştur. Kodlamalarla ilgili detaylar her bir test özelinde aşağıdaki bölümlerde sunulmuştur. İkinci aşamada kodlanan veriler görsel hale dönüştürülmüştür. Bunun için de çalışmada frekans ve yüzde belirten tablolardan ve grafiklerden yararlanılmıştır. Son aşamada verilerden elde edilen sonuçlar ve tablonun okuyucuya sundukları yorumlanmış ve tartışılmıştır.

Çalışmada yer alan testler ve görüşme verilerinin analizinde nasıl bir yol izlendiği ve hangi kuramsal çerçevelerden yararlanıldığı örnekleriyle aşağıda sırayla açıklanmıştır:

3.4.1. Konu testinin analizi

KNT’de öğretmen adaylarının algoritmalar, terimler, kuralları, işlemler ve yüzeysel beceriler ile ilgili bilgilerinin incelenmesi hedeflenmektedir. Test 25 açık uçlu sorudan oluşmaktadır. Testte yer alan sorular öğrencilerin verdiği yanıtlara göre içerik analizine tabi tutulmuştur. Analiz sonrası kategoriler oluşturulmuş ve her bir kategoride yer alan yanıt sayılarının frekans ve yüzdeleri tablolarla gösterilmiştir.

Yapılan analize örnek olması açısından testin 13. sorusu olan “ $3,0\overline{46}$ ifadesini a/b (a ve b tam sayı) şeklinde yazınız.” sorusuna değinilecektir. Öğretmen adaylarının devirli sayıları rasyonel hale getirmek için izleyecekleri yol incelenmek istenmiştir. Öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtlar öncelikle doğru ve yanlış olmak üzere ikiye ayrılmış ve yanlış yanıtlar kendi arasında “sadece payı doğru olanlar, sadece paydası doğru olanlar ve her ikisi de yanlış olanlar” şeklinde üçe ayrılmıştır. Yanlış yanıtların %38 gibi bir oranda olması sebebiyle yanlışlığın sebebi ve hangi tür yanlışlar yapıldığının üzerine gidilmiştir.

Buna göre payda kısmında yapılan hatalar şunlardır:

- “Tüm sayıda devreden kadar 9, devretmeyen kadar sıfır” hatası ile 9900 bulanlar
- “Virgülden sonra devreden kadar sıfır, devretmeyen kadar 9” hatası ile 900 bulanlar
- “Devreden kadar 9 konulur.” hatası ile 99 bulanlar
- Diğer hatalar

Kesrin pay kısmında yapılan hatalar ise aşağıdaki gibi sıralanabilir:

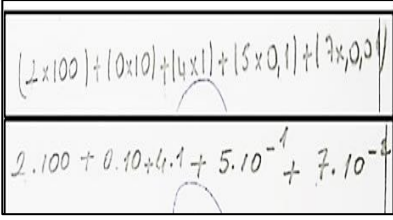
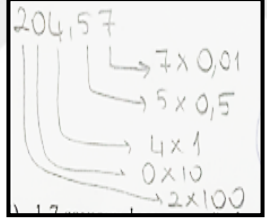
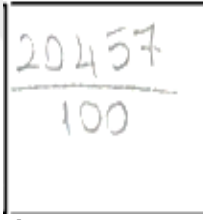
- “Tüm sayıdan devreden kısım çıkarılır.” hatası ile 3000 bulanlar
- “Pay değiştirilmez.” hatası ile 3046 bulanlar
- “Tüm sayıdan tam kısım çıkarılır.” hatası ile 3043 bulanlar
- Diğer hatalar

Her bir kategoride kaç tane yanıtın olduğu da belirtilmiş böylece öğretmen adaylarının kuralı uygularken nerelerde hata yaptığı ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Testte içerik analizinin yanı sıra her bir soru, “tamamen doğru (2), kısmen doğru (1) ve yanlış (0) şeklinde puanlanmıştır. Her bir öğretmen adayının tüm sorulardan almış oldukları puanlar toplanmış ve okuyucu kolaylığı açısından iki ile çarpılarak 100 üzerinden KVT test puanı elde edilmiştir. Yapılan puanlamaya örnek olması açısından içerik analizi ile nasıl kategorilere ayrıldığı yukarıda belirtilen 13. soru ve testin 8. sorusu olan “204,57 sayısını çözümleyiniz.” sorusu Tablo 18’de verilmiştir.

Tablo 18

KNT soruları için analiz örnekleri

	Tamamen doğru	Kısmen doğru	Tamamen Yanlış
8. Soru (Ham veri örneği)			
	vb.	vb.	vb.
13. Soru (Kategori örneği)	$\frac{3016}{990}$, $3\frac{46}{990}$ veya sade halleri	Sadece payı veya sadece paydası doğru olanlar (3046/990; 3016/900 vb.)	Hem pay hem paydası hatalı olanlar: (3046/900 vb.)

Tablo 18’de örnekleri verildiği gibi her bir soru öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlara göre kategorilere ayrılmış ve puanlanmıştır. Bulgular kısmında her bir soru ile ilgili açıklamaya yer verilmiştir.

3.4.2. Kavram testinin analizi

Öğretmen adaylarının sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin kavramlarla ilgili tanımlama, sınıflama ve ilişkilendirmeye yönelik bilgilerini inceleyebilmek adına oluşturulan KVT’de 14’ü tanım, 11’i kavramlar arası ilişkilere yönelik sorular olmak üzere 25 soru bulunmaktadır.

Testin tanımlarla ilgili 14 soruluk kısmı Zazkis ve Leikin (2008) tarafından geliştirilen teorik çatı kapsamında analiz edilmiş; uygun ve titiz tanımlar (2 puan), uygun

ancak titiz olmayan tanımlar (1 puan) ve uygun olmayan tanımlar (0 puan) olarak puanlanmıştır. “İlgili yayın ve araştırmalar” kısmında Zazkis ve Leikin (2008) tarafından geliştirilen tanımlamaya yönelik teorik çatı ile ilgili bilgi verilmiştir. Ayrıca “bulgular” kısmında her bir tanım sorusu ile ilgili öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtların hangi kategoride yer aldığı gerekçeleriyle birlikte sunulmuştur. Ancak örnek olması açısından iki kavramla ilgili verilen yanıtların kategorilere göre dağılımı bu bölümde de verilmiştir. Tablo 19’da “doğal sayı” ve “aralarında asal” kavramlarına yönelik yapılan öğretmen adaylarından bazılarının vermiş olduğu yanıtlar ve tanımlama kategorilerine göre dağılımları gösterilmiştir.

Tablo 19

KVT tanım soruları için analiz örnekleri

	DOĞAL SAYI	ARALARINDA ASAL
Uygun ve Titiz (2 Puan)	“Sayma sayılarına sıfırı ekleyerek oluşturduğumuz sayı kümesidir. “$[0, +\infty)$ aralığındaki tam sayılardır. “İlk terimi ve ortak farkı 1 olan aritmetik dizinin her bir terimine doğal sayı denir	“1’den başka pozitif ortak böleni olmayan tam sayılara denir.” “EBOB’ları 1 olan tam sayılara denir.” “a/b ifadesinde ($b \neq 0$) ($a, b \in \mathbb{Z}$) sadeleştirme yapılamıyorsa a ve b aralarında asaldır.”
Uygun ancak Titiz Olmayan (1 Puan)	“1’den başlayıp sonsuza kadar giden pozitif tam sayılardır.” (Minimal değil) “$\{0, 1, 2, 3, \dots, +\infty\}$ kümesinin her bir elemanıdır.” (Terminoloji)	“$a, b \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}^+$ iken $d a \wedge d b \Leftrightarrow d = 1$ ve $(a, b) = 1$ ise a ve b sayıları aralarında asaldır.” (Minimal değil) “a ve b iki tam sayısı arasında sadeleştirme yapılamıyorsa a ve b aralarında asaldır.” (a/b yazımı eksik)
Uygun Olmayan (0 Puan)	“Sıfırdan başlayan pozitif sayılar.” (Yeter şart değil) “Sıfırdan dokuza tüm rakamlar.” (Gerek şart değil) “Somut gösterilen sayılardır.” (Ne yeter ne gerek şart)	“Ortak bölenleri 1 olan sayılara denir.” (Yeter şart değil) “a ve b asal sayıları birbirinin katı değilse aralarında asaldır.” (Gerek şart değil) “Ortak böleni /çarpanı olmayan sayılardır.” (Ne yeter ne gerek şart)

Kavram testinin ikinci kısmında yer alan 11 soruda içerik analizi yapılmış ve öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtlara göre kategoriler oluşturulmuş ve çalışmada sunulmuştur. İçerik analizinin yanı sıra vermiş oldukları yanıtlar doğruluklarına göre “tamamen doğru (2)”, “kısmen doğru (1)” veya “yanlış (0)” olmak üzere puanlanmıştır. Tablo 20’de bu sorulardan ikisine ilişkin puanlama örneği gösterilmektedir:

Tablo 20

KVT kavramlar arası ilişki sorularına yönelik analiz örnekleri

SORU	DOĞRU	KISMEN DOĞRU	YANLIŞ
Basamak ve bölük kavramlarını ve aralarındaki ilişkiyi açıklayınız? Bir sayı üzerinde örnek gösteriniz.	Basamak ve bölük kavramı ile ilgili doğru açıklamalarla birlikte bir sayı üzerinden örnek gösteren yanıtlar	- Basamak kavramını doğru açıkladığı halde, bölük kavramını açıklayamayan yanıtlar - Bölük kavramını açıklayan ancak basamak kavramını açıklayamayan yanıtlar - Her ikisini de açıkladığı halde yanlış örnek gösteren yanıtlar	Her iki kavramı da açıklayamayan yanıtlar
Her iki irrasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı var mıdır? Örnek vererek açıklayınız.	“Evet vardır” diyen ve iki irrasyonel sayı arasında sonsuz rasyonel sayı olacağına ilişkin yoğunluğa yönelik doğru yanıtlar ve doğru örneklendirmeler	“Evet vardır.” diyen ancak açıklaması olmayan veya yetersiz olan / iki irrasyonel sayı seçip örnek gösteren ancak genellemeye uygun olmayan yanıtlar	“Kesin bir şey söylenemez.”; “Hayır, hepsinin arasında rasyonel sayı yoktur.” vb. şeklinde verilen yanıtlar

14’ü tanım 11’i açık uçlu soru olmak üzere 25 soruluk KVT’de her bir öğrencinin 50 puan üzerinden hesaplanan puanı okuyucu kolaylığı açısından 2 ile çarpılarak 100 üzerinden “Kavram Bilgi Düzeyi Test Puanı” oluşturulmuştur. Puanlara göre dağılımlar ilgili bölümde grafiklerle gösterilmiştir.

3.4.3. Problem çözme testinin analizi

Charles, Lester ve O’ Daffer (1987), problem çözme becerisini değerlendirme sürecinde kullanılan yöntemleri, gözlem ve soru sorma, kişisel verileri değerlendirme, çoktan seçmeli, boşluk doldurmalı ve aşamalı puanlama olmak üzere dört kategoriye ayırmıştır. Bu yöntemlerden biri olan aşamalı puanlama yöntemi, sistematik bir yaklaşım kullanarak, problem çözme sürecinin bütününün ya da aşamalarının bir puanlama biçiminde değerlendirilmesini amaçlar. Problem çözme sürecinde her bir aşama puanlandırılır (Aktaran Özmen- Hızarcıoğlu, 2013). Eğer öğrencilerin problem çözme süreçleri, bu doğrultuda değerlendirilirse hem öğrencilerin matematik bilgisi hakkında hem de öğretim programına yön verebilecek ipucu niteliğinde bilgiler elde edilmiş olacaktır. Fakat problem çözmenin değerlendirilmesi kolay bir iş değildir. Bazı öğrenciler yanlış bir mantıkla doğru bir cevabı bulurken, bazıları ise mükemmel stratejiler kullanmalarına rağmen sonuca ulaşamazlar (Karataş, 2002). Problem çözme sürecinde problemin

sonucunun doğruluğu önemlidir ancak seçilen çözüm yolu, problemi çözerken öğrencinin zihninde neler düşündüğü ve problemi anlaması, problemin çözümüyle ilgili düşündüğü stratejiler de çok önemlidir (Özsoy, 2002). Bu nedenle problem çözme süreci, sadece sonuca ulaşma becerisi olarak bilinmemelidir (Karataş, 2002).

PÇT’de öğretmen adaylarının problem çözme düzeylerini inceleyebilmek adına 10 adet problem yer almaktadır. Problemlerin analizinde MEB (2009)’da yer alan bütüncül dereceli puanlama anahtarı kullanılmıştır. Anahtar beş seviyeden oluşmaktadır (0 puan, 1 puan, 2 puan, 3 puan ve 4 puan). Her bir seviyeye karşılık gelen puanlar ve çözümde yer alan özellikler Tablo 21’de listelenmiştir.

Tablo 21

Problem çözme bütüncül dereceli puanlama anahtarı (MEB, 2009)

Seviye 0 (0 Puan)	Çalışma aşağıdaki özellikleri taşıyorsa; • Hiçbir çalışma yapılmamışsa • Sadece yanlış sonuç yazılmışsa • Problemdeki veriler sadece kopyalanmışsa veya problemi anlama izleri yoksa
Seviye 1 (1 Puan)	Çalışma aşağıdaki özellikleri taşıyorsa; • Problemin alt amaçlarından birine sadece ulaşmaya çalışılmış ve sonuçlandırılmamışsa • Çözüm bulmaya başlangıç yapılmasına karşın bu başlangıç doğru cevaba neden olmayacaksa • Uygun olmayan strateji ile başlangıç yapılmışsa veya bu strateji ile çözmeye çalışılmış fakat sonuçlandırılmamışsa
Seviye 2 (2 Puan)	Çalışma aşağıdaki özellikleri taşıyorsa; • Problem anlaşılmışsa ve uygun olmayan strateji ile başlangıç yapıldığı için yanlış sonucu ulaşılmışsa • Doğru sonuç olmasına karşın çözüm anlaşılamıyorsa • Sadece doğru sonuç varsa • Sadece problemin alt amaçlarından birinin çözümü doğru ise • Uygun strateji ile sadece başlangıç yapılmışsa • Uygun strateji seçilmesine karşın yanlış uygulanmışsa
Seviye 3 (3 Puan)	Çalışma aşağıdaki özellikleri taşıyorsa; • Problemin yanlış anladığı için veya kısmen anladığı için uygun strateji kullanmasına karşın yanlış sonuca ulaştıysa • Uygun stratejiyi uygularken anlaşılmayan nedenlerden dolayı yanlış sonuca ulaştıysa • Uygun stratejinin uygulandığının anlaşılmamasına karşın doğru cevap verilmişse • Uygun strateji uygulanmış fakat sonuç yazılmamışsa
Seviye 4 (4 Puan)	Çalışma aşağıdaki özellikleri taşıyorsa; • Uygun stratejiyi uygularken hata yapmışsa ve bu hata problemi anlamadığı için veya kavram yanılgısı olduğu için değilse • Uygun strateji uygulanmış ve doğru sonuca ulaşılmışsa

Testte yer alan her bir probleme yönelik çözümler Tablo 21’de yer alan bütüncül dereceli anahtara göre puanlanmıştır. Her bir öğretmen adayının 10 sorudan elde ettiği puanlar toplanmış ve okuyucu kolaylığı açısından 2,5 ile çarpılarak 100 üzerinden PÇT test puanı elde edilmiştir.

3.4.4. Epistemik testin analizi

Öğretmen adaylarının öğretim sırasında kullanılan kurallar ve formüllerle ilgili gerekçelendirmelerini ve ispatlama becerilerini içeren epistemik bilgi düzeyini incelemek adına 10 sorudan oluşan EPT oluşturulmuştur. Yedi soruda kurallar verilir kuralların gerekçeleri sorulmuştur. Üç soruda ise verilen önermenin doğruluğunun veya yanlışlığının gösterilmesi istenmiştir.

Verilen yazılı yanıtlar, Harel ve Sowder (1998) ispat şemaları ile Healy ve Hoyles (2000) argüman türlerinden yola çıkarak oluşturulmuş seviyelere göre kategorilere ayrılmıştır. Bu kategoriler Tablo 22’de gösterilmiştir.

Tablo 22

EPT değerlendirme ölçütleri

Harel ve Sowder (1998) İspat Şemaları	Healy ve Hoyles (2000) Argüman Türleri	Yeni Oluşturulan Gerekçelendirme Kategorileri
<i>Dışsal:</i> İspattan ziyade kitaplar, kurallar, geçmişten gelen alışkanlıklar ve sembolik gösterimlere dayanan gerekçelendirmeler bu düzeyde kabul edilir. <i>Deneysel:</i> Birkaç örnekle yapılan genellemeler ve örnek üzerinden yapılan gerekçelendirmeler bu düzeyde yer alır. <i>Analitik:</i> Yanıtlar kesin ve mantıklı bir muhakeme içerir. Formel ispat veya formel ispata yakın açıklamaları içerir. Dönüşümlü veya aksiyomatik yapıda gerekçelendirmelerdir.	1. Deneysel veya az açıklamalı veya hiç açıklama içermeyen somut gösterim veya eylem gerektiren argümanlar 2. Genel özelliklere veya jenerik (kritik örnek) bir duruma dayanan argümanlar 3. Açıklamalar öyküsel günlük stilde yazılmış argümanlar 4. Formal stilde yazılmış tündengelimli argümanlar	<i>Seviye 0:</i> Soruyu cevaplamaz. Önermenin doğruluğunu yanlış bilir. Verilen kurallara/teoremlere gerekçe sunmaz veya tamamen ilgisiz gerekçeler sunar. <i>Seviye 1:</i> Önermenin doğruluğunu veya yanlışlığını doğru bilir. Ancak yeterince açıklama yapmaz. Kural ve teoremlerde <i>dışsal ispat şemalarını</i> kullanır. Kısmen doğru argümanlar sunar. <i>Seviye 2:</i> <i>Deneysel ispat şemalarını</i> kullanır. Jenerik olmayan (rastgele) örnekler üzerinden argümanlar ortaya koyar. <i>Seviye 3:</i> <i>Öyküsel</i> biçimde yazılmış ancak <i>jenerik örneklerle desteklenen</i> argümanlar bu kapsamda ele alınmıştır. Yapılan açıklamalar aksiyometik olmasa da mantıklı bir muhakeme içerir. <i>Seviye 4:</i> <i>Analitik ispatları</i> kullanır. Bu ispatlar <i>formel</i> stilde yazılmış tündengelimli argümanlar olabileceği gibi formel ispata yakın açıklamaları da içermektedir.

Oluşturulan kategorilere göre betimsel analiz yapılmış olup öğretmen adaylarının yanıtları beş seviyeye göre puanlanmıştır. Her bir seviyedeki yanıtların dağılımı frekans ve yüzdelere sunulmuştur. Ayrıca 10 sorudan elde edilen toplam puanlar 2,5 ile çarpılarak 100 puan üzerinden “Epistemik Bilgi Düzeyi Test Puanı” oluşturulmuştur.

EPT’nin her bir sorusunda değerlendirmenin nasıl yapıldığına ilişkin örnekler “bulgular” kısmında tablolar ve görseller halinde sunulmuştur. Bu nedenle her seviyeye uygun örnek değerlendirmelere bu bölümde ayrıca yer verilmemiştir

3.4.5. PAB-Öğrenci bilgisi testinin analizi

Öğretmen adaylarının öğrenci bilişleri, onların muhtemel yanlışları ve bu yanlışların kaynakları ile ilgili bilgilerini ortaya koymak adına ÖBT geliştirilmiştir. 10 sorudan oluşan ÖBT’de her sorunun içerik analizi sonucu oluşan kategorileri çalışmanın “bulgular” kısmında frekans ve yüzdeleri de gösteren tablolarla sunulmuştur. Ayrıca yapılan içerik analizinin yanı sıra her bir soruda öğretmen adaylarının yanıtları; tamamen doğru, büyük ölçüde doğru, kısmen doğru, yetersiz ve tamamen yanlış şeklinde kategorilere ayrılmıştır. Bu kategorilere göre tamamen doğru yanıtlara 4 puan, büyük ölçüde doğru yanıtlara 3 puan, kısmen doğru yanıtlara 2 puan, yetersiz yanıtlara 1 puan ve tamamen yanlış veya boş yanıtlara ise 0 puan verilmiştir. Bu puanlama yapılırken sorunun yapısına göre farklı değerlendirmelerde bulunulmuştur. Bilgi vermesi açısından ilk iki soru için yanıtların kategorilere nasıl yerleştirildiği örneklendirilmiştir.

1. Soru:

Öğretmen olarak çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanına ait çeşitli kazanımların işlendiği derste bazı öğrencileri kaldırarak her bir öğrenciden öğrendikleriyle ilgili cümleler kurmalarını istediniz. Öğrencilerin kurdukları cümlelerin doğruluğunu inceleyerek hata, eksiklik veya kavram yanlışlığı içerebilecek olanları açıklayınız.

Sümeyye: “Sıfır her doğal sayının katıdır.”

Güngör: “Aralarında asal sayılardan en az biri asal sayıdır.”

Aytaç: “Sadece 1 tane çift asal sayı vardır o da 2’dir.”

Ömer: “1 sayısına ve kendisine bölünebilen sayılara asal sayı denir.”

İkisi hatalı ikisi doğru dört öğrenci ifadesi yer alan bu soruda öğretmen adaylarından tüm ifadelerin doğruluğunu ve yanlışlığını doğru tespit etmeleri ve yanlış olan ikisinin (Güngör ve Ömer) yanlışlarına uygun açıklamalar getirmeleri beklenmektedir.

- Dört öğrencinin ifadesinin de doğruluğunu veya yanlışlığını doğru tespit edip Güngör ve Ömer’in hatalarına uygun açıklamalar yapan adaylar “*Tamamen Doğru*”,

- Dört öğrencinin ifadesinin de doğruluğunu veya yanlışlığını doğru tespit edip Güngör veya Ömer’den birinin hatasına uygun açıklamalar yapan adaylar “*Büyük Ölçüde Doğru*”,
- Dört öğrenciden üçünün (Güngör, Ömer ve diğer ikisinden biri) ifadesinin doğruluğunu veya yanlışlığını doğru tespit edip Güngör ve Ömer’in hatalarının her ikisine de uygun açıklamalar yapan adaylar “*Büyük Ölçüde Doğru*”,
- Dört öğrenciden üçünün (Sümeyye, Aytaç ve diğer ikisinden biri) ifadesinin doğruluğunu veya yanlışlığını doğru tespit edip Güngör veya Ömer’den sadece birinin hatalarına uygun açıklamalar yapan adaylar “*Kısmen Doğru*”,
- Dört öğrenciden sadece Güngör ve Ömer’in ifadelerinin yanlışlığını doğru tespit edip her ikisinin de hatalarına uygun açıklama getiren adaylar “*Kısmen Doğru*”,
- Dört öğrenciden sadece ikisinin (Sümeyye/Aytaç ikilisinden biri ve Güngör/Ömer ikilisinden biri) ifadelerinin doğruluğunu veya yanlışlığını doğru tespit edip Güngör veya Ömer’den birinin hatasına uygun açıklama getiren adaylar “*Yetersiz*”,
- Dört öğrenciden sadece Güngör veya Ömer’in ifadelerinden birinin yanlışlığını tespit edip hatasına uygun açıklama getiren adaylar “*Yetersiz*”,
- Yanlış olan ifadeleri tespit edemeyen veya tespit ettiği halde uygun açıklama yapamayan adaylar “*Tamamen Yanlış*” olarak kategorilendirilmiştir.

2. Soru:

“6 adet limon ve 4 bardak su ile limonata yapılmıştır. Bu limonata ile aynı tatta olmak üzere 9 adet limon ile bu limonata yapılsaydı toplam kaç bardak su gerekirdi? (Eş limonlar ve eş bardaklar kullanılmaktadır.)” sorusuna öğrencilerden biri 7 bardak su kullanılması gerektiğini söylemiştir. Öğrencinin hatası var mıdır? Varsa hatasının kaynağı ne olabilir?

Öğretmen adayından, doğru orantı kurularak çözülmesi gereken bir soruda toplamsal ilişkiye bakarak yanlış yanıt veren bir öğrencinin hatalı olduğunu tespit etmesi ve hatasının neden kaynaklı olabileceğini uygun bir şekilde açıklayabilmesi beklenmektedir.

Öğrencinin oran/orantı yapmak yerine yani çarpımsal ilişki aramak yerine toplamsal ilişkiye baktığını ifade eden adaylar “*tamamen doğru*”, öğrencinin toplamsal ilişkiye baktığını belirten ancak aslında ne yapması gerektiğini belirtmeyen adaylar “*büyük ölçüde doğru*”, doğru yanıtın ne olması gerektiğini açıklayan ancak öğrencinin verdiği yanıtın nedenini açıklamayan adaylar “*kısmen doğru*”, öğrencinin hatasını sadece işlem

hatası ile kısıtlayan veya hata olduğunu belirttiği halde nedenini açıklamayan adaylar “yetersiz”, işlemde hata olmadığını belirten veya yanlış bir yorumla hatayı açıklayan adaylar “*tamamen yanlış*” olarak kategorilendirilmiştir.

3.4.6. PAB-Öğretim stratejileri bilgisi testinin analizi

Öğretmen adaylarının bir konuya özgü açıklamalarını, gösterimlerini ve vermiş oldukları dönütleri içeren ÖST’de 10 soru yer almaktadır. Bu 10 sorunun her biriyle ilgili içerik analizi yapılmış ve öğretmen adaylarının yanıtları kategorilere ayrılmıştır. Tüm bu kategoriler her bir soru özelinde frekans ve yüzdelere çalışmada sunulmuştur. Yapılan içerik analizinin yanı sıra her bir soruda öğretmen adaylarının yanıtları; tamamen doğru, büyük ölçüde doğru, kısmen doğru, yetersiz ve tamamen yanlış şeklinde kategorilere ayrılmıştır. Bu kategorilere göre tamamen doğru yanıtlara 4 puan, büyük ölçüde doğru yanıtlara 3 puan, kısmen doğru yanıtlara 2 puan, yetersiz yanıtlara 1 puan ve tamamen yanlış veya boş yanıtlara ise 0 puan verilmiştir. Bu puanlama yapılırken sorunun içeriğine göre farklı değerlendirmelerde bulunulmuştur. Bilgi vermesi açısından ilk iki soru için yanıtların kategorilere nasıl yerleştirildiği örneklendirilmiştir.

1.soru:

“Bir mağazada pantolonlar %10 indirimle satılmaktadır. Etiket fiyatı 40 TL olan pantolonlardan 2 tane alan bir müşteri kaç TL ödeme yapmalıdır?”

Bu soruya sınıfınızdaki öğrencilerden Mehmet, aşağıdaki gibi cevap vermiştir:

“Bir pantolon %10 indirimse, 2 pantolon %20 indirim eder. 2 pantolonun fiyatı 80 TL’dir. %20 indirimle $80 - 16 = 64$ TL ödeme yapmalıdır.”

Bu durumda Mehmet’i bilişsel çatışmaya düşürmek için nasıl bir dönüt verirsiniz?”

İki indirim yüzdesini toplayarak yanlış çözüm yapan bir öğrenciye yaptığı yanlış anlaması ve bilişsel çatışmaya düşmesi için nasıl dönüt verilmesi gerektiğinin sorulduğu testin ilk sorusunda öğretmen adaylarından öğrenciyi bilişsel çatışmaya düşürecek bir dönüt vermesi beklenmiştir. Verilen dönütler kategorilere ayrılmıştır. Her bir kategori örnekleriyle birlikte bulgular kısmında detaylı verilmiştir. Bu kategorilerden yola çıkarak da puanlamalar yapılmıştır.

- Öğrenciye yöneltilen ve onu bilişsel çatışmaya düşürecek dönütler “*tamamen doğru*” olarak sınıflanmıştır. (Öğrenci, BÇ+)
- Öğretmenin kendisinin açıkladığı, kendisinin ön planda olduğu bilişsel çatışma yaratan dönütler “*büyük ölçüde doğru*” olarak sınıflanmıştır. (Öğretmen, BÇ+)

- Öğrencinin aktif olduğu ve farklı iki yoldan çözdürülerek çelişkiyi görmesini sağlayan dönütler de “büyük ölçüde doğru” olarak sınıflanmıştır. (Öğrenci, Farklı iki yoldan çözüm)
- Öğretmenin kendisinin farklı iki yoldan çözerek çelişkiyi gösterdiği dönütler “kısmen doğru” olarak sınıflanmıştır. (Öğretmen, Farklı iki yoldan çözüm)
- Öğrencinin aktif olduğu ancak çözüme doğrudan götürmeyen bilişsel çatışma içermeyen dönütlere de “kısmen doğru” olarak sınıflanmıştır. (Öğrenci, BÇ-)
- Öğretmenin kendisinin gösterdiği veya bilgi verdiği; öğrenciyi bilişsel çatışmaya götürmeyen dönütler “yetersiz” olarak sınıflandırılmıştır. (Öğretmen, BÇ-)
- Boş bırakılan, yanlış veya eksik verilen dönütler “tamamen yanlış” olarak sınıflandırılmış ve puanlamalar bu sınıflandırmalara göre yapılmıştır.

2.soru: $2,8+1,4= 4,2$ işlemini ve $2,3+1,2= 3,5$ işlemini yapan öğrenci devirli sayılarda doğal sayılardaki gibi doğrudan toplama yapılabileceğini belirtmiştir. Öğrenciye ne dönüt verilmelidir?

Testin ikinci sorusunda devirli sayılarda toplama işlemi yaparken normal sayılardaki gibi toplama yapılabileceğini belirten bir öğrenciye öğretmenin vermesi gereken dönüt sorulmuştur. Soruya ilişkin bulgular kısmında her biri örnekleriyle açıklanan kategoriler oluşturulmuştur. Bu kategorilere göre de puanlar verilmiştir.

- Öğrencinin ön planda olduğu geçerli dönütlere 4 puan verilmiştir.
- Öğretmenin ön planda olduğu geçerli dönütlere 3 puan verilmiştir.
- Öğrencinin ön planda olduğu eksik dönütlere 2 puan verilmiştir.
- Öğretmenin ön planda olduğu eksik dönütlere 1 puan verilmiştir.
- Yanlış dönütlere veya boş bırakılan sorulara 0 puan verilmiştir.

Yukarıda örneği verilen ilk iki sorunun puanlanmasına benzer şekilde tüm sorular kategorilendirilmiş ve alınan puanlar toplanarak 10 soru için 4'er puandan en yüksek 40 puan olacak şekilde test puanı oluşturulmuştur. Okuyucu kolaylığı açısından test puanları 2,5 ile çarpılarak 100 üzerinden verilmiştir.

3.4.7. Program bilgisi testinin analizi

Öğretmen adaylarının matematik öğretim programı ile ilgili bilgilerini değerlendirebilmek adına PBT oluşturulmuştur. PBT, farklı soru tiplerini bir arada bulundurması bakımından diğer testlerden ayrılmaktadır. Bu nedenle her sorunun analizi de farklı şekilde yapılmıştır. Testte 11 soru yer almaktadır. İlk soru programda yer alan yetkinliklerle, 2. ve 3. sorular programın özel amaçlarıyla, 4. soru materyal kullanımıyla,

diğer sorular ise programın kazanımlarıyla ilişkilidir. Tablo 23'te soruların değerlendirme yöntemleri sunulmuştur:

Tablo 23

PBT soru bazında yapılan değerlendirmeler

SORULAR	DEĞERLENDİRME	PUAN
İlk 3 soru (Uzamsal düşünme, matematiksel okuryazarlık, üstbilişsel bilgi)	Öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtlar, alanyazında yer alan tanımlamalar dikkate alınarak aşağıdaki gibi puanlandırılmıştır: a) Tamamen Doğru (4 puan): Alanyazında tanımlandığı gibi açıklamalar yer alan, kavramın ne olduğunu ve özelliklerini düzgün bir şekilde ifade eden yanıtlar bu kategoride yer almaktadır. b) Büyük Ölçüde Doğru (3 puan): Kavramı ve özelliklerini büyük ölçüde doğru açıklayan, eksikliğin az olduğu yanıtlar bu kategoride yer almaktadır. c) Kısmen Doğru (2 puan): Yapılan açıklamaların bazı hatalar içerdiği veya kavramla ilgili ifadelerde dikkat çekici eksikliklerin olduğu yanıtlar bu kategoride yer almaktadır. d) Yetersiz (1 puan): Kavramı ve özelliklerini yeterince ifade edemeyen açıklamalar bu kategoride yer almaktadır. e) Yanlış / Boş (0 puan): Tamamen yanlış olan veya boş bırakılan açıklamalar bu kategoride yer almaktadır.	4'er puandan 12 puan
4.soru (Materyal Bilgisi) Yapılandırılmış Grid	Sorunun değerlendirilmesinde yapılandırılmış grid puanlama yöntemi kullanılmıştır. C_1 = Seçilen doğru kutucuk C_2 =Toplam doğru kutucuk C_3 =Seçilen yanlış kutucuk C_4 =Toplam yanlış kutucuk olmak üzere; $[(C_1/C_2 - C_3/C_4) + 1] \times 5$ formülü ile 10 puan üzerinden her bir öğretmen adayının cevapları değerlendirilmiştir.	10 puan
5. soru (Programda yer alan bölünebilme kuralları)	Programda yer alan 7 adet bölünebilme kuralına yönelik yapılan her bir işaretlemeye 1 puan verilirken, programda yer almayan bir kural işaretlendiği zaman 1 puan kırılmıştır. Bu nedenle bu sorunun analizi 7 puan üzerinden yapılmıştır.	7 puan
6.soru (Alt öğrenme alanlarının hangi sınıf düzeylerinde yer aldığı bilgisi)	Matematik öğretim programında yer alan alt öğrenme alanlarının sınıflara göre dağılımını veren tablodan (MEB, 2018; s.16) yola çıkarak hazırlanan soruda öğretmen adaylarından tabloyu doldurmaları, alt öğrenme alanlarının hangi sınıf düzeylerinde yer aldığını işaretlemeleri istenmiştir. 19 kutucuğu işaretlemeleri gereken soruda puanlama şu şekilde yapılmıştır: Tek sınıf düzeyinde görülen "Kümeler" gibi konularda doğru yapılan ve fazladan işaretleme yapılmayan yanıtlar 1'er puan; İki sınıf düzeyinde görülen "Çarpınlar ve katlar" gibi konularda her iki işaretleme de doğru ise ve fazladan bir işaretleme yoksa 2'şer puan verilmiştir.	19 işaretleme için 19 puan
7. Soru (Doğal sayılarda işlemlere yönelik kazanım bilgisi)	Boşluk doldurmalı soru tipinde kazanımlarda yer alan sayılar boş bırakılmıştır. 5 adet boşluk doldurmada sorulara 1'er puan verilmiştir.	5 puan

8. soru (Kesir kazanımları)	Kesirlerle ilgili 12 tane sorunun hangi sınıf düzeylerinde yer alabileceği sorulmuş, verilen her bir doğru yanıt 1 puan verilmiştir.	12 puan
9. soru (İlkokul ve ortaokulda ilk kez görülen kavramlar)	8 adet kavramın verildiği soruda doğru verilen her bir yanıt 1 puan verilmiştir.	8 puan
10. soru (Küme kavramları)	Kümelerle ilgili 8 kavramın hangilerinin programda yer aldığına ilişkin soruda her doğru yanıt 1 puan verilmiştir.	8 puan
11. soru	Çarpanlar ve katlar, yüzdeler, tam sayılar ve oran orantı alt öğrenme alanlarında yer alan kazanımlar karışık bir şekilde verilmiş olup, öğretmen adaylarına hangi sınıf düzeylerinde yer aldıkları sorulmuştur. 19 kazanımın her birine 1 puan verilmiştir.	19 puan

Tablo 23'e göre analizler yapılmış olup PBT puanı 100 üzerinden hesaplanmıştır. Amaç sadece test puanlarını hesaplamak olmamış aynı zamanda öğretmen adaylarının program bilgisinde ne tür zorluklar yaşadığı da ortaya konmaya çalışılmıştır. Puanların dağılımları “bulgular” bölümünde frekans ve yüzdeleriyle birlikte sunulmuştur.

3.4.8. Yarı yapılandırılmış görüşme verilerinin analizi

Öğretmen adayları ile yapılan görüşmeler neticesinde elde edilen ses kayıtları öncelikle birebir yazıya dökülmüştür. Yazıya dökülen veriler testlere ve sorulara göre ayrılmıştır. Öğretmen adaylarının aynı soruya vermiş oldukları yazılı yanıtlarla eşleştirme yapılmış ve var olan farklılıklar çalışmanın içerisinde “bulgular” bölümünde belirtilmiştir. Görüşme soruları ayrı bir puanlamaya veya değerlendirilmeye tabi tutulmamış, yazılı verilerden elde edilen bilgileri aydınlatmak ve derinleştirmek için kullanılmıştır.

3.5. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Belirli düzeyde geçerli ve güvenilir olan bilimsel çalışmalar kabul görebilmektedir. Araştırmada yer alan veri toplama araçları, araştırmanın deseni ve veri analizinin nasıl yapıldığı gibi faktörler araştırmanın kabul görme düzeyini ve inandırıcılığını etkilemektedir. Nicel araştırmaların geçerlik ve güvenirliliği için çeşitli ölçme yöntemleri bulunmasına rağmen nitel araştırmalarda kesin bir geçerlik güvenirlilik tespiti yapmak zordur (Guba ve Lincoln, 1994). Nitel araştırmalarda bu durum, araştırmacının kendisini ve okuyucunu araştırmanın ilgi göstermeye ve dikkate almaya değer olduğu konusunda ikna etmeye yöneliktir. Bu durumu da sağlamanın temel kriterleri vardır. Araştırmanın geçerliği, inandırıcılık (iç geçerlik) ve aktarılabirlik (dış geçerlik) kriterleri ile ilgilidir. Araştırmanın güvenirliliği için ise tutarlık (iç güvenirlilik) ve teyit edilebilirlik (dış güvenirlilik) kriterleri söz konusudur (Lincoln ve Guba, 1985). Bu kriterlerin neler olduğu ve bu çalışmada kriterleri sağlamak için hangi uygulamaların yapıldığı sırayla aşağıda belirtilmiştir.

İnandırıcılık

Araştırmanın bulgularının araştırılan durumla ne kadar ilgili ve uyumlu olduğunu göstermeye ve araştırma sonuçlarına ulaşırken izlenen sürecin, çalışılan gerçekliği ortaya çıkarmadaki yeterliliğini ispat etmeye yönelik çalışmalar okuyucuyu araştırmanın geçerliğine inandırmaktadır. Çeşitli araştırmacılar inandırıcılığın sağlanması için çeşitli öneriler ortaya koymuşlardır (Lincoln ve Guba, 1986; Miles ve Huberman, 1994; Shenton, 2004). Bu çalışmanın da inandırıcılığını arttırmak üzere yapılanlar öneriler ışığında Tablo 24’te listelenmiştir:

Tablo 24

İnandırıcılığı arttırmak için çalışmada yapılanlar

İNANDIRICILIĞI ARTTIRMAK İÇİN YAPILMASI GEREKENLER <i>aktaran Arastaman, Öztürk Fidan ve Fidan (2018)</i>	ÇALIŞMADA YAPILANLAR
1. İyi bilinen araştırma yöntemlerinin ve teorik çatıların kullanılması önerilmektedir.	Bu çalışmada da alan ve pedagojik alan bilgisinin incelenmesinde daha önce pek çok çalışmada kullanılmış olan, Shulman (1987) PAB bileşenleri, Harel ve Sowder (1998) ispat şemaları, Healy ve Holes (2000) argüman türleri, Zazkis ve Leikin (2008) tanımlama kriterleri, Kinach’ın (2002a) bir disiplini anlama düzeyleri kullanılmıştır. Veri analizleri daha önce yapılmış olan uygulamalar ışığında gerçekleştirilmiştir.
2. Katılımcıların rastgele örnekleme yoluyla seçilmesi araştırmacının önyargılı bir şekilde davrandığı yönündeki ithamları boşa çıkarabilir.	Çalışmada test uygulamaları 300 kişiye yapılmış olmasına rağmen veri analizi yapılacak olan 160 kişiyi belirleme ve görüşmelere seçilecek olan 8 kişinin belirlenmesi sürecinde rastgele örneklemeden yararlanılmıştır.
3. Çeşitleme yani farklı yöntemlerin, veri kaynaklarının, araştırmacıların ve veri analiz yöntemlerinin, verilerin ve yorumların çapraz kontrollerini yapmak amacıyla bir arada kullanılması inandırıcılığı artırır.	Çalışmada AB ve PAB bilgilerini incelemek üzere hem yazılı testler hem de yarı yapılandırılmış görüşmeler bir arada kullanılmıştır. Ayrıca pilot çalışmalarda veri analizleri iki araştırmacı tarafından yürütülmüş araştırmacı çeşitlemesi de yapılmıştır.
4. Katılımcı dürüstlüğü için gönüllülüğü sağlamak gerekir. Çalışmaya katılmayı reddetme hakkı tanınmalıdır.	Gerek yazılı verilerde gerekse görüşmeler öncesi gönüllülük esas alınmıştır. Çalışmada 7 tane testin uygulanması nedeniyle süreç uzun olmuştur. Bu nedenle testlere katılmak istemeyen adaylar olduğunda 7 test eşleşmemiş ve katılımcı araştırma dışı bırakılmıştır. Görüşmeler için ise çeşitli ölçütler konularak eleme yapılmıştır. Bu ölçütlerden biri de gönüllülüktür. Tüm katılımcılar sorulara içtenlikle yanıt verdiğini belirtmiş ve gönüllü onam formu doldurmuşlardır.

5. Araştırmacının dürüstlüğüni korumak, hipotezlerini geliştirmek ve araştırma desenini şekillendirmek için kendisini çalışmayla ilgisi bulunmayan bir meslektaşının denetimine açması ve ondan destek alması doğru olur.	Veri toplama araçlarının oluşturulması, pilot çalışmalarının değerlendirilmesi, veri analizi için kullanılacak teorik çatıların belirlenmesi ve verilerin yorumlanması sürecinde doktora eğitimi gören bir matematik eğitim uzmanından destek alınmıştır. Ayrıca çalışmanın her sürecinde tez danışmanı çalışmayı denetlemiştir.
6. Çelişkilerin ve şüpheli verilerin tespiti için araştırmacılar, çapraz sorular sorarak eldeki verilerin özüne inme yolunu seçebilirler.	Aynı bilgiyi sorgulayan farklı sorular çalışmada kullanılan testlerde farklı biçimlerde yer almıştır. Yapılan görüşmelerde katılımcılara yazmış oldukları çelişkili durumlar sorulmuş ve bu farklılıkların üzerine gidilmiştir.
7. İnandırıcılığı sağlamada en önemli ölçütlerden biri katılımcı teyididir. Çünkü katılımcı teyidi ile veriler ve yorumlar doğrudan katılımcılar yoluyla sınanabilir.	Yazılı verilerin teyidi ve görüşme transkriptlerinin teyidi görüşme yapılan 8 öğretmen adayı tarafından yapılmıştır.
8. <i>Kodlama güvenirliği:</i> İki araştırmacı tarafından yapılan kodlamalarda uyum yüzdesinin %80'e yakın olması, hatta verilerin büyüklüğüne göre %90'dan fazla olması önerilmektedir (Miles ve Huberman, 1994).	İki uzman matematik eğitimi tarafından kodlanan verilerde, her bir test için kodlama güvenirliğinin en az %75 olduğu tüm testlerdeki kodlama güvenirliği ortalamasının %88 olduğu görülmüştür.
9. Araştırma sonuçlarının geçmişteki çalışma sonuçlarıyla ne derece uyumlu olduğunun değerlendirilmesi inandırıcılığı artırır.	Çalışmanın tartışma kısmında bulguların daha önce yapılmış çalışmalarla ne derece ilgili olduğu belirtilmiştir. Benzer ve aykırı yönler ortaya konulmuştur.

Aktarılabilirlik (Transfer edilebilirlik)

Dış geçerlik çalışma sonuçlarının genellenebilirliği ile ilgilidir. Ancak nitel çalışmalar istatistiksel genellemeden ziyade analitik değerlendirmeyi temel alır. Çünkü sosyal olaylar durumsaldır ve bulunulan ortama göre değişir (Guba, 1981). Bu nedenle genellenebilirlik yerine aktarılabilirlik ölçütü önerilmiştir (Lincoln ve Guba, 1986). Aktarılabilirlik, araştırmanın bulgularının benzer durumlara ne derece uyarlanabildiği ile ilgilidir. Bulguların aktarılabilir olup olmadığının belirlenmesi, araştırmaya etki eden faktörlerin ve örneklem seçiminde izlenen yöntemlerin eksiksiz bir şekilde betimlenmesiyle mümkündür. Çeşitli araştırmacıların aktarılabilirliği sağlamak üzere yapmış olduğu öneriler ve bu çalışmada dikkat edilenler aşağıda listelenmiştir:

Tablo 25

Aktarılabilirliği arttırmak için çalışmada yapılanlar

AKTARILABİLİRLİĞİ SAĞLAMAK İÇİN YAPILMASI GEREKENLER <i>Baltacı (2019), Arastaman ve diğerleri (2018)</i>	ÇALIŞMADA YAPILANLAR
1. Araştırma örnekleminin, ortamının ve süreçlerinin özellikleri başka örneklerle karşılaştırma yapabilecek düzeyde ayrıntılı tanımlanması (Katılımcı sayısı, sınırlılıklar, veri toplama yöntemleri, veri toplama için yapılan oturum sayıları ve süreleri gibi detayların belirtilmesi) gerekir.	Çalışmada örneklemin nasıl ve hangi üniversiteden seçildiği detaylı şekilde açıklanmıştır. Araştırmanın sınırlılıkları belirtilmiştir. Veri toplama araçlarının geliştirilme süreci ele alınmış olup pilot çalışma sonuçları açıklanmıştır. Testler, çalışmanın sonunda tüm sorularıyla birlikte açıklanmıştır. Veri toplama sürecinde testlere kaçar dakika verildiği açıklanmış olup, her bir test için katılımcılar ile görüşme yapılan süreler tablo halinde belirtilmiştir. Araştırmada veri analiz yöntemleri her bir test için detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Böylece çalışmanın benzer durumlara aktarılabilirliğinin önü açılmıştır.
2. Örneklemin transfer etmeye izin verecek ölçüde çeşitlendirilmesi olumlu bir adımdır.	Öğretmen adaylarının AB ve PAB'lerini ortaya koymak adına çok sayıda test olmasına ve açık uçlu sorular olmasına rağmen 160 öğretmen adayının verileriyle çalışma yürütülmüştür. Böylece bir kavram veya konu ile ilgili çok az sayıda kişi tarafından görülen bir yanılığın bile ortaya çıkıp başka çalışmalarda benzer kişilere örnek teşkil etmesi amaçlanmıştır. Ayrıca her sınıf düzeyinden katılımcıların çalışmada yer alması da aynı amaca hizmet etmektedir.
3. Genelleme konusunda olası engellerin belirtilmesi gerekir.	Çalışmada bu verilerin kendi bağlamı içinde değerlendirildiği ve tüm öğretmen adaylarına genellenemeyeceği belirtilmiştir.
4. Araştırma bulgularının başka araştırmalarda test edilebilmesi için gerekli açıklamalar yapılmalıdır.	Farklı araştırmalarda da ortaya çıkan benzer ve farklı bulgular ortaya konulmuş ve yorumlanmıştır.
5. Araştırma sonuçlarının araştırma sorusu ile ilgili kuramlarla tutarlılığı belirtilmelidir.	Araştırma sonuçlarında, AB ve PAB ile ilgili bileşenler ayrı ayrı değerlendirilmiştir. Veri analizinde kullanılan ispat şemaları, tanımlama türleri, problem çözme aşamaları gibi teorik çerçevelerden yararlanılarak araştırma sonuçları yorumlanmıştır.

Tutarlık (Güvenilebilirlik)

Tutarlık ölçütü bulguların elde edildiği araştırma sürecinin mümkün olduğu ölçüde açık ve tekrarlanabilir olması ile ilgilidir (Arastaman ve diğerleri, 2018). Kısacası aynı verilerle başka bir araştırmacının aynı sonuçlara ulaşabilmesi şeklinde ifade edilebilir. Bunun için Lincoln ve Guba (1986), denetim izi tekniğinin kullanımını önermektedir. Denetim izi, araştırma etkinliklerinin ve süreçlerinin; veri toplama ve analiz çalışmaları üzerindeki etkilerin; oluşan temaların, kategorilerin veya modellerin; analiz ve yorumlama sürecinin seyrinin ayrıntılı bir kronolojisidir (Morrow, 2005, aktaran: Arastaman ve diğerleri, 2018). Araştırmanın tutarlığının arttırılması için iyi bir şekilde raporlanması gerektiği söylenebilir. Pek çok çalışmada araştırmanın tutarlığının arttırılması için öneriler sunulmuştur. Bu öneriler ve araştırmada dikkate aldığımız hususlar Tablo 26'da belirtilmiştir:

Tablo 26

Tutarlılığı arttırmak için çalışmada yapılanlar

TUTARLIĞI ARTTIRMAK İÇİN YAPILMASI GEREKENLER <i>Arastaman ve diğerleri (2018), Baltacı (2019), Guba ve Lincoln (1994)</i>	ÇALIŞMADA YAPILANLAR
1. Araştırma soruları açık bir biçimde ifade edilmelidir.	Araştırma problemi ve alt problemleri çalışmada belirtilmiştir.
2. Araştırmanın çeşitli aşamaları araştırma sorularıyla tutarlı olmalıdır.	Araştırmanın giriş kısmında araştırma problemine yönelik bilgiler verilmiş ve ihtiyaçtan bahsedilmiştir. “İlgili yayın ve araştırmalar” bölümünde araştırma probleminde yer alan öğretmen bilgisi kavramları, alt problemlerde yer alan bir disiplini anlama düzeyleri ile öğrenme alanı ile ilgili çalışmalara değinilmiş, temel kavramlar açıklanmıştır. Bulgular ve tartışma kısmı da araştırma problemine göre yazılmıştır.
3. Araştırmanın sonuçları verilerle uyumlu olmalıdır.	Araştırma sonuçları, doğrudan elde edilen bulgulardan yola çıkarak belirtilmiştir. Bulgulara dayanmayan kesin yorumlardan kaçınılmıştır.
4. Araştırmacının temel bakış açısı ve araştırmaya yaklaşımı açık bir biçimde tanımlanmalıdır.	Araştırmacının rolü yöntem kısmında belirtilmiştir.
5. Verilerin analizinde, önyargılar, yanlış anlaşılmalara, gerçek dışı veriler gözden geçirilip geçerli olmayan veriler ayıklanmalıdır.	Veri toplama öncesinde gönüllü olmayan öğrencilere testler uygulanmamıştır. Ancak gönüllü olmasına rağmen, süreç içinde testlerden herhangi birinde özen göstermeden kısa yanıtlar veren, soruların yarısından fazlasını boş bırakan katılımcıların verileri çalışmadan çıkarılmıştır.
6. Elde edilen verilerin betimsel bir sistematikte doğrudan araştırma raporunda sunulması gereklidir.	Elde edilen yazılı verilerin bir kısmı doğrudan resim olarak çalışmada yer almıştır. Bazıları ise önce kategori haline getirilmiş ve yazılı olarak sunulmuştur. Görüşme verilerinden de doğrudan alıntılar yapılmıştır.
7. Toplanan bulguların görüşmeler yoluyla sağlamlasının yapılması; ayrıca katılımcılar ile uzmanların da bu görüşmelerin doğruluğunu teyit etmeleri gereklidir.	Toplanan bulguların bir kısmı yapılan görüşmelerle tekrar sorgulanmıştır. Yapılan görüşmelerde ses kaydı alınmış ve bu kayıtların transkripsiyonu yapılmıştır. Ardından katılımcıların kendisine teyit ettirilmiştir.
8. Toplanan verilerin analizinde başka araştırmacı ve uzmanlardan analiz desteği alma veya farklı kodlayıcılar ile puanlama tutarlılığı artırır.	Pilot çalışmalarda iki araştırmacı ayrı ayrı kodlama yapmıştır. Her bir testin kodlama güvenilirliği ile ilgili detaylar yöntem kısmında belirtilmiştir. Ana uygulama verilerinin analizinde pilot çalışmada karşılaşılmayan bir veri söz konusu olduğunda kodlamayı yine birden fazla uzman yapmış ve anlaşmazlık noktasında 3. bir uzmanın (tez danışmanı) görüşü alınmıştır.
9. Araştırmanın verileri toplanmadan önce oluşturulmuş ve ayrıntılı olarak tanımlanmış bir kavramsal çerçeveye bağlı olarak yapılan veri analizi tutarlılık için olumludur.	Araştırma verileri toplanmadan önce veri analizinin nasıl yapılacağı ve hangi kategorilere ayrılacağı iki uzman araştırmacı tarafından kullanılacak kuramsal çerçevelere göre belirlenmiştir. Zaten araştırmada kullanılan kuramsal çerçeveler kendi içinde kategoriler barındırmakta olup alanyazında birçok çalışmada örnekleri yer almaktadır.

Teyit Edilebilirlik (Onaylanabilirlik)

Tutarlık kriterinde aynı verilerle aynı sonuçlara ulaşmak varken, teyit edilebilirlik kriterinde araştırmanın benzer bir ortamda yinlendiğinde benzer sonuçlara ulaşılabilmesi vardır (Baltacı, 2019). Bu nedenle araştırma bulguları ve sonuçlarının araştırmacının kendi özellikleri ve tercihlerinden etkilenmediği katılımcıların deneyim ve düşüncelerinden oluştuğu güvencesini vermek için bazı tekniklerin kullanılması önerilmektedir (Arastaman ve diğerleri, 2018). Daha önceki kriterlerde de sözü edilen denetim izi, çeşitleme gibi teknikler teyit edilebilirlik için de tavsiye edilmektedir (Guba, 1981; Lincoln ve Guba, 1986). Teyit edilebilirliğin sağlanması için dikkat edilmesi gerekenler ve bu çalışmada yapılanlar Tablo 27’de listelenmiştir.

Tablo 27

Teyit edilebilirliği arttırmak için çalışmada yapılanlar

TEYİT EDİLEBİLİRLİĞİ ARTTIRMAK İÇİN YAPILMASI GEREKENLER <i>Arastaman ve diğerleri(2018), Baltacı (2019), Guba ve Lincoln, (1994)</i>	ÇALIŞMADA YAPILANLAR
1. Katılımcılarla ilgili bilgiler benzer ortamlar için önemlidir.	Çalışmada katılımcılardan genel olarak bahsedilmiş, seçilme süreci açıklanmıştır. Ancak demografik özelliklerinden bahsedilmemiştir.
2. Denetim izi tekniği kullanılmalıdır. Ancak burada tutarlılıkta olduğu gibi sadece araştırma süreci değil, araştırmanın sonuçları ve yorumları ön plandadır.	Veri analizinin nasıl yapıldığı, sonuçların ve yorumların neye dayanarak yapıldığı çalışmada detaylı bir şekilde sunulmuştur.
3. Sonuçlar ortaya konan verilerle açık bir biçimde ilişkilendirilmelidir.	Sonuç ve yorumlar, bulgulara ve ilgili alanyazına dayandırılarak yapılmıştır.
4. Araştırmada farklı görüşler ve alternatif açıklamalar dikkate alınmalıdır.	Araştırmada katılımcıların farklı görüşlerine yer verilmiş, çoğunluğa uymayan hatalı yanıtlar da kategorilere ayrılmış ve bulgularda sunulmuştur. Ayrıca ilgili alanyazında yer alan çalışmalar ile bu araştırma sonuçlarının farklılaştığı noktalar da ortaya konmuş ve tartışılmıştır.
5. Araştırmanın ham verileri başkaları tarafından incelenebilecek şekilde saklanmalıdır	Araştırmada yapılan pilot uygulamalar, tüm testlerin asıl uygulamaları ve görüşme ses kayıtları saklanmaktadır.

3.6. Araştırmacının Rolü

Nitel araştırmalarda nicel araştırmaların aksine araştırmacı uzaktan bilgi toplayan kişi olmayıp araştırmanın tüm aşamalarında önemli bir yer tutar. Araştırdığı alana hakim olup, araştırma boyunca verileri bizzat toplayan, gerekirse katılımcılarla görüşen, gözlemler yapan ve topladığı verileri analiz edebilen kişidir (Yıldırım, 1999).

Bu bağlamda bu çalışmada da araştırmacı bizzat merkezde yer almış olup araştırmanın planlanmasından, testlerin hazırlanmasına, pilot çalışmalarının ve ana uygulamaların yapılmasına kadar aktif rol oynamıştır. Araştırmacı alanyazın taraması sonrası 7 adet testi hazırlamış olup bu testleri geçerlilik ve güvenilirlik çalışmaları sonrası son haline getirip katılımcılara uygulamıştır. Uzman görüşleri ile testlerin uygulanma sırası belirlenmiş olup toplanan yazılı verilerin analizi de araştırmacı tarafından yapılmıştır. Analizler sonrası hangi katılımcılarla görüşme yapılacağı ve görüşmede hangi soruların sorulacağı konusunda da araştırmacı aktif bir rol üstlenmiştir. Görüşme yapılacak öğretmen adaylarının belirlenmesinin ardından araştırmacı 8 öğretmen adayı ile tek tek görüşme yapmış ve bu görüşme sırasında öğretmen adaylarına alan ve pedagojik alan bilgilerini ortaya çıkarmayı hedefleyen sorular yönelmiştir. Görüşme verilerinin transkripsiyonu ve yazılı verilerle entegrasyonu araştırmacı tarafından yapılmıştır. Araştırmacı; veri toplama, veri analizi ve elde edilen bulguların yorumlanması sırasında tarafsızlığını korumuş araştırmanın hiçbir aşamasında yanlı davranmamıştır.

BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu bölümde araştırma için toplanan verilerin analizleri sonucu elde edilen bulgulara yer verilmektedir. Alan bilgisi kapsamında olan; konu, kavram, problem çözme ve epistemik bilgi düzeyleri ile pedagojik alan bilgisi kapsamında olan öğrenci bilgisi, öğretim stratejileri bilgisi ve program bilgisi alt başlıkları altında yazılı verilerden ve görüşme verilerinden elde edilen bulgular bir arada incelenmiştir.

4.1. Konu Bilgi Düzeyi ile İlgili Bulgular

Sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin, algoritmaları, terimleri, kuralları, işlemleri ve yüzeysel becerileri içeren konu bilgi düzeyine ilişkin bulgular bu bölümde sunulmaktadır. Çalışmada öğretmen adaylarına, alan bilgisi kapsamında olan bu bilgi türünü incelemek adına “sayılar ve işlemler öğrenme alanı konu düzeyi testi” uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının testte yer alan 25 soruya vermiş oldukları yanıtlar görüşme verileriyle birlikte ele alınmaktadır.

4.1.1. KNT 1. soruya ilişkin bulgular (basamak ve bölüklere ayırma)

Öğretmen adaylarına “245217204” sayısını basamak ve bölüklerine ayırınız.” şeklinde 5.sınıf düzeyinde bir soru sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri cevaplar incelenmiş, basamak veya bölüklerine doğru ayırabilmelerine göre kategorilendirilmiştir. Tablo 28’de bu soruya ilişkin sonuçlar sunulmuştur.

Tablo 28

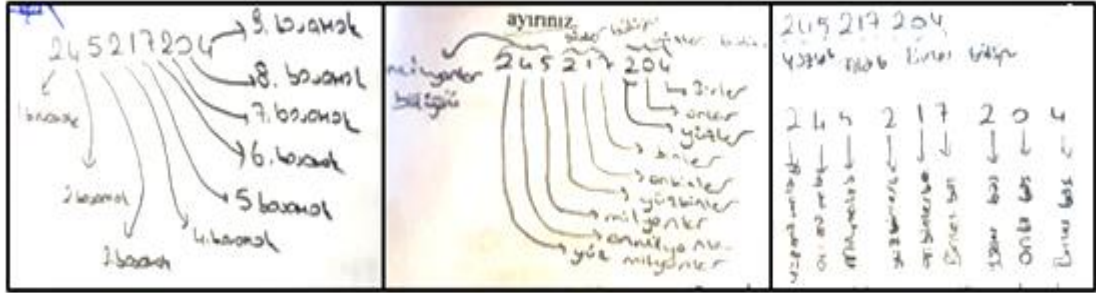
KNT 1. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Basamak ve Bölüklere Doğru Ayırabilen	Sadece Basamaklarına Doğru Ayırabilen	Sadece Bölüklerine Doğru Ayırabilen	İkisine de Yanlış Ayıran
1. Sınıf	3 (%7,5)	29 (%72,5)	1 (%2,5)	7 (%17,5)
2. Sınıf	3 (%7,5)	20 (%50)	2 (%5)	15 (%37,5)
3. Sınıf	9 (%22,5)	19 (%47,5)	3 (%7,5)	9 (%22,5)
4. Sınıf	15 (%37,5)	15 (%37,5)	2 (%5)	8 (%20)
Toplam	30 (%18,75)	83 (%51,875)	8 (%5)	39 (%24,375)

Tablo 28 incelendiğinde öğretmen adaylarının sadece %18,75’inin sayıyı hem basamaklarına hem de bölüklerine ayırabildiği görülmektedir. Her ne kadar her sınıf düzeyinde basamaklarına ayırabilme yüzdeleri %50’nin üzerinde olsa da öğrencilerin bölüklere ayırma konusunda zorluk yaşadığı görülmektedir. Öğrencilerin sadece %23,75’i

verilen 9 basamaklı sayıyı bölüklerine ayırabilmiştir. Ayrıca 1.sınıf öğretmen adaylarının basamak veya bölüklerden en az birini ayırmada diğer sınıf düzeylerine göre daha yüksek oranda olmalarının dikkat çekici bir sonuç olduğu düşünülebilir.

Şekil 7’de ise 3 öğretmen adayının vermiş olduğu hatalı yanıtlara örnekler görülmektedir.



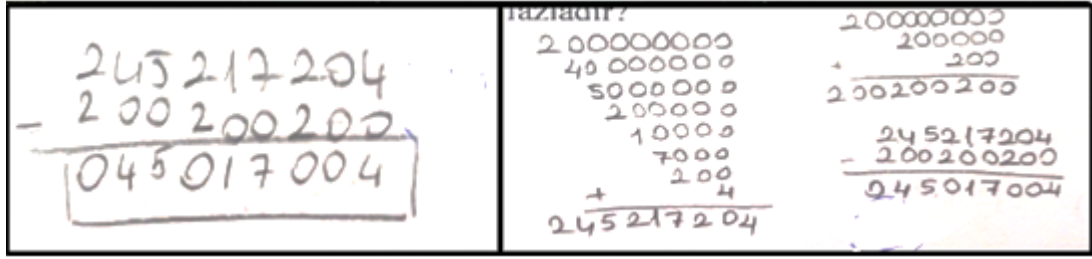
Şekil 7. Basamak ve bölüklere ayırmada hatalı yanıtlara örnekler

Soldaki ilk örnekte öğretmen adayının basamakları sıra sayılarıyla adlandırdığı görülmektedir. Ortadaki ve sağdaki örneklerde ise öğretmen adayları sayıyı basamaklarına doğru ayırsa da bölüklere ayıramamıştır. Ortadaki örnekte bölükler yüzler-binler-milyonlar şeklinde ayrılmış; sağdaki örnekte ise birler-onlar-yüzler şeklinde ayrılmıştır.

4.sınıf öğretmen adaylarından %57,5’u verilen sayıyı bölüklerine ayıramamıştır. Bu öğretmen adaylarından olan Şeyma, basamakları bildiğini ancak bölüğün ne olduğunu hatırlamadığını belirtmiştir. Yine bir diğer 4. sınıf öğretmen adayı Maksude, önce “Bölükler üçerli basamaklardır. İlki birler bölüğü. İkincisi yüzler bölüğü. Diğeri de binler bölüğü olması lazım.” şeklinde açıklama yapmıştır. Daha sonra, “Şu ilki birler bölüğü kesin, ikincisi binler de olabilir. Üçüncüsü ne olabilir? Sanırım biner biner. O zaman on binler bölüğü mü olur? Emin olamadım.” açıklamasında bulunmuştur.

4.1.2. KNT 2. soruya ilişkin bulgular (basamak değeri hesaplama)

Testin 2. sorusunda öğretmen adaylarına “245217204 sayısının tüm rakamlarının basamak değerleri toplamı 2 rakamlarının basamak değerleri toplamından ne kadar fazladır?” sorusu sorulmuştur. “245217204” sayısı ile “200200200” sayısının farkı alınarak “45017004” sonucu bulunabilir. Öğretmen adaylarının vermiş oldukları cevaplar incelendiğinde bazı öğretmen adaylarının uzun yoldan (tek tek rakamların basamak değerlerini alarak) bazılarının ise pratik yoldan (2 rakamlarının bulunduğu basamaklara sıfır koyarak) sonuca ulaştıkları görülmüştür (Şekil 8).



Şekil 8. KNT 2. soruya ait doğru yanıtlara örnekler

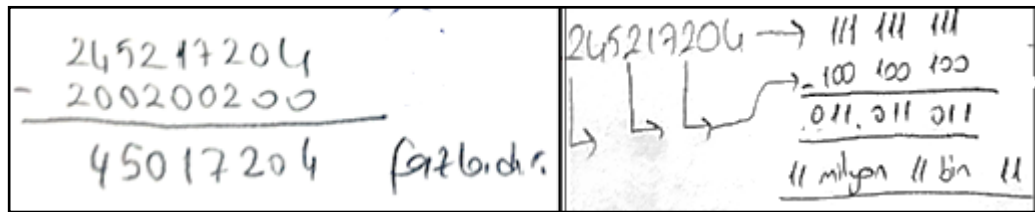
Cevapları tamamen doğru, kısmen doğru ve yanlış olarak kategorilere ayırdığımızda oluşan dağılım Tablo 29’da verilmiştir.

Tablo 29

KNT 2. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Tamamen Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış
1. Sınıf	26 (%65)	1 (%2,5)	13 (%32,5)
2. Sınıf	23 (%57,5)	5 (%12,5)	12 (%30)
3. Sınıf	28 (%70)	2 (%5)	10 (%25)
4. Sınıf	29 (%72,5)	3 (%7,5)	8 (%20)
Toplam	106 (%66,25)	11 (%6,875)	43 (%26,875)

Bazı öğretmen adaylarının basamak değerlerini yazarken bazı basamakları atladıkları bu nedenle de sonucu yanlış buldukları görülmüştür. Yukarıdaki tabloda yer alan “kısmen doğru” kategorisindeki 11 öğretmen adayının yanıtlarından biri Şekil 9’da sol tarafta yer almaktadır.



Şekil 9. KNT 2.soruya ait kısmen doğru ve yanlış kategorisindeki yanıtlara örnekler

Öğretmen adaylarının yaklaşık %27’si soruyu doğru cevaplayamamıştır. En sık yapılan hatalardan biri, basamak yerine sayı değerinin ele alınması olmuştur. Bir başka sık yapılan hata ise Şekil 9’da sağ tarafta yer aldığı gibi basamak değerinin sadece 10’un kuvvetleri olarak uygulanması olmuştur.

4.1.3. KNT 3. soruya ilişkin bulgular (yuvarlama)

Konu testinin 3. sorusunda öğretmen adaylarına “30597” sayısının en yakın binliğe ve onluğa yuvarlanmış hallerinin farkı sorulmuştur. Bu soru da ilk iki soru gibi ilköğretim 5.sınıf düzeyine uygun bir sorudur. Sayının binliğe yuvarlanmış hali 31000, onluğa yuvarlanmış hali 30600’dür. Bu durumda fark 400 olarak bulunmaktadır. Bazı öğretmen adayları her iki yuvarlamayı da doğru yapabilirken bazıları sadece birini yapabilmıştır. İki yuvarlamayı da yanlış yapan öğretmen adayları olmuştur. Tüm yanıtların dağılımı Tablo 30’da verilmiştir.

Tablo 30

KNT 3. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Doğru	Sadece Binliğe Yuvarlayabilme	Sadece Onluğa Yuvarlayabilme	Tamamen Yanlış
1. Sınıf	29 (%72,5)	2 (%5)	4 (%10)	5 (%12,5)
2. Sınıf	27 (%67,5)	4 (%10)	3 (%7,5)	6 (%15)
3. Sınıf	28 (%70)	4 (%10)	6 (%15)	2 (%5)
4. Sınıf	35 (%87,5)	0 (%0)	3 (%7,5)	2 (%5)
Toplam	119 (%74,375)	10 (%6,25)	16 (%10)	15 (%9,375)

Tablo 30’dan da görüldüğü gibi öğretmen adaylarının yaklaşık %74’ü soruyu doğru cevaplamıştır. En yüksek doğru cevap oranlarının ise 4. sınıf ve 1. sınıf öğretmen adaylarında olduğu görülmüştür. Binliğe yuvarlama yapılırken yüzler basamağının 5 olmasından dolayı bir alt binlik olan 30000’e yuvarlayan öğretmen adaylarının olduğu görülmüştür. Onluğa yuvarlarken de 9’un 10 olamamasından dolayı zorlanıp, 30500’e veya 30590’a yuvarlama yapan adayların olduğu görülmüştür.

4.1.4. KNT 4. soruya ilişkin bulgular (bölme işlemi)

Öğretmen adaylarına 40404 sayısının 40’a bölümü sorulmuştur. İşlemin doğru çözümü için bölünen sayının içinde 40’ı aramaya soldan başlamak, alt alta yapılan işlemlerde doğru bir sıralama izlemek, bölüme ne zaman sıfır ekleneceğini bilmek ve sonuca doğru ulaşmak gerekmektedir. İşlem kalanlı yapıldığında bölüm 1010 olup kalan 4 bulunurken, işleme devam edildiği takdirde bölüm 1010,1 bulunmaktadır. Her iki yanıt da doğru kabul edilebilir. İki öğretmen adayı Şekil 10’da görüldüğü gibi doğrudan sonucu yazmış ancak adımları açıklamamıştır. Bu yanıtlar kısmen doğru olarak sınıflandırılmıştır.

Şekil 10. Kısmen doğru kategorisinde yer alan bir bölme işlemi

Öğretmen adaylarının bu soruya ilişkin vermiş oldukları yanıtların dağılımı Tablo 31’de verilmektedir.

Tablo 31

KNT 4. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

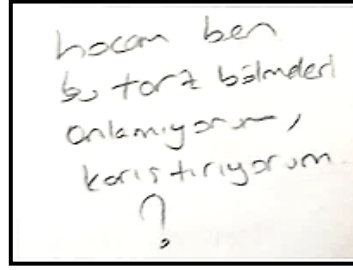
	Tamamen Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış
1. Sınıf	24 (%60)	0 (%0)	16 (%40)
2. Sınıf	24 (%60)	1 (%2,5)	15 (%37,5)
3. Sınıf	32 (%80)	1 (%2,5)	7 (%17,5)
4. Sınıf	28 (%70)	0 (%0)	12 (%30)
Toplam	108 (%67,5)	2 (%1,25)	50 (%31,25)

Tablo 31’de görüldüğü gibi basit sayılabilecek bir bölme işlemini öğretmen adaylarının %31,25’i doğru yanıtlayamamıştır. Dört temel işlemde biri olan bölme işlemiyle ilgili öğretmen adaylarının yaptıkları yanlışların üzerinde durulmuş ve bu 50 hatalı yanıtın dağılımına bakılmıştır. En sık verilen hatalı yanıtlar ve frekansları Şekil 11’de verilmiştir:

101,1	101	10101	11,1	Diğer	Boş
f=18	f=16	f=5	f=2	f=7	f=2

Şekil 11. Bölme işlemine verilen hatalı yanıtların dağılımı

Şekil 11’de görüldüğü gibi en sık yapılan hata 101,1 veya 101 olmuştur. Bu öğretmen adayları birler basamağındaki 4’ü indirdikten sonra bölüme sıfır koymadan ondalık kısma geçmiştir. 18 öğrenci bu nedenle cevabı 101,1 bulmuştur. Yine aynı hatayı yaparak kalanlı bölme ile “101” yanıtını veren öğretmen adayları da olmuştur. Beş öğretmen adayı ise en son kalan 4’ün yanına sıfırı koymuş ancak bölüme virgül koymadan işleme devam etmiştir. Bu nedenle sonucu 10101 olarak bulmuştur. Bölme işlemini boş bırakan iki öğretmen adayından birinin notu Şekil 12’de verilmiştir.



Şekil 12. Bölme işlemine yönelik bir öğretmen adayının yorumu

Şekil 12’de görüldüğü gibi bu tarz bölme işlemlerinde sadece öğrenciler değil öğretmen adayları da zorluk çekebilmektedir. Yukarıda yazılı olan öğretmen adayının itirafı da bu durumu doğrular niteliktedir.

4.1.5. KNT 5. soruya ilişkin bulgular (doğal sayılarda işlem önceliği)

Öğretmen adaylarına “ $8 + 2 \cdot 5 - 6 : 2 \cdot 3 = ?$ ” işleminin sonucu sorularak çarpma, bölme, toplama ve çıkarma işlemlerindeki öncelik sıraları ile ilgili bilgileri yoklanmıştır. Bazı öğretmen adayları çarpma, bölme, toplama-çıkarma sırasıyla işlem yaparak sonucu 17 olarak bulmuştur (Şekil 13).

$$8 + 2 \cdot 5 - 6 : 2 \cdot 3 = ?$$

$$8 + 10 - 3 = 17$$

Şekil 13. En sık yapılan işlem önceliği uygulama hatasına yönelik bir örnek

Şekil 13 ile verilen yanıtla göre öğretmen adayları çarpma ve bölmenin, toplama ve çıkarmaya göre daha öncelikli olduğunu bilmektedir ancak çarpma işleminin de bölmeye göre öncelikli olduğunu düşündükleri anlaşılmaktadır. Bazı öğretmen adayları farklı sıralamalar yaparak 11, 18, 27 gibi sonuçlar bulurken bazıları ise sorunun hatalı olduğunu ileri sürmüştür. Şekil 14’te bu durumun bir örneği görülmektedir.

$$8 + 2 \cdot 5 - 6 : 2 \cdot 3 = ?$$

$$8 + 10 - 3 = 17$$

Çarpma ve bölme işlemlerin birbirine önceliği yoktur. Hatalı denklemdir.

Şekil 14. İşlem önceliği sorusunu hatalı bulan yanıtlardan biri

Tüm yanıtların sınıf düzeylerine göre dağılımı ise Tablo 32’de sunulmuştur.

Tablo 32

KNT 5. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Doğru Yanıt (9)	17 Yanıtı	Diğer Yanıtlar
1. Sınıf	29 (%72,5)	10 (%25)	1 (%2,5)
2. Sınıf	27 (%67,5)	9 (%22,5)	4 (%10)
3. Sınıf	32 (%80)	7 (%17,5)	1 (%2,5)
4. Sınıf	25 (%62,5)	14 (%35)	1 (%2,5)
Toplam	113 (%70,625)	40 (%25)	7 (%4,375)

Tablo 32'ye bakıldığında en düşük doğru yanıt oranının 4. sınıf öğretmen adaylarında olduğu en yüksek oranın ise 3.sınıf öğretmen adaylarında olduğu göze çarpmaktadır. Ayrıca her dört öğretmen adayından birinin önce çarpma sonra bölme yaparak "17" yanıtını bulduğu belirlenmiştir.

4.1.6. KNT 6. soruya ilişkin bulgular (kesirlerde işlemler)

Testin 6.sorusunda öğretmen adaylarına tam sayılı kesirlerden oluşan " $7\frac{3}{5} + 2\frac{7}{12} - 3\frac{1}{10}$ " işleminin sonucu sorulmuştur. Öğretim programına göre 6.sınıf düzeyinde olan bu soruda öğretmen adaylarının $7\frac{1}{12}$ sonucuna veya ona eşit olan $\frac{85}{12}$ sonucuna ulaşmaları beklenmiştir. Soruya ilişkin verilen yanıtlar incelenmiş; Şekil 15'teki gibi işlem hatası yapan öğretmen adaylarının yanıtları *kısmen doğru* kabul edilmiştir.

$$7\frac{36}{60} + 2\frac{35}{60} - 3\frac{6}{60} = 6\frac{75}{60} = 7\frac{15}{60}$$

Şekil 15. Kesirlerde işlemlere yönelik yapılan işlem hatasına bir örnek

Şekil 15'te yer alan örnekte öğretmen adayının toplama ve çıkarma işlemi yaparken payı 65 yerine 75 olarak hesapladığı ve bu nedenle de sonucu yanlış bulduğu görülmektedir. Bu tür yanıtlar; payda eşitleme, tamlarda ayrı kesirlerde ayrı işlem yapma, bileşik kesri tama çevirme gibi süreçler yapılmasına rağmen sonuca ulaşamadığı için "kısmen doğru" kategorisinde değerlendirilmiştir.

Öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtların dağılımı Tablo 33'te görülmektedir.

Tablo 33

KNT 6. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Tamamen doğru	Kısmen doğru	Yanlış
1. Sınıf	22 (%55)	8 (%20)	10 (%25)
2. Sınıf	20 (%50)	9 (%22,5)	11 (%27,5)
3. Sınıf	15 (%37,5)	10 (%25)	15 (%37,5)
4. Sınıf	15 (%37,5)	13 (%32,5)	12 (%30)
Toplam	72 (%45)	40 (%25)	48 (%30)

Tablo 33'te görüldüğü gibi öğretmen adaylarının sadece %45'i soruyu doğru yanıtlayabilmiştir. Doğru cevaplayan öğretmen adaylarının sayısının sınıf düzeyi arttıkça düştüğü göze çarpmaktadır. Basit işlem hataları nedeniyle öğretmen adaylarının %25'inin doğru cevaba ulaşamadığı görülmektedir. Ancak bazı öğretmen adaylarının dikkatsizlikle yapılan sıradan hatalardan ziyade bileşik kesri tam kesre çevirememesi, payda eşitleyememesi veya tam sayılı kesirdeki tam kısmını çarpma işlemi olarak uygulama gibi ciddi hatalar yaptığı görülmüştür. Bu hatalı yanıtlardan biri Şekil 16'da verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 &7\frac{3}{5} + 2\frac{7}{12} - 3\frac{1}{10} = ? \\
 &\frac{21}{5} + \frac{7}{6} - \frac{3}{10} = \frac{126 + 35 - 9}{30} \\
 &\frac{21}{5} + \frac{7}{6} - \frac{3}{10} = \frac{152}{30} = \frac{76}{15}
 \end{aligned}$$

Şekil 16. Kesirlerde işlemlere yönelik yapılan yanlış bir çözüm örneği

Yukarıdaki örnekte öğretmen adayının tam sayılı kesirleri çarpma işlemi olarak ele aldığı ve tam kısım ile payı çarptığı görülmektedir. Öğretmen adaylarının %30'unun çözümünde bu şekilde kavram yanlışlığına işaret eden hatalar mevcuttur.

4.1.7. KNT 7. soruya ilişkin bulgular (ondalık ifadelerde basamaklar)

Öğretmen adaylarına “37,1257 sayısında 2 rakamı hangi basamaktadır?” sorusu sorulmuş ve “yüzde birler basamağı” yanıtı beklenmiştir. Verilen yanıtlar sınıflandırılmış sonuçlar Tablo 34'te gösterilmiştir.

Tablo 34

KNT 7.soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Yüzde Birler Doğru Yanıtı	100/10000'ler veya Sıfır Tam Yüzde Birler	Tamamen Yanlış Yanıtlar
1. Sınıf	17 (%42,5)	2 (%5)	21 (%52,5)
2. Sınıf	23 (%57,5)	0 (%0)	17 (%42,5)
3. Sınıf	24 (%60)	0 (%0)	16 (%40)
4. Sınıf	27 (%67,5)	0 (%0)	13 (%32,5)
Toplam	91 (%56,875)	2 (%1,25)	67 (%41,875)

Görüldüğü gibi öğretmen adaylarının yarıdan fazlası basamağı doğru adlandırmıştır. İki öğretmen adayı ise yüzde birler şeklinde ifade etmek yerine “100/10000’ler” ve “sıfır tam yüzde birler” yazarak yüzde bire denk söylemlerde bulunmuşlardır. 67 öğretmen adayı ise (%41,875) farklı isimlendirmeler yapmıştır. Bu hatalı yapılan isimlendirmeleri ve sıklıklarını ortaya koymak adına Tablo 35 oluşturulmuştur.

Tablo 35

Yapılan hatalı basamak isimlendirmelerinin frekansları

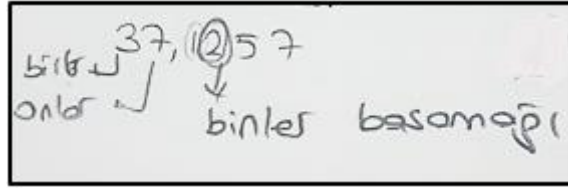
YANIT	f	YANIT	f
Yüzler Basamağı	18	Onda Onlar Basamağı	2
Binde Birler Basamağı	17	Binde Onlar Basamağı	2
Onda Birler Basamağı	9	Binler Basamağı	2
Onda Yüzler Basamağı	5	Diğer	10
Onlar Basamağı	2		

En çok yapılan isimlendirmenin “yüzler basamağı” olduğu görülmektedir. Bazı öğretmen adayları doğal sayılarda olduğu gibi sağdan birler, onlar diye başlayıp yüzler basamağına ulaşmış; bazılarının ise virgölün sağındaki ilk basamağa onda birler yerine onlar, 2. basamağı ise yüzde birler yerine yüzler basamağı şeklinde ifade ettikleri görülmüştür.

İkinci sırada en çok yapılan hata ise “binde birler basamağı” olmuştur. Bu cevabı veren öğretmen adaylarının bir kısmının en sağdan onda birler şeklinde başlayarak üçüncü sırada binde birlere ulaştığı görülmüştür. Bir kısmı ise tam kısım iki basamaklı olduğu için birler ve onlar şeklinde adlandırma yaparken virgülden sonrası için yüzde birler ile başlayıp binde birlere ulaşmıştır.

En çok yapılan hatalı isimlendirmelerden biri de “onda birler basamağı” olmuştur. Bu öğretmen adayları virgülden sonraki ilk basamağı “birde birler”, ikinci basamağı ise “onda birler” şeklinde adlandırmıştır.

Şekil 17’de görüldüğü gibi tamamen hatalı yanıtlar da bulunmaktadır.



Şekil 17. Ondalık ifadelerdeki basamak isimleriyle ilgili hatalı bir yanıt örneği

Şekil 17’deki yanıtta öğretmen adayı basamak isimlerine en soldan başlamış ve doğal sayılarda olduğu gibi birler, onlar, yüzler,... şeklinde ilerlemiştir.

Basamak isimlerinin çözümleme yoluyla ezberlenebileceği düşünülebilir. Ancak yanlış yanıtların sayısının fazla olması öğretmen adaylarının bu konudaki eksikliğini göstermektedir.

4.1.8. KNT 8. soruya ilişkin bulgular (bir sayının çözümlemesi)

Öğretmen adaylarından 204,57 sayısını çözümlemeleri istenmiş ve verilen yanıtlar doğruluklarına göre sınıflandırılmıştır. Sayıyı doğru bir şekilde çözümleyen öğretmen adaylarının kesir, ondalık sayı, üslü gösterim veya doğal sayı kullandıkları görülmüştür. Doğru çözümlemelerden bazıları Şekil 18’de verilmiştir.

$$(2 \times 100) + (0 \times 10) + (4 \times 1) + (5 \times 0,1) + (7 \times 0,01)$$

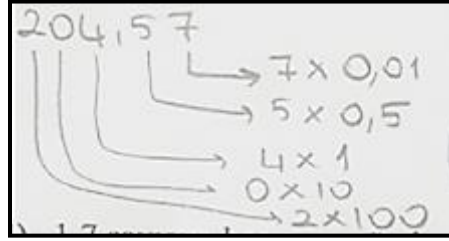
$$2 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$$

$$2 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{100}$$

$$200 + 4 + 0,5 + 0,07 = 204,57$$

Şekil 18. Bazı öğretmen adaylarının doğru çözümleme örnekleri

Bazı öğretmen adayları ise her bir rakamın basamak değerlerini yapmış fakat toplama işlemi yapmamıştır. Bununla birlikte tek bir terimde dikkatsizlikle yapılmış olabileceği düşünülen hatalar *kısmen doğru* olarak nitelenmiştir. Şekil19’da kısmen doğru şeklinde nitelenmiş bir örnek verilmiştir.



Şekil 19. Sadece basamak değerleri yazılmış çözümleme örneği

Öğretmen adaylarının çözümleri *doğru*, *kısmen doğru* ve *yanlış* olarak sınıflandırılıp, Tablo 36’da bu soruya ilişkin oranlar verilmiştir.

Tablo 36

KNT 8. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Tamamen doğru	Kısmen doğru	Yanlış
1. Sınıf	17 (%42,5)	3 (%7,5)	20 (%50)
2. Sınıf	17 (%42,5)	5 (%12,5)	18 (%45)
3. Sınıf	20 (%50)	8 (%20)	12 (%30)
4. Sınıf	26 (%65)	5 (%12,5)	9 (%22,5)
Toplam	80 (%50)	21 (%13,125)	59 (%36,875)

Tablo 36’da görüldüğü gibi öğretmen adaylarının sadece yarısı verilen sayıyı doğru bir şekilde çözümleyebilmiştir. Sınıf düzeyiyle birlikte doğru çözümleyen öğretmen oranında da artış dikkat çekmektedir. 59 öğretmen adayının yanlış çözümlmeleri incelendiğinde en sık yapılan hatalar Şekil 20’de örneklendirilmiştir.



Şekil 20. En sık yapılan yanlış çözümlmelere örnekler

İlk örnekte görüldüğü gibi öğretmen adaylarının bir kısmı sayıyı ondalık olarak değil doğal sayı olarak çözümlemiştir. Bazı öğretmen adaylarının çözümlemenin ne olduğunu bilmedikleri verdikleri örneklerden anlaşılmıştır. Sayıyı çözümlemek yerine sayının okunuşunu veya basamak isimlerini yazmışlar ya da sayıyı kesre çevirmişlerdir. Bu örneklerde olduğu gibi farklı hataların olduğu göz önüne alındığında çözümleme kavramının üzerinde durulması gerektiği anlaşılmaktadır.

4.1.9. KNT 9. soruya ilişkin bulgular (tam sayılarda işlemler)

Öğretmen adaylarına tam sayılarda işlemlere yönelik dört işlemi de içeren “ $17 - (-4) - (-15+3) : (-6) \cdot (-2) = ?$ ” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının işlem önceliğine uyarak;

$$\begin{aligned} &= 17 - (-4) - (-12) : (-6) \cdot (-2) \\ &= 17 - (-4) - (+2) \cdot (-2) \\ &= 17 - (-4) + 4 \\ &= 25 \end{aligned}$$

adımlarıyla sonuca ulaşmaları beklenmiştir. Verilen yanıtlar incelendiğinde bazı öğretmenlerin (%34,375) doğru sonuca ulaştıkları ancak büyük bir kısmının işlem önceliğini yanlış uyguladığı görülmüştür. Bazı öğretmen adayları ise işlem önceliğine dikkat etmelerine rağmen yaptıkları işlem hataları ile doğru sonuca ulaşamamıştır. Bu soruya ilişkin verilen yanıtların dağılımı Tablo 37’de verilmiştir.

Tablo 37

KNT 9.soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Doğru Yanıt (25)	İşlem Hatası	İşlem Önceliği Hatası
1.Sınıf	15 (%37,5)	3 (%7,5)	22 (%55)
2.Sınıf	13 (%32,5)	2 (%5)	26 (%65)
3.Sınıf	15 (%37,5)	2 (%5)	23 (%57,5)
4.Sınıf	12 (%30)	2 (%5)	26 (%65)
Toplam	55 (%34,375)	9 (%5,625)	97 (%60,625)

Tablo 37’de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının yaklaşık %60’ı işlem önceliğine dikkat etmemiştir. Genelde öğretmen adaylarının önce çarpma sonra bölme yaptığı görülmüştür. İşlem hatası yapan 9 öğretmen adayından 7’si 17 yanıtını bulmuştur. Bu yanıtlardan biri Şekil 21’de verilmektedir.

Şekil 21. İşlem önceliğine uyulmasına rağmen işlem hatası yapılan bir örnek

Görüldüğü gibi parantez içi, bölme, çarpma ve toplama-çıkarma sırası izlenmiş olmasına rağmen tam sayılarda işlem yaparken hata yapılmış +4 yerine -4 bulunmuştur. Bu nedenle sonuç yanlış çıkmıştır.

İşlem önceliği hatası yapılan çözümlerde en sık bulunan sonuç 22 olmuştur. 97 öğretmen adayının 91'i aynı hatalı sonucu bulmuştur. Bu yanıtlardan bir tanesi Şekil 22'de verilmiştir.

The image shows a handwritten solution for the expression $17 - (-4) - (-15+3) : (-6) * (-2) = ?$. The student has written the expression as $17 - (-4) - (-15+3) : (-6) * (-2) = ?$ and then simplified it to $17 + (+4) + (+1) = 22$. The student has incorrectly applied the order of operations, treating the division and multiplication as addition.

Şekil 22. İşlem önceliği hatası yapılan bir örnek

Verilen örnekte öğretmen adayının en solda bölme işlemi olmasına rağmen önce çarpma sonra bölme işlemi yaptığı görülmektedir. Tam sayı işlem sonuçlarında hata olmamasına karşı işlem önceliğine uyulmaması nedeniyle cevap hatalı bulunmuştur. Öğretmen adaylarının %50'den fazlasının aynı hatayı yaptığı görülmüştür

4.1.10. KNT 10. soruya ilişkin bulgular (tam sayılarda birleşme özelliği)

Testin 10. sorusunda toplama ve çarpma gibi bazı işlemlerde geçerli olan ancak bölme ve çıkarma işlemlerinde geçerli olmayan birleşme özelliği ile ilgili öğretmen adaylarının bilgileri yoklanmıştır. Öğretmen adaylarına tam sayılarda çıkarma işleminin birleşme özelliğinin olup olmadığı sorulmuş ve açıklama yapmaları istenmiştir. Bazı öğretmen adayları birleşme özelliğini açıklayabilmişken bazılarının ise yanlış açıklamalarda bulunduğu, birleşme özelliğinin ne olduğunu bilmedikleri görülmüştür. Ayrıca tam sayılarda çıkarma işleminin birleşme özelliği olmadığını belirten ancak açıklama yapmayan öğretmen adayları da olmuştur. Verilen yanıtlar bu bağlamda sınıflandırılmış ve yanıtların dağılımı Tablo 38'de verilmiştir.

Tablo 38

KNT 10. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Doğru Açıklama Yapanlar	Açıklama Yapmadan "Yoktur" Diyenler	Yanlış Açıklama Yapanlar
1.Sınıf	8 (%20)	9 (%22,5)	24 (%60)
2.Sınıf	21 (%52,5)	4 (%10)	15 (%37,5)
3.Sınıf	18 (%45)	8 (%20)	14 (%35)
4.Sınıf	22 (%55)	3 (%7,5)	15 (%37,5)
Toplam	69 (%43,125)	24 (%15)	68 (%42,5)

Tablo 38 incelendiğinde 1.sınıf öğretmen adaylarının diğer sınıf düzeylerine bakıldığında oldukça düşük bir doğruluk oranında kaldığı görülmektedir. Tüm sonuçlara

bakıldığında doğru ve yanlış açıklama yapan öğretmen adaylarının sayılarının birbirine yakın olduğu da anlaşılmaktadır. Yanlış açıklamalardan bir kısmı birleşme özelliğinin olduğunu savunurken bir kısmı ise olmadığını belirtmiştir. Şekil 23'te yanlış açıklama yapan bazı öğretmen adaylarının yanıtları görülmektedir.

Handwritten mathematical examples and explanations for the associative property of subtraction:

$$3 - (5 - 2) = 3 - 3 = 0$$

$$(3 - 5) - 3 = -2 - 3 = -5$$

0 ≠ -5
0 yu 2'den
birleşme
özelliliği yok

Vardır. Çünkü toplama işleminin birleşme özelliği vardır. ve çıkarma işlemi negatif sayılarla toplama işlemidir.

$5 - (4 - 3) \rightarrow$ örnekte olsun mesela
"orada herhangi bir çarpma, bölme olmadığı için birleşme özelliği vardır. $(5 - 4) - 3$ de de aynı sonuç çıkar ettikleriz."

Şekil 23. "Tam sayılarda çıkarma işleminin birleşme özelliği var mıdır?" sorusuna verilen bazı yanıtlar

Şekil 23'teki ilk örnekte öğretmen adayı birleşme özelliğinin olmadığını ifade etse de açıklaması yanlıştır. Açıklamasında çıkarma işareti kullanmasına rağmen çarpmanın çıkarma üzerinde dağılma özelliğini araştırmıştır. Son iki örnekte ise öğretmen adaylarının birleşme özelliğinin var olduğunu ifade ettikleri görülmektedir. Yazılı açıklamasında çıkarma işleminde birleşme özelliğinin olduğunu savunan 3.sınıf öğretmen adaylarından Simre ile görüşme yapılmıştır.

Simre, Şekil 24'te gösterilen yazılı yanıtında birleşme özelliğinin olduğunu açıklamasına rağmen görüşmede fikir değiştirmiştir.

Handwritten mathematical example and answer for the associative property of subtraction:

$$(2 - 3) - 3 = 2 - 3 - 3$$

Evet vardır.

Şekil 24. Simre'nin KNT 10.soruya ilişkin yanıtı

Şekil 24'te görüldüğü gibi Simre yazmış olduğu iki ifadenin sonucunu eşit olarak düşünmüş ve birleşme özelliğinin olduğunu savunmuştur. Görüşme sırasında ise araştırmacı ile aralarında geçen diyalog şu şekildedir:

A: Birleşme özelliğinin ne olduğunu açıklar mısın Simre?

S: Parantez içinde a işlem b ile parantez dışındaki c'nin işleme girmiş hali ile parantezi tamamen kaldırarak işlemleri yapınca aynı sonucun çıkmasıdır.

A: Tam sayılarda çıkarma işlemi üzerinden açıklar mısın? Birleşme özelliği var mıdır?

S: Ben karıştırıyorum hep aslında birleşmeyi de mesela $(10-3) -5 = 10-3-5$ ikisinin de sonucu 2 çıkar.

A: Parantezin yeri değişse sorun olur mu? Son ikisinde olsa yani.

S: Denemem lazım. $10 - (3-5) = 8$ oluyor. $10-3-5 = 2$ oluyor. O zaman her zaman birleşme geçerli olmuyor. İki yönden birinde olmayınca yoktur diyebiliriz.

Diyalogdan da görüldüğü gibi Simre birleşme özelliğini tam olarak ifade edememiş, bu nedenle de sayıları deneyerek anlamaya çalışmıştır.

Bir başka görüşme yapılan 3.sınıf öğretmen adayı Orhan olmuştur. Tam sayılarda çıkarma işleminin birleşme özelliğinin olmadığını ifade eden Orhan ile yapılan görüşmede araştırmacı ile aralarında şu diyalog geçmiştir:

A: Tam sayılarda çıkarma işleminin birleşme özelliği var mıdır?

O: Hayır yoktur. Aksi örnek vererek gösterebiliriz.

A: Bir örnek verebilir misin o zaman?

O: Mesela $3-5 = -2$ ama $5-3 = 2$ 'dir. Eşit olmadığı için birleşme özelliği yoktur.

A: Birleşme özelliğinin ne olduğunu açıklar mısın?

O: İki sayının a işlem b, eğer b işlem a'ya eşit oluyorsa bu birleşme özelliğidir.

Görüldüğü gibi öğretmen adayının cevabı doğru olmasına karşın açıklaması ve birleşme özelliğinden anladığı şey farklıdır. Öğretmen adayları tarafından değişme özelliği ile birleşme özelliği karıştırılabilmektedir. Bu nedenle de işlemleri yapabilmenin yanı sıra özelliklerin ne olduğu üzerine de bilgi sahibi olmanın önemi anlaşılmaktadır. Görüşmelerde öğretmen adaylarına sadece çıkarma işleminde değil toplama, çarpma ve bölme de birleşme özelliğinin olup olmadığı sorulmuştur. Toplama ve çarpma için her bir aday, birleşme özelliğinin olduğunu doğrudan belirtmiştir. Ancak çıkarma ve bölme işlemlerinde sayılarla deneme yoluna gitmişlerdir.

4.1.11. KNT 11. soruya ilişkin bulgular (rasyonel sayılarda işlem)

Tam sayılı kesir biçimde gösterilen negatif rasyonel sayı ile ilgili öğretmen adaylarının işaretin anlamını ne derece bildiğini anlayabilmek adına “ $-3\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = ?$ ” sorusu sorulmuştur. 7. sınıf düzeyinde yer alabilecek olan bu soru ile ilgili öğretmen adaylarından sorunun çözümüne ulaşabilecek alan bilgisine sahip olmaları beklenmiştir. İlk sayıda yer alan negatifin işaret veya yön anlamına geldiği göz önüne alındığında “ $-\frac{16}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{12}{5}$ ” sonucuna ulaşılabilir. Öğretmen adaylarının yanıtı incelendiğinde genel olarak iki cevap üzerine yoğunlaşıldığı görülmüştür. Buna göre yapılan dağılım Tablo 39’da verilmiştir.

Tablo 39

KNT 11. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Doğru Yanıt ($-12/5$)	Yanlış Yanıt (-2)	Diğer Yanlış Yanıtlar
1.Sınıf	14 (%35)	21 (%52,5)	5 (%12,5)
2.Sınıf	14 (%35)	23 (%57,5)	3 (%7,5)
3.Sınıf	16 (%40)	19 (%47,5)	5 (%12,5)
4.Sınıf	25 (%62,5)	13 (%32,5)	2 (%5)
Toplam	69 (%43,125)	76 (%47,5)	15 (%9,375)

Tablo 39’den de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının yaklaşık %43’ü doğru yanıtı ulaşabilmiştir. Ancak yarıya yakını “ -2 ” yanıtını bulmuştur. Bu sonucu bulan iki öğretmen adayının çözümü Şekil 25’te verilmiştir.

The image shows two handwritten solutions for the problem $-3\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = ?$. The left solution shows the student converting the mixed number to an improper fraction: $-3\frac{1}{5} = -\frac{16}{5}$, then adding $\frac{4}{5}$ to get $-\frac{12}{5}$. The right solution shows the student adding the fractions directly: $-\frac{16}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{12}{5} = -2$.

Şekil 25. Negatif sembolünü sadece tam sayıya atfeden çözüm örnekleri

Soldaki örnekte öğretmen adayı ilk önce kesir kısımlarını kendi arasında toplayıp 1’e eşit olduğunu bulmuş, sonrasında tam kısımla toplayıp -2 ’ye ulaşmıştır. Sağdaki örnekte ise önce 5 ile (-3) ’ün çarpıldığı sonra üzerine +1 eklenerek “ $-\frac{14}{5}$ ” sayısına ve daha sonra da bunu $\frac{4}{5}$ ile toplanınca -2 sonucuna ulaşıldığı görülmüştür. Çok sayıda öğretmen adayının aynı hatayı yapmasının negatifin anlamı konusunda bilgi eksikliğini işaret ettiği söylenebilir.

Bir başka sık yapılan hata ise tam sayıyı çarpma işlemi olarak ele almak olmuştur. Şekil 26’da 2. sınıf öğretmen adayının yapmış olduğu bu tür bir hata görülmektedir.

$$-3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

Şekil 26. Tam sayılı kesri çarpma işlemi olarak uygulayan bir çözüm

Şekil 26’da görüldüğü gibi öğretmen adayı -3 ve $\frac{1}{5}$ kesri arasına çarpma işlemi koymuş, aynı şekilde $\frac{4}{5}$ ’i de $4 \cdot \frac{1}{5}$ şeklinde ayırmıştır. $\frac{1}{5}$ ortak çarpanında -3 ve 4 ’ü toplayarak 1 bulmuş ve sonucu $1 \cdot \frac{1}{5}$ ’den $\frac{1}{5}$ olarak açıklamıştır.

Paydaları eşit ve sadece iki kesirden oluşan bu soruda bu denli yüksek oranda yanlış yanıtın olacağı düşünülmeyebilir. Ancak görüldüğü gibi iki rasyonel sayının toplamını içeren bu soruda öğretmen adaylarının yarıdan azı soruyu doğru cevaplayabilmiştir.

4.1.12. KNT 12. soruya ilişkin bulgular (devirli sayı sorusu ve basamak sorusu)

Testte yer alan 12.soruda öğretmen adaylarına iki tane alt soru sorulmuştur. Bu sorulardan ilki, “ a , 7 ’nin katı olmayan bir doğal sayı olmak üzere $\frac{a}{7}$ kesri her zaman devirli midir?” olurken diğeri, “Yüzler basamağı 8 olan bir sayı yüzler basamağı 5 olan bir sayıdan her zaman büyük müdür?” sorusudur. İlk soruda pay 7 ’nin katı olmadığında 7 sayısı 10 ve 10 ’un kuvvetleri biçiminde yazılamadığı için $\frac{a}{7}$ tam sayı olamaz veya sadeleşemez. Bu nedenle $\frac{a}{7}$ kesri kesinlikle devirlidir. İki doğal sayının oranı olacağı için de ifade irrasyonel bir sayı olamaz. Bu soru ile öğretmen adaylarının devirli sayılarla ilgili bilgisi incelenmiştir.

İkinci alt soru iki sayının karşılaştırılmasına yöneliktir. Üç basamaklı iki doğal sayının karşılaştırılmasında yüzler basamağı büyük olan sayı daha büyük olmasına karşı, sayılardan biri 3 diğeri 5 basamaklı olduğu takdirde yüzler basamağının kaç olduğunun önemi yoktur. Ayrıca rasyonel sayıların karşılaştırılmasında da negatiflik pozitifliğe göre sıralama farklılaşabilir. Bu soruyla birlikte öğretmen adaylarının farkındalıkları sorgulanmıştır. Her iki soruya ait yanıtların dağılımı Tablo 40’ta bir arada verilmiştir.

Tablo 40

KNT 12.soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	a, 7'nin katı olmayan bir doğal sayı olmak üzere $\frac{a}{7}$ kesri her zaman devirli midir?		Yüzler basamağı 8 olan bir sayı yüzler basamağı 5 olan bir sayıdan her zaman büyük müdür?	
	EVET	HAYIR	EVET	HAYIR
1.Sınıf	21 (%52,5)	19 (%47,5)	3 (%7,5)	37 (%92,5)
2.Sınıf	19 (%47,5)	21 (%52,5)	5 (%12,5)	35 (%87,5)
3.Sınıf	11 (%27,5)	29 (%72,5)	3 (%7,5)	37 (%92,5)
4.Sınıf	21 (%52,5)	19 (%47,5)	2 (%5)	38 (%95)
Toplam	72 (%45)	88 (%55)	13 (%8,125)	147 (%91,875)

İlk alt soruya verilen yanıtlara bakıldığında öğretmen adaylarının yarıdan fazlasının (%55) $\frac{a}{7}$ rasyonel sayısının her zaman devirli olamayabileceğini belirttikleri görülmüştür. Oranın yüksekliği ve cevaplarda açıklama yer almaması nedeniyle görüşmelerde de öğretmen adaylarına aynı soru sorulmuştur. 2. sınıf öğretmen adayı Halit ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir:

H: Bölüp bakarız. Devirli olmaz her zaman. Sonlu da olabilir. Tam çıkmaz ama imkansız.

A: Sonsuza kadar devretmeden gidebilir mi?

H: Yok ya o da olmaz. Bir yerde devreder en kötü ihtimalle. Neden 7 ki. 7'nin özel bir durumumu var?

A: 7 yerine 11 de diyebilirim, 3 de diyebilirim.

H: Düşünüyorum da sonlu da olmaz ya. Her zaman devirli çıkar.

Görüldüğü gibi Halit ilk başta deneyerek bulmak gerektiğini söylemiş ancak daha sonra her zaman devirli çıkacağını ifade etmiştir. Bir başka 2. sınıf öğretmen adayı Çise ise, “Katı olmadığı sürece tam sayı çıkmaz bir kere. Ama devirli de olabilir, bir yerde bitebilir de veya karışık da gidebilir. Denemek lazım sayıları.” şeklinde açıklamada bulunmuştur.

4. sınıf öğretmen adayı Şeyma ise devirli sayıların rasyonel olarak yazılması ile ilgili kuralı vurgulayarak, “Devirli sayıların kuralı vardı. Paydası 9’lu oluyordu. 7 olmaz o yüzden. 7 olursa ya sonlu çıkar ya da π sayısı gibi çıkar.” şeklinde açıklama yapmıştır. Araştırmacının, “Devirli sayıların tamamının paydası 9 mudur?” sorusu üzerine, “9, 99, 90 gibi olabilir. Ama 7 olmaz.” şeklinde cevap vermiştir. Şeyma kesirlerin sadeleşebileceğini hesaba katmamış ve kuraldan yola çıkarak yanlış açıklamada bulunmuştur.

Görüşme sırasında 7’ye bölerek deneme yapan öğretmen adaylarından Maksude, $\frac{1}{7}$ kesrini deneyerek ondalık kısmına bakmak istemiştir. Bölmeyi yaparken kalanların

sürekli farklı olduğunu görüp, “Sanırım kurallı gitmeyecek.” şeklinde açıklama yapmıştır. Fakat sonunda 1 kalanını görünce, “1 kaldı. Buradan itibaren başa dönüyor. Uzun sürdü ama demek ki a, 7’nin katı olmadığı sürece $\frac{a}{7}$ devirli oluyor.” diyerek sonuca ulaşmıştır.

$\frac{a}{7}$ ’nin iki tam sayının oranı şeklinde yazılması onu rasyonel yapıyor olmasına rağmen, ondalık gösteriminin irrasyonel olabileceği de düşünülebilmektedir. Bu durum 1.sınıf öğretmen adayı Tuğçe ile görüşmede ortaya çıkmıştır. Tuğçe başlangıçta a’nın değerine bağlı olarak sonucun değişeceğini, devirli veya devirsiz olabileceğini ifade etmiştir. Daha sonra araştırmacı ile aralarında şu diyalog geçmiştir:

A: Devirli sayıların rasyonelliği ile ilgili ne düşünüyorsun?

T: Sürekli belli bir şekilde kurallı gidiyorsa bunu rasyonel hale getirebiliyorduk. Ama π gibi olursa rasyonel olmuyordu.

A: O zaman $\frac{a}{7}$ yani $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{7}$ falan bazıları rasyonel bazıları irrasyonel midir?

T: Evet bölerek bakmak lazım. Rasyonel de irrasyonel de olabilir.

Tuğçe görüldüğü gibi iki doğal sayının oranı olan $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ ve $\frac{8}{7}$ gibi sayıların dahi irrasyonel bir sayı olabileceğini düşünmüştür.

Tüm sonuçlar değerlendirildiğinde öğretmen adaylarının %55’inin bu soruya yanlış yanıt vermesi, devirli, rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarında da yanlışların olduğuna işaret etmiştir. Görüşmelerde hiçbir öğretmen adayının, “İki doğal sayının oranı kesinlikle rasyoneldir. Bu nedenle de sonlu veya devirli ondalık açılıma sahiptir. Bu örnekte payda 7 olduğuna göre 10’un kuvveti şeklinde yazılamaz. Bu nedenle de ifade kesinlikle devirlidir.” açıklamasını yapmaması bu durumu ortaya koymaktadır.

Öğretmen adaylarına “Yüzler basamağı 8 olan bir sayı yüzler basamağı 5 olan bir sayıdan her zaman büyük müdür?” şeklinde ikinci alt soru sorulmuştur. Tablo 40’da da görüldüğü gibi sadece 13 tane öğretmen adayı eşit basamaklı sayıları düşünerek “Evet, büyük olur.” yanıtını vermiştir. “Hayır” diyen adayların bir kısmı negatif sayıları örnek gösterirken, bir kısmı ise farklı basamak sayılarına sahip sayıları örnek gösterdiği görülmüştür.

4.1.13. KNT 13. soruya ilişkin bulgular (devirli sayıyı a/b haline getirme)

Testin 13. sorusunda öğretmen adaylarından bir devirli sayıyı kesirli hale getirmeleri istenmiştir. $3,04\overline{6}$ sayısını kesirli biçimde ifade edildiğinde $3\frac{46}{990}$ veya $\frac{3046-30}{990} = \frac{3016}{990}$ sonucu elde edilir. Bu sayılar veya sadeleşmiş halleri de doğru kabul edilmektedir. Öğretmen adaylarının bu soruya vermiş oldukları yanıtlar doğruluklarına göre kategorilendirilmiş ve dağılımları Tablo 41’de gösterilmiştir.

Tablo 41

KNT 13. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Doğru Yanıtlar	Yanlış Yanıtlar			Yanlış Yanıtlar Toplamı
		Sadece Payı Doğru Olan	Sadece Paydası Doğru Olan	Pay ve Paydanın İkisi de Hatalı Olan	
1. Sınıf	22 (%55)	2 (%5)	14 (%35)	2 (%5)	18 (%45)
2. Sınıf	21 (%52,5)	0 (%0)	14 (%35)	5 (%12,5)	19 (%47,5)
3. Sınıf	26 (%65)	0 (%0)	11 (%27,5)	3 (%7,5)	14 (%35)
4. Sınıf	30 (%75)	0 (%0)	5 (%12,5)	5 (%12,5)	10 (%25)
Toplam	99 (%61,875)	2 (%1,25)	44 (%27,5)	15 (%9,375)	61 (%38,125)

Öğretmen adaylarının yaklaşık %62'si devirli sayıyı doğru bir şekilde rasyonel hale getirebilmiştir. Rasyonel hale doğru getiremeyen öğretmen adaylarının bazıları sadece payı bazıları ise sadece paydayı yanlış yapmıştır. Her ikisini de yanlış bulan öğretmen adayları da mevcuttur. Toplamda 59 öğretmen adayı payı, 17 öğretmen adayı ise paydayı yanlış yazmıştır. En sık yapılan hatalar Tablo 42'de ve Tablo 43'te sunulmuştur.

Tablo 42

Devirli sayıyı rasyonel hale getirirken payda kısmında yapılan hataların dağılımı

Hatalar	f
“Tüm sayıda devreden kadar 9, devretmeyen kadar sıfır” hatası ile 9900 bulanlar	7 kişi
“Virgülden sonra devreden kadar sıfır, devretmeyen kadar 9” hatası ile 900 bulanlar	4 kişi
“Devreden kadar 9 konulur.” hatası ile 99 bulanlar	3 kişi
Diğer hatalar	3 kişi
Toplam	17 kişi

Payda bulunurken ondalık kısımdaki devreden sayısı kadar 9, devretmeyen sayısı kadar 0 konması gerekirken, öğretmen adaylarının 7'si ondalık kısım yerine tüm sayıya göre 0 veya 9 koymuştur. Böylece paydayı 9900 olarak bulmuşlardır. Dört öğretmen adayı ise devreden kadar 9 koymak yerine devreden kadar sıfır, devretmeyen kadar 9 koymuştur. Bu nedenle paydayı 900 olarak bulmuştur.

Tablo 43

Devirli sayıyı rasyonel hale getirirken pay kısmında yapılan hataların dağılımı

Hatalar	f
“Tüm sayıdan devreden kısım çıkarılır.” hatası ile 3000 bulanlar	32 kişi
“Pay değiştirilmez.” hatası ile 3046 bulanlar	14 kişi
“Tüm sayıdan tam kısım çıkarılır.” hatası ile 3043 bulanlar	7 kişi
Diğer hatalar	6 kişi
Toplam	59 kişi

En çok yapılan hata pay kısmında olmuştur. 59 öğretmen adayının 32’si pay kısmında 3046’dan 46’yı çıkararak sonucu 3000 bulmuştur. Sadece paydaya odaklanıp payı aynı bırakan öğretmen adayları da olmuştur. 14 öğretmen adayı paydaya 3046 yazmıştır. Ayrıca tüm sayıdan tam kısmı çıkararak “3046–3=3043” bulan öğretmen adayı sayısı 7 olmuştur.

Görüldüğü gibi bu kuralın uygulanmasına yönelik bilgi eksikleri mevcuttur. En çok da pay kısmını yazarken hangi sayının hangi sayıdan çıkarılacağına dair zorluklar göze çarpmaktadır. En yüksek doğruluk oranının ise 4.sınıf düzeyinde yer alması bir gelişim göstergesi olarak düşünülebilir.

4.1.14. KNT 14. soruya ilişkin bulgular (iki devirli sayının toplamı)

Testin 14. sorusunda “0,9999... + 0,111... = ?” işleminin sonucu sorulmuştur. Bu soruda 0,999... devirli sayısının 1’e eşit olduğu ele alındığında cevap kolaylıkla 1, $\bar{1}$ olarak bulunmaktadır. Öğretmen adaylarının yanıtları incelendiğinde bazılarının alt alta toplama yoluna gittiği, bazılarının önce kesre çevirip daha sonra topladığı görülmüştür. Tablo 44’te soruyla ilişkili yanıtların dağılımı verilmiştir.

Tablo 44

KNT 14. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		
	(1, $\bar{1}$ veya 10/9)	1,111...0 Yanıtı	1 Yanıtı	Diğer Yanlış Yanıtlar	
1.Sınıf	18 (%45)	11 (%27,5)	6 (%15)	5 (%12,5)	
2.Sınıf	23 (%57,5)	3 (%7,5)	11 (%27,5)	3 (%7,5)	
3.Sınıf	23 (%32,5)	10 (%25)	12 (%30)	5 (%12,5)	
4.Sınıf	14 (%35)	9 (%22,5)	11 (%27,5)	6 (%15)	
Toplam	68 (%42,5)	33 (%20,625)	40 (%25)	19 (%11,875)	

Tablo 44’ten de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının yarıdan azı (%42,5) soruyu doğru cevaplayabilmiştir. Öğretmen adaylarının sorunun çözümünde iki ayrı yaklaşımda bulunduğu görülmüştür. Büyük bir kısmı sayıları önce kesre çevirmiş sonra toplamıştır.

Böylece $10/9$ sonucunu bulmuşlardır. $10/9$ sonucunun bulunmasından sonra bölümü yapıp sonucu $1,111\dots$ şeklinde ifade eden öğretmen adayları da olmuştur.

Yanlış sonuç bulan öğretmen adaylarına bakıldığında ise genelde alt alta toplama yoluna gittikleri görülmüştür. Bu durumda da bazı öğretmen adayları $1,111\dots0$ sonucunu bulmuştur. Şekil 27’de bu duruma örnek verilmektedir.

$$\begin{array}{r} 99999 - \\ 0,1111 - \\ \hline 1,1 \dots 110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,9999 \\ + 0,1111 \\ \hline 1,1110 \end{array}$$

Şekil 27. Sonucu $1,111\dots0$ bulan öğretmen adaylarının yanıtlarına örnekler

Öğretmen adaylarının alt alta yazınca en sağda basamak varmış gibi 9 ve 1’i toplayıp sonucu sıfır buldukları devamındaki basamaklarda ise eldeyle birlikte 1 buldukları görülmektedir. Bir yandan son basamağa sıfır koyarak sayıyı sonlu yaparken bir yandan da 1’lerin arasına üç nokta koyarak sonsuzluğu işaret etmişlerdir.

En sık rastlanan bir başka yanıt da 1’dir. Şekil 28’de bu sonucu bulan bazı çözüm örneklerine yer verilmiştir.

$$\begin{array}{r} 0,9999 \dots + 0,1111 \dots = \\ 0,9 \quad 0,1 \\ \frac{9}{10} \quad \frac{1}{10} \\ \hline 1 // \end{array}$$

$$0,999\dots + 0,111\dots = 1$$

$$\begin{array}{r} 0,9999 \dots \\ + 0,1111 \dots \\ \hline 1,0000 \dots \end{array}$$

Şekil 28. Sonucu 1 bulan öğretmen adaylarının yanıtlarına örnekler

İlk örnekte öğretmen adayının devirli sayıyı kesre yanlış dönüştürdüğü ve bu nedenle de toplamlarını 1 bulduğu görülmektedir. Son iki örnekte ise 1 ve 9’un birbirini 10’a tamamladığını düşünüp $0,999\dots$ ile $0,111\dots$ ’in toplamının da birbirini 1’e tamamladığını ifade eden yanıtlar görülmektedir.

Görüldüğü gibi bazı öğretmen adayları iki devirli sayının toplamını bulurken sayıları kesre çevirme yerine, iki doğal sayının veya iki sonlu ondalık ifadenin toplamı şeklinde işlem yapabilmektedir. Bu da hatalı sonuçlara yol açmaktadır.

4.1.15. KNT 15. soruya ilişkin bulgular (çarpan sayısı bulma)

Öğretmen adaylarına 40 sayısının tam sayı çarpanlarının kaç tane olduğu sorulmuştur. 40 sayısının, $\{-1, -2, -4, -5, -8, -10, -20, -40, 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$ kümesinin elemanları olmak üzere 16 tane tam sayı çarpanı vardır. Öğretmen adaylarının doğru ve yanlış yanıtları kategorilere ayrılarak Tablo 45'te verilmiştir.

Tablo 45

KNT 15. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Doğru (16 Yanıt)	Yanlış			
		Eksik Bulanlar 15 veya 14 Yanıt	Sadece Pozitif Çarpanları Bulanlar (8 Yanıt)	Sadece Asal Çarpanları Bulanlar (2 Yanıt)	Diğer Yanlış Yanıtlar
1. Sınıf	24 (%60)	4 (%10)	8 (%20)	1 (%2,5)	3 (%7,5)
2. Sınıf	18 (%45)	4 (%10)	7 (%17,5)	4 (%10)	7 (%17,5)
3. Sınıf	28 (%70)	3 (%7,5)	5 (%12,5)	1 (%2,5)	3 (%7,5)
4. Sınıf	27 (%67,5)	3 (%7,5)	5 (%12,5)	0 (%0)	5 (%12,5)
Toplam	97 (%60,625)	14 (%8,75)	25 (%15,625)	6 (%3,75)	18 (%11,25)

Tablo 45'te öğretmen adaylarının yaklaşık %61'inin çarpan sayısını 16 olarak bulduğu görülmektedir. Sınıf düzeyine göre düzenli bir artış veya azalışın olmadığı da dikkat çekmiştir. Bazı öğretmen adayları listeleyerek bazıları ise asal çarpanlara ayırdıktan sonra üsleri birer arttırıp çarpıp iki katını alarak tam sayı çarpan sayısını bulmuşlardır. Doğru yanıtlara örnekler Şekil 29'da gösterilmektedir.

$1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40,$ $-1, -2, -4, -5, -8, -10, -20, -40$ 16 tane	$40 = 2^3 \cdot 5$ $2(3+1) \cdot (1+1) = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16 \text{ tane}$

Şekil 29. Çarpan sayısını doğru bulan çözüm örnekleri

Listeleme sırasında bir veya iki tane çarpanı eksik yazan adaylar tabloda ayrıca gösterilmiştir. 14 adayın çarpan sayısını 15 veya 14 şeklinde buldukları görülmüştür. Adayların 25'i ise tam sayı çarpanlarını değil sadece pozitif tam sayı çarpanlarını bulmuştur. Bu nedenle 16 yerine 8 sonucuna ulaşmışlardır. Kimi adayların ise asal çarpanları bulduğu ve cevabı 2 olarak ifade ettikleri görülmüştür. Bu tür yanıtlara örnekler Şekil 30'da verilmiştir.

vardır? $40 \div 2 = 20$ $20 \div 2 = 10$ $10 \div 2 = 5$ $5 \div 5 = 1$ $40 = 2^3 \cdot 5$ (2 ve 5) 2 ve 5	$40 = 2^3 \cdot 5$ $1, 2, 4, 8, 5, 10, 20, 40$ $(3+1)(1+1) = 8$	$-1, -2, -4, -5, -10, -20, -40$ $1, 2, 4, 5, 10, 20, 40$ 14 tane

Şekil 30. Çarpan sayısını eksik bulan adayların yanıtlarına örnekler

Şekil 30’da görüldüğü gibi öğretmen adaylarının yanlış yanıtları eksik listeleme, pozitif çarpanları ele alma veya asal çarpanları ele alma olarak en temel üç kategoride incelenebilir. Bu örnekler dışında çarpan sayısını bulurken asal çarpanlara yanlış ayırma, formülü yanlış uygulama, çok sayıda eksik listeleme gibi yanlış yanıtlar da ortaya çıkmıştır.

4.1.16. KNT 16. soruya ilişkin bulgular (asal sayı ikilisi)

“Aralarında iki fark bulunan asal sayılara “ikiz asallar” denir. Buna göre 100’den küçük en büyük ikiz asalları bulunuz.” sorusu öğretmen adaylarına sorulmuş ve “71 ile 73” doğru yanıtı beklenmiştir. Bazı öğretmen adayları ikiz asal örneği vermelerine rağmen en büyük iki basamaklı çifti bulamamıştır. Bazılarının ise verdikleri örneklerdeki en az bir sayının asal sayı olmadığı görülmüştür. Bu kategorilere göre dağılım Tablo 46’da verilmektedir.

Tablo 46

KNT 16. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Doğru Yanıtlar (71-73)	İkiz Asal Olup da En Büyük Olmayan Örnekler	İkiz Asal Olmayan Örnekler
1.Sınıf	13 (%32,5)	1 (%2,5)	26 (%65)
2.Sınıf	8 (%20)	7 (%17,5)	25 (%62,5)
3.Sınıf	9 (%22,5)	4 (%10)	27 (%67,5)
4.Sınıf	12 (%30)	5 (%12,5)	23 (%57,5)
Toplam	42 (%26,25)	17 (%10,625)	101 (%63,125)

Tablo 46 incelendiğinde öğretmen adaylarının bu soruyu doğru yapma oranlarının oldukça düşük olduğu görülmektedir. 42 öğretmen adayı 71 ve 73 olarak asal sayıları bulabilmiştir. 17 öğretmen adayı ise ikiz asal olduğu halde en büyük ikili olmayan örnekler vermişlerdir. Bu örnekler, 3 ile 5, 5 ile 7, 11 ile 13, 17 ile 19... gibi ikililer olmuştur.

Öğretmen adaylarının yaklaşık olarak %63’ünün asal olmayan sayıları asalmış gibi ele aldığı görülmüştür. En sık yapılan hatalı yanıtların frekansları Tablo 47’de verilmiştir.

Tablo 47

Verilen hatalı örneklerin frekansları

YANIT	f	YANIT	f
89-91	43	97-99	9
87-89	20	Diğer	16
91-93	13		

Tablo 47’den de anlaşılacağı gibi 43 öğretmen adayı 89-91 ikilisini 13 öğretmen adayı ise 91-93 ikilisini asal sayı olarak görmektedir. Bu nedenle en sık yanlış düşünülen sayının 91 olduğu görülmektedir. 91’in 2, 3 veya 5 ile tam bölünememesi nedeniyle asal bir sayı olduğu düşünülmüş olabilir. 20 öğretmen adayı ise 87’yi de asal sayı olarak sınıflamıştır.

Görüşme yapılan sekiz öğretmen adaylarından sadece ikisi 71-73 doğru yanıtını vermiştir. Görüşme yapılan öğretmen adaylarından Çise ile yapılan görüşmede şu diyalog geçmiştir:

A: 100’den küçük en büyük ikiz asal çifti nedir? (İkiz asal tanımı hatırlatıldıktan sonra)

Ç: 99, 97, 95, 93 o da olmaz. 91-89 olmaz. 91 asal değil. 89 asal 87 de öyle. 89 ve 87 o halde.

A: Bir sayının asal olduğunu nasıl anlarsın?

Ç: Başka sayılara bölünmemesi gerekiyor. 1 dışında.

A: 89 ve 87 asal mı peki?

Ç: Değil mi? İkiye bölünmüyorlar. 3’e de bakayım $8+9=17$, $8+7=15$. Aa 87 asal değil. O zaman daha düşük olacak. 85, 83, 81, 79 asal sanırım. 77 değil. 73 ve 71. Evet bunlar asal.

Görüldüğü gibi Çise hatasının farkına varıp 73 ve 71 doğru cevabına ulaşmıştır. Diğer öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerde de benzer durumlar yaşanmıştır. Öğretmen adaylarının en çok 91’in asallığını araştırmada zorlandığı görülmüştür.

4.1.17. KNT 17. soruya ilişkin bulgular (bölünebilme)

Öğretmen adaylarına testin 17. sorusunda, “12358 ve 12368 arasında 7’ye kalansız bölünen sayı var mıdır?” sorusu sorulmuş ve aşağıdaki seçenekler sunulmuştur:

- Bu 9 sayı içinde 7’ye kalansız bölünen sayılar kesinlikle vardır.
- Aradaki 9 sayıyı bölerek veya sayılara bölünebilme kuralı uygulayarak var olup olmadığını bulabiliriz.
- Hayır yoktur.

Ardışık 10 sayı içerisindeki sayılardan en az bir tanesinin 7'ye bölüneceği kesindir. Bu nedenle öğretmen adaylarından ilk seçeneği işaretlemeleri beklenmiştir. Ancak bu sayı aralığındaki sayıların tek tek denenerek 7 ile bölünebilirliğini araştırmanın gerekli olduğunu ifade eden öğretmen adayları da olmuştur. Tüm cevapların dağılımı Tablo 48'de verilmiştir.

Tablo 48

KNT 17. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Bu 9 sayı içinde 7'ye kalansız bölünen sayılar kesinlikle vardır.	Aradaki 9 sayıyı bölerek veya sayılara bölünebilme kuralı uygulayarak var olup olmadığını bulabiliriz.	Hayır yoktur.
1.Sınıf	20 (%50)	17 (%42,5)	3 (%7,5)
2.Sınıf	14 (%35)	23 (%57,5)	3 (%7,5)
3.Sınıf	17 (%42,5)	15 (%37,5)	8 (%20)
4.Sınıf	29 (%72,5)	9 (%22,5)	2 (%5)
Toplam	80 (%50)	64 (%40)	16 (%10)

Öğretmen adaylarının yarısı bu 10 sayı içerisinde 7 ile bölünebilen bir sayının mutlaka olacağını belirtirken, %40'ı uygulama yaparak araştırılabileceğini belirtmiştir. Kalan %10'u ise 7 ile bölünebilen bir sayının olmadığını ifade etmiştir. Ayrıca “Kesinlikle vardır.” diyen öğretmen adaylarının en yüksek oranının 4.sınıf düzeyinde olduğu görülmüştür.

Görüşme yapılan 4.sınıf öğretmen adaylarından Şeyma, “Evet vardır. Çünkü yedi sayıda bir tekrar ediyor. Yani yedi sayıda bir yediye tam bölünen bir sayı karşıma geliyor. Ee bunların farkı 10. O zaman aralarından biri mutlaka tam bölünür.” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Diğer öğretmen adayları da benzer yorumlar yapmıştır. 2. sınıf öğretmen adayı Çise ise ilk başta 7 ile bölünebilme kuralını uygulayıp denemek gerektiğini ifade etmiştir.

Ç: 7'ye bölünebilme kuralı vardı. Artılı eksili bir şeyler yapılyordu. Denemek lazım kuralı.

A: Bu iki sayı arasında kaç tane sayı var?

Ç: 11 tane. 9 tane de olabilir.

A: Bu 9 sayıya kuralı tek tek uygulamak mı gerekir?

Ç: Hocam, 1,2,3 falan bir şeyler yazıyorduk. Artı eksisi vardı. Birini denerdim baktım 7'nin katı değil. Eklerdim üzerine ona göre.

A: Peki hiç aralarında olmayabilir mi 7'ye bölünen bir sayı?

Ç: Olmayabilir. Ama kesin vardır ya. Çünkü 9 sayı var. Diyelim ki kalan 3. Üzerine ekleyip bulunur. 9, 7'den büyük olduğu için dedim aslında.

Görüldüğü gibi Çise ilk başta ardışık 10 sayının içerisinde 7 ile bölünebilen bir sayının olması gerektiğini belirtmemiştir. Öğretmen adaylarının yazılı yanıtlarında da bölme işlemi yaparak bulmaya çalışanların olduğu görülmüştür. N ardışık sayı içerisinde N’den daha küçük bir sayıya bölünen bir sayının kesinlikle olması gerektiği düşüncesinin bölünebilme kavramıyla ilişkili olduğu düşünüldüğünde öğretmen adaylarının bu konuda eksiklikleri olduğu söylenebilir.

4.1.18. KNT 18. soruya ilişkin bulgular (bölünebilme-modüler aritmetik işlemleri)

Bölünebilme kavramıyla ilgili bir başka soruda da öğretmen adaylarına “ $452 \cdot 22 + 134$ işleminin sonucunun 3 ile bölümünden kalan kaçtır?” sorulmuştur. Sorunun çözümü için iki yol önerilebilir. Bunlardan ilki işlem önceliğine göre işlemin sonucu bulunur ve çıkan sonuç 3’e bölünerek kalan bulunur. Daha pratik olan ikinci yol ise modüler aritmetikten de yararlanarak her bir sayı için ayrı ayrı 3 ile bölümünden kalanlar bulunur. O kalanlarla işlemler uygulanarak sonuç elde edilir.

Öğretmen adaylarının çözüm yöntemleri incelenmiş ve önce üç sayının kalanlarını bulup sonradan işlem yapanlar “kısa yoldan doğru yapanlar”, işlemlerin hiçbirinde kural uygulamayan veya sadece bir kısmında uygulayan öğretmen adayları “uzun yoldan doğru yanıtlayanlar”, sonucu yanlış bulanlar ise “yanlış yanıtlayanlar” olmak üzere kategorilere ayrılmış ve çözüm yollarıyla ilgili bulgular Tablo 49’da verilmiştir.

Tablo 49

KNT 18.soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Kısa yoldan doğru yanıtlayanlar	Uzun yoldan doğru yanıtlayanlar	Yanlış yanıtlayanlar
1.Sınıf	20 (%50)	11 (%27,5)	9 (%22,5)
2.Sınıf	22 (%55)	7 (%17,5)	11 (%27,5)
3.Sınıf	22 (%55)	11 (%27,5)	7 (%17,5)
4.Sınıf	30 (%75)	2 (%5)	8 (%20)
Toplam	94 (%58,75)	31 (%19,375)	35 (%21,875)

Tablo 49 incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık olarak %59’unun Şekil 31’de olduğu gibi pratik yoldan çözüme ulaştığı görülmektedir.

Şekil 31. KNT 18. soru ile ilgili kısa yoldan çözüm örnekleri

Şekil 31'deki yanıtlara bakıldığında ilk örnekte her bir sayının mod3'deki değerinin alındığı görülmektedir. Ortadaki yanıtta ise rakamların toplamının 3'e bölümünden kalan bulunmuştur. Son örnekteki öğretmen adayı da doğrudan kalanları yazarak sonuca ulaşmıştır.

Öğretmen adaylarının yaklaşık %19'u ise uzun işlemlerle sonuca ulaşabilmektedir. Bu yanıtlardan bazıları Şekil 32'de verilmiştir.

Şekil 32. KNT 18. soru uzun işlemlerle çözüm örnekleri

Ancak iki yolu da uygulamayan ve sonuca ulaşamayan öğretmen adayları da mevcuttur. Yanlış yanıtlayan 35 öğretmen adayının genelde işlem hatası yaptıkları görülmüştür.

4.1.19. KNT 19. soruya ilişkin bulgular (doğru ve ters orantıda orantı sabiti)

Testin 19. sorusu doğru ve ters orantı hesaplamalarında kullanılan orantı sabiti ile ilgilidir. $a = 10$, $b = 15$, $c = 20$ sayıları verilmiş olup, aşağıdaki sorular sorulmuştur:

- a ve b çoklukları doğru orantılı ise orantı sabiti kaçır?
- b ve c çoklukları ters orantılı ise orantı sabiti kaçır?

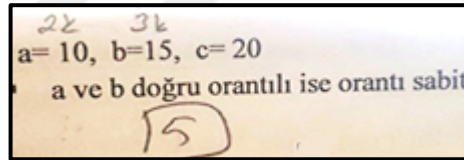
Doğru orantılı iki çokluğun bölümleri sabittir ve değişmez. Bu nedenle orantı sabiti bölerek bulunur. Ters orantıda ise çarpımlar sabittir. Bu nedenle iki çokluk çarpılarak orantı sabiti bulunur. Tablo 50'de öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtlara göre dağılım verilmiştir. Öğretmen adayının doğru bildiği orantı sabitine +, yanlış bildiği orantı sabitine “-” konulmuştur.

Tablo 50

KNT 19. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Doğru Orantı + Ters Orantı +	Doğru orantı + Ters orantı -	Doğru orantı - Ters orantı +	Doğru Orantı - Ters Orantı -
1. Sınıf	15 (%37,5)	18 (%45)	0 (%0)	7 (%17,5)
2. Sınıf	19 (%47,5)	14 (%35)	1 (%2,5)	6 (%15)
3. Sınıf	13 (%32,5)	19 (%47,5)	0 (%0)	8 (%20)
4. Sınıf	13 (%32,5)	20 (%50)	1 (%2,5)	6 (%15)
Toplam	60 (%37,5)	71 (%44,375)	2 (%1,25)	27 (%16,875)

Tablo 50 incelendiğinde her iki orantı sabitini de doğru hesaplayan öğretmen adaylarının oranının %37,5 olduğu görülmektedir. En yüksek doğruluk oranı 2.sınıf düzeyinde gerçekleşmiştir. Doğru orantıda orantı sabitini doğru bulan adayların oranı %81,875 olmuştur. Ancak ters orantıda orantı sabitini doğru bulan adayların oranı %38,75’de kalmıştır. Öğretmen adaylarının doğru orantı sabitinde en çok buldukları hatalı yanıt (29 hatalı yanıtın 15 tanesi) “5” olmuştur. 10 ve 15’in ortak böleni olan “5” orantı sabiti olarak görülmüştür. Bu hatalı yanıtın bir örneği Şekil 33’te verilmiştir.



Şekil 33. Doğru orantı sabitine yönelik hatalı yanıt

Örnekten de görüldüğü gibi öğretmen adayı 10 için 2k, 15 için 3k diyerek. k’yı 5 bulmuştur.

Ters orantıda 98 öğretmen adayı orantı sabitini yanlış bulmuştur. 12, 30, 1/2 gibi az kişi tarafından yapılan bazı yanıtların yanı sıra daha sık tekrar edilen hatalar da mevcuttur. 98 öğretmen adayının 45 tanesi soruyu boş bırakmıştır. 40 kişi ise 3/4 veya 4/3 yanıtını vermiştir. Öğretmen adaylarının doğru orantıda orantı sabitinde olduğu gibi ters orantıda da iki çoklu bölme yoluna gittikleri görülmüştür.

Görüşme yapılan öğretmen adaylarına da kavram testinin ikinci aşamasında doğru orantı ve ters orantıda orantı sabitinin ne olduğuna ve birbirleriyle ilişkisine dair sorular sorulmuştur. Bu nedenle görüşme verileri daha detaylı şekilde kavram testinde verilecektir.

4.1.20. KNT 20. soruya ilişkin bulgular (üslü ifadelerde işlemler)

Öğretmen adaylarına üslü ifadelerde bir rasyonel sayının negatif kuvvetini içeren ve sıfırın kuvvetini içeren “ $-3^2 - (0,2)^{-2} + 0^7 = ?$ ” sorusu sorulmuştur. $-9-25+0 = -34$ cevabına ulaşılması beklenmiştir. Öğretmen adaylarının yaklaşık %71’inin soruyu doğru yanıtladığı Tablo 51’den anlaşılmaktadır.

Tablo 51

KNT 20. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Doğru yapanlar	Yanlış yapanlar
1. Sınıf	31 (%77,5)	9 (%22,5)
2. Sınıf	26 (%65)	14 (%35)
3. Sınıf	28 (%70)	12 (%30)
4. Sınıf	29 (%72,5)	11 (%27,5)
Toplam	114 (%71,25)	46 (%28,75)

Bu soruyu yanlış yanıtlayan öğretmen adaylarının yaptıkları yanlışlar incelenmiş ve yanlış yaptıkları noktalar kategorilendirilmiştir. Sonuçlar Tablo 52’de sunulmuştur.

Tablo 52

KNT 20. soruya ilişkin yanlış yanıtların dağılımı

	Sadece $(0,2)^{-2}$ ’yi Yanlış Bulanlar	Sadece 0^7 ’yi Yanlış Bulanlar	Tüm Terimleri Doğru Bulduğu Halde $-9-25=-36$ Yanıtı Verenler	Diğer Hatalar
1.Sınıf	1 (%2,5)	5 (%12,5)	1 (%2,5)	2 (%5)
2.Sınıf	6 (%15)	4 (%10)	3 (%7,5)	1 (%2,5)
3.Sınıf	1 (%2,5)	7 (%17,5)	1 (%2,5)	3 (%7,5)
4.Sınıf	1 (%2,5)	6 (%15)	2 (%5)	2 (%5)
Toplam	9 (%5,625)	22 (%13,75)	7 (%4,375)	8 (%5)

Yapılan incelemeler sonunda -3^2 ’nin sonucunu tüm öğretmen adaylarının doğru bulduğu görülmüştür. Ancak $(0,2)^{-2}$ ifadesinin sonucunu 9 öğretmen adayı yanlış yapmıştır. Bu hatalı yanıtlardan bazıları Şekil 34’te verilmiştir.

$-9 - 4 + 0 = -13$	$-9 - (2^2 \cdot 10^2) + 0$ $-9 - 400 = -409$
$-3^2 - (0,2)^{-2} + 0^7 = ?$ $-9 - 5 + 0 = -14$	$-9 + 25 + 0$ $25 - 9 = 16$ $(\frac{2}{10})^{-2} (\frac{10}{2})^2 = 6^2$

Şekil 34. $(0,2)^{-2}$ ifadesinin sayısının hatalı çözümlerine örnekler

Tablo 52 incelendiğinde en sık yapılan hatanın 0^7 'de olduğu görülmüştür. 22 öğretmen adayı sıfır yerine 1 sonucunu yazmıştır (Şekil35, sol). 7 öğretmen adayı ise tüm terimleri doğru bulmasına rağmen -9 ile -25'i toplayarak -34 yerine -36 sonucunu bulmuşlardır (Şekil 35, sağ).

$-9 - 25 + 1 = -33$	$-9 - 25 + 0 = -36$

Şekil 35. KNT 20. Soruya ilişkin hatalı çözümleri örnekler

Tablo 52'de görüldüğü gibi üslü sayılarla ilgili bu soruda doğruluk oranı yaklaşık %71 olmuştur ancak öğretmen adaylarının %29'unun sıfırın kuvveti ve negatif kuvvetin uygulanması gibi konularda hatalar yapmaları dikkat çekicidir.

4.1.21. KNT 21. soruya ilişkin bulgular (üslü ifadelerde basamak sayısı bulma)

Konu testinin 21.sorusu üslü sayılarla işlem yapmayı gerektirmektedir. 96.5^6 sayısının kaç basamaklı olduğu sorulmuştur. $96 = 2^5 \cdot 3$ olduğu için $96.5^6 = 3 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 5 = 15 \cdot 10^5$ bulunur ki bu sayı 1500000 sayıdır ve 7 basamaklıdır. Öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtlar incelendiğinde cevabı 7 olarak bulanlar olduğu gibi $15 \cdot 10^5$ sonucuna ulaştığı halde 6 basamaklı ve 17 basamaklı gibi yanlış yanıtlar verenlerin de olduğu görülmüştür. Bu tarz yanıtlar "kısmen doğru" şeklinde sınıflandırılmıştır. Soruya ilişkin dağılımlar Tablo 53'te verilmiştir.

Tablo 53

KNT 21.soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Tamamen Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış
1.Sınıf	32 (%80)	2 (%5)	6 (%15)
2.Sınıf	30 (%75)	4 (%10)	6 (%15)
3.Sınıf	35 (%87,5)	2 (%5)	3 (%7,5)
4.Sınıf	32 (%80)	1 (%2,5)	7 (%17,5)
Toplam	129 (%80,625)	9 (%5,625)	22 (%13,75)

Tablo 53 incelendiğinde öğretmen adaylarının büyük bir kısmının doğru cevaba ulaştıkları görülmüştür. 9 öğretmen adayı ise işlemleri doğru yapmasına karşın sonuçları Şekil 36’da görüldüğü gibi 17 veya 6 basamaklı bularak yanlış açıklama yapmıştır.

$\begin{array}{r} 96 \\ 48 \\ 24 \\ 12 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{array}$ $2^9 \cdot 3 \cdot 5^6 = 3 \cdot 5 \cdot 10^5$ $= 15 \cdot 10^5$ $\Rightarrow 6 \text{ basamaklı}$	$96 \cdot 5^6 \text{ sayısı kaç basamaklıdır?}$ $2^5 \cdot 3 \cdot 5^6 = 3 \cdot 5 \cdot 10^5$ $= 15 \cdot 10^5$ $= 17 \text{ basamaklı}$

Şekil 36. Üslü sayı doğru bulunmasına rağmen basamak sayısı hatalı yazılan örnekler

Görüşme yapılan öğretmen adaylarından Halit, “Cevabı 6 basamaklı diye söylemişim. 5 tane sıfır olacak. Bir de sayının kendisi var. 6 basamaklı olur diye düşündüm. Ama 7 basamaklı olacak. 1500000 olmalı cevabı.” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Benzer şekilde 17 yanıtının da 15 ile 15 sayısının basamak sayısı olan 2’nin toplamı ile bulunduğu görülmektedir.

Üslü sayılarla ilgili klasik soru tiplerinden sayılabilecek olan bu soruda 22 öğretmen adayının $15 \cdot 10^5$ ifadesine ulaşamadıkları görülmüştür. Bu öğretmen adaylarından bazılarının 96 ’nın asal çarpanlara ayrılmasında hatalar yaptığı, bazılarının ise basamak sayısı ile üslü ifadeler arasında ilişki kuramadıkları anlaşılmıştır.

4.1.22. KNT 22. soruya ilişkin bulgular (kareköklü sayı)

Testin 22. sorusunda öğretmen adaylarına $\sqrt{35}$ ’den büyük en küçük tam kare sayı sorulmuştur. $\sqrt{35}$ ’in yaklaşık olarak 5,9 olduğu göz önüne alındığında ondan daha büyük olan ilk tam kare sayı 9’dur. Öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtlar incelendiğinde bazı öğretmen adaylarının $\sqrt{35}$ ’den küçük en büyük tam kare sayı olan 4 cevabını

verdikleri görülmüştür. Tablo 54'te öğretmen adaylarının soruya vermiş oldukları yanıtların dağılımı görülmektedir.

Tablo 54

KNT 22.soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Doğru Yanıt (9 bulanlar)	4 yanıtı ($\sqrt{35}$'den küçük en büyük tam kare sayı bulanlar)	Diğer Yanlış Yanıtlar (Tam Kare Olmayanlar)
1.Sınıf	13 (%32,5)	1 (%2,5)	26 (%65)
2.Sınıf	10 (%25)	3 (%7,5)	27 (%67,5)
3.Sınıf	11 (%27,5)	0 (%0)	29 (%72,5)
4.Sınıf	15 (%37,5)	1 (%2,5)	24 (%60)
Toplam	49 (%30,625)	5 (%3,125)	106 (%66,25)

Öğretmen adaylarının yaklaşık olarak %31'i doğru cevap olan 9 yanıtını vermişlerdir. En yüksek doğruluk oranının 4.sınıflarda olduğu görülmektedir. 106 öğretmen ise tam kare olmayan sayı örnekleri vermiştir. En çok verilen hatalı cevaplar incelendiğinde 91 öğretmen adayının 5,9'dan büyük en küçük tam sayı olan 6 cevabını verdiği görülmüştür.

4.sınıf öğretmen adayı Şeyma ile yapılan görüşmede aşağıdaki diyalog geçmiştir:

Ş: 6 diye düşünüyorum. Çünkü $\sqrt{35}$ 'den büyük $\sqrt{36}$ var tam kare olan.

A: $\sqrt{36}$ tam kare mi peki?

Ş: Değil mi? 6'nın karesi.

A: $\sqrt{36}$, 6'nın karesi mi 6'ya mı eşit?

Ş: 6'ya eşit ama 6'nın karesi 36.

A: $\sqrt{35}$ yaklaşık olarak kaçtır?

Ş: 5,9 gibi bir şeydir.

A: 5,9'dan büyük ilk tam kare sayı kaçtır?

Ş: 6'dır. Değil midir?

A: 6 tam kare bir sayı mı?

Ş: Değil. Aaa tamam o zaman 9 olur değil mi?

A: 9 tam kare midir?

Ş: Evet. 3'ün karesidir. Ben köklü sorunca yanlış düşündüm.

Şeyma gibi 91 öğretmen adayı da benzer ifadelerle açıklama yaparak 6 cevabını bulmuştur. Diyalogdan da anlaşılacağı gibi Şeyma'nın tam karenin ne olduğunu bildiği görülmektedir. Ancak bu soru iki aşamalı bir süreç içermektedir: İlk aşama, köklü sayının yaklaşık değerini bulmak, ikinci aşama ise o yaklaşık değerden büyük tam sayılara bakılıp ilk olarak hangisinin tam kare olduğuna karar vermek. Verilen yanıtlarda da ilk aşamanın

göz ardı edilip $\sqrt{35}$ 'den sonra $\sqrt{36}$, $\sqrt{37}$... gibi sayıların geldiği düşünülerek içi tam kare olan ilk sayının seçildiği anlaşılmaktadır.

4.1.23. KNT 23. soruya ilişkin bulgular (tam kare sayılar)

Öğretmen adaylarına son iki basamağı verilen sayılardan hangilerinin tam kare sayı olabileceği sorulmuştur. 44, 76, 61, 82, 80, 48 seçenekleri verilmiştir. Bu sayılardan 44, 76 ve 61 sayıları tam kare bir sayının son iki basamağı olabilirken, diğerleri olamaz. Çünkü hiçbir sayının kendisi ile çarpımının birler basamağı 2 ve 8 değildir. Bir sayının karesinin sonunun sıfır olması için sayının kendisi de 10'un katı olmalıdır. Ancak $10 \times 10 = 100$, $20 \times 20 = 400$,... örneklerinde görüldüğü gibi sayının son iki basamağının tamamı sıfır olmaktadır. Bu nedenle bu soruda öğretmen adaylarından üç tane kutucuğa işaret koymaları diğer üçünü boş bırakmaları beklenmiştir. 6 ile 5 doğru arasında yapan öğretmen adayları üst grup, 4 ile 3 doğru aralığı orta grup, 0 ile 2 doğru aralığı ise alt grup olarak sınıflandırılmıştır. Bu sınıflamaya göre oluşan dağılım Tablo 55'te verilmiştir.

Tablo 55

KNT 23.soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Üst Grup (5-6)	Orta Grup (3-4)	Alt Grup (0-2)
1. Sınıf	22 (%55)	13 (%32,5)	5 (%12,5)
2. Sınıf	14 (%35)	13 (%32,5)	13 (%32,5)
3. Sınıf	23 (%57,5)	15 (%37,5)	2 (%5)
4. Sınıf	14 (%35)	17 (%42,5)	9 (%22,5)
Toplam	73 (%45,625)	58 (%36,25)	29 (%18,125)

Tablo 55 incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık %46'sının üst grupta olduğu görülmektedir. Sınıf düzeyleri ile üst grupta yer alan kişi sayıları arasında düzenli bir ilişkinin olmadığı dikkat çekmektedir. 4.sınıflarda üst grupta yer alan öğretmen oranı %35'lerde iken 3.sınıflarda %57,5 olmuştur. Öğretmen adaylarının altı sayıdan hangilerinde daha fazla yanılma düşüklerinin anlaşılabilmesi için her birinin işaretlenme oranları da Tablo 56'da sunulmuştur.

Tablo 56

Son iki rakamı verilen sayıların hangilerinin tam kare olabileceğine yönelik işaretlemelerin dağılımı

	44	76	61	82	80	48
1.Sınıf	34(%85)	22 (%55)	24 (%60)	3 (%7,5)	9 (%22,5)	4 (%10)
2. Sınıf	27(%67,5)	17(%42,5)	10 (%25)	4 (%10)	9 (%22,5)	8 (%20)
3. Sınıf	35(%87,5)	22 (%55)	28 (%70)	0 (%0)	9 (%22,5)	6 (%15)
4. Sınıf	29(%72,5)	23(%57,5)	17 (%42,5)	4 (%10)	12 (%30)	5 (%12,5)
Toplam	125(%78,125)	84 (%52,5)	79 (%49,375)	11(%6,875)	39(%24,375)	23(%14,375)

İşaretlenmesi gereken 44, 76 ve 61 sayıları incelendiğinde, 44 ile biten tam kare sayıların olabileceğini öğretmen adaylarının %78'inin işaretlediği görülmektedir. En yüksek oran bu sayıda ortaya çıkmıştır. Bunda 144 sayısının 12'nin karesi olarak ifade edilebilmesi ve bilinen bir tam kare sayı olması etkili olmuş olabilir. En düşük oran ise 61 sayısında olmuştur. 61 ile biten tam kare sayıya örneklerden bir tanesi 961 (31^2) sayıdır. Ancak öğretmen adaylarının yaklaşık yarısı 61'i işaretlememiştir. Yapılan görüşmede 3.sınıf öğretmen adayı Orhan, "44 ile biten 144 var. 76 ile biten de var diye hatırlıyorum. 576'ydı sanırım. Ama 61 ile biten hatırlamıyorum. O yüzden işaretlemedim." açıklamasında bulunmuştur.

Tam kare bir sayının son iki basamağı olamayacak olan 82, 80 ve 48 sayılarına yapılan işaretlemeler incelendiğinde öğretmen adaylarının en çok hata yaptığı sayının "80" olduğu görülmektedir. 39 öğretmen adayı 80 ile biten tam kare bir sayı olduğunu ifade etmiştir. 1.sınıf öğretmen adayı Tuğçe'nin, 44, 76 ve 61'in yanı sıra 80'i de işaretlediği görülmüştür. Görüşmelerde 80 ile biten tam kare sayının olup olmadığı sorulmuştur.

T: Rakamların karesine bakarsak, bir tam kare sayının son rakamı 1, 4, 9 olabilir. 4'ün karesi 16 olduğu için 6 olabilir. Devam edersek 5 olabilir. Diğerlerinin karesinde yine 1, 4, 9 geliyor. Bir de sıfırın karesi var. O da sıfır olduğu için sıfırda da bitebilir. O yüzden 44, 76, 61 ve 80'i işaretledim.

A: Hangi sayının karesi 80 ile biter? Bulabilir misin?

T: Sadece son iki rakamı olduğu için sayı 10 basamaklı da olabilir. Tüm sayıların karesini deneye deneye buluruz.

A: 3 veya 4 basamaklı sayılarda araştırır mısın? Bulunabilir mi acaba?

T: Düşünüyüm. 10'un karesi 100, 20'nin 400, 30'un 900, 40'ın 1600 eder.

A: Henüz son 2 rakamı 80 olan çıkmadı.

T: Evet 00 bunlar. Aslında hepsi öyle olmaz mı ya? İki sayı da aynı olduğu için ikisinden de sıfır gelir. Bu aklıma gelmemiştir.

Görüldüğü gibi 80'i işaretleyen öğretmen adaylarından biri olan Tuğçe, son rakamının sıfır olmasından dolayı bir tam kare sayının son basamağı olabileceğini düşünmüştür. Ancak araştırmacının denemeye yönlendirmesiyle bazı sayıların karelerini alarak son iki rakamın 00 olması gerektiğinin farkına varmıştır.

4.1.24. KNT 24. soruya ilişkin bulgular (kareköklü sayılarda işlemler)

Öğretmen adaylarına konu testinin 24. sorusunda, $\frac{\sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{108} + \sqrt{27}}{\sqrt{3} - \sqrt{18}}$ işleminin sonucu sorulmuştur. $\frac{4\sqrt{2}+5\sqrt{2}-6\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \frac{-3.(\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = -3$ olarak soru çözülebilir. Öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtlar incelenip doğru, kısmen doğru ve yanlış

olmak üzere üç kategoriye ayrılmıştır. Her bir kategoriye ait yanıtların dağılımı Tablo 57’de verilmiştir.

Tablo 57

KNT 24. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış
1. Sınıf	33 (%82,5)	3 (%7,5)	4 (%10)
2. Sınıf	24 (%60)	11 (%27,5)	5 (%12,5)
3. Sınıf	30 (%75)	4 (%10)	6 (%15)
4. Sınıf	32 (%80)	5 (%12,5)	1 (%2,5)
Toplam	119 (%74,375)	23 (%14,375)	16 (%10)

Tablo 57’de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının büyük bir kısmı (%74,375) kareköklü işlemler içeren bu soruyu doğru yanıtlamıştır. En yüksek doğruluk oranının ise 1.sınıf öğretmen adaylarında olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının yanlışları incelendiğinde ise bazı sayıların karekökten çıkarılırken yanlış çıkarılabildiği görülmüştür. En sık yapılan hatalar bu şekilde olmuştur. Bu tür hatalar da işlemin ilerlemesini engellemiş ve sonuca ulaşılmasına engel olmuştur. Şekil 37’de bu tür hatalara örnekler verilmektedir.

Şekil 37. KNT 24.soruya ilişkin hatalı çözümlere örnekler

Şekil 37’de verilen örneklerde yanlış yapılan bazı çözümler yer almaktadır. Görüldüğü gibi bazı öğretmen adayları sayıları kökten doğru çıkarmalarına rağmen işlemlerde hatalar yapmış bazıları ise kökten çıkarırken yanlış çıkarmıştır. İlk örnekte öğretmen adayı “ $4\sqrt{2}+5\sqrt{2}$ ” işleminin sonucunu $7\sqrt{2}$ olarak yazmıştır. Ortadaki örnekte öğretmen adayı $\sqrt{50}$ sayısını $2\sqrt{5}$ olarak çıkarmıştır. Son örnekte ise eşlenikle çarpma sırasında hata yapılmıştır. Bu ve bunun gibi hatalar nedeniyle işlem sonucu bulunamamıştır.

4.1.25. KNT 25. soruya ilişkin bulgular (ondalık ifadelerin rasyonellik ve irrasyonelliği)

Testin son sorusunda öğretmen adaylarına $0,\overline{17}$; 2,31768...; 1,178542 ondalık ifadelerinin ait olduğu sayı kümeleri sorulmuştur. Rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayı kümelerinden hangilerine aitlerse işaret koymaları istenmiştir. $0,\overline{17}$ devirli sayısı ve 1,178542 sayısı rasyonel iken 2,31768... sayısı ondalık basamağının devretmeden sonsuza gitmesi nedeniyle irrasyonel sayı olarak sınıflandırılmaktadır. Ayrıca üç sayı da gerçek sayıdır. Tüm sınıf düzeylerindeki öğretmen adaylarının her bir sayı için yaptığı işaretlemelerin sayısı Tablo 58’de verilmiştir. Doğru yanıtlar italik gösterilmiştir.

Tablo 58

Öğretmen adaylarına göre verilen sayıların kümelere dağılımı

	Rasyonel	İrrasyonel	Gerçek
$0,\overline{17}$	93 (%58,125)	53 (%33,125)	102 (%63,75)
2,31768...	17 (%10,625)	130 (%81,25)	97 (%60,625)
1,178542	125 (%78,125)	26 (%16,25)	107 (%66,875)

Rasyonellik ve irrasyonellik açısından Tablo 58 incelendiğinde en yüksek doğruluk oranının yaklaşık %81 ile 2,31768... sayısının irrasyonelliğinde olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının %58’i $0,\overline{17}$ sayısını rasyonel olarak ele almıştır. %33’ü ise irrasyonel sayı olarak sınıflamıştır. Toplamlarının %100’ü vermemesinden dolayı sayıyı her iki kümeye de dahil etmeyen öğretmen adaylarının mevcut olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca devirli sayıların rasyonelliğine ilişkin öğretmen adaylarında şüphelerin olduğu görülmüştür. Görüşme yapılan 2.sınıf öğretmen adaylarından Çise, araştırmacının, “Ondalık temsille verilen sayıların rasyonel mi irrasyonel mi olduğunu nasıl anlarız?” sorusuna, “Sayı devirli ise irrasyoneldir. Yani bir yerde bitmiyorsa, tam bir sayı çıkmıyorsa. Kısacası ondalık kısmı sonsuza gidiyorsa irrasyoneldir.” yanıtını vermiştir. Yazılı yanıtında da $0,\overline{17}$ sayısını irrasyonel olarak kabul ettiği görülmüştür. Araştırmacının, “Devirli sayılar irrasyonel midir?” sorusu üzerine, “Evet, irrasyoneldir.” yanıtını vermiştir.

Bir başka öğretmen adayı Burçe (1.sınıf) ise devirli sayıların ondalık biçimde yazıldığında irrasyonel olduğunu ancak kesre dönüştürüldüğünde rasyonel hale getirildiğini ifade etmiştir. Bu nedenle işaretleme yapmadığını dile getirmiştir.

1,178542 sayısını irrasyonel olarak ifade eden öğretmen adaylarından 3.sınıf öğretmen adayı Orhan, ondalık kısmı düzensiz giden sayıların irrasyonel olduğunu açıklamıştır. Araştırmacının, “2,6 veya 3,24 sayısının ondalık kısmı düzensiz midir? Düzene neye göre karar veriyoruz?” sorusu üzerine “Onlar zaten kesirli yazılabilir.

Düzensizlik demek yani hep aynı şekilde gitmeyecek ondalık kısmı. Bu verilen sayı düzensiz gidiyor.” açıklamasını yapmıştır.

Gerçeklik açısından tablo incelendiğinde ise her üç sayı kümesinde de öğrencilerin yaklaşık %27’sinin bu sayıları gerçek sayı olarak sınıflandırmadıkları görülmektedir. Bu durumun gerçek sayının ne olduğuyla ilgili yanılgılardan kaynaklandığı düşünülebilir. Öğretmen adaylarının gerçek sayı kavramı ile ilgili tanımlamaları kavram testi ile ilgili bulgulara ele alınmıştır.

Öğretmen adaylarının üç sayı için de vermiş oldukları yanıtlar bir arada ele alınarak doğruluklarına göre kategorilere ayrılmıştır. Rasyonellik ve irrasyonellik bir arada ele alınmıştır. Rasyonellik-irrasyonellik ve gerçeklikle ilgili işaretlemelerden en az biri doğru olan yanıtlar kısmen doğru olarak değerlendirilmektedir.

Sınıf düzeylerine göre bu kategorilerin dağılımı Tablo 59’da verilmiştir.

Tablo 59

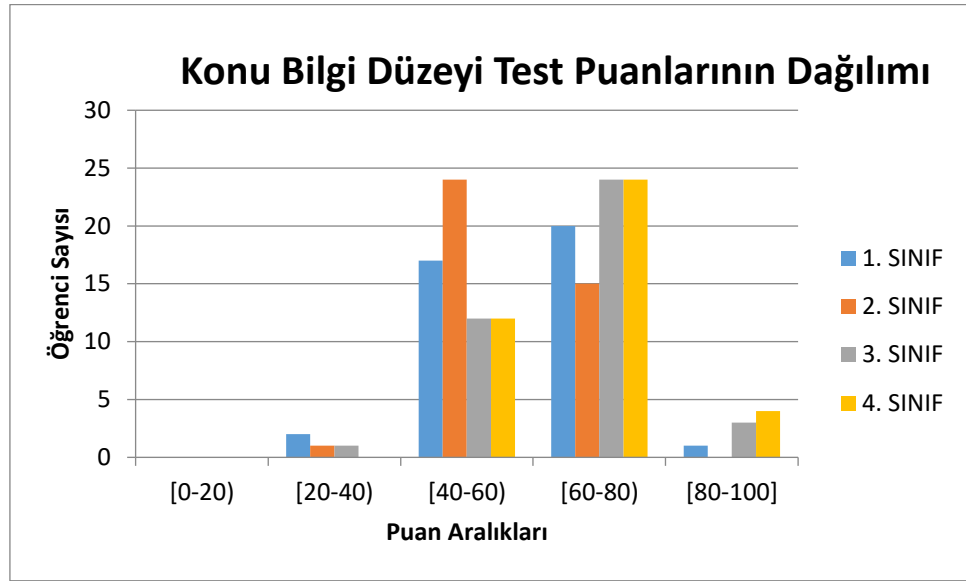
KNT 25. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Tamamı Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış
1.Sınıf	5 (%12,5)	18 (%45)	17 (%42,5)
2.Sınıf	4 (%10)	19 (%47,5)	17 (%42,5)
3.Sınıf	12 (%30)	17 (%42,5)	11 (%27,5)
4.Sınıf	12 (%30)	16 (%40)	12 (%30)
Toplam	33 (%20,625)	70 (%43,75)	57 (%35,625)

Tablo 59’dan da görüldüğü gibi öğretmen adaylarının yaklaşık %21’i sayıları doğru sınıflayabilmiştir. Yaklaşık %36’sı ise her üç sayı kümesini de yanlış sınıflamıştır. Bu sorudan öğretmen adaylarının çoğunda ondalık temsille ve sayı kümeleriyle ilgili yanılgıların olduğu anlaşılmıştır.

4.1.26. Konu bilgi düzeyi ile ilgili genel değerlendirme

Konu bilgi düzeyinde öğretmen adaylarının, sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin algoritma, terim, kural ve işlem bilgileri ile yüzeysel becerileri incelenmiştir. Bu geniş öğrenme alanının tüm kuralları, terimleri ve işlemleri gibi konu bilgi düzeyini ilgilendiren bilgi elemanlarının tamamını incelemek tek bir testle mümkün olmadığı için ilgili alanyazında yer alan zorluklar ve kritik kazanımlar göz önüne alınarak test 25 soru ile sınırlandırılmıştır. Tüm sorular tamamen doğru (2), kısmen doğru (1) veya yanlış (0) olmak üzere puanlanmış ve her bir öğrencinin 50 puan üzerinden hesaplanan puanı okuyucu kolaylığı açısından 2 ile çarpılarak 100 üzerinden “Konu Bilgi Düzeyi Test Puanı” oluşturulmuştur. Bu puanlara göre öğrenciler eşit aralıklı beş gruba ayrılmıştır. Her bir gruptaki öğrencilerin dağılımı Şekil 38’de verilmiştir.



Şekil 38. Konu bilgi düzeyi test puanlarının dağılımı

Şekil 38’de görüldüğü gibi az sayıda (8) öğretmen adayı konu testinden 80 ve üzeri puan almıştır. 40 puanın altında ise sadece dört öğretmen adayının olduğu görülmektedir. Bu aralıkta 4. sınıf öğretmen adayının olmaması dikkat çekmektedir. Öğretmen adaylarının genel olarak 60-80 puan aralığında yığıldığı anlaşılmaktadır.

Her sınıf düzeyi için test ortalamaları ise Tablo 60’ta gösterilmiştir.

Tablo 60

KNT ortalamaları

1. Sınıf Ortalaması	2. Sınıf Ortalaması	3. Sınıf Ortalaması	4. Sınıf Ortalaması	Tüm Örneklem Ortalaması
60,25	56,95	62,85	65,35	61,35

İşlemsel bilgi içeren konu testinde her sınıf düzeyinde ortalamaların 50’nin üzerinde olduğu görülmektedir. En düşük ortalama 2. sınıflarda gerçekleşmiştir. Puanlar birbirine yakın olmasına karşın en yüksek ortalamanın 4. sınıf öğretmen adaylarında olması olumlu bir gelişme olarak yorumlanabilir. Ancak testteki tüm soruların doğal sayılar, kesirlerde işlemler, kareköklü sayılarda işlemler veya bölünebilme gibi ortaokul düzeyindeki öğrencilerin dahi yapabilmesi gereken beceriler olduğu düşünüldüğünde ortalamaların çok daha yüksek olması beklenmektedir. Sorulara doğru yanıt veren öğretmen adaylarının 25 sorunun 12’sinde (1., 6., 9., 10., 11., 12., 14., 16., 19., 22., 23., 25. sorular) yarıdan daha az olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının en az doğru yanıt verdikleri ilk 5 soru ve yapmış oldukları hatalar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

➤ 1. soru (%18,75)

En az sayıda öğretmen adayının doğru yanıtlayabildiği soru 1. soru olmuştur. Verilen 9 basamaklı sayının basamak ve bölüklere ayrılması istenen soruda 160 öğretmen adayının sadece 30'u tam puan alabilmiştir. Bu soruyla ilgili yapılan görüşmelerde de öğretmen adaylarının özellikle bölüğün ne olduğunu hatırlamadıkları anlaşılmıştır.

➤ 25. soru (%20,625)

Ondalık temsille verilen üç sayının rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayı olup olmadığının sınıflama bilgisini içeren soruda sadece 33 öğretmen adayı tam puan almıştır. Bu durum öğretmen adaylarının ondalık temsillerin sayı kümelerini belirlemede zorluk yaşadığını göstermiştir. Ayrıca bu durum, rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayının ne olduğuna ilişkin yanılgıların olabileceğine işaret olarak görülebilir.

➤ 16. soru (%26,25)

Öğretmen adaylarından 100'den küçük en büyük ikiz asalları bulmaları istenen bu soruda 42 öğretmen adayı tam puan alabilmiştir. Asal sayı bilgisi gerektiren bu soruyla ilgili bu düşük oranın bilgi eksikliğinden ziyade dikkatsizlikten kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir. Çünkü görüşmelerde tüm öğretmen adaylarının bazı denemelerle doğru yanıtı ulaşabildiği görülmüştür. 91, 87 gibi sayıların yazılı yanıtlarda asal olarak düşünülebildiği ve bu nedenle hataların yapıldığı anlaşılmıştır.

➤ 22. soru (%30,625)

$\sqrt{35}$ 'den büyük en küçük tam kare sayının sorulduğu soruda 49 öğretmen adayı tam puan alabilmiştir. Soru, "tam kare" ifadesini bilmeyi gerektirmekle birlikte kareköklü sayıların yaklaşık değerini bulabilmeyi de gerektirmektedir. Öğretmen adaylarının karekök içerisinde tam kareliğini göz önüne alarak $\sqrt{36}$ yanıtını verdiği görülmüştür. Bu durum dikkatsizlik ile yorumlanabileceği gibi (görüşme verilerinin yansıttıklarından dolayı) kareköklü sayı ve o sayının ondalık gösterimi arasındaki ilişkinin kurulamaması olarak da yorumlanabilir.

➤ 9. Soru (%34,375)

Tam sayılarda işlem bilgisi ve işlem önceliği kuralının sorgulandığı soruda 55 öğretmen adayı doğru yanıt verebilmiştir. 7. sınıf kazanımlarına uygun bu soruda öğretmen adaylarının çarpma ve bölme işlemlerinde çarpmanın daha öncelikli olduğu yanılgısına sahip olduğu görülmüştür.

Öğretmen adaylarının kesrin tam kısmını çarpma işlemi olarak değerlendirebildiği, negatif tam sayılı kesir biçiminde yazılmış rasyonel sayıdaki negatif işaretinin sadece

baştaki tam sayı için geçerli olduğunu düşünebildikleri görülmüştür. Bir ondalık sayının çözümlenmesi, tam sayılarda çıkarma işleminde birleşme özelliğinin sorgulanması, doğru ve ters orantıdaki orantı sabitinin belirlenmesi gibi sorularda da öğretmen adaylarının yarıdan fazlası hata yapmıştır.

Testin her bir sorusundan elde edilen bulgular özet olarak aşağıda maddeler halinde verilmiştir:

- İlkokul düzeyinde öğrenilen basamak ve bölük isimlerini öğretmen adaylarının unutabildiği görülmüştür. Özellikle bölük isimlerinin birler, yüzler, binler gibi veya birler, binler, onbinler gibi farklı isimlendirilebildiği görülmüştür. Görüşme yapılan 4. sınıf iki öğretmen adayının da bölük isimlerini yanlış ifade etmesi dikkat çekmiştir.
- Öğretmen adaylarının büyük bir bölümü basamak değeri ile ilgili hesaplamaları yapabilmektedir. Ancak her öğretmen adayı pratik çözümler yapamamaktadır. Bir sayıdaki tüm rakamların basamak değerleri toplamını bulurken veya “2” gibi verilen bir rakama ait basamak değerleri toplamını bulurken kısa yoldan ziyade her basamak için ayrı ayrı bulup topladıkları görülmüştür. Basamak değerinin sadece 10’un kuvvetleri olduğu yanlışlığı da söz konusudur. Bu yanlış 9 basamaklı bir sayının basamak değerleri toplamının 111.111.111 olarak açıklanmasına neden olmuştur.
- Doğal sayılarda yuvarlamaya yönelik sorularda öğretmen adaylarının iyi performans gösterdiği söylenebilir. Ancak yuvarlanacak olan basamaktaki rakamın 9 olması durumunda öğretmen adaylarının zorlandıkları ve hata yapabildikleri dikkat çekmiştir.
- Algoritma ile yapılan bölme işlemlerinde bölümün sıfır rakamını içermesi durumunda öğretmen adaylarının yanlış cevap bulabildikleri görülmüştür. En temel işlemlerden biri olan bölme işleminde öğretmen adaylarının yaklaşık %30’unun kalanlı veya kalansız doğru sonucu bulamaması düşündürücüdür. Yazılı açıklamalardan birinde öğretmen adayı bu tarz bölmeleri anlamadığını ve karıştırdığını itiraf etmiştir.
- 5. sınıfta parantezli işlemlerle başlayan 6. sınıfta tüm kurallarıyla verilen işlem önceliği ile ilgili çarpma işleminin bölme işlemine göre üstünlüğü olduğu yanlışlığı öğretmen adaylarında da ortaya çıkmıştır. Tam sayılarla ilgili işlem önceliği sorusunda öğretmen adaylarının %60’ı yanlış sonuç bulmuştur.
- Paydaları eşit olmayan tam sayılı kesirlerle toplama çıkarma yaparken payda eşitleyememe, tam sayılı kesri bileşiğe çeviremememe, tam sayılı kısmı çarpma

işlemi olarak uygulama gibi ciddi sayılabilecek hatalar yapılabilmektedir. Öğretmen adaylarından yarından azı 6. sınıf sorusunu doğru çözebilmiştir.

- Ondalık sayılarda basamak isimlerine yönelik güçlükler ortaya çıkmıştır. Virgülden sonraki 2. basamak olan “yüzde birler” basamağı yerine en sık yapılan yanlış adlandırmalar “yüzler”, “binde birler”, “onda birler” ve “onda yüzler” olmuştur.
- Verilen ondalık sayının çözümlenmesi istendiğinde öğretmen adaylarının yarısı doğru çözümleme yapabilmıştır. Sayıyı çözmek yerine sayıların okunuşunun ve basamak isimlerinin yazıldığı, ondalık ifadenin kesre dönüştürüldüğü görülmüştür.
- Birleşme ve değişme özelliklerinin karıştırılabildiği görülmüştür. Toplama ve çarpma işleminde birleşme özelliğinin varlığı doğrudan ifade edilirken, çıkarma ve bölme işleminde sayılar konarak deneme yapılmıştır. Çıkarma işleminde birleşme özelliği olduğunu savunan çok sayıda öğretmen adayı olmuştur.
- $-3\frac{1}{5}$ ve $\frac{4}{5}$ sayılarının toplamında öğretmen adaylarının en çok verdiği cevap -2 olmuştur. Negatif işaretinin anlamı konusunda yanılgılar söz konusudur. Ayrıca tam sayılı kesri bileşik kesre çevirirken 5 ve -3’ün çarpıldığı üzerine +1 eklendiği görülmüştür. Tam kısmı çarpım durumunda ele alan da olmuştur. Basit sayılabilecek bir rasyonel sayı işlemde doğru cevaba ulaşan öğretmen adayı yarından az olmuştur.
- 7’nin katı olmayan bir doğal sayının paydasına 7 yazılınca oluşan $a/7$ kesrinin ondalık açılımının devirli olacağını öğretmen adaylarının yarından fazlası belirtmemiştir. Paydaki sayıya göre ondalık kısmın devirli veya sonlu çıkabileceği gibi sonsuza kadar karışık gidebileceği yanılgısı mevcuttur. Ayrıca devirli sayıların paydalarının 9,90,990 gibi sayılar olacağı 7 olamayacağı düşüncesine sahip öğretmen adayları da vardır.
- Devirli sayıların a/b biçiminde yazımında kuralın yanlış uygulanabildiği görülmüştür. Payda kısmında en çok yapılan hata, “Tüm sayıya devreden kadar 9, devretmeyen kadar 0” yazılması olmuştur. Pay yazılırken daha çok hata yapılmıştır. Pay kısmında en çok yapılan hatalar, “Tüm sayıdan devreden kısmın çıkarılması”, “Payın değişmeyeceği düşüncesi ile aynı bırakılması” olmuştur.
- İki devirli sayının toplamında alt alta yazarak işlem yapmaya çalışanlar olmuştur. Bu durum ondalık kısımdaki sayıların toplamının eldeli olması durumunda hatalı sonuçlara neden olmuştur.

- Çarpan sayısı bulurken eksik listeleme, sadece pozitif çarpanları ele alma, sadece asal çarpanları ele alma gibi sorunlar öne çıkmıştır. Ayrıca asal çarpanlara yanlış ayırma ve formülü yanlış uygulama gibi hatalar da söz konusu olmuştur.
- İki basamaklı en büyük ikiz asallar istenen soruda öğretmen adaylarının büyük bir bölümü asal olmayan sayı örnekleri vermiştir. 91'in asal olup olmadığını belirleme konusunda öğretmen adayları güçlük çekmiştir.
- Öğretmen adaylarının bölünebilme kuralları ile ilgili pratikliğinin olmadığı görülmüştür. Çarpım veya toplam durumunda verilen işlemlerde modüler aritmetiğin özellikleri kullanılabilir. Ancak öğretmen adaylarının uzun işlemlerle çözüm yaptığı anlaşılmıştır.
- Öğretmen adaylarının çoğunun ters orantılı iki çokluk arasındaki orantı sabitini bulamadıkları görülmüştür.
- Üslü ifadelerle yapılan işlemlerde sıfırın doğal sayı kuvvetinin 1 olarak hesaplanabildiği görülmüştür.
- Üslü ifade biçiminde verilen çarpma işleminin sonucunun kaç basamaklı olacağına ilişkin soru tipini öğretmen adaylarının büyük bir kısmı doğru cevaplamıştır. 10'un kuvveti haline getirdiği halde basamak sayısını yanlış belirtenler de olmuştur.
- Öğretmen adaylarının tam kare sayıları belirleme noktasında yanılgıları mevcuttur. $\sqrt{36}$, birçok öğretmen adayı tarafından tam kare olarak algılanmıştır.
- Ondalık temsille verilmiş sayıların rasyonel ve irrasyonelliğinin belirlenmesi konusunda güçlükler ortaya konmuştur. Devirli sayıların ve ondalık kısmı sonlu ancak düzensiz rakamlardan oluşan sayıların irrasyonel olarak algılandığı anlaşılmıştır.

4.2. Kavram Bilgi Düzeyi ile İlgili Bulgular

Kinach (2002a), bir disiplindeki kavramlar arası ilişkileri ve kavramların tanımları bilgilerini *kavram bilgi düzeyi* olarak nitelendirmiştir. Bu bilgi düzeyini belirlemek amacıyla oluşturulan kavram testinin ilk aşamasında öğretmen adaylarına sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin 14 tane kavramın (doğal sayı, tam sayı, rasyonel sayı, irrasyonel sayı, gerçek sayı, EBOB, asal sayı, birim kesir, çözümlene, bilimsel gösterim, mutlak değer, bir sayının karekökü, π sayısı, aralarında asal sayılar) tanımı sorulmuştur. İkinci aşamada ise öğrenme alanındaki çeşitli kavramların birbirleriyle ilişkisine yönelik 11 soru bulunmaktadır.

4.2.1. Tanımlamalarla ilgili bulgular

Testin ilk aşamasında yer alan tanımlar, Leikin ve Zazkis (2008)'in öğretmen tanımlarının analizi için ortaya attığı kriterlerden doğruluk kriteri açısından incelenmiş ve tanımlar uygun ve uygun olmayan tanımlar olmak üzere ikiye ayrılmıştır. Ayrıca uygun tanımlar kuramsal çerçeve doğrultusunda “titiz” ve “titiz olmayan” şeklinde sınıflandırılmıştır. Çalışmada sınıf düzeylerinin tanımlamalara etkisinin araştırılması amaçlanmamıştır. Bununla birlikte genel bir fikir vermesi açısından tablolar sınıf düzeyleri de göz önüne alınarak oluşturulmuştur.

4.2.1.1. Doğal sayı tanımına ilişkin bulgular

Sayılar ve işlemler öğrenme alanının en temel kavramlarından biri sayı kümeleridir. Bu çalışmada da sayı kümelerinin tanımları sorulmuştur. Sayı kümeleri birbirleriyle ön şart ilişkisiyle bağlı olduğu için bu sayı kümelerinin ilki olan doğal sayıları tanımlayabilmenin oldukça önemli olduğu söylenebilir. Doğal sayıların sıfırdan veya 1'den başlatan çeşitli kaynaklar mevcuttur (Bourbaki 1968; Halmos 1974; Courant ve Robbins,1996). Bu nedenle doğal sayı tanımının incelenmesinde sıfırın tanımdaki varlığı veya yokluğu uygunluk ölçütü olarak değerlendirilmemiştir.

Aşağıdaki Tablo 61'de doğal sayı tanımlarına ilişkin öğrenci yanıtlarının kategorilere dağılımı görülmektedir.

Tablo 61

Doğal sayı kavramına ilişkin tanımların dağılımı

Sınıf	Uygun (f,%)		Uygun Toplam	Uygun Olmayan (f,%)			Uygun Olmayan Toplam	TOPLAM
	Titiz	Titiz Olmayan		Yeter Şart Değil	Gerek Şart Değil	Gerek Yeter Şart Değil		
1.Sınıf	12 (%30)	5 (%12,5)	17 (%42,5)	22 (%55)	0 (%0)	1 (%2,5)	23 (%57,5)	40
2.Sınıf	17 (%42,5)	5 (%12,5)	22 (%55)	15 (%37,5)	2 (%5)	1 (%2,5)	18 (%45)	40
3.Sınıf	19 (%47,5)	6 (%15)	25 (%62,5)	14 (%35)	0 (%0)	1 (%2,5)	15 (%37,5)	40
4.Sınıf	23 (%57,5)	7 (%17,5)	30 (%75)	8 (%20)	1 (%2,5)	1 (%2,5)	10 (%25)	40
Toplam	71 (%44,375)	23 (%14,375)	94 (%58,75)	59 (%36,875)	3 (%1,875)	4 (%2,5)	66 (%41,25)	160

Doğal sayı gibi en temel sayı kümesinin tanımını öğretmen adaylarının tamamına yakınının yapabilmesi beklenirken uygun tanım yapan öğretmen adaylarının oranının %58,75 olduğu görülmektedir. Uygun tanımlar da titizliklerine göre ikiye ayrılmıştır. Her bir kategoriye ait yanıtlar aşağıda örneklendirilmiştir.

4.2.1.1.a. Uygun ve titiz doğal sayı tanımları (%44,375)

Gerek ve yeter şartların tam olarak verildiği ve yapılan tanımla kavramın tam olarak karşılandığı ifadeler “uygun tanım” olarak değerlendirilmektedir. Uygun tanımlar, minimallik olması ve matematiksel dil kullanımındaki titizlik göz önüne alınarak titiz veya titiz olmayan tanım olarak ele alınmaktadır.

Gerek ve yeter şartları tam olarak verilen ve verilen bu kıstaslarla doğal sayı kümesini oluşturabilen tanımlar uygun tanımlar olarak değerlendirilmektedir. 94 öğretmen adayının yanıtının yer aldığı bu kategoride tanımlar, minimallik kriterini sağlayıp sağlamaması ve matematiksel dil kullanımındaki titizlik göz önüne alınarak titiz ve titiz olmayan tanımlar olarak iki alt kategoriye ayrılmıştır. Doğal sayı için 71 öğretmen adayının uygun ve titiz tanım yaptığı görülmüştür.

Öğretmen adayları doğal sayıları sayma sayılarından, tam sayılardan, ardışıklık vb. kavramlardan yola çıkarak tanımlamışlardır. En sık yapılan bazı uygun ve titiz tanımlara verilebilecek örnekler şunlardır.

- “Sıfır veya 1’den başlayıp sonsuza kadar 0,1, 2,3,... şeklinde giden sayılardır.” tanımı doğal sayıları net olarak ifade ettiği için uygun ve titiz olarak değerlendirilmiştir. Sıfırdan veya 1’den başlatarak bu tanıma benzer tanım yapan öğretmen adayları mevcuttur.
- “Sıfırdan sonsuza kadar giden tam sayılardır.” veya “ $[0, +\infty)$ aralığındaki tam sayılardır.” tanımları tam sayıları temel almıştır. Tam sayılar öğretim sürecinde daha sonra görülmesine rağmen matematiksel olarak değerlendirildiğinde tanım bir sorun teşkil etmemektedir. Bu tür tanımlar da uygun ve titiz tanım örnekleri olarak değerlendirilmektedir.
- “Sayma sayılarına sıfırı ekleyerek oluşturduğumuz sayı kümesidir.”, “Sıfırla başlayan sayma sayıları ile devam eden sayı kümesidir.” ve “Doğal sayılar, sayma sayılarıdır.” tanımları sayma sayılarına dayalı tanımlar olarak sınıflandırılmıştır. Bu tanımların ilk ikisi sıfırı dahil ederken ikincisinde sayma sayılarının doğal sayılarla aynı olduğu ifade edilmektedir. Üç tanım da uygun ve titiz olarak ele alınmıştır.
- “ $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ kümesinin elemanlarıdır.”, “Sıfır ve pozitif tam sayıların birleşim kümesidir.” ve “Pozitif tam sayılar kümesidir.” şeklinde pozitif tam sayılara dayalı uygun ve titiz tanımlar yapılmıştır.
- “Sıfırdan başlayan sonsuza kadar her bir adımda 1 eklenerek ilerleyen sayı kümesidir.” ve “Sıfırdan veya 1’den başlayıp birer ardışık olarak sonsuza kadar giden sayılardır.” gibi ardışıklıktan yola çıkarak yapılan tanımlar da uygun ve titiz olarak ele alınmıştır.
- 4. sınıf öğretmen adaylarından biri “İlk terimi ve ortak farkı 1 olan aritmetik dizinin her bir terimine doğal sayı denir.” şeklinde tanım yapmıştır. Bu tanım 1, 2, 3, 4, ... n, n+1, ... aritmetik dizisine ve dolayısıyla doğal sayılara işaret etmektedir. Bu şekilde rutin tanımlardan uzaklaşarak farklı bir bağlamdan yapılan tanımlar Leikin ve Zazkis (2010) tarafından ‘zengin tanım’ olarak değerlendirilmektedir. Bir başka 4. sınıf öğretmen adayının “ $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b|a$ (b böler a) olmak üzere a/b şeklinde yazılabilen pozitif sayılardır.” tanımı da aynı kapsamda değerlendirilebilir. Bu iki tanım da uygun ve titiz tanımlardır.

4.1.1.1.b. Uygun ancak titiz olmayan doğal sayı tanımları (%14,375)

Öğretmen adaylarının bir kısmının yapmış oldukları tanımlar gerek ve yeter şartları taşıdığı halde minimal olmamaları veya matematiksel terminolojideki hataları nedeniyle titizlik için gereken şartları sağlayamamıştır. 23 tanım örneği bu kategoride yer almıştır. Bazı tanımlar aşağıda verilmektedir:

- “1’den başlayıp sonsuza kadar giden pozitif tam sayılardır.”, “Sonsuza kadar giden sayma sayılarıdır.”, “1’den başlayıp sonsuza kadar ilerleyen sayma sayılarıdır.” tanımları minimal olmadığı için titiz değildir. Altı çizili sözcükler zaten birbirlerini karşılamaktadır. İlk tanımda, pozitif tam sayılar ifadesi yer almaktadır. Zaten pozitif tam sayılar 1’den başlamaktadır. Bu iki bilginin bir arada verilmesi tanımın minimal olmadığını gösterir. Minimallik kriterine göre kavramı en az sayıda özellikle tanımlamak gerekir. Diğer tanımlarda da benzer durumlar söz konusudur.
- “ $\{0,1,2,3,...,+\infty\}$ kümesinin her bir elemanıdır.” şeklinde tanım yapan öğretmen adayları olmuştur. Kümenin içinde yer alan “ $+\infty$ ” terminoloji bakımından hatalıdır. Sonsuzu bir eleman olarak aldığı için bu tanım titiz olmayan tanım olarak değerlendirilmiştir.

4.2.1.1.c. Uygun olmayan doğal sayı tanımları (%41,25)

Kavramı oluşturacak olan özellikleri gerektiğinden az veya fazla veren, kavramdan daha spesifik veya daha genel olan ya da kavramla hiçbir ilgisi olmayan yanlış özellikler içeren tanım örnekleri bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar gerek ve yeter şartların varlığına göre üç kategoride incelenmiştir.

Yeter Şart Olmayan:

Doğal sayıları tanımlamak yerine sadece bazı özelliklerini listeleyen, doğal sayıların yanı sıra diğer sayı kümelerinden de örnekleri içeren tanımlar bu kategoride yer almaktadır. Yapılan tanımlar doğal sayıların özelliği olmasına karşı onları tanımlamak için yeter şart değildir. 59 öğrencinin tanımı bu şekildedir. “Sıfırdan veya 1’den başlayıp sonsuza giden sayılardır.”, “1’den başlayıp devam eden sayılardır.”, “Sıfırdan başlayan pozitif sayılar.”, “ $[0,+\infty)$ aralığındaki sayılardır.” ve “Sıfırdan büyük sayılardır.” tanımlarında sayıların türüyle ilgili bilgi yoktur. Başlangıç noktası ve yön belirtilmiş olmasına karşın hangi sayıların kümeye dahil olduğu belli değildir. 3,56 ondalık sayısı da $\frac{9}{4}$ sayısı da bu tanımları karşılayabilmektedir. “0 veya 1’den başlayan ve a/b şeklinde yazılabilen sayılar.” tanımı da tüm pozitif rasyonel sayıları kapsadığı için uygun bir tanım değildir.

Gerek Şart Olmayan:

Kavramı sınırlayan, kavram yerine onun spesifik bir kısmını ele alan tanımlar bu kategoride yer almaktadır. Üç öğrencinin tanımı bu kategoride ele alınmıştır. Bu tanımlarla (“Sıfırdan dokuza kadar olan tam sayılar”, “Sıfırdan dokuza tüm rakamlar”, “Sıfırdan n’e

kadar olan sayma sayıları”) elde edilen sayılar doğal sayılardır. Ancak elde edilen sayılar, doğal sayıların sadece belirli bir kısmını içermektedir. Bu nedenle verilen örnekler gerek şart olmayan tanım olarak değerlendirilmiştir.

Görüşme yapılan 1.sınıf öğretmen adayı Burçe, “Doğal sayı, sıfırdan dokuza kadar olan sayılardır.” şeklinde bir tanım yapıp araştırmacının “Sıfırdan dokuza kadar mı?” şeklindeki sorusu üzerine, “Dokuz değil sonsuza kadar.” şeklinde düzeltmede bulunmuştur.

Gerek ve Yeter Şart Olmayan:

Kavramı tanımlayabilmek için verilen özelliklerin kavramı oluşturmak için yetersiz olması ve aynı zamanda gerekli olmayan özelliklere de sahip olması durumunda yapılan tanımlar bu kategoride ele alınmaktadır. Bu kategoride yer alan 4 öğrenciden 1’i “Sıfırdan dokuza kadar olan sayılar” şeklinde tanım yapmıştır. Bu tanım bir yandan doğal sayıları sınırlarken, diğer yandan sıfır ve dokuz arasındaki diğer sayıları (π gibi) da içermektedir. Bu nedenle tanım uygun değildir. “1’den n’e kadar tüm sayılar” şeklinde tanım yapan bir başka öğrencinin ifadesinde de gereksiz bir kısıtlama mevcutken n’in ne olduğu açık değildir. “Sayılamaz sonsuz kümelere denk olan sayı kümesidir.” ve “Somut gösterilen sayılardır.” ifadeleri ise kavramı karşılamayan açıklamalar olduğu için uygun tanımlar değildir.

Görüşme yapılan 2. sınıf öğretmen adaylarından Halit’le araştırmacı arasında şu diyalog geçmiştir:

A: Doğal sayı nedir? Tanımlayabilir misin?

H: Üniversitede 1’den başlayarak gördük. Bu durumda 1’den başlayarak sonsuza kadar devam eden sayılardır. Ama tam sayı biçimindeki. Yani kesir alınabilir mi ki bunun içine?

A: Kesirler var mı doğal sayılarda?

H: Hayır yok da hani $4/3$ mesela 1’den büyük ya. Öğrenci tanıma göre onu alabilir mi?

A: Peki bunu engellemek için nasıl tanım yapmalıyız?

H: Payı paydasına tam bölünen 1’den büyük sayılar topluluğuna denir.

A: 1’i doğal sayı almıyor muyuz?

H: 1 ve 1’den büyük. $6/2$ gibi yani.

Görüldüğü gibi en kolay tanımlanabilir küme olarak düşünülebilecek doğal sayılarda dahi doğrudan uygun tanım yapmada öğretmen adayları zorluk yaşayabilmektedir. Halit ilk yaptığı tanımdaki eksikliği kendisi fark etmiş, öyle bir tanımda öğrencilerin kesirleri de dâhil edebileceğini düşünmüştür. Daha sonra kesirlerden yola

çıkarak bir tanım yapmıştır. O tanımda da 1 sayısını dâhil etmemiştir. Son düzeltmede ise o hatasını da düzeltmiştir.

Ne görüşmelerde ne de yazılı verilerde hiçbir öğretmen adayının Peano Aksiyomları gibi aksiyomatik yapıya dayanarak tanım yapmadığı dikkat çekmiştir.

4.2.1.2. Tam sayı tanımına ilişkin bulgular

Tam sayı kavramı, " $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ kümesinin her bir elemanına tam sayı denir." şeklinde tanımlanabilir. Öğretmen adaylarının tam sayı kavramına ilişkin yapmış oldukların tanımların dağılımı Tablo 62'de verilmiştir.

Tablo 62

Tam sayı kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı

Sınıf	Uygun (f,%)		Uygun Olmayan (f,%)	Yeter Şart Değil	Gerek Şart Değil	Gerek Yeter Şart Değil	Uygun Olmayan Toplam	TOPLAM
	Titiz	Titiz Olmayan						
1.Sınıf	9 (%22,5)	15 (%37,5)	24 (%60)	9 (%22,5)	0 (%0)	7 (%17,5)	16 (%40)	40
2.Sınıf	7 (%17,5)	12 (%30)	19 (%47,5)	12 (%30)	3 (%7,5)	6 (%15)	21 (%52,5)	40
3.Sınıf	18 (%45)	4 (%10)	22 (%55)	7 (%17,5)	2 (%5)	9 (%22,5)	18 (%45)	40
4.Sınıf	24 (%60)	5 (%12,5)	29 (%72,5)	4 (%10)	3 (%7,5)	4 (%10)	11 (%27,5)	40
Toplam	58 (%36,25)	36 (%22,5)	94 (%58,75)	32 (%20)	8 (%5)	26 (%16,25)	66 (%41,25)	160

Tablo 62 incelendiğinde doğal sayı tanımındaki uygunluk oranı (%58,75) ile tam sayı tanımındaki uygunluk oranının eşit olduğu ancak tam sayılarda titiz tanım oranının düştüğü (%36,25) görülmektedir. Her bir kategoriye ait tanım örnekleri aşağıda verilmiştir.

4.2.1.2.a. Uygun ve titiz tam sayı tanımları (%36,25)

Tam sayıların tamamını sözel ifadeyle, kümeyle veya şemalarla karşılayan tanımlar bu kapsamda değerlendirilmiştir. Öğrencilerin başlıca cevapları şunlardır:

- “ $-\infty$ dan $+\infty$ a kadar $\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$ şeklinde giden sayılar, “Sıfırdan başlayıp $+\infty$ a veya $-\infty$ yönünde birer artan veya azalan sayılar” ve “Sıfırın her iki yönünde simetrik olarak her biri öncekinden 1 fazla olacak şekilde dizilen sayılar” gibi ifadelerde bulunan öğretmen adayları ardışıklıktan yararlanarak veya sayıları listeleterek tanımlama yoluna gitmiştir.

- Bazı öğretmen adayları “Doğal sayılar ile bu sayıların toplamaya göre terslerinin birleşmesinden oluşan sayılardır.” ve “Doğal sayıların önlerine eksi getirilerek oluşan sayıların birleşimi” şeklinde doğal sayıları baz alarak tanımlama yapmıştır.
- “Paydası 1 olan rasyonel sayılardır.” şeklinde rasyonel sayılardan yola çıkarak uygun tanım yapan öğretmen adayları da olmuştur. Ayrıca kesirli gösterimden yararlanarak “ a/b şeklinde yazılabilen, a ’nın b ’ye kalansız bölündüğü sayılara denir.” şeklinde de tanım yapılmıştır. Bu iki tanım da tam sayıları oluşturduğu için uygun ve titiz olarak ele alınabilir.

4.2.1.2.b. Uygun ancak titiz olmayan tam sayı tanımları (%22,5)

Gerek ve yeter şartlara sahip olmasına rağmen, terminolojik yanlışlar veya ifadelerdeki eksiklikler nedeniyle bazı tanımlar bu kategoride ele alınmıştır.

- Doğal sayılardan yola çıkarak yapılan çeşitli tanımlar şunlardır:
 “Doğal sayılara pozitif doğal sayıların terslerinin de eklenmesiyle oluşan küme”
 “Doğal sayılar kümesine bütün negatif sayılarını da kattığımızda elde edilen küme.”
 “Sıfır dahil olmak üzere pozitif ve negatif doğal sayıları içeren küme”
 “Doğal sayı kümesinin eksilerini de barındıran küme”

İlk tanımda hangi işleme göre terslerinin ekleneceği belirtilmemiştir. Bu nedenle tanım titiz değildir. Diğer tanımlara göre de doğal sayılar kümesinin içerisinde negatiflerin de olduğu gibi bir anlam ortaya çıkmaktadır. Bunlar gibi dikkat eksikliği veya özensizce yapılan tanımlamalar titiz olmayan tanım kategorisine dahil edilmektedir.

- Bazı öğrencilerin ondalık temsilden yola çıkarak yapmış oldukları “Sayı doğrusunda tek bir noktaya karşılık gelen, ondalık kısmı sıfır olan sayılar” ve “ $-\infty$ dan $+\infty$ ’a, ondalık kesir kısmı olmayan reel sayılara denir.” tanımları minimallik kriterine aykırıdır. Sadece “Ondalık kısmı sıfır olan sayılardır.” veya “Ondalık kısmı olmayan reel sayılardır.” tanımları kavramı karşılamak için yeterlidir.
- $\pm\infty$ ’u tam sayıların elemanıymış gibi gösteren “ $-\infty$ dan başlayıp birer artarak $+\infty$ a giden sayılar” ve “ $\{-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty\}$ kümesinin elemanları” tanımları terminoloji hatasından dolayı titiz olmayan tanımlar arasındadır.

4.2.1.2.c. Uygun olmayan tam sayı tanımları (%41,25)

66 öğrenci gerek veya yeter şartlardan yoksun tanımlar yapmıştır. 32 öğrenci yeter şart olmayan, 8 öğrenci gerek şart olmayan tanımlar yaparken, 26 öğrencinin tanımı ise ne gerek ne de yeter şarttır. Bu tanımlardan bazıları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

Yeter Şart Olmayan:

- Sayı doğrusunda yeri belirlenebilen sayılar
- $-\infty$ ve $+\infty$ arasındaki sayılar
- Sıfır dahil hem negatif hem pozitif sayıları kapsayan küme
- a/b şeklinde yazılabilen sıfırı da kapsayan küme
- Paydası 1 olan sayılar
- $a=k.b$ olmak üzere a/b şeklinde ifade edilen ($b \neq 0$) sayılar kümesi

Yukarıdaki tanımların tamamı tüm reel sayılar için geçerli olabilir. Bu nedenle tanımlar yeter şart değildir.

Gerek Şart Olmayan:

- “Payı paydasına eşit olan sayılar” (Sadece “1” tam sayısını almaktadır)
- “ $x+k=0$ gibi ($k \in \mathbb{N}$) denklemlerin çözüm kümesi olan sayılar” (Sadece negatif tam sayılar)
- “ $a, b \in \mathbb{N}$ ve $a > b$ olmak üzere $a+x = b$ eşitliğinin çözümünü sağlayan x ’lere tam sayı denir.” (Sadece negatif tam sayılar)
- “Sıfırı kapsamayan birbirine tam bölünen iki sayının oranlarından oluşan sayılar” (Sıfır dahil değil)
- “Paydası 1 olan pozitif ve negatif rasyonel sayılar” (Sıfır dahil değil)

Yukarıdaki tanımların bazı tam sayıları dışladığı kümeyi kısıtladığı görülmektedir. Bu nedenle tanımlar uygun değildir.

Yazılı olarak “Payı paydasına eşit olan kesirlerdir.” tanımı yapan öğretmen adaylarından biri de görüşme yapılan 3. sınıf öğretmen adayı Orhan’dır. Orhan ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir:

A: Tam sayı nedir?

O: Payı paydasına eşit olan kesirlerdir.

A: Bu durumda $5/5$ veya $7/7$ tam sayı mıdır?

O: Evet.

A: Bunların sonucu 1’e eşittir. Bu durumda sadece 1 mi tam sayıdır?

O: Yanlış oldu. “Paydası 1 olan sayılardır.” diyebiliriz.

A: Peki $\sqrt{3}/1$ sayısı tam sayı mıdır o halde?

O: Yani tam bölünür. Öyledir.

Görüldüğü gibi Orhan, tam sayıları yanlış tanımlamıştır. İlk başta payı paydasına eşit olan sayıların tam sayı olduğunu ifade etse de sonra düzeltme yaparak paydası 1 olan sayıların tam sayı olduğunu belirtmiştir. Araştırmacının verdiği $\sqrt{3}/1$ örneğini de Orhan'ın tam sayı olarak kabul ettiği görülmektedir.

Gerek ve Yeter Şart Olmayan:

- “Negatif ve pozitif sayıları kapsayan sayılar” (Sıfır hariç tüm sayıları almaktadır)
- “ a/b şeklinde yazılamayan sayılar” (a ve b açık olmadığı için küme boş kümedir.)
- “ $-\infty$ ve $+\infty$ arası rasyonel olmayan bütün sayılar” (irrasyonel sayılar)
- “ a/b rasyonel sayısında $a=bx$ ise ve $x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere x’ler tam sayıdır” (Tanımda tam sayı ifadesi geçtiği için uygun değildir)
- “ $\mathbb{Z} \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$ ” (Tanımda tam sayı ifadesi geçtiği için uygun değildir)
- “Doğal sayıları kullanamadığımız yerde kullanılan sayılar” (Uygun bir tanım değil)
- “Negatif doğal sayılar” (Boş küme)

Görüşme yapılan 1.sınıf öğretmen adayı Burçe tam sayıları şu şekilde tanımlamıştır: “Negatif tam sayılar, pozitif tam sayılar ve sıfırın birleşimidir.”. Bu tanım üzerine araştırmacı kavramı tanımlarken kavramın kendisini de kullandığına dikkat çekmiştir. Bunun üzerine Burçe, “Aaa evet bu şekilde saçma oldu tanım. O zaman doğal sayılara negatiflerinin de eklenmiş halidir şeklinde tanımlayabiliriz.” diyerek tanımı düzeltmiştir.

Öğretmen adayları, bir kavramı tanımlarlarken yukarıdaki gibi kavramın ismini de tanımda kullanabilmektedir. Bunun yanı sıra bir diğer yapılan şey de iki kavramın tanımlarında birbirlerini kullanmak olmuştur. Bu duruma örnek de 2. sınıf öğretmen adayı Çise ile yapılan görüşmede ortaya çıkmıştır:

A: Doğal sayıyı tanımlar mısın?

Ç: Sıfırdan başlayıp sonsuza kadar giden sayılara denir.

A: Bu şekilde bir tanım yapılırsa 5,5 sayısını da doğal sayı alamaz mıyız?

Ç: “Sıfırdan başlayıp sonsuza kadar giden tam sayılardır.” diyebiliriz o zaman.

A: Tam sayılardan yola çıkarak tanımladın yani. Peki ya tam sayı nedir?

Ç: Doğal sayılar, onların negatifleri ve sıfırın birleşmesiyle oluşan sayılardır.

A: Bu şekilde söylersen de tamsayı tanımında da doğal sayı kullanılmış oldu.

Doğal sayıyı tam sayı kullanmadan nasıl tanımlarsınız?

Ç: Ardışık deriz o zaman. “Sıfırdan başlayıp ardışık ilerleyen ya da birer artarak ilerleyen sayılardır.” diyebiliriz.

Görüldüğü gibi ilk başta Çise doğal sayıyı tam sayı kavramını kullanarak, tam sayıyı ise doğal sayı kavramını kullanarak tanımlamıştır. Daha sonra doğal sayı tanımını ardışıklıktan yola çıkarak tanımlamıştır.

Tam sayı kavramı ile ilgili yazılı yanıtlara bakıldığında öğretmen adaylarının yarıya yakınının, tam sayıları uygun olmayan bir şekilde tanımladıkları dikkat çekmiştir. Ayrıca doğal sayılarda Peano Aksiyomlarıyla tanımlayan öğrenci olmadığı gibi tam sayılarda da denklik sınıflarından yararlanarak yapılan bir tanıma hiçbir sınıf düzeyinde rastlanmamıştır.

4.2.1.3. Rasyonel sayı tanımına ilişkin bulgular

Doğal sayı ve tam sayıdan sonra öğrencilerin karşılaştığı bir diğer sayı kümesi ise rasyonel sayılardır. Rasyonel sayı, Yanık (2013) tarafından “ $Q = \{x: x = \frac{a}{b}, a \text{ ve } b \text{ tam sayı, } a \text{ ve } b \text{ aralarında asal, } b \neq 0\}$ kümesinin her bir elemanına denir.” şeklinde tanımlanmaktadır. Ancak Yanık (2013) aralarında asallık şartının birçok kaynakta açıkça ifade edilmediğini de belirtmiştir. Ayrıca Argün ve diğerleri (2014) tarafından “ $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ olmak üzere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ üzerinde ‘ $(a,b) \sim (c,d)$ olması için gerek ve yeter şart $ad=bc$ olmasıdır.’ şeklinde tanımlanan denklik bağıntısına göre denklik sınıflarının her birine rasyonel sayı denir.” tanımını yapmıştır. Lamon (2007) rasyonel sayıların a/b ifadesi dışında da yazılabildiğini (ondalıklı gibi) belirtmiştir. Bu durumda “ a/b şeklinde yazılan” değil de “ a/b şeklinde yazılabilen” ifadesini kullanmanın rasyonel sayı tanımı için daha uygun olacağı söylenebilir. Ancak bu çalışmada “yazılan” veya “yazılabilen” ifadelerini kullanma titizlik ölçüsü olarak alınmamıştır. Ayrıca aralarında asallık literatürce tartışmalı olduğu için tanımda ifadeyi kullanan veya kullanmayan adayların cevapları aynı şekilde değerlendirilmiştir. Buna rağmen Tablo 63 incelendiğinde doğal sayı ve tam sayı tanımlarının aksine bu sayı kümesini tanımlarken öğretmen adaylarının yarıdan fazlasının (%78,75) uygun olmayan tanımlar yaptığı görülmüştür.

Tablo 63

Rasyonel sayı kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı

Sınıf	Uygun (f,%)		Uygun Toplam	Uygun Olmayan (f,%)			Uygun Olmayan Toplam	TOPLAM
	Titiz	Titiz Olmayan		Yeter Şart Değil	Gerek Şart Değil	Gerek Yeter Şart Değil		
1.Sınıf	8 (%20)	2 (%5)	10 (%25)	22 (%55)	2 (%5)	6 (%17.5)	30 (%75)	40
2.Sınıf	2 (%5)	0 (%0)	2 (%5)	37 (%92.5)	0 (%0)	1 (%2.5)	38 (%95)	40
3.Sınıf	3 (%7.5)	1 (%2.5)	4 (%10)	33 (%84.5)	0 (%0)	3 (%7.5)	36 (%90)	40
4.Sınıf	18 (%45)	0 (%0)	18 (%45)	21 (%52.5)	0 (%0)	1 (%2.5)	22 (%55)	40
Toplam	31 (%19.38)	3 (%1.88)	34 (%21.25)	113 (%70.63)	2 (%5)	11 (%6.875)	126 (%78.75)	160

Her bir kategoriye ait çeşitli yanıtlar görüşme verileriyle de desteklenerek aşağıda verilmiştir.

4.2.1.3.a. Uygun ve titiz rasyonel sayı tanımları (%19,38)

160 öğretmen adayından sadece 31 tanesi rasyonel sayıyı uygun ve titiz sayılabilecek formal tanıma yakın tanımlamıştır. Formal tanım yapanların 18'i 4. sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarındandır. Uygun ve titiz tanım yapan öğrencilerin başlıca yanıtları şu şekildedir:

- “ $a, b \in \mathbb{Z}$ ve a/b şeklinde yazılabilen/yazılan sayılar ($b \neq 0$)” ve “ $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+$ ve a/b şeklinde yazılabilen/yazılan sayılar” biçiminde aralarında asallıktan söz etmeyen tanımlar yapılmıştır. Tanımlar uygun ve titiz olarak kabul edilmiştir.
- “ a ve b aralarında asal ve a/b şeklinde yazılabilen ($b \neq 0$) sayılardır.” ve “ $\{x = \frac{a}{b} : (a, b) = 1 \text{ ve } b \neq 0\}$ kümesinin elemanlarıdır.” şeklinde tanım yapan öğretmen adayları a ve b 'nin aralarında asal olduğunu belirtmiş ancak a ve b 'nin tam sayı olduğunu belirtmemiştir. Ancak aralarında asallık kavramının tam sayılar için geçerli olmasından dolayı bu ifadenin varlığı a ve b 'nin tam sayı olduğunu göstermek için yeterlidir. Bu nedenle tanımlar titiz olarak kabul edilebilir.
- Bir öğrenci Leikin ve Zazkis (2008) tarafından zenginlik kriterince zengin olarak sayılabilecek bir tanım yapmıştır. Rutinin dışında olan 4. sınıf öğretmen adayının bu tanımı, “Birinci dereceden bir bilinmeyenli tam katsayılı denklemlerin çözüm

kümesidir.” tanımıdır. Tanım, matematiksel olarak uygun ve titiz olarak nitelendirilebilir. Öğretmen adayı rasyonel sayıyı cebirsel yaklaşımla tanımlamıştır.

4.2.1.3.b. Uygun ancak titiz olmayan rasyonel sayı tanımları (%1,88)

Tüm rasyonel sayıları karşılayan ancak b’nin sıfır olma durumunu atlayan “*a ve b aralarında asal ve a/b şeklinde yazılabilen sayılar*” ve “ *$a, b \in \mathbb{Z}$ ve a ve b aralarında asal olmak üzere a/b şeklinde yazılabilen sayılar*” tanımları $\frac{1}{0}$ ’ın rasyonel olmadığını atlamaktadır. Bu nedenle tanımlar titiz değildir. Ayrıca ikinci tanımda hem aralarında asallık hem de tam sayı ifadeleri bir arada verildiği için tanım minimal olarak da nitelendirilemez. Bir başka öğrenci ise ondalık temsilden yola çıkarak “ *a/b şeklinde yazılınca devirli ondalık olan sayılar*” şeklinde bir ifadeye bulunmuştur. Burada öğrencinin ondalık biçimde yazılmaktan bahsettiği ancak düzgün ifade edemediği düşünülmektedir. “Devirli” ifadesi ondalık kısmı sonlu olan 5,7 gibi sayıların da “5,7000...” şeklinde sıfır devreden veya “5,6999...” şeklinde dokuz devreden olduğu düşünüldüğünde yanlış bir ifade olarak değerlendirilmemiştir.

Görüşme yapılan bazı öğrencilerin de (Maksude, Tuğçe, Burçe, Halit, Simre) ilk yaptıkları açıklamalarında “ $b \neq 0$ ” veya “ $a, b \in \mathbb{Z}$ ” durumlarını belirtmedikleri görülmüştür. Ancak, “a ve b ile ilgili başka bilgi vermek gerekiyor mu?” diye sorulduğunda her ikisinin de tam sayı olması gerektiğini ve b’nin sıfırdan farklı olması gerektiğini belirttikleri görülmüştür.

4.2.1.3.c. Uygun olmayan rasyonel sayı tanımları (%78,75)

Öğrencilerden büyük bir kısmının rasyonel sayıları tanımlarken kritik sayılabilecek bazı noktaları atladıkları görülmüştür. Uygun olmayan tanım yapan 126 öğrencinin 113 tanesinin yeter şart olmayan tanım yaptığı, kavrama göre daha geniş kümeleri de içine aldıkları görülmüştür.

Yeter Şart Olmayan:

Uygun olmayan 113 tanım yeter şart içermemektedir. Başlıca tanımlar şu şekilde sınıflandırılabilir:

- En sık yapılan tanımlar “ *a/b şeklinde ifade edilen sayılar*”, “*Kesirli şekilde yazılabilen sayılar*” ve “*İki sayının oranı şeklinde yazılan sayılar*” gibi a ve b’nin tam sayı olma şartını ve b’nin sıfırdan farklı olması gerektiğini atlayan tanımlar olmuştur.
- “ *$a, b \in \mathbb{R}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere a/b şeklindeki sayılar*” ve “ *$a, b \in \mathbb{R}$, a/b şeklindeki sayılar*” tanımlarındaki gibi a ve b’yi reel sayı alan tanımlar da rasyonel sayı

kümesini kapsayan bir kümeye işaret etmektedir. Bu nedenle tanımlar yeterli değildir.

Bu şekilde tanım yapan öğrencilerden biri de 4. sınıf öğretmen adayı Şeyma'dır. Şeyma ile yapılan görüşmede rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayı kavramlarıyla ilgili yanılgıları olduğu görülmüştür. Yapılan görüşme ile ilgili bulgular aşağıda sunulmuştur:

A: Rasyonel sayıyı nasıl tanımlayabiliriz?

Ş: a/b şeklinde, b sıfırdan farklı olmak üzere yazılabilen sayılara denir.

A: Mesela burada öğrenci, " $\frac{\sqrt{3}}{2}$ rasyonel sayı mı, a/b şeklinde yazılıyor." şeklinde düşünemez mi?

Ş: Evet, a ve b elemanıdır reel sayıların.

A: Reel sayı olabilir mi?

Ş: Evet aslında $\sqrt{3}$ 'ün de bir değeri var ama çocuğa gidip de $\sqrt{3}$ 'ün değerini bul sonra b ye böl demek saçma. O yüzden a ve b tam sayı diyoruz. Ama bence sadece çocukların kafasına uysun diye böyle. Yani reel sayı alabiliriz a ve b'yi.

A: a ve b reel sayı alırsak, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ rasyonel sayı olur mu?

Ş: $\sqrt{3}$ 'ün değeri var ama.

A: $\sqrt{3}$ 'ün nasıl bir değeri var? Rasyonel midir onun değeri?

Ş: Eğer devirli değilse o zaman bir değeri olur bir tam sayıya bölündüğünde. Ama devirli ise tam değeri olmaz. [Devirli diyerek ondalık kısmı sonsuza giden her sayıyı ifade ediyor.]

A: $\sqrt{3}$ devirli mi devirsiz midir?

Ş: Dışarı çıkarınca "bir virgöl bir şey" işte.

A: Ondalık kısmı sonlu mudur? Sonsuza kadar mı gider?

Ş: Şu an onu düşünemedim ama bence denemek lazım. Her sayı için değişebilir. $\sqrt{4}$ de ona bakarsanız tam çıkıyor yani.

A: O zaman köklü sayıları düşünelim. $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ gibi sayıları denemek mi lazım rasyonel olup olmadığını anlamak için? Dışarı mı çıkarmak lazım?

Ş: Yani rasyonel de olabilir irrasyonel de bence.

A: O zaman rasyonel sayı ile irrasyonel sayının farkı ne? İrrasyonel sayı nedir?

Ş: Rasyonel olmayanlardır. Zaten ikisi birleşip reel sayıları oluşturuyorlar. Yani şimdi benim hatırladığım a/b şeklinde yazılamayan sayılardır.

A: Tanımdaki a ve b tam sayı mı olacak gerçek sayı mı?

Ş: Gerçek sayı olacak bence. İki gerçek sayının oranı şeklinde yazılamayanlardır.

A: Hangi sayı iki gerçek sayının oranı şeklinde yazılamaz ki. Mesela $\sqrt{5}$ dediğin $\sqrt{5}/1$ olarak yazılabilir.

Ş: Evet doğru yani demin dediğim gibi ama onlar yazılabiliyor işte. Hangi sayıları yazamayız?

A: O zaman irrasyonel sayılar yok mudur?

Ş: Hayır canım π var mesela irrasyonel olarak.

A: π sayısını $\pi/1$ olarak yazsak, π gerçek sayı, 1 de gerçek sayı. İki gerçek sayının oranı şeklinde yazdım. O zaman bu da rasyoneldir.

Ş: Şimdi bana diyorsunuz ki irrasyonel bir sayı var mı? Evet bunu sınırlandırmam lazım iki gerçek sayının oranı şeklinde yazılan diyoruz değil mi rasyonel sayıya.

A: Evet o şekilde olduğunu söyledin.

Ş: Aslında söylemek istediğim şey şu: “2” bir rasyonel sayıdır. Çünkü $2/1$ şeklinde yazılabiliyor. Ama her irrasyonel sayıyı 1’e bölerek bu da rasyonel oldu diyemeyiz. Çok saçma. İkisinin de aynı tür olması gerek. İkisi de tam sayı veya ikisi de irrasyonel sayı. π için böyle iki tane aynı türden sayı bulamayız.

A: O zaman tanımın değişti. İki aynı türden gerçek sayının bölümüne rasyonel sayı diyorsun.

Ş: Evet.

A: π^2 irrasyonel sayı mı?

Ş: Evet.

A: π de irrasyonel sayı diyorsun. $\pi^2/\pi = \pi$ olur. İki irrasyonel sayının oranı biçiminde yazdım. Aynı türden. O halde π rasyonel çıktı.

Ş: π ’nin irrasyonel olduğuna eminim.

A: Rasyonel sayı tanımının doğru olduğuna emin misin?

Ş: Hayır değilim iki tam sayının oranı mı olacak? Doğrusu tam sayı mı? Ama çok saçma. Mesela $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Belki $\sqrt{3}$ dışarı çıkartılınca bir şeyin kesirli hali olacak. $\sqrt{4}$ direk tam çıkabiliyor hatta. $\sqrt{3}$ ’ de çıkabilir en azından kesirli olarak. Onun $\sqrt{4}$ ’den ne farkı var. $\sqrt{2}$ de çıkabilir rasyonel olarak. Ama $\sqrt{-3}$ çıkamaz. Bence o zaman karmaşık sayılar irrasyonel sayı. Köklü sayılar, kesirli sayılar rasyonel sayı.

Şeyma ile yapılan görüşmede Şeyma’nın a/b şeklinde yazılabilen sayılar derken a ’nın ve b ’nin reel sayı olması gerektiğini belirttiği görülmüştür. Ancak çocukların kafasının karışmaması için tam sayı dendiğini ifade etmiştir. Kareköklü sayıların ondalıktan çıkarılıp kesirli olarak yazılıp yazılamadığının kontrol edilmesi gerektiğini belirtmiştir. Bu da kareköklü sayıların değerleriyle ilgili yanlışlarının olduğunu

göstermektedir. Araştırmacının her sayının paydasının 1 olabileceğini belirtmesi üzerine Şeyma tanımını değiştirerek, “Aynı türden iki sayının oranı şeklinde yazılabilen sayılardır.” tanımını yapmıştır. Aynı tür ifadesiyle iki tam veya iki irrasyonel sayıdan bahsetmiştir. π sayısının irrasyonelliğinden emindir ve π ‘nin aynı türden iki sayının oranı şeklinde yazılamayacağını düşünmektedir. Ancak araştırmacının verdiği $\pi^2/\pi = \pi$ örneğiyle birlikte yeniden çelişkiye düşmüştür. Daha sonra yaptığı tanımları tekrar sorgulayarak $\sqrt{3}$ gibi bir sayının $\sqrt{4}$ ’den farkının olmadığını ikisinin de bir değerinin olduğunu belirtmiştir. Karekökten çıkmayan sayıları düşünürken aklına karmaşık sayılar gelmiştir. Bu durumda tanımını tekrar değiştirerek karmaşık sayıların rasyonel olmayıp irrasyonel olduğunu geriye kalan sayıların rasyonel olduğunu belirtmiştir.

- Bazı öğrenciler, “ $b \neq 0$ iken a/b şeklinde yazılabilen sayılardır.” ve “ $a \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ iken a/b şeklinde yazılabilen sayılardır.” tanımlarında olduğu gibi b’nin sıfır olmama durumunu belirtip a ve b’nin tam sayı olduğunu atlamışlardır. Bu durumda $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sayısı da tanıma göre rasyonel olmaktadır.
- “İrrasyonel olmayan sayılardır” tanımı ise gerçek sayıların dışındaki karmaşık sayıları da içerebildiği için yeter şart olarak ele alınmamıştır.

Görüşme yapılan 3.sınıf öğretmen adayı Orhan rasyonel sayıyı, “İrrasyonel olmayan sayıdır.” şeklinde tanımlamıştır. “İrrasyonel sayı nedir?” sorusuna ise “Kökten dışarı çıkmayan sayılar ve devirli sayılar irrasyoneldir.” açıklamasında bulunmuştur. Bu açıklamayla birlikte öğrencinin irrasyonel sayı ile ilgili yanlışlığının irrasyonel olmayan sayı yani rasyonel sayı kavramı ile bağlantılı olduğu görülmüştür.

- “Kökten çıkan sayılardır.”, “Virgülden sonrası belli olan sayılardır” ve “Ondalık kısmı sonlu olan sayılardır.” tanımları da yeterli değildir. Çünkü $\sqrt{\pi^2}$ sayısı da kökten çıkabilmektedir. Ayrıca gerek π sayısının gerekse kareköklü bir irrasyonel sayının virgülden sonrası bellidir (her ne kadar yazamamak da).

Görüşme yapılan öğrencilerden Çise (2.sınıf) yazılı olarak, “Ondalık kısmı sonlu olan sayılara rasyonel sayı denir.” şeklinde tanım yapmıştır. Ancak görüşmede hatasının farkına varmıştır. Araştırmacı ile aralarında geçen diyalog aşağıda verilmiştir:

A: Rasyonel sayıları nasıl tanımlarsınız?

Ç: A/B şeklinde yazılıyor. B sıfırdan farklı ve A ile B’nin aralarında asal olması lazım.

A: Aralarında asal olması şart mı?

Ç: Şart.

A: O zaman şunu sorayım, 10/6 bir rasyonel sayı değil midir?

Ç: Bunu sadeleştirebilirim. O zaman rasyonel sayıdır. $5/3$. Aralarında asal olacak şekilde yazılabilen demek lazım.

A: Kâğıdında ondalık kısmı sonlu olan sayıların rasyonel sayı olduğunu belirtmişsin. Bu durumda $2,333\dots$ gibi devreden bir sayı rasyonel değil midir?

Ç: Evet rasyonel değildir o. İrrasyoneldir.

A: Biz bunu a/b şeklinde yazamaz mıyız peki?

Ç: Aslında yazıyoruz. (Kuralı uygulayıp işlem yapar.) $21/9$ oluyor ama rasyonel değil çünkü aralarında asal değil.

A: $21/9$ rasyonel değil mi o zaman?

Ç: 3 ile sadeleştiririm, $7/3$ olur. Aralarında asal.

A: $7/3$ buna eşit midir? $2,333\dots$ sayısına yani.

Ç: Denemem lazım işlem yaparak.

(7'yi 3'e böler ve $2,333\dots$ şeklinde gittiğini görür.)

Ç: Eşit çıktı. O zaman rasyonel sayı olmuş oluyor.

A: O zaman devirli sayılarda rasyonel sayıdır diyebilir miyiz? Sonsuza gittiği halde.

Ç: Evet diyebiliriz o halde.

Görüldüğü gibi Çise sayının ondalık kısmından yola çıkarak yapmış olduğu yanlış tanımı, a/b yazımından yola çıkarak düzeltmiştir. Ancak diyalogda dikkat çeken hususlardan bir tanesi öğrencinin devirli bir sayıyı kural uygulayarak kesirli hale getirip daha sonra sadeleştirdikten sonra oluşan yeni kesrin ilk sayıya eşit olup olmadığından emin olmayıp kontrol etmesi olmuştur. Burada öğrencinin sadeleştirmede veya bir devirli sayıyı a/b haline getirmede sayının değerinin değişmeyeceğinin bilincinde olmadığı görülmüştür.

Gerek Şart Olmayan:

“ a ve b gibi iki rakamın ($b \neq 0$) birbirine bölünmesiyle oluşan sayılar” ve “ $a, b \in \mathbb{N}$ ve a/b şeklindeki sayılar ($b \neq 0$)” tanımları rasyonel sayıların bir alt kümesine işaret etmektedir. Bu nedenle gereksiz bir kısıtlama içermektedir. İlk örnekte a ve b sadece rakamlardan, ikincisinde ise doğal sayılardan seçilmiştir. Bu seçimle birlikte ‘negatif rasyonel sayılar’ küme dışında kalmıştır. Bu nedenle bu iki öğrencinin tanımları uygun değildir.

Gerek ve Yeter Şart Olmayan:

Altısı 1. sınıf olmak üzere 11 öğrencinin tanımı bu kategoride ele alınmıştır. “Tam olarak ifade edilemeyen sayılar”, “Tam sayı olarak yazılamayan ifadeler” ve “Sayı doğrusunda tam sayılar arasındaki boşluklarda yer alan sayılar” tanımları bir yandan tam sayıları dışlarken öte yandan irrasyonelleri de içine almaktadır. 7 öğrenci bu şekilde tanım yapmıştır.

“ $a \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere a/b şeklindeki sayılar.” yapan bir öğrenci b yerine a’yı sıfırın dışında almıştır. Birer öğrenci ise “Payı paydası birbirinden farklı olan paydası 1 veya 0 olmayan sayı”, “İki sayının çarpımı şeklinde yazılabilen sayılar” ve “Harf ile değil rakamlarla gösterilen sayı doğrusunda yeri belli olan sayılar” şeklinde uygun olmayan tanımlamalarda bulunmuştur.

Rasyonel sayı kavramında öğretmen adaylarının tanımlarının %80’e yakınının uygun olmadığı görülmüştür. Yapılan görüşmeler sonucunda rasyonel sayı kavramı ile ilgili sorunların irrasyonel sayı kavramıyla da bağlantılı olduğu anlaşılmıştır.

4.2.1.4. İrrasyonel sayı tanımına ilişkin bulgular

Öğrenciler ilk kez 8. sınıfta irrasyonel sayılarla karşılaşmaktadır. Gerçek sayıların inşasında rasyonel sayıların olduğu kadar irrasyonel sayıların da anlaşılmasının gerekli olduğu ifade edilebilir. İrrasyonel sayı Baykul (2009) tarafından “Devirli ve devirsiz ondalık açılımları bulunmayan sayılar.” şeklinde tanımlanmıştır. Burada “devirsiz” ifadesi ile ondalık kısmın sonlu olduğu belirtilmiştir. Argün vd. (2014) ise irrasyonel sayıyı, “ $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde ifade edilemeyen reel sayılardır.” şeklinde tanımlamıştır. Burada “reel sayı” şeklinde belirtilmesi kritik şartlardan biri sayılabilir. Çünkü karmaşık sayılar da iki tam sayının oranı şeklinde yazılamaz.

Öğretmen adaylarının irrasyonel sayı tanımlamalarına bakıldığında durumun rasyonel sayı tanımındakinden çok da farklı olmadığı Tablo 64’te görülmektedir.

Tablo 64

İrrasyonel sayı kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı

Sınıf	Uygun (f,%)		Uygun Toplam	Uygun Olmayan (f,%)			Uygun Olmayan Toplam	TOPLAM
	Titiz	Titiz Olmayan		Yeter Şart Değil	Gerek Şart Değil	Gerek Yeter Şart Değil		
1.Sınıf	4 (%10)	7 (%17,5)	11 (%27,5)	3 (%7,5)	2 (%5)	24 (%60)	29 (%72,5)	40
2.Sınıf	0 (%0)	3 (%7,5)	3 (%7,5)	5 (%12,5)	1 (%2,5)	31 (%77,5)	37 (%92,5)	40
3.Sınıf	2 (%5)	4 (%10)	6 (%15)	10 (%25)	2 (%5)	22 (%55)	34 (%85)	40
4.Sınıf	8 (%20)	10 (%25)	18 (%45)	7 (%17,5)	2 (%5)	13 (%32,5)	22 (%55)	40
Toplam	14 (%8,75)	24 (%15)	38 (%23,75)	25 (%15,625)	7 (%4,375)	90 (%56,25)	122 (%76,25)	160

Tablo 64 incelendiğinde sadece 14 öğretmen adayının (%8,75) uygun ve titiz tanım yapabildiği görülmektedir. 2. sınıf öğretmen adaylarından hiçbiri titiz tanım yapamamıştır. Sınıf düzeylerine göre bakıldığında uygun tanım oranlarının 1. ve 4.sınıflarda en fazla olduğu görülmektedir. Her bir kategoriye ait cevaplar aşağıda verilmiştir.

4.2.1.4.a. Uygun ve titiz irrasyonel sayı tanımları (%8,75)

14 öğretmen adayının 8'i "*rasyonel olmayan reel (gerçek) sayılar*" ve "*reel (gerçek) sayılardan rasyonel sayıların çıkmış hali*" şeklinde tanım yapmıştır. 3 öğretmen adayı ise "*ondalık açılımında virgülden sonrası devirli (ve devirsiz) gitmeyen sayılar*" şeklinde ondalık açılımdan yola çıkarak tanımlama yoluna gitmiştir. Burada "devirsiz" ifadesi belirtilmese dahi tanım uygun kabul edilmiştir. Çünkü sonlu ondalık sayılar da aynı zamanda "sıfır devirli" olarak nitelenebilmektedir. 3 öğretmen adayı ise " *$a, b \in \mathbb{Z} (b \neq 0)$ olmak üzere a/b şeklinde yazılamayan reel sayılar*" şeklinde rasyonel sayı kavramından yola çıkarak tanım yapmıştır.

Görüşme yapılan 1.sınıf öğretmen adaylarından Tuğçe, "Ondalık kısmı düzensiz bir şekilde sonsuza kadar giden sayılardır." tanımını yaparak ilk söyleminde titiz tanım yapabilen tek kişi olmuştur.

4.2.1.4.b. Uygun ancak titiz olmayan irrasyonel sayı tanımları (%15)

24 öğretmen adayının tanımlarının yer aldığı bu kategoride öğretmen adaylarının büyük bir kısmı "rasyonel olmama" üzerinden tanım yapmaya çalışmış ancak "reel sayı olma" ibaresini belirtmemişlerdir. " *$a/b (b \neq 0), a, b \in \mathbb{Z}$ şeklinde yazılamayan sayılardır.*", " *$EBOB(a, b) = 1$ olmak üzere a/b şeklinde ifade edilemeyen sayılar*" ve "*iki tam sayının oranı/bölümü şeklinde yazılamayan sayılar*" tanımlarında "reel sayı" ibaresi geçmemektedir. Bu nedenle tanımlar titiz olarak değerlendirilmemiştir. Ayrıca b'nin sıfırdan farklı olması gerektiği irrasyonel sayı tanımında belirtilmeyebilir. Zaten $1/0$ gibi bir ifadeye pay da payda da tam sayı olduğu için iki tam sayının oranı şeklinde yazılabilmektedir. Dolayısıyla tanıma göre irrasyonel sayı değildir.

Görüşme yapılan 3. sınıf öğretmen adayı Simre, "Rasyonelin tam tersidir. a/b şeklinde iki tam sayının oranı olarak yazılamayan sayılardır." tanımını yapmıştır. Tanımında, "...yazılamayan reel sayılardır." ibaresi yer almadığı için tanım titiz olarak kabul edilmemiştir. Aşağıda yer alan diyalogda bu ibarenin gerekliliği ortaya konmuştur:

A: " *a/b şeklinde iki tam sayının oranı olarak yazılamayan sayılardır.*" diyorsun yani.

S: Evet.

A: Peki, $5/0$ irrasyonel midir?

S: İkisine de almama durumu var mı, yok değil mi? Bence irrasyoneldir.

A: $5/0$ irrasyoneldir diyorsun.

S: Rasyonel sayı olmaması gerekiyor. O zaman irrasyonel alırız. Bilemedim ama bence tanımsız olduğu için irrasyoneldir.

A: Peki a/b şeklinde yazılamayan diyorsun ya $\sqrt{-3}$ mesela yazılabilir mi?

S: O zaten yazılamaz.

A: O zaman irrasyonel midir?

S: Evet o da tanımsız değil mi? İrrasyoneldir.

A: i sayısını hatırlıyor musun?

S: Evet o da aynı şekilde irrasyoneldir.

Görüldüğü gibi Simre, paydası sıfır olan veya kökün içi negatif olan sayıları da irrasyonel sayı olarak görmektedir. Çünkü bir sayının ya rasyonel ya da irrasyonel olması gerektiğini düşündüğü görülmüştür.

Titiz olmayan tanımlardan biri de “*Ondalık kısmı sonsuza giden ve tekrar içermeyen, tam değerini izah edemediğimiz sayılardır.*” şeklinde olmuştur. Bu tanımda da aslında öğretmen adayının sayının devirli olmadığını ifade etmeye çalıştığı söylenebilir.

Bir başka öğretmen adayı “ $\mathbb{R} - \{\mathbb{Q}\}$ ” şeklinde bir tanım yapmıştır. Bu tanımda $\mathbb{Q}$ ’nun küme içerisinde ifade edilmesi terminoloji hatası olduğu için tanım uygun ancak titiz olmayan kapsamında değerlendirilmiştir.

4.2.1.4.c. Uygun olmayan irrasyonel sayı tanımları (%76,25)

160 öğretmen adayından 122’si irrasyonel sayı tanımında gerek veya yeter şartlardan yoksun tanımlar yapmıştır.

Yeter Şart Olmayan:

25 öğretmen adayının tanımı bu kapsamda değerlendirilmiştir. Bu tanımlardan 20’si “*rasyonel olmayan sayılar*” şeklindedir. Bu yanıtı veren öğrencilerin rasyonel sayıları da uygun tanımlayamadıkları hatta bir kısmının irrasyonel sayı için karmaşık sayı örnekleri de verdiği görülmüştür. 1. sınıf öğretmen adayı Burçe ile yapılan görüşmede geçen diyalog aşağıda verilmiştir:

B: Rasyonel sayı dışındaki sayılara irrasyonel sayı diyoruz. Mesela π sayısı ve e sayısı.

A: Harfle belirtilen sayılar mı sadece?

B: Bir de a/b şeklinde yazılamayan sayılara da irrasyonel sayılar denir. $\sqrt{2}$ var mesela. Köklü sayılar irrasyoneldir.

A: Tüm köklü sayılar mı?

B: Yok hayır tam kare olanlar irrasyonel değildir.

A: Tamam peki, kökün içinde -3 varsa irrasyonel midir?

B: Bilmiyorum ki ama evet evet irrasyoneldir.

A: Karmaşık sayı olmuyor mu o zaman? Karmaşık sayılar da irrasyonel midir?

B: Evet karmaşık sayı oluyor. Umarım irrasyoneldir.

Görüldüğü gibi Burçe rasyonel olmayan sayılar olarak tanımladığı irrasyonel sayıların içerisine karmaşık sayıları da dâhil etmiştir. Bu nedenle yazılı olarak verilen “rasyonel olmayan sayı” tanımları da uygun olmayan tanım olarak kabul edilmiştir.

“*Tam sayı olmayan sayılar*” ve “*Ondalık kısmı sonsuza giden sayılar*” şeklinde tanımlar yapan öğretmen adayları da olmuştur. Bu tanımlar da yeter şart değildir. Çünkü her ne kadar irrasyonel sayılar bu tanımlara uysa da (tam sayı değiller ve ondalık kısımları sonsuz) rasyonel sayılardan da tanımlara uyan sayılar mevcuttur.

Gerek Şart Olmayan:

3 öğrenci “*Kök içinden çıkamayan tam/rasyonel sayılar ve π* ” şeklinde, 4 öğrenci ise “*Kökten çıkamayan tam/rasyonel sayılar*” şeklinde tanımlar yapmıştır. Bu tanımlar irrasyonel sayıların sadece bir kısmını kapsamaktadır. Karekök ifadesinin irrasyonel sayıları sınırladığı söylenebilir. Bu nedenle tanımlar uygun değildir.

Gerek ve Yeter Şart Olmayan:

Tüm öğretmen adaylarının %56’sı (122 öğretmen adayı) irrasyonel sayıların tanımını yaparken gerek ve yeter şartlardan bağımsız hatta tamamen ilgisiz açıklamalarda bulunduğu görülmüştür. Çok farklı türde tanımlamalar mevcuttur. Bu uygun olmayan tanımların belli başlı olanları aşağıda listelenmiştir.

- “*a/b ($b \neq 0$) formunda yazılamayan sayı*”, “*iki sayının birbirine bölümü (a/b) şeklinde yazılamayan sayılar*” ve “*kesirli yazılamayan sayılar*” şeklinde iki sayının oranından veya kesirden yola çıkarak tanım yapan 50 öğretmen adayı mevcuttur. Tanımlarda pay veya paydanın türü ile ilgili bilgi olmadığı için a/b şeklinde yazılamayacak sayı yoktur. Bu nedenle tanım hiçbir elemanı karşılamamaktadır.
- 16 öğretmen adayı karmaşık sayıların da irrasyonel sayı olduğunu belirten tanımlar yapmıştır. Bu tanımlardan bazıları şu şekilde sıralanabilir: “*Gerçek olarak ifade edilemeyen sayılar*”, “*gerçek (reel) olmayan sayı*”, “*karmaşık sayılar / rasyonel olmayan karmaşık sayılardır*” “ *$\sqrt{-1}$ ’e eşit olan sayılar*”, “ *$\sqrt{-9}$, $\sqrt{21}$ ve i gibi kökten çıkmayan sayılar*” ve “*Karekök içi negatif olan rasyonel olmayan sayılar*”
- 9 öğretmen adayı, “*gerçek değeri bilinmeyen sayılar*”. “*(Tanımlı) bir değer karşılığı olmayan sayı*”, “*belli bir tam değere eşit olmayan sayı*” ve “*sonucunu bilmediğimiz sayılar*” şeklinde tanımlamalarda bulunmuştur.
- “*Devirli sayılar*”, “*Sayı doğrusunda yeri olmayan sayılar*”, “*Rakamlarla değil e ve π gibi harflerle ifade edilen sayılar*”, “*Köklü ifadeler*”, “*Paydanın tanımsız olduğu sayılar*” şeklinde farklı tanım örnekleri de ortaya konmuştur.

4.2.1.5. Gerçek sayı tanımına ilişkin bulgular

İrrasyonel sayı ve rasyonel sayı tanımlarının her ikisinde de uygunluk oranları %50'den düşüktür. Bu nedenle öğretmen adaylarının iki kümenin birleşimi olan gerçek sayıları anlamada veya tanımlamada zorluk yaşayabileceği düşünülebilir.

Gerçek sayı her ne kadar Dedekind kesimi ve Cauchy dizileriyle matematiksel olarak tanımlanabilse de kısaca “rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşimi” şeklinde ifade edilebilir. Ortaokul düzeyinde en geniş sayı kümesi olarak görülen gerçek sayıyla ilgili öğretmen adaylarının tanımlarının dağılımı Tablo 65’te verilmiştir.

Tablo 65

Gerçek sayı kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı

Sınıf	Uygun (f,%)		Uygun Toplam	Uygun Olmayan (f,%)			Uygun Olmayan Toplam	TOPLAM
	Titiz	Titiz Olmayan		Yeter Şart Değil	Gerek Şart Değil	Gerek Yeter Şart Değil		
1. Sınıf	6 (%15)	9 (%22,5)	15 (%37,5)	11 (%27,5)	2 (%5)	12 (%30)	25 (%62,5)	40
2. Sınıf	8 (%20)	5 (%12,5)	13 (%32,5)	17 (%42,5)	2 (%5)	8 (%20)	27 (%67,5)	40
3. Sınıf	3 (%7,5)	2 (%5)	5 (%12,5)	23 (%57,5)	3 (%7,5)	9 (%22,5)	35 (%87,5)	40
4. Sınıf	16 (%40)	3 (%7,5)	19 (%47,5)	11 (%27,5)	2 (%5)	8 (%20)	21 (%52,5)	40
Toplam	33 (%20,625)	19 (%11,875)	52 (%32,5)	59 (%36,875)	9 (%5,625)	37 (%23,125)	108 (%67,5)	160

Tablo 65 incelendiğinde öğretmen adaylarının %32,5’unun gerçek sayıyı uygun bir şekilde tanımladıkları, 4. sınıflarda dahi öğrencilerin yarıdan fazlasının uygun tanım yapamadıkları görülmüştür. Her bir kategoriye ait bazı yanıtlar aşağıda verilmiştir.

4.2.1.5.a. Uygun ve titiz gerçek sayı tanımları (%20,625)

“Rasyonel ve irrasyonel sayıların tamamıdır.”, “Rasyonel ve irrasyonel sayı kümelerinin birleşimidir.”, “ $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ ” gibi yanıtlar uygun ve titiz olarak kabul edilmiştir. 33 öğretmen adayının büyük bir kısmı bu şekilde tanım yapmıştır. “Sayı doğrusu üzerindeki her bir noktanın karşılık geldiği değer” ve “Sayı doğrusunda yeri belli olan sayılar” şeklinde de tanım yapan öğretmen adayları olmuştur. Bir öğretmen adayı da “Sanal kısım içermeyen karmaşık sayılar” şeklindeki bir ifadeyle karmaşık sayılardan yola çıkarak gerçek sayıları tanımlamıştır.

4.2.1.5.b. Uygun ancak titiz olmayan gerçek sayı tanımları (%11,875)

Bu kategoride 19 öğretmen adayının yapmış olduğu tanımlar yer almaktadır. Bu öğretmen adaylarından bir kısmı “*Rasyonel ve irrasyonel sayıları kapsayan küme*” şeklinde tanım yapmıştır. Burada asıl söylenmek istenen şeyin iki kümenin birleşimi olduğu düşünülse de “kapsayan” ifadesi iki kümeden de fazlasının olabileceğini belirtmektedir. Görüşme yapılan 1. sınıf öğretmen adayı Burçe ve 2.sınıf öğretmen adayı Çise’nin tanımları da aynı şekildedir. Araştırmacının, “Kapsar derken ne demek istiyorsun? Rasyonel ve irrasyonel sayıların dışında da gerçek olan sayılar var mıdır?” sorusu üzerine Burçe, “Muhakkak rasyonel ve irrasyonellerin dışında da sayı vardır. O yüzden kapsayan dedim.” cevabını verirken Çise, “İkisinin birleşimi demek istedim. İkisi dışında başka sayı yoktur.” ifadesinde bulunmuştur. Bu iki öğrencinin yanıtı tanımın titiz olmadığını farklı yorumlara yol açabileceğini göstermektedir.

Yine benzer ifadelerle “ $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ gibi bütün sayı kümelerini kapsayan $\mathbb{R}$ ile gösterilen sayı kümesi” ve “*Rasyonel, irrasyonel, doğal sayı ve tam sayıları kapsayan/içeren/içine alan sayı kümesi*” şeklinde tanımlayan öğretmen adayları da mevcuttur.

1. sınıf öğretmen adaylarından biri “*Sanal kısmı olmayan tüm rasyonel ve irrasyonel sayılardır.*” şeklinde tanım yapmıştır. Bu tanımda da “sanal kısmı olmayan” ifadesi tanımın minimalliğini bozmuştur. Bu nedenle tanım titiz değildir.

3. sınıf bir öğretmen adayının yapmış olduğu “ $\mathbb{R} = \{\mathbb{Q}\} \cup \{\mathbb{I}\}$ ” gösterimi de parantez işaretlerinden dolayı terminolojik olarak hatalıdır. Bu nedenle uygun ancak titiz olmayan tanımlar arasında gösterilebilir.

4.2.1.5.c. Uygun olmayan gerçek sayı tanımları (%67,5)

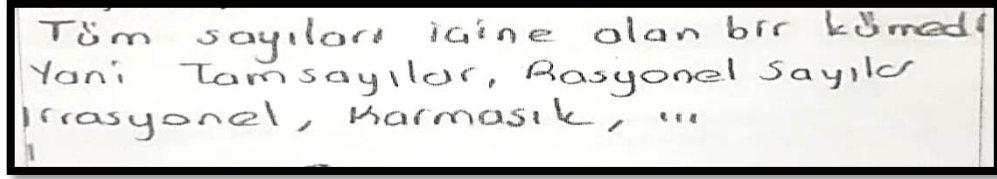
Öğretmen adaylarının büyük bir kısmı gerçek sayıyı uygun bir şekilde tanımlayamamıştır. Bazıları yeter şart olmayan bir tanım yaparak karmaşık sayıları da gerçek sayılara dahil etmiş, bazıları ise gerek şart olmayan bir ifade ile gerçek sayıların bir alt kümesini tarif etmiştir. Uygun olmayan tanımlardan bazıları aşağıdaki gibi incelenebilir.

Yeter Şart Olmayan:

- “*Tüm sayı kümelerini/sayıları içinde barındıran/hepsini kapsayan sayı kümesi*”
“*Tüm sayı kümelerinin birleşimidir.*”
“ *$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ gibi kümeleri kapsayan en geniş sayı kümesidir.*”
“*Rasyonel ve tam sayıları kapsayan sayılardır.*”
“*En geniş sayı kümesidir.*”
“*Tüm sayılardır.*”

Yukarıdaki tanımların titiz olmayan (rasyonel ve irrasyonel sayıları kapsayan küme) tanımlardan farkı rasyonel ve irrasyonel sayılardan bahsetmemesidir. Bu şekilde

tanım yapan bazı öğrencilerin karmaşık sayıları da gerçek sayı olarak belirttiği görülmüştür. Şekil 39’da bu öğrenci yanıtlarından biri görülmektedir.



Şekil 39. “Uygun olmayan” bir gerçek sayı tanımı

Ayrıca görüşme yapılan öğretmen adaylarından dördünün yanıtı bu şekilde olmuştur:

- Şeyma (4.sınıf): Bütün sayıların kümesidir.
- Simre (3.sınıf): Tüm sayılardır, her şeyi içine alan.
- Orhan (3.sınıf): Bütün sayıları oluşturan rasyonel ve irrasyonellerin birleşimi.
- Halit (2.sınıf): Sayıların tamamını kapsayan küme.

Ancak araştırmacının, “Karmaşık sayılar da dâhil mi?” sorusuna dördünün de cevabı “Evet dâhil.” olmuştur. Bu nedenle bu tür tanımlar yeterli değildir. 59 öğretmen adayından 48’inin yanıtı yukarıda verilen örneklerdeki gibi olmuştur.

- “Bütün sayıları ve karmaşık sayıları da kapsayan sayı kümesi”
“ $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{C}$ sayı kümelerinin elemanları”

Bazı öğretmen adayları tanımlarında doğrudan karmaşık sayılardan bahsetmiştir. Gerçek sayıların “tüm sayılar” olarak düşünüldüğü görülmektedir.

- “ $\sqrt{8}, \sqrt{9}$ gibi reel sayılardır.”, “Reel sayılara gerçek sayı denir.” gibi ifadelerle gerçek sayıyı tanımlayan öğretmen adayları da olmuştur. Ancak görüldüğü gibi ifadeler kavramın diğer ismini vermenin ötesinde değildir.

Gerek Şart Olmayan:

- “Tam sayılar ve doğal sayıların birleşimidir.”, “Doğal, tam ve rasyonel sayılardır.”, “Rasyonel sayılardır.” şeklinde tanım yapan öğretmen adayları gerçek sayıları onların bir alt kümesine sınırlamıştır. Bu nedenle tanımlar uygun değildir.
- “Kök dışına çıkabilen sayılar”, “Ondalık kısmı belirli veya devirli olan sayılardır.” “Devretmeyen sayılar” gibi çeşitli tanımlamalarda bulunan öğretmen adayları da olmuştur. Bu ifadeler de gerçek sayıların özel bir kısmının özelliğini ifade etmektedir.

Gerek ve Yeter Şart Olmayan:

- “İrrasyonel olmayan/irrasyonel dışındaki tüm sayılar”
“Tüm sayılar eksi (-) irrasyonel sayılardır.”

Her iki tanım da bir yandan irrasyonel sayıları dışlarken bir yandan da karmaşık sayıları da tanıma göre gerçek sayı yapmaktadır. 9 öğretmen adayı bu şekilde tanımlama yapmıştır. Bu öğretmen adaylarından biri olan Tuğçe (1. sınıf), “İrrasyonel sayıların dışında kalan tam sayı, rasyonel sayı, asal sayı gibi tüm sayıları içine alan sayılara gerçek sayılar denir.” şeklinde açıklama yapmıştır. Araştırmacının, “O zaman gerçek sayıların rasyonel sayılardan farkı nedir?” sorusu üzerine, “Hatırlamıyorum.” yanıtını vermiştir.

- Bazı öğrenciler “*Karmaşık olmayan sayılardır.*” şeklinde tanım yapmıştır. Ancak gerçek sayılar karmaşık sayıların alt kümesi olduğu için bu tanım da gerek veya yeter şart değildir.

Gerçek sayılarla ilgili öğretmen adaylarının kavram karmaşası yaşadıkları verilen cevaplardan görülmektedir. 23 öğretmen adayı gerçek sayının tanımına hiç cevap vermemiş ve soruyu boş bırakmıştır.

Görüldüğü gibi öğretmen adaylarının doğal sayılardan gerçek sayılara kadar tüm sayı kümelerinin tanımlarında zorluk yaşadığı ve uygun tanım verme oranlarının çok yüksek olmadığı görülmüştür. Rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayı tanımlarında öğretmen adaylarının yarıdan fazlasının uygun olmayan tanım yapması dikkat çekicidir. Bu nedenle özellikle bu kavramların birbirleriyle ilişkisine yönelik sorulara kavram testinin 2. aşamasında ağırlık verilmiştir.

4.2.1.6. Mutlak değer tanımına ilişkin bulgular

Sayı kümeleriyle ilişkili olan ve ortaokul düzeyinde 6. sınıfta tam sayıların öğretimi ile birlikte gösterilen bir başka kavram mutlak değer kavramıdır. Mutlak değer, bir x reel sayısının işaretli kısmı olarak tanımlanabilir. İşaret fonksiyonundan yararlanarak, “Bir x reel sayısının mutlak değeri $x.sgn(x)$ ’tir.” şeklinde veya parçalı fonksiyondan yararlanarak “ $x < 0$ ise $|x| = -x$ ve $x \geq 0$ ise $|x| = x$ ” şeklinde tanımlamada bulunulabilir (Lane ve Birkhoff, 1999)

“ $a+ib$ ” şeklindeki bir karmaşık sayının mutlak değeri ise (a,b) vektörünün sıfıra olan uzaklığı ile bulunulabilir. Böylece $b=0$ olduğunda $(a,0)$ ikilisinin sıfıra yani orijine uzaklığı mutlak değeri verecektir. Tüm formal tanımlar göz önüne alındığında öğretmen adaylarının da farklı biçimlerde tanımlama yapma şanslarının olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının sadece reel sayıların mutlak değeriyle sınırlı kalarak tanım yapmaları yeterli görülmüştür. Ancak daha genel tanımlar da bir sorun teşkil etmemektedir. Tablo 66’da öğretmen adaylarının mutlak değer kavramına ilişkin yapmış oldukları tanımlara ilişkin analiz sonuçları verilmektedir.

Tablo 66

Mutlak değer kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı

Sınıf	Uygun (f,%)		Uygun Olmayan (f,%)	Yeter Şart Değil	Gerek Şart Değil	Gerek Yeter Şart Değil	Uygun Olmayan Toplam	TOPLAM
	Titiz	Titiz Olmayan	Uygun Toplam					
1. Sınıf	15 (%37,5)	3 (%7,5)	18 (%45)	15 (%37,5)	0 (%0)	7 (%17,5)	22 (%55)	40
2. Sınıf	23 (%57,5)	0 (%0)	23 (%57,5)	9 (%22,5)	0 (%0)	8 (%20)	17 (%42,5)	40
3. Sınıf	18 (%45)	0 (%0)	18 (%45)	14 (%35)	1 (%2,5)	7 (%17,5)	22 (%55)	40
4. Sınıf	25 (%62,5)	1 (%2,5)	26 (%65)	7 (%17,5)	1 (%2,5)	6 (%15)	14 (%35)	40
Toplam	81 (%50,625)	4 (%2,5)	85 (%53,125)	45 (%28,125)	2 (%1,25)	28 (%17,5)	75 (%46,875)	160

Tablo 66'dan görüldüğü gibi öğretmen adaylarının yaklaşık %53'ü uygun tanım yapmıştır. Bu oranın 4. sınıflarda %65'e kadar çıktığı da dikkat çekmektedir. Hangi tanımların titiz olarak alındığı, uygun olmayan tanımların ne gibi ifadelerden oluştuğu aşağıda verilmiştir.

4.2.1.6.a. Uygun ve titiz mutlak değer tanımları (%50,625)

Öğretmen adaylarının yaklaşık yarısı uygun ve titiz tanımlamalarda bulunmuştur. Tanımın sıfırla ilgili bir ifade içermesi kritik noktalardan biri olarak alınmıştır. Uygun ve titiz tanımlardan bazıları şu şekildedir:

- Öğrencilerin büyük bir kısmı “sıfıra olan uzaklık” olarak mutlak değeri tanımlamıştır.
“Sayının sıfıra olan uzaklığıdır.”
- Formal tanıma uygun olarak parçalı fonksiyon biçiminde yapılan tanımlar da vardır:

$$a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$
- Sayının işaretli kısmının mutlak değer olduğunu belirtir tanımlar yapılmıştır:
“Bir niceliğin yönü önemsizdir.”
“Bir sayının normunu, uzunluğunu gösteren ifadedir.”
Bu ifade tüm karmaşık sayılar için geçerlidir. Bu nedenle tanım uygun ve titiz olarak ele alınabilir.

- Sayının mutlak değeri sembolünün içinden dışarı nasıl çıkabileceğine dair sürece dayalı tanımlar mevcuttur.

“Negatif veya pozitif tüm sayıları içindeki sayı değişmeden pozitif, 0’ı ise aynen çıkaran işlem”

“İçindeki sayı negatifse sayı değişmeden işaretini artı yapan, pozitifse veya sıfırsa sabit bırakan işarettir.”

Yukarıdaki tanımlarda “sayı değişmeden” ifadelerinin mutlak değeri alma sürecini tam olarak yansıtmaması bakımından kritik olduğu düşünülebilir.

4.2.1.6.b. Uygun ancak titiz olmayan mutlak değeri tanımları (%2,5)

- *“Negatif bir sayıyı pozitif yaparken, sıfır ve pozitif bir sayıyı aynı bırakan işlem”*
- *“ $|0|=0$ olmak üzere içerisindeki her sayıyı pozitif çıkaran işlem”*
- *“ $a>0 \Rightarrow |a|=a$
 $a<0 \Rightarrow |a|=-a$ ”*

Dört öğrenci yukarıdaki tanımlara benzer ifadelerde bulunmuştur. İlk iki tanıma göre $|-5|=2$ ifadesi de mutlak değeri alma işlemine uygundur. Çünkü mutlak değeri, içerisindeki -5’i pozitif olarak çıkarmıştır. Tanımlar sayının değişmediğini belirtmemiştir. Bu nedenle ilk iki tanım gibi ifadeler titiz olarak alınmamıştır. Üçüncü tanımda mutlak değeri kavramı sıfır haricinde doğru açıklanmıştır. Bu nedenle tanım uygun ancak titiz olmayan şekilde sınıflandırılmıştır.

4.2.1.6.c. Uygun olmayan mutlak değeri tanımları (%46,875)

Uygun olmayan bazı tanım örnekleri aşağıda verilmiştir.

- *“Negatif sayıları pozitif yapan işarettir.”*,
“Negatif veya pozitif sayıyı pozitif çıkaran eylemdir.”
“Artıları aynı bırakıp eksiye artı yapan işlemdir.”

Yukarıdaki üç ifade de mutlak değeri tanımlamasa da mutlak değeri kavramı için doğru bilgilerdir. Bu nedenle ifadeler gerek şarttır. Ancak ilk tanımda pozitif sayılar ve sıfır için, ikinci ve üçüncüde ise sıfır için herhangi bir açıklama yoktur. Ayrıca mutlak değeri ile sayıların işaret haricinde değişmediği belirtilmemiştir. Bu iki nedenden dolayı tanımlar uygun değildir.

- *“Bir a sayısının sıfıra olan uzaklığının pozitif değerine denir.”*

Sıfırın pozitif değeri yoktur. Bu nedenle tanım sıfırla ilgili yeterli bir işlem sunmamıştır. Ayrıca uzaklık kavramı zaten pozitifdir. Bu nedenle tanım minimallığe aykırı bilgi de içermektedir.

- *“Uzaklık” ve “İki nokta arası uzaklık”*

Mutlak değer kavramı uzaklıkla ilişkilendirilebilse de bu iki tanım yeter şart değildir.

- “ $a \in \mathbb{N}$ iken $|-a|=a$ ve $|a|=a$ ”

Tanım, mutlak değerini içini sadece tam sayılarla sınırlamıştır. Ancak a’nın doğal sayı olması ve doğal olarak mutlak değer içinin tam sayı olması gerek şart değildir.

- “*Birim çemberde bir sayının orijine olan uzaklığıdır.*”

“Birim çember” ifadesi kavramı sadece normu 1 birim olan ikililerle sınırlamıştır.

Bu nedenle bu ifade de gerek şart değildir.

- “*Bir ifadenin işaretlerini artı yapan değer: $|-x-3|=x+3$ ”*

“Birbirinden farklı a ve b sayıları arasındaki uzaklık”

“ $|a|$ ifadesinde içinin negatif olmadığı değer”

“Bir sayının işaret değiştirmesidir.”

“Bir sayıyı pozitif yapan işlem/Bir sayının pozitif değeridir.”

28 öğretmen adayı yukarıdaki gibi gerek veya yeter şart olmayan tanımlamalar yapmışlardır.

Mutlak değer ile ilgili tüm tanımlara bakıldığında bazı öğretmen adaylarının sıfırın üzerinde durmadığı görülmüştür. Özellikle de sadece pozitifliğe veya negatifliğe odaklanıldığı, sayının değeriyle ilgili ifadelere yer verilmeyen tanımların çok olduğu dikkat çekmiştir.

4.2.1.7. Birim kesir tanımına ilişkin bulgular

Sayılar ve işlemler öğrenme alanının en temel kavramlarından bir diğeri de “kesir” kavramıdır. Öğretmen adaylarına bir kesir türü olan “birim kesir” kavramının tanımı sorulmuştur. Öğrencilerin ilköğretim seviyesinde iken tanıştığı birim kesir kavramı ortaokul 5.sınıf düzeyinde de çeşitli kazanımlarda geçmektedir. Bütünü verilen çokluğun bir kesir kadarı veya kesir kadarı verilen çokluğun tamamını bulmaya yönelik kazanımlarda birim kesirlerden yararlanılması tavsiye edilmiştir (MEB, 2018). Kısaca kavram, “Payı 1 olan kesirlere birim kesir denir” şeklinde tanımlanabilmektedir (Wells, 1997). Ancak Özgen (2014) birim kesri “Payı 1 olan basit kesirlerdir.” şeklinde tanımlamıştır. 1/1’in birim kesir olup olmaması iki tanıma göre farklılık göstermekle birlikte bu çalışmada iki tanım da doğru kabul edilmiştir. Temel sayılabilecek bu kavramın tanımı öğretmen adaylarına sorulmuş ve Tablo 67’de görüldüğü gibi düşük oranlarda uygun tanımlara rastlanmıştır.

Tablo 67

Birim kesir kavramına ilişkin tanımların dağılımı

Sınıf	Uygun (f,%)		Uygun Toplam	Uygun Olmayan (f,%)			Uygun Olmayan Toplam	TOPLAM
	Titiz	Titiz Olmayan		Yeter Şart Değil	Gerek Şart Değil	Gerek Yeter Şart Değil		
1. Sınıf	8 (%20)	1 (%2,5)	9 (%22,5)	1 (%2,5)	0 (%0)	30 (%75)	31 (%77,5)	40
2. Sınıf	9 (%22,5)	0 (%0)	9 (%22,5)	4 (%10)	0 (%0)	27 (%67,5)	31 (%77,5)	40
3. Sınıf	14 (%35)	2 (%5)	16 (%40)	5 (%12,5)	0 (%0)	19 (%47,5)	24 (%60)	40
4. Sınıf	20 (%50)	7 (%17,5)	27 (%67,5)	6 (%15)	0 (%0)	7 (%17,5)	13 (%32,5)	40
Toplam	51 (%31,875)	10 (%6,25)	61 (%38,125)	16 (%10)	0 (%0)	83 (%51,875)	99 (%61,875)	160

Tablo 67’de tüm öğrencilerin sadece %35’inin uygun sayılabilecek bir tanım verdiği görülmektedir. Sınıf seviyesi arttıkça uygun ve titiz tanımların oranının arttığı ve en yüksek uygun tanım oranının da 4.sınıflarda olduğu görülmüştür (%65). Her bir kategoriye ait tanımlar aşağıdaki gibi incelenebilir.

4.2.1.7.a. Uygun ve titiz birim kesir tanımları (%28,75)

Bu kategoride yer alan çeşitli öğrenci yanıtları şu şekildedir:

- Payı 1 olan kesirlere denir.
- Payı 1 olan basit kesirlere denir.
- Payı 1 paydası sıfırdan ve 1’den farklı olan kesirlere denir.
- Payı 1 paydası sıfırdan farklı bir doğal sayı olan kesirlere denir.
- $1/a$ şeklinde ($a \neq 0$) olan kesirlere denir.
- $\forall a, b \in \mathbb{N}$ için $b \neq 0$ olmak üzere $b \cdot \frac{a}{b} = 1$ eşitliğini sağlayan a/b kesirlerine denir.

Bazı öğrenciler sadece payın 1 olması gerektiğini belirtirken bazılarının ise paydanın sıfırdan farklı olması gerektiğini belirttikleri görülmektedir. Öğrencilerin sıfırı vurgulayıp vurgulamamalarının tanımın yeter veya gerek koşullarını engellemediği söylenebilir. Ayrıca kesir kavramı zaten paydanın sıfırdan farklı olması gerektiğini ifade ettiği için öğrencilerin bu yanıtları titiz olarak değerlendirilmiştir.

Paydanın 1 olmaması gerektiği veya kesrin basit kesir olması gerektiği de literatürce tartışmalıdır. Bu şekilde tanım yapan öğretmen adaylarının da olduğu görülmektedir. Bu adaylardan biri de son sınıf öğrencisi Şeyma’dır. Şeyma birim kesri,

“Payı 1 olan basit kesirdir.” şeklinde tanımlamıştır. Araştırmacının, “Yani $1/1$ ’i kabul etmiyorsun birim kesir olarak” dönütü üzerine, “Evet, $1/1$ zaten bileşik değil mi? $2/2$ ve $3/3$ gibi. Bu nedenle birim kesir değildir.” şeklinde açıklamada bulunmuştur.

4.2.1.7.b. Uygun ancak titiz olmayan birim kesir tanımları (%6,25)

Bu kategoride bazı öğrencilerin modeller üzerinden tarif yaptığı görülmüştür. Bazı öğrencilerin terminolojiden kaynaklı bazılarının ise minimallikten kaynaklı yanlışlarının olduğu görülmüştür. Öğrenci yanıtlarının bazıları şu şekildedir:

- *Bir pastanın her bir diliminin tüm dilimlere oranıdır.* (Eş dilim ifadesi gerekirdi)
- *n parçaya bölünen bir bütünün bu her n parçasından biridir.* (... n eş parçasından biri)
- *Bir bütün kaç bölünürse bölünsün her bir parçasının ifade ettiği kesirdir.* (Parçaların eş olması gerektiği bilgisi eksik)
- *Bir aralığı n eş parçaya bölersek her bir parçanın ifade ettiği bölümdür.* (Parçalara değil kesre veya orana vurgu olmalıydı)
- *$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere a/b yazımında $a=1$ ve $b \neq 0$ koşulunu sağlayan kesirlerdir.* (Minimal değil)

Verilen yanıtların ilk üçünde dilimlerin eş olması gerektiği belirtilmemiştir. Bu söylem veya yazım eksikliği çeşitli kavram yanılgılarına da neden olabilmektedir. Bu nedenle tanımlar titiz bir tanım olarak nitelendirilmemiştir. Dördüncü yanıtta ise öğrenci parçayı baz almış parçanın ifade ettiği kesri belirtmemiştir. Halbuki birim kesir o parçanın bütüne oranıdır. Matematiksel dille ifade edilen son tanımda titizliği engelleyen tek koşul payın reel sayılardan seçilmiş olmasıdır. Tanımın devamında zaten payın 1 olması gerektiği belirtilmiştir. Bu nedenle $a \in \mathbb{R}$ koşulu minimallığı bozmaktadır.

4.2.1.7.c. Uygun olmayan birim kesir tanımları (%65)

Bu kategorideki tanımlar gerek veya yeter şartları taşıyıp taşımadıklarına göre sınıflandırılabilir.

Yeter Şart Olmayan:

Bu kategorideki tanımlar birim kesirleri de içine alan ancak daha geniş kavramlara işaret etmektedir.

- *“Payı 1 olan rasyonel sayılardır.”, “Payı 1 olan sayılardır.” ve “ $1/a$ şeklinde ve $a \in \mathbb{Z}$ ($a \neq 0$) olan kesirlerdir.”* tanımları bu kategoride değerlendirilebilir. Çünkü negatif sayılar da bu tanımlara göre birim kesir ifade edebilmektedir. Bu nedenle tanımın pozitifliğe daraltılması gerektiği söylenebilir.

- “Paydası paya tam bölünen sayılardır.” tanımı birim kesirlerin de bir özelliğini göstermesine rağmen $2/8$ gibi kesirleri de belirtebilmektedir. Bu nedenle öğrencilerin bu tanımı yeterli değildir.
- “Rasyonel (a/b) şekilde yazılabilen sayılardır.” tanımı da birim kesirlerin bir özelliği olmasına karşın birim kesirleri tam olarak yansıtmamaktadır. Bu nedenle bu cevap da bu kategoride değerlendirilmiştir.
- “ a/b şeklinde yazılan ve $EBOB(a,b)=1$ olan kesirlerdir.” ve “Bir kesrin en sade halidir.” tanımları aynı anlama gelmektedir. Birim kesirlerin en sade olduğu söylenebilir ancak $2/5$ gibi bazı kesirler de bu tanıma göre birim kesirdir.
- “ a/b şeklinde, $a \leq b$ olan kesirlerdir.” tanımı da $1/1$ de dahil tüm birim kesirleri içermesine karşın $2/3$ gibi basit ve $4/4$ gibi bileşik kesirleri de içerdiği için birim kesir kavramını karşılamak için yeterli değildir.

Gerek Şart Olmayan:

Bu kategorideki tanımlarla birim kesirlere ulaşmak mümkün olmasına karşın elde edilen birim kesirler tüm birim kesirleri karşılamamaktadır. Sadece spesifik bir kısmını belirtmektedir. Örneğin “Payı 1 paydası çift sayı olan kesirlere birim kesir denir.” şeklinde bir tanım yapılmış olsaydı bu tanım kavramı kısıtladığı için bu kategoriye girecekti. Ancak bu kategoride değerlendirilebilecek bir öğrenci cevabı olmamıştır. $1/1$ ’in birim kesir olarak kabul edildiği tanımları baz alınca “Payı 1 olan basit kesirlerdir.” tanımı kavramı sınırlandırdığı için bu kategoriye girmektedir.

Gerek ve Yeter Şart Olmayan:

Bu kategorideki öğrenci tanımları kavramı temsil etmek için gerekli ve yeterli koşullardan yoksundur. Öğrencilerin %50’den fazlası bu kategoride tanımlar yapmışlardır. Bazı öğrenci yanıtları şu şekildedir:

- “Kesirli ifadenin 1’e eşit olmasıdır.”, “Oranı 1 olan kesirlerdir.” ve “Pay ve paydası aynı olan kesirlerdir” tanımları çok sayıda öğretmen adayının yanılgısını ortaya koymuştur. Birim kesir denilince kesrin 1’e eşit olması gerektiği düşüncesinde bulunulabileceği görülmüştür.
- “Payı paydasından küçük olan kesirler” tanımı basit kesirlerle birim kesir kavramının karıştırılabileceğini göstermiştir. $1/1$ kesrinin basit kesir olmaması nedeniyle tanım gerek bir koşul olmayıp aynı zamanda tüm basit kesirleri kapsadığı için de yeterli bir koşul değildir.
- “Payı paydaya tam bölünen sayılardır.” tanımı $6/2$ gibi tam sayıları işaret etmektedir.

- “Paydası 1 olan kesirlerdir.”, “Tam kesirlerdir.” tanımları da $5/1$ gibi tam sayıları işaret ettiği için birim kesirlerden sadece $1/1$ ’i karşılayabilmektedir.
- “İki ardışık rasyonel sayı arasındaki farktır.” tanımında öğrenciler $5/7$ ve $4/7$ gibi iki rasyonel sayıyı ardışık düşünerek aradaki farka yani $1/7$ ye işaret etmektedir. Ancak rasyonel sayıların yoğun bir küme olmasından dolayı ardışıklıktan söz edilemez.
- “Tam bir sayı değeri olmayan kesirler”, “Mutlak değeri 1 olan kesirler” ve “Kesirlerde tamı geçen kısımların ayrılıp yana tam olarak yazılması” şeklinde çeşitli tanımlar da yapılmıştır.

Bazı öğretmen adayları ise birim kesir kavramını hiç duymadıklarını veya hatırlamadıklarını ifade etmişlerdir. Görüşme yapılan 1. sınıf öğretmen adaylarının her ikisi de “birim kesir” kavramını daha önce duymadıklarını belirtmişlerdir. Görüşme yapılan bazı öğretmen adayları ise kavramı yanlış tanımlamışlardır. 2. sınıf öğretmen adaylarından Halit ile araştırmacı arasında şu diyalog geçmiştir:

A: Birim kesir nedir?

H: a/b şeklinde yazılabilen tüm kesirler. Ama a , b ’nin katı şeklinde yazılan sayılar.

A: a , b ’nin katı. Yani $10/5$ gibi mi?

H: Evet, yok ya... Bu da değil. Nasıl mantık kurabiliriz burada ki, uzunluğu 1 olan... Bunda öyle bir şey var mıydı? $a = b$ olan yani.

A: $a = b$ olan diyorsun. Yani $5/5$ gibi.

H: Evet. Yani değeri 1’e eşit olan kesirdir.

Görüldüğü gibi Halit öncelikle a/b şeklinde yazılan ancak a ’nın b ’nin katı olduğu tüm sayıları birim kesir olarak ifade etmiştir. Ancak daha sonra a ’nın b ’ye eşit olacağını düşünerek değeri 1 olan kesirlerin birim kesir olacağını ifade etmiştir. Her iki durumda da tanımı uygun değildir.

İlkokul seviyesinde öğretilen “birim kesir” kavramını öğretmen adaylarının büyük bir kısmı yanlış tanımlamıştır. Öğretmen adaylarının ‘birim’ sözcüğünden yola çıkarak uygun olmayan tanımlar yapabildikleri görülmüştür.

4.2.1.8. Asal sayı tanımına ilişkin bulgular

Sayılar ve işlemler öğrenme alanının alt öğrenme alanlarından biri çarpanlar ve katlardır. Bu alt öğrenme alanına ilişkin en temel kavramlardan biri “asal sayı” kavramıdır. Asal sayıları farklı şekillerde tanımlayabiliriz. “Kendisinden daha küçük iki doğal sayının çarpımı şeklinde yazılamayan 1’den büyük doğal sayılardır.”, “Sade ve sadece 4 tam sayı böleni olan pozitif tam sayılardır.” tanımları bunlardan bazılarıdır (Gardner, 1987). Yapılan

tanımların pozitif sayıları işaret etmesi gerektiği ve 1'in dâhil olmaması gerektiği kritik noktalardan sayılabilir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının asal sayı ile ilgili bu kritik noktaları atladığı ve uygun olmayan bazı tanımlar yaptıkları görülmüştür. Yapılan tanımların dağılımı Tablo 68'de verilmiştir.

Tablo 68

Asal sayı kavramına ilişkin tanımların dağılımı

Sınıf	Uygun (f, %)			Uygun Olmayan (f, %)			Uygun Olmayan Toplam	TOPLAM
	Titiz	Titiz Olmayan	Uygun Toplam	Yeter Şart Değil	Gerek Şart Değil	Gerek Yeter Şart Değil		
1. Sınıf	2 (%5)	12 (%30)	14 (%35)	1 (%2,5)	0 (%0)	25 (%62,5)	26 (%65)	40
2. Sınıf	0 (%0)	19 (%47,5)	19 (%47,5)	0 (%0)	0 (%0)	21 (%52,5)	21 (%52,5)	40
3. Sınıf	0 (%0)	14 (%35)	14 (%35)	2 (%5)	1 (%2,5)	23 (%57,5)	26 (%65)	40
4. Sınıf	3 (%7,5)	8 (%20)	11 (%27,5)	1 (%2,5)	0 (%0)	28 (%70)	29 (%72,5)	40
Toplam	5 (%3,125)	53 (%33,125)	58 (%36,25)	4 (%2,5)	1 (%0,625)	97 (%60,625)	102 (%63,75)	160

160 öğretmen adayından sadece 5 tanesinin titiz bir tanım yaptığı görülmektedir. Öğrencilerin %63,75'i uygun olmayan tanımlar yapmıştır. Ayrıca uygun tanım oranının (%27,5) en az 4. sınıflarda olduğu ancak sınıf düzeylerine göre düzenli bir artış olmadığı tespit edilmiştir.

4.2.1.8.a. Uygun ve titiz asal sayı tanımları (%3,125)

Bu kategoride yer alan beş öğretmen adayının yanıtları şu şekildedir:

- 2'den başlayan kendisi ve 1 haricinde hiç pozitif tam sayı böleni olmayan sayılardır. (4. sınıf)
- Sadece iki pozitif tam sayı böleni olan doğal sayılardır. (4. sınıf)
- Kendisinden ve 1'den başka hiçbir pozitif böleni olmayan en küçüğü 2 olan doğal sayılardır. (1. sınıf)
- 1'den büyük olan ve kendisiyle 1'den başka pozitif tam sayı böleni olmayan sayılardır. (4. sınıf)
- Tam olarak iki doğal sayı tarafından bölünebilen doğal sayılardır. (1. sınıf)

Yukarıda belirtilen tanımların kritik noktaları atlamadığı görülmektedir. Titiz tanımların bu kadar az sayıda olması ise asal sayı kavramı ile ilgili güçlüklerin göstergesidir.

4.2.1.8.b. Uygun ancak titiz olmayan asal sayı tanımları (%33,125)

Bu kategoride değerlendirilen öğretmen adaylarının yapmış oldukları tanımlarda ve verdikleri örneklerde asal sayı kavramını doğru olarak bildiklerine dair güçlü ipuçları olmasına karşın “pozitif bölen” gibi bazı ifadeleri atladıkları bu nedenle tanımlarının titiz olmadıkları görülmüştür. 53 öğretmen adayının olduğu bu kategorideki en sık yapılan tanımlardan bazıları şunlardır.

- “2, 3, 5, 7, ... gibi 1 ve kendisinden başka sayıya bölünemeyen sayılardır.”, “En küçüğü 2 olan, 1 ve kendisinden başka sayıya bölünemeyen sayılardır.” (p asal sayısı 1 ve kendisi dışında -1 ve -p’ye de bölünür. Burada pozitif sayılar olarak belirtilmeliydi ancak verilen örneklerin birinde 2, 3, 5 şeklinde gitmesi ve pozitif yönde ilerlemesi nedeniyle diğerinde ise 2’den başladığının belirtilmesi nedeniyle tanımlar uygun sayılabilir.)
- “Kendisine ve 1’den başka hiçbir sayıya bölünemeyen 1 haricindeki doğal sayılardır.” ve “1’den büyük olma koşuluyla yalnızca 1’e ve kendisine bölünebilen doğal sayılardır.” tanımları 1’in asal olmadığını özellikle belirtmektedir. Ancak bu tanımlarda da sadece iki bölenden bahsedilmektedir ve bu bölenlerin pozitif olması gerektiği belirtilmemiştir.
- “1 haricindeki iki farklı sayının çarpımı halinde yazılamayan sayılardır.” tanımında öğretmen adayı iki farklı sayının doğal sayı olması gerektiğini belirtmemiştir. Ancak verdiği örnekler bakıldığında ve yaklaşımına bakıldığında sadece dikkat eksikliği sayılabilecek bir hatasının olduğu görülmektedir. Tanım titiz olmamasına karşın asal sayıları tarif etmek için uygun sayılabilir.
- “ $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere a’nın yalnızca iki pozitif tam sayı böleni varsa 1 ve kendinden başka bir böleni yoksa a asal sayıdır.” tanımında ise minimallik göz ardı edilmiş ve fazla bilgi verilmiştir. Bu nedenle tanımın titiz olmadığı söylenebilir.

4.2.1.8.c. Uygun olmayan asal sayı tanımları (%63,75)

Öğretmen adaylarının büyük bir kısmının asal sayı kavramının tanımında olması gereken gerek veya yeter şartları atlayarak tanım yaptığı görülmüştür. Yapılan tanımı asal sayılarla birlikte bazı asal olmayan sayılar sağlıyorsa tanım “yeter şart olmayan” şeklinde sınıflandırılmıştır. Yapılan tanımı asal olmayan sayılarla birlikte asal sayılardan en az biri de sağlamıyorsa tanım “gerek şart olmayan” şeklinde sınıflandırılmıştır. Her iki durum da

söz konusu ise tanım “gerek-şart olmayan” şeklinde ifade edilmiştir. Bu sınıflandırmalar için bazı örnekler aşağıda verilmiştir.

Yeter Şart Olmayan:

Dört öğretmen adayının asal sayı kavramına ilişkin genel ifadelerle tanım yaptığı görülmüştür. Bu tanımları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

- “2, 3, 5, 7, ...şeklinde giden sayılar” tanımı asal sayı örnekleri içermesine karşın sayıların nasıl ilerlediği ile ilgili bilgi vermemektedir. Bu nedenle bu tanım uygun olmayan bir tanımdır. 1. sınıfta ve 3. sınıfta öğrenim gören iki öğretmen adayı bu şekilde tanım yapmıştır.
- “1’den büyük 1’e ve kendisine bölünebilen sayılardır.” tanımı tüm asal sayıları kapsamına karşın diğer doğal sayıları da içine almaktadır. Çünkü “6” sayısı da 1’e ve kendisine bölünebilir. Asal sayılara göre daha geniş bir kümeyi tanımladığı için bu tanım yeter şart değildir. (3. sınıf)
- “ $(a,b)=b \Leftrightarrow b=1$ ise a asaldır.” tanımı tüm tam sayıları kapsamaktadır. Çünkü 1 ile diğer tam sayıların EBOB’u yine 1’i vermektedir. Bu nedenle tanım gerek şart olduğu halde yeter şart değildir. (4. sınıf)

Gerek Şart Olmayan:

3. sınıf öğretmen adaylarından bir tanesi, “1’den başka hiçbir sayıya bölünemeyen sayılara 2’nin de eklenmesiyle oluşan küme” şeklinde tanım yapmıştır. Tüm sayılar -1’e de bölünebildiği için bahsedilen tarzda bir sayı yoktur. Ancak kümeye 2’nin eklenmesiyle tek bir asal sayıdan oluşan küme meydana çıkmıştır. Bu nedenle tanım gereksiz bir kısıtlama içermektedir ve uygun değildir.

Gerek ve Yeter Şart Olmayan:

Bu kategorideki öğretmen adaylarının tanımları asal sayıları temsil etmek için gerekli ve yeterli koşullardan yoksundur. Katılımcıların %60’dan fazlası bu kategoride tanımlar yapmışlardır. Bazı yanıtlar şu şekildedir:

- “Yalnızca 1’e ve kendisine bölünebilen sayılardır.”, “1 ve kendisi dışında çarpanı/böleni olmayan sayılar” ve “Sadece 1 ve kendisinin çarpımı şeklinde yazılan sayılar” en sık yapılan tanımlardandır. Ancak bu tanımlara uyan sadece 1 ve -1 sayıları vardır. Çünkü diğer sayıların kendileri ve negatifleri olmak üzere 2 tane daha çarpanı vardır. Tanımı karşılayan 1 ve -1’in ikisi de asal sayı olmadığı için tanımlar uygun değildir.
- “1’in dışındaki iki farklı sayının çarpımı halinde yazılamayan sayılardır.” tanımında ne asal sayının ne de çarpanların doğal sayı olması gerektiği

belirtilmiştir. Bu tanıma göre asal sayı olan 5'in iki farklı sayının çarpımı şeklinde yazılamaması gerekmektedir. Ancak -1 ve -5 'in çarpımı 5'i verir. Tanıma göre hiçbir sayı asal olmamaktadır.

- “1 dışında hiçbir sayıya bölünemeyen sayılar” ve “Sadece kendisine bölünen sayılar” “Sadece kendisine bölünen doğal sayılar” tanımları ise hiçbir sayı için geçerli olmadığı için uygun değildir.
- “Sadece 1'e ve kendisine bölünen pozitif sayılardır.” tanımı sadece 1'i asal sayı olarak göstermektedir.
- Bazı öğretmen adayları 2'yi asal sayı almayacak şekilde tanım yapmıştır. Bunlardan biri olan, “1'den büyük sadece 1'e ve kendisine bölünebilen tek sayılardır.” tanımında negatif bölenleri dahil etmediği için tanım uygun değildir ancak burada asal sayıların tek sayı olması gerektiği de belirtilmiştir. Yine 3. sınıf öğretmen adaylarından bir tanesi “1'den başka bölünen olmayan (2 hariç) sayılardır.” şeklinde tanım yaparak 2'yi asal sayı olarak ele almamıştır.
- $P = \{a \in \mathbb{Z} : \text{yalnız } 1 \mid a \wedge a \mid 1\}$ şeklinde notasyon kullanarak tanım yapan 4. sınıf öğretmen adayının $-a$ ve -1 'in de a 'yı bölebildiğini ifade etmediği görülmektedir.

Görüldüğü gibi öğretmen adaylarının tanım yaparken asal sayıların pozitif olması gerektiği veya bir p asalının bölenlerinin içinde $-p$ ve -1 'in de olması gerektiği gibi şartları göz ardı edebilmektedir.

Görüşme yapılan tüm öğretmen adaylarının asal sayıları aslında bildikleri ancak tanımlayamadıkları görülmüştür. Bu öğretmen adaylarından 2. sınıfta öğrenim gören Çise ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir.

Ç: 1'den başka bölünen olmayan sayıdır.

A: Bütün sayıların 1'den başka bölünen vardır. Mesela 2'yi düşünelim.

Ç: Kendisi ve 1'den başka bir sayıya bölünmeyen sayılardır.

A: Kendisine ve 1'den başka sayıya diyorsun. Peki mesela 3 asal mıdır?

Ç: Asaldır

A: Ama 3; -3 'e, -1 'e, 1 'e ve 3 'e bölünüyor.

Ç: Hımm...

A: Mesela senin tanımına göre 1 de asal sayı olmuyor mu?

Ç: Benim aslında söylediğim şey aralarında asal sanırım... Asal sayıları çok iyi biliyorum aslında ama tanımlayamıyorum.

A: 1 asal mıdır?

Ç: Değildir, 2,3,5,7...

A: Negatif sayılar peki? -2 mesela asal mıdır?

Ç: Bence değil. 2'den başlıyor. Çünkü en küçük asal sayı 2.

A: O zaman nasıl tanım yapmak lazım buna?

Ç: Bir kere negatifler olmayacak, pozitif tam sayılar içerisinde olacak. 1 de olmayacak ama 1 neden olmayacak? Onu biliyordum ama şu an hatırlayamıyorum, neden asal değil mesela? 2, 3, 5 diye gidiyor.

A: O zaman 1'den büyük diyelim.

Ç: 1'den büyük, ama özellikleri ne işte? Yapamıyorum ben asal sayı tanımını.

Diyalogda Çise tanıma ulaşamasa da asal sayıları bildiğini ifade etmiştir. Negatif bölenlerin aklına gelmediği görülmektedir. Ayrıca 1'in neden asal olmadığını da açıklayamamış ve tanımda belirtmemiştir. 2, 3, 5 gibi asal sayıların ortak özelliğini ifade edememiştir. Görüşme yapılan diğer tüm öğretmen adaylarında da araştırmacı doğru tanıma ulaşmaları için dönüt vermiştir. Doğru tanıma ulaşan öğretmen adaylarından biri 2. sınıf öğretmen adaylarından Halit olmuştur. Halit ile yapılan görüşme aşağıda verilmiştir.

A: Asal sayı nedir?

H: 1 ve kendinden başka ortak katı olmayan 2'den büyük sayılardır.

A: Ortak katı derken? Ortak olması için en az iki tane sayı olması lazım değil mi?

H: Kendisine ve 1'e bölümü dışında başka sayılara bölünemeyen sayılar 2'den başlayarak.

A: Mesela bu durumda 3 asal sayı mıdır?

H: Tabi canım 3 asal sayı.

A: Peki kendisinden ve 1'den başka sayıya bölünemiyor mu? -3 'e, -1 'e?

H: Bölünebilir -3 'e ama doğal sayılara.

A: Bu tanımda o zaman yine eksiklik var.

H: Evet. 2'den başlayarak, kendisi ve 1 dışında başka doğal sayılara bölünemeyen sayılardır. Bu şekilde oldu sanırım.

Halit'in doğru tanıma sonradan ulaştığı gibi diğer yapılan görüşmelerde de öğretmen adayları sonradan tanıma ulaşabilmişlerdir. Hem yazılı veriler hem görüşme verileri bir arada ele alındığında öğretmen adaylarının asal sayıları bilseler bile tanımlarken zorlandıkları söylenebilir.

4.2.1.9. Aralarında asal sayılar tanımına ilişkin bulgular

Çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanına ait bir diğer kavram ise "aralarında asal" kavramıdır. Asal sayı ve aralarında asal sayı kavramları yukarıda Çise ile verilen görüşmede olduğu gibi karıştırılabilen kavramlardandır. İkisi birden sıfır olmayan a ve b tam sayılarının en büyük ortak bölenleri 1 ise bu iki sayıya aralarında asal sayı denir.

(Akkan ve Öztürk, 2019). Öğretmen adaylarına aralarında asal kavramının tanımı sorulmuştur. Verilen yanıtların analiz sonuçları Tablo 69’da gösterilmektedir.

Tablo 69

Aralarında asal kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı

Sınıf	Uygun (f,%)		Uygun Toplam	Uygun Olmayan (f,%)			Uygun Olmayan Toplam	TOPLAM
	Titiz	Titiz Olmayan		Yeter Şart Değil	Gerek Şart Değil	Gerek Yeter Şart Değil		
1. Sınıf	4 (%10)	22 (%55)	26 (%65)	0 (%0)	1 (%2,5)	13 (%32,5)	14 (%35)	40
2. Sınıf	1 (%2,5)	21 (%52,5)	22 (%55)	0 (%0)	3 (%7,5)	15 (%37,5)	18 (%45)	40
3. Sınıf	3 (%7,5)	22 (%55)	25 (%62,5)	0 (%0)	4 (%10)	11 (%27,5)	15 (%37,5)	40
4. Sınıf	11 (%27,5)	18 (%45)	29 (%72,5)	1 (%2,5)	4 (%10)	6 (%15)	11 (%27,5)	40
Toplam	19 (%11,875)	83 (%51,875)	102 (%63,75)	1 (%0,625)	12 (%7,5)	45 (%28,125)	58 (%36,25)	160

Tablo 69’da titiz tanım oranı düşük olmasına öğretmen adaylarının yarıdan fazlasının uygun tanım yapabildiği görülmektedir. 4. sınıf öğretmen adaylarında bu oranın %72,5’a çıktığı dikkat çekmiştir. Her bir kategoriye ait tanımlar aşağıda verilmiştir.

4.2.1.9.a. Uygun ve titiz aralarında asal tanımları (%11,875)

Öğretmen adaylarından bir kısmı EBOB kavramından bir kısmı ortak pozitif bölen kavramından bir kısmı da sadeleştirmeden yararlanarak uygun ve titiz tanımlar yapmışlardır. Bu tanımlardan bazıları şunlardır:

- Pozitif ortak bölen kavramıyla yapılan tanımlar:
“1’den başka pozitif ortak bölüneni olmayan tam sayılara denir.”
- EBOB kavramıyla yapılan tanımlar:
“ $M, N \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(M, N) = 1$ ise M, N aralarında asaldır.”
“EBOB’ları 1 olan tam sayılara denir.”
- Ortak asal çarpan yokluğuyla yapılan tanımlar:
“İki veya daha fazla tam sayının ortak asal çarpanlarının olmama durumudur.”
“Ortak asal çarpanı olmayan tam sayılar.”
- Sadeleştirme kavramıyla yapılan tanımlar:
“ a/b ifadesinde ($b \neq 0$) ($a, b \in \mathbb{Z}$) sadeleştirme yapılamıyorsa a ve b aralarında asaldır.”

4.2.1.9.b. Uygun ancak titiz olmayan aralarında asal tanımları (%51,875)

Bazı öğretmen adaylarının ortak bölenden bahsederken negatif ortak bölen olan -1 'i hesaba katmadıkları görülmüştür. Bu eksiklik de tanımın titiz olmamasına neden olmuştur. Bu kategoride değerlendirilen tanımlardan bazıları şunlardır:

- “İki sayının ortak bölenlerinin sadece 1 olmasıdır.”
“Sadece 1 ve -1 olması” denilmeliydi. Pozitif ortak bölen ifadesi kullanılmadığı için tanım titiz değildir.
- “ a ve b iki tam sayısı arasında sadeleştirme yapılamıyorsa a ve b aralarında asaldır.”
“ a/b ifadesinde ($b \neq 0$) sadeleştirme yapılamıyorsa a ve b aralarında asaldır.”

Kesirlerde sadeleştirme yapılabilir. İlk tanımda en azından a/b ifadesinin gerekliliği görülebilir. İkinci tanımda ise a 'nın ve b 'nin tam sayı olduğuna ilişkin bilgi eksiktir.

Bu eksiklikler tanımın uygunluğunu bozmak için kritik görülmeyip titiz olmayan tanım kategorisinde değerlendirilmiştir.

- “ $a, b \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}^+$ iken $d | a \wedge d | b \Leftrightarrow d = 1$ ve $\underline{(a,b) = 1}$ ise a ve b sayıları aralarında asaldır.”

Tanımda yer alan ilk ifade pozitif ortak bölendenin 1 olması gerektiğini göstermektedir. Altı çizili ifade minimalliği bozmaktadır.

4.2.1.9.c. Uygun olmayan aralarında asal tanımları (%36,25)

Öğretmen adaylarının %36,25'i uygun olmayan tanımlar yapmıştır. Aralarında asal olmayan sayılar öğretmen adayı tarafından yapılan tanımla sağlıyorsa tanım “yeter şart olmayan” olarak sınıflandırılmıştır. Yapılan tanım aralarında asal sayıların spesifik bir kısmını içeriyorsa veya bazı aralarında asal sayıları atlıyorsa “gerek şart olmayan” olarak sınıflandırılmıştır. Her iki durumda olan tanımlar ise gerek ve yeter şart olmayan tanımlar şeklinde sınıflandırılmıştır.

Yeter Şart Olmayan:

Sadece 1 tane öğrenci yeter şart olmayan bir tanım yapmıştır. “Ortak bölenleri 1 olan sayılara denir.” tanımını tüm tam sayılar sağlamaktadır. “1” sayısı her iki sayının veya her üç sayının ortak bölenidir. İfadede “sadece” ve “pozitif” kelimeleri eksiktir.

Gerek Şart Olmayan:

- “ $a, b \in \mathbb{N}^+$ ve a ve b ’nin ortak böleni yalnız ve yalnız 1 ise a ve b aralarında asaldır.”

“EBOB’ları 1 olan pozitif tam sayılardır.”

“Herhangi iki $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere EBOB $(a, b) = 1$ ise a ve b aralarında asaldır.”

Yukarıdaki üç tanımda da öğretmen adayları aralarında asal sayıları doğal sayılardan seçmiştir. Aralarında asal sayıların pozitif tam sayı olması gerek şart değildir. Çünkü negatif sayılar da aralarında asal olabilir.

- “EBOB’ları 1, EKOK’ları $a.b$ olan ve en az iki tane olan asal sayılardır.”

“ a ve b asal sayıları birbirinin katı değilse aralarında asaldır.”

“Birbirlerine bölünemeyen asal olan sayılara denir.”

Aralarında asal olan sayıların aynı zamanda asal sayı olması gerektiğini ifade eden bu ifadeler gerek şart değildir.

- “İki ya da daha fazla sayı asal çarpanlarına ayrıldığında hiçbir ortak asal çarpanı yoksa aralarında asaldır.”

Yukarıdaki tanım 1 sayısını dışlamaktadır. Tanıma göre asal çarpanlarına ayrılamayan 1’in aralarında asallığı değerlendirilemez. İfade tüm aralarında asal sayıları kapsamadığı için gerek şart değildir.

- “İki farklı sayının birbirinden başka ve 1’den başka bölenleri yoksa aralarında asaldır.”

Yukarıdaki tanıma göre ise $(1, -1)$ çifti aralarında asal olmaktadır. Bu nedenle ifade gerek şart değildir.

Gerek ve Yeter Şart Olmayan:

- “Birbirinden başka sayıların katı olmayan sayılar”

“Birbirinin katı olmayan sayılar”

İlk tanımı sağlayan sayı çifti yoktur. 1 ve -1 sayıları dahi $1/2$, $1/3$ gibi rasyonel sayıların katıdır. İkinci tanım ise 6 ve 8 gibi iki sayıyı aralarında asal yaparken, 1 ve 4 gibi iki sayıyı aralarında asal görmemektedir. Bu nedenle tanımlar gerek veya yeter şart değildir.

- “Ortak böleni /çarpanı olmayan sayılardır.”

“Bölenleri farklı olan sayılar”

“Ortak böleni olmayan aynı zamanda asal olan sayılar”

“1. sayıyı bölen sayılar 2.yi, 2. sayıyı bölen sayılar 1.yi bölmüyorsa sayılar aralarında asaldır.”

İki sayının ortak böleni en azından 1 ve -1 olacağı için yukarıdaki ifadeleri sağlayan sayılar yoktur. Bu nedenle tanımlar uygun değildir.

- “1’den başka ortak çarpanı olmayan doğal sayılardır.”

“İki asal sayı arasında tek ortak bölen 1 ise aralarında asaldır.”

“ $a, b \in \mathbb{N}$, a ve b ’nin 1 den başka ortak böleni yoksa ve $a \neq 1$ ve $b \neq 1$ ise a ve b aralarında asaldır.”

Her üç tanımın da en önemli eksikliği olarak -1 ortak bölenini göz ardı ettikleri söylenebilir. Ayrıca ilk tanım sadece doğal sayıların aralarında asal olduğunu, ikincisi ise asal sayıların aralarında asal olduğunu ifade etmektedir. Üçüncü tanımda da öğretmen adayı hem sayıları doğal sayılardan seçmiş hem de $(1,1)$ çiftini dışlamıştır. Bu nedenle ifadeler gerek şart değildir.

- “Birbirlerine bölünemeyen sayılara denir.”

“Birbirlerine bölünemeyen yalnızca ortak olarak 1’e bölünebilen sayılar”

Yukarıdaki tanımlar da uygun değildir. Çünkü tanımlara göre 4 ve 6 birbirlerine bölünemediği için aralarında asaldır.

- “Ortak bölenleri asal olan sayılara denir.”

Öğretmen adayı bu ifadeyle tüm ortak bölenlerden bahsediyorsa bu şartı sağlayan sayılar yoktur. Çünkü 1 ve -1 her iki tam sayı için ortak bölendir ve asal değildir. Ortak bölenlerinden en az birinin asal olmasından bahsediliyorsa da bu durumda 6 ve 8 tanıma göre aralarında asal olurken 3 ve 5 tanımı sağlamayacaktır. Bu nedenle ifade uygun bir tanım değildir.

- “1’e ve birbirine bölünebilen sayılar”

“1’e ve sadece ortak bölenlerine bölünen sayılara denir.”

Her iki tanıma göre de $(5,5)$ çifti aralarında asal iken $(1,0)$ çifti aralarında asal olmamaktadır. Bu nedenle tanımlar uygun değildir.

4.2.1.10. En büyük ortak bölen tanımına ilişkin bulgular

Aralarında asal tanımları incelendiğinde öğretmen adaylarının bölen/çarpan, ortak bölen, EBOB gibi kavramları kullanarak hatalı tanımlar yaptığı görülmüştür. Öğretmen adaylarına “en büyük ortak bölen” kavramının da tanımı sorulmuş elde edilen veriler kategorilere ayrılmıştır. EBOB, Çatak (2016) tarafından “iki veya daha fazla tam sayıyı ortak bölen en büyük pozitif tam sayı” şeklinde tanımlanmıştır. Ancak Argün ve diğerleri (2014) sayıların ikisinin birden sıfır olmaması gerektiğini de belirterek, “ a ve b her ikisi birden sıfır olmayan iki tam sayı olsun. Bu durumda i) $d \in \mathbb{Z}^+$ ii) $d|a$ ve $d|b$ iii) $c \in \mathbb{Z}$ için $c|a$ ve $c|b$ ise $c|d$ şartlarını sağlayan d tamsayısına a ile b ’nin en büyük ortak böleni denir.” şeklinde tanım yapmıştır. Sıfır hariç tüm tam sayılar sıfırın bir böleni olduğu için $(0,0)$

çiftinin en büyük ortak böleni bulunamaz. Bu nedenle tanımda “ikisi birden sıfır olmayan” şeklinde belirtilmiştir. Bu koşulun varlığı titizlik ölçüsü olarak değerlendirilmemiştir. Ancak EBOB’un pozitif tam sayı olması gerektiği ve sayıların tam sayı olması gerektiği titizlik için ölçüt sayılmıştır. Bu bilgiler ışığında öğretmen adaylarının tanımlarına ait sonuçlar Tablo 70’te özetlenmiştir.

Tablo 70

EBOB kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı

Sınıf	Uygun (f,%)		Uygun Toplam	Uygun Olmayan (f,%)			Uygun Olmayan Toplam	TOPLAM
	Titiz	Titiz Olmayan		Yeter Şart Değil	Gerek Şart Değil	Gerek Yeter Şart Değil		
1. Sınıf	0 (%0)	18 (%45)	18 (%45)	7 (%17,5)	5 (%12,5)	10 (%25)	22 (%55)	40
2. Sınıf	0 (%0)	17 (%42,5)	17 (%42,5)	1 (%2,5)	4 (%10)	18 (%45)	23 (%57,5)	40
3. Sınıf	0 (%0)	27 (%67,5)	27 (%67,5)	2 (%5)	2 (%5)	9 (%22,5)	13 (%32,5)	40
4. Sınıf	7 (%17,5)	19 (%47,5)	26 (%65)	7 (%17,5)	4 (%10)	3 (%7,5)	14 (%35)	40
Toplam	7 (%4,375)	81 (%50,625)	88 (%55)	17 (%10,625)	15 (%9,375)	40 (%25)	72 (%45)	160

Tablo 70 incelendiğinde en yüksek uygun tanım oranının 3. sınıf öğretmen adaylarında olduğu görülmektedir. Ancak sadece 7 öğretmen adayının titiz tanım yapabildiği ve bu öğretmen adaylarının tamamının 4. sınıfta öğrenim gördüğü dikkat çekmiştir. Bu uygun ve titiz tanım örnekleri aşağıda sunulmuştur.

4.2.1.10.a. Uygun ve titiz EBOB tanımları (%4,375)

Sadece 7 öğretmen adayının uygun ve titiz tanım yaptığı belirlenmiştir. Bu öğretmen adaylarının da 2’si formal tanım yapabilmıştır. Bir öğretmen adayı ise aynı tanımları altı çizili bilgileri eksik vererek yapmıştır:

“*a, b ∈ ℤ; a≠0 veya b≠0 olmak üzere i) d ∈ ℤ⁺ ii) d|a ve d|b iii) c ∈ ℤ için c|a, c|b ise c|d şartlarını sağlayan d tam sayısına a ile b’nin EBOB’u denir.*”

Yapılan tanımlardan biri de şu şekildedir: “*En az biri sıfırdan farklı iki ya da daha fazla tam sayıyı ortak bölen en büyük pozitif tam sayıya EBOB denir.*”. Notasyona dayalı olmasa da bu tanım kritik noktaları da ele alarak kavramı tanımlamıştır. Bu nedenle titiz bir tanım sayılabilir. Üç öğretmen adayı ise EBOB için en geçerli sayılabilecek tanımlardan biri olan,

$"a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $d > 0$

i) $d|a_1, d|a_2, d|a_3, \dots, d|a_n$

ii) $c|a_1, c|a_2, c|a_3, \dots, c|a_n$ ve $c|d$ ise d , EBOB olur." tanımını yapmıştır. Bu tanımın sadece iki sayının değil n tane sayının EBOB'unu veren genel bir tanım olduğu söylenebilir.

4.2.1.10.b. Uygun ancak titiz olmayan EBOB tanımları (%50,625)

Bazı öğretmen adayları yapılan tanımlarda seçilecek sayıların tam sayı olması gerektiğini belirtmemişlerdir. Bazıları ise EBOB'un pozitif olması gerektiği bilgisini tanımda belirtmemiştir. Bu tür tanımlar titiz olarak değerlendirilmese de "ortak bölenlerin en büyüğü" yaklaşımında olanlar uygun olarak sınıflandırılmıştır. Tanımlardan bazıları şu şekildedir:

- "İki sayıyı bölen ortak sayıların en büyüğü"
- "İki (tam) sayının ortak bölenlerinin en büyüğü"
- "İki veya daha fazla sayının ortak bölenlerinin en büyüğü"
- "Verilen sayıların hepsini bölebilen en büyük sayı"
- "Bir sayı kümesindeki sayıların ortak bölenlerinin en büyüğüne denir."

Öğretmen adaylarının büyük bir kısmı (65 kişi) bu şekilde tanım yapmıştır. Tanımlardan bir kısmında sayıların tam sayı olması gerektiği ifade edilmemiştir. Ancak "en büyük" ifadeleri EBOB'un pozitif olması gerektiğini belirtme zorunluluğunu kaldırmıştır. Bu nedenle tanımlar titiz olmamakla birlikte uygundur.

- "İki sayıyı aynı sayılara bölerek aynı sayıya bölünemeyecek duruma gelene kadar ilerlediğimizde böldüğümüz sayıların çarpımıdır."

Bu tanım bölme algoritmasıyla EBOB bulma yöntemini tarif etse de sayılar en son 1'e bölünmeye devam edeceği için tanımda ifade ettiği gibi bölünemeyecek duruma gelmesi mümkün değildir. Bu tanıma "1" için özel bir açıklama eklenseydi tanım titiz sayılabilirdi. Ancak bu haliyle titiz değildir.

- " $a, b \in \mathbb{Z}; r \geq 1$ ve $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,
- i) $r|a$ ve $r|b$ ii) $t \in \mathbb{Z}^+$ için $t|a \wedge t|b \wedge t|r \Rightarrow r$, EBOB'tur."

Tanımdaki hatalardan biri t'nin pozitif tam sayı olması gerektiğidir. Çünkü formal tanıma göre t pozitif olmak zorunda değildir. Ancak bu eksiklik tanımın uygun olmasını engelleyecek kadar kritik bir sorun değildir. Ayrıca tanımda bulunan " $r \geq 1$ " ifadesi minimallığe aykırıdır. Zaten tanımda r'nin pozitif tam sayı olacağı verilmiştir. Bu iki nedenden ötürü tanım "uygun ancak titiz olmayan" kategorisinde değerlendirilmiştir.

- " $\forall a, b \in \mathbb{Z} a \neq 0$ veya $b \neq 0$ için $c|a \wedge c|b$ ve $d|a \wedge d|b$ iken $c|d$ ise d , EBOB'tur."

Tanımda d'nin pozitif olması gerektiği belirtilmediği için ifade titiz bir tanım değildir.

- “ $a \in \mathbb{Z}^+, b \in \mathbb{Z}^+ a \neq 0, b \neq 0$ olsun; $a = xt, b = yt$ ve x ve y aralarında asal ise t , EBOB’tur”

Tanıma göre EBOB’u alınacak sayılar pozitif tam sayılardan seçilmelidir. Bu nedenle tanım titiz olarak değerlendirilmemiştir.

4.2.1.10.c. Uygun olmayan EBOB tanımları (%45)

Öğretmen adaylarının yarıya yakını uygun olmayan tanımlar yapmıştır. EBOB yerine ortak bölen gibi daha genel bir kavramı tanımlama gibi hataların olduğu görülmüştür. Bu kapsamda yer alan tanım örnekleri yeter veya gerek şartların eksikliğine göre aşağıdaki gibi sıralanabilir:

Yeter Şart Olmayan:

- “İki (ya da daha fazla) sayının ortak bölenlerine denir.”
“Sayıların ortak bölenlerinin alınmasına denir.”
“İki veya daha fazla tam sayının hepsi aynı tam sayıya bölünüyorsa o sayıya EBOB denir.”
“Elimizdeki sayıların tamamını bölebilen sayılara denir.”
“İki ya da daha fazla sayının hepsini ortak olarak tam değerde bölebilen sayılara denir.”
“ $c|a \wedge c|b$ ve $d|a \wedge d|b \Rightarrow c|d$ olduğunda d , EBOB’tur.”

Öğretmen adaylarının farklı şekillerde ifade ettikleri kavram aslında “ortak bölen” kavramıdır. Ancak ortak bölenlerin arasından en büyüğünü ifade eden bir açıklama yapılmamıştır.

- “İki sayı arasında bulunan ortak çarpanların oluşturduğu sayı”
“İki veya daha fazla sayı çarpanlarına ayrıldığında her sayıda bulunan ortak çarpanlardır.”

“Ortak çarpan” kavramı kullanarak yapılan yukarıdaki tanımlar da yeterli değildir.

- “ $a, b \in \mathbb{Z}, c, d \in \mathbb{Z}^+$ i) $c|a$ ve $c|b$ ii) $d|a$ ve $d|b$ olmak üzere $\max\{c, d\} = c$ ise c ’ye EBOB denir.”

Tanımın yanlışlığını göstermek için 10 ve 20 sayılarının EBOB’unu arayalım. $2|10$ (2 böler 10) ve $2|20$ öte yandan $5|10$ ve $5|20$ ’dir. $\{2, 5\}$ kümesinin en büyük elemanı 5 olduğu için tanıma göre EBOB’un 5 olması gerekir. Ancak EBOB, bilindiği üzere 10’dur.

Gerek Şart Olmayan:

- Bazı öğretmen adayları bölme algoritması ile iki sayının EBOB'unu bulma yöntemini tarif etmişlerdir. Ancak iki sayının EBOB'unu bulmak için bölme algoritması kullanılması gerek şart değildir. 1 ve 5'in EBOB'u bulunurken asal çarpanlara ayırma yapılamayacağı için bölme algoritmasıyla EBOB'un 1 olduğu doğrudan görülemez. Bunun ayrıca belirtilmesi gereklidir. Bu nedenle bölme algoritması kullanılan ve 1'den bahsetmeyen tanımlar uygun sayılmamıştır.

- “2 sayıyı asal çarpanlarına ayırıp aynı olanları seçip çarpınca elde edilen sayıdır.”

“İki veya daha fazla sayının ortak asal çarpanlarının çarpımı”

“Sayılar asal çarpanlarına ayrıldığında tüm sayılarda olan çarpanların en küçük kuvvetli olanlarının çarpılması ile elde edilen sayı”

“En az iki sayı alıp asal sayılara bölmeye başladığımızda o iki sayıyı ortak bölebildiğimiz sayıların çarpımıdır.”

Yukarıdaki tanımlar asal çarpanlara ayırma süreci içermektedir. Ancak 0 veya 1 sayısı asal çarpanların çarpımı şeklinde yazılamayacağı için tanım sadece 0 veya 1 haricindeki sayılar için geçerli olacaktır. Bu nedenle tanımlar uygun değildir.

- “Aralarında asal olmayan 2 tane doğal sayının ortak bölünebildikleri sayıların en büyüğüdür.”

Tanım göre EBOB bulunabilmesi için sayıların aralarında asal olmaması gerekmektedir. Bu durumda 3 ve 5 gibi iki sayının EBOB'u bulunamaz. Tanım sadece kısıtlı sayılar için geçerli olduğu için gerek şart değildir.

Gerek ve Yeter Şart Olmayan:

- “İki veya daha fazla sayının ortak asal çarpanlarının en büyüğü”

Tanım göre 40 ve 60 sayısının EBOB'u en büyük ortak asal çarpan olan 5 olmaktadır. Tanım bu nedenle uygun değildir.

- “İki sayının ortak bölenlerinin çarpımıdır.”

“İki sayıyı bölenlerini ayırdığımızda ortak bölenlerin üstlerinin küçük olanlarının çarpımıdır.”

“En az biri sıfırdan farklı sayıların ortak çarpanlarının en küçüklerinin çarpımıdır.”

“Birden çok sayıyı çarpanlarına ayırıp ortak olanları seçtiğimizde EBOB bulunur”

Bazı öğretmen adayları yukarıdaki örneklerde olduğu gibi ortak çarpanlar/ bölenler kullanarak tanım yapmıştır. Ancak ifadeler EBOB kavramını karşılamamaktadır.

- “İki sayının bölenlerinin en büyüğü”

Tanımda “ortak” ifadesi geçmediği için 40 ve 50 gibi iki sayının bölenlerini yazdığımızda en büyüğü olan 50 EBOB olmaktadır. Bu nedenle ifade yanlıştır.

- “Bir sayıyı bölebilen en büyük sayıya denir.”

“Bir sayının ortak bölenlerinin en büyüğüne denir.”

“Bir sayı çarpanlarına ayrılınca o sayıyı bölen en büyük sayı”

“Bir sayının kendisi 1 ve diğer bütün bölenleri ele alındığında bu sayının en büyük bölenine EBOB denir.”

Bazı öğretmen adayları yukarıdaki örneklerde görüldüğü gibi tek bir sayı üzerinden tanım yapmıştır.

- “Ortak katların en büyüğü”

“Çarpanlara ayrılan sayıların en büyük ortak katı”

Bazı öğretmen adayları ise ortak bölen yerine ortak kat ifadelerini kullanmışlardır. Bu tanımlar da uygun değildir.

Öğretmen adaylarının EBOB tanımlarına bakıldığında formal tanım yapan çok az sayıda öğretmen adayının olduğu görülmektedir. Ayrıca bazı tanımlamaların EBOB ile ilgili kavram yanlışlarına da işaret ettiği söylenebilir. Tek bir sayı üzerinden yapılan EBOB tanımları bu göstergelerden sayılabilir.

4.2.1.11. Bir sayının çözümlenmesi tanımına ilişkin bulgular

Sayılar ve işlemler öğrenme alanının önemli bir kavramı da öğrencilerin ilkokulda tanıştığı doğal sayılara uyguladığı ve ortaokulda rasyonel sayılara uygulayarak devam ettiği çözümleme kavramıdır. Çözümleme, bir pozitif sayının $\sum_k bk.10^k$ şeklinde her bir rakamın bulunduğu basamakla çarpımlarının toplama şeklinde yazılmasıdır (Weisstein, t.y.). Bu basit sayılabilecek ve uygulamalarının ilkokul düzeyinden itibaren yapıldığı çözümleme kavramının tanımı öğretmen adaylarına sorulmuştur. Sonuçlar Tablo 71’de sunulmuştur.

Tablo 71

Çözümleme kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı

Sınıf	Uygun (f,%)		Uygun Toplam	Uygun Olmayan (f,%)			Uygun Olmayan Toplam	TOPLAM
	Titiz	Titiz Olmayan		Yeter Şart Değil	Gerek Şart Değil	Gerek Yeter Şart Değil		
1. Sınıf	5 (%12,5)	5 (%12,5)	10 (%25)	16 (%40)	4 (%10)	10 (%25)	30 (%75)	40
2. Sınıf	8 (%20)	8 (%20)	16 (%40)	12 (%30)	1 (%2,5)	11 (%27,5)	24 (%60)	40
3. Sınıf	7 (%17,5)	11 (%27,5)	18 (%45)	18 (%45)	0 (%0)	4 (%10)	22 (%55)	40
4. Sınıf	7 (%17,5)	13 (%32,5)	20 (%50)	9 (%22,5)	3 (%7,5)	8 (%20)	20 (%50)	40
Toplam	27 (%16,875)	37 (%23,125)	64 (%40)	55 (%34,375)	8 (%5)	33 (%20,625)	96 (%60)	160

Tablo 71’de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının %40’ı uygun tanım yapabilmıştır. Bunlardan da çok az kısmının (%16,875) titiz tanım olduğu görülmüştür. Sınıf düzeyleriyle birlikte uygunluk oranlarında da artış olduğu dikkat çekmiştir. Öğretmen adaylarının çözümleme kavramıyla ilgili yapmış oldukları tanımların kategorilere göre örnekleri başlıklar halinde aşağıda sunulmuştur.

4.2.1.11.a. Uygun ve titiz çözümleme tanımları (%16,875)

Bir basamak sınırı koymaksızın genel ifadeler barındıran, çözümleme adımlarıyla sayının yeniden oluşmasını (basamak değerlerinin toplamının yine sayının kendisini oluşturması) sağlayan tanımlar titiz olarak ele alınmıştır. Ayrıca sadece doğal sayılar üzerinden yapılan (ondalık sayıları belirtmeyen) tanımlar da uygun ve titiz kabul edilmiştir.

- “Sayının basamak değerlerini toplam halinde yazmak demektir.”
- “Sayının $a.1 + b.10 + c.100 + \dots$ gibi basamaklara ayrılıp toplanmasıdır.”
- “Sayıdaki rakamların basamak değerleriyle (1, 10, 100...) ayrı ayrı gösterilip toplanmasıdır.”
- “Bir sayıdaki tüm basamaklarının “sayı değeri x (çarpı) rakamların 1,10,100 gibi basamağı” şeklinde yazılıp toplanmasıdır.”
- “Onluk sistemde her basamaktaki rakamla o basamağın sağındaki rakam sayısı kadar 10’un çarpılıp sonuçların toplanmasıdır.”

27 öğretmen adayının yapmış olduğu yukarıdaki tanımlar ve benzerleri uygun ve titiz olarak değerlendirilmiştir.

4.2.1.11.b. Uygun ancak titiz olmayan çözümleme tanımları (%23,125)

Bazı öğrenciler çözümlemenin uygulanışını doğru bildiklerini göstermelerine rağmen bir sayı üzerinden örnek vererek açıklama yoluna gitmişlerdir. Ancak tanımlarda çarpma ve çarpımların toplanması yine söz konusu olduğu için uygun ancak titiz olmayan kapsamında değerlendirilmiştir. Titiz olmayan örneklerden bazıları şunlardır:

- “Bir sayıyı basamaklarına ayırarak, $3471=3.1000 + 4.100 + 7.10 + 1.1$ şeklindeki gibi göstermektir.”
(Verilen sayı öğrenciden öğrenciye değişiklik göstermektedir.)
- “Basamak değerlerine göre bir sayıyı $3471 = 3.1000 + 4.100 + 7.10 + 1.1$ gibi ayırma”
(Verilen sayı öğrenciden öğrenciye değişiklik göstermektedir.)
- “Bir sayının sayı değeri ve basamak değerinin çarpımlarının toplanmasıdır.”
“Rakamların basamak değerleriyle çarpılıp toplanmasıdır.”
Tanımlarda basamak değeri ifadesiyle, verilen örneklerde 1, 10, 100, 1000... gibi 10’un kuvvetlerinin bahsedildiği görülmüştür. Bu nedenle tanım titiz olmayan kategorisinde değerlendirilmiştir.
- “Bir sayıdaki her rakamın değerlerinin ayrı ayrı yazılıp toplanması: $500+70+ 9$ gibi”
“Her rakamın değeri” ifadesiyle basamak değerinden söz edilmektedir. Ancak ifadede eksiklik vardır.

4.2.1.11.c. Uygun olmayan çözümleme tanımları (%60)

Bazı tanımlar çözümleme sürecini tamamen açıklamazken bazı tanımlar ise sadece belirli basamak sayısına sahip sayılarda çözümleme sürecini açıklamıştır. Bu anlamda tanımlar uygun bulunmamıştır. Uygun olmayan tanımlar aşağıdaki gibi örneklendirilebilir:

Yeter Şart Olmayan:

- Sayının basamak değerlerinin ayrı ayrı gösterilmesi
- Sayının basamak değerlerinin ondalık olarak gösterilmesi
- Sayıyı basamaklarına ayırmak
- Her rakamın o rakamın bulunduğu basamağın değeri ile çarpılması
- Sayının her bir basamağını basamak değerlerine göre ayırma
- Basamak değeri ile sayı değerinin çarpılması

Yukarıdaki tanımlar sadece basamaklara ayırmaktan bahsedip toplama sürecini açıklamamışlardır. Bu anlamda tanımlar yeterli bulunmamıştır.

Görüşme yapılan öğretmen adaylarından 4. sınıfta okuyan Şeyma çözümlemeyi, “Bir sayının basamak değeri ile sayı değerinin çarpılması” olarak tanımlamıştır.

Araştırmacı, 367 sayısında 3'ün basamak değerinin kaç olduğunu sorduğunda Şeyma "100" yanıtını vermiştir. Araştırmacı, "O zaman tüm sayıların yüzler basamağının basamak değeri 100 müdür? Bir sayı verip yüzler basamağının basamak değeri sorulsa 100 mü deriz her zaman?" şeklinde soru yöneltince, "Mesela 367 verildi. Burada 3'ün bulunduğu basamağın değeri 100. Ben bunu demek istedim ama basamak değeri 300 de denilebilir." şeklinde düzeltmede bulunmuştur. "O zaman yaptığın tanım doğru olur mu?" şeklindeki soru üzerine; Şeyma, "Tanım yanlış oluyor o zaman. Ama bilemiyorum nasıl bir tanım yapılır." şeklinde cevap vermiştir.

Gerek Şart Olmayan:

- Bir sayıyı 1'ler, 10'lar ve 100'ler basamağına ayırıp basamakları 1, 10, 100 ile çarpıp; çarpımların toplanmasıdır.
- Bir $abcde$ sayısını $abcde = a0000 + b000 + c00 + d0 + e$ şeklinde yazmaktır. Sadece belirli basamaklı bir sayı için örnek verilen çözümlemeler bu kategoride ele alınmıştır.

Gerek ve Yeter Şart Olmayan:

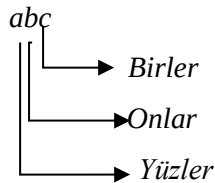
- "Sayının (asal) çarpanlara ayrılması durumudur."
- "Bir sayının hangi asal sayıların çarpımı şeklinde oluştuğunun gösterilmesi"
- "Bir A sayısı x ve y gibi iki sayının çarpımı biçiminde yazılıyorsa $A = x.y$ şeklinde yazımına çözümleme denir."

Bazı öğrenciler çözümlemeyi asal çarpanlarına veya çarpanlarına ayırma şeklinde tanımlamışlardır.

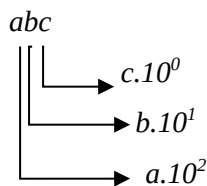
- "4 sayısının çözümlenmesi: $4 = 1+1+1+1$ veya $4 = 3+1$ gibi ayrılmasıdır."

4. sınıf öğrencilerinden biri verilen sayının farklı sayıların toplamı şeklinde ifade edilmesini çözümleme olarak ele almıştır.

- "Sayının basamaklara ayrılıp onlar, yüzler ve binler basamağının gösterilmesi"



"Her bir basamağı 10'un kuvvetiyle göstermektir."



Bazı tanımlar gösterime dayalı yapılmış ancak sayı sadece basamaklarına ayrılmıştır. Çözümleme süreci ifade edilmemiştir.

- “Sayıyı, sayı değerine göre ayırmaktır.”
“10 ve 10’un katlarıyla sayı basamaklarının çarpımı şeklinde yazılan gösterimdir.”
“ $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere b/c şeklinde yazılıp belli bir değere kadar açılmasıdır.”
“Bir bütün alırsınız. Bu bütün iki yarım, dört çeyrekte oluşur. Bunu ondalık bloklarla gösterebiliriz.” gibi uygun olmayan tanımlar da mevcuttur.
- “Daha anlaşılır hale getirmektir. Karekök içindeki bir sayının dışarı çıkarılması, devirli sayının kesre dönüştürülmesi gibi”
“Bir sayının sadeleştirilmesidir.”
“Sayı üzerinde gerekli sadeleştirilmelerin yapılması, ondalıklı veya devirli ise devir işareti ile gösterilmesi demektir.” gibi tanımlarla bazı öğrenciler çözümlemeyi sadeleştirme veya daha anlaşılır hale getirme şeklinde yorumlamıştır.

İfadeyi sadeleştirme veya daha basit hale getirme anlamında tanım yapan öğretmen adaylarından biri 2. sınıflardan Halit olmuştur. Halit ile yapılan görüşmenin bir kısmı aşağıda verilmiştir.

A: Çözümleme ne demektir? Nasıl tanımlayabiliriz?

H: a/b şeklindeki bir sayıyı sade hale getirmektir. a 'yı b 'ye bölerek bulmaktır.

A: Hımm, mesela $17/2$. 17 'yi 2 'ye bölüp $8,5$ 'dur diyoruz. Bunun gibi mi?

H: Evet 17 'yi 2 'ye bölme çözümleme... Ama bu şekilde olursa bilimsel gösterim de olabilir bunun bu yazılışı.

A: Bilimsel gösterimi biraz sonra soracağım. Şöyle sorular var: “235062 sayısını çözümleyiniz.”

H: Hımm... O zaman birler onlar yüzler mi oluyor? Tamam buldum. 2×10^6 diyeceğiz $+ 3 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 6 \times 10^2 + 2 \times 10^1$ ama olmadı bu. Baştan yanlış söyledim. 2×10^5 olacak.

A: Bu çözümleme mi yani?

H: Aslında bu bilimsel gösterim oluyor ya. Çözümleme diğeri. Kesirli olanı bölerek sade hale getirmektir.

Halit çözümleme kavramının bilimsel gösterim olduğunu düşünmüştür. Bir kesrin sadeleştirilmesine ise çözümleme demiştir. Görüldüğü gibi “çözümleme” kavramı bazı öğretmen adayları için çarpanlara ayırma, sadeleştirme gibi farklı konuları çağırıştırabilmektedir. Uygun olmayan tüm tanımlar öğretmen adaylarının yarısından fazlasını oluşturmıştır.

Yukarıda Halit ile çözümleme üzerine yapılan görüşmede, bilimsel gösterim ve çözümleme kavramlarıyla ilgili yanılgıların olduğu anlaşılmıştır. Doğrudan matematiksel bir kavram olmasa da ilköğretim matematik öğretiminde yer alan kavramlardan biri bilimsel gösterimdir. Bu kavramın tanımı da öğretmen adaylarına sorulmuştur.

4.2.1.12. Bilimsel gösterim tanımına ilişkin bulgular

Bilimsel gösterim, “Bir n sayısının, $1 \leq |a| < 10$, $a \in \mathbb{R}$ ve $p = \lceil \log_{10} |n| \rceil$ olmak üzere $a \times 10^p$ şeklinde gösterimidir.” şeklinde tanımlanabilir (Weisstein, t.y.). Milli Eğitim Bakanlığının ders kitabında (Müge ve Akıllı, 2018) ise “ $|a|$, 1 veya 1’den büyük, 10’dan küçük bir gerçek sayı ve n bir tam sayı olmak üzere $a \times 10^n$ gösterimine bilimsel gösterim denir.” şeklinde tanım yer almaktadır. Bu çalışmada öğretmen adaylarının “bilimsel gösterim” kavramıyla ilgili bilgileri de öğrenilmek istenmiş ve bilimsel gösterimin tanımı sorulmuştur. Verilen yanıtların kategorilere göre dağılımı aşağıdaki Tablo 72’de verilmiştir.

Tablo 72

Bilimsel gösterim kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı

Sınıf	Uygun (f,%)		Uygun Olmayan (f,%)	Yeter Şart Değil	Gerek Şart Değil	Gerek Yeter Şart Değil	Uygun Olmayan Toplam	TOPLAM
	Titiz	Titiz Olmayan						
1. Sınıf	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)	1 (%2,5)	1 (%2,5)	38 (%95)	40 (%100)	40
2. Sınıf	0 (%0)	2 (%5)	2 (%5)	2 (%5)	1 (%2,5)	35 (%87,5)	38 (%95)	40
3. Sınıf	0 (%0)	2 (%5)	2 (%5)	7 (%17,5)	0 (%0)	31 (%77,5)	38 (%95)	40
4. Sınıf	0 (%0)	2 (%5)	2 (%5)	4 (%10)	1 (%2,5)	33 (%82,5)	38 (%95)	40
Toplam	0 (%0)	6 (%3,75)	6 (%3,75)	14 (%8,75)	3 (%1,875)	137 (%85,625)	154 (%96,25)	160

Tablo 72’de de görüldüğü gibi çok az sayıda öğretmen adayı uygun tanım yapabilmıştır. Bilimsel gösterimi yukarıda yer alan formal tanımlarda olduğu gibi uygun ve titiz olarak yapan öğretmen adayına rastlanmamıştır. Tanımda 10’un kuvvetinin tam sayı olması gerektiği ve diğer çarpanın 1 dâhil 1 ile 10 arasında olması gerektiği gibi eksik olan ifadeler titiz olmayan tanım olarak ele alınmıştır. Bu tanımlara ve uygun olmayan tanımlara örnekler aşağıda sunulmuştur:

4.2.1.12.a. Uygun ancak titiz olmayan bilimsel gösterim tanımları (%3,75)

Bilimsel gösterimi büyük ölçüde doğru açıklamalarına rağmen $a.10^b$ ifadesinde a veya b 'nin durumu ile ilgili bilgilerde bazı eksiklikler olan tanımlar bu kapsamda yer almıştır. Bu tanımların bazıları şunlardır:

- “ a , 1 ile 10 arasında olmak koşuluyla sayının $a.10^b$ şeklinde gösterimidir.”

“Sayının $a.10^b$ şeklinde $1 < a < 10$ olacak şekilde gösterimidir.”

Tanımlarda $a = 1$ durumu göz ardı edilmiş ve b 'nin tam sayı olması gerektiği belirtilmemiştir.

- “Sayının eşitliğini bozmadan virgülden önce tek basamak kalacak şekilde (1 ve 9 arasında olmak kaydıyla) sayıyı ayırıp 10'un kuvveti ile çarpma.”

“Tam kısmı (a) 1 ile 9 arasında olan $a.10^n$ şeklindeki gösterim.”

Tanımlarda başlangıçtaki sayının aralıkları yanlış ifade edilmiştir. Hem $a=1$ durumu hem de $9 \leq a < 10$ aralığı belirtilmemiştir.

Görüşme yapılan 4. sınıf öğretmen adayı Şeyma, “Çok büyük ve çok küçük sayıları kullanırken $a.10^b$ şeklinde sayıları yazıyoruz. Ancak a , 1 ve 10 arası bir şey olabilir.” diyerek bilimsel gösterimi açıklamaya çalışmıştır. Araştırmacının “1 olabilir mi ya da 10 olabilir mi?” şeklindeki sorusu üzerine, “Evet olabilir ama 11 olamaz. b ise her tam sayı olabilir” diyerek açıklama yapmıştır. Bunun üzerine gelişen diyalog aşağıda verilmiştir:

A: Peki 10^4 sayısı bilimsel gösterimle yazılmış mıdır?

Ş: Evet. 1.10^4 olur.

A: Peki ben bunu 10.10^3 şeklinde gösterebilir miyim? Bu da bilimsel midir?

Ş: Evet o da bilimseldir.

A: O zaman bir sayının birden fazla bilimsel gösterimi olabilir mi? Mesela 2700 diyelim. Bunu nasıl bilimsel olarak gösterebiliriz?

Ş: $2,7.10^3$ şeklinde

A: Bu peki 27. 10^2 şeklinde gösterirsek de bilimsel midir?

Ş: Hayır. Başlangıç kısmının 2,7 olması lazım. Sadece 10, 100, 1000 gibi sayılarda iki gösterimle yazabiliriz. Diğer sayıların tek bilimsel gösterimi vardır.

Şeyma görüldüğü gibi bilimsel gösterimi büyük ölçüde biliyor olsa da ilk çarpanın sınırlarını 1 ve 10 dâhil olarak ele aldığı için 10'un kuvveti olan sayıların iki tane bilimsel gösterimi olabileceğini düşünmektedir.

4.2.1.12.b. Uygun olmayan bilimsel gösterim tanımları (%96,25)

Öğretmen adaylarının tamamına yakını bilimsel gösterimi uygun bir şekilde tanımlayamamıştır. Bu tanımlardan bir kısmı bilimsel gösterimi tarif eden ancak yeter şart olmayan ifadelerken, bir kısmı sadece bir sayının bilimsel gösterim örneğini sunmaktadır.

Yeter ve gerek şartların eksikliğine bağlı olarak ayrılan tanımlardan bir kısmı aşağıda kategorilere ayrılarak verilmiştir.

Yeter Şart Olmayan:

- Sadece 10^n 'un kuvvetlerini belirten ilk çarpanla ilgili bilgi vermeyen tanımlar:
“Sayıların 10^n ($n \in \mathbb{Z}$) ile çarpılarak yapılan gösterimidir.”
“ 10^n şeklinde gösterimi”
“Bir sayının 10^n 'un kuvvetlerini çarpımı şeklinde yazımı”
“Bir sayının $a \cdot 10^b$ şeklinde gösterme”
- Bilimsel gösterimin evrenselliği ile ilgili tanımlar:
“Herkes tarafından kabul görülen gösterim çeşididir.”
“Sayının uluslararası yazılış şekli ile gösterimidir.”

Görüşme yapılan bir diğer 4. sınıf öğretmen adayı Maksude yazılı olarak “Sayıların yazımında dünya geneli kabul gören ortak bir dilin kullanılmasıdır.” şeklinde tanım yapmıştır. Araştırmacı ile arasında geçen konuşma aşağıda verilmiştir:

M: Dünyanın ortak bir çevresinde herkesçe bilinen ortak bir dilin kullanılmasına bilimsel gösterim denir.

A: Ama bu dil nasıl bir dildir?

M: Bilimsel gösterim hani biz ortak harfler kullanıyoruz bunlar değil mi? Şu an aklıma geldi mesela doğal sayılarda “N”. Herkeste aynı.

A: 8. sınıfta çok büyük çok küçük sayılar var. Hatırlıyor musun? Orada geçiyor bilimsel gösterim. Fizik dersinde de görmüş olabilirsiniz.

M: Evet hatırlıyorum ondalık sayı mıydı bilimsel gösterim?

A: Mesela 357 000 sayısını bilimsel olarak gösteriniz gibi sorular var.

M: Aaa tamam. 357×10^3 ya da onun gibi olanları 10^n 'un kuvvetleri şeklinde yazıyoruz.

A: 357×10^3 bilimsel gösterimli diyorsun yani.

M: Evet

A: Peki $35,7 \times 10^2$ de bilimsel gösterim midir?

M: Evet o da olur.

A: O zaman bilimsel gösterim birden fazla şekilde yazılabilir.

M: Evet, yani umarım öyledir.

A: Peki çok büyük ve çok küçük sayı nedir?

M: Çok büyük dedim hani, böyle sıfırları çok işlem kolaylığı olmayan sayılardır. Sıfırları bol olan bunları kısaltmak için şu anda atıyorum bize de kullanırken işlem yaparken onun şeyi şeklinde yapıp sonra 10^n 'un kuvvetlerini koyuyoruz.

A: Çok küçük sayı ne o zaman? Mesela -9000000 çok küçük sayı mıdır?

M: Evet o da çok küçük sayıdır. Bol sıfırlı negatif sayılar da çok küçük sayıdır.

Maksude görüldüğü gibi öncelikle bilimsel gösterimi evrensel bir dil olarak görerek sayı kümelerinin harflendirilmelerini örnek olarak göstermiştir. 8. sınıfta yer alan kazanımlar hatırlatıldığında, sayının 10'un kuvvetleri biçiminde yazılarak işlem kolaylığı açısından kısaltılmasını bilimsel gösterim olarak ifade etmiştir. Bu durumda bir sayının birden fazla bilimsel gösterimi olabilir. Maksude'ye çok büyük ve çok küçük sayıların ne olduğu da sorulmuş, vermiş olduğu -9000000 örneğine göre de çok küçük sayıları negatif sayılar olarak gördüğü anlaşılmıştır.

Gerek Şart Olmayan:

- Sadece belirli sayılar veren örnekler: $3,4.10^4$ vb.
- Bilimsel gösterimi sadece belirli kümelere sınırlayan tanımlar:
“Çok büyük çok küçük sayıları $a.10^m$ biçiminde; a , 1 ve 10 arasında ve $m \in \mathbb{Z}$ olacak şekilde gösterme”
“Doğal sayıları $1 \leq a < 10$ ve $b \in \mathbb{Z}$ olmak şartıyla $a.10^b$ şeklinde gösterme”

Gerek ve Yeter Şart Olmayan:

- Çok büyük ve çok küçük sayılar gibi bazı sayılarla sınırlanmasının yanı sıra eksik veya yanlış bilgi içeren tanımlar:
“Çok büyük veya çok küçük sayıların tam kısmını 1 basamaklı olacak şekilde düzenleyip yazmadır.”
“Çok büyük çok küçük sayıların 10'un kuvvetleri ile gösterimidir.”
“Çok büyük çok küçük sayılar için kullanılan gösterim biçimidir.”
“Çok büyük ve çok küçük sayıları 10'un katları şeklinde gösterme”
“ $1 \leq a < 10$ aralığındaki sayıyı 10'un kuvvetleri ile ifade etme”
- Ondalık çarpanla ilgili yanlış açıklama içeren tanımlar:
“Herhangi bir sayının ondalık ve tam kısımlarında birer basamak yazılacak kadar 10'a bölünüp bölünen sayının 10'un üstüne yazılan gösterimi: $a,b.10^n$ ”
“ $0 < a < 10$ olmak üzere $a,b.10^n$ ($a,b \in \mathbb{Z}^+$) şeklinde yazılabilen sayılardır.”
“ $0 \leq n < 10$ olmak üzere $n.10^t$ şeklinde gösterim.”
“ $a.10^n$ biçiminde olan $a \leq 1$ olan sayılar.”
“Ondalık kısmında virgülden sonra tek basamak yazılan 10^n şeklinde gösterim biçimi”

Görüşme yapılan öğretmen adaylarından Tuğçe (1. sınıf) ve Orhan'ın (3. sınıf) açıklamaları da bu kategoride değerlendirilebilir. Tuğçe, “Bir sayının $a.10^n$ biçiminde yazılmasıdır. a'nın tam kısmı 1 basamaklı olmalıdır.” şeklinde açıklama yapmıştır. Araştırmacının “354000 sayısını $3,54.10^5$ veya $0,354.10^6$ yazabilir miyiz o zaman? İkisi de

bilimsel midir?" sorusu üzerine "Emin değilim ama ikisi de bilimsel gibi duruyor." demiştir.

Benzer şekilde Orhan ile geçen diyalog şu şekildedir:

O: Bilimsel gösterim çok küçük veya çok büyük sayıları basit göstermek yani uzun değil kısaltarak göstermek mesela $3,5.10^6$.

A: Bu sayıyı 35×10^5 şeklinde de gösterebilir miyiz?

O: 35 olamaz çünkü virgülden önce bir sayı olacak.

A: O zaman $0,35 \times 10^7$ de gösterebilir miyiz veya $0,035 \times 10^8$

O: Evet, gösterilebilir.

Görüldüğü gibi her iki öğrenci de ilk çarpandaki ondalık sayının tam kısmının 1 basamaklı olması gerektiğini ifade ederken sıfır olabileceğini de belirtmektedir. Bu durumda her sayının sonsuz bilimsel gösterimi olmaktadır. Bu nedenle de yapılan tanımlar uygun değildir.

- Ondalık sayı biçiminde yazılıp 10'un kuvveti yer almayan tanımlar
"Virgülden sonraki kısmının 1 ile 10 arasında olacak şekilde yazılmasıdır: 37,8"
"Bir sayının birler basamağından sonra virgül kullanılarak gösterimi: 1,0345"
- Matematiksel dile ve sembollere dayalı tanımlar
"Değişkenlerle gösterimdir."
"Bir ifadeyi liste şema gibi yöntemlerle ayrıntılı göstermedir."
"Bir işlemin mantık elemanlarını ($\wedge, \vee, \Rightarrow, \dots$) kullanarak gösterilmesidir."
"Tanımları bilimsel terimlerle yapmaktır."
"Bir konuyu formüllerle sembollerle göstermedir."
"Bir ifadeyi denklemler yardımıyla ve notasyonlarla gösterim."
"Terimsel ifadelerle açıklamadır."
"Bir teoremin ispatının matematiksel ifadelerle yapılmasıdır."
"Sembol ve simgelerde açıklamaları ifade etmedir."
"Matematiksel dilin kullanılmasıdır."

Görüşme yapılan 2. sınıf öğrencisi Çise, "Üniversitede cebire giriş derslerinde kullandığımız gibi notasyonlarla işlemleri yapmaktır. Yani matematiksel dili kullanmaktır." şeklinde bilimsel gösterimi tanımlamıştır.

- Sayı kümeleriyle ilişkili tanımlar
"Sayı kümelerinin harfle gösterimidir."
"Geçerli olan kümeyi ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R} \dots$) ve kapsamı ($\forall, \exists$) göstermedir."
- Bilimsellik ile ilişkili tanımlar
"Halk tabiri olmayan gösterimlerdir."

“Bilimsel araştırma sonuçlarının ispatlarla verilmesidir.”

“Formal olarak yapılan tanımlardır.”

“Neden sonuç ilişkisi ile konuyu anlatabilmektir.”

“Herhangi bir alanla ilgili teoremleri kullanmadır.”

- Diğer tanımlar

“Verilen sayının 10'un kuvvetleri ile sayı değerleri çarpımlarının toplanmasıdır.”

“Her a ve b doğal sayıları için “ a çarpı $b = a \times b$ ” şeklinde yazmaktır.”

“Bir sayıyı 10'un katı olarak yazmaktır.”

“Bir değeri birimi ile birlikte göstermektir.”

“Bir sayının $\frac{\text{sayı}}{10}$ şeklinde gösterimidir.”

“Devirli sayıların kesirli hale dönüştürülmesidir.”

“Rakamlarla bir varlığı göstermektir.”

“ abc sayısını $100a + 10b + c$ şeklinde göstermektir.”

Görüldüğü gibi bilimsel gösterimin ne olduğuyla ilgili öğretmen adaylarının çok çeşitli görüşleri vardır. Çözümleme kavramıyla bilimsel gösterimin karıştırılabildiği yazılı verilerden anlaşılmıştır. Görüşme yapılan öğretmen adaylarından Halit'in de aynı konuda kafa karışıklığı yaşadığı çözümleme kısmında verilmişti. Halit'e bilimsel gösterimin tanımı sorulduğunda da “Biliyorum aslında, ders vermiştim 8. sınıflarda. Bilimsel gösterim herhangi bir sayıyı basamaklarına ayırarak göstermek değil miydi?” şeklinde soru sormuştur. Araştırmacının, “Bir sayıyı basamaklarına ayırarak göstermek 8. sınıf öğrenciler için basit değil mi?” sorusu üzerine, “Basit bilimsel gösterim olabilir.” cevabını vermiştir. “Birler, onlar, yüzler olarak mı ayrılacak? Nasıl tanımlarız o zaman bilimsel gösterimi?” sorusu üzerine, “Bir sayının basamak değerlerine ayrılarak yazılması diyebiliriz” tanımını yapmıştır. Halit'in çözümleme kavramını bilimsel gösterim olarak açıkladığı görülmektedir. Bilimsel gösterim uygunluk oranının en düşük olduğu kavram olmuştur.

4.2.1.13. Karekök alma işlemi tanımına ilişkin bulgular

8. sınıf düzeyinde öğrencilerin ilk kez karşılaştığı bir diğer kavram ise “karekök” kavramıdır. Karekök ve karekök alma işlemi ile ilgili literatürdeki tanımlardan bazıları şunlardır:

- *“ $r^2=x$ şeklinde yazılabilen bir x sayısının karekökü r sayısıdır.” [Weisstein (t.y.)]*
- *1. “ $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ bir sıralı tamlık bölgesi ve $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $b^2=a$ ise o zaman $b \in \mathbb{R}$ 'ye $a \in \mathbb{R}$ 'nin bir karekökü denir.”*

2. “ $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere $x^2 = a$ denkleminin çözümlerinden her birine a ’nın bir karekökü denir.”

3. “ $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere $x^2 = a$ denkleminin negatif olmayan çözümüne a ’nın karekökü denir.”

Argün ve diğerlerinin (2014) çalışmasında yer alan ilk tanım reel sayılarda, ikinci tanım karmaşık sayılarda geçerliiyken üçüncü tanımı ilköğretim seviyesine göre yaptıkları belirtilmiştir.

Öğretmen adaylarına kavram testinde, “Karekök alma işlemi” tanımı sorulmuştur. Her ne kadar ilköğretim seviyesinde bir sayının karekökünün negatif olmaması gerektiği ifade edilse de literatürde yer alan bazı tanımlarda bu tarz bir kısıtlamaya rastlanmamıştır. Bu nedenle bu kısıtlama uygunluk ölçüsü olarak değerlendirilmemiştir. Soruya verilen yanıtların kategorilere göre dağılımı Tablo 73’te verilmiştir.

Tablo 73

Karekök alma işlemi kavramına ilişkin tanımlamaların dağılımı

Sınıf	Uygun (f,%)		Uygun Toplam	Uygun Olmayan (f,%)			Uygun Olmayan Toplam	TOPLAM
	Titiz	Titiz Olmayan		Yeter Şart Değil	Gerek Şart Değil	Gerek Yeter Şart Değil		
1. Sınıf	4 (%10)	8 (%20)	12 (%30)	6 (%15)	11 (%27,5)	11 (%27,5)	28 (%70)	40
2. Sınıf	2 (%5)	15 (%37,5)	17 (%42,5)	4 (%10)	14 (%35)	5 (%12,5)	23 (%57,5)	40
3. Sınıf	8 (%20)	6 (%15)	14 (%35)	7 (%17,5)	9 (%22,5)	10 (%25)	26 (%65)	40
4. Sınıf	14 (%35)	12 (%30)	26 (%65)	3 (%7,5)	7 (%17,5)	4 (%10)	14 (%35)	40
Toplam	28 (%17,5)	41 (%25,625)	69 (%43,125)	20 (%12,5)	41 (%18,75)	30 (%16,25)	91 (%56,875)	160

4.2.1.13.a. Uygun ve titiz karekök alma işlemi tanımları (%17,5)

Sözel veya matematiksel dille ifade edilen bir sayının karekökünü bulma işleminin anlamına yönelik ifadeler bu kapsamda ele alınmıştır. Bu tanımlardan bazıları şunlardır:

- *Karesi alınmış bir sayının karesi alınmadan önceki halini bulma*
Bir sayının hangi sayının karesi olduğunu bulma işlemidir.
Bir x sayısının hangi sayının kendisiyle çarpılmış hali olduğunu bulmaktır.
Karesi verilen sayıyı bulma
- $a, b \in \mathbb{R}$ iken $a^2 = b$ durumunda $\sqrt{b} = |a|$ olur
 $a^2 = b$ olsun. b sayısı verildiğinde $|a|$ sayısını bulmak demektir.

- 2.dereceden üssü alınmış ifadenin kendisini bulmak için yapılan işlemdir.
- Alanı verilen karenin bir kenarını bulma işlemidir.
- $a \in \mathbb{R}$ iken $\sqrt{a^2} = a$ veya $-a$ şeklindeki ifadeye a^2 'nin karekökünü bulma işlemi denir.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a = b \cdot b \Rightarrow \sqrt{a} = b$ (a 'nın karekökü b 'dir denir)

4.2.1.13.b. Uygun ancak titiz olmayan karekök alma işlemi tanımları (%25,625)

“Karekök alma” ifadesi yerine “kök alma” ifadesine yönelik yapılan ve bazı eksik bilgiler içeren (ters ifadesinin anlamı, 1/2. kuvvetin anlamı) tanımlar bu kapsamda değerlendirilmiştir. Bazı tanım örnekleri şunlardır:

- Bir sayının n . kuvvetini alma işleminin tersidir.
- Bir sayının karesini alma işleminin tersidir.
- Bir sayının 1/2. kuvvetini almaktır.
- Bir sayının üssünü ikiye bölmektir.

Karekök alma işleminin tanımı sorulduğu için bu işlemin kare alma işleminin tersi olduğunun belirtilmesi veya sayının 1/2. kuvvetinin olduğunun belirtilmesi kavramı doğru açıklamaktadır. 25 sayısının 1/2. kuvveti 5 sayısını verirken, 2 sayısının 1/2. kuvveti 1,4142... irrasyonel sayısını vermektedir. Yani tanımda belirtilen işlem karekök alma işlemini karşılamaktadır. Ancak 1/2. kuvvetin veya üs alma işleminin tersinin ne anlama geldiğinin açıkça belirtilmemesi nedeniyle tanımlar “uygun ancak titiz değil” kapsamında değerlendirilmiştir.

4.2.1.13.c. Uygun olmayan karekök alma işlemi tanımları (%56,875)

Karekök kavramının sadece gösterimine veya bir özelliğine değinen yetersiz tanımlar, karekök alma işlemini bazı kümelerle kısıtlayan tanımlar gibi uygun olmayan tanımlar öğretmen adaylarının yaklaşık %57'sini oluşturmaktadır. Gerek veya yeter şartların eksikliğine göre bu tanımlara örnekler aşağıda verilmiştir.

Yeter Şart Olmayan:

Karekök alma işleminin bir özelliği olan veya bir sayının karekökünü bulmanın eksik bir tarifini veren ifadeler bu kapsamda ele alınmıştır.

- Kavramın anlamına değinmeyen tanımlar:
 “Kök içine alınan sayının değerinin bulunması”
 “Kök içine alınan sayının değerinin değişmesi”
 “Bir sayıyı kökten çıkarma”

- Gösterime dayalı tanımlar:

“ $a = \sqrt[2]{a}$ yazmak”

“ $\sqrt{\quad}$ ile gösterilen işlem”

“ $K^{\frac{a}{b}}$ iken $\sqrt[b]{K^a}$ yazmadır.”

- Çarpanların eşit olması gerektiğini belirtmeyen ifadeler:

“Bir sayının iki çarpanından birini yazmak”

“Bir sayının hangi iki sayının çarpımı olduğunu bulma”

Gerek Şart Olmayan:

Karekök alma işlemini sadece belirli kümelerle kısıtlayan veya sadece belirli sayılarla örnek veren ifadeler bu kategoride yer almaktadır.

- Karekök alınacak sayıyı çarpanlarına ayrılabilen bir doğal sayıya sınırlayan ifadeler:

“A’yı asal çarpanlarına ayırdığımızda t^2 şeklinde yazıp 2’yi yok etmek.”

“Bir sayıda aynı çarpandan iki tane varsa teke düşürme işlemidir.”

“Doğal sayılar kümesinde a^2 sayısını sembolle yazarak değerini a’ya eşitlemek”

“ $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ise $\sqrt{a^{2b}} = a^b$ ”

“ $x = a^2b$ ise $\sqrt{x} = a\sqrt{b}$ işlemine x’in karekökünü alma denir.”

- Karekökü alınacak sayıyı tam kare sayıya sınırlayan tanımlayan:

“Bir sayının üssü çift ise üssün ikiye bölünmesi”

“Karesel sayının yazıldığı $a.a=a^2$ ifadesinde a’yı bulmak”

“Bir sayının içindeki tam kareleri ayırıştırma”

“Bir tam kare sayının karekökü karesi olduğu sayının mutlak değeridir.”

- “ $\sqrt{4} = 2$ ” gibi sayısal örnekler ve örnek üzerinde açıklama yapan ifadeler
- “Bir sayının karesini atma işlemi” şeklinde sayıyı üslü bir sayıya sınırlayan ifadeler

Gerek ve Yeter Şart Olmayan:

- Hem yetersiz veya yanlış olan hem de tam kare sayılara sınırlayıcı ifadeler

“Tam kare ifadelerin doğal sayı şeklinde yazılması”

“Tam kare sayılarla yapılan işlemdir.”

“Tam kare sayının kökünü bulmak”

“Tam karenin tersi”

“Tam kare sayının önceki halini bulma”

“Karesel sayıların kuvvetlerini azaltan işlemdir.”

- Diğer eksik ve hatalı ifadeler:

“Sayıyı kökten kurtarıp rasyonel olarak gösterme işlemidir.”

“İçerideki sayının dışarı tam çıkması”

“Bir sayıyı kendisiyle çarpıp kök içine yazmak”

“Bir sayının kendi ile çarpılmadan önceki halini bulma”

“Bir sayıyı 2.dereceden köklerine ayırma”

4.2.1.14. π sayısının tanımına ilişkin bulgular

Sayılar ve işlemler öğrenme alanında karşılaşılan kavramların tanımlarının dışında öğretmen adaylarına π 'nin tanımı da sorulmuştur. Çünkü π geometrinin en temel kavramlarından olmakla birlikte aynı zamanda irrasyonel bir sayıdır. π , “bir çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranı” şeklinde tanımlanabilir (Weisstein, t.y.). Öğretmen adaylarının π tanımı ile ilgili vermiş oldukları yanıtların dağılımı Tablo 74 'te verilmiştir.

Tablo 74

π sayısına ilişkin tanımlamaların dağılımı

Sınıf	Uygun (f,%)		Uygun Toplam	Uygun Olmayan (f,%)			Uygun Olmayan Toplam	TOPLAM
	Titiz	Titiz Olmayan		Yeter Şart Değil	Gerek Şart Değil	Gerek Yeter Şart Değil		
1. Sınıf	6 (%15)	3 (%7,5)	9 (%22,5)	22 (%55)	0 (%0)	9 (%22,5)	31 (%77,5)	40
2. Sınıf	7 (%17,5)	1 (%2,5)	8 (%20)	20 (%50)	0 (%0)	12 (%30)	32 (%80)	40
3. Sınıf	17 (%42,5)	2 (%5)	19 (%47,5)	12 (%30)	0 (%0)	9 (%22,5)	21 (%52,5)	40
4. Sınıf	27 (%67,5)	0 (%0)	27 (%67,5)	8 (%20)	0 (%0)	5 (%12,5)	13 (%32,5)	40
Toplam	57 (%35,625)	6 (%3,75)	63 (%39,375)	62 (%38,75)	0 (%0)	35 (%21,875)	97 (%60,625)	160

Tablo 74 incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık olarak %39'unun uygun tanım yapabildiği görülmektedir. Ancak bu düşük sayılabilecek oranın 4. sınıf öğretmen adaylarında %67,5 düzeyinde olması olumlu bir gelişme olarak düşünülebilir. Her bir kategoriye ait yanıtlar başlıklar halinde aşağıda sunulmuştur:

4.2.1.14.a. Uygun ve titiz π tanımları (%35,625)

57 öğretmen adayı çemberi veya daireyi temel alan uygun ve titiz tanımlar yapmışlardır. Bu tanımlardan bazıları şunlardır:

- “Bir çemberin çevresinin çapa bölümü / oranı”

“Bir dairenin çevresinin çapa bölümü /oranı”

En çok yapılan tanım çemberin çevresinin çapa bölümü veya oranı şeklinde olmuştur.

- “Yarıçapı 1 birim olan dairenin alanı”

Bazı öğrenciler dairenin alanından yola çıkarak tanım yapmıştır. Birim dairede alan $\pi.r^2 = \pi.1 = \pi$ şeklinde olmaktadır. Bu nedenle yapılan tanım doğrudur. Diğer tanımlara göre farklı bir bağlamdan yola çıktığı için zengin bir tanım olarak değerlendirilebilir.

- “Birim çemberin çevresinin yarısı”

Birim çemberden yola çıkılarak yapılan bu tanımda $2.\pi.r = 2.\pi.1$ olan çevrenin yarısı π 'yi verdiği için tanım uygundur.

- “Çemberin çevresinin yarısının yarıçapına oranı”

Bu tanımda dolaylı yoldan da olsa π sayısına ulaşılmıştır. Tanım minimallik kriterine aykırı değildir. Çünkü tanımdaki herhangi bir eksiklik kavrama ulaşmayı engellemektedir.

Görüşme yapılan sekiz öğretmen adayından beşi yazılı olarak uygun ve titiz tanım yapmıştır. Ancak bu beş öğretmen adayının görüşme sırasında ilk yaptıkları tanımlar eksik olmuştur. Bu ifadeler şu şekildedir:

Maksude (4. sınıf): Çevrenin çapa bölümüydü. 3,14'e yaklaşık bir sayıdır.

Şeyma (4. sınıf): Çevrenin çapa bölümünden çıkan sonuçtur.

Simre (3. sınıf): Çemberin çevresinin çapına oranıdır.

Çise (2. sınıf): Çevrenin çapa bölümü

Halit (2. sınıf): Çemberin çapına bölümü

Görüldüğü gibi Simre dışında ilk ifadelerinde titiz tanım yapan öğretmen adayı olmamıştır. Araştırmacı; Maksude, Şeyma ve Çise'ye “neyin çevresi?” ve Halit'e de “çemberin neyinin?” şeklinde dönüt vermesiyle tanımlarını düzeltmişlerdir.

4.2.1.14.b. Uygun ancak titiz olmayan π tanımları (%3,75)

Bazı tanımlar uygun olmakla birlikte düzgün ifade edilemediği veya minimal olmadığı için titiz olmayan tanım olarak değerlendirilmiştir.

- “Yaklaşık değeri 3,14 olan dairenin çevresinin çapına oranıdır.”

Sayının yaklaşık değerinin verilmesi tanım için gerekli değildir. Minimallik kriterine aykırı olduğu için tanım titiz değildir.

- “Bir ağacın çevresini ölçerken bulunan dairenin çevresinin çapına bölümü”

Tanım doğru olmakla birlikte π sayısının ne işe yaradığıyla ilgili tanım için gerekli olmayan bir bilgiyi içerdiği için titiz değildir.

- “R çaplı bir çemberin çevresinde R uzunluğundan kaç tane olduğunun değeridir.”

“Kaç tane” ifadesi bir doğal sayıyı çağrıştırdığı için π sayısı için uygun olmayabilir. Ancak tanım π sayısını oluşturmak için yeterlidir.

4.2.1.14.c. Uygun olmayan π tanımları (%60,625)

Öğretmen adaylarının %60’ı π sayısını gerek ve yeter şartlarıyla birlikte tanımlayamamıştır. Bu tanımlardan bazıları aşağıda sunulmuştur:

Yeter Şart Olmayan:

62 öğretmen adayının tanımlarının olduğu bu kategoride yanıtların bir kısmı “3,1415...” veya “22/7’nin yaklaşık değeri” şeklinde doğru olan ancak tanım için yetersiz olan ifadeler vardır. Bazı öğretmen adayları “irrasyonel sayı” şeklinde, bazı öğretmen adayları ise “çemberin uzunluğunu ve dairenin alanını hesaplarken kullanılan sayı” şeklinde yeterli olmayan açıklamalarda bulunmuştur.

Gerek Şart Olmayan:

Hiçbir öğretmen adayı bu kategoride bir yanıt vermemiştir. Çemberin spesifik bir halini açıklayan herhangi bir tanım olmamıştır. “Yarıçapı 4 cm olan bir çemberin çevresinin çapına bölümü” şeklinde gereksiz kısıtlama içeren bir tanım bu kategoride değerlendirilebilirdi.

Gerek ve Yeter Şart Olmayan:

π sayısı ile ilgili doğru bilgi içermeyen tanımlar bu kategoride yer almıştır. 35 öğretmen adayının tanımı bu kategoride değerlendirilmiştir. Bazı tanımlar şu şekilde örneklendirilebilir:

- “Çevrenin yarıçapa bölümü”, “alanın çevreye oranı”, “alanın çapa oranı” ve “çevrenin alana oranı” şeklinde yanlış oran içeren tanımlar
- “3,16... diye giden sayı”, “3,19...”, “24/7’nin sonucu 3,428...” ve “3,17 gibi bir sayı” şeklinde yanlış sayılar içeren tanımlar

- “Geometride kullanılan virgülden sonrası bilinmeyen sayı”, “bilimsel olarak çember için bulunan sabit bir değer” ve “dairenin alanını ve çevresini bulabilmemiz amacıyla ortaya çıkan irrasyonel sayı” şeklinde π sayısını belli amaç için oluşturulan veya kullanılan bir sayı olarak ifade eden tanımlar
- “Hayatın kendisi”, “sonsuz kadar devreden sayı”, “üçgenin çevresinin çapına bölünmesiyle oluşan sayı” şeklinde tanımlar
- Tam olarak “3,14” veya “22 / 7” diyen tanımlar

Görüşme yapılan öğretmen adaylarından üçü uygun olmayan tanımlar yapmıştır. Bu öğretmen adaylarından Burçe (1. sınıf), “bir şeyle bir şeyi çarpıp 3,14 buluyorduk ama hiç hatırlamıyorum. Tanım yapamam.” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Bir başka 1. sınıf öğretmen adayı Tuğçe ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir:

A: π sayısını nasıl tanımlarsınız?

T: 3,14’tür.

A: Tanımı mıdır 3,14?

T: Hayır değildir. Çemberin bölümü şeklinde bir şey vardı. Bir şeyi çapına mı bölüyorduk ya da yarıçapına...

A: Çemberin neyini bölüyorduk?

T: Çevre uzunluğuydu galiba

A: Çevre uzunluğunun formülü ne? Biliyor musun?

T: Evet. $2\pi r$

A: $2\pi r$ ’yi neye bölersen π ’yi bulursun?

T: $2r$ ’ye. Aaa tamam o zaman, çevrenin çapa bölümü o halde.

Tuğçe sadece 3,14 olarak sayıyı tanımlamış ancak sonraki dönütlerle tanıma ulaşmıştır. π sayısını bir sayı ile tanımlayan öğrencilerden biri de görüşme yapılan öğretmen adaylarından Orhan olmuştur. Orhan (3. sınıf), π sayısını 22/7 olarak ifade etmiştir. Görüşme aşağıdaki gibi gerçekleşmiştir:

A: π sayısını nasıl tanımlarsınız?

O: 22/7’dir. Yani 22’yi 7’ye bölünce ortaya çıkan irrasyonel sayıdır.

A: 22’yi 7’ye böldüğümüzde nasıl bir sonuç çıkıyor?

O: 3,14 gibi bir şey çıkıyor. Ama aynı rakam tekrar gelmiyor. Karışık gidiyor.

A: Peki 22’yi 7’ye bölmeyi denedin mi?

O: Denemiştim. Sonu yok. Düzensiz gidiyor

A: Peki π sayısını çemberde de kullanmıyor muyuz?

O: Çemberin alanında kullanıyoruz. Çapla alakalı bir şey diye biliyorum ama hakim değilim.

Orhan da Tuğçe gibi tanım yaparken π 'nin yaklaşık değerini kullanmıştır. Ancak 22/7'ye tam olarak eşit olduğunu ifade etmiştir. 22/7 devirli bir sayı olmasına rağmen 22'yi 7'ye böldüğünde irrasyonel bir sayı olduğunu ifade etmiştir. Ancak çemberle ilgili bir tanım yapamamıştır. Hem yazılı hem de sözlü veriler ele alındığında π sayısına ilişkin öğretmen adaylarının yaklaşık %60'ının uygun olmayan tanımlar yaptığı görülmüştür.

Kavram testinin ikinci aşamasında öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkiler bilgisinin incelenmesi adına 11 soru sorulmuştur. Bu sorularla birlikte öğretmen adaylarının kavram bilgi düzeyleri ortaya konmaya çalışılmıştır.

4.2.2. Kavramlar arası ilişkilere yönelik bulgular

Kavram testinin ikinci bölümünde sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin çeşitli kavramların birbirleriyle ilişkisine yönelik açık uçlu 11 soru sorulmuştur. Bu bölümde de bu 11 soruya ait bulgulara yer verilmiştir.

4.2.2.1. Basamak ve bölük kavramlarına ve aralarındaki ilişkiye yönelik bulgular

Testin ilk sorusunda öğretmen adaylarından basamak ve bölük kavramlarının arasındaki ilişkiyi açıklamaları ve bir sayı üzerinde örnekle göstermeleri istenmiştir. Bir sayıdaki her bir rakamın bir basamağı oluşturduğu, en sağdan itibaren her üçerli basamak grubunun bölükleri oluşturduğu düşünüldüğünde öğretmen adaylarından beklenen basamak ve bölükleri doğru açıklamalarla ifade etmeleri ve bir sayı seçerek bu sayının basamak ve bölüklerini doğru isimlendirmelerle örneklendirmeleri olmuştur.

Öğretmen adaylarının yanıtları üç ana kategoriye ayrılmıştır. Her iki kavramı doğru açıklayan ve bir sayı üzerinden örnekleyen yanıtlar “tamamen doğru” kategorisinde ele alınmıştır. Her iki kavramın da yanlış açıklandığı veya örneklendirildiği yanıtlar ise “tamamen yanlış” kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu iki kavramdan sadece biri hatalı ise veya her ikisi doğru olmakla birlikte basamak veya bölük isimlendirmelerinde yanlış olan yanıtlar “kısmen doğru” kategorisinde ele alınmıştır. Öğretmen adaylarının bu kategorilere göre dağılımı Tablo 75’te sunulmuştur.

Tablo 75

KVT 1. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Tamamen Doğru Açıklama	Kısmen Doğru			Tamamen Yanlış
		Basamak Doğru, Bölük Yanlış	Bölük Doğru, Basamak Yanlış	Açıklamalar Doğru, İsimlendirmeler Yanlış	
1. Sınıf	19 (%47,5)	11 (%27,5)	0 (%0)	2 (%5)	8 (%20)
2. Sınıf	5 (%12,5)	20 (%50)	1 (%2,5)	3 (%7,5)	11 (%27,5)
3. Sınıf	11 (%27,5)	16 (%40)	0 (%0)	1 (%2,5)	12 (%30)
4. Sınıf	20 (%50)	11 (%27,5)	1 (%2,5)	1 (%2,5)	7 (%17,5)
Toplam	55 (%34,375)	58 (%36,25)	2 (%1,25)	7 (%4,375)	38 (%23,75)

Tablo 75 incelendiğinde öğretmen adaylarının sadece %34'ünün hem basamak hem de bölük kavramını doğru bir şekilde açıkladığı ve örneklendirdiği görülmektedir. Yaklaşık %24'ü ise her iki kavramı da açıklayamamıştır. En büyük çoğunluğun basamak kavramını doğru açıkladığı halde bölük kavramını açıklayamayan öğretmen adaylarında olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının %36'sı bu kategoride yer almıştır. Sınıf düzeyleri arasında düzenli bir gelişmenin olmadığı dikkat çekmiştir. Hatta 1. sınıf öğretmen adaylarının özellikle 2. ve 3. sınıf öğretmen adaylarına göre basamak ve bölük kavramı ilişkisini açıklamada daha başarılı oldukları görülmektedir. Tablo 76'da ise basamak ve bölük kavramlarına ilişkin yapılan açıklamaların doğruluk veya yanlışlıkları ayrı ayrı gösterilmiştir.

Tablo 76

Basamak ve bölük kavramına yönelik yapılan açıklamaların dağılımı

	Basamak Kavramı Açıklaması		Bölük Kavramı Açıklaması	
	Doğru	Yanlış	Doğru	Yanlış
1. Sınıf	32 (%80)	8 (%20)	21 (%52,5)	19 (%47,5)
2. Sınıf	28 (%70)	12 (%30)	9 (%22,5)	31 (%77,5)
3. Sınıf	28 (%70)	12 (%30)	12 (%30)	28 (%70)
4. Sınıf	32 (%80)	8 (%20)	22 (%55)	18 (%45)
Toplam	120 (%75)	40 (%25)	64 (%40)	96 (%60)

Tablo 76'da görüldüğü gibi öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu (%75) basamak kavramını doğru açıklamıştır. Bölük kavramı ile ilgili ise öğretmen adaylarının yarıdan daha az bir kısmı doğru açıklama yapabilmıştır. Bölük kavramının ne olduğunu hatırlamadığını ifade eden birçok öğretmen adayı olmuştur. Görüşme yapılan sekiz öğretmen adayından beşi bölük isimlerini hatırlamadığını veya hiç duymadığını belirtmiştir. 1. sınıf öğretmen adaylarından Burçe ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir:

B: Basamak ve bölüklere ayırma vardı. Ama nasıldı hatırlamıyorum.

A: Basamak isimlerini hatırlıyor musun?

B: Birler vardı. Onlar, yüzler, binler, on binler diye gidiyordu.

A: Bölük neydi peki?

B: Onu da ayırıyorduk ama hatırlayamadım. Üçlü olarak mı ayırıyorduk sağdan?

A: Evet öyle. Peki, bölüklerin isimlerini hatırlıyor musun?

B: Birler bölüğü, onlar bölüğü, yüzler bölüğü gibiydi sanırım o da.

Görüldüğü gibi bölük isimlendirmelerinde de basamak isimlendirmesi gibi düşünülebilmektedir. Görüşme yapılan 3. sınıf öğretmen adayı Simre de benzer şekilde bölük isimlerini onlar, yüzler, binler şeklinde sıralamıştır.

Konu testinin ilk sorusundaki bulgular ile bu sorunun bulguları karşılaştırıldığında ilginç sayılabilecek bir sonuç çıkmaktadır. Konu testinin ilk sorusunda öğretmen adaylarına bir sayı verilmiş ve bu sayıyı basamak ve bölüklerine ayırmaları istenmişti. 1. sınıf öğretmen adaylarının sadece üç tanesinin verilen sayıyı ham basamaklarına hem de bölüklerine doğru ayırdıkları görülmüştü. Bu soruda ise 1. sınıf öğretmen adaylarının neredeyse yarısı basamak ve bölük kavramlarını doğru açıklamış ve isimlendirmiştir. Görüşme yapılan 1. sınıf öğretmen adaylarından Tuğçe'ye bu durum sorulmuştur. Tuğçe konu testinde bölükler arasında nokta koyduğu için ayırdığını düşündüğünü onları özel olarak isimlendirmediyi veya belirtmediğini ifade etmiştir. Bu soruda ise basamak ve bölük kavramı arasındaki ilişkiye yönelik açıklama istendiği için daha detaylı yazdığını belirtmiştir. Diğer yazılı yanıtlar da incelendiğinde diğer öğretmen adaylarında da benzer durumun yaşanmış olabileceği düşünülmüştür. Konu testinde yer alan 1. soruyu bazı öğretmen adaylarının yanlış yorumladığı ve bu nedenle detaylı açıklama yapmadığı anlaşılmıştır.

4.2.2.2. Çarpan, kat ve kalansız bölen kavramlarına ve aralarındaki ilişkiye yönelik bulgular

“Bir sayının çarpanları, katları ve kalansız bölenleri ne demektir? Aralarındaki ilişkiyi açıklayınız.” şeklinde sorulan ikinci soruda öğretmen adaylarından çarpan ve kat kavramlarını açıklamaları beklenmiştir. Ayrıca kalansız bölen ve çarpanların pozitif tam sayılar göz önüne alındığında aynı sayılar olduğunun belirtilmesi istenmiştir. Yapılan açıklamalar değerlendirilip kat ve çarpan kavramını tanımlayan, çarpan ve kalansız bölen ifadelerinin aslında aynı sayıları belirttiğini açıklayan yanıtlar “doğru yanıtlar” olarak kabul edilmiştir. Bu açıklamalardan sadece bir kısmının belirtildiği yanıtlar “kısmen doğru yanıtlar” olarak sınıflandırılmıştır. Bu kavramları yanlış tanımlayan veya yanlış

açıklamalar yapan yanıtlar ise “yanlış yanıtlar” olarak kabul edilmiştir. Yapılan bu sınıflandırmalara göre öğretmen adaylarının dağılımı Tablo 77’de verilmiştir.

Tablo 77

KVT 2. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Doğru Yanıtlar	Kısmen Doğru Yanıtlar	Yanlış Yanıtlar
1.Sınıf	19 (%47,5)	11 (%27,5)	10 (%25)
2.Sınıf	17 (%42,5)	12 (%30)	11 (%27,5)
3.Sınıf	20 (%50)	10 (%25)	10 (%25)
4.Sınıf	25 (%62,5)	10 (%25)	5 (%12,5)
Toplam	81 (%50,625)	43 (%26,875)	36 (%22,5)

Öğretim programında “çarpanlar ve katlar” alt öğrenme alanı olarak geçen ve 6. sınıftan itibaren temelleri atılan bu kavramlarla ilgili öğretmen adaylarının yaklaşık olarak yarısının doğru yanıt verdiği görülmektedir. 3. ve 4. sınıf öğretmen adaylarının doğru yanıt oranlarında ilk iki sınıf düzeyine göre daha başarılı oldukları anlaşılmaktadır. Ayrıca öğretmen adaylarının yarısının kısmen doğru veya tamamen yanlış yanıtlar verdikleri görülmektedir. Bu durumun daha detaylı anlaşılabilmesi için, hangi kavramlarda ne gibi yanlışların olduğunun ortaya çıkarılabilmesi için öğretmen adaylarının sahip olduğu yanlışlar bir araya getirilerek maddeler halinde aşağıda sıralanmıştır.

- *Çarpan veya bölen olarak sadece asal çarpanları ele alma yanılığı*
Çarpanı veya böleni bulurken öğretmen adaylarının bir kısmı sadece asal sayıları ele almışlardır. Bu yanıtlardan biri şu şekildedir: “ $60=2.2.3.5$ olduğu için 60’ın çarpanları 2, 3 ve 5’dir.”
- *Çarpan olarak sadece pozitif çarpanları ele alma yanılığı*
Birçok öğretmen adayı çarpanları açıklarken pozitif çarpan örnekleri vermiş negatif çarpanlardan hiç bahsetmemiştir.
- *1 ve sayının kendisinin çarpan olarak sayılmaması yanılığı*
Öğretmen adaylarınca verilen birçok örnekte çarpanlar belirtilirken 1 ve sayının kendisi unutulmuş veya bilerek yazılmamıştır.
- *Kat alırken sadece sayının pozitif katlarını ele alma ve kendisini dışlama yanılığı*
Bazı adaylar katı, sayıdan büyük olarak almış yani sayının kendisini, negatif katlarını veya sıfırı dahil etmemiştir. Bu yanıtlardan biri şu şekildedir: “Bir sayıyı 2 ile 3 ile çarparsak katlarını buluruz. Mesela 10’un katı 20, 30, 40... şeklinde ilerler.”
- *Kat bulunurken, sayının sabit bir sayı ile çarpıldığını belirtip sayının niteliğinden bahsetmeme yanılığı*
“Bir sayıyı farklı sabit sayılarla çarparak onun katlarını buluruz.”

- *Katın asal çarpanların derecelerinden meydana geldiği yanlışlığı*

Bazı öğretmen adayları bir sayıyı asal çarpanlara ayırmış ve o asal çarpanlardan üretilen diğer sayıların katları oluşturduğunu belirtmiştir. Verilen bir örnekte 20 sayısı $20 = 2.2.5$ şeklinde yazılmış; 2 ve 5 çarpanlarının farklı sayılarda bir araya gelerek 20'nin katlarını oluşturduğu öğretmen adayınca söylenmiştir. Bu durum 40'ı ($40 = 2.2.2.5$) bir kat yaparken 60'ın ($60 = 3.2.2.5$) bir kat olmasını engellemektedir.

- *Bir sayının kuvvetleri ile katlarını eş değer görme yanlışlığı*

Kuvvet ve kat kavramları öğretmen adaylarınca karıştırılmaktadır. Bu yanıtlardan biri şu şekildedir: “3'ün katları 3, 9, 27, 81... şeklinde sayıyı kendisiyle çarparak bulunur.”

- *Kalansız bölen ile kat kavramını eş değer görme yanlışlığı*

Birçok öğretmen adayı çarpanı doğru belirttiği halde kalansız bölen ile kat kavramını aynı görmüştür. Bu yanıtlardan biri şu şekildedir: “60'ı 5'bölsek cevap 12 çıkar ve kalan sıfır olur. 60 hem 5'in 12 katıdır, aynı zamanda kalansız bölendir.”

- *Çarpan, bölen ve katı aynı kavram olarak ele alma yanlışlığı*

Kat kavramını da diğer iki kavramla aynı olduğunu belirten yanıtlar olmuştur. Bu yanıtlardan biri şu şekildedir: “Mesela $40 = 5.8$ 'dir. 5 ve 8, 40'ın hem çarpanıdır hem kalansız bölenidir hem de katıdır. Aynı anlama geliyor.”

- *Bölen= EBOB, Kat=EKOK yanlışlığı*

Bazı öğretmen adayları EBOB ve EKOK ile örnekler vererek bölen ve kat kavramlarını açıklamaya çalışmıştır. Bu yanıtlardan biri şu şekildedir: “20 ve 24 sayılarının her ikisi de en büyük 4'e bölünür. Bu durumda dört her iki sayının da bölenidir. Kat ise mesela 6 ve 9 sayılarının 18 ortak katıdır.”

Yukarıda öğretmen adaylarının çarpan, kat ve bölen kavramları ile ilgili hatalı yanıtlarına örnekler verilmiştir. Görüldüğü gibi aritmetik için en temel sayılabilecek kavramlarda öğretmen adaylarının yanlışları mevcuttur. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarının yanıtlarının biraz daha iyi olmasında “elementer sayı kuramları” dersinin etkisinin olduğu düşünülebilir. Nitekim dördüncü sınıf öğretmen adaylarından olan Şeyma, bu kavramları derinlemesine son sene öğrendiğini bazı kuralların mantığını daha yeni anladığını belirtmiştir.

4.2.2.3. Birimli ve birimsiz oran kavramlarına ve aralarındaki ilişkiye yönelik bulgular

Kavram testinin üçüncü sorusunda öğretmen adaylarından birimli ve birimsiz oranı örnek göstererek açıklamaları istenmiştir. 6. sınıf düzeyinde gerek öğretim programında gerek ders kitaplarında birimli ve birimsiz oran yer almaktadır. Aynı veya birbirine dönüştürülebilir birimlere sahip iki çokluğun birbirine oranına birimsiz oran denirken, farklı ve birbirine dönüştürülemez birimlere sahip iki çokluğun birbirine oranına birimli oran denilmektedir. Ortaokul düzeyinde yer alan bu kavramlar ile ilgili öğretmen adaylarının bilgileri incelenmiş ve yapmış oldukları açıklamalar doğru, kısmen doğru ve yanlış olmak üzere üç ana kategoriye ayrılmıştır. Tablo 78’de bu üç kategoriye ait yanıtların dağılımı yer almaktadır.

Tablo 78

KVT 3. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Doğru Yanıtlar	Kısmen Doğru Yanıtlar	Yanlış Yanıtlar
1.Sınıf	3 (%7,5)	1 (%2,5)	36 (%90)
2.Sınıf	5 (%12,5)	1 (%2,5)	34 (%85)
3.Sınıf	4 (%10)	0 (%0)	36 (%90)
4.Sınıf	11 (%27,5)	0 (%0)	29 (%72,5)
Toplam	23 (%14,375)	2 (%1,25)	135 (%84,375)

Tablo 78 incelendiğinde kavramla ilgili iç açıcı bulguların olmadığı söylenebilir. Öğretmen adaylarının yaklaşık %84’ü birimli ve birimsiz oranı açıklayamamıştır. Bir kısmı kavramları ilk kez duyduğunu veya hiç bilmediğini belirtirken bir kısmının ise kavramla ilgili yanlış kavram imajına sahip olduğunu gösterecek açıklamalar mevcuttur. Sadece 23 öğretmen adayı (%14,375) kavramları doğru tanımlamıştır. Çoğunluğun 4. sınıf öğretmen adaylarında olduğu da tabloda görülmektedir. Bu soruda doğru yapan öğretmen adaylarından ziyade yanlış yanıtlara odaklanılmıştır. Öğretmen adaylarının birimli ve birimsiz oran kavramları ile neyi anladıkları incelenmiştir ve çok farklı yanlış anlayışların olduğu ortaya çıkmıştır. Bu yanlışlardan bazıları aşağıda listelenmiştir:

- $\frac{a}{b} = k$ iken $k \in \mathbb{Z}$ ise oran birimli $k \notin \mathbb{Z}$ iken oran birimsizdir.

Bu türdeki bir yanıtı göre $\frac{8}{2}$ oranı birimli ancak $\frac{3}{5}$ oranı birimsizdir. Öğretmen adayı oranın niceliği ile ilgilenmiştir.

- *Yüzde, binde gibi birimi belli olanlar birimlidir. Kesir biçiminde yazılanlar birimsizdir.*

Bu türdeki yanıtlarda öğretmen adayı %15 oranını başındaki sembolden dolayı birimli oran kabul ederken $\frac{15}{100}$ oranını birimsiz oran olarak kabul etmektedir.

- *Yanına litre, kg gibi birimler yazıldığında birimlidir. Birim yazılmazsa birimsizdir.*

Birimlerin aynı veya farklı olmasından ziyade bir birimin olup olmamasına odaklanılmaktadır. 3 kg/5kg birimli oran iken 3/5 birimsiz orandır.

- *Çokluklar aynı cinsten olursa birimlidir. Farklı cinsten olursa birimsizdir.*

Bazı öğretmen adayları birimli ile birimsizi birbiri ile karıştırabilmektedir. Görüşme yapılan 3. sınıf öğretmen adayı Orhan'ın, "Kilo ile kilo karşılaştırınca birimlidir. Kilonun birimi olur. Ama kilo ile litre karşılaştırınca birimsizdir. Çünkü ikisi farklıdır. Ortak bir birimleri yoktur." şeklindeki açıklaması bu duruma örnek teşkil etmektedir.

- *Kesrin paydası 10 ve kuvvetleri olabiliyorsa birimlidir. Ondalık hali devirli oluyorsa birimsizdir.*

Bu görüşe göre 2/5 oranı 0,4 şeklinde yazılabildiği için birimlidir. 2/3 oranı ise devirli olarak yazılabildiği için birimsizdir. Bu görüşe göre öğretmen adayı kesrin ondalık değerine odaklanmıştır.

- $\frac{a}{b} = 1$ ise oran birimlidir. $\frac{a}{b} \neq 1$ ise oran birimsizdir.

Bu düşünceye göre oranın değeri 1 ise oran birimli, değil ise oran birimsizdir. Kesrin değerine odaklanılmıştır. Bu durumda 5/5 oranı birimli 4/5 oranı ise birimsiz orandır. Bu şekilde oranın sonucunun 1 olması gerektiğini ifade eden görüşme yapılan 2. sınıf öğretmen adayı Halit ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir.

H: Birim kesirle aynı değil mi ya? Evet öyle bence. Birimli oran, oranı 1 olandır. Birimsiz oran ise 1'den farklı oranlardır.

A: Örnek verir misin?

H: 3 kg un ile 3 kg şekerin oranı birimlidir ama 3 kg un ile 5 kg şekerin oranı birimsizdir.

A: Burada birim ne oluyor peki?

H: Birim 1 işte. Birbirlerine eşit olmaları. İkincisinde birim yok zaten.

- $\frac{a}{b}$ oranında a ve b aralarında asal ise oran birimsizdir. Ancak a ve b sadeleşebilir ise oran birimlidir. Sadeleştiği miktar da birimdir

Bu yanılığa sahip öğretmen adaylarından biri vermiş olduğu yanıtta 5/6 oranının birimsiz olduğunu, 15/18 oranının ise birimli olduğunu ve biriminin 3 olduğunu belirtmiştir.

- *Aynı değişkenli ifadelerin oranı birimlidir. Farklı değişkenli ifadelerin oranı birimsizdir.*

Bu düşünceye sahip öğretmen adaylarından biri $\frac{x+3}{4x}$ ifadesinin birimini x olarak açıklamış; $\frac{y+5}{3x}$ ifadesinin ise birimsiz oran olduğunu belirtilmiştir.

- *Yerçekimi ivmesi bir orandır ve birimi vardır ($g = 10 \text{ N}$). π de bir orandır. Ancak birimi yoktur.*

Öğretmen adayı yerçekimi ivmesinin biriminin olmasından yola çıkarak o orana birimli oran derken; π sayısını, çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranı olduğu ancak biriminin olmadığı düşüncesiyle birimsiz oran olarak kabul etmiştir.

- *Ölçülerin oranı birimli, adet sayılarının oranı birimsizdir.*

Bu görüşe göre Ahmet'in boyunun Ayşe'nin boyuna oranı cm veya metre olarak ifade edilebildiği için birimlidir. Ancak Ahmet'in kalem sayısının Ayşe'nin kalem sayısına oranında bir birim olmadığı düşüncesiyle birimsizdir. Görüşme yapılan 4. sınıf öğretmen adayı Şeyma ile araştırmacı arasında geçen diyalogda da benzer durum yaşanmıştır:

Ş: Aslında hiç bilmiyorum. Ama aklıma şu geliyor birimli deyince. Birimi olacak cm, m gibi.

A: Oranla bağlantısı nasıl olacak?

Ş: İki kürenin hacimleri oranı istendi mesela, cm^3 birim olur.

A: Birimsiz oran nasıl oluyor peki?

Ş: Ayşe 5 elma aldı. Ahmet 4 elma. Oranlarsak bunların birimi yok.

A: Peki biri 5 m uzunluk diğeri 2 sn zaman. Bunların oranı nedir?

Ş: O da birimli olur bence. Hız, özkütle falan bunların da birimleri vardır. g/cm^3 gibi.

- *Nicelik bildirenler birimli, sözel karşılaştırma içerenler birimsizdir.*

Bu görüşe göre “Bu halı diğer halıya göre %10 daha büyük.” cümlesindeki halıların oranı birimlidir. Ancak, “Bu halı diğer halıya göre daha büyük.” cümlesindeki halıların oranı birimsizdir.

- *$\frac{a}{b}$ ifadesinde a ve b rasyonel sayı ise oran birimlidir. Ancak biri irrasyonel ise birimsizdir.*

Bu görüşe sahip öğretmen adaylarından biri “ $\frac{3}{7}$ oranı birimlidir. Birimi $\frac{1}{7}$ 'dir. Ancak $\frac{\pi}{e}$ oranı birimsizdir.” yanıtını vermiştir. Bir kesrin birim kesrini düşünerek öğretmen adayının birimli veya birimsiz kesre karar verdiği anlaşılmaktadır.

- *Payı 1 olan oranlar birimlidir.*

Bu görüşe sahip öğretmen adayları birim kesir ile birimli oranı karıştırmaktadır. $\frac{1}{5}$ oranını birimli, $\frac{3}{5}$ oranını ise birimsiz kabul etmektedir.

- *Bir modellemeye eş dilimlere ayırma varsa oran birimlidir. Ancak dilimler eş değilse oran birimsizdir.*

Beş eş dilime bölünmüş bir pastada yenilen iki dilimin tüm pastaya oranı $2/5$ 'dir. Eş olmayan beş dilime bölünmüş bir pastada yenilen iki dilimin tüm pastaya oranı da $2/5$ 'dir. Ancak ilki birimli iken diğeri birimsizdir.

- *Sayısal oranlar birimli, sözel ifadeler birimsizdir.*

Bu düşünceye göre $1/4$ oranı birimli iken; çeyreği, yarısı gibi ifadeler birimsiz orandır.

Yukarıda yer alan hatalı yanıt örneklerinin haricinde 2. sınıf öğretmen adayı Çise görüşme sırasında birimli oran ile ilgili farklı bir yaklaşımda bulunmuştur.

Ç: Aynı şeylerin oranı olduğunda birimsizdir. 10 metrenin 4 metreye oranı gibi. Farklı şeylerin oranı birimlidir.

A: Peki mesela kız sayısının erkek sayısına oranı nedir? Birimli midir, birimsiz mi?

Ç: Birimlidir.

A: Aynı değıller mi?

Ç: İkisi de insan sonuçta ama farklı özelliklere sahipler. Sonuçta biri kız biri erkek.

A: Birimi nedir o zaman?

Ç: Kız/erkek yazılabilir.

A: Birimsiz orana örnek verir misin?

Ç: İki kişinin kalem sayılarının oranı mesela birimsizdir.

Görüldüğü gibi Çise, oranlanan çoklukların cinsine göre birim oluşturmaktadır. Kızların erkeklere oranı, elma sayısının armut sayısına göre oranı gibi oranlar Çise'ye göre farklı türde oldukları için birimlidir.

Verilen hatalı yanıtlardan görüldüğü gibi temel bir kavram olmasına rağmen oranın çeşitleri konusunda öğretmen adaylarının çeşitli yanılgıları mevcuttur. "Birim" kelimesinin öğretmen adaylarınca farklı anlamlar çağrıştırdığı anlaşılmaktadır. Matematiksel bir bilgi olarak birimli ve birimsiz oran tanımlarının eksikliği büyük bir soruna neden olmayacak gibi düşünülse de ortaokul öğrencilerinin kazanması gereken bir kazanım olması açısından öğretmen adaylarındaki bu eksikliğin öğrenci için farklı sorunlara yol açabileceği düşünülebilir.

4.2.2.4. Doğru orantı sabiti ve ters orantı sabiti kavramlarına yönelik bulgular

Konu testinin 19. sorusunda üç çokluk ve birbirleri ile ilişkileri verilerek orantı sabitlerinin bulunması istenmişti. Kavram testinin dördüncü sorusunda ise orantı sabiti kavramının doğru orantı ve ters orantıyla ilişkilendirilerek açıklanması istenmiştir. Öğretmen adaylarından doğru orantıda çoklukların bölümlerinin, ters orantıda ise çarpımlarının sabit bir sayı olduğu ve bu sayıya orantı sabiti denildiğini açıklamaları beklenmiştir. Bazı öğretmen adayları sözel olarak bazıları ise örneklerle destekleyerek

açıklamalarda bulunmuştur. Hem doğru orantı hem de ters orantı için orantı sabiti kavramını açıklayabilen yanıtlar “tamamen doğru”; doğru orantı veya ters orantı kavramlarından sadece biri için açıklayabilen yanıtlar “kısmen doğru”; her ikisi için de yanlış açıklayan veya hiç açıklayamayan yanıtlar ise “tamamen yanlış” kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu dağılıma ilişkin veriler Tablo 79’da sunulmuştur.

Tablo 79

KVT 4. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Tamamen Doğru	Kısmen Doğru	Tamamen Yanlış
1. Sınıf	8 (%20)	10 (%25)	22 (%55)
2. Sınıf	12 (%30)	10 (%25)	18 (%45)
3. Sınıf	10 (%25)	15 (%37,5)	15 (%37,5)
4. Sınıf	11 (%27,5)	20 (%50)	9 (%22,5)
Toplam	41 (%25,625)	55 (%34,375)	64 (%40)

Tablo 79 incelendiğinde öğretmen adaylarının yarıya yakın bir kısmının (%40) her iki orantıdaki sabitleri de açıklayamadıkları görülmektedir. Sadece 41 (%26) öğretmen adayı orantı sabiti kavramı için doğru açıklamalarda bulunmuştur. En çok yanlış yanıt oranının 1. sınıf öğretmen adaylarında olduğu ve bu oranın sınıf düzeyinin artışıyla birlikte azaldığı görülmektedir. Bu tablonun yanı sıra doğru orantı ve ters orantı için yanıtlar ayrı ayrı ele alınarak da kategorileştirilmiştir. Böylece hangi orantı sabitinde öğretmen adaylarının zorluk yaşadığı ortaya çıkarılmak istenmiştir. Tablo 80’de bu dağılıma ilişkin sonuçlar sunulmuştur.

Tablo 80

Orantı sabitine yönelik yapılan açıklamaların dağılımı

	Doğru Orantıda Orantı Sabiti		Ters Orantıda Orantı Sabiti	
	Doğru Açıklama	Yanlış Açıklama	Doğru Açıklama	Yanlış Açıklama
1. Sınıf	18 (%45)	22 (%55)	8 (%20)	32 (%80)
2. Sınıf	21 (%52,5)	19 (%47,5)	13 (%32,5)	27 (%67,5)
3. Sınıf	25 (%67,5)	15 (%32,5)	10 (%25)	30 (%75)
4. Sınıf	30 (%75)	10 (%25)	12 (%30)	28 (%70)
Toplam	94 (%58,75)	66 (%41,25)	43 (%26,875)	117 (%73,125)

Tablo 80 incelendiğinde doğru orantıdaki orantı sabiti ile ilgili yapılan açıklamaların doğruluk yüzdesinin ters orantıdaki orantı sabitine göre daha yüksek olduğu görülmektedir. Doğru orantıda orantı sabitinin çoklukların bölünmesi ile bulunabileceğini belirten öğretmen adaylarının yaklaşık %59 ile yarıdan fazla olduğu anlaşılmaktadır. Ancak ters orantıda orantı sabitinin çoklukların çarpılarak bulunacağını belirten öğretmen adayları yaklaşık %27 ile azınlıkta kalmıştır. Doğru orantı için yapılan açıklamaların doğruluk yüzdesinin sınıf düzeylerine göre artış gösterdiği de dikkat çekmektedir.

Bu soruyla birlikte akla konu testinin 19. sorusu gelmektedir. O soruda üç tane sayı verilmiş ($a = 10$, $b = 15$, $c = 20$) ve ilk iki çokluğun birbiriyle doğru orantılı son iki çokluğun ise ters orantılı olduğu belirtilmişti. Öğretmen adaylarından her ikisinde de orantı sabitini bulmaları istenmişti. O soruyla karşılaştırıldığında bulgularda bazı farklılıklar göze çarpmıştır. Gerek doğru orantı gerek ters orantı sabitlerini doğru hesaplayan öğretmen adayları daha fazla iken orantı sabitleri ile ilgili doğru açıklama yapabilen öğretmen adaylarının azlığı dikkat çekmektedir.

Konu testinde yer alan soruda her iki sabiti de hesaplayabilen öğretmen adayları 60 kişi iken, kavram testinde doğru açıklama yapan öğretmen adaylarının sayısı 41'dir. Bu durum değişime örnek göstermesi açısından verilmiştir. Ayrı ayrı orantı türlerine bakınca da benzer sonuçlar görülmektedir. Görüşme yapılan öğretmen adaylarından Halit, konu testinde her iki orantı sabitini de doğru bulmuştur. Ancak kavram testinde tam tersine her ikisini de yanlış açıklamıştır. Doğru orantı sabitini $10/15=2/3$ olarak ilk soruda bulmasına karşın kavram testinde şu yazılı açıklamayı yaptığı görülmüştür: "Mesela 5 kişiye 10 kg un düşüyorsa, 2 kişiye kaç kg un düşüyordur diye düşünürsek $5/2 = 10/x$ olur. $x = 4$ kg bulunur. Orantı sabiti de $5/2$ 'dir.". Görüşme sırasında bu farklılığın nedeni öğretmen adayına sorulmuştur. Öğretmen adayı, "İlk testte sayıları vermişti. 10 kişiye 15 ekmek gibi bir durum düşündüm. Bölerek sabiti buldum. Ancak kavram testinde tam olarak açıklayamadım. Kendim problem yazmaya çalıştım. Sanırım yanlış şeyi bölerek açıkladım." demiştir. Bir başka görüşme yapılan öğretmen adayı Tuğçe (1. sınıf) ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir. Araştırmacı öncelikle öğretmen adayından doğru orantıya bir örnek vermesini istemiştir.

T: Mesela 3 yumurtaya 5 bardak un kullanılıyorsa, 6 yumurtaya 10 bardak un kullanılır.

A: Orantı sabiti kaçtır bu örnekte?

T: 2'dir veya $1/2$ de olabilir.

A: Peki 9 yumurtaya 15 bardak un da kullanılır. O zaman orantı sabiti kaçtır?

T: O zaman 3 olur ama sabit kalması lazım değil mi? (Düşünür) O zaman $3/5$ veya $5/3$ 'dür. Yan yana oran alınırsa sabit kalır. Aynı çoklukları alınca değişebiliyor.

Öğretmen adayı doğru orantı sabitini bulurken aynı çoklukların oranını almıştır. Ancak orantıyı bozmayacak başka bir örnek verildiğinde orantı sabitinin değiştiğini gören öğretmen adayı sabit kalması gerektiği düşüncesiyle fikrini değiştirmiştir. Diğer öğretmen adaylarının açıklamalarında da benzer yanlış düşünceleri görülmüştür. Ters orantıda ise alt alta (aynı çokluklar) çarpıldığı zaman sayılar eşit çıkmadığı için öğretmen adayları yan yana (farklı çokluklar) çarparak orantı sabitini hatasız bulabilmiştir.

4.2.2.5. Gerçek sayıların rasyonel ve irrasyonel sayı kümeleriyle olan ilişkisine yönelik bulgular

Kavram testinin beşinci sorusunda öğretmen adaylarına iki alt soru sorulmuştur. Bu sorularla birlikte öğretmen adaylarının gerçek sayıların rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşiminden oluştuğu bilgisine ne derece sahip oldukları incelenmiştir. Tablo 81’de her iki alt soruya verilen yanıtların dağılımı sunulmuştur.

Tablo 81

KVT 5. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Her rasyonel sayı gerçek sayı mıdır?		Her irrasyonel sayı gerçek sayı mıdır?	
	<i>Evet</i>	<i>Hayır</i>	<i>Evet</i>	<i>Hayır</i>
1.Sınıf	37 (%92,5)	3 (%7,5)	24 (%60)	16 (%40)
2.Sınıf	34 (%85)	6 (%15)	28 (%70)	12 (%30)
3.Sınıf	39 (%97,5)	1 (%2,5)	29 (%72,5)	11 (%27,5)
4.Sınıf	36 (%90)	4 (%10)	31 (%77,5)	9 (%22,5)
Toplam	146 (%91,25)	14 (%8,75)	112 (%70)	48 (%30)

Tablo 81 incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık %91’inin rasyonel sayıların gerçek sayı olduğu konusunda hemfikir olduğu söylenebilir. Ancak bu durum irrasyonel sayılar için aynı yüksek oranda gerçekleşmemiştir. Öğretmen adaylarının %70’i irrasyonel sayıların tamamının gerçek sayı olduğunu belirtmiştir. Sorulara “hayır” yanıtı veren öğretmen adaylarının açıklamaları ayrı ayrı analiz edilmiştir. Benzer yanıtlar bir araya getirilip öğretmen adayları için hangi tür sayıların rasyonel olduğu halde gerçek sayı olmadığı veya irrasyonel olduğu halde gerçek sayı olmadığı konusunda incelemeler yapılmıştır.

Rasyonel sayı ve gerçek sayı ilişkisine yönelik yanlış verilen 14 yanıttan elde edilen yanılgılar aşağıda sıralanmıştır:

- *a ve b irrasyonel sayılarının oranı (a/b) şeklinde yazılan sayılar gerçek sayı değildir.*

Birçok öğretmen adayı $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ gibi sayıları örnek göstermiş ve bu sayıların a/b şeklinde yazıldığı için rasyonel olduğunu ancak a ve b’nin irrasyonel olmasından dolayı da çelişkili olduğunu ve gerçek sayı olmadığını belirtmiştir.

- *Bazı rasyonel sayıların (devirli sayılar gibi) ondalık kısmı sonsuza gittiği için gerçek sayı değildir.*

Bazı öğretmen adayları gerçek sayıların ondalık kısmının sonlu olması gerektiği düşüncesindedir. Bu nedenle devirli sayıları rasyonel olduğu halde gerçek olmayan sayı olarak değerlendirmişlerdir.

- *Gerçek sayılar irrasyonel sayılardır. Bu nedenle rasyonel olamazlar.*

Gerçek sayıları irrasyonel sayılarla aynı kabul eden öğretmen adayları da olmuştur. Bu nedenle hiçbir rasyonel sayının gerçek sayı olamayacağını savunmuşlardır.

- *π sayısı rasyonel olarak yazılabildiği halde gerçek sayı değildir.*

Bazı öğretmen adayları π 'nin yaklaşık değerinden yola çıkarak rasyonel de olabileceğini belirtmiş ancak aynı zamanda irrasyonel de olduğu için gerçek bir sayı olmadığını belirtmiştir.

İrrasyonel sayı ve gerçek sayı ilişkisine yönelik yanlış verilen 48 yanıtta elde edilen yanlışlar aşağıda sıralanmıştır:

- *Karekökün içi negatif olan irrasyonel sayılar gerçek sayı değildir.*

Bu şekilde yanıt veren çok sayıda öğretmen aday olmuştur. Öğretmen adayları karekök temsilinden yola çıkarak tüm kareköklü sayıları irrasyonel olarak kabul etmiş ancak içleri negatif olanların gerçek sayı olmadığını belirtmiştir.

- *i içeren irrasyonel sayılar gerçek sayı değildir.*

Bazı öğretmen adayları karmaşık sayıların da irrasyonel olduğunu ancak bu sayıların gerçek sayı olmadığını belirtmiştir.

- *π ve e sayıları irrasyonel olmasına rağmen gerçek sayı değildir.*

Çok sayıda öğretmen aday bu özel sayıların gerçek sayı olmadığını belirtmiştir. Hatta bir öğretmen aday bu sayıların bilim insanlarının ihtiyaçları doğrultusunda sonradan üretildiğini aslında olmadığını ifade etmiştir.

- *İrrasyonel sayılar tanımlanamaz ve net değildir. Bu nedenle gerçek sayı değildir.*

Bu kategoride ele alınan birçok yanıt olmuştur. Bazı öğretmen adayları irrasyonel sayıların net olmadığını sonsuza kadar karışık gittiğini bu nedenle gerçek olmadığını belirtmiştir. Bazıları ise irrasyonel sayıların belirli bir kuralla tanımlanamadığını bu nedenle gerçek olmadığını belirtmiştir.

- *İkisi ayrı kümelerdir. Bu nedenle gerçek sayıların ve irrasyonel sayıların ortak elemanı yoktur.*

Bazı öğretmen adayları irrasyonel sayıların gerçek olmayan sayı anlamına geldiğini belirtmiştir. Bazıları ise gerçek sayıların rasyonel sayılar olduğunu a/b şeklinde yazılabildiğini belirtmiştir. İki görüşe göre de gerçek sayılar ve irrasyonel sayılar ortak elemanı olmayan ayrık kümelerdir.

Öğretmen adaylarının yanlışlarına bakıldığında her iki sayı kümesinin de gerçek sayılarla ilişkisine yönelik yapılan hataların aslında bu kümelerin anlaşılmamışından kaynaklandığı söylenebilir. Öğretmen adaylarının kavram testinin ilk aşamasındaki rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayı tanımlamalarındaki hatalarının bu soruya da etki ettiği görülmektedir.

4.2.2.6. İrrasyonel sayılarda toplama ve çarpma işlemlerine ilişkin bulgular

Kavram testinin altıncı ve yedinci sorusu irrasyonel sayılarla ilgilidir. Öğretmen adaylarına, “İki pozitif irrasyonel sayının toplamı her zaman irrasyonel midir?” ve “Farklı iki irrasyonel sayının çarpımı her zaman irrasyonel midir?” soruları sorulmuştur. İlkinde “pozitif” ifadesiyle öğretmen adaylarının sayıları negatif ve pozitif olarak ele alıp toplamalarını sıfır yapmaları engellenmek istenmiştir. İkincisinde ise “farklı” ifadesi ile köklü sayılarda aynı sayıların çarpımını düşünüp rasyonel hale getirmeleri engellenmek istenmiştir. Her iki sorunun yanıtını da “Hayır, rasyonel de olabilir.” şeklinde olmalıdır. Öğretmen adaylarından örnek vererek açıklamaları beklenmiştir.

İlk soruya ilişkin öğretmen adaylarının açıklamaları, “Hayır, rasyonel de olabilir.”, “Evet, her zaman irrasyoneldir.” ve “yanıt vermeyenler” olmak üzere üç ana kategoriye ayrılmıştır. Ancak “Hayır, rasyonel de olabilir.” yanıtını vermesine rağmen açıklamalarda farklılıklar olduğu için kategori açıklamanın doğruluğuna göre yine üç alt kategoriye ayrılmıştır. Bu kategorilere ait dağılımlar Tablo 82’de verilmiş olup, her bir kategoriye ait yanıtlar hemen akabinde listelenmiştir.

Tablo 82

“İki pozitif irrasyonel sayının toplamı her zaman irrasyonel midir?” sorusuna ilişkin yanıtların dağılımı

Sınıf	“Hayır, rasyonel de olabilir.” diyenler				“Her zaman irrasyoneldir.” diyenler	Yanıt yok
	Doğru açıklama	Açıklama eksik	Açıklama yok	Yanlış açıklama		
1. Sınıf	2 (%5)	2 (%5)	6 (%15)	3 (%7,5)	24 (%60)	3 (%7,5)
2. Sınıf	1 (%2,5)	0 (%0)	0 (%0)	7 (%17,5)	31 (%77,5)	1 (%2,5)
3. Sınıf	3 (%7,5)	0 (%0)	1 (%2,5)	8 (%20)	26 (%65)	2 (%5)
4. Sınıf	3 (%7,5)	1 (%2,5)	1 (%2,5)	8 (%20)	24 (%60)	3 (%7,5)
Toplam	9 (%5,63)	3 (%1,88)	8 (%5)	26 (%16,25)	105 (%65,63)	9 (%5,63)

Tablo 82 incelendiğinde, öğretmen adaylarının yaklaşık %66’lık bir çoğunluğunun toplamaların her zaman irrasyonel olacağını belirttikleri görülmektedir. Öğretmen adaylarının bu kategoride yer alan en sık yapılan veya en sıradışı sayılabilecek açıklamalarından bazıları aşağıda listelenmiştir.

- “ $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ gibi toplandığında yine irrasyonel olur.”
- “Toplama işlemine göre tersi ile toplarsak sonuç sıfır olur. Yani rasyonel olur. Ama soruda ikisinin de pozitif olması istendiği için her zaman irrasyonel olur.”
- “ $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan iki sayının toplamı yine $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamaz.”

- “İki pozitif karmaşık sayıyı toplayınca sanal kısmı yok edemeyiz. Mesela $2i+3i=5i$ olur.”
- “ $\sqrt{1}+\sqrt{1}=2\sqrt{1}=2$ işleminde olduğu gibi her rasyonel hem irrasyonel olan sayıları dahil etmezsek sadece irrasyonel olan sayıların toplamı yine irrasyoneldir.”
- “ $a,bcd\dots+x,yzt\dots$ işleminin sonucu yine sonsuza gider. O yüzden irrasyoneldir.”
- “ $1,24534\dots+2,34576\dots$ gibi iki düzensiz sayı toplanınca sonuç yine düzensiz olur.”
- “ $6,\bar{3}+6,\bar{2}=12,\bar{5}$ olur. Yine devirli çıkacağı için irrasyoneldir.”
- “İrrasyonel sayılardaki kapalılık özelliği gereği yine irrasyoneldir.”
- “Toplama işleminin kapalılık özelliği gereği iki irrasyonelin toplamı da irrasyoneldir.”
- “Toplama işlemi sayının yapısını değiştiremez. Bu nedenle irrasyonel olarak kalır.”

Yukarıdaki yanıtlardan görüldüğü gibi bazı öğretmen adayları irrasyonel sayıları karmaşık sayı, devirli sayı, ondalık kısmı sonsuza giden sayı, kareköklü sayı gibi gerçekte karşılamayan anlamları ile ilgili düşündükleri için yanlış yorumlarda bulunmuşlardır. Bazı öğretmen adayları ise kapalılık özelliğini yanlış yorumlamışlardır. İrrasyonel sayıların veya toplama işleminin kapalılık özelliğine sahip olduğunu belirtmişlerdir. Bu öğretmen adaylarından biri görüşme yapılan 4. sınıf öğretmen adaylarından Şeyma olmuştur. Görüşme yapılan öğretmen adaylarına soru ilk aşamada “İki irrasyonel sayının toplamı her zaman irrasyonel midir?” şeklinde sorulmuş ve pozitiflik şartı aranmamıştır. Şeyma ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir:

Ş: Evet yine irrasyoneldir. Çünkü küme ise kapalı olmak zorundadır.

A: Kapalılık nedir?

Ş: O kümeden iki eleman alıp işleme sokunca yine o kümede olur sonuç.

A: Herhangi bir işlem mi?

Ş: Evet. Ama tabi belirlemek lazım. İrrasyonel sayıları toplayınca yine irrasyonel olur mesela.

A: Çıkarma işlemine göre kapalı mıdır irrasyonel sayılar?

Ş: Hmm. Hayır, ikisini aynı alırsak sıfır çıkar. Rasyonel olur.

A: Toplayınca peki? Sayıların birini negatif diğerini pozitif alamaz mıyız?

Ş: Aa evet. O zaman kapalı olmaz.

Görüldüğü gibi Şeyma, önce kapalılık özelliğini işlemden bağımsız ele almıştır. Araştırmacının çıkarma işlemini sormasıyla o işleme göre irrasyonel sayıların kapalı olmadığını anlamıştır. Sonrasında toplama işleminde de negatif ve pozitif iki sayı alınca

rasyonel sayı bulunabileceğini ve bu nedenle kapalılığın o işlemde de geçerli olmadığını düşünmüştür.

İki irrasyonel sayının birinin negatif birinin pozitif olduğunda rasyonel olabileceğini ancak ikisi de pozitif olursa toplamalarının rasyonel olamayacağını belirten öğretmen adayları da olmuştur. Bu öğretmen adaylarından Tuğçe (1.sınıf) ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir:

T: Bence her zaman irrasyonel olur. π sayısı irrasyoneldi. Altın oran vardı. O da irrasyoneldi. Bence bunların toplamından söz edilemez. Yine sonsuza gider. İrrasyoneldir.

A: Peki irrasyonel sayılar negatif olabilir mi?

T: Evet olabilir.

A: Biri negatif biri pozitif olsa toplamaları rasyonel olabilir mi?

T: (Bir süre düşünür) Bilmiyorum.

A: $-\pi$ sayısı ve $+\pi$ sayıları irrasyonel midir? Topladığın zaman sıfır etmez mi?

T: Aaa evet. Olabilir o zaman.

A: Peki iki pozitif irrasyonel sayının toplamı rasyonel olabilir mi?

T: O olmaz işte. Her zaman irrasyoneldir.

A: Sıfır olabildiği gibi iki irrasyonel sayının toplamı 2 veya 3 ya da 10 falan olamaz mı?

T: Düşünüyorum yok gibi. π var, köklü sayılar var. Olmaz onlardan da.

Öğretmen adayı pozitiflik şartı konmamış olmasına rağmen iki sayının toplamının rasyonel olamayacağını düşünmüştür. Araştırmacının doğrudan örnek vermesi ile rasyonel de olabileceğini anlayabilmiştir. Ancak ikisinin pozitif olma şartı eklendiğinde yine toplamalarının rasyonel olamayacağını düşünmüştür. 3. sınıf öğretmen adaylarından Simre ile yapılan görüşmede de benzer durum ortaya çıkmıştır. Simre ilk soruya, “İki irrasyonel sayının toplamı bir istisna yoksa her zaman irrasyoneldir. Sonuçta ikisi de düzensiz. Toplayınca da düzensiz olur.” yanıtını vermiştir. Ondalık kısmın düzensizliğinden yola çıkarak bu tür bir yanıt vermiş ancak istisna olabileceğini belirtmiştir. Araştırmacının daha sonra negatif irrasyonel sayıları hatırlatması ile Simre, “Biri negatif diğeri pozitif olursa sonuç sıfır çıkar. Rasyonel olur.” yanıtını vermiştir. Araştırmacı iki sayının da pozitif seçilme şartını koyduğunda bir süre düşündükten sonra, “Rasyonel olamaz muhtemelen. Varsa istisnalar vardır.” şeklinde açıklama yapmıştır.

Tablo 82’de öğretmen adaylarının yaklaşık %29’unun iki irrasyonel sayının toplamının rasyonel de olabileceğini belirttikleri görülmektedir. Ancak bu öğretmen adaylarından 26 tanesi (%16,25) yanlış açıklamalarda bulunmuştur. Bu kategoride ele alınan yanıtlardan bazıları aşağıda listelenmiştir:

- “ $\sqrt{1} + \sqrt{36} = 1 + 6 = 7$ gibi tam kare olan irrasyonel sayılar dışarı çıkınca rasyonel olur.”
- “ $0,286 + 0,214 = 0,5$ olur. Toplananların ondalık kısmı düzensiz olduğu halde sonuç rasyoneldir.”
- “ $0,\bar{3} + 0,\bar{6} = 1$ olduğu gibi ondalık kısım birbirini 9’a tamamlarsa devirden kurtulur ve rasyonel olur.”
- “ $\frac{22}{7} + \frac{6}{7} = \frac{28}{7} = 4$ olur. Paylar toplanınca paydanın katlarından biri çıkabilir.”
- “ $i^4 + i^4 = 1 + 1 = 2$ şeklinde i ’nin üsleri çift alınırsa toplanınca rasyonel sayı olur.”
- “ $-i + i = 0$ işleminde olduğu gibi biri negatif diğeri pozitif alınırsa toplamı rasyonel olabilir.”
- “İki irrasyonel sayı arasında rasyonel sayılar da bulunur. Bu yüzden iki irrasyoneli toplarsak bir rasyonel sayıya da denk gelebilir.”
- “ $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ örneğinde olduğu gibi kök içine alınca rasyonel olabilirler.”
- “ $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ gibi biri negatif biri pozitif olursa sonuç rasyonel olur.”
- “ $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ gibi iki sayıyı toplayamıyorum. Ancak toplandığı zaman rasyonel olabilir.”

Görüldüğü gibi bazı öğretmen adayları ise iki sayının pozitif olması gerektiğini yok sayarak örnekler vermiştir. Öğretmen adaylarının büyük bir kısmı ise irrasyonel sayılar yerine rasyonel sayıları (kesir, devirli veya devirsiz ondalık sayılar) ve karmaşık sayıları toplamışlar ve bu nedenle yanlış açıklamalarda bulunmuşlardır. İçleri tam kare olan köklü ifadeler, ondalık kısmı sonlu fakat düzensiz yazılan rasyonel sayılar, devirli sayılar gibi bazı rasyonel ifadelerin irrasyonel sayı olarak kabul edilmesinden kaynaklı açıklamalar olmuştur. Görüşme yapılan öğretmen adayı Orhan (3. sınıf) devirli sayıların irrasyonel sayı olduğunu düşünerek sorulara yanıt vermiştir. Araştırmacı ile aralarında geçen diyalog şu şekildedir:

O: İki irrasyonel sayının toplamı her zaman irrasyonel olmak zorunda değildir. $2,333\dots$ ve $5,777\dots$ toplayınca 8 olur. O da rasyoneldir.

A: Seçtiğin iki sayı irrasyonel mi?

O: Evet irrasyonel ama sonucu rasyonel çıktı.

A: İkisini toplayınca tam 8 mi eder peki?

O: Evet 7, 3 daha 10 ediyor. Ondalık kısmı kalmıyor.

A: Peki madem. Köklü olarak düşününce de iki pozitif irrasyonel sayının toplamı her zaman irrasyonel midir?

O: (Düşünür) O zaman olmaz. Biri negatif biri pozitif alınca olur. İkisi pozitifse olmaz.

Görüldüğü gibi Orhan, kavramı yanlış bildiği için yorumları da yanlış yapmıştır. Devirli sayıları irrasyonel olarak kabul ettiği için iki devirli sayı örneği vermiştir. Aslında birbirini tamamlayan basamakları düşünebilmesi iki irrasyonel sayıyı rasyonel yapabilmesi için olumlu bir durumdur. Ancak ele aldığı sayılar irrasyonel olmayınca bu düşünce tarzı işe yaramamıştır. Orhan'ın bir başka hatası ise devirli sayıların toplamının tam olarak 8'i verdiğini düşünmesi olmuştur. Aslında toplamları 8,111... devirli sayısını vermektedir. Araştırmacı görüşmede yer alan son sorusuyla Orhan'ı kareköklü sayılara yönlendirmiştir. İki pozitif kareköklü sayıyı düşündüğünde ise Orhan toplamlarının rasyonel olamayacağını belirtmiştir.

Orhan'ın devirli sayıları irrasyonel kabul ettiği gibi görüşme yapılan 2. sınıf öğretmen adayı Halit, karmaşık sayıları irrasyonel sayı olarak düşünmüştür ve bu doğrultuda açıklamalarda bulunmuştur. Araştırmacı ile aralarında geçen diyalog aşağıda verilmektedir:

H: İki irrasyonel sayının toplamı her zaman irrasyonel değildir. Mesela i ve $-i$ toplamı sıfırdır.

A: Pozitif ve negatif iki sayı aldın yani. i irrasyonel midir?

H: Evet irrasyoneldir.

A: Peki iki pozitif irrasyonel sayının toplamı her zaman irrasyonel midir?

H: İki pozitifte olmuyor. (Düşünür)

A: toplamları 10 olamaz mı mesela iki irrasyonel sayının?

H: Olmaz hocam nasıl olsun? Aaa olur olur. Mesela bir tanesi i diğeri $10-i$. Toplayınca 10 yapar.

A: i sıfırdan büyük mü?

H: (Düşünür) i 'den emin değilim de i yerine e diyebilirim.

A: Yazılı kağıdında $i^4 + i^4 = 2$ demişsin.

H: Yine doğru demişim. Ama i^4 karmaşık değil ki. O yüzden olmaz o.

Görüldüğü gibi Halit, i sayısını irrasyonel olarak kabul etmiştir. Ancak i^4 sayısının karmaşık olmadığını belirtmesi i 'nin karmaşık sayı olduğunu bildiğini göstermektedir. Bu durumda karmaşık sayıların irrasyonel olduğunu düşünmektedir. i 'nin sıfır ile karşılaştırmasını yapmadığı için Halit, i yerine e sayısının da kullanılabileceğini belirtmiştir. Böylece vermiş olduğu yanıtlar doğru hale gelmiştir.

Tablo 82 tekrar incelendiğinde sadece dokuz öğretmen adayının doğru örnekler vererek soruyu yanıtladığı görülmektedir. Bu yanıtlarda farklı türde (logaritmik, ondalık,

kareköklü) irrasyonel sayı örnekleri kullanılmıştır. Yanıtlardan bir kısmı aşağıda verilmiştir:

- “ $\log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$ ”
- “ $3,1415... + 0,6362... = 3,777...$ ”
- “ $1,5234... + 2,4765... = 4$ ”
- $(3 - \sqrt{2}) + (4 + \sqrt{2}) = 7$
- $2,4361... + 3,6749... = 6$ (Bazı öğretmen adayları ondalık kısmındaki her bir rakamı 10’a tamamlayan yeni bir sayı ile toplamıştır. Ancak sonucu yanlış yazmışlardır. Örnekteki işlemin sonucu aslında $6,1$ ’dir. Sonuç yanlış olmasına karşın öğretmen adayı toplamaları rasyonel olan iki irrasyonel sayıyı örnek verdikleri için yanıtları bu kategoride kabul edilmiştir.)

Testin yedinci sorusu için de aynı kategoriler kullanılmıştır. İki farklı irrasyonel sayının çarpımı rasyonel de olabilir. Öğretmen adaylarının yanıtları, “Her zaman irrasyoneldir.” diyenler; “Hayır, rasyonel de olabilir.” diyenler ve “yanıt vermeyenler” olarak üç ana kategoriye ayrılmıştır. Ancak, rasyonel de olabileceğini belirten öğretmen adaylarının yanıtları yaptıkları açıklamanın doğruluğuna göre üç alt kategoriye ayrılmıştır. Öğretmen adaylarının yanıtlarının dağılımı Tablo 83’te sunulmaktadır.

Tablo 83

“Farklı iki irrasyonel sayının çarpımı her zaman irrasyonel midir?” sorusuna ilişkin yanıtların dağılımı

Sınıf	“Hayır, rasyonel de olabilir.” diyenler				“Her zaman irrasyoneldir” diyenler	Yanıt yok
	Doğru açıklama	Açıklama eksik	Açıklama yok	Yanlış açıklama		
1. Sınıf	15 (%37,5)	0 (%0)	3 (%7,5)	5 (%12,5)	10 (%25)	7 (%17,5)
2. Sınıf	15 (%37,5)	1 (%2,5)	0 (%0)	15 (%37,5)	8 (%20)	1 (%2,5)
3. Sınıf	17 (%42,5)	0 (%0)	1 (%2,5)	9 (%22,5)	12 (%30)	1 (%2,5)
4. Sınıf	23 (%57,5)	0 (%0)	0 (%0)	10 (%25)	6 (%15)	1 (%2,5)
Toplam	70 (%43,75)	1 (%0,63)	4 (%2,5)	39 (%24,38)	36 (%22,5)	10 (%6,25)

Toplama işlemi ile ilgili olan altıncı soruya göre bu sorudaki “Her zaman irrasyoneldir.” diyen öğretmen adaylarının oranının daha düşük olduğu göze çarpmaktadır. Öğretmen adaylarının %22,5’u farklı iki irrasyonel sayının çarpımının yine bir irrasyonel olacağını belirtmiştir. Bu kategoride yer alan bazı yanıtlar aşağıda listelenmiştir:

- “ $\pi^2 \cdot \pi^3 = \pi^5$ olduğu gibi sonuç yine irrasyonel çıkar.”
- “ $\pi.e$ gibi iki irrasyonel sayıyı çarpsan da rasyonel bir sayı elde edilemez.”
- “ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ işleminde olduğu gibi sonuç irrasyonel olur.”

- "0,5745 ... x 2,8743 ... gibi ondalık kısmı karışık giden sayıların çarpımı da aynı şekilde olur."
- " $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{9}$ örneğinde olduğu gibi sonuç her zaman irrasyoneldir."

Son örnekteki durum hariç öğretmen adayları genelde iki irrasyonel sayı örneği verebilmişlerdir. Ancak çarpımlarının da her zaman irrasyonel olacağını ifade etmişlerdir. Bazıları π ve e gibi özel irrasyonel sayıların çarpımının irrasyonelliğini düşünmüş, bazıları iki köklü sayının çarpımını ele almış, bazıları ise ondalık örnekler vererek tezlerini aktarmıştır. Son örnekte ise öğretmen adayının seçmiş olduğu sayılar irrasyonel değildir. Bu nedenle yanıtı da doğru değildir.

Tablo 83 incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık %71'inin iki irrasyonel sayının çarpımının rasyonel de olabileceğini belirttikleri görülmektedir. Ancak bu öğretmen adaylarının bir kısmı (%3) hiç açıklama yapmamış, bir kısmı (%24) yanlış gerekçeler sunmuştur. Yanlış gerekçelerden bazıları şu şekilde sıralanabilir:

- " $2i \cdot (-2i) = 4$ işleminde olduğu gibi iki irrasyonel çarpımın sonucu rasyonel olabilir."
- " $(3-4i) \cdot (3+4i) = 13$ şeklinde eşlenik sayılar alınır rasyonel olabilir."
- " $\sqrt{1} \cdot \sqrt{4} = 1 \cdot 2 = 2$ örneğinde olduğu gibi kökten çıkararak çarpılınca sonuç rasyonel olur."
- " $\frac{1}{0,9} \times 0,9 = 1$. İrrasyonel kısımlar birbirini götürerek şekilde sayılar seçilirse sonuç rasyonel olur."
- " $\frac{22}{7} \times \frac{7}{11} = 2$ örneğindeki gibi sadeleştirme yapılacak şekilde sayılar seçilirse sonuç rasyonel olur."
- " $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3} = -3$ "
- " $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ " vb. örneklerde öğretmen adayları farklı iki sayı seçilmesi gerektiğine uymamıştır.

Görüşme yapılan 2. sınıf öğretmen adayı Halit bir önceki soruda da i sayısını irrasyonel sayı olarak ele almıştı. Bu soruda da benzer bir yaklaşımla cevap vermiştir. " i ve i^3 çarpınca rasyonel olur." örneğini verdikten sonra araştırmacı hep i ile örnek verildiğini belirtmiş ve farklı irrasyonel sayılarda durumun nasıl olacağını sormuştur. Bunun üzerine Halit, " e desem olmaz. Yine irrasyonel olur. Ama köklü sayılarda olabilir. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ mesela." şeklinde açıklamada bulunmuştur. Bir önceki soruda devirli sayıları irrasyonel olarak kabul eden 3. sınıf öğretmen adayı Orhan, "Ondalık olarak yazıp çarparsak tam sayı olmaz. Ama $\sqrt{3}$ ve $\sqrt{3}$ çarpılınca 3 olur. Rasyoneldir." yanıtını vermiştir. Araştırmacı

soruda iki farklı sayı seçilmesi şartını hatırlatınca, Orhan, “İkisini farklı alınca rasyonel olmaz. İrrasyonel olur her zaman.” diye açıklamada bulunmuştur.

Tablo 83 yeniden incelendiğinde öğretmen adaylarının yarıya yakının ($\approx\%44$) doğru örneklerle açıklama yaptıkları görülmektedir. 3. ve 4. sınıf öğretmen adaylarında bu oranın daha yüksek olduğu da dikkat çekmektedir. Doğru açıklama yapan öğretmen adaylarının yanıtlarının belli başlı beş tipte olduğu söylenebilir. Bu tiplere örnekler şu şekilde verilebilir:

- " $\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = -2$ " şeklinde bir kareköklü sayının negatifi ile çarpılarak rasyonel hale getirilen birçok yanıt mevcuttur.
- " $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ " şeklinde birbirini tam kare yapabilecek kareköklü sayı örnekleri verilen yanıtlar mevcuttur.
- $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 1$ şeklinde kök içi sadeleşecek örnekler içeren yanıtlar mevcuttur.
- $\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 2$ şeklinde kareköklü bir sayıyı paydaya da gelerek birbirini götürmesini sağlayan yanıtlar mevcuttur.
- Benzer şekilde e. $\frac{1}{e}$ gibi özel irrasyonel sayıların birbirlerini sadeleştirerek yok etmesini sağlayan örnekler mevcuttur.

Aslında doğru yanıtlar genel olarak birbirine yakındır. Öğretmen adayları sadeleştirerek veya tam kare yaparak irrasyonel sayıdan kurtulmayı sağlayan örnekler vermiştir. Toplama işleminde olduğu gibi logaritmik örnek veren öğretmen adayları olmamıştır. Ancak çarpma işleminde öğretmen adaylarının toplama işlemi ile ilgili soruya göre daha rahat bir şekilde sonucu rasyonel sayı olan örnekler bulabildikleri anlaşılmıştır. Öğretmen adayları tarafından irrasyonel sayıların bazı kısıtlı temsilleriyle ele alınmasının toplama ve çarpma gibi işlemlerde de dar bir bakış açısına neden olduğu söylenebilir.

4.2.2.7. Rasyonel ve irrasyonel sayıların yoğunluğuna ilişkin bulgular

Testin sekizinci sorusunda öğretmen adaylarına rasyonel ve irrasyonel sayıların yoğunluğuna ilişkin “Her iki irrasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı var mıdır?” sorusu sorulmuştur. Bu soruyla birlikte öğretmen adaylarının iki sayı kümesi arasındaki ilişki hakkındaki düşüncelerinin daha iyi anlaşılması amaçlanmıştır. Öğretmen adaylarından her iki irrasyonel sayı arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı olduğunu ve aynı zamanda her iki rasyonel sayı arasında da sonsuz irrasyonel sayı olduğunu bilmesi beklenmektedir. Ancak bu soruda sadece ilki sorulmuştur. Yanıtlarını örneklerle de açıklamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının açıklamalarına göre Tablo 84’te yer alan kategorilere dağılımlar yapılmıştır.

Tablo 84

“Her iki irrasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı var mıdır?” sorusuna ilişkin yanıtların dağılımı

	Her iki irrasyonel sayı arasında rasyonel sayı vardır.				Kesin bir şey söylenemez	Her iki irrasyonel sayı arasında rasyonel sayı yoktur	Yanıt yok
	Tam açıklama	Açıklama yok	Tek örnekle açıklama (Yetersiz)	Yanlış gerekçe veya açıklama			
1.Sınıf	3 (%7,5)	2 (%5)	16 (%40)	5 (%12,5)	1 (%2,5)	9 (%22,5)	4 (%10)
2.Sınıf	4 (%10)	1 (%2,5)	15(%37,5)	6 (%15)	1 (%2,5)	10 (%25)	3 (%7,5)
3.Sınıf	5 (%12,5)	4 (%10)	20 (%50)	1 (%2,5)	1 (%2,5)	5 (%12,5)	4 (%10)
4.Sınıf	10 (%25)	2 (%5)	14 (%35)	2 (%5)	1 (%2,5)	7 (%17,5)	4 (%10)
Toplam	22 (%13,75)	9 (%5,625)	65(%40,63)	14 (%8,75)	4 (%2,5)	31(%19,38)	15(%9,38)

Tablo 84 incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık %19’unun her iki irrasyonel sayı arasında rasyonel sayı bulunamayacağını belirttikleri görülmektedir. Bu yanıtı veren 31 öğretmen adayının yanıtları incelenmiş ve bunlardan 20 tanesinin tek bir örnekle iddialarını savundukları görülmüştür. Genelde $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$ gibi iki irrasyonel sayı gösterip aralarında rasyonel sayının olmadığını belirtmişlerdir. Diğer öğretmen adayları ise sadece “yoktur” yanıtı verip açıklama yapmamıştır.

Tablo 84’te görüldüğü gibi öğretmen adaylarının yaklaşık %12’si soruya yanıt vermemiş veya her iki irrasyonel sayı arasında rasyonel sayının olabileceğinin kesin olarak bilinmeyeceğini ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının %69’luk çoğunluğu ise her iki irrasyonel sayı arasında rasyonel sayının bulunabileceğini belirtmiştir. Ancak bu öğretmen adaylarından çok az bir kısmı çeşitli örneklerle ikna edici bir açıklama yapabilmıştır. Tam açıklama yapabilen 22 öğretmen adayından bir kısmı her iki sayı arasında sonsuz sayı olduğunu belirtmiştir. Bir kısmı ondalık gösterimden yola çıkarak açıklamada bulunmuştur. 2,14574... ve 2,14583... gibi iki irrasyonel sayı vererek aralarında 2,1458 rasyonel sayısının bulunabileceğini ve bunu herhangi iki irrasyonel sayı için genelleştirebileceklerini ifade etmişlerdir. Tam açıklama yapabilen öğretmen adaylarının sınıf seviyesi ile artış gösterdiği de dikkat çekmektedir. 4. sınıf öğretmen adaylarının %25’i soruyu doğru bir açıklama ile cevaplamışlardır.

Öğretmen adaylarının yaklaşık %41’i tek bir örnek vererek açıklama yapmıştır. “ $\sqrt{3}$ ve $\sqrt{5}$ arasında 2 rasyonel sayısı vardır.” veya “e ve π arasında 3 sayısı vardır.” şeklinde örneklerle açıklama yapmışlardır. Ancak bu örnekler irrasyonel sayıların tamamını kapsamamaktadır veya tamamını kapsamaya yönelik bir yol göstermemektedir.

4.2.2.8. π sayısı ve 0,12345678910... sayısının bulundukları sayı kümelerine yönelik bulgular

Öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilerle ilgili bilgilerinin sorgulandığı kavram testinin ikinci aşamasında yer alan 8. ve 9. sorular iki özel irrasyonel sayı ile ilgili olmuştur. Bu sayılardan biri π sayısı, diğeri ise 0,12345678910... şeklinde ondalık kısmı doğal sayıların art arda yazılmasıyla oluşan sayıdır. Her iki sayı da irrasyonel ve gerçek sayıdır. Öğretmen adaylarına bu iki sayı ayrı ayrı sorulmuş ve sayı kümeleri ile ilgili kavramsal bilgileri anlaşılmasına çalışmıştır.

π sayısının sorulduğu sekizinci soruda öğretmen adaylarına, “Gerçek sayıdır.”, “Rasyonel sayıdır.”, “İrrasyonel sayıdır.”, “3,14’e eşittir.” ve “22/7’ye eşittir.” seçenekleri verilmiş ve bunlardan hangilerinin doğru olduğu sorulmuştur. Ayrıca işaretlemeleri ile ilgili açıklama istenmiştir. Tablo 85’te yapılan işaretlemelerin sayıları ve tüm gruba olan oranları verilmektedir.

Tablo 85

π sayısına ilişkin yapılan işaretlemelerin sayısı

	1.Sınıf	2. Sınıf	3.Sınıf	4.Sınıf	TOPLAM
Gerçek sayıdır.	30 (%75)	25 (%62,5)	25 (%62,5)	25 (%62,5)	105 (%65,625)
İrrasyonel sayıdır.	30 (%75)	30 (%75)	39 (%97,5)	34 (%85)	133 (%83,125)
Rasyonel sayıdır.	8 (%20)	7 (%17,5)	1 (%2,5)	5 (%12,5)	21 (%13,125)
3,14’e eşittir.	13 (%32,5)	13 (%32,5)	11 (%27,5)	10 (%25)	47 (%29,375)
22/7’ye eşittir.	20 (%50)	21 (%52,5)	16 (%40)	17 (%42,5)	74 (%46,25)

İşaretlenen sayı kümeleri incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık %83’ünün π sayısını irrasyonel olarak kabul ettiği görülmektedir. Bu oranın son iki sınıf düzeyinde daha da yüksek olduğu anlaşılmaktadır. Ancak π sayısını gerçek sayı olarak belirten öğretmen adaylarının oranının yaklaşık %66 olduğu da dikkat çekmektedir. Sınıf düzeylerine göre de artış görülmemektedir. %13’lük bir grup ise sayının rasyonel olduğunu belirtmiştir.

Sayının değeri ile ilgili işaretlemeler incelendiğinde ise öğretmen adaylarının %29’unun sayının 3,14’e eşit olduğunu; %46’sının ise sayının 22/7’ye eşit olduğunu belirttikleri görülmüştür. Özellikle öğretmen adaylarının nerdeyse yarısınca 22/7’nin π sayısı ile eşit görülmesi dikkate alınması gereken bir yanlışlık olarak düşünülebilir. Hem dahil olduğu sayı kümesi hem de sayının değerine ilişkin öğretmen adaylarının yanıtları bir arada alınarak da değerlendirilmiştir. Sonuçlar Tablo 86’da sunulmaktadır.

Tablo 86

π sayısının bulunduğu kümeye ve değerine ilişkin verilen yanıtların dağılımı

Bulunduğu Küme	Değeri 3,14'e veya 22/7'ye	1.Sınıf	2. Sınıf	3.Sınıf	4.Sınıf	TOPLAM
Gerçek sayı ve irrasyonel sayı	Eşit değildir.	6 (%15)	4 (%10)	10 (%25)	12 (%30)	32 (%20)
Gerçek sayı ve irrasyonel sayı	Eşittir.	14 (%35)	12 (%30)	14 (%35)	12 (%30)	52 (%32,5)
İrrasyonel sayı	Eşit değildir.	5 (%12,5)	10 (%25)	10 (%25)	5 (%12,5)	30 (%18,75)
İrrasyonel sayı	Eşittir.	5 (%12,5)	3 (%7,5)	5 (%12,5)	4 (%10)	17 (%10,625)
Gerçek sayı	Eşit değildir.	1 (%2,5)	1 (%2,5)	0 (%0)	1 (%2,5)	3 (%1,875)
Gerçek sayı	Eşittir.	1 (%2,5)	2 (%5)	0 (%0)	1 (%2,5)	4 (%2,5)
Gerçek sayı ve rasyonel sayı	Eşittir.	8 (%20)	5 (%12,5)	1 (%2,5)	3 (%7,5)	17 (%10,625)
Diğer		0 (%0)	3 (%7,5)	0 (%0)	2 (%5)	5 (%3,125)
Toplam		40 (%100)	40 (%100)	40 (%100)	40 (%100)	160 (%100)

Tablo 86 incelendiğinde sadece 32 (%20) öğretmen adayının π sayısı ile ilgili doğru işaretlemelerde bulunduğu anlaşılmaktadır. Geriye kalan %80'lik çoğunluk ya sayının değeri ya da bulunduğu sayı kümesi konusunda yanlış veya eksik yanıtta bulunmuştur. Tablo 86'daki toplam sütununda yer alan en büyük oranın %32,5 olduğu görülmektedir. Bu öğretmen adayları π sayısının gerçek ve irrasyonel bir sayı olduğunu belirtmiş olmalarına rağmen sayının değerinin 22/7 veya 3,14'e eşit olduğu düşüncesiyle yanılgıda bulunmuştur. Bu öğretmen adaylarından biri olan 3. sınıf öğretmen adayı Orhan π 'nin irrasyonel ve gerçek olduğunu belirttiği halde sayının 22/7'ye tam olarak eşit olduğunu ifade etmiştir. Bunun nedeni ise görüşme sırasında anlaşılmıştır. Araştırmacı ile aralarında olan diyalog aşağıda verilmiştir:

O: π irrasyoneldir ve gerçektir. 22/7'ye tam olarak eşittir.

A: 22/7 de irrasyonel midir?

O: Evet, tabi doğal olarak o da irrasyoneldir.

A: O zaman kesirler, daha doğrusu a/b şeklinde iki tam sayının oranı şeklinde yazılan sayılardan bazıları irrasyonel midir?

O: Evet irrasyonel olanlar da vardır.

A: Nasıl anlarız kesirlerin rasyonel mi irrasyonel mi olduklarını?

O: Bölmemiz gerekir. Devrediyorsa irrasyoneldir.

A: π sayısı da devirli midir o zaman?

O: Evet, devirli ve irrasyoneldir.

Görüldüğü gibi öğretmen adayının devirli sayıları irrasyonel sayı olarak ele alması π sayısı ile ilgili de yanlış bir kavrayışa neden olmuştur. Öğretmen adayının $22/7$ 'nin devirli olduğunu bildiği halde onu π sayısına eşit olarak görmesi π 'nin sonsuza kadar karışık bir şekilde gitmediği düşüncesinde olduğunu göstermektedir. Bir başka öğretmen adayı Şeyma (4. sınıf) da Orhan'a benzer şekilde π 'nin irrasyonel ve gerçek sayı olduğunu; değerinin ise $3,14$ 'e yaklaşık olarak eşit ancak $22/7$ 'ye tam olarak eşit olduğunu belirtmiştir. $22/7$ 'ye eşitliği konusunda, "Böyle bir sayı ortaya attıklarına göre aynı olması gerekiyor herhalde. Yoksa ne alaka. Sırf ilk üç basamağı $3,14$ tutuyor diye bunu çıkaracak değiller herhalde." yorumunda bulunmuştur. Araştırmacının, " $22/7$ 'de irrasyonel mi o zaman?" sorusu üzerine çelişkiye düşmüştür. "Aa olmaz rasyonel o. Ben denemedim sonuçta 22 'yi 7 'ye bölmedim. Demek ki eşit bir şey çıkmıyor. Hesap makinesi ile denemek lazım. π sayısı ile karşılaştırmak lazım ben ezberlemedim π 'yi de hiç. O yüzden şimdi bölsem de tam olarak π ile aynı mı anlayamam. Ama $22/7$ rasyonel. Eşit çıkmaz." açıklamasında bulunmuştur.

π sayısının irrasyonel olduğunu belirtip değeri ile ilgili ilk başta çekincede davranan öğretmen adaylarından biri Burçe olmuştur. 1. sınıf öğretmen adayı Burçe ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir:

B: İrrasyonel bir sayıdır. Değeri için önce $22/7$ 'nin $3,14$ 'e eşit olup olmadığına önce bakayım. (*22'yi 7'e böler. 3 hane ilerler*) Eşit değil $22/7$ 'de devamı da var. $22/7$, π sayısına tam eşit. $3,14$ ise yaklaşık olarak eşit.

A: Peki $22/7$ 'de irrasyonel midir?

B: Hayır olmaması lazım. Ama karıştı iyice bilmiyorum.

A: 22 'yi 7 'ye bölünce devirli mi çıkar? Sonlu mudur? Yoksa karışık mı gider?

B: Bölüp bakmam lazım. (*2 hane daha ilerler*) Karışık gidiyor. Devirli çıkmıyor.

A: Belli bir yerden sonra devredebilir mi peki?

B: 1 dk. (çözmeye devam eder.) Devretmeyecek gibi duruyor. (Bir süre sonra) Aa başa döndü. Devrediyor.

A: π sayısı devirli midir o zaman ve devirli sayılar irrasyonel midir?

B: Evet devirlidir. Devirli sayılar irrasyoneldir.

Burçe'nin π sayısının kendisi ile ilgili sorunlarının yanı sıra rasyonel ve irrasyonel sayılar, devirli sayılar gibi konularda da yanlışlarının olduğu anlaşılmıştır. Öncelikle $22/7$ 'nin $3,14$ 'e eşit olup olmadığını araştırması paydası 7 olan ve payı 7'nin katı olmayan bir sayının kesinlikle devirli olacağı bilgisine sahip olmadığı anlaşılmaktadır. $22/7$ 'nin irrasyonel olup olmadığı sorulduğunda kesirli gösteriminden dolayı öğretmen adayı kararsızlık yaşamıştır ve irrasyonel olmaması gerektiğini düşünmüştür. Araştırmacının ondalık kısmın devirli mi, sonlu mu yoksa karışık mı devam edeceği ile ilgili sorusuna da

doğrudan cevap verememesi kesirler ve ondalık gösterim ile ilgili ilişkinin net olarak bilinmediğini göstermektedir. Bunu anlayabilmek için de öğretmen adayı bölme işlemi yapmıştır. İşlemi yaptıktan sonra $22/7$ 'nin devirli olduğunu görüp bundan dolayı π 'nin de devirli olduğu çıkarımında bulunmuştur. Bu durum (π 'nin irrasyonel olduğu bilgisinden emin olması sebebiyle) devirli sayıların irrasyonel olduğunu düşünmesine yol açmıştır.

Görüldüğü gibi π sayısının gerek sayı kümeleri ile ilişkileri gerekse değeri ile ilgili öğretmen adaylarının yanılgıları mevcuttur. Bu yanılgıların rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilgili sorunlardan kaynaklandığı yorumu da yapılabilir.

Testin dokuzuncu sorusunda ise 0,12345... şeklinde ondalık kısmı devam eden irrasyonel sayı yer almıştır. Öğretmen adaylarına, “Gerçek sayıdır.”, “İrrasyonel sayıdır.”, “Rasyonel sayıdır.” ve “Devirli sayıdır.” seçenekleri verilmiş ve doğru olanları işaretlemeleri istenmiştir. Tablo 87’de her bir seçeneğin işaretlenme oranları gösterilmektedir.

Tablo 87

0,12345678910... sayısına ilişkin yapılan işaretlemelerin sayısı

	1.Sınıf	2. Sınıf	3.Sınıf	4.Sınıf	TOPLAM
Gerçek sayıdır.	28 (%70)	25 (%62,5)	27 (%67,5)	29 (%72,5)	109 (%68,125)
İrrasyonel sayıdır.	20 (%50)	24 (%60)	32 (%80)	31 (%77,5)	107 (%66,875)
Rasyonel sayıdır.	15 (%37,5)	7 (%17,5)	4 (%10)	3 (%7,5)	29 (%18,125)
Devirli sayıdır	21 (%52,5)	11 (%27,5)	10 (%25)	1 (%2,5)	43 (%26,875)

0,123456789... sayısını öğretmen adaylarının %68’i gerçek sayı, %67’si ise irrasyonel sayı olarak işaretlemiştir. Ancak sayının ondalık olduğunu belirtip rasyonel olduğunu ifade eden öğretmen adayları da olmuştur. Bazı öğretmen adayları ise ondalık kısmı kurallı olduğu için sayının devirli olduğunu iddia etmiştir. Rasyonel sayı ve devirli sayı seçeneklerinin işaretlenme oranlarının sınıf düzeyi ile birlikte azaldığı olumlu bir gelişme olarak görülmektedir. Öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtlar ve yapmış oldukları açıklamalarla birlikte dağılımlar Tablo 88’de sunulmuştur.

Tablo 88

0,12345678910... sayısının bulunduğu kümeye ve yapılan açıklamalara göre yanıtların dağılımı

Bulunduğu Küme	Açıklama	1.Sınıf	2. Sınıf	3.Sınıf	4.Sınıf	TOPLAM
Gerçek sayı ve irrasyonel sayı	Yeterli	4 (%10)	3 (%7,5)	16 (%40)	17 (%42,5)	40 (%25)
Gerçek sayı ve irrasyonel sayı	Yetersiz	4 (%10)	7 (%17,5)	2 (%5)	6 (%15)	19 (%11,875)
İrrasyonel sayı	Yeterli	4 (%10)	6 (%15)	7 (%17,5)	3 (%7,5)	20 (%12,5)
İrrasyonel sayı	Yetersiz	2 (%5)	4 (%10)	2 (%5)	5 (%12,5)	13 (%8,125)
Gerçek sayı	Yetersiz	0 (%0)	5 (%12,5)	3 (%7,5)	4 (%10)	12 (%7,5)
Gerçek/İrrasyonel ve Devirli	Yanlış	9 (%22,5)	6 (%15)	5 (%12,5)	0 (%0)	20 (%12,5)
Rasyonel ve diğerleri	Yanlış	15 (%37,5)	7 (%17,5)	4 (%10)	3 (%7,5)	29 (%18,125)
Diğer		2 (%5)	2 (%5)	1 (%2,5)	2 (%5)	7 (%4,375)
Toplam		40 (%100)	40 (%100)	40 (%100)	40 (%100)	160 (%100)

Öğretmen adaylarının %25'i sayının irrasyonel ve gerçek olduğunu belirtmiş ve neden irrasyonel olduğunu doğru bir şekilde açıklayabilmiştir. 40 öğretmen adayından 33'ü son iki sınıf düzeyinde yer almaktadır. 19 öğretmen adayı ise sayı kümelerini doğru işaretlediği halde sayının neden irrasyonel olduğuna dair yeterli açıklama yapamamıştır.

Görüşme yapılan öğretmen adaylarından Halit 0,12345678910... sayısını gördükten sonra tekrar 1234... şeklinde devam edeceğini düşündüğünü ve bu nedenle de devirli sayı dediğini belirtmiştir. 1. sınıf öğretmen adaylarından Tuğçe ise 0,123456... şeklinde birer artarak giden sayıyı kuralı belli olduğu için devirli bir sayı olarak düşündüğünü belirtmiştir.

Tüm durumlar ele alındığında irrasyonel sayının ondalık gösterimi ve devirli sayılar arasında bir anlam karmaşası olduğu söylenebilir. Hangi sayıların devirli, hangi sayıların irrasyonel olduğu konusunda yaşanan zorluk ile birlikte devirli sayıların rasyonelliği ve her iki sayı kümesinin (rasyonel ve irrasyonel) gerçek sayı olduğu bilgisinde eksikliklerin olduğu öğretmen adaylarının açıklamalarından anlaşılmıştır.

4.2.2.9. $0,\overline{9}$ ile 1 sayıları arasındaki ilişkiye yönelik bulgular

Kavram testinin son sorusunda öğretmen adaylarına “ $0,\overline{9}$ sayısı 1'e eşit midir yoksa yaklaşık olarak mı eşittir? Açıklayınız.” sorusu sorulmuştur. Bu soru ile birlikte 1 sayısının doğal sayı gösterimi ve devreden kısmı 9 olan ondalık gösterimi arasındaki ilişkinin öğretmen adayları arasında nasıl algılandığı anlaşılmak istenmiştir. $0,999...$ sayısı 1 sayısına eşittir. Ancak bazı öğretmen adayları tarafından tam olarak eşit olmadığı ve 1 sayısından daha küçük olduğu düşünülebilmektedir. Öğretmen adaylarının bir kısmı iki

sayının birbirine tam olarak eşit olduğunu belirtmiştir. Bir kısmı ise devirli sayıyı rasyonel hale getirip 9/9 oranından 1'e eşitliğini göstermesine rağmen 1'e tam olarak eşit olmadığını açıklamıştır. Üçüncü bir grup da iki sayının birbirine yaklaşık olarak eşit olduğunu belirtmiştir. Öğretmen adaylarının bu üç görüşe göre dağılımları Tablo 89'da verilmektedir.

Tablo 89

“0,9 sayısı 1'e eşit midir?” sorusuna ait yanıtların dağılımı

	<i>“Tam 1'e eşittir.” diyenler</i>	<i>Hem “9/9=1” hem de “0,9 sayısı 1'e yaklaşık eşittir.” diyenler</i>	<i>“Yaklaşık olarak eşittir.” diyenler</i>
1. Sınıf	7 (%17,5)	5 (%12,5)	28 (%70)
2. Sınıf	11 (%27,5)	10 (%25)	19 (%47,5)
3. Sınıf	10 (%25)	6 (%15)	24 (%60)
4. Sınıf	11 (%27,5)	6 (%15)	23 (%57,5)
Toplam	39 (%24,375)	27 (%16,875)	94 (%58,75)

Tablo 89'dan da görüldüğü gibi öğretmen adaylarının yarıdan fazlası tarafından 0,9999... sayısı ile 1 sayısının yaklaşık olarak eşit olduğu kabul edilmektedir. Bu adayların açıklamaları incelendiğinde 0,999... sayısının daha küçük olduğunu belirttikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının %17'lik bir kısmı ise sayıyı rasyonel hale getirip 1'e eşit olduğunu göstermesine rağmen yaklaşık olarak eşit olduğu açıklamasını da yapmıştır. Bu öğretmen adaylarının ikilemde kaldığı söylenebilir. Soruya doğru yanıt veren öğretmen adaylarının ise %24'de kaldığı görülmektedir. Oldukça düşük bir oranda öğretmen adayı her iki gösterimin de aynı sayıya ait olduğunu açıklayabilmiştir.

Görüşme yapılan 8 öğretmen adayından 6'sı bu iki sayının yaklaşık olarak eşit olduğunu belirtmiştir. Araştırmacı her öğretmen adayına, “Sayı doğrusunda 0,999... sayısı 1 sayısının neresinde yer alır?”, “Bu iki sayı eşit değilse farklı sayılar mıdır?”, “Farklı iki sayı arasında her zaman bir sayı bulunabilir mi?” ve “Bu iki sayı arasında nasıl bir sayı bulabiliriz?” sorularını sormuştur. Yaklaşık olarak eşit olduğunu belirten öğretmen adaylarının 0,999... sayısını 1'in solunda olarak ele aldığı görülmüştür. Öğretmen adayları iki sayının farklı olduğunu ve farklı iki sayı arasında başka bir sayının da bulunabileceğini belirtmişlerdir. Ancak iş bu aradaki sayıyı bulmaya geldiği zaman zorluk yaşamışlardır. 1. sınıf öğretmen adayı Burçe, “Bu iki sayı arasında bir sayı vardır. Bulabiliriz mutlaka ama ben bulamıyorum.” yanıtını vermiştir. Bir başka 1. sınıf öğretmen adayı Tuğçe ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir:

A: Bu iki sayı birbirinden farklı mıdır?

T: Farklıdır.

A: O zaman aralarında başka bir sayı var mıdır?

T: Vardır. Olması lazım.

A: Peki bir sayı söyler misin? Ne vardır mesela?

T: Limit konusu giriyor. 0,999... yani 9 sonsuza kadar gidiyor. Limiti 1 olabilir ama sayının kendisi değildir. Aralarında ne vardır bilmiyorum.

Tuççe de iki sayı arasında sayı bulamamış ancak 0,999... sayısının ancak limit durumunda 1'e eşit olabileceğini ifade etmiştir. 2. sınıf öğretmen adayı Halit görüşmede "Yaklaşık olarak eşittir ancak gösterim olarak 1'dir. Yani 9/9'dan 1 çıkar. Ama sayı doğrusunda solundadır." şeklinde açıklama yapmıştır. Araştırmacının, "İki sayı arasında başka sayı var mıdır?" sorusu üzerine, "Vardır limitli türevli bir şeyler ama ben bilmiyorum." yanıtını vermiştir. Görüldüğü gibi Halit devirli sayıyı rasyonel hale getirip 1'e eşit olduğunu göstermesine rağmen sayının yaklaşık olarak eşit olduğuna inanmaktadır. Görüşme yapılan 3. sınıf öğretmen adayı Simre'de de benzer bir durum söz konusu olmuştur. Simre iki sayının yaklaşık olarak eşit olduğunu ve 0,999... sayısının 1'in solunda olduğunu belirtmiştir. Araştırmacının, "İki sayı arasında başka bir sayı var mıdır?" sorusu üzerine aralarında geçen diyalog aşağıda verilmiştir:

S: İkisini toplayıp ikiye bölersek aralarındaki sayı bulunur.

A: Ortalamalarını alıyorsun yani. Bulabilir misin peki?

S: 1,999... olur toplayınca. Ama ikiye nasıl böleriz bilmiyorum bunu.

A: Kesirli hale getirilebilir mi 1,999... sayısı?

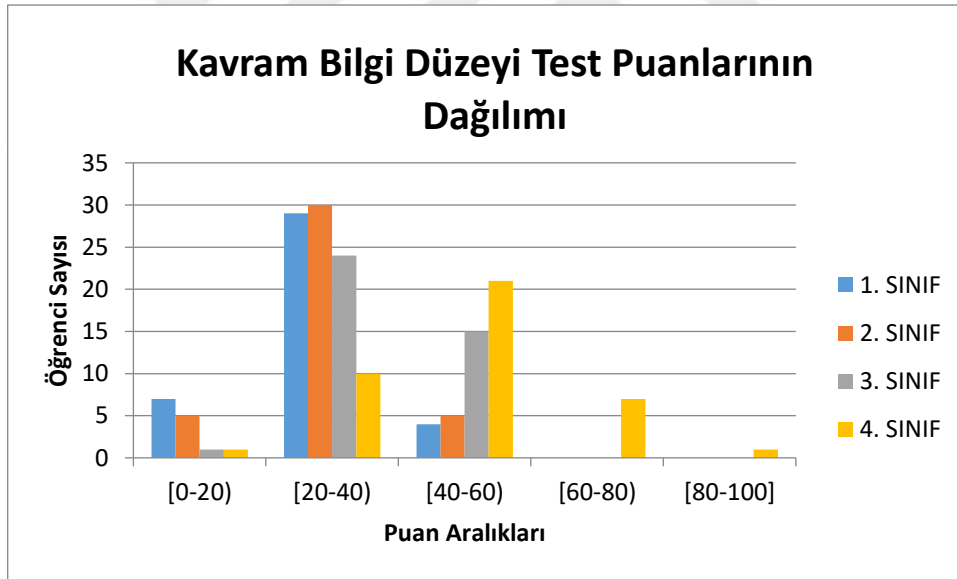
S: 19-1 paya yazılır. Payda 9 olur. 18/9'dan 2 çıkar. Ama o gösterimdir sadece. Öyle olunca 0,999... sayısı da 9/9'dan 1 çıkar. Ama gerçekte tam 1 bütün değildir.

Öğretmen adayları devirli sayıyı rasyonel hale getirip eşit olduğunu görmelerine rağmen eşit olduğunu kabul etmeme eğiliminde olmaktadır. Hatta görüşme yapılan 4. sınıf öğretmen adayı Şeyma, araştırmacı ile aralarında geçen benzer diyaloglar sonrası "Bu sorunun sonunda da bunların aynı şeyler olduğunu söyleyeceksiniz ve eşit diyeceksiniz diye korkuyorum. O kadar da olmaz artık." şeklinde bir çekinceye bulunmuştur. Doğrusu açıklandıktan sonra ise "0,999... niye var o zaman? Niye aynı sayıya farklı iki gösterim yapmışız? Çok saçma. Böyle bir şey olmaz." şeklinde tepki göstermiştir.

0,999... sayısının ele alındığı bir soru da konu testinde (14. soru) yer almıştır. Bu soruda $0,999... + 0,1111...$ işlemi ile ilgili öğretmen adaylarının %42,5'u soruya doğru cevap olarak 1,111... ve 10/9 yanıtını vermişlerdir. Kavram testinde yer alan soruya göre o soruda doğru yanıt oranı daha fazladır. Bunun nedeni araştırıldığında ise konu testinde öğretmen adaylarının bir kısmının devirli sayıları kesirli hale çevirip toplamlarını 10/9 olarak bulduğu veya son aşamada 10'u 9'a bölerek sonucu ondalığa çevirdikleri görülmüştür. Kavram testinde ise öğretmen adayına doğrudan 0,999... sayısı ve 1 sayısı arasındaki ilişki sorulduğu için öğretmen adayının işlemsel düşünmek yerine kavramsal olarak açıklama yapmaya çalışması ilk testteki soruya göre doğruluk oranının düşmesine neden olmuştur.

4.2.3. Kavram bilgi düzeyi ile ilgili genel değerlendirme

Matematikte tanımlar, kavramlar arası ilişkiler ve sınıflamalar bilgisini içeren kavram bilgi düzeyini inceleyebilmek için ilk aşamada öğretmen adaylarına sayılar ve işlemler öğrenme alanında temel sayılabilecek 14 kavramın tanımı sorulmuştur. İkinci aşamada ise kavramlar arası ilişkiler ve sınıflamalarla ilgili 11 soru sorulmuştur. Bu geniş öğrenme alanının tüm kavramları, tanımları ve sınıflandırmaları gibi kavram bilgi düzeyini ilgilendiren bilgi elemanlarının tamamını incelemek tek bir testle mümkün olmadığı için ilgili alanyazında yer alan zorluklar ve kritik kazanımlar göz önüne alınarak test 25 soru ile sınırlandırılmıştır. Testin tanımlarla ilgili 14 soruluk kısmı Leikin ve Zazkis (2008) tarafından geliştirilen teorik çatı kapsamında analiz edilmiş; uygun ve titiz tanımlar (2 puan), uygun ancak titiz olmayan tanımlar (1 puan) ve uygun olmayan tanımlar (0 puan) olarak puanlanmıştır. Kavram testinin ikinci kısmında yer alan 11 soru ise tamamen doğru (2), kısmen doğru (1) veya yanlış (0) olmak üzere puanlanmıştır. Her bir öğrencinin 50 puan üzerinden hesaplanan puanı okuyucu kolaylığı açısından 2 ile çarpılarak 100 üzerinden “Kavram Bilgi Düzeyi Test Puanı” oluşturulmuştur. Bu puanlara göre öğrenciler eşit aralıklı 5 gruba ayrılmıştır. Her bir gruptaki öğrencilerin dağılımı Şekil 40’ta verilmiştir.



Şekil 40. Kavram bilgi düzeyi test puanlarının dağılımı

Şekil 40’ta yer alan grafik incelendiğinde ilk üç sınıf düzeyindeki öğretmen adaylarının en çok 20-40 puan aralığında yer aldığı görülmektedir. 4. sınıf öğretmen adaylarının çoğunluğu ise 40-60 aralığında puanlar almıştır. 60 ve üzeri puan alan sadece dördüncü sınıf öğretmen adaylarının olduğu dikkat çekmektedir. İlk üç sınıf düzeyi arasındaki ilişkinin daha net görülebilmesi için kavram testi ortalamaları alınmış ve Tablo 90’da sonuçlar sunulmuştur.

Tablo 90

Kavram bilgi düzeyi test ortalamaları

1. Sınıf Ortalaması	2. Sınıf Ortalaması	3. Sınıf Ortalaması	4. Sınıf Ortalaması	Tüm Örneklem Ortalaması
29,40	29,50	35,30	47,35	35,3875

Tablo 90'dan sınıf düzeylerinin artışıyla birlikte puan ortalamalarının da yükseldiği görülmektedir. Konu testinde 61 olan genel ortalamanın kavram testinde 35 puana kadar düştüğü dikkat çekmiştir. Konu testinde yer alan daha çok işlemsel bilgi ağırlıklı sorular yerine kavramların tanımları ve birbirleriyle olan ilişkilerinin sorulduğu kavram testindeki sorulardaki ortalamaların bu denli düşük olması matematiksel kavramların derinlemesine bilinmediği şeklinde bir düşünceye neden olabilmektedir.

Sayılar ve işlemler öğrenme alanında yer alan temel kavramlarla ilgili öğretmen adaylarının yapmış oldukları tanımlara yönelik bulgular ilk kısımda verilmiştir. Her bir kavrama ilişkin ne tür tanımlar yapıldığı kategorileriyle ortaya konmuştur. Tüm tanımlara ait uygunluk oranlarının bir arada incelenmesinin hangi tanımlarda öğretmen adaylarının daha başarılı olduğunu ve daha çok zorlandığını ortaya koyacağı düşünüldüğünden, Tablo 91'de bir arada gösterilmiştir. Tabloda görüldüğü gibi “doğal sayı, tam sayı, mutlak değer, aralarında asal sayılar ve EBOB” kavramlarında öğretmen adaylarının %50'den fazlası uygun tanım yaparken diğer dokuz kavramda uygunluk oranı %50'nin altında kalmıştır.

Tablo 91

Tüm tanımların uygunluk oranları

Kavram	Uygun	Uygun Olmayan	Kavram	Uygun	Uygun Olmayan
<i>Doğal Sayı</i>	94 (%58,75)	66 (%41,25)	<i>Asal Sayı</i>	58 (%36,25)	102 (%63,75)
<i>Tam Sayı</i>	94 (%58,75)	66 (%41,25)	<i>Aralarında Asal Sayılar</i>	102 (%63,75)	58 (%36,25)
<i>Rasyonel Sayı</i>	34 (%21,25)	126 (%78,75)	<i>EBOB</i>	88 (%55)	72 (%45)
<i>İrrasyonel Sayı</i>	38 (%23,75)	122 (%76,25)	<i>Bilimsel Gösterim</i>	6 (%3,75)	154 (%96,25)
<i>Gerçek Sayı</i>	52 (%32,5)	108 (%67,5)	<i>Çözümleme</i>	64 (%40)	96 (%60)
<i>Birim Kesir</i>	61 (%38,125)	99 (%61,875)	<i>Karekök Alma İşlemi</i>	69 (%43,125)	91 (%56,875)
<i>Mutlak Değer</i>	85 (%53,125)	75 (%46,875)	<i>π Sayısı</i>	63 (%39,375)	97 (%60,625)

En düşük orana sahip ilk beş tanım düşükten yükseğe olacak şekilde sırayla aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Bilimsel gösterim
2. Rasyonel sayı

3. İrrasyonel sayı

4. Gerçek sayı

5. Asal Sayı

Bilimsel gösterimin çok sık kullanılmayan bir kavram olduğu düşünülse de sayı kümesi olan diğer dört kavramın matematikte ve matematik eğitiminde büyük önem taşıdığı söylenebilir. Kavramı tanımlayabilmeleri ile öğretmen adaylarının bu kavramla ilgili alan bilgilerini de ortaya koyduğu ifade edilebilir. Yapılan görüşmeler de bu sonuçları destekler niteliktedir. Öğretmen adaylarının özellikle rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayılarla ilgili ciddi yanlışları olduğu görülmüştür.

Tanımı sorulan 14 kavramdan sadece 5 tanesinde matematiksel bir şekilde uygun tanım yapabilen öğretmen adaylarının oranı %50'yi geçebilmiştir. Geriye kalan dokuz kavramda öğretmen adaylarının yarından fazlası uygun olmayan tanımlar yapmıştır.

4.3. Problem Çözme Bilgi Düzeyi ile İlgili Bulgular

Bu bölümde alan bilgisi kapsamında problem çözme düzeyine yönelik bulgulara yer verilecektir. Öğretmen adaylarına sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin 10 adet problemden oluşan problem çözme testi uygulanmıştır. Öğretmen adaylarından konuya özgü veya genel stratejileri kullanmaları, sonuç çıkarabilmeleri, tümdengelimsel düşünebilmeleri, özel problem çözme teknikleri ve matematiksel modelleme gibi analitik stratejileri kullanarak problemleri çözebilmeleri beklenmiştir.

Bu bölümde her bir soruya yönelik bulgular ayrı başlıklar halinde verilmemiş; soruların içeriği ve bulgular maddeler halinde sunulmuştur. Tablo 92'de 160 öğretmen adayının her bir soru için problem çözme seviyeleri verilmektedir:

Tablo 92

Problem çözme testindeki her bir soruya ilişkin bütüncül değerlendirme seviyelerine göre öğretmen adaylarının (160 kişi) dağılımı

	0 puan (Seviye 0)	1 puan (Seviye 1)	2 puan (Seviye 2)	3 puan (Seviye 3)	4 puan (Seviye 4)
1. Soru	73 (%45,625)	10 (%6,25)	16 (%10)	16 (%10)	45 (%28,125)
2. Soru	37 (%23,125)	24 (%15)	36 (%22,5)	33 (%20,625)	30 (%18,75)
3. Soru	13 (%8,125)	40 (%25)	60 (%37,5)	18 (%11,25)	29 (%18,125)
4. Soru	22 (%13,75)	14 (%8,75)	13 (%8,125)	12 (%7,5)	99 (%61,875)
5. Soru	31 (%19,375)	79 (%49,375)	11 (%6,875)	3 (%1,875)	36 (%22,5)
6. Soru	43 (%26,875)	18 (%11,25)	13 (%8,125)	20 (%12,5)	66 (%41,25)
7. Soru	4 (%2,5)	19 (%11,875)	16 (%10)	44 (%27,5)	77 (%48,125)
8. Soru	41 (%25,625)	11 (%6,875)	23 (%14,375)	19 (%11,875)	66 (%41,25)
9. Soru	27 (%16,875)	10 (%6,25)	25 (%15,625)	21 (%13,125)	77 (%48,125)
10. Soru	39 (%24,375)	34 (%21,25)	15 (%9,375)	10 (%6,25)	62 (%38,75)
Ortalama	33 (%20,625)	25,9 (%16,188)	22,8 (%14,25)	19,6 (%12,25)	58,7 (%36,688)

Tablo 92 incelendiğinde ilk iki soruda sıfır puan alan öğretmen adaylarının; 4., 6., 7., 8., 9. ve 10. sorularda ise 4 puan alan öğretmen adaylarının çoğunlukta olduğu görülmektedir. 3. soruda iki puan, 5. soruda ise bir puan değerinde çözüm yapan öğretmen adaylarının diğer kategorilere göre daha fazla olduğu anlaşılmaktadır. Yukarıdaki tabloda tüm örneklem grubu (160 öğretmen adayı) toplu halde değerlendirilmiştir. Her bir soruya ait puan ortalamaları ise sınıf düzeylerine göre ayrı ayrı hesaplanmıştır. Bu şekilde sınıf seviyelerine göre düzenli bir değişim olup olmadığı da ayrıca görülmek istenmiştir. Tablo 93'te her bir soru için puan ortalamaları verilmektedir.

Tablo 93

Problem çözme testindeki her bir sorunun sınıf düzeylerine göre puan ortalamaları

	1. Sınıf	2. Sınıf	3. Sınıf	4. Sınıf	Ortalama
1. Soru	0,95	1,63	2,20	1,95	1,68
2. Soru	1,85	1,65	2,00	2,38	1,97
3. Soru	1,65	2,13	2,10	2,38	2,07
4. Soru	2,75	3,03	3,25	2,78	2,95
5. Soru	1,53	1,48	1,63	1,73	1,59
6. Soru	2,03	2,40	2,55	2,23	2,30
7. Soru	2,80	3,03	3,15	3,30	3,07
8. Soru	2,70	2,13	2,25	2,38	2,36
9. Soru	2,48	3,05	2,63	2,63	2,69
10. Soru	2,18	2,03	2,53	1,03	2,14
Toplam	2,09	2,26	2,41	2,28	2,28

Tablo 93 incelendiğinde 2. ve 7. soru dışında kalan sorularda sınıf seviyeleri artışına paralel olarak ortalama puan artışı gözlenmemektedir. Öğretmen adaylarının en çok zorlandığı sorular sırasıyla 5., 1. ve 2. sorular olmuştur. En yüksek ortalamaya sahip sorular da sırasıyla 7., 4. ve 9. sorular olmuştur.

En çok zorlanılan üç soru için yapılan değerlendirmeler aşağıda sunulmuştur:

1. Soru: Testin ilk sorusunda öğretmen adaylarına Maya sayı sistemi tanıtılmış ve bu sistemde 7 nokta ve 2 çizgi sembolleri ile yazılabilecek 3000'den küçük en büyük çift sayının kaç olduğu sorulmuştur. Maya sayı sistemi 20'lik tabanda olduğu için 20 tane rakamdan oluşmaktadır. Basamaklar da 1'ler, 20'ler, 400'ler ve 8000'ler şeklinde 20'nin kuvvetleri ile ilerlemektedir. Bu soru ile birlikte öğretmen adaylarının farklı tabanlarda sayı oluşumu ile yüzleşmesi sağlanmış olup ve basamak kavramına genel perspektiften yaklaşmıştır. Öğretmen adaylarının en çok zorluk yaşadığı sorulardan biri bu soru olmuştur. Sorunun doğru cevabı 2962 olup maya sistemi ile gösterimini doğru şekilde cevaplayan bir öğretmen adayının yanıtı Şekil 41'de verilmiştir.

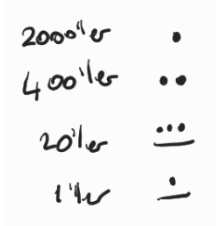
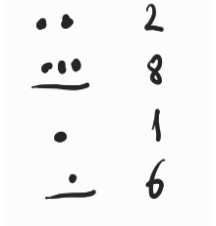
Şekil 41. PÇT 1. soruya verilen doğru yanıt örneği

Yanıttan da anlaşıldığı gibi öğretmen adayı hem sayı oluşturma mantığını hem basamakların 10'luk sayı sistemine göre değerlendirilmesini doğru bir şekilde kavramış ve sorudaki şartları (3000'den küçük en büyük sayı olma, çift sayı olma, 7 nokta ve 2 çizgiden oluşma) yerine getirmiştir. En sık verilen hatalı yanıtlar da aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 94

PÇT 1. soruda yer alan hatalı yanıtlara örnekler

10'luk Sistemde Gösterimi	Maya Sayı Sisteminde Gösterimi	Yorum
2886	$7.400+4.20+6.1$ 	Öğretmen adayları sayı oluşturma ve basamak mantığını anlamış ancak şartlardan birine uymamıştır. Çift sayı olma şartı sağlandığı halde 3000'den küçük en büyük sayı değildir.
2981	$7.400+9.20+1.1$ 	Öğretmen adayları sayı oluşturma ve basamak mantığını anlamış ancak şartlardan birine uymamıştır. 7 nokta ve 2 çizgi ile oluşturulmuş 3000'den küçük en büyük sayı olmasına karşın çift sayı olma şartı atlanmıştır.
2998	$7.400+9.20+18.1$ 	Öğretmen adayları 3000'den küçük en büyük çift sayı olan 2998 sayısını maya sayı sistemi ile göstermişlerdir. 7 nokta ve 2 çizgi şartına uymamışlardır.

2966	$1.2000+2.400+8.20+6.1$ 	400'lerden sonra 2000'ler basamağının geleceği düşünülerek basamaklarda hata yapılmıştır.
2816		Onluk sistemdeki her bir rakamın maya sayı sistemindeki karşılığını çizerek oluşturulmuştur. Şartların hepsi sağlanmasına rağmen öğretmen adayları sayı ve basamak oluşumuna dikkat etmemiştir.

Sayı oluşumu ile ilgili bu problemde öğretmen adayları 35 farklı yanıt vermişlerdir. Çok sayıda öğretmen adayı ise soruyu yanıtsız bırakmıştır. Bazıları kısmen basamak mantığını anlamış olmasına rağmen verilen şartları yerine getirmemiş bazıları ise sayı oluştururken veya rakamları kullanırken hatalar yapmıştır.

Bu soru ile öğretmen adaylarının rutin olmayan bir problem üzerinde sayı ve basamak kavramları ile ilgili bilgilerini sorgulamaları ve yeni duruma adapte etmeleri sağlanmaya çalışılmıştır. Ancak öğretmen adaylarının %45'i bu soruda Seviye 0'da kalmıştır. En düşük ortalamanın 1. sınıf öğretmen adaylarında olması da dikkat çekmiştir.

2. Soru: Testin 2. sorusunda palindrom sayının tanımı yapılmıştır. 7, 55, 303, 4554 bazı palindrom sayıları verilerek örnekler sunulmuştur. Öğretmen adaylarına, “4 basamaklı; 3'e kalansız bölünen x tane, 4'e kalansız bölünen y tane palindrom sayı varsa $x+y$ kaçtır?” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarından bölünebilme kuralları ile ilgili bilgilerini rutin olmayan bir problem üzerinde uygulayabilmeleri istenmiştir. Soru aslında iki alt sorudan oluşmaktadır. x bulunurken son iki basamaktaki rakamların toplamının 3 ve 3'ün katı olmasına dikkat edilir. 01'den 99'a kadar 99 sayı olduğu için $99:3=33$ 'ten son iki basamağı 3'ün katı olan 33 sayı bulunur. Ancak son iki basamak 30, 60 ve 90 olursa palindrom sayı gereği dört basamaklı olmayan 0330, 0660, 0990 sayıları elde edilir. Bu nedenle 33 adet sayıdan 3 tanesi çıkarılır. Böylece $x = 30$ bulunur. y bulunurken de yine son iki basamağa bakılır. Son iki basamağı 4'ün katı olan sayıları bulmak için 00 ve 99 dahil 100 tane iki basamaklı sayı dörde bölünerek $100 : 4 = 25$ işlemini yapılır. Ancak 00, 20, 40, 60 ve 80 sayıları bu 25 sayıdan çıkarılmalıdır. Çünkü simetriden dolayı binler basamağı sıfır olmakta ve bu da sayının dört basamaklı olmasını engellemektedir. Böylece $y=20$ bulunur. Sorunun doğru yanıtı $20 + 30 = 50$ 'dir.

Bu soruya ilişkin yanıtların sınıf seviyelerine göre dağılımı Tablo 95'te verilmiştir.

Tablo 95

PÇT 2. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Seviye 0	Seviye 1	Seviye 2	Seviye 3	Seviye 4
	Tamamen yanlış yanıtlar	x veya y'den biri kısmen doğru - eksik	x veya y'den biri doğru	Strateji doğru, eksikler var	x ve y doğru
1. Sınıf	10 (%25)	6 (%15)	9 (%22,5)	10 (%25)	5 (%12,5)
2. Sınıf	11 (%27,5)	10 (%25)	6 (%15)	8 (%20)	5 (%12,5)
3. Sınıf	11 (%27,5)	4 (%10)	10 (%25)	4 (%10)	11 (%27,5)
4. Sınıf	5 (%12,5)	4 (%10)	11 (%27,5)	11 (%27,5)	9 (%22,5)
Toplam	37(%23,125)	24 (%15)	36 (%22,5)	33(%20,625)	30 (%18,75)

Tablo 95'te görüldüğü gibi öğretmen adaylarının yanıtları her bir seviye için hemen hemen eşit yüzdede dağılmıştır. 4. sınıf öğretmen adaylarında 3. ve 4. seviye yanıtların daha fazla olduğu ve %50'ye yaklaştığı görülmektedir.

Öğretmen adaylarının bir kısmı soruyu çözerken listeleme yapmıştır. Listeleme sırasında belirli bir örüntü arayan veya sistematik bir şekilde listeleme yapan adaylar doğru yanıtla ulaşmış veya birkaç adet sayıyı atlamışlardır. Böylece 3. veya 4. seviyeye ulaşmışlardır. Ancak belirli bir strateji veya örüntü takip edilmediği zaman çok sayıda eksik sayı bırakılmıştır. Bu durumda öğretmen adaylarının daha çok 1. veya 2. seviyede kaldığı görülmüştür. Bu tür sorularda kullanılan problem çözme stratejisinin de önemli olduğu söylenebilir.

5. Soru: Ortalaması en düşük olan öğretmen adaylarının en çok hata yaptığı soru testin 5. sorusu olmuştur. Soru şu şekildedir:

“Boyutları 300 cm ve 210 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir oda kenarları tam sayı olan karesel parkelerle hiç boşluk kalmayacak şekilde kaplanmıştır. Aynı parkeler alanı 450 cm²'lik dikdörtgen şeklindeki bir alanı da boşluk bırakmadan kaplamak için kullanılabilir. Buna göre oda için en az kaç parke kullanılmıştır?”

EBOB-EKOK konusuna ait rutin sayılabilecek bir problem, farklılık yaratacak bir değişiklikle rutin olmayan bir yapıya dönüştürülmüştür. Normal şartlarda boyutları 210 cm ve 300 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir odaya bir kenarı EBOB (210,300) = 30 cm olan karesel parkeler döşenebilir. En az sayıda parke için parkenin bir kenarını 30 cm olarak almak gerekir. Bu durumda bir parkenin alanı 900 cm² eder ki sorunun devamında yer alan 450 cm²'lik bir alanı kaplaması mümkün olmaz. Sorunun rutin dışına çıkması bu şartın varlığı ile gerçekleşmiştir. Bu durumda 210 ve 300'ün diğer ortak çarpanları ele alınmalıdır. 30'un çarpanlarına da bakılsa aynı sonucu verecektir. 30'un dışındaki en büyük ortak çarpan 15'dir. Bu durumda parkenin bir kenarı 15 cm olabilir. Parke, 15 x 15 = 225 cm² alana sahip olacağı için 450 cm²'lik alanı da kaplayabilir. Parkenin bir kenarının 15

cm olacağı bulunduktan sonra odaya kaç tane parke sığacağı $\frac{210.300}{15.15} = 280$ işlemi ile bulunur. Görüldüğü gibi sorunun kritik noktayı atlamamak kaydıyla çok da zor olmadığı söylenebilir. Öğretmen adaylarının problemle ilgili çözümleri bütüncül değerlendirme anahtarına göre incelenmiş ve seviyelere göre dağılımı Tablo 96’da sunulmuştur.

Tablo 96

PÇT 5. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Seviye 0	Seviye 1	Seviye 2	Seviye 3	Seviye 4
1. Sınıf	9 (%22,5)	18 (%45)	4 (%10)	1 (%2,5)	8 (%20)
2. Sınıf	6 (%15)	23 (%57,5)	4 (%10)	0 (%0)	7 (%17,5)
3. Sınıf	5 (%12,5)	25 (%62,5)	0 (%0)	0 (%0)	10 (%25)
4. Sınıf	11 (%27,5)	13 (%32,5)	3 (%7,5)	2 (%5)	11 (%27,5)
Toplam	31 (%19,375)	79(%49,375)	11 (%6,875)	3 (%1,875)	36 (%22,5)

Görüldüğü gibi öğretmen adaylarının %69’u Seviye 1 ve altında bir çözüm yapmıştır. Doğru sonuca ulaşan öğretmen adaylarının oranı ise %22,5’ta kalmıştır. En iyi grup dördüncü sınıflar olmasına karşın tüm sınıf düzeylerinde puan ortalamaları birbirine yakındır. Öğretmen adaylarının yanıtları incelendiğinde bir kısmının 450’nin çarpanlarından deneyerek bulmaya çalıştığı görülmüştür. Bazı öğretmen adayları 210 ve 300’ün en büyük ortak bölenini bularak hesaplamaları 30 cm’lik parkeler üzerinden yapmışlardır. Bu parkelerin 900 cm² olan alanına göz ardı edilip 450’nin 30’un katı olması öğretmen adaylarının yeterli görülmüştür.

En düşük ortalamaya sahip 3 sorunun yanı sıra diğer 7 problem ile ilgili bilgiler maddeler halinde özetlenerek verilmiştir:

- 3.Soru: “Mehmet Bey, 1 dönüm olan tarlasının bir kısmını 4 çocuğuna eşit olarak paylaşmış ve her bir çocuğa 3/20 dönüm tarla düşmüştür. Kalan kısmını ise TEMA Vakfına bağışlamıştır. TEMA Vakfına bağışlanan kısım kare şeklindedir ve bu kısma iki fidan arası en az 4 metre olacak şekilde ağaç fidanları dikilecektir. En fazla kaç ağaç dikilebilir?” problemi bir PYBS sorusunun düzenlenmiş halidir. Soru, sayılar ve işlemler öğrenme alanına yönelik kesirlerde dört işlem içermekte ancak bununla birlikte dönüm-m² dönüşümü bilgisi, karekök alma işlemi, ortak bölen ve ortak katlarla ilgili akıl yürütmesi gerektirmektedir. 3/20 dönüm=150 m² araziye denk geldiği için 4.150=600 m² çocuklara dağıtılıp, 1000–600=400 m² TEMA’ya bağışlanmıştır. $\sqrt{400} = 20$ metre olacak şekilde tarlanın bir kenarı bulunur. Sorunun bundan sonraki kısmında öğretmen adayı tarlayı bir kenarı 4 metrelik 25 karesel bölgeye ayırarak ve her bir köşeyi sayarak 36 ağaç fidanı dikilebileceği yanıtını bulur. Bu problem öğretmen adaylarının en çok zorlandığı, ortalaması en düşük 4. sorudur. En sık yapılan hatalar şu şekilde

sıralanabilir: “Kesirlerde işlem yapılırken $3/20$ ’nin ölçü anlamında değil de bütünün parçası anlamında kullanıldığı düşünülerek her bir çocuğa dağıtılan kısmın belirsiz bir parçanın $3/20$ ’si şeklinde algılanması.”, “Dönüm- m^2 ilişkisinin bilinmemesi kaynaklı hatalar”, “Bağışlanan tarlanın sadece etrafına dikilebilecek fidanların sayılması.”, “Bağışlanan tarlanın 25 parçaya ayrılması sonrasında her bir parçanın ortasına fidan dikileceği hesabıyla 25 cevabının verilmesi.”

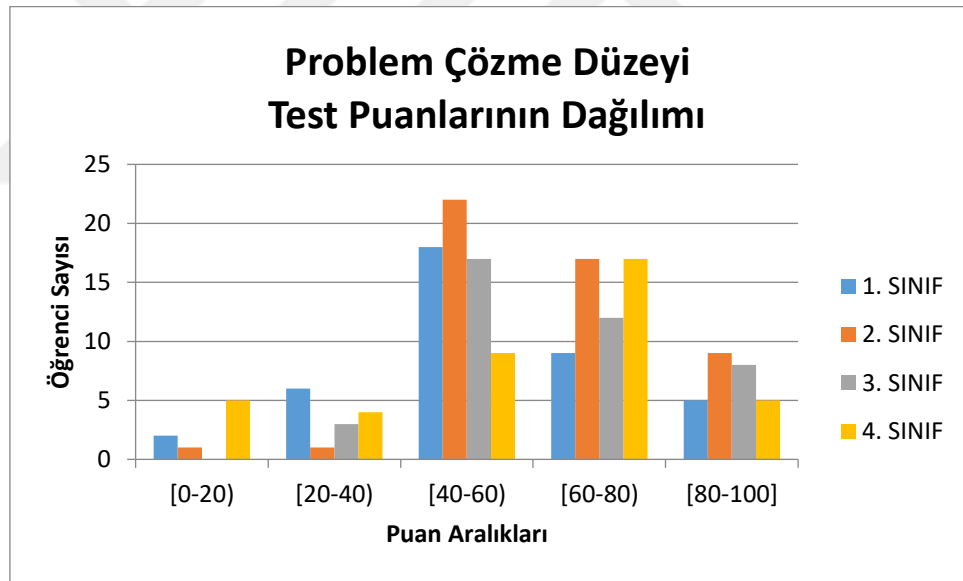
- 4. Soru: Testte yer alan 4. problem ortalaması en yüksek yani öğretmen adaylarınca en çok doğru yapılan ikinci problemdir. PYBS sınav sorusuna fiyatların da eklenmesi ile soru biraz daha farklılaştırılmıştır. Soruda yer alan kesirler bir önceki soruda olduğu gibi yine ölçme anlamını taşımaktadır. Bu durum bazı öğretmen adaylarının hataya düşmesine neden olmuştur. Problemde karışımın toplam ağırlığı bulunurken kesirlerde toplama, her bir ürünün maliyeti bulunurken kesirlerde çarpma işlemleri yapılırken kg-gram dönüşümü, ondalık ifadelerde çarpma işlemi ve kar hesaplaması gibi izlenen stratejiye göre değişebilecek çeşitli hesaplamalar yapılması gerekmektedir. Öğretmen adaylarının yaklaşık %62’si bu soruda doğru yanıtı bularak Seviye 4’te yer almıştır. Bu oran 10 soru içerisindeki en yüksek orandır.
- 6. Soru: Testin altıncı sorusunda ayarı ve ağırlığı verilen altın kolyenin satış fiyatı sorulmuştur. Altın ve gümüş karışımının maliyeti, işçilik bedeli, KDV oranı ve kâr payı ile birlikte sorunun çözümünde birçok işlemin yapılması gerekmektedir. Öncelikle 16 ayarın üçte iki saflık olduğu orantı ile bulunmalıdır. Bu durumda 6 gramlık kolyenin 4 gramının altın, 2 gramının gümüş olduğu anlaşılmaktadır. Malzeme maliyeti $4.170 + 2.9 = 698$ TL olarak bulunur. 52 TL olan işçilik bedeli ile maliyet 750 TL’dir. Satış fiyatını bulmak için %10 kâr payı eklenmesi ve son fiyata %20 KDV eklenmesi ile sorunun yanıtı 990 TL olarak bulunur. Görüldüğü gibi soruda çeşitli adımlar yer almaktadır. Oran-orantı ve yüzde başlıca gereken hesaplamalar olmuştur. Öğretmen adaylarının %41’i bu soruda 4. seviyede açıklamalar yaparken, yaklaşık %27’si tamamen yanlış veya boş yanıtlarla seviye 0’da kalmıştır. Problem çözümlerine bakıldığında bazı öğretmen adaylarının kolyenin ayarından yola çıkarak altın-gümüş oranını bulamadığı görülmüştür. Bazı öğretmen adayları ise KDV ve kâr payı eklemelerini sırayla değil aynı maliyet üzerinden yapmışlardır. En dikkat çekici durumlardan biri de bazı öğretmen adayları 16 ayarın 0,66 (%66) saflıkta olduğunu ondalık gösterim ile belirtmiş ve bunun sonucunda da sorunun tamamında ondalık sayılarla uğraşmıştır. $\%66 = 2/3$ dönüşümü yapılmadığı için de işlemin sonucu 990 TL’den daha düşük bulunmuştur.

- 7. Soru: Testin en kolay sorusu yedinci soru olmuştur. Kareköklü sayılarla verilen bir problemde öğretmen adaylarının hangi işlemleri yapacaklarına nasıl karar verdiklerini inceleyebilmek adına TEOG’da çıkmış bir soru düzenlenmiştir. Öğretmen adaylarının %76’sı 3. ve 4. seviyede çözümler sunmuştur. Tarlanın alanının bulunması, tarlaya 1 günde harcanan su miktarının bulunması, bu miktara ödenecek olan ücretin bulunması ve bu ücretin 1 ay için hesaplanması adımlarından oluşan soruda öğretmen adaylarının bir kısmının çarpma işlemi yerine bölme işlemi yaptıkları; bazılarının orantı kurarak adımları bulduğu ve bazılarının Kuruş-TL dönüşümünü yanlış yaptıkları veya yapmadıkları görülmüştür.
- 8. Soru: “Bir müşteri aldığı tişört için kasiyere bir miktar para vermiştir. Kasiyer, tişört fiyatındaki TL ve Kr bölümlerini karıştırmış (örneğin tişört 18,05 TL ise kasiyer, fiyatı 5,18 TL olarak görmüş) ve müşteriye 3,75 TL yerine yanlışlıkla 14,64 TL para üstü vermiştir. Tişörtün gerçek fiyatıyla kasiyerin gördüğü fiyatın toplamı 61,61 TL olduğuna göre, müşteri kasiyere kaç TL vermiştir?” şeklinde yer alan testin sekizinci sorusunda öğretmen adaylarının ondalık sayılarda işlem yapabilme becerilerinin yanı sıra akıl yürütme becerileri de incelenmiştir. Soru oldukça karmaşık görülmesine karşın cebirsel birkaç işlemle çözüm oldukça basit hal almaktadır. Gerçek fiyata x denirse “ $x + 3,75$ ” müşterinin verdiği parayı göstermektedir. Öte yandan yanlış görülen ücrete y denilirse “ $y + 14,64$ ” de müşterinin verdiği parayı göstermektedir. $x+y$ soruda 61,61 olarak verilmektedir. Bu durumda $61,61 + 3,75 + 14,64 = 80$ TL müşterinin verdiği paranın iki katına denk gelir. Bu durumda doğru yanıt 40 TL’dir. Öğretmen adaylarının bir kısmı sayıları deneyerek bir kısmı ise cebirsel yaklaşımla soruyu doğru yanıtlamıştır. Bazı öğretmen adayları ise verilen parayı bulmak yerine ürünün ücretini 25,36 TL olarak bulmuşlardır. Öğretmen adaylarının %41’i 40 TL sonucunu doğru bularak 4. seviyede yer almıştır. %59’luk çoğunluk ise doğru sonuca ulaşamamıştır. Soruyu tamamen yanlış yapan veya boş bırakan yani son seviyede yer alan öğretmen adaylarının oranı ise yaklaşık %26 olmuştur.
- 9. Soru: Testin 9. sorusu üslü ifadelerle ilgili daha önce TEOG sınavında çıkmış olan bir problemin düzenlenmiş halidir. Soru, üslü ifadelerde toplama, çarpma ve bölme işlemlerini gerektirmektedir. Öğretmen adaylarının sonucu üslü halde bırakmaması ve düzenleme yapması için çıkan sonucun rakamları toplamı sorulmuştur. Bu soru testin en kolay 3. sorusu olup öğretmen adaylarının %48’i Seviye 4’te yanıtlar vermişlerdir. Hangi işlemin yapılacağı konusunda hatalar yapan öğretmen adayları olmuştur. Kimileri işlemin ne olacağını doğru tespit

ettiği halde üslü ifadelerde işlem yaparken zorluk yaşamıştır. Ayrıca tüm üslü ifadelerin değerini bulup doğal sayılarla işlemler yaparak sonuca ulaşan öğretmen adayları da olmuştur.

- **10. Soru:** Oran ve yüzde kavramlarının kullanılmasını gerektiren cebirsel yöntemlerle çözülebilecek iki alt sorudan oluşan testin 10. sorusu rutin olmayan problemler kapsamında sayılabilir. Öğretmen adaylarının %39'u 4. Seviyede çözümler sunmuştur ve her iki alt soruya da doğru cevap vermiştir. Ancak öğretmen adaylarının %24'ü Seviye 0'da, %21'i 1. Seviyede kalmıştır. Yani iki alt soru için de çözüme ulaşamayan %45'lik bir öğretmen adayı grubunun olduğu söylenebilir.

Öğretmen adaylarının 10 soruya vermiş oldukları yanıtlar bütüncül değerlendirme anahtarına göre 0 puandan 4 puana kadar puanlanmıştır. Her bir öğrencinin 40 puan üzerinden hesaplanan puanı okuyucu kolaylığı açısından 2,5 ile çarpılarak 100 üzerinden "Problem Çözme Düzeyi Test Puanı" oluşturulmuştur. Bu puanlara göre öğrenciler eşit aralıklı beş gruba ayrılmıştır. Her bir gruptaki öğrencilerin dağılımı Şekil 42'de verilmiştir.



Şekil 42. Problem çözme düzeyi test puanlarının dağılımı

Grafikte görüldüğü gibi öğretmen adaylarının problem çözme test puanları daha çok 40-60 puan aralığında yığılmıştır. 80 ve üzeri puan alan öğretmen adaylarında 2. ve 3. sınıf öğretmen adaylarının daha fazla olduğu da görülmektedir. Sınıf seviyelerine göre test ortalamaları ise Tablo 97'de verilmiştir.

Tablo 97

PÇT ortalamaları

1. Sınıf Ortalaması	2. Sınıf Ortalaması	3. Sınıf Ortalaması	4. Sınıf Ortalaması	Tüm Örneklem Ortalaması
52,375	56,375	60,125	57,9375	56,7031

Tablo 97’de, tüm sınıf düzeylerinde puan ortalamalarının 50’nin üzerinde olduğu görülmektedir. Ayrıca puan ortalamaları birbirine yakın olup en düşük ortalamanın 1. sınıflarda, en yüksek ortalamanın ise 3. sınıflarda olduğu anlaşılmaktadır. Öğretmen adaylarının problem çözme testindeki göstermiş olduğu performansın konu testine göre daha geride olduğu ancak kavram testine göre çok daha iyi olduğu da söylenebilir. Öğretmen adaylarının problemi çözerken problemde yer alan kavramların bilgisine ihtiyaç duymayabildikleri görülmüştür. Bu durumun kavram testi ile problem çözme testini ayırttığı söylenebilir.

4.4. Epistemik Bilgi Düzeyi ile İlgili Bulgular

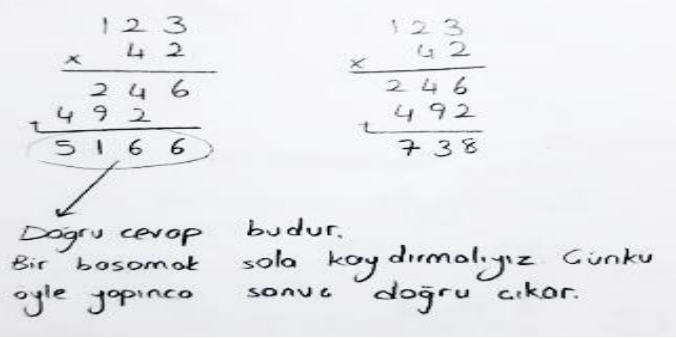
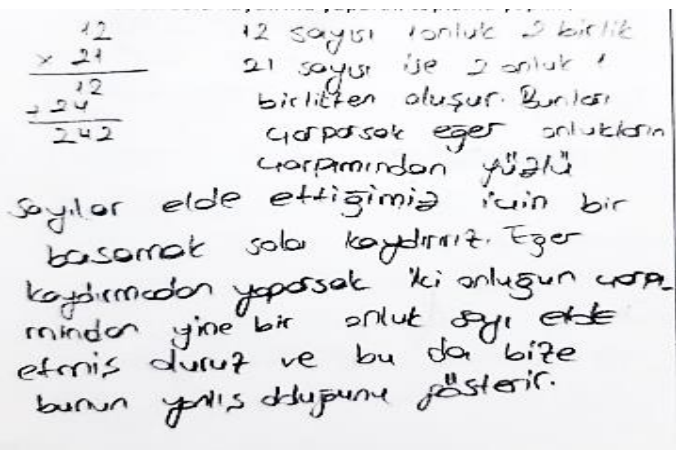
Bu bölümde alan bilgisi kapsamında Kinach’ın (2002a) anlama düzeylerinden epistemik düzey ile ilgili bulgulara yer verilmiştir. Epistemik düzey, kuralların altında yatan gerekçelerin ve ispatların bilgisini içermektedir. Öğretmen adaylarına uygulanan epistemik bilgi düzeyi testinde 10 soru yer almaktadır. Soruların yedisinde verilen kuralların gerekçeleri, üç soruda ise verilen önermenin doğruluğunun veya yanlışlığının gösterilmesi istenmiştir. Öğretmen adaylarından öğrencilerin “Neden?” diye sorabileceği veya “Bu her zaman böyle midir?” şeklinde genelleme arayışında olabileceği sorular sorulmuştur. Verilen yazılı yanıtlar, Harel ve Sowder (1998) ispat şemaları ile Healy ve Hoyles (2000) argüman türlerinden yola çıkarak oluşturulmuş seviyelere göre kategorilere ayrılmıştır. Kuramsal çerçeveler ve oluşturulan seviyeler “veri analizi” kısmında özetlenmiştir. Bu bölümde her bir soru ayrı ayrı açıklanmış olup tüm seviyelere ilişkin örnek değerlendirmeler tablolar halinde sunulmuştur.

4.4.1. Çarpma işleminde sola kaydırmanın gerekçesine yönelik bulgular

Testin ilk sorusunda öğretmen adaylarına alt alta yapılan toplama işleminde neden bir basamak sola kaydırılıp toplama işlemi yapıldığı sorulmuştur. Öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtlar gerekçelendirme kategorilerine göre seviyelere ayrılmıştır. Her bir seviyeye ait birer örnek Tablo 98’de gösterilmektedir.

Tablo 98

EPT 1. soruya ait yanıtlardan örnekler

Kategoriler	Öğretmen adaylarının yanıtlarından kategoriye ait örnekler
Seviye 0: Sola kaydırma ile ilgili gerekçe göstermeyen veya tamamen yanlış gerekçe gösteren yanıtlar	Sayı basamakları yüzünden son girilen sayıların en sona yeni birler basamağına gelmesi gerekir bu yüzden kaydırılır.
Seviye 1: Sola kaydırmayı kurala, doğru sonuca ulaşmak gibi dışsal faktörlere dayandıran ancak yeterli açıklama yapmayan yanıtlar	iki basamaklı bir sayıyla iki basamaklı bir sayıyı çarptığımızda üç basamaklı veya dört basamaklı bir sayı elde ederiz. Belki bu sayıları elde etmek için bir basamak sola kaydırıyor olabiliriz.
Seviye 2: Deneysel örnekler üzerinden yapılmış gerekçelendirmeler	 Doğru cevap budur. Bir basamak sola kaydırmalıyız. Çünkü öyle yapınca sonuç doğru çıkar.
Seviye 3: Basamakların önemini ifade eden, örneklerle desteklenmiş ancak yeterince genelleme sunmayan yanıtlar	 12 sayısı onluk 2 birlik 21 sayısı ise 2 onluk 1 birlikten oluşur. Bunları çarparsak eğer onlukların çarpımından yola sayılar elde ettiğimize için bir basamak sola kaydırırız. Eğer kaydırmadan yaparsak iki onluğun çarp- mından yine bir onluk sayı elde etmiş oluruz ve bu da bize bunun yanlış olduğunu gösterir.

Seviye 4: Alttaki sayıların boş kalan basamaklarında aslında sıfır olduğunu belirten ve buna basamak çözümlemesi ile destekleyen gerekçelendirmeler

Handwritten work showing the expansion of $(10a+b)(10c+d)$ and a multiplication table for $(a.d/b.d)$. The student correctly identifies the place value of the digits and explains the carry-over process.

Öğretmen adaylarının sınıf düzeylerine ait gerekçelendirme kategorilerine dağılımları Tablo 99'da sunulmuştur.

Tablo 99

EPT 1. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı

	Seviye 0	Seviye 1	Seviye 2	Seviye 3	Seviye 4
1.Sınıf	6 (%15)	12 (%30)	7 (%17,5)	12 (%30)	3 (%7,5)
2.Sınıf	6 (%15)	18 (%45)	5 (%12,5)	7 (%17,5)	4 (%10)
3.Sınıf	2 (%5)	12 (%30)	10 (%25)	14 (%35)	2 (%5)
4.Sınıf	1 (%2,5)	9 (%22,5)	4 (%10)	18 (%45)	8 (%20)
Toplam	15 (%9,375)	51 (%31,875)	26 (%16,25)	51 (%31,875)	17 (%10,625)

Tablo 99 incelendiğinde öğretmen adaylarının toplamda %42'sinin Seviye 3 ve Seviye 4 düzeylerinde gerekçelendirme sundukları görülmektedir. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarında bu oran %65'e kadar çıkmaktadır. Tüm öğretmen adaylarının %16'sı ise örnek vererek ispat etme yaklaşımında bulunmuştur (Seviye 2). %41'i ya hiç gerekçe sunmamış ya da yetersiz açıklamalarda bulunmuştur.

İlkokul seviyesinden başlanarak çarpma işleminde yapılan bu sola kaydırma ile ilgili öğretmen adaylarının yeterince gerekçe sunamaması, kaydırma hamlesinin matematiksel alt yapısını açıklayamamaları öğretim tecrübesi sırasında bir öğrencinin soracağı "Neden sola kaydırıyoruz öğretmenim?" sorusunda bocalama yaşayacaklarının göstergesi olarak kabul edilebilir.

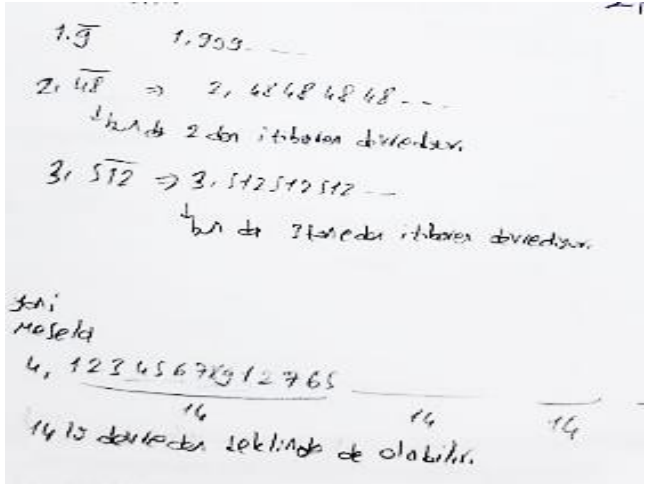
4.4.2. Devirli sayıların en fazla 10. basamaktan itibaren devretmeye başlayacağı önermesine yönelik bulgular

Testin ikinci sorusunda öğretmen adaylarına, “Bir a/b rasyonel sayısı (a ve b tam sayı ve b sıfırdan farklı) ondalık gösteriminde virgülden sonra en fazla 10. basamaktan sonra devretmeye başlar. Çünkü 10 tane rakam vardır.” önermesinin doğruluğu sorulmuştur. a 'yı b 'ye bölme sürecinde kalana sıfır konarak ilerleme yapıldığında kalan daha önce yanına sıfır konulan kalanlardan biri ile aynı sayı olduğunda bölüm devretmeye başlamaktadır. Ancak bu durum ile ilgili bir basamak sınırı yoktur. Örneğin, $53/83$ sayısı 41. basamaktan sonra devretmektedir. Bu soruda öğretmen adaylarının rakamların farklı kombinasyonlarını da hesaba katıp önermenin yanlışlığını belirtmeleri beklenmiştir. Tablo 100'de her bir kategoriye ait örnekler sunulmuştur.

Tablo 100

EPT 2. soruya ait yanıtlardan örnekler

Kategoriler	Öğretmen adaylarının yanıtlarından kategoriye ait örnekler
Seviye 0: Önermenin doğru olduğunu belirten yanıtlar	Doğrudur çünkü virgülden sonra aynı rakam tekrar ettiğinde ondan sonraki rakamların sırası aynı olacaktır çünkü kalan aynıdır.
Seviye 1: Önermenin yanlışlığını belirten ancak yeterli açıklama içermeyen yanıtlar	“ $\frac{a}{b}$ rasyonel sayısının ondalık gösteriminde virgülden sonra en fazla 10. basamaktan itibaren devretmeye başlar. Çünkü 10 tane rakam vardır” önermesi yanlıştır. Çünkü rakamların sayısı ile alakalı bir durum değildir. Elimizde olan rasyonel sayı ile alakalıdır.

Seviye 2: Önermenin yanlışlığını deneysel olarak gösteren ancak genel açıklama içermeyen yanıtlar	
Seviye 3: Bir örnek üzerinden genelleştirici açıklama yapılan yanıtlar	Bence yanlıştır. Çünkü her rakamı bir kez kullanmak zorunda değiliz. a sayısı 12 basamaklı bir sayı olursa ve b sayısı 999999999999 olursa a sayısı kendini tekrarlar. Yani 12 basamak yazılıp tekrar 12 basamak yazılır. Bu yüzden bu önerme yanlıştır.
Seviye 4: Rakamların farklı kombinasyonlarla bir araya gelebileceğini ve bu nedenle tekrarın ilk gelen aynı rakamla birlikte başlamak zorunda olmadığını ifade eden yanıtlar	Yanlıştır, çünkü devretmek aynı sayının tekrarıyla mümkün olur. 10 tane rakam olabilir ama 10! farklı kombinasyon oluşabilir. Bu da 10. basamağın çok daha üstü demektir.

Öğretmen adaylarının sınıf düzeylerine göre gerekçelendirme kategorilerine dağılımları Tablo 101’de sunulmuştur.

Tablo 101

EPT 2. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı

	Seviye 0	Seviye 1	Seviye 2	Seviye 3	Seviye 4
1.Sınıf	25 (%62,5)	6 (%15)	1 (%2,5)	4 (%10)	4 (%10)
2.Sınıf	21 (%52,5)	7 (%17,5)	3 (%7,5)	5 (%12,5)	4 (%10)
3.Sınıf	30 (%75)	3 (%7,5)	2 (%5)	3 (%7,5)	2 (%5)
4.Sınıf	18 (%45)	4 (%10)	7 (%17,5)	7 (%17,5)	4 (%10)
Toplam	94 (%58,75)	20 (%12,5)	13 (%8,125)	19 (%11,875)	14 (%8,75)

Tablo 101 incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık %60'ının Seviye 0 düzeyinde kaldıkları görülmüştür. Bu öğretmen adayları soruya hiç yanıt vermemiş veya önermenin doğru olduğunu ifade etmiştir. Seviye 2 ve üzeri yani aksi örnekler gösteren, yanlışlığını deneysel veya analitik ispatlarla açıklamaya çalışan öğretmen adayları yaklaşık olarak %28'de kalmıştır. En iyi durumun dördüncü sınıf öğretmen adaylarında olduğu görülse de o sınıf düzeyinde de %55'lik bir çoğunluk Seviye 0 ve Seviye 1 düzeyinde açıklamalarda bulunmuştur.

Görüşme yapılan sekiz öğretmen adayının dördü devirli bir ondalık sayının ondalık kısmının 10. basamağından sonra da devredebileceğini açıklamıştır. Ancak geriye kalan dört öğretmen adayından Tuğçe (1. sınıf), a/b rasyonel sayısının hiç devretmeyebileceğini de ifade etmiştir. Tuğçe ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekilde olmuştur:

T: Daha ilerde de devredebilir. Hiç devretmeyebilir.

A: Yani bir a/b sayısının ondalık gösterimi hiç devretmeden sonsuza kadar gidebilir mi?

T: Evet gidebilir.

A: Ondalık kısmı devretmeden sonsuza giden sayılar rasyonel midir?

T: Ondalık olarak bakınca irrasyonel olur. Ama a/b şeklinde yazılan sayılara rasyonel sayı demiştim. Tanımla mı çelişti?

A: a/b rasyonel sayısında payı paydaya bölünce çıkan ondalık sonuç irrasyonel bir sayı olabilir mi yani?

T: Yani evet öyle oluyor mesela π sayısında da çevreyi çapa bölüyorduk. Ama π irrasyonel demek oluyormuş.

A: Çevre ve çap aynı anda ikisi de tam sayı mı peki?

T: Onu bilmiyorum. Ama olabilir. Emin değilim.

Tuğçe'nin rasyonel sayı ve irrasyonel sayılarla ilgili olan kavram yanlışlarının devirli sayılarla ilgili olan bu soruda güçlük çekmesine neden olduğu söylenebilir. Tuğçe, a/b şeklinde yazılan bir ifadenin rasyonel sayı olduğunu bilmesine rağmen aynı sayının ondalık gösteriminin irrasyonel sayı olabileceğini belirtmiştir. Bu düşüncesini de π sayısının çevre/çap oranıyla desteklemiştir. Araştırmacının çevre veya çapın aynı anda tam sayı olamayabileceği hatırlatmasına ise net bir yanıt verememiştir.

Diğer üç öğretmen adayı Burçe (1.sınıf), Çise (2. sınıf) ve Simre (3. sınıf) önermenin doğruluğunu ifade etmiştir. Burçe, a 'nın b 'ye bölünme sürecini göz önüne alarak, "Kalanlar bir süre sonra aynı sayılar gelmeye başlar, kalan aynı sayı olduğu an devretmeye başlar. En fazla 10 rakam olduğu için en kötü ihtimalle 10. basamaktan itibaren

devretmeye başlar. Önerme doğrudur.” açıklamasını yapmıştır. Önermenin doğruluğunu ifade eden Çise ile araştırmacı arasında geçen konuşma aşağıdaki gibidir:

Ç: İki basamaktan devreden de var. 3. basamaktan devreden de var. Ama mesela hiç 5. basamaktan itibaren devreden denk gelmedi daha fazlasını da görmedim.

A: Peki imkansız mıdır yoksa sen mi görmedin?

Ç: Yoo değildir herhalde. Ben görmedim.

A: Peki 10. basamaktan sonra mesela 15. basamaktan itibaren devretmeye başlayan var mıdır?

Ç: Yok, bence o kadar da yoktur. En fazla 9. basamaktan sonra devreden vardır.

A: Neden 9 dedin?

Ç: 10 tane rakam var ama sıfırın etkisi olacağını sanmıyorum.

A: Neye etkisi olmaz sıfırın?

Ç: Devreden kısımda olmaz. Kısalarda olursa olur.

Görüldüğü gibi Çise devirli ondalık gösterimlerle ilgili daha önce karşılaştığı örneklerden yola çıkarak çıkarımlarda bulunmuştur. a/b ifadesindeki bölme sürecini göz önüne almamıştır. Benzer şekilde 3. sınıf öğretmen adayı Simre de “En fazla üçerli devreder. Dörderli hiç görmedim ben mesela. 2,333... olur; 0,3535... olur; 0,124124... olur.” yorumunda bulunmuştur. Araştırmacının, “Dörderli olmaz mı?” sorusuna “Hiç görmedim ama mantıken olabilir. 10 rakam olduğu için soruda belirtildiği gibi 10’arlı olur en fazla.” şeklinde yanıt vermiştir. Simre de Çise gibi, rasyonel sayı kavramından veya a/b oranındaki bölme sürecinden bağımsız olarak daha önce karşılaştığı ondalık gösterimlerden yola çıkarak yorum yapmıştır. Her iki öğretmen adayı da 10 rakam olduğunu bildiği halde bu 10 rakamın farklı dizilişlerle de yan yana gelebileceğini hesaba katmamıştır.

4.4.3. $0, \bar{a} = \frac{a}{9}$ eşitliğinin gerekçesine yönelik bulgular

Epistemik testin üçüncü sorusunda öğretmen adaylarına $0, \bar{a} = \frac{a}{9}$ eşitliğinin gerekçesi sorulmuştur. Öğretmen adaylarından bu eşitliği formel olarak ispatlamaları beklenmiştir. Öğretmen adaylarının yapmış olduğu gerekçelendirmeler seviyelere ayrılmış, her bir seviyeye ait örneklerden birer tanesi Tablo 102’de sunulmuştur.

Tablo 102

EPT 3. soruya ait yanıtlardan örnekler

Kategoriler	Öğretmen adaylarının yanıtlarından kategoriye ait örnekler
Seviye 0: Gerekçesiz veya 9 rakamının bulunması ile ilgili yanlış gerekçeli yanıtlar	Size sadece kuralı öğrettikleri için bu eşitliğin ispatını yapabilmek için hiçbir bilgiye sahip değilim sanırım. Namelde 10 tane rakamımız vardı. Ama ondan kısma 0 yazılacağı, Sayı terimsiz yazacağı için 0'ı almamız ve geriye 9 rakam kalır. 0 yüzden birşeyden sonraki sayı 9'da biteriz
Seviye 1: Kurala dayalı yanıtlar	$0,\overline{a} = \frac{\text{sayının tamamı} - \text{deciimal kısmı}}{\text{virgülden sonra deki rakam sayısı}}$ $0,\overline{a} = \frac{a-0}{9} = \frac{a}{9}$
Seviye 2: Tek bir sayı örneği ile yapılan deneysel ispatlar	$0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $0,33333 \dots$ $\frac{3}{10-1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $x = 0,\overline{3} = 0,33333 \dots = \frac{1}{3}$ $10x = 3,33333 \dots$ $- x = 0,33333 \dots$ $9x = 3$ $x = \frac{1}{3}$

Seviye 3: a'nın 9'a bölünmesi ile ilgili yapılan genelleme çalışmaları	$a \equiv a \pmod{9}$ olduğu için örneğin: $\begin{array}{r} 2.10 \quad \quad 9 \\ - 9.2 \quad \quad 0,999... \\ \hline 20 \\ - 9.2 \\ \hline 20 \\ - 9.2 \\ \hline 20 \dots \end{array}$ 0 yazar $\frac{a}{9} = 0,\overline{a}$ olur. Örneğin: $\frac{60}{9} = 6,66\dots$ Örneğin: $\frac{70}{9} = 7,77\dots$
Seviye 4: Cebirsel gösterimlerle yapılan analitik ispatlar	$0,\overline{a} = 0,9999\dots$ $0 + \frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \frac{a}{1000} + \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{a}{10^{n+1}}$ $= a \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{a}{10} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{10^k} \right)$ $= \frac{a}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{a}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{a}{9}$ $x = 0,999999\dots$ $10x = 9,999\dots$ $10x - x = 9,0000\dots$ $9x = 9$ $x = \frac{9}{9} = 1$ yani $0,\overline{9} = \frac{9}{9}$

Öğretmen adaylarının yanıtlarının her bir seviyeye göre dağılımı Tablo 103'te verilmektedir:

Tablo 103

EPT 3. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı

	Seviye 0	Seviye 1	Seviye 2	Seviye 3	Seviye 4
1.Sınıf	17 (%42,5)	13 (%32,5)	5 (%12,5)	1 (%2,5)	4 (%10)
2.Sınıf	5 (%12,5)	27 (%67,5)	5 (%12,5)	1 (%2,5)	2 (%5)
3.Sınıf	13 (%32,5)	18 (%45)	3 (%7,5)	1 (%2,5)	5 (%12,5)
4.Sınıf	11 (%27,5)	15 (%37,5)	7 (%17,5)	2 (%5)	5 (%12,5)
Toplam	46 (%28,75)	73 (%45,625)	20 (%12,5)	5 (%3,125)	16 (%10)

Öğretmen adaylarının yarıya yakını $0,\overline{a} = \frac{a}{9}$ eşitliğinin ispatını yapamamış devirli sayıların rasyonel hale getirilmesinde geçerli olan kuralın uygulamasını yapmışlardır. Yaklaşık %29'u ise Seviye 0 kategorisinde yer alabilecek yanıtlar vermiş veya bu eşitliğin nedenini bilmediklerini ifade etmiştir. Sadece öğretmen adaylarının %13'ü 3. ve 4. seviye gerekçelendirmelerde bulunmuştur. Seviye 4'te yer alan ispatlamaların hemen hemen

hepsinde öğretmen adayları 0,aaa... sayısını x 'e eşitleyip eşitliğin her iki tarafını da 10 ile çarparak sayıyı a,aaa... şekline dönüştürmüş ve iki sayının farkını almıştır. Böylece $9x$, a 'ya eşit olmuş ve $x=a/9$ eşitliği ispatlanmıştır. Son sınıf iki öğretmen adayı ise seri açılımından yararlanarak ispatta bulunmuştur.

Görüşme yapılan öğretmen adaylarına öncelikle devirli sayıları kesirli biçimde yazabilmenin kuralı sonra da eşitliğin nedeni sorulmuştur. Sadece 2. sınıf öğretmen adayı Çise eşitliği kanıtlayabilmiştir. Ancak o da kuralı ifade ederken pay kısmında “Tüm sayıdan devreden kısım çıkarılır.” şeklinde hatalı bir açıklama yapmıştır. Bir sayı örneği üzerinde deneme yapmış ve payı paydaya bölünce devirli gösterimi vermediğini görmüştür. Daha sonra, “Tüm sayıdan devretmeyen kısmı çıkaracaktık. Yanlış hatırladım.” düzeltmesini yapmıştır. Bu kuralın ispatı sorulduğunda, “Genel matematik dersinde görmüştük. Hatta ölçekte yapmıştım.” yanıtını vermiş ve bir süre düşündükten sonra ispatı yapabilmiştir.

Görüşme yapılan diğer öğretmen adayları ise Seviye1’de yer alan kurala dayalı açıklamalar yapmıştır. 1. sınıf öğretmen adayı Burçe, “Bu bir kuraldır. Öğrencilerime de bunun kural olduğunu ve bu şekilde ezberlemesi gerektiğini söylerim. Nedenini açıklayamam çünkü ben de bilmiyorum. Bana da açıklamadı şimdiye kadar kimse.” açıklamasını yapmıştır. 2. sınıf öğretmen adayı Halit de benzer şekilde, “Ben bu kuralı kendin bile tam hatırlamıyorum. Bunun ispatını hiç yapamam. Öğrenci sorarsa da kitaba yönlendiririm.” yanıtını vermiştir. İki öğretmen adayına da kuralın ne olduğu sorulduğu zaman doğru yanıt vermişlerdir. 4. sınıf öğretmen adaylarının yanıtları da çok farklı değildir. Maksude, “Kural öyle. Bu kuralın gerekçesini bilmiyorum. Bir örnek vererek gösterilebilir. Ama matematiksel olarak nasıl ispat edilir bilmiyorum.” yanıtını vermiştir. Şeyma ise bu kuralın bir keşif sonucu ortaya çıkabilmiş olabileceğini ifade etmiştir. “Neden 9 koyuyoruz bilmiyorum. Hep dokuzlu şeyler konuyor 9 gibi 99 gibi falan. Bence bunu geçmişte bulanlar denediler tek tek ve kural oluşturdular. Beşe, altıya falan değil de dokuz bölünce böyle gittiğini buldular. Sonuçta eski dönemlerde bu tür şeylerle çok uğraşmışlar. Bunlarla da uğraşmışlardır.”

Görüldüğü gibi görüşme yapılan öğretmen adaylarının birçoğunda sınıf seviyesi gözetmeksizin otoriteye dayalı gerekçelendirmelerin olduğu anlaşılmıştır. Öğretmen adayları kuralın nedenini bilmemekte ve matematiksel bir çözüm yolu bulamamaktadır.

4.4.4. Çarpımları irrasyonel olan iki sayıdan biri rasyonel ise diğ erinin irrasyonel olma gerekçesine yönelik bulgular

Epistemik testin dördüncü sorusunda öğretmen adaylarına “A sayısının rasyonel oldu ğ u ve A.B sayısının irrasyonel oldu ğ u biliniyorsa B kesinlikle irrasyoneldir.” önermesi verilmiş olup bu önermenin doğrulu ğ u veya yanlışlığını ispatlamaları istenmiştir. B sayısının rasyonel olması durumunda A.B’nin irrasyonelli ğ i ile çelişkili bir durum oluşacağından B kesinlikle irrasyonel bir sayıdır. Öğretmen adaylarının önermeye ilişkin yanıtları seviyelere ayrılmış ve her bir seviyede yer alan örnekler Tablo 104’te sunulmuştur.

Tablo 104

EPT 4. soruya ait yanıtlardan örnekler

Kategoriler	Öğretmen adaylarının yanıtlarından kategoriye ait örnekler
Seviye 0: B’nin rasyonel olabileceğini belirten yanıtlar	A.B = irrasyonel kesinlikle değildir. Çünkü iki tane rasyonel sayıyı çarpınca irrasyonel olmaz. $23 \cdot \frac{1}{7} = \frac{23}{7} = \pi$ bir sayı elde ettim
Seviye 1: B’nin irrasyonel olması gerektiğini belirten ancak yeterli açıklamaya sahip olmayan yanıtlar	A rasyonel olursa cevabın irrasyonel olması için B sayısının da irrasyonel olması gerekir. Doğrudur
Seviye 2: Sayı örne ğ i kullanılarak yapılan deneysel açıklamalar	A.B = A.B İki rasyonel sayının çarpımı hiçbir zaman irrasyonel sayı etmez. A.B çarpımının irrasyonel oldu ğ u biliniyorsa, B kesinlikle irrasyoneldir. Örne ğ e bakalım. 2. B = $\sqrt{2}$ seçimi: ele alalım. $B = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ elde oldu. B sayı irrasyoneldir.

Seviye 3: Rasyonel sayıların kapalılık özelliğini belirtme gibi sözel açıklamalarla yapılan ispatlama çalışmaları	Önerme doğrudur. Çünkü rasyonel sayılarda çarpma işleminin kapalılık özelliği vardır. Dolayısıyla iki rasyonel sayının çarpımı irrasyonel sayı olamaz. Kapalılığı bozarsa 0 halde B kesinlikle irrasyoneldir.
Seviye 4: Çelişki bulma yöntemi gibi formel ispat yöntemleri ile yapılan ispatlama çalışmaları	Varsayalım ki B rasyonel olsun. $A = \frac{a}{b} \quad (a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$ $B = \frac{c}{d} \quad (c, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0) \text{ olmak üzere}$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{f}{e} \quad (f, e \in \mathbb{Z}, e \neq 0) \text{ şeklinde}$ gösterebiliriz. Bu sonuç rasyoneldir. Bu sonuç hipotezimizle çeliştiğinden varsayımımız yanlıştır. Birrasyoneldir.

Öğretmen adaylarının önerme ile ilgili yanıtlarının gerekçelendirme seviyelerine göre dağılımı Tablo 105'te verilmektedir:

Tablo 105

EPT 4. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı

	Seviye 0	Seviye 1	Seviye 2	Seviye 3	Seviye 4
1.Sınıf	8 (%20)	11 (%27,5)	19 (%47,5)	1 (%2,5)	1 (%2,5)
2.Sınıf	8 (%20)	7 (%17,5)	21 (%52,5)	2 (%5)	2 (%5)
3.Sınıf	3 (%7,5)	11 (%27,5)	15 (%37,5)	3 (%7,5)	8 (%20)
4.Sınıf	10 (%25)	14 (%35)	9 (%22,5)	1 (%2,5)	6 (%15)
Toplam	29 (%18,125)	43 (%26,875)	64 (%40)	7 (%4,375)	17 (%10,625)

Tablo 105'te görüldüğü üzere öğretmen adaylarının %15'i 3. ve 4. Seviye gerekçelendirmelerde bulunmuştur. Formel ispat yapabilen sadece 17 öğretmen adayı olmuştur. Bu öğretmen adaylarının 14'ü üçüncü ve dördüncü sınıf düzeyinde yer almaktadır. B sayısının irrasyonelliğini A'ya ve B'ye örnek sayılar vererek gösteren öğretmen adayları Seviye 2'de yer almaktadır. Bu öğretmen adayları tüm grubun yarıya yakınına %40'ını oluşturmaktadır. 29 öğretmen adayı ise B sayısının rasyonel sayı da olabileceğini ve önermenin doğru olduğunu belirtmiştir. Bu yanıtlardan en dikkat çekici sayılabilecek olanlardan bir tanesi A.B'nin 22/7'ye eşit olacak şekilde A ve B sayılarının

verilmesi olmuştur. $22/7$ 'nin π sayısına eşit olduğu yanlışlığıyla hareket eden bu öğretmen adayları iki rasyonel sayının çarpımından irrasyonel sayı da oluşabileceğini belirtmiştir. Seviye 0'da yer alan yanıtlar incelendiğinde öğretmen adaylarının irrasyonel sayı kavramı ile ilgili yanlışlarının epistemik bilgi düzeylerini de etkilediği dikkat çekmiştir.

4.4.5. Ardışık sayıların aralarında asallık gerekçesine yönelik bulgular

Epistemik testin beşinci sorusunda “Ardışık sayılar aralarında asaldır.” önermesinin doğruluğunu veya yanlışlığının ispatlanması istenmiştir. Ardışık sayıların EBOB’ları 1 olup sayılar aralarında asaldır. Ancak bu önermenin doğruluğu da ispat gerektirmektedir. Öğretmen adaylarının önermeye ilişkin yapmış oldukları açıklamalar seviyelere ayrılmış, her bir seviyeye ilişkin örnekler Tablo 106’da sunulmuştur.

Tablo 106

EPT 5. soruya ait yanıtlardan örnekler

Kategoriler	Öğretmen adaylarının yanıtlarından kategoriye ait örnekler
Seviye 0: Önermeyi yanlış kabul edenler, ardışık sayıların birbirine bölümlerinin tam sayı olmasının aralarında asallığın gereği olduğu düşüncesiyle yapılan gerekçelendirmeler veya gerekçe sunulmayan örnekler	$A = \{ 1, 2, 3, 4, \dots, n, n+1, \dots \}$ $P: \frac{n+1}{n} \in \mathbb{Z}, n \neq 1$ $\Rightarrow \frac{n}{n} + \frac{1}{n} \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \quad n \neq 1 \text{ olduğu için}$ $\frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$ $\boxed{\Rightarrow \frac{n+1}{n} \notin \mathbb{Z}}$
Seviye 1: Önermenin doğruluğunu, ardışık sayıların EBOB’larının 1 olduğunu belirten ancak ispatlama içermeyen yanıtlar	“Ardışık sayılar aralarında asaldır.” önermesi doğrudur. n ile $n+1$ ardışık sayılarına düşün. İkisinin ortak böleni sadece 1’dir. Başka ortak böleni olmadığı için aralarında asaldır.

Seviye 2: Ardışık sayıların bölenlerini bulup sadece 1'in ortak bölen olduğunu gösteren deneysel yanıtlar	Doğrudur. Örneğin, 34 ve 35 sayıları tek başlarına değerlendirecek olursak 34; 2 ve 17'ye bölünür, 35 7 ve 5'e bölünür ama 2 sayısında 1'den başka ortak hiç bir bölenleri yoktur. Bu yüzden ardışık sayılar aralarında asaldır.
Seviye 3: Ardışık sayıların ortak bir asal çarpanının bulunamayacağı sözel açıklamalarla desteklenen yanıtlar	Doğrudur. $A = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \dots$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılabilir. Ardışığı olan $A+1$ sayısı $A+1 = (2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \dots) + 1$ şeklinde dir. $A+1$ sayısı ile A sayısı arasında ortak bir çarpan bulunamaz çünkü bir düzenleme yapılamayacağından ardışık A ve $A+1$ sayıları aralarında asaldır.
Seviye 4: Formel yanıt içeren analitik ispatlar	$(a, a+1) = d$ olsun. $\Rightarrow d a \wedge d a+1$ $\Rightarrow \exists k_1 \wedge a = d \cdot k_1 \wedge \exists k_2 \wedge a+1 = d \cdot k_2$ $\Rightarrow 1 = d \cdot k_2 - d \cdot k_1 = d(k_2 - k_1) = d \cdot k_3$ $\Rightarrow d 1, d \text{ pozitif} \Rightarrow d=1$

Öğretmen adaylarının önermeye ilişkin vermiş oldukları yanıtların gerekçelendirme seviyelerine göre dağılımı Tablo 107'de verilmiştir.

Tablo 107

EPT 5. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı

	Seviye 0	Seviye 1	Seviye 2	Seviye 3	Seviye 4
1.Sınıf	3 (%7,5)	25 (%62,5)	12 (%30)	0 (%0)	0 (%0)
2.Sınıf	6 (%15)	23 (%57,5)	11 (%27,5)	0 (%0)	0 (%0)
3.Sınıf	1 (%2,5)	24 (%60)	14 (%35)	0 (%0)	1 (%2,5)
4.Sınıf	3 (%7,5)	13 (%32,5)	6 (%15)	3 (%7,5)	15 (%37,5)
Toplam	13 (%8,125)	85(%53,125)	43 (%26,875)	3 (%1,875)	16 (%10)

Tablo 107 incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık %61’inin Seviye 0 veya Seviye 1 kategorisinde yanıtlar verdiği görülmektedir. Bu öğretmen adayları önermenin doğruluğunu veya yanlışlığını ifade etmenin ötesinde yanıtlar verememiştir. Formel ispat yapan sadece 16 öğretmen adayı olup bu öğretmen adaylarının 15’i 4. sınıf düzeyinde okumaktadır. Ayrıca Seviye 3’te yer alan yanıtların tamamının son sınıf öğretmen adaylarına ait olduğu görülmektedir.

Görüşme yapılan 4. sınıf öğretmen adayları Şeyma ve Maksude, bu ispatı son sene “elementer sayı kuramları” dersinde gördüklerini belirtmişlerdir. Diğer sınıf düzeyindeki öğretmen adayları ise daha çok sayıları deneyerek ve çarpanlarını bularak EBOB’ların 1 olduğunu gösterme yoluna gitmiştir. Bu öğretmen adaylarından Orhan, “Böyle bir kuralın ispatı nasıl yapılır ki, sayıları denedikçe görüyoruz zaten.” açıklamasında bulunmuştur.

4.4.6. Tabanları aynı olan iki üslü sayıda çarpma kuralına yönelik bulgular

Epistemik testin 6. sorusunda öğretmen adaylarına “ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ” eşitliğinin nedeni sorulmuştur. Ortaokul 8. sınıf düzeyinde genelde “Tabanları aynı olan iki üslü sayının çarpımında üsler toplanır.” şeklinde bir kural olarak belirtilen eşitliğin gerekçesi öğretmen adaylarından öğrenilmek istenmiştir. Üslü sayıların açılımı ile kolaylıkla gösterilebilecek eşitlikle ilgili öğretmen adaylarının yanıtları kategorilere ayrılmıştır. Her bir kategoriye ait yanıtlar Tablo 108’de örneklendirilmiştir.

Tablo 108

EPT 6. soruya ait yanıtlardan örnekler

Kategoriler	Öğretmen adaylarının yanıtlarından kategoriye ait örnekler
Seviye 0: Gerekçe belirtilmeyen veya hatalı açıklamalar içeren yanıtlar	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $a^x \cdot a^y$ - den birer parantez gibi düşünürsek $a(1^x + 1^y) = a(1^{x+y}) = a^{x+y}$ olur.
Seviye 1: Kuralın sözel olarak ifade edildiği veya farklı dışsal gerekçelerin sunulduğu yanıtlar	Tabanları aynı üstleri farklı olan iki sayının çarpımında, tabanları aynı olduğu için üstleri topluyoruz. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
Seviye 2: Hem tabana hem üsse sayı verilerek yapılan deneysel açıklamalar	$a = 2$, $x = 3$, $y = 4$ olsun. $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ Çarpım durumunda olduğunda aynı sonucu verdiğinden üsleri topluyoruz.
Seviye 3: Formel ispata yakın sözel açıklamalar ya da taban veya üslere sayı verilerek yapılan ispatlama girişimleri	$x = 3$ $y = 4$ $a^3 \cdot a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7 = a^{3+4}$
Seviye 4: İki üslü ifadenin çarpımının açınımları kullanılarak gösterilmesi veya logaritmadan yararlanılarak yapılan cebirsel ispatlar	$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{x \text{ tane}}$ $a^y = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{y \text{ tane}}$ $a^x \cdot a^y = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{x+y \text{ tane}} = a^{x+y}$

Üslü ifadelerin çarpımında üslerin toplanması ile ilgili soruya ilişkin öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtların gerekçelendirme seviyelerine göre dağılımı Tablo 109'da sunulmuştur.

Tablo 109

EPT 6. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı

	Seviye 0	Seviye 1	Seviye 2	Seviye 3	Seviye 4
1.Sınıf	1 (%2,5)	8 (%20)	19 (%47,5)	3 (%7,5)	9 (%22,5)
2.Sınıf	1 (%2,5)	15 (%37,5)	8 (%20)	2 (%5)	14 (%35)
3.Sınıf	3 (%7,5)	6 (%15)	9 (%22,5)	0 (%0)	22 (%55)
4.Sınıf	2 (%5)	0 (%0)	13 (%32,5)	2 (%5)	23 (%57,5)
Toplam	7 (%4,375)	29(%18,125)	49 (%30,625)	7 (%4,375)	68 (%42,5)

Tablo 109 incelendiğinde 1. sınıf ve 2. sınıf öğretmen adaylarında kurala dayalı gerekçeler sunan veya gerekçe sunmayan Seviye 0 ve Seviye 1 kategorilerinde yer alan öğretmen adaylarının 3. ve 4. sınıf öğretmen adaylarına göre daha az sayıda olduğu görülmektedir. Özellikle son sınıf öğretmen adaylarından sadece iki tanesi Seviye 1 ve altında yanıtlar vermiştir. Öğretmen adaylarının yaklaşık %31'i sayı örnekleri ile ispatlamalar yapmış, cebirsel dili tercih etmemiştir. 1. sınıf öğretmen adaylarının yarıya yakını (%47,5) bu şekilde örnek temelli deneysel ispatlama yoluna gitmiştir. Üslü ifadelerin cebirsel olarak açınımından ve her birinin adet toplamından yola çıkarak yapılan ispatlamalar 3. sınıf ve 4. sınıf öğretmen adaylarında %50'den fazla olmak üzere tüm öğretmen adaylarının %42,5'ini oluşturmuştur. Bu soru 4. Seviyede yer alan öğretmen adaylarının oranının en yüksek olduğu sorulardan biridir. Öğretmen adaylarının büyük bir kısmı üslü ifadenin açınımından yararlanarak gerekçelendirmede bulunmuştur.

Görüşme yapılan öğretmen adaylarında da farklı seviyelerde yanıtlara rastlanmıştır. 1. sınıf öğretmen adaylarından Tuğçe daha önce bu kuralın ispatı ile karşılaşmadığını ifade etmiş ve ispat yapamamıştır. 3. sınıf öğretmen adayı Orhan, “Sayıları açarız. Zaten 3 tane 2’nin çarpımı ve 5 tane 2’nin çarpımı 8 tane 2’nin çarpımı eder. Bu şekilde ispat ederim ama cebirsel olarak ispatını yapamam.” şeklinde deneysel bir gerekçelendirme sunmuştur. 2. sınıf öğretmen adayı Çise de önce Orhan gibi sayı örneği vermiş ancak daha sonra “m tane a ve n tane a’nın çarpımlarını yan yana getirince m + n tane a’nın çarpımı olur.” şeklinde cebirsel yaklaşımda bulunmuştur. Görüşme yapılan diğer öğretmen adayları da benzer şekilde deneysel veya cebirsel gerekçeler sunmuştur.

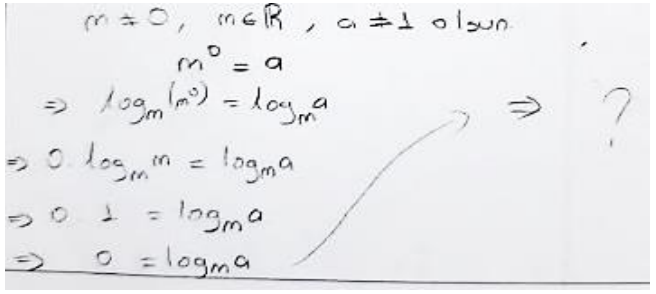
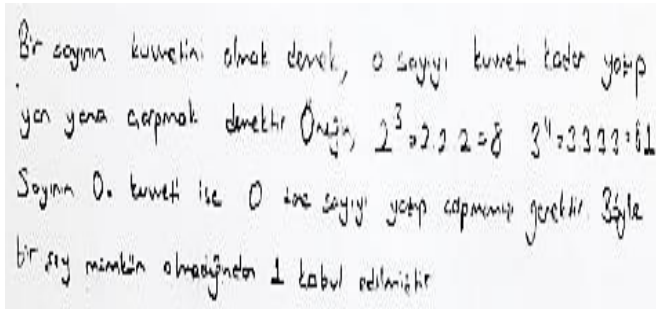
4.4.7. $a^0 = 1$ eşitliğinin gerekçesine yönelik bulgular

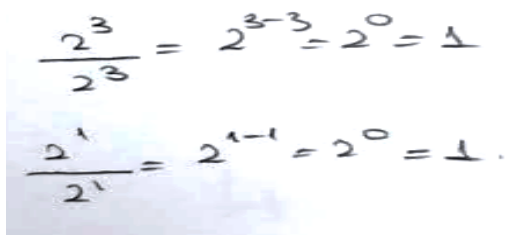
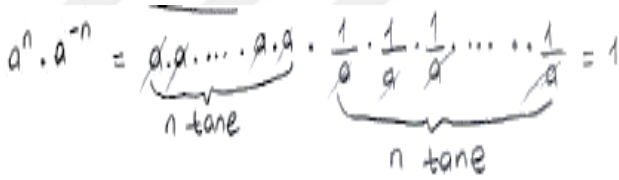
Öğretmen adaylarına epistemik testin 7. sorusunda sıfır hariç her sayının sıfıncı kuvvetinin 1 olmasının gerekçesi sorulmuştur. Ortaokul düzeyinden itibaren sürekli kullanılan bu eşitliğin altında yatan matematiksel gerekçenin öğretmen adayları tarafından bilinmesi beklenmektedir.

a^x ve a^{-x} üslü ifadelerinin çarpımında a^{-x} 'in ters çevrilerek yazılıp sadeleştikten sonra 1'in elde edilmesi ve aynı zamanda üslerin toplamının sıfırı vermesi nedeni ile $a^{x-x} = a^0 = 1$ eşitliği elde edilebilir. a^y ifadesini çarpmada birim eleman yani 1 olarak kabul ederek $a^x \cdot a^y = a^x$ ifadesinden ve tabanları aynı iki üslü sayının üslerinin toplanmasından yola çıkarak $a^{x+y} = a^x$ eşitliği elde edilir. Tabanları aynı olan iki eşitlikte üsler de $x + y = x$ şeklinde eşit olur ve buradan $y = 0$ çıkar. Bu durumda çarpmanın birim elemanı olan 1, a^0 şeklinde de gösterilebilmiştir. Bu ve bunun gibi çeşitli cebirsel ispatlamalarla bu eşitlik ispat edilebilir. Öğretmen adaylarının bu soruya vermiş oldukları yanıtlar kategorilere ayrılmış ve her bir kategoriye ait örnekler Tablo 110'da sunulmuştur.

Tablo 110

EPT 7. soruya ait yanıtlardan örnekler

Kategoriler	Öğretmen adaylarının yanıtlarından kategoriye ait örnekler
Seviye 0: Eşitliğin ispatına yönelik başarısız girişimler ve gerekçe belirtmeyen yanıtlar	
Seviye 1: Eşitliğin bu şekilde kabul edildiğini ve kural olduğunu belirten dışsal gerekçelendirmeler	

Seviye 2: Sayı vererek yapılan deneysel gerekçelendirmeler	
Seviye 3: Farklı kurallardan veya örüntülerden yola çıkarak yapılan sözel açıklamalar	Çarpma işleminde 1 her zaman birim elemandır. Üslü sayılarda çarpma işleminde tabanlar aynıyken üsleri toplarız. topladığımızda üssün değişmemesi için x^0 ($x \neq 0$) her zaman 1 dir.
Seviye 4: Üslü ifadelerle ilgili diğer kurallardan da yararlanarak cebirsel gösterimle verilmiş formel yanıtlar	

Öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtların gerekçelendirme seviyelerine göre dağılımı sınıf seviyeleri de göz önünde bulundurularak Tablo 111’de verilmiştir.

Tablo 111

EPT 7. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı

	Seviye 0	Seviye 1	Seviye 2	Seviye 3	Seviye 4
1.Sınıf	18 (%45)	17 (%42,5)	2 (%5)	1 (%2,5)	2 (%5)
2.Sınıf	11 (%27,5)	27 (%67,5)	0 (%0)	2 (%5)	0 (%0)
3.Sınıf	8 (%20)	19 (%47,5)	6 (%15)	2 (%5)	5 (%12,5)
4.Sınıf	11 (%27,5)	14 (%35)	3 (%7,5)	2 (%5)	10 (%25)
Toplam	48 (%30)	77(%48,125)	11 (%6,875)	7 (%4,375)	17 (%10,625)

Tablo 111 incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık %78’inin (Seviye 0 ve Seviye 1) bir sayının sıfıncı kuvvetinin neden 1 olması gerektiği ile ilgili yeterli gerekçe sunamadığı görülmektedir. Bu durum 2. sınıf öğretmen adaylarında %95 oranındadır. Sözel veya cebirsel formel ispatla veya örüntü bularak yapılan gerekçelendirmeler tüm grubun %15’ini oluştururken Seviye 4 kategorisinde yer alan 17 öğretmenin 10’unun 4. sınıf öğretmen adayı olması dikkat çekicidir. Verilen yanıtların daha çok üslü ifadelerin tersleri de alınarak ve üslü ifadelerin diğer özelliklerinden yararlanılarak yapılan gerekçelendirmeler olduğu görülmüştür. Logaritmadan yararlanılarak yapılan gerekçelendirmeler veya bir a sayının üssünün adım adım azaltılması ve her adımda sayının

a 'ya bölünerek a^0 'ın 1'e eşit olduğunun gösterilmesi gibi ispatlama girişimlerinin de bulunduğu dikkat çekmektedir.

3. sınıf öğretmen adayı Simre, “Neden sıfır değil de 1’dir? Çünkü hiçbir şey yok değil bir şey var. Bu nedenle $2^0 = 0$ demek olmaz.” şeklinde bir açıklama yapmıştır. Yazılı yanıtlarda da buna benzer açıklamalar yer almıştır. Benzer bir açıklama da 2. sınıf öğretmen adayı Çise yapmıştır. Araştırmacı ile aralarında geçen diyalog şu şekilde olmuştur:

Ç: Bunun bayağı bir detaylı ispatı vardı sanki öyle hatırlıyorum. 5^2 demek iki tane beşin çarpımı demek, 5^1 demek bir tane beş demek ama 5^0 da sıfır tane beşin çarpımı demek. Olmaz öyle bir şey. O yüzden 1’dir.

A: Neden olmasın? Bu sence ikna edici oldu mu?

Ç: Ben kendim bile ikna olmadım. Bunun detaylı bir açıklaması var da ama hiç bakmadım. Ali Nesin’in matematik köyünde bunun ispatını yapmışlar ve videoya çekmişler YouTube’da gördüm. Sonra izlerim dedim ama sonra bir daha bakmadım.

Çise sayıların açınımindan yararlanarak açıklama yapmaya çalışmış ancak kendisi de yaptığı açıklamayı ikna edici bulmamıştır. 4. sınıf öğretmen adayı Şeyma ve 3. sınıf öğretmen adayı Orhan, $\log_a 1 = 0$ olmasından dolayı a^0 ifadesinin 1’e eşit olduğunu belirtmiştir. Logaritmadaki eşitliğin sebebi sorulduğunda ise öğretmen adayları onun da üslü sayılardan geldiğini farklı bir ispat yapamayacaklarını belirtmişlerdir. Son sınıf öğretmen adayı Maksude ise 10’un kuvvetlerinden örnek vermiştir. 10’un üssü kaç ise 1’in yanına o kadar sıfır konulacağını belirtmiş ve bunu sayıları çarparak göstermiştir. “ 10^0 ’da ise 1’in yanına sıfır tane sıfır koymak lazım yani hiç koymayız. Cevap 1 çıkar.” açıklamasında bulunmuştur. $10^0 = 1$ eşitliğini ifade edebilmesine rağmen tabanın farklı sayılar olduğu örneklerin gerekçesini sunamamıştır.

4.4.8. Üç ile bölünebilme kuralının gerekçesine yönelik bulgular

6. sınıf çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanı içerisinde yer alan bölünebilme kuralları öğrencilere kurallar olarak verilirken bu kuralların gerekçelerinden bahsedilmemektedir. Ancak öğretmen adayından beklenen bu kuralların altında yatan matematiksel gerekçeleri bilmeleridir. Ortaokul düzeyinde 2, 3, 4, 5, 6, 9 ve 10 ile bölünebilme kuralları görülmektedir. Üç ve dokuz ile bölünebilmede sayıların sayı değerleri toplamına bakılır. Mod 3 ve mod 9’da 10’un kuvvetleri 1’e eşit olduğu için bir sayının çözümlenmiş halinde $a \cdot 10^n$ şeklindeki her bir terimde sadece “a” rakamı kalmaktadır. Bu durumda sayının mod 3 ve mod 9’da değeri sayı değerleri toplamından oluşmaktadır.

Epistemik testin sekizinci sorusunda öğretmen adaylarına 3 ile bölünebilme kuralının gerekçesi sorulmuştur. Her bir seviyeye ilişkin örnek yanıtlar Tablo 112’de verilmiştir.

Tablo 112

EPT 8. soruya ait yanıtlardan örnekler

Kategoriler	Öğretmen adaylarının yanıtlarından kategoriye ait örnekler
Seviye 0: Gerekçesiz veya çarpan-asal sayı-kat gibi kavramların yer aldığı bölünebilme kuralı ile ilgili olmayan yanıtlar	3'e tam bölünen sayılara baktığımızda çarpanlarında en az bir tane 3 ve 3'ün katı olacak şekilde sayı vardır. Ve bu yüzden topladığımızda tam bölünür. $12 \rightarrow 2^2 \cdot 3$ $30 \rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 5$
Seviye 1: Kuralın tüm 3'ün katı olan sayıların ortak özelliğinden tanımlanması gibi ifadelerle kurala dayalı yapılan açıklamalar	3'ün katları 3, 6, 9, 12... şeklindedir. Bu sayılar üçe tam bölünür bu sayıların hepsinin rakamları toplamı yine 3'ün katını verdiğinden bu kural tanımlanmış olur.
Seviye 2: 3'e bölünebilme kuralının doğruluğunu verilen sayı örnekleri ile açıklamaya çalışan deneysel yanıtlar	Örneğin 3'e bölünmesi için katı olmalı ki 3'e bölünebilir. Örneğin veriysek; $351 \rightarrow 3+5+1=9 \rightarrow 3'ün\ katı\ olduğu\ için\ tam\ bölünür.$ Denersek; $\begin{array}{r} 351 \overline{) 117} \\ 3 \\ \underline{3} \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$ bölündüğüne gördük.

Seviye 3: Kısıtlı ancak jenerik örneklerle yapılmış, basamak çözümlemelerinden de yararlanarak oluşturulmuş gerekçelendirmeler	ab plus basamaklı sayı $a+b=34 \Rightarrow ab=3k$ dir $a+b=3k \Rightarrow ab=10a+b=9a+a+b$ $\Rightarrow 3190 \wedge 310+b \Rightarrow 310b$ der 0 halde rakamları toplamı 3'ün katı ise sayı 3'e tam bölünür.
Seviye 4: Modüler aritmetikte veya sayıların 10'luk tabanda çözümlenmiş hali üzerinde 3 parantezine alınarak yapılan formel ispatlamalar	$A = a_n \dots a_3 a_2 a_1$ şeklinde bir sayı $A = 10^{n-1} \cdot a_n + 10^{n-2} \cdot a_{n-1} + \dots + 10^2 \cdot a_3 + 10^1 \cdot a_2 + 10^0 \cdot a_1$ $\Rightarrow 10^0 \equiv 1 \pmod{3} \quad a_1 \equiv a_1 \pmod{3}$ $10^2 \equiv 1 \pmod{3} \quad a_2 \equiv a_2 \pmod{3}$ $10^3 \equiv 1 \pmod{3} \quad a_3 \equiv a_3 \pmod{3}$ $\vdots \quad \vdots$ $10^n \equiv 1 \pmod{3} \quad a_n \equiv a_n \pmod{3}$ $\Rightarrow A \equiv 10^{n-1} a_n + \dots + 10^2 a_3 + 10^1 a_2 + 10^0 a_1 \pmod{3}$ $A \equiv a_n + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \pmod{3}$

Öğretmen adaylarının 3 ile bölünebilme kuralı ile ilgili vermiş oldukları yanıtların gerekçelendirme kategorilerine göre dağılımı sınıf düzeyleri de baz alınarak Tablo 113'te sunulmuştur.

Tablo 113

EPT 8. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı

	Seviye 0	Seviye 1	Seviye 2	Seviye 3	Seviye 4
1.Sınıf	15 (%37,5)	5 (%12,5)	14 (%35)	5 (%12,5)	1 (%2,5)
2.Sınıf	14 (%35)	12 (%30)	13 (%32,5)	0 (%0)	1 (%2,5)
3.Sınıf	8 (%20)	11 (%27,5)	12 (%30)	5 (%12,5)	4 (%10)
4.Sınıf	5 (%12,5)	1 (%2,5)	6 (%15)	6 (%15)	22 (%55)
Toplam	42 (%26,25)	29 (%18,125)	45 (%28,125)	16 (%10)	28 (%17,5)

Öğretmen adaylarının %26'sı, 3 ile bölünebilme kuralı ile ilgili gerekçe gösterememiş veya "Sayının içinde 3 çarpanı olduğu için sayı üçe bölünür.", "Her bir rakam 3k şeklinde yazılabilir, bunların 10'un kuvvetleri ile çarpımı da üçün katı olur.", "Asal çarpanları içinde 3 olduğu için sayı 3'e bölünür." vb. kuralla ilgili olmayan gerekçeler sunmuşlardır. Seviye 0 kategorisinde ele alınan bu yanıtlar 1. ve 2. sınıf

öğretmen adaylarında %35'in üzerinde gerçekleşmiştir. 29 öğretmen adayı (%18,125), 3 ile bölünebilme kuralının 3'ün katlarının ortak özelliğinden yararlanılarak bulunduğu gibi ifadelerle kuralı temele alan dışsal gerekçeler sunmuşlardır. 4. sınıf öğretmen adaylarından sadece bir tanesi Seviye 1 kategorisinde yer almıştır. Öğretmen adaylarının %28'i bölünebilme kuralını sayı örnekleri vererek göstermeye çalışmış ve deneysel örneklerle gerekçelendirme yapmıştır. Öğretmen adaylarının %27,5'i ise formel ispatla veya formel ispata yakın gerekçelerle yanıt vermiştir. Seviye 4'te yer alan 28 öğretmen adayının 22'si 4. sınıf düzeyinde öğrenim görmektedir. Bu durumda son sınıf öğretmen adaylarının yarısından fazlasının formel ispat yaptığı söylenebilir.

Görüşme yapılan öğretmen adaylarından sadece 4. sınıf öğretmen adayı Şeyma geçerli açıklama yapabilmiştir. Diğer öğretmen adayları bölünebilme kurallarını bildiklerini ancak neden bazı kurallarda tüm rakamların toplandığını bazılarında son iki basamağa bakıldığını bilmediklerini ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarına hangi kuralları ispatlayabilecekleri sorulduğunda, 2, 5 ve 10 ile bölünebilme kurallarını ifade etmişlerdir. 4. sınıf öğretmen adayı Şeyma, "Elementer sayı kuramları dersinde bölünebilme kurallarını tek tek ispatladık. Sayıyı çözümleyip yapıyoruz. abcd dört basamaklı bir sayı mesela $1000a + 100b + 10c + d$ şeklinde çözümlenir. $999a + a + 99b + b + 9c + c + d$ şeklinde de yazılabilir. $999a$, $99b$ ve $9c$ zaten 3'ün katıdır. Geriye her basamaktan sadece sayı değerleri kalır. O yüzden onları toplayıp 3'ün katı mı diye bakmak yeterlidir." şeklinde geçerli sayılabilecek bir açıklamada bulunmuştur. Diğer 4. sınıf öğretmen adayı Maksude ise "Modüler aritmetikte bir ispatın olduğunu biliyorum. Ama nasıl yapıldığını hatırlamıyorum." yanıtını vermiştir.

4.4.9. Asal çarpanlara ayırarak pozitif çarpan sayısını bulma kuralının gerekçesine yönelik bulgular

Bir sayının çarpanlarının tek tek bulunması sırasında öğrenciler çarpanları eksik bulabilmektedir. Bu nedenle ortaokul düzeyinde kazanımlar arasında yer almamasına rağmen öğrenciye ona çarpan bulmada sağlamasını yapma fırsatı verecek olan "Bir sayıyı asal çarpanların çarpımı şeklinde üslü olarak yazdığımızda üslerin 1 fazlalarının birbirleriyle çarpımı sayının pozitif çarpan sayısını verir." kuralı gösterilebilir. Epistemik testin dokuzuncu sorusunda öğretmen adaylarına bu kuralın nedeni sorulmuştur. A sayısını oluşturan $p^m.q^r$ (p ve q asal) ifadesinde p'nin sıfıncı kuvvet de dahil var olan tüm kuvvetleri m+1 adettir. Üslerin 1 fazlasını alma sıfıncı kuvvetin de dahil edilmesinden kaynaklanmaktadır. Saymanın temel prensibi gereği p'nin kuvvetlerinin sayısı m+1 ve q'nun kuvvetlerinin sayısı r+1 çarpılarak oluşan tüm pozitif çarpanların sayısı bulunmuş olur. Öğretmen adaylarının bu soruya ilişkin yanıtlara vermiş oldukları gerekçelendirmeler Tablo 114'te örneklendirilmiştir.

Tablo 114

EPT 9. soruya ait yanıtlardan örnekler

Kategoriler	Öğretmen adaylarının yanıtlarından kategoriye ait örnekler
Seviye 0: Başarısız ve tamamen hatalı ispat girişimleri veya gerekçesiz yanıtlar	$p \rightarrow p \quad q \rightarrow q$ $A = p^m \cdot 1^m \cdot q^r \cdot 1^r$ $= p^m \cdot q^r \cdot 1^m \cdot 1^r$
Seviye 1: Çarpan sayısına ilişkin çeşitli denemelerle kuralın oluştuğunu belirten dışsal gerekçeler veya sadece kuralın uygulanması	$A = p^m \cdot q^r$ $27 = 3^3 \rightarrow 1, 3, 9, 27$ 4 tane $(3+1) = 4$ Bence belli bir denemeden sonra bunun böyle olduğu anlaşılmıştır.
Seviye 2: Sayıları asal çarpanlarına ayırarak kuralın uygulandığı ve aynı zamanda çarpan sayılarının da bulunduğu deneysel ispatlamalar	$12 = 2^2 \cdot 3^1 \Rightarrow 3 \times 2 = 6$ 1, 2, 3, 4, 6, 12 $\rightarrow$ çarpan sayısı $75 = 5^2 \cdot 3^1 \Rightarrow 3 \times 2 = 6$ 1, 3, 5, 15, 25, 75 $\rightarrow$ çarpan sayısı
Seviye 3: Deneysel örneklerin informel biçimde yapılmış öyküsel açıklamalarla desteklendiği yanıtlar	Günkü p $m+1$ kadar farklı sayı oluşturur. q'de $r+1$ kadar farklı sayı oluşturur. Örnek olarak 12 sayısını ek alırsak; $12 = 2^2 \cdot 3$ 2^2 ifadesi 3 tane sayı oluşturur; (2, 2^2, $2^2 \cdot 3$) 3^1 ifadesi 2 tane farklı sayı oluşturabilir. (3, $3 \cdot 2$)

Seviye 4: Üslü ifadelerin tüm kuvvetlerinin gösterildiği ve kartezyen çarpım veya kombinasyonla eşleştirmelerin yapıldığı formel açıklamalar

$$A = p^m \cdot q^r$$

$$p^m = \underbrace{p^0, p^1, p^2, p^3, \dots, p^{m-1}, p^m}_{m+1 \text{ tane } (p^0 \text{ da gelir } p^m = 1 \text{ olduğunda } A'nın \text{ çarpanıdır.})}$$

$$q^r = \underbrace{q^0, q^1, q^2, \dots, q^{r-1}, q^r}_{r+1 \text{ tane } (q^0 \text{ da gelir } q^r = 1 \text{ olduğunda } A'nın \text{ çarpanıdır.})}$$

Öyle ki A 'nın çarpanları kaç farklı şekilde seçilebilir derseniz $\binom{m+1}{1} \cdot \binom{r+1}{1}$ derseniz

ve pozitif çarpan sayısı $z(m+1) \cdot (r+1)$ bulunur.

Öğretmen adaylarının pozitif çarpan sayısı bulma kuralına ilişkin vermiş oldukları yanıtların gerekçelendirme kategorilerine göre dağılımı Tablo 115'te sunulmuştur:

Tablo 115

EPT 9. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı

	Seviye 0	Seviye 1	Seviye 2	Seviye 3	Seviye 4
1.Sınıf	7 (%17,5)	11 (%27,5)	17 (%42,5)	3 (%7,5)	2 (%5)
2.Sınıf	7 (%17,5)	10 (%25)	19 (%47,5)	3 (%7,5)	1 (%2,5)
3.Sınıf	9 (%22,5)	11 (%27,5)	15 (%37,5)	4 (%10)	1 (%2,5)
4.Sınıf	4 (%10)	9 (%22,5)	14 (%35)	3 (%7,5)	10 (%25)
Toplam	27(%16,875)	41(%25,625)	65 (%40,625)	13 (%8,125)	14 (%8,75)

Tablo 115 incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık %42'sinin Seviye 0 veya Seviye 1'de yer alan açıklamalar yaptığı görülmektedir. Hatalı yanıtların bir kısmı üslerin 1 artırılmasının gerekçesi ile ilgilidir. Bu gerekçelerden bazıları şunlardır:

- 1 sayısı asal olmamasına rağmen çarpanlara eklenir. Bu nedenle 1 fazlası alınır.
- Sayının kendisi de yer aldığı için 1 fazlalık alınır.
- p asal sayısı p ve 1 olmak üzere iki çarpandan oluşur. Bu nedenle toplam çarpan sayısı bulunurken üs 1 artırılır.

Öğretmen adaylarının %41'i Seviye 2'de yer almaktadır. Bu öğretmen adayları sayı örneklerinin tek tek çarpanlarını listelemiş ve ardından kuralı da uygulayarak çarpan sayısı ile aynı cevabın bulunduğunu göstermiştir. Öğretmen adaylarının %8'i sözel

açıklamalarla destekli asal çarpanların sıfırcı kuvvet dahi bütün üslerini göstererek ve birbirleri ile eşleştirerek gerekçelendirme yapmışlardır. 10'u son sınıfta okuyan 14 öğretmen adayı (%8,75) saymanın temel ilkesi, kombinasyon gibi matematiksel alt yapıyla ve formel yaklaşımlarla analitik ispatlamalar yapmıştır. Son sınıf öğretmen adaylarının %25'i Seviye 4'te yer almıştır.

4.4.10. Orantılı çoklukların toplamında orantı sabitinin değişmeme gerekçesine yönelik bulgular

Epistemik testin son sorusunda öğretmen adaylarına orantı ile ilgili verilen bir kuralın gerekçesi sorulmuştur. “Bir orantıda oranların payları toplamının paydaları toplamına oranı yine orantı sabitini verir.” kuralının “ $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = k$ ise $\frac{x+y}{a+b} = k$ olur.” şeklinde cebirsel hali öğretmen adaylarına verilmiş olup doğruluğunu göstermeleri beklenmiştir. Sol tarafta orantı sabiti ile yapılacak olan çapraz çarpımla $x = ak$ ve $y = bk$ bulunur. Sağdaki ifadede x ve y yerine ak ve bk yazıldığında $a + b$ ifadelerinin sadeleştiği ve sonucun k 'ya eşit olduğu kolaylıkla görülebilir.

Öğretmen adaylarının soruya vermiş oldukları yanıtlar kategorilere ayrılmış her bir kategori Tablo 116'da örneklendirilmiştir.

Tablo 116

EPT 10. soruya ait yanıtlardan örnekler

Kategoriler	Öğretmen adaylarının yanıtlarından kategoriye ait örnekler
Seviye 0: İspatlanmaya çalışılan ancak herhangi bir sonuca bağlanamayan girişimler veya gerekçesiz yanıtlar	$\frac{y}{a} = \frac{y}{b} = \frac{k}{1}$ $\frac{x+a}{ab} = \frac{y+b}{ab} = \frac{kab}{ab}$ $x+a = y+b = k ab$

Seviye 1: Orantı sabitinin değişmeyeceğini kısıtlı durumlar için ele alan (payların ve paydaların eşit olduğunu varsaymak gibi) yanıtlar veya kuralın benzer ifadelerle tekrar edildiği dışsal açıklamalar	$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = k \Rightarrow$ x ve a yerine y ve b terimleri yazıldığı zaman $\frac{x+y}{a+b} = \frac{y+y}{b+b} = \frac{2y}{2b} = \frac{y}{b} = k$ ifadesini bulmuş oluruz.
Seviye 2: Orantıdaki her bir ifadeye sayı konularak yapılmış deneysel gerekçeler	$x=1, y=2$ $a=3, b=6 \text{ olsun.}$ $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = k \quad (k=\frac{1}{3})$ $\frac{1+2}{3+6} = \frac{3}{9} = k \text{ olur}$
Seviye 3: Pay, payda veya orantı sabitinden birine sayı konulan, diğerlerinin aynı cinsten yazıldığı ve gerekçelendirmenin bunlara dayandığı yanıtlar	$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = k \Rightarrow \frac{x=5k}{a=5}, \frac{y=4k}{b=4} \quad (k \in \mathbb{Z})$ dersek $\frac{x+y}{a+b} = \frac{5k+4k}{5+4} = \frac{9k}{9} = k, k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \frac{9k}{9} = k \text{ olur.}$
Seviye 4: Tamamen cebirsel olarak yapılan formel ispatlamalar	$x=ak$ $y=bk \text{ yazarsak}$ $\frac{ak+bk}{a+b} = \frac{k(a+b)}{a+b} = k$ doğruluğunu göstermiş olduk,

Soruya ilişkin öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtların gerekçelendirme kategorilerine göre dağılımı sınıf düzeyleri de göz önüne alınarak Tablo 117’de sunulmuştur:

Tablo 117

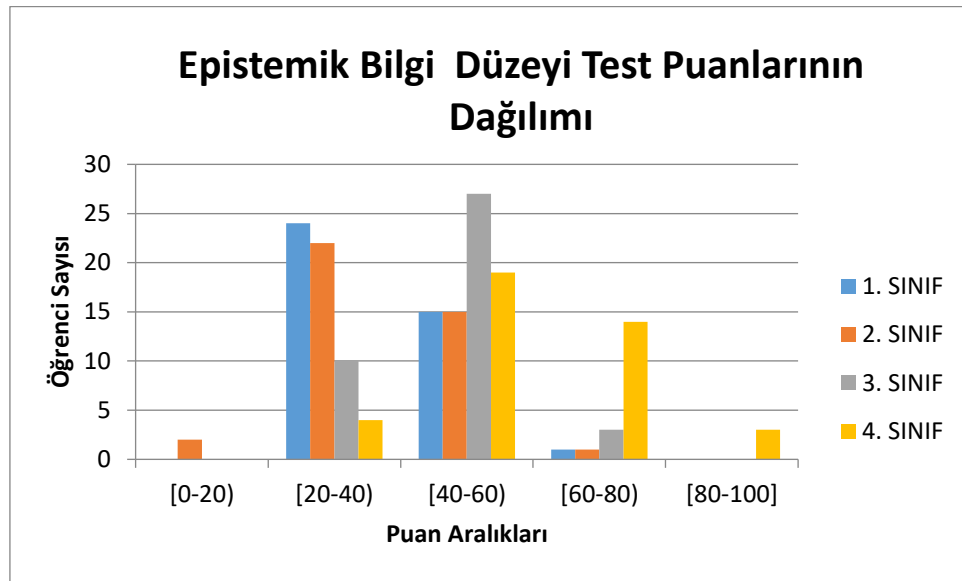
EPT 10. soruya ilişkin yanıtların seviyelere göre dağılımı

	Seviye 0	Seviye 1	Seviye 2	Seviye 3	Seviye 4
1.Sınıf	1 (%2,5)	7 (%17,5)	16 (%40)	2 (%5)	14 (%35)
2.Sınıf	4 (%10)	8 (%20)	9 (%22,5)	3 (%7,5)	16 (%40)
3.Sınıf	0 (%0)	3 (%7,5)	11 (%27,5)	3 (%7,5)	23 (%57,5)
4.Sınıf	1 (%2,5)	1 (%2,5)	3 (%7,5)	3 (%7,5)	32 (%80)
Toplam	6 (%3,75)	19(%11,875)	39 (%24,375)	11 (%6,875)	85 (%53,125)

Tablo 117’den de görüldüğü gibi testin en yüksek oranda doğru yapılan sorusu 10. soru olmuştur. Öğretmen adaylarının %53’ü analitik ispatlama yaparak Seviye 4 kategorisinde yer almıştır. 4. Seviyede yer alan gerekçelendirme oranının sınıf seviyelerine göre arttığı ve son sınıf öğretmen adaylarında %80’e ulaştığı da dikkat çekmektedir. Öğretmen adaylarının yaklaşık %16’sı ilk iki seviyede yer almış olup gerekçelendirme sunamamışlar veya hatalı gerekçelendirmelerde bulunmuşlardır. Yaklaşık %24’ü ise orantıda pay ve paydaya sayılar koyup toplamalarının oranında da orantı sabitinin aynı kalacağını göstermişlerdir.

4.4.11. Epistemik bilgi düzeyi ile ilgili genel değerlendirme

Sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait bazı kuralların altında yatan mantıksal gerekçeleri ve çeşitli ispatları içeren EPT’ye yönelik bulgular yukarıdaki bölümlerde sunulmuştur. Tablo 22’de yer alan gerekçelendirme kategorilerine göre öğretmen adaylarının tüm yanıtları değerlendirilmiş ve kategorilere ayrılmıştır. Bu kategorilere göre öğretmen adaylarının her bir soruya vermiş oldukları yanıtlar puanlanmıştır. Toplam puanlar okuyucu kolaylığı açısından 2,5 ile çarpılarak 100 puan üzerinden “Epistemik Bilgi Düzeyi Test Puanı” oluşturulmuştur. Bu puanlara göre öğrenciler eşit aralıklı beş gruba ayrılmıştır. Her bir gruptaki öğrencilerin dağılımı Şekil 43’te verilmiştir:



Şekil 43. Epistemik bilgi düzeyi testi puan dağılımları

Grafikte öğretmen adaylarının 20 ile 60 puan aralığında yığıldığı görülmektedir. İlk iki sınıf düzeyinde yer alan öğretmen adaylarının 20-40 puan aralığında, son iki sınıf düzeyinde yer alan öğretmen adaylarının ise 40-60 puan aralığında daha fazla yer aldığı söylenebilir. 60-80 puan aralığında ise 19 öğretmen adayı yer almakta olup bu adayların 14'ü 4. sınıf, 3'ü 3. sınıf geriye kalan 2'si ise ilk iki sınıf düzeyinde yer almaktadır. Epistemik düzeyde başarılı sayılabilecek 60 puan ve üzerinde puan alan öğretmen adaylarında son sınıf öğretmen adaylarının ağırlığı dikkat çekicidir. Hatta 80 ve üzerinde puan alan öğretmen adaylarının tamamı (3 öğretmen adayı) son sınıf öğretmen adayı olmuştur.

Öğretmen adaylarının sınıf seviyelerine göre epistemik bilgi düzeyi test puanlarının ortalamaları ile son sınıf öğretmen adaylarının puan farkı Tablo 118'de daha net bir şekilde ortaya çıkmıştır:

Tablo 118

EPT genel ortalamaları (100 üzerinden)

1. Sınıf Ortalaması	2. Sınıf Ortalaması	3. Sınıf Ortalaması	4. Sınıf Ortalaması	Tüm Örneklem Ortalaması
37,1875	37,0625	44,3125	56,5625	43,78125

Tablo 118'de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının epistemik bilgi düzey test puanlarının oldukça düşük olduğu söylenebilir. Ancak son sınıf öğretmen adaylarında belirgin bir fazlalık göze çarpmaktadır. Son sınıf öğretmen adaylarının ortalaması genel test ortalamasının yaklaşık olarak 12 puan üzerinde yer almıştır.

Epistemik testte yer alan soruların 4 puan üzerinden ortalamaları da hesaplanmış sınıf seviyelerine göre ortalamalar Tablo 119’da sunulmuştur.

Tablo 119

EPT her bir soruya ait puan ortalamaları

	1.Sınıf	2.Sınıf	3.Sınıf	4.Sınıf	ORTALAMA
Soru 1	1,850	1,625	2,050	2,575	2,025
Soru 2	0,900	1,100	0,600	1,375	0,994
Soru 3	1,050	1,200	1,175	1,375	1,200
Soru 4	1,400	1,575	2,050	1,475	1,625
Soru 5	1,225	1,125	1,400	2,350	1,525
Soru 6	2,275	2,325	2,800	3,100	2,625
Soru 7	0,800	0,825	1,425	1,650	1,175
Soru 8	1,300	1,050	1,650	2,975	1,744
Soru 9	1,550	1,525	1,425	2,150	1,663
Soru 10	2,525	2,475	3,150	3,600	2,938

Tablo 119 incelendiğinde testte yer alan sorularla ilgili bazı sonuçlar ortaya konabilir:

- Soru ortalamalarına bakıldığında en düşük olan ilk üç sorunun sırasıyla 2., 7. ve 3. sorular olduğu görülmektedir. 2. soruda devirli sayılardaki devreden kısmın maksimum uzunluğu ile ilgili bir önerme yer almaktadır. Öğretmen adaylarının yanıtlarının rakam sayısı ve devirli basamak sayısı ile ilişki kurduğu ve devirli kısmın uzunluğunun rakam sayısı ile kısıtlı olması gerektiği gibi yanılgılara sahip olduğu görülmüştür. Testte yer alan 7. soruda sıfır hariç bir sayının sıfırcı kuvvetinin 1 olmasının nedeni öğretmen adaylarına sorulmuş olup bu soruda da öğretmen adaylarının matematiksel gerekçeler sunamadığı görülmüştür. Puan ortalamasının en düşük olduğu sorulardan biri de 3. soru olmuştur. Öğretmen adayları $0,\bar{a}$ sayısının $\frac{a}{9}$ ifadesine eşitliğinin nedenini belirtirken zorlanmıştır. Birçok öğretmen adayı bu soruda dışsal gerekçeler sunarak Seviye 1 veya Seviye 0’da kalmıştır.
- Epistemik testte 10. ve 6. sorular yüksek ortalamaya sahip ilk iki soru olarak ifade edilebilir. 10. soruda yer alan orantı kuralı ile ilgili öğretmen adaylarının büyük bir kısmı doğru gerekçe sunabilmiştir ve gerekçelendirme seviyeleri 2. seviye ve üzerinde yer almıştır. Benzer şekilde 6. soruda üslü ifadelerde çarpma işlemi yaparken tabanların aynı olduğu durumlarda üslerin toplanması ile ilgili kuralın gerekçesi sorulmuş ve her sınıf düzeyinde ortalamalar 2 puanın üzerinde yer almıştır.

- İlginç sayılabilecek verilerden bir tanesi 4. soruda görülmektedir. Testte son sınıf öğretmen adaylarının ortalamalarının diğer sınıf düzeylerindeki öğretmen adaylarının ortalamalarından daha düşük olduğu tek soru bu soru olmuştur. İrrasyonel ve rasyonel sayılarla ilgili olan bu soruda aksiyometik ispat yapan Seviye 4'teki 17 öğretmen adayının 6'sı son sınıf öğretmen adayı olmasına karşın Seviye 3 veya Seviye 2 kategorilerinde son sınıf öğretmen adaylarının daha az sayıda yer aldığı ve büyük bir çoğunluğunun önerme ile ilgili bir gerekçe sunamadığı veya hatalı gerekçeler sunduğu görülmüştür.

Öğretmen adaylarına uygulanan epistemik düzey bilgi testi ile ilgili bulgular yukarıdaki bölümde verilmiştir. Gerek yazılı verilerden gerekse mülakatlarda belirttiklerinden bazı öğretmen adaylarının ortaokulda öğrendikleri çeşitli matematiksel kuralların nedenlerini lisans seviyesindeki öğrenimlerine kadar sorgulamadıkları ve kural olarak ezberleme yoluna gittikleri anlaşılmıştır. Gerek 3 ile bölünebilme ve 4 ile bölünebilme gibi çeşitli bölünebilme kuralları gerekse üslü ifadelerde işlemlerde kullanılan kurallar gibi ortaokul matematik düzeyinde yer alan çeşitli kurallar öğretmen adayları tarafından ezberlenmiş ve EPT'de karşılırları çıkınca sorgulanmaya başlandığı anlaşılmıştır. Bir öğretmen adayının testte yer alan bölünebilme kuralı ile ilgili vermiş olduğu yanıt bu durumu özetler niteliktedir:

Astında bir bakıma kuraldır. Bugüne kadar bu kuralın neden geldiğini sorguladığımızda hep kural böyle dediler. Ama böyle denemelerine rağmen kendim nedenini araştırabilirdim. Ama yapmadım. Ve yapmadığım için hala hayatta. Bilgi eksik bilerek devam ediyorum. Bu bilgiyi öğrenemem. Sebebi de kıracası benim ortam oluyor. Ve bu soruyu cevaplayamıyorum.

Şekil 44. Öğretmen adayının 3 ile bölünebilme kuralının gerekçesine vermiş olduğu yanıt

Şekil 44'te görüldüğü gibi öğretmen adayı öğrenim hayatında gördüğü 3 ile bölünebilme şartını her sorguladığında bunun kural olduğu için böyle olduğu dönütünü aldığını itiraf etmektedir. Lisans öğreniminde de kuralın matematiksel alt yapısını öğrenme fırsatı bulamazsa öğretmenlik hayatında kendi öğrencilerine dışsal gerekçelendirmeler sunması şaşırtıcı olmayacaktır. Bir öğretmen adayının epistemik düzey bilgisinin gerek

matematiksel teorem ve kuralların gerekçelerini anlayabilmeleri gerekse kendilerinin bu teoremlerin ispatlarını yapabilmeleri adına oldukça önemli olduğu söylenebilir. Öğretilen bir kurala öğrenciyi ikna edebilmenin ön şartı olarak kurala öğretmen adayının kendi ikna olması ve öğrenciyi ikna edecek matematiksel alt yapıya sahip olması gerektiği söylenebilir.

4.5. Pedagojik Alan Bilgisi Kapsamında Öğrenci (Öğrenen) Bilgisine Yönelik Bulgular

Bu bölümde pedagojik alan bilgisinin alt bileşenlerinden biri olan öğrenciyi anlama bilgisi, öğrenci bilgisi veya öğrenen bilgisi şeklinde alanyazında ifade edilen bilgi türüne yönelik bulgular sunulmaktadır. Bu bilgi türü öğrencileri ve matematiği birleştiren, öğrencilerin sahip olabileceği kavram yanlışlarına dair öğretmen bilgisidir (Kartal, 2017). Öğretmenler öğrencilerin bir konuda hangi noktaları kafa karıştırıcı bulabileceğini, öğrencilerin yaygın hatalarını ve bu hataların nedenlerini, hatanın bir kavram yanlışsından ötürü meydana gelip gelmediğini anlayabilmelidir. Ayrıca öğrencilerin matematiksel dilini ve düşüncelerini doğru bir şekilde yorumlayabilmelidir.

Çalışmada öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgisi kapsamında öğrenci bilgilerini inceleyebilmek adına “Pedagojik Alan Bilgisi Öğrenci Bilgisi Bileşeni Testi” uygulanmıştır. 10 soru yer alan bu testte, her bir soruda alt sorulara da yer verilmiştir. Aşağıda her bir soruya ait bulgular ayrı ayrı ele alınmaktadır.

4.5.1. ÖBT çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanına ilişkin soruya yönelik bulgular

Testin ilk sorusunda, “Ali öğretmen çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanına ait çeşitli kazanımların işlendiği derste bazı öğrencileri kaldırarak her bir öğrenciden öğrendikleriyle ilgili cümleler kurmasını ister. Öğrencilerin kurdukları cümlelerin doğruluğunu inceleyerek, kavram yanlışsı içerebilecek olanları açıklayınız.” soru köküyle birlikte dört öğrencinin ifadeleri verilmiştir:

Sümeyye: “Sıfır her doğal sayının katıdır.”

Güngör: “Aralarında asal sayılardan en az biri asal sayıdır.”

Aytaç: “Sadece 1 tane çift asal sayı vardır o da 2’dir.”

Ömer: “1 sayısına ve kendisine bölünebilen sayılara asal sayı denir.”

Bu ifadelerin yanı sıra doğru veya yanlış biçiminde kutucuklar da verilmiş olup işaretleme yapmaları istenmiştir.

Yukarıda verilen ifadelerden Sümeyye ve Aytaç’ın cümleleri doğru iken, Güngör ve Ömer’in açıklamaları doğru değildir. Ömer’in açıklamasında hem sayıların doğal sayı olduğu verilmemiştir hem de “sadece 1’e ve kendisine bölünebilen” şeklinde düzeltme yapmak gerekmektedir. Öğretmen adaylarının açıklamalarından önce bu dört cümleyi

doğru veya yanlış olarak işaretleme sayıları incelenmiştir. Olması gereken yanıtlar italikle gösterilmiştir. Buna yönelik bulgular Tablo 120’de sunulmuştur.

Tablo 120

ÖBT 1. soruda yer alan her bir ifadeye ait doğru-yanlış sayılarının dağılımı

	Sıfır her doğal sayının katıdır.		Aralarında asal sayılardan en az biri asal sayıdır.		Sadece 1 tane çift asal sayı vardır o da 2’dir.		1 sayısına ve kendisine bölünebilen sayılara asal sayı denir.	
	<i>Doğru</i>	<i>Yanlış</i>	<i>Doğru</i>	<i>Yanlış</i>	<i>Doğru</i>	<i>Yanlış</i>	<i>Doğru</i>	<i>Yanlış</i>
1. Sınıf	17 (%42,5)	22 (%55)	10 (%25)	28 (%70)	40 (%100)	0 (%0)	19 (%47,5)	21 (%52,5)
2. Sınıf	23 (%57,5)	17 (%42,5)	7 (%17,5)	33 (%82,5)	40 (%100)	0 (%0)	18 (%45)	22 (%55)
3. Sınıf	23 (%57,5)	13 (%32,5)	10 (%25)	29 (%72,5)	40 (%100)	0 (%0)	15 (%37,5)	25 (%62,5)
4. Sınıf	29 (%72,5)	10 (%25)	2 (%5)	38 (%95)	40 (%100)	0 (%0)	17 (%42,5)	23 (%57,5)
Toplam	92 (%57,5)	62 (%38,75)	29 (%18,125)	128 (%80)	160 (%100)	0 (%0)	69 (%43,125)	91 (%56,875)

Öğretmen adaylarının bu soru için yapmış oldukları açıklamalar öğrenci bilgilerini ortaya koyarken, bu sorudaki ifadelerin doğruluğunu ve yanlışlığını belirtmeleri öğrenci bilgisinden ziyade alan bilgisini gerektirmektedir.

Tablo 120’den de görüldüğü gibi “Sıfır her doğal sayının katıdır.” ifadesini öğretmen adaylarının %57,5’u doğru bulmuştur. Altı öğretmen adayının yanıt vermediği bu soruda, azımsanamayacak %38,75’lik bir oran sıfırın her doğal sayının katı olmadığını belirtmiştir. Bu öğretmen adaylarının kendileri de hatalı olduğu için öğrenci bilgisi bağlamında açıklamalarının doğru olması beklenmemektedir. İfadenin yanlışlığını belirten 62 öğretmen adayının açıklamalarından bazıları şunlardır:

- x ’in katı y ve z olsun. $y.z$ ’nin x ’i vermesi gerekir. Ama bir sayının katı sıfır olursa sonuç hep sıfır çıkar.
- Sıfır sadece sıfırın katıdır. 1 her doğal sayının katıdır.
- Sıfır/sıfır belirsizlik içerdiği için ifade doğru değildir.
- Bir sayıyı sıfıra bölünce tanımsız olur. O yüzden kat olamaz.
- Katı demek bölenlerinden birisi demektir. Ancak sıfır bölen olamaz.
- Sıfır çarpma işleminde yutan eleman görevi görür. Kat olamaz.
- Her doğal sayı sıfırın katıdır. Sıfır hiçbir doğal sayının katı değildir.
- Kat çarpma işlemini belirtir. Çarpmada sıfır etkisiz elemandır.

Bu açıklamaların benzerleri başka öğretmen adayları tarafından da ifade edilmiştir. Görüldüğü gibi bazı öğretmen adayları çarpan/bölen ve kat kavramlarının karıştırabilmektedir. Bir sayının sıfıra bölümünün tanımsız ve sıfırın sıfıra bölümünün belirsiz olması sıfırın kat olmayacağını düşündürmüştür. Benzer şekilde sıfırın çarpma yutan eleman olması nedeniyle kat olamayacağını belirten öğretmen adayları olmuştur. Bu öğretmen adayları “Sıfır her sayının katıdır.” diyen öğrencinin ifadesinin yanlış olduğunu düşündükleri için “öğrenci bilgisi bileşeni” açısından da açıklamaları doğru değildir.

Bir diğer öğrenci ifadesi “Aralarında asal sayılardan en az biri asal sayıdır.” olmuştur. Bu ifadenin yanlışlığını öğretmen adaylarının %80’i belirtmiştir. Özellikle son sınıf öğretmen adaylarında bu oranın %95 olması dikkat çekmiştir. İfadenin doğruluğunu belirten 29 öğretmen adayı olmuştur. Bu öğretmen adaylarının yanıtları incelendiğinde benzer ifadelere rastlanmıştır. Bazı yanıtlar aşağıda verilmiştir:

- Aralarında asal sayılardan en az biri asal olmazsa ortak bölenleri olur.
- Aralarında asal sayılar ortak olarak 1’e bölünebilirler. En az biri asal olmalı ki bu şartı sağlasın.
- Diğeri ne olursa olsun biri asal olmalı ki 1 dışında ortak *katları* olmasın.
- Ya ikisi birden asaldır ya da bir tanesi asal olmalıdır.
- Aralarında asallık durumu bunu gerektirir.

Görüldüğü gibi öğrencilerin kavram yanlışlarının farkında olması beklenen öğretmen adaylarından bazıları aynı kavram yanlışlarına sahip olduğu için hatalı açıklamalarda bulunabilmiştir. Bu ifadeye yanlış yanıt veren öğretmen adaylarının yanıtları incelenmiş ve açıklamalarının doğruluğuna göre kategorilere ayrılmıştır. Bu kategorilere göre 128 öğretmen adayının dağılımı Tablo 121’de verilmiştir. Verilen yüzdeler tüm veri grubuna göre hesaplanmıştır.

Tablo 121

“Aralarında asal sayılardan en az biri asal sayıdır.” önermesinin yanlışlığını belirten öğretmen adaylarının açıklamalarının dağılımı

	Doğru açıklama	Açıklama yok veya yetersiz	Yanlış açıklama
1. Sınıf	23 (%57,5)	3 (%7,5)	2 (%5)
2. Sınıf	28 (%69,5)	1 (%2,5)	4 (%10)
3. Sınıf	25 (%62,5)	1 (%2,5)	3 (%7,5)
4. Sınıf	31 (%77,5)	3 (%7,5)	4 (%10)
Toplam	107 (%66,875)	8 (%5)	13 (%8,125)

Tablo 121 incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık %67’sinin doğru açıklamalarda bulunduğu görülmüştür. En yüksek oranın 4. sınıf öğretmen adaylarında

olduğu görülmektedir. 107 yanıtın bir kısmı öğrenci bilgisine de değinirken bir kısmı sadece verilen ifadenin yanlışlığını göstermiştir. Verilen bazı yanıtlar şunlardır:

- Öğrenciler aralarında asal kavramı ile asal kavramını karıştırıyor olabilir. Bu nedenle böyle bir ifade söylenebilir. Ancak yanlıştır.
- Öğrenciler 3 ve 5 gibi iki asal sayı düşünüp bunlar aralarında asal olduğu için böyle bir cümle kurabilir. Aslında 25 ve 26 da aralarında asaldır.
- Öğrencinin ifadesi yanlış içermektedir. 4 ve 9 asal olmadıkları halde aralarında asaldır.
- İki sayının bölenlerinin ortak olmaması 1'den başka bölenlerinin olmadığını göstermez. Bu nedenle ifade yanlıştır.
- En az bir sayı asal olması gerekiyor gibi düşünce olabilir. Ancak 9 ve 16 sayılarının ikisi de asal değildir.

Yukarıda verilen yanıtların benzerleri 107 öğretmen adayı tarafından tekrarlanmıştır. Ancak bazı öğretmen adayları öğrencinin hatalı olduğunu belirtmelerine rağmen yanlış açıklamalarda bulunmuştur. Bu açıklamalardan birkaçı aşağıda verilmiştir:

- 5 ve 27 aralarında asaldır ama 27 asal değildir.
- 22 ve 33 aralarında asaldır. Ancak ikisi de asal değildir.
- Asal sayı olmalarına gerek yoktur. Ortak katlarının olmaması yeterlidir.

13 öğretmen adayının yukarıdaki ifadelere benzer açıklamaları bulunmaktadır. İlk örnekteki gibi sayılardan birini asal seçen yanıtlar ve ikinci örnekteki gibi aralarında asal olmayan sayıları örnek gösteren yanıtlar yer almaktadır.

Bir başka ifadede öğretmen adaylarına “Sadece 1 tane çift asal sayı vardır o da 2’dir.” cümlesi verilmiştir. Tablo 120’de de görüldüğü gibi tüm öğretmen adayları bu ifadenin doğru olduğunu açıklamıştır.

Son alt soruda ise bir öğrencinin yapmış olduğu, “1 sayısına ve kendisine bölünebilen sayılara asal sayı denir.” şeklindeki tanım sorulmuştur. Öğrencinin hatalı olduğunu belirten öğretmen adayları yaklaşık %57 ile çoğunlukta olsa da azımsanamayacak %43’lük (69 kişi) bir öğretmen adayı grubu tanımın doğru olduğunu ifade etmiştir. Böylece tanımdaki eksiklikleri fark etmedikleri anlaşılmıştır. İfadenin yanlışlığını belirten 91 öğretmen adayının yanıtları da incelendiğinde ilginç bir sonuçla karşılaşmıştır. Bu 91 öğretmen adayının sadece 13 tanesi doğru bir açıklamada bulunabilmiştir.

Tablo 122

“1 sayısına ve kendisine bölünebilen sayılara asal sayı denir.” ifadesini yanlış bulan öğretmen adaylarının açıklamalarının dağılımı

	Doğru açıklama	Yanlış açıklama
1. Sınıf	5 (%12,5)	16 (%40)
2. Sınıf	3 (%7,5)	19 (%47,5)
3. Sınıf	2 (%5)	23 (%57,5)
4. Sınıf	2 (%5)	21 (%52,5)
Toplam	13 (%8,125)	79 (%49,375)

Tablo 122’de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının büyük bir kısmı ifadenin yanlışlığını belirtse de yanlış açıklamalarda bulunmuştur. Bu açıklamalardan bazıları şunlardır:

- Öğrenci, “sadece 1’e ve kendisine” demeliydi. Bu nedenle kurduğu cümle yanlıştır.
- “1 ve kendisinden başka böleni olmayan” demeliydi. Çünkü her sayı 1’e ve kendisine bölünür.
- Yalnız 1 ve kendisine bölünebilmenin yanı sıra “...bölünebilen doğal sayılardır.” şeklinde bitirilmeliydi.
- “1’e ve kendisine bölünebilen 1’den büyük doğal sayılardır.” şeklinde söylemeliydi.

Yukarıda verilen açıklamalar tanımda eksiklik olduğunu belirten ve düzenleme yapan açıklamalardır. Ancak düzenlenmiş halleri de yeterli değildir. Öğretmen adaylarının en çok yapılan açıklama “sadece” kelimesinin eklenmesi gerektiği olmuştur. Bu açıklamada sayının 1’den büyük olması, sayının kendisinin de bölenlerinin de doğal sayı olması gibi ifadeler eksiktir.

13 öğretmen adayı doğru açıklamada bulunmuştur. Bazıları tanımı düzeltmeye de eksikliği ve yanlışlığı dile getirmiştir. Bu açıklamalar aşağıda yer almaktadır.

- Her sayı kendisine ve 1’e bölünür. Bu nedenle öğrencinin ifadesi yanlıştır. (5 kişi)
- Sayıların hangi kümeden ele alındığı yazılmamış. Doğal sayı, pozitif tam sayı gibi bir açıklama yapılmalı. (2 kişi)
- 1 asal olmadığı halde bu tanımı sağlıyor. Öğrenci 1’e dikkat etmemiştir. (4 kişi)
- 1’den büyük doğal sayı olması gerektiği ile 1 ve kendisi dışındaki doğal sayılara bölünmemesi gerektiği ifade edilmelidir. (2 kişi)

Görüldüğü gibi doğru açıklamalarda da iki öğretmen adayı hariç düzeltmeden ziyade eksikliği vurgulamıştır. Kavram testi incelenirken asal sayıyı uygun ve titiz olarak tanımlayan beş öğretmen adayının olduğu görülmüştü. Yapılan eşleştirmelerde bu beş

öğretmen adayının bu soruda doğru açıklama yapan 13 öğretmen adayı arasında olduğu anlaşılmıştır.

Öğrenci bilgisi testinin ilk sorusunda öğretmen adaylarına değerlendirmeleri istenen dört öğrencinin kurmuş oldukları cümleler verilip, her bir cümle için tamamının doğruluğunu/yanlışlığını eksik veya yanlış bir açıklama yapmaksızın belirten öğretmen adaylarına 1 puan ve toplamda 4 puan verilerek sınıf seviyelerine göre değerlendirme yapılmıştır. Bu soruya ait ortalama puanlar Tablo 123'te yer almaktadır.

Tablo 123

ÖBT 1. soru puan ortalamaları (4 üzerinden)

1. Sınıf Ortalaması	2. Sınıf Ortalaması	3. Sınıf Ortalaması	4. Sınıf Ortalaması	Tüm Örneklem Ortalaması
2,15	2,375	2,275	2,65	2,3625

Ortalamalar incelendiğinde tüm sınıf düzeylerinde ortalamaların 2 puanın üzerinde olduğu ve 4. sınıf öğretmen adaylarının en yüksek ortalamaya sahip olduğu görülmektedir. En düşük ortalama 1. sınıf öğretmen adaylarında olmuştur. Ancak 2. ve 3. sınıf öğretmen adayları her ne kadar 1. sınıf öğretmen adaylarına göre yüksek olsa da sınıf seviyesi ile birlikte ortalamada artış görülmemektedir.

4.5.2. ÖBT orantı sorusuna ilişkin bulgular

Testin ikinci sorusunda öğretmen adaylarına, aşağıdaki soru sorulmuştur:

“6 adet limon ve 4 bardak su ile limonata yapılmıştır. Bu limonata ile aynı tatta olmak üzere 9 adet limon ile bu limonata yapılsaydı toplam kaç bardak su gerekirdi? (Eş limonlar ve eş bardaklar kullanılmaktadır.)” sorusuna öğrencilerden biri 7 bardak su kullanılması gerektiğini söylemektedir. Öğrencinin hatası var mıdır? Varsa hatasının kaynağı ne olabilir?

Soruda sözü edilen öğrencinin, limon sayısı ve bardak sayısı arasındaki ilişkiye çarpımsal bakmak yerine toplamsal bakarak, “6 limona 4 bardak su düşüyorsa, 9 limona da yine 2 eksiği 7 bardak su düşmelidir.” şeklindeki akıl yürütme yapması muhtemeldir. Bu akıl yürütme orantı ile ilgili alanyazında sıkça söz edilen kavram yanılgıları arasında yer almaktadır. Öğretmen adaylarının bu soruya vermiş oldukları yanıtlar kategorilere ayrılmıştır.

Bazı öğretmen adayları öğrencilerin çarpımsal ilişki kurmadığını, oranı veya orantıyı düşünmeden toplamsal ilişkiye baktığını belirtmiştir. Öğretmen adaylarının bu türdeki açıklamalarına bazı örnekler şunlardır:

- Öğrenci, limonların sayısı ve bardak sayısı arasındaki farkın sabit olacağını düşünüp $9-2=7$ sonucunu bulmuş olabilir. Orantı kurması gerektiğini anlamamıştır.
- Oranların eşit olacağını düşünmek yerine farkların eşit olacağını düşünmüş olabilir.
- “Limonu 6’dan 9’a çıkardım. Suyu da 3 arttırmam gerek ve $4+3=7$ bardak su koymam gerek.” şeklinde düşünmüştür. Halbuki aynı miktarda değil aynı oranda arttırmalıydı.
- Öğrenci örüntü mantığıyla hareket etmiş. Arasındaki çarpımsal ilişkiyi görmemiş olabilir.

Bazı öğretmen adayları ise çarpımsal ilişkiden hiç bahsetmeden öğrencinin toplamsal ilişkiye baktığının tespitini yapmıştır. Bu açıklamalara bazı örnekler aşağıdaki gibidir:

- Öğrenci $6-4=2$ olduğu için $9-2=7$ olarak sonucu bulmuş.
- Hem limon sayısını hem de bardak sayısını 1’e 1 olacak şekilde arttırmış. Bu nedenle 7 sonucunu bulmuş.

Bazı öğretmen adayları ise doğru yanıtı kendileri göstermiş veya öğrencinin doğru orantı kurması gerektiğini ya da eş orana dikkat etmesi gerektiğini belirtmiştir. Öğrencinin hatalı olduğunu öğretmen adayları anlamış ancak öğrenci yanılgısının asıl kaynağını belirtememiştir. Öğrencinin oran veya orantı kavramını anlamamış olması da doğru bir saptamadır. Ancak çok geneldir. Bu tür yapılan açıklamalara örnekler aşağıdaki gibidir:

- 6 limona 4 bardak su konuyorsa 9 limona, $6.x = 9.4$ ’den $x = 6$ bardak su konulmalıdır. Öğrencinin orantı kurması gerekmektedir.
- Öğrenci doğru orantı kurmalıdır. Ya orantı kurmayı bilmiyor. Ya da orantıyı çözmeyi bilmiyor.
- Orantıyı yanlış kurmuş olabilir. 6 yanıtını bulması gerekirdi.
- $6/4$ oranının eşit olması gerekirdi. 9 limona 6 bardak su olursa aynı $3/2$ oranı tutturulur.

Bazı öğretmen adayları öğrencinin orantı sırasında işlem hatası yaparak 7’yi bulduğunu belirtmiştir. Bazıları ise öğrencinin orantıyı zihinden yapmaya çalışırken 7 bulmuş olabileceğini belirtmiştir. Orantıdan hiç bahsetmeden sadece öğrencinin işlem hatası yapmış olabileceğini belirten öğretmen adayları da olmuştur. Bu tür yanıtlara örnekler aşağıda verilmiştir:

- Bence çocuk orantıyı kurarken işlem hatası yapmıştır. Yoksa 7 bulamazdı.
- Zihinden yapmaya çalışırken hata yapmış olabilir.
- İçler dışlar çarpımı yaparken çarpma hatası yapmış olabilir.
- Öğrenci oran orantıyı anlamamış
- Oran orantının öğrenilememesinden kaynaklı bir hatadır. Yeniden öğretilmeli.
- Öğrencinin hatası var. Cevap 7 olmamalı.

Yukarıdaki 1. ve 3. örneklerde görüldüğü gibi bazı öğretmen adayları oran veya orantıda işlem hatasından bahsederken, 2. örnekte olduğu gibi bazı öğretmen adayları sadece işlem hatası olduğunu dile getirilmiştir. Bazıları ise hata olduğunu ifade edip hatanın nerden kaynaklandığını açıklamamıştır.

Öğretmen adaylarından bir tanesi soruda hata olmadığını belirtmiştir. Yine bir başka öğretmen adayı “Ters orantı kurması gerekirken, yanlış yapmış olabilir.” şeklinde yanlış bir açıklamayla hata olduğunu belirtmiştir.

Tüm bu durumların sınıf düzeylerine göre dağılımı Tablo 124’te verilmiştir:

Tablo 124

ÖBT orantı sorusuna verilen yanıtların dağılımı

	1.Sınıf	2. Sınıf	3.Sınıf	4.Sınıf	TOPLAM
Çarpımsal ilişki yerine toplamsal ilişki kurulduğunu belirten açıklamalar	19 (%47,5)	22 (%55)	25 (%62,5)	31 (%77,5)	97 (%60,63)
Toplamsal ilişki kurulduğunu belirtip oran/orantıdan bahsetmeyen açıklamalar	2 (%5)	3 (%7,5)	3 (%7,5)	0 (%0)	8 (%5)
Toplamsal ilişkiden bahsetmeyip orantı kurulması gerektiğini belirten veya orantı kurarak doğru cevabı bulan açıklamalar	14 (%35)	10 (%25)	9 (%22,5)	7 (%17,5)	40 (%25)
İşlem hatası olabileceğini belirten açıklamalar	2 (%5)	2 (%5)	2 (%5)	1 (%2,5)	7 (%4,38)
Diğer doğru açıklamalar	2 (%5)	3 (%7,5)	0 (%0)	1 (%2,5)	6 (%3,75)
Hata olmadığını belirten veya yanlış yorum yapılan açıklamalar	1 (%2,5)	0 (%0)	1 (%2,5)	0 (%0)	2 (%1,25)

Yukarıdaki örnekler ve Tablo 124’teki veriler göz önüne alındığında öğretmen adaylarının yaklaşık %61’inin doğru bir açıklamayla öğrencilerin çarpımsal ilişkiyi görmezden geldiğini ve toplamsal ilişkiye baktığını ifade etmiştir. 1. sınıf öğretmen adaylarında %47,5 olan bu oran giderek artarak 4. sınıf öğretmen adaylarında %77,5’a kadar çıkmıştır.

Öğretmen adaylarının %25’inin doğru cevabı yazdığı veya orantı kurarak doğru cevaba ulaşılması gerektiğini belirttikleri görülmüştür. Ancak bu öğretmen adayları hatanın

kaynağından bahsetmemişlerdir. Sınıf seviyesinin artmasıyla bu tür yanıt veren öğretmen adaylarının sayısının da azaldığı dikkat çekmektedir.

4.5.3. ÖBT rasyonel sayı ve irrasyonel sayı sorusuna ilişkin bulgular

Öğrenci bilgisi testinin üçüncü sorusunda öğretmen adaylarına “Rasyonel olduğu halde irrasyonel sayı olarak düşünülebilecek bir örnek veriniz. Bu hatalı düşüncenin nedeni ne olabilir?” ve “İrrasyonel olduğu halde rasyonel sayı olarak düşünülebilecek bir örnek veriniz. Bu hatalı düşüncenin nedeni ne olabilir?” soruları sorulmuştur. Öğretmen adaylarının vermiş oldukları örnekler kategorilere ayrılmıştır. İlk soruya verilen yanıtların dağılımı Tablo 125’teki gibi olmuştur.

Tablo 125

Rasyonel olduğu halde irrasyonel olarak düşünülebilecek sayılara verilen örnekler

	1.Sınıf	2. Sınıf	3.Sınıf	4.Sınıf	TOPLAM
$\sqrt{4}$ gibi kökün içi tam kare olan sayılar	4 (%10)	8 (%20)	10 (%25)	9 (%22,5)	31(%19,375)
Devirli sayılar	0 (%0)	7 (%17,5)	7 (%17,5)	5 (%12,5)	19(%11,875)
22/7 veya 3,14	3 (%7,5)	3 (%7,5)	2 (%5)	1 (%2,5)	9 (%5,625)
0,9 devirli sayısı	1 (%2,5)	2 (%5)	2 (%5)	2 (%5)	7 (%4,375)
$\sqrt{32}/\sqrt{2}$ (iki irrasyonel sayının oranı)	0 (%0)	1 (%2,5)	0 (%0)	4 (%10)	5 (%3,125)
Diğer doğru sayılar	8 (%20)	4 (%10)	5 (%12,5)	2 (%5)	19(%11,875)
Yanlış yanıtlar (zaten irrasyonel olanlar)	1 (%2,5)	0 (%0)	2 (%5)	1 (%2,5)	4 (%2,5)
Boş/Yanıt Yok	23(%57,5)	15 (%32,5)	12 (%30)	16 (%40)	66 (%41,25)

Tablo 125’e göre öğretmen adaylarının %56,5’u rasyonel olduğu halde irrasyonel olarak düşünülebilecek sayılara geçerli örnekler verebilmiştir. Ancak öğretmen adaylarının yaklaşık %41’i hiçbir örnek vermeden soruyu boş bırakmıştır. Verilen örneklerle ve yapılan yorumlara bakıldığında ise bazı noktalar dikkat çekmektedir:

- Öğretmen adaylarının en fazla belirttiği örnek karekökün içi tam kare olan sayılar olmuştur. Yapılan yorumlara bakıldığında ise normalde doğal sayı olan bu örneklerin kareköklü olduğu için öğrenciler tarafından irrasyonelmiş gibi algılanabileceği belirtilmiştir.
- Öğretmen adaylarının en sık belirttiği örneklerden biri devirli sayılar olmuştur. 19 öğretmen adayı devirli sayıların irrasyonel olarak algılanabileceğini belirtmiştir. Ancak 1.sınıf öğretmen adaylarından hiçbirinin bu düşüncede

olmadığı da dikkat çekmektedir. “Ondalık kısmın sonsuza gitmesinden dolayı devirli sayılar irrasyonel sayı olarak algılanabilir.” biçiminde yorumlara rastlanmıştır.

- Dokuz öğretmen adayı $22/7$ ve $3,14$ gibi π sayısının rasyonel yaklaşıklarının öğrenciler tarafından irrasyonelmiş gibi algılanabileceğini belirtmiştir.
- Yedi öğretmen adayı özellikle $0,9$ devirli sayısının irrasyonel olarak algılanabileceğini belirtmiştir. Bu sayının diğer devirli sayılardan farklı olarak ne tam 1, ne de 1’den küçük olarak algılandığı için öğrenciler tarafından kesirli yazılamayacağını belirtilebileceği ifade edilmiştir.
- Beş öğretmen adayı iki irrasyonel sayının oranı şeklinde yazılan ancak bölündüğü zaman rasyonel olan bazı ifadelerin öğrenciler tarafından irrasyonelmiş gibi algılanabileceğini belirtmiştir.
- 19 öğretmen adayı ise çeşitli nedenlerle bazı sayıların irrasyonel olarak algılanabileceğini belirtmiştir. İkiser öğrenci $10/3$ gibi sonucu devirli olan kesirli ifadelerin; $2,6$ gibi a/b biçiminde yazılmamış ondalık ifadelerin; 4 ve 7 gibi a/b biçiminde yazılmamış olan tam sayıların ve 3 öğrenci $0/5$ gibi sıfırın pay olduğu kesirli ifadelerin irrasyonel olarak algılanabileceğini belirtmiştir. Bunlar dışındaki bazı yanıtlar şunlardır: sıfır, negatif tam sayılar, i^2 gibi karmaşık sayı bulunduran ifadeler...
- Dört öğretmen adayı ise aslında irrasyonel sayı olan örnekler vermiştir. İki öğretmen π sayısı, birer tanesi ise e sayısı ve $\sqrt{2}$ sayılarını örnek göstermiştir.

İkinci alt soruda ise irrasyonel olup da rasyonel olarak düşünülebilecek sayılara örnek istenmiştir. Öğretmen adaylarının vermiş oldukları örnekler kategorilere ayrılmış ve sonuçlar Tablo 126’da sunulmuştur:

Tablo 126

İrrasyonel olduğu halde rasyonel olarak düşünülebilecek sayılara verilen örnekler

	1.Sınıf	2. Sınıf	3.Sınıf	4.Sınıf	TOPLAM
e veya π sayısı	15 (%37,5)	24 (%60)	23 (%57,5)	15 (%37,5)	77 (%48,125)
$\sqrt{2}$ gibi kök içi rasyonel olan sayılar	1 (%2,5)	2 (%5)	4 (%10)	2 (%5)	9 (%5,625)
$\frac{\sqrt{2}}{3}$ gibi a/b biçimindeki sayılar	0 (%0)	1 (%2,5)	3 (%7,5)	3 (%7,5)	7 (%4,375)
Diğer doğru sayılar	1 (%2,5)	0 (%0)	0 (%0)	1 (%2,5)	2 (%1,25)
Yanlış yanıtlar (zaten irrasyonel olanlar)	2 (%5)	4 (%10)	2 (%5)	2 (%5)	10 (%6,25)
Boş/Yanıt Yok	21 (%52,5)	9 (%22,5)	8 (%20)	17 (%42,5)	55 (%34,375)

Tablo 126 incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık %60'ının çeşitli irrasyonel sayı örnekleri verdikleri görülmüştür. Hiçbir örnek vermeyen veya yanlış örnek veren öğretmen adaylarının oranının en düşük 3. sınıflarda, en yüksek 1. sınıflarda olduğu görülmektedir. Verilen örnekler incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık olarak yarısının e ve π sayısı gibi irrasyonel sayıları belirttikleri anlaşılmaktadır. “Bu sayıların yaklaşık değeri olan 2,71 veya 3,14 gibi ifadeler düşünülüp onlar da rasyonel olarak algılanabilir.” şeklinde görüş bildiren öğretmen adayları olmuştur.

Dokuz öğretmen adayı içleri rasyonel sayı olan kareköklü ifadelerin de rasyonel sayı olarak algılanabileceğini belirtmiştir. Yedi öğretmen adayı ise rasyonel sayının tanımını da göz önüne alarak a/b biçiminde olan ancak $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{5}$ gibi irrasyonel olan sayıların öğrenciler tarafından rasyonel olarak algılanabileceğini belirtmiştir.

Bir öğretmen adayı, “2,3784... gibi bir irrasyonel sayı ondalık biçimde verildiği için rasyonel olarak algılanabilir.” şeklinde görüş bildirmiştir. Bir öğretmen adayı ise $\sqrt{2}.\sqrt{3}$ gibi bir ifadenin rasyonelmiş gibi algılanabileceğini belirtmiştir.

Yanlış yanıt veren 10 öğretmen adayı olmuştur. İki öğretmen adayı karekökün içi negatif olan sayıların rasyonel olarak düşünülebileceğini belirtmiştir. Bir öğretmen adayı i^4 ; iki öğretmen adayı 3,14 ve üç öğretmen adayı $22/7$ sayılarının rasyonel sayı olarak algılanabileceğini belirtmiştir. Hâlbuki bu sayılar zaten rasyonel sayıdır. İki öğretmen adayı ise paydası sıfır olan sayıları örnek göstermiştir. Ancak paydası sıfır olan ifadeler irrasyonel sayı da değildir. Bu nedenle açıklamanın doğru olmadığı söylenebilir.

Her iki alt soruya da bakıldığında öğretmen adaylarının yaklaşık %60'ının rasyonel düşünülebilecek irrasyonel sayılar ve irrasyonel olarak düşünülebilecek rasyonel sayılar hakkında geçerli örnekler sundukları görülmüştür. Ancak %40'lık bir kısmı soruları yanıtsız bırakmış veya yanlış örnekler sunmuşlardır. Bu durum öğrencilerin hatalarını veya kavrayışlarını anlama konusunda eksikliklerinin olduğunu göz önüne koymaktadır. Görüşme yapılan öğretmen adaylarına da bu sorular yöneltmiştir. Bazılarının kavramları kendilerinin de yanlış bildiği için yanlış örnekler verdiği görülmüştür. 1. sınıf öğretmen adayı Burçe, “ $22/7$ 'nin aslında devirli sayıdır. 22, 7'ye tam bölünemez. Bu nedenle irrasyoneldir. Ama kesirli yazıldığı için öğrenciler bunu rasyonel olarak düşünebilir.” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Daha önce yaptığı tanımlardan ve açıklamalardan öğretmen adayının devirli sayıları irrasyonel olarak düşündüğü bilinmektedir. 4.sınıf öğretmen adayı Maksude de “ e sayısını öğrenciler irrasyonel olarak düşünebilir. Aslında 2,71 miydi neydi rasyonel bir değeri vardır.” açıklamasında bulunmuştur. Görüldüğü gibi öğretmen adaylarının kendi yanlışları öğrencilerin hatalarını anlama noktasında da sorun yaratabilmektedir.

4.5.4. ÖBT oran sorusuna ilişkin bulgular

Testin dördüncü sorusunda öğretmen adaylarına “8/A sınıfında kızların sayısının sınıf mevcuduna oranı $1/2$ 'dir. 8/B sınıfında ise kızların sayısının sınıf mevcuduna oranı $1/6$ 'dır. Bu iki şube tek bir sınıfta birleştirildiğine göre yeni sınıftaki kız öğrencilerin sayısının sınıf mevcuduna oranı hakkında ne söyleyebiliriz?” sorusu ve bu soruya ilişkin öğrenci yanıtları verilmiştir. Hangi yanıt veya yanıtların doğru olduğu ve hataların nedenlerinin neler olabileceği sorulmuştur. Soruda sınıf mevcutları verilmediği için yeni oranla ilgili sadece $1/2$ ve $1/6$ arasında olduğu bilgisinden emin olabiliriz. Bu nedenle kesin sonuç içeren dört öğrencinin yanıtı yanlış, Mustafa isimli öğrencinin “Yeni oran $1/2$ ile $1/6$ arasındadır. Ancak tam olarak bulunamaz.” yanıtı ise doğrudur. Tablo 127’de öğretmen adaylarının her bir ifade için işaretlemiş oldukları doğru veya yanlış sayıları verilmiştir. Doğru yanıtlar italik olarak gösterilmiştir.

Tablo 127

ÖBT 4. soruda yer alan her bir ifadeye ait doğru-yanlış işaretleme sayılarının dağılımı

	Hasan: Paydaların ortalaması 4 olduğu için oran $1/4$ 'dür.		Hande: $1/2 + 1/6 = 2/3$ olarak bulunur.		Ozan: $1/2$ ve $1/6$ 'nın ortalaması $(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}) : 2 = \frac{1}{3}$ olduğu için yeni oran $1/3$ 'tür.		Melike: Oranlarda kesirlerden farklı olarak pay da toplanır. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ $= \frac{2}{8}$ olarak bulunur.		Mustafa: Yeni oran $1/2$ ile $1/6$ arasındadır. Ancak tam olarak bulunamaz.	
	Doğru	Yanlış	Doğru	Yanlış	Doğru	Yanlış	Doğru	Yanlış	Doğru	Yanlış
1. Sınıf	1 (%2,5)	39 (%97,5)	10 (%25)	30 (%75)	9 (%22,5)	31 (%77,5)	2 (%5)	38 (%95)	21 (%52,5)	19 (%47,5)
2. Sınıf	3 (%7,5)	37 (%92,5)	4 (%10)	36 (%90)	7 (%17,5)	33 (%82,5)	2 (%5)	38 (%95)	22 (%55)	18 (%45)
3. Sınıf	2 (%5)	38 (%95)	3 (%7,5)	37 (%92,5)	5 (%12,5)	35 (%87,5)	5 (%12,5)	35 (%87,5)	27 (%67,5)	13 (%32,5)
4. Sınıf	0 (%0)	40 (%100)	0 (%0)	40 (%100)	2 (%5)	38 (%95)	0 (%0)	40 (%100)	34 (%85)	6 (%15)
Toplam*	6 (%3,8)	154 (%96,3)	17 (%10,6)	143 (%89,4)	23 (%14,4)	137 (%85,6)	9 (%5,6)	91 (%94,4)	104 (%65)	56 (%35)

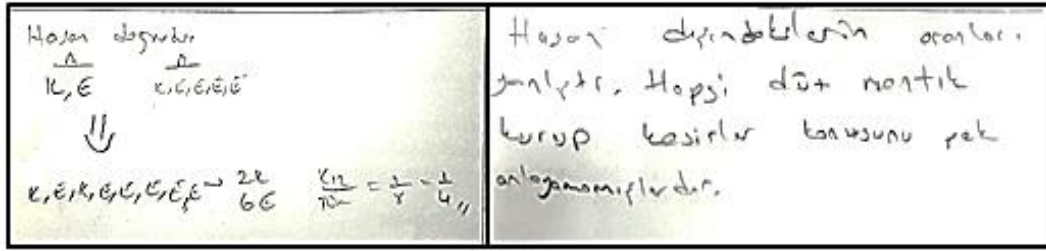
*Onda birler basamağına yuvarlanarak yazılmıştır.

Tablo 127 incelendiğinde Mustafa'nın ifadesine “doğru” diyen öğretmen adayı oranının ortalama %65 olduğu görülmektedir. Ayrıca bu oranın sınıf seviyesiyle birlikte yükseldiği de dikkat çekmektedir. Özellikle 4. sınıf öğretmen adaylarının %85'inin doğru yanıt vermesi olumlu bir gelişme olarak görülebilir. Aslında her biri bir kavram yanlışlığını ifade eden ilk dört öğrenci yanıtı içerisinde en büyük çeldiricinin Ozan'ın yanıtı olduğu

dikkat çekmektedir. Sadece iki sınıf mevcudunun eşit olmasının durumunda Ozan'ın yanıtı doğru olmaktadır. İkinci en büyük çeldirici ise Hande'nin yanıtı olmuştur. Yanıta göre iki sınıfın oranlarının toplamı bulunmuştur.

Öğretmen adaylarının doğru yanıtları incelendiğinde sınıf mevcuduna dikkat çektikleri görülmüştür. 104 öğretmen adayı bu durumu ifade ederken bir kısmı sınıf mevcudunu göz ardı edip sonucu nasıl bulacağına odaklanmıştır.

Hasan'ın yönteminin doğru olduğunu ifade eden 6 öğretmen adayı olmuştur. Bu yanıtlardan iki tanesi Şekil 45'te verilmiştir.



Şekil 45. Paydaların ortalamasını alan yanlış açıklamalara örnekler

Şekil 45'te verilen ilk yanıtta öğretmen adayı soruda verilen oranlar üzerinden her bir sınıfın kız ve erkek sayılarını K ve E şeklinde ifade etmiştir. Payı kız sayısı, paydayı ise sınıf mevcudu olarak alarak her iki sınıfı oluşturmuş ve bir araya getirmiştir. Son durumda 2 kız 6 erkek olduğu için yeni oranı 2/8 yani 1/4 olarak bulmuştur. Sağdaki örnekte ise öğretmen adayı yeterli açıklama yapmaksızın Hasan haricindeki öğrenci yanıtlarının yanlışlığını ifade etmiştir. Öğrencilerin kesirleri bilmediğini belirtmiştir. Hâlbuki soru kesirlerden ziyade oran mantığını içermektedir.

17 öğretmen adayının doğru olarak gördüğü ve bu nedenle yanlış açıklamalarda bulunduğu Hande'nin yanıtında her iki sınıf düzeyindeki kızların oranının toplamı yapılmıştır. Ancak ifade kesirlerdeki gibi payda eşitlenerek toplanmıştır. Bu yanıtı doğru olarak belirten açıklamalardan bazıları Şekil 46'da verilmiştir.

Mustafa'nın dediği doğru. Yeni oran $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{6}$ arasında olmalı. Her ikisinin ortası da bulunmuş. İki sınıf kız oranları toplanınca yeni kız oranı bulunmuş olur.	İki sınıf birleştirilmesine göre toplama işlemi yapılacaktır. Hande doğru söylemiştir. Melike işlemi bulduğu hâlde sonucuna yanlış bulmuştur. Sınıf birleştirildikten sonra homojen olarak ikiye ayrılmayacağı için Özan'ın yaptığı gibi 2'ye bölme gerekecektir. Mustafa'nın dediğini doğru ama işlemi olmadıysa işin sonucu değişmemiştir.
Bir sınıfta $\frac{1}{2}$ diğer sınıfta $\frac{1}{6}$ kız var ise toplam kızları bulmak için bunları toplayarak sonucu elde etmek için payda eşitlenmiş yaparız.	$\frac{\frac{1}{2} \text{ kızlar}}{\text{Tüm sınıf}} + \frac{\frac{1}{6} \text{ kızlar}}{\text{Tüm sınıf}} = \frac{\text{Kızlar}}{\text{Tüm sınıf}}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Şekil 46. Payda eşitleyerek iki oranı toplayan yanlış açıklamalara örnekler

Şekil 46'da görülen dört örnekte de öğretmen adayları kızların yeni oranını bulmak için toplama yapmak gerektiğini açıklamaktadır. Üstteki iki örnekte ise Mustafa'nın açıklaması kısmen doğru kabul edilmiştir. $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{6}$ arasında olacağı kabul görmüş ancak sonuç tam olarak $\frac{2}{3}$ olarak bulunmuştur. Bu sınıflardaki kız öğrencilerin oranı her birinde de $\frac{1}{2}$ olsaydı, Hande'nin yöntemine göre $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ sonucu bulunmuş olacaktı. Sonucun basit kesir çıkması öğretmen adaylarının hatayı görmelerini engellemiş olabilir.

Öğretmen adayları için en güçlü çeldirici Özan'ın açıklaması olmuştur. 23 öğretmen adayının iki oranın ortalamasını alan Özan'ın yanıtını doğru olarak kabul etmiştir. Öğretmen adayları da bu konuda birbirine benzer açıklamalarda bulunmuştur. Bu açıklamalardan ikisi Şekil 47'de verilmiştir.

Oranlarını bulup ortalamız ve cevap $\frac{2}{3}$ olur. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{2}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{3}{3} = 1$ ÖB $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = \frac{3}{3} = 1$ → Ama tam olarak da bulunamayabilir gibi farklı ama soruları böyle yaparız	Özan doğru söylemiştir. Eğer subeslerdeki öğrenci sayısı 6k olursa A subesinde 3k, B subesinde 1k kız olur. Subeler birleşirse $\frac{3+1k}{6+1k} = \frac{4k}{7k} = \frac{4}{7} \text{ oranı oluşur}$

Şekil 47. İki oranın ortalamasını alan yanlış açıklamalara örnekler

Şekil 47'de de görüldüğü gibi öğretmen adayları payda eşitleyerek eşit sınıf mevcudu üzerinden hesaplamalar yapmıştır. Bir sınıftaki öğrencilerin tamamı 6a olarak sayılmış ve buna dayalı olarak kızların oranı bulunmuştur. Aslında bu yöntem sınıf mevcutlarının eşit olduğu durumlarda geçerli bir yöntemdir. Ancak soruda sınıf mevcutlarının eşit olduğu verilmemiştir. Tablo 127'ye bakıldığında bu yanılgıya düşen

öğretmen adaylarının sınıf düzeyiyle birlikte azaldığı dördüncü sınıf düzeyinde sadece iki öğretmen adayının yanlış açıklama yaptığı görülmüştür.

Dokuz öğretmen adayı payların ayrı paydaların ayrı toplandığı Melike'nin açıklamasının doğru olduğunu ifade etmiştir. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarının hiçbirini bu yanlışla düşmezken en çok hatalı yanıtın 3. sınıf öğretmen adaylarında olduğu görülmüştür. Bu hatalı yanıtlardan bir kısmı Şekil 48'de verilmiştir:



Şekil 48. Payları ve paydaları kendi arasında toplayan hatalı açıklamalara örnekler

Şekil 48'deki açıklamalar incelediğinde sol üstteki ilk örnekte öğretmen adayının $1/2$ 'den yola çıkıp 8/A sınıfında sınıf mevcudunu 20 ve kız sayısını 10 olarak almıştır. 8/B'de ise $1/6$ oranından yola çıkarak sınıf mevcudunu 60, kız sayısını yine 10 almıştır.

O sayılarla seçilen sınıfta da oran $20/80$ 'den $2/8$ olarak bulunmuştur. Sağ üstteki ve sol alttaki örneklerde de aynı durum açıklanmıştır. Kesirlerden farklı olarak sınıf mevcutları da birleştiği için paydaların da toplanması gerektiği belirtilmiştir. Son örnekte ise öğretmen adayı her iki sınıftaki kız sayısına da k demiştir. Sayıları eşitmiş gibi aldığı için de cebirsel işlemlerden sonra yeni sınıfın oranını $1/4$ olarak bulmuştur.

Testin bu sorusunda görüldüğü gibi öğretmen adaylarının kendi yanlışları öğrenci hatalarını bulurken güçlüğü neden olmaktadır. Ancak öğretmen adaylarının büyük bir kısmının öğrencileri doğru değerlendirdiği ve hatalarını doğru tespit ettiği söylenebilir.

4.5.5. ÖBT tam sayılarda sıfırcı kuvvetin etkisi ile ilgili soruya ilişkin bulgular

Testin beşinci sorusunda öğretmen adaylarına, “ -4^0 üslü ifadesinin sonucunun Esra +1, Akif ise -1 olduğunu iddia etmektedir. Hangi öğrenci haklıdır? Nedenini açıklayınız.” sorulmuştur. Negatif sayılarda sıfırcı kuvvetin öğrencilerce en çok karıştırılan hususlardan biri olduğu söylenebilir. Üssün sıfır olduğu durumlarda bazı

öğrenciler sonucu doğrudan 1 olarak düşünebilmektedir. Tabanın negatif olduğu durumlarda üssün tekliğine veya çiftliğine bakılması, tabanda parantezin olup olmaması gibi durumlar bir arada olunca öğrenciler için kafa karıştırıcı bir durum olabilmektedir. Soruda da 4'ün üssü sıfır olarak yazılmasına rağmen parantez yer almadığı için sonuç -1 olarak bulunmaktadır. Bu soruya ilişkin öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtların dağılımı Tablo 128'de verilmiştir.

Tablo 128

ÖBT 5. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Akif haklı (Yeterli açıklama)	Akif haklı (Yetersiz açıklama)	Her ikisi de haklı olabilir.	Esra haklı. Sonuç +1	Yanıt Yok
1. Sınıf	21 (%52,5)	13 (%32,5)	0 (%0)	5 (%12,5)	1 (%2,5)
2. Sınıf	28 (%70)	8 (%20)	2 (%5)	2 (%5)	0 (%0)
3. Sınıf	24 (%60)	13 (%32,5)	0 (%0)	1 (%2,5)	2 (%5)
4. Sınıf	23 (%57,5)	17 (%42,5)	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)
Toplam	96 (%60)	50 (%31,25)	2 (%1,25)	8 (%5)	3 (%1,875)

Tablo 128 incelendiğinde öğretmen adaylarının %91,25'inin Akif'in haklı olduğunu ve sonucun "-1" olması gerektiğini belirttikleri görülmüştür. Dördüncü sınıf öğretmen adaylarının tamamının Akif'i haklı bulduğu dikkat çekmiştir. Öğretmen adaylarından %60'ı üssün sadece 4'e etki ettiğini önündeki negatifin üstten bağımsız olduğunu belirttikleri görülmüştür. Bu öğretmen adayları Esra'nın sonucunun öğrencilerin en sık yaptığı hatalardan biri olduğunu da belirtmişlerdir. Ancak %31'inin açıklamaları yetersizdir. Bazı öğretmen adayları parantez olursa +1, parantez olmazsa -1 olduğunu belirtmiştir. Ancak nedenini açıklamamışlardır.

Esra'nın haklı olduğunu sonucun "+1" olduğunu belirten sekiz öğretmen adayı bulunmaktadır. Bu yanıtlara bakıldığında aşağıdaki iki söylemin ağırlık kazandığı görülmektedir:

- "Tüm sayıların sıfırcı kuvveti 1'dir"
- "Sayıların çift kuvvetleri pozitif olur. Sıfır çift sayı olduğun için işlemin sonucu +1'dir."

Görüşme yapılan öğretmen adaylarından Çise, "Sıfır hariç tüm sayıların sıfırcı kuvveti +1'dir. Bu nedenle Esra haklıdır. Akif negatif sayıların kuvvetleri de negatiftir diye düşünmüş olabilir." şeklinde bir açıklama yapmıştır. Tüm bunlar ele alındığında öğretmen adaylarının kural olarak ezberledikleri bazı ifadelerden dolayı yanlış genellemelere sahip olabileceği anlaşılmaktadır.

Alan bilgisi ile çözülebilecek bu soru aslında en tipik öğrenci hatalarından birini içermektedir. Bu nedenle öğretmen adayının öğrenci bilgisi kapsamında bu hatadan veya yanılığdan haberdar olması beklenmektedir. Yazılı yanıtlara ve sonuçlara genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının büyük bir kısmının öğrencilerin bu konuyla ilgili yanılıgılarının farkında oldukları anlaşılmaktadır.

4.5.6. ÖBT kesir sorularına ilişkin bulgular

Testin altıncı sorusunda öğretmen adaylarına “6/A sınıfında derse giriyorsunuz.” şeklinde başlayan bir ifadeyle iki alt soru sorulmuştur. Sorular şu şekildedir:

6/A sınıfında derse giriyorsunuz...

a) $\frac{11}{13}$, $\frac{9}{11}$ ve $\frac{5}{7}$ kesirlerini bütüne yakınlığa göre sıraladınız. Öğrencilerinizden Zeynep, “Kesirlerde sıralama yaparken pay ve payda arasındaki farkı sabit olan iki kesirden sayısal olarak payı büyük olan kesir daha büyüktür” şeklinde çıkarımda bulundu.

Zeynep’in hatası var mıdır? Açıklayınız.

b) Tahtaya aşağıda yer alan problemi yazdınız;

“Selim Bey, kedisi Tekir için $\frac{1}{3}$ litre, Pamuk için $\frac{1}{2}$ litre, Maya için $\frac{1}{4}$ litre süt ayırmıştır. Buna göre Selim Bey kedileri için kaç litre süt ayırmıştır?”

Bunun üzerine öğrenci itiraz etti ve toplam süt miktarının bütünü geçtiğini ve bu nedenle sorunun yanlış olduğunu iddia etti.

Bu durumda ne yapılmalıdır? Soruda hata varsa soruyu düzeltiniz. Öğrenci hatalıysa hatasının kaynağı ne olabilir? Açıklayınız.

İlk soruda yer alan genelleme sadece basit kesirlerde geçerlidir. Bu genellemedeki hatanın öğretmen adaylarınca farkındalığı incelenmeye çalışılmıştır. İkinci soruda ise öğretmen adaylarına kesirlerle ilgili verilen bir probleme ilişkin öğrencinin itirazının haklılığı sorulmuştur. Öğrenci haklıysa problemin düzeltilmesi, hatalı ise öğrenci hatasının kaynağının ne olabileceği bilgisi istenmiştir.

İlk alt soruya ilişkin yanıtlar üç kategoriye ayrılmıştır. Öğrencinin genellemesinin doğru olmadığını, sadece basit kesirlerde geçerli olduğunu ifade eden yanıtlar “tamamen doğru” kategorisinde; genelleme yapılmaması gerektiğini belirten ancak ifadenin doğruluğuna yönelik net açıklama yapmayan yanıtlar ve negatif sayılarda ifadenin doğru olmayacağını belirten yanıtlar “kısmen doğru” kategorisinde; genellemenin yanlışlığını belirtmeyen veya farklı bir nedene bağlayarak belirten yanıtlar “yanlış” kategorisinde ele alınmıştır. Tablo 129’da soruya ilişkin öğretmen adaylarının yanıtlarının dağılımı verilmektedir.

Tablo 129

ÖBT kesirlere ilişkin birinci alt soruya verilen yanıtların dağılımı

	Tamamen Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış/Yanıt Yok
1. Sınıf	3 (%7,5)	3 (%7,5)	34 (%85)
2. Sınıf	1 (%2,5)	4 (%10)	35 (%87,5)
3. Sınıf	7 (%17,5)	2 (%5)	31 (%77,5)
4. Sınıf	5 (%12,5)	2 (%5)	33 (%82,5)
Toplam	16 (%10)	11 (%6,875)	133 (%83,125)

Tablo 129'dan da görüldüğü gibi öğretmen adaylarının büyük bir kısmı öğrencinin genelleme hatasını tespit edememiştir. Sadece 16 öğretmen adayı pay ve payda arasında farkı sabit olan basit kesirlerde payı daha büyük olanın kendisinin de büyük olacağını belirtmiştir. 16 öğretmen adayının haricinde kalan yanıtlar aşağıdaki gibi kategorilere ayrılmıştır.

- 73 öğretmen adayı (%45,625); “Öğrencinin açıklaması mantıklıdır.”, “Genelleme doğrudur.” şeklinde yanıtlar vermiştir.
- 23 öğretmen adayı (%14,375); “Payda eşitleyince ifadenin doğruluğu görülebilir.” şeklinde açıklama yapmış veya kendileri payda eşitleyerek sıralamanın doğruluğunu göstermiştir.
- 10 öğretmen adayı (%6,25); “Payı büyük olan değil paydası büyük olan daha büyüktür.”, “Paydası derse daha doğru bir ifade olur.” şeklinde yanıtlar vererek aslında aynı anlama gelen genellemeler yapmışlardır.
- 7 öğretmen adayı (%4,375), “Paydayı hesaba katmadan böyle bir genelleme yapamayız. Onu da düşünmemiz gerekir.”, “Payda eşit olursa ancak böyle bir genelleme yapılabilir.” şeklindeki yanıtlarla doğru olmayan açıklamalarda bulunmuştur.
- 6 öğretmen adayı (%3,75); “Genelleme yanlıştır, çünkü payı küçük olan daha büyüktür.”, “Pay büyürse payda da büyür. Dilimler küçüleceği için tam aksine payı büyük olan daha küçük olur.” şeklinde açıklamalar yapmıştır.
- 6 öğretmen adayı (%3,75); “Sıralama pozitif kesirlerde doğrudur, ancak negatif kesirlerde yanlış olur. Bu nedenle genelleme yapılamaz.” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Pozitif kesirlerin tamamında genellemeyi doğru bulması nedeniyle bu yanıtlar yanlış kabul edilmiştir.
- 6 öğretmen adayı (%3,75) soruyu boş bırakmış veya “Bilmiyorum.” yanıtını vermiştir.
- 11 öğretmen adayı (%6,875), “Genelleme yanlıştır. Zaten negatif sayılarda yanlışlığı görülmektedir.”, “Bu soru için doğru bir açıklama olmasına rağmen genellenmemeli.”, “Çeşitli modeller yapılarak doğruluğu veya yanlışlığı

görülebilir.” şeklinde “kısmen doğru” kategorisinde yer alan açıklamalar yapılmıştır.

Yukarıdaki yanıtlardan da anlaşıldığı üzere öğretmen adaylarının büyük bir kısmı kavram yanlışlığının farkına varamamıştır.

Kesirlerle ilgili ikinci alt soruya ilişkin yanıtlar ilk soruda olduğu gibi, “tamamen doğru”, “kısmen doğru” ve “yanlış” kategorilerine ayrılmıştır. Sınıf düzeylerine göre yanıtların dağılımı Tablo 130’da sunulmuştur.

Tablo 130

ÖBT kesirlere ilişkin ikinci alt soruya verilen yanıtların dağılımı

	Tamamen Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış/Yanıt Yok
1.Sınıf	20 (%50)	6 (%15)	14 (%35)
2.Sınıf	22 (%55)	2 (%5)	16 (%40)
3.Sınıf	25 (%62,5)	4 (%10)	11 (%27,5)
4.Sınıf	25 (%62,5)	6 (%15)	9 (%22,5)
Toplam	92 (%57,5)	18 (%11,25)	50 (%31,25)

Öğretmen adaylarının yaklaşık %58’i kesirlerin toplamının 1’e eşit olmasına gerek olmadığını belirtmiştir. Bazı öğretmen adayları öğrencinin kesrin parça bütün anlamı ve ölçme anlamını karıştırdığı yorumunu yapmıştır.

18 öğretmen adayı ise “kısmen doğru” olarak sınıflanan yanıtlar vermiştir. Bu yanıtlardan bir kısmı şu şekildedir:

- “Öğrenci tam sayılı kesirleri anlamamış. Bu nedenle kesrin tam sayılı kesir olmayacağını düşünmüştür.”
- “İki tane de bütün alınabilir aslında. Ancak öğrenci sadece 1 bütün olacak diye düşünmüş olabilir.”
- “İki veya daha fazla sütte öğretmen haklıdır.”

Yukarıdaki ilk yanıt doğru bir çıkarım olabilir. Öğrenci kesrin basit kesir olarak gösterilebileceğini düşünmüş bu nedenle bütünü geçtiğini sorun olarak düşünmüş olabilir. Ancak o durumda da öğretmen adayının bileşik kesirlerle ilgili açıklama yapması gerekirdi. Diğer yanıtlar ise kısmen doğruluk payı içerse de öğretmen adayının “bütün” kavramını 1 litre olarak düşündüğünü göstermektedir.

Yanlış verilen yanıtların en başlıca olanları ise aşağıda listelenmektedir:

- 18 öğretmen adayı (%11,25), “Öğrenci haklı, soruda ‘Tekir için 1/3 litresi’ dedikten sonra ‘geriye kalanın’ ifadeleri kullanarak diğer kedilerinkini ifade etmesi gerekirdi.” benzeri açıklamalarla soruyu düzeltme yoluna gitmiştir.

- 8 öğretmen adayı (%5), “Öğrenci haklı, kesirlerden bazıları değiştirilmeli.”, “Öğrenci haklı, ‘Maya için 1/6 litre’ denilirse toplam 1’e tamamlanır.” şeklindeki yanıtlarla sorudaki kesirlerin düzeltilmesi gerektiğini belirtmişlerdir.
- 7 öğretmen adayı (%4,375), “Sonuç bütünü geçmiştir. Öğrenci haklıdır.” açıklamasında bulunmuştur.
- 3 öğretmen adayı (%1,875), soruda kesirlere ait bütünlerin tarif edilmediğini, her birinin farklı bir bütünün oranları da olabileceğini belirtmiş ve bu nedenle de sorunun hatalı olduğunu açıklamıştır.
- 8 öğretmen adayı ise soruyu yanıtsız bırakmıştır.

Görüşme yapılan 4. sınıf öğretmen adayı Şeyma sorunun yanlış olduğunu ifade etmiştir. Şeyma ile araştırmacı arasında geçen diyalogun bir kısmı aşağıda verilmiştir.

Ş: Soruda bütün eksik. 1/3 litre, 1/4 litre falan demiş ama neyin 1/3 litresi? 1 litrenin mi 1/3 litresini almış? Bunu en başta belirtmesi gerekirdi. Bütünü vermeden kesirleri vermiş.

A: Peki litreleri ondalık sayıyla verse? 1/4 yerine 0,25 litre; 1/2 yerine 0,50 litre dese mesela? Hatta mililitreye çevirip 250 ml, 500 ml dese, yine eksiklik olur mu?

Ş: O zaman daha anlaşılır olurdu. Bütünün 1 litre olduğunu düşünebilirdi öğrenci.

A: Öğrencinin itirazı için ne düşünüyorsun?

Ş: O da hatalı. Bütün illa 1 litre olacak diye bir şey yok. Sonuçta süt bu. 1 litreyi geçebilir.

Görüldüğü gibi kesirlerin yanında litre yazmasına rağmen öğretmen adayları kesirleri ölçü anlamında veya miktar anlamında ele almak yerine bütünün bir parçası olarak ele almışlardır. Bazı öğretmen adayları toplamalarının “1 litre” olması gerektiğini düşünmüşlerdir. Yani öğrencinin itirazına katılmışlar ve öğrenci hatasını ortaya koyamamışlardır.

Kesirler; parçadan bütünü bulma, bütünden parçayı bulma gibi problemler, dört işlem, sıralama stratejileri, sayı doğrusunda gösterme ve kesirlerin farklı anlamları gibi geniş bir yelpazeye sahiptir. Bu yelpaze içerisinde öğrenci bilgisi bağlamında bu çalışmada sadece iki alt soruya değinilmiştir. Görüldüğü gibi öğretmen adaylarının bir kısmının öğrenci hatasını bulabilme konusunda önemli bir oranda eksikliği bulunmaktadır. Sınıf düzeylerine göre de olumlu yönde bir artışa rastlanmamıştır.

4.5.7. ÖBT ondalık gösterim sorusuna ilişkin bulgular

Testin yedinci sorusunda öğretmen adaylarına ondalık gösterimle ilgili üç öğrencinin hatasını içeren ifadeler verilmiştir. Bu hatalara neden olabilecek kavram yanlışlarının neler olabileceği sorulmuştur. Elif isimli öğrenci, tam kısım ve ondalık kısmı ayrı ayrı düşünüp $0,3 + 0,9 = 0,12$ işlemini yapmıştır. Öğretmen adayından Elif’in yaptığı

yanlışın neden kaynaklı olabileceğini açıklaması beklenmiştir. Beren isimli öğrenci, “0,245 sayısında yüzde birler basamağı 5’dir.” açıklaması yaparak basamak ismini yanlış belirtmiştir. Bu yanlış ondalık kısmın da tam kısımlardaki gibi “birler, onlar, yüzler...” veya benzer şekilde, “birde birler, onda birler, yüzde birler...” şeklinde isimlendirmeden kaynaklı olabilir. Öğrenciler tam kısımdaki basamak isimlendirmelerinin simetrik şekilde ondalık kısımda da yer aldığını düşünebilmektedir. Yaptığı hatanın altında yatan kavram yanlışlığının ne olabileceği sorulan üçüncü öğrenci Ayşe “0,1 ile 0,11 sayılarının ortasındaki sayı 0,6’dır.” düşüncesini belirtmiştir. Ondalık sayıların ondalık kısmının sıralı gidebileceği kavram yanlışlığına sahip bir öğrenci ondalık sayılarda basamak değerini göz ardı edip, 0,1’den sonra 0,2’nin, daha sonra 0,3’ün geleceğini ve bu sırayla da 0,9’dan sonra 0,10’un gelebileceği düşünülebilmektedir. Bu düşünce de 0,1 ve 0,11’in ortasında 0,6’nın olduğu sonucuna götürebilmektedir.

Elif, Beren ve Ayşe’nin ondalık gösterimle ilgili hatalı ifadelerine öğretmen adaylarının yapmış oldukları açıklamalar incelenmiştir. Bazı öğretmen adayları öğrencilerin cümlelerinde hata olmadığını belirtmiştir. Hata olduğunu belirtenler de öğrenci bilgisi bağlamında yapmış oldukları açıklamalara göre ayrılmıştır. Öğretmen adaylarının bu soruya ilişkin yanıtlarının dağılımı Tablo 131’de verilmiştir. “Hata vardır.” diyen ve öğrencilerdeki olası kavram yanlışlıklarını açıklayabilen yanıtlara (+), kavram yanlışlığı veya hata bağlamında açıklama yapmayan yanıtlar ise (–) ile gösterilmiştir.

Tablo 131

ÖBT ondalık gösterim sorusuna ait yanıtların dağılımı

	Elif: 0,3 + 0,9= 0,12			Beren: 0,245 sayısında yüzde birler basamağı 5’dir.			Ayşe: 0,1 ile 0,11 sayılarının ortasındaki sayı 0,6’dır.		
	“Hata yoktur.” diyenler	“Hata vardır.” diyenler (+)	“Hata vardır.” diyenler (-)	“Hata yoktur.” diyenler	“Hata vardır.” diyenler (+)	“Hata vardır.” diyenler (-)	“Hata yoktur.” diyenler	“Hata vardır.” diyenler (+)	“Hata vardır.” diyenler (-)
1. Sınıf	4 (%10)	30 (%75)	6 (%15)	10 (%25)	13 (%32,5)	17 (%42,5)	2 (%5)	13 (%32,5)	25 (%62,5)
2. Sınıf	3 (%7,5)	30 (%75)	7 (%17,5)	6 (%15)	8 (%20)	26 (%65)	3 (%7,5)	12 (%30)	25 (%62,5)
3. Sınıf	1 (%2,5)	25 (%62,5)	14 (%35)	2 (%5)	20 (%50)	18 (%45)	7 (%17,5)	22 (%55)	11 (%27,5)
4. Sınıf	2 (%5)	30 (%75)	8 (%20)	5 (%12,5)	18 (%45)	17 (%42,5)	4 (%10)	23 (%57,5)	13 (%32,5)
Toplam	10 (%6,25)	115 (%71,88)	35 (%21,88)	23 (%14,38)	59 (%36,88)	78 (%48,75)	16 (%10)	70 (%43,75)	74 (%46,25)

“0,3 + 0,9 = 0,12” ifadesinin doğruluğuna ilişkin yanıtlar incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık olarak %94’ünün işlemi hatalı bulduğu göze çarpmaktadır. 10

öğretmen adayı işlemde bir hata olmadığını belirtmiştir. Hata bulan öğretmen adaylarının yaptığı açıklamalardan bir kısmı aşağıda verilmiştir:

- “Öğrenci doğal sayılardaki gibi doğrudan toplama işlemi yapmış olabilir. Aşırı genelleme hatası yapmıştır.”
- “Elif ilk iki sayı sıfır tamla başlayınca sonucun da sıfır tamla başlaması gerektiğini düşünmüş olabilir.”
- “ $3/10 + 9/10 = 12/100$ gibi düşünmüş olabilir. Payları toplarken paydaları çarpmıştır.”
- “Eldeyi virgülün soluna kaydırmama hatası yapmış.”
- “Tam kısımlar kendi arasında, ondalık kısımlar kendi arasında toplanmalı gibi bir kavram yanılgısı olabilir.”
- “Basamak değeri kavramını anlamadığı için onda birler basamağındakileri toplayıp yüzde birler basamağını oluşturmuş.”
- “Ondalık ifadelerde çarpma işlemi yapılırken sonuçta virgülün nereye konulacağı ile ilgili kuralı toplama işleminde uygulamış olabilir.”

Yukarıdaki açıklamalar incelendiğinde öğrencilerce sahip olunması muhtemel çeşitli kavram yanılgıları ve hatalı düşünceleri yansıttığı görülmektedir. Bu ifadeye ilişkin tüm sınıf seviyelerinde birbirine yakın oranda olumlu açıklamalara rastlanmıştır.

“0,245 sayısında yüzde birler basamağı 5’dir.” ifadesinin doğruluğuna ilişkin yanıtlar incelendiğinde 23 öğretmen adayı (%14) hata olmadığını belirtmiştir. Yapılan görüşmelerde 3. sınıf öğretmen adayı *Orhan* da ondalık kısımlardaki basamak isimlerini karıştırdığını ve 5’in bulunduğu basamağı “yüzde birler” olarak hatırladığını belirtmiştir. Araştırmacı, “Neden o basamağın adı yüzde birler? Yüzde birler ifadesi nereden geliyor?” şeklinde soru sorunca öğretmen adayı bir süre düşündükten sonra “Bir bütünün yüzde biri. Yani $245/100$ oluyor. Ama $245/1000$ olması lazım. Binde birler mi o zaman? Sanırım öyle.” diyerek fikrini değiştirmiştir.

Tablo 131 incelendiğinde öğretmen adaylarının nerdeyse yarısının ifadedeki yanlışlığı belirttiği ancak yanlışlığın nedeni ile ilgili bir açıklama getirmedikleri görülmektedir. Sadece 59 öğretmen adayı hatanın nasıl bir kavram yanılgısından meydana gelebileceği ile ilgili bir açıklamada bulunmuştur. Bu yanıtlardan bazıları şu şekildedir:

- “Normal sayılar gibi birler, onlar, yüzler şeklinde düşünmüş olabilir.”
- “Basamak değerlerini bilmemekten kaynaklı bir sorun olabilir. Doğal sayılardaki gibi düşünmüştür.”
- “Birde birler, onda birler, yüzde birler şeklinde düşünülmüş olabilir.”
- “Soldan 3. basamak yüzler basamağı olduğu gibi sağdan 3. basamağın da yüzde birler basamağı olabileceği düşünebilir.”

Öğretmen adaylarının benzer açıklamalar yaptıkları görülmüştür. Üçüncü ve dördüncü sınıf öğretmen adaylarında doğru açıklama yapanların oranının ilk iki sınıf düzeyine göre daha yüksek olduğu ve en düşük oranın ikinci sınıf öğretmen adaylarında olduğu dikkat çekmektedir.

“0,1 ile 0,11 sayılarının ortasındaki sayı 0,6’dır.” ifadesinin doğruluğuna ilişkin yanıtlar incelendiğinde öğretmen adaylarının %90’ının ifadeyi hatalı bulduğu görülmektedir. 16 öğretmen adayı ise ifadede hata olmadığını belirtmiştir. Bu yanıtlardan bazıları Şekil 49’da verilmiştir.

Ayşe: 0,1 ile 0,11 sayılarının ortasındaki sayı 0,6’dır. ☐ HATA VAR ☒ HATA YOK 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0 1,1 (0,6) - Doğrudur	Ayşe: 0,1 ile 0,11 sayılarının ortasındaki sayı 0,6’dır. ☐ HATA VAR ☒ HATA YOK $0,1 + 0,11 = 0,21$ $\frac{0,21}{2} = 0,105$	Ayşe: 0,1 ile 0,11 sayılarının ortasındaki sayı 0,6’dır. ☐ HATA VAR ☒ HATA YOK $\frac{0,1 + 0,11}{2} = 0,6$

Şekil 49. 0,1 ve 0,11 sayılarının ortasındaki sayının 0,6 olduğunu belirten bazı örnekler

İlk örnekteki öğretmen adayının ondalık ifadeleri doğal sayılardaki sıralamayı aşırı genelleyerek sıraladığı görülmektedir. 0,9’dan sonra 0,10’un geldiğini ifade etmesi basamak değerlerinde de sorun yaşandığını göstermektedir. Ortadaki örnekte de öğretmen adayı yine sayıların ardışık gittiğini düşünerek aralıktaki 11 sayıyı toplayıp 11’e bölerek ortalamasını bulmaya çalışmıştır. Halbuki 0,1 ve 0,11 aralığında 0,2 veya 0,6 gibi sayılar bulunmamaktadır. Son örnekte de iki sayının ortalaması alınmaya çalışılmıştır. Mantık doğru olsa da öğretmen adayı 0,1 ile 0,11’in toplamının 0,12 olduğunu düşünüp yarısının da 0,6 olduğunu belirtmiştir. Görüldüğü gibi bu yanıtlar aslında öğrencilerin de yapabileceği ve öğretmen adaylarının farkındalıklarının olması gereken yanıtlardır. Ancak öğretmen adaylarının %10’unda benzer hatalar belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının sadece %43’ü öğrenci hataları ve yanılgıları bağlamında ifadeyi açıklayabilmiştir. Bu açıklamalardan bazıları şu şekildedir:

- “0,1 ile 0,11’i toplarken virgüle dikkat etmeyip toplamış olabilir. 0,12’yi ikiye bölmeye çalışarak 0,6 bulmuş olabilir.”
- “Doğal sayılardaki gibi düşünmüş olabilir. $1+11=12$ bulup ikiye bölerek 6 sonucuna ulaşmış olabilir.”
- “0,1 ile 0,2 gibi 0,11’e kadar giderek ortadaki sayının 0,6 olduğunu düşünmüş olabilir.”
- “1/10 ve 11/10 olarak düşünmüş ve ortalarında 6/10’un olduğunu belirlemiştir.”

Bu ifade için doğru açıklama yapan öğretmen adaylarının oranlarına bakıldığında ilk iki sınıf düzeyinde yaklaşık %30'larda iken son iki sınıf düzeyinde %55'lerde olduğu görülmektedir.

Ondalık gösterimle ilgili üç ifadenin yer aldığı ve öğrencilerin olası kavram yanlışları sorulan bu soruda öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğunun öğrenci hatasını tespit ettiği ancak bu adayların sadece yarıya yakınının öğrenci bilgisi bağlamında doğru açıklama yapabildikleri görülmüştür.

4.5.8. ÖBT toplama işlemi sorusuna ilişkin bulgular

Testin yedinci sorusunda üç öğrencinin yapmış oldukları toplama işlemleri verilmiştir. Naz, $345+72$ işleminin sonucunu 3117 olarak; Özge, $185+297$ işleminin sonucunu 2372 olarak; Mert, $246+178$ işleminin sonucunu 811 olarak bulmuştur. Bu yanıtlar toplama işlemiyle ilgili en sık yapılan kavram yanlışlarından yıla çıkarak hazırlanmıştır. Bu örneklerle göre; Naz, her bir basamağı ayrı ayrı toplayıp toplamaları aşağıya doğrudan yazarak 3117 sonucunu bulmuştur. Eldeyi yüzler basamağına aktarmamıştır. Özge, her bir basamaktaki tüm eldeleri ayrı ayrı toplayarak işlem sonucunun en soluna eklemiştir. Mert ise 6 ile 8'i toplayıp 14 bulduktan sonra 1'i yazmış ve 4'ü elde olarak almıştır. Birler basamağındaki ve yüzler basamağındaki eldeleri toplu halde son basamak olan yüzler basamağına eklemiştir. Ayrıca soruda bu üç işlemde öğrencilerin sonuçlarında ısrarcı olduğu ifade edilmiştir. “ $148+75$ ” işlemini her bir öğrencinin kaç bulabileceği sorularak öğrencilerin kavram yanlışlarının anlaşılıp anlaşılmadığı belirlenmeye çalışılmıştır. Tablo 132'de kavram yanlışlarını doğru tespit edip Naz için 11113, Özge için 2113 ve Mert için 511 işlemin sonucunu bulabilen öğretmen adaylarının sayıları verilmiştir.

Tablo 132

ÖBT 8. soruya verilen doğru yanıtların sayısı ve oranı

	Naz'ın kavram yanlışısını doğru tespit edenler	Özge'nin kavram yanlışısını doğru tespit edenler	Mert'in kavram yanlışısını doğru tespit edenler
1. Sınıf	26 (%65)	21 (%52,5)	10 (%25)
2. Sınıf	30 (%75)	25 (%62,5)	17 (%42,5)
3. Sınıf	33 (%82,5)	31 (%77,5)	25 (%62,5)
4. Sınıf	35 (%87,5)	31 (%77,5)	23 (%57,5)
Toplam	124 (%77,5)	108 (%67,5)	75 (%46,875)

Tablo 132 incelendiğinde öğretmen adaylarının Mert'in kavram yanlışısını tespit etmede zorlandığı görülmektedir. Öğretmen adaylarının yarıdan azı Mert'in 511 yanıtını bulması gerektiğini ifade edip kavram yanlışısını doğru açıklamıştır. Ayrıca Naz ve

Özge'nin yanıtlarında sınıf düzeylerine göre olumlu bir gelişme görülmektedir. Her üç işlemde de 3. ve 4. sınıfların ilk iki sınıf düzeyine göre daha yüksek oranda kavram yanlışlarını tespit edebildiği anlaşılmaktadır.

Naz'ın kavram yanlışısını tespit edemeyen, yanlış tespit eden veya doğru tespit ettiği halde işlemi yanlış yapan 36 öğretmen adayının (%22,5) vermiş oldukları hatalı cevaplar ve bu cevapları nasıl bulduklarına dair yaptıkları açıklamaların bazıları aşağıda birer örnekle listelenmektedir.

- “Naz, *aralarda* bulunan basamaklarda toplam 10'u geçiyorsa eldeyi yazmadan sonucu doğrudan yazmış. Bu nedenle bu yanlışta olan biri $148+75$ işlemini yaparken 8 ile 5'i toplayıp eldeyi onlar basamağına aktarıırken onlar basamağının sonucunu doğrudan alta yazar. Bu nedenle sonucu 1123 olarak bulur.”
(13 kişi - %8,125)
- “Naz, eldenin ne olduğunu bilmediği için $148+75$ işleminde 8 ile 5'i toplayıp sadece 3 yazmış. Ancak *ortada* olan sayıda 7 ile 4'ü toplayıp 11'i yazar. Bu nedenle bu yanlışta olan biri $148+75$ işleminin sonucu 1113 olarak bulunur.”
(4 kişi - %2,5)
- “Naz, 10'u geçen sonuçları doğrudan aşağıya yazmış. Bu nedenle $148+75$ işleminin sonucunu 11112 olarak bulur.”
(4 kişi - %2,5)
- Cevap vermeyenler (4 kişi - %2,5)
- Diğer yanıtlar (11 kişi - %6,875)

Özge'nin kavram yanlışısını tespit edemeyen, yanlış tespit eden veya doğru tespit ettiği halde işlemi yanlış yapan 52 öğretmen adayının (%32,5) vermiş oldukları hatalı cevaplar ve bu cevapları nasıl bulduklarına dair yaptıkları açıklamaların bazıları aşağıda birer örnekle listelenmektedir.

- “Özge birler basamağındaki ve onlar basamağındaki eldeleri toplu olarak son basamağa aktarmış. Bu nedenle $148+75$ işleminde 8 ile 5'i toplayıp 13'ün 3'ünü yazar. 4 ile 7'yi toplayıp 11'in 1'ini yazar. İki eldeyi de yüzler basamağına eklerse sonucu 313 olarak bulur.”
(20 kişi - %12,5)
- “Özge oluşan eldeleri eklememektedir. Bu nedenle $148+75$ işleminin sonucunu 113 olarak bulur.”
(7 kişi - %4,375)
- Yanıt yok (11 kişi - %6,875)
- Diğer (14 kişi - %8,75)

Tespit etmekte en çok zorlanılan Mert'in kavram yanılgısı olmuştur. Tespit edemeyen, yanlış tespit eden veya doğru tespit ettiği halde işlemi yanlış yapan 85 öğretmen adayı (%53,125) bulunmaktadır. Bu öğretmen adaylarının vermiş oldukları hatalı cevaplar ve bu cevapları nasıl bulduklarına dair yaptıkları açıklamaların bazıları aşağıda birer örnekle listelenmektedir.

- “Mert eldeleri sonuca yazarak birler basamağını elde olarak almış. Bu yüzden $148 + 75$ işleminde $5 + 8 = 13$ bulup 1'i yazarak 3'ü elde olarak alır. $4 + 7 = 11$ bularak 1'i elde alır. O eldeleri de 4 olarak en sona yazar. Cevabı 411 bulur.”
(4 kişi - %2,5)
- “Mert eldeli toplamalarda eldelerin sadece onlar basamağını almış. Bu nedenle bu soruda da 111 sonucunu bulur.
(4 kişi - %2,5)
- 311, 313 ve 611 yanıtları (2'şer kişi)
- Yanıt yok (57 kişi - %35,625)
- Diğer Yanıtlar (14 kişi - %8,75)

Öğretmen adaylarının yanıtlarında genel olarak öğrencinin hatalı yanıtını doğru analiz edememe problemi göze çarpmaktadır. Çünkü özellikle Mert ve Özge'nin kavram yanılgılarında eldelerin ne yapıldığı ile ilgili durumu doğru bir şekilde değerlendiremeyip $148 + 75$ sorusunda yanlış yanıtlar verdikleri gözlenmiştir. Özellikle Mert'in yanılgısı çok sayıda öğretmen adayı tarafından anlaşılamamıştır. Halbuki toplama işlemi ile ilgili tipik kavram yanılgılarından biri olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının yarıdan fazlasının soruyu “Bilmiyorum, anlamadım.” benzeri açıklamalarla yanıtsız bırakması veya yanlış yorumlaması toplama işlemi ile ilgili bir öğrencide var olabilecek kavram yanılgıları ile ilgili yeterince bilgi sahibi olmadıklarının işareti olarak yorumlanabilir.

4.5.9. ÖBT devirli ondalık gösterim sorusuna ilişkin bulgular

Testin dokuzuncu sorusunda öğretmen adaylarına üç öğrencinin devirli ondalık gösterimle ilgili yargıları verilmiş ve bu ifadelerin hangilerinin doğru olduğu sorulmuştur. Yanlış olan ifadelerdeki hataların ne tür kavram yanılgılara işaret ettikleri sorulmuştur.

İlk ifade İlhan'ın “ $0,9 \times 0,2$ işleminin sonucu $0,2$ 'den küçüktür.” düşüncesi olmuştur. Burada $0,9$ 'un 1'e eşit olması nedeniyle ifade yanlıştır. Ancak sıfır tamlaya başlayan iki ondalık sayının çarpımının her iki sayıdan da küçük olması gerektiği yanılgısı öğrencide mevcuttur. İkinci yanılgı Mehmet'in “ $3,9$ sayısı sayı doğrusunda 4'ün solunda yer alır.” düşüncesi olmuştur. Aslında eşit olan bu sayılar sayı doğrusunda aynı noktaya tekabül etmektedir. Bu nedenle Mehmet'in yanılgıya sahip olduğu söylenebilir. Sorulan bu

ilk iki ifade ile öğretmen adaylarının devreden kısmı 9 olan ondalık sayılarla ilgili oluşabilecek kavram yanlışlarını açıklamaları beklenmiştir.

Üçüncü ifade Serpil'in " $3,\bar{3}/0,\bar{2}$ işleminin sonucu tam sayıdır." düşüncesi olmuştur. Bu ifade doğru olmakla birlikte iki devirli sayının oranını içerdiği için öğrencilerce sonucun yine devirli çıkabileceği düşünülebilmektedir. Bu ifadeye öğretmen adaylarının "doğru" işaretlemesi yapması beklenmiştir. Tablo 133'te öğretmen adaylarının üç ifade için vermiş oldukları yanıtların dağılımı verilmiştir. Doğru yanıtlar italik biçimde gösterilmiştir.

Tablo 133

ÖBT devirli ondalık gösterim sorusuna ait yanıtların dağılımı

	İlhan: $0,\bar{9} \times 0,\bar{2}$ işleminin sonucu $0,\bar{2}$ 'den küçüktür.				Mehmet: $3,\bar{9}$ sayısı sayı doğrusunda 4'ün solunda yer alır.				Serpil: $3,\bar{3}/0,\bar{2}$ işleminin sonucu tam sayıdır.			
	“Doğru” diyenler		“Yanlış” diyenler		“Doğru” diyenler		“Yanlış” diyenler		“Doğru” diyenler		“Yanlış” diyenler	
1. Sınıf	11	(%27,5)	29	(%72,5)	25	(%62,5)	15	(%37,5)	24	(%60)	16	(%40)
2. Sınıf	8	(%20)	32	(%80)	22	(%55)	18	(%45)	26	(%65)	14	(%35)
3. Sınıf	12	(%30)	28	(%70)	19	(%47,5)	21	(%52,5)	31	(%77,5)	9	(%22,5)
4. Sınıf	2	(%5)	38	(%95)	12	(%30)	28	(%70)	25	(%62,5)	15	(%37,5)
Toplam	33	(%20,68)	127	(%79,38)	78	(%48,75)	82	(%51,25)	106	(%66,25)	54	(%33,75)

Tablo 133 incelendiğinde kavram yanlışısı barındıran İlhan ve Mehmet'in ifadelerinde sınıf düzeyiyle birlikte soruyu doğru yanıtlayanların oranında artış görülmektedir. İlk iki sınıf düzeyinde ise zıt bir durum dikkat çekmektedir. 1. sınıf ve 2. sınıf öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu ilk ifadeye “doğru”, ikinci ifadeye ise “yanlış” yanıtını vermiştir. Diğer sınıf düzeylerinde ise öğretmen adaylarının çoğu iki ifadeyi de “yanlış” olarak nitelemiştir. Öğretmen adaylarının iki ifade arasında en çok $3,\bar{9}$ sayısının sayı doğrusunda 4'ün solunda yer aldığı yanlışısını tespit etmede zorlandığı görülmektedir. Bu durumla ilgili görüşme yapılan 1. sınıf öğretmen adayı Tuğçe ile araştırmacı arasında şu diyalog geçmiştir:

A: “ $0,\bar{9} \times 0,\bar{2}$ işleminin sonucu $0,\bar{2}$ 'den küçüktür.” ifadesinin yanlış olduğunu belirtmişsin. “ $3,\bar{9}$ sayısı sayı doğrusunda 4'ün solunda yer alır.” ifadesinin ise doğruluğunu belirtmişsin. İlki neden yanlış? Öğrencinin hatası nerede? İkincisi neden doğru?

T: $0,\bar{9}$ sayısını 1'e eşit olarak alıyorduk. Her ne kadar çok mantıklı gelmese de. Zaten kesre çevirince de $9/9$ oluyor. Bu çarpma işlemini yapınca yine $0,\bar{2}$ 'ye ulaşırız. Bu nedenle eşit olması gerekirdi. Öğrenci “küçüktür.” dediği için hatalı.

A: Neden küçük olduğunu ifade etmiş olabilir?

T: Tam 1 olmadığını düşündüğü için 1'den küçük iki ondalık sayının çarpımının da iki sayıdan küçük olması gerektiğini düşünebilir.

A: İkinci ifade neden doğru?

T: 3,999... sayısı tam olarak 4 olmadığını için 4'ün hemen solunda yer alır.

A: $0,9$ sayısı 1'e eşit demiştin. Sayı doğrusunda o nerde yer alır?

T: Değer olarak eşittir. Ama sayı doğrusunda o da 1'in solundadır.

A: Solunda yer alıyorsa "ikisi farklı noktalar." diyebilir miyiz? Hem eşit hem de farklı noktalar olabilir mi?

T: Farklı ama hemen solunda. Aralarında başka nokta yok yani. 3,999... sayısı ile 4 sayısı da aynı şekilde. Eşit ama sayı doğrusunda solunda yer alır bence.

Görüldüğü gibi Tuğçe ifadelerin birbirine eşitliğini savunsa da sayı doğrusunda sayıların yeri ile ilgili yanlış içerisindedir. Bu yanılgıdan kaynaklı öğrenci hatasını da doğru tespit edememiştir. Öğretmen adaylarının yarıya yakınının bu ifadeyi doğru olarak nitelemesi benzer yanılgıların olduğunu göstermektedir.

Soruda yer alan Serpil'in " $3,3/0,2$ işleminin sonucu tam sayıdır." ifadesine ait bulgular incelendiğinde ise öğretmen adaylarının %66'sının doğru yanıtı verdiği görülmektedir. Sınıf düzeylerine göre ise olumlu bir artış görülmemektedir. İfadenin hatalı olduğunu belirten 54 öğretmen adayının yanıtları incelendiğinde şu dağılım ortaya çıkmıştır:

- 30 öğretmen adayı (%18,75) devirli sayıları a/b şeklinde rasyonel hale getirirken hata yaptığı için sonucu tam sayı bulamamıştır. $3,3$ sayısını $33/9$ veya $33/90$ şeklinde hatalı çeviren adayların olduğu görülmüştür. Bu nedenle Serpil'in ifadesinin hatalı olduğunu belirtmişlerdir.
- 9 öğretmen adayı (%5,625) iki sayıda da ondalık kısımların sonsuza gittiğini ve bu nedenle iki sayının bölümlerinin de ondalıklı olacağını belirtmiştir.
- 14 öğretmen adayı (%8,75) hiçbir açıklama yapmamıştır.
- 1 öğretmen adayı ise aslında iki devirli sayının oranının tam sayı olamayacağını ancak kesirli olarak yazınca tam sayı çıktığını ifade etmiştir. Serpil'in sayıları kesirli hale getirmiş olabileceğini o yüzden bu tür bir ifadede bulunmuş olabileceğini belirtmiştir.

Görüldüğü gibi ifadenin yanlış olduğunu düşünen öğretmen adaylarını kendileri de devirli sayıları rasyonel hale yanlış getirebilmiştir. Bazı öğretmen adayları ise kesirli hale getirme ihtiyacı bile duymadan ondalık kısmı sonsuza giden iki ondalık sayının oranının tam sayı olamayacağını doğrudan belirtmiştir. En son örnekte ifade edilen öğretmen adayı ise büyük bir ihtimalle devirli sayıların rasyonel hale getirildiğinde aynı sonucu

vermediğini düşünmektedir. Çünkü kesirli olarak ele aldığında tam sayı olduğunu gördüğü halde gerçekte tam sayı olamayacağını belirtmiştir.

KNT’de 13. ve 14. sorularda devirli sayılarla ilgili öğretmen adaylarının yanılgıları ortaya konmuştu. ÖBT’de ise bu yanılgıların öğrenci hatalarını tespit etme noktasında da sorun yarattığı görülmektedir.

4.5.10. ÖBT kareköklü sayılara ilişkin bulgular

Testin son sorusunda öğretmen adaylarına kareköklü sayılarla ilgili dört eşitlik verilmiş olup bu eşitlikleri belirten öğrencilerin hata yapıp yapmadıkları ve hatalı olanların ne düşünüp de hata yapmış olabilecekleri sorulmuştur. Verilen ifadelerden üçü hatalı, biri ise doğrudur. Fatma’nın ifadesi, “ $\sqrt{a^2} = a$ ” olup mutlak değeri göz ardı ettiği için hatalıdır. İkinci ifadeye Hazangül, “ $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ ” eşitliğini belirtmiştir. Öğrencilerce sık yapılan bir kavram yanılgısı olan bu eşitlikte Hazangül aralarında toplama işlemi olmasına rağmen karesel iki sayıyı kökten dışarı çıkarmıştır. Üçüncü ifadeye Sıla, “ $a > 0$ için $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$ ” eşitliğini belirtmiştir. Bu eşitlik 10. soruda yer alan tek doğru eşitliktir. Son ifadeye ise Azime, “ $\sqrt{a^{16}} = a^4$ ” eşitliğini belirtmiştir. Öğrencilerce en sık yapılan kavram yanılgılarından biri olan bu ifadeye öğrenci üssün yarısını almak yerine karekökünü almıştır.

Bu dört ifadeye ait öğretmen adaylarının yanıtlarının dağılımı Tablo134’te verilmiştir. Eşitliğin hatalı olduğunu belirtip kavram yanılgısı veya hatayı doğru tespit edenler parantez içinde “+” işareti ile belirtilmiştir.

Tablo 134

ÖBT 10. soruda yer alan eşitliklerin doğru-yanlış işaretlenme sayılarının dağılımı

	Yanıtlar	1.Sınıf	2.Sınıf	3.Sınıf	4.Sınıf	TOPLAM
Fatma: $\sqrt{a^2} = a$	Doğru Diyenler	14 (%35)	17 (%42,5)	9 (%22,5)	5 (%12,5)	45(%28,13)
	Hatalı Diyenler (+)	26 (%65)	23 (%57,5)	31 (%77,5)	34 (%85)	114 (%71,25)
	Hatalı Diyenler (-)	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)	1 (%2,5)	1 (%0,625)
Hazangül $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$	Doğru Diyenler	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)
	Hatalı Diyenler (+)	33 (%82,5)	32 (%20)	40 (%100)	36 (%90)	141 (%88,13)
	Hatalı Diyenler (-)	7 (%17,5)	8 (%80)	0 (%0)	4 (%10)	19 (%11,88)
Sıla: $a > 0$ için $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$	Doğru Diyenler	30 (%75)	34 (%85)	35 (%87,5)	36 (%90)	135 (%84,38)
	Hatalı Diyenler	10 (%25)	6 (%15)	5 (%12,5)	4 (%10)	25 (%15,63)
Azime: $\sqrt{a^{16}} = a^4$	Doğru Diyenler	6 (%15)	6 (%15)	8 (%20)	4 (%10)	24 (%15)
	Hatalı Diyenler (+)	31 (%77,5)	29 (%72,5)	27 (%67,5)	30 (%75)	117 (%73,13)
	Hatalı Diyenler (-)	3 (%7,5)	5 (%12,5)	5 (%12,5)	6 (%15)	19 (%11,88)

Tablo134 incelendiğinde tek doğru ifade olan Sıla'nın eşitliğinde öğretmen adaylarının %84'ünün doğru tespit yaptığı görülmektedir. Doğru tespit oranı sınıf düzeylerine göre artış göstermiştir. İfadeyi hatalı bulan öğretmen adaylarının birçoğunun n'in tek veya çift olma durumuna göre eşitliğin değişeceğini söyledikleri görülmüştür.

İfadeler arasında öğretmen adaylarının en yüksek oranda doğru tespit ettikleri hata Hazangül'ün eşitliği olmuştur. Hiçbir öğretmen adayının ifadeyi doğru kabul etmediği görülmektedir. 141 öğretmen adayından bir kısmı kök içindeki ifadenin $a+b$ 'nin karesi olmadığını $2ab$ ifadesinin eksik olduğunu belirtmiştir. Bir kısmı ise a ve b yerine sayı vererek eşitliğin yanlışlığını göstermiştir. 19 öğretmen adayı ise hatanın nedenini açıklamamıştır.

Fatma'nın eşitliğini ise öğretmen adaylarının %28'i tespit edememiştir. İfadede mutlak değer olması gerektiğini belirtmedikleri görülmüştür. Geriye kalan öğretmen adayları ise sonucun a veya $-a$ çıkabileceğini belirtmiş ve eşitliğin sağının " $|a|$ " olması gerektiğini ifade etmişlerdir.

Öğretmen adaylarının en zorlandığı ifadelerden biri Azime'nin eşitliği olmuştur. 24 öğretmen adayı üsse dikkat etmeyip eşitliğin doğru olduğunu savunmuştur. Hatta Şekil 50'de verildiği gibi üssün çift olması sayesinde eşitliğin bozulmadığını ifade eden adaylar olmuştur.

☒ DOĞRU ☐ YANLIŞ Çift bir sayı old. için (16) a^4 diye çıkar	☒ DOĞRU ☐ YANLIŞ a negatif bir sayı olabileceği için $1a^4$ denmelidir. Ama üs çift kuvvet olduğu için her şekilde pozitif çıkacaktır

Şekil 50. Azime'nin ifadesini doğru kabul eden bazı yanıtlar

Şekil 50'de görüldüğü gibi öğretmen adayları üsler çift sayı olduğu için ifadeleri doğru kabul etmişlerdir. 16 ve 4 yerine $\sqrt{a^{25}} = a^5$ ifadesi verilse eşitliğin doğru olmadığını düşünebilecekleri anlaşılmaktadır. Zaten ifadenin hatalı olduğunu belirttiği halde yanlış bir gerekçeye dayandıran 19 öğretmen adayı olmuştur. Bu yanıtlardan bazıları Şekil 51'de verilmiştir.

☐ DOĞRU ☒ YANLIŞ $\pm a^4$ olarak girer	☐ DOĞRU ☒ YANLIŞ Fatma'da olduğu gibi: a sayısının negatif olması durumunda farklı sayılar olabilir. Soruda $a > 0$ belirtilmesi gerek.
☐ DOĞRU ☒ YANLIŞ a'nın negatif mi yada negatifse parantez içinde negatif mi gibi belirtmesi gerekirdi.	

Şekil 51. Azime'nin ifadesini yanlış gerekçelendirmelerle hatalı kabul eden bazı yanıtlar

Şekil 51'de yer alan yanıtlar incelendiğinde öğretmen adaylarının üssün yanlışlığından ziyade farklı noktalara dikkat çektiği görülmektedir. Sol üstteki yanıtta a^{16} 'nın karekök dışına pozitif veya negatif çıkabileceğini bu nedenle eşitliğin eksik olduğunu belirten bir açıklama görülmektedir. O ifadeye benzer şekilde mutlak değer eksik olduğunu belirten öğretmen adayları da olmuştur. Sol altta a'nın negatif mi pozitif mi hatta negatifse parantezin olup olmadığının belirtilmesi gerektiğini açıklayan bir yanıt görülmektedir. Sağdaki yanıtta da a'nın sıfırdan büyük olması gerektiğinin belirtilmesi gerektiği ifade edilmiştir. Halbuki a'nın negatifliği pozitifliği veya tekliği, çiftliği eşitliği etkilememektedir. a^8 üslü ifadesi verilmiş olsa eşitliğin doğru olacağı aşikardır. Şekil 51'de verilen örneklere benzer şekilde 19 öğretmen adayı doğru olmayan gerekçelendirmelerde bulunmuştur.

Kareköklü sayılarla ilgili çeşitli yanlışları içeren bu soruda en düşük doğruluk oranı yaklaşık %72 ile Fatma'nın eşitliğindeki a^2 'nin karekökü alındığında mutlak değer belirtilmemesi olmuştur. Genel olarak sonuçlara bakıldığında ise öğretmen adaylarının büyük bir kısmının kareköklü ifadeler bağlamında öğrenci hatalarını doğru tespit ettiği görülmüştür.

4.5.11. Öğrenci bilgisi bileşenine yönelik genel değerlendirme

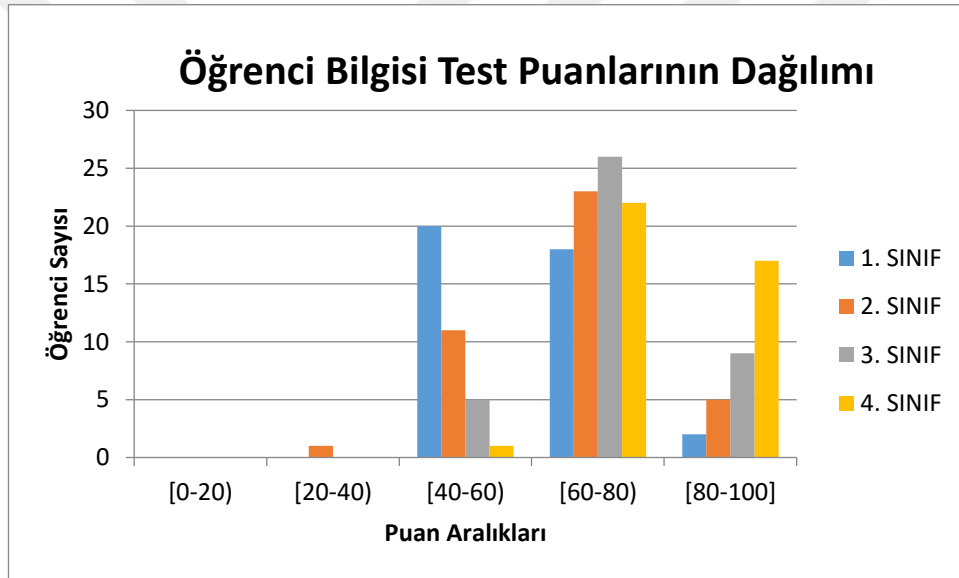
Öğrenciyi anlama bilgisi veya öğrenen bilgisi olarak da ifade edilen bu çalışmada "öğrenci bilgisi" ismiyle söz edilen pedagojik alan bilgisi bileşenine yönelik hazırlanmış olan ÖBT'ye yönelik içerik analizi sonuçları yukardaki bölümlerde sunulmuştur. İçerik analizinin yanı sıra "veri analizi" bölümünde örnekleri verildiği şekilde tüm sorular 4 üzerinden puanlanmış ve okuyucu kolaylığı açısından elde edilen puan 2,5 ile çarpılarak 100 üzerinden değerlendirme yapılmıştır. Her bir sınıf düzeyine ait test puanları ortalamaları Tablo 135'te sunulmuştur.

Tablo 135

ÖBT genel ortalamaları (100 üzerinden)

1. Sınıf Ortalaması	2. Sınıf Ortalaması	3. Sınıf Ortalaması	4. Sınıf Ortalaması	Tüm Örneklem Ortalaması
60,0625	65,5	70,125	75,3125	67,578125

Tablo 135 incelendiğinde öğrenci bilgisi bileşeninde öğretmen adaylarının puan ortalamalarının 50 ve üzerinde olduğu görülmektedir. Ayrıca her bir sınıf düzeyinde yaklaşık 5'er puanlık artış göze çarpmaktadır. Pedagoji derslerinin alınmasıyla birlikte pedagojik alan bilgisinde görülen artışın aslında beklenen bir sonuç olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının test puanları eşit aralıklı kategorilere ayrıldığında her bir kategoride kaçar öğretmen adayı olduğu Şekil 52'de sunulmuştur:



Şekil 52. ÖBT puan dağılımları

Grafikte öğretmen adaylarının daha çok 60-80 aralığında yığıldığı görülmektedir. Her sınıf düzeyinde 80 puan ve üzeri alan öğretmen adayının olduğu ancak en çok 4.sınıf öğretmen adaylarının bu grupta yer aldığı görülmektedir. Bu üst grupta sınıf düzeylerine göre düzenli artış olması olumlu bir gelişme olarak yorumlanabilir. 60 puanın altında alan sadece 1 tane son sınıf öğretmen adayının olduğu dikkat çekmektedir.

Öğrenci bilgisi test sorularının her biri ayrı ayrı değerlendirilip her soruya ait ortalamalar tablolastırılmıştır. Tablo 136'da sınıf düzeylerine göre her bir soru için ortalama puanlar gösterilmektedir.

Tablo 136

ÖBT’de yer alan her bir soruya ait puan ortalamaları

	1.Sınıf	2.Sınıf	3.Sınıf	4.Sınıf	ORTALAMA
Soru 1	2,625	2,950	2,975	3,275	2,956
Soru 2	2,925	3,100	3,275	3,575	3,219
Soru 3	1,525	2,400	2,555	2,275	2,189
Soru 4	2,050	2,200	2,600	3,275	2,531
Soru 5	3,200	3,525	3,375	3,600	3,425
Soru 6	1,450	1,425	1,700	1,750	1,581
Soru 7	2,850	2,900	3,125	3,150	3,006
Soru 8	2,225	2,650	3,175	3,200	2,813
Soru 9	2,125	2,550	2,475	2,950	2,525
Soru 10	3,225	3,300	3,475	3,500	3,375

Tablo 136 incelendiğinde 10 sorudan sadece bir tanesinin 2 puanın altında ortalamaya sahip olduğu anlaşılmaktadır ayrıca testin 1., 2., 4., 7., 8., ve 10. sorularında sınıf düzeyindeki artışla birlikte ortalama puanların arttığı görülmektedir. Geriye kalan dört soruda ise düzenli bir artış görülmemektedir.

En düşük ortalamaya sahip üç soruya bakıldığında şu şekilde bir sıralama yapılabilir:

- Testin ortalaması 2 puanın altında kalan tek sorusu altıncı soru olmuştur. Kesirlerde sıralama ve kesirlerin anlamları (parça-bütün ve ölçme) ile ilgili öğrenci kavram yanlışlarını tespit etmeye yönelik olan bu soruda öğretmen adaylarının zorluk yaşadığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının ölçme anlamıyla verilen bir kesirde bütünü kaç olduğunu sorgulayabildikleri anlaşılmıştır.
- Testte en düşük ortalamaya sahip sorulardan biri 3. Sorudur. Soruda öğrenciler tarafından rasyonel olduğu halde irrasyonel olarak düşünülebilecek ve irrasyonel olduğu halde rasyonel olarak düşünülebilecek sayılara birer örnek istenmiş ve bunun yanlışların neden kaynaklanabildiği sorulmuştur. Öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilgili kendi yanlışlarının doğru örnekler verebilmelerine de engel olduğu görülmüştür.
- Devirli sayılarla ilgili hataların ve kavram yanlışlarının yer aldığı dokuzuncu soru testte en düşük ortalamaya sahip sorulardan biri olmuştur. Öğretmen adaylarının devreden kısmı 9 olan sayılarda sorun yaşadığı görülmüştür. 0,999... sayısının 1’e eşit olmadığını düşünmeleri veya 3,999... sayısının sayı doğrusunda 4’ün solunda yer aldığını düşünmeleri öğrenci hatalarını da tespit noktasında sorunlara neden olmuştur.

Tüm yazılı bulgular ve görüşme verileri dikkate alınarak ÖBT'den elde edilen sonuçlar maddeler halinde özetlenmiş ve yorumlanmıştır.

- Bazı öğretmen adaylarının kesirler, devirli sayılar, çarpanlar ve katlar, oran-orantı, bölme işlemi, üslü ifadeler ve kareköklü ifadeler gibi öğrenci hataları ve kavram yanlışlarını sıkça barındıran çeşitli konularda kendi kavram yanlışlarının ve dolayısıyla alan bilgisi eksikliklerinin etkisiyle zorluk yaşadığı görülmüştür.
- Öğretmen adaylarından görüşme sırasında rasyonel olduğu halde öğrencilerce irrasyonel olarak düşünülebilecek bir sayı örneği istendiğinde bir öğretmen adayı, “Zaten ben de karıştırıyorum. Mesela e sayısı 2,71 olarak da yazılabilir. Hem rasyonel hem irrasyonel midir emin değilim. Bazı kareköklü sayılar mesela $\sqrt{8}$ dışarı tam çıkar mı çıkmaz mı araştırmak lazım. Denemek lazım ondalıkları. Öğrencinin de bunları karıştırması normal.” şeklinde bir açıklamada bulunmuştur.
- Görüşme yapılan öğretmen adaylarından Burçe, 22/7'nin devirli olduğunu, 22'nin 7'ye tam bölünemediğini ve bu nedenle irrasyonel olduğunu ancak kesirli biçimde yazıldığı için öğrencilerce rasyonel olarak düşünülebileceğini belirtmiştir. Benzer şekilde görüşme yapılan son sınıf öğretmen adayı Maksude, e sayısını öğrencilerin irrasyonel olarak düşünebileceğini halbuki 2,71 gibi bir değerinin olduğunu belirtmiştir. Görüldüğü gibi öğretmen adaylarının *kendi yanlışları öğrenci düşüncelerini anlama noktasında* hatalara neden olmaktadır.
- Bir başka soruda 4. sınıf öğretmen adayı Şeyma, “0,999... sayısının 1'e eşit olduğuna *ben inanmıyorum*. Bu sayıyı bir başka sayıyla çarpınca sayı küçülür yani. *Öğrencinin de inanmaması gayet doğal*.” şeklinde ifadede bulunarak kendi hatasını dile getirmiştir.
- Testte en yüksek ortalamaya sahip sorulardan biri limon-su sorusu olarak da hatırlanabilecek olan orantı sorusu olmuştur. Öğrencinin çarpımsal ilişki kurmak yerine toplamsal ilişki kurduğu soruda bu hatanın nedeninin araştırılması öğretmen adaylarından istenmiştir. Öğretmen adaylarının hatanın kaynağını belirtmede güçlük yaşadığı anlaşılmıştır.
- 2. sınıf öğretmen adaylarından Çise, “Ondalık sayılarda basamakları ben de bilmiyorum. Nasıl bulunuyordu hatırlamıyorum. Ezber bir bilgi sonuçta. Öğrencinin de ezberlese bile unutması, yanlış yapması normal sayılabilir.” ifadesinde bulunarak basamak çözümleme ile doğrudan ilgisi olan bir sorunun ezbere bir bilgi gerektirdiğini ifade etmiştir. Kendi bilgi eksikliği olduğu bir konuda *öğrenciden de aynı zorluğu yaşamasını beklediği* görülmüştür.
- Bazı öğretmen adayları yapılan görüşmede özel ders verdiklerini ve bu dersler sayesinde öğrencilerin nerelerde hata yaptığını ve neleri anlamakta zorluk çektiklerini anlayabildiklerini ifade etmişlerdir. 3. sınıf öğretmen adaylarından

Simre, “Özel ders sırasında öğrencinin sorduğu bir soruya bazen ben de cevap veremiyorum. Bilgi eksikliğimin farkına varıp yurda gidince araştırıyorum neydi acaba diye. Benim kavramlarla ilgili bilgim için iyi oluyor.” şeklinde bir ifadede bulunmuştur. Bu tür öğrenciyle karşılaşarak yaptığı öğretim tecrübelerinin öğretmen adayının alan bilgisine de olumlu katkı yaptığı anlaşılmaktadır. Bir başka öğretmen adayı görüşmede, “Bir öğrencinin anlamadığı ya da karıştırdığı yerleri başka bir öğrenciye anlatırken oralara dikkat çekiyorum. ‘Şunu karıştırma’ diyorum mesela. Öğrencinin daha önce aklına gelmese bile farkına varıyor ve ‘aaa tamam’ diyebiliyor.” şeklinde açıklama yapmıştır. Bu durum *öğretim tecrübesinin* öğrencinin olası kavram yanlışlarını tespit etmede ve başka bir öğrencinin olası kavram yanlışlarını engellemede bir önlem olarak kullanılmasında ne derece önemli olduğunu ortaya koymaktadır. Bu nedenle de öğretmenlik uygulaması gibi öğrenciyle öğretmen adayını buluşturan derslerin öğretmen adayının pedagojik alan bilgisine ve özel olarak öğrenci bilgisi bileşenine katkı sağladığı söylenebilir. Yine benzer şekilde öğrenci bilgisi test ortalamasının 4. sınıf seviyesinde en yüksek olmasında 4. sınıfta yer alan uygulamalı derslerin de etkisi olduğu düşünülebilir.

- Öğretmen adaylarının %40’ı “Sıfır, her doğal sayının katıdır.” şeklindeki öğrenci görüşünün yanlış olduğunu iddia etmiş, “Sıfır sadece sıfırın katıdır. 1 her doğal sayının katıdır.”, “Katı demek bölünenlerinden birisi demektir. Ancak sıfır bölünemez.”, “Sıfır çarpma işleminde yutan eleman görevi görür. Kat olamaz.”, “Her doğal sayı sıfırın katıdır. Sıfır hiçbir doğal sayının katı değildir.” açıklamalarıyla *öğrencinin doğru olan görüşünün yanlışlığını iddia etmişlerdir.*
- Asal sayı tanımını “1 sayısına ve kendisine bölünebilen sayılara asal sayı denir.” şeklinde yapan bir öğrenciyi öğretmen adaylarının %43’ü desteklemiştir. Tanımın yanlış olduğunu belirten öğretmen adaylarının ise sadece 13’ünün tanımdaki eksiklikleri tam olarak belirtebildiği görülmüştür. Öğretmen adaylarının *tanımlamadaki eksikliklerinin öğrenci tanımlarını değerlendirirken* de sorunlara neden olduğu anlaşılmıştır.
- Kesirleri sıralama ile ilgili soruda öğrencinin yanlış olan genellemesi öğretmen adaylarına sorulmuştur. *Sadece %10’luk katılımcı, öğrencinin aşırı genelleme yaptığını tespit etmiş* ve doğru açıklamada bulunmuştur.
- Kesirlerin ölçme anlamı ile parça bütün anlamını karıştıran bir öğrencinin itirazını konu alan Selim Bey sorusunda (ÖBT 6b) çok sayıda öğretmen adayının problemi doğru değerlendiremediği, doğru olan problemin yanlış olduğunu belirttikleri görülmüştür. Kesir cinsinden verilen 3 kedinin içtiği süt miktarlarının toplamının 1’i geçmesine itiraz etmişlerdir. Öğretmen adaylarının *kesirlerin farklı anlamlarını bilmesinin ve farklı anlamlara yönelik problemler oluşturmabilmesinin* oldukça önemli olduğu söylenebilir.

- ÖBT 7. Soruda üç öğrencinin yapmış olduğu üç hatalı toplama işlemindeki yanlışlığın ne olduğu öğretmen adaylarına sorulmuştur. Öğretmen adaylarının yanıtlarından öğrencilerin toplama işlemi ile ilgili kavram yanlışlarını doğru analiz edemedikleri anlaşılmıştır. Öğretmen adaylarının yarıdan fazlasının soruyu “Bilmiyorum, anlamadım.” benzeri açıklamalarla yanıtsız bırakması veya yanlış yorumlaması *toplama işlemi ile ilgili bir öğrencide var olabilecek kavram yanlışları* ile ilgili yeterince bilgi sahibi olmadıklarının işareti olarak yorumlanabilir.

4.6. Pedagojik Alan Bilgisi Kapsamında Öğretim Stratejileri Bilgisine Yönelik Bulgular

Pedagojik alan bilgisinin alt bileşenlerinden biri olan öğretim stratejileri bilgisi matematik özelinde matematiksel kavramların ve kuralların öğrenilmesini kolaylaştırmak için kullanılan açıklama yollarını ve gösterimlerini içerir. Bu nedenle öğretmenin öğrencinin bir açıklamasına veya sorusuna verdiği dönüt bu kapsamda değerlendirilmektedir. Bu bölümde *pedagojik alan bilgisi öğretim stratejileri bileşenine* yönelik bulgular sunulacaktır. Test 10 sorudan oluşmaktadır. Bazı sorularda öğretmen adaylarından dönüt vermesi istenmekte olup vermiş oldukları dönütlerle öğretmen adaylarının açıklama biçimleri ve öğretim stratejileri incelenmek istenmiştir. Bazı sorular ise şeffaf kesir kartları ve sayma pulları gibi materyallerin öğretim aşamasındaki kullanım bilgisini içermektedir. Her bir sorunun kendine özgü içerik kategorileri mevcut olup bulgular her bir soru için ayrı başlıklar halinde bu bölümde sunulmuştur.

4.6.1. ÖST 1. soruya ilişkin bulgular

Testin ilk sorusu şu şekildedir:

“Bir mağazada pantolonlar %10 indirimle satılmaktadır. Etiket fiyatı 40 TL olan pantolonlardan 2 tane alan bir müşteri kaç TL ödeme yapmalıdır?”

Bu soruya sınıfınızdaki öğrencilerden Mehmet, aşağıdaki gibi cevap vermiştir:

“Bir pantolon %10 indirimse, 2 pantolon %20 indirim eder. 2 pantolonun fiyatı 80 TL dir. %20 indirimle $80 - 16 = 64$ TL ödeme yapmalıdır.”

Bu durumda Mehmet’i bilişsel çatışmaya düşürmek için nasıl bir dönüt verirsiniz?

Bir yüzde problemi içeren yukarıdaki soruda öğretmen adayından öğrenciyi bilişsel çatışmaya düşürerek, öğrenciyi hatası ile yüzleştirecek bir dönüt vermesi istenmiştir. Soruya verilen yanıtlar incelenmiş ve öğretmen adaylarının dönütleri öğrenci veya öğretmen merkezli olmasına göre ve bilişsel çatışma içerip içermemesi gibi kriterlere göre kategorilere ayrılmıştır. Bu kategoriler ve öğretmen adaylarının vermiş oldukları bazı dönüt örnekleri aşağıdaki gibi listelenebilir:

a) Öğrencinin ön planda olduğu bilişsel çatışma içeren dönütler (Öğrenci, BÇ+)

“Peki 10 pantolon almış olsan kaç TL ödersin?”

“%50 indirimle satılıyor olsaydı ve yine 2 pantolon alsaydın kaç TL öderdin?”

“Bu pantolonları farklı günlerde gelip alsaydın, kaç TL ödemen gerekirdi?”

b) Öğretmenin ön planda olduğu bilişsel çatışma içeren dönütler (Öğretmen, BÇ+)

“10 pantolon almış olsak senin dediğine göre %100 indirimle yani bedavaya almış oluruz.”

“%50 veya daha fazla indirim olsa o zaman pantolonlar bedavaya gelirdi. Hatta üzerine para bile alırdık.”

c) Öğrencinin ön planda olduğu farklı yoldan çözüm istenen dönütler (Öğrenci, İki yoldan çözüm)

“64 TL ödeme yapıldığına göre 1 pantolon kaç TL tutmuştur? Buna göre 40 TL’lik pantolona % kaç indirim yapılmış oldu?”

“Pantolonlara ayrı ayrı indirimleri uygula. Her ikisine de %10 indirim yap. Bulduğun sonuçla karşılaştı. Neden aynı çıkmadı?”

d) Öğretmenin ön planda olduğu farklı yoldan çözüm gösterilen dönütler (Öğretmen, İki yoldan çözüm)

“40 TL’lik pantolonun %10’u 4 TL’dir. İki pantolonda 8 TL indirim olması gerekir. 80 TL’den 8 TL’yi çıkarınca 72 TL tutması gerekir. Ama senin hesapladığında iki pantolon 64 TL tutmuştu. Demek ki bir yerde yanlışın var.”

e) Öğrencinin ön planda olduğu bilişsel çatışma içermeyen dönütler (Öğrenci, BÇ-)

“Soruyu ürünlerin fiyatlarını değiştirerek tekrar çözdürürüm.”

“%20 indirimle sattın. Ama soruda %10 indirim diyor. Burada çelişki yok mu?”

f) Öğretmenin ön planda olduğu bilişsel çatışma içermeyen dönütler (Öğretmen, BÇ-)

“Bu şekilde indirimleri toplayamazsın. Ayrı ayrı hesaplamak zorundasın.”

“40 TL’lik ürün 36 TL’ye düşer. İki pantolon 72 TL olur. 64 TL değil.”

g) Yanlış veya eksik dönüt

“İşlem hatası yaptın sanırım. Yüzde 20’sini tekrar hesaplar mısın?”

“Soruyu bir daha okur musun? Ne demek istiyor tam olarak?”

Yukarıda yer alan kategoriler ışığında öğretmen adaylarının bu kategorilere dağılımı Tablo 137’de verilmiştir. Kategorilerin kodları parantez içinde yukarıda verilmiştir. Tabloda da bu kodlar kullanılmıştır.

Tablo 137

ÖST 1. soruya ilişkin yanıtların dağılımı

	Öğrenci, BÇ+	Öğretmen BÇ+	Öğrenci, İki yoldan çözüm	Öğretmen, İki yoldan çözüm	Öğrenci, BÇ-	Öğretmen, BÇ-	Yanlış dönüt
1. Sınıf	4 (%10)	9 (%22,5)	7 (%17,5)	10 (%25)	4 (%10)	4 (%10)	2 (%5)
2. Sınıf	7 (%17,5)	2 (%5)	7 (%17,5)	13 (%32,5)	4 (%15)	5 (%12,5)	2 (%0)
3. Sınıf	11 (%27,5)	5 (%12,5)	7 (%17,5)	5 (%12,5)	2 (%5)	8 (%20)	2 (%5)
4. Sınıf	21 (%52,5)	0 (%0)	8 (%20)	1 (%2,5)	7 (%17,5)	2 (%5)	1 (%2,5)
Toplam	43 (%26,88)	16 (%10)	29 (%18,13)	29 (%18,13)	17 (%10,63)	19 (%11,88)	7 (%4,375)

Tablo 137 incelendiğinde öğretmen adaylarının 59'unun (%36,88) bilişsel çatışma yaratacak örneklerle açıklama yaptığı görülmektedir. 58'i (%36,25) ise soruyu farklı şekillerde çözmüş veya öğrenciye çözdürerek öğrencinin yanıtı ile uyuşmadığını göstermiştir. Verilen dönütlerin bir kısmı öğrenciyi bir kısmı ise öğretmeni merkeze almıştır. 89 öğretmen adayının (%55,625) öğrenciyi ön planda tutarak onlara soru sordukları veya onları yönlendirerek soruyu yeniden çözdürdükleri görülmüştür. 64 öğretmen adayı (%40) ise tam tersine kendilerini merkeze alarak soruları ya kendileri çözmüş ya da bilgileri doğrudan vermiştir. Öğretmen adaylarının çok az bir kısmının (7 kişi) yanlış dönüt verdiği görülmektedir. Yanlış dönüt veren öğretmen adaylarından Halit ile yapılan görüşmede soruda kendisinin de zorluk çektiği görülmüştür. Araştırmacı ile Halit arasında geçen görüşme şu şekildedir:

H: Aslında bu düşüncesi fiyat 100 TL olsa doğru olur. Ama.. (Duraksıyor) Allah Allah... Aslında çocuğun dediği doğru geliyor. Fiyat değişirse mi değişiyor ki.

A: Bu fiyatlar üzerinden çocuğun yaptığı doğru mu?

H: Çocuğun yaptığı yanlış da bana niye doğru gibi geldi ki? 100 TL olsa doğru değil mi hocam? Ya da 1000 TL de yani 10'un kuvvetlerinde.

A: 100 TL olsa iki tanesi 200 TL eder. Yüzde 20'si kaçtır?

H: 40 TL eder. 160'a düşer. Yanlış oluyor yine. Çocuk yanlış biliyor hocam. Ben bunu nasıl gösteririm ama değil mi? Çocuğun cebine kağıttan para koyarım. Uygulama yaptırarak olabilir belki. Ama bilemedim.

Görüldüğü gibi Halit'in kendisi de indirim yüzdelerinin toplanıp toplanmaması konusunda tereddüt yaşamıştır. Bazı fiyatlarda doğru olabileceğini düşünmüştür. Ancak araştırmacının da desteği ile hata yaptığını anlamıştır. Öğrenciye bu hatayı nasıl göstereceği konusunda dönüt verememekle birlikte öğrenciye kağıttan para vererek uygulama yaptırabileceğini belirtmiştir. Öğretmen adayının kendi algılayışının öğretime de yansıdığı görülmektedir. Soruyu kendisi içselleştirerek anlamadığı için öğrenciyi bilişsel çatışmaya götürecek örnek verememiştir.

Bilişsel çatışma yaratacak sorular içeren dönütlerin en çok 4. sınıf düzeyinde verildiği görülmektedir. Sınıf seviyesiyle birlikte bu tür dönütlerin sayısı artmıştır. Öğrencilerin ön planda tutulduğu tüm dönütler sayıldığında 1. sınıf öğretmen adaylarının 15 tanesinin (%37,5); 2. sınıf öğretmen adaylarının 18 tanesinin (%45); 3. sınıf öğretmen adaylarının 21 tanesinin (%52,5) ve son olarak 4. sınıf öğretmen adaylarının 36 tanesinin (%90) bu kapsamda yer aldığı görülmektedir. Bu durum sınıf seviyesi artışıyla birlikte öğretmen adaylarının kendilerini daha geri planda tuttuklarının ve öğrenciyi merkeze almaya başladıklarının bir göstergesi olarak yorumlanabilir.

4.6.2. ÖST 2. soruya ilişkin bulgular

Testin ikinci sorusu devirli sayılarla ilgilidir. “ $2,\bar{8} + 1,\bar{4} = 4,\bar{2}$ işlemini ve $2,\bar{3} + 1,\bar{2} = 3,\bar{5}$ işlemini yapan öğrenci devirli sayılarda doğal sayılardaki gibi doğrudan toplama yapılabileceğini belirtmiştir. Öğrenciye ne dönüt verilmelidir?” şeklindeki bu soruda öğretmen adayından öğrencinin yargısının bazı durumlarda doğru olabileceğinin, bazı durumlarda ise hataya sebep olabileceğini anlaması ve öğrencinin bu durumu kendi keşfetmesine olanak sağlayacak bir yönlendirmede bulunması istenmektedir.

Öğretmen adaylarının dönütleri incelenmiştir. Ön planda öğrencinin mi öğretmenin mi olduğuna göre ve dönütün geçerli, eksik veya yanlış olmasına göre kategorilere ayrılmıştır. Sınıf düzeylerine göre dağılımları Tablo 138’de verilmiştir.

Tablo 138

ÖST 2. soruya ait yanıtların dağılımı

	Geçerli Dönüt		Eksik Dönüt		Yanlış Dönüt/Boş
	Öğrenci Ön Planda	Öğretmen Ön Planda	Öğrenci Ön Planda	Öğretmen Ön Planda	
1. Sınıf	3 (%7,5)	17 (%42,5)	1 (%2,5)	14 (%35)	5 (%12,5)
2. Sınıf	6 (%15)	11 (%27,5)	1 (%2,5)	16 (%40)	6 (%15)
3. Sınıf	4 (%10)	10 (%25)	6 (%15)	15 (%37,5)	5 (%12,5)
4. Sınıf	11 (%27,5)	3 (%7,5)	8 (%20)	7 (%17,5)	11 (%27,5)
Toplam	24 (%15)	41 (%25,625)	16 (%10)	52 (%32,5)	27 (%16,875)

Her bir kategoriye ait yanıtlar detaylı bir şekilde aşağıda verilecektir. Ancak genel olarak Tablo 138’e bakıldığında öğretmen adaylarının yaklaşık %40’ının geçerli bir dönüt verdiği; %42,5’unun eksik dönüt verdiği, %17’sinin de yanlış dönüt verdiği veya dönüt vermediği anlaşılmaktadır. Ayrıca 40 öğretmen adayı (%25) öğrencilerin aktif olduğu, onları ön planda tutan dönütler verirken; 93 öğretmen adayı ise (%58) öğretmen merkezli dönütlerde bulunmuştur. Bu durum öğretmen adaylarının bilgiyi doğrudan verdiği, buluş yolundan ziyade sunuş yoluyla öğretim stratejisini benimsediğini göstermektedir.

Sınıf seviyeleri arasındaki duruma bakıldığında ise ilginç bir durum göze çarpmaktadır. Geçerli dönüt veren öğretmen adaylarının oranının 1. sınıflarda %50, 2. ve

3. sınıflarda %50'den az, 4. sınıflarda ise %35 olduğu görülmektedir. Ancak bu durumun aksine öğrenci merkezli dönüt oranının ise 1. sınıflarda %10 iken 4. sınıf öğretmen adaylarında %47,5 olduğu ve sınıf seviyesi ile birlikte arttığı görülmektedir. Yanıt kategorileri aşağıda detaylı verilerek bu durumun nedeni anlaşılmaya çalışılmıştır. Parantez içinde önce toplam sonra da sırayla sınıf düzeylerine göre öğretmen adaylarının sayıları verilmiştir.

Öğrencinin ön planda olduğu geçerli dönütlere örnekler:

- Öğrencinin toplananları kesre dönüştürmesini ve toplamalarını yeniden yapıp karşılaştırmasını isterim. Ne zaman eşit olacağını ne zaman olmayacağını karşılaştırtırım. (13 öğretmen adayı--3/1/3/6)
- Ondalık sayıları açarak yazmasını ve toplamasını isterim. Alt alta getirince eldeli olanlarda sorun yaşandığını ve eşit olmadığını görür. Eldesizlerde ise eşitliğin geçerli olduğunu görür. (9 öğretmen adayı—0/4/1/4)

Öğretmenin ön planda olduğu geçerli dönütlere örnekler:

- Ondalık açılımını yaparak yeniden toplamaya çalışırım eldeli olduğunda toplanamadığını gösteririm. (19 öğretmen adayı--9/5/4/1)
- Kesre çevirerek yeniden toplarım ve (bazı durumlarda) eşit olmadığını gösteririm. (13 öğretmen adayı--2/6/4/1)

Öğrencinin ön planda olduğu eksik dönütlere örnekler:

- Devirli ve devirsiz sayıların farkını sorarak başlarım. Vereceği yanıtla göre davranırım. / Çizginin anlamını sorarım. (11 öğretmen adayı—0/1/4/6)

Öğretmenin ön planda olduğu eksik dönütlere örnekler:

- Devirli ondalık sayılarda alt alta toplama yapılmayacağını kesre çevirmek gerektiğini söylerim. (20 öğretmen adayı--6/5/8/1)
- Devirli ve devirsizlerin aynı şey olmadığını, bu nedenle aynı tarzda toplanmayacağını ifade ederim. (14 öğretmen adayı--4/4/3/3)
- Sonsuza gittiği için işlem yapılamayacağını söylerim. (4 öğretmen adayı—1/2/1/0)
- Şans eseri bazen doğru çıkabileceğini söylerim. (4 öğretmen adayı—0/1/1/2)

Boş bırakan öğretmen adayları (16 öğretmen adayı—3/1/3/9)

Yanıtların detayları incelendiğinde ilk kategoride yer alan öğretmen adaylarının en çoğunu 4. sınıf öğretmen adaylarının oluşturduğu görülmektedir. 4. sınıf öğretmen adaylarının gerek kesre dönüştürerek çözdürmede gerekse ondalık açılımını yazarak toplatmada öğrencilerin kendilerinin görmesini sağlamaya çalıştıkları anlaşılmaktadır. Eksik dönüt olarak kabul edilen ancak öğrenciye soru sorulduğu anlaşılan 3. kategoride

yine en çok 4. sınıf öğretmen adaylarının olduğu görülmektedir. Öğretmen adayları konuyu tamamen temelden alıp devirli ve devirsiz sayıların farkından dönüte başlamışlardır. Ancak devamını ifade etmemişlerdir. Bu nedenle de dönütleri eksik kalmıştır. Bu durum soruyu bilmedikleri veya hatalı dönüt verecekleri anlamını taşımamaktadır. Ancak yazılı olarak yeterli ifadede bulunmamışlardır. En çok boş bırakan öğretmen adaylarının da son sınıf öğretmen adayları olduğu görülmektedir. Bu durumda yer alan ve görüşme yaptığımız öğretmen adayı Maksude'ye soru tekrar sorulduğunda önce deneme yapmış ve sonrasında, “eldeli olunca doğru olmayacağını belirtirim. Zaten ondalık kısımlarında eşit sayıda basamak da devretmeyebilir. O zaman da sorun yaşar öğrenci. Sadece eldesiz ve eşit sayıda devreden içeren devirli sayılarda geçerlidir. Bu şekilde birkaç örnek vererek öğrenciye buldurturdum.” yanıtını vermiştir. Soruyu boş bırakmasının nedeni sorulduğunda ise, “Muhtemelen bir sınav öncesi veya sunum öncesi bir zamana denk gelmiştir. Bitirip çıkmak için uzun uzun yazmamışımdır.” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Geçerli dönütlerin oranının 4. sınıf seviyesinde düşük olması belki bu son açıklamayla anlaşılabilir hale gelebilir.

4.6.3. ÖST 3. soruya ilişkin bulgular

Testin üçüncü sorusunda, “İrrasyonel sayılar rasyonel sayılara göre daha çoktur. Bu nedenle her iki irrasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı olmayabilir. Örneğin $\sqrt{5}$ ve $\sqrt{6}$ arasında rasyonel sayı yoktur.” şeklindeki bir öğrenci düşüncesi verilmiş olup öğretmen adaylarına bu ifadede bir hata olup olmadığı ve bu öğrenciye nasıl bir dönüt verilmesi gerektiği sorulmuştur. Öğrencinin ilk cümlesi; iki kümenin yoğunlukları göz önüne alındığında ve kardinaliteleri karşılaştırıldığında doğruluk payı içermektedir. İrrasyonel sayılar kümesi rasyonel sayılar kümesine göre daha yoğundur ve iki kümenin elemanları arasında birebir eşleme yapılmak istense irrasyonel sayılar kümesinde açıkta eleman kalır. Ancak ikinci cümlesi doğru değildir. Çünkü her iki irrasyonel sayı arasında bir rasyonel sayının varlığı ve her iki rasyonel sayı arasında irrasyonel sayının varlığı ispatlıdır. İlk ifade ikinci ifadeyi gerektiriyor gibi gözükse de bunun doğru olmadığı açıktır. Son ifadede de ise öğrenci iki irrasyonel sayı örneği vererek aralarında rasyonel sayının olmadığını ifade etmiştir. Soru aslında üç aşamalı bir bilgi içermekte ve öğretmen adayından üç aşama için de açıklayıcı bir dönüt vermesi beklenmektedir. Verilen yanıtlar içerik analizine tabi tutulmuş olup oluşturulan kategoriler ve her bir kategorideki öğretmen adayı sayıları Tablo 139’da sunulmuştur.

Tablo 139

ÖST 3. soruya ait yanıtların dağılımı

	1.Sınıf	2.Sınıf	3.Sınıf	4.Sınıf	Toplam
Hata olduğunu açıklayıp, $\sqrt{5}$ ve $\sqrt{6}$ arasında sonsuz sayıda rasyonel sayının varlığını öğrenci merkezli gösterenler	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)	5 (%12,5)	5 (%3,125)
Doğru açıklamada bulunarak $\sqrt{5}$ ve $\sqrt{6}$ arasında bir rasyonel sayı örneği gösterenler	9 (%22,5)	8 (%20)	8 (%20)	6 (%15)	31 (%19,375)
Her iki irrasyonel sayı arasında rasyonel sayı varlığının kesinliğini ifade edenler	9 (%22,5)	7 (%17,5)	7 (%17,5)	4 (%10)	27 (%16,875)
İfadenin yanlışlığını belirtip iki sayı arasında rasyonel sayı bulunabileceğini belirtenler	2 (%5)	0 (%0)	3 (%7,5)	1 (%2,5)	6 (%3,75)
Rasyonel sayıların ve irrasyonel sayıların karşılaştırılamayacağını bu nedenle öğrencinin hatalı olduğunu belirtenler	3 (%7,5)	4 (%10)	9 (%22,5)	3 (%7,5)	19 (%11,875)
İfadenin hatalı olduğunu belirttiği halde açıklama yapmayanlar	2 (%5)	6 (%15)	1 (%2,5)	11 (%27,5)	20 (%12,5)
Hata olmadığını belirtenler	12 (%30)	14 (%35)	9 (%22,5)	6 (%15)	41 (%25,625)
Boş bırakanlar	0 (%0)	1 (%2,5)	2 (%5)	2 (%5)	5 (%3,125)
Diğer	3 (%7,5)	0 (%0)	1 (%2,5)	2 (%5)	6 (%3,75)

Tablo 139 incelendiğinde sadece beş öğretmen adayının öğrenci merkezli bir dönüt verdiği görülmektedir. Tamamı 4. sınıf olan bu öğretmen adayları aynı zamanda ifadenin hatalı olduğunu, $\sqrt{5}$ ve $\sqrt{6}$ arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı olduğunu belirtmiştir. Bu yanıtlardan birinde öğretmen adayı, “Önce öğrenciye $\sqrt{5}$ ve $\sqrt{6}$ ’nın yaklaşık değerlerini buldururdum. Ondalık olarak ifade etmesini isterdim. Daha sonra, ‘Bu iki ondalık ifade arasında bir rasyonel sayı bulamaz mıyız?’ diye sorardım. Öğrenci aralarında sonsuz sayıda rasyonel sayı bulabilir.” şeklinde açıklamada bulundurmıştır.

İrrasyonel sayıların rasyonel sayılardan fazla olduğuna itirazda bulunmayıp her iki irrasyonel arasında rasyonel sayının bulunabileceğini belirten 64 (%40) öğretmen adayı bulunmaktadır. Bu adayların bir kısmı (%19) $\sqrt{5}$ ve $\sqrt{6}$ arasında rasyonel sayı örneği verebilmiş ve öğrenciye aynı şekilde gösterebileceğini ifade etmiştir. Öte yandan bazı öğretmen adayları (%17) her iki irrasyonel sayı arasında rasyonel sayının kesinlikle

bulunduğunu belirtmiştir. Altı öğretmen adayı ise kesinlik belirtmediği halde rasyonel sayının bulunabileceğini belirtmiştir.

Öğretmen adaylarının bir kısmı ilk cümlede hata olduğunu belirtmiştir. İrrasyonel sayıların ve rasyonel sayıların karşılaştırılamayacağını, öğrenciye de aynı şekilde ifade edeceklerini dile getirmişlerdir. 4. sınıf öğretmen adaylarının %27,5'i ise Tablo 139'dan da görüldüğü gibi ifadenin hatalı olduğunu belirttiği halde açıklama yapmamıştır. Bu oran en fazla 4. sınıflarda olmasına karşın, öğrenciyi haklı görüp hata olmadığını ifade eden öğretmen adayları oranı en düşük bu sınıf düzeyinde olmuştur. Bu durum bir önceki soruda olduğu gibi 4. sınıf öğretmen adaylarının cevabı bildikleri halde soruyu kasten yanıtsız bırakabilmiş olduklarına bir işaret olarak algılanabilir.

4.6.4. ÖST 4. soruya ilişkin bulgular

Testin dördüncü sorusunda üslü ifadelerle ilgili en sık yapılan kavram yanlışlarından birine yer verilmiştir. İki öğrencinin bir soruya vermiş oldukları iki farklı yanıtın öğretmen adaylarınca değerlendirilmesi istenmiştir. Soru şu şekildedir:

“ $a = -2$ ise a^4 kaçtır?” sorusuna; Cem, “ $a^4 = -2^4 = -16$ ” cevabını vermiştir. Özalp ise $a^4 = (-2)^4 = 16$ cevabını vermiştir. Hangisi haklıdır? Aynı hatalı düşüncenin yeniden tekrarlanmaması ve öğrencilerin ikna edilebilmesi için nasıl bir dönüt verilmelidir?

Soruda taban cebirsel olarak verilmiş ve bu cebirsel ifadenin değerinin üslü ifadede yerine yazılması ve üslü ifadenin değerinin hesaplanması istenmiştir. Cem “-2” sayısını parantez olmadan yazdığı için sonucu -16 bulmuş, Özalp ise parantezli yazarak sonucu +16 bulmuştur. Öğretmen adaylarına hangi öğrencinin haklı olduğu ve hata yapan öğrenciye nasıl dönüt verilmesi gerektiği sorulmuştur. Öğretmen adaylarından Özalp’in haklılığının belirtilmesi ve Cem için önce cebirsel, daha sonra sayı koyarak yapılan bir açınımla çarpımın sonucunun pozitif olacağının gösterilmesi beklenmiştir. Öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtların dağılımı Tablo 140’ta verilmiştir.

Tablo 140

ÖST 4. soruya ait yanıtların dağılımı

		1. Sınıf	2. Sınıf	3. Sınıf	4. Sınıf	Toplam
Özalp Haklı	a.a.a.a şeklinde cebirsel açıklama	7 (%17,5)	5 (%12,5)	6 (%15)	14 (%35)	32 (%20)
	(-2). (-2). (-2). (-2) şeklinde açınımla gösterme	6 (%15)	8 (%20)	4 (%10)	6 (%15)	24 (%15)
	Neden $(-2)^4$ şeklinde yazılması gerektiğini açıklama	6 (%15)	8 (%20)	11 (%27,5)	4 (%10)	29 (%18,13)
	Sadece parantez içinde olacağını belirtme	14 (%35)	10 (%25)	12 (%30)	13 (%32,5)	49 (%30,63)
	Kuralla açıklama (Üs çift olduğu için 16'dır.)	1 (%2,5)	2 (%5)	2 (%5)	1 (%2,5)	6 (%3,75)
Cem Haklı	-16 olması gerektiğini açıklama	3 (%7,5)	6 (%15)	3 (%7,5)	0 (%0)	12 (%7,5)
İkisi de Haklı	Soruda hata olduğunu veya her ikisinin de haklı olabileceğini belirtme	2 (%5)	1 (%2,5)	1 (%2,5)	1 (%2,5)	5 (%3,13)
Yanıt Yok/Boş Bırakanlar		1 (%2,5)	0 (%0)	1 (%2,5)	1 (%2,5)	3 (%0,075)

Tablo 140'dan öğretmen adaylarının %86'sının Özalp'i haklı bulduğu ancak sadece %20'sinin cebirsel bir açınımla nedenini açıklayabildiği görülmektedir. Bu oranın en yüksek 4. sınıf öğretmen adaylarında olması olumlu bir husus olarak ele alınabilir. Özalp'in haklılığını ifade eden ve yeterli açıklama olarak ele alınabilecek örneklerden biri, "a⁴, a'nın 4 kez kendisiyle çarpılması demektir. Öğrenciye bunu açıklarım. Sonra a'ların yerine (-2) koyarak cevabın +16 olduğunu gösteririm." yanıtı olmuştur. Görüşme yapılan 4. sınıf öğretmen adaylarından Şeyma ise görüşme sırasında fonksiyonlardan yola çıkarak yanıt vermiştir. Şeyma'nın yanıtı ise "+16'dır çünkü $f(x)=x^4$ fonksiyonunda $f(-2)$ sorulsa -2 kendisiyle dört kez çarpılır ve cevap +16 çıkar. Diğer türlü $-x^4$ bulunmuş olur." şeklinde olmuştur.

Özalp'in haklı olduğunu belirttiği halde yanlış gerekçelendirmeler sunan veya kuralla dayalı açıklama yapan öğretmen adayları da olmuştur. Bir kısmı üssün çift olduğunu bu nedenle pozitif olması gerektiğini belirtmiştir. Bir kısmı parantezli bir şekilde yazılmasının kural olduğunu bu nedenle $(-2)^4$ ifadesinin hesaplanması gerektiğini belirtmiştir.

Görüşme yapılan 8 öğretmen adayından sadece iki tanesi yanıtın doğrudan +16 olması gerektiğini ifade etmiştir. Her ikisi de dördüncü sınıf öğretmen adaylarıdır. Bir öğretmen adayı (3.sınıf) ise yazılı yanıtında +16 olması gerektiğini belirttiği halde görüşme

sırasında kararsızlık yaşamıştır. Simre ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir:

S: Öğrenciler parantezli mi parantezsiz mi olacak onu karıştırmış muhtemelen. Bu nedenle öğretmenin soruda belirtmesi karmaşayı önlemek için daha doğru olurdu.

A: Sorunun bu haliyle hangi öğrencinin yanıtı doğru?

S: Bu haliyle -16 doğru olur.

A: Sen bu soruya, “ $+16$ doğrudur.” yanıtını vermişsin. “Negatif sayıların kuvvetleri alınırken öğrenci sayıyı parantez içinde yazması gerekir.” yazmışsın.

S: Aslında doğru. Zaten üssü çift pozitif olmaz mı? Gerçi paranteze göre değişir yine. Ama doğru ya, öğrenciler negatif sayıları parantezle yazması gerekir.

Görüldüğü gibi Simre ilk başta soruda parantezin olup olmasını önemsemiş ancak yazılı yanıtı hatırlatılınca negatif sayıların parantez içinde yazılması gerektiğini belirtmiştir. Görüşmede yanıtını değiştirmesi ve yazılı yanıtıyla olan tutarsızlığı göz önüne alındığında Simge’nin negatif sayıların tam sayı kuvvetleriyle ilgili kararsızlık yaşadığı anlaşılmaktadır.

Görüşme yapılan diğer öğretmen adaylarından soruyu hatalı bulanlar olmuştur. Bu öğretmen adaylarından biri 2. sınıfta öğrenim gören Halit’tir. Halit ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir:

H: Soruda Cem haklıdır. Parantez içinde verilmeliydi soru.

A: Bu haliyle cevap -16 mı $+16$ mı?

H: Özalp mi haklı acaba? ...Yok ya Cem haklı. -16 .

A: Peki Özalp’e nasıl bir dönüt verilmelidir o zaman? Hatalı ise.

H: “Burada a yerine -2 ’yi yazınca zaten 2 ’nin üzerinde 4 oluyor. O yüzden eksi değişmez. -16 bulunur. Soruda a’yı parantez içinde verseydi senin dediğin gibi olurdu Özalpim” denilebilir.

Halit görüldüğü gibi önce sorunun hatalı olduğunu düşünmüş ancak sonra yanıtın -16 olması gerektiğini ifade etmiştir. Bu nedenle de hatalı olarak düşündüğü Özalp’e dönüt vermiştir. a yerine sayının parantez olmadan doğrudan yazılması gerektiğini belirtmiştir. Böylece bu hatanın öğrenciyi de yanlış yönlendireceği anlaşılmaktadır. 1. sınıf öğretmen adaylarından Tuğçe’nin yanıtı da benzer şekilde olmuştur:

T: Bence ikisi de haklı. Öğretmen hatalı. Soruda parantezi verip vermesine göre değişir sonuç.

A: Sorunun bu hali ile cevabı nedir?

T: Bu hali ile Cem haklı. Ben olsam öğrencilere parantezi belirtirdim özellikle.

Tuğçe sorunun hatalı olduğunu düşünmüş ancak sorunun bu haliyle yanıtının -16 olacağını yani Cem’in haklı olduğunu belirtmiştir. Gerek Tuğçe’nin gerek görüşme yapılan

diğer öğretmen adaylarının yanıtları birlikte değerlendirildiğinde öğretmen adaylarının negatif bir sayının üssünü alamamaktan ziyade cebirsel olarak verilen üslü ifadede değer koyamama ile ilgili yanılgıya sahip oldukları görülmektedir. Bu da aslında üslü ifade kavramının doğasındaki tekrarlı çarpımın akla gelmemesinden kaynaklıdır. Öğretmen adayları parantezin varlığına ya da yokluğuna odaklanarak yanlış açıklamalarda bulunabilmişlerdir. Bu da öğrencilere verilen dönütü etkilemiştir. Doğru yapan öğrenciye yaptığı yanlış olduğunu belirtmesi veya yanlış yapan öğrenciye olumlu dönüt verilmesi gibi telafisi çok zor olacağı düşünülebilecek hatalara neden olabilmektedir.

4.6.5. ÖST 5. soruya ilişkin bulgular

Testin 5. sorusunda öğretmen adaylarına 12 ve 18'in en küçük ortak katını bulmak için kullanılabilecek en az iki yöntem belirtmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının kullandıkları yöntemler kategorilere ayrılmıştır. Tablo 141'de o yöntemleri açıklayan öğretmen adaylarının frekans ve yüzdeleri verilmiştir. Bir öğretmen adayı birden fazla yöntem yazabildiği için bir sınıf düzeyine ait tüm kategoriler toplamı %100'den fazla olabilmektedir.

Tablo 141

EKOK bulurken öğretmen adaylarının kullandıkları yöntemler

	Bölme algoritması kullanarak EKOK bulma yöntemi	Asal çarpanları üslü yazıp üslerin en büyüğünü alarak EKOK bulma yöntemi	Her iki sayının katlarını alıp en küçük ortak olanı bulma yöntemi	Diğer yöntemler
1. Sınıf	27 (%67,5)	13 (%32,5)	8 (%20)	5 (%12,5)
2. Sınıf	31 (%77,5)	20 (%50)	6 (%15)	2 (%5)
3. Sınıf	28 (%70)	16 (%40)	16 (%40)	10 (%25)
4. Sınıf	32 (%80)	16 (%40)	9 (%22,5)	6 (%15)
Toplam	118 (%73,75)	65 (%40,625)	39 (%24,375)	23 (%14,375)

Tablo 141 incelendiğinde en çok kullanılan yöntemin bölme algoritması olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının %74'ü iki sayıyı yan yana yazarak bölme algoritmasını uygulamış ve sağda yer alan tüm asalları çarparak EKOK olan 36'ya ulaşmıştır. En çok son sınıf öğretmen adaylarının bölme algoritması ile EKOK bulduğu anlaşılmaktadır.

Bölme algoritması haricinde en çok yazılan ikinci yöntem sayıları ayrı ayrı asal çarpanların çarpımı şeklinde üslü halde yazarak her iki sayıdaki ortak tabanların en büyük üslüleri ile ortak olmayan tabanlara sahip üslü ifadelerin çarpılması olmuştur. Öğretmen adaylarının %41'i bu yöntemi kullanmıştır. Bu yöntemi açıklayan öğretmen adaylarının en çok 2. sınıflarda olduğu görülmektedir.

Öğretmen adaylarının %24'ü her iki sayının doğal sayı katlarını alarak ortak katlarını bulmuş ve en küçük olanını yani EKOK'u belirlemiştir. Zaten bu yöntemin kavramsal olarak en anlamlı yöntem olduğu söylenebilir. 3. sınıf öğretmen adaylarının diğer sınıf düzeylerine göre bu yöntemde daha ön planda olduğu Tablo 141'den görülmektedir.

Testin beşinci sorusunda öğretmen adaylarından yukarıda verilen geçerli yöntemlerden ikisini açıklamaları istenmişti. Bazı öğretmen adayları iki yöntem gösterirken, bazıları sadece bir tane yöntem gösterebilmiş; bazıları ise bir açıklamada bulunamamıştır veya yanlış bir yöntem sunmuşlardır. Bu verilere ilişkin dağılımlar Tablo 142'de verilmiştir.

Tablo 142

Öğretmen adaylarının EKOK hesaplarırken göstermiş oldukları yöntem sayıları

	En az iki yöntem	Sadece bir tane yöntem	Boş veya yanlış gösterim
1. Sınıf	18 (%45)	16 (%40)	6 (%15)
2. Sınıf	25 (%62,5)	9 (%22,5)	6 (%15)
3. Sınıf	34 (%85)	2 (%5)	4 (%10)
4. Sınıf	29 (%72,5)	8 (%20)	3 (%7,5)
Toplam	106 (%66,25)	35 (%21,875)	19 (%11,88)

Tablo 142 incelendiğinde öğretmen adaylarının %66'sının en az iki yöntemle doğru açıklama yaptığı görülmektedir. Öğretmen adaylarının %22'si sadece bir yöntemle açıklama yapabilmıştır. İki yöntemle açıklama yapabilen öğretmen adaylarının birinci sınıflarda yarıdan az olduğu dikkat çekmektedir (%45). Toplamda 19 öğretmen adayı ise 12 ve 18'in EKOK'unu yanlış bulmuş veya hiç bulamamıştır. Bu adayların yanıtları incelendiğinde bir kısmının EBOB ve EKOK kavramını karıştırdığı anlaşılmıştır. Görüşme yapılan ikinci sınıf öğretmen adayı Halit de EKOK bulurken zorluk yaşamıştır. Araştırmacı ile arasında geçen diyalog aşağıda sunulmuştur:

A: İki sayının EKOK'u nasıl bulunur?

H: Asal çarpanlarına ayırıyorduk. Ortak olanlardı.

A: Nasıl yani ortak olanlar? İki sayı seçerek dener misin?

H: 6 ve 8 alalım mesela. $6=2.3$ olur. $8=2.2.2$ olur. 6 ve 8'in EKOK'u 24 değil mi? (Duraksıyor) Evet 24. Ortak olanlar değil o zaman. (Kararsızlık yaşıyor.) Ortak olmayanları mı çarpıyorduk. $2.2.3=12$ oluyor o da değil. Nasıl bulduğumuzu unuttuğum ya.

A: Ee 24 dedin. Nasıl buldun onu hemen?

H: Katlarına baktım. 24'de birleşiyorlar işte. Ama asal çarpanlardan nasıl bulunduğunu unuttuğum.

Halit aslında en küçük ortak kat kavramını bilmektedir. 6 ve 8'in en küçük ortak katını tereddüt etmeden 24 olarak yanıtlamıştır. Ancak asal çarpanların çarpımı ekinde yazdıktan sonra nasıl bir yöntem izleyeceğini unuttuğu görülmektedir. Bu durum kavramsal bilgiye sahip olunmasına rağmen işlemsel bilgide (konu bilgi düzeyinde) hataların olabileceğini göstermektedir.

EKOK ve EBOB kavramlarının öğretiminde verilen sayıların katlarının veya bölenlerinin alınıp ortak olanların buldurulmasının en geçerli yöntem olduğu düşünülebilir. Ancak öğretmen adayından gerek bölme algoritmasını gerek üslü ifadeleri gerek ise diğer yöntemleri kullanarak öğretiminde esnek olması ve bu esnekliği öğrenciye de kazandırması beklenir. Bu soruda görülmüştür ki ilk akla gelmesi gereken “her iki sayının katlarını alıp en küçük ortak olanı bulma” yöntemini %25’den az öğretmen adayı açıklamıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının bir kısmının tek bir yöntemle iki sayının EKOK’unu bulabilmesi, bir kısmının hiçbir yöntemle bulamaması dikkat çekici bulgular arasında yer almaktadır.

4.6.6. ÖST 6. soruya ilişkin bulgular

Öğretim stratejileri testinin altıncı sorusu kareköklü işlemlere yöneliktir. “Melek, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$ ve 3,5 sayılarından hangisinin daha büyük olduğunu bulmaya çalışırken, Yaşar $2\sqrt{3}+5$ işleminin sonucunu yaklaşık olarak bulmak istemektedir. Öğretmen Melek ve Yaşar’a yardımcı olmak için ne önerebilir?” sorusunda Melek için ayrı, Yaşar için ayrı öneri istenmiştir. Öğretmen adaylarının yapmış oldukları öneriler doğruluklarına göre kategorilere ayrılmıştır.

Melek için; $2\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$ ve 3,5 sayılarından hangisinin daha büyük olduğunu bulmaya çalışırken sayıların her birini karekök içine almak veya kareköklü olan ilk ikisini kök içine alıp yaklaşık değerlerini hesaplayarak karşılaştırmak önerilebilecek yöntemlerden sayılabilir. Bu şekilde üç sayıyı da doğru bir şekilde sıralamaya yarayacak öneriler “tamamen doğru” kategorisinde ele alınmıştır. “Kareköklü ifadelerin yaklaşık değerleri bulunmalıdır.” ve “Tam sayılara yakınlığa ve uzaklığa göre sıralanmalıdır.” şeklindeki bazı genel öneriler ise “kısmen doğru” kategorisinde değerlendirilmiştir.

Yaşar için; $2\sqrt{3}+5$ işleminin sonucunun yaklaşık değeri bulunurken öncelikle 2 kök içine alınıp daha sonra kareköklü sayının yaklaşık değeri ile 5 doğal sayısı toplanabilir. $\sqrt{12}$ sayısı 3 ve 4 arasında 3’e daha yakın bir sayı olduğu için 5 ile toplandığında sonuç 8,5’den daha küçük çıkacaktır. Öğretmen adayından da beklenen sayının 8,5’e yakın olduğunun ifade edilmesi veya 8 ile 8,5 arasında olduğunun bulunmasıdır. Bu şekildeki öneriler “tamamen doğru” olarak değerlendirilmiştir. Ancak, sayının 8-9 arasında olduğunu veya 8,5’den büyük olduğunu ifade eden öneriler ve $\sqrt{3}$ ’ün yaklaşık değerinin bulunması gerektiğini belirten öneriler “kısmen doğru” olarak değerlendirilmiştir.

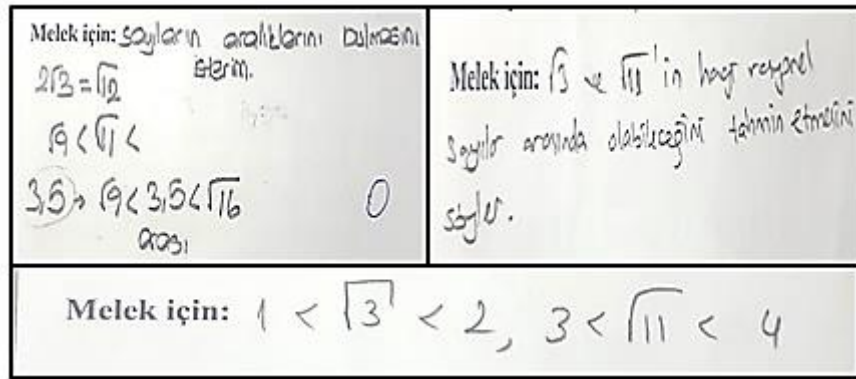
Tablo 143'te öğretmen adaylarının Melek ve Yaşar için yapmış oldukları önerilerin doğruluk dağılımları gösterilmiştir.

Tablo 143

ÖST 6. soruya ait yanıtların dağılımı

	Melek			Yaşar		
	Tamamen Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Tamamen Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış
1. Sınıf	32 (%80)	4 (%10)	4 (%10)	14 (%35)	22 (%55)	4 (%10)
2. Sınıf	33 (%82,5)	2 (%5)	5 (%12,5)	11 (%27,5)	23 (%57,5)	6 (%15)
3. Sınıf	33 (%82,5)	3 (%7,5)	4 (%10)	20 (%50)	16 (%40)	4 (%10)
4. Sınıf	30 (%75)	8 (%20)	2 (%5)	10 (%25)	24 (%60)	6 (%15)
Toplam	128 (%80)	17 (%10,63)	15 (%9,38)	55 (%34,38)	85 (%53,13)	20 (%12,5)

Tablo 143 incelendiğinde öğretmen adaylarının %80'inin ilk soruya “tamamen doğru” öneri getirdikleri görülmektedir. Sınıf düzeylerine göre değerlerin birbirlerine yakın olduğu anlaşılmaktadır. Öğretmen adaylarının yaklaşık olarak %11'inin sundukları öneriler doğru sıralamayı bulma konusunda yeterince açıklayıcı olmadıkları için “kısmen doğru” kategorisinde değerlendirilmiştir. Bazı öğretmen adayları da sayıları sıralayamamış veya sıralayacak bir yöntem sunamamıştır. 15 öğretmen adayının öneri sunmadığı veya yanlış bir çözüm öne sürdüğü anlaşılmıştır. Bu yanıtlardan bazıları Şekil 53'te verilmiştir.



Şekil 53. Melek için yapılan yanlış önerilere örnekler

Şekil 53'te yer alan sol üstteki örnekte öğretmen adayı “Sayıların aralıklarını bulmasını isterim.” şeklinde bir öneride bulunmuştur. Ancak üç sayıyı sıralayamadığı görülmüştür. Ondalık sayı olan 3,5 ile kareköklü diğer sayılar arasında bir ilişki kurmamıştır. Sağ üstteki örnekte de öğretmen adayı kareköklü sayıların hangi rasyonel sayılar arasında olabileceğini tahmin etmesini isteyeceğini belirtmiş ancak özellikle $\sqrt{3}$ 'ün hangi aralıkta olduğunu tahmin edilmesi sıralama yapmak için yeterli olmamıştır. Ayrıca 3,5 sayısı ile diğerleri arasında nasıl karşılaştırma yapılabileceği belirtilmemiştir. Altta

örnekte de öğretmen adayı öneri sunmaktan ziyade kareköklü sayıların aralıklarını kendisi bulmuştur. Ancak yine 3,5 ile ilişkilendiremediği görülmektedir.

Tablo 143'te Yaşar'a yapılan önerilerin doğruluk oranları incelendiğinde ilkinde göre daha olumsuz bir tablonun ortaya çıktığı anlaşılmaktadır. Öğretmen adaylarının sadece %34'ü iki sayının toplamının 8 ve 9 arasında ve 8'e daha yakın olduğunu bulabilmiş veya bu doğrultuda öneri sunmuştur. Öğretmen adaylarının %53'ü ise genel önerilerde bulunarak toplamın bulunduğu aralığı daha geniş olarak belirtmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının genelde $\sqrt{3}$ 'ün yaklaşık değerinden yola çıkarak yönlendirmelerde bulunduğu anlaşılmıştır. Bu yönlendirmelerde bazen 8,5-9 aralığında bazen de 9'dan büyük sonuçlar ortaya çıkabilmektedir. Bu nedenle öğretmen adayının öğrenciyi 2'nin karekök içine alınması ve $\sqrt{12}$ 'nin yaklaşık değerinin bulunması şeklinde yönlendirmesinin daha isabetli olduğu anlaşılmaktadır. Yanlış yönlendirmede bulunan ve hatalı yanıtlar veren 20 öğretmen adayından bazılarının açıklamaları Şekil 54'te verilmiştir.

Yaşar için: İki sayının ayrı ayrı karesini alıp toplayarak yakın bir sonuca ulaşabilir.	Yaşar için: $2\sqrt{3} + 5$ Aynı şekilde tüm sayılar kök içine alınıp aynı kökler elde edilirse toplanabilir. Veya sayı doğrusu üzerinde yapılabilir.	Yaşar için: $2\sqrt{3} + 5$ $\sqrt{12} + 5 = ?$ $\sqrt{12} + \sqrt{25} = ?$

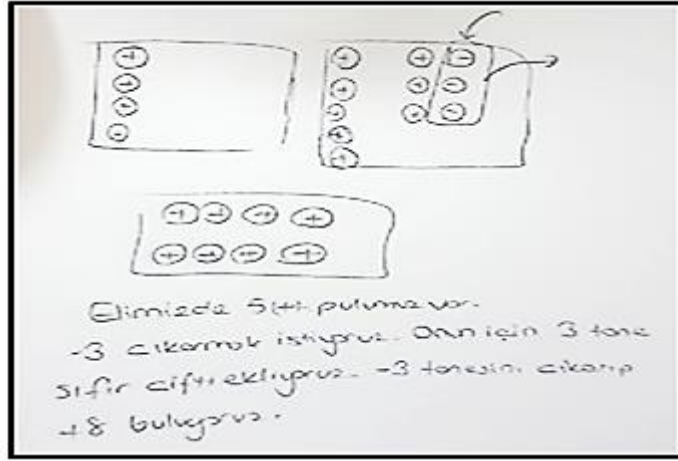
Şekil 54. Yaşar için yapılan yanlış önerilere örnekler

Şekil 54'de yer alan örnekler incelendiğinde öğretmen adaylarının yanlış yönlendirmelerde bulunduğu görülmektedir. İlkinde sayıların ayrı ayrı karesinin alınarak toplanması önerilmiştir. Halbuki $12+25=37$ sonucunu vermektedir. Öğrenci 37'nin karekökünü dahi alsa 6'ya yakın bir sonuç elde edecektir. İkinci örnekte bulunan öğretmen adayının tüm sayıları karekök içine almak gerektiğini ve kökler aynı olursa toplamak gerektiğini önerdiği görülmektedir. Halbuki ortak köke sahip sayı yoktur. Sayı doğrusunda nasıl toplama yapılacağına dair de açıklaması olmamıştır. Son örnekte de öğretmen adayı sayıları kök içine almış ancak devamını getirememiştir. Bu örneklerde olduğu gibi 20 öğretmen adayının yaklaşık değer bulmada doğru yönlendirmede bulunmadığı anlaşılmıştır.

Gerek Melek için gerekse Yaşar için yapılan öneriler göz önüne alındığında öğretmen adaylarının kareköklü sayıların yaklaşık değerlerinden yola çıkarak sıralama yapabileceklerini veya toplama yapabileceklerini hesaba kattıkları anlaşılmaktadır. Ancak $a\sqrt{b}$ ifadesinde a'nın kök içine alınmasının sağlayacağı kolaylık bazı öğretmen adayları tarafından öngörülememiştir. Bu durum sıralamada veya yaklaşık değer bulmada sorunlara neden olmuştur.

4.6.7. ÖST 7. soruya ilişkin bulgular (sayma pulları)

Testin yedinci sorusunda öğretmen adaylarından “ $(+5)-(-3)=(+8)$ ” işleminin sayma pulları ile modellenmesi istenmiştir. Öğretmen adaylarından Şekil 55’te yer aldığı gibi beş tane pozitif sayma pulu yer alan kutuya üç tane pozitif üç tane negatif olacak şekilde altı tane daha sayma pulu eklemeleri ve bu kutudan üç tane negatif sayma pulunun çıkarıldığını belirterek sonuç kutusunda sekiz tane pozitif sayma puluna yer vermeleri beklenmektedir.



Şekil 55. Sayma pullarıyla yapılmış doğru modelleme örneği

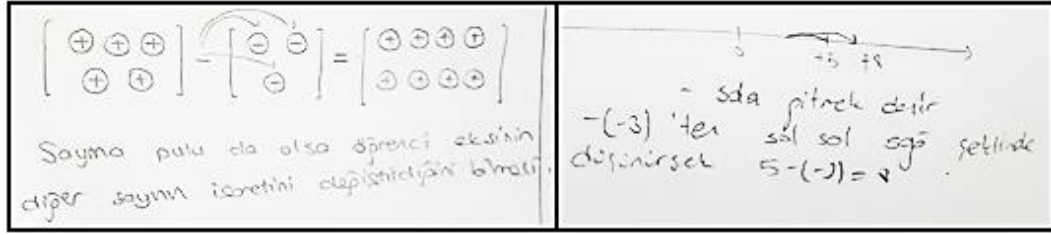
Öğretmen adaylarının yapmış oldukları modellemeler incelenmiş ve yanıtlar altı kategoriye ayrılmıştır. Şekil 55’teki gibi yapılan veya tek bir kutu içerisine üçer pozitif ve negatif pulu ekleyen modellemeler “doğru modelleme” olarak ele alınmıştır. Sonuç kutucuğunun veya çıkarma eyleminin yer almadığı modellemeler ile sadece sözel olarak ancak doğru bir şekilde açıklanan modellemeler “büyük ölçüde doğru modelleme” şeklinde kategorilendirilmiştir.

Bazı öğretmen adayları sayma pullarını yanlış veya gereksiz şekilde kullanmış ancak sonucu +8 olarak bulmuşlardır. Üç öğretmen adayının yanıtı bu bağlamda değerlendirilmiş ve “kullanımın yanlış, sonucun doğru olduğu modellemeler” kategorisinde ele alınmıştır. Bu öğretmen adaylarının birinin yanıtı şu şekildedir:

“5 tane + pul ve 5 tane - pul kullanarak nötr bir grup oluşturulur. Daha sonra 5 tane daha + pul eklenir ve +5 sayısı oluşturulur. Nötr gruptan üç tane - pulu çıkarınca geriye kalan pulların toplamı nötr gruplar hariç +8 olarak bulunur.”

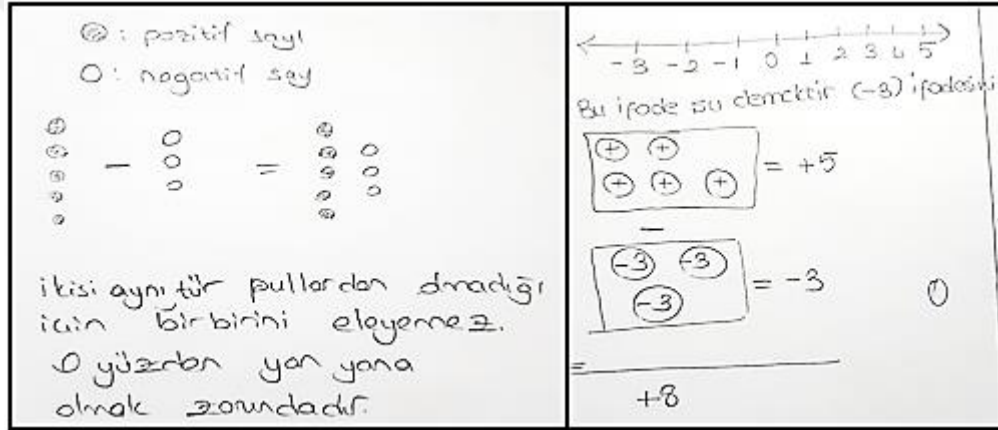
Çıkarma işleminin işareti ve “-3” sayısının işaretinin birbirini pozitive dönüştüreceğini belirterek modelleme yapan öğretmen adayları olmuştur. Şekil 56’daki soldaki yanıt bu türde bir modellemedir. Bu tür yanıtlar, “kurala dayalı açıklama” olarak kategorilendirilmiştir. Bazı öğretmen adayları ise sayma pulu yerine sayı doğrusu gibi farklı modellemelerle yanıt bulmuştur. Bu tür yanıtlar “sayma pulları haricinde

modelleme” kategorisi olarak ele alınmıştır. Şekil 56’da sağ taraftaki örnekte bu kategoriye ait bir modelleme verilmiştir:



Şekil 56. Kurala dayalı açıklama ve sayı doğrusu ile modelleme yapılan örnekler

“Sayma pullarını ilk kez duydum.”, “Modellemenin nasıl yapılacağını bilmiyorum.” gibi açıklamalarla soruyu boş bırakan öğretmen adayları da olmuştur. Bazılarının yapmış oldukları açıklamalar ise “tamamen yanlış” kategorisinde ele alınmıştır. Şekil 57’de bu kategoride değerlendirilen iki örnek sunulmaktadır.



Şekil 57. Yanlış yapılan modellemelere örnekler

Öğretmen adaylarının yanıtlarının altı kategoriye ait dağılımları Tablo 144’te sunulmuştur.

Tablo 144

Öğretmen adaylarının sayma pullarıyla yapmış oldukları modellemelerin dağılımları

	Doğru modelleme	Büyük ölçüde doğru modelleme	Kullanımın yanlış sonucun doğru olduğu modellemeler	Kurala dayalı açıklama	Sayma pulu haricinde modelleme	Boş veya tamamen yanlış
1. Sınıf	1 (%2,5)	0 (%0)	0 (%0)	9 (%22,5)	4 (%10)	26 (%65)
2. Sınıf	4 (%10)	1 (%2,5)	1 (%2,5)	10 (%25)	8 (%20)	16 (%40)
3. Sınıf	26 (%65)	5 (%12,5)	1 (%2,5)	2 (%5)	1 (%2,5)	4 (%10)
4. Sınıf	30 (%75)	7 (%17,5)	1 (%2,5)	1 (%2,5)	0 (%0)	1 (%2,5)
Toplam	61 (%38,125)	13 (%8,125)	3 (%1,875)	22 (%13,75)	13 (%8,125)	47 (%29,375)

Tablo 144 incelendiğinde ilk iki sınıf düzeyinde öğretmen adaylarının çok az bir kısmının uygun modelleme yapabildiği görülmektedir. Birinci sınıf öğretmen adaylarının %65'i soruyu boş bırakmıştır. Son iki sınıf düzeyinde ise doğru modelleme yapan öğretmen adaylarının ortalama %70 oranında olduğu görülmektedir. Bu durumun özel öğretim yöntemleri ve öğretmenlik uygulamaları gibi derslerin olumlu etkilerinden kaynaklandığı düşünülebilir. Öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmelerde de aynı sonuç dikkat çekmiştir. 1. sınıf öğretmen adaylarının her ikisi de sayma pullarını daha önce hiç duymadığını belirtmiştir. 2. sınıf öğretmen adaylarından Halit, “Materyal dersinde adını duydum. Ancak neye benziyor ve nasıl kullanılıyor bilmiyorum.” açıklamasını yapmıştır. Bir diğer 2. sınıf öğretmen adayı Çise, “Kardeşimden duydum. Bana anlat demişti. Ben baktım kitaba. Bir şeyler ekliyordu, çıkarıyordu renkli pullar vardı ama anlamadım. Doğal olarak anlatamadım da. Öğren hocandan bana anlat demiştim. O yine tam anlatamadı bana. Boşver dedim bıraktım. Öyle kaldı. Bizim zamanımızda yoktu böyle şeyler.” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Bu ifade ortaokul öğrencilerinde de benzer zorluklar olduğunu göstermesi açısından önemli sayılabilir. 3. sınıf öğretmen adayı Simre ise, “Özel öğretim yöntemleri dersinde etkinlik incelerken görmüştüm. Hatta pozitif bir sayıdan negatif bir sayının çıkarılması nasıl yapılıyor ki diye merak etmişim. İncelemiştim.” açıklamasında bulunmuştur. 4. sınıf öğretmen adayı Şeyma ise, “Öğretim programında da geçiyordu. Ders kitabında da görmüştüm. Pulları hiç kullanmadım ama modellemenin nasıl yapıldığını biliyorum.” şeklinde görüş bildirmiştir. 4. sınıf öğretmen adayı Maksude ile araştırmacı arasında ise şu diyalog geçmiştir:

A: Bu sorudan önce şunu sorayım. $(-5) - (-2)$ işlemi nasıl yapılabilir sayma pullarıyla?

M: Elimizde 5 tane eksi pul var. İki tane artı ekleriz. o iki tanesi iki tane eksiye sıfırlar. 3 tane eksi pul kalır.

A: Çıkarma işleminde neden ekleme yaptın?

M: Bir şeyler ekliyorduk. Sibel hoca anlatmıştı ama tam hatırlamıyorum.

A: $(-2) - (-5)$ işlemi nasıl yapılabilir?

M: Beş tane artı pul mu ekleriz? İki tanesi iki tane eksi pulu sıfırlar. +3 kalır.

A: O zaman $(-2) + (+5)$ işlemi nasıl yapılır? Aynı mı? Ekleme mi yaparız?

M: Hmm. Evet aynı olur o zaman. Çıkarmada ekleme yapmıyor muyduk? Tam hatırlamıyorum.

Öğretmen adayı çıkarma işleminde aslında zıt işaretlisini eklemiştir. Bu nedenle doğru yanıtı bulmaktadır. Ancak modelleme yanlıştır. Öğrencinin çıkarma yani eksiltmeyi kullanması modellemenin içselleştirilmesi açısından önemlidir. Bu nedenle Maksude'nin de modelleme ile ilgili bilgi eksikliklerinin olduğu anlaşılmaktadır.

1. ve 2. sınıf öğretmen adaylarının yanıtlarından ve yazılı verilerin analizinden ilk iki sınıf düzeyinde materyalle tanışılmadığı çıkarımı yapılabilir. 3. ve 4. sınıf öğretmen adaylarının modelleri çizme konusunda genel olarak başarılı oldukları görülmüştür. Ancak görüşme yapılan adayların açıklamaları doğrultusunda sayma pullarının somut olarak kullanılmasından ziyade öğretim programından veya kitaplardan görülerek öğrenildiği veya öğrenilmeye çalışıldığı anlaşılmaktadır.

4.6.8. ÖST 8. soruya ilişkin bulgular

Testin sekizinci sorusu çarpma ve bölme işlemi ile ilgili iki alt sorudan oluşmaktadır. İlk alt soruda 2008'in 4'e bölünmesi ile ilgili bir öğrencinin yaptığı işlem verilmiş olup öğrenci bölüme sıfır eklememesi için sonucu 52 olarak bulmuştur. Öğretmen adayından öğrencinin hatasını fark etmesi için ne yapılması gerektiğini belirtmesi istenmiştir. Öğrencinin sağlama yapmasını gerektirecek bir dönüt kendi işlemini sorgulamasına yol açabilecektir. Bu nedenle öğretmen adayından öncelikle beklenen bu olmuştur. Yapılan açıklamalar incelendiğinde yanıtlar üç kategoriye ayrılmıştır.

- Bazı öğretmen adayları öğrencinin sağlama yapmasını gerektirecek dönütlerde bulunmuştur: “52 ile 4’ü çarptığımızda 2008’i veriyor mu?”, “2008 TL parayı 4 kişi paylaşırsa kişi başı 52 TL mi alır? Bu dört kişiden 52’şer TL toplarsak kaç TL olur?”, “Bölme işleminin sağlaması nasıl yapılıyordu? Uygula bakalım, bölünen sayıyı bulabilecek misin?” dönütleri bunlardan bazılarıdır.
- Bazı öğretmen adayları ise bölme işleminde yapılması gerekenlerle ilgili bilgileri verip öğrenciden kendi işlemlerini kontrol etmesini istemişlerdir. Bu tür dönütler öğrencinin çarpma işlemi ile sağlama yaparak hatalı olduğunu anlaması yerine bölme işlemini yeniden yapmasını doğrudan belirtmek anlamına gelmektedir. “Bölünen sayıdan her rakam indirdiğinde bölüme bir rakam yazman gerekiyor. Sen bu kurala uydun mu?”, “4 basamaklı bir sayıyı 1 basamaklı bir sayıya bölünce sonuç 4 basamaklı veya 3 basamaklı çıkması lazım. Her bir basamağı tek tek indirmen gerekiyor. Bu durumda yaptığın işlemi gözden geçirmelisin.” gibi dönütler bu kategoride ele alınan yanıtlardan bazılarıdır.
- Bazı öğretmen adayları ise öğrenciye yaptığının yanlış olduğunu ve neyi yanlış yaptığını belirten dönütler vermiştir. Bu dönütler öğrencinin hatasını kendi kendine fark etmesini engellemektedir. “Sıfırı indirince bölüme de sıfır koymalıydın.”, “52 ile 4’ü çarpınca 2008 etmez. 502 eder.” şeklindeki dönütler bu kapsamda değerlendirilmiştir.

Görüşme yapılan 1. sınıf öğretmen adayı Burçe sorunun çözümünde kendisi de zorlanmıştır. Öğrenciye anlatır gibi 2008’in 4’e bölümünü çözmüş ve çözüm adımlarını

araştırmacıya açıklamıştır. Bu süreçte araştırmacı ile aralarında geçen diyalog şu şekilde olmuştur:

B: 20’de 4’ü arıyoruz önce. 5 defa vardır. Bölüme yazdık. Tekrar çarptık ve çıkarınca sıfır kaldı. Yukardan sıfır indirdim. Bölüme de sıfır koyuyor muyduk?

A: Bilmiyorum. Koyuyor muyduk?

B: Aa ben yapamadım. Çocuk nasıl karıştırmasın.

A: Koyup koymayacağımızı nasıl bulabiliriz?

B: Sağlama yapılır. Ama koyulur ya iki tane sıfır var 2008’de. O yüzden iki tane sıfır koyarız. (5’in yanına iki tane sıfır yazdı.) 8’de 4 arıyoruz. İki tane var. 5002 olur. (Duraksadı ve şaşırdı.) Aa olur mu hiç ya. 502 olur. Bir tane sıfır koyacağız.

A: 52 olmasın?

B: 52 ile 4’ü çarpınca 208 olur. O yüzden 502 olacak yani. Ama ben zorlandım soruda. Öğrenci de zorlanır.

Burçe görüldüğü gibi dört basamaklı bir sayıyı bir basamaklı bir sayıya bölme işleminde zorlandığı itirafında bulunmuştur. Bunun en büyük nedeni açıklamalardan da anlaşılacağı üzere yukarıdan inen sıfırların bölüme olan etkisidir. Öğretmen adayının bu durumu öğrenciye açıklayabilmesi, ikna edebilmesi ve süreklilik kazandırabilmesi bu nedenle önemlidir.

Tablo 145’te öğretmen adaylarının vermiş oldukları dönütlerin dağılımı gösterilmiştir.

Tablo 145

Öğretmen adaylarının hatalı bölme işlemine yapmış oldukları dönütlerin dağılımı

	Öğrenciyi sağlama yapmaya yönlendirecek dönüt	Öğrenciye bölme ile ilgili genel bilgi veren ve hatasını kendi bulması istenen dönüt	Öğrencinin yanlısını doğrudan belirten ve bilgi veren dönüt
1. Sınıf	18 (%45)	12 (%30)	10 (%25)
2. Sınıf	15 (%37,5)	11 (%27,5)	14 (%35)
3. Sınıf	19 (%47,5)	7 (%17,5)	14 (%35)
4. Sınıf	32 (%80)	6 (%15)	2 (%5)
Toplam	84 (%52,5)	36 (%22,5)	40 (%25)

Öğretmen adaylarının yarıya yakının öğrenciyi sağlama yapmaya teşvik eden dönütler verdiği görülmektedir. Öğrenciye genel bilgi verip hatasını kendi bulmasını isteyen dönütler de tüm grubun yaklaşık %22’sini oluşturmuştur. Geriye kalan 40 öğrenci ise öğrenci hatasını doğrudan ifade etmiştir. Tablo 145’teki en dikkat çekici sonuçlardan biri 4. sınıf öğretmen adaylarının %80’inin öğrencinin sağlama yapmasına yönelik dönüt vermesidir. Doğrudan bilgi veren veya öğrenci hatasını doğrudan belirten dönütlere bakıldığında da sadece iki öğretmen adayının 4. sınıf düzeyinde olduğu görülmektedir. Son

sınıf öğretmen adaylarının dönütlerinin daha öğrenci merkezli olduğu anlaşılabılır. Görüşme yapılan 4. sınıf öğretmen adayı Maksude ondalık ifadelerde bu bölme işleminin daha da sorun olduğunu dile getirmiş ve öğretirken nasıl yapılması gerektiğini bilmediğini söylemiştir. Maksude ile araştırmacı arasında geçen konuşmanın bir bölümü aşağıda verilmiştir:

M: Aslında sıfır eklemedeki en büyük zorluk ondalık kısma devam ettiğinde oluyor. Ben kardeşime anlatırken çok zorluk çektim. Bazen en son rakamı indirince içinde olmuyor ve sıfır ekliyor. Sonra sıfır ekleyip virgöl koyması gerekiyor. Ne zaman sıfır ne zaman virgöl karıştırılabilir.

A: Bu durumu nasıl açıkladın peki kardeşine, öğrendi mi sonrasında?

M: Aslında açıkladım ama yine karıştırabiliyor. Bazen gereksiz sıfır ekliyor bazen eklemeyen devam ediyor. Açıkçası daha iyi nasıl öğretebilirim bilmiyorum.

Görüldüğü gibi öğretmen adayı öğrenci bilgisi bileşeni bakımından olumlu bir yaklaşım içindedir. Öğrencinin nerelerde zorluk yaşadığının farkındadır. Ancak öğretim stratejileri bileşeni açısından değerlendirildiğinde eksikliğinin olduğu anlaşılmaktadır. Öğrencinin yanılışının nasıl giderileceği konusunda zorluk yaşadığını belirtmiştir.

Sekizinci soruda yer alan ikinci alt soruda öğretmen adaylarına iki farklı yöntemle çözülen çarpma işlemleri verilmiştir. Her ikisi de çözümleme yoluyla yapılmış bu örneklerin hangilerinin her zaman doğru olacağının belirtilmesi ve çarpma işlemlerinin değerlendirilmesi istenmiştir. A öğrencisi 24×14 işlemini $(20+4) \times (10+4)$ şeklinde değerlendirip ikişerli olarak sayıları dağıtıp çarpmıştır. B öğrencisi ise $24 \times 10 + 24 \times 4$ şeklinde sadece 14'ü parçalayarak çarpma işlemini gerçekleştirmiştir. Öğretmen adaylarının açıklamaları her iki yöntem için ayrı ayrı değerlendirilmiştir. Yöntemi her zaman geçerli bulup bulmamalarına göre iki kategoriye ayrılmıştır.

Tablo 146

Öğretmen adaylarının alternatif çarpma işlemlerine yönelik görüşlerinin dağılımı

	A yöntemi		B yöntemi	
	Her zaman geçerli	Her zaman geçerli değil	Her zaman geçerli	Her zaman geçerli değil
2. Sınıf	30 (%75)	10 (%25)	37 (%92,5)	3 (%7,5)
3. Sınıf	30 (%75)	10 (%25)	36 (%90)	4 (%10)
4. Sınıf	37 (%92,5)	3 (%7,5)	37 (%92,5)	3 (%7,5)
Toplam	123 (%76,875)	37 (%23,125)	143 (%89,375)	17 (%10,625)

Tablo 146 incelendiğinde öğretmen adaylarının büyük bir kısmının her iki yöntemin de her zaman geçerli olduğunu belirttikleri görülmüştür. Ancak sadece “14” sayısının parçalandığı B yönteminde bu oran daha fazladır. Ayrıca 4. sınıf öğretmen

adaylarının %92,5 gibi büyük bir çoğunluğunun her iki yöntemin de geçerliliğini ifade ettiği dikkat çekmektedir. Öğretmen adaylarının yazılı yanıtları incelendiğinde yöntemlerin her zaman geçerli olmadığını ifade eden adayların bir kısmı öğrencilerin kavram yanlışlığına sahip olduğunu belirtmiş bir kısmı ise aynı sonucun çıkmasının tesadüf olduğunu belirtmişlerdir. Bu yöntemleri ilk kez gördüğünü itiraf eden öğretmen adayları da olmuştur. Şekil 58’de bu açıklamalara örnekler verilmiştir.

Her zaman doğru sonucu vermez. Bu tesadüfi bir durumdur. Öğrenciler böyle bir yanlış yaptığında çarpma işlemi hatalıdır. Basamak kaydırma kuralları hatalıdır.	A ve B durumunda her ikisinin de de hata vardır. İşlem gereği sonuçlar denk gelmiştir.
(A) $\begin{array}{r} 24 \\ \times 14 \\ \hline 96 \\ 240 \\ \hline 336 \end{array}$ ↓ Emin değilim. İlk defa böyle bir çarpma işlemi gördüm aslında.	(B) $24 \cdot (10+4)$ $\begin{array}{r} 24 \\ \times 14 \\ \hline 240 \rightarrow 24 \cdot 10 \\ 96 \rightarrow 24 \cdot 4 \\ \hline 336 \end{array}$ Doğru sonucu verir. Hayır 2 işlemde doğru değildir. A öğrencisi konuyu anlamıyla yanlış anlamıştır. Aynı şekilde B kişisi de. Koruman yanlışları olmuştur çocuklarda

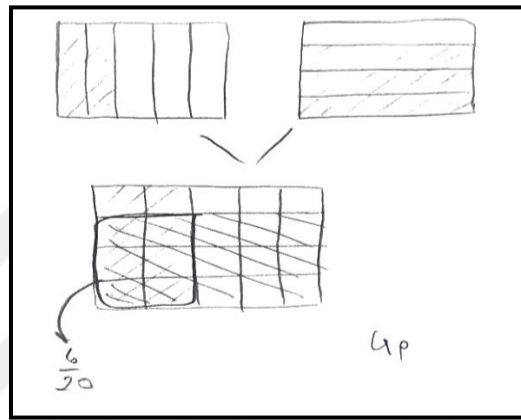
Şekil 58. Çarpma işlemleri ile ilgili alternatif yöntemlerin her zaman geçerli olmayacağını belirten örnekler

Şekil 58’de üstte yer alan iki örnekte öğretmen adayları işlemlerin tesadüfi şekilde doğru sonucu verdiğini ifade etmektedir. Bu durum öğrencilerin yaptıkları işlemleri anlamlandıramadıklarını göstermektedir. Altta yer alan örneklerin ilkinde öğretmen adayı ilk yöntemi ilk kez gördüğünü ifade etmiş ve emin olmadığını belirtmiştir. İkinci örnekte ise öğretmen adayı öğrencilerde kavram yanlışlığı olduğunu düşünmüş ve işlemlerin doğru olmadığını iddia etmiştir.

Öğretmen adaylarından gerek toplama ve çıkarmada gerekse çarpma- bölme çeşitli stratejiler uygulayarak pratik bir şekilde sonuç bulmasını beklemek doğal karşılanabilir. Kendisinin bulabilmesinin yanı sıra öğrencilerini de farklı yöntemlerle ve stratejilerle beslemesi gerektiği ifade edilebilir. Durum böyle olunca özellikle her iki sayının da parçalanarak çarpıldığı A yöntemini öğretmen adaylarının yaklaşık %25’inin anlamlandıramamasının veya her zaman geçerli olamayacak bir yöntem olarak görmesinin dikkate alınması gereken bir bulgu olduğu söylenebilir.

4.6.9. ÖST 9. soruya ilişkin bulgular (şeffaf kesir kartları)

Testin dokuzuncu sorusunda öğretmen adaylarının şeffaf kesir kartlarını kullanabilme becerileri incelenmiştir. Materyallerin öğretim sürecinde kullanılabilmesi öğretim stratejileri bilgisi kapsamında değerlendirilmektedir. Bu nedenle özellikle kesirlerde çarpma işleminin modelleme yoluyla öğretilmesini kolaylaştıran şeffaf kesir kartları ile ilgili, " $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$ çarpma işlemini şeffaf kesir kartları kullanarak nasıl modelleriz? Gösteriniz." sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarından $\frac{2}{5}$ ve $\frac{3}{4}$ şeffaf kesir kartlarının Şekil 59'da yer aldığı gibi ayrı ayrı modellenmesi, bunların birinin dikey diğerinin yatay olacak şekilde üst üste getirilmesi ve bu sürecin açıklanması beklenmektedir.



Şekil 59. Şeffaf kesir kartlarıyla doğru yapılmış bir modelleme örneği

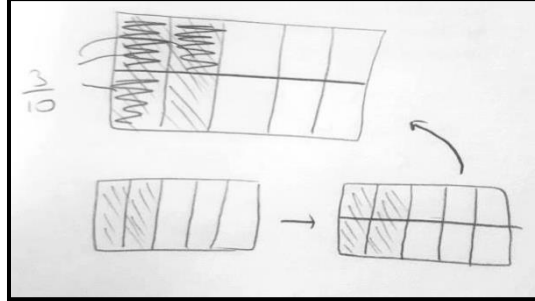
Öğretmen adaylarının yapmış oldukları modellemeler kategorileştirilmiş ve her bir kategoriye ait dağılımlar aşağıdaki Tablo 147'de sunulmuştur:

Tablo 147

ÖST 9. soruya ait yanıtların dağılımı

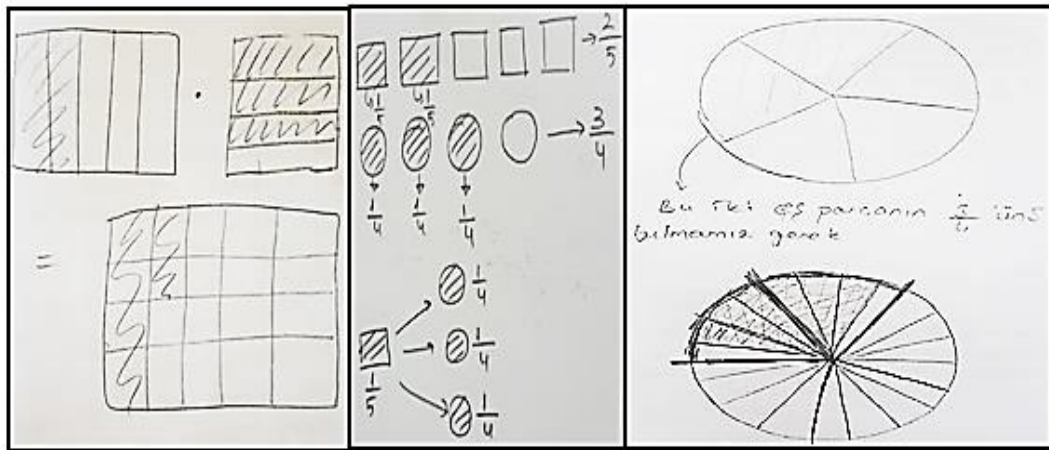
		1. Sınıf	2. Sınıf	3. Sınıf	4. Sınıf	Toplam
Doğru Modelleme	Kartları hem tek tek hem bir arada gösterenler	0 (%0)	7 (%17,5)	18 (%45)	15 (%37,5)	40 (%25)
	İki kartı da birleştirerek tek bir modelde gösterenler	0 (%0)	1 (%2,5)	4 (%10)	4 (%10)	9 (%5,63)
	<i>Doğru Modelleme Toplamı</i>	0 (%0)	8 (%20)	22 (%55)	19 (%47,5)	49 (%30,63)
Çok Sayıda Kartla Modelleme	5 tane $\frac{3}{4}$ kesir kartının ikisini seçenler veya 4 tane $\frac{2}{5}$ kesir kartının üçünü seçenler	1 (%2,5)	2 (%5)	0 (%0)	0 (%0)	3 (%1,88)
Kısmen Doğru Modelleme	Tek kart üzerinden açıklayanlar	1 (%2,5)	1 (%2,5)	9 (%22,5)	3 (%7,5)	14 (%8,75)
Yanlış Veya Eksik Modelleme	Kart çizmeden açıklama yapanlar/ Tek bir kesir kartla gösterenler/Yanlış çizenler	12 (%30)	18 (%45)	5 (%12,5)	3 (%7,5)	38 (%17,5)
	Boş Bırakanlar	26 (%65)	11 (%27,5)	4 (%10)	15 (%37,5)	56 (%35)

14 öğretmen adayı ise tek bir kesir modeli olarak o model üzerinde çizgi çekerek diğer modeli oluşturmuştur. Şekil 62’de bir modelleme örneği gösterilmektedir. Öğrenci $\frac{2}{5}$ şeffaf kesir kartının ortasından çizgi çizerek taralı bölgeyi 4 eşit parçaya bölmüştür. Ve bu 4 parçadan 3’ünü seçmiştir. Böylece $\frac{6}{20}$ kesrinin sadeleşmiş hali olan $\frac{3}{10}$ kesrini bulmuştur.



Şekil 62. Kısım doğru kategorisinde yer alan modelleme örneği

Çoğunluğunu ilk iki sınıf düzeyinde yer alan öğretmen adaylarının oluşturduğu 38 öğretmen adayı kesirlerden sadece birini modellemiş veya yanlış modellemeler yapmıştır. Bu modellemelere verilen bazı örnekler Şekil 63’te görülmektedir.



Şekil 63. Yanlış modelleme örnekleri

Şekil 63’teki ilk örnekte öğretmen adayı şeffaf kesir kartlarını tek tek göstermiş olsa da çarpma işlemine yönelik bir adım modellememiştir. İkinci örnek ve üçüncü örnekte ise şeffaf kesir kartı kullanılmamıştır.

Tablo 147 incelendiğinde tüm öğretmen adaylarının %35’inin soruyu boş bıraktığı görülmektedir. Bu oran 1. sınıf öğretmen adaylarında %65’tir. Görüşme yapılan öğretmen adaylarına sorulduğunda 1.sınıf öğretmen adaylarının her ikisi de böyle bir materyali duymadığını dile getirmiştir. 2. sınıf öğretmen adaylarından Çise, “Materyalin adını duydum materyal geliştirme dersinde ama kendisini görmedim hiç. O nedenle nasıl kullanılır bilmiyorum.” demiştir. Görüşme yapılan 3. sınıf ve 4. sınıf öğretmen adayları ise modellemeyi doğru olacak şekilde çizmiştir.

4.6.10. ÖST 10. soruya ilişkin bulgular

Testin son sorusu, “Burak öğretmen, bir öğrencinin yapmış olduğu $(-4)+(-5) = (+9)$ şeklindeki işleme negatif sayıların toplamalarının değil çarpımlarının pozitif olacağı dönütünü verilmiştir. Aynı öğrenci bir başka soruda $(-2).(-3).(-4) = +24$ cevabını vermiştir. Öğretmenin ilk soruya vermiş olduğu dönütü değerlendiriniz.” şeklinde olmuştur. Öğrencinin hatası toplama işleminde olmasına rağmen öğretmen çarpma işlemini içeren bir dönüt vermiş ancak bu dönüt aşırı genellemeye neden olmuştur. Öğrenci iki negatif sayının toplamını pozitif olarak ele almıştır. Öğrencinin çarpma işlemindeki kuralla bunu karıştırdığını düşünmüş olabilecek öğretmen ise negatif sayıların çarpıldığında pozitif olacağını belirtmiştir. Bunun üzerine başka bir işlemde öğrenci üç negatif sayının çarpımının da pozitif olacağını belirtmiştir. Bu soruda öğretmen adayından; toplama işlemi ile ilgili dönüt verilmesi gerektiğini ve öğrencinin toplama işleminde hatasının olduğunu belirtmesi, çarpma işleminde öğrencinin hatasının olduğunu ve bu nedenle dönütün düzeltilmesi gerektiğini belirtmesi, öğretmenin vermiş olduğu dönüt ile öğrenci hatası arasında bağ kurması beklenmiştir. Öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtlara göre oluşturulan kategoriler aşağıda sıralanmıştır:

a) Öğrencinin toplama işleminde ve çarpma işleminde hatalı olduğunu belirten; öğretmenin ise toplama işlemi ile ilgili dönüt vermesi gerekirken çarpma işlemi ile ilgili eksik bir dönüt vererek kavram yanılgısına sebep olduğunu belirten ve yapılması gereken dönütleri hem toplama hem de çarpma işlemi açısından açıklayan öğretmen adayları (13 kişi, %8,125)

b) Öğrencinin çarpma işleminde hatalı olduğunu ve buna öğretmenin dönütünün neden olduğunu belirten; çarpma işlemi ile ilgili dönütün nasıl olması gerektiğini açıklayan ancak toplama işlemindeki hatadan bahsetmeyen öğretmen adayları (46 kişi, %28,75)

c) Öğrencinin toplama işleminde hatalı olduğunu, öğretmenin toplama işlemine dönüt vermesi gerektiğini ve toplama işlemi ile ilgili nasıl bir dönüt verilmesi gerektiğini açıklayan ancak çarpma işleminde yer alan hatadan hiç bahsetmeyen öğretmen adayları (4 kişi, %2,5)

d) Öğrencinin hatasını dile getirmeden sadece dönütün hatalı olduğunu belirten ve toplama ya da çarpma işleminden sadece birine dönüt önerisi veren öğretmen adayları (51 kişi, %31,875)

e) Öğrencinin yapmış olduğu işlemlerde, öğretmenin ise vermiş olduğu dönütte hatalı olduğunu belirten ancak toplama veya çarpma işlemi ile ilgili dönüt önerisi

sunmayan; hataların nereden kaynaklandığını belirtmeyen öğretmen adayları (17 kişi, %10,625)

f) Dönütün hatalı olduğunu belirttiği halde öğrencinin yanlışlarıyla ilgili veya yapılması gereken dönütle ilgili açıklama yapmayan öğretmen adayları (16 kişi, %10)

g) Toplama işlemi veya çarpma işleminden biri ile ilgili hatayı belirten ancak öğretmen dönütü ile ilgili açıklama yapmayan öğretmen adayları (8 kişi, %5)

h) Dönütün veya öğrencinin hatasının olmadığını ifade eden öğretmen adayları (5 kişi (%3,125)

Yukarıdaki kategoriler incelendiğinde sadece 13 öğretmen adayının olması gerektiği gibi hem toplama hem çarpma işlemlerini açıklayarak dönüt verdiği görülmüştür. 51 öğretmen adayının ise sadece öğretmen dönütünü ele alıp toplama veya çarpmadan birine değindiği anlaşılmaktadır. Bu kategori detaylı incelendiğinde 51 öğretmen adayından 45'inin çarpma, geri kalan 6 öğretmen adayının ise toplama işlemi üzerinde öğretmen dönütünü değerlendirip düzelttiği görülmüştür. Ayrıca tüm öğretmenlerin yaklaşık %29'unu oluşturan 46 öğretmen adayı ise öğrenci hatasını da vurgulayarak, çarpma işlemi ile ilgili verilen dönütü düzeltmiştir.

Tüm kategoriler toplu halde değerlendirildiğinde toplam 30 öğretmen adayının (%18,75) toplama işleminde yapılan hataya odaklanıp, ona çözüm önerisi sunduğu; 105 öğretmen adayının (%65,625) çarpma işlemine odaklanarak, çarpma işlemindeki hataya yönelik dönüt önerisi sunduğu görülmüştür. Halbuki soruda öğretmenin ilk işleme vermiş olduğu dönütün değerlendirilmesi istenmiştir. Buna rağmen bu dağılımlar ele alındığında çok az sayıda öğretmen adayının öğrencinin toplama işleminde yapmış olduğu hatayı dikkate alıp sorunun asıl kaynağına odaklandığı anlaşılmaktadır. Yapılan dönütün yetersiz olması nedeniyle öğrenci çarpma işleminde hatalı bir çıkarımda bulunmuştur. Öğretmen adaylarının %66'sının çarpma işlemindeki bu hatalı çıkarıma verilmesi gereken dönütü açıkladığı görülmüştür.

4.6.11. Öğretim stratejileri bilgisi bileşenine yönelik genel değerlendirme

Pedagojik alan bilgisi bileşenlerinden öğretim stratejileri bilgisine yönelik hazırlanmış olan ÖST'nin içerik analizi sonuçları yukarıdaki bölümlerde sunulmuştur. Ancak genel bir bilgi vermesi açısından her bir soruya ilişkin puanlama da yapılmıştır. Çalışmanın “veri analizi” bölümünde iki soru için puanlamalar örneklendirilmiştir. 10 soruya 4'er puandan en fazla 40 puan verilmiş ve okuyucu kolaylığı açısından test puanları 2,5 ile çarpılarak 100 üzerinden açıklanmıştır.

Her bir sınıf düzeyine ait test puanları ortalamaları Tablo 148'de sunulmuştur.

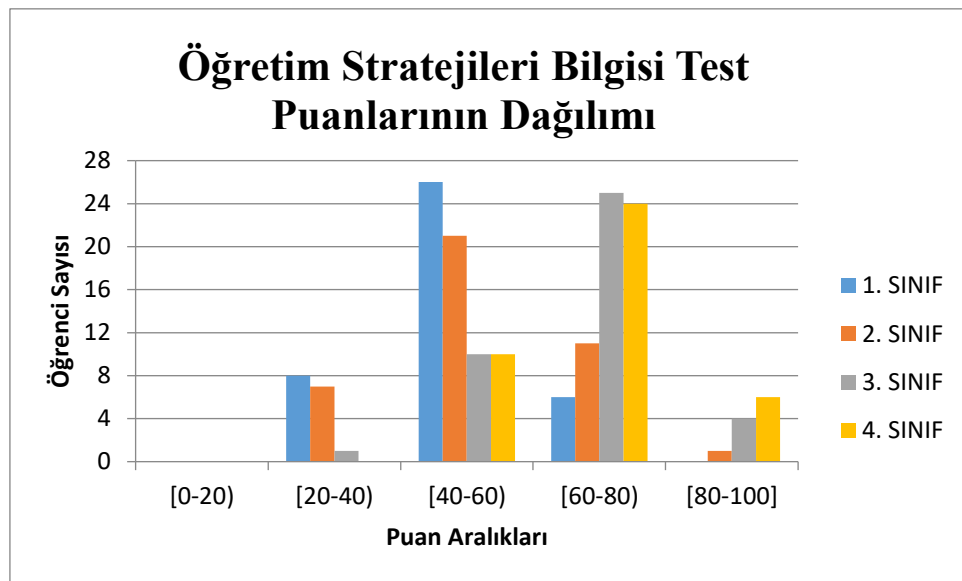
Tablo 148

ÖST genel ortalamaları (100 üzerinden)

1. Sınıf Ortalaması	2. Sınıf Ortalaması	3. Sınıf Ortalaması	4. Sınıf Ortalaması	Tüm Örneklem Ortalaması
47,375	51,8125	63,125	65,8125	57,03125

Tablo 148'den de görüldüğü gibi sınıf düzeyinin yükselmesiyle birlikte test ortalamaları artış göstermiştir. Ancak 3. ve 4. sınıf puanlarının birbirlerine yakın olduğu söylenebilir. Özel öğretim yöntemleri gibi öğretim yöntem ve stratejilerinin geliştirilmesini amaçlayan derslerin 3. sınıfta başlaması ve bu dersleri son sınıf düzeyinde öğretmenlik uygulamalarının takip etmesi göz önüne alındığında son iki sınıf düzeyi ortalamaları ile ilk iki sınıf düzeyi ortalamalarındaki belirgin puan farkı daha anlaşılır olmaktadır.

Öğretmen adaylarının test puanları eşit aralıklı kategorilere ayrıldığında her bir kategoride kaç öğretmen adayı olduğu Şekil 64'te sunulmuştur:



Şekil 64. Öğretim stratejileri bilgisi testi puan dağılımları

Yukarıdaki grafikte görüldüğü gibi öğretim stratejileri bilgisi testinden hiçbir öğretmen adayı 20 puanın altında almamıştır. 16 öğretmen adayı (%10) ise 40 puanın altında puan almıştır. Ancak bu aralıkta sadece bir tane üçüncü sınıf öğretmen adayı yer alırken 4. sınıf öğretmen adaylarının bulunmaması olumlu bir gelişme olarak ele alınabilir. 67 öğretmen adayı 40 ile 60 puan aralığında, 66 öğretmen adayı ise 60 ile 80 puan aralığında yer almıştır. 40-60 aralığında ilk iki sınıf düzeyinin, 60-80 aralığında ise son iki sınıf düzeyinin çoğunlukta olması dikkat çekicidir. Sadece 11 öğretmen adayının 80 puan ve üzeri aldığı ve bu öğretmen adaylarının içerisinde 1. sınıf öğretmen adayının bulunmadığı görülmektedir.

Sınıf düzeylerine göre dağılımın yanı sıra öğretmen adaylarının hangi sorularda daha çok zorlandıkları da incelenmiştir. Öğretim stratejileri bilgisi test sorularının her biri ayrı ayrı değerlendirilip her soruya ait ortalamalar tablolştırılmıştır. Tablo 149'da sınıf düzeylerine göre her bir soru için ortalama puanlar gösterilmektedir.

Tablo 149

ÖST her bir soruya ait puan ortalamaları

	1.Sınıf	2.Sınıf	3.Sınıf	4.Sınıf	ORTALAMA
Soru 1	2,375	2,300	2,400	2,950	2,506
Soru 2	1,925	1,875	1,825	1,850	1,869
Soru 3	1,775	1,475	1,525	1,400	1,544
Soru 4	1,825	1,800	1,800	2,400	1,956
Soru 5	2,675	3,100	3,450	3,350	3,144
Soru 6	3,050	2,825	3,125	2,775	2,944
Soru 7	0,425	0,950	3,125	3,600	2,025
Soru 8	2,625	2,675	2,775	3,600	2,919
Soru 9	0,200	1,375	2,775	2,200	1,638
Soru 10	2,075	2,350	2,450	2,200	2,269

Tablo 149 incelendiğinde en yüksek puanın olduğu sorularda ortalamanın 3 puanın üzerinde olduğu tek bir soru (5.) görülmektedir. Dört soruda (2., 3., 4. ve 9.) ise ortalama 2 puanın altında yer almıştır. Sınıf düzeyiyle birlikte puanların değişimine bakıldığında ise sadece iki soruda (7. ve 8.) sürekli bir artış görülmektedir. Bir diğer dikkat çekici durum ise üç soruda (2., 3. ve 6.) 1. sınıf öğretmen adaylarının puan ortalaması 4. sınıf öğretmen adaylarının puan ortalamasından yüksek olmuştur. Bu durumlardan bazıları sorular özelinde maddeler halinde aşağıda incelenmiştir:

- Testte öğretmen adaylarına en kolay gelen, yani ortalamanın en yüksek olduğu soru EKOK yöntemleri ile ilgili olan 5. soru olmuştur. Öğretmen adaylarının çoğu iki sayının EKOK'unu farklı iki yöntemle bulabilmiştir.

- Öğretmen adaylarının en çok zorlandığı yani ortalamasının en düşük olduğu soru 3. soru olmuştur. İrrasyonel ve rasyonel sayıların yoğunluğu ile ilgili soruda tüm sınıf düzeylerinin ortalamaları 2 puanın altında kalmıştır. Bu soruda en iyi ortalamasının 1. sınıf öğretmen adaylarında olmasının da ilginç bir bulgu olduğu düşünülebilir. Ancak sorunun bulgularına geri dönüldüğünde şu hatırlatılabilir: İki irrasyonel sayı arasında sonsuz rasyonel sayı olacağını belirten ve bu duruma örnekler veren beş öğretmen adayı olmuştur. Bu öğretmen adaylarının tamamı dördüncü sınıf seviyesindedir. Her iki irrasyonel sayının arasında rasyonel sayı bulunmadığını belirten öğretmen adaylarının çoğunluğu ise ilk iki sınıf düzeyinden oluşmaktadır. Ancak diğer yanıt kategorilere de bakıldığında birinci sınıfların ortalaması diğerlerine çok yakın olmakla birlikte daha yüksek çıkmıştır.
- 1. sınıf öğretmen adaylarının son sınıf öğretmen adaylarından daha yüksek ortalamaya sahip olduğu bir diğer soru testin ikinci sorusu olmuştur. Bu soru aynı zamanda testin en düşük ortalamaya sahip ilk üç sorusu içerisinde. Devirli sayılarda toplama işlemi ile ilgili olan soruda öğretmen adayından öğrenciye hatasını gösterir bir dönüt vermesi istenmişti. Verilen dönütlere göre de puanlama yapılan soruda ortalamaların birbirine çok yakın olduğu da söylenebilir. Öğrenciyi merkeze alan dönütler her ne kadar dördüncü sınıf öğretmen adaylarında daha fazlaysa da tamamen geçerli dönütler (rasyonel sayılarla veya ondalık açılımla göstererek devirli sayılarda toplamının her zaman mümkün olmayacağını gösteren) 1. sınıf öğretmen adaylarında daha fazla olmuştur.
- Testin ortalaması düşük sorularından biri 4. sorudur. Soruda üslü ifadelerdeki parantezin kullanımıyla ilgili iki farklı yanıt veren öğrencilerden hatalı olana dönüt verilmesi istenmiştir. Soru ortalaması 2 puanın üzerinde olan sadece 4. sınıf öğretmen adayları olmuştur. Diğer üç sınıf düzeyinde ise puanlar yakındır.
- İrrasyonel sayıların yoğunluğu ile ilgili sorudan sonra en düşük ortalamaya sahip 2. soru şeffaf kesir kartlarının kullanımı ile ilgili olmuştur. Özellikle ilk iki sınıf düzeyindeki öğretmen adaylarının çoğu materyali bilmediklerini söylemişlerdir. En yüksek ortalama ise 3. sınıf öğretmen adaylarında olmuştur.
- Materyal kullanımı ile ilgili olan bir başka soruda (7.) sayma pulları sorulmuştur. İlk iki sınıf düzeyinde materyal bilinmediği için ortalama 1 puanın altında iken son iki sınıf düzeyinde 3 puanın üzerinde olmuştur. Puan ortalamaları arasındaki farklılaşmanın en çok olduğu soru bu soru olmuştur. Aynı zamanda sınıf seviyesindeki artışla birlikte ortalamalarda da yükseliş söz konusudur.

4.7. Pedagojik Alan Bilgisi Kapsamında Program Bilgisine Yönelik Bulgular

Pedagojik alan bilgisinin bir alt bileşeni de program bilgisi (curriculum knowledge) veya bir diğer adıyla müfredat bilgisidir. Bu bilgi türü öğretmen adaylarının öğretim programının amaçlarına, felsefesine ve konu içeriğine ve öğretilecek sınıf seviyesine ne derece hakim olduğunu içerdiği gibi hangi kazanımlarda hangi materyallerden yararlanılması gerektiği ve onlara nasıl ulaşılabileceği gibi hususlara da yer vermektedir. Öğretmen adaylarının bu çalışmada hazırlanmış olan *sayılar ve işlemler öğrenme alanı program bilgisi testine* vermiş oldukları yanıtlar bu bölümde incelenmiştir. Testte açık uçlu, yapılandırılmış grid gibi farklı türlerde olan 11 soru yer almaktadır. İlk soru programda yer alan yetkinliklerle, 2. ve 3. sorular programın özel amaçlarıyla, 4. soru materyal kullanımıyla, diğer sorular ise programın kazanımlarıyla ilişkilidir. Bu sorulara verilen yanıtlar her soru için aşağıda yer almaktadır.

4.7.1. İlk üç soruya (uzamsal düşünme, matematiksel okuryazarlık, üstbilişsel bilgi) ilişkin bulgular

Öğretim programında Türkiye Yeterlilikler Çerçevesinde (TYÇ) belirlenen sekiz anahtar yetkinlikten biri olarak “Matematiksel yetkinlik ve bilim/teknolojide temel yetkinlikler” yer almaktadır. Matematiksel yetkinlik, düşünme (mantıksal ve uzamsal düşünme) ve sunmanın (formüller, modeller, kurgular, grafikler ve tablolar) matematiksel modlarını farklı derecelerde kullanma beceri ve isteğini içermektedir. Öğretmen adaylarının öğretim programında yer alan yetkinlikleri bilmesi ve öğretimini bu çerçevede doğrultusunda şekillendirmesi beklenmektedir. Bu nedenle testin ilk sorusunda öğretmen adaylarına uzamsal düşünmenin ne olduğu sorulmuştur.

Öğretim programında matematik öğretim programının özel amaçları başlığı altında 13 özel amaçtan bahsedilmektedir. Öğrencilerce ulaşılması beklenen bu amaçlar için öğretmenlerin rehberlik edeceği düşünüldüğünde öğretmen adaylarının bu amaçlardan ve burada yer alan bazı kavramlardan haberdar olmalarının gerekliliği ortadadır. Özel amaçların ilkinde, “Matematiksel okuryazarlık becerilerini geliştirebilecek ve etkin bir şekilde kullanabilecektir.” ifadesiyle matematiksel okuryazarlıktan bahsedilmektedir. Bir başka amaçta ise, “Üstbilişsel bilgi ve becerilerini geliştirebilecek, kendi öğrenme süreçlerini bilinçli biçimde yönetebilecektir.” ifadesiyle üstbilişsel bilgi kavramından söz edilmektedir. Program testinin ikinci ve üçüncü sorularında öğretmen adaylarına bu iki kavram sorularak onların bu amaçlarla ilgili bilgileri öğrenilmek istenmiştir.

Bu sorulara verilen yanıtlar kavramların ilgili alanyazında yer alan tanımlarına göre değerlendirilmiştir. Değerlendirmede ele alınan tanımlar şu şekildedir:

Uzamsal Düşünme: Turğut (2010)'a göre uzamsal düşünme nesneleri, karşılaşılan durumun görsel halini zihinde ele alma gücüdür. Uzamsal düşünme ayrıca, öğrencilerin, problem çözerken açıklayıcı şekiller çizebilmesi, sözel problemleri zihninde canlandırabilmesi gibi faydaları olan geometrik cisimlerin yönlerini, görünümelerini hayal etme, onları döndürme, konumunu belirleme ve başka cisimlerle olan ilişkilerini anlama becerisi olarak ifade edilebilir (Uzun, 2013; Turğut, 2010).

Matematiksel Okuryazarlık: Bireyin düşünen, üreten ve eleştiren bir vatandaş olarak bugün ve gelecekte karşılaşacağı sorunların çözümünde matematiksel düşünme ve karar verme süreçlerini kullanarak çevresindeki dünyada matematiğin oynadığı rolü anlama ve tanıma kapasitesi (OECD, 2006) olarak ifade edilebilir. Ayrıca matematiksel okuryazarlık; kişinin matematiksel ifadeleri ve uygulamaları bilmesini, onları kullanmada yetkin olmasını; alana ait bilgileri oluşturmak ve iletişim kurmak için matematiksel dilin geleneklerine, sözcük dağarcığına, uygulama ve ilkelerine, bilişsel ve duyuşsal durumlarına, teknolojiye ve araçlara hakim olmayı da içerir (Yore, Pimm ve Tuan, 2007)

Üstbilişsel Bilgi: Kişinin kendi bilişsel işlemlerinin nasıl gerçekleştiğine dair olan bilgileri üstbilişsel bilgi olarak ele alınmaktadır. Üstbilişsel bilgiler, insanın kendi bilişsel özelliklerini, bilişsel görevlerinin doğasına ilişkin bilgileri ve bu bilişsel görevlerin üstesinden gelmeyi sağlayan olası stratejilerin bilgisini içermektedir (Flavell, 1979).

Bu kategorilere göre uzamsal düşünme kavramına ilişkin öğrenci yanıtlarının dağılımı Tablo 150'de verilmiştir.

Tablo 150

Uzamsal düşünmeye yönelik açıklamaların kategorilere göre dağılımı

	Tamamen Doğru	Büyük Ölçüde Doğru	Kısmen Doğru	Yetersiz	Yanlış / Boş
1. Sınıf	0 (%0)	0 (%0)	1 (%2,5)	2 (%5)	37 (%92,5)
2. Sınıf	1 (%2,5)	4 (%10)	0 (%0)	0 (%0)	35 (%87,5)
3. Sınıf	8 (%20)	3 (%7,5)	3 (%7,5)	9 (%22,5)	17 (%42,5)
4. Sınıf	7 (%17,5)	5 (%12,5)	6 (%15)	9 (%22,5)	13 (%32,5)
Toplam	16 (%10)	12 (%7,5)	10 (%6,25)	20 (%12,5)	102 (%63,75)

Tablo 150'de de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının yaklaşık %64'ü uzamsal düşünmenin ne olduğunu yanlış açıklamışlardır. Yanlış yanıt yapan öğretmen adaylarının oranı 1.sınıflarda %92,5 iken 4. sınıflarda %32,5 olarak saptanmıştır. Sınıf düzeyiyle birlikte yanlış yanıtlarda azalış göze çarpmaktadır. Sadece 16 öğretmen adayının uzamsal düşünme ile ilgili doğru ve yeterli bilgiye sahip olduğu söylenebilir.

“Uzamsal düşünme” ifadesiyle ilgili öğretmen adaylarının yaptıkları yanlış açıklamalar kategorilere ayrılmış ve bu kavramla ilgili var olan imajlar ortaya konmak istenmiştir. 102 öğretmen adayının vermiş oldukları yanıtlar, aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- Farklı boyutlarda düşünme, çok yönlü düşünme, çok boyutlu düşünme şeklinde ele alan öğretmen adayları (15 kişi)
- Olaylara farklı açılardan bakma, geniş bakış açısıyla ele alma, enine boyuna düşünme veya detaylı düşünme şeklinde ele alan öğretmen adayları (11 kişi)
- Matematiksel becerileri teknolojiye uygulama, teknolojiyle ve bilimle düşünme olarak ele alan öğretmen adayları (10 kişi)
- Fikir yürütme, akıl yürütme, tahmin etme şeklinde ele alan öğretmen adayları (6 kişi)
- Soyut düşünme olarak ele alan öğretmen adayları (4 kişi)
- Yaratıcı düşünme, yenilikçi düşünme olarak ele alan öğretmen adayları (4 kişi)
- Uzlaştırmacı düşünme, kavramları/konuları uzlaştıran/ilişkilendiren düşünme şeklinde ele alan öğretmen adayları (4 kişi)
- Matematiği günlük hayata uyarılama olarak ele alan öğretmen adayları (3 kişi)
- Bilmiyorum/ Yanıt yok (30 kişi)
- Diğer yanıtlar (15 kişi)

Görüldüğü gibi uzamsal düşünme öğretmen adayları için olduğundan çok daha farklı anlamlar taşıyabilmektedir. “Uzam” kelimesinin öğretmen adaylarında, uzay, uzman, uzlaşma gibi kavramları çağrıştırdığı söylenebilir. Görüşme yapılan tüm öğretmen adaylarına yetkinlikte sözü edilen uzamsal düşünmenin ne olduğu sorulmuştur. 1.sınıf öğretmen adaylarının her ikisi de kavramı hiç duymadıklarını ifade etmişlerdir. 2.sınıf öğretmen adaylarından Çise, “Aklıma ilk gelen kademeli düşünme gibi bir şey. Konuyu atlaya atlaya vermeden kademeli şekilde göstermek. Uzamsal deyince öyle çağrışım yaptı.” şeklinde bir açıklamada bulunmuştur. Bir diğer 2.sınıf öğretmen adayı Halit, “Duymadım ama farklı düşünme demek mi? Uzamsal düşünme gibi bir şey mi? Bir şeyin daha ötesini düşünme. Hayali düşünme gibi bir şey olabilir.” şeklinde açıklama yapmıştır. Her ikisinin de kavramı daha önce programda veya ders aşamasında duymadıkları, sadece kelimenin çağrıştırdıkları ile yorum yaptıkları anlaşılmaktadır.

3.sınıf öğretmen adayı Simre de, “Detaylı düşünme gibi bir şey diyeceğim ama bilmiyorum. Aslında öğretim programını incelemiştim ama merak edip kavramların ne olduğuna bakmamıştım.” açıklamasında bulunmuştur. 4. sınıf öğretmen adayı Şeyma ise

“3 boyutun üstündeki boyutları algılayabilmektir. 4. boyutu mesela. Göremeyiz ama düşünebiliriz. Zaten o yüzden uzamsal düşünmedir.” açıklamasıyla “düşünme” kavramına vurgu yapmıştır.

Uzamsal düşünmeyi duyduğunu ifade eden öğretmen adaylarından Orhan, “Geometri ile ilgili bir şey ama bilmiyorum. Geometri sorularını çözebilmeyle ilgili sanırım.” açıklamasıyla kısmen doğru ancak yetersiz bir açıklamada bulunmuştur. 4. sınıf öğretmen adayı Maksude ise “Bir cismin 3 boyutlu şekilde görülmeyen yüzünü de mesela sağdan, soldan, arkadan düşünebilmek demektir. Görsel zeka ile ilişkilidir.” şeklinde uzamsal düşünmeyi bildiğini gösteren açıklamada bulunmuştur.

Görüldüğü gibi programda yer alan yeterliklerde söz edilen uzamsal düşünme kavramı ile ilgili öğretmen adaylarının bilgileri oldukça yetersizdir. 4. sınıf öğretmen adaylarında dahi doğru yanıt veren az öğretmen adayının olması programın yeterliklerinin önemsenmediği veya yeterince dikkate alınmadığı yorumuna sebep olabilir.

Testin 2. sorusunda ise özel amaçlar kapsamında yer alan “matematiksel okuryazarlık” kavramı yer almaktadır. Bu kavrama ilişkin öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtların dağılımı Tablo 151’de verilmiştir.

Tablo 151

Matematiksel okuryazarlığa yönelik açıklamaların kategorilere göre dağılımı

	Tamamen Doğru	Büyük Ölçüde Doğru	Kısmen Doğru	Yetersiz	Yanlış / Boş
1. Sınıf	0 (%0)	0 (%0)	4 (%10)	16 (%40)	20 (%50)
2. Sınıf	1 (%2,5)	4 (%10)	2 (%5)	13 (%32,5)	20 (%50)
3. Sınıf	0 (%0)	1 (%2,5)	1 (%2,5)	12 (%30)	26 (%65)
4. Sınıf	3 (%7,5)	4 (%10)	1 (%2,5)	20 (%50)	12 (%30)
Toplam	4 (%2,5)	9 (%5,625)	8 (%5)	61 (%38,125)	78 (%48,75)

Tablodan da görüldüğü gibi öğretmen adaylarının matematiksel okuryazarlıkla ilgili bilgileri oldukça yetersizdir. 4.sınıf öğretmen adaylarında dahi kavramı büyük ölçüde veya tamamen doğru açıklayan sadece 7 kişi olmuştur. Öğretmen adaylarının yanlış yanıtları incelenmiş ve aşağıda yer alan kategoriler oluşturulmuştur.

- Matematiksel *ifadelerin* anlaşılabilmesidir. (13 kişi)
- Matematiksel *kavramları/ terimleri* anlayabilme veya yazabilmedir. (11 kişi)
- *Matematiği* anlamak, yorumlamak, kavramaktır. (8 kişi)
- Matematik sorularını (matematik problemlerini) anlamak ve çözmektir. (6 kişi)

- Matematiksel dildeki ifadeleri / terimleri cümlelere / sözel ifadelere / Türkçe'ye çevirmektir. (5 kişi)
- Matematik işlemlerini anlayıp çözmektir. (5 kişi)
- Cebirsel ifadeleri/denklemeleri okuyup yazmaktır. (4 kişi)
- Matematik alanında bilgi sahibi olmak, kendini geliştirmek ve matematik bilgisinin yüksek olmasıdır. (3 kişi)
- Temel/basit düzeyde matematiksel bilgilerin bilinmesidir. (3 kişi)
- Matematik alanında tüm gelişmeleri takip etmektir. (3 kişi)
- Bilmiyorum/Yanıt yok (6 kişi)
- Diğer yanıtlar (11 kişi)

Öğretmen adaylarının yanıtları incelendiğinde günlük hayatta okumayı ve yazmayı bilenler için kullanılan okuryazar kavramıyla matematiği ilişkilendirmeye çalıştıkları görülmektedir. 4.sınıf öğretmen adayı Şeyma ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir:

Ş: Bence matematikle ilgili bir şeyler okuduğu zaman onu anlayabilmedir.

A: Matematikle ilgili şeyler derken nelerden bahsediyorsun?

Ş: İlla soru değil. Soruyu çözmek değil. Matematiksel dili anlamak veya neyden bahsediyor onu anlamak.

A: Matematiksel dili anlamak mı amaçlanıyor o zaman programla?

Ş: Programda matematiğin okunması daha doğrusu araştırılması amaçlanıyor bence.

Şeyma'nın matematik okuryazarlığını matematiğin okunması ve araştırılması olarak ele aldığı görülmektedir. Diğer adayların da okuma üzerinde durduğu görülmüştür. 3. sınıf öğretmen adayı Orhan, "Matematik ile ilgili bilimsel yazı, kitap, dergi okumaktır." şeklinde 2.sınıf öğretmen adayı Çise ise "Grafikleri okuma ve anlamadır. Matematiksel tanımları da okuyup anlayabilmektir." şeklinde açıklamada bulunmuştur. Matematiksel okuryazarlığın bir boyutu olan matematiksel dili anlamayı da ifade eden öğretmen adayları mevcuttur. Bu öğretmen adaylarından Maksude, "Matematiksel dille ilgili olabilir. Mesela her, en az bir, ancak ve ancak gibi sembollerini bilmektir. Gerçi bunları ilköğretim çocukları bilmez ama mesela doğal sayı derken N olduğunu, cebirsel ifadelerde neyin nasıl yazıldığını ve okunduğunu bilme gibi amaçlardır." açıklamasında bulunmuştur. Öğretmen adaylarının yanıtlarına bakıldığında matematiksel okuryazarlığın, "matematiği günlük hayatta karşılaşılan sorunlarda ve karar verme süreçlerinde kullanma" anlamına ilişkin açıklamada bulunan sadece 4 öğretmen adayı olmuştur. Bu sonuçlardan da öğretmen adaylarının programın özel amaçlarında yer almasına rağmen matematiksel okuryazarlık kavramını büyük ölçüde bilmediği yorumu yapılabilir.

Testin 3. sorusunda yine özel amaçlarda yer alan ve öğrencilerde geliştirilmesi beklenen “üstbilişsel bilgi” kavramı sorulmuştur. Bu kavrama ilişkin öğretmen adaylarının yanıtlarının dağılımı Tablo 152’de sunulmuştur.

Tablo 152

Üstbilişsel bilgiye yönelik açıklamaların kategorilere göre dağılımı

	Tamamen Doğru	Büyük Ölçüde Doğru	Kısmen Doğru	Yetersiz	Yanlış / Boş
1. Sınıf	0 (%0)	0 (%0)	1 (%2,5)	2 (%5)	37 (%92,5)
2. Sınıf	1 (%2,5)	0 (%0)	3 (%7,5)	0 (%0)	36 (%90)
3. Sınıf	1 (%2,5)	0 (%0)	1 (%2,5)	1 (%2,5)	37 (%92,5)
4. Sınıf	17 (%42,5)	4 (%10)	0 (%0)	3 (%7,5)	16 (%40)
Toplam	19 (%11,875)	4 (%2,5)	5 (%3,125)	6 (%3,75)	126 (%78,75)

Tablo 152’de görüldüğü gibi ilk 3 sınıf düzeyinde öğretmen adaylarının neredeyse tamamı kavramı açıklayamamıştır. 4. sınıf öğretmen adaylarında ise büyük ölçüde veya tamamen doğru yanıtlayan öğretmen adaylarının %50’den fazla olduğu görülmektedir. Bu ciddi farklılığın 4.sınıfların hazırlandığı KPSS nedeni ile oluştuğu ön görülmüş ve görüşmelerde bu durum sorulmuştur. 4.sınıf öğretmen adayı Şeyma ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir:

Ş: Bilgi, kavrama gibi basamaklar var ya kavramanın üstü üstbilişsel oluyor zaten. Uygulama analiz falan. İşte o bilgileri geliştirmektir. Daha çok yaparak yaşayarak göstererek, yani en azından tartışma yaparken bile çocuğun üstbilişsel becerilerini geliştiriyoruz. Çocuğun beynini kullanmasını sağlıyoruz.

A: Bloom taksonomisindeki kavrama üstü becerilerdir diyorsun yani. Daha önce bu kavramı duymuş muydun?

Ş: Aslında duymadım. Üst düzey becerilerden aklıma geldi. Metabilişsel bilgi vardı bu sene öğrendiğim.

A: Üstbilişsel bilgi ile metabilişsel bilgi aynı anlama geliyor. Metabilişsel bilgi neydi?

Ş: Aa öyle mi? Ama o öğrenmeyi öğrenmek gibi bir şey. Neyi bilip bilmediklerini fark etmek yönetmek ya da.

A: Bu kavramı hangi derste duydun?

Ş: Aslında dershanede duydum. Testlerde çıkıyor.

Görüldüğü gibi öğretmen adayı bu kavramı metabilişsel bilgi olarak dershanede duyduğunu açıklamıştır. Bu durumun aynısı diğer 4.sınıf öğretmen adayı Maksudde’de gerçekleşmiştir. O da ilk önce, “Analiz, sentez gibi düzeylerde bilgi bilme. Aslında o düzeye çocuklar çıkamaz ama. Bir daha bakayım. Çocuğun problemi anlayabilmesi

sanırım.” şeklinde hatalı bir açıklama yapmışken araştırmacının bir diğer isminin metabilşsel bilgi olduğunu açıklamasıyla “O zaman çocuğun kendi stratejisi, çalışma tarzı, kendisinin daha iyi nasıl algılayabileceğiyle yani nasılla alakalı düşüncedir.” şeklinde ifadede bulunmuştur.

126 yanlış yanıt incelendiğinde ve kategorilere ayrıldığında üstbilişsel bilgi denilince akıllara gelen ifadeler şunlardır:

- Üst düzey bilgiler öğrenme, Analiz-Sentez gibi seviyeler (24 kişi)
- Soyut kavramları anlama ve yorumlama/Soyut düşünme/Sadece zihinle ulaşılan bilgi (15 kişi)
- Bilginin üzerine bilgi ekleme/daha detaylı öğrenme/Yeni bilgiler elde etme (11 kişi)
- Ön bilgiler/İleride öğreneceği bilgilere temel olacak bilgiler (6 kişi)
- Farklı bakış açısı kazandıran bilgi, vizyoner düşünme (4 kişi)
- Yaratıcı düşünme/Yaratıcılık sonucu oluşan bilgi (4 kişi)
- Çok işlemli soruları çözebilme / Çok konunun bir arada olduğu soruları çözme/Zor ve karmaşık soruların bilgisi (4 kişi)
- Öğrenilen bilgiyi kendi cümleleriyle yorumlama, açıklama (3 kişi)
- Hızlı çözüm üretme/ Hızlı işlem yapma (3 kişi)
- Bildiklerini günlük hayata uygulama / Günlük hayatta kullanılan bilgiler (3 kişi)
- Düşünme becerisini geliştiren bilgiler (3 kişi)
- Beynin derinliklerindeki bilgiler/Gizli bilgiler (3 kişi)
- Uzamsal düşünme/3 boyutlu hayal edebilme (3 kişi)
- Bilmiyorum/ Boş (26 kişi)
- Diğer (14 kişi)

Yanlış yanıtlar incelendiğinde en sık verilen yanıtın “üst düzey bilgiler/beceriler” ya da “analiz, sentez gibi beceriler” olduğu görülmüştür. Bu kategoride ele alınan 24 öğretmen adayından 10 tanesi 4. sınıfta öğrenim görmektedir. Görüşme yapılan 4.sınıf öğretmen adayları Şeyma ve Maksude’nin de ilk önce Bloom taksonomisine atıf yaptıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarının bir kısmı “bilgi” kelimesine bazıları ise “üst” kelimesine odaklanarak çıkarımlarda bulunmuştur. 2.sınıf öğretmen adayı Halit, “Üst dönemlerdeki bilgiler sanırım.” derken bir diğer öğrenci Simre ise, “Öğrenci seviyesinin üstünde bilgiler geliyor aklıma.” cevabını vermiştir.

Programın giriş kısmında yer alan yeterlikler ve özel amaçlarla ilgili olan program testinin ilk 3 sorusuna ait yanıtların kategorilere göre dağılımı yukarıda verilmişti. Bu soruların 4 üzerinden verilen ortalamaları ve üç sorunun toplam puanına ait ortalamalar Tablo 153'te verilmiştir.

Tablo 153

PBT ilk üç soru ortalamaları (4'er puan üzerinden)

	1. Sınıf Ortalama	2. Sınıf Ortalama	3. Sınıf Ortalama	4. Sınıf Ortalama	Tüm Örneklem Ortalama
Uzamsal Düşünme	0,10	0,425	1,40	1,625	0,8875
Matematiksel Okuryazarlık	0,55	0,85	0,425	1,15	0,7438
Üstbilişsel Bilgi	0,10	0,25	0,275	2,075	0,675
3 Sorunun Toplam Ortalaması (12 puan)	0,75	1,525	2,10	4,85	2,3063

Her üç soruda da ortalamaların en yüksek olduğu sınıf 4. sınıf olmasına rağmen tüm örneklem ortalaması hiçbir soruda 4 puan üzerinden 1'i dahi bulmamıştır. Bu nedenle kavramların bilinme oranının oldukça düşük olduğu söylenebilir. Ayrıca 4. sınıflarda üç sorunun toplam puanının 4,85 olup diğer sınıf düzeylerine göre yüksek olmasının nedeninin KPSS sürecinden kaynaklı olduğu yorumu yapılabilir. 3. sınıfta yer alan “özel öğretim yöntemleri” dersinde öğretim programı inceleniyor olsa da ortalamaların düşüklüğü “programın özel amaçları” gibi bazı bölümlerin üzerinde yeterince durulmadığını düşündürmektedir.

4.7.2. Sayılar ve işlemler öğrenme alanında kullanılan materyal bilgisine yönelik bulgular

PAB'ın program bilgisi kapsamında öğretmen adaylarının hangi konularda hangi materyalleri kullanacağı bilgisi de önem kazanmaktadır. Testin 4.sorusunda öğretmen adaylarına, 6 tane materyal ismi (onluk taban blokları, Erotesthenes kalburu, simetri aynası, şeffaf kesir kartları, kesir çubukları, sayma pulları) verilip bu materyallerin hangi konularda kullanılabileceği sorulmuştur. Soru yapılandırılmış grid tarzında sorularak her konu için birden fazla materyal yazılabilmesine olanak sağlanmıştır.

Her bir konu için kullanılabilecek olan materyalleri öğretmen adaylarının seçme sayıları Tablo 154'te verilmiştir. Bazı konular için birden fazla materyal yazılabileceği için veya bazı materyaller hiç yazılmayabileceği için her bir konuya ait toplam, öğrenci sayısının toplamıyla örtüşmeyebilmektedir. Ayrıca parantez içinde verilen öğrenci yüzdeleri birler basamağına yuvarlanarak yazılmıştır.

Tablo 154

Konulara göre materyallerin belirtilme sayıları ve belirten öğretmen adaylarının oranları

KONULAR	MATERYALLER	1.Sınıf	2.Sınıf	3.Sınıf	4.Sınıf	TOPLAM
Asal Sayı	Erotesthenes K.	13 (%33)	21 (%53)	26 (%65)	34 (%85)	94 (%59)
Birim	Onluk Taban Blok.	10 (%25)	3 (%8)	3 (%8)	3 (%8)	19 (%12)
Kesirlerde	Şeffaf Kesir Kart.	27 (%68)	29 (%73)	22 (%55)	18 (%45)	96 (%60)
Sıralama	Kesir Çubukları	34 (%85)	33 (%83)	35 (%88)	33 (%83)	135 (%85)
Denk Kesir	Onluk Taban Blok.	4 (%10)	5 (%13)	2 (%5)	7 (%18)	18 (%12)
	Şeffaf Kesir Kart.	18 (%45)	26 (%65)	27 (%68)	25 (%63)	96 (%60)
	Kesir Çubukları	21 (%53)	29 (%73)	27 (%68)	23 (%58)	100 (%63)
Kesirlerde Çarpma	Şeffaf Kesir Kart.	23 (%58)	22 (%55)	31 (%78)	30 (%75)	106 (%66)
Ondalık Sayılarda Top. Çık.	Onluk Taban Blok.	32 (%80)	29 (%73)	29 (%73)	30 (%75)	120 (%75)
Tam Sayılarda Top. Çık.	Sayma Pulları	36 (%90)	35 (%88)	39 (%98)	35 (%88)	145 (%91)
Mutlak Değer	Simetri Aynası	21 (%53)	26 (%65)	29 (%73)	35 (%88)	111 (%69)
Tam Kare Sayılar	Onluk Taban Blok.	1 (%3)	9 (%23)	9 (%23)	8 (%20)	27 (%17)
	Sayma Pulları	15 (%38)	18 (%45)	8 (%20)	8 (%20)	49 (%31)

Tablo 154'ten elde edilen sonuçlar şu şekilde sıralanabilir:

- Asal sayıların işlenmesinde kullanılabilecek olan ve öğretim programında da yer alan Erotesthenes kalburunu öğrencilerin %59'unun seçmiş olduğu görülmektedir. Sınıf seviyesiyle birlikte seçenlerin sayısında artış dikkat çekmektedir. Yapılan görüşmelerde de 1. sınıf ve 2. sınıf öğretmen adaylarının materyali daha önce duymadıkları anlaşılmıştır. Ayrıca yukarıdaki tabloda belirtilmemiş olsa da öğretmen adaylarının %34'ünün asal sayı konusu için “sayma pulları” materyalinin kullanılabileceğini belirttikleri görülmüştür. Sayma pullarını paylaşma esaslı bir etkinlikle kullanarak hangi sayıdaki pulların 2, 3, 5 vb. kişi sayılarıyla paylaştırılamayacağını araştırılması asal sayı kavramına götürebilir. Bu düşünceyle “Erotesthenes kalburu” dışında 2. seçeneğin sayma pulları olması anlaşılabilir.
- Birim kesirlerin sıralanması ile ilgili kazanımlarda kullanılabilecek üç materyalden şeffaf kesir kartları öğretmen adaylarının %60'ı tarafından seçilmiştir. En düşük oranın 4. sınıflarda olduğu görülmüştür. 4. sınıf öğretmen adaylarından Şeyma, “Kesir çubuklarında daha net görülür birim kesirler. Şeffaf kesir kartlarına göre daha işlevseldir bence.” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Bu açıklamayla birlikte değerlendirildiğinde 4. sınıfların işlevsellik bağlamında ele alıp materyali daha az seçtikleri düşünülebilir. Kesir çubuklarının seçilmesine

ilişkin oranlar her sınıf düzeyinde %80'in üzerinde olmuştur. $1/1$, $1/10$, $1/100$ ve $1/1000$ birim kesirlerini karşılaştırma açısından en uygun materyal olan onluk taban bloklarının ise sadece 19 öğretmen adayı tarafından seçildiği görülmektedir. Oldukça düşük oran bu oran materyali yeterince tanımayan 1. sınıflarda en yüksek olmuştur. Daha çok basamak değeri, ondalık sayılar gibi konularda kullanılan onluk taban bloklarının kesirlerde nasıl kullanılabileceği ilk etapta akla gelmemiş olabilir.

- Denk kesir konusu için isminde “kesir” geçen iki materyalin de seçilme oranı yaklaşık %60 olmuştur. Onluk taban blokları ise yine düşük oranda (%12) seçilmiştir. Halbuki $2/10$ ve $20/100$ gibi kesirler onluk taban blokları ile kolaylıkla karşılaştırılabilir ve denkliği gösterilebilir. Denk kesirlerin öğretiminde en yüksek orandaki 3. yanıt “simetri aynası” olmuştur. Tabloda belirtilmemiş olsa da öğretmen adaylarının %18,75'i simetri aynasının kullanılabileceğini belirtmiştir. Aynanın her iki tarafına denk kesirler modellenirse görüntüler karşılaştırılıp denkliği gösterilebilir ancak görüntü şeklin simetrisini içerdiğinden çizimin ona göre yapılması gerekir. Kullanım açısından bu gibi dezavantajları söz konusudur.
- İki kesrin çarpımını bulurken kullanılması gereken materyal şeffaf kesir kartlarıdır. İlk iki sınıf düzeyinde bu materyali seçenlerin oranı yaklaşık %55 iken 3. ve 4. sınıflarda %75 dolaylarında olmuştur. Öğretmen adaylarının ortalama %66'sı doğru bir tercihte bulunmuştur. Bu materyale en yakın yanıt incelendiğinde “kesir çubukları” %55 oranla ilk sırada yer almaktadır. Görüşme sırasında 4. sınıf öğretmen adayı Maksude'ye kesir çubuklarının kesirlerde çarpma öğretiminde nasıl kullanılabileceği sorulmuştur. Maksude, iki kesrin çarpımında kullanılmayacağını ama bir doğal sayı ile bir kesrin çarpımında kullanılabileceğini belirtmiştir. 1. ve 2. sınıf düzeylerindeki öğretmen adaylarının ise materyalleri tanımadıkları “kesir” kelimesinden yola çıkarak seçtikleri anlaşılmıştır.
- Ondalık sayılarda toplama çıkarma konusu için seçenekler arasında kullanılabilecek en uygun materyal onluk taban bloklarıdır. Öğretmen adaylarının %75'inin bu materyali seçtikleri görülmektedir. 2.sırada seçtikleri materyal ise %40 ile sayma pulları olmuştur. Ancak sayma pullarının ondalık sayılarda işlemler konusunda bir işlevi bulunmamaktadır.
- Tam sayılarda işlemlerin yapılabildiği, ders kitaplarında ve öğretim programında söz edilen sayma pulları öğretmen adaylarının en yüksek oranda seçtikleri materyal olmuştur. Tüm adayların %91'i doğru seçenekte bulunmuştur. En

yüksek oranın 3.sınıflarda olması özel öğretim yöntemleri ile ilişkilendirilebilir. Sayma pullarının özel öğretim yöntemleri dersinde kullanıldığını görüşme yapılan öğretmen adayları da belirtmiştir.

- Mutlak değer kavramının öğretiminde sayının sıfıra olan uzaklığını bulurken simetri aynası kullanılabilmektedir. Öğretmen adaylarının %69'u simetri aynası materyalini seçmiştir. Sınıf düzeyinin artmasıyla birlikte doğru yanıt oranının da arttığı görülmektedir.
- Tam kare sayıların öğretiminde kullanılabilecek materyaller konusunda öğretmen adaylarının zorluk çektiği görülmektedir. Onluk taban blokları ve sayma pullarının her ikisinin de tercih oranı %35'in altında kalmıştır. Görüşme yapılan öğretmen adaylarından sadece bir tanesi (4.sınıf – Maksude) onluk taban bloklarının nasıl kullanılabileceğini açıklayabilmiştir.

Öğretmen adaylarının materyallerle ilgili vermiş oldukları yanıtlar yapılandırılmış grid puanlama yöntemi ile 0 ile 10 puan arasında puanlanmıştır (Detaylar, “veri çözümleme teknikleri” kısmında verilmiştir.). Puanlamalara göre öğrenciler eşit aralıklı dört kategoriye ayrılmıştır. Tablo 155 bu kategorilerde bulunan her bir sınıf düzeyindeki öğrenci sayını göstermektedir.

Tablo 155

Materyal belirleme sorusuna ilişkin puanların dağılımı

	10 ile 7,5 puan arası	7,5 ile 5 puan arası	5 ile 2,5 puan arası	2,5 ile 0 puan arası
1. Sınıf	1 (%2,5)	16 (%40)	13 (%32,5)	10 (%25)
2. Sınıf	1 (%2,5)	18 (%45)	18 (%45)	3 (%7,5)
3. Sınıf	6 (%15)	24 (%60)	9 (%22,5)	1 (%2,5)
4. Sınıf	8 (%20)	24 (%60)	8 (%20)	0 (%0)
Toplam	16 (%10)	82 (%51,25)	48 (%30)	14 (%8,75)

Tablo 155 incelendiğinde sınıf seviyesi arttıkça materyal bilgisine ilişkin yüksek puan alanların sayısının arttığı görülmektedir. Bu durumu lisans öğretiminin materyal bilgisi bağlamında etkililiğini göstermektedir. Ancak “öğretim teknolojileri materyal tasarımı” dersinin lisans öğretimi 2. sınıfta verildiği düşünüldüğünde (test bahar dönemi sonunda uygulanmıştır.) 2. sınıf öğretmen adaylarının daha yüksek bir doğruluk oranına sahip olması beklenmektedir. Ancak 1. sınıf oranlarına benzer oranlarda olması ve 3. ve 4. sınıflara oranla daha düşük ortalamaya sahip olması ilginç bir sonuç olarak görülebilir. Bu durum görüşme yapılan 2. sınıf öğretmen adaylarına sorulduğunda Halit, “Biz materyal dersinde V diyagramı, kavram haritası gibi şeyler gördük. Sunumlarla geçti. Öyle çok materyal görmedik.” açıklamasında bulunmuştur. Çise ise, “Biz materyal dersinde hiçbir materyali tahtada veya somut olarak görmedik hocam. İsmi duyduğumuz şeyin nasıl bir

şey olduğunu bilmiyoruz.” yanıtını vermiştir. 3. sınıf öğretmen adaylarından Simre ise, “Materyalleri daha çok özel öğretim yöntemleri dersinde öğrendik. Ama bazılarının kullanımını bilmiyorum.” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Öğretmen adaylarının açıklamalarına bakıldığında “öğretim teknolojileri ve materyal tasarımı” dersinde matematik öğretimine yönelik olan ve programda yer alan materyallerin yeterince üzerinde durulmadığı anlaşılmaktadır.

4.7.3. Öğretim programında hangi bölünebilme kurallarının yer aldığı bilgisine ilişkin bulgular

Testin 5. sorusunda öğretmen adaylarına programda hangi bölünebilme kurallarının olduğu sorulmuştur. Programda 2, 3, 4, 5, 6, 9 ve 10 ile bölünebilme kuralları yer almaktadır. Öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtlar her fazla tercihte 1 puan kırılarak 7 puan üzerinden dört kategoriye ayrılmıştır. Her bir kategoriye ait öğretmen adaylarının dağılımı Tablo 156’da verilmiştir.

Tablo 156

PBT 5. soruya ilişkin ilişkin puanların dağılımı

	7-6 puan arası	5-4 puan arası	3-2 puan arası	1-0 puan arası
1. Sınıf	7 (%17,5)	27 (%67,5)	5 (%12,5)	1 (%2,5)
2. Sınıf	4 (%10)	28 (%70)	7 (%17,5)	1 (%2,5)
3. Sınıf	12 (%30)	19 (%47,5)	8 (%20)	1 (%2,5)
4. Sınıf	13 (%32,5)	17 (%42,5)	5 (%12,5)	5 (%12,5)
Toplam	36 (%22,5)	91 (%56,875)	25 (%15,625)	8 (%5)

Tablo 156 incelendiğinde 3. ve 4. sınıf öğretmen adaylarının daha yüksek oranda doğru yanıt verdikleri görülmektedir. Ancak sınıf seviyesiyle birlikte artış söz konusu olmamıştır. Genele bakıldığında ise öğretmen adaylarının sadece %22,5’u 7 veya 6 puan alabilmiştir. Öğretim programının 6.sınıf düzeyinde yer alan bölünebilme kurallarıyla ilgili kazanımın detaylarıyla ilgili öğretmen adaylarının yeterli bilgisinin olmadığı anlaşılmaktadır. Programda olmamasına rağmen öğretmen adaylarınca en çok işaretlenen bölünebilme kuralları ise sırasıyla 7, 8 ve 11 ile bölünebilme kuralları olmuştur.

4.7.4. Alt öğrenme alanlarının ve çeşitli kazanımların sınıf düzeyleri bilgisine yönelik bulgular

Testin 6. sorusunda öğretmen adaylarına 14 tane alt öğrenme alanı verilerek hangi sınıf düzeylerinde yer aldığını belirtmeleri istenmiştir. Benzer şekilde 11. soruda öğretmen adaylarına çarpanlar ve katlara ilişkin üç, yüzdelere ilişkin dört, oran ve orantıya yönelik ve tam sayılara yönelik altışar kazanım verilip bu kazanımların sınıf düzeyleri sorulmuştur. Bu şekilde öğretmen adaylarının programda yer alan çeşitli konuların öğretim seviyesine

göre nasıl ilerlemesi gerektiğinin bilgisine ne derece sahip oldukları yoklanmıştır. İnceleme yapılırken öğretim programında yer alan tablolar ve listelenen kazanımlar baz alınmıştır. 6. soruda yer alan 14 alt öğrenme alanı için işaretlenmesi gereken 19 tane sınıf düzeyi mevcuttur. Doğal sayılarda işlemler, kesirlerde işlemler ve ondalık gösterim 5. ve 6. sınıf düzeylerinde; yüzdeler 5. ve 7. sınıf düzeylerinde; çarpanlar ve katlar 6. ve 8.sınıf düzeylerinde; kümeler, oran ve tam sayılar 6. sınıf; tam sayılarda işlemler, rasyonel sayılar, rasyonel sayılarda işlemler, oran ve orantı alt öğrenme alanları 7.sınıf; üslü ifadeler ve kareköklü ifadeler alt öğrenme alanları ise 8. sınıf düzeyinde ele alınmaktadır. Öğretmen adaylarının bu sınıf düzeylerini doğru belirtme sayıları incelenip ortalamalar Tablo 157’de sunulmuştur.

Tablo 157

PBT 6. soru ortalamaları (19 madde üzerinden)

1. Sınıf Ortalaması	2. Sınıf Ortalaması	3. Sınıf Ortalaması	4. Sınıf Ortalaması	Tüm Örneklem Ortalaması
5,25	4,95	7,65	10,025	6,96875

Öğretmen adaylarının işaretlemesi gereken 19 madde üzerinden ortalamalarının yaklaşık olarak 7 olduğu görülmektedir. En yüksek ortalama 4. sınıf düzeyinde olup bu olumlu bir gelişme olarak değerlendirilse de alt öğrenme alanlarının bulunduğu sınıf düzeylerinin yeterince bilinmediği anlaşılmaktadır. Doğru sayılarına göre frekanslar incelendiğinde ise sonuç Tablo 158’deki gibi olmuştur.

Tablo 158

PBT 6. soru doğru sayılarının dağılımı (19 maddeden)

	19-15 doğru	14-10 doğru	9-5 doğru	4-0 doğru
1. Sınıf	0 (%0)	4 (%10)	21 (%52,5)	15 (%37,5)
2. Sınıf	0 (%0)	2 (%5)	21 (%52,5)	17 (%42,5)
3. Sınıf	0 (%0)	10 (%25)	24 (%60)	6 (%15)
4. Sınıf	7 (%17,5)	13 (%32,5)	17 (%42,5)	3 (%7,5)
Toplam	7 (%4,375)	29 (%18,125)	83 (%51,875)	41 (%25,625)

15 doğru ve üzerinde yapan sadece 7 öğretmen adayı olduğu ve bu öğretmen adaylarının tamamının son sınıfta okuduğu görülmektedir. Ayrıca son sınıf öğretmen adaylarının yarısının 10 doğru ve üzerinde olduğu göze çarpmaktadır. Bu oran diğer sınıf düzeylerindeki 10 ve üzeri doğru yapanların oranlarının toplamından da fazladır. Yapılan görüşmelerde de özellikle alt sınıf düzeylerindeki öğrencilerin sadece verdikleri özel derslerden veya lisans dışındaki sahip oldukları tecrübelerden yola çıkarak sınıf düzeyleri ile ilgili bilgilerinin olduğu anlaşılmıştır. 2. sınıf öğretmen adayı Halit, “Ben gönüllü olarak

bazı okullarda ders dinlemeye gidiyorum. 8. sınıflar falan ne işliyor oradan biliyorum. Ama onun dışında hangi sınıf düzeyinde ne var incelemedim.” açıklamasında bulunmuştur. 3. sınıf öğretmen adayı Orhan da benzer şekilde, “Benim kardeşim beşinci sınıfa gidiyor. Onun yaptığı ödevlerden bazı konuları öğrendiklerini biliyorum. Ama okuldaki derslerde özellikle programdan hangi sınıf düzeyinde hangi konu var incelemedik. Özel öğretim yöntemleri dersinde de yapmadık öyle bir şey.” yanıtını vermiştir.

Testin 11. sorusunda öğretmen adaylarına çarpanlar ve katlar, yüzdeler, oran-orantı ve tam sayılar alt öğrenme alanlarına ilişkin çeşitli kazanımların bulunduğu sınıf seviyeleri sorulmuştur. Tablo 159’da sınıf düzeyine göre doğru sayılarının dağılımı verilmiştir.

Tablo 159

PBT 11. soru doğru sayılarının dağılımı (19 kazanım)

	19-15 doğru	14-10 doğru	9-5 doğru	4-0 doğru
1. Sınıf	0 (%0)	5 (%12,5)	25 (%62,5)	10 (%25)
2. Sınıf	0 (%0)	8 (%20)	21 (%52,5)	11 (%27,5)
3. Sınıf	0 (%0)	13 (%32,5)	23 (%57,5)	4 (%10)
4. Sınıf	5 (%12,5)	17 (%42,5)	17 (%42,5)	1 (%2,5)
Toplam	5 (%3,125)	43 (%26,875)	86 (%53,75)	26 (%16,25)

Tablo 159 incelendiğinde 19 kazanımda 10 ve üzeri doğru yapan öğretmen oranının %30 olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının %16,25’lik kısmı ise 4 doğru veya daha az doğru yapabilmıştır. 15 doğrunun üzerinde olan 5 öğretmen adayının tamamının son sınıf düzeyinde olması dikkat çekmektedir. Ayrıca sadece 4. sınıf öğretmen adaylarında 10 ve üzeri doğru yapanların oranı %50’yi geçmiştir. Bu sonuç ortalamaların verildiği Tablo 160’ta görülmektedir.

Tablo 160

PBT 11. soru ortalamaları (19 kazanım)

1. Sınıf Ortalaması	2. Sınıf Ortalaması	3. Sınıf Ortalaması	4. Sınıf Ortalaması	Tüm Örneklem Ortalaması
6,375	6,375	8,025	10,2	7,74375

Ortalamalarda 4. sınıf öğretmen adaylarının daha çok doğru yaptıkları görülmüştür. Ancak tüm grubun ortalaması 19 kazanımda yaklaşık 7,74 olarak bulunmuştur. Bu ortalamanın oldukça düşük olduğu söylenebilir. Yapılan görüşmelerde sekiz öğretmen adayından hiçbirinin tam olarak programın kazanımlarını ve sınıf düzeylerini incelemedikleri anlaşılmıştır. Sınıf düzeylerini bazı öğretmen adaylarının kendi öğrenim hayatını düşünerek işaretledikleri, bazılarının kardeşi, akrabası veya özel ders verdiği farklı bir öğrencinin derslerinden yola çıkarak işaretledikleri, bazılarının ise hiçbir fikri

olmamasına rağmen tahmini olarak işaretlemeler yaptıkları anlaşılmıştır. Görüşme yapılan 4. sınıf öğretmen adayı Şeyma ile araştırmacının arasında şu diyalog geçmiştir:

A: Sayı kümelerinin öğretiminde sınıf seviyelerine göre nasıl değişimler olmaktadır?

Ş: Doğal sayılar 5. sınıfta yer alıyor. Mesela “9 basamaklı sayıları okur ve yazar” gibi kazanımlar var. 5. sınıf kazanımlarıyla ilgili ödevim var bu hafta. O yüzden onu iyi biliyorum. Ama diğer sınıfları pek bilmiyorum. Özel derslerde verdiğim kadarını biliyorum. Mesela tam sayıları 6. sınıfta görüyor. Onu özel dersten biliyorum.

A: Tam sayılarda dört işlem de 6. sınıf düzeyinde mi görülüyor?

Ş: Onlar da 6. sınıftadır.

A: 7. sınıfa tam sayılarla ilgili bir şey kalıyor mu?

Ş: Kalmıyor sanırım.

A: Peki ya rasyonel sayılar?

Ş: Onlar da 6.sınıfta. İşlemleriyle birlikte. İrrasyonellerden emin değilim ama 7 veya 8’dir.

A: Peki ya karmaşık sayılar?

Ş: O 8’dedir. Ben kendim 8. sınıfta iken gördüm diye hatırlıyorum.

Şeyma ile araştırmacı arasında geçen diyalogdan da anlaşıldığı üzere 4. sınıf öğretmen adaylarında dahi programın sadece belirli bir kısmını bilen veya kendi öğrenim veya öğretim (özel ders vb.) tecrübelerinden yola çıkarak sınıf düzeylerini belirtenlerin olduğu anlaşılmıştır. Sadece sayı kümelerinde değil diğer alt öğrenme alanları veya kazanımlarda da zorluk yaşandığı görülmüştür. Tüm veriler değerlendirildiğinde en sık yapılan hatalar aşağıda sıralanmıştır.

- Kesirlerde işlemler alt öğrenme alanının 5., 6. ve 7. sınıf düzeylerinde yer aldığını belirten çok sayıda öğretmen adayı mevcuttur. Bu öğretmen adaylarından biri olan Çise görüşme sırasında, “Kesirler 7.sınıfta öğretiliyor. Kardeşim 7. sınıfta okuyor ve çözüyor. Oradan biliyorum. Geçen sene de görmüştü basit düzeyde. Problemler falan vardı geçen sene. Hatta ilkokulda da var, paydaları eşit sayılarda toplama gibi. Hatta çeyrek, yarım gibi kesirler var.” açıklamasını yapmıştır. Bir başka öğretmen adayı Halit de kesirlerin 7. sınıfta detaylı olarak işlendiğini belirtmiştir. Bu açıklamalardan yola çıkarak 7. sınıf düzeyinde rasyonel sayılarda işlemler alt öğrenme alanında yer alan işlemlerle kesirlerde işlemlerin karıştırılabildiği anlaşılmıştır.
- Çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanını öğretmen adaylarının büyük bir kısmı sadece 6.sınıf olarak işaretlemiştir. Yapılan görüşmelerde tüm öğretmen adayları tarafından EBOB ve EKOK gibi konuların 6.sınıfta öğretildiği ifade edilmiştir.

Daha önceki programlarında 6. sınıfta olan bu konunun yeni programda 8.sınıfta yer aldığının bilinmediği anlaşılmıştır. Öğretmenlik uygulaması dersine giden 4.sınıf öğretmen adaylarının ise EBOB, EKOK dahil tüm konuların 6. sınıfta verildiğini ancak 8.sınıfta tekrar edilip problemler üzerinde durulduğunu belirttikleri görülmüştür.

- Tam sayılar, rasyonel sayılar ve işlemleri ile ilgili öğretmen adaylarının 6. sınıftan 8. sınıfa kadar farklı sınıf düzeylerinde işaretlemelerinin olduğu görülmüştür. 4. sınıf öğretmen adayı Şeyma ile yapılan ve yukarıda bir kısmı yer alan diyalogdan da anlaşılabilirdiği gibi diğer sayı kümeleriyle ilgili de yanlış yanıtlar yer alabilmektedir. Şeyma, karmaşık sayıların 8. sınıfta verildiğini ifade etmiştir. Halbuki daha önceki öğretim programlarında da karmaşık sayılar ortaokul kademesinde yer almamıştır.
- Oran ile oran ve orantı alt öğrenme alanlarıyla ilgili de öğretmen adaylarının yanlışları olmuştur. Genel olarak orana ve doğru orantıya yönelik kazanımlar 6.sınıf olarak, ters orantıya yönelik verilen kazanım ise 7. sınıf olarak ifade edilmiştir. 3.sınıf öğretmen adayı Simre, “Oran da orantılar da 6. sınıfta yer alıyor diye biliyorum. Orandan sonra hemen orantı anlatılır zaten. Onu da ayırmamışlardır herhalde.” açıklamasında bulunmuştur. 2.sınıf öğretmen adayı Halit ise, “Oran orantıyı çok iyi hatırlıyorum. 8’de olduğuna eminim. 8. sınıfta sürekli orantı çözdüğümü hatırlıyorum. Ama belki oranın ne olduğu 7. sınıfta veriliyor olabilir.” açıklamasını yapmıştır. Görüldüğü gibi görüşme yapılan öğretmen adaylarının bir kısmının da oran ve orantı kazanımlarının öğretim programındaki yeriyle ilgili yanlışları mevcuttur.

Sarmal yapıda hazırlanan öğretim programında bir alt öğrenme alanına ilişkin konuların farklı sınıf düzeylerine dağıtıldığı düşünüldüğünde öğrencilerin hangi ön bilgiyle sınıfta yer aldığını ve hazırbuluşluğunu anlayabilmek adına öğretmenin programı bilmesi gerektiği söylenebilir. Sadece hazırbuluşluluk için değil öğretmenin konuda ne kadar detaya gireceği de programdaki sınırlarla belirlenmiştir. Bu nedenle de müfredatın bilinmesinin öğretmenler için dolayısıyla da öğretmen adayları için oldukça önemli olduğu ifade edilebilir. Testte yer alan bu iki sorunun bulguları öğretmen adaylarının bu konudaki eksikliklerini ortaya koymuştur.

4.7.5. Öğretim programında yer alan doğal sayılarda işlemlere yönelik kazanım bilgisine ilişkin bulgular

Testin 7. sorusunda öğretmen adaylarına aşağıda yer alan kazanımlar verilmiş ve boşlukları doldurmaları istenmiştir.

- En çok ... 9.....basamaklı doğal sayıları okur ve yazar.
- En çok ... 5.... basamaklı doğal sayılarla toplama ve çıkarma işlemi yapar.
- En çok ...3..... basamaklı iki doğal sayının çarpma işlemi yapar.
- En çok ...4..... basamaklı bir doğal sayıyı, en çok 2.... basamaklı bir doğal sayıya böler.

Doğal sayılarla işlemlere yönelik kazanımlar ilköğretim seviyesindeki alt sınıf düzeylerinde de yer almaktadır. Ancak basamak sayıları değişkenlik göstermektedir. Bir öğretmen adayının doğal sayılarla işlemlerle ilgili öğrencinin hangi ön bilgiyle geldiğini bilmesi oldukça önemlidir. Bu bilgi testin bu sorusu için ipucu niteliği taşımaktadır. Beş boşluğun yer aldığı sorularda doğru yanıt sayısına göre öğretmen adaylarının dağılımı Tablo 161’de verilmiştir.

Tablo 161

PBT 7. soru doğru sayılarının dağılımı

	5 doğru	4 doğru	3 doğru	2 doğru	1 doğru	0 doğru
1. Sınıf	0 (%0)	0 (%0)	8 (%20)	11 (%27,5)	15 (%37,5)	6 (%15)
2. Sınıf	1 (%2,5)	0 (%0)	7 (%17,5)	12 (%30)	18 (%45)	2 (%5)
3. Sınıf	0 (%0)	1 (%2,5)	12 (%30)	14 (%35)	7 (%17,5)	6 (%15)
4. Sınıf	1 (%2,5)	5 (%12,5)	13 (%32,5)	12 (%30)	5 (%12,5)	4 (%10)
Toplam	2 (%1,25)	6 (%3,75)	40 (%25)	49(%30,63)	45 (28,13)	18(%11,25)

Tablo 161 incelendiğinde sadece iki öğretmen adayının tüm boşlukları doğru bir biçimde doldurdıkları görülmektedir. Öğretmen adaylarının yarıdan fazlası 3 doğrunun altında kalmıştır. Yapılan görüşmelerde 3.sınıf öğretmen adayı Orhan, “Programın ortaokul kısmını inceledik. Ancak basamakların detaylarına çok dikkat etmedim. İlkokul kısmına ise bakmadım. Hangi yıl hangi işlemlerin yapıldığını bilsem bunu da tahmin edebilirdim.” şeklinde açıklama yapmıştır. Bu öz eleştiri yukarıda yer alan sonuçlara bakıldığında genel bir sorunmuş gibi görülmektedir.

Soruda dört kazanım yer aldığı için her bir kazanım için sınıf düzeylerine göre doğru sayısı ortalamaları da hesaplanmıştır. Tablo 162’de bu ortalamalar yer almaktadır.

Tablo 162

PBT 7. soru doğru sayısı ortalamaları (4 kazanımdan)

1. Sınıf Ortalaması	2. Sınıf Ortalaması	3. Sınıf Ortalaması	4. Sınıf Ortalaması	Tüm Örneklem Ortalaması
1,475	1,70	1,875	2,325	1,84375

Ortalamalara bakıldığında sınıf düzeyinin yükselmesiyle arttığı görülmektedir. Bu durum olumlu bir gelişim olarak yorumlanabilse de genel ortalamanın 4 üzerinden 2'yi geçmediği dikkat çekmiştir. Bu durum kazanımların öğretmen adaylarınca yeterince bilinmediğinin bir başka göstergesi olarak düşünülebilir.

4.7.6. Öğretim programında kesir kazanımlarının sınıf düzeyleri bilgisine ilişkin bulgular

Sayılar ve işlemler öğrenme alanının en temel alt öğrenme alanlarından biri kesirler olarak kabul edilebilir. İlkokul düzeyinden başlayarak programda yer alan kesirler 6.sınıf düzeyine kadar programda yer almaktadır. 7. sınıf düzeyinde ise rasyonel sayılarla birlikte kesir biçimindeki işlemlere devam edilmektedir. Program bilgisi testinin 8. sorusunda kesir içeren 12 sorunun hangi sınıf düzeyinde yer alabileceği sorulmuştur. Programa hâkim bir öğretmen adayının kesirlerin hangi sınıf düzeyinde, nasıl verilmesi gerektiğini bildiği düşünülebilir. 5. sınıf düzeyinde kesirlerde toplama-çıkarma işlemi yaparken, sıralama yaparken paydaları birbirinin katı olmayan kesirlerin seçilmemesi gerektiği bilgisine hâkim olması beklenir. Kesir kazanımlarıyla ilgili bu detayların bilinmesi öğretim programı bilgisinin en iyi göstergelerinden biri olarak kabul edilebilir.

12 soru yer alan bu bölümde öğretmen adaylarının kaç sorunun sınıf düzeylerini doğru yapabildikleri incelenmiştir. 12 sorunun sınıf düzeylerine göre ortalamasına bakılmış ve sonuçlar Tablo 163'te sunulmuştur.

Tablo 163

PBT 8. soru doğru sayısı ortalamaları (12 alt sorudan)

1. Sınıf Ortalaması	2. Sınıf Ortalaması	3. Sınıf Ortalaması	4. Sınıf Ortalaması	Tüm Örneklem Ortalaması
4,05	5,125	5,125	4,4775	4,76875

Tablodan da görüldüğü gibi 12 soruda doğru sınıf düzeyleri belirtilenlerin sayısı ortalama 6'yı dahi bulmamıştır. Öğretim programına en hâkim olması beklenen 4. sınıf öğretmen adaylarının doğru ortalamaları 2. ve 3. sınıflara göre düşük çıkmıştır. Doğru yanıt

sayıları eşit aralıklı kategorilere ayrıldığında ise öğretmen adaylarının dağılımı Tablo 164'teki gibi olmuştur.

Tablo 164

PBT 8. soru doğru sayılarının dağılımı (12 sorudan)

	12-10 doğru	9-7 doğru	6-4 doğru	3-0 doğru
1. Sınıf	0 (%0)	4 (%10)	19 (%47,5)	17 (%42,5)
2. Sınıf	0 (%0)	6 (%15)	26 (%65)	8 (%20)
3. Sınıf	1 (%2,5)	6 (%15)	26 (%65)	7 (%17,5)
4. Sınıf	2 (%5)	9 (%22,5)	16 (%40)	13 (%32,5)
Toplam	3 (%1,875)	25 (%15,625)	87 (%54,375)	45 (%28,125)

Tablo 164 incelendiğinde sadece 3 öğretmen adayının kesir kazanımlarının sınıf düzeylerine ilişkin yeterli bilgiye sahip olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının %54'lük bir kısmının 12 soru üzerinden 4 ile 6 arasında doğru sayıya sahip olduğu anlaşılmaktadır. Genel ortalamaya göre 4.sınıf öğretmen adaylarının ortalaması her ne kadar 2. ve 3. sınıf öğretmen adaylarına göre düşük olsa da soruların yarıdan fazlasını doğru yapanların oranı %27,5 ile (28 öğretmen adayı) ilk sırada 4. sınıflar yer almıştır.

Tüm bulgular bir arada değerlendirildiğinde “kesirler” gibi temel bir konuda öğretmen adaylarının hangi sınıf düzeyinde hangi soruların sorulabileceğine ilişkin bilgisinin yeterli düzeyde olmadığı anlaşılmıştır. Öğretmenliğe en yakın aday olan 4. sınıflarda da aynı durum göze çarpmıştır. Bu durum sadece “kesirler” boyutuyla ele alınmayıp aslında sarmal yapıda olan öğretim programında alt öğrenme alanlarının her bir sınıf düzeyinde nasıl verileceğine ilişkin bilgi eksiklikleri olduğuna işaret olarak değerlendirilebilir.

4.7.7. Hangi konuların ilk kez ortaokul düzeyinde görüldüğüne ilişkin soruya ait bulgular

Öğretmen veya öğretmen adayının kendi öğretim yapacağı kademenin yanı sıra bir alt kademedeki öğretim programına da hakim olması kendi öğrencilerinin ön bilgilerini bilmek adına önemli sayılabilir. Öğrencinin ilk kez tanıştığı bir kavramla ilgili doğru bir imaja sahip olması için öğretim sürecinde kavramın tanımının yapılması isabetli olacaktır. Bu nedenle öğretmenin öğrencinin hangi kavramla yeni tanıştığını bilmesi onun öğretimine de yön verebilir. Program testinin 9. sorusunda öğretmen adaylarına sekiz tane kavram (bileşik kesir, ondalık gösterim, birim kesir, sayı örüntüsü, Romen rakamları, küme, yüzde, yuvarlama) verilmiş ve bu kavramların hangileriyle öğrencilerin ilk kez ortaokul düzeyinde tanıştıkları sorulmuştur. Sadece ondalık gösterim, küme ve yüzde kavramlarıyla ortaokulda karşılaşmış olsa da öğretmen adaylarının diğer kavramları da işaretledikleri görülmüştür. Tablo 165'te öğretmen adaylarının hangi kavramı hangi oranda işaretledikleri

görülmektedir. Doğru cevapların işaretlenme oranları üstte, yanlış cevapların işaretlenme oranları Tablo 165'te verilmiştir.

Tablo 165

“Hangi kavramlarla ilk kez ortaokulda karşılaşılmıştır?” sorusunda kavramların işaretlenme oranları

	KONULAR	1.Sınıf	2.Sınıf	3.Sınıf	4.Sınıf	TOPLAM
ORTAOKUL	Ondalık Gösterim	27 (%67,5)	32 (%80)	35 (%87,5)	35(%87,5)	129(%80,7)
	Küme	36 (%90)	31 (%77,5)	20 (%50)	28 (%70)	115(%71,9)
	Yüzde	34 (%85)	32 (%80)	35 (%87,5)	36 (%90)	137(%85,6)
İLKOKUL	Bileşik Kesir	24 (%60)	21 (%52,5)	25 (%62,5)	27(%67,5)	97 (%60,6)
	Birim Kesir	20 (%50)	14 (%35)	17 (%42,5)	17(%42,5)	68 (%42,5)
	Sayı Örüntüsü	12 (%30)	14 (%35)	7 (%17,5)	19(%47,5)	52 (%32,5)
	Romen Rakamları	13(%32,5)	13 (%32,5)	8 (%20)	14 (%35)	48 (%30)
	Yuvarlama	17(%42,5)	17 (%42,5)	20 (%50)	22 (%55)	76 (%47,5)

Tablo 165'ten de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının %50'den fazlası ondalık gösterim, küme, yüzde ve bileşik kesir kavramlarının ortaokulda ilk kez gösterildiğini ifade etmiştir. Bu kavramlardan üçü doğru olmakla birlikte bileşik kesir kavramı ilkokulda gösterilmektedir. Bileşik kesir kavramının ortaokulda gösterildiğini en fazla belirten grup 4. sınıflar olmuştur. Sayı örüntüsü, Romen rakamları ve yuvarlama konularında da en yüksek işaretleme oranı 4. sınıflarda olmuştur.

Öğretmen adaylarının kavramların kaç tanesini doğru bildikleri de incelenmiştir. Doğru sayılarına göre dağılımları Tablo 166'da verilmiştir.

Tablo 166

PBT 9. soru doğru sayılarının dağılımı (8 kavramdan)

	8-7 doğru	6-5 doğru	4-3 doğru	2-0 doğru
1. Sınıf	8 (%20)	17 (%42,5)	14 (%35)	1 (%2,5)
2. Sınıf	8 (%20)	23 (%57,5)	9 (%22,5)	0 (%0)
3. Sınıf	9 (%22,5)	19 (%47,5)	12 (%30)	0 (%0)
4. Sınıf	6 (%15)	20 (%50)	13 (%32,5)	1 (%2,5)
Toplam	31 (%19,375)	79 (%49,375)	48 (%30)	2 (%1,25)

Tablo 166'da görüldüğü gibi 8 veya 7 kavramı doğru bilenlerin oranı yaklaşık olarak %19'da kalmıştır. En düşük oran ise altı öğretmen adayı ile 4. sınıflarda olmuştur. 8 kavramdan 4 doğru ve üzeri yapanların oranının yaklaşık olarak %69 olduğu görülmektedir. En yüksek oran ise %77,5 ile 2. sınıflarda gerçekleşmiştir. Bu durum öğretmenliğe en yakın olan 4. sınıfların programın ilkokul kısmını yeterince iyi bilmediğini

ortaya koymuştur. Halbuki öğretim programında ilkokul ve ortaokul matematik kazanımları bir arada yer almaktadır.

4.7.8. Kümeler alt öğrenme alanında yer alan kavramların bilgisine yönelik bulgular

Sayılar ve işlemler öğrenme alanının alt öğrenme alanlarından biri olan “Kümeler” 2013 yılındaki matematik öğretim programıyla birlikte müfredattan kaldırılmıştır. Ancak 2018 yılı yeni öğretim programıyla birlikte sadeleştirilerek yeniden müfredata dahil edilmiştir. Kümelerin gösterimi, eleman, boş küme, kesişim ve birleşim gibi kavramlar yeni programda yer alırken evrensel küme, fark işlemi, alt küme, küme çarpımı gibi kavramlar programda yer almamıştır (küme çarpımı daha önceki programlarda da yer almamıştır). Program bilgisi testinin 10. sorusunda öğretmen adaylarına kümelerle ilgili 8 tane kavram verilmiş ve hangilerinin programda yer aldığı sorulmuştur. Öğretmen adaylarının doğru sayılarına göre dağılımları Tablo 167’de verilmiştir.

Tablo 167

PBT 10. soru doğru sayılarının dağılımı (8 kavramdan)

	8-7 doğru	6-5 doğru	4-3 doğru	2-0 doğru
1. Sınıf	2 (%5)	21 (%52,5)	16 (%40)	1 (%2,5)
2. Sınıf	5 (%12,5)	30 (%75)	5 (%12,5)	0 (%0)
3. Sınıf	4 (%10)	23 (%57,5)	13 (%32,5)	0 (%0)
4. Sınıf	12 (%30)	26 (%65)	2 (%5)	0 (%0)
Toplam	23 (%14,375)	100 (%62,5)	36 (%22,5)	1 (%0,625)

Tablo 167 incelendiğinde öğretmen adaylarının yaklaşık %77’sinin sekiz kavramdan beş ve üzerini doğru yanıtladığı görülmektedir. En fazla doğru yanıtın ise 4. sınıf öğretmen adaylarında olduğu görülmektedir. Her bir kavram için ayrı ayrı sayım yapıldığında öğretmen adaylarının en çok evrensel küme ve alt kümede hatalarının olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının %50’den fazlası iki kavramın da ortaokul programında yer aldığını belirtmiştir. Sınıf düzeylerine göre öğretmen adaylarının doğru ortalamalarına bakıldığında ise Tablo 168’deki sonuçlar ortaya çıkmaktadır.

Tablo 168

PBT 10. soru doğru sayısı ortalamaları (8 kavramdan)

1. Sınıf Ortalaması	2. Sınıf Ortalaması	3. Sınıf Ortalaması	4. Sınıf Ortalaması	Tüm Örneklem Ortalaması
4,8	5,3	5,175	6,15	5,35625

Tablo 168’e göre en düşük ortalama 1. sınıf öğretmen adaylarında gerçekleşmiştir. En yüksek ortalama ise 4. sınıf öğretmen adaylarında gerçekleşmiştir. Bu durum testin 9.

sorusundaki bulgularla zıt bir durum oluşturmaktadır. O soruda 1. sınıf öğretmen adayları “kümeler” konusuyla ilk kez karşılaşılmasına %90 ile katılırken, 4.sınıf öğretmen adaylarında bu oran %70’lerde kalmıştı.

Görüşmelerde bu durum sorulmuştur. 1. sınıf öğretmen adaylarından Tuğçe, “Kümeleri biz ortaokulda gördük. İlkokulda olamaz. O nedenle öğrenciler ilk kez ortaokulda görürler.” açıklamasını yapmıştır. “Hangi kavramlar programda yer almaktadır?” şeklindeki soruya da “Kartezyen çarpım hariç diğer kavramlar yer almaktadır.” açıklamasında bulunmuştur. Görüldüğü gibi Tuğçe öğretim programını incelememiş olsa da kendi öğreniminden yola çıkarak açıklamalarda bulunmaktadır. Aynı durum 4.sınıf öğretmen adaylarına da sorulmuştur. Maksude, “Programdan kümeler kalkmıştı. Artık lisede anlatılıyor. Bu nedenle öğrenciler ortaokulda karşılaşmazlar diye işaretlemedim.” açıklamasında bulunmuştur. Şeyma ise, “Ortaokuldan kalkmıştı ama tekrar geldi diye biliyorum. Temel kavramlar vardı. Eleman, küme gösterimleri, boş küme gibi.” açıklamasında bulunmuştur. Bu görüşmeler aslında iki sorudaki zıtlığı ortaya koyar niteliktedir. 1. sınıf öğretmen adayları programı hiç incelemedikleri için kendi öğrenimlerine göre soruları cevapladıkları ve bu nedenle 9. soruda %90 ile doğru yanıtlarken, 10. soruda atılan kavramları bilmedikleri için sıralamada son sırada yer aldıkları düşünülebilir. 4. sınıf öğretmen adaylarının bir kısmı ise 2013 programını düşünüp kümelerin kaldırıldığını ifade ettikleri söylenebilir. Bu nedenle 9. soruda doğru yanıt oranları %70’lerde kalmış olabilir. Ancak 4. sınıf öğretmen adaylarından yeni programı inceleyenler hangi kavramların kaldırıldığını bildiği için 10.soruda doğru yanıt oranının diğer sınıfların üzerinde olduğu ifade edilebilir.

4.7.9. Program bilgisi bileşenine yönelik genel değerlendirme

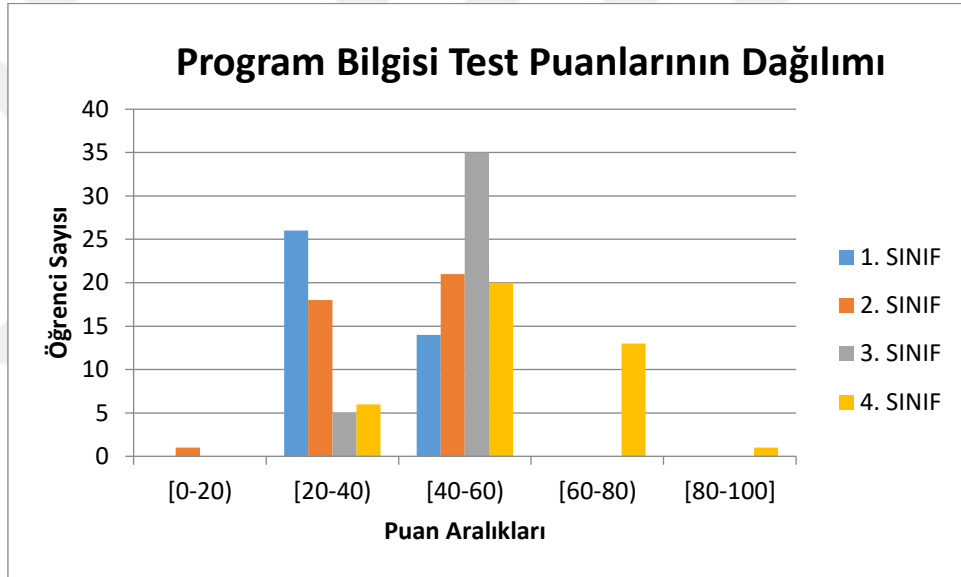
Pedagojik alan bilgisinin bileşenlerinden biri olan program (müfredat) bilgisi kapsamında öğretmen adaylarının matematik öğretim programı ile ilgili bilgileri incelenmiştir. Programın giriş kısmında belirtilen yeterlikler ve programın özel amaçlarında ifade edilen çeşitli kavramlarla birlikte, programda belirtilen çeşitli materyaller ve müfredat kısmında yer alan alt öğrenme alanları ve her bir alt öğrenme alanına yönelik kazanımlarla ilgili sorular sorularak öğretmen adaylarının program bilgileri detaylı olarak incelenmeye çalışılmıştır. Genel bir değerlendirme yapabilmek için her bir soruya içerisindeki alt sorular da göz önüne alınarak puanlar verilmiş ve 100 üzerinden “Program Bilgisi Test Puanı” hesaplanmıştır. Tablo 169’da sınıf düzeylerine göre ortalamalar verilmiştir.

Tablo 169

PBT genel ortalaması (100 üzerinden)

1. Sınıf Ortalaması	2. Sınıf Ortalaması	3. Sınıf Ortalaması	4. Sınıf Ortalaması	Tüm Örneklem Ortalaması
36,95	39,625	46,375	54,125	44,26875

Ortalamalar incelendiğinde sınıf seviyesiyle birlikte artış dikkat çekmektedir. Ancak 4. sınıf öğretmen adaylarında dahi ortalama 50'nin altında kalmıştır. Gerek mülakatlardan gerek de her bir soru için incelenen yazılı verilerden yola çıkarak öğretmen adaylarının öğretim programını yeterince iyi bilmediği ifade edilebilir. 100 üzerinden puanlar eşit aralıklı gruplara ayrıldığında ise Şekil 65'teki sonuç ortaya çıkmıştır.



Şekil 65. Program bilgisi testi puan dağılımları

Şekil 65'te yer alan grafikte en dikkat çekici sonuç 60 puan ve üzerinde alan öğretmen adaylarının tamamının 4. sınıf düzeyinde olmasıdır. Üst gruptaki bu öğretmen adayları tüm 4. sınıf öğretmen adaylarının %35'ini oluşturmaktadır. Ayrıca öğretmen adaylarının daha çok 40-60 puan aralığında yoğunlaştığı görülmektedir.

BÖLÜM V

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Tartışma

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının “Sayılar ve İşlemler” öğrenme alanındaki alan ve pedagojik alan bilgilerini incelemeyi amaçlayan bu çalışmada, içerdiği düşünülen tüm yönleriyle öğretmen adaylarının bilgileri ele alınmış ve bu yönlerle ilişkin bulgular bir önceki bölümde sunulmuştur. Bu bölümde ise bulgular literatür ışığında konu bazlı başlıklar halinde tartışılmıştır.

5.1.1. Doğal sayılar alt öğrenme alanına ilişkin tartışma

Doğal sayılar, öğrencilerin ilk karşılaştığı sayı kümesidir. Çalışmada hem alan hem de pedagojik alan bilgisi kapsamında doğal sayılarla ilgili sorular yer almıştır. Öncelikle doğal sayı kavramının kendisi ele alınabilir. Kavramların tanımlarının sorulduğu KVT’de gerek ve yeter şartları sağlayan uygun tanımlama oranının en yüksek olduğu iki sayı kümesinden biri doğal sayılardır. Ancak öğretmen adaylarının yarıya yakını Leikin ve Zazkis (2008) tanımlama kriterlerine uygun tanımlama yapamamıştır. Leikin ve Zazkis (2008), geometri için en temel kavramlardan biri sayılabilecek olan “kare” kavramının tanımını sormuş ve öğretmen adaylarının %60’ı matematiksel olarak uygun tanım yapabilmiştir. Geometrideki “kare” kavramı gibi aritmetik için de “doğal sayı” kavramı eğitim öğretimin ilk dönemlerinden itibaren karşılaşılan en temel kavramlardan biri olarak ele alınabilir. Bu çalışmada da doğal sayıyı öğretmen adaylarının yaklaşık %60’ı uygun olarak tanımlayabilmiştir.

Doğal sayıların tanımında öğretmen adaylarının “sonsuz kadar giden sayılar”, “sıfırdan başlayan sayılar” gibi gerek ve yeter şartlardan yoksun tanımlamalarda bulunduğu görülmüştür. Sayı kümeleri ile ilgili sınıf öğretmen adaylarının hazırbulunuşluklarını belirlemeyi amaçlayan Nayir ve diğerleri (2018) doğal sayıları sözel olarak ifade eden öğretmen adaylarının “sıfırdan başlayan”, “sonsuz kadar giden” gibi ifadeleri kullandıklarını belirtmiştir. Ayrıca sınıf öğretmen adaylarında var olan “sıfırdan dokuza kadar olan sayılar”, “tam sayı olmayan sayılar” şeklinde hatalı yanıtlar bu çalışmada yer alan matematik öğretmen adaylarında da görülmüştür.

Doğal sayıların öğretiminde ilköğretim 1. sınıftan itibaren öğretim sürecinde yer alan basamak kavramının önemi yadsınamaz (Arslan ve diğerleri, 2011). Öğretim sürecinde yıldan yıla basamak sayıları arttıkça bölük kavramı ile de tanışılmaktadır. Çalışmada bu iki kavrama da çeşitli sorularda yer verilmiştir. KVT’de iki kavramın birbirleriyle ilişkisi sorulmuş ve bir sayı örneği üzerinde göstermeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının büyük

çoğunluğu basamak değerini doğru açıklayabiliyorken, bölük kavramını katılımcıların yarısından fazlası doğru açıklayamamıştır. Öğretmen adaylarının bölükleri ayırırken birler, onlar, yüzler şeklinde ayırabildiği görülmüştür. Görüşme yapılan 4. sınıf öğretmen adayları da bölük kavramını hatırlayamamıştır. Gedik Altun (2019), öğrencilerin basamak ve bölük kavramlarında yaşadıkları güçlükleri ortaya koyduğu çalışmayı da göz önüne alarak öğretmen adaylarında da benzer güçlüklerin olduğu söylenebilir.

Doğal sayılarla işlem yaparken gerekli olan bilgilerden biri bir sayıyı basamaklarına ayırabilmektir. Bunun için de basamak değeri kavramını iyi anlamak gerekmektedir (Arslan ve diğerleri, 2011). KNT’de yer alan bir soruyla öğretmen adaylarının basamak değerleri ile ilgili bilgileri de sorgulanmıştır. Bazı öğretmen adaylarının dokuz basamaklı bir sayıda tüm rakamların basamak değerleri toplamını veya seçilen bazı rakamların basamak değerleri toplamını bulamadığı anlaşılmıştır. Basamak değeri yerine sayı değerinin alınabildiği veya basamakların sadece 10’un kuvvetleri olarak alınabildiği görülmüştür. Öğrencilerle yapılan çalışmalardan Gedik Altun (2019), Bingolbali ve Özmantar (2015) ve Özdeş’in (2013) aktardığı gibi ortaokul ve lise öğrencilerinin de basamak ve basamak değeri kavramı ile ilgili yaşadıkları güçlüklerle benzer güçlüklerle bu çalışmada da karşılaşmıştır. Öğrencilerdeki güçlüklerin pedagojik nedenlere bağlı olabileceği yorumu yapılabilir. Benzer şekilde Tarım ve Artut (2013), basamak değeri kavramı ile ilgili görülen başarısızlığın öğretimden kaynaklanabildiğini belirtmiştir. Öğretmenlerin öğrenci hatalarını anlama ve onlara doğru açıklamalar yapma konusunda zorluk yaşadığını açıklamış ve bunun nedeni için öğretmen adaylarının bu kavramla tanıştıkları öğrenme durumlarının da sorgulanması gerektiğini ifade etmiştir. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının kendisinin de basamak değeri konusunda güçlükler yaşadığı anlaşılmıştır. Bassarear (2005; aktaran Tarım ve Artut, 2013) öğretmen adaylarının onluk taban dışındaki diğer tabanlarda da çalışmaları halinde “taban” ve “basamak değeri” kavramının altında yatan temel fikirlerde derinleşebileceklerini ifade etmiştir.

Çalışmada, “Yüzler basamağı 8 olan bir sayı yüzler basamağı 5 olan bir sayıdan her zaman büyük müdür?” sorusu da basamak kavramı ile ilgilidir. Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu (%91) soruyu doğru yanıtlamıştır. Ancak soruda doğal sayı kısıtlaması olmadığı için bazı öğretmen adayları sayıların negatif olabileceği ihtimalini düşünerek açıklama yapmıştır. Benzer bir soruyu Karaca(2012) rutin olmayan bir problem olarak 5. sınıf öğrencilerine sormuş öğrencilerin sadece %10’u doğru cevap verebilmiştir. Öğrencilerin büyük bölümü basamak sayısının farklı olabileceğini düşünememiştir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının çok az bir kısmının benzer bir güçlüğü sahip olduğu görülmüştür.

Doğal sayılarla ilgili öğrencilerin zorluk yaşadığı konulardan biri çözümlleme veya çözümlenmiş hali verilen doğal sayıları okuyabilmedir. 7. sınıf öğrencileri ile ilgili yapılmış çalışmada Albayrak ve diğerleri (2019) bu durumdan bahsetmiş ve öğretim yönteminden kaynaklı sorunlara dikkat çekmiştir. Bu çalışmada bu öğretimi gerçekleştirecek olan öğretmen adaylarına “çözümlleme” kavramının ne olduğu sorulmuş ve öğretmen adaylarının yarısından azının tanımlama kriterlerine uygun bir tanım yapabildiği anlaşılmıştır. Ancak çok az sayıda öğretmen adayının (%16) uygun ve titiz bir tanımla bir sayının basamak değerleri toplamı şeklinde yazılmasını çözümlleme olarak belirtbildiği görülmüştür. Bazı öğretmen adayları çözümlleme ve bilimsel gösterimi karıştırmış, bazıları sadece rakamların basamak değerlerini yazmış, bazıları da tanım yapmak yerine örnek vermiştir.

Basamak değerinin kavramsal öğrenilememesi çarpma işleminin anlamlandırılmamasına da neden olabilmektedir (Ball, 1988; Bütün, 2012). Alt alta yapılan çarpma işleminin öğretiminde yaygın olan teknik 2. çarpan sayının birler basamağından başlayarak ilk sayının basamakları ile tek tek çarpılması ve her bir basamak için elde edilen sonuçların bir basamak sola kaydırma yapılarak alt alta getirip toplanmasıdır. Bunun neden böyle olduğu ve farklı yöntemlerin olup olmadığı sorusu birçok çalışmada yer almıştır (Ball, 1988 vb.). Bu çalışmada EPT’de öğretmen adaylarına çarpma yaparken neden bir basamak sola kaydırma yapıldığı sorulmuştur. Bazı öğretmen adayları yeterli gerekçeler sunabilmiş (Seviye 3 üstü) ancak sadece %10’luk kısmının analitik bir ispat yapabildiği görülmüştür. İlkokul seviyesinden başlanarak çarpma işleminde yapılan bu sola kaydırma ile ilgili öğretmen adaylarının yeterince gerekçe sunamaması, kaydırma hamlesinin matematiksel alt yapısını açıklayamamaları öğretim tecrübesi sırasında bir öğrencinin soracağı “Neden sola kaydırıyoruz öğretmenim?” sorusunda zorlanabileceklerini göstermektedir. Ball’da (1998) yer alan senaryolardan birinde çarpma işlemini sola kaydırma yapmadan yapan bir öğrencinin hatasının nasıl düzeltilebileceği sorulmuştur. 19 öğretmen adayından sadece 5’i çarpma algoritmasının altında yatan nedenden bahsedebilmiştir. Bu durum bu çalışmadaki bulgularla örtüşmektedir. Aynı soruyu Bütün (2012) de sormuştur. Öğretimsel açıklamaları üç seviyede (kurala dayalı, sürece dayalı, yapısal anlayış) alan o çalışmada, özel öğretim yöntemleri dersi ile yapısal anlayışların olumlu yönde değiştiği bilgisi verilmiştir. Benzer şekilde bu çalışmada da Seviye 3 ve üzeri gerekçelendirmeler özel öğretim yöntemleri dersi görmeyen 2. sınıflarda yaklaşık %27 iken, 3. sınıflarda %40’lara, son sınıf düzeyinde de %65’lere yükselmiştir. Bu durumun Bütün (2012) tarafından belirtildiği gibi özel öğretim yöntemleri dersinden kaynaklı olup olmadığı ayrı bir inceleme konusudur.

Shulman (1986), bir öğretmenin kavramların farklı gösterimlerini de bilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Akar (2010), bu durumu bir çarpma işlemine yapılabilecek iki farklı çözüm yöntemi ile örneklemiştir. Bir örnekte sadece ikinci sayının çözümlenerek çarpılması ve sonuçların alt alta yazılarak toplanması söz konusu iken, ikinci örnekte her iki sayının da çözümlenerek çarpılması yer almıştır. Her iki örneğin de doğru olduğunu ve nedenini anlayamayan bir öğretmenin öğrencilerin matematiksel konuştuğu bir ortamda onları duyamayacağını, bu yöntemlerden birini uygulayarak sonucu getiren öğrenciye muhtemelen “yanlış” diyeceğini iddia etmiştir. Bu çalışmada da bu durum sorgulanmıştır. ÖST’de öğretmen adaylarına farklı yöntemlerle çözülen iki çarpma işlemi verilmiştir. Her ikisi de çözümleme yoluyla yapılmış bu örneklerin hangilerinin her zaman doğru olacağını belirtilmesi ve çarpma işlemlerinin değerlendirilmesi istenmiştir. Öğretmen adaylarının %75’i iki sayının da çözümlenerek çarpıldığı yöntemin her zaman geçerli olacağını savunurken, %90’ı sadece tek bir sayının çözümlenerek çarpıldığı ikinci yöntemin doğruluğunun her zaman geçerli olacağını belirtmiştir. Yöntemlerin hatalı olduğunu, öğrencilerin kavram yanılgıları olduğunu, sonucun tesadüfen doğru çıktığını belirten öğretmen adayları da azımsanmayacak düzeydedir. Bu durum kavramsal öğrenmenin öğretim üzerindeki etkisine de bir örnek teşkil edebilir. Akar’ın (2010) dikkat çektiği gibi bazı öğretmen adaylarında yanlış yönlendirme potansiyeli ortaya konmuştur.

Basamak kavramının daha iyi anlaşılabilmesi için farklı sayı sistemlerinin öğrenilmesi de faydalı olabilir. PÇT’de yer alan bir soruda maya sayı sistemini tanıtılmış ve bu sayı sistemi ile bir problem sorulmuştur. Basamak değeri kavramı ile ilgili bilgiler bir problem çözme sürecinde izlenmek istenmiştir. Ancak bu soru öğretmen adaylarının en çok zorlandığı sorulardan biri olup öğretmen adaylarının yarıya yakınının soruyu boş bıraktığı görülmüştür. Thanheiser ve Rhoads (2009); ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sayı değeri ve basamak değeri ile ilgili bilgilerini ortaya koymayı amaçlamıştır. Çalışmada Maya sayı sistemini kullanmış, öğretmen adaylarının 20’lik olan bu sistem sayesinde 10’luk sistemi daha iyi yorumlayabildiğini açıklamıştır. Sayı sistemi ile ilgili yaşanan güçlükleri de örneklemiştir. Bu çalışmada yer alan problemde de öğretmen adaylarının benzer hatalar ve yanlış yorumlamalar yaptıkları görülmüştür.

Öğretmen adaylarına doğal sayılarda işlemleri içeren alan ve pedagojik alan bilgisi bağlamında sorular sorulmuştur. Bir öğretmen adayının doğal sayılarda dört işlemle ilgili yanlış yapmayacağı düşünülse de 40404 sayısının 40’a bölümü sorulmuş ve öğretmen adaylarının yaklaşık üçte biri soruyu yanlış cevaplamıştır. Bölme işlemi ile ilgili en çok yapılan hata birler basamağındaki rakam indirildikten sonra bölüme sıfır konulmadan işleme devam ettirilmesi veya işlemin kalan 4 olacak şekilde sonlandırılması olmuştur. ÖST’de sıfırı kaydetme ile ilgili sorun yaşayan bir öğrencinin 2008’i 4’e bölme işleminin

sonucunu 52 olarak bulduğu belirtilmiştir. Öğretmen adaylarının yarısı sağlamaya yapılmasına yönelik dönüt verirken öğrencinin yanlışını doğrudan belirten ve düzeltme yoluna giden dönütler de mevcut olmuştur. Ancak KNT’de kendisi bölme işlemini yapamayan öğretmen adayları ÖST’de bulunan hatalı bölme işlemi ile ilgili dönüt isteyen soruda hatanın farkına varıp dönüt verebilmişler, hatalarında ısrarcı olmamışlardır. Bu durum görüşme yapılan 1.sınıf öğretmen adayı Burçe’de kendini göstermiştir. Burçe’ye bölme işlemi görüşmede doğrudan sorulmuştur. Sıfırı koyup koymamada tereddüt yaşamış 52 çıkan sonucun sağlamasını yapıp kontrol ettikten sonra ortaya sıfır eklemiştir. Başka bir öğretmen adayı Maksud ise bu konuda öğrencilerin hep hata yaptığını ve zorlandıklarını belirtmiş ancak nasıl bir öğretim yöntemi ile bu hatayı engelleyeceğini bilemediğini söylemiştir. Sıfırın bölüme kaydedilmesi ile ilgili güçlükler Harris (2001) ve Oral (2020) tarafından öğrencilerle yapılan çalışmalarda da ortaya konmuş ve bu hatanın bölme işleminde en sık yapılan üç hatadan biri olduğu ifade edilmiştir. Ancak bu çalışmada öğretmen adaylarında da aynı güçlükle karşılaşılmasının kayda değer bir sonuç olduğu söylenebilir.

Bölme işleminin yanı sıra toplama işlemi ile ilgili de öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgileri incelenmiştir. Morkoyunlu (2019) ve Bingolbali ve Özmantar (2015) tarafından tespit edilen toplama işlemi ile ilgili yaygın kavram yanlışlarından yola çıkılarak öğretmen adaylarından yanlışları tespit etmeleri istenen bir soru oluşturulmuştur. Üç farklı kavram yanlışından ikisini öğretmen adaylarının yarıdan fazlası doğru tespit ederken iki kavram yanlışına birden sahip olan Mert’in hatasını öğretmen adaylarının yarıdan azı doğru tespit edebilmiştir. Kavram yanlışlarının tespitinde 3. ve 4. sınıf öğretmen adaylarının ilk iki sınıf düzeyine göre daha başarılı olduğu da anlaşılmıştır. Şahin ve diğerkleri (2013) toplama işlemi ile ilgili öğrenci hatalarının tespit edilebilirliğine ilişkin soruda matematik öğretmen adaylarının %23’ünün hatayı doğru bir şekilde tespit edebildiğini %39’unun ise kısmen doğru yanıtlar verdiğini ifade etmiştir. Bu çalışmada yer alan öğrenci hatalarını tespit etmeye yönelik sonuçlar Şahin ve diğerklerine (2013) göre daha yüksek çıkmıştır.

Doğal sayılarda tahmin etme veya dört işlemle ilgili stratejilerde en çok kullanılan yöntemlerden birinin yuvarlama olduğu söylenebilir. Özcan (2015), ilköğretim matematik öğretmen adaylarının işlem sonuçlarını tahmin ederken en çok yuvarlama stratejisini kullandıklarını belirtmiştir. Bu çalışmada da doğal sayıları yuvarlama ile ilgili içerisinde özellikle 5 ve 9 bulunan 30597 sayısı seçilerek soru hazırlanmıştır. KNT’de yer alan soruda öğretmen adaylarının yaklaşık %25’lik kısmının en yakın binliğe ve onluğa yuvarlamalardan en az birini yanlış yaptığını görülmüştür. Tekinkır (2008), öğrenciler için de yuvarlama stratejisinin en çok kullanılan strateji olduğunu belirtmiştir. Bu nedenle de

öğrencilere rehberlik edecek olan öğretmenlerin yuvarlama konusunda öğrencilere doğru bir yol sunması oldukça önemlidir.

5.1.2. Tam sayılar alt öğrenme alanına ilişkin tartışma

İşgüden (2008), Köroğlu ve Yeşildere (2004) ve Ercan (2010) gibi çeşitli kavram yanlışlığı çalışmaları tam sayı kavramı ile ilgili öğrencilerin yaşadıkları güçlükleri ortaya koymuştur. Tam sayı kavramının tanımlanması bu zorluklardan biridir. Öğrencilerde tam sayılarla ilgili var olan yanlışlıkların öğretmen adaylarında da olabildiğini Kubar (2012) göstermiştir. Tanımlama üzerine yapılan çalışmada bu çalışmada olduğu gibi Leikin ve Zazkis (2010) tanımlama kriterleri kullanılmıştır. Kubar (2012) öğretmen adaylarının %30'unun uygun ve titiz, %30'unun da uygun ancak titiz olmayan tanımlar yaptığını ortaya koymuştur. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının %36'sının tam sayıların gerek ve yeter şartları sağlayan ve terminolojiye uygun titiz tanımlarını yaptıkları %22'sinin uygun ancak titiz olmayan tanımlamalar yaptıkları bulunmuştur. Her iki çalışmada da uygun tanımlama oranlarının yakın olduğu söylenebilir. İçerik olarak bakıldığında da her iki çalışmada doğal sayılardan, sayma sayılarından veya rasyonel sayılardan yola çıkılarak tam sayı tanımının yapıldığı ortaya konmuştur. Rasyonel sayılardan tam sayılara yani genelden özele yapılan tanımlar alanyazında tartışma konusudur. Gerek bu çalışmada gerek Kubar (2012) tarafından yapılan çalışmada “Paydası 1 olan rasyonel sayılara tam sayı denir.” şeklinde tanım yapan öğretmen adayları olmuştur. Ancak Zazkis ve Leikin'e (2008) göre, matematikçilerin önerdiği matematiksel kavramları tanımlamanın temel ilkelerinden biri, öğrencilere bilinmeyen herhangi bir kelime veya kelime öbeği eklemekten, önceden öğrenilmiş kavramları kullanarak tanımlamaları yapmaktır. Öğretimsel olarak bu önerilse de her iki kavramı da bilen birinin yapmış olduğu bu tarz tanımların matematiksel olarak yanlış olmadığı ifade edilmiştir. Öğretim sırası bakımından her ne kadar rasyonel sayılar tam sayılardan sonra gelmekteyse de tanımlama kriterleri açısından yapılan tanımlar doğruluk kriterine uymaktadır.

Tam sayılarla ve hatta doğal sayılarla ilgili yaşanan bir başka güçlük işlem önceliğidir. Tüm sayı kümelerinde yan yana yazılan işlemler topluluğunda nereden başlayacağını bilmek sorun oluşturabilmektedir. Süzen (2019), katılımcıları arasında bulunan ilköğretim matematik öğretmenlerinin yarısının işlem önceliği sorusunu yanlış bulduğunu belirtmiştir. Hatta Uça (2010) yüksek lisans tezinde yer alan aynı soruda yapılan örnek çözümün de yanlış olduğu ortaya konmuştur. Bu çalışmada da birinde doğal sayılarla diğerinde tam sayılarla dört işlem bulunan iki soru KNT'de öğretmen adaylarına sorulmuştur. Doğal sayı sorusunda, öğretmen adaylarının çarpma ve bölmenin, toplama ve çıkarmaya göre daha öncelikli olduğunu bildikleri ancak çarpma ve bölme arasındaki eşit öncelik ilişkisinde güçlük yaşadığı anlaşılmıştır. Doğal sayılarla işlem önceliği sorusuna

öğretmen adaylarından yanlış yanıt verenler vardır. Tam sayıların bulunduğu soruda ise parantezlerin de devreye girmesi ile öğretmen adaylarının yarıdan fazlası işlemi yanlış çözmüştür. Aradaki sembollerin sayıya ait mi yoksa işleme ait mi olduğunu anlayamama yanılığı Köroğlu ve Yeşildere'nin (2009) belirttiği gibi burada da ortaya çıkmıştır. İşlem önceliği konusundaki güçlükler Süzen (2019) ile örtüşmektedir.

Gökkurt ve diğerleri (2012), tam sayılarla ilgili yaşanan güçlüklerin öğretimden de kaynaklanabildiğini ve öğretmenlerin matematiksel açıklamalarının yanılırlara neden olabileceğini belirtmiştir. Buna uygun bir senaryo ile ÖST'de öğretmen adaylarından bir öğretmenin tam sayılarda toplama işlemi ile ilgili vermiş olduğu dönütün değerlendirilmesi istenmiştir. Yer alan senaryoya göre, negatif tam sayıların toplamının değil çarpımının pozitif olacağı dönütü öğrencide üç negatif tam sayının çarpımının da pozitif olacağı yanılığına götürmüştür. Öğretmen adaylarının yanılığının kaynağını anlamada ve dönüt vermede zorlandığı anlaşılmıştır. Sadece öğretmen adaylarının %8'i hatanın kaynağına ve çözümüne yönelik dönütte bulunmuştur. Öğretmen adaylarının tam sayılarla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini inceleyen Gökkurt ve diğerleri (2012) öğretmenlerin %15'inin tam sayılarda çarpma işlemi ile ilgili doğru öğretimsel açıklamalar yapabildiğini belirlemiştir. Öğretim stratejileri bilgisini inceleyen bir başka çalışmada Almeida ve Bruno (2014) negatif sayılar içeren basit toplama işlemlerinde şekil çizme, sayı doğrusu çizme, sırayla sayma gibi çeşitli stratejiler kullanan öğretmen adaylarının tek işlemli basit sorularda dahi yanlış sonuçlar bulabildiğini belirtmiştir. Bu çalışma diğer çalışmaları destekler şekilde tam sayılarla ilgili alan bilgisi eksikliklerinin pedagojik alan bilgisine etkisini göstermiştir.

Tam sayılarda işlemlerin öğretiminde sayma pulları sıkça kullanılmaktadır. Ancak gerek öğrencilerin gerekse öğretmenlerin sayma pullarını anlamada, sayma pulları ile modellenmiş bir işlemi matematiksel dille ifade etmede veya verilen işlemi sayma pulları ile modellemede çeşitli zorluklara sahip olduğu söylenebilir (Erdem ve diğerleri., 2015; Zehir ve Zehir, 2019; Ertuğrul, 2009; Şanlı ve Işık, 2019 vb.). Bu çalışmada da öğretim stratejileri bileşeni kapsamında öğretmen adaylarından $(+5) - (-3) = (+8)$ işlemini modellemeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının yarıdan azı doğru modelleme yapabilmiştir. Son iki sınıf düzeyinde %65'lere çıkan doğruluk oranı ilk iki sınıf düzeyinde %10 ve altında olmuştur. Sınıf düzeyleri arasında dikkat çekici bir fark olduğu söylenebilir. Bu fark özel öğretim yöntemleri gibi pedagojik alan bilgisine yönelik derslerden kaynaklanmış olabilir. Çünkü görüşme yapılan öğretmen adaylarından bazıları özel öğretim yöntemleri dersinde öğretimde kullanılabilecek materyalleri öğrendiklerini açıklamıştır. Duymaz (2017) matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının sayma pulları ile modelleme konusundaki başarılarını incelemiş ve çıkarma işleminde 4.sınıf

öğretmen adaylarının sadece %6'sının doğru modelleme yapabildiğini öğretmenlerde ise bu oranın %80'lerde olduğunu ortaya koymuştur. Son sınıf öğretmen adaylarının bu denli düşük bir oranda modelleme yapabilmesi bu çalışmanın bulguları ile uyuşmamaktadır.

5.1.3. Kesir, ondalık gösterim ve yüzdelerle ilişkin tartışma

Kesir, ondalık kesir ve yüzdeleri gerek işlemsel gerekse kavramsal düzeyde ele almak öğretmen adaylarının alan bilgisini inceleyebilmek için önemlidir. KNT'de öğretmen adaylarına işlemsel bilgi içeren kesirlerde toplama ve çıkarma işleminin yer aldığı bir soru sorulmuştur. 6. sınıf düzeyinde yer alan bu soruyu öğretmen adaylarının yarıdan fazlası (%55) yanlış cevaplamıştır. Bu şaşırtıcı sayılabilecek sonucun nedeni detaylı incelenmiştir. Basit işlem hatalarından yapılan yanlışların yanı sıra bileşik kesri tam sayılı kesre çevirememesi, tam kısmı çarpım durumu olarak algılama, payda eşitleyememesi gibi ciddi hatalar da söz konusu olmuştur. Hasemann (1981), Abdul Ghani ve Matt (2018), Alacaci (2009) tarafından ortaya konulan öğrenci yanlışlarının benzerleri bu çalışmada öğretmen adaylarında da görülmüştür.

İşlemsel bilginin uygulama alanı olan problemlerin yer aldığı PÇT'de iki kesir problemi yer almıştır. İki problem de PYBS sınavlarında çıkmış bazı soruların değiştirilmiş versiyonlarıdır. Problem çözümlerinde bazı öğretmen adaylarının kesrin ölçme anlamını göz ardı ettiği ve verilen kesri bir bütünün parçası olarak algıladığı görülmüştür. Bu da soruyu çözememelerine neden olmuştur. Ancak her iki problemin çözümünde de öğretmen adaylarının işlemsel anlamda sorun yaşamadığı anlaşılmıştır. Can (2019), öğretmenlerin tamamının kesir işlemlerine yönelik algoritmaları kullanarak doğru sonuca ulaştığını ve işlemsel bilgi boyutunda kesir problemlerinin çözümünde sıkıntı yaşanmadığını ifade etmiştir. Bu çalışmada da benzer sonuca ulaşılmıştır.

Kesirlerle ilgili en temel kavramlardan biri de birim kesirdir. Öğretim programında parçadan bütün veya bütünden parça bulunurken birim kesirden yararlanılması önerilmektedir. Ersoy ve Biber (2020) ile Eroğlu ve diğerleri (2019); 5. ve 6. sınıf öğrencileri ile yürüttükleri çalışmada birim kesri anlamada yaşanan güçlüklerden bahsetmiştir. Bu çalışmada da birim kesir tanımını öğretmen adaylarının yarıdan azının (%38) yapabildiği görülmüştür. Basit kesirle birim kesrin karıştırıldığı, payı ve paydası eşit olan yani sonucu 1'e eşit olan kesirlerin birim kesir olarak düşünüldüğü anlaşılmıştır. Ersoy ve Biber (2020) ile Eroğlu ve diğerlerine (2019) benzer şekilde öğretmen adaylarında da birim kesirle ilgili kavram yanlışlarının mevcut olduğu görülmüştür.

Öğrencilerin ve öğretmenlerin bazı konulardaki ortak kavram yanlışları öğrenci bilgisi bileşenini önemli hale getirmiştir. Öğrenci bilgisini inceleyen kesirlerle ilgili pek çok çalışma mevcuttur. ÖBT'de yer alan senaryoda öğrencinin pay ve payda arasında sabit fark olan kesirleri sıralarken yapmış olduğu bir genellemeye dair hatası olup olmadığı

sorulmuştur. Öğrencinin genellemesi sadece basit kesirler için geçerli olmasına rağmen öğretmen adaylarının büyük bir kısmı (%83) genellenenin doğru olduğunu ifade etmiştir. Burada kesirlerde sıralama ile ilgili bir kavram yanılgısından söz edilemese de öğretmen adayının öğrenci düşüncesini doğru değerlendirememesi mevcuttur. Kula Ünver (2016), öğretmen adaylarına kesirlerle ilgili muhtemel kavram yanılgılarını sorduğu çalışmada da pay ve payda arasındaki farkın eşit olduğu kesirlerle ilgili öğretmen adaylarının öğrencilerde var olabilecek herhangi bir kavram yanılgısı belirtmediğini açıklamıştır.

Bir başka ÖBT sorusunda kesirlerdeki ölçü anlamı ile parça bütün anlamı arasındaki farkın sorgulandığı bir senaryo oluşturulmuştur. Öğretmen adaylarından bir kısmı ölçü anlamı ve parça bütün anlamını karıştıran öğrencinin yanılgısını fark ederken bir kısmı öğrencinin hatasını savunmuş, yani kesrin ölçü anlamını kendisi düşünememiştir. Görüşme yapılan öğretmen adaylarından birinin de “1/3 litre ama neyin 1/3’ü?” şeklinde ifade de bulunması kesirlerle ilgili parça bütün kavram imajının ağırlığını göstermektedir. Depabe ve diğerleri (2015) benzer bir soru sormuş ve öğretmen adaylarının sadece %19’unun öğrencinin yanılgısını tespit edebildiğini, parça-bütün ve ölçü anlamları arasındaki farkı ayırt edebildiğini söylemiştir. Benzer şekilde Can (2019), kesir kavramını açıklarken öğretmen adaylarının daha çok parça-bütün anlamına odaklandığı ölçü anlamını belirten öğretmen adaylarının tüm grubun 1/5’ini geçmediğini ifade etmiştir. Her iki çalışmadan da anlaşılabileceği üzere öğretmen adaylarının alan bilgisi ve öğrenci bilgisi açısından kesirlerin anlamları ile ilgili eksiklikleri mevcuttur ve mevcut çalışma da bunu desteklemektedir.

Kesirlerde işlemlerin öğretilmesinde şeffaf kesir kartları ve kesir çubukları gibi çeşitli materyaller kullanılabilir. Milli eğitim bakanlığına ait ders kitaplarında da alan modelleri ile şeffaf kesir kartı kullanımı gösterilmektedir. İskenderoğlu ve diğerleri (2016), az sayıda öğretmen adayının şeffaf kesir kartlarını tanıdığını ve tanıyanların da yaklaşık yarısının daha önce kartları kullandığını belirtmiştir. Bayezit ve diğerleri (2011), kesirlerle ilgili modellemeleri anlama ve matematiksel dilde yazılmış bir ifadeyi modelleyebilme konusunda zorluk yaşandığını tespit etmiştir. Bu çalışmada da kesirlerde çarpma işlemi verilerek şeffaf kesir kartı ile modellemenin nasıl yapılacağı öğretmen adaylarına sorulmuştur. 1. sınıf öğretmen adaylarının hiçbirinin modellemeyi yapamadığı soruda, genel doğruluk oranı %31 olarak hesaplanmıştır. Bazı öğretmen adayları sayıları ayrı ayrı modelle gösterebilirken işlemin tamamını modelleyememiştir. Erdem ve diğerleri (2015) de benzer şekilde öğretmen adaylarının kesirleri ayrı ayrı modelleyebilmelerine rağmen çarpma ve bölme işlemini modelleyemediklerini belirtmiştir. Yavuz ve Mumcu (2018), bu çalışmanın aksine öğretmen adaylarının büyük bölümünün çarpma işlemini şeffaf kesir kartları ile doğru modelleyebildiğini ifade etmiştir. Agbozo ve Fletcher (2020),

modelleme sorularında hangi işlemin yapıldığına bağlı olarak modelleyebilme becerilerinin değiştiğini öne sürmüştür. Bu çalışmada sadece çarpma işlemi yer aldığı için bu konuda değerlendirme yapılamamaktadır. Ancak diğer çalışmalarla birlikte değerlendirildiğinde öğretmen adaylarının çarpma ve bölme işlemlerinde modelleme yaparken diğer işlemlere göre daha fazla güçlük yaşadığı söylenebilir.

Doğal sayılardaki basamak ve bölük isimlerinin öğretmen adayları tarafından karıştırılabildiği, basamak değeri konusunda da yanlışlar olduğu doğal sayılar başlığı altında belirtilmişti. Ondalık basamaklarda da durumun farklı olmadığı KNT’de yer alan 37,1257 sayısındaki 2 rakamının hangi basamakta olduğu sorusunda ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %40’ı basamağın ismini yanlış belirtmiştir. Yüzler basamağı, binler basamağı hatta onda yüzler basamağı gibi isimlendirmelerde bulunmuşlardır. Alan bilgisi açısından durum böyleyken öğrencilerin bu konudaki hatalarını tespit edebilmekle ilgili ÖBT sorusunda öğretmen adaylarının büyük bir kısmı 0,245 sayısının yüzde birler basamağının 5 olduğu düşüncesinin yanlışlığını belirtmiş ancak öğrencinin bu hatayı neden yapmış olabileceğine dair açıklamayı katılımcıların sadece yarısı yapabilmektedir. Kaya (2015) tarafından belirtilen ondalık basamakları doğru isimlendirememeye yanlışlığı öğrencilerde olduğu gibi öğretmen adaylarında da mevcuttur.

Yenil (2020), ondalık sayıları çözümleme ve basamak değerlerini bulma ile ilgili yanlışlardan bahsetmiştir. Aynı şekilde Yavuz Mumcu (2015) basamak kavramı ile basamak değeri kavramının yanlış kullanımı üzerine yanlış belirtmiştir. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının yarısının ondalık sayıyı çözümleyebildiği anlaşılmıştır. Sayıyı kesre çevirme, sayının okunuşunu yazma, virgüllü görmezden gelme gibi hatalar tespit edilmiştir. Yenil (2020) ve Yavuz Mumcu’nun (2015) çözümleme ile ilgili belirttiği öğrenci kavram yanlışları bu çalışmadaki öğretmen yanlışları ile benzeşmektedir.

Paydası sıfırdan farklı olmak üzere iki tam sayının oranı şeklinde yazılabilen sayıların ondalık gösteriminde ondalık kısım sonlu veya devirlidir. Bu durum rasyonel sayıların her birinin bir ondalık gösterimi olduğu sonucuna götürür. Ancak bazı çalışmalar öğrencilerin ve öğretmen adaylarının bu hususta yanlışlarının olduğunu ortaya koymuştur (Voskoglou ve Kosyvas, 2011; Vinner ve Kidron, 1985; Ercire, 2014; Zazkis ve Sirotic, 2004; Kara ve Delice, 2012 vb.). Bu çalışmada bu yanlışla ilişkin iki soru yer almaktadır. KNT’de 7’nin katı olmayan bir doğal sayının 7’ye bölümünün her zaman devirli olup olmayacağı sorulmuştur. Yedi sayısı özellikle Voskoglou ve Kosyvas (2011) ile Vinner ve Kidron (1985) tarafından belirtilen sonuçlardan dolayı seçilmiştir. Öğretmen adaylarının yarıdan fazlası $a/7$ kesrinin her zaman devirli olamayacağını bildirmiştir. Görüşmelerde bu konunun üzerine gidildiğinde Halit isimli öğrenci önce bölerek denemek gerektiğini söylemiş sonra her zaman devirli olacağını belirtmiştir. Ancak 4. sınıf öğretmen

adaylarından biri rasyonel hale getirme kuralına atıfta bulunarak paydanın 9, 90, 999 gibi sayılar olacağını 7 olamayacağını belirtmiştir. Paydanın 7 olma durumunda ondalık kısmın sonlu veya π gibi karışık gideceğini açıklamıştır. Bir başka öğretmen adayı da payın değerine göre durumun değişeceğini, bu nedenle bölerek denemek gerektiğini bildirmiştir. Bölerek sonucu bulmaya çalışan bir diğer 4. sınıf öğretmen adayı ise bölme işleminde biraz ilerledikten sonra devirli çıkmayacağını belirtmiştir. Zazkis ve Sirotic (2004) öğretmen adaylarının a/b biçiminde verilen sayının rasyonelliğini doğrudan kabul etmediklerini, a 'yı b 'ye bölme eğiliminde olduklarını ortaya koymuştur. Çalışmadaki bulgular da Zazkis ve Sirotic'i (2004) destekler niteliktedir. Voskoglou ve Kosyvas (2011) hem lise öğrencilerine hem de üniversite öğrencilerine $5/7$ 'nin tam değerini sormuş lise öğrencilerinin %14'ünün üniversite öğrencilerinin ise sadece %3'ünün sonucu bulabildiğini bildirmiştir. Vinner ve Kidron (1985) öğrencilere $1/7$ kesrinin ondalık temsili virgülden sonraki 50. hanesini sormuş ve katılımcıların sayının devirli olup olmadığını anlama noktasında güçlük yaşadığını bazılarının bunun farkına varamadığını ifade etmiştir. "Devreden kısım uzun olamaz." şeklinde bir kavram yanılgısının varlığını tespit etmiştir. EPT'de devirli kısmın basamak sayısı üzerine bir soruya yer verilmiştir. 10 tane rakam olduğu için a/b rasyonel sayısının en fazla 10. basamaktan sonra devredeceğine ilişkin önermenin doğruluğu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının yaklaşık %60'ının önermenin doğru olduğunu belirttiği anlaşılmıştır. Görüşme yapılan öğretmen adaylarına da bu soru sorulmuş ve devirli kısmın en fazla 3 basamak olduğunu belirten adaylar olduğu gibi sonsuza kadar devretmeden de gidebileceğini belirten adayların olduğu da görülmüştür. Bir öğretmen adayının sıfır sayısının bir etkisinin olmadığını bu nedenle en fazla 9 basamaktan sonra devretmeye başlayacağını belirtmesi de dikkat çekici bir söylem olmuştur. Zazkis (2004) 53/83 gibi bazı rasyonel sayıların ondalık açılımının çok ilerideki basamaklarda devredebildiğini bunun için bir sınır olmadığını ifade etmiştir. Ancak öğretmen adaylarının bu sayıları devirsiz olarak ele alabildiğini ve irrasyonel sayı olarak sınıflayabildiğini tespit etmiştir.

Ondalık gösterimin bir türü olan devirli ondalık gösterim öğrenci, öğretmen adayı ve öğretmenlerin en çok zorluk çektiği konulardan biri sayılabilir. KNT'de öğretmen adaylarından devirli ondalık sayıyı a/b şeklinde yazmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının neredeyse tamamının rasyonel hale getirme kuralını uyguladığı anlaşılmıştır. Yarıdan fazlası a/b ifadesini doğru şekilde bulabilmiştir. Yapılan hatalar incelendiğinde ise sayının pay kısmını bulurken zorluk yaşayanların daha fazla olduğu anlaşılmıştır. Pala (2016), ortaokul matematik öğretmenlerinin %86'sının kural yoluyla devirli sayıyı rasyonel hale getirdiklerini bildirmiştir. Denklem yardımıyla çözüm bulanların da olduğu ifade edilmiştir. Her iki çalışmada da benzer şekilde kurala dayalı bir dönüşümün gerçekleştirildiği söylenebilir. Ancak öğretmen adayları bu kuralı uygularken neden

kuralın işlediğini yani altında yatan matematiksel gerekçeyi bilip bilmediğini öğrenebilmek için EPT’de kural biraz daha özelleştirilerek $0,\bar{a} = a/9$ şekline getirilmiş ve öğretmen adaylarından ispatı istenmiştir. Öğretmen adaylarından analitik düzeyde ispat yapanlar %10’da kalırken neredeyse yarısının 1. Seviyede olduğu yani kurala dayalı olarak gerekçelendirme yaptığı anlaşılmıştır. Koçak (2015) aynı kuralın gerekçesini sormuş ve görüşme yapılan 10 öğretmen adayından yedisinin kuralın nedenini açıklayabildiğini ancak geri kalanların formülsüz dönüşüm yapılamayacağını düşündüğünü belirtmiştir.

Devirli ondalık ifadelerle ilgili yaşanan sorunlardan biri $0,\bar{9}=1$ eşitliğinin anlaşılması üzerinedir. Gerek öğrenciler gerek öğretmen adayları gerekse öğretmenlerle yapılmış çalışmalar bu eşitliğin anlamlandırılmasının zor olduğunu göstermektedir (Baki ve Güç, 2014; Weller ve diğerleri, 2009; Tall ve Schwarzenberger, 1978). Bu çalışmada da KVT’de öğretmen adaylarına bu iki ifadenin eşit mi yaklaşık olarak eşit mi olduğu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının sadece dörtte biri tam olarak eşit olduğunu belirtebilmiştir. Kural uygulanarak elde edilen rasyonel sayının sadece bir gösterim olduğunu gerçek sayıya eşit olmadığını belirten öğretmen adayları da mevcuttur. Katılımcıların yarıdan fazlası $0,999\dots$ ’un daha küçük olduğunu savunmuştur. Görüşme yapılan öğretmen adaylarıyla bu sorunun üzerinde tartışılmıştır. Bu iki sayı arasında bir sayının olduğunu düşünen ama kendisinin bulamadığını belirten öğretmen adayı olmuştur. Benzer şekilde limit durumunda iki ifadenin eşit olduğunu ancak normalde eşit olmadığını belirten öğretmen adayı da olmuştur. Bir öğretmen adayının yaklaşımı ise “Ortalamalarını alırsak aralarındaki sayıyı buluruz.” şeklindedir. İki sayıyı $1,99999\dots$ şeklinde toplamış ancak nasıl böleceğine karar verememiştir. Sonrasında rasyonel hale getirme kuralını uygulamış ve ortalamayı 1 bulmuştur. Ama yine de sonucun 1 tam olmadığını yaklaşık olarak 1 olduğunu belirttiği görülmüştür. Görüşme yapılan 4. sınıf öğretmen adayı ısrarla ikisinin eşit olmadığını savunmuş ve araştırmacıya sonunda bunların eşit olduğu söylenecek diye korktuğunu bildirmiştir. Burroughs ve Yopp (2010), katılımcı olan öğretmen adaylarının tamamının bu eşitliğin doğru olmadığına inandığını, $0,9999\dots$ sayısının 1’den küçük olduğunu düşündüklerini tespit etmiştir. Tall ve Schwarzenberger (1978) öğretmen adaylarıyla yaptığı çalışmada da aynı durumdan bahsetmektedir. Weller ve diğerleri (2009), bazı katılımcıların bu iki ifade arasına sayı yerleştirebileceğini ve bu nedenle yaklaşık olarak eşit olacağını düşündüklerini belirtmiştir. Ayrıca bu eşitliğin hem işlemsel hem de kavramsal olarak derinlemesine anlaşılmasının hem öğretmenler hem de öğretmen adayları açısından oldukça zor olduğunu ifade etmiştir.

$0,\bar{9} = 1$ eşitliğine inanmayan bir öğretmenin öğrencilerin bu konudaki yanılgılarını da tespit edemeyeceğini tahmin edebiliriz. ÖBT’de bir öğrencinin $3,999\dots$ sayısının sayı doğrusunda 4’ün solunda yer aldığına ilişkin düşüncesinin doğruluğu, öğrencinin ne

düşünmüş olabileceği ve muhtemel kavram yanılgısı sorulmuştur. Öğretmen adaylarının yaklaşık yarısı öğrenciyi haklı bulurken yarısı ise hatalı olduğunu belirtebilmiştir. $3,\bar{9}$ sayısının 4'ün solunda olduğu konusunda öğrenciyi haklı bulan ancak bu iki sayının birbirine eşit olduğunu da belirten öğretmen adayları da vardır. Eşit olsa da ya da eşit kabul edilse de hemen solunda olduğu yanılgısı mevcuttur. Baki ve Güç (2014) öğrencilerde de aynı sorunlarla karşılaşmış ve bu sayıların eşitliğinin yuvarlama olmadığını belirten etkinlikler yapılmasının gerekliliğini vurgulamıştır.

Baki ve Güç (2014), devirli sayılarla yapılan dört işlemde öğrencilerin güçlük yaşadığını ortaya koymuştur. Öğretmen adaylarının bu güçlüklerle ilgili farkındalıklarını tespit etmek amacıyla bu çalışmada devirli sayılarla işlemleri içeren PAB soruları sorulmuştur. ÖBT'de $0,\bar{9} \times 0,\bar{2}$ işleminin sonucunun $0,\bar{2}$ 'den daha küçük olduğunu belirten bir öğrencinin yanılgısı olup olmadığı ve ne düşünmüş olabileceği öğretmen adaylarına sorulmuştur. Öğretmen adaylarının büyük bir kısmı öğrencinin hatalı olduğunu belirtmiştir. Öğrencinin ne düşünmüş olabileceği sorulduğunda $0,999\dots$ 'u 1'den küçük gibi hesaplayarak 1'den daha küçük bir sayı ile çarpıldığında sayının küçüleceği düşüncesinde olabileceklerini belirtenler olmuştur. Bazı öğretmen adaylarının önce kendilerinin kontrol ettiği de görülmüştür. Her iki ondalık ifadeyi de kesre dönüştürüp çarpma yapmışlardır. Baki ve Güç (2014) tarafından tespit edilen bölme işlemi ile ilgili kavram yanılgısı da öğrenci bilgisi kapsamında öğretmen adaylarına sorulmuştur. $3,\bar{3}/0,\bar{2}$ işleminin sonucunu tam sayı olarak belirten bir öğrencinin hatası olup olmadığı sorulduğunda öğretmen adaylarının her iki sayıyı da kesre çevirerek işlemi yaptığı ve yanıt verdiği anlaşılmıştır. Bazı öğretmenler öğrencinin hatalı olduğunu belirtmiştir. İki devirli sayının bölümünün de devirli sayı olması gerektiği gibi yanılgıların öğretmen adaylarında da mevcut olduğu ve bu yanılgının öğrenci hatasını tespit etmeyi imkânsız kıldığı anlaşılmıştır.

KNT kapsamında devirli sayılarda toplama işlemi ile ilgili öğretmen adaylarına $0,9999\dots$ ve $0,111\dots$ sayılarının toplamı sorulmuştur. Öğretmen adaylarından yarıdan azı bu soruyu doğru yapabilmıştır. Alt alta yazıp toplamaya çalışarak son basamağını 0 olarak yazan ve bu iki sayının birbirini tamamladığını bu nedenle sonucun 1 tam olacağını belirten öğretmen adayları olmuştur. Burroughs ve Yopp, (2010), aynı toplama işlemi örneğini ele aldığı çalışmada bu tür hataları engellemek için öğretmen adaylarının gerekirse her bir basamak değerini ayrı ayrı toplayarak sayıları çözümlemeleri gerektiğini bildirmiştir. Çözümleme yaparak sayıları değerlendirmek, devirsiz ondalık sayılardaki kuralların devirli ondalık sayılara aşırı genellenmesini de önleyebilir. Baki ve Güç (2014), iki devirli ondalık sayıyı toplayan katılımcıların devirsiz sayılardaki gibi toplama işlemini yapabildiğini tespit etmiştir. Bu çalışmada da ÖST (2. Soru)'de iki devirli sayının toplamı ile ilgili aşırı genelleme yapan bir öğrenciye verilmesi gereken dönüt öğretmen adaylarına sorulmuştur.

Verilen dönütlerin yarıya yakını (%40) hem yanılığını teşhis eden hem de gidermeye yönelik olan geçerli bir dönüt iken geri kalanlar eksik veya yanlış dönüt olmuştur. Ayrıca verilen dönütlerin daha çok öğretmen merkezli olduğu, öğretmen adaylarının bilgiyi doğrudan aktarmaya çalıştığı anlaşılmıştır. Ondalık sayıların kesre dönüştürülüp toplanması öğretmen adaylarının önerilerinden biridir.

Ondalık sayılarla ilgili yanılığardan birinin doğal sayı yanılığı olduğu söylenebilir. Ondalık sayılar aşırı genelleme yapılarak doğal sayılar gibi sıralı düşünülebilmektedir. Bu konuda öğrencilerin yaşadıkları güçlükler çeşitli çalışmalarda ortaya konmuştur (Özçakır, 2019; Steinle ve Stacey, 1998b; Gür ve Seyhan, 2004 vb.) Bell ve Baki (1997), ondalık sayılardaki yoğunluğu anlayamamanın bu tür güçlükler neden olduğunu göstermiştir. Bu yanılık ve yanılığının kaynağının farkında olunmasının öğretmen adayları için gerekli olduğu söylenebilir. Çalışmada öğrenci bilgisi bileşeni kapsamında “0,1 ile 0,11 sayılarının ortasındaki sayı 0,6’dır.” şeklindeki bir öğrenci görüşünün doğruluğu ve varsa öğrencinin yanılığı sorulmuştur. Öğretmen adaylarının %90’ı öğrencinin hatalı olduğunu belirtse de neden hatalı olduğu konusunda doğru açıklama yapabilenler bunların yarısı olmuştur. Öğrencinin haklı olduğunu belirten öğretmen adaylarının sayıları doğal sayı gibi sıraladıkları, 0,1 ile 0,12’nin ortalamasını 0,6 olarak bulabildikleri görülmüştür. Hart (1981) de öğretmen adaylarının 0,41 ile 0,42 ondalık sayılarının arasındaki sayıları bulurken bazılarının bu iki sayı arasında başka sayı olmadığını belirttiklerini ifade etmiştir. Bazılarının ise 0,411 ile 0,419 arasında doğal sayı gibi düşünerek dokuz sayı bulabildiklerini belirtmiştir. Depaabe ve diğerleri (2015) ile Tirosh ve diğerleri (1999) benzer sorularla aynı sorunu tespit etmişlerdir. Bu sorunun doğal sayı yanılığından ve rasyonel sayıların yoğunluğunu kavrayamamaktan kaynaklandığı söylenebilir. Aynı güçlüklerin öğretmen adaylarında da öğrencilerdeki gibi mevcut olduğu gerek bu çalışmada gerekse diğer çalışmalarda ortaya konulmuştur. Bu nedenle öğrenci hatalarını tespit konusunda eksiklerin olması doğal karşılanabilir.

ÖBT’de yer alan aynı soruda bir başka öğrencinin yapmış olduğu “ $0,3 + 0,9 = 0,12$ ” yanılığı öğretmen adaylarına sorulmuştur. Diğer alt sorulardan ziyade bu soruda yanılığını neredeyse tüm öğretmen adayları tespit etmiş ve büyük bir kısmı yanılığının muhtemel nedenlerini de ortaya koymuştur. Aykaç (2008), Kaya (2015) ve Özçakır (2019) tarafından tespit edilen ve öğrencilerde görüldüğü belirtilen kavram yanılığı ile ilgili öğretmen adaylarının farkındalığı da bu çalışma ile ortaya konmuştur.

Kesirlerin yanı sıra parça bütün ilişkisini gösteren temsil biçimlerinden biri yüzdelerdir. Alan bilgisi kapsamında PÇT’de öğretmen adaylarına yüzde hesaplamaları gerektiren iki tane problem sorulmuştur. Kuyumcu sorusu orantı ve yüzde kavramaları ile ilgili olup öğretmen adaylarının yaklaşık %40’ı soruyu tamamen çözebilmiştir. Yanlış

yanıtların bir kısmı orantı hatasından, bir kısmı yanlış çözüm sırası uygulamaktan, bir kısmı da yüzde-kesir dönüşümü yapmamaktan kaynaklanmıştır. PÇT'nin son sorusunda da ALES sorusuna benzer olacak şekilde yüzde, orantı ve cebir bilgisi gerektirecek bir soru sorulmuştur. Soruyu doğru yanıtlayanlar yine tüm katılımcıların yaklaşık %40'ı olmuştur. Öğretmen adaylarının yarısından fazlası soruları çözemezken çözenlerin de birim kesir yaklaşımından ziyade denklem çözme yolunu tercih ettikleri görülmüştür. Bu durumu Ngu (2018) da ortaya koymuş ve öğretmen adaylarının yüzde problemlerini daha az bilişsel süreç gerektiren cebirsel yoldan çözdüklerini belirtmiştir.

ÖST'de yüzde problemi ile ilgili bir senaryo ortaya konmuş ve %10 indirimle satılan pantolonlardan iki tane alan birinin tüm fiyattan %20 indirimle ödeme yapacağını düşünen bir öğrenciye bilişsel çatışma yaratmak için nasıl bir dönüt verilmesi gerektiği sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bir kısmı bilişsel çatışma yaratacak bir dönüt verebilirken, bazıları öğrenciyi doğrudan yönlendirecek ve soruyu öğrencinin kendine çözdürecek öğrenci merkezli dönütler vermiştir. Çözümü kendileri yaparak öğrenciye doğrudan aktarma yoluna giden öğretmen merkezli katılımcılar da mevcuttur. Ancak ortada bir yanlışın olmadığını belirtip öğrenciye yaptığının doğru olduğunu belirten öğretmen adayları da olmuştur. Öğretmen adaylarının kendi yanılgılarının yanlış bir öğretime yol açacağı ortadadır. Cincinatus ve Sheffet (2016), öğretmen adaylarının sayısal soruları aşırı genelleyerek yüzdelerde de benzer işlemleri yapabildiklerini ortaya koymuştur. Bu soru için de öğrencinin yanıtını doğru bulan öğretmen adaylarının %10 ile %10'u toplayarak aşırı genelleme yaptıkları söylenebilir.

5.1.4. Oran ve orantı kavramlarına ilişkin tartışma

Oran ve orantı kavramlarının sayılar ve işlemler öğrenme alanının en temel kavramlarından biri olduğu söylenebilir. İlk kez 6. sınıf düzeyinde tanışılan bu kavramlar 7. sınıf öğretiminde de yer almaktadır. Çemberde açı, yay uzunlukları, daire diliminin alanı, grafikler, eğim gibi pek çok matematiksel kavramın öğretiminde ön bilgi olarak kullanıldığı söylenebilir. Ayrıca fen derslerinde yoğunluk, hız, kuvvet gibi temel kavramların da birer oran belirttiği aşikardır. Öğrencilere yönelik yapılmış pek çok çalışma oran ve orantıya yönelik güçlüklerin olduğunu ortaya koymuştur (Adak ve Aliustaoğlu, 2020; Çetin, 2009; Simon ve Blume, 1994 vb.) Brown, Epstein ve Orrill (2020) ile Çıkla ve Duatepe (2002) gerek öğretmenlerin gerekse öğretmen adaylarının oran ve orantı ile ilgili zorluk yaşadığını ortaya koymuştur. Bu çalışmada da orantı sabiti ve birimli ve birimsiz oran kavramları ile ilgili öğretmen adaylarının bilgileri ortaya konulmaya çalışılmıştır.

KNT'de orantı ile ilgili tek soru sorulmuştur. İşlemsel düzeyde olan soruda üç tane çokluk verilmiş ve doğru orantılı ve ters orantılı olanlar için orantı sabitinin bulunması istenmiştir. Öğretmen adaylarının büyük bir kısmı doğru orantıda orantı sabitini bulabilmiş

ancak ters orantıda yarıdan fazlası orantı sabitini hesaplayamamıştır. Doğru orantıda iki sayının EBOB'unun orantı sabiti olduğu yanlışlığı görülmüştür. Ters orantıda da en sık görülen hata doğru orantıda olduğu gibi iki çokluğun birbirine bölünmesi olmuştur. KVT'de öğretmen adaylarından orantı sabiti kavramını doğru ve ters orantı ile ilişkilendirilerek açıklamaları istenmiştir. Doğru orantıdaki orantı sabitini öğretmen adaylarının yarıdan fazlası doğru açıklayabilirken, ters orantı sabitini açıklayabilenlerin sayısı %26'larda kalmıştır. KNT'de yer alan soruya göre KVT'deki bu soruda doğru yapma oranı azalmıştır. Bunun nedeni olarak, sayıların yer aldığı soruda öğretmen adaylarının deneyerek de olsa bir cevap verebildiği ancak açıklama istendiği zaman kavramsal bilgi eksikliğinden dolayı zorluk yaşamış olabilecekleri yorumu yapılabilir. Ayrıca öğretmen adaylarının açıklamalarına bakıldığında “3 yumurtaya 5 bardak un kullanılıyorsa, 6 yumurtaya 10 bardak un kullanılır” tarzı ifadelerde orantı sabitini bulurken aynı çoklukları oranlayabildiği görülmüştür. Ters orantıda ise aynı çoklukların çarpımı eşit olmadığı için orantı sabitini bulmada benzer bir sorunun görülmediği söylenebilir. Bu sonuçlara benzer olarak Külcüoğlu (2019) orantı sabitini belirlemeyle ilgili öğretmen adaylarının güçlükleri olduğunu tespit etmiştir.

Öğretmen adaylarının birimli ve birimsiz oranla ilgili kavramsal bilgilerini ortaya koyabilmek adına KVT'de her iki oran türünü de örneklerle açıklamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının büyük bir kısmının iki kavramı da yanlış bildiği anlaşılmıştır. Birimli oranla ilgili, “yanında birimleri olan oranlar, payı 1 olan oranlar, değeri 1 olan oranlar, sonucu tam sayı olan oranlar” gibi farklı biçimlerde kavram imajlarının olabildiği görülmüştür. Koçyiğit Gürbüz (2018) ile Külcüoğlu (2019) birimli ve birimsiz oranla ilgili öğretmen ve öğretmen adaylarının güçlükleri olduğundan bahsetmiştir. O çalışmayı destekler biçimde bu çalışmada iki kavram ile ilgili öğretmenlerin yanlışları daha detaylı ortaya konulmuştur. Ortaya çıkan yanlışlardan en sık görülenler maddeler halinde aşağıdaki gibi özetlenebilir.

- $\frac{a}{b} = k$ iken $k \in \mathbb{Z}$ ise oran birimli $k \notin \mathbb{Z}$ iken oran birimsizdir.
- Yüzde, binde gibi birimi belli olanlar birimlidir. Kesir biçiminde yazılanlar birimsizdir.
- Yanına litre, kg gibi birimler yazıldığında birimlidir. Birim yazılmazsa birimsizdir
- Çokluklar aynı cinsten olursa birimlidir. Farklı cinsten olursa birimsizdir.
- Kesrin paydası 10 ve kuvvetleri olabiliyorsa birimlidir. Ondalık hali devirli oluyorsa birimsizdir.
- $\frac{a}{b} = 1$ ise oran birimlidir. $\frac{a}{b} \neq 1$ ise oran birimsizdir.

- a/b oranında a ve b aralarında asal ise oran birimsizdir. Ancak a ve b sadeleşebilir ise oran birimlidir. Sadeleştiği miktar da birimdir
- Aynı değişkenli ifadelerin oranı birimlidir. Farklı değişkenli ifadelerin oranı birimsizdir
- Ölçülerin oranı birimli, adet sayılarının oranı birimsizdir.
- Nicelik bildirenler birimli, sözel karşılaştırma içerenler birimsizdir.
- Payı 1 olan oranlar birimlidir. Diğerleri birimsizdir.

Oran ve orantı kavramlarıyla ilgili öğretmen adaylarının epistemik bilgi düzeylerini ortaya koymak adına “ $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = k$ ise $\frac{x+y}{a+b} = k$ olur.” özelliğinin gerekçesi sorulmuştur. Öğretmen adaylarının yaklaşık yarısı analitik ispatla eşitliği gösterebilmiştir. Sınıf düzeylerine göre artış olmuş, son sınıf öğretmen adaylarında analitik ispatlar %80'lere çıkmıştır. Üniversite eğitiminde soyut matematik, soyut cebir gibi derslerin etkisiyle öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerinin artmış olabileceği düşünülebilir. Bazı öğretmen adaylarının kuralları ispat ederken zorlandıkları görülmüştür. Koçak (2015) ve Agbozo ve Fletcher (2020) öğretmen adaylarının kuralları bilmesine karşın gerekçelendirmelerde güçlük yaşayabildiğini belirtmiştir.

Çıkla ve Duatepe (2002), öğretmen adaylarının oran orantıyla ilgili soruları kendilerinin çözebilmesinden önce öğrencilerin ne düşündüğüne ve nasıl çözdüğüne dair fikirlerinin olmasını daha değerli bulmuştur. Valverde ve Castro (2012), öğretmenlerin öğrenci muhakemelerine aşına olmadığı durumlarda öğrencilerin orantısal akıl yürütmelerini yanlış görme eğiliminde olduğunu ortaya koymuştur. Öğrencilerin oran orantı konusundaki kavram yanlışları ile ilgili bilgilerini inceleyebilmek adına ÖBT'de senaryo içeren iki soru sorulmuştur. Bunlardan biri çarpımsal akıl yürütme yerine toplamsal akıl yürütme yapan bir öğrenci ile ilgili senaryodur. Öğretmen adaylarının yarıdan fazlası öğrencinin kavram yanlışlığını tespit edebilmiştir. Ancak öğrenci yanlışlığını sadece yanlış orantı kurulumuna veya çözümüne bağlayan öğretmen adayları da olmuştur. Bu öğretmen adaylarının öğrenci yanlışlığının orantının çözümü gibi basit işlem hatalarından kaynaklandığını düşünerek muhtemel kavram yanlışlarını sorgulamadıkları dikkat çekmiştir. Şen (2022), öğretmenlerin öğrenci hatalarının altında kavramsal sebepler aramak yerine işlemsel sürece odaklandıklarını belirtmiştir ve bu soru ile ilgili öğretmen adaylarının yaklaşımları Şen'in (2022) tespitini doğrulamaktadır. Bir başka soruda farklı iki şubedeki kız öğrenci oranları verilip bu iki şube birleştirildikten sonra oluşan yeni sınıftaki kız öğrenci oranı ile ilgili beş öğrencinin yorumları verilmiş ve öğretmen adaylarından bu yorumları değerlendirmeleri istenmiştir. Soruyu doğru cevaplayan öğrencinin yanıtını muhakeme edemeyen bazı öğretmen adaylarının öğrencinin yanıtını

yanlış değerlendirdikleri görülmüştür. Diğer dört öğrencinin yanıtı yanlış olduğu halde bazı öğretmen adayları tarafından doğru olarak değerlendirilmiştir. Bu öğretmen adaylarının iki şubenin de sınıf mevcutlarının verilmediğini ve farklı olabileceğini hesaba katmadıkları düşünülebilir. Öğretmen adaylarının kendi muhakeme eksikliklerinin öğrencileri yanlış yönlendirmelerine neden olabileceği söylenebilir. Bu ifadeyi destekler şekilde Bahar (2019), oran orantı konusunda bazı öğretmen adaylarının öğrenci kavram yanlışlarını belirleyemediklerini ve bu nedenle öğrenciye doğru dönüt vermediklerini ortaya koymuştur. Ekawati ve arkadaşları da (2015) öğrencilerin kavram yanlışları ve özellikle orantı problemlerini çözerken kullandıkları stratejilerle ilgili daha fazla hassasiyete ihtiyaçları olduğunu ifade etmiştir. Bazı öğretmen adaylarının öğrencilerin çözümlerini değerlendirme ve analiz etme ile ilgili zorlandıklarını ortaya koymuştur.

5.1.5. Çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanına ilişkin tartışma

Çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanına ait kazanımlar MEB'e (2018) göre 6. sınıf ve 8. sınıfta yer almaktadır. Alt öğrenme alanında çarpan, kat, bölen, asal sayı, bölünebilme, aralarında asallık, EBOB ve EKOK gibi kavramlar yer almaktadır.

Bu çalışmada çarpan, kat ve bölen kavramlarına hem konu bilgi düzeyinde hem de kavram bilgi düzeyinde yer verilmiş ayrıca öğrenci bilgisi bağlamında da ele alınmıştır. KNT'de 40 sayısının tam sayı çarpanlarının neler olduğu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının yarıdan fazlası tam sayı çarpanlarını listeleyebilmiştir. Yanlış sonuçların kaynağına inildiğinde ise eksik listeleme, pozitif çarpanları ele alma ve sadece asal çarpanları ele alma olarak en temel 3 sorundan bahsedilebilir. Ayrıca asal çarpanlara yanlış ayırma ve formülü yanlış uygulama şeklinde hatalar da olmuştur. Özdeş (2013) de benzer şekilde çarpan veya bölen sayısı sorulduğunda asal çarpan sayısının bulunduğu ile ilgili yanılığdan bahsetmiştir.

Öğretmen adaylarının çarpan, kat ve bölen kavramları ile ilgili kavram imajlarını ortaya çıkarmak için KVT'de bir sayının çarpanları, katları ve kalansız bölenlerinin ne anlama geldiği ve birbirleriyle ilişkileri sorulmuştur. Öğretmen adaylarının vermiş oldukları yanıtlardan çeşitli kavram yanlışlarına sahip oldukları anlaşılmıştır. Mohyuddin ve Khalil (2006) bazı öğretmen adaylarının 1 veya sayının kendisini çarpanlardan saymadığını belirtmiştir. Akkan ve Öztürk (2019) benzer şekilde öğretmen adaylarının kat alırken sayının kendisini ihmal ettiğini bildirmiştir.

Bu çalışmada ayrıca kalansız bölen ve kat kavramını eş değer gören adaylar olmuştur. Katın asal çarpanların derecelerinden meydana geldiğini düşünme, bir sayının kuvvetleri ile katlarını eş değer görme, bölüneni EBOB katı EKOK kavramlarına eş değer görme gibi yanlışlar da tespit edilmiştir. Zazkis (2000) tarafından da belirtildiği gibi kat, bölen ve çarpan kavramları karıştırılabilmektedir. ÖBT'de yer alan ilk soruda öğretmen

adaylarına öğrencilerin kurdukları cümlelerin doğruluğunu incelemeleri; hata, eksiklik veya kavram yanlışlığı içerebilecek olanları açıklamaları istenmiştir. Sıfırın her doğal sayının katı olduğu şeklindeki bir öğrenci görüşünü öğretmen adaylarından yanlış bulanlar olmuştur. Sıfırın sadece sıfırın katı olduğu, sayı/sıfırın tanımsız olmasından dolayı veya sıfırın yutan eleman olmasından dolayı kat olamayacağı gibi düşüncelerle öğrencinin doğru olan yanıtının yanlışlığını belirtmişlerdir. Kavramsal bilgidaki eksikliğin öğrenci bilgisini de etkilediği söylenebilir. Zazkis (2000) öğretmen adaylarının kat kavramında zorlandığını 19 öğretmen adayından sadece dördünün doğru tanım yapabildiğini belirtmiş ve bu kavramsal eksikliklerin öğretim sürecini etkileyeceğini de öne sürmüştür.

Çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanının en önemli kavramlarından birinin de asal sayı olduğu söylenebilir. KNT’de asal sayı bulmaya yönelik soruda ikiz asallık tanımı verilmiş ve 100’den küçük ikiz asallar sorulmuştur. Öğretmen adaylarının az bir kısmı 71 ve 73 doğru yanıtını verebilmiştir. En çok 89-91 ve 87-89 hatalı yanıtları verilmiştir. Akkan ve Öztürk’ün (2019) belirttiği gibi öğretmen adaylarının tek sayıları asal sayı görme eğiliminde olduğu söylenebilir. Asal sayı ile ilgili kavramsal bilgileri ortaya koyabilmek için KVT’de kavramın tanımı sorulmuştur. Öğretmen adaylarından sadece beşi uygun ve titiz tanım yapabilmıştır. Tanımlarda ‘pozitif bölen’ kavramının atlandığı, “2,3,5,7,... şeklinde giden sayılar” ve “1’den büyük 1’e ve kendisine bölünebilen sayılar” gibi asal sayılardan çok daha geniş veya sınırları belirsiz kümelerle işaret eden ifadelerin yer aldığı görülmüştür. “Yalnızca 1’e ve kendisine bölünebilen sayılardır.” Tanımı en çok yapılan yanlış tanımlamalardan olmuştur. Birçok öğretmen adayının “1” sayısını ve negatif sayıları atladığı anlaşılmıştır. Görüşme yapılan Çise gibi bazı öğretmen adaylarının asal sayıları bildiği ama tanımlayamadığı görülmüştür. Güreffe ve Aktaş’ın (2020), son sınıf 48 öğretmen adayından sadece üçünün asal sayı tanımını uygun ve titiz şekilde yapabildiğini bulması; Zazkis ve Campbell’in (1996a, 1996b) asal sayı tanımında negatif ifadelerin kavramın anlaşılmasını zorlaştırdığını belirtmesi ve Zazkis’in (2005) “bölünemeyen”, “olmayan” gibi olumsuz ifade içeren tanımlamaların yapıldığını belirtmesi bu çalışmadaki bulgularla örtüşmektedir. Ancak bu çalışmada yapılan görüşmeler, öğretmen adaylarının asal sayıları bildiğini ancak tanımlamada zorlandıklarını ve kritik noktaları atladıklarını ortaya koymuştur. Zazkis ve Liljedahl (2004) ise öğretmen adaylarının asal sayıyı doğru tarif edebildiğini ancak 151x157 sayısının asallığı sorulduğunda doğrudan cevap veremeyerek araştırma yapabildiğini ortaya koymuştur. Bu durumun öğretmen adaylarının asal sayı kavramını eksik, tutarsız ve kural güdümlü olarak öğrenmelerinden kaynaklandığını aktarmıştır.

Asal çarpanlara ayrılmış bir sayıdan yola çıkarak pozitif çarpan sayısını bulma formülünün gerekçesi öğretmen adaylarına sorulmuştur. Öğretmen adaylarının %80’i

Seviye 2 ve altında gerekçelendirmelerde bulunmuştur. Bir kısmı kuralın denenerek ortaya çıktığını belirterek kuralı uygulamış, bir kısmı sayı örnekleri üzerinden açıklama yapmıştır. Ancak çok az sayıda öğretmen adayı formal bir ispat yapabilmıştır. Özdeş (2013), bir doğal sayının pozitif tam bölenlerinin sayısını bulmak için kullanılan formülün yanlış kullanıldığını tespit etmiştir. Öğretmen adaylarının bu yanlış kullanımı formülün nereden geldiğini anlayamamalarından kaynaklanabilir. Bu çalışma da formül ile ilgili öğretmen adaylarının gerekçelendirme eksikliğini göstermiştir.

Asallık ile karıştırılabilen kavramlardan biri aralarında asallıktır (Akkan ve Öztürk, 2019). Aralarında asallık kavramı ile ilgili öğretmen adaylarının da öğrenciler gibi kavram yanlışları mevcuttur. Bu durum pedagojik alan bilgilerini de etkileyebilmektedir. KVT’de öğretmen adaylarına aralarında asallığın tanımı sorulmuştur. Ortak asal çarpanın yokluğundan, EBOB’ların 1 olmasından, sadeleştirilememekten yararlanılarak yapılan uygun tanımlar olmuştur. Ancak aralarında asallığı sadece doğal sayılarda tanımlayan sınırlandırıcı tanımlar olduğu gibi, “birbirinden başka sayıların katı olmayan sayılar”, “bölenleri farklı olan sayılar”, “ortak bölenleri asal olan sayılar”, “1’e ve birbirine bölünebilen sayılar” şeklinde gerek ve yeter şartların hiçbirini taşımayan tanımlamalar da olmuştur. 8. sınıfta öğrencilere ardışık sayıların aralarında asal olduğu söylenebilmektedir. Bu nedenle EPT’de ardışık sayıların aralarında asal olduğu önermesinin doğruluğu ve gerekçesi öğretmen adaylarına sorulmuştur. Öğretmen adaylarından sadece 16’sı formel ispat yapabilmiş ve 16 kişiden 1’i hariç tamamı son sınıf öğretmen adayı olmuştur. Bu durum görüşme yapılan öğretmen adaylarına sorulduğunda ispatı “elementer sayı kuramları” dersinde gördüklerini belirtmişlerdir. Diğer sınıftaki öğrenciler daha çok sayıları deneyerek ispatlamaya çalışmışlardır. Aralarında asallık ile ilgili son soru da öğrenci bilgisi üzerine olmuştur. Aralarında asal sayıların en az birinin asal sayı olacağını belirten bir öğrencinin kavram yanlışlığı olup olmadığı sorulmuş, öğretmen adaylarının büyük bir kısmının öğrencinin hatalı olduğunu belirttiği görülmüştür. Ancak bunun aralarında asallığın şartı olduğunu ifade eden öğretmen adayları da olmuştur. Özdeş (2013) ile Akkan ve Öztürk’ün (2019) aralarında asallık kavramı ile ilgili tespitleri bu çalışmayı destekler niteliktedir.

Bölünebilme kavramı 6. sınıf kazanımları arasında yer almaktadır. Öğretmen adaylarının bölünebilme kurallarını bilmekten ziyade bölünebilmenin kavramsal alt yapısına da hakim olması gerektiği söylenebilir. Öğretmen adaylarına bölünebilme ile ilgili KNT’de iki soru sorulmuştur. Çarpma ve toplama işlemi içeren “ $452 \cdot 22 + 134$ ” sayısının 3 ile bölümünden kalanı bulurken yarıdan fazlası modüler aritmetikten yararlanarak soruyu çözerken önce işlemin sonucunu bulup sonra bölünebilme kuralını uygulayan öğretmen adayları da olmuştur. Öğretmen adaylarının genelinin modüler aritmetiğin temel kurallarını

bilmedikleri veya uygulamadıkları görülmüştür. Zazkis ve Campbell (1996b) 3 sayının çarpımı olarak verdiği bir M sayısının bazı sayılara bölümünden kalanı sormuş ve öğretmen adaylarının bazılarının M sayısının bileşenlerine odaklanmak yerine sayının kendisini bulup sonra kural uygulama yoluna gittiklerini veya bölme yaptıklarını tespit etmiştir. Bölünebilme ile ilgili KNT’de yer alan bir diğer soruda aralarında 10 fark bulunan iki sayı arasında 7’ye bölünebilen bir sayı olup olmadığıdır. Bu soru Zazkis ve Campbell (1996a) tarafından da öğretmen adaylarına sorulmuştur. Her iki çalışmanın da bulguları öğretmen adaylarının bazılarının 9 ardışık sayı arasında kesinlikle 7’ye bölünen bir sayı olacağını yordayamadığını ortaya koymuştur. Bu çalışmada öğretmen adaylarının %40’ının 9 sayıyı da tek tek bölerek veya kural uygulayarak 7 ile kalansız bölünen olup olmadığını anlamaya çalıştıkları görülmüştür. Son sınıf öğretmen adaylarının bu soruda daha iyi sonuçlar aldığı anlaşılmıştır. Bu durum 4.sınıfta görülen elementer sayı kuramları dersindeki modüler aritmetik içeriğinden kaynaklanmış olabilir.

Öğretmen adaylarının kendilerinin de ortaokul kademesinden beri duyduğu ve uyguladığı bölünebilme kurallarının gerekçelerini ve ispatlarını bilebilmesi kuralları zihninde temellendirebilmesi için de önemli görülebilir. Bu konudaki epistemik düzey bilgilerini ortaya koyabilmek adına 3 ile bölünebilme kuralının gerekçesi öğretmen adaylarına sorulmuştur. İlk üç sınıf seviyesinde öğretmen adayları sayı örnekleri vererek gerekçelendirme eğiliminde olmuşlardır. Seviye 0 ve Seviye 1’de olan öğretmen adayları ilk üç sınıf düzeyinde %50’dir. Ancak son sınıf öğretmen adaylarının yarıdan fazlası modüler aritmetiğin temel prensiplerini kullanarak formel (analitik) ispat yapmıştır. Görüşme yapılan 4. sınıf öğretmen adayının “elementer sayı kuramları” dersinde kuralların gerekçelerini öğrendiğini belirtmesi bu dersin öğretmen adaylarının öğretime özgü alan bilgilerinin gelişimi konusunda faydasını ortaya koymuştur. Contay ve Duatepe Paksu (2019) ortaokul matematik öğretmenlerinin ispat şemalarını incelediği çalışmada öğretmenlerin en çok dışsal, sonra analitik ve en son deneysel ispat şemasına uygun gerekçelendirmelerde bulunduğunu belirtmiştir. Bu çalışmada ise son sınıf öğretmen adaylarının en çok analitik ispat, diğer sınıflardaki öğretmen adaylarının ise en çok deneysel ispat yaptığı göz önüne alındığında iki çalışmanın sonuçlarının farklı olduğu söylenebilir.

Çarpanlar ve katlar öğretiminde 8. sınıfta EBOB ve EKOK kavramlarıyla karşılaşmaktadır. Öğretmen adaylarının bu konularla ilgili alan bilgilerini incelemek adına PÇT’de yer alan iki soruda EBOB EKOK kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının rutin işlemlerde iki sayının EBOB veya EKOK’unu kolay bir şekilde bulabildiği ancak soruda bulunan bilginin ne anlama geldiği, en büyük ortak bölenin mi yoksa daha küçük bir bölenin mi bulunması gerektiği noktasında zorluk yaşayabildiği görülmüştür. Noblet

(2013) de öğretmen adaylarının EBOB problemlerini anlama, uygulama ve problem kurma ile ilgili güçlüklerini ortaya koymuştur. Öğretmen adaylarına kavram bilgi düzeyi kapsamında EBOB kavramının tanımı sorulmuştur. Kavramı uygun ve titiz olacak şekilde sadece 4. sınıf öğretmen adaylarından yedisi tanımlayabilmiştir. Öğretmen adaylarının yaklaşık yarısının tanımlarında EBOB'un pozitif tam sayı olması gerektiği ve seçilen sayıların tam sayı olması gerektiği gibi ölçütlere yer verilmediği anlaşılmıştır. Diğer öğretmen adaylarının tanımları ise yeter şartı, gerek şartı veya her ikisini de sağlamayan tanımlar olmuştur. Karadeniz ve diğerleri (2019) ile Çubukluöz ve diğerlerinin (2018) öğrencilerin EBOB ve EKOK kavramlarıyla ilgili bahsetmiş olduğu güçlükler öğretmen adayları ile yapılmış bu çalışmada EBOB ile ilgili yanlış tanımlamalarda da ortaya konmuştur. Çalışmada EKOK tanımı sorulmayıp EKOK ile ilgili uygulama sorulmuştur. Brown ve diğerleri (2002) öğretmen adaylarının EBOB EKOK bulma yöntem ve stratejilerini incelerken Dias (2005) EKOK bulma için kafes yöntemini (lattice) önermiştir. Bu çalışmalardan yola çıkarak öğretmen adaylarına iki sayının EKOK'unu bulmak için öğrencilere hangi yöntemlerin öğretilebileceği sorulmuş ve iki sayı verilerek en az iki farklı yöntemle EKOK'larını bulmaları istenmiştir. Öğretim stratejileri bilgisi kapsamında sorulan bu soruda öğretmen adaylarının en çok kullandığı yöntem bölme algoritması olmuştur. Bunu asal çarpanların çarpımı şeklinde yazarak üslerin maksimum değerini alarak bulma yöntemi izlemiştir. Bazı öğretmenler de listeleterek yani her iki sayının katlarını alarak ortak olan en küçüğünü bulma yöntemini belirtmiştir. Pasmaz ve Küpcü (2010) de öğretmen adaylarının en çok bölme algoritmasını kullandıklarını belirtmiştir. Farklı bir yöntem istendiğinde listeleme, asal çarpanların çarpımı şeklinde üslü yazılarak en küçük veya en büyük derecelilerle EBOB EKOK bulunması ve sadeleştirme ile aralarında asal yapma gibi yöntemler kullandıkları belirtilmiştir. Brown, Thomas ve Tolias (2002) öğretmenlerin üç yöntem izlediğini belirtmiş ve ilk sırada listeleme yöntemini ifade etmiştir. Asal çarpanların çarpımı şeklinde yazarak EKOK bulma yöntemi de bu çalışmaya benzer şekilde belirtilmiştir. Son olarak bu çalışmadan farklı olmak üzere sayılardan birinin ardışık katlarının listelenmesi ve aynı anda bu katların diğer sayıya bölünüp bölünmediğinin kontrol edilmesi ile EKOK bulan katılımcılardan bahsetmiştir. Öğretmen adaylarının farklı yöntemleri bilip uygulayabilmesinin öğretim stratejileri bileşeni bakımından önemli olduğu söylenebilir. Alan bilgisindeki hakimiyet pedagojik alan bilgisini de olumlu yönde etkileyecektir. Nitekim asal çarpan, çarpan, EBOB, EKOK gibi kavramları karıştırabilen veya kavramsal olarak bilmeyen öğretmen adaylarının farklı yöntemler gösterme konusunda zorlandığı anlaşılmıştır.

5.1.6. Üslü ifadeler alt öğrenme alanına ilişkin tartışma

5. sınıftan itibaren öğrencilerin öğrenim hayatında yer almaya başlayan üslü ifadeler, 6. ve 7. sınıfta kesintisiz bir sarmalla genişleyerek 8. sınıfta öğrencilerin negatif üs ve bilimsel gösterimi de öğrenmesi ile ortaokul serüvenini tamamlamaktadır. Bu kapsamda öğretmen adaylarının üslü ifadelerle ilgili tanım ve kuralları gerekçeleriyle bilip bilmedikleri yoklanmıştır.

Bilimsel gelişmeleri takip etme açısında gerekli olan ve üslü ifadelerle işlemler yapmayı gerektirmesi nedeniyle önemli bir kavram olan “bilimsel gösterim” tanım bilgisi, bu kapsamda değerlendirilen bilgilerden biridir. Aydın ve Temel (2012), ortaokul öğrencileri ve Fen Bilgisi öğretmenleriyle gerçekleştirdikleri çalışmada öğrencilerin çoğunun Fen ve Teknoloji ders kitaplarında geçen bilimsel gösterimleri anlayamamasının sebebinin bu konunun matematikte 8. sınıfta anlatılmasına karşın Fen ve Teknoloji ders kitaplarında bu kavramları içeren ifadelerin 6. ve 7. sınıfta yer alması olduğunu aktarmışlardır. 8. sınıf öğrencileri ile yaptığı tez çalışmasında Bayram (2013), öğrencilerin verilen çok küçük veya büyük bir sayıyı bilimsel gösterimle yazma başarılarının çok düşük olduğunu bulmuştur. Bu çalışma kapsamında da bilimsel gösterim için çok az sayıda öğretmen adayı uygun tanım yapabilmiş, uygun ve titiz olarak tanım yapan öğretmen adayı ise olmamıştır. Buna ek olarak öğretmen adaylarının bazılarının çözümleme kavramıyla bilimsel gösterimi karıştırdığı da gözlemlenmiştir.

Öğretmen adaylarına KNT’de üslü ifadeler ve işlemler içeren bir soru sorulmuştur. Bu soru içinde 4 farklı bilgi (Negatif tam sayının üssü, ondalık bir ifadenin negatif üssünü hesaplama, sıfırın bir pozitif tamsayı üssünü hesaplama ve son olarak bu iç işlemin sonucunda elde edilen sayılarla dört işlem yapma) test edilmiştir ve öğretmen adaylarının %71’i bu soruyu doğru yanıtlamıştır. Zazkis (1998), öğretmen adaylarının üslü ifadelerde teklik ve çiftlik kavramı ile pozitiflik ve negatiflik kavramının birbirine karıştırılabildiğini belirtmiş olmasına rağmen bu soruda -3^2 ’nin sonucunu tüm öğretmen adaylarının doğru bulduğu ve yapılan yanlışların yaklaşık yarısının sıfırın pozitif tamsayı üssünü hesaplama ile ilgili olduğu görülmüştür (sonucu 0 bulmak yerine 1 bulmuşlardır). Buna ek olarak, soruyu doğru yanıtlama oranının en yüksek olduğu sınıf seviyesi 1. sınıflardır. Bu durum öğrencilerin, üslü sayı bilgilerini üniversiteye geçiş sınavında diğer sınıf seviyelerindeki öğrencilere göre daha yakın zamanda kullanmalarından kaynaklanıyor olabilir.

Üslü sayılarla işlemler kapsamında sorulan sorulardan biri de “ $96 \cdot 5^6$ sayısı kaç basamaklıdır?” sorusudur. Bu soruyu öğretmen adaylarının %80’inin doğru yanıtladığı görülmüştür. Bununla birlikte öğretmen adaylarının bir kısmının gereken çarpanlara ayırma ve üslü işlemleri yapamayarak veya bu işlemlerde hata yaparak $15 \cdot 10^5$ ifadesine ulaşamadıkları görülmüştür.

Üslü sayılarla işlemler bilgisinin test edildiği bir diğer soru bir problem bağlamı içinde sorulmuştur (*Kurban Bayramında Türkiye'nin 81 ilinin her birinden eşit sayıda küçükbaş hayvan toplanıp bu hayvanlar yardım amacıyla Afrika'da 7.3^3 , Asya'da 2.3^5 farklı bölgeye her bir bölgede 48.5^2 hayvan olacak şekilde gönderilmiştir. İzmir'den bu yardım için toplanan küçükbaş hayvan sayısının rakamlarının toplamı kaçtır?*). TEOG sınavında çıkmış olan bir problemin düzenlenmiş hali olan ve üslü ifadelerde toplama, çarpma ve bölme işlemlerini gerektiren bu soruda öğretmen adaylarının yaklaşık olarak yarısı (%48) 4. seviyede yanıtlar vermişlerdir. Hangi işlemin yapılacağı konusunda hatalar yapan öğretmen adayları olmuştur. Kimileri işlemin ne olacağını doğru tespit ettiği halde üslü ifadelerde işlem yaparken zorluk yaşamıştır. Ayrıca tüm üslü ifadelerin değerini bulup doğal sayılarla işlemler yaparak sonuca ulaşan öğretmen adayları da olmuştur.

8. sınıfta üslü ifadelerle ilgili kurallar önemli bir yer tutmaktadır ve öğrencilerin hatırlamakta veya kullanmakta zorlandıkları konulardan biri haline gelmektedir. Bu bağlamda öğretmen adaylarına “*tabanları aynı olan iki üslü ifade çarpıldığında taban aynı kalırken üsler toplanır*” kuralının gerekçesi sorulmuştur. Çünkü öğrencilerin tabanların aynı olduğu çarpmalarda üsleri çarpma (Sidar ve Yılmaz, 2020) biçiminde kavram yanlışlarına sahip oldukları bilinmektedir. EPT'deki bu soruda, öğretmen adaylarının yaklaşık %31'i sayı örnekleri ile ispatlamalar yapmış, cebirsel dili tercih etmemiştir. 1. sınıf öğretmen adaylarının yarıya yakını (%47,5) bu şekilde örnek temelli deneysel ispatlama yoluna gitmiştir. Üslü ifadelerin cebirsel olarak açınımından ve her birinin adet toplamından yola çıkarak yapılan ispatlamalar 3. sınıf ve 4. sınıf öğretmen adaylarında %50'den fazla olmak üzere tüm öğretmen adaylarının %42,5'ini oluşturmuştur. 4. seviyede yer alan öğretmen adaylarının sayısının en yüksek olan ikinci sorunun bu soru olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının büyük bir kısmı üslü ifadenin açınımından yararlanarak soruyu yanıtlamıştır. Benzer bulgulara Gökkurt ve diğerleri (2012) de ulaşmıştır. Matematik öğretmenlerinin alan ve pedagojik alan bilgileri arasındaki ilişkiyi inceleyen Gökkurt ve diğerleri (2012), $a^n + a^m = a^n \cdot a^m$ kuralına yönelik öğretmenlerin yaklaşık üçte birinin epistemik düzeyde ve doğru açıklamalar yaptığını aktarmışlardır.

Üslü ifadelerde kavram yanlışlarına en çok “ $a \neq 0$ ise, $a^0 = 1$ ” kuralının uygulanmasında karşılaşıldığı söylenebilir. Literatürde öğrencilerin “sonucu sıfır bulma” (Crider 1998; Özkan ve Özkan, 2012; Ulusoy 2019, Rabin ve diğerleri, 2013) ve “sayının kendisine eşit sanma” (Cengiz 2006; Ulusoy 2019) gibi kavram yanlışları olduğu bilinmektedir. Levenson (2012), matematikte tanımların keyfiliklerinden yola çıkarak tanımın genişletilebileceğini, bu ifadelerin bir tanım olduğunu bu nedenle de ispat yapmaktan ziyade sadece açıklama yapılabileceğini ifade etmiştir. Bununla birlikte, bu kuralın tanım veya kural olarak verilmesi yönünde literatürde ortak bir karar bulunmamaktadır. Bu kural

ile ilgili yukarıda belirtilen yaygın kavram yanlışları düşünülerek bu çalışma kapsamında öğretmen adaylarının ne tür bir gerekçelendirme yaptıkları da sorulmuştur. Verilen yanıtların daha çok üslü ifadelerin tersleri de alınarak ve üslü ifadelerin diğer özelliklerinden yararlanılarak yapılan gerekçelendirmeler olduğu görülmüştür. Logaritmadan yararlanarak yapılan gerekçelendirmeler veya bir a sayının üssünün adım adım azaltılması ve her adımda sayının a 'ya bölünerek a^0 'ın 1'e eşit olduğunun gösterilmesi gibi ispatlama girişimleri bu çalışma kapsamında karşılaşılan açıklamalardır. Literatürde de benzer yollarla (örüntü yolu ve üslü ifadelerde bölme işlemi kuralları) ile açıklamalar yapıldığı bilinmektedir (örn., Johnson, 2016; Cankoy, 2010). Bu gerekçelendirme örneklerinden rastlanmış olmakla birlikte hem bu çalışmada hem de literatürde bu kurala ilişkin öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının çoğunun yeterli açıklama yapamadığı söylenebilir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının yaklaşık %78'i bir sayının sıfıncı kuvvetinin neden 1 olması gerektiği ile ilgili yeterli gerekçe sunamamıştır. Sözel veya cebirsel formel ispatla veya örüntü bularak yapılan gerekçelendirmeler ise tüm grubun %15'ini oluşturmaktadır.

Literatürde öğretmen ve öğretmen adaylarıyla yapılan çalışmalarda da benzer oranların çıktığı söylenebilir. Örneğin, öğretmenlerin çoğunun bu tür kurallara yeterli gerekçelendirme yapamadığını, derslerinde bu gerekçeyi ifade etmenin zaman kaybı olduğunu düşündüklerini ve öğrencilerine kural olarak verip, bu kuralın neden böyle olduğu üzerinde fazla durmadıkları sonucuna ulaşan Gökkurt ve diğerleri (2012), sıfıncı kuvvetin neden 1 olduğu ile ilgili soruda öğretmen adaylarının %39'unun doğru açıklama yaptığını ancak bu açıklamaların sadece %17'sinin epistemik düzeyde yer aldığını aktarmıştır. Benzer şekilde matematik öğretmenleriyle çalışan Cankoy (2010) acemi olarak adlandırdığı yeni öğretmenlerin hiçbirinin bu kural için açıklama yapamadığını, deneyimli olarak adlandırdığı öğretmenlerin ise %56'sının epistemik düzeyde bir gerekçelendirme yapabildiğini aktarmıştır. Öğretmenlerin tamamı göz önüne alındığında ise %76'sı prosedürel anlamayı ve ezberlemeyi destekleyen öğretim stratejileri önerirken, sadece %24,1'i kavramsal anlamayı ve nitel akıl yürütmeyi destekleyen öğretim stratejileri önermiştir. Benzer bir çalışmada öğretmen adaylarının matematiksel kuralları gerekçelendirebilme ve anlamlandırabilme düzeylerini ölçen Koçak (2015), 84 öğretmen adayından yalnızca birinin eşitliği tam olarak açıklayabildiğini, öğretmen adaylarının %19'unun ise kısmen doğru gerekçeler sunduğunu aktarmıştır. Yani öğretmen adaylarının %80'i ya bir açıklama sunmamış ya da sundukları gerekçeler yanlıştır. Benzer şekilde, Güler ve Çelik (2019) de son sınıf matematik öğretmen adaylarının yalnızca %18'inin sıfıncı kuvvetin neden 1'e eşit olduğuna yönelik yeterli bir açıklama ile dönüt verebildiğini söylemiştir. Satan ve diğerleri (2021), çalışmalarındaki öğretmen adaylarının

yaklaşık olarak üçte birinin bu kuralla ilgili kavram yanlışlarının nasıl engellenebileceğini bilmediklerini bulmuşlardır. Tüm bu çalışmalar ışığında, Gökkurt ve diğerlerinin (2017) vurguladığı gibi öğretmenlerin ders içinde yaptıkları açıklamaların/gerekçelendirmelerin çok önemli olduğu söylenebilir.

Wood (2003) yaptığı ders gözleminde üslü ifadenin öğretilmesinde üssün tabanın kaç tane olduğunu gösterdiğine yönelik açıklamanın öğrencilerde “ $a \neq 0$ ise, $a^0=0$ ” yanlışına neden olabildiğini bu nedenle öğrencilerin bu anlam arayışına ve pozitif üslere yönelik sahip oldukları anlayışla tutarlı bir anlam oluşturmalarını sağlayacak gerekçelendirmelere sahip olmaları gerektiğini önermiştir.

Öğretmen adayları üslü ifadelerle işlemler sorusunda -3^2 'nin sonucunu tüm öğretmen adaylarının doğru bulduğu görülmesine rağmen ÖBT’de sorulan “ -4^0 üslü ifadesinin sonucunun Esra +1, Akif ise -1 olduğunu iddia etmektedir. Hangi öğrenci haklıdır? Nedenini açıklayınız.” sorusunda öğretmen adayların bir kısmının (%9) yanlış cevap verdiği gözlemlenmiştir. Buna ek olarak doğru cevap verenlerin ise %31’inin açıklamaları yetersiz bulunmuştur. Bazı öğretmen adayları parantez olursa +1, parantez olmazsa -1 olduğunu belirtmiştir. Ancak nedenini açıklamamışlardır. Benzer kararsızlığın öğrencilerde de görüldüğü ve üs sıfır olduğunda sayının başındaki negatif işareti anlam veremedikleri bilinmektedir (Ulusoy, 2019; Rabin ve diğerleri, 2013)

Bu sorudaki öğrenci yanlışlarını anlayıp anlamadıklarına yönelik öğretmen adaylarının yaptıkları açıklamalar onların kendilerinin de kavram yanlışlarına sahip olduklarını göstermektedir. Örneğin, öğretmen adayları tarafından kullanılan “Tüm sayıların sıfırcı kuvveti 1’dir” ifadesi Gökkurt ve diğerlerinin (2017) çalışmasındaki bulgulara paralel olarak öğrencilerin aşırı genelleme yaparak $0^0=1$ ifadesini düşünmelerine neden olabileceği söylenebilir. Benzer bir genelleme durumuna da “Sayıların çift kuvvetleri pozitif olur. Sıfır çift sayı olduğun için işlemin sonucu +1’dir” ifadesinde karşılaşmıştır. Türnüklü ve Yeşildere (2007), öğretmen adaylarının bir aritmetik işlemin sonuçlarını bulma yeteneklerine rağmen, bazıları içerik bilgisi ile pedagoji arasında bir bağlantı gösteremediğini ve bunu öğrenci düzeyinde açıklayamadığını belirtmişlerdir. Özkaya ve diğerleri (2013) ise öğretmen adaylarının matematik alan bilgisindeki eksiklikleri nedeniyle hataları açıklamada sıkıntı yaşadıklarını aktarmışlardır.

Bir önceki bölümde öğretmen adaylarının sıfırcı kuvvetle birlikte negatif işareti anlamlandırmaları değerlendirilmiştir. Buna ek olarak öğretmen adaylarının üslü bir cebirsel ifadede değişkene verilen negatif ve pozitif değerler için hem bir yanlışlığa sahip olup olmadıkları hem de öğrencilere bu işlemin sonucunu nasıl açıkladıkları incelenmiştir. (“ $a = -2$ ise a^4 kaçtır?” sorusuna; Cem, “ $a^4 = -2^4 = -16$ ” cevabını vermiştir. Özalp ise $a^4 = (-2)^4 = 16$ cevabını vermiştir. Hangisi haklıdır? Aynı hatalı düşüncenin yeniden

tekrarlanmaması ve öğrencilerin ikna edilebilmesi için nasıl bir dönüt verilmelidir?”). Öğretmen adaylarının %86’sı doğru cevabı söyleyebilmesine rağmen sadece %20’si cebirsel gerekçelendirmede bulunmuştur. Doğru yanıt içermesine rağmen yanlış gerekçelendirmelerden biri olan “üs çift olduğu için sonuç pozitifdir” gibi yine öğrenciyi aşırı genellemeye sevk edebilecek açıklamaların olduğu da gözlemlenmiştir. Bu bulgulara paralel olarak öğrencilerin “ $-a^n$ ile $(-a)^n$ ifadelerini ayırt edememe” yanılgısına sahip olduklarını aktaran çalışmalar bulunmaktadır (Cengiz, 2006; Crider, 1998; Orhun 1998; Cangelosi ve diğerleri, 2013; Özkan ve Özkan 2012; Rabin ve diğerleri, 2013). Satan ve diğerleri (2021) öğretmen adaylarının öğrencilerdeki bu işleme yönelik yanılgıların olası nedenlerinin başında öğrencinin parantezin anlamını ve işlevini bilmemesi gibi psikolojik nedenlerin olduğunu ama aynı zamanda öğretmenin derste kullandığı dilin de (pedagojik) etkili olduğunu öne sürdüklerini aktarmışlardır. Bu nedenle, bu tür sorulara öğretmen adaylarının ne tür gerekçelendirme yaptıklarının önemli olduğu söylenebilir.

5.1.7. Kareköklü ifadeler alt öğrenme alanına ilişkin tartışma

Karekök kavramı ile öğrenciler ilk kez 8. sınıfta karşılaşmaktadır. Tam kare kavramı, karekök kavramı ve ilişkisi, kareköklü ifadelerin yaklaşık değerlerinin bulunması, kareköklü sayılarla yapılan işlemler ve problemler konunun içeriğini oluşturmaktadır. Bu çalışmada da kareköklü sayılarla ilgili farklı bileşenlerde çeşitli sorular yer almıştır.

KNT’de tam kare sayı kavramı iki soruda yer almıştır. $\sqrt{35}$ ’den büyük en küçük tam kare sayısı öğretmen adaylarının yarıdan azı 9 olarak bulabilmiştir. Cevabı 6 olarak verip yanılgıya düşen öğretmen adaylarının çoğunlukta olduğu görülmüştür. Halbuki Orman (2020), $\sqrt{9}$ ’un tam kare olduğu hatalı düşüncesinin kaynağını öğretmenlerin doğru tespit edebildiğini ortaya koymuştur. Görüşme verilerinden de yola çıkarak bu durumun tam kare sayı kavramından ziyade kareköklü sayının ondalık gösterimi ile ilişkisinin kurulamamasından kaynaklandığı düşünülebilir. Orhan (2020), öğrenciye öğretim sürecinde kök içinde ve dışında iki sayı gösterilerek hangisinin tam kare sayı olduğunun sorulmasının katılımcı öğretmenler tarafından önerildiğini belirtmiştir. KNT’de bir başka soruda son iki basamağı verilen sayılardan hangilerinin tam kare olabileceği sorulmuştur. Öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu son rakama odaklanmak yerine 3 basamaklı tam kare sayı örnekleri bulmaya çalışmışlardır. Bu nedenle 61 sayısı ile biten tam kare sayı olamayacağını düşünmüşlerdir. Bazı öğretmen adayları ise son rakama odaklanmış ancak 80 ile biten tam kare sayı bulabileceklerini düşünerek hata yapmışlardır.

Alan bilgisinin bir başka boyutu olan kavram bilgi düzeyi için KVT’de öğretmen adaylarına karekök alma işleminin tanımı sorulmuştur. Öğretmen adaylarının yarıya yakını karekök alma işlemini uygun bir şekilde açıklayabilirken yarıdan fazlası gerek ve yeter

şartlardan yoksun tanım yapmıştır. “Bir sayıyı kökten çıkarma” gibi bazı tanımlar kavramın anlamına değinmemektedir. Öğretmen adayları karekök temsiline dayalı tanım olmayan açıklamalarda da bulunmuştur. Ayrıca “bir sayının hangi iki sayının çarpımı olduğunu bulma” şeklinde çarpanların eşit olması gerektiğini belirtmeyen yetersiz tanımlar tespit edilmiştir. Bazı öğretmen adaylarının tanımları ise kavramı sınırlamıştır. Kök içini asal çarpanlarına ayrılması gereken doğal sayıya sınırlayan veya tam kare sayıya sınırlayan tanımlar olmuştur. Sayı örneği veren açıklamalar da karekök alma işleminin spesifik durumlarını içermektedir. “Tam kare sayılarla yapılan işlemdir.”, “tam kare sayının kökünü bulmak”, “içerideki sayının dışarı tam çıkması” ve “tam karenin tersi” gibi yeter ve gerek şart içermeyen tanımlamalar yapılmıştır. Özkaya ve diğerleri (2013) öğrencilerin kareköklü ifadelerle ilgili yaptıkları matematiksel hataların nedenleri arasında öğretmenlerin kendi kavram yanlışlarını ve öğretim sırasında tanımların anlamlarından bahsetmemelerini göstermiştir. Tam kare sayı, karekök alma gibi kavramların açıklayıcı şekilde tanımlanmalarının öğrencilerin kavramı doğru anlaması ve doğru ilişkilendirebilmesi açısından önemli olduğu söylenebilir.

Shabanifar (2014), öğretmenlerin kareköklü sayılarla ilgili kendi yanlışlarının öğrencilerin yanlışları ile örtüştüğünü belirtmiş ve öğrenci hatalarının kaynaklarından birinin öğretmen faktörü olduğunu tespit etmiştir. Öğretmenlerin bazı sorularda öğrenci yanlışlarını tespit edemediği, doğru yönlendirmede bulunamadığı ve yanlışları gidermeye yönelik yeterli bilgiye sahip olmadığını ortaya koymuştur.

Bu çalışmada pedagojik alan bilgisi bileşenleri doğrultusunda kareköklü sayılarla ilgili iki soru sorulmuştur. ÖBT kapsamında biri doğru üçü hatalı olan dört öğrencinin kareköklü ifadelerle ilgili yapmış oldukları açıklamaların değerlendirmesi istenmiştir. Öğretmen adaylarının büyük bir bölümünün öğrenci hatalarını doğru tespit ettiği anlaşılmakla birlikte, öğrenci ile benzer yanlışla sahip olanların yanlışları göremediği anlaşılmıştır. “ $\sqrt{a^2} = a$ ” ifadesinde mutlak değer göz ardı edilmiş olmasına rağmen, bu hatayı tespit edemeyen öğretmen adayları olmuştur. Özkaya ve diğerleri (2013), öğrencilerin mutlak değeri ihmal ettiği benzer bir hatayı öğretmen adaylarının tamamının doğru tespit ettiğini ancak %66’sının doğru açıklama yapabildiğini belirtmiştir. Kaplan ve diğerleri (2014), ortaokul öğrencilerinin de aynı yanlışla sahip olduğunu göstermiştir. Aynı soruda yer alan bir başka ifade de “ $\sqrt{a^2 + b^2} = a+b$ ” eşitliğinin hatalı olduğunu tüm öğretmen adayları belirtmiş ancak bazıları hatayı açıklamamıştır. Alanyazında aynı yanlış Şenay (2002), Yücesan (2013) ve Shabanifar (2014) tarafından da belirtilmiştir. Sorunun son yanlış içeren ifadesi “ $\sqrt{a^{16}} = a^4$ ” olmuştur. Bu eşitliğin doğru olduğunu belirten az sayıda öğretmen adayı olmuştur. Özkaya ve diğerleri (2013), kökün içinde üslü ifade yer aldığı zaman öğrencilerin üssün karekökünü alarak hata yaptığı benzer bir soruda öğretmen

adaylarının büyük bir bölümünün hatayı doğru tespit ettiğini ancak hatayı yanlış tespit eden veya bulamayan adayların da olduğunu ifade etmiştir. Araştırmacılar öğretmen adaylarının hataları tespit edememesini ve doğru açıklamalar yapamamasını matematiksel bilgi yoksunluğuna bağlamışlar ve bu bilgi yoksunluğunun öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerini de etkilediklerini ifade etmişlerdir. Özkaya ve diğerlerinin (2013) bu çalışması öğrenci bilgisi bileşeni açısından matematik alan bilgisinin önemini de ortaya koymaktadır.

PAB'ın diğer bileşeni olan öğretim stratejileri bilgisi kapsamında $2\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$ ve 3,5 sayılarını sıralamaya çalışan ve $2\sqrt{3}+5$ işleminin sonucunun yaklaşık değerini bulmaya çalışan iki öğrenciye öğretmen adaylarının önerebileceği yöntemler sorulmuştur. Sıralamanın nasıl yapılması gerektiğine ilişkin soruya öğretmen adaylarının %80'i doğru öneri verirken, yaklaşık değer bulma konusunda öğretmen adaylarının yarıdan azı tamamen doğru açıklamalarda bulunmuştur. Sıralamada yaşanan en büyük güçlük 3,5 sayısının karekök temsili ile bağlantısını kuramamak olmuştur. Diğer iki sayının bulunduğu aralığı tespit eden öğretmen adayları 3,5 ile onları ilişkilendirememiştir. Güler ve Çelik (2019) öğretmen adaylarının kareköklü sayıları sıralama ile ilgili öğrenci yanılgılarını tespit edebildiklerini ancak bu yanılgıları ortadan kaldırmak için neler yapmak gerektiğini bilmediklerini ve öğretim stratejileri bileşeninde (içeriği sunma) düşük performans sergilediklerini ortaya koymuştur. $2\sqrt{3}+5$ işlem sonucunun yaklaşık değerinin bulunması konusunda da her iki sayının da karesini alarak toplama yapmak gibi öğretmen adaylarının doğru olmayan önerileri mevcuttur. Öğretmen adaylarının yarısından azı doğru bir açıklama ile sayının 8-8,5 aralığında olduğunu ifade edebilmiştir. Aksu ve diğerleri (2013) ile Sirotic (1998) sırasıyla $1-\sqrt{5}$ sayısının ve $\sqrt{5}$ 'in yaklaşık değerini sormuş ve öğretmen adaylarının bunları belirlemede zorluk yaşadığını, bazılarının açıklamalarının matematiksel dayanağı olmadığını belirtmiştir. Alan bilgisindeki bu eksikliğin öğrencilere yol gösterme konusunda zorluk yaratacağı ve onlara kaçamak cevaplar verilmesine neden olacağı düşünülebilir.

5.1.8. Rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayılara ilişkin tartışma

Gerçek sayılarla ve onun bileşenleri olan rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilgili pek çok öğrenci yanılgısı ve öğrenme güçlüğü mevcuttur (Fichbein ve diğerleri, 1995; Ercire ve diğerleri, 2016; Ercire, 2014; Voskoglou ve Kosyvas, 2011). Bu çalışmada sayı kümelerinin kendisi ve birbirleriyle ilişkilerine yönelik çeşitli sorular yer almaktadır. Kümelerin tanımları, sayıların kümelerine göre sınıflandırılması, sayı kümelerinin birbirleriyle ilişkisi, kümelerin yoğunlukları gibi farklı bağlamlarda bulgular tartışılacaktır.

KVT’de yer alan kavramlar arasında “uygun” tanımlanma oranı en düşük beş kavramdan üçü rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayı olmuştur. Bu çalışmada aynı Adams’ın (1998) bulgularında olduğu gibi öğretmen adaylarının %21’i rasyonel sayıları doğru tanımlayabilmiştir. Uygun olmayan tanımlar arasında en çok “a / b şeklinde yazılabilen sayılar” ifadesi yer almaktadır. Toluk Uçar (2016) da benzer şekilde birçok öğretmen adayının rasyonel sayıyı “Pay ve payda şeklinde ifade edilen sayılar” şeklinde tanımladığını belirtmiştir. Bu çalışmada a ve b için gerçek sayıların veya doğal sayıların elemanları olacağı şeklinde öğretmen adaylarının yanılgıları olmuştur. Payın ve paydanın tam sayı olması gerektiği tanımlarda atlanmaktadır. a ve b’nin aralarında asal olup olmaması konusu da tartışmalıdır ve öğretmen adaylarının farklı görüşleri mevcuttur. Ercan ve Aktaş (2021) öğretmenlerin kavram tanımlamalarını inceledikleri çalışmada rasyonel sayı tanımını yaparken aralarında asallığa vurgu yapan öğretmenlerin yapmayanlara göre daha fazla olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca Macit ve Nacar (2019) bu çalışmaya benzer olarak a/b ifadesinin öğretmen adayları tarafından rasyonel sayıların belirteci olarak görüldüğünü belirtmiştir.

İrrasyonel sayının tanımı yapılırken öğretmen adayları zorlanabilmektedir. Güler (2017) araştırmaya katılan öğretmen adaylarının hiçbirinin irrasyonel sayıyı uygun bir şekilde tanımlayamadığını ifade etmiştir. Bu çalışmada ise öğretmen adaylarının yaklaşık dörtte biri gerek ve yeter şartları sağlayan uygun bir tanım yapabilmıştır. Bazı öğretmen adayları irrasyonelliği rasyonel sayı olmama üzerinden bazıları ondalık gösterimdeki düzensizlikten bazıları ise karekökten yararlanarak tanımlamayı tercih etmiştir. “Rasyonel olmayan sayılar” şeklinde tanım yapan bazı öğretmen adaylarının karmaşık sayıları ve 5/0 gibi ifadeleri de irrasyonel olarak ele alabildiği görülmüştür. Bu nedenle rasyonellikten yola çıkan tanımların doğrulukları tartışmalıdır. “Gerçek sayılardan rasyonel sayıların çıkmış hali” tanımında dahi öğretmen adaylarının gerçek sayı kümesinden ne anladıkları önemli olmaktadır. Çeşitli çalışmalarda da rasyonel olmayan her sayının irrasyonel sayı olarak görüldüğü ortaya konmuştur (Arbour, 2012; Kara ve Delice, 2012; Ercire, 2014). Benzer şekilde “karekök içinden çıkamayan sayılar” şeklinde bir tanım da irrasyonel sayıları karekök sembolüne sıkıştırmakta ve tüm irrasyonel sayıları karşılamamaktadır. Fichbein ve diğerleri (1995) irrasyonel sayıların anlamlandırılmasında sezgisel güçlüklerden bahsetmiş olup karekök sembolü ile irrasyonel sayının ilişkilendirildiğini ifade etmiştir. Bu çalışmada ondalık kısmın düzensizliğine ilişkin yapılmış tanımlar “uygun” olarak sınıflandırılmıştır. Ondalık temsile dayalı uygun olmayan tanımlama yapan öğretmen adayları da olmuştur. Devirli sayıların veya ondalık kısmı düzensiz ancak sonlu

olan sayıların da irrasyonel olarak algılanabildiği anlaşılmıştır. Arbour (2012) ve Kara ve Delice (2012) ondalık kısmı sonsuza kadar giden sayıların irrasyonel olarak algılanabildiğini bu yüzden de devirli sayıların rasyonelliği ile ilgili yanlışların olduğunu ortaya koymuştur. Ayrıca “gerçek olmayan sayılar” ve “sayı doğrusunda yer almayan sayılar” şeklinde tanımlama yapan öğretmen adayları olmuştur. Bu sonuçlar Adıgüzel (2013) ve Fischbein ve diğerleri (1995) tarafından da tespit edilmiştir.

Rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşiminden oluşan gerçek sayılarla ilgili öğretmen adaylarından yaklaşık %30'u gerek ve yeter şartları sağlayacak şekilde “uygun” tanım yapabilmıştır. Bu orandan daha düşük olmak üzere Adams (1998), öğretmen adaylarının sadece %12'sinin gerçek sayı tanımını yapabildiğini ifade etmiştir. Farklı çalışmalarda yapılan gerçek sayı tanımları benzeşmektedir. “Rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşimi” tanımı uygun ve titiz bir tanım olarak yaygınken “rasyonel ve irrasyonel sayıları kapsayan küme” tanımı da titiz olmamasına rağmen uygun kabul edilebilir. Gerçek sayıların tüm sayıların birleşimi olduğunu, en geniş sayı kümesi olduğunu belirten tanımlarda karmaşık sayıların da dahil edilebildiği anlaşılmıştır. Ayrıca “irrasyonel olmayan sayılar”, “karmaşık olmayan sayılar” veya “köklü olmayan sayılar” gibi geçersiz tanımlar da mevcuttur. Fischbein ve diğerleri (1995) kök işaretinden dolayı sayının gerçek sayı olarak algılanmadığı yanlışından bahsetmiştir.

Sayı kümelerinin tanımlamalarında var olan yanlışlar öğretmen adaylarının o kavramlarla ilgili kavram bilgi düzeyinin yetersizliğinin bir göstergesi kabul edilebilir. KVT’de her rasyonel/irrasyonel sayının gerçek sayı olup olmadığı sorusu da yer almış olup kümeler arasındaki ilişkilerin farkındalığı incelenmiştir. Öğretmen adaylarının neredeyse tamamı tüm rasyonel sayıların gerçek sayı olduğunu öne sürerken irrasyonel sayıların gerçek sayı olduğunu ifade eden öğretmenlerin oranı %70’lerde kalmıştır.

Öğretmen adaylarınca rasyonel olarak düşünülen ancak gerçek sayı olmadığı belirtilen sayılar özetle şunlardır:

- İki irrasyonel sayının oranı şeklinde (kesirli) yazılan sayılar rasyoneldir ancak gerçek değildir.
- π sayısı rasyonel olarak yazılabilir ama gerçek sayı değildir.
- Devirli sayılar gibi ondalık kısmı sonsuza giden rasyonel sayılar gerçek sayı değildir.

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ gibi iki irrasyonel sayının oranının gerçek sayı olamayacağını belirten

öğretmen adayları olmuştur. Kesirli biçimde yazıldığı için sayının rasyonel olduğu ancak irrasyonel sayılardan oluştuğu için de gerçek sayı olamayacağını ifade etmişlerdir. Toluk

Uçar (2016), $\sqrt{2}/7$ sayısını hem rasyonel hem irrasyonel olduğunu belirten bir öğretmen adayından bahsetmiş ve sayı kümelerinin temsil biçimiyle ilişkilendirilmesinin sonucu olarak yanılığın oluştuğunu belirtmiştir. Devirli sayıların ondalık kısmının sonsuz olmasından dolayı gerçek olamayacağını belirten adaylar vardır. π sayısının da yaklaşık değeri rasyonel olarak belirtilebildiği için irrasyonel olan π sayısının gerçek olmadığını düşünen öğretmen adayları olmuştur. Bazı öğretmen adayları irrasyonel sayılarla ilgili de yanılığa sahip oldukları için yanlış yorumlarda bulunmuşlardır. İrrasyonel sayı ve gerçek sayı kümelerinin ilişkisine yönelik ortaya çıkan yanılığlar şunlardır:

- Karekökün içi negatif olan irrasyonel sayılar gerçek sayı değildir.
- i içeren irrasyonel sayılar gerçek sayı değildir.
- π ve e sayıları irrasyonel olmasına rağmen gerçek sayı değildir.
- İrrasyonel sayılar tanımlanamaz ve net değildir. Bu nedenle gerçek sayı değildir
- İki ayrı kümedir. Bu nedenle gerçek sayıların ve irrasyonel sayıların ortak elemanı yoktur.

“ i içeren irrasyonel sayılar gerçek sayı değildir.” şeklinde tanım yapan öğretmen adayının karmaşık sayıları da irrasyonel sayı olarak ele aldığı anlaşılmaktadır. Fichbein ve diğerleri (1995) de karmaşık sayıların irrasyonel sayı olarak düşünülebildiğini belirtmiştir. Çalışmada irrasyonel sayıların hiçbirinin gerçek sayı olmadığı yanılığına sahip öğretmen adayları olmuştur. Benzer bir sonuçla Ercire ve diğerleri (2016), öğrencilerde ve öğretmenlerde rasyonel sayıları gerçek sayılarla eşdeğer görüp irrasyonel sayıların gerçek sayılardan farklı olarak algılanabildiğini ortaya koymuştur.

Rasyonel ve irrasyonel sayıların temsilinde ondalık gösterim kullanılabilmektedir. Öğretmen adaylarının iki tam sayının oranını doğrudan rasyonel sayı olarak belirtmediği bölme işlemini yapma ihtiyacı duyup ondalık kısma göre karar verebildiğine önceki bölümlerde bahsedilmiştir. İlerideki basamaklarda devretmeye başlayan bir ondalık sayının irrasyonel olabileceği düşüncesinin varlığı anlaşılmıştır. Öğretmen adaylarına konu bilgi düzeyi bağlamında $0,\overline{17}$ ve 1,178542 rasyonel sayıları ile 2,31768... irrasyonel sayısı verilip hangi sayı kümelerinde olduğunu işaretlenmesi istendiği soruda üç sayı kümesini de doğru sınıflandıran öğretmen adaylarının az sayıda olduğu görülmüştür. Devirli sayıların irrasyonel sayı olarak algılanabildiği anlaşılmıştır. Görüşme yapılan öğretmen adaylarından biri ondalık kısmı sonsuza giden sayıların irrasyonel olduğunu ifade etmiştir. Arbour (2012) ile Kara ve Delice (2012) de devirli sayıların irrasyonel olduğuna dair yanılığdan bahsetmiştir. Görüşme yapılan bir başka öğretmen adayı devirli sayının

irrasyonel olduğunu ancak kural uygulanırsa rasyonel hale getirilebileceğini ifade etmiştir. Bu görüşün “verilen devirli ondalık sayıyı rasyonel hale getiriniz” şeklinde kitaplarda yer alan soru tipinden kaynaklandığı söylenebilir. Rasyonel hale getirilen şeyin bir irrasyonel sayı olduğunu gerek öğrenciler gerekse kavramsal bilgisi eksik olan herhangi biri düşünebilir. Ayrıca temsile bağlı olarak bir sayının rasyonel-irrasyonel olarak değişebileceği gibi bir algıya sahip olabilir. Nitekim Toluk Uçar (2016) $1/3$ sayısını rasyonel olarak sınıflayıp $0,333\dots$ şeklinde devirli yazıldığında irrasyonel olduğunu belirten ve $\sqrt{16}$ yazınca irrasyonel ancak “4” şeklinde kökten dışarı çıkınca rasyonel olduğunu belirten öğretmen adayları olduğunu ifade etmiştir.

$2,31768\dots$ sayısını da öğretmen adaylarının büyük bir kısmı irrasyonel olarak sınıflamış ancak çok az sayıda öğretmen adayı rasyonel olduğunu belirtmiştir. Bazı öğretmen adaylarının ondalık ifadeleri rasyonellikle bağdaştırdığı, irrasyonellik kavramı imajında karekök temsiline var olduğu verilen yanıtlardan anlaşılmıştır. Ondalık kısmı sonlu ancak düzensiz olan $1,178542$ şeklindeki bir sayıyı öğretmen adaylarının büyük bir kısmı (%78) rasyonel olarak sınıflarken irrasyonel olarak sınıflayanların da olduğu görülmüştür. Her iki soruda da 3. ve 4. sınıf öğretmen adaylarının doğru sınıflandırma oranının ilk iki sınıf düzeyindeki öğretmen adaylarına göre daha yüksek olduğu da ortaya çıkmıştır. Güven ve diğerleri (2011), ondalık olarak yazılmış irrasyonel sayıyı son sınıf öğretmen adaylarının yaklaşık %70’inin, 1. sınıf öğretmen adaylarının ise yaklaşık %30’unun doğru sınıfladığını bildirmiştir. Devirli bir sayının sınıflandırılmasında da benzer şekilde son sınıf öğretmen adaylarının çok daha başarılı olduğu belirtilmiştir. Sınıflar arasındaki farklar iki çalışma için de benzerdir.

Gerçek sayı ile ilgili yanılgıların varlığı sayı sınıflandırmalarında da ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık %30’luk kısmı devirli veya devirsiz olan ondalık sayıları gerçek sayı olarak niteleyememiştir. Güven ve diğerleri (2011), son sınıf öğretmen adaylarının neredeyse tamamının gerçek sayıları doğru tespit edebildiğini ama 1. sınıf öğretmen adaylarında devirli veya devirsiz ondalık gösterime sahip sayıların gerçek sayı olduğunu doğru tespit etme oranının daha düşük olduğunu belirtmiştir.

Ondalık kısmı birer artarak giden $0,12345678910\dots$ şeklindeki bir sayıyı öğretmen adaylarının büyük bir bölümü doğru sınıflandırabilmiştir. Ancak ondalık kısmın kuralı belli olduğu için sayının devirli olduğunu ve rasyonel olduğunu belirten öğretmen adayları da mevcuttur. Zazkis ve Sirotic (2010), ondalık kısmın bir örüntü içerdiği $0,100200300\dots$ gibi durumlarda sayının rasyonel olarak algılanabildiğini ancak örüntü içermediği $0,745555\dots$ gibi durumlarda irrasyonel olarak algılanabildiğini belirtmiştir. Bu nedenle devirli sayıların

tanımlanmasında “örüntü” veya “kural” ifadelerini kullanmak yerine tekrar eden basamaklara odaklanılması yanlışları önlemek açısından daha doğru olabilir.

Gerek tanımı gerek değeri gerekse bulunduğu sayı kümesi ile ilgili çeşitli öğrenme güçlüklerine sahip olunan kavramlardan birinin π sayısı olduğu söylenebilir. π sayısı ile ilgili öğrenci güçlükleri Ercire (2014), Kara ve Delice (2012) tarafından bildirilmiştir. Bu çalışmada KVT’de öğretmen adaylarına da π sayısı ile ilgili sorular sorulmuştur. Tüm katılımcıların sadece %20’si sayının irrasyonel ve gerçek olduğunu, değerinin de 3,14 ve 22/7’ye yaklaşık olarak eşit olduğunu belirtebilmiştir. Güven ve diğerleri (2011) de π ’nin irrasyonelliği ve gerçek sayılığı ile ilgili bazı öğretmen adaylarının yanlışlara sahip olduğundan bahsetmiştir.

π ’nin rasyonel yaklaşımlarından yola çıkarak rasyonel sayı olduğunu düşünen öğretmen adayları olmuştur. Sayının 3,14’e eşit olduğunu belirten öğretmen adaylarının oranı yaklaşık %30 iken 22/7’ye eşit olduğunu belirten öğretmen adayları tüm grubun yaklaşık yarısıdır. Öğretmen adaylarının büyük bir kısmı π sayısının irrasyonel bir sayı olduğunu düşünmektedir. Değerini 22/7 veya 3,14’e eşit görmeleri ve bulunduğu sayı kümesi ile ilgili çelişkili durum görüşme yapılan öğretmen adaylarına da sorulmuştur. Bir öğretmen adayı 22/7’nin de irrasyonel olduğunu belirtmiştir. Kesirli gösterimlerde bölme yaparak irrasyonelliğe karar verilebileceğini ifade etmiştir. Benzer şekilde Sirotic ve Zazkis (2007) ve Arcavi ve diğerleri (1987) π ve 22/7 arasındaki farkı anlamayan bazı öğretmen adaylarının derin bir yanlışya ve kafa karışıklığına sahip olduklarını işaret etmiş ve bu durumun 22/7 ve 3,14 gibi rasyonel sayıların irrasyonel sayı olarak düşünülebilmesine neden olduğunu belirtmiştir. Bir başka öğretmen adayı π ’nin irrasyonelliğini doğrudan belirtmiştir. Sayının 3,14’e yaklaşık olarak eşit ancak 22/7’ye tam olarak eşit olduğunu söylemiştir. Araştırmacının 22/7 ile ilgili soruları üzerine sayıyı bölüp devirli olduğunu bulmuş ve devirli sayıların da irrasyonel olduğu sonucuna varmıştır. Burada öğretmen adayı π sayısının değerini 22/7’nin sonucu ile karşılaştırsa eşit olmadığını anlayabilecektir. Ancak π ’nin 22/7’ye eşitliğine inanması onu yanlışya sürüklemiştir. Güler (2017) bir öğretmenin öğrencilerin sorması üzerine 22’yi 7’ye bölerek kontrol ettiğini ve π ’ye eşit olmadığını anladığını belirtmiştir. Öğretmen adaylarına π sayısının tanımı sorulduğunda da yarısından fazlasının kavramı geçerli bir şekilde tanımlayamadığı görülmüştür. Tanımların birçoğu sayının değeri ile ilgili olmuştur.

Alan bilgisine yönelik sorular öğretmen adaylarının sayı kümelerine ait olan elemanları belirleyebilme ile ilgili güçlüklerini ortaya koymuştur. Bu güçlüklerin pedagojik alan bilgilerine etkisinin görülebilmesi için öğrenci bilgisi bileşenine ait iki soru

sorulmuştur. Öğretmen adaylarından, rasyonel olduğu halde öğrenciler tarafından irrasyonel olarak düşünülebilecek ve irrasyonel olduğu halde rasyonel olarak düşünülebilecek birer sayı örneği istenmiş ve hatalı düşüncenin sebebi sorulmuştur. Rasyonel olduğu halde irrasyonel olarak düşünülebilecek sayılara öğretmen adaylarının %40'ı yanıt verememiştir. Kendileri de bu iki sayı kümesi ile ilgili kavramsal bilgiye sahip olmayan öğretmen adaylarının soruda zorlanmış olabileceği düşünülebilir. En çok $\sqrt{4}$ gibi içerisi tam kare olan köklü ifadelerin karıştırılabileceği belirtilmiştir. Az sayıda öğretmen adayı devirli sayıların, $22/7$ ve $3,14$ sayısının ve iki irrasyonel sayının oranı şeklinde olan $\sqrt{32}/\sqrt{2}$ tarzında sayıları örnek vermiştir. Aslında irrasyonel olan π sayısını örnek veren öğretmen adayları da olmuştur. İrrasyonel olduğu halde rasyonel olarak düşünülebilecek sayı örneği de çok sayıda öğretmen adayı verememiştir. En çok verilen örnek π ve e sayısı olmuştur. $\sqrt{2}/3$ gibi kesirli gösterimleri örnek veren öğretmen adayları da vardır. Aslında irrasyonel sayı olmayan örnekler de verilmiştir. Kökün içi negatif sayılar, $22/7$ ve $3,14$ sayıları bunlardan bazılarıdır. Kara ve Delice, (2012), Fichbein ve diğerleri (1995) ve Adıgüzel (2013) vb. çalışmaların ortaya koyduğu gibi öğretmen adaylarının sayı kümelerine yönelik kavramsal eksiklikleri mevcuttur. ÖBT'de yer alan sonuçlar göstermektedir ki kavramsal eksiklikler öğrenci hata ve kavram yanılgılarını belirleyebilme ile ilgili güçlüklerle de neden olabilmektedir.

Kavramsal bilgileri incelemek amacıyla irrasyonel sayıların toplamalarının ve çarpımlarının her zaman bir irrasyonel sayı oluşturup oluşturmadığı öğretmen adaylarına sorulmuştur. Sirotic ve Zazkis (2007), iki pozitif irrasyonel sayının toplamının ve iki farklı irrasyonel sayının çarpımının sonucunun her zaman irrasyonel sayı olmayacağını belirten çok sayıda öğretmen adayı olduğunu bildirmiştir. Aynı sorular bu çalışmada da öğretmen adaylarına sorulmuştur. Toplama işlemi ile ilgili soruyu öğretmen adaylarının sadece %6'sı doğru bir şekilde açıklayabilmiştir. İki köklü sayının toplamının yine köklü olacağı, ondalık kısmı düzensiz sayıları toplayınca yine düzensiz bir sonuç çıkacağı, devirli sayıları toplayınca sonucun yine devirli çıkacağı, ikisinde de sanal kısım varsa sanal kısmın yine kalacağı gibi yanıtlarla öğretmen adaylarının %66'sı sonucun yine irrasyonel çıkacağını belirtmiştir. Görüşme yapılan öğretmen adaylarından biri kapalılık özelliği gereği sonucun yine irrasyonel çıkacağını belirtmiştir. Negatif sayıları da hatırlatınca sonucun sıfır olabileceğini söyleyen öğretmen adayları iki sayının da pozitif olma durumunda toplama sonucunun kesinlikle irrasyonel olacağını düşünmüştür. Bazı öğretmen adayları irrasyonel sayıları kavramsal olarak bilmediği için “ $\sqrt{1} + \sqrt{36} = 7$ ”, “ $0,286 + 0,214 = 0,5$ ” ve “ $i^4 + i^4 = 1+1 = 2$ ” gibi gösterimlerle iki irrasyonel sayının toplamının rasyonel olabileceğini

ifade etmiştir. Bir öğretmen adayı da $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ gibi bir işlemin sonucunun rasyonel sayıya denk gelebileceğini, iki irrasyonel sayı arasında rasyonel sayıların da olduğunu belirtmiştir. Sirotic ve Zazkis (2007), aynı soruda aynı tür yanılgılardan ve yanlış gerekçelerden bahsetmiştir. Bu güçlüklerin formel bilgi eksikliğinden ve işlemlerdeki deneyim eksikliğinden kaynaklandığını belirtmiştir. Güven ve diğerleri (2016) ile Çelik (2017) de benzer bir soru sormuştur. Sayıların pozitif olma şartı kaldırıldığında çok sayıda katılımcının soruyu doğru yanıtlayabildiğini ifade etmiştir.

İki farklı irrasyonel sayının çarpımının irrasyonelliğine yönelik soruda doğru açıklama oranı daha yüksek olup %40'lardadır. Öğretmen adayları sadeleştirerek veya tam kare yaparak irrasyonel sayıdan kurtulmayı sağlayan örnekler vermiştir. Ondalık temsile odaklanan veya π ve e gibi sayılara odaklanan öğretmen adaylarının doğru yanıt veremediği anlaşılmıştır. İki irrasyonel sayının çarpımının rasyonel olabileceğini belirten ancak irrasyonel sayıları yanlış seçen öğretmen adayları da mevcuttur. Karmaşık sayıların, devirli sayıların ve kesirli sayıların irrasyonelmiş gibi algılanması bu sonuçlara neden olmuştur. Sirotic ve Zazkis (2007) toplama işlemi sorusuna göre bu soruda daha çok öğretmen adayının doğru cevap verdiğini belirtmiştir. Ondalık temsilin soruyu cevaplamadaki negatif etkisinden bahsetmişlerdir. Güven ve diğerleri (2011) iki sayının farklı olması gerektiği sınırlamasını kaldırarak soruyu sormuş ve öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun soruyu doğru yanıtladığını açıklamıştır. İrrasyonel sayı kavramında karekök temsiline odaklanan öğretmen adayları çarpma sorusunda rahatlıkla çarpımları rasyonel olan irrasyonel sayı çifti bulabilmiştir.

Çalışmada irrasyonel sayıların ve rasyonel sayıların yoğunluğu ile ilgili öğretmen adaylarının kavram yanılgıları olduğu görülmüştür. Ercire (2014), öğrencilerin ve öğretmenlerin iki irrasyonel sayı arasında her zaman bir rasyonel veya irrasyonel sayı olamayacağı ile ilgili yanılgılarının olduğunu tespit etmiştir. Ayrıca sezgisel olarak rasyonel sayıların daha çok olduğu yönünde düşüncelerin olduğunu ifade etmiştir. Bu çalışmada öğretmen adaylarına her iki irrasyonel sayı arasında bir rasyonel sayının var olup olmadığı sorulmuş ve örnek vererek açıklamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarından çok azı her iki irrasyonel arasında rasyonel olabileceğini açıklayabilmiştir. Ondalık temsile odaklanan öğretmen adayları soruyu daha kolay çözebilmiştir. Öğretmen adaylarının yaklaşık yarısı her iki irrasyonel arasında rasyonel sayı olabileceğini belirtmesine rağmen açıklamaları yanlış veya tek sayı çifti üzerinden olmuştur. Yani $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$ gibi iki irrasyonel sayı seçip aralarında olan bir tane rasyonel sayı örneği vermişlerdir. Genellemeye uygun bir açıklama yapamamışlardır. Güven ve diğerleri (2011) her iki rasyonel sayı veya

irrasyonel sayının arasında rasyonel veya irrasyonel sayı bulunup bulunmayacağına yönelik dört sorudan öğretmen adaylarının en çok zorlandığı sorunun iki irrasyonel sayı arasında rasyonel sayı bulunabilmesi olduğunu belirtmiştir. Sirotic ve Zazkis (2007) “İrrasyonel sayılar o kadar yoğun ki, aralarında rasyonel olmayan iki tane bulabilirsiniz.” ve “Çok fazla rasyonel yoktur, irrasyoneller rasyonellerin arasındaki boşlukları doldurur.” şeklindeki yanlışlardan bahsetmiştir. Yoğunlukla ilgili ortaya konan yanlışlar kavramsal bilgi eksikliğini göstermektedir. Bu eksiklikler pedagojik alan bilgisini de etkileyebilmektedir. “İrrasyonel sayılar rasyonel sayılara göre daha çoktur. Bu nedenle her iki irrasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı olmayabilir. Örneğin $\sqrt{5}$ ve $\sqrt{6}$ arasında rasyonel sayı yoktur” şeklinde yanlışları olan bir öğrenciye nasıl dönüt verilmesi gerektiği öğretmen adaylarına sorulduğunda katılımcıların %25’inin öğrenciyi haklı bulduğu ve olumlu pekiştireceği anlaşılmıştır. Sadece son sınıf beş öğretmen adayı öğrenci merkezli bir açıklamada bulunup öğrencinin kendisinin yanlışını bulmasını sağlayacak dönüt vermiştir. Bazı öğretmen adaylarının öğrencinin sadece son cümlesine odaklanıp ona uygun cevap verdiği görülürken, bazıları da her iki irrasyonel arasında kesinlikle bir rasyonel sayı olacağını belirtirken öğrencinin örneğini çürütecek bir açıklamada bulunmamışlardır. Ercire (2014), köklü ifade şeklinde verilmiş iki irrasyonel sayı arasında rasyonel sayı bulmanın zorluğunu ortaya koymuştur. Köklü ifadelerle odaklananların sayıların ondalık eşitinden yola çıkarak araya bir rasyonel sayı koyamadığını ifade etmiştir. Öğretmen adaylarının bu durumun farkında olması öğretim sürecinde farklı temsiller kullanmanın gerekliliğini anlamalarına yardımcı olabilir. Kavram yanlışlarını ortadan kaldırmak için Voskoglou (2013), öğretimin gerçek sayıların çoklu temsillerinin ve temsiller arasındaki esnek dönüşümlerin kullanımını vurgulaması gerektiğini öne sürmüştür.

5.2. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sayılar ve işlemler öğrenme alanındaki alan ve pedagojik alan bilgileri incelenmeye çalışılmıştır. Öğretmen adaylarının alan bilgileri incelenirken Kinach’ın (2002b) anlama düzeyleri çerçevesinden yararlanılmıştır. Pedagojik alan bilgisi incelenirken de öğrenci bilgisi, öğretim stratejileri bilgisi ve program bilgisi bileşenleri temel alınmıştır. Bu bölümde alt problemler ışığında bulgulardan elde edilen sonuçlar ve öneriler ortaya konulmuştur.

5.2.1. Alan ve pedagojik alan bilgisine yönelik sonuç ve öneriler

Sayılar ve işlemler öğrenme alanı MEB (2018) öğretim programının en geniş öğrenme alanıdır. Aynı zamanda matematik öğretiminin temellerini içeren sayı kümeleri, kesirler, ondalık gösterim, üslü ifadeler ve kareköklü ifadeler gibi konular öğrenme alanının kapsamını oluşturmaktadır. Bu konuların etkili öğretimini gerçekleştirebilmeleri için öğretmenlerin de alana hakim olması gerektiği söylenebilir. Perkins ve Simons'ın (1988) “bir disiplini anlama düzeyleri” ve Skemp'in (1976) işlemsel ve kavramsal anlamasını bir araya getiren Kinach (2002a) bu çalışmanın da alan bilgisi inceleme çerçevesini oluşturan “Anlama Düzeyleri” sınıflandırmasını ortaya atmıştır. Öğretmen adaylarının alan bilgileri, Kinach (2002a) baz alınarak konu bilgi düzeyi, kavram bilgi düzeyi, problem çözme düzeyi ve epistemik bilgi düzeyi bileşenleri ile incelenmiştir.

Matematiksel terimlerin, algoritmaların, kuralların, işlemlerin bilgisi ve yüzeysel beceriler konu bilgi düzeyinde yer almaktadır. Basamak ve bölük isimlerini hatırlayabilme, bir sayıyı asal çarpanlarına ayırabilme, dört işlem içeren bir soruyu işlem önceliğine bağlı olarak çözebilme, iki sayının EBOB ve EKOK'unu bulabilme, kesirlerle, rasyonel sayılarla, kareköklü ifadelerle işlemler yapabilme gibi temel beceriler bu kapsamdadır.

Bazı matematiksel kavramlar/konular sarmal şekilde eğitim hayatımızda yer alırken bazıları yalnızca belirli bir dönemde karşımıza çıkmakta ve eğitim hayatımızın geri kalanında bu kavramlara pek rastlamamaktayız. Örnek olarak, basamak ve bölük kavramlarının ilkökul/ ortaokul döneminde öğrendiğimiz ve daha sonra aktif şekilde kullanmadığımız kavramlardan olduğu söylenebilir. Bu tür kavramlara yönelik bilgileri yoklandığında öğretmen adaylarından basamak adları için farklı isimlendirmeler veya sıralamalar yapıldığı görülmüştür. Bu durumun en temel nedeninin bu bilgilerini unutmaları olduğu düşünülebilir. Buna ek olarak 4. sınıf öğretmen adaylarının yanıtlarında görülen bölük isimlerinde yapılan yanlışlar “matematik öğretmek üzere yetiştirilen” adayların lisans eğitimleri süresince de bu tür temel bilgileri hatırlatacak şekilde düzenlenmemiş olabileceğine işaret etmektedir. Bu bağlamda, matematik öğretiminin tüm aşamaları/düzeylerinde yer alan kavramlar göz önünde bulundurularak öğretmen yetiştirme programlarının buna göre dizayn edilmesi önerilebilir.

Kavramları bilmenin yanı sıra bir matematik öğretmeninden beklenen, konulara ilişkin sorulara pratik ve anlaşılır çözümler sunması ve öğrencilere bu bilgileri aktarabilmesidir. Bu çalışma kapsamında elde edilen bulgular ise öğretmen adaylarının pratik çözümler yapamadığını (örn., bölünebilme kuralları ile sorularda çarpım veya toplam durumunda verilen işlemlerde modüler aritmetiğin özelliklerini kullanmama) ve ayrıca kendilerinin de çeşitli kavram yanılgılarına sahip olduklarını göstermiştir. Örneğin, “basamak değerlerinin yalnızca onun kuvvetleri olduğu” yanılgısı öğretmen adaylarının 9

basamaklı bir sayının basamak değerleri toplamını 111.111.111 olarak açıklamasına neden olmuştur. Bu ve benzeri yanılgıların öğrencilerin öğrenmeleri üzerindeki etkileri göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adaylarının lisans eğitimleri süresince bu yanılgılarını giderecek şekilde donatılmalarının önemi bir kez daha ortaya çıkmaktadır. Benzer şekilde, bir doğal sayıda basamak adlarında ve çözümlemede hata yapan öğretmen adaylarının, ondalık gösterimle verilen bir sayıda basamaklarda da yanlış adlandırmalar yapmaları veya ondalık sayıyı çözümleyememelerinin de doğal olduğu düşünülebilir.

Dikkat çekici bulgulardan biri de öğretmen adaylarının en iyi performans gösterdikleri konularda bile bilmedikleri veya yanılgıya sahip oldukları detaylar olmasıdır. Örneğin, öğretmen adaylarının doğal sayılarda yuvarlama yapabildiği ancak yuvarlanacak basamaktaki sayının 9 olması durumunda hata yaptıkları görülmüştür. Bu durumun, bir öğretmen adayının/öğretmenin iyi bildiğini düşündüğü konularda bile çok soru çözerek bilmediği detayları da görmesinin gerekliliğine vurgu yaptığı söylenebilir. Ayrıca, bu tür detay bilgiler genellikle test kitaplarında yoklandığından ve öğrencilerin kafalarının karışmasına neden olduğundan bu bilgilere haiz bir öğretmen öğrencilerini bu tür sorulara maruz bırakarak onları daha donanımlı olarak hazırlayabilir.

Sayılar ve İşlemler öğrenme alanı çok çeşitli bilgileri barındırmasına rağmen en temel diyebileceğimiz dört işlemi içermesi bakımından ayrıca önemli olduğu söylenebilir. Bu bağlamda, öğretmen adaylarının, matematik yapmanın temeli diyebileceğimiz dört işlem bilgilerinin yoklanması sonucu elde edilen bulgular matematik öğretmen adaylarına pür matematik derslerinden önce temel matematik dersi verilmesi önerisini gündeme getirmektedir. Çünkü, öğretmen adaylarının 0 rakamı içeren bölme işlemini yaparken zorlandıkları ve hatta bazı adayların bu bölme işlemini anlamadıklarını itiraf ettikleri gözlemlenmiştir. Bu durum, bölme işleminin ezbere yürütüldüğü ve işlem adımlarının anlamlandırılmadığının göstergesi olabilir. Bu nedenle, geleceğin öğretmenlerinin temel işlemlerdeki adımların anlamlandırılması hususunda desteğe ihtiyaç duydukları söylenebilir. Matematik öğretmen adaylarının lisans eğitimi boyunca aldıkları pür matematik derslerinin gerektirdiği üst düzey düşünme ve bilgiler düşünüldüğünde ortaokul seviyesindeki bu bilgi eksikliğinin onları lisans derslerinde de zorlayacağı düşünülebilir.

Hem lisans matematik derslerindeki başarı durumunu hem de matematik öğretimini etkileyebilecek benzer bir durum da işlem önceliği için söylenebilir. Konu testinde, işlem önceliği öğretmen adaylarının genel hatlarıyla iyi bildiği bir bilgi olarak karşımıza çıkarken detay olarak çarpma ve bölme işlemlerinin aynı işlem içinde verildiği sorularda “*çarpma işleminin bölme işlemine göre üstünlüğü var*” gibi yanılgılar nedeniyle öğretmen adaylarının çoğunun tam sayılarda işlem önceliği sorusunda yanlış sonuç bulduğu gözlemlenmiştir. Bu bulgu, öğretmen adaylarının daha önce üniversite giriş

sınavında da yoklanan bu tür bilgileri gerektiren soruları çözerek bu bölüme gelmiş olmalarına rağmen neden yapamadıkları sorusunu gündeme getirmektedir.

Benzer şekilde üniversite sınavı dolayısıyla bilmeleri beklenen “paydaları eşit olmayan tam sayılı kesirlerle toplama çıkarma yaparken payda eşitleme, tam sayılı kesri bileşiğe çevirme, çarpan sayısı bulma, asal çarpanlara ayırma, devirli sayıların a/b biçiminde yazma, sıfırın doğal sayı kuvvetini hesaplama, ters orantılı iki çokluk arasındaki orantı sabitini bulma, asal sayı örneği verme, verilen bir sayının asal olup olmadığını belirleme, iki devirli sayıyı toplama, tam kare sayıları belirleme vb. konu ve işlemlerde ciddi sayılabilecek hatalar yaptıkları bulunmuştur. Ayrıca, öğretmen adaylarının, sayı kümelerinin özelliklerine yönelik eksikliklerini denemeler yaparak tamamladıkları (örn., çıkarma ve bölme işleminde birleşme özelliği için), bazı kavramları (örn., birleşme ve değişme özellikleri) birbirleriyle karıştırdıkları ve birbirlerinin yerine kullandıkları gözlemlenmiştir. Çıkarma işleminde birleşme özelliği olduğunu savunan çok sayıda öğretmen adayının olması şaşırtıcı bir sonuçtur. Buna ek olarak, öğretmen adaylarının yarısından fazlası 6. sınıf sorusunu doğru çözmemiştir.

Temel dört işlemde olduğu gibi bazı kavramlarla ilgili eksiklikler veya yanılgılar birçok konunun öğrenilmesinde ve anlaşılmasında engel teşkil edebilmektedir. Bu çalışma kapsamında da öğretmen adaylarının negatif işareti ile ilgili kavramsal anlama eksiklikleri rasyonel sayı işlemlerinde de hatalar yapmalarına neden olmuştur. Bu bağlamda, özellikle temel kavramlar diye tabir edebileceğimiz bu tür bilgilerin her yıl lisans eğitimi içinde belirli bir program kapsamında yoklanması ve böylece öğretmen adaylarının alan bilgisi öz-yeterlikleri ile ilgili farkındalıklarının artırılması gerektiği söylenebilir. Literatür taraması sonucu bu tür hataları öğrencilerin de yaptığı göz önünde bulundurularak bu hataların önüne geçmesi beklenen öğretmenlerin alan bilgilerinin sağlamlaştırılması için ciddi önlemler alınması önerilebilir.

Matematiğin genel anlamda soyut ve zor kabul edilmesinin yanı sıra bazı konuların öğrenciler ve hatta öğretmenler tarafından bile çok daha soyut ve anlaşılması güç olarak kabul edildiği söylenebilir. Literatürdeki bulgular ışığında (örn., Ercire, 2014) bu konulardan birinin de bir sayının rasyonel ve irrasyonelliğini belirlemek olduğu bilinmektedir. Bu durumun hem kavramın doğası hem de bu konuların öğretiminde kullanılan ezberci yaklaşımdan kaynaklandığı düşünülebilir. Her sınıf seviyesinden öğretmen adayının da benzer kavramsal anlayış eksikliği yaşadığını gösteren bu çalışma doğrultusunda öğretmen adaylarının bu tür “zorluğu ile meşhur” konulardan haberdar olmasının sağlanması önerilebilir. Bu kapsamda, öğretmen adaylarına yol gösterilerek makale ve tez incelemeleri tavsiye edilebilir ve böylece yaşanan güçlüklerle ilişkin bilgi sahibi olmaları sağlanabilir.

Bu çalışma kapsamında oluşturulan KNT’de yer alan soruların hiçbirisi öğretmenlik mesleğine özel olmayıp matematik öğrenmeye çalışan herkesin yapabileceği tarzda seçilmiştir. Bu bağlamda, sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait yüzeysel becerileri yokladığı söylenebilir. Buna rağmen, öğretmen adaylarının doğruluk oranı soruların yarısında %50’nin altında kalmıştır. Yazılı verilerde var olan yanıtlar, görüşmelerde de detaylandırılarak sorulmuş, aynı güçlüklerin var olduğu anlaşılmıştır. Öğretmenlik sürecinde ders verecekleri konularla ilgili kendilerini geliştirebilmeleri adına üniversite eğitiminde buna uygun çalışmalar yapılmadığı takdirde başarılı bir öğrencinin rahatlıkla yapabileceği sorularda geleceğin öğretmenlerinin mesleki yaşamlarında zorlanacağı söylenebilir. Alan bilgisi kapsamında ihtiyacı olan bilgileri mesleğe başladıktan sonra kazanma imkanı bulunmaktadır. Bununla birlikte, basamak ve bölük isimlerini öğrenmek bir öğretmen için zor olmasa da devirli sayının irrasyonel olmadığını anlamaları, rasyonel sayının başındaki negatif tam sayının anlamını kavramaları zamanlarını alacaktır. Üniversite sınavlarında iyi puanlar alarak matematik öğretmenliği okuyan öğretmen adaylarının işlemsel bilgi düzeylerinin bu derece düşük çıkması şaşırtıcıdır. Üniversite eğitiminde öğretmen adaylarının daha zor konuları öğrenirken kolayı unutmamaları sağlanmalıdır.

İşlemsel anlamaya karşılık gelen konu bilgi düzeyinden sonraki bilgi türü **kavram bilgi düzeyidir**. Bu bilgi türü, matematiksel kavramlara yönelik tanımlamaları, kavramlar arası ilişkileri ve sınıflamaları içerir. Bu çalışmada KVT’de sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait 14 matematiksel kavramın tanımı öğretmen adaylarına sorulmuş ve vermiş oldukları yanıtlar Zazkis ve Leikin (2008) tarafından ortaya atılan tanımlama kriterlerine göre değerlendirilmiştir. Ayrıca KVT’nin ikinci bölümünde kavramlar arası ilişkilere ve sınıflamalara yönelik 11 soru yer almıştır. Alan ve pedagojik alan bilgisinin tüm bileşenleri arasında öğretmen adaylarının en düşük ortalamaya sahip olduğu test KVT olmuştur.

Bazı öğrenilen bilgiler ve kavramlar matematik disiplini içinde ve farklı disiplinlerde ortak olarak yer almaktadır. Bu kavramların birbirleri ile ilişkilendirilmeleri gerektiği söylenebilir. Öğretmenlerin matematiksel kavram ve işlemlerin hangi disiplinlerde ne şekilde öğrencilerin karşısına çıkabileceğine ilişkin farkındalıklarını artırmaları ve öğrencileri de bu konuda bilgilendirmeleri beklenmektedir. Bu kavramlardan biri olan “bilimsel gösterim”, Fen Bilimleri dersinde 6. ve 7. sınıfta öğrencilerin karşısına çıkmaktadır ve öğrencilerin bilimsel gösterim içeren çok büyük ve çok küçük sayılarla işlemler yapabilmesi gerekmektedir. Program hazırlayıcılar «bilimsel gösterim» kavramına matematik dersi programında 8. sınıfta yer verdiği için öğrenciler ilk kez fen bilgisi öğretmeninden konuyu öğrenmektedir. Benzer durum birimli oran kavramı için de geçerlidir. Programdaki konu sırasının uyumsuzluğu öğrencilerin 6. sınıfta kavramla fen

bilgisi dersinde tanışmalarına neden olmaktadır. Öğrencilerin ilk öğrenmelerinde oluşan hatalı bir kavram imajını değiştirebilmenin daha zor olacağı ön görülebilir. Bu nedenle matematik öğretmenlerine bu disiplinlerarası kavramların öğretiminde daha çok iş düşmektedir. Bununla birlikte bu çalışma kapsamında elde edilen bulgular öğretmen adaylarının en çok zorlandıkları tanımın bilimsel gösterim tanımı olduğunu ve bir sayının bilimsel gösterimle yazılması konusunda yanlışları olduğunu göstermiştir. Aynı şekilde bir diğer disiplinlerarası kavram olan «birimli oran» kavramında da çok sayıda kavram yanlışlığı ortaya konulmuştur. Her iki kavramla ilgili de alakasız ve yanlış tanımların yapılmış olması da öğretmen adaylarının bu konudaki kafa karışıklığının ve tanımlama bilgisi eksikliğinin göstergesidir.

Tanımlamalarda yapılan yanlışların yanı sıra eksik bilgilerin varlığı da dikkat çekici sonuçlardan biridir. Örneğin, rasyonel sayının tanımında a/b ifadesi belirtildiği halde a ve b 'nin tam sayı olması gerektiği atlanmıştır. Bazı öğretmen adayları a ve b 'nin reel sayılardan seçileceğini bildirmiştir. Ondalık temsilden yola çıkarak yapılan tanımlarda da ondalık kısmı sonlu olan sayıların rasyonel sayı olduğu yanlışlığı görülmüştür. Bu tür hataların giderilmesi için öğretmen adaylarının lisans derslerinde tanımları dikkatli okumasına, tanım cümleleri kurmasına veya verilen yanlış/eksik tanımları düzeltmesine yönelik çalışmaların yaptırılması önerilebilir.

Asal sayı gibi bazı konularda öğretmen adaylarının kavrama örnekler verebildiği ancak tanımı yapamadığı da gözlemlenmiştir. Tüm bulgular göz önünde bulundurularak, bu durum her ne kadar hiç yoktan iyi olarak kabul edilse de verilen örneklerin sayısının artmasıyla veya epistemik düzeyde açıklamalar gerekmesiyle, kavram tanımının yapılmasına engel olan eksikliğin kişinin cevaplarını kısıtladığı söylenebilir. Bu nedenle, öğretmen eğitimcilerinin ve öğretmenlerin tanımlar yerine verilen örnekleri yeterli görmeyerek ilgili kavramlara yönelik tanımlamaların titizlikle yapılmasına özen göstermesi gerekmektedir.

Her biri ortaokul öğretim programında yer alan kavramların tanımlarını öğretmen adayları yaparken zorlanmışlardır. Kavramı işlemsel anlamda bilmek kadar onu derinlemesine anlayabilmenin ve tanımlayabilmenin de önemli olduğu söylenebilir. Lisans eğitiminde öğrenilecek her bir kavramda tanımlama çalışmalarının aktif olarak yapılması faydalı olabilir. Bu şekilde öğretmen adayları tanımların matematiksel açıdan önemini içselleştirebilir. Analiz, Lineer Cebir, Soyut Cebir gibi derslerdeki tanımların yanı sıra ilköğretim düzeyindeki kavramların tanımlarının da tartışılması kavram bilgi düzeyinin gelişimini sağlayabilir.

Tanımlamalarda yaşanan zorlukların etkisi KVT'nin ikinci aşamasında yer alan kavramlar arası ilişkilere dayalı sorularda da kendisini göstermiştir. Matematiksel tanımlar,

işlemler, problemler göz önünde bulundurulduğunda yapılan yanlışların yanı sıra bazı kavramlara yönelik eksik ve kısıtlayıcı bilgilere sahip olmanın da kavramsal anlamayı engellediği söylenebilir. Örneğin, kavramsal bağlamda çarpan, bölen ve kat kavramlarının ilişkisi sorulduğunda çarpan veya bölen kavramlarını açıklarken sadece pozitif olanlara odaklanıldığı veya sadece asal çarpanların ele alındığı görülmüştür. Benzer şekilde, bazı kavramların birbirleriyle karıştırıldığı da (örn., kat=çarpan=bölen; kat=kuvvet) gözlemlenmiştir.

Dördüncü sınıf öğretmen adaylarının soruların çoğunda diğer öğretmen adaylarından daha başarılı oldukları söylenebilir. Öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmelerde bu durumun en önemli nedeninin son sınıfta verilen “Elementer Sayı Kuramı” dersi olduğu belirtilmiştir. Öğretmen adayları bu ders kapsamında birçok kavramı ve kuralı kavramsal düzeyde öğrenme imkanı bulduklarını aktarmışlardır. Bu bağlamda, öğretmen adaylarının mesleki gelişimleri göz önünde bulundurularak gereken alan bilgisi ile donanmalarını sağlayacak şekilde lisans eğitim programlarının yenilenmesi gerektiği söylenebilir.

Gözlemlenen tüm alan bilgisi eksikliklerinin yanı sıra öğretmen adaylarının bazı tanımlamalarda veya kavramlar arası ilişkilerde absürt kabul edilebilecek şaşırtıcı yanıtlar verdikleri gözlemlenmiştir. Örneğin, “ $\frac{a}{b} = 1$ ise oran birimlidir, $\frac{a}{b} \neq 1$ ise oran birimsizdir”, “ $\frac{a}{b} = k$ iken $k \in \mathbb{Z}$ ise oran birimli $k \notin \mathbb{Z}$ iken oran birimsizdir.”, “Kesrin paydası 10 ve kuvvetleri olabiliyorsa birimlidir.”, ve “ a/b oranında a ve b aralarında asal ise oran birimsizdir. Ancak a ve b sadeleşebilir ise oran birimlidir. Sadeleştiği miktar da birimdir”, “ π sayısı rasyonel olarak yazılabilir ama gerçek sayı değildir”, “İrrasyonel sayılar tanımlanamaz ve net değildir. Bu nedenle gerçek sayı değildir” vb. yanıtlar Sayılar ve İşlemler öğrenme alanına ilişkin literatürde aktarılan kavram yanlışlarına yenilerini eklemektedir. Bu yanlışların küçük yaştaki öğrenciler tarafından değil de öğretmen adayları tarafından yapılıyor olması da çarpıcı sonuçlardan biri olarak kabul edilebilir.

En çok karıştırılan kavramların sayı kümelerinde olduğu ve bu konuda öğretmen adaylarının eğitime ihtiyaç duydukları söylenebilir. Örneğin, π sayısının irrasyonelliği konusunda genel olarak hemfikir olunmakla birlikte, gerçek sayı olduğu konusunda farklı görüşlerin olduğu görülmüştür. Ayrıca $22/7$ veya $3,14$ sayılarından en az birine π sayısının tam olarak eşit olduğunun belirtilmesi en yaygın hatalardan biri olmuştur. Ondalık kısmı belli bir kurala göre giden tüm sayıların rasyonel olduğu yanlışlığı mevcuttur. İki pozitif irrasyonel sayının toplamının veya farklı iki irrasyonel sayının çarpımının her zaman irrasyonel sayı olacağı yanlışlığı öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğunda ortaya çıkmıştır. Her iki irrasyonel sayı arasında rasyonel veya irrasyonel sayı bulunabileceği bilgisini az sayıda öğretmen adayı açıklayabilmiştir. $0,999\dots$ sayısının 1 'e eşit

olabileceğini öğretmen adaylarının yarıdan fazlası kabul etmemektedir. Bu tür sayılarda, kural uygulanarak rasyonel hale getirilip tam sayıya eşit olduğu görülse bile öğretmen adayları kuralın bir gösterim olduğunu ve sayının kendi değerini vermediğini düşünebilmektedir.

Gerek kavramlar arası ilişkilerle ilgili sorulara gerekse öğretmen adaylarının yapmış oldukları tanımlamalara bakıldığında ortaokul öğrencileri tarafından bilinmesi ve içselleştirilmesi gereken bazı temel kavramlarla ilgili öğretmen adaylarının kavramsal bilgilerinin yeterince iyi olmadığı anlaşılmıştır. Öğretmen adaylarının bir kavramı titiz bir şekilde tanımlayamasa veya kavramla ilgili kavramsal bilgisini ortaya koyacak bir açıklama yapamasa dahi aynı kavramı işlemsel bilgi içeren bir soru içerisinde çözüme ulaşmada rahat bir şekilde kullanabildiği görülmüştür. Bu durum, öğretmen adaylarının kavram bilgi düzeyinin konu bilgi düzeyini arttırmada gerek bir şart olmadığının göstergesi şeklinde yorumlanabilir. Ancak öğretim sürecinde öğrencilerle birlikte kullanılan matematiksel kavramların ne olduğu ile bilginin öğretmen adaylarınca da derinlemesine bilinmesi gerektiği yadsınamaz bir gerçek olarak kabul edilebilir.

Alan bilgisinin üçüncü bileşeni **problem çözme bilgi düzeyi**dir. Matematik alanında kavramları ve işlemleri bilmenin yanı sıra bu bilgileri karşılaşılan bir problem üzerinde uygun yöntem ve stratejilerle uygulayabilmek de önemlidir. 2005 yılından itibaren ülkemizde uygulanan matematik öğretim programlarında problem çözme matematik öğretiminin ayrılmaz bir parçası olarak kabul edilmiş ve her konuda geliştirilmesi gereken temel beceri olarak görülmüştür. Bu temel beceriyi öğrencilere kazandırabilmek için bu süreçte rol model olan öğretmene çok iş düştüğü söylenebilir.

Bu araştırmada geleceğin öğretmenlerinin problem çözme bilgi düzeylerini inceleyebilmek adına 10 problemden oluşan problem çözme testi uygulanmıştır. Test ortalamaları KVT ve EPT'ye göre daha iyi çıkmasına rağmen öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu kategorilere ayrılan puanlarda orta grupta yer almıştır. Ancak problem çözme düzeyi çok iyi olan öğretmen adaylarının olduğu da görülmüştür.

En çok zorlanılan sorulardan biri Maya sayı sisteminin tanıtıldığı ve 7 nokta ve 2 çizgi sembolleri ile yazılabilecek 3000'den küçük en büyük çift sayının bulunmasının istendiği soru olmuştur. Çok sayıda farklı yanıtlar gelen soruda kimi öğretmen adaylarının 20'lik sayı sistemini anlamlandıramadığı kimilerinin ise istenen şartlara uygun sayı oluşturamadığı belirlenmiştir. Öğretmen adaylarından 10'luk tabandaki basamak ve çözümleme kavramları ile ilgili bilgilerini yeni sayı sistemine adapte ederek soruyu çözebilenler olduğu gibi kavramsal bilgi eksiklikleri nedeniyle bu adaptasyonu yapamayıp soruyu anlamlandıramayanlar da olmuştur. Bu nedenle problem çözme sürecinde diğer

bilgi türlerinin de etkili olduğu düşünülebilir. Problem çözme sırasında gerçekleşecek olan bilişsel aktivitelerin işlemsel ve kavramsal bilgilerle desteklenmesi gerektiği söylenebilir.

Öğretmen adaylarının kavramları tanımlamada yaşadığı zorlukların işlemsel bilgilerini etkilemeyebildiğinden bahsedilmiştir. Benzer durum problem çözme düzeyinde de görülmüştür. Öğretmen adaylarının PÇT’de en yüksek ortalamaya sahip olduğu soru kareköklü ifadelerle ilgilidir. Ancak öğretmen adaylarının yarıdan fazlasının karekök kavramını tanımlayamadığı dikkat çekmiştir. Kısacası kavram tanımının bilinmemesinin problem çözme sürecine engel teşkil etmeyebildiği anlaşılmıştır.

PÇT’de en düşük ortalamaya sahip sorulardan biri palindrom sayılarla ilgili olan bölünebilme kurallarının işe koyulduğu soru olmuştur. Problem çözümünde belirli bir örüntü arayan ve sistematik şekilde listeleme yapan öğretmen adaylarının doğru sonuca ulaşabildiği görülürken belirli bir strateji izlemeyen, sayıları rastgele yazan öğretmen adaylarının soruyu çözemedikleri anlaşılmıştır. Bu nedenle problem çözme sürecinde doğru stratejilerin belirlenmesinin ve kullanılmasının sonuca ulaşmadaki öneminden bahsedilebilir. Ayrıca öğretmenlerin kullanacağı problem çözme stratejileri öğrencileri için de yol gösterici olacaktır. Bu durum öğretmen adaylarının problem çözme stratejilerini bilmesini ve onları esnek biçimde kullanabilmesini gerekli kılmaktadır. Lisans eğitiminde öğretmen adaylarına problem çözme stratejilerini uygulayabilecekleri ders içeriklerinin sağlanmasının faydalı olacağı düşünülebilir.

PÇT’de yer alan ve PYBS sorularının düzenlenmesi ile oluşturulan sorularda bazı öğretmen adaylarının zorlanabildiği görülmüştür. Son dönemlerde sınav sisteminin değişmesi ile yeni nesil soru diye tabir edilen rutin olmayan problemlerin matematik öğretiminin her kademesinde yaygınlaştığı görülmektedir. Öğretmenlerin üst düzey becerileri yoklayan bu tür soruları çözebilir bir şekilde mezun olmasının mesleki yeterlik açısından önemli olduğu düşünülebilir. Milli eğitimin her kademesinde değişen bu yeni anlayışa öğretmen yetiştiren kurumların da ayak uydurabilmesinin ve öğretim süreçlerini bu doğrultuda organize etmesinin gerekli olduğu söylenebilir.

KNT, KVT ve PÇT sonuçları öğretmen adaylarının çeşitli kurallar ve işlemlere yönelik alan bilgilerinin eksik olduğunu ve mevcut bilgilerinin ise kavram yanlışları içerdiğini göstermiştir. Bu durumun altında yatan çeşitli sebeplerden bahsedilebileceği gibi bir nedeninin de kuralların dayandığı gerekçelerin bilinmemesi olduğu söylenebilir. Bu nedenle, öğretmen adaylarının alan bilgisi kapsamında kuralların altında yatan gerekçelerin ve ispatların bilgisini içeren **epistemik bilgi düzeyleri** (Kinach, 2002a) de incelenmiştir. Öğretmen adaylarına öğrencilerin “Neden?” diye sorabileceği veya “Bu her zaman böyle midir?” şeklinde genelleme arayışında olabileceği sorular sorulmuştur. EPT sonuçları, öğretmen adaylarının ortaokul seviyesinde öğretilen kuralların gerekçelerine dair bilgi

düzeylerinin çok düşük olduğunu göstermektedir. Ayrıca lisans seviyesinde hem ispat yapmanın önemine hem de öğretilecek kuralların gerekçelerinin öncelikle öğretmen tarafından bilinmesi gerekliliğine işaret etmektedir. Sorulan sorular kapsamında öğretmen adaylarının ya yeterince gerekçe sunamadıkları ya da sunulan gerekçelerin yeterli argüman içermediği (örn., otoriteye bağlı açıklamalar) söylenebilir. Bir öğretmen lisans öğreniminde bir kuralın matematiksel alt yapısını öğrenmediğinde öğretmenlik hayatında da kendi öğrencilerine dışsal gerekçelendirmeler sunması şaşırtıcı olmayacaktır. Bir öğretmen adayının epistemik düzey bilgisinin gerek matematiksel teorem ve kuralların gerekçelerini anlayabilmeleri gerekse kendilerinin bu teoremlerin ispatlarını yapabilmeleri adına oldukça önemli olduğu söylenebilir. Öğretilen bir kurala öğrenciyi ikna edebilmenin ön şartı olarak kurala öğretmen adayının kendi ikna olması ve öğrenciyi ikna edecek matematiksel alt yapıya sahip olması gerektiği söylenebilir.

En az iki basamaklı iki sayının çarpımının ilköğretim seviyesinde öğrenildiği düşünüldüğünde, sınıf öğretmenlerinin algoritmadaki 1 basamak sola kaydırmaya ilişkin açıklamayı bilmesi ve hatta öğrencilere aktarması gerektiği söylenebilir. Bununla birlikte, ortaokulda görev yapacak ve 5. sınıfta öğrencilerin 3 basamaklı iki sayıyı çarpmalarını isteyecek öğretmen adaylarının çoğunun bu kaydırma gerekçesini açıklayamadığı gözlemlenmiştir. Bu durumun, öğrencilerin yaptıkları işlemi anlamlandırmadan ezbere yapması ve muhakeme kazanmamasına neden olacağı düşünüldüğünde öğretmen adaylarının bu konuda farkındalıklarının artırılması gerekmektedir.

Soruların çoğunda formel ispat yapan öğretmen adaylarının tüm katılımcıların %10'unu geçmediği gözlemlenmiştir (örn., “*Sıfır hariç her sayının sıfırıncı kuvveti 1’dir*”, “*Ardışık sayılar aralarında asal*”). Formel ispat haricinde sunulan gerekçelerin de büyük çoğunluğunun örneklerle gösterim içeren deneysel argümanlar olduğu söylenebilir. Bazı bulgular en azından verilen önermenin veya kuralın anlaşıldığına işaret eden ve bir çaba gösteren örnekler içerirken bazı bulguların bu işaretlerden de yoksun olduğu görülmüştür. Örneğin, bazı önermelerin açıklamaları istendiğinde, öğretmen adaylarının bilinen dar kapsama hapsolup hapsolmadığı ölçülmeye çalışılmıştır. Buna rağmen karşılaşılan sonuç, öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun bu önermelerin doğruluğuna veya yanlışlığına dair fikri olmadığını ve hiçbir açıklama getiremediklerini göstermektedir. Formel ispat yapılamasa da en azından örneklerle açıklayabilmenin beklendiği düşünüldüğünde bu sonucun, daha kapsamlı araştırmaların yürütülmesinin ve özellikle somut adımların atılmasının önemini vurguladığı söylenebilir.

Daha önce de bahsedildiği gibi Elementer Sayı Kuramı dersinin, geleceğin öğretmenlerinin öğretecekleri konulara dair epistemik bilgi düzeylerine de katkı yaptığı söylenebilir. Çünkü öğretmen adayları hem işlemler hem de gerekçelendirmelerle ilgili

görüşmelerde bu ders kapsamındaki bilgilerinden faydalandıklarını belirtmişlerdir. Bu sonucu destekleyen bulgulardan birinin de son sınıf öğretmen adaylarının EPT test puan ortalamasının genel test ortalamasının belirgin şekilde üstünde yer alması olduğu düşünülebilir. Bu sonuca dayanarak lisans ders içeriklerinin mesleki gerekliliklerle harmanlanması önerilebilir.

Daha az karşılaşılan kuralların açıklamalarının bilinmemesinin yanı sıra çok sık kullanılan kuralların da öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu tarafından açıklanamamasının bu tez kapsamında elde edilen en üzücü ve ilginç sonuçlardan biri olduğu söylenebilir. Örneğin, “*Sıfır hariç her sayının sıfırın kuvveti 1’dir*” ifadesine katılımcıların yaklaşık %80’inin yeterli gerekçe sunamadığı görülmüştür. Benzer bir durum, “*Ardışık sayılar aralarında asaldır*” ifadesine öğretmen adaylarının yaklaşık %60’ının açıklama getirememesiyle gözlemlenmiştir. Lisans seviyesinde Analiz, Soyut Cebir, Geometri vb. derslerde daha üst düzey teoremlerin/önermelerin öğretildiği ve bunların ispatlarını yapmalarının beklendiği bilinmektedir. Bu beklentinin öğretmen adaylarının alan bilgisini geliştirmeyi hedeflediği düşünüldüğünde ileride öğretecekleri önermelere ilişkin fikir sahibi olmamaları ironik bir durum olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu bağlamda, alan bilgisine katkı yapacağına inanılan içerikler ve mesleğin gerektirdiği içerikler harmanlanarak/dengelenerek oluşturulacak bir öğretmen yetiştirme programının daha faydalı olabileceği öngörülebilir.

Tüm bu sonuçlar Aksoy’un (2020) işaret ettiği, öğretim elemanlarının ispat sunumlarında öğretmen adaylarına yaptıkları açıklamaların önemini vurgulamaktadır. Geleceğin öğretmenlerinin öğretim elemanlarını örnek alabileceği göz önünde bulundurularak eğitim fakültelerindeki eğitimin üst düzey matematiksel düşünmeyi geliştirecek ve öğretime dahil edilerek öğrencilere aktarılacak şekilde dizayn edilmesi gerektiği söylenebilir. Özellikle ispat sunumlarına öğrencilerin katılımlarının artırılması ve bu şekilde matematiksel bir kuralı gerekçelendirebilme becerilerinin geliştirilmesi önerilebilir.

Gerek yazılı verilerden gerekse mülakatlardan bazı öğretmen adaylarının ortaokulda öğrendikleri çeşitli matematiksel kuralların nedenlerini lisans seviyesindeki öğrenimlerine kadar sorgulamadıkları ve kural olarak ezberleme yoluna gittikleri anlaşılmıştır. Gerek 3 ile bölünebilme ve 4 ile bölünebilme gibi çeşitli bölünebilme kuralları gerekse üslü ifadelerde işlemlerde kullanılan kurallar gibi ortaokul matematik düzeyinde yer alan çeşitli kurallar öğretmen adayları tarafından ezberlenmiş ve EPT’de karşılırlarına çıkınca sorgulamaya başladıkları anlaşılmıştır.

Öğretmen adaylarının mesleki gelişimlerine yönelik bu tez kapsamında karşılaşılan sorunların tek sorumlusunun öğretmenlik lisans programlarının eksikliği olmadığı kabul

edilebilir. Bu mesleğe gönül vererek lisans eğitimi almaya başlayan bireylerin artık üniversite seviyesinde yetişkin bireyler oldukları düşünüldüğünde ileride anlatacakları bilgilere yönelik kendilerini geliştirmeleri de beklenmektedir. İnsanın kendini yetiştirmesi için teknolojiye rahatlıkla faydalanabileceği günümüzde bireyin kendini eksik bulduğu alanlarla ilgili Youtube vb. platformlardan mesleki gelişim için izlemeler yapılabilir. Buna ek olarak tez ve makale gibi akademik çalışmalarla da mesleki gelişimlerine katkı sağlayabilirler. Elbette ki akademik çalışmalarla ilgili bilgilendirmelerin akademisyenler tarafından yapılması gerektiği düşünülebilir ancak Youtube gibi sosyal medya platformlarını ceplerinde taşıyan öğretmen adayı gençlerimizin de kendi gelişimleri için en azından mevcut imkanları kullanarak adım atması gerekmektedir.

Matematiksel bir işlemin nasıl yapıldığını (örn., bir sayının 3 veya 9 ile kalansız bölünüp bölünmeyeceğini) bilebilmek alan bilgisi göstergesidir. Ancak öğrencilerin yapabileceği hataları (örn., sayının son rakamına bakarak yorum yapabileceğini) ön görmek, konunun öğretiminde izlenebilecek yöntem ve stratejileri bilmek ve konunun öğretiminde öğretim materyallerinin (örn., onluk taban bloklarının bölünebilme kuralını kavrayabilmek için) kullanılabileceğinin farkında olmak ise pedagojik alan bilgisi gerektirmektedir. Bu çalışma kapsamında, öğretmen adaylarının alan bilgilerinin yanı sıra pedagojik alan bilgileri de *öğrenci bilgisi*, *öğretim stratejileri bilgisi* ve *program bilgisi* bileşenleri doğrultusunda incelenmiştir.

Bir matematik öğretmenin, bir konuda öğrencinin muhtemel hazırbulunuşluk seviyesinin, yapabileceği hataların ve sahip olabileceği kavram yanlışlarının farkında olması gerekmektedir. Bununla birlikte, bu çalışma kapsamında öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerinin “**öğrenci bilgisi**” bileşeni açısından oldukça zayıf olduğu gözlemlenmiştir. Bu duruma, öğretmen adaylarının öğrencilerde gözlemlenen hatalara ve yanlışlara kendilerinin de sahip olmalarının neden olduğu söylenebilir. Örneğin, bir kavramın tanımını yapamayan veya eksik yapan bir öğretmenin, öğrencilerin tanımlamadaki hatalarını tespit edip düzeltmesinin zor olduğu düşünülebilir. Buna ek olarak, bu çalışmada katılımcı olan öğretmen adaylarının bazılarının kendi hatalarının ya da eksikliklerinin farkında olduğu, bazılarının farkında olmadan doğruluğuna inandığı açıklamaları (örn., $0,9 \neq 1$) yaptıkları görülmüştür. Farkında olan öğretmen adayları, öğrencilerin bazı konularda yaşayabileceği kafa karışıklığını kendilerinin de yaşadığını belirtmişlerdir. Farkında olmayan öğretmen adaylarının da kendi yanlışlarının öğrenci düşüncelerini anlama noktasında onları engelleyebileceği aşıkardır. Bu bağlamda, özellikle matematikteki neredeyse her öğrenme alanının temeli sayılabilecek Sayılar ve İşlemler öğrenme alanına ilişkin alan ve pedagojik alan bilgisini geliştirecek adımların sistemli bir

şekilde atılması önerilebilir. Bununla birlikte, bazı üniversitelerde YÖK tarafından önerilen “*Sayıların Öğretimi*” dersi verildiği bilinmektedir. Bu tür derslerin öğretmen adaylarının alan ve pedagojik alan bilgisine katkı yapabileceği ve bu nedenle hem matematik öğretmenliği eğitimi içeren tüm üniversitelerde hem de diğer öğrenme alanlarının öğretiminde de benzer uygulamalara yer verilmesinin yaygınlaştırılması önerilebilir.

Öğretmen adayları son sınıfta öğretmenlik uygulaması kapsamında staj yapmaktadır. Bununla birlikte, staj kapsamında bir sınıfın matematik dersini dönem boyunca belli saatlerde izlemekte ve dönem sonunda kendisi bir uygulama yapmaktadır. Ders izlemeleri faydalı olmakla birlikte, yalnızca bu uygulama ile öğrencilerde oluşabilecek yanlışlara tam olarak hakim olunması mümkün olmayabilir. Bunun sağlanması için çok yönlü organize bir eğitimin gerektiği söylenebilir. Örneğin, öğretmen adayının deneyimli bir öğretmeni izlemesi, düzenli olarak bir veya bir grup öğrenciye ders vermesi, literatürde aktarılan alan ve pedagojik alan bilgisi çalışmalarını takip etmesi, lisans eğitiminde her bir öğrenme alanındaki eksiklerini tamamlayacak bir eğitime tabi tutulması vb. uygulamaların planlı bir şekilde lisans eğitimine dahil edilmesinin faydalı olabileceği düşünülebilir.

Yaşayarak öğrenmenin ve mesleki tecrübenin önemi göz önünde bulundurulduğunda, öğretmen adaylarına, lisans eğitimleri boyunca olabildiğince çok öğrenciye ders anlatmaya çalışmaları tavsiye edilebilir. Örneğin, bazı öğretmen adayları yapılan görüşmelerde özel ders verdiklerini ve bu dersler sayesinde öğrencilerin nerelerde hata yaptığını ve neleri anlamakta zorluk çektiklerini anlayabildiklerini ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra, eksik oldukları alanları tespit edebildiklerini ve anlayışlarının derinleştiğini aktarmışlardır. Bu tür öğretim tecrübelerinin öğretmen adayının alan bilgisine de olumlu katkı yaptığı anlaşılmaktadır. Bu durum öğretim tecrübesinin öğrencinin olası kavram yanlışlarını tespit etmede ve başka bir öğrencinin olası kavram yanlışlarını engellemede bir önlem olarak kullanılmasında ne derece önemli olduğunu ortaya koymaktadır. Bu nedenle de öğretmenlik uygulaması gibi öğrenciyle öğretmen adayını buluşturan derslerin öğretmen adayının pedagojik alan bilgisine ve özel olarak öğrenci bilgisi bileşenine katkı sağladığı söylenebilir. Yine benzer şekilde öğrenci bilgisi test ortalamasının 4. sınıf seviyesinde en yüksek olmasında 4. sınıfta yer alan uygulamalı derslerin de etkisi olduğu düşünülebilir.

Öğretmenin öğrencinin hangi konuda ve hangi tür yanlış içinde olabileceğini bilmesinin yanı sıra bu yanlışla nasıl müdahale edileceğini de bilmesi gerektiği söylenebilir. Bu da PAB’ın bir diğer bileşeni olan **öğretim stratejileri bilgisi** ile ilgilidir.

Örneğin, öğrencinin yapabileceği bir aşırı genellemenin önüne geçmek için öğrenciyi bu genellemeden uzaklaştıracak örneklerin sunulması ve çıkarım yapmasının sağlanması faydalı olabilir. Bir öğretmenin bir kavramın (örn., kesirlerin farklı anlamları) varsa farklı anlamlarını bilebilmesi ve bu anlamların içselleştirilmesine yönelik sorular/problemler oluşturabilmesinin oldukça önemli olduğu düşünülebilir. Buna ek olarak, hata yapan bir öğrenciye dönüt verilmesi istenen sorularda öğretmenlerden beklenen doğrudan bilgi vermeleri yerine öğrencinin kendi hatasını anlaması için ona rehber olması ve mümkünse onu bilişsel çatışmaya düşürmesidir. Ancak testteki bu tarz dönüt istenen tüm sorular göz önüne alındığında, öğretmen adaylarının daha çok doğrudan bilgi verme eğiliminde oldukları görülmüştür. Bu eğilimin son sınıf öğretmen adaylarında daha az olduğu ve istenen şekilde daha çok öğrenci merkezli dönütler verdikleri söylenebilir. Bu sonucun, mesleğe yönelik lisans derslerinin öğretmen adaylarına katkısıyla bağlantısı olabilir. Oransal olarak diğer sınıf seviyelerinden nispeten düşük olmakla birlikte 4. sınıf seviyesinde bu dönütlerin hala yeterli bir oranda olmadığı göz önünde bulundurulduğunda ise daha etkili uygulamalara ihtiyaç duyulduğu düşünülebilir.

Öğretmen adaylarının testlerdeki ve görüşmelerdeki yanıtları dikkate alındığında, alan bilgilerinin, öğretim sırasında öğrencilere verdikleri dönütler, yaptıkları modellemeler ve izledikleri yollar gibi öğretim stratejileri bilgilerini içeren çeşitli etmenleri etkilediği söylenebilir. Bu çalışma kapsamında da öğretmen adaylarının alan bilgi eksikliğinin öğretim stratejileri bilgisini doğrudan etkilediğini gösteren çeşitli örneklerle rastlanmıştır. Bu örneklerden bazıları şunlardır:

- Öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayıların yoğunluğu ile ilgili yanılgılarının olduğu, alan testi sorularında görülmüştür. Öğretim stratejileri bilgisi kapsamında sorulan irrasyonel sayıların yoğunluğu ile ilgili sorularda ise öğretmen adaylarından öğrencinin hatalı ifadesine dönüt verilmesi istenmiş ancak çok sayıda öğretmen adayı yanlış dönüt vermiştir. En düşük puan ortalamasına sahip sorulardan birinin bu soru olduğu da düşünüldüğünde öğretmen adaylarının kendi bilgi eksikliklerinin öğrencinin hatalı yönlendirilmesine yol açtığı söylenebilir.
- İki indirimli ürün aldığı anda indirim yüzdelerini toplayarak indirim yapıldığını ifade eden bir öğrenciye verilmesi gereken dönütün sorulduğu ilk soruda

görüşme yapılan bir öğretmen adayı kendisi de indirimlerin toplanabileceğini ifade etmiştir. Doğal olarak ilk aşamada öğrenciye de yanlış dönüt verilmiştir.

- “ $a = -2$ ise a^4 kaçtır?” sorusu doğrudan alan bilgisinin kapsamındadır. Testte bu soruya -16 ve $+16$ yanıtları veren iki öğrenciden hatalı olanın nasıl ikna edilebileceği sorulmuştur. Görüşme yapılan öğretmen adayları ile araştırmacı arasında geçen diyaloglardan da hatırlanacağı üzere birçok öğretmen adayı yanıtın -16 olacağını dile getirmiş ve doğru yanıt veren öğrencinin fikrini değiştirmesi için ikna yoluna gitmişlerdir.

Testte yer alan bazı sorular öğretmen adaylarının alan bilgisiyle doğrudan bağlantılı olmayıp asıl olarak öğretim stratejileri bilgisi gerektirmektedir. Örneğin, iki tam sayı arasında yapılan dört işlem alan bilgisi kapsamındadır. Ancak bu işlemin sayma pullarıyla gösterimi doğrudan öğretim stratejileri bilgisi gerektirmektedir. Yapılan görüşmelerde öğretmen adaylarının iki tam sayı arasındaki toplama ve çıkarma işlemlerini yaparken hiç zorlanmadıkları ancak bu işlemi sayma pulları ile gösterirken zorluk yaşadıkları hatta bazılarının hiç yapamadıkları görülmüştür. Benzer şekilde iki kesrin çarpımı alan bilgisi kapsamındadır. Ancak bu çarpma işleminin kesir kartları ile gösterimi doğrudan strateji bilgisi içermektedir. Öğretmen adaylarının iki kesrin çarpımında zorlanmadıkları halde modelleme yaparken zorlandıkları ve hatalarının olduğu görülmüştür. Bu bağlamda, lisans eğitiminde *Özel Öğretim Yöntemleri* ve *Materyal Geliştirme* gibi derslerin, öğretmen adaylarının bu tür strateji bilgilerinin artırılmasına katkı yapabileceği söylenebilir. Bunun bir göstergesi olarak, şeffaf kesir kartları ve sayma pullarının kullanımı ile ilgili sorularda öğretim stratejilerine yönelik dersleri henüz almamış olan ilk iki sınıf düzeyindeki öğretmen adaylarının puan ortalamalarının daha düşük olduğu gözlemlenmiştir.

Bir öğretmenin ortak hedefler ve ortak felsefe ile hareket edebilmesi için öncelikle programın giriş kısmını tüm kavramlarıyla bilmesi gerektiği söylenebilir. Bu çalışmada, **program bilgisi** kapsamında programın giriş kısmında yer alan yeterlikler ve programın özel amaçlarıyla ilgili sorulara verilen yanıtlar, öğretmen adaylarının programın bu kısmını yeterince bilmediğini ortaya koymuştur. Buna ek olarak, programın giriş kısmında yer alan kavramlarla (örn., *uzamsal düşünme*, *matematiksel okuryazarlık*, *üstbilişsel bilgi*) ilgili hatalı kavram imajlarının olduğu, programda söz edilen Erotesthenes kalburu, onluk taban blokları gibi materyalleri tanımadıkları ve sarmal yapıya sahip bu programda hangi kazanımların hangi sınıf düzeylerinde verilmesi ile ilgili bilgi eksikliklerinin olduğu da gözlemlenmiştir. Öğrenci ön bilgilerini bilmek ve öğrencinin kavramı öğrenme aşamalarını

anlayabilmek adına ilkokul seviyesindeki programın da incelenmesi gerektiği söylenebilir. Ancak hangi kavramlarla ilk kez ilkokul veya ortaokulda karşılaşıldığına ilişkin sorulara verilen yanıtlar sonucunda öğretmen adaylarından çok az bir kısmının ilkokul programını da incelediği ifade edilebilir. Öğretmen adaylarının değişen öğretim programlarını takipte zorlandıkları da görülmüştür. Örneğin, Kümeler konusunun 2013 programıyla tamamen kaldırıldıktan sonra 2018 programıyla sadeleştirilerek geri geldiğinin bazı öğretmen adaylarının farkında olmadığı anlaşılmıştır.

Alan ve pedagojik alan bilgisinin birbirleriyle olan derin ilişkisinin yanı sıra bu bileşenlerin alt bileşenleri birbirlerini etkilemektedir. Örneğin, öğrenci bilgisi ve öğretim stratejileri bilgisinin de birbiriyle ilişkili olduğu söylenebilir. Öğrencinin olan veya olması muhtemel hatalarını bilmek, bunların nedenlerini anlayabilmek öğrenci bilgisi kapsamında değerlendirilebilir. Ancak bu hataların nasıl giderilebileceğini bilmek veya hatanın hiç oluşmaması için nasıl bir öğretim yöntemi izlemek gerektiğini bilmek öğretim stratejileri bilgisi kapsamındadır. İki negatif tam sayının toplamı istenen bir soruda öğrencilerin yapabileceği potansiyel hataları görüp bu doğrultuda gerekirse modelleyerek açıklama yapmak veya yapılabilecek hataları örneklendirmek bu iki bilgi bileşeni arasındaki ilişkinin kurulması demektir. Ancak bazen öğrencinin potansiyel hataları bilindiği halde nasıl bir öğretim yöntemi sergilemek gerektiği de bilinmeyebilir. Eksilen sayının sonu sıfırlarla biten bir sayı olması durumunda öğrencinin çıkarma işleminde zorlanacağını bilen bir öğretmen adayının bu durumu nasıl öğreteceğini bilmemesi öğrenci bilgisi bileşeninde iyi olduğu halde öğretim stratejileri bilgisi bileşeninde yeterli olmadığını göstermektedir. Örneğin, görüşme yapılan öğretmen adaylarından biri sonucu ondalık sayı olan bir bölme işlemi yapılırken öğrencilerin bölene ne zaman sıfır koyup ne zaman koymaması gerektiğini karıştırdığını, bu konuda zorlandıklarını dile getirmiş ancak bunu nasıl kalıcı olarak öğretebileceğini bilmediğini ifade etmiştir. Öğretmen adayı öğrencilerin ondalık sayılarda bölme işlemi ile ilgili yaşayabileceği zorluklardan birini ifade etmiş olmasına rağmen öğrenci yanılgısının nasıl giderileceği konusunda zorluk yaşamaktadır. Bu nedenle öğretim stratejileri bileşeni açısından değerlendirildiğinde eksikliğin olduğu söylenebilir. Bu kapsamda, matematik eğitiminin bir bütün olduğu ve tüm alan ve pedagojik alan bilgisi bileşenlerinin birbirlerini nasıl etkiledikleri göz önünde bulundurularak öğretmen adaylarının tüm bileşenlerin farkında olması ve hepsinde yetkin olmasının sağlanması gerektiği çıkarımı yapılabilir.

Sonuç olarak, bu tez kapsamında elde edilen tüm sonuçlar ve sonuçlar arasındaki ilişkiler göz önünde bulundurulduğunda, bir öğretmenin sahip olması gereken becerileri bir

metaforla ifade etmek gerekirse, bir öğretmen için alan bilgisini, yönü/rotayı gösteren navigasyon cihazı olarak, pedagojik alan bilgisini ise öğretmeni öğretme hedefine ulaştıracak bir vasıta olarak görmek mümkündür. Bu durumda navigasyon cihazındaki aksaklıklar yanlış yöne gitmeye ve hedeften uzaklaşmaya neden olabilmektedir. Bununla birlikte, rotayı bilmek kadar doğru vasıtayla ilerlemek de önemlidir. Yani, uygun vasıta kullanılmadığında, varılacak hedefin bilinmesinin de hedefe varmak için yeterli olmadığı düşünülebilir. Bu bağlamda, navigasyon içeren iyi bir vasıtaya sahip olmak yani alan bilgisine hakim olarak pedagojik alan bilgisine sahip olmanın önemi vurgulanabilir.

5.2.2. Sayıların öğretimi dersine yönelik öneriler

Bu araştırma ile öğretmen adaylarının mevcut durumu ortaya konulurken “*Sayıların Öğretimi*” gibi lisans derslerinin önemine dikkat çekilmiştir. Araştırmadan yola çıkarak ortaokul kademesindeki konuların öğretimine yönelik lisans eğitiminde dikkat edilmesi gereken faktörler ortaya konulabilir. Bu tür dersler planlanırken öğretmen adaylarının sahip olduğu farklı bilgi türlerinin gelişimini destekleyecek şekilde her bir alt öğrenme alanının ve her bir kazanımın üzerinde durulması gerektiği söylenebilir. Araştırma sonuçlarından yola çıkarak aşağıda yer alan sorulara cevap bulacak şekilde dersin işlenmesi önerilmektedir.

- Alt öğrenme alanında yer alan kazanımlar nelerdir? Programda kazanımla ilgili uyarılar veya kısıtlamalar mevcut mudur?
- Kazanımlarda yer alan yeni bir kavram var mıdır? Öğrencilerin ilkökul düzeyindeki ön öğrenmeleri nelerdir? Yeni kavramlar eski kavramlarla ilişkilendirilebilir mi?
- Kavramları nasıl uygun ve titiz şekilde tanımlayabiliriz? Kavramların formel tanımları nelerdir? Bu tanımlar öğrenci seviyesine uygun mudur? Ders kitaplarında tanımlar nasıl yapılmıştır?
- Kazanımda işlemsel bir algoritma mevcut mudur? Bu algoritmanın altında yatan matematiksel sebepler nelerdir? Farklı yöntemler var mıdır? Pratik bir çözüm yöntemi mevcut mudur?
- Kazanımla ilgili öğretilecek kurallar var mıdır? Kuralların matematiksel ispatı nasıl yapılabilir? Öğrenciye ne tür gerekçelendirmelerde bulunulabilir?
- Kazanım günlük hayatla nasıl ilişkilendirilebilir? Bir problem durumu ortaya konulabilir mi?
- Kazanımla ilgili sorulabilecek rutin ve rutin olmayan problemlere ne tür örnekler verilebilir? Kazanım özelinde önerilebilecek veya izlenebilecek

faydalı problem çözme stratejileri nelerdir? Kazanım ile ilgili ders kitaplarında ne tür problemler yer almaktadır?

- Söz konusu kazanım ile ilgili öğrencilerin yaşayabileceği güçlükler nelerdir? Hangi hataları yapabilirler ve olası kavram yanlışları nelerdir?
- Kazanımın öğretiminde nelere dikkat etmek gerekir? Kavram yanlışlarının önlenmesi nasıl gerçekleşebilir?
- Öğrencilerin kazanım ile ilgili olası soruları ve kavram yanlışlarına yönelik verilmesi gereken dönütler nelerdir?
- Kazanımın öğretiminde ne tür etkinlikler veya modellemeler yapabiliriz? Hangi materyalleri kullanmak daha faydalı olur ve materyalleri daha etkili olacak şekilde nasıl kullanabiliriz?

5.2.3. Gelecek araştırmalara yönelik öneriler

Bu çalışmada öğretmen adaylarının sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin alan ve pedagojik alan bilgileri ortaya konulmaya çalışılmıştır. Araştırmada kullanılan alan ve pedagojik alan bilgisi testlerinde her ne kadar öğrenme alanını kapsayan sorular yer alsada da çok sayıda alt öğrenme alanı olduğundan her konu derinlemesine incelenememiştir. Bu nedenle her alt öğrenme alanı özelinde 7 bilgi türünü de inceleyen daha detaylı testler oluşturulup çalışmalar sürdürülebilir. Örneğin sadece rasyonel sayılar alt öğrenme alanı seçilerek hem anlama düzeyleri hem de PAB bileşenleri ile daha spesifik ölçekler oluşturulabilir.

Alan bilgisi kapsamında öğretmen adaylarının problem çözme becerilerine, işlemsel bilgilerine ve kavram yanlışlarına yönelik çok sayıda çalışma mevcuttur. PAB bileşenlerinden öğrenci bilgisi ve öğretim stratejileri bilgisine yönelik de çalışmalar oldukça fazladır. Ancak öğretmen adaylarının tanımlama becerilerini, epistemik bilgi düzeylerini ve program bilgilerini incelemeye yönelik çalışmaların az sayıda olduğu görülmüştür. Sadece bir öğrenme alanında veya tüm ortaokul kademesine yönelik tek bir bilgi türünü inceleyen çalışmalar yapılabilir.

Sayılar ve işlemler öğrenme alanını incelediğimiz bu çalışmaya benzer şekilde geometri ve cebir gibi diğer öğrenme alanlarını kapsayan incelemeler yapılabilir. Tüm öğrenme alanına yönelik kapsamlı çalışmalar yapmak yerine bir alt öğrenme alanına yönelik daha özel çalışmaların yapılması da mümkündür.

Yedi bilgi türünün incelendiği bu çalışmada bu bilgi türlerinin birbirleri ile ilişkisine istatistiksel olarak bakılmamıştır. Daha çok sayıda kişinin yer aldığı nicel çalışmalarla bilgi türlerinin birbirleriyle ilişkisi veri madenciliği yöntemleri veya istatistiki testlerle ortaya konulabilir.

Betimsel çalışmaların yanı sıra bu araştırmanın sonuçlarından yola çıkarak lisans düzeyine yönelik bir ders planı ortaya konularak uygulama yapılabilir. Uygulanan bu

dersler sonrasında öğretmen adaylarının alan ve pedagojik alan bilgisi gelişimleri incelenebilir.

Önerilen tüm bu çalışmalar öğretmen adaylarının ötesinde sahada olan öğretmenlere de yapılabilir. Öğretmenlerin alan ve pedagojik alan bilgileri 7 bileşenin tamamı veya bazıları özelinde incelenebilir. Bu incelemelerin sonuçlarına göre yapılabilecek hizmet içi eğitimler planlanabilir.



KAYNAKÇA

- Abdul Ghani, S. N. ve Maat, S. M. (2018). Misconception of fraction among middle grade year four pupils at primary school. *Research on Education and Psychology (REP)*, 2(1), 111-125. Erişim adresi: <https://dergipark.org.tr/tr/pub/rep/issue/39781/471516>
- Adak, B. ve Aliustaoğlu, F. (2020). An investigation of 7th grade students' misconceptions about proportion ratio. *Online Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 1(1), 55-74.
- Adams, T. L. (1998). Prospective elementary teachers' mathematics subject matter knowledge: The real number system. *Action in Teacher Education*, 20(2), 35-48.
- Adıgüzel, N. (2013). *İlköğretim matematik öğretmen adayları ve 8. sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayılar ile ilgili bilgileri ve bu konudaki kavram yanlışları* (Yayımlanmamış Doktora tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi. Konya.
- Agbozo, K. K. ve Fletcher, J. A. (2020). Pre-service teachers' understanding of selected concepts of fractions. *European Journal of Education Studies*. 7 (2), 90-111. Doi:10.5281/zenodo.3722669
- Akar, G. K. (2010). Bir matematik öğretmeni ne bilmeli? Alan bilgisi ve alan eğitimi bilgisi arasındaki fark. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 27(2), 33-47.
- Akkan Y. ve Öztürk M. (2019). Çarpanlar ve katlar. Ertekin E. ve Ünlü, M.(Ed.) *Kuramdan uygulamaya etkinlik örnekleriyle sayıların öğretimi* içinde (s.131-173), Ankara: PEGEM.
- Akkuş-Çıkla, O. ve Duatepe, A. (2002). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme becerileri üzerine niteliksel bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 23(1), 32-40.
- Akpınar, S. (2018). *7. sınıf öğrencilerinin yüzdeler konusundaki öğrenme güçlükleri, kavram yanlışları ve nedenlerinin incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Erciyes Üniversitesi. Kayseri.
- Aksoy, E. (2020). *Öğretim elemanlarının matematik derslerinde ispat anlatım yapılarının incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi. İzmir.
- Aksu, A. Z., Gedik, S. D. ve Konyalıoğlu, A. C. (2013). Köklü sayıların büyüklüğüne karar verememe ve sayı doğrusuna yerleştirememe. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 2 (2), 169-175.
- Aksu, Z. ve Kul, Ü. (2019). The mediating role of mathematics teaching efficacy on the relationships between pedagogical content knowledge and mathematics teaching anxiety. *SAGE Open*, 9 (3), 2158244019871049.

- Aktaş, M. C., Apaydın, Z. ve Aktaş, D. Y. (2014). 9. sınıf öğrencilerinin rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğunu anlama düzeyleri. *Eğitim ve Bilim*, 39(171).
- Alacacı, C. (2009). Öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanılgıları. Bingölbali, E. ve Özmantar M.F. (Ed.) *Matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* içinde. Ankara: Pegem Yayıncılık.
- Albayrak, M., Yazıcı, N. ve Şimşek, M. (2019). Büyük doğal sayıları okuma ve yazmada öğrencilerin yaşadığı güçlükler. *Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 16(1), 1419-1441.
<https://dergipark.org.tr/tr/pub/yyuefd/issue/50700/661100>
- Alghazo, Y. M. ve Alghazo, R. (2017). Exploring common misconceptions and errors about fractions among college students in Saudi Arabia. *International Education Studies*, 10(4), 133–140. doi:10.5539/ies.v10n4p133
- Alkan, F. (2016). Experiential learning: Its effects on achievement and scientific process skills. *Journal of Turkish Science Education*, 13 (2), 15-26.
- Almeida, R. ve Bruno, A. (2014). Strategies of pre-service primary school teachers for solving addition problems with negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45 (5), 719-737.
- Altıntaş, Ş. ve Keskin, C. (2019). *Ortaokul ve imam hatip ortaokulu matematik 7. sınıf ders kitabı*. Ankara: Ekoyay Eğitim Yayıncılık.
- Altıparmak, K. ve Palabıyık, E. (2017). 4. ve 5. sınıf öğrencilerinin ondalık gösterim konusundaki kavram yanılgılarının ve hatalarının tespiti ve analizi. *Anemon Muş Alparslan Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 5 (2), 447-470.
- Altun, M. (1998). *Eğitim fakülteleri ve sınıf öğretmenlikleri için matematik öğretimi*. Bursa: Erkam Matbaacılık.
- An, S., Kulm, G. ve Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the US. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7 (2), 145-172.
- Arastaman, G., Fidan, İ. Ö. ve Fidan, T. (2018). Nitel araştırmada geçerlik ve güvenirlik: Kuramsal bir inceleme. *Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 15(1), 37-75
- Arbour, D. (2012). *Students' understanding of real, rational, and irrational numbers* (Doctoral dissertation). Concordia University.
- Arcavi, A., Bruckheimer, M. ve Ben-Zvi, R., (1987). History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics*, 7(2), 18–23
- Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S. ve Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel matematik kavramlarının künyesi*. Ankara: Gazi Kitabevi.

- Arıcan, M. (2020). Öğretmen adaylarının orantısal olan ve olmayan ilişkileri belirleyebilme ve temsil edebilmelerinin problem içerikleri açısından incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 14 (1), 629-660.
- Arslan, S. ve Ubuz, B. (2009). Sayılarda basamak değeri kavramı ve öğrencilerin yaşadığı zorluklar. Bingölbali, E. ve Özmantar M.F. (Ed.) *Matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* içinde. Ankara: Pegem Yayıncılık.
- Arslan, S., Yıldız, C. ve Yavuz, I. (2011). Basamak değeri kavramının öğretim durumlarının incelenmesi. *Education Sciences*, 6 (1) 490-507. Erişim adresi: <https://dergipark.org.tr/tr/pub/nwsaedu/issue/19821/212149>
- Arslan-Kılcan, S. (2006). *İlköğretim matematik öğretmenlerinin kesirlerle bölmeye ilişkin kavramsal bilgi düzeyleri* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu, Türkiye.
- Ashlock, R. B. (1990). Parents can help children learn mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 38(3), 42-46.
- Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., Wiliam, D. ve Johnson, D. (1997). The contribution of Professional development to effectiveness in the teaching of numeracy. *Teacher Development*, 1(3), 335-356.
- Aslan-Tutak, F. ve Köklü, O. (2016). Öğretmek için matematik bilgisi. Bingölbali, E., Arslan, S. ve Zembat, İ.Ö. (Ed.) *Matematik eğitiminde teoriler* içinde. Ankara: Pegem Akademi.
- Avcu, R. (2010). Eightgraders' capabilities in exponents: making mental comparisons. *Practice and Theory in Systems of Education*, 5 (1), 39-48.
- Avcu, R. (2014). *Exploring middle school mathematics teachers' treatment of rational number examples in their classrooms: A multiple case study*. (Doctoral dissertation). Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü. Ankara.
- Avcu, R. (2019). Turkish pre-service middle level mathematics teachers' knowledge for teaching fractions. *RMLE Online*, 42 (9), 1-20.
- Aydın, E. (2015). *Ortaokul matematik 8. sınıf ders kitabı*. Ankara: Sevgi yayınları.
- Aydın, F. ve Temel H. (2012, Eylül). *Fen ve teknoloji dersi ile matematik dersinin entegrasyonunun sağlanması: üslü sayılar örneği*. 2. Ulusal Eğitim Programları ve Öğretim Kongresi, Bolu.
- Aykaç, S. (2008). *İlköğretim 6.sınıf öğrencilerinin ondalık sayıların öğreniminde karşılaştıkları güçlükler ve çözüm önerileri* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

- Aykurtlu, G. (2019). *9. sınıf öğrencilerinin kesir ve yüzde problemleri konusunda problem çözme başarılarının ve problem kurma becerilerinin belirlenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.
- Bahar G. (2019) *Measuring pre-service teachers' mathematics content knowledge and mathematics pedagogical content knowledge on ratio and proportion* (Master thesis). Boğazçi üniversitesi. İstanbul.
- Baki, A. (2010). Öğretmen eğitiminin lisans ve lisansüstü boyutlardan değerlendirilmesi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(3), 15-31.
- Baki, A., ve Aydın-Güç, F. (2014, Şubat). *Pre-service mathematics teachers' misconceptions on the mathematical model validation process*. In International Teacher Education Conference, Sharjah, United Arab Emirates.
- Baki, A. ve Şahin, S. M. (2004). Bilgisayar destekli kavram haritası yöntemiyle öğretmen adaylarının matematiksel öğrenmelerinin değerlendirilmesi. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, 3(2).
- Baki, M. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının bölme işlemi ile ilgili matematiksel bilgileri ve öğretimsel açıklamaları. *Eğitim ve Bilim*, 38 (167).
- Baki, M., Çelik, D., Güler, M. ve Sönmez, N. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının öğrenciyi tanıma bilgilerinin incelenmesi: Bir ders analizi çalışması. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 26 (1), 143-152.
- Balacheff, N. (1988). *A study of students' proving processes at the junior high school level*. In Second Ucsmp International Conference on Mathematics Education. Chicago: NCTM.
- Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education*. (Unpublished doctoral thesis). East Lansing, MI: Michigan State University.
- Ball, D. L. (1990a). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (2), 132-144.
- Ball, D. L. (1990b). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, 90 (4), 449-466.
- Ball, D. L. (1991). Implementing the “professional standards for teaching mathematics”: What's all this talk about “discourse”? *The Arithmetic Teacher*, 39 (3), 44-48.
- Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51 (3), 241-247
- Ball, D. L., Thames, M. H. ve Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389- 407.

- Baltacı, A. (2018). Nitel araştırmalarda örnekleme yöntemleri ve örnek hacmi sorunsalı üzerine kavramsal bir inceleme. *Bitlis Eren Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 7(1), 231-274.
- Baltacı, A. (2019). Nitel araştırma süreci: Nitel bir araştırma nasıl yapılır?. *Ahi Evran Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 5(2), 368-388.
- Başgün, M. ve Ersoy, Y. (2000, Eylül). Sayılar ve aritmetik I: Kesir ve ondalık sayıların öğretilmesinde bazı güçlükler ve yanılgılar. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi, IV. Fen Bilimleri Eğitimi Kongresi Bildiriler Kitabı* içinde, (s. 604 – 608), Ankara.
- Başkaya, A. (2016). *4+ 4+ 4 eğitim sistemi ile yeniden düzenlenen ortaokul matematik programı hakkında öğretmen görüşleri* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Mersin Üniversitesi, Mersin.
- Baştürk, S. ve Dönmez, G. (2008, Ağustos). *Üniversite mezunu yetişkinlerde sayı kavramı*. VIII. Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde sunulan bildiri. Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.
- Baştürk, S. ve Dönmez, G. (2011). Matematik öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerinin ölçme ve değerlendirme bilgisi bileşeni bağlamında incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12(3), 17-37.
- Bayazit, İ., Aksoy, Y. ve Kınap, M. (2011). Öğretmenlerin matematiksel modelleri anlama ve model oluşturma yeterlilikleri. *Education Sciences*, 6(4), 2495-2516.
- Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde matematik öğretimi 6-8. sınıflar*. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.
- Bayram, G. (2013). *8. sınıf öğrencilerinin üslü ifadelerle ilişkin sayı duyuları ve başarıları arasındaki ilişki* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü. Denizli.
- Bektaş, M., Kahraman, S. ve Temel, Y. (2018). *Ortaokul ve imam hatip ortaokulu matematik ders kitabı 6.sınıf*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.
- Belin, M. ve Akar, G. K. (2017). Prospective mathematics teachers'making sense of the decimal representation of real numbers as rational number sequences through quantitative reasoning. *The Eurasia Proceedings of Educational and Social Sciences*, Vol 6, 38-42.
- Bell, A. ve Baki, A. (1997). Ortaöğretim Matematik Öğretimi, YÖK/MEB İşbirliği Projesi, Ankara.
- Beswick, K. (2012). Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians' mathematics and their relationship to practice. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 127-147.

- Biber, M. (2016). Tam sayılar. Elçi, N. A., Bukova Güzel E., Cantürk Günhan, .B. ve Ev Çimen, E. (Ed.) *Temel matematiksel kavramlar ve uygulamaları* içinde (s.31-40) Ankara: PEGEM.
- Bilen, O. (2019). *Ortaokul matematik 5. sınıf ders kitabı*. Ankara: Tuna Matbaacılık San. ve Tic. AŞ.
- Bingolbali, E., Demir, G. ve Monaghan, J. D. (2020). Knowledge of sets: A didactic phenomenon. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(6), 1187-1208.
- Bingölbalı, E., ve Özmantar, M. F. (Ed.) (2014). *Matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri*. Ankara: Pegem Akademi.
- Bloom, B. S. (1956). Taxonomy of educational objectives. In *Vol. 1: Cognitive domain*. New York: McKay.
- Blömeke, S. ve Delaney, S. (2014). Assessment of teacher knowledge a cross countries: A review of thestate of research. *International Perspectives On Teacher Knowledge, Beliefs and Opportunities to Learn*, 541-585.
- Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D. ve Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily?. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(3), 194-222.
- Bourbaki, N. (1968). *Theory of Sets. Elements of Mathematics*. Springer. 17, 148
- Bozkurt, A. (2010). İşçi ve havuz problemleri ile ilgili karşılaşılan zorluklar ve çözüm önerileri. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(2), 173-185.
- Böge, H. ve Akıllı, R. (2018). *Ortaokul ve imam hatip ortaokulu matematik 8 ders kitabı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.
- Brown, A., Thomas, K. ve Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. *Learning and Teaching Number Theory: Research in Cognition and Instruction*, 41-82.
- Brown, R. E., Epstein, M. L. ve Orrill, C. H. (2020). When constant in a proportional relationship isn't constant—A sign of not-so-shared understandings. *Investigations in Mathematics Learning*, 12(3), 194-207.
- Burghes, D. ve Geach, R. (2011). International comparative study in mathematics teacher training. *Reading, UK: CfBT Education Trust*. <http://hdl.voced.edu.au/10707/186405>.
- Bütün, M. (2012). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının uygulanan zenginleştirilmiş program sürecinde matematiği öğretme bilgilerinin gelişimi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

- Can, H. N. (2019). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin kesirlerde işlemler konusu ile ilgili pedagojik alan bilgilerinin öğrenci zorlukları ve kavram yanlışları bileşeninde incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Marmara Üniversitesi. İstanbul.
- Cangelosi, R., Madrid, S., Cooper, S., Olson, J. ve Hartter, B. (2013). The negative sign and exponential expressions: Unveiling students' persistent errors and misconceptions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 69-82.
- Cankoy, O. (2010). Mathematics teachers' topic-specific pedagogical content knowledge in the context of teaching a 0, 0! and a [division] 0. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 10(2), 749-769.
- Carpenter, T. P. ve Fennema, E. (1991). Research and cognitively guided instruction. Integrating research on Teaching and Learning Mathematics, 1-16.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L. ve Carey, D. A. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(5), 385-401.
- Cengiz, Ö. M. (2006). *Reel sayıların öğretiminde bir kısım ortaöğretim öğrencilerinin yanlışları ve yanlışları üzerine bir çalışma* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Erzurum.
- Charles, R., Lester, F. ve O'Daffer, P. (1987). *The analytic scoring scale. How to evaluate progress in problem-solving*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cırıtcı, H., Gönen, İ., Araç, D., Özarslan, M., Pekcan, N. ve Şahin, M. (2019). *Ortaokul ve imam hatip ortaokulu matematik ders kitabı 5. sınıf* Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.
- Cincinatus, R. B. ve Sheffet, M. (2016). " With percentages the 100 is always in the denominator": from the field to pre-service teachers. *International Journal of Research in Education and Science*, 2(1), 143-155.
- Cochran, K. F., De Ruiter, J. A. ve King, R. A. (1993). Pedagogical content knowing: An integrative model for teacher preparation. *Journal of Teacher Education*, 44(4), 263-272.
- Cockburn, A. D. (2005). *Teaching mathematics with insight: the identification, diagnosis and remediation of young children's mathematical errors*. London: Falmer Press.
- Coe, R. ve Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, 20(1), 41-53.
- Cohen L., Manion L. ve Morrison, K. (Ed.) (2007). *Research methods in education: Sixth edition*. London: Routledge.

- Cooney, T.J. (1999). Conceptualizing Teachers' Ways of Knowing. In Tirosh, D. (Ed.) *Forms of mathematical knowledge*. Dordrecht: Springer
https://doi.org/10.1007/978-94-017-1584-3_8
- Cooper, J. M. ve Alvarado, A. (2006). *Preparation, recruitment, and retention of teachers*. Brussels: International Institute for Educational Planning. Paris:IIEP-UNESCO.
 Erişim adresi: <http://unesdoc.unesco.org/images/0015/001520/152023e.pdf>
- Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking*. (s. 153-166). Boston: Kluwer.
- Courant, R. ve Robbins, H.(1996). *What is mathematics?* 2nd ed.New York: Oxford.
- Crider, M. R. (1998). *The effects of using" splitting" multiplicative structures on students' understanding of integer exponents*. Texas: A&M University.
- Crilly, T. (2011). Cambridge: The rise and fall of the mathematical tripos. *Mathematics in Victorian Britain*, 17-32.
- Çağlayan, N., Dağıstan, A. ve Korkmaz, B. (2018). *Ortaokul ve imam hatip ortaokulu matematik 6 ders kitabı*. (s. 133, 138). Ankara: Meb Yayınları.
- Çalışıcı, H. (2018). Middle school students' learning difficulties in the ratio proportion topic and a suggested solution: envelope technique. *Universal Journal of Educational Research*, 6(8), 1848-1855.
- Çatak, B. (2016). OBEB-OKEK. Elçi, N. A., Bukova Güzel E., Cantürk Günhan, B. ve Ev Çimen, E. (Ed.) *Temel matematiksel kavramlar ve uygulamaları içinde* (s.51-56) Ankara: PEGEM.
- Çelenk, S. ve Tertemiz, N. ve Kalaycı, N. (2000). *İlköğretim programları ve gelişmeler, program geliştirme ilke ve teknikleri açısından değerlendirilmesi*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Çelik, B. (2006). *Temel matematik*. Ankara: Nobel Yayınları.
- Çetin, İ. (2009). *7. ve 9. sınıf öğrencilerinin oran ve orantı konusundaki kavram yanlışları* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Selçuk Üniversitesi, Konya.
- Çetin, Ö., Aksakal, U., Ertürk, Ü., Şay, G. ve Tığlı, İ. (2019). *Ortaokul ve imam hatip ortaokulu 8.sınıf matematik ders kitabı*. Ankara: MEB yayınları.
- Çontay, E. G. ve Duatepe-Paksu, A. (2019). 8th grade students' understanding of the definition of rectangle. *Acta Didactica Napocensia*, 12(1), 225-238.
- Çubukluöz, Ö., Adıgüzel, T., Özdemir, B. G. ve Akkaya, R. (2018). Ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin en büyük ortak bölen ve en küçük ortak kat konusundaki bilgi oluşturma süreçlerinin RBC+ C modeli ile incelenmesi. *Journal of Computer and Education Research*, 6(12), 285-319.

- Davis, E. A. (2003). Knowledge integration in science teaching: Analysing teachers' knowledge development. *Research in Science Education*, 34(1), 21–53.
- Demir, G. (2012). *Küme kavramına ilişkin öğrenci, öğretmen algısı ve ders kitaplarında küme kavramının ele alınış biçimi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Gaziantep Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Gaziantep.
- Demir, G. (2012). *Küme kavramına ilişkin öğrenci, öğretmen algısı ve ders kitaplarında küme kavramının ele alınış biçimi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Gaziantep Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Gaziantep.
- Denscombe, M. (2010). *The Good Research Guide: For Small-scale Social Research Projects*. 5th Edition. Maidenhead: Open University Press,.
- Denzin, N. K. (1970). Problems in analyzing elements of mass culture: Notes on the popular song and other artistic productions. *American Journal of Sociology*, 75(6), 1035-1038.
- Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., ... ve Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, 47, 82-92.
- Dias, A. (2005). Using lattice models to determine Greatest Common Factor and Least Common Multiple. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 9, 730-738.
- Dikici, R. ve İşleyen, T. (2004). Bağıntı ve fonksiyon konusundaki öğrenme güçlüklerinin bazı değişkenler açısından incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 105.
- Doğruel, A. B. (2019). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin oran ve orantı konusuna ilişkin pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Afyon Kocatepe Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Afyon.
- Donald, J.G. (1991). Knowledge and the university curriculum. In Conrad C.F. ve Haworth J.G. (Ed.), *Curriculum in transition: Perspectives on the undergraduate experience* (295–307). Needham Heights, MA: Ginn Publishing
- Doruk, M. (2020). Matematik öğretmenlerinin rasyonel sayılar konusunda öğrencilerin yaşadıkları öğrenme güçlüklerine sundukları öneriler. *Celal Bayar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 18(03), 153-168.
- Duatepe-Paksu, A. (2008). Üslü ve köklü sayılar konularındaki öğrenme güçlükleri (Ed.) Özmentar, MF, Bingölbali, E. ve Akkoç, H. *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* içinde. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

- Durmaz, B. (2017). Matematik öğretmenleri ile adaylarının tamsayılarla dört işlemi sayma pullarıyla modelleme başarıları. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(3), 171-192.
- Ekawati, R., Lin, F. L. ve Yang, K. L. (2015). Developing an instrument for measuring teachers' mathematics content knowledge on ratio and proportion: a case of Indonesian primary teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 1-24.
- Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. London: Croom Helm.
- Elçi, A. N., Güzel, E. B., Günhan, B. C. ve Çimen, E. E. (2016). *Temel matematiksel kavramlar ve uygulamaları*. Ankara: Pegem Akademi.
- Ercan, B. (2010). *İlköğretim yedinci sınıf öğrencilerinin tam sayı kavramı ile ilgili bilgilerinin değerlendirilmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Çukurova Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.
- Ercan, s. ve Aktaş, d. (2021). Matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerinin kesir ve rasyonel sayı kavramına ait tanımlamaları. *Milli Eğitim Dergisi*, 50(230), 279-300.
- Ercire, Y. E. (2014). *İrrasyonel sayı kavramına ilişkin yaşanan güçlüklerin incelenmesi*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Bilimleri Enstitüsü. İzmir.
- Ercire, Y. E., Narlı, S. ve Aksoy, E. (2016). İrrasyonel sayı kümesinin rasyonel ve gerçek sayı kümeleriyle olan ilişkisine yönelik öğrenme güçlükleri. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 7(2), 417-439
- Erdem, E., Başbüyük, K., Gökkurt, B., Şahin, Ö. ve Soylu, Y. (2015). Tam sayılar konusunun öğrenilmesi ve öğretilmesinde yaşanan zorluklar ve çözüm önerileri. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17(1), 97-117.
- Erdem, E., Gökkurt, B., Şahin, Ö., Başbüyük, K., ve Soylu, Y. (2015). Examining prospective middle school mathematics teachers' modelling skills of multiplication and division in fractions. *Croatian Journal of Education*, 17(1), 11-36.
- Eroğlu, D., Camci, F. ve Tanışlı, D. (2019). Altıncı sınıf öğrencilerinin kesirler ve kesirlerdeki toplama çıkarma konusundan bilgilerinin yapılandırılmasına ilişkin tahmini öğrenme yol haritası. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 45, 116-143.
- Ersoy, E. ve Biber, B. T. (2020). Yaratıcı drama yönteminin kesirlerde toplama işlemi öğretimine yansımaları. *Ondokuz Mayıs University Journal of Education Faculty*, 39(1), 83-103.
- Ersoy, Y. ve Ardahan, H. (2003). *İlköğretim okullarında kesirlerin öğretimi-II: Taniya yönelik etkinlikler düzenleme*. Erişim adresi: <http://www.matder.org.tr/index.php>.

- Ertuğrul, G. (2009). *Yeni ilköğretim matematik dersi 6. sınıf öğretim programında yer alan tam sayılarla ilgili etkinliklerin öğrenci başarısına etkisi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Eski, C. (2017). *Ortaokul matematik dersi öğretim programına ilişkin öğretmen ve uzman görüşlerinin değerlendirilmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Euler, L. (1770). *Elements of Algebra*. Also published in Opera Omnia, translated from the French edition into English by J. Hewlett, Longman/Hurst/Rees/Orme, London, 1822; available as E387, Section 1, at maa.eulerarchive.org.
- Ev Çimen, E. (2016). Doğal sayılar. Elçi, N. A., Bukova Güzel E., Cantürk Günhan, .B. ve Ev Çimen, E. (Ed.) *Temel matematiksel kavramlar ve uygulamaları içinde* (s.19-30) Ankara: PEGEM.
- Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in mathematics Education*, 24(2), 94-116.
- Even, R. ve Tirosh, D. (1995). Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter. *Educational Studies in Mathematics*, 29(1), 1-20.
- Feinstein, I. K. (1973). Sets: A pandora's box?. *School Science and Mathematics*, 73(6), 495-500.
- Fennema, E. ve Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics*. (s. 147–164). New York: Macmillan.
- Fiscbein, E., Jehiam, R. ve Cohen, D. (1995), The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 29-44.
- Fiscbein, E., Jehiam, R. ve Cohen, D. (1995), The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 29-44.
- Fischbein, E. ve Baltsan, M. (1998). The mathematical concept of set and the collection model. *Educational Studies in mathematics*, 37(1), 1-22.
- Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, 34(10), 906–911.
- Fraenkel, J. R. ve Wallen, N. E. (2006). *How to design and evaluate research in education* (5th ed.). New York: McGraw-Hill Publishing.

- Freudenthal, H. (1969a). A teachers course colloquium on sets and logic. *Educational Studies in Mathematics*, 32-58.
- Freudenthal, H. (1969b). Braces and Venn diagrams. *Educational Studies in Mathematics*, 408-414.
- Friedrichsen, P., Lankford, D., Brown, P., Pareja, E., Volkmann, M. ve Abell, S. K. (2007, Nisan). *The PCK of future science teachers in an alternative certification program*. In Annual Meeting of the National Association for Research in Science Teaching, New Orleans, LA.
- Gagne, R. (1985). *The conditions of learning and theory of instruction*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Gallardo, A. (2008, Temmuz). Historical epistemological analysis in mathematical education: Negative numbers and the nothingness. In Figueras, O. (Ed.) *Proceedings of the joint meeting of PME* (Vol. 32, s. 17-29).
- Gardner, M. (1984). *The Sixth Book of Mathematical Game*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- Gedik Altun, S.D.(2019). Doğal sayı kavramı ve doğal sayı kavramının öğretimi. Ertekin, E. ve Ünlü, M.(Ed.) *Kuramdan uygulamaya etkinlik örnekleriyle sayıların öğretimi içinde* (s. 77-94), Ankara: PEGEM.
- Gess-Newsome, J. (2013). Pedagogical content knowledge. In J. Hattie, ve E. M. Anderman (Eds.) *International guide to student achievement*. (s. 257–259). New York: Routledge.
- Girit, D. ve Akyüz, D. (2016). Algebraic thinking in middle school students at different grades: Conceptions about generalization of patterns. *Education Journal of Science and Mathematics Education*, 10(2), 243-272.
- Gómez, B. ve Buhlea, C. (2009, Ocak). The ambiguity of the sign $\sqrt{}$. In Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S. ve Arzarello F. (Eds.) *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 509-518).
- Goodman, L. ve Weisstein, E. W. (t.y.). "Square Number." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/SquareNumber.html>
- Gökkurt, B., Koçak, M. ve Soylu, Y. (2014, Eylül). *Öğretmen adaylarının kesirler konusuna yönelik konu alan bilgileri ve öğretim stratejileri bilgilerinin incelenmesi*. 11. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde sunulan sözlü bildiri. Adana: Çukurova Üniversitesi.
- Gökkurt, B., Şahin, Ö. ve Soylu, Y. (2012). Matematik öğretmenlerinin matematiksel alan bilgileri ile pedagojik alan bilgileri arasındaki ilişkinin incelenmesi. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 5(8).

- Gökkurt, B., Şahin, Ö., Soylu, Y. ve Soylu, C. (2013). Öğretmen adaylarının kesirlerle ilgili pedagojik alan bilgilerinin öğrenci hataları açısından incelenmesi. *International Online Journal of Educational Sciences*, 5(3).
- Graeber, A. O. ve Tirosh, D. (1988). Multiplication and division involving decimals: Preservice elementary teachers' performance and beliefs. *The Journal of Mathematical Behavior*.
- Grossman, P.L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.
- Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Ectj*, 29(2), 75-91.
- Guba, E. G. ve Lincoln, Y. S. (1994). Competing paradigms in qualitative research. *Handbook of qualitative research*, 2(163-194), 105.
- Güler, G. (2017). Matematik öğretmenlerinin irrasyonel sayılara yönelik kavram bilgilerinin incelenmesi. *Turkish Online Journal of Qualitative Inquiry*, 8(2), 186-215.
- Güler, M. ve Çelik, D. (2019). How wellprepare dare the teachers of tomorrow? An examination of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge. *International Journal of Mathematical Education İn Science and Technology*, 50(1), 82-99.
- Güney, Z. ve Özkoç, M. (2015). *Soyut matematik*. İzmir: Dinozor Kitabevi.
- Gür, H. (2009). 8. ve 9. sınıf öğrencilerinin kümeler konusundaki temel hataları ve kavram yanlışlarının belirlenmesi. *E-Journal of New World Sciences Academy Education Sciences*, 4 (3), 678-694.
- Gürefe, N. ve Aktaş, G. S. (2020). The concept of prime number and the strategies used in explaining prime numbers. *South African Journal of Education*, 40(3), 1-9.
- Gürsul, F. ve Kızılkaya, G. (2004, Kasım). *OBEB OKEK konularındaki kavram yanlışlarının giderilmesine yönelik web tabanlı tasarım örneği*. IV. Uluslararası Eğitim Teknolojileri Sempozyumu, Sakarya, Türkiye.
- Güven, B., Çekmez, E. ve Karataş, İ. (2011). Examining preservice elementary mathematics teachers' understanding about irrational numbers. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies (PRIMUS)*, 21(5), 401-416. DOI: 10.1080/10511970903256928
- Güven, B., Çelik, D. ve Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi*, 30(316), 35-45.

- Güzel, S. ve Yılmaz, S. (2020). 8. sınıf öğrencilerinin üslü ifadeler konusundaki matematiksel dil kullanım düzeyleri ve dile ilişkin görüşleri. *International Journal of Active Learning*, 5(1), 33-56.
- Halmos, P. R. (1974). The Peano Axioms. *Naive Set Theory* (pp. 46-49). New York: Springer.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 5-23.
- Harel, G. ve Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, 7, 234-283.
- Harris, A. (2001). *Multiplication & Division*. Erişim adresi: <http://www.mathematicshed.com/uploads/1/2/5/7/12572836/md.pdf>
- Harris, T.A. (2001) *Rolling Bearing Analysis*. 4th edition, New York: John Wiley ve Sons,
- Hart, K. (1981). Fractions. *Mathematics in School*, 10(2), 13-15.
- Hart, L. C. (1993). Some factors that impede or enhance performance in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(2), 167-171.
- Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 12(1), 71-87.
- Hativa, N. ve Cohen, D. (1995). Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 28(2), 401-431.
- Healy, L. ve Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.
- Hecht, S. A. (1998). Toward an information-processing account of individual differences in fraction skills. *Journal of Educational Psychology*, 90(3), 545.
- Hıdıroğlu Ç. N. (2016). Tam sayılar. II. Elçi, N. A., Bukova Güzel E., Cantürk Günhan, .B. ve Ev Çimen, E. (Ed.) *Temel matematiksel kavramlar ve uygulamaları* içinde (s.41-50) Ankara: PEGEM.
- Hiebert, J. ve Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In Grouws, D.A. (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. New York: Macmillan Publishing Co, Inc.
- Hiebert, J. ve Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In Hiebert, J. (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Hill, H. C. ve Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 330-351.
- Hill, H. C., Ball, D. L. ve Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Hill, H. C., Schilling, S. G. ve Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal*, 105(1), 11-30.
- Horzum, T. (2019). Kesir kavramı ve öğretimi. E. ve Ünlü, M. (Ed.) *Kuramdan uygulamaya etkinlik örnekleriyle sayıların öğretimi* içinde (s. 219-256), Ankara: PEGEM.
- Işık, C. ve Kar, T. (2012). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde bölmeye yönelik kurdukları problemlerde hata analizi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 12(3), 2289-2309.
- İşıksal Bostan, M. (2009). Negatif sayılara ilişkin zorluklar, kavram yanılgıları ve bu yanılgıların giderilmesine yönelik öneriler. Bingölbalı, E. ve Özmantar, F.M. (Ed.) *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* içinde. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.
- İşıksal Bostan, M. ve Osmanoğlu, A. (2016). Pedagojik alan bilgisi. Bingölbalı, E., Arslan, S. ve Zembat, İ.Ö. (Ed.) *Matematik eğitiminde teoriler* içinde. Ankara: Pegem Akademi.
- İşıksal, M. (2006). *A study on pre-service elementary mathematics teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge regarding the multiplication and division of fractions* (Doctoral dissertation). METU, Ankara.
- İpek, A. S., Albayrak, M. ve Işık, C. (2009). Sınıf öğretmeni adaylarının küme kavramıyla ilgili algıları. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(1), 221-228.
- İskenderoğlu, T. A., Türk, Y. ve İskenderoğlu, M. (2016). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının somut materyalleri tanıma-kullanma durumları ve matematik öğretiminde kullanmalarına yönelik öz-yeterlikleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 1(39), 1-15.
- İşgüden, E. (2008). *7. ve 8. sınıf öğrencilerinin tam sayılar konusunda karşılaştıkları güçlükler*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

- Johnson, J. (2016). *An investigation into the definitions and development of pedagogical content knowledge among pre-service and current mathematics teachers (Doctoral dissertation)*. Arizona State University.
- Kaplan, A., Altaylı, D. ve Öztürk, M. (2014). Kareköklü sayılarda karşılaşılan kavram yanlışlarının kavram karikatürü kullanılarak giderilmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 27(1), 85-102.
- Kaplan, A., İşleyen, T. ve Öztürk, M. (2011). 6. sınıf oran orantı konusundaki kavram yanlışları. *Kastamonu Üniversitesi Kastamonu Eğitim Dergisi*, 19(3), 953-968.
- Kaput, J. J. ve West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In Harel G. ve Confrey J. (Ed.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235–287). State University of New York Press.
- Kara, F. ve Delice, A. (2012, Haziran). *Kavram tanımı mı? Yoksa kavram imgeleri mi? İrrasyonel sayıların temsilleri*. X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulmuş bildiri. Niğde Üniversitesi, Niğde, Türkiye.
- Karaca, H.(2019). *Oran – orantı ve orantısal akıl yürütme*. Ankara: Pegem Akademi Yayınları.
- Karadeniz, M. H., Kıdıl, M. ve Birkan, E. (2019, Mayıs) *Sekizinci sınıf öğrencilerinin EBOB-EKOK konusuna ilişkin algılayışlarının belirlenmesi*. Uluslararası 19 Mayıs Multidisipliner Çalışmalar Kongresi'nde sunulan bildiri. Samsun, Türkiye.
- Karagöz Akar, G. (2009). Oran konusunun kavramsal öğreniminde karşılaşılan zorluklar ve çözüm önerileri. Bingolbali, E. ve. Özmantar, F.M. (Ed.) *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri içinde*. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.
- Karasar, N. (2008). *Bilimsel araştırma metodu*. Ankara: Hacettepe Taş Kitapçılık.
- Karataş, İ. (2002). *8. sınıf öğrencilerinin problem çözme sürecinde kullanılan bilgi türlerini kullanma düzeyleri*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Kartal, B. (2017). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının teknolojik pedagojik alan bilgisi gelişimlerinin incelenmesi: Çokgenler örneği*. YÖK Ulusal Tez Merkezi - Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Kaya, R. (2015). *Ortaokul 6.sınıf öğrencilerinin sayıların ondalık gösterimi konusundaki kavram yanlışlarının incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak.
- Kertil, M., Erbaş, A. K. ve Çetinkaya, B. (2017). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının değişim oranı ile ilgili düşünme biçimlerinin bir modelleme etkinliği

- bağlamında incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 8(1), 188-217.
- Keskin Oğan, A. ve Öztürk, S. (2019). *Ortaokul ve İHO matematik 7 ders kitabı*. Ankara: MEB yayınları.
- Keskin, C. (2015). *Ortaokul matematik ders kitabı 7*. Ankara: Ada Yayıncılık Matbaa.
- Kinach, B. M. (2002a). Understanding and learning-to-explain by representing mathematics: Epistemological dilemmas facing teacher educators in the secondary mathematics ``Methods'' course. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(2), 153-186.
- Kinach, B. M. (2002b). A cognitive strategy for developing pedagogical content knowledge in the secondary mathematics methods course: Toward a model of effective practice. *Teaching and Teacher Education*, 18(1), 51-71.
- Knuth, E. J. (2002). Proof as a tool for learning mathematics. *The Mathematics Teacher*, 95(7), 486-490.
- Kocaoğlu, T. ve Yenilmez, K. (2010). Beşinci sınıf öğrencilerinin kesir problemlerinde yaptıkları hatalar ve kavram yanlışları. *Dicle University Journal of Ziya Gokalp Education Faculty*, 14. 71-85
- Koç Şanlı K. ve Işık c. (2020). Tam sayıların öğretim sürecinin öğretmenlerin model kullanımları üzerinden analizi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 15(29), 81-108.
- Koçak, M. (2015). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel formülleri anlamlandırılabilir ve matematiksel formüller ile ilgili öğretim stratejisi bilgilerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Koçak, M., Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2015, Nisan). *Matematik öğretmeni adaylarının tam sayılar konusuna ilişkin öğretim strateji bilgileri ve alan bilgilerinin incelenmesi*. 24. Eğitim Bilimleri Kongresinde sunulan sözlü bildiri, Ömer Halisdemir Üniversitesi, Niğde, Türkiye.
- Komisyon (2016). *Ortaokul matematik 6. sınıf ders kitabı*. Ankara: MEB Yayınları
- Kovarik, K. (2008). *Mathematics educators' and teachers' perceptions of pedagogical content knowledge* (Doctoral dissertation). Columbia University.
- Köroğlu, H. ve Yeşildere, S. (2004). İlköğretim yedinci sınıf matematik dersi tamsayılar ünitesinde çoklu zeka teorisi tabanlı öğretimin öğrenci başarısına etkisi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(2), 25-41.
- Kubar, A. (2012). *Pre-service elementary mathematics teachers' knowledge about definitions of integers and their knowledge about elementary students' possible*

- misconceptions and errors in describing integers* (Master thesis). Middle East Technical University Ankara.
- Külcüoğlu, D. (2019). *Öğrencilerin matematiksel düşüncelerine odaklanma: Matematik öğretmen adayları ile bir durum çalışması*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Küpcü, A. R. ve Pasmaz, A. (2010, Mayıs). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgisi: Orantı kavramı*. II. Uluslararası Öğretmen Yetiştirme Politikaları ve Sorunları Sempozyumu Hacettepe Üniversitesi, Ankara
- Kwong ,C. W., Joseph, Y. K. K., Eric, C. Cm. ve Khoh, L. T. S.(2007). Development of mathematics pedagogical content knowledge in student teachers. *The Mathematics Educator*, 10(2), 27-54
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol 1, pp. 629–667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Learn, W. Y. W. (2000). *Rational Numbers*. Erişim adresi: http://learningcentre.nelson.com/student/9780070973404/Student_Text/02_ML9_C_H02_FIN_B.pdf
- Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 16, 1-13.
- Leikin, R. ve Zazkis, R. (2010). On the content-dependence of prospective teachers' knowledge: A case of exemplifying definitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(4), 451-466.
- Lenhart, S. T. (2010). *The effect of teacher pedagogical content knowledge and the instruction of middle school geometry*. (Doctoral dissertation). Liberty University.
- Levenson, E. (2012). Teachers' knowledge of the nature of definitions: The case of the zero exponent. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(2), 209-219.
- Li, Y. ve Smith, D. (2007, Temmuz). Prospective middle school teachers' knowledge in mathematics and pedagogy for teaching—the case of fraction division. In Woo, J. H., Lew, H.C., Park, K. S. ve Seo, D.Y. (Eds.) *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, s. 185-192). Seoul, The Republic of Korea: PME.
- Linchevski, L., ve Vinner, S. (1988 Temmuz). The naive concept of sets in elementary teachers. In Borbás, A. (Ed.) *Proceedings of the 12th international conference, psychology of mathematics education* (Vol. 11, s. 471-478).
- Lincoln, Y. S. ve Guba, E. A. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage.

- Lincoln, Y. S. ve Guba, E. G. (1986). But is it rigorous? Trustworthiness and authenticity in naturalistic evaluation. *New Directions for Program Evaluation*, (30), 73-84. <https://doi.org/10.1002/ev.1427>
- Livy, S. ve Herbert, S. (2013). Second-year pre-service teachers' responses to proportional reasoning test items. *Australian Journal of Teacher Education (Online)*, 38(11), 17-32.
- Livy, S. ve Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13(2), 22-43.
- Lo, H. I. M. (2006). *Exploring the relationship between mathematics content knowledge and pedagogical content knowledge among pre-service teachers*. University of Northern Iowa.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in china and the united states*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates
- Mac Lane, S. ve Birkhoff, G. (1999). *Algebra (Vol. 330)*. American Mathematical Society
- Mac Lane, S. ve Birkhoff, G. (1999). *Algebra (Vol. 330)*. American Mathematical Soc.
- Macit, E. ve Nacar, S. (2019). İlköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin rasyonel sayı ve kesir kavram imajları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 6(11), 50-62.
- Magnusson, S., Krajcik, J. ve Borko, H. (1999). Nature, sources, and development of pedagogical content knowledge for science teaching. In Gess-Newsome, J. ve Lederman, N.G. (Ed.). *Examining pedagogical content knowledge*. Science & Technology Education Library, vol 6. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47217-1_4
- Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, 41(3), 3-11.
- Martin, W. G. ve Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 41-51.
- Martin, W. G., ve Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for research in mathematics education*. 20(1), 41-51.
- Mason, K. ve Tooley, J., (1992). *Moving Forward in Maths: A Diagnostic Teaching Approach*. UK: NFER NELSON Publishing Company Ltd.
- McIntosh, C. (2013). *Cambridge advanced learner's dictionary*. Cambridge University Press.
- MEB (2009). İlköğretim matematik dersi 6.-8. sınıflar öğretim programı. Ankara: MEB.

- MEB (2013). Ortaokul matematik dersi 5.-8. sınıflar öğretim programı. Ankara: MEB.
- MEB, (2017a). Öğretmen strateji belgesi 2017-2023. Ankara: Öğretmen Yetiştirme ve Eğitimi Genel Müdürlüğü.
- MEB, (2017b). Öğretmenlik Mesleği Genel Yeterlilikleri Belgesi. Ankara: Öğretmen Yetiştirme ve Eğitimi Genel Müdürlüğü.
- MEB,(2018). *Matematik dersi öğretim programı*.
<http://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=329> (Erişim tarihi: 08 Temmuz 2018) adresinden elde edilmiştir
- Melezoğlu, Ç. (2005). *Yönlü sayıların öğretiminde öğrencilerin yaptığı hatalar ve yanlışlar üzerine bir araştırma* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Memnun, D. S. (2014). Beşinci ve altıncı sınıf öğrencilerinin sözel problemleri çözme konusundaki yetersizlikleri ve problem çözümlerindeki hataları. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 5(2), 158-175.
- Menon, R. (1998). Pre-service teachers' understanding of perimeter and area. *School Science and Mathematics*, 98(7), 361-368.
- Merenluoto, K. ve Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In Limón, M., Mason, L. (Ed.) *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice*. (s. 232-257). Springer, Dordrecht. Erişim adresi https://doi.org/10.1007/0-306-47637-1_13
- Miles, M. B. ve Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Sage Publications.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB), (2009). *İlköğretim matematik dersi 6-8. sınıflar öğretim programı*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basımevi.
- Mohyuddin, R. G. ve Khalil, U. (2016). Misconceptions of students in learning mathematics at primary level. *Bulletin of Education and Research*, 38(1), 133-162.
- Moralı, S. Köroğlu, H. ve Çelik, A. (2004). Buca eğitim fakültesi matematik öğretmen adaylarının soyut matematik dersine yönelik tutumları ve rastlanan kavram yanlışları. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(1). Erişim: <https://dergipark.org.tr/tr/pub/gefad/issue/6760/90938>
- Morkoyunlu, Z. (2019). Doğal sayılarda dört işlem becerileri. Ertekin E. ve Ünlü, M.(Ed.) *Kuramdan uygulamaya etkinlik örnekleriyle sayıların öğretimi içinde* (s. 95-128), Ankara: PEGEM.
- Morrow, S. L. (2005). Quality and trustworthiness in qualitative research in counseling psychology. *Journal of Counseling Psychology*, 52(2), 250.

- Mumcu, H. Y. (2015). 6-8. sınıf öğrencilerinin ondalık kesirlerle ilgili sahip oldukları kavram yanlışları ve nedenleri. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, (24), 294-338.
- Mumcu, H. Y. (2018). Matematiksel ilişkilendirme becerisinin kuramsal boyutta incelenmesi: türev kavramı örneği. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 9(2), 211-248.
- Naiser, E. A., Wright, W. E. ve Capraro, R. M. (2003). Teaching fractions: Strategies used for teaching fractions to middle grades students. *Journal of Research in Childhood Education*, 18(3), 193-198.
- Narlı, S., ve Narlı, P. (2012). " Sonsuzluk asla ifade edilemez, gösterilemez, resme ya da kağıda dökülemez!": ilköğretim öğrencilerinin sonsuzluk algıları ve yanlışları. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi* 33
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Research Council [NRC], (2000). *Inquiry and the national science education standards: A guide for teaching and learning*. Washington, DC: National Academies Press.
- National Research Council [NRC], (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Nayır, Ö. Y., Erhan, G. K., Koştur, M., Türkoğlu, H. ve Mirasyedioğlu, Ş. (2018). Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin sayı kümelerine ilişkin hazırbulunuşluklarının sözel, matematiksel ve model temsilleriyle incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 9(2), 249-282.
- Nesin, A. (2010). Sayma. *Nesin matematik köyü*. İstanbul: Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.
- Ngu, B. H. (2019). Solution representations of percentage change problems: The pre-service primary teachers' mathematical thinking and reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(2), 260-276.
- Niven, I. (1961). *Numbers: rational and irrational* (Vol. 1). New York: Random House.
- Noblet, K. (2013, Şubat). Preservice elementary teachers' understanding of greatest common factor story problems. *In Proceedings of the 16th annual conference on research in undergraduate mathematics education*. Denver, CO, USA: Sigma.
- Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part I-Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11- 217-253.
- Norton, S. (2019). The relationship between mathematical content knowledge and mathematical pedagogical content knowledge of prospective primary teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22(5), 489-514.

- OECD (2006). Assessing scientific, reading and mathematical literacy, A Framework for PISA 2006, https://www.sel-gipes.com/uploads/1/2/3/3/12332890/assessing_scientific_reading_and_mathematical_literacy.pdf adresinden 29 Eylül 2019 tarihinde alınmıştır.
- Oral, N. (2020). *5. sınıf öğrencilerinin doğal sayılarda bölme işleminde yaşadığı zorlukları ve bu zorlukların nedenleri*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi) Pamukkale Üniversitesi, Eğitim bilimleri Enstitüsü, Denizli.
- Orhun, N. (1998). *Cebir öğretiminde aritmetik işlemlerdeki üslü ve köklü çokluklardaki yanlışların tespiti*. Atatürk Üniversitesi 40. Kuruluş Yıldönümü Matematik Sempozyumunda sunulan bildiri, Erzurum.
- Orman F. (2020). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin kareköklü sayılar konusuna yönelik pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Erciyes Üniversitesi, Kayseri.
- Ozaltun Celik, A. ve Bukova Guzel, E. (2017). Revealing ozgur's thoughts of a quadratic function with a clinical interview: Concepts and their underlying reasons. *International Journal of Research in Education and Science*, 3(1), 122-134.
- Ozkan, E. M. ve Ozkan, A. (2012). Misconception in exponential numbers in IST and IIND level primary school mathematics. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 46, 65-69.
- Ozsoy, O. (2002). Budgetary trade-offs between defense, education and health expenditures: The case of Turkey. *Defence and Peace Economics*, 13(2), 129-136.
- Öner, D. (2010). Öğretmenin bilgisi özel bir bilgi midir? Öğretmek için gereken bilgiye kuramsal bir bakış. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 27 (2), 23-32.
- Özcan, M. (2015). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının işlemsel tahmin becerilerinin incelenmesi*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Özçakır, B. (2019). Ondalık gösterim kavramı ve öğretimi. Ertekin, E. ve Ünlü, M. (Ed.) *Kuramdan uygulamaya etkinlik örnekleriyle sayıların öğretimi içinde* (s. 348-375), Ankara: PEGEM.
- Özçifçi, R. (2007). *Rasyonel sayıların öğretimindeki hatalar ve alınması gereken tedbirler* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi) Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Özdemir Ç. (2019). *Ortaokul ve imam hatip ortaokulu 6.sınıf matematik ders kitabı*. Ankara: Öğün Yayınları.

- Özdemir, B. G. ve Soylu, Y. (2017). Examination of the pedagogical content knowledge of mathematics teachers. *International Online Journal of Primary Education*, 6(1), 26-39.
- Özdemir, B. G., Bayraktar, R. ve Yılmaz, M. (2017). Sınıf ve matematik öğretmenlerinin kavram yanlışlarına ilişkin açıklamaları. *Trakya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 7(2), 284-305.
- Özdeş H. (2013). *9. sınıf öğrencilerinin doğal sayılar konusundaki kavram yanlışları* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Adnan Menderes Üniversitesi, Aydın.
- Özgen, K.(2014). Rasyonel sayılar. Elçi, N. A., Bukova Güzel E., Cantürk Günhan, .B. ve Ev Çimen, E. (Ed.) *Temel matematiksel kavramlar ve uygulamaları* içinde (s.57-70) Ankara: PEGEM.
- Özkaya, M., Konyalıoğlu, A. C. ve Gedik, S. D. (2013). Matematik öğretmen adaylarının üslü ve köklü sayılar konusunda öğrencilerin sahip olabilecekleri hatalara yaklaşımları. *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi* 3(2)49-54 syf.
- Özmantar, M. F. ve Bingölbalı, E. (2009). Primary teachers and their mathematical difficulties. *Gaziantep University Journal of Social Sciences*, 8(2), 401-427.
- Özmen-Hızarcıoğlu, B. (2013). *Problem çözme sürecinde dereceli puanlama anahtarı (rubrik) kullanımında puanlayıcı uyumunun incelenmesi*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bolu.
- Padraig, M. ve Mc Loughlin, M. M. (2002, Ağustos). *The Central Role of Proof in the Mathematics Canon: The Efficacy of Teaching Students to Create Proofs Using a Fusion of Modified Moore, Traditional, and Reform Methods*. In The Annual Summer Meeting of the Mathematical Association of America, Burlington, Vermont.
- Pala, A. (2016). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin rasyonel sayılar ve bu sayılarla yapılan dört işlemin öğretiminde en çok kullandıkları kuralların belirlenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Park, S. ve Oliver, J. S. (2008). Revisiting the conceptualisation of pedagogical content knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education*, 38(3), 261-284.
- Parker, M. (1999). Building on: Building up: Proportional-reasoning activities for future teachers. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4(5), 286-289.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research ve evaluation methods*. London: Sage publications.

- Peled, I. ve HersHKovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 30(1), 39-46.
- Perkins, D. N. (1992). *Smart schools: Better thinking and learning for every child*. New York : Free Press
- Perkins, D. N. ve Simmons, R. (1988). Patterns of misunderstanding: An integrative model for science, math, and programming. *Review of Educational Research*, 58(3), 303-326.
- Petrou, M. ve Goulding, M. (2011). Conceptualising teachers' mathematical knowledge in teaching. In *Mathematical knowledge in teaching* (s. 9-25). Springer, Dordrecht. DOI:[10.1007/978-90-481-9766-8_2](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_2)
- Pettis, C. R. (2015). *Preservice elementary teachers' understandings of the connections among decimals, fractions, and the set of rational numbers: A descriptive case study* (Doctoral dissertation). University of Minnesota.
- Pusmaz, A. ve Küpcü A. R. (2010, Mayıs). *Matematik öğretmen adaylarının EBOB ve EKOK kavramları hakkındaki pedagojik alan bilgisi*. Uluslararası Öğretmen Yetiştirme Politikaları ve Sorunları Sempozyumunda sunulan bildiri. Hacettepe Üniversitesi, Ankara.
http://www.bakukongre.hacettepe.edu.tr/belge/UOYPSS2_2010_BildiriKitabi.pdf
- Rabin, J. M., Fuller, E. ve Harel, G. (2013). Double negative: The necessity principle, commognitive conflict, and negative number operations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 649-659.
- Rachel, E. J. (1995) *Teachers and scientists: A study of their concepts, views, and epistemologies in classical mechanics*. (Doctoral dissertation). The University of Texas at Austin
- Reeder, S. ve Bateiha, S. (2016). Prospective elementary teachers' conceptual understanding of integers. *Investigations in Mathematics Learning*, 8(3), 16-29.
- Rowland, T., Huckstep, P. ve Thwaites, A. (2003, Kasım). The knowledge quartet. In Williams, J. (Ed.) *Proceedings of the British Society for research into Learning Mathematics*, 23(3), 97-102.
- Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. ve Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. London: Sage.
- Sabey, K. (2009). *Secondary preservice teachers' understanding of Euclidean geometry* (Doctoral dissertation). University of Northern Iowa.

- Satan, N. , Aksakal, K. ve Ay, Z. (2021). Üslü İfadelerde Yaşanan Kavram Yanılgılarının Olası Nedenleri ve Önlem Önerilerinin Öğretmen Adaylarının Görüşlerine Dayalı Olarak İncelenmesi. *Manisa Celal Bayar Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9(1), 32-48.
- Schwab, J. J. (1978). Goals of schooling. *Educational Technology*, 18(5), 8-11.
- Serfiçeli, Z. ve Atmaz, D. (2018). *Ortaokul ve imam-hatip ortaokul matematik 8 ders kitabı*. Ankara: Kök-e yayıncılık.
- Shabanifar, S. (2014). *Matematik öğretmenlerinin köklü sayılar konusundaki pedagojik alan bilgilerinin öğrenci zorlukları bağlamında incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Anabilim Dalı, Erzurum.
- Shenton, A. K. (2004). Strategies for ensuring trustworthiness in qualitative research projects. *Education for Information*, 22(2), 63-75.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: A conception of teacher knowledge. *American Educator*, 10(1). Vol. 15, No. 2, pp. 4-14
- Shulman, L. S. (1987). Assessment for teaching: An initiative for the profession. *The Phi Delta Kappan*, 69(1), 38-44.
- Shulman, L. S. (1988, Ekim). The paradox of teacher assessment. In *New directions for teacher assessment: Proceedings of the 1988 ETS Invitational Conference* (s. 13-27). Princeton, NJ: Educational Testing Service.
- Sirotic, N. (1998). *Prospective secondary mathematics teachers' understanding of irrationality* (Unpublished doctoral dissertation). Simon Fraser Üniversitesi, Kanada.
- Sirotic, N. ve Zazkis, R. (2007), Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge, *Educational Studies in Mathematics*, 65, 49-76
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77(1), 20-26.
- Son, J. W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, 84(1), 49-70.
- Soylu, Y. ve Soylu, C. (2005). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki öğrenme güçlükleri: kesirlerde sıralama, toplama, çıkarma, çarpma ve kesirlerle ilgili problemler. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 7(2), 101-117.
- Spang, K. E. (2009). *Teaching algebra ideas to elementary school children: Robert B. Davis' introduction to early algebra* (Unpublished doctoral dissertation). The State University of New Jersey.

- Stacey, K. ve Steinle, V. (1998). Refining the classification of students' interpretations of decimal notation. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 6, 49-69.
- Steinle, V. ve Pierce, R. (2006, Temmuz). Incomplete or incorrect understanding of decimals: An important deficit for student nurses. *In Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, s. 161-168). Prag. Çek Cumhuriyeti.
- Steinle, V. ve Stacey, K. (1998). The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in grades 5 to 10. *Teaching Mathematics in New Times*, 548-555.
- Stewart, M. T. (2013). *The effect of elementary mathematics coaching on student achievement in fourth, fifth, and sixth grade* (Doctoral dissertation). Walden University.
- Stover, C. ve Weisstein, E. W. (t.y.). "Scientific Notation." From [MathWorld](https://mathworld.wolfram.com/ScientificNotation.html)--A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/ScientificNotation.html>
- Süzen, A. B. (2019). Ortaokul matematik öğretmenlerinin işlem önceliği konusundaki hatalarını tespit edilmesi. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Fırat Üniversitesi , Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- Şahin, B. (2016). Matematik öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yapma süreçlerinin incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(2).
- Şahin, Ö., Erdem, E., Başbüyük, K., Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2014). Ortaokul matematik öğretmenlerinin sayılarla ilgili pedagojik alan bilgilerinin gelişiminin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 5(3), 207-230.
- Şahin, Ö., Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2016). Examining prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge on fractions in terms of students' mistakes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(4), 531-551.
- Şahin, Ö., Gökkurt, B., Başbüyük, K., Erdem, E., Nergiz, T. ve Soylu, Y. (2013). Matematik ve sınıf öğretmeni adaylarının pedagojik alan bilgilerinin karşılaştırılması. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 6(4), 693-713.
- Şen, C. (2022). Ortaokul matematik öğretmenlerinin oran ve orantı konusunda alan ve öğretme bilgisi. *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi SBE Dergisi*, 12(1), 309-328.
- Şenay, Ş. C. (2002). *Üslü ve köklü sayıların öğretiminde öğrencilerin yaptıkları hatalar ve yanlışları üzerine bir araştırma* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Fen Bilimleri Enstitüsü Selçuk Üniversitesi, Konya.

- Şermetoğlu, H. ve Baki, M. (2019). Investigation of the rate and ratio's teaching process in the context of a mathematics teacher's noticing. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 10(2), 394-425.
- Tall, D. (1998, Ağustos). *The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some?* Conference of the University of Chicago School Mathematics Project, USA.
- Tall, D. ve Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics teaching*, 82., 44-49
- Tall, D. ve Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Tamir, P. (1988). Subject matter and related pedagogical knowledge in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 4(2), 99-110.
- Tarım, K. ve Artut, P. D. (2013). Öğretmen adaylarının basamak değeri ve sayma sistemlerini anlama düzeyleri. *İlköğretim Online*, 12(3), 759-769 Erişim adresi: <https://dergipark.org.tr/tr/pub/ilkonline/issue/8584/106630>
- Taşçı, Ö. (2004). *İlköğretim II. kademe matematik programının değerlendirilmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Tekinkır, D. (2008). *İlköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin matematik alanındaki tahmin stratejilerini belirleme ve tahmin becerisi ile matematik başarıları arasındaki ilişki*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Tezcan, C. (2003). *İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin rasyonel sayı kavramını algılamasında karşılaştıkları güçlüklerin belirlenmesi ve çözüm önerileri* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). DEU, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Thanheiser, E. ve Rhoads, K. (2009). Exploring preservice teachers' conceptions of numbers via the mayan number system. In Stinson, D. W. (Ed.) *Proceedings of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1220-1227. Anlanta, USA.
- Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Ed.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (s. 181-234). Albany, NY: SUNY Press.
- Tian, J. ve Siegler, R. S. (2018). Which type of rational numbers should students learn first?. *Educational Psychology Review*, 30(2), 351-372.

- Tirosh, D. ve Graeber, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics*, 20(1), 79-96.
- Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O. ve Wilson, J. W. (1998). *Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers*. <http://jwilson.coe.uga.edu/Texts/Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html>
- Toluk-Uçar, Z. (2016). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının reel sayıları kavrayışlarında temsillerin rolü. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 24(3), 1149-1164.
- Topbaş Tat E. (2019). Tam sayı kavramı ve öğretimi. Ertekin E. ve Ünlü, M.(Ed.) *Kuramdan uygulamaya etkinlik örnekleriyle sayıların öğretimi* içinde (s. 299-315), Ankara: PEGEM.
- Tuna, A., Aliustaoğlu F. ve Biber, A. Ç. (2019, Nisan). Ortaokul öğrencilerin köklü ifadeler konusundaki kavram yanılgıları. Karataş S., Çakmak, E. ve Doğan, Y. (Ed.) *Uluslararası 'Eğitimde ve Sosyal Bilimlerde Yenilikler' Sanal Sempozyumu Tam Metin Bildiri Kitabı* içinde (s. 390-395).
- Turğut, M. (2010). *Teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yeteneklerine etkisi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.
- Turnbull, J., Lea, D., Parkinson, D., Phillips, P., Francis, B., Webb, S., ... ve Ashby, M. (2010). *Oxford advanced learner's dictionary*. International Student's Edition.
- Turnuklu, E. B. ve Yesildere, S. (2007). The pedagogical content knowledge in mathematics: Pre-service primary mathematics teachers' perspectives in Turkey. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 1.
- Türnüklü, A. (2000). Eğitimbilim araştırmalarında etkin olarak kullanılabilecek nitel bir araştırma tekniği: Görüşme. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Yönetimi*, 24(24), 543-559.
- Uçar, Z. T. (2011). Öğretmen adaylarının pedagojik içerik bilgisi: öğretimsel açıklamalar. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 2(2), 88-102.
- Ulusoy, F. (2019). Serious obstacles hindering middle school students' understanding of integer exponents. *International Journal of Research in Education and Science*, 5(1), 52-69.
- Uzun, N. (2013). *Dinamik geometri yazılımlarının bilgisayar destekli öğretim ve akıllı tahta ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamlarında kullanımının öğrencilerin akademik başarısına, uzamsal görselleştirme becerisine ve uzamsal düşünme becerisine ilişkin tutumlarına etkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi, Ankara.

- Ünver, S. K.(2016). Matematik Öğretmeni Adaylarının Kesirler Konusundaki Olası Kavram Yanılgılarına İlişkin Görüşleri. *Manisa Celal Bayar Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 4(2), 1-15.
- Valverde, G. ve Castro, E. (2012). Prospective elementary school teachers' proportional reasoning. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 7(1), 1-19.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S. ve Bay-Williams, J. M. (2013). İlkokul ve ortaokul matematiği: Gelişimsel yaklaşımla öğretim. In Durmuş, S. T. (Ed.) *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Ankara: Nobel Yayınları.
- Van Dormolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics*, 27-34.
- Van Steenbrugge, H., Lesage, E., Valcke, M. ve Desoete, A. (2014). Preservice elementary school teachers' knowledge of fractions: a mirror of students' knowledge?. *Journal of Curriculum Studies*, 46(1), 138-161.
- Veloo, P. K. (2012). The development of number sense proficiency: An intervention study with year 7 students in brunei darussalam. *The Mathematics Educator*, 13(2), 39-54.
- Villegas-Reimers, E. (2003). *Teacher professional development: An international review of the literature*. Paris: IIEP-UNESCO. Erişim adresi: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000133010>
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (s. 65-81). Boston: Kluwer.
- Vinner, S. ve Kidron, I. (1985, Eylül). The concept of repeating and non-repeating decimals at the senior high level. In Steefeld, L. (Ed.) *Proceedings of the 9th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, s. 357-361). Noordwijkerhout, Hollanda.
- Voskoglou, M. G. ve Kosyvas, G. (2011). A study on the comprehension of irrational numbers. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, 21, 127-141.
- Waltemire, C. L. (2018). *Preschool counts: A case study investigating preschool's role in early numeracy* (Doctoral dissertation). Miami University
- Weber, K. (2002, Ekim). Developing students' understanding of exponents and logarithms. In D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant, ve K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, s. 1019–1027). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

- Weisstein, E. W. (t.y.). "Pi." *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/Pi.html>
- Weisstein, E. W. (t.y.). "Expanded Notation." *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/ExpandedNotation.html>
- Weisstein, E. W. (t.y.). "Percent." *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/Percent.html>
- Weisstein, E. W. (t.y.). "Square Root." *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/SquareRoot.html>
- Weisstein, E. W. (t.y.). "Multiple." *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/Multiple.html>
- Weller, K., Arnon, I. ve Dubinsky, E. (2009). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 9(1), 5-28.
- Wells, D. (1997). *The penguin book of curious and interesting numbers: Revised edition*. Londra: Penguin Books.
- Yang, X., Kaiser, G., König, J. ve Blömeke, S. (2020). Relationship between pre-service mathematics teachers' knowledge, beliefs and instructional practices in China. *Zdm, Mathematics Education*, 52(2), 281–294 <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01145-x>
- Yanık, B. (2013). Rasyonel sayılar. Zembat, İ.Ö., Özmantar, F.M., Bingölbalı, E., Şandır, H. ve Delice, A. (Ed.) *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar içinde* (s.95-108) Ankara: PEGEM.
- Yapıcı, A. (2013). *5, 6 ve 7. sınıf öğrencilerinin yüzdeler konusunda sayı duyularının incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Hacettepe Üniversitesi, Ankara.
- Yazıcı, (2017). *Matematik öğretmenlerinin öğretim için matematik bilgisi: kümelerde temel kavramların analizi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Yazıcı, N. ve Albayrak, M. (2019). Evrensel küme ve sonsuz küme kavramlarına ilişkin matematik öğretmenlerinin genel alan bilgisi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 27(5). <https://doi.org/10.24106/kefdergi.3265>
- Yazıcı, N. ve Kültür, M. N. (2017) Matematik öğretmenlerinin kümeler ünitesinde yer alan temel kavramlara ilişkin matematiksel bilgilerinin incelenmesi. *Journal of Computer and Education Research*, 5(9), 100-124.
- Yenil, T. (2020). *6. sınıf öğrencilerinin ondalık gösterim konusundaki kavram yanlışlarının 5e modeline göre tasarlanan dijital kavram karikatürleri ile giderilmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Bartın Üniversitesi, Bartın.

- Yıldırım, A. (1999). Nitel araştırma yöntemlerinin temel özellikleri ve eğitim araştırmalarındaki yeri ve önemi. *Eğitim ve Bilim*, 23(112).
- Yıldırım, A. ve Simsek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (9. baskı: 1999-2018). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldız, Ş. (2017). *Yedinci sınıf öğrencilerinin yüzdeler konusunda karşılaştıkları güçlüklerin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Yılmaz, Z. (2007). *İlköğretim ikinci kademe öğrencilerinin ondalık sayılar konusundaki kavram yanlışları* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Yore, L. D., Pimm, D. ve Tuan, H. L. (2007). The literacy component of mathematical and scientific literacy. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 5, 559-589.).
- Yudariah, M.Y. ve Roselainy, A.R., (2001a), Matematics of education at Universiti Teknologi Malaysia (UTM): Learning from experience, *Journal Teknologi* 34 (E): 9-24.
- Yücesan, R. (2013). *Öğrenci merkezli eğitimde üslû ve köklü sayılardaki kavram yanlışları, öğrenme güçlükleri ve çözüm önerileri* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Van.
- Yünkül, E. (2006). *İlköğretim 6. sınıf matematik dersi OBEB ve OKEK konusunda bilgisayar destekli öğretim yazılım tasarımı* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.
- Zazkis, R. (1998a) . Divisors and quotients: Acknowledging polysemy. *For the Learning of Mathematics*, 18(3), 27-30.
- Zazkis, R. (1998b). Odds and ends of odds and evens: An inquiry into students' understanding of even and odd numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 36(1), 73-89.
- Zazkis, R. (2000). Factors, divisors and multiples: Exploring the web of students' connections. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 4, 210-238.
- Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3), 207-218.
- Zazkis, R. ve Campbell, S. (1996a). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 540-563.
- Zazkis, R. ve Campbell, S. (1996b). Prime decomposition: Understanding uniqueness. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), 207-218.

- Zazkis, R. ve Gunn, C. (1997). Sets, subsets, and the empty set: Students' constructions and mathematical conventions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16(1), 133-169.
- Zazkis, R. ve Leikin, R. (2007). Generating examples: From pedagogical tool to a research tool. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 15-21.
- Zazkis, R. ve Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131-148.
- Zazkis, R. ve Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(4), 263-281.
- Zazkis, R. ve Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(3), 164-186.
- Zazkis, R., ve Sirotic, N. (2004). Making Sense of Irrational Numbers: Focusing on Representation. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 4 pp 497-504
- Zehir, H. ve Zehir, K. (2019) Tam sayılarda toplama ve çarpma işlemlerin öğretiminde sayma pulu kullanımı ve kullanılabilcek sınıf içi etkinlikler. *Uluslararası Eğitim Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 5(1), 24-36.
- Zehir, H., Işık, A. ve Zehir, K. (2008). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kümeler konusundaki kavramsal bilgi düzeyleri. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 3(1), 61-74.
- Zembat, İ. Ö. (2010). A micro-curricular analysis of unified mathematics curricula in Turkey. *ZDM*, 42(5), 443-455.
- Zengin, S. (2013). *Rasyonel sayıların öğretiminde karşılaşılan kavram yanlışları ve hataların tespiti* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

EKLER

EK 1. Akademik özgeçmiş

Kişisel Bilgiler			
Adı ve Soyadı	Yusuf Emre ERCİRE		
E-postası/Web Sayfası			
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce		
Öğrenim Bilgileri			
	Üniversite	Bölüm/ ABD	Yıl
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	İlköğretim Matematik Öğretmenliği/ İlköğretim Matematik Eğitimi	2008-2012
Yüksek Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	İlköğretim Matematik Öğretmenliği/ Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi	2012-2014
YL Tez Başlığı	İrrasyonel sayı kavramına ilişkin yaşanan güçlüklerin incelenmesi		
YL Tez Danışmanı	Prof. Dr. Serkan Narlı		
Akademik Eserler			
Narlı, S., Aksoy, E. ve Ercire, Y. E. (2014). Veri madenciliği ile ilköğretim matematik öğretmen adaylarının öğrenme stillerinin ve aralarındaki ilişkilerin incelenmesi. <i>International Journal of Educational Studies in Mathematics</i>, (1), 37-57. Ercire, Y. E., Narlı, S. ve Aksoy, E. (2016)*. İrrasyonel Sayı Kümesinin Rasyonel ve Gerçek Sayı Kümeleriyle Olan İlişisine Yönelik Öğrenme Güçlükleri. <i>Turkish Journal of Computer and Mathematics Education</i>, 7(2), 417-439. Narlı, S., Aksoy, E., ve Pala, O. ve Ercire, Y.E., (2016). Using Proof Image and Epistemic Actions to Trace The Proof Process of A Prospective Mathematics. In Csíkos, C., Rausch, A., & Sztányi, J. (Eds.). <i>Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education</i>, Vol. 1. Szeged, Hungary: PME. Ercire, Y. E., ve Narlı, S. (2019)*. Matematik Öğretmen Adayları Doğal Sayıları Nasıl Tanımlıyor?. <i>Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi</i>, 8(2), 240-271. Ercire, Y. E., Narlı, S., Aksoy, E. ve Pala, O. (2016)*. Concept Images' Related to Students' Difficulties With Regard To Density Of Irrational Numbers. In. Csíkos, C., Rausch, A., & Sztányi, J. (Eds.). <i>Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education</i>, Vol. 1, pp. 154. Szeged, Hungary: PME. Pala, O., Narlı, S., Aksoy, E., Ercire, Y. E. ve Aksoy, M. A. (2018). Proof Tripod: Proof Image, Enlightenment & Feelings. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.).			

Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 5, p. 128). Umeå, Sweden: PME

Narlı, S., Ercire, Y. E., Aksoy, E., ve Pala, O. (2016, Eylül). Matematik Öğretmen Adaylarının Topoloji Dersine Yönelik Görüşleri. 12. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Trabzon, Türkiye.

Ercire, Y.E., Narlı, S., Aydoğdu, M.Z. ve Keşan, C. (2014) Veri Madenciliği ile 7. Sınıf Öğrencilerinin Sayılar Öğrenme Alanındaki Problem Çözme Stratejilerinin İncelenmesi. International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology (ICEMST)Konya.

Alanıyla İlgili Bilimsel Kuruluşlara Üyelikler

Alanıyla İlgili Aldığı Ödüller

İlköğretim matematik öğretmenliği anabilim dalı birinciliği (2012)

Buca Eğitim Fakültesi birinciliği (2012)

EK 2. Etik Kurul ve Uygulama İzni

	T.C. DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ BUCA EĞİTİM FAKÜLTESİ	
Sayı : 85316909/399 Konu: Yusuf Emre ERCİRE Hk.		
18.01.2018 340533		
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE		
İlgi: 03/01/2018 tarihli ve 67493393-302.08.01-27 sayılı yazınız.		
Enstitünüz İlköğretim Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Doktora Programı 2014950001 numaralı öğrencisi Yusuf Emre ERCİRE "İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanına İlişkin Alan ve Pedagojik Alan bilgilerinin İncelenmesi" konulu tez çalışması kapsamında uygulama yapma isteği kabul edilmiştir.		
Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.		
Prof. Dr. Ercan AKKINAR Dekan V.		
Uğur Mumcu Caddesi 135 Sokak No:5 35150 Buca / İZMİR Tel.: 0-232 - 4204882-4204883-4204884-4204885-4204886 - 4204887 - 4204598 - 4207602 - 4400808 - 4409609 - 4409611-4409612 - 4409613 - 4409615 - 4201472 - Fax.: 0-232-4204895 - 0-232-4409610 www.deu.edu.tr/egitim e-mail: egitim@deu.edu.tr Bilgi için İrtibat: Sevin KARADENİZ Bilgiyar İşletmeni 0232 3012088		

EK 3. Konu düzeyi testi (KNT)

Ad-Soyad:

Sınıf:

SAYILAR VE İŞLEMLER ÖĞRENME ALANI KONU DÜZEYİ TESTİ

1. “245217204” sayısını isimlerini yazarak basamak ve bölüklerine ayırınız.

2. 245217204 sayısının tüm rakamlarının basamak değerleri toplamı 2 rakamlarının basamak değerleri toplamından ne kadar fazladır?

3. “30597” sayısını en yakın binliğe yuvarlanırsa x, en yakın onluğa yuvarlanırsa y elde edildiğine göre x-y kaçtır?

4. Bölme işlemini yapınız

$$\begin{array}{r} 40404 \quad | \quad 40 \\ \hline \end{array}$$

5. $8 + 2.5 - 6 : 2 \cdot 3 = ?$

- 6) $7\frac{3}{5} + 2\frac{7}{12} - 3\frac{1}{10} = ?$

7) 37,1257 sayısında 2 rakamı hangi basamaktadır?

8) 204,57 sayısını çözümleyiniz.

9) $17 - (-4) - (-15+3) : (-6) \cdot (-2) = ?$

10) Tam sayılarda çıkarma işleminin birleşme özelliği var mıdır? Açıklayınız.

11) $-3\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = ?$

12) Aşağıdaki soruların yanıtlarını açıklayarak yazınız.

a) a, 7'nin katı olmayan bir doğal sayı olmak üzere $\frac{a}{7}$ kesri her zaman devirli midir ?

☐ Evet

☐ Hayır

b) “Yüzler basamağı 8 olan bir sayı yüzler basamağı 5 olan bir sayıdan her zaman büyük müdür?”

☐ Evet

☐ Hayır

13) $3,0\overline{46}$ ifadesini a/b şeklinde (a ve b tam sayı) yazınız.

14) $0,9999... + 0,111... = ?$

15) "40" sayısının kaç tane tam sayı çarpanı vardır?

16) Aralarında 2 fark bulunan asal sayılara "ikiz asallar" denir. Buna göre 100'den küçük en büyük ikiz asalları bulunuz.

17) 12358 ve 12368 arasında 7'ye kalansız bölünen sayı var mıdır? Yanıtınızı açıklayınız.

- ☐ Bu 9 sayı içinde 7'ye kalansız bölünen sayılar kesinlikle vardır.
- ☐ Aradaki 9 sayıyı bölerek veya sayılara bölünebilme kuralı uygulayarak var olup olmadığını bulabiliriz.
- ☐ Hayır yoktur.

18) "452 . 22 + 134" sonucunun ;
➤ 3 ile bölümünden kalan kaçtır?

19) a= 10, b=15, c= 20

- a ve b çoklukları doğru orantılı ise orantı sabiti kaçtır?
- b ve c çoklukları ters orantılı ise orantı sabiti kaçtır?

20) $-3^2 - (0,2)^{-2} + 0^7 = ?$

21) $96 \cdot 5^6$ sayısı kaç basamaklıdır?

22) $\sqrt{35}$ 'den büyük en küçük tam kare sayı kaçtır?

23) Son iki basamağı verilen sayılardan hangileri tam kare sayı olabilir?

- ☐ ...44 ☐ ...76 ☐ ...61
☐ ...82 ☐ ...80 ☐ ...48

24)
$$\frac{\sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{108} + \sqrt{27}}{\sqrt{3} - \sqrt{18}} = ?$$

25) Uygun olan kutucukları işaretleyiniz.

	Rasyonel	İrrasyonel	Gerçek
$0,\overline{17}$			
$2,31768\dots$			
$1,178542$			

EK 4. Kavram düzeyi testi (KVT)

Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı Kavram Testi

Ad-Soyadı:

Sınıf:

Kümülatif:

Aşağıda verilen kavramları matematiksel olarak tanımlayınız.

Doğal Sayı:	Birim Kesir:
Rasyonel Sayı:	Tam Sayı:
Mutlak Değer:	Çözümleme (Bir sayının çözümlenmesi):
Asal Sayı:	Aralarında Asal Sayılar:
En Büyük Ortak Bölen(EBOB):	Bilimsel Gösterim:
π Sayısı:	Karekök Alma İşlemi:
İrrasyonel Sayı:	Gerçek Sayı:

KAVRAM TESTİ 2. AŞAMA (KAVRAMLAR ARASI İLİŞKİLER)

- 1) Basamak ve bölük kavramlarını ve aralarındaki ilişkiyi açıklayınız? Bir sayı üzerinde örnek gösteriniz.

- 2) Bir sayının çarpanları, katları ve kalansız bölenleri ne demektir? Aralarındaki ilişkiyi açıklayınız.

- 3) Birimli ve birimsiz oranı örnek göstererek açıklayınız

- 4) Orantı sabiti kavramını doğru orantı ve ters orantıyla ilişkilendirerek açıklayınız.

5) Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Her rasyonel sayı gerçel sayı mıdır? Açıklayınız.

b) Her irrasyonel sayı gerçel sayı mıdır? Açıklayınız.

6) İki **pozitif** irrasyonel sayının toplamı **her zaman** irrasyonel midir? Açıklayınız.

7) **Farklı** iki irrasyonel sayının çarpımı **her zaman** irrasyonel midir? Örnek vererek açıklayınız.

8) Her iki irrasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı var mıdır? Açıklayınız ve örnek gösteriniz.

Hangi ifadeler doğruysa işaretleyiniz ve düşüncenizin nedenini açıklayınız

9) π Sayısı : ☐ Rasyoneldir ☐ 3,14'e Eşittir ☐ 22/7'ye Eşittir ☐ İrrasyoneldir ☐ Gerçektir

10) 0,12345678910... şeklinde sayıların birer artması ile ondalık kısmı devam eden sayı,

☐ Rasyoneldir ☐ Devirlidir. ☐ İrrasyoneldir. ☐ Gerçektir

11) $0,\bar{9}$ sayısı 1'e eşit midir yoksa yaklaşık olarak mı eşittir? Açıklayınız.

EK 5. Problem çözme düzeyi testi (PÇT)

Ad-Soyadı:

Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı Problem Çözme Testi

Maya uygarlığında sayılar • (nokta) ve — (çizgi) sembolleriyle yazılmaktaydı. Ayrıca sıfır göstermek için  sembolü kullanılmaktaydı. Bir maya sayısında nokta 1, çizgi ise 5 değerindeydi ve rakamlarda en fazla 4 nokta ve en fazla 3 çizgi bulunuyordu.

1-

0 dan 19 a kadar olan maya rakamları aşağıda gösterilmiştir.

0	1	2	3	4
	•	••	•••	••••
5	6	7	8	9
—	—•	—••	—•••	—••••
10	11	12	13	14
—	—•	—••	—•••	—••••
15	16	17	18	19
—	—•	—••	—•••	—••••

Mayalar, yirmilik sayı sistemi kullanıyordu ve basamakları alt alta yazıyordu.

Örneğin, 10 078 sayısını şöyle yazılmaktaydı

8000'ler basamağı:	•	8000 x 1 = 8000
400'ler basamağı:	—	400 x 5 = 2000
20'ler basamağı:	•••	20 x 3 = 60
1'ler basamağı:	••••	1 x 18 = 18
		$\frac{+}{10\ 078}$

Maya sayı sisteminde 7 nokta ve 2 çizgi sembolleri ile yazılabilecek 3000 den küçük en büyük çift sayı kaçtır?

Sınıf:

2- Yazılışı, tersten yazılışı ile aynı olan sayılara palindrom sayı adı verilmektedir.

Örneğin 7 , 55, 303, 4554 sayıları palindrom sayılardır.

4 basamaklı;

3'e kalansız bölünen x tane, 4'e kalansız bölünen y tane palindrom sayı varsa x+y kaçtır?

3- Mehmet Bey, 1 dönüm olan tarlasının bir kısmını 4 çocuğuna eşit olarak paylaştırmış ve her bir çocuğa $\frac{3}{20}$ dönüm tarla düşmüştür. Kalan kısmını ise TEMA Vakfına bağışlamıştır. TEMA Vakfına bağışlanan kısım kare şeklindedir ve bu kısma iki fidan arası en az 4 metre olacak şekilde ağaç fidanları dikilecektir. En fazla kaç ağaç dikilebilir?

4- Bir kuruyemişçi yanda miktarları verilen kuruyemişleri karıştırıp bu karışımı eşit miktarlarda

Karışımındaki Kuru Yemiş Miktarları	
Fındık:	$\frac{3}{10}$ kg
Fıstık:	$\frac{5}{6}$ kg
Çekirdek:	$\frac{2}{5}$ kg
Leblebi:	$\frac{7}{15}$ kg

250'şer gramlık paketler yaptıktan sonra paketini 6 TL'den satışa sunuyor. Fındığın kilosu 50 TL, fıstığın kilosu 18 TL, Çekirdeğin kilosu 20 TL, Leblebinin kilosu 15 TL olduğuna göre kuruyemişçi tüm paketlerin satışından kaç TL kar elde etmiştir?

5- Boyutları 300 cm ve 210 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir oda kenarları tam sayı olan karesel parkelerle hiç boşluk kalmayacak şekilde kaplanmıştır. Aynı parkeler alanı 450 cm^2 'lik dikdörtgen şeklindeki bir alanı boşluk bırakmadan kaplamak için de kullanılabilir. Buna göre oda için en az kaç parke kullanılmıştır?

6-

Saf altın 24 ayardır. Altının ayarı ve saflığı doğru orantılıdır.

Saf altını işlemek mümkün olmadığı için mücevher yapımında altınla birlikte bronz, gümüş gibi yardımcı metallerden yararlanılmaktadır.

Örneğin; %50 saflıkta olan bir kolyenin %50'si altın iken geriye kalan %50'si bronz ya da gümüş gibi yardımcı başka bir metaldir.

Kuyumcu Zeki bey, 6 gram ağırlığında 16 ayar bir kolyeyi İzmir'de satmak üzere İstanbul'dan almıştır. Gümüş ilaveli olan bu altın kolyeyi 52 TL işçilik bedeliyle birlikte alan kuyumcu Zeki Bey maliyet fiyatının üzerine %10 kar payı eklemiş ve son fiyata %20 olan KDV oranını da dahil edip kolyeyi satmıştır. Kolyenin satış fiyatı kaç TL'dir?

(1 gr altın= 170 TL, 1 gr gümüş = 9 TL)

7- Kenar uzunlukları $3\sqrt{30}$ m ve $2\sqrt{5}$ m olan dikdörtgen şeklindeki tarlanın metrekaresinde 1 günde $\sqrt{2}$ m³ su kullanılmaktadır. Suyun metreküp fiyatı $\sqrt{3}$ Kr olduğuna göre tarlayı sulamak için 1 ayda (30 gün) kaç TL su faturası ödenir?

8- Bir müşteri aldığı tişört için kasiyere bir miktar para vermiştir. Kasiyer, tişört fiyatındaki TL ve Kr bölümlerini karıştırmış (örneğin tişört 18,05 TL ise kasiyer, fiyatı 5,18 TL olarak görmüş) ve müşteriye 3,75 TL yerine yanlışlıkla 14,64 TL para üstü vermiştir. Tişörtün gerçek fiyatıyla kasiyerin gördüğü fiyatın toplamı 61,61 TL olduğuna göre, müşteri kasiyere kaç TL vermiştir?

9- Kurban bayramında Türkiye'nin 81 ilinin her birinden eşit sayıda küçükbaş hayvan toplanıp bu hayvanlar yardım amacıyla Afrika'da 7.3^3 , Asya'da 2.3^5 farklı bölgeye her bir bölgede 48.5^2 hayvan olacak şekilde gönderilmiştir. İzmir'den bu yardım için toplanan küçükbaş hayvan sayısının rakamlarının toplamı kaçtır?

10- Merkezi sistemle ısıtılan bir binada A tipinde 4 ve B tipinde 8 olmak üzere toplam 12 daire bulunmaktadır. Bu binayı ısıtmak için her gün eşit miktarda yakıt tüketilmektedir ve binanın 15 günlük yakıtı vardır.

A tipindeki dairelerin her birinin günlük yakıt tüketimi eşit olup bu dairelerin günlük toplam yakıt tüketimi bina tüketiminin %40'ı kadardır.

Benzer şekilde B tipi dairelerin de her birinin günlük yakıt tüketimi eşit olup bu dairelerin günlük toplam yakıt tüketimi bina tüketiminin %60'ı kadardır.

a) Tüm daireler dolu bir şekilde 7 gün bina ısıtıldıktan sonra A tipi dairelerden 3 tanesi ve B tipi dairelerden 4 tanesi boşalmıştır. Geriye kalan yakıt binaya kaç gün daha yeterli olur?

b) Binadaki A tipi dairelerden 1 tanesinin ısıtma sistemi kapatılmıştır. Buna göre mevcut yakıtle binanın 25 gün ısıtılabilmesi için B tipi dairelerden kaçının ısıtma sistemi kapatılmalıdır?

EK 6. Epistemik düzey testi (EPT)

SAYILAR VE İŞLEMLER ÖĞRENME ALANI EPİSTEMİK DÜZEY TESTİ

Ad-Soyadı:

Sınıf:

- 1) Alt alta yapılan çarpma işleminde neden bir basamak sola kaydırma yaparak toplama yapılır?
- 2) “ Bir $\frac{a}{b}$ rasyonel sayısı (a ve b tam sayı ve b sıfırdan farklı) ondalık gösteriminde virgülden sonra **en fazla** 10. basamaktan sonra devretmeye başlar. Çünkü 10 tane rakam vardır” önermesi doğru mudur? Nedenini açıklayınız.
- 3) $0, \bar{a} = \frac{a}{9}$ eşitliğini ispatlayınız.
- 4) “A sayısının rasyonel olduğu ve A.B sayısının irrasyonel olduğu biliniyorsa B kesinlikle irrasyoneldir.” önermesi doğru mudur? Önermenin doğruluğunu veya yanlışlığını ispatlayınız.
- 5) “Ardışık sayılar aralarında asaldır.” önermesi doğru mudur? İspatlayınız.

Aşağıdaki üslü sayılarla ilgili verilen kuralların nedenlerini açıklayınız.

6) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

7) Sıfır hariç her sayının 0. kuvveti 1'dir.

8) "Rakamlarının toplamı 3 ve 3'ün katı olan sayılar 3'e tam bölünür." kuralının nedenini matematiksel olarak açıklayınız.

9) A sayısı asal çarpanlarının çarpımı şeklinde $A=p^m \cdot q^r$ olarak yazıldığında, bu sayının pozitif çarpan sayısı $(m+1) \cdot (r+1)$ ile bulunur. Nedenini açıklayınız.

10) x, y, a ve b orantı terimleri olmak üzere

" $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = k$ ise $\frac{x+y}{a+b} = k$ olur" ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

EK 7. PAB- Öğrenci bilgisi testi (ÖBT)

Ad-Soyad:
Sınıf:

SAYILAR VE İŞLEMLER ÖĞRENME ALANI PAB TESTİ (ÖĞRENCİ BİLGİSİ BİLEŞENİ)

1. Öğretmen olarak çarpanlar ve katlar alt öğrenme alanına ait çeşitli kazanımların işlendiği derste bazı öğrencileri kaldırarak her bir öğrenciden öğrendikleriyle ilgili cümleler kurmalarını istediniz.
Öğrencilerin kurdıkları cümlelerin doğruluğunu inceleyerek hata, eksiklik veya kavram yanlışlığı içerebilecek olanları açıklayınız.

Sümeyye: “Sıfır her doğal sayının katıdır.”

☐ DOĞRU

☐ YANLIŞ

Güngör: “Aralarında asal sayılardan en az biri asal sayıdır.”

☐ DOĞRU

☐ YANLIŞ

Aytaç: “Sadece 1 tane çift asal sayı vardır o da 2’dir.”

☐ DOĞRU

☐ YANLIŞ

Ömer: “1 sayısına ve kendisine bölünebilen sayılara asal sayı denir.”

☐ DOĞRU

☐ YANLIŞ

2. “6 adet limon ve 4 bardak su ile limonata yapılmıştır. Bu limonata ile aynı tatta olmak üzere 9 adet limon ile bu limonata yapılsaydı toplam kaç bardak su gerekirdi? (Eş limonlar ve eş bardaklar kullanılmaktadır.)” sorusuna öğrencilerden biri 7 bardak su kullanılması gerektiğini söylemiştir. Öğrencinin hatası var mıdır? Varsa hatasının kaynağı ne olabilir?

3. Öğrenciler tarafından;

a) Rasyonel olduğu halde irrasyonel sayı olarak düşünülebilecek bir örnek veriniz. Bu hatalı düşüncenin nedeni ne olabilir?

b) İrrasyonel olduğu halde rasyonel sayı olarak düşünülebilecek bir örnek veriniz. Bu hatalı düşüncenin nedeni ne olabilir?

4. 8/A sınıfında kızların sayısının sınıf mevcuduna oranı $\frac{1}{2}$ 'dir. 8/B sınıfında ise kızların sayısının sınıf mevcuduna oranı $\frac{1}{6}$ 'dır. Bu iki şube tek bir sınıfta birleştirildiğine göre yeni sınıftaki kız öğrencilerin sayısının sınıf mevcuduna oranı hakkında ne söyleyebiliriz?" şeklindeki soruya verilen öğrenci yanıtları aşağıdaki gibidir. Hangi yanıt veya yanıtlar doğrudur? Hataların nedeni ne olabilir? Açıklayınız.

Hasan: Paydaların ortalaması 4 olduğu için oran $\frac{1}{4}$ 'tür.

☐ DOĞRU ☐ YANLIŞ

Hande: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ olarak bulunur.

☐ DOĞRU ☐ YANLIŞ

Ozan: $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{6}$ 'nın ortalaması $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) : 2 = \frac{1}{3}$ olduğu için yeni oran $\frac{1}{3}$ 'tür.

☐ DOĞRU ☐ YANLIŞ

Melike: Oranlarda kesirlerden farklı olarak pay da toplanır. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{8}$ olarak bulunur.

☐ DOĞRU ☐ YANLIŞ

Mustafa: Yeni oran $\frac{1}{2}$ ile $\frac{1}{6}$ arasındadır. Ancak tam olarak bulunamaz.

☐ DOĞRU ☐ YANLIŞ

5. " -4^0 " üslü ifadesinin sonucunun Esra +1, Akif ise -1 olduğunu iddia etmektedir. Hangi öğrenci haklıdır? Nedenini açıklayınız.

6. 6/A sınıfında derse giriyorsunuz...

a) $\frac{11}{13}$, $\frac{9}{11}$ ve $\frac{5}{7}$ kesirlerini bütüne yakınlığa göre sıraladınız. Öğrencilerinizden Zeynep, "Kesirlerde sıralama yaparken pay ve payda arasındaki farkı sabit olan iki kesirden sayısal olarak payı büyük olan kesir daha büyüktür" şeklinde çıkarımda bulundu.

Zeynep'in hatası var mıdır? Açıklayınız.

b) Tahtaya aşağıda yer alan problemi yazdınız;

"Selim bey, kedisi Tekir için $\frac{1}{3}$ litre, Pamuk için $\frac{1}{2}$ litre, Maya için $\frac{1}{4}$ litre süt ayırmıştır. Buna göre Selim bey kedileri için kaç litre süt ayırmıştır?"

Bunun üzerine öğrenci itiraz etti ve toplam süt miktarının bütünü geçtiğini ve bu nedenle sorunun yanlış olduğunu iddia etti.

Bu durumda ne yapılmalıdır? Soruda hata varsa soruyu düzeltiniz. Öğrenci hatalıysa hatasının kaynağı ne olabilir? Açıklayınız.

7. Aşağıda bazı öğrencilerin yapmış oldukları işlemler verilmiştir. Hataları var mıdır? Varsa bu hataların altında yatabilecek kavram yanlışları nelerdir? Her birini kısaca belirtiniz.

Elif: $0,3 + 0,9 = 0,12$

☐ HATA VAR

☐ HATA YOK

Beren: 0,245 sayısında yüzde birler basamağı 5'dir.

☐ HATA VAR

☐ HATA YOK

Ayşe: 0,1 ile 0,11 sayılarının ortasındaki sayı 0,6'dır.

☐ HATA VAR

☐ HATA YOK

8.

Naz 345 72 + 3117	Özge 185 297 + 2372	Mert 246 178 + 811

Resimde 3 öğrencinin yapmış oldukları toplama işlemleri görülmektedir.

Naz, Özge ve Mert işlemleri tekrar tekrar yapmalarına rağmen aynı yanıtlarında ısrarcı iseler kavram yanlışları neler olabilir? Her birinin $148+75$ işlemine verebilecekleri yanıtlar nelerdir?

Naz:

Özge:

Mert:

9. Aşağıda devirli sayılarla ilgili bazı öğrenci ifadelerine yer verilmiştir. Öğrencilerin bu ifadelerinin doğruluğunu inceleyerek ne düşünülmüş olabileceğini ve bu düşüncelerin kavram yanlışlığı olup olmadığını açıklayınız.

İlhan: $0,\overline{9} \times 0,\overline{2}$ işleminin sonucu $0,\overline{2}$ 'den küçüktür.

☐

DOĞRU

☐

YANLIŞ

Mehmet: $3,\overline{9}$ sayısı sayı doğrusunda 4'ün solunda yer alır.

☐

DOĞRU

☐

YANLIŞ

Serpil: $3,\overline{3}/0,\overline{2}$ işleminin sonucu tam sayıdır.

☐

DOĞRU

☐

YANLIŞ

10. Köklü ifadelerle ilgili aşağıdaki öğrenci görüşlerini değerlendiriniz. Hatalı düşünce var mıdır? Yanlış eşitlik belirten öğrencilerin ne düşünülmüş olabileceğini açıklayınız.

Fatma: $\sqrt{a^2} = a$

☐

DOĞRU

☐

YANLIŞ

Hazangül: $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

☐

DOĞRU

☐

YANLIŞ

Sıla: $a > 0$ için $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$

☐

DOĞRU

☐

YANLIŞ

Azime: $\sqrt{a^{16}} = a^4$

☐

DOĞRU

☐

YANLIŞ

EK 8. PAB- Öğretim stratejileri bilgisi testi (ÖST)

Ad-Soyad:

Sınıf:

SAYILAR VE İŞLEMLER ÖĞRENME ALANI PAB TESTİ (ÖĞRETİM STRATEJİLERİ BİLEŞENİ)

1. "Bir mağazada pantolonlar %10 indirimle satılmaktadır. Etiket fiyatı 40 TL olan pantolonlardan 2 tane alan bir müşteri kaç TL ödeme yapmalıdır?"

Bu soruya sınıfınızdaki öğrencilerden Mehmet, aşağıdaki gibi cevap vermiştir:

"Bir pantolon %10 indirimse, 2 pantolon %20 indirim eder. 2 pantolonun fiyatı 80 TL dir. %20 indirimle $80 - 16 = 64$ TL ödeme yapılmalıdır."

Bu durumda Mehmet'i bilişsel çatışmaya düşürmek için nasıl bir dönüt verirsiniz?

2. $2,\bar{8} + 1,\bar{4} = 4,\bar{2}$ işlemini ve $2,\bar{3} + 1,\bar{2} = 3,\bar{5}$ işlemini yapan öğrenci devirli sayılarda doğal sayılardaki gibi doğrudan toplama yapılabileceğini belirtmiştir. Öğrenciye ne dönüt verilmelidir?

3. Orkun'un rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilgili düşüncesi aşağıda verilmiştir. Orkun'un düşüncesinde hata var mıdır? Siz olsanız bu öğrenciye ne dönüt verirsiniz?

Orkun: "İrrasyonel sayılar rasyonel sayılara göre daha çoktur. Bu nedenle her iki irrasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı olmayabilir. Örneğin $\sqrt{5}$ ve $\sqrt{6}$ arasında rasyonel sayı yoktur"

☐ HATA VAR

☐ HATA YOK

4. " $a = -2$ ise a^4 kaçtır?" sorusuna; Cem, " $a^4 = -2^4 = -16$ " cevabını vermiştir. Özalp ise $a^4 = (-2)^4 = 16$ cevabını vermiştir. Hangisi haklıdır? Aynı hatalı düşüncenin yeniden tekrarlanmaması ve öğrencilerin ikna edilebilmesi için nasıl bir dönüt verilmelidir?

5. İki sayının EKOK'unu bulmak için öğrencilere hangi yöntemler öğretilbilir? 12 ve 16 sayılarının EKOK'larını en az iki farklı yöntemle açıklayınız.

6. Melek, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$ ve 3,5 sayılarından hangisinin daha büyük olduğunu bulmaya çalışırken, Yaşar $2\sqrt{3} + 5$ işleminin sonucunu yaklaşık olarak bulmak istemektedir. Öğretmen Melek ve Yaşar'a yardımcı olmak için ne önerebilir?

Melek için:

Yaşar için:

7. Sayma pulları ile $(+5) - (-3) = (+8)$ işlemi öğrencilere nasıl gösterilir? Modelleyiniz.

8. Aşağıda çarpma ve bölme işlemleriyle ilgili bazı öğrenci yanıtları verilmiştir.

a) Yandaki şekilde bölme işlemi yapan öğrencinin hatasını fark etmesi için öğretmen nasıl bir dönüt vermelidir?

$$\begin{array}{r} 2008 \overline{) 4} \\ \underline{20} \downarrow \downarrow 52 \\ 0008 \\ \underline{8} \\ 0000 \end{array}$$

b) A ve B öğrencilerinin yapmış oldukları çarpma işlemlerini değerlendiriniz. İki yöntem de her zaman doğru sonucu verir mi? Açıklayınız.

(A)

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 14 \\ \hline 16 \\ 80 \\ \hline 200 \\ + 336 \\ \hline \end{array}$$

(B)

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 14 \\ \hline 240 \rightarrow 24 \cdot 10 \\ 96 \rightarrow 24 \cdot 4 \\ \hline 336 \end{array}$$

9.

$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$ çarpma işlemini şeffaf kesir kartları kullanarak nasıl modelleriz? Gösteriniz.

10. Burak öğretmen, bir öğrencinin yapmış olduğu

$(-4)+(-5)=(+9)$ şeklindeki işleme negatif sayıların toplamalarının değil çarpımlarının pozitif olacağı dönütünü verilmiştir.

Aynı öğrenci bir başka soruda $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4)=+24$ cevabını vermiştir.

Öğretmenin ilk soruya vermiş olduğu dönüti değerlendiriniz.

EK 9. Program bilgisi testi (PBT)

Ad-Soyad:

Sınıf:

SAYILAR VE İŞLEMLER ÖĞRENME ALANI PROGRAM BİLGİSİ TESTİ

1. 2018 Matematik öğretim programında geçen Türkiye Yeterlilik Çerçevesinin 8 anahtar yetkinliklerinden biri *Matematiksel yetkinlik ve bilim/teknolojide temel yetkinliklerdir*. Bu yetkinlik *uzamsal düşünmeyi* de içermektedir. Yetkinlikte sözü edilen *uzamsal düşünme* nedir? Açıklayınız.

2. Programın özel amaçlarından biri öğrencilerin matematiksel okuryazarlık becerilerini geliştirmektir. Sözü edilen '*matematiksel okuryazarlık*' ne demektir? Açıklayınız.

3. Programın özel amaçlarında öğrencilerin üstbilişsel bilgi ve becerilerini geliştirme yer almaktadır. Üstbilişsel bilgi kavramı ne demektir? Açıklayınız.

4.

<i>1- Onluk Taban Blokları</i>	<i>2- Erotasthenes Kalburu</i>	<i>3-Simetri Aynası</i>
<i>4- Şeffaf kesir Kartları</i>	<i>5- Kesir Çubukları</i>	<i>6- Sayma Pulları</i>

Aşağıdaki sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin verilen konuların öğretiminde hangi materyaller kullanılabilir? Numaralarını yazınız (Bir konu için birden fazla materyal yazılabilir).

- ❖ Asal Sayılar:
- ❖ Birim Kesirlerde Sıralama:
- ❖ Denk Kesir Kavramı:
- ❖ Kesirlerde Çarpma:
- ❖ Ondalık Gösterimleri Verilen Sayılarla Toplama ve Çıkarma:
- ❖ Tam Sayılarda Toplama Çıkarma:
- ❖ Mutlak Değer:
- ❖ Tam Kare ve Tam Kare Olmayan Sayılar:

5. Programda ortaokul düzeyinde hangi bölünebilme kuralları yer almaktadır? Yuvarlak içine alınız.

2 3 4 5 6
7 8 9 10 11 15

6. Hangi sınıf düzeylerinde belirtilen alt öğrenme alanlarına ilişkin kazanımların yer aldığını işaretleyiniz.

ALT ÖĞRENME ALANI	5	6	7	8
Doğal Sayılar/ Doğal sayılarda işlemler				
Kesirler/ Kesirlerle İşlemler				
Ondalık Gösterim				
Yüzdelere				
Çarpanlar ve Katlar				
Kümeler				
Tam sayılar				
Tam Sayılarla İşlemler				
Rasyonel Sayılar				
Rasyonel Sayılarla İşlemler				
Oran				
Oran ve Orantı				
Üslü İfadeler				
Kareköklü İfadeler				

7. Aşağıdaki kazanımlarda boş bırakılan yerleri ortaokul matematik öğretim programına göre doldurunuz.

- ❖ En çok basamaklı doğal sayıları okur ve yazar
- ❖ En çok basamaklı doğal sayılarla toplama ve çıkarma işlemi yapar.
- ❖ En çok basamaklı iki doğal sayının çarpma işlemi yapar
- ❖ En çok basamaklı bir doğal sayıyı, en çok basamaklı bir doğal sayıya böler.

8. Kesirlerle ilgili aşağıda verilen sorular en az hangi sınıf düzeyinde sorulabilir?

SORU	SINIF DÜZEYİ	SORU	SINIF DÜZEYİ
$\frac{2}{5} - \frac{3}{10} = ?$		$6 \times \frac{3}{4} = ?$	
$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = ?$		$\frac{16}{5} : \frac{4}{5} = ?$	
$4 + \frac{3}{7} = ?$		60 sayısının $\frac{3}{5}$ 'i kaçtır?	
$\frac{3}{8} \times \frac{2}{5} = ?$		$\frac{2}{7}$ 'si 16 olan sayının tamamı kaçtır?	
$\frac{2}{3}$ kesrini ondalık şekilde ifade ediniz.		0,7 sayısını kesirli biçimde yazınız	
$\frac{1}{5}, \frac{3}{10}$ ve $\frac{13}{20}$ kesirlerini sıralayınız		$\frac{10}{11}, \frac{13}{14}$ ve $\frac{19}{20}$ kesirlerini sıralayınız.	

9. Aşağıda verilen kavramlardan hangileri ile öğrenci ilk kez ortaokul düzeyinde karşılaşmaktadır? İşaretleyiniz.

- ☐ Bileşik Kesir
- ☐ Ondalık Gösterim
- ☐ Birim Kesir
- ☐ Sayı Örüntüsü
- ☐ Romen Rakamları
- ☐ Küme
- ☐ Yüzde
- ☐ Yuvarlama

10. Kümeler alt öğrenme alanıyla ilgili kazanımlarda hangi kavramlar yer almaktadır? İşaretleyiniz.

- ☐ Kümelerin Gösterimi (Venn, liste,...)
- ☐ Eleman, eleman sayısı
- ☐ Boş küme
- ☐ Evrensel küme
- ☐ Kesişim ve Birleşim işlemi
- ☐ Fark işlemi
- ☐ Alt küme
- ☐ Küme Çarpımı (Kartezyen Çarpım)

11. Sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin verilen kazanımların yer aldıkları sınıf düzeyini belirtiniz.

KAZANIM (Çarpanlar ve Katlar)	SINIF DÜZEYİ
Doğal sayıların asal çarpanlarını belirler	
Verilen iki doğal sayının aralarında asal olup olmadığını belirler	
İki doğal sayının en büyük ortak bölenini (EBOB) ve en küçük ortak katını (EKOK) hesaplar	
KAZANIM (Yüzde)	SINIF DÜZEYİ
Bir çokluğu diğer bir çokluğun yüzdesi olarak hesaplar.	
Bir çokluğun belirtilen bir yüzdesine karşılık gelen miktarını bulur	
Belirli bir yüzdesi verilen çokluğun tamamını bulur.	
Bir çokluğu belirli bir yüzde ile arttırmaya veya azaltmaya yönelik hesaplamalar yapar.	

KAZANIM (Oran- Orantı)	SINIF DÜZEYİ
Aynı veya farklı birimlerdeki iki çokluğun birbirine oranını belirler	
Oranda çokluklardan birinin 1 olması durumunda diğerinin alacağı değeri belirler.	
Bir bütünün iki parçaya ayrıldığı durumlarda iki parçanın birbirine veya her bir parçanın bütüne oranını belirler, problem durumlarında oranlardan biri verildiğinde diğerini bulur.	
Birbirine oranı verilen iki çokluktan biri verildiğinde diğerini bulur.	
Gerçek hayat durumlarını inceleyerek iki çokluğun orantılı olup olmadığına karar verir.	
Gerçek hayat durumlarını inceleyerek iki çokluğun ters orantılı olup olmadığına karar verir.	
KAZANIM (Tam Sayı)	SINIF DÜZEYİ
Bir tam sayının mutlak değerini belirler ve anlamlandırır.	
Tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerini yapar, ilgili problemleri çözer.	
Tam sayılarla çarpma ve bölme işlemlerini yapar	
Tam sayıları karşılaştırır ve sıralar	
Tam sayıların kendileri ile tekrarlı çarpımını üslü nicelik olarak ifade eder	
Tam sayıların, tam sayı kuvvetlerini hesaplar	

EK 10. Bilgilendirilmiş onam formu

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ ETİK KURULU

BİLGİLENDİRİLMİŞ ONAM FORMU

Bu formun amacı katılmanız rica edilen araştırma ile ilgili olarak sizi bilgilendirmek ve katılmanız ile ilgili izin almaktır.

Bu kapsamda “İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanına İlişkin Alan ve Pedagojik Alan Bilgilerinin İncelenmesi” başlıklı araştırma “Yusuf Emre Ercire” tarafından gönüllü katılımcılarla yürütülmektedir. Araştırma sırasında sizlere 7 adet test (Konu düzeyi testi, Kavramdüzeyi testi, Problem çözme düzeyi testi, epistemik düzey testi, PAB-öğrenci bilgisi testi, PAB- Öğretim stratejileri bilgisi testi, sayılar ve işlemler öğrenme alanı program bilgisi testi) uygulanacak olup elde edilen veriler gizli tutulacak ve sadece araştırma amaçlı kullanılacaktır. Araştırma sürecinde konu ile ilgili her türlü soru ve görüşleriniz için aşağıda iletişim bilgisi bulunan araştırmacıyla görüşebilirsiniz. Bu araştırmaya katılmama hakkınız bulunmaktadır. Aynı zamanda çalışmaya katıldıktan sonra çalışmadan çıkabilirsiniz. Bu formu onaylamanız, araştırmaya katılım için onam verdiğiniz anlamına gelecektir.

Araştırmayla İlgili Bilgiler:

Araştırmanın Amacı: İlköğretim matematik öğretmen adaylarının sayılar ve işlemler öğrenme alanındaki alan ve pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi

Süresi: Kavram testi: 60 dk, diğer testler 45'er dk.

Araştırmanın Yürütüleceği Yer: Buca Eğitim Fakültesi

Çalışmaya Katılım Onayı:

Katılmam beklenen çalışmanın amacını, nedenini, katılmam gereken süreyi ve yeri ile ilgili bilgileri okudum ve gönüllü olarak çalışma süresince üzerime düşen sorumlulukları anladım. Çalışma ile ilgili ayrıntılı açıklamalar sözlü olarak araştırmacı tarafından yapıldı. Bu çalışma ile ilgili faydalar ve riskler ile ilgili bilgilendirildim.

Bu araştırmaya kendi isteğimle, hiçbir baskı ve zorlama olmaksızın katılmayı kabul ediyorum.

Katılımcının (Islak imzası ile):

Adı-Soyadı:

İmzası:

Araştırmacının

Adı-Soyadı: Yusuf Emre Ercire

e-posta:

İmzası:

