



T.C.

KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ

EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI



**İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN
ADAYLARININ TEMEL LİNEER CEBİR
KAVRAMLARINI ÖĞRENME
SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ**

MEMDUHA EKİCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR

2025



T.C.

KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ

EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI



**İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN
ADAYLARININ TEMEL LİNEER CEBİR
KAVRAMLARINI ÖĞRENME
SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ**

MEMDUHA EKİCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK

II. DANIŞMAN

Prof. Dr. Serdal BALTACI

KIRŞEHİR

2025

KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

16/06/2025

Memduha EKİCİ

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa No

İÇİNDEKİLER DİZİNİ	I
TEŞEKKÜR.....	II
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
TABLolar DİZİNİ	V
ŞEKİLLER DİZİNİ	VI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	VIII
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Amaç.....	4
1.1.1. Araştırmanın problemi ve amacı.....	4
1.1.2. Araştırmanın gerekçesi ve önemi.....	4
1.1.3. Araştırmanın sınırlılıkları.....	6
1.1.4. Araştırmanın varsayımları	7
1.1.5. Tanımlar	7
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	9
2.1. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi.....	9
2.1.1. Lineer cebir ve öğretimi.....	9
2.1.2. Konu ile ilgili yapılan çalışmalar	10
2.1.3. Literatür taramasının sonucu.....	17
3. MATERYAL VE METOT	19
3.1. Materyal.....	19
3.1.1. Veri toplama araçları.....	19
3.2. Metot.....	23
3.2.1. Araştırmanın modeli	23
3.2.2. Araştırmanın örnekleme	24
3.2.3. Verilerin analizi	24
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	27
4.1. Bulgular	27
4.2. Tartışma	92
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	101
5.1. Sonuçlar	101
5.2. Öneriler	102
KAYNAKLAR.....	103
EKLER.....	111
Ek-1. Çalışma Yaprakları	111
Ek-2. Etik Kurul İzni	120
Ek-3. Anket İzni	121
Ek-4. Kongre Katılım Belgesi	122
ÖZGEÇMİŞ.....	123

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisansa başlamamda ve yüksek lisans ders sürecinde kendisini tanıdığım günden bu yana gösterdiği sabır ve sabırlı hali ile her zaman bana örnek olmasının yanı sıra bir bilim insanının nasıl çalışması gerektiğini kendisinden öğrendiğim değerli danışmanım Prof. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK'a büyük bir içtenlikle teşekkür ederim. Tezi yazma sürecimde sorularıma verdikleri cevap ile bana destek olan ikinci danışmanım Prof. Dr. Serdal Baltacı'ya teşekkür ederim. Tezimin şekillenmesine olan katkıları sebebiyle Doç. Dr. Suphi Önder BÜTÜNER'e ve Dr. Öğr. Üyesi Aykut BULUT hocalarıma ayrıca teşekkür ederim.

Tezimi, annem Emine EKİCİ'ye ve babam Adem EKİCİ'ye ithaf ederim.

Haziran, 2025

Memduha EKİCİ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ TEMEL LİNEER CEBİR KAVRAMLARINI ÖĞRENME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Memduha EKİCİ

KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK
Yıl: 2025, Sayfa: 123
Jüri: Prof. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK
Doç. Dr. Suphi Önder BÜTÜNER
Dr. Öğr. Üyesi Aykut BULUT
II. Danışman: Prof. Dr. Serdal BALTACI

Bu çalışma, matematik öğretmen adaylarının temel lineer cebir kavramlarını öğrenme süreçlerini incelemek için yapılmıştır. Çalışma İç Anadolu'da bulunan bir üniversitenin Eğitim Fakültesi bilgisayar laboratuvarında yürütülmüştür. Çalışma grupları; İç Anadolu'daki bir üniversitenin 2024-2025 Eğitim-Öğretim yılında gönüllü 10 matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Öğretmen adaylarına farklı kümeleri içeren sorulardan oluşan çalışma kâğıtları verilmiştir. Bu kümelerin temel lineer cebir kavramlarını tahmin etmeleri, matematiksek olarak açıklamaları ve GeoGebra ekranında yaptıkları gözlemleri paylaşımları istenmiştir. Araştırmada nitel veri analizi yöntemi kullanılmıştır. Araştırma sonucunda; öğretmen adaylarının en çok lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramlarını doğru tahmin edip matematiksel olarak doğru açıklarken, Geogebra ekranında ise en çok germe kavramını doğru gözlemledikleri tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer cebir, GeoGebra dinamik matematik yazılımı, Matematik öğretmen adayları.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

AN INVESTIGATION OF PRE-SERVICE ELEMENTARY MATHEMATICS TEACHERS' LEARNING PROCESSES OF FUNDAMENTAL LINEAR ALGEBRA

Memduha EKİCİ

**KIRŞEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND SCIENCE EDUCATION
MATHEMATICS EDUCATION PROGRAM**

Supervisor: Prof. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK
Year: 2025, Pages: 123
Juries: Prof. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK
Assoc. Prof. Dr. Suphi Önder BÜTÜNER
Assist. Prof. Dr. Aykut BULUT
Co-Supervisor: Prof. Dr. Serdal BALTACI

This study was conducted to examine the learning processes of pre-service mathematics teachers regarding fundamental linear algebra concepts. The research was carried out in the computer laboratory of the Faculty of Education at a university located in the Central Anatolia region. The study group consisted of ten volunteer pre-service mathematics teachers from the same university during the 2024–2025 academic year. The participants were given worksheets containing questions involving various sets. They were asked to predict the underlying linear algebra concepts represented by these sets, explain them mathematically, and share their observations on the GeoGebra screen. A qualitative data analysis method was employed in the study. The results revealed that the participants most accurately predicted and mathematically explained the concepts of linear dependence and independence. On the GeoGebra interface, it was observed that the concept of span (germe) was the most accurately identified and interpreted.

Key Words: Linear algebra, GeoGebra dynamic mathematics software, Pre-Service mathematics teachers.

TABLolar DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 4.1. Öğretmen adaylarının birinci soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu	27
Tablo 4.2. Birinciye soruya yönelik frekans tablosu	29
Tablo 4.3. Öğretmen adaylarının ikinci sorunun birinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu.....	34
Tablo 4.4. İkinci sorunun a maddesine yönelik frekans tablosu	36
Tablo 4.5. Öğretmen adaylarının ikinci sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu.....	41
Tablo 4.6. İkinci sorunun ikinci problemlemine yönelik frekans tablosu	43
Tablo 4.7. Öğretmen adaylarının üçüncü sorunun birinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu.....	48
Tablo 4.8. Üçüncü sorunun birinci problemine yönelik frekans tablosu.....	51
Tablo 4.9. Öğretmen adaylarının üçüncü sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu.....	56
Tablo 4.10. Üçüncü sorunun ikinci problemine yönelik frekans tablosu.....	58
Tablo 4.11. Öğretmen adaylarının üçüncü sorunun üçüncü problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu.....	63
Tablo 4.12. Üçüncü sorunun üçüncü problemine yönelik frekans tablosu	65
Tablo 4.13. Öğretmen adaylarının dördüncü soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu	70
Tablo 4.14. Dördüncü soruya yönelik frekans tablosu	72
Tablo 4.15. Öğretmen adaylarının beşinci soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu	77
Tablo 4.16. Beşinci soruya yönelik frekans tablosu.....	79
Tablo 4.17. Öğretmen adaylarının altıncı soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu	85
Tablo 4.18. Altıncı soruya yönelik frekans tablosu.....	87

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.1. Uglig (2003)'ün dengeli ve kavramsal bir lineer cebir öğretimi için ilkeleri.....	5
Şekil 1.2. Lineer cebir öğretimi için pedagojik prensipler.....	5
Şekil 3.1. ÖA2 öğretmen adayının birinci soruya yönelik çalışma yaprağından bir kesit.....	22
Şekil 4.1. ÖA5 Öğretmen adayının birinci soruya yönelik çalışma yaprağından bir kesit.....	31
Şekil 4.2. ÖA5 Öğretmen adayının birinci soruya yönelik GeoGebra ekranında gözlemleri .	32
Şekil 4.3. ÖA7 Öğretmen adayının birinci soruya yönelik çalışma yaprağından bir kesit.....	33
Şekil 4.4. ÖA7 Öğretmen adayının birinci soruya yönelik GeoGebra ekranında gözlemleri .	34
Şekil 4.5. ÖA2 Öğretmen adayının ikinci sorunun birinci problemine yönelik çalışma yaprağından bir kesit	38
Şekil 4.6. ÖA2 Öğretmen adayının ikinci sorunun birinci problemine yönelik GeoGebra ekranında gözlemleri	39
Şekil 4.7. ÖA10 Öğretmen adayının ikinci sorunun birinci problemine yönelik çalışma yaprağından bir kesit	40
Şekil 4.8. ÖA10 Öğretmen adayının ikinci sorunun birinci problemine yönelik Geogebra ekranındaki gözlemleri	41
Şekil 4.9. ÖA2 öğretmen adayının ikinci sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yaprağından bir kesit	45
Şekil 4.10. ÖA2 öğretmen adayının ikinci sorunun ikinci problemine yönelik Geogebra ekranındaki gözlemleri	46
Şekil 4.11. ÖA3 öğretmen adayının ikinci sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yaprağından bir kesit	47
Şekil 4.12. ÖA3 Öğretmen adayının ikinci sorunun ikinci problemine yönelik Geogebra ekranındaki gözlemleri	48
Şekil 4.13. ÖA2 Öğretmen adayının üçüncü sorunun birinci problemine yönelik çalışma yaprağından bir kesit	53
Şekil 4.14. ÖA2 Öğretmen adayının üçüncü sorunun birinci problemine yönelik Geogebra ekranındaki gözlemleri	54
Şekil 4.15. ÖA5 Öğretmen adayının üçüncü sorunun birinci problemine yönelik çalışma yaprağından bir kesit	55
Şekil 4.16. ÖA5 Öğretmen adayının üçüncü sorunun birinci problemine yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri	56
Şekil 4.17. ÖA3 Öğretmen adayının üçüncü sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yaprağından kesit.....	60
Şekil 4.18. ÖA3 Öğretmen adayının üçüncü sorunun ikinci problemine yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri	61
Şekil 4.19. ÖA5 Öğretmen adayının üçüncü sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yaprağından kesit.....	62

Şekil 4.20. ÖA5 Öğretmen adayının üçüncü sorunun ikinci problemine yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri	63
Şekil 4.21. ÖA6 Öğretmen adayının üçüncü sorunun üçüncü problemine yönelik çalışma yaprağından kesit.....	67
Şekil 4.22. ÖA6 Öğretmen adayının üçüncü sorunun üçüncü problemine yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri	68
Şekil 4.23. ÖA10 Öğretmen adayının üçüncü sorunun üçüncü problemine yönelik çalışma yaprağından kesit.....	69
Şekil 4.24. ÖA10 Öğretmen adayının üçüncü sorunun üçüncü problemine yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri.....	70
Şekil 4.25. ÖA2 Öğretmen adayının dördüncü soruya yönelik çalışma yaprağından kesit.....	74
Şekil 4.26. ÖA2 öğretmen adayının dördüncü soruya yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri	75
Şekil 4.27. ÖA6 Öğretmen adayının dördüncü soruya yönelik çalışma yaprağından kesit.....	76
Şekil 4.28. ÖA6 Öğretmen adayının dördüncü soruya yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri	77
Şekil 4.29. ÖA2 Öğretmen adayının beşinci soruya yönelik çalışma yaprağından kesit	81
Şekil 4.30. ÖA2 Öğretmen adayının beşinci soruya yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri.....	82
Şekil 4.31. ÖA4 Öğretmen adayının beşinci soruya yönelik çalışma yaprağından birinci kesit	83
Şekil 4.32. ÖA4 Öğretmen adayının beşinci soruya yönelik çalışma yaprağından ikinci kesit	84
Şekil 4.33. ÖA4 Öğretmen adayının beşinci soruya yönelik çalışma yaprağından üçüncü kesit	84
Şekil 4.34. ÖA4 Öğretmen adayının beşinci soruya yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri.....	85
Şekil 4.35. ÖA5 Öğretmen adayının altıncı soruya yönelik çalışma yaprağından kesit.....	89
Şekil 4.36. ÖA5 Öğretmen adayının altıncı soruya yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri.....	90
Şekil 4.37. ÖA10 Öğretmen adayının altıncı soruya yönelik çalışma yaprağından kesit.....	91
Şekil 4.38. ÖA10 Öğretmen adayının altıncı soruya yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri.....	92

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler Açıklama

/	:	Bölüm
x	:	Çarpım
+	:	Toplam
%	:	Yüzde

Kisaltmalar Açıklama

BCS	:	Bilgisayar Cebir Sistemleri
DGY	:	Dinamik Geometri Yazılımları
GTİT	:	Geometrik Temsil ve İlişkilendirme Testi
LCBT	:	Lineer Cebir Başarı Testi
ÖA	:	Öğretmen Adayı
SPSS	:	Statistical Package for the Social Sciences
TGA	:	Tahmin Et-Gözle-Açıkla

1. GİRİŞ

Kapsamında matris cebirini ve vektör uzayları teorisini barındıran ve matematiğin soyut bir dalı olarak belirtilen lineer cebir (Aydın, 2007); matris, determinant, lineer denklem sistemleri, vektör uzayı, alt vektör uzayı, lineer birleşim, lineer bağımsızlık ve lineer bağımlılık, taban, boyut gibi kavramları içermektedir (Açıkyıldız ve Kösa, 2021). Diğer bir ifade ile lineer cebir, matematiğin, matris, vektörler ve bunların vektörler üzerindeki lineer dönüşümlerini ifade eden bir alanıdır (Spence ve ark., 2000). Üniversitelerin Matematik, Matematik Mühendisliği, Matematik Bilgisayar, İstatistik, Matematik Öğretmenliği ve Mühendislik gibi bölümlerin müfredatlarında yer alan bu ders en az bir dönem boyunca öğrencilere anlatılmaktadır. Ayrıca fizik, kimya, biyoloji, psikoloji, sosyoloji, ekonomi ve mühendisliğin tüm alanlarında uygulama alanı olan bir derstir (Kolman ve Hill, 2002). Günümüzde mühendisler ve bilim adamları çözebileceklerini hayal bile edemedikleri karmaşıklıkta problemlerin çözümünde lineer cebirden faydalanmaktadır (Açıkyıldız, 2019). Aydın (2009) bu dersin önemli olduğunu vurgulayarak öğretmen adaylarının soyut düşünebilmelerine katkı sağladığını ifade etmiştir. Lineer cebirin farklı öğrenci grupları için önemli bir ders olmasını ise en az iki farklı nedenle açıklayabiliriz. İlki, matematiğin diferansiyel denklemler, olasılık ve çok değişkenli analiz gibi birkaç dalında geniş uygulama alanına sahip olmasıdır. İkincisi ise soyut kavramların öğrenilmesi için üniversite ikinci sınıf öğrencilerine en iyi seviyede imkân veren ders olması olarak söyleyebiliriz. Yapılan araştırmalara bakıldığında lineer cebir dersinin içeriğinden dolayı soyut olduğu ve öğrenci başarılarının düşük olduğunun belirtildiği görülmektedir (Dorier, 2002; Wu, 2004; Aydın, 2007; Dikovic, 2007). Araştırmacılar da bu sürece odaklanarak daha iyi bir öğretimin gerçekleştirilmesi için neler yapılabileceğini araştırmaya çalışmışlardır. Aydın (2009) lineer cebir ile ilgili yapılan araştırmaları; öğrencilerin öğrenme süreçlerindeki yaşamış oldukları zorlukların nedenlerini ortaya çıkarmak ve bunun üzerine programlar geliştirme üzerine yapılan tarihsel araştırmalar, çeşitli bilgisayar yazılımlarının lineer cebir öğretiminde kullanılmasına yönelik araştırmalar ve lineer cebirin formal yapısı ve geometri kullanımı üzerine yapılan araştırmalar olarak belirtmiştir. Diğer taraftan bazı araştırmalarda ise bu derste yaşanan zorluklar üzerine yoğunlaşıldığı da görülmektedir.

Haddad (1999) lineer cebir dersinde yaşanan zorlukları 3 kategoride analiz etmiştir. Birincisi lineer cebirin doğası gereğinden, ikincisi öğretimde kullanılan yöntemlerden ve üçüncüsü de öğrencilerin düşünme şekillerinden ve gereken alt yapıya

sahip olmamalarındandır. Öğrencilerin dersin yapısı ve kavramlarından ötürü kendilerini başka bir dünyada hissetmeleri de yaşanan zorluklardandır (Aydın, 2009). Lineer cebir ile ilgili yapılan araştırmalara bakıldığında öğrencilerin çıkarsamalarının geometrik kavramlarla sınırlı olduğu, yüksek boyutlu uzaylar ve soyut vektör uzayı kavramlarının anlaşılmadığı sonuçlarının ortaya çıktığı görülmektedir (Dorier, 2002; Aydın, 2007). Lineer cebir kitaplarına bakıldığında ilk olarak lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık konuları anlatılırken sonrasında doğru üzerindeki iki vektörün lineer bağımlılığı ve buradan yola çıkılarak düzlem üzerindeki üç vektörün lineer bağımlı olduğu gibi örnekler verilebilmektedir (Kolman ve Hill, 2002). Daha sonra, soyut vektör uzaylarına ait örnekler ve n-boyutlu uzaya genelleştirme yapıldığını görebilmekteyiz. Dorier (1998) ve Harel (1998) öğrencilerin lineer cebir derslerinde hesaplamayı gerektiren işlemleri rahatlıkla yapabildiklerini fakat kavramları anlamada ve kavramlar arası ilişkileri kurmada güçlük yaşadıklarını belirtmişlerdir. Yapılan araştırmalara da bakıldığında öğrencilerin özellikle matris, determinant, lineer denklem sistemleri gibi işlem fazlalığı olan konularda güçlük yaşamazlarken, alt vektör uzayı, germe, lineer bağımlılık ve bağımsızlık gibi kavramların öğrenilmesinde çeşitli zorluklar yaşadıkları belirtilmektedir (Harel, 1989; Wang, 1989; Carlson, 1993). Yine bazı araştırmalarda öğretmen adaylarının bu derse ait çok fazla kavramı öğrenemediği veya yanlış öğrendiği sonucuna ulaşılmıştır (Aydın, 1997; Dubinsky, 2007; Erçerman, 2008). Dorier (2002) de bu dersi alan öğrencilerin matematiğin diğer konuları ile bağlantısını tam olarak kavrayamadıklarını, somut olarak algılayamadıkları için tam olarak öğrenemediklerini belirtmektedir. Belki de öğretmen adaylarının daha önce duymadıkları pek çok kavram ile karşılaşmaları ve soyut kavramlar ile içi içe olmaları dersin sıkıcı olmasına neden olabilir. Teknoloji sayesinde öğrenciler tek başına yapamayacakları görselleştirmeleri yaparak (NCTM, 2000) bu süreci yönetebilirler. Yapılan bazı araştırmalara bakıldığında ise; lineer cebir derslerinde teknolojinin kullanılmasının öğrencilerin başarılarının artmasında katkısının olduğunu görebilmekteyiz (Sierpinska, 1999; Herrero, 2000). Bu tür teknolojilerden en önemlisi ve matematik eğitiminde en çok kullanılanı ise dinamik yazılımlar olduğunu söyleyebiliriz.

Öğrencilerin bilgilerinin somuttan soyuta doğru kurulmasında dinamik ortamların önemli bir rolü vardır (Baki, 2002; Güven ve Karataş, 2009). Matematiksel ifadeler ve formüllerin çoğu zaman öğrenciler için anlaşılması güç ve tuhaf görünen kavramlar olduğunu ve bu kavramların görsel bir temsil ile ifade edilmesinin öğrencilerin anlamasını daha da kolaylaştırabileceğini söyleyebiliriz. CalGeo (2007) yaygınlaşan

teknoloji ile görsel temsillerin daha net bir şekilde oluşturulabileceğini vurgulamıştır. Belki de bu şekilde soyut kavramların görselleştirilerek öğrencilere sunulması belki de öğrencilerin daha net anlamasına neden olabilir. Bunun için en güzel somutlaştırma da dinamik yazılımlar ile gerçekleştirilebilir. Baltacı (2014) bir öğretim materyali olarak dinamik yazılımların; diğer materyaller ile karşılaştırıldığında öğretim ortamında öğrenci etkileşiminin en yüksek olduğu araçlar olarak karşımıza çıktığını belirtmektedir. Bu tür yazılımlar ile birlikte öğrenciler ders içeriklerinin tekrar edebilir ve alıştırmaya imkân bulabilir. Olive (2002) bu tür yazılımlar ile çalışan öğrencilerin; bir bilim adamı gibi kendisi araştıran, matematiği bir oyun gibi görerek yaptıklarından zevk duyan, öğrenme rolünün büyük bir kısmının kendinde olduğunun farkında olan bir öğrenme gerçekleştireceklerini vurgulamıştır. Baltacı (2014) da bu şekildeki bütün yazılımların dinamikliği sayesinde öğrencilerin, yapılan her hareketi gözlemleyebildiklerini, tahminlerini ve varsayımlarını değerlendirebildiklerini belirtmektedir. Yapılan çalışmalara bakıldığında birçok araştırmacının lineer cebir dersinin öğretiminde teknoloji desteğinin oldukça önemli olduğunu vurguladığı görülmektedir (Dorier, 2002; Aydın, 2007; Dikovich, 2007; Aydın, 2009b). Örneğin Dikovich (2007) lineer denklem sistemlerinin analitik ve özel çözümü, determinant ve matris sistemleri için teknoloji destekleri bazı örnekler sunmuştur. Bu yazılımlardan biri de matematik eğitiminde çok sık kullanmış olduğumuz GeoGebra dinamik matematik yazılımıdır.

Hem dinamik geometri yazılımının (DGY) özelliklerini hem de bilgisayar cebir sistemlerinin (BCS) özelliklerini birlikte sunan GeoGebra (Hohenwarter ve Jones, 2007), çok farklı dillerde kullanılması ve kullanım kolaylığı yönleriyle matematik öğretiminde önemli bir yer teşkil etmektedir (Kutluca ve Zengin, 2011; Baltacı ve ark., 2015). Dikovich (2009) GeoGebra yazılımı ile birlikte cebir, çizim tahtası, hesap çizelgesi, istatistiksel hesaplamalar penceresi ve iki ve üç boyutlu pencereleri ile matematiksel semboller, grafik ve bu değerlerin tabloya aktarımını dinamik bir süreçte gerçekleştirerek temsiller arasında hızlı geçişler sağlanabildiğini ifade etmiştir. Hohenwarter ve Fuchs (2004) bu yazılımın öğretim sürecinin hazırlanmasında da öğretmenleri teşvik edeceğini, okullarda matematik eğitimi için çok yönlü bir araç olduğunu ve öğrenciler tarafından rahatlıkla kullanılabileceğini ve bu yazılım ile birlikte öğrencilerin matematiği keşfedebileceklerini ve matematiksel akıl yürütmelerine yardımcı olacağını belirtmişlerdir. Bu tür yazılımlar ile birlikte öğrenciler birçok temsiller aracılığı ile matematiksel yapılarla ilgili olarak bazı keşifler yapabilirler (Dikovich, 2009). Hohenwarter, Preiner ve Yi (2007) bu yazılım sayesinde öğrencilerin kendi çizmek

istediklerini çizebileceklerini, matematiksel modeller oluşturarak dinamik olarak araştırma yapabileceklerini ve daha iyi bir matematik okuryazarı olabileceklerini ifade etmiştir. Ayrıca Dikovich (2009) bu yazılım sayesinde düzlemdeki vektörlerin rahatlıkla görselleştirilebildiğini vurgulamıştır. Bu şekilde devamlı güncellenen GeoGebra yazılımı sayesinde özellikle üç boyutlu vektörlerin ve üç boyutlu cisimlerin de rahatlıkla görselleştirildiğini görebilmekteyiz.

1.1. Amaç

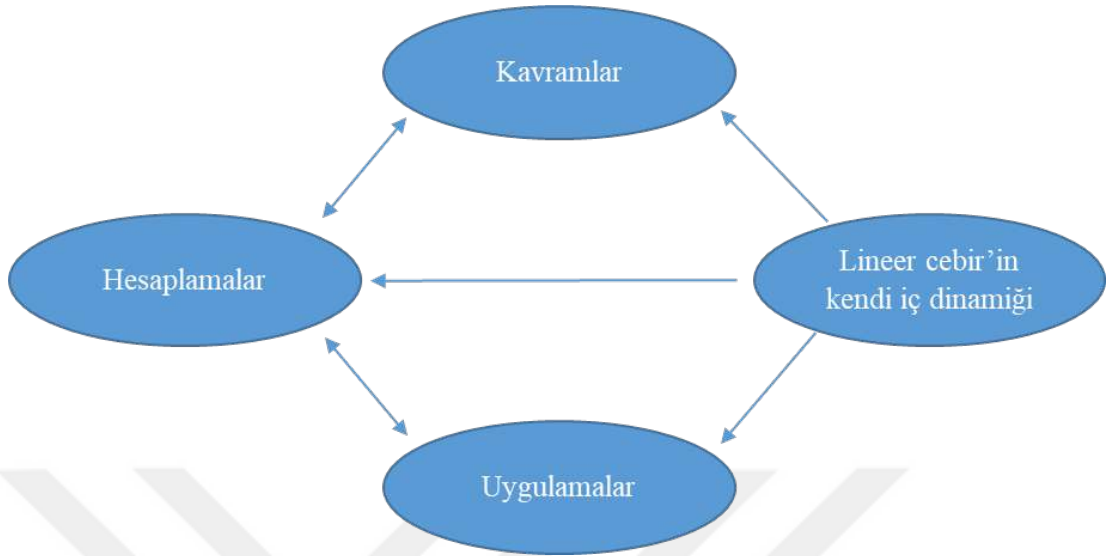
1.1.1. Araştırmanın problemi ve amacı

GeoGebra yazılımının yukarıda sayılan özelliklerini dikkate aldığımızda verilen vektörlerin lineer bağımlılık bağımsızlıklarının belirlenmesinde baz ve boyut kavramlarının öğretiminde rahatlıkla kullanılabileceğini söyleyebiliriz. Bu yüzden araştırmada matematik öğretmen adaylarının lineer cebir öğretiminde literatürde de belirtildiği gibi zorlanan lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarının dinamik yazılımlar ile öğrenme süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bunun için bu araştırmada *“İlköğretim matematik öğretmen adaylarının üç boyutta farklı sayıda vektörlerden oluşan kümelerin lineer bağımlılığı-lineer bağımsızlığı, gerdiği uzayı, bazı ve boyutunu dinamik yazılımlar ile öğrenme süreçleri nasıldır?”* sorusunun cevabı aranmaktadır ve araştırmanın problemi bu şekilde belirlenmiştir.

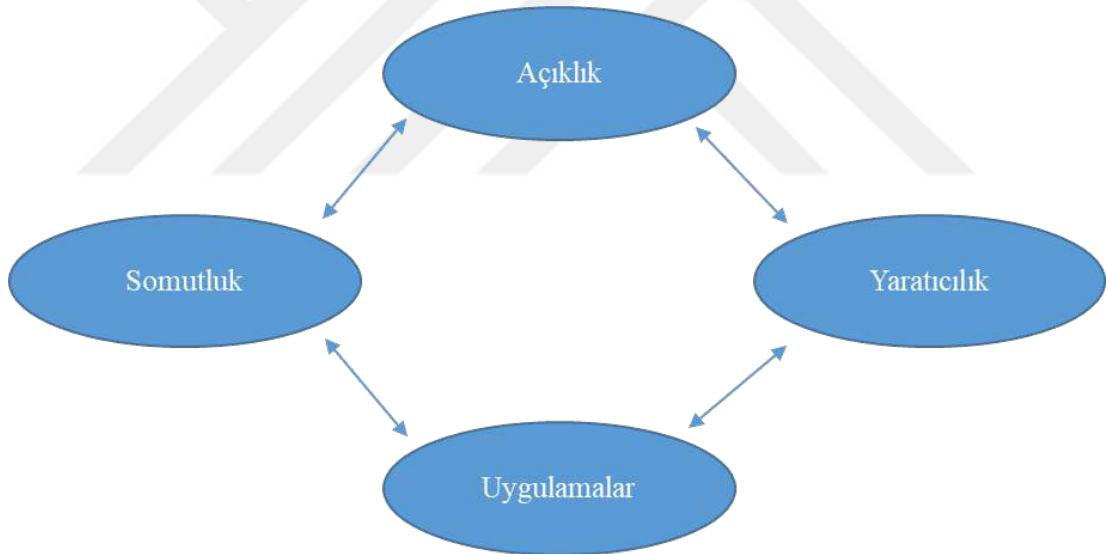
1.1.2. Araştırmanın gerekçesi ve önemi

1960'lı yıllara kadar daha çok lisansüstü düzeyde daha sonraki yıllarda ise lisans düzeyinde verilmeye çalışılan lineer cebir dersinin matematiğin soyut bir alanı olduğunu söyleyebiliriz. Daha çok analiz üzerine yapılan araştırmalar yerine lineer cebir üzerine yoğunlaşılması gerekliliğini de son yıllarda göstermiştir (Dorier, 1995). Yapılan araştırmalara bakıldığında lineer cebir öğrenme ile ilgili çeşitli zorlukların olduğu görülmektedir (Dorier ve ark., 2000; Hillel, 2000; Britton ve Henderson, 2009). Bu dersi öğrenmeye çalışan öğrenciler, dersin gerek yapısı gerekse kavramların soyut bir yapıda verilmesi sebebiyle öğrenmeye çalışılan kavramları tam olarak anlamlandıramadıkları söylenebilir ve bu tür kavramları öğrenmek onlara sıkıcı gelebilir (Dorier ve Sierpiska, 2001). Bunun için de öğrencilerin lineer cebir kavramlarını kavramsal olarak öğrenmeleri gerekmektedir. Dengeli ve kavramsal bir lineer cebir öğretimi için Uhlig (2003) ilkelerini aşağıdaki şekildeki gibi ifade etmektedir. Uhlig (2003) bu süreçte öğretmenin de

öğrencilerinin en iyi şekilde öğrenebilmelerini sağlayabilmesi için aşağıdaki pedagojik prensiplere uyulması gerektiğini belirtmiştir.



Şekil 1.1. Uglig (2003)'ün dengeli ve kavramsal bir lineer cebir öğretimi için ilkeleri



Şekil 1.2. Lineer cebir öğretimi için pedagojik prensipler

Uhlig (2003)'ün belirttiği gibi lineer cebir öğretiminin ilkeleri ve prensiplerinin önemli olduğunu ve bunun için de bu kadar soyut kavramların bir arada verilmesi yerine daha çok somutlaştırmaya ihtiyacın olduğunu söyleyebiliriz. GeoGebra dinamik matematik yazılımının öğrencilerin lineer cebir kavramlarını öğrenme süreçlerinde yararlı olabileceğini söyleyebiliriz. Çünkü dinamik geometri yazılımları öğrencilerin matematik projelerini, çoklu temsilleri, deneyim ve keşfederek öğrenme yoluyla desteklemektedir (Kutluca ve Zengin, 2011). Ayrıca bu tür yazılımlar sayesinde öğrenciler kendi matematiksel nesnelerini inşa edebilirler (Tabaghi, 2012). Yapılan bazı

araştırmalarda teknolojinin lineer cebir derslerinde kullanılmasıyla birlikte öğrencilerin başarılarında artışların olduğu sonuçlarının ortaya çıktığı görülmektedir (Sierpiska, 1999; Herrero, 2000). Özellikle dinamik yazılımlarda nesnelerin hareketli olması ile birlikte matematiksel ilişkilerin incelenmesi ve inşa sürecinin keşiflerinde öğretmenler öğrencilerine daha fazla yardımcı olabilirler (Trigo ve Perez, 2010). Baki (1996)'nın da belirttiği gibi bu şekildeki ortamlarda öğrenciler kendilerine verilen karmaşık ve soyut yapıdaki problemlere çözüm yolları geliştirerek analiz yapabilir, varsayımlarda bulunarak genellemeler yapabilir ve bu şekildeki problemleri çözebilir. Yapılan bu çalışmada da lineer cebir kavramlarından olan lineer bağımlılık-lineer bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarını öğrenme süreçlerinde tahmin etme, analiz, test etme, keşfetme ve genelleme yapma gibi üst düzey beceriler kullanılabilir. Bu becerilerin ortaya çıkarılabilmesinde veya kullanılabilmesinde ise GeoGebra yazılımı işe yarayabilir. Bunun için GeoGebra yazılımı destekli hazırlanan etkinlikler cebirsel olarak verilen özelliklerin geometrik temsillerini göstererek bu lineer cebir kavramlarına farklı boyutlar kazandırabilir. Bu süreçte yazılımın çeşitli ekranlarının olması ve özellikle iz ve sürgü ikonları sayesinde öğrenciler istenilen bilgileri daha net gözlemleyerek lineer bağımlılık-lineer bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarını daha iyi anlamlandırabilirler. Bu yüzden araştırma da lineer bağımlılık-lineer bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarının öğretiminde GeoGebra yazılımı kullanılmasının önemli olduğunu söyleyebiliriz. Bu çalışmada da üç boyutlu uzayda farklı sayıda vektörlerden oluşan kümelerin lineer bağımlılık-lineer bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarına yönelik olarak etkinlikler öğretmen adaylarına sunulmuş ve GeoGebra yazılımının kullanılması sağlanmıştır. Bu sürecin değerlendirilmesinde öğretmen görüşlerini belirlemenin önemli olduğunu da söyleyebiliriz. Araştırma sürecinde ortaya çıkacak sonuçların gerek öğretmen adaylarına gerekse öğretmenlere yaşanan zorlukların giderilmesi ve öğrenme ortamının geliştirilmesi için yapılması gereken düzenlemelere katkı sağlaması ve buna benzer diğer çalışmalara örnek teşkil etmesi bakımından oldukça önemlidir.

1.1.3. Araştırmanın sınırlılıkları

Araştırmanın sınırlılıkları şu şekilde sıralanabilir;

- Araştırmanın çalışma grubunu, İç Anadolu'daki bir üniversitenin 2024-2025 eğitim öğretim yılında 3.sınıftaki 10 matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır.
- Araştırmanın örneklemin araştırmaya ilgi düzeyi, açıklığı ve samimiyeti ile sınırlıdır.

1.1.4. Araştırmanın varsayımları

Araştırmaya katılan öğrencilerin kendi duygu ve düşünceleriyle istenilen sorulara cevap verdikleri varsayılmıştır.

1.1.5. Tanımlar

Lineer Cebir: Çeşitli kavramları ve sistemleri örnekleyen, farklı özellikleri içeren soyut yapılarla alakalı cebirin bir dalıdır (Kan, 2014).

Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık: $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k = 0$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \dots, a_k$ sabitleri bulunabilirse V vektör uzayında $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektörleri aralarında “lineer bağımlıdır” denir. Aksi halde $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektörleri aralarında “lineer bağımsızdır” denir (Kolman ve Hill, 2002).

Germe: V vektör uzayının her bir elemanı $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak ifade edilebiliyorsa $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektörleri V vektör uzayını “gerer” denir.

Baz: Bir V vektör uzayının bir $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ alt kümesi aşağıdaki iki özelliğe sahipse V ’nin bir “bazı” veya “tabanı” adını alır.

(a) S , V ’yi gerer.

(b) S lineer bağımsızdır (Kolman ve Hill, 2002).

Boyut: Sıfırdan farklı bir V vektör uzayının bir bazındaki vektörlerin sayısına, V ’nin boyutu denir. V ’nin boyutu genellikle “boy V ” biçiminde gösterilir. $\{0\}$ aşıkâr uzayının boyutu sıfır olarak tanımlanır (Kolman ve Hill, 2002).

Dinamik Geometri Yazılımı: Cabri Geometri, GeoGebra, Cinderella Geometer’s Sketchpad gibi geometriye özel tasarlanmış geometri yazılımları için konmuş ortak terimdir (Moss, 2000).



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde araştırmanın kuramsal çerçevesi ve literatür taramasının sonuçları sunulmaktadır.

2.1. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi

Bu bölümde çalışmanın dayandığı temel kavramlar olan, lineer cebir ve öğretimi ve konu ile ilgili yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

2.1.1. Lineer cebir ve öğretimi

Vektör uzayları teorisi ve matris cebiri olmak üzere iki temel bölümden oluşan lineer cebir dersinde, matris cebiri; matrisler, matrislerde işlemler ve özellikleri, determinantlar ve lineer denklem sistemleri ile çözüm yöntemlerini içerirken, vektör uzayları teorisi ise vektör uzayları, alt uzaylar, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık-bağımsızlık, baz ve boyut gibi kavramları içermektedir. Vektör uzayları teorisi çok daha soyut bir yapıya sahip olması sebebiyle öğrencilerin zorlandıkları bölümler arasındadır. Dorier ve Sierpiska (2001) soyut olarak bilinen bu derste öğrencilerin neden zorlandıklarını üç sebep ile açıklamaktadır. Birincisi öğrencilerin karşılaştığı tüm lineer cebir problemlerinde vektör uzayları teorisi olmadan da çözülebildiğini ifade ettiklerini ve soru çözümlerinde aksiyomatik yaklaşımı kullanmanın öğrenciler için gereksiz gelebilmektedir. İkincisi bu dersin doğrular ve düzlemlerin geometrik dili, n boyutluların, matrislerin ve lineer denklemlerin cebirsel dili, vektör uzaylarının ve lineer dönüşümlerin soyut dili yansıtmaktadır. Üçüncüsü ise bu dersin yüksek seviyede bilişsel bakış açısı gerektirmesi ve öğrencilerin bu gerekliliği karşılamaları için öğrencilerin beklentilerini arttırma beklentisinin olması olarak belirtmişlerdir. Bu soyut kavramların birleşimi olarak düşünülen lineer cebir dersinde yaşanan bu zorluklara Carlson (1993) sis bulutu çökmesi şeklinde bir analogi ile sunmaktadır. Öğretmenlerin bu sis bulutunu tamamen kaldıramasalar bile azaltabileceklerini ifade etmiştir.

Diğer taraftan bu dersin öğretiminde teknolojinin matematiksel yapıların özelliklerinin keşfedilmesine yönelik öğrenme ortamlarının sağlanması, görselleştirme ile birlikte soyut olan kavramların somutlaştırılması ve çeşitli yazılım araçlarının kullanılarak tecrübe edinilmesi gibi rolleri bulunmaktadır (Dikovic, 2007). Yazılımlara bakıldığında veri toplama, analiz, anlık sayısal ve sembolik hesaplamalar, modelleme, keşfetme ve görselleştirme, iki ve üç boyutta grafik ile animasyon sunumu ve uygulama geliştirme gibi önemli rollerinin olduğunu söyleyebiliriz. Zaten yapılan araştırmalara

bakıldığında teknolojinin lineer cebir öğretiminde önemi vurgulanmaktadır (Harel 2000; Pecuch-Herrero, 2000; Dorier, 2002; Wu, 2004; Aydın, 2007; Dikovic, 2007).

Bu süreçte R^2 ve R^3 deki vektörler ve oluşan geometrik nesnelerin farklı temsillerle gösterilmesi gerekebilir. Bunun için bu içerikler göz önüne alındığında lineer cebir öğretiminde Bilgisayar Cebiri Sistemleri (BCS) yazılımlarının yanı sıra Dinamik Geometri Yazılımlarının da (DGY) kullanımına ihtiyaç vardır. Bunun için hem BCS ve hem de DGY özelliklerini birlikte sağlayan ve dinamik matematik yazılımları (DMY) olarak adlandırılan GeoGebra yazılımının bu araştırma sürecinde kullanılmasına karar verilmiştir.

2.1.2. Konu ile ilgili yapılan çalışmalar

Bu çalışmada matematik öğretmen adaylarının lineer cebir öğretiminde literatürde de belirtildiği gibi zorlanılan lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarının dinamik yazılımlar ile öğrenme süreçlerinin incelenmesi amaçlandığından bu sürece ait yer alan çalışmalar aşağıda yer almaktadır.

Açıkyıldız (2019) yapmış olduğu araştırmasında vektör uzayları öğretimine yönelik bir öğrenme ortamının tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Çalışmada vektör uzayları teorisinin temel kavramları olan alt uzay, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık-bağımsızlık, taban ve boyut kavramlarına odaklanılmıştır. Tasarım tabanlı araştırma yöntemi kullanılan çalışma toplam dört döngüde gerçekleştirilmiş ve toplam 106 öğretmen adayı ile birlikte yürütülmüştür. İlk iki döngüden elde edilen bulgular yardımıyla tasarlanan öğrenme ortamına son hali verilerek araştırmanın final döngüsüne hazır hale getirilmiştir. Çalışmanın ikinci ve üçüncü problemlerine üçüncü döngüden elde edilen bulgular üzerinden cevap aranmıştır. Bir bölümü sınıf bir bölümü de bilgisayar ortamında gerçekleştirilen çalışmada çalışma yaprakları kullanılmıştır. 6 hafta süren uygulama öncesinde ve sonrasında öğrenci düşünme biçimlerini belirlemek amacıyla sırasıyla başlangıç ve final testleri uygulanmıştır. Ayrıca bütün öğrencilerle klinik mülakatlar yapılmıştır. Diğer taraftan süreç boyunca sınıf ortamındaki gözlemlerde alan notları tutulmuş ve dersler video kaydına alınmıştır. Elde edilen veriler nitel veri analizi kullanılarak soru soru analiz edilmiştir. Araştırmasının sonucunda vektör uzaylarının öğretimi için tasarlanan öğrenme ortamı öğrencilerin düşünme biçimleri üzerinde etkili olmuş ve öğrencilerin düşünme biçimlerinin gelişimine katkı sağlamıştır. Vektör uzayları ve alt uzaylar kavramı öğrencilerin analitik yapısal düşünme biçimini sergilemede en çok başarılı oldukları

konular olup kullanılan dillerin öğrencilerin düşünme biçimleri üzerinde etkili olduğu sonucuna varılmıştır. Öğrencilerin sahip oldukları zorluklar; harf sembollerinin kullanımı ve yorumlanması, elemanları fonksiyon olan bir vektör uzayından vektör belirleme, formalizm ve denklem sistemlerinin çözümü kümesini bulma ve yorumlama olarak belirlenmiştir. Ayrıca, uygulamalar esnasında verilen ödevlerin, öğrenci sınav kaygılarını azaltarak analitik yapısal düşünme biçimi sergilemelerinde etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Lineer bağımsızlık ve germe konularında dinamik görsellerin kullanımının öğrencilerin zihinsel yapıları üzerindeki etkisini araştıran Doğan (2018), bu etkiyi ortaya koymak için dinamik görsel temsilleri kullanılarak öğretim gören öğrenciler ile geleneksel eğitim araçlarıyla öğretim gören öğrencilerin düşünme biçimleri, mülakatlara verdikleri cevaplar kullanılarak karşılaştırmıştır. Yapmış olduğu araştırmasında kuramsal çatı olarak Sierpinska'nın öğrenci düşünme biçimleri teorisi kullanmıştır. A, B ve C gibi üç gruba ayırmış olduğu araştırmasının çalışma grubunu 12 öğrenci oluşturmaktadır. Üç grupta da aynı ders kitapları kullanılmış ve derslerde formal tanımlar, teoremler ve aritmetik hesaplamalara yer verilmiştir. Araştırmanın verileri mülakatlarla elde edilmiştir. Verilerin analizinde nitel bir yaklaşım olan sabit karşılaştırma yöntemi kullanılmıştır. Transkript edilen mülakatlar üç uzman tarafından Sierpinska'nın (2000) çatısına göre değerlendirilerek düşünme biçimleriyle ilişkilendirilmiştir. Öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar öğrencilerin kullandıkları düşünme biçimi sayısına göre geometrik-cebirselsel, geometrik-aritmetik aritmetik-cebirselsel hepsi yalnızca geometrik yalnızca aritmetik ve yalnız cebirselsel olarak sınıflandırılmıştır. Araştırmasının sonucunda geometrik-cebirselsel nitelikteki cevapların her üç grupta da en yüksek yüzdeye sahip olduğunu ortaya koymuştur. Dinamik geometrik temsillerle öğrenim gören A ve B grubunda öğrencilerin zihinsel yapıları ağırlıklı olarak geometrik varlıklarla (entity) şekillendirilirken geleneksel öğrenim gören C grubundaki öğrencilerin çoğunlukla sayısal olarak şekillendirdiği ortaya çıkmıştır.

Örneğin Kan (2014) yapmış olduğu araştırmasında GeoGebra destekli öğretimin öğretmen adaylarının Lineer Cebir dersine ait bazı konulardaki akademik başarıları üzerine etkisini incelemeyi amaçlamıştır. 2013-2014 eğitim-öğretim yılında bir devlet üniversitesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği programının 2.sınıfına kayıtlı 68 öğretmen adayı ile gerçekleştirilen araştırmada nicel araştırma yöntemlerinden ön test-son test kontrol gruplu yarı deneysel desenlerden eşleştirilmiş desen kullanılmıştır. Veriler Lineer Cebir Başarı Testi (LCBT) ve GeoGebra yazılımının Lineer Cebir

kavramlarını birbirleri ile ilişkilendirme ve bu kavramların geometrik özellikleri ile cebirsel özellikleri arasında ilişkileri keşfetme üzerine etkisini belirlemek amacıyla araştırmacı tarafından geliştirilen Geometrik Temsil ve İlişkilendirme Testi (GTİT) ile toplanmıştır. Veriler ise SPSS ile analiz edilmiştir. Araştırmanın sonucunda GeoGebra destekli uygulamalar sayesinde öğretmen adaylarının Lineer Cebir dersine ait Vektör, Matris Cebiri, Lineer Denklem Sistemleri ve Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık konularındaki akademik başarı düzeyleri arasında deney grubu lehine anlamlı fark bulunmuştur. Ayrıca GeoGebra destekli uygulamalar sayesinde öğretmen adaylarının Lineer Cebir kavramlarını birbirleri ile ilişkilendirme ve bu kavramların geometrik özellikleri ile cebirsel özellikleri arasında ilişkileri keşfetme becerileri arasında anlamlı bir fark bulunmuştur.

Lineer cebir dersinde görselleştirme tekniğinin, öğrencilerin kavramsal öğrenmeleri üzerindeki etkisini araştırıldığı Konyalıoğlu ve ark. (2005)'nin araştırmasında lineer cebir dersini alan 60 öğrenci deney ve kontrol olmak üzere iki gruba ayrılmıştır. Bütün öğrencilere lineer cebir için vektör kavramıyla ilgili gerekli temel bilgiler verilmiş ve süreçte vektör uzay kavramı deney grubuna haftada iki saat geometrik ve bir saat cebirsel ağırlıklı olmak üzere üç saatte verilmiştir. Kontrol grubunda ise lineer dersi iki saat cebirsel ve bir saat geometrik ağırlık olarak verilmiştir. Dört hafta sonunda iki gruba da aynı test uygulanmış ve testte yer alan sorular vektör uzayları kavramıyla ilgili problemlerden oluşmaktadır. Dört haftalık uygulama sonrasında yapılan son test sonucunda grupların puanları arasında anlamlı bir fark bulunmamıştır. Çalışmanın sonuçlarına göre deney ve kontrol grupları arasında işlemsel bilgi bakımından bir farka rastlanmamış, deney grubundaki öğrencilerin kavramsal bilgi bakımından daha başarılı olduğunu göstermiştir.

Yine Donevska-Todorova (2018) yapmış olduğu araştırmasında lineer cebirde öğrenci yeterliliklerinin geliştirilmesi için dijital kaynakların potansiyelini incelemiştir. Araştırmada teknoloji ile geliştirilmiş öğrenme ve öğretme ortamlarının işlemsel ve kavramsal anlamayla birlikte görselleştirme ve çoklu temsillerde öğrenci yeterliliklerinin gelişimine nasıl katkı sağlayabileceği ortaya konulmaya çalışılmıştır. Yapılan analizler sonucunda aksiyomlar, tanımlar, teoremler ve yapılar aracılığıyla lineer cebirin soyut doğasının öğrenilmesi ve anlaşılması basit bir Bilgisayar Cebiri Sistemleri (BCS) veya Dinamik Geometri Yazılımları (DGY) kullanımıyla anlaşılır bir hale gelmediğini göstermiştir. Yeterliliklerin gelişiminde hangi dijital aracın etkin olduğunu; argümanlar ve ispatlar ileri sürmede BCS ve DGY, matematiksel kavramların sunumunda DGY,

matematiğin sembolleri, formal ve teknik elemanları ile etkileşim içinde olmada BCS ve matematiksel iletişimde BCS, DGY ve görsel ortamlar olarak ifade etmiştir. Özellikle, özel olarak tasarlanmış teknolojik temelli ortamların, diller ve düşünme biçimleri arasında daha kolay ve daha etkili geçişlere olanak sağlayabileceği ve lineer cebirdeki kavramların anlaşılması, temsil edilmesi ve tanımlanması için öğrenci yeterliliklerinin gelişimini kolaylaştırabileceği sonucuna varılmıştır.

Aydın (2009) ise yapmış olduğu araştırmasında, lineer cebir öğretimi ve öğrenimi üzerine yapılmış çalışmaların incelenmesiyle bir genel durum tespiti yapılmaya çalışmıştır. Araştırmasının sonucunda Lineer cebir üzerinde yapılan eğitim çalışmalarını; a) lineer cebir tarihi, b) lineer cebirdeki formalizm sorunu ve lineer cebir'in daha iyi öğretilmesi ve öğrenilmesi için bilişsel esneklik olarak adlandırılan çalışmalar, c) lineer cebir-geometri ilişkisi, d) lineer cebir öğretimi ve öğreniminde teknoloji kullanımı başlıkları altında gruplandırmıştır. Matematik eğitimi çalışmalarının, lineer cebir öğretimi ve öğreniminin bütün zorluklarının üstesinden gelebilmek için mucizevi bir türden çözüm getiremediğini belirtmiştir. Bu çalışmalar bazen yeni sorulara, problemlere ve zorluklara yol açmakla birlikte, öğrencilerin öğrenme zorluklarına epistemolojik analizlerle ve deneysel öğretimlerle kısmi çözümler getirmiştir.

Tabaghi ve Sinclair (2013)'da çalışmalarında dinamik geometri taslağı ile etkileşimli olarak özdeğerler ve özvektörler kavramları üzerine öğrenci düşüncelerini ortaya çıkarmaya çalışmışlardır. Araştırmada enstrümantal oluşum teorisi kullanılmış ve özellikle araştırmaları sırasında öğrenciler tarafından kullanılan farklı sürüklenme modelleri takip edilmiştir. Aynı zamanda ortamın kinestetik ve dinamik özellikleri göz önüne alındığında, öğrencilerin ortaya çıkan görsel ve kinestetik anlamalarını analiz etmek için somut biliş (embodied cognition) teorileri kullanılmıştır. Sketchpad yazılımının kullanıldığı araştırmada çalışma grubu dört tanesi lisans öğrencisi ve bir tanesi mezun öğrenci olmak üzere beş öğrenciden oluşmaktadır. Veriler yarı yapılandırılmış klinik mülakatlar aracılığıyla elde edilmiştir. Yapılan analizler ile literatürde baskın olarak rapor edilen analitik-aritmetik düşünme tarzının (ve sonucunda yöntemsel bilgi) aksine, araştırmaya katılan öğrencilerin sentetik geometrik bir düşünce biçimi geliştirdiklerini ortaya koymuştur. Ayrıca, öğrencilerin sentetik-geometrik düşünme biçimlerinin özvektörlerin ve özdeğerlerin hareket temelli kavramlarını güçlü bir şekilde öne çıkardıkları bulunmuş ve böylece araştırmacılar öğrencilerin düşüncelerini dinamik sentetik-geometrik olarak nitelendirmişlerdir.

Dikovic (2007)'de araştırmasında anlatmış olduğu lineer cebir dersleri sayesinde deneyimlerinin ışığında, öğrencilerin sayısal, sembolik ve görsel gösterimlerini geliştirmek için teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin önemli olduğunu vurgulamıştır. Lineer denklem sistemlerinin analitik ve özel çözümlerini, determinant ve matris sistemleri için bazı örnekleri teknoloji destekli olarak sunan Dikovic, araştırmasının sonucunda teknolojinin, öğrencilere ve öğretmenlere öğrenmeyi kişiselleştirebilme olanağı sunduğunu belirtmiştir. Bu kişiselleştirmeler tanımlayıcı örnekler oluşturmak, arzu edilen derinlikte kavramlarla ilgili anlamayı gerçekleştirmek, kendi problemlerini ve bu problemlerin çözümü için uygun araçları seçmek şeklindedir. Araştırmasının sonucunda metodolojik olarak matematiksel yazılımları içeren çeşitli öğretim-öğrenme ortamlarının gelecekte geliştirilmesi gerektiğini de vurgulamıştır.

Turđut (2010) deneysel ve betimsel olmak üzere iki ana bölümden oluşan araştırmasının birinci bölümünde teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerine, uzamsal yeteneklerine ve başarılarına etkisini belirlemeyi amaçlanmıştır. İkinci bölümünde ise öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri, uzamsal yetenekleri, cinsiyet, lineer cebir başarıları ve akademik başarı arasındaki ilişkiyi belirlemeye çalışmıştır. Deneysel araştırmanın çalışma grubunu 85, betimsel araştırmanın çalışma grubunu ise 193 ilköğretim matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırmada deneysel bölümünden elde edilen bulguların analizinden teknoloji destekli lineer cebir öğretimi yapılan deney grubu ile kontrol grubu öğrencilerinin uzamsal test ve lineer cebir testi ortalama puanları arasında deney grubu lehine anlamlı farklılık olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Araştırmanın betimsel bölümünden elde edilen bulguların analizinden ise, öğrencilerin uzamsal yetenekleri ile cinsiyetleri ve geometrik düşünme düzeyleri arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Ancak öğrencilerin akademik başarı ve uzamsal yetenekle lineer cebir başarıları arasında orta düzeyde pozitif ilişkilere rastlanmıştır.

Yapılan bir diğer çalışmada ise Stewart ve Thomas (2010) öğrencilerin lineer cebirde taban, germe ve lineer bağımsızlık kavramlarına yönelik fiziksel, sembolik ve formal anlamalarını ortaya koymayı amaçlamıştır. Toplam 25 ikinci sınıf öğrencinin bulunduğu araştırmasında A grubunda 16 ve B grubunda 11 öğrenci bulunmaktadır. Uygulanan lineer cebir derslerinin ardından çeşitli lineer cebir kavramlarından oluşan 14 soruluk bir test uygulanmış ve A grubundan sekiz, B grubundan iki öğrenci ile mülakatlar yapılmıştır. Araştırmanın sonucunda geleneksel sınıfta öğrenim gören öğrencilere oranla deney grubundaki öğrencilerin daha yüksek bir yüzdeyle taban, germe ve lineer

bağımsızlık kavramlarının tanımlarıyla ilgili mantıksal çıkarımlarda bulunduklarını ortaya konmuştur. Özellikle deney grubundaki öğrencilerin bir vektör kümesinin olası bütün lineer birleşimleri ile germeyi ilişkilendirmede geleneksel sınıfa göre daha başarılı oldukları ortaya konulmuştur. Ayrıca sonuçlar taban bulmada matris işlemlerine yapılan vurgunun öğrencilerin kavramı anlamasına yardım edemeyebileceğini ve görsel ve fiziksel özelliklerin bu bağlamda faydalı olabileceğini ortaya koymuştur.

Yine Soylu (2005) araştırmasında öğrencilerin lineer dönüşümler, lineer dönüşümlere karşılık gelen matrisler, lineer dönüşümün çekirdeği ve değer kümesi, lineer dönüşümlerin bileşkesi ve determinant konuları ile ilgili kavramların öğretiminde somutlaştırma yöntemleri ile geleneksel öğretim yönteminin karşılaştırılmasını amaçlamıştır. Çalışmanın örneklemini ikinci sınıf 86 öğrenci oluşturmaktadır. Beş haftalık bir uygulama ile devam eden çalışmanın verileri Lineer Cebir Bilgi Testi, Matematik Dersi Tutum Ölçeği, Bilimsel İşlem Beceri Testi ve zorunlu iki vize ve bir final sınavı olmak üzere başlıca dört ölçekten elde edilmiştir. Verilerin analizinde yüzde frekans, çift katlı ve bağımsız t-testi ve araştırmanın yapıldığı üniversitede o dönem kullanılmakta olan bağıl değerlendirme sistemi kullanılmıştır. Araştırmanın sonucunda, somutlaştırma yönteminin kullanıldığı deney grubundaki öğrencilerin lineer dönüşümler ve lineer dönüşümlerle ilgili kavramlarla ilgili başarı artışının, geleneksel öğretim yönteminin kullanıldığı kontrol grubundaki öğrencilerin başarı artışından daha fazla olduğu görülmüştür. Deney ve kontrol grubunda yer alan öğrencilerin matematiğe karşı tutumları arasından istatistiksel olarak önemli bir fark olmamıştır. Ancak, öğrencilerin lineer dönüşümlerle ilgili kavramları etkili ve kalıcı öğrenmelerinde geometri ile somutlaştırma yönteminin önemli bir etkisinin olduğu sonucuna varılmıştır.

Öğrencilerin alt vektör uzayında sahip oldukları kavram imajlarına ve bu imajların formal kavram tanımı ile etkileşimine odaklanılan Wawro ve ark. (2011)'in araştırmasının örneklemini 8 lisans öğrencisi oluşturmaktadır. Bu öğrenciler ile yapılan mülakatlarda onlara alt uzayın formal tanımını düşünerek R^3 'ün alt uzaylarını nasıl tanımlayabilecekleri istenmiştir. Çalışmanın teorik çatısını Tall ve Vinner (1981)'in kavram imajı ve kavram tanımı oluşturmaktadır. Yapılan analizler sonucunda alt uzay kavramı ile ilgili öğrenciler tarafından tekrarlanan kavram görüntüleri tespit edilmiştir. Bunlar geometrik obje, cebirsel obje ve bütünü parçası olarak adlandırılmıştır. Çalışmada öğrencilerin kavram imajları ve formal tanımı nasıl yorumladıkları, öğrencilerin formal tanımı bir ihtiyaç olarak tanımladığı durumlar ve öğrencilerin ifade ettiği alt uzayın nitelikleri arasındaki koordinasyona ilişkin bulgular sunulmuştur.

Yapılan bir diğer çalışma da ise Hristovitch (2001) lineer bağımsızlık kavramını anlamak amacıyla öğrenciler tarafından kullanılan anahtar nitelikteki bilişsel süreçleri tanımlamaya çalışmıştır. Kavram gelişimi hakkında teorik çerçevesini Sfard (1991, 1997) teorilerine dayandıran araştırmacılar ayrıca bu süreçte öğrencilerin anlamalarını işlemsel anlamalardan yapısal anlamaya dönüştürmede metaforlar, analogiler ve sembollerin rolünü tanımlamaya çalışmıştır. Çalışmanın örneklemini lineer cebir dersine kayıtlı 60 lisans öğrencisi oluşturmakta ve gönüllü olan 12 öğrenci ile de mülakat yapılmıştır. Veri toplama aracı olarak sınıf gözlemlerinden elde ettiği alan notları, iki quiz ve mülakatları kullanılan araştırmada öğrencilerin çok az bir kısmı lineer cebir kavramlarıyla ilgili yapısal anlamalara sahip olduğunu sonucuna ulaşılmıştır. Bununla birlikte Hristovitch öğrencilerin lineer bağımsızlık kavramı ile ilgili anlamalarının işlemsel anlama ile başladığını ve Sfard'ın teorisi yardımı ile yapısal anlamaya doğru gelişebileceği sonucuna ulaşmıştır.

Konyalıoğlu (2003)'da araştırmasında, öğrencilerin vektör uzayları ile ilgili başarılarına işlemsel öğrenmelerine, kavramsal öğrenmelerine ve matematiğe karşı tutumlarına görselleştirme yaklaşımının etkisini geleneksel ders anlatım yöntemi ile karşılaştırmıştır. Çalışmanın örneklemini araştırmacının kendi dersinde öğrenim gören farklı şubedeki İlköğretim Matematik bölümünde bulunan 103 ikinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Şubelerden biri, görselleştirme yaklaşımlarının kullanılacağı deney grubu diğer şube ise normal öğretim yöntemlerinin kullanılacağı kontrol grubu olarak belirlenmiş ve uygulama beş haftalık bir sürede gerçekleştirilerek araştırmanın verileri lineer cebri bilgi testi, matematik tutum ölçeği ve bilimsel işlem beceri testi olmak üzere üç ölçekten elde edilmiştir. Araştırma sonucunda vektör uzayları konusundaki kavramların öğrenciler tarafından anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımının normal öğretim yöntemlerinden daha başarılı olduğu görülmüştür. Ayrıca deney grubundaki öğrencilerin matematiğe karşı tutumlarının ve kavramsal öğrenmelerinin kontrol grubundaki öğrencilere göre istatistiksel olarak daha yüksek olduğu gösterilmiştir.

Çelik (2015)'de yapmış olduğu araştırmasında lisans öğrencilerinin düşünme biçimlerini soyut dildeki lineer bağımlı-bağımsız vektörlerle ilgili problemleri çözerken araştırmaya çalışmıştır. Ayrıca yapılan araştırmasında öğrencilerin lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramları hakkında anlamalarına odaklanılmıştır. Araştırmanın örneklemini 186 matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Öğrencilerin düşünme biçimlerini tanımlamak için öğrencilerin dört soruya verdikleri yanıtlar ve sekiz öğrenci ile yapılan mülakatlardan elde edilen veriler kullanılmıştır. Sierpinska'nın (2000)

düşünme biçimleri çatısının kullanıldığı bu araştırmada verilerin analizinde nitel yaklaşım kullanılmıştır. İçerik analizi sonucunda 12 tanesi aritmetik, 2 tanesi geometrik ve 1 tanesi yapısal olmak üzere 15 tane düşünme biçimi ortaya çıkarılmıştır. Aritmetik modda öğrencilerin çoğunluğu soyut moddaki problemlere ilişkin hatalar içeren uygun olmayan çözümler sunmuştur. Geometrik düşünme modundaki cevaplar (%10) matematiksel genelleme ile ilgili zorlukların göstergesi olarak ortaya çıkmış ayrıca, analitik-yapısal düşünme biçimindeki cevap oranı çok düşük olarak belirlenmiştir. Verilen problemler lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramlarını tanımlayarak kolayca çözülebilecek olmasına rağmen, öğrenciler problemlerin çözümünde çoğunlukla aritmetik ve cebirsel işlemleri kullanmışlardır.

2.1.3. Literatür taramasının sonucu

Yapılan literatür taramaları doğrultusunda lineer cebir öğretimi, özellikle vektör uzayları, lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe, taban ve alt uzay gibi temel kavramların öğretiminde öğrencilerin düşünme biçimleri, kavramsal-anlamsal yapıları ve teknolojik destekli öğrenme ortamlarının etkisi ön plana çıkmaktadır. Araştırmalar, öğrencilerin genellikle işlemsel yaklaşımlara yöneldiğini ve soyut kavramları anlamlandırmada güçlük yaşadıklarını ortaya koymaktadır (Hristovitch, 2001; Çelik, 2015). Bu bağlamda; dinamik görsel temsiller, GeoGebra destekli uygulamalar ve somutlaştırma yöntemlerinin öğrencilerin kavramsal anlayışlarını geliştirmede önemli rol oynadığı görülmüştür (Soylu, 2005; Tabaghi ve Sinclair, 2013; Kan, 2014). Ayrıca, görselleştirme temelli öğretim yaklaşımlarının, öğrencilerin matematiğe karşı tutumlarını olumlu yönde etkilediği ve analitik-yapısal düşünme biçimlerinin gelişimini desteklediği tespit edilmiştir (Konyalıoğlu, 2003; Açıkıldız, 2019). Bununla birlikte, yalnızca teknolojik araçların kullanımıyla kavramsal öğrenmenin kendiliğinden oluşmadığı, öğrenme ortamının pedagojik olarak yapılandırılması gerektiği vurgulanmaktadır (Dikovic, 2007; Donevska ve Todorova, 2018). Literatürdeki çeşitli araştırmalar, öğrencilerin lineer cebir kavramlarına yönelik bilişsel gelişimlerinin, kullanılan öğretim yöntemleri, öğrenme ortamları ve temsil biçimleri ile doğrudan ilişkili olduğunu göstermektedir. Bu bağlamda, öğrencilerin düşünme biçimlerine duyarlı, görsel ve sembolik temsilleri dengeli kullanan, teknolojik araçları pedagojik yaklaşımlarla bütünleştiren öğretim ortamlarının geliştirilmesi gerekliliği dikkat çekmektedir.



3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, araştırmanın modeli, örnekleme, veri toplama aracı, verilerin toplanması ve verilerin analizi gibi araştırmanın temel bileşenlerine ilişkin bilgiler sunulacaktır. Her bir alt başlık, araştırmanın amaçlarına ulaşmasını sağlayacak yöntem ve süreçleri detaylı bir şekilde açıklamaktadır.

3.1. Materyal

3.1.1. Veri toplama araçları

Bu çalışmada üç boyutlu uzayda farklı sayıda vektörlerden oluşan kümelerin lineer bağımlılığı-lineer bağımsızlığı, gerdiği uzayı, bazı ve boyutu kavramlarına yönelik olarak GeoGebra dinamik matematik yazılımının da kullanıldığı bir öğrenme ortamı tasarlanmıştır. Dinamik yazılımların kullanıldığı ortamlarda çalışma yaprakları geliştirilirken birçok model kullanılmıştır. Fakat bu çalışmada fen eğitiminde çok sık kullanılan bir strateji olan tahmin et-gözle-açıkla (TGA) stratejisinin kullanılmasına yönelik olarak çalışma yapraklarının hazırlanmasına dikkat edilmiştir. Bu strateji yapılan tahminlerin sonuçlarını göstermeyi, bu tahminlerin sebeplerini tartışmayı, gözlemleri ortaya koymayı ve sonunda gözlem ile tahmin arasındaki farklılıkları açıklamayı içerir (White ve Gunstone, 1992; Çepni ve Çil, 2009). Çepni ve Çil (2009) TGA stratejisinin tahmin aşamasında öğrencilere bir olay verilir ve öğretmen, öğrencilere bu olay hakkında sorular sorarak bu soruların tahmin edilmesini istemelidir demiştir. Bu aşamada öğrencilere tahminlerinin nedenlerini tespit için “*Neden bu şekilde bir tahminde bulundun? Bu tahmin sence doğru bir tahmin mi? Neden?*” biçiminde sorular sorulabilir (Baltacı ve Yıldız, 2018). Ardından bir diğer aşama olan gözlem aşamasında öğrencilere tahmin aşamasında verilen olay, öğrencilerin gözleyebileceği şekilde meydana getirilir ve öğrenciler gözlem yaparken elde ettikleri gözlemlerini yazarlar (Çepni ve Çil, 2009). Öğrencilerin tahminleri ile gözlemleri arasında çelişki ortaya çıkabilir. Ortaya çıkan bu tür çelişkiler, öğrencilerin anlamalarıyla ilgili ayrıntılı bilgiler elde edilmesinde yardımcı olmaktadır (Köse ve ark., 2003). Son aşama olan açıklama aşamasında ise öğrenciler, tahmin ile gözlemleri arasındaki farklılıkları ve benzerlikleri incelerler, tahminleri ve gözlemleri birbirinden farklı çıkarsa, bu farkı ortadan kaldırıcı açıklamalarda bulunurlar (Çepni ve Çil, 2009). Bu nedenle öğrencilerin kavramları yapılandırmasına yardımcı olan aşamanın açıklama aşaması olduğu söylenebilir (Baltacı ve Yıldız, 2018). Bu aşamayla öğrenciler, nesne ve olayla ilgili tahminleri ile gözlemleri arasındaki çelişkili durumu ortadan kaldıracak açıklamalar yapabilirler. Bu stratejinin kullanılabileceği konulardan

biri de lineer cebir kavramlarına (üç boyutlu uzayda farklı sayıda vektörlerden oluşan kümelerin lineer bağımlılığı-lineer bağımsızlığı, gerdiği uzayı, bazı ve boyutu) yönelik olarak oluşturulan problemler olabilir. Çünkü bu kavramlar soyut bir kavram olmasından dolayı okullarda sembolik olarak gösterilmektedir. Araştırmanın modeline özel durum çalışması modeli olarak karar verildiğinden dolayı bu tür çalışmalarda zengin ve birbirini destekleyecek veri çeşitlemesi sağlanmaya çalışıldığından birden fazla veri toplama yöntemine başvurulmuştur. Bunun için çalışmada öğrencilerin “Üç boyutlu uzayda farklı sayıda vektörlerden oluşan kümelerin lineer bağımlılığı-lineer bağımsızlığı, gerdiği uzayı, bazı ve boyutu nasıldır?” sorusuna yönelik olarak TGA stratejisinin içerisinde yer aldığı çalışma yaprakları hazırlanmıştır.

Çalışma yaprakları geliştirilirken yerli ve yabancı çeşitli lineer cebir kaynaklarından yararlanılmıştır. Bu süreçte derslerde kullanılacak olan etkinlikler için hazırlanan materyallerin öğretmen adaylarında yanlış öğrenmeler oluşturmaması ve kavram yanılgılarına düşmemeleri için geliştirilen materyaller lineer cebir dersi veren akademisyenler ile birlikte değerlendirilmiştir. Her bir derste kullanılacak etkinlikler TGA stratejisine göre tasarlanarak öğrenci merkezli öğrenme ortamları oluşturulmaya dikkat edilmiştir. Bu strateji her öğrencinin araştırma merakını artıran, konu ile ilgili beklentilere cevap veren, bilgi ve becerilerinin aktif kullanımını içeren etkinliklerden oluşmaktadır. Çalışma yapraklarında lineer cebir kavramlarına yönelik üç boyutlu uzayda farklı sayıda vektörlerden oluşan kümelerin lineer bağımlılığı-lineer bağımsızlığı, gerdiği uzayı, bazı ve boyutunu kapsayacak şekilde lineer cebir dersini veren alan uzmanlarının görüşleri doğrultusunda TGA stratejisi dikkate alınarak geliştirilmiştir. Tek vektörden oluşan bir kümenin lineer bağımlılık-bağımsızlık durumu göz önüne alınarak, sıfırdan farklı tek vektörden oluşan küme ve sıfır vektöründen oluşan küme olarak birinci ve dördüncü sorular belirlenmiştir. Sıfır vektörünü içermeyen iki vektörden oluşan bir kümenin lineer bağımlılık-bağımsızlık durumu için ikisi lineer bağımlı olup bir doğruyu gerebileceği veya ikisinin lineer bağımsız olabileceği düşünülerek ikinci sorunun a ve b şıkları belirlenmiştir. Sıfır vektörünü içermeyen üç vektörden oluşan bir kümenin lineer bağımlılık-bağımsızlık durumu göz önüne alındığında olası üç durum için üçüncü sorunun a, b ve c şıkları belirlenmiştir. Üçten fazla vektörden oluşan kümeler R^3 için lineer bağımlı olacağından dört vektörden oluşan kümelerdeki lineer bağımlılık-bağımsızlık durumunu sıfır vektörü içeren ve içermeyen şeklinde kategorize ederek beşinci ve altıncı sorular hazırlanmıştır. Bu vektörler TGA stratejisini kullanmak için öğrencilerin temel lineer cebir dersindeki tanımları kullanarak ilk bakışta lineer

bağımlılık-bağımsızlık, gerdiği uzay, baz ve boyut konusunda ilk etapta tahmin edilebilecek zorlukta soruların hazırlanmasına dikkat edilmiş ve bu konuda uzman görüşü alınmıştır.

Dinamik yazılımların kullanıldığı ortamlarda çalışma yaprakları geliştirilirken pek çok model kullanılmaktadır. Bu çalışmada ise bu modellerden TGA stratejisi esas alınmıştır. Çalışma yapraklarında GeoGebra dinamik matematik yazılımını kullanmayı gerektiren yönergelerle öğrencilerin yazılımı usta bir şekilde kullanmaları amaç edinilmemiştir. Burada amaç öğrencilerin hedeflenen bilgiye ulaşmada yazılımın bir araç olarak kullanılmasıdır. Çalışma yapraklarında öğrencilerin oluşturmada zorluk çektikleri geometrik yapıların gerekli kısımları GeoGebra yazılımında şablon olarak hazırlanarak öğrencilerin bu güçlüğü çekmeleri engellenmiş olup öğrencilerin ilgili geometrik yapılara bilgisayarlarındaki şablonlardan erişimleri sağlanmıştır. Geliştirilen bu çalışma yapraklarında öğretmen adaylarının çalışma yaprakları hakkında görüşleri alınmıştır. Bu görüşler doğrultusunda anlaşılmayan ifadeler değiştirilerek çalışma yaprakları son halini almıştır. Bu şekilde hazırlanan çalışma yaprakları değerlendirilerek üzerinde gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Lineer cebir kavramı ile ilgili 9 çalışma yaprağı esas çalışmada kullanılmıştır. Bu çalışma yaprakları başlangıçta en fazla üç vektörden oluşan kümelerle sınırlıyken, alanında uzman öğretim üyelerinin görüşleri doğrultusunda geliştirilmiş ve üç boyutlu uzayda üçten fazla vektör içeren kümelere ilişkin lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarını içeren sorular da eklenmiştir. Böylece çalışma yaprakları 6 sorudan oluşmakta ve bazı sorularda alt maddeler bulunmaktadır. Tüm verilerin toplanması 6 hafta sürmüştür. Öğretmen adaylarına üç boyutlu uzayda farklı sayıda vektörden oluşan kümelerin lineer bağımlılığı-bağımsızlığı, gerdiği uzayı, bazını ve boyutunu önce tahmin etmeleri, sonra bu tahminlerini matematiksel olarak açıklamaları, bu soruları GeoGebra ekranında oluşturup gözlem yapmaları ve gözlemleri neticesinde tahminleri veya matematiksel açıklamalarını GeoGebra ekranındaki gözlemleri ile karşılaştırmaları istenmiştir. Üç boyutlu uzayda lineer bağımlı ve lineer bağımsız vektörlerin tüm olası durumları dikkate alınarak, çalışma yapraklarında yer alan vektör kümeleri şu şekilde yapılandırılmıştır:

- Birinci soruda, üç boyutlu uzayda sıfırdan farklı tek bir vektörden oluşan bir küme,
- İkinci sorunun birinci şıkkında, lineer bağımsız iki vektörden oluşan bir küme,
- İkinci sorunun ikinci şıkkında, lineer bağımlı iki vektörden oluşan bir küme,
- Üçüncü sorunun birinci şıkkında, lineer bağımsız üç vektörden oluşan bir küme,

- Üçüncü sorunun ikinci şıkkında, yalnızca ikisi lineer bağımsız olan üç vektörden oluşan bir küme,
- Üçüncü sorunun üçüncü şıkkında, yalnızca biri lineer bağımsız olan üç vektörden oluşan bir küme,
- Dördüncü soruda, yalnızca sıfır vektöründen oluşan bir küme,
- Beşinci soruda, dört vektörden oluşan ve yalnızca ikisi lineer bağımsız olan bir küme,
- Altıncı soruda ise, sıfır vektörünü içeren ve toplamda dört vektörden oluşan bir küme

öğretmen adaylarına sunulmuştur. Örneğin ÖA2 öğretmen adayının birinci çalışma yaprağından bir kesit aşağıdaki gibi verilmiştir. Bu çalışma yaprağında görüldüğü gibi ÖA2 verilen uzaydaki vektörlerin tahmin etmiş gözlemlemiş ve sonrasında tahminleri ile gözlemlerini karşılaştırma imkânı bulabilmiştir. Ve buna yönelik olarak düşüncelerini de çalışma yaprağında görüldüğü gibi yazmıştır.

$A = \{ (1, 2, 4) \}$ kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümenin gerdiği uzayın geometrik olarak ne belirttiğini bulunuz.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

Tahmin: Bu problemin lineer bağımlı olduğunu düşünüyorum. Üç boyutlu uzayı gerektirir. Boyutu 3'tür. Baza hakkında tahminim yok.

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

Yukarıda verilen küme ile oluşturulan vektör elemanları birinin kati şeklinde yazılabildiği için lineer bağımlıdır. Bu kümenin elemanları vektör şeklinde 0'a eşitlenebilir.

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

Oluşturduğumda uzayı gerdiğini gözlemledim. Ancak bunun bir vektör şeklinde olduğunu düşünüyordum gözlemlediğim üzere doğru şekilde uzaydığını gözlemledim.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Farklılık yok. Yaptığım tahminler ile gözlemlerim eşleşti.

Şekil 3.1. ÖA2 öğretmen adayının birinci soruya yönelik çalışma yaprağından bir kesit

Çalışma yaprakları, öğretmen adaylarına uygulandıktan sonra süreç boyunca öğrencilerle çeşitli mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Bu mülakatlarda, öğrencilerin çalışma yapraklarında yer alan kavramları ne derece anladıkları, karşılaştıkları zorluklar ve bu zorlukların aşılmasında çalışma yapraklarının ne ölçüde katkı sağladığı gibi sorular yöneltmiştir. Süreç boyunca araştırmacı, veri toplama amacıyla hem alan notları tutmuş hem de video kayıtları alarak veri çeşitliliğini artırmıştır. Ayrıca, öğrencilerin çalışma yapraklarına yazdıkları ifadeler analiz sürecinde kullanılmak üzere toplanmış ve mülakat verileriyle birlikte değerlendirilmiştir. Bu süreçte, öğrencilerin GeoGebra yazılımında oluşturdukları ekran görüntüleri de elde edilen bulguları destekleyici veri olarak sunulmuştur.

3.2. Metot

3.2.1. Araştırmanın modeli

Yapılan bu çalışmada özel durum çalışması modeli kullanılmıştır. Özel durum çalışmaları araştırmacılara bir problemin özel bir durumu üzerine yoğunlaşma fırsatı verir ve bu çalışmalarda farklı veri toplama teknikleri bir arada kullanılabilir (Cohen ve Manion, 1994; Wellington, 2000; Çepni, 2007). Yıldırım ve Şimşek (1999) bu yöntemin içinde bulunduğu çevreyle sınırlarının kesin sınırlarla belirli olmadığı, güncel bir olguyu kendi gerçek yaşam çevresi içinde ele alan ve birden fazla kanıt veya veri kaynağının mevcut olduğu durumlarda kullanılan, bir araştırma yöntemi olarak ifade etmişlerdir. Nitel araştırma yaklaşımlarının sahip olduğu özellikleri taşıyan bir araştırma yöntemi olarak ele alınan özel durum çalışması yönteminin kullanılmasının en önemli özelliği araştırmacıya özel bir konu üzerinde araştırmacı ya yoğunlaşma imkânı tanınması ve fırsatı vermesi olarak ifade edebiliriz. Çepni (2007) özel durum çalışması yöntemi ile yapılan araştırmalardan araştırmacının ince ayrıntıları, değişkenlerin karşılıklı ilişkilerini ve sebep-sonuç ilişkilerini açıklamasına yardımcı olabileceğini vurgulamıştır. Yapılan bu araştırmada belli bir grubun belirlenmiş bir konuda derinlemesine irdelenmesi ve incelenmesi esas olduğundan dolayı bu araştırmada da takip edilecek yöntemin özel durum çalışması yöntemi olduğuna karar verilmiştir. Bir diğer ifade ile bu desenin seçilme nedeni problem olarak seçilen özel bir durumun sonuçlarını ortaya çıkarmaktır. Çalışmada problem olarak seçilen durum, derinlemesine araştırılacak ve problem durumunu etkileyen faktörler bütüncül yaklaşımla detaylı incelenerek ilgili duruma nasıl etki ettikleri üzerine araştırma gerçekleştirilecektir.

3.2.2. Araştırmanın örneklemi

Araştırmanın çalışma grubunu, 2024-2025 Eğitim-Öğretim yılında İç Anadolu'daki bir üniversitesinin 3. sınıfındaki 3 erkek ve 7 kız olmak üzere toplamda 10 tane matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırmaya katılan 10 öğretmen adayı 2. sınıfın bahar döneminde Lineer Cebir-2 dersinde vektör uzayı, lineer bağımlılık-lineer bağımsızlık, germe, baz ve boyut konularını öğrenmişlerdir. Aynı öğretmen adayları, 2. sınıfın bahar döneminde “Bilgisayar Destekli Matematik Öğretimi” adlı seçmeli dersi alarak, bu derste GeoGebra kullanarak çeşitli matematiksel kavramlara yönelik etkinlikler gerçekleştirmiştir. Etik değerlerden ötürü öğretmen adaylarının çalışmaya gönüllü olarak katılmaları sağlanıp isimleri yerine ÖA1, ÖA2, ÖA3, ÖA4, ÖA5, ÖA6, ÖA7, ÖA8, ÖA9 ve ÖA10 şeklinde kod isimler kullanılmıştır.

3.2.3. Verilerin analizi

Araştırmada elde edilen veriler nitel veri analiz yöntemleri ile analiz edilmiştir. Verilerin analizinde öncelikle araştırmada toplanan verilerin kayıt altına alınması ile başlanmış ardından öğretmen adaylarının bilgisayar ekranında çalışma yapraklarını doldururlarken yaşadıkları, video kayıtları ile kayıt edilmiştir. Bu kayıtlar tekrar tekrar izlenerek süreç analiz edilirken araştırmacı öğrenci arasında geçen diyaloglar göz önüne alınmıştır. Öğrencilere uygulanan çalışma yapraklarının tamamı taranarak analiz sürecinde kullanılmıştır. Araştırmacının alan notları da video kayıtları ile uygunluğunun kontrol edilmesiyle birlikte bu süreçte kullanılmıştır. Toplanan ve kayıt altına alınan bu veriler kendi başlarına ve birbirinden bağımsız olarak analiz edilmemiş sürekli karşılaştırma yoluyla araştırma problemine cevap oluşturacak biçimde analiz edilmiştir. Bu şekilde çalışma yaprakları, araştırmacı ile öğrencilerin aralarında geçen diyalog ve araştırmacının alan notları bu süreçte kullanılmış ve öğrencilerin yaşadıkları derinlemesine incelenmiştir. Araştırmada toplanan veriler analiz edilmeden önce elde edilen verilerin dökümü ve kontrolü yapılmıştır. Güvenirliği sağlamak için birbirinden bağımsız olarak yapılan analizlerin bir araya getirilerek araştırmacılar tarafından ayrı ayrı tartışılmasıyla verilerin analizine son hali verilmiştir. Bu şekilde yapılan veri analizinin güvenilirliği $[Görüş\ birliği / (Görüş\ birliği + Görüş\ ayrılığı) \times 100]$ formülü kullanılarak hesaplanmıştır (Miles ve Huberman, 1994). Bu süreçte Miles ve Huberman (1994)'ın formülü kullanılarak yapılan hesaplamalarda uyum oranı 0.84 olarak belirlenmiştir. Bu bağlamda veriler, nitel veri analizi yöntemleri kullanılarak analiz edilmiştir. Diğer taraftan bu süreçte çalışma yaprakları öğretmen adayları tarafından tamamlandıktan sonra

toplanarak veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Araştırmacı süreç içerisinde gruplar arasında dolaşarak TGA stratejisinin basamaklarını uygulamaya çalışmıştır. Bu süreçte araştırmacı verilen sorulara öğrencilerin tahmin etmelerini, sonrasında GeoGebra ekranında gözlemlmelerini ve bu gözlemlerini tahminleri ile birlikte karşılaştırmalarını sağlamaya çalışmıştır.





4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, matematik öğretmen adaylarının temel lineer cebir kavramlarını öğrenme süreçlerinin analizlerine ait bulgular sunulmuş ve tartışılmıştır.

4.1. Bulgular

Tablo 4.1. Öğretmen adaylarının birinci soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA1	T: Verilen vektörün lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Doğruyu gereceği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Yanlış.	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Verilen vektörün lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutu 3 olarak gözlemlemiş.
	K: Verilen vektörün lineer bağımlı olduğunu tahmin etmişti fakat lineer bağımsız olarak gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA2	T: Verilen vektörün lineer bağımlı olarak tahmin etmiş.	T: Üç boyutlu uzayı gerer diye tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Uzayı gerdiğini tahmin edip doğruyu gerdiğini gözlemlemesine rağmen tahmini ile gözleminin arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA3	T: Verilen vektörün lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Bazının (1,2,4) olduğunu tahmin etmiş.	T: Boyutu 1 olarak tahmin etmiş.
	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Gerdiği uzayı geometrik olarak tahmin edememişken GeoGebra ile doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.

Tablo 4.1. (devam) Öğretmen adaylarının birinci soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA4	T: Verilen vektörün lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gereceği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Bazını (x,2x,4x) olarak tahmin etmiş.	T: Boyutunu 1 olarak tahmin etmiş.
	M: Yanlış.	M: Doğru.	M: Doğru.	M: Doğru.
	G: Verilen vektörün lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Uzayı gerdiğini tahmin edip doğruyu gerdiğini gözlemlemesine rağmen tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA5	T: Verilen vektörün lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Vektör olduğunu ve uzayı gereceğini tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Yanlış.	M: Yanlış.
	G: Gözlem yok.	G: Doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Gerdiği uzayın vektör değil doğru olduğunu gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA6	T: Verilen vektörün lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Üç boyutlu uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Bazının (1,2), (2,4) vektörleri olduğunu tahmin etmiş.	T: Boyutunu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Yanlış.
	G: Verilen vektörün lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.	G: Doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Tahmin kısmında vektör oluşturduğuna dair herhangi bir açıklamada bulunmamasına rağmen “Tahminimde vektör görmüşken GeoGebra da doğruyu gördüm.” şeklinde açıklama yapmıştır.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA7	T: Verilen vektörün lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Üç boyutlu cisim belirtir şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Bazını 3 olarak tahmin etmiş.	T: Boyutunu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Yanlış.
	G: Verilen vektörün lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Üç boyutlu uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Bazını 3 olarak gözlemlemiş.	G: Boyutunu 3 olarak gözlemlemiş.
	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.

Tablo 4.1. (devam) Öğretmen adaylarının birinci soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık- Bağımsızlık			Germe			Baz			Boyut		
ÖA8	T: Verilen vektörün lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.			T: Uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.			T: Tahmin yok.			T: Boyutunu 3 olarak tahmin etmiş.		
	M: Açıklama yok.			M: Açıklama yok.			M: Açıklama yok.			M: Açıklama yok.		
	G: Gözlem yok.			G: Uzayı gerdiğini gözlemlemiş.			G: Gözlem yok.			G: Gözlem yok.		
	K: Karşılaştırma yok.			K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.			K: Karşılaştırma yok.			K: Karşılaştırma yok.		
ÖA9	T: Verilen vektörün lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.			T: Uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.			T: Tahmin yok.			T: Boyutunu 2 olarak tahmin etmiş.		
	M: Yanlış.			M: Açıklama yok.			M: Açıklama yok.			M: Açıklama yok.		
	G: Gözlem yok.			G: Doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.			G: Gözlem yok.			G: Gözlem yok.		
	K: Karşılaştırma yok.			K: Karşılaştırma yok.			K: Karşılaştırma yok.			K: Karşılaştırma yok.		
ÖA10	T: Verilen vektörün lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.			T: Üç boyutlu uzayı gerdiğini tahmin etmiş.			T: Tahmin yok.			T: Boyutunu 3 olarak tahmin etmiş.		
	M: Yanlış.			M: Açıklama yok.			M: Yanlış.			M: Yanlış.		
	G: Verilen vektörün lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.			G: Doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.			G: Gözlem yok.			G: Boyutunun 1 olduğunu gözlemlemiş.		
	K: Verilen vektörün lineer bağımlı olduğunu tahmin edip lineer bağımsız olduğunu görmüş.			K: 3 boyutlu uzay olduğunu tahmin edip, GeoGebra etkinliğinde bir boyutlu doğru oluşturduğunu gözlemlemiş.			K: Karşılaştırma yok.			K: Boyutun 1 olduğunu farketmiş.		

Tablo 4.2. Birinciye soruya yönelik frekans tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık			Germe			Baz			Boyut		
	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B
T	5	5	0	1	8	1	2	2	6	2	7	1
M	0	8	2	2	2	6	1	4	5	1	4	5
G	4	1	5	8	2	0	0	1	9	1	1	8

Öğretmen adaylarının lineer bağımlılık-bağımsızlık konusundaki cevapları incelendiğinde; 5 aday doğru, 5 aday yanlış tahminde bulunmuştur. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 8 aday yanlış işlem yapmış, 2 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Doğru işlem yapabilen aday yoktur. Gözlemleri incelendiğinde; 4 aday doğru, 1 aday yanlış gözlem yaparken 5 aday gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 5 adaydan; 3'ü yanlış matematiksel işlem yaparken, 2 tanesi işlem yapamamıştır.

Yanlış tahminde bulunan 5 adayın tamamı ise yanlış işlem yapmıştır. Doğru tahminde bulunan 5 adaydan; 2 tanesi doğru gözlem yapmış, 3 tanesi gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 5 adaydan; 2 tanesi doğru, 1 tanesi yanlış gözlem yaparken geri kalan 2 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının germe konusundaki cevapları incelendiğinde; 1 aday doğru, 8 aday yanlış tahminde bulunurken 1 aday tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 2 aday doğru, 2 aday yanlış işlem yapmıştır. Geri kalan 6 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde ise; 8 aday doğru gözlem yaparken, 2 aday yanlış gözlem yapmıştır. Gözlem yapamayan aday yoktur. Doğru tahminde bulunan 1 aday matematiksel işlemi de doğru yapmıştır. Yanlış tahminde bulunan 8 adaydan; 1'i doğru, 2'si yanlış işlem yaparken 5 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan aday işlem de yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan aday doğru gözlem yapmıştır. Yanlış tahminde bulunan 8 adaydan; 6'sı doğru, 2'si yanlış gözlem yapmıştır. Tahminde bulunamayan aday gözlemi doğru yapmıştır.

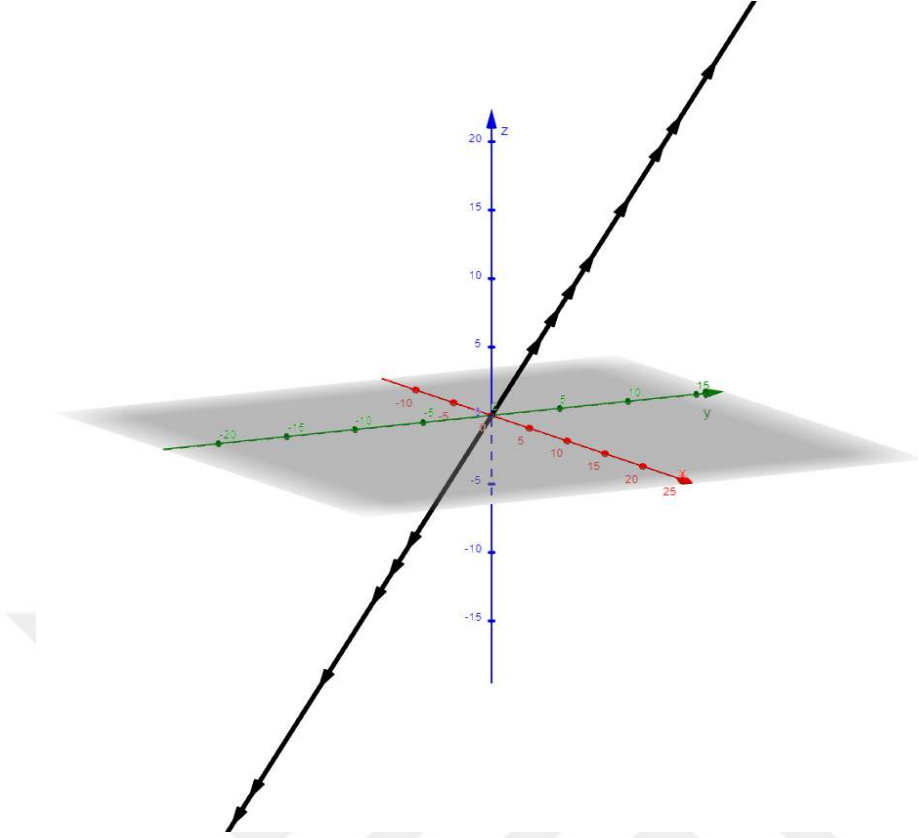
Öğretmen adaylarının baz konusundaki cevapları incelendiğinde; 2 aday doğru, 2 aday yanlış tahminde bulunurken 6 aday herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 1 aday doğru, 4 aday yanlış işlem yapmıştır. 5 aday ise işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 1 aday yanlış gözlem yaparken 9 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır. Doğru gözlemde bulunan aday yoktur. Doğru tahminde bulunan 2 adaydan; 1 tanesi doğru matematiksel işlem yaparken, 1 aday işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 2 adayın tamamı yanlış işlem yapmıştır. Tahminde bulunamayan 6 adaydan; 2'si yanlış işlem yaparken 4 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 2 adayın 2'si de gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 2 adaydan; 1'i yanlış gözlem yapmış, 1'i gözlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 6 adayın tamamı gözlem de yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının boyut konusundaki cevapları incelendiğinde; 2 aday doğru, 7 aday yanlış tahminde bulunmuş, 1 aday tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 1 aday doğru, 4 aday yanlış işlem yaparken, 5 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 1 aday doğru, 1 aday yanlış gözlem yapmış, 8 aday gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 2 adaydan; 1'i doğru matematiksel işlem yapmış, 1'i işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 7 adaydan; 3 aday yanlış işlem yaparken, 4 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan aday yanlış işlem yapmıştır. Doğru tahminde bulunan 2 adayın 2'si de gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 7 adaydan; 1 tanesi doğru, 1 tanesi yanlış

Tek vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA5 öğretmen adayının çalışma yaprağı incelendiğinde; verilen vektörün lineer bağımlı olduğu ve gerdiği uzayın vektör olacağı yönünde tahminde bulunurken, baz ve boyut kavramları hakkında herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında vektörü oluşturan bileşenlerin birbirinin katı olmasından dolayı verilen vektörün lineer bağımlı olduğunu düşünmüştür. Baz ve boyut kavramlarını da bu doğrultuda açıklamıştır. Diğer yandan verilen vektörün gerdiği uzay hakkında açıklamada bulunamadığı görülmektedir.

forkullik gildir vektor dagil dagu alustirðinguna
göndum

Tek vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA5 öğretmen adayının GeoGebra ekranında yapmış olduğu gözlemler aşağıda verilmiştir. ÖA5 öğretmen adayı vektörlerin doğru oluşturduğunu gözlemlemiş ve gerdiği uzayın bir vektör değil doğru olacağını fark etmiştir.



Şekil 4.2. ÖA5 Öğretmen adayının birinci soruya yönelik GeoGebra ekranında gözlemleri

Diğer taraftan tek vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA7 öğretmen adayının çalışma kâğıdına yazmış olduğu ifadeler incelendiğinde; vektörlerin lineer bağımsız olduğunu, 3 boyutlu uzayı gerdiğini ve cisim belirteceğini, bazının ise 3 olacağı yönünde tahminde bulunmuştur. Matematiksel işlemlerine bakıldığında, verilen vektörü lineer bağımsız üç vektörün toplamı olarak ifade ederek bu vektörtörlerin lineer bağımsız olduğunu, gerdiği uzayın yine bu üç vektörün gerdiği uzay olduğunu ifade etmiştir. Bazının 3 boyutunun da 3 olduğunu belirtmiştir.

$A = \{ (1, 2, 4) \}$ kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümenin gerdiği uzayın geometrik olarak ne belirttiğini bulunuz.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

Gerdiği uzay 2 boyutlu, lineer bağımsızdır. Birbirini etkilemeyen vektörlerin oluşturduğu bir kümedir. 4. boyutla bir sistem belirtir. Bazı 2'adır.

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

$f(1, 2, 4) = ((1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 4))$ $cu_1 + bu_2 + cu_3$ lineer bağımsızdır.

$f(u_1, u_2, u_3)$ Bazı: 2 Boyut: 3

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

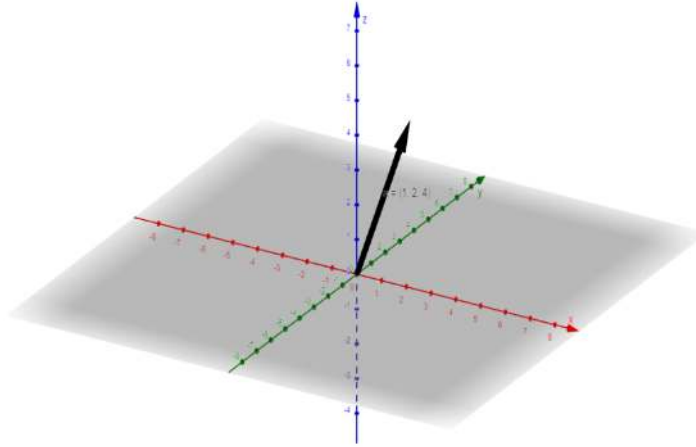
4. boyutlu uzay gerdiğini gözlemleyebiliyorum. Lineer bağımsız olduğunu gözlemleyebiliyorum. Bazı 2'adır. Boyut 3'tür.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Herkes doğru gözlemledim. Sadece görselleştirmeden anlayabiliyorum.

Şekil 4.3. ÖA7 Öğretmen adayının birinci soruya yönelik çalışma yaprağından bir kesit

Tek vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA7 öğretmen adayının GeoGebra ekranında yapmış olduğu gözlemler aşağıda verilmiştir. ÖA7 öğretmen adayının GeoGebra uygulamasındaki gözlemlerine bakıldığında tek bir vektörün görselini elde etmesine rağmen; vektörlerin lineer bağımsız olduğunu, uzayı gerdiğini, bazının ve boyutunun 3 olduğunu gözlemlediğini söylemiştir.



Şekil 4.4. ÖA7 Öğretmen adayının birinci soruya yönelik GeoGebra ekranında gözlemleri

Tablo 4.3. Öğretmen adaylarının ikinci sorunun birinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA1	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Gerdiği uzayın doğru olduğunu tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Boyutunun 3 olduğunu tahmin edip 2 olduğunu söylemiştir.
ÖA2	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Gerdiği uzayın düzlem olduğunu tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutunu 2 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Doğru.	M: Doğru.
	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA3	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Gerdiği uzayın düzlem olabileceğini söylemiş.	T: Bazını 2 olarak tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.
	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Vektörlerin düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Düzlemi gerdiği yönünde tahminde bulunup GeoGebra sayesinde tahmininin doğru olduğunu gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.

Tablo 4.3. (devam) Öğretmen adaylarının ikinci sorunun birinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA4	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: R^2 uzayını gerdiği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutunu 2 olarak tahmin etmiş.
	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Yanlış.
	G: Gözlem yok.	G: İki çakışık doğru oluştuğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözleminin birbirini desteklediğini düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA5	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: R^3 uzayını gerdiği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Doğru.	M: Doğru.
	G: Gözlem yok.	G: R^2 uzayını gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: R^3 uzayını gerdiği yönünde tahminde bulunup GeoGebra ile R^2 uzayını gerdiğini gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA6	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Üç boyutlu uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutunu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Doğru.	M: Doğru.
	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutu 2 olarak gözlemlemiş.
	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Üç boyutlu uzayı gerdiği yönünde tahminde bulunup GeoGebra ile düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA7	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Gerdiği uzayı küre olarak tahmin etmiş.	T: Bazını 3 olarak tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA8	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutunu 4 olarak tahmin etmiş.
	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.

Tablo 4.3. (devam) Öğretmen adaylarının ikinci sorunun birinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA9	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Düzlemi gerdiği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutunu 2 olarak tahmin etmiş.
	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Gerdiği uzayın düzlem olduğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Boyut konusunda GeoGebra ile herhangi bir gözlem yapamadığını söylemiş.
ÖA10	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Yanlış.	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Gerdiği uzayın düzlem olduğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutunun 2 olduğunu gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Gerdiği uzay konusunda tahminde bulunamazken GeoGebra ile düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Boyut konusunda tahminde bulunamazken GeoGebra ile boyutun 2 olduğunu gözlemlemiş.

Tablo 4.4. İkinci sorunun a maddesine yönelik frekans tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık			Germe			Baz			Boyut		
	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B
T	10	0	0	4	5	1	0	2	8	3	3	4
M	5	4	1	2	3	5	3	2	5	3	1	6
G	6	0	4	7	3	0	0	0	10	2	0	8

Öğretmen adaylarının lineer bağımlılık-bağımsızlık konusundaki cevapları incelendiğinde; öğretmen adaylarının tamamı doğru tahminde bulunmuştur. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 5 aday doğru, 4 aday yanlış işlem yaparken 1 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 6 aday doğru gözlem yaparken, 4 aday gözlem yapamamıştır. Yanlış gözlemde bulunan aday yoktur. Doğru tahminde bulunan 10 adaydan; 5 tanesi doğru, 4 tanesi yanlış matematiksel işlem yaparken geri kalan 1 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 10 adaydan; 6 aday doğru gözlem yaparken, 4 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının germe konusundaki cevapları incelendiğinde; 4 aday doğru, 5 aday yanlış tahminde bulunmuştur. 1 aday tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 2 aday doğru, 3 aday yanlış işlem yaparken 5 aday herhangi bir

işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 7 aday doğru, 3 aday yanlış gözlem yapmıştır. Gözlem yapamayan aday yoktur. Germe konusunda doğru tahminde bulunan 4 adaydan; 2'si yanlış matematiksel işlem yapmış 2'si ise herhangi bir işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 5 adaydan; 1'i doğru, 1'i yanlış işlem yaparken, 3 aday işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 1 aday matematiksel işlemi doğru yapmıştır. Doğru tahminde bulunan 4 adaydan; 3'ü doğru gözlem yapmış, 1'i yanlış gözlem yapmıştır. Yanlış tahminde bulunan 5 adaydan; 3'ü doğru, 2'si yanlış gözlem yapmıştır. Tahminde bulunamayan aday gözlemi doğru yapmıştır.

Öğretmen adaylarının baz konusundaki cevapları incelendiğinde; 2 aday yanlış tahminde bulunurken 8 aday herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Doğru tahminde bulunabilen aday yoktur. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 3 aday doğru, 2 aday yanlış işlem yapmıştır. 5 aday işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde 10 adayın hiçbiri gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 2 adaydan; 1'i yanlış matematiksel işlem yapmış, 1'i işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 8 adaydan; 3'ü doğru, 1'i yanlış işlem yaparken, 4 aday matematiksel işlem de yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 2 adayın ve tahminde bulunamayan 8 adayın tamamı herhangi bir gözlemde bulunamamıştır.

Öğretmen adaylarının boyut konusundaki cevapları incelendiğinde; 3 aday doğru, 3 aday yanlış tahminde bulunurken, 4 aday herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 3 aday doğru, 1 aday yanlış işlem yapmıştır. Geriye kalan 6 aday işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 2 aday doğru gözlem yaparken, 8 aday gözlem de bulunamamıştır. Doğru tahminde bulunan 3 adaydan; 1'i doğru, 1'i yanlış matematiksel işlem yapmıştır. Geriye kalan 1 aday işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 3 adaydan; 1 tanesi doğru işlem yaparken, 2 tanesi işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 4 adaydan; 1 tanesi doğru işlem yaparken 3 tanesi herhangi bir matematiksel işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 3 adayın 3'ü de gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 3 adaydan; 1 tanesi doğru gözlem yaparken 2 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 4 adaydan; 1 tanesi doğru gözlem yaparken, 3 tanesi gözlem de yapamamıştır.

Lineer bağımsız iki vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA2 öğretmen adayının çalışma kâğıdına yazmış olduğu ifadeler aşağıda verilmiştir. ÖA2 öğretmen adayının çalışma yaprağı incelendiğinde; vektörlerin lineer bağımsız olduğunu, gerdiği uzayın düzlem belirttiğini ve boyutunun 2

olduğunu tahmin etmiştir. Bazı hakkında tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; lineer bağımlılık-bağımsızlık, baz ve boyut kavramlarını doğru açıkladığı ancak vektörlerin gerdiği yer konusunda işlem yapamadığı görülmektedir.

a) $A = \{(1, 2, 4), (1, 2, -4)\}$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümelerin gerdiği uzayların geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

Tahminim: Lineer bağımsız olduğunu düşünüyorum uzayda düzlem belirttiğini düşünüyorum. Bazı hakkında tahminim yok. Boyutunun 2 olduğunu tahmin ediyorum.

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

Lineer bağımsızlığını anlayabilmek için 0 vektörüne eşitlene yapmalıyız. $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$ olarak şekilde eşitlene yaparız. $a_1(1, 2, 4) + a_2(1, 2, -4) = 0$ $(a_1 + a_2, 2a_1 + 2a_2, 4a_1 - 4a_2) = (0, 0, 0)$ olursa $a_1 + a_2 = 0$, $2a_1 + 2a_2 = 0$, $4a_1 - 4a_2 = 0$ olur. $a_1 = a_2 = 0$ dir. yani lineer bağımsızdır. $(a, b, c) = (a_1v_1 + a_2v_2)$ $(a_1 + a_2, 2a_1 + 2a_2, 4a_1 - 4a_2) = (a, b, c)$ $a_1 + a_2 = a$, $2a_1 + 2a_2 = b$, $4a_1 - 4a_2 = c$ $a_1 + a_2 = a$, $a_1 + a_2 = b/2$, $a_1 - a_2 = c/4$ $a_1 = a + c/8$, $a_2 = a - c/8$ olduğundan gerer. Bazı $\{(1, 2, 4), (1, 2, -4)\}$ olur ve Boyutu 2'dir.

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

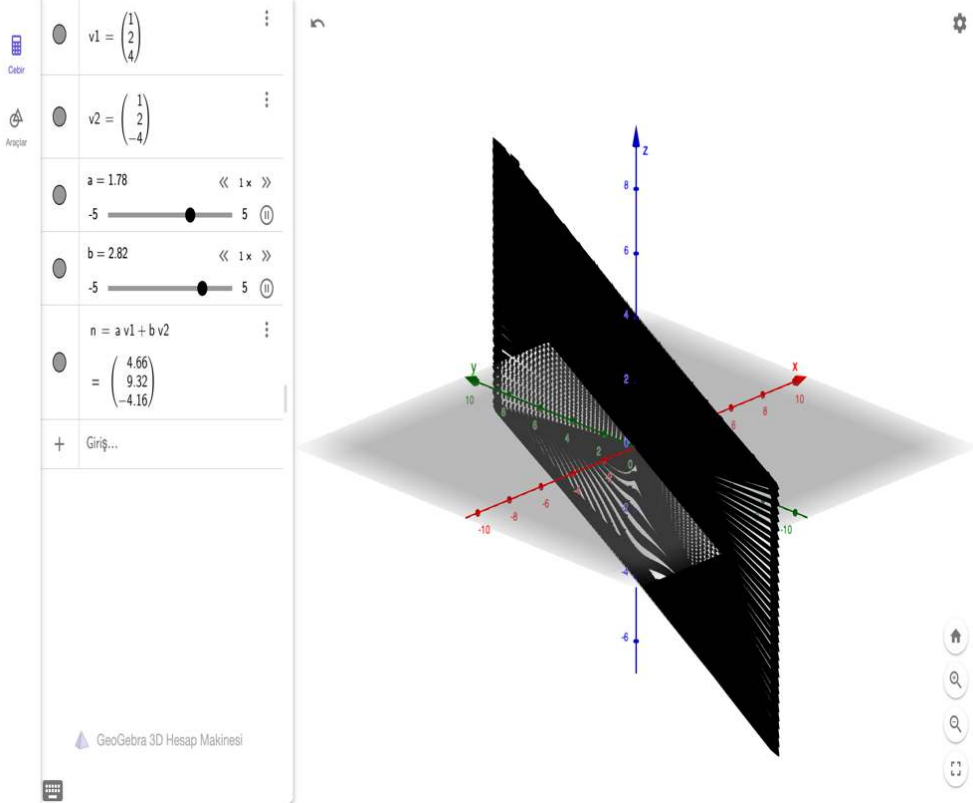
GeoGebra oluşturdum. Oluşturduğum vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemledim. Oluşturduğum vektörlerin 3D grafikte bir düzlem oluşturduğunu ve bu düzlemi gerdiğini gözlemledim.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Tahminim ile gözlemlerim arasında bir farklılık göremedim.

Şekil 4.5. ÖA2 Öğretmen adayının ikinci sorunun birinci problemine yönelik çalışma yaprağından bir kesit

Lineer bağımsız iki vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA2 öğretmen adayının GeoGebra ekranında yapmış olduğu gözlemler aşağıda verilmiştir. ÖA2 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri incelendiğinde; vektörlerin lineer bağımsız olduğunu ve düzlemi gerdiğini gözlemlemiştir. Baz ve boyut kavramlarında herhangi bir gözlem yapamamıştır.



Şekil 4.6. ÖA2 Öğretmen adayının ikinci sorunun birinci problemine yönelik GeoGebra ekranında gözlemleri

Lineer bağımsız iki vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA10 öğretmen adayının çalışma kâğıdına yazmış olduğu ifadeler aşağıda verilmiştir. ÖA10 öğretmen adayının cevap kâğıdı incelendiğinde; birbirinin katı olmadığı için vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiştir. Germe, baz ve boyut konusunda ise tahmin yapamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramını yanlış açıkladığı, germe kavramını doğru açıkladığı görülmüştür. Baz ve boyut kavramlarında işlem yapamamıştır.

$$a) A = \{ \underbrace{(1, 2, 4)}_{V_1}, \underbrace{(1, 2, -4)}_{V_2} \}$$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümelerin gerdiği uzayların geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

Lineer bağımsızdır. (vektörler birbirinin katı olmadığı için)
Lineer bağımsız ald. ve lineer birleşimli olduğundan
germeyi sağlar.
Baz. ve boyut hakkında bir tahminim yok.

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

$$\begin{aligned} a(1, 2, 4) + b(1, 2, -4) &= \vec{0} & ? a - b &= \vec{0} \\ (a+b, 2a+2b, 4a-4b) &= (0, 0, 0) & a, b &= 0 \\ \text{Lineer bağımsızdır.} & & & \\ \vec{v} = a_1 v_1 + a_2 v_2 & \text{ eşitliğini sağlayan } a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ vardır.} \\ & = a_1(1, 2, 4) + a_2(1, 2, -4) & & \\ \text{Düzlemi gerer.} & & & \end{aligned}$$

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

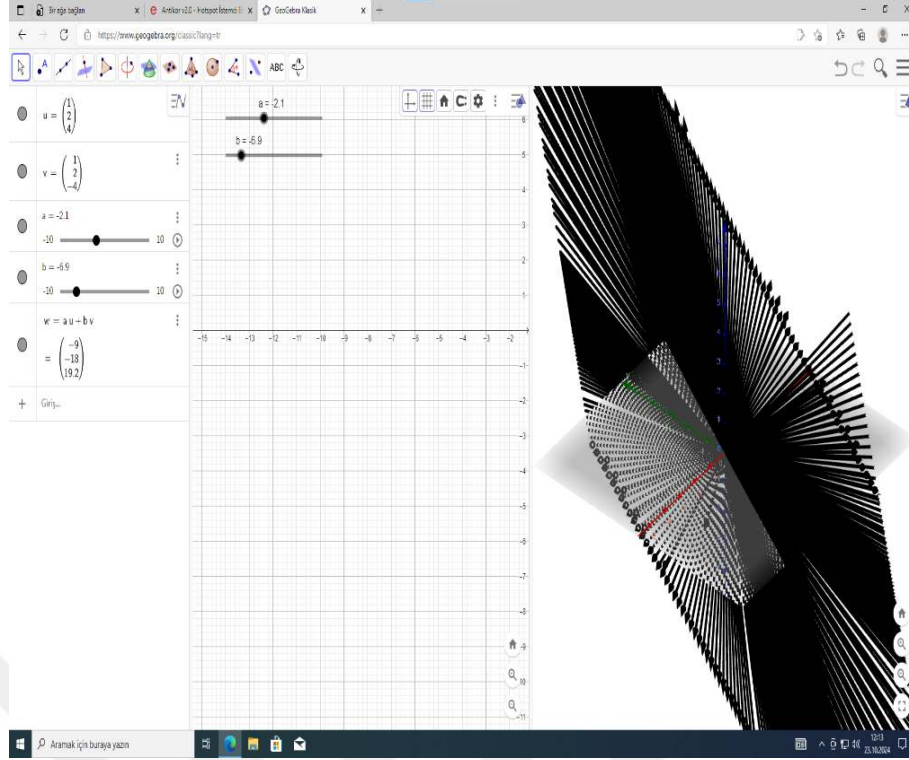
2 boyutlu bir düzlem oluşturur.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Ben baz. boyut hakkında bir tahminde bulunamamıştım.
Etkinlik sonucunda 2 boyutlu bir düzlem olduğunu gözlemledim.

Şekil 4.7. ÖA10 Öğretmen adayının ikinci sorunun birinci problemine yönelik çalışma yaprağından bir kesit

Lineer bağımsız iki vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA10 öğretmen adayının GeoGebra ekranında yapmış olduğu gözlemler aşağıda verilmiştir. ÖA10 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri incelendiğinde; vektörlerin düzlemi gerdiğini gözlemlemiştir.



Şekil 4.8. ÖA10 Öğretmen adayının ikinci sorunun birinci problemine yönelik Geogebra ekranındaki gözlemleri

Tablo 4.5. Öğretmen adaylarının ikinci sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA1	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Gerdiği uzayı doğru olduğunu tahmin etmiş.	T: Bazının olmadığı yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Yanlış.
	G: Lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramını gözlemleyememiş.	G: Doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	G: Bazı olup olmadığını gözlemleyememiş.	G: Boyutu 1 olarak gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözlemi arasında farklılık olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA2	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Verilen kümenin herhangi bir germe yapmayacağını tahmin etmiş.	T: Bazı yoktur diye tahminde bulunmuş.	T: Boyutunu 1 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Yanlış.
	G: Gözlem yok.	G: Gerdiği uzayın doğru olduğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutunu 1 olarak gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Germe olmayacağı yönünde tahminde bulunmuşken GeoGebra sayesinde doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.

Tablo 4.5. (devam) Öğretmen adaylarının ikinci sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA3	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Gerdiği uzayın doğru belirttiğini tahmin etmiş.	T: Bazını 1 olarak tahmin etmiş.	T: Boyutunu 1 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Doğru.	M: Doğru.
	G: Gözlem yok.	G: Doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA4	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı germediğini tahmin etmiş.	T: Bazının olmadığı yönünde tahminde bulunmuş.	T: Boyutunun olmadığı yönünde tahminde bulunmuş.
	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Yanlış.
	G: Gözlem yok.	G: Vektörün doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Boyut yok diye tahmin etmişken, boyutun 1 olduğunu gözlemlemiş.
ÖA5	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gerdiğini tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Doğru.	M: Doğru.
	G: Vektörleri lineer bağımlı olarak gözlemlemiş.	G: Doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Uzayı gerdiğini tahmin etmişti fakat doğruyu gerdiğini görmüş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA6	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Gerdiği uzayın doğru olduğunu tahmin etmiş.	T: Bazını (1,2,4) olarak tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörleri lineer bağımlı olarak gözlemlemiş.	G: Doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	G: Bazını (1,2,4) olarak gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.
	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA7	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Gerdiği uzayın düzlem olduğu yönünde tahminde bulunmuş.	T: Bazını 3 olarak tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Lineer bağımlılık konusunda doğru tahminde bulunduğunu düşünüyor.	K: Düzlemi gemesi konusunda doğru tahminde bulunduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.

Tablo 4.5. (devam) Öğretmen adaylarının ikinci sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık			Germe			Baz			Boyut		
ÖA8	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.			T: Gerdiği uzayın düzlem olduğu yönünde tahminde bulunmuş.			T: Tahmin yok.			T: Boyutu 3 olarak tahmin etmiş.		
	M: Yanlış.			M: Açıklama yok.			M: Açıklama yok.			M: Açıklama yok.		
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.			G: Uzayı gerdiğini gözlemlemiş.			G: Gözlem yok.			G: Gözlem yok.		
	K: Karşılaştırma yok.			K: Uzayı germesi konusunda tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.			K: Karşılaştırma yok.			K: Karşılaştırma yok.		
ÖA9	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.			T: Gerdiği uzayın doğru olduğunu tahmin etmiş.			T: Tahmin yok.			T: Boyutu 3 olarak tahmin etmiş.		
	M: Doğru.			M: Açıklama yok.			M: Doğru.			M: Açıklama yok.		
	G: Gözlem yok.			G: Çakışık iki doğru oluşturduğunu ve sonsuza kadar gittiğini gözlemlemiş.			G: Gözlem yok.			G: Gözlem yok.		
	K: Karşılaştırma yok.			K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.			K: Baz konusunda fikir üretmediğini söylemiş.			K: Karşılaştırma yok.		
ÖA10	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.			T: Gerdiği uzayın doğru olduğunu tahmin etmiş.			T: Tahmin yok.			T: Boyutu 1 olarak tahmin etmiş.		
	M: Doğru.			M: Açıklama yok.			M: Açıklama yok.			M: Açıklama yok.		
	G: Gözlem yok.			G: Verilen vektörlerin doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.			G: Gözlem yok.			G: Gözlem yok.		
	K: Karşılaştırma yok.			K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.			K: Karşılaştırma yok.			K: Karşılaştırma yok.		

Tablo 4.6. İkinci sorunun ikinci problemine yönelik frekans tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık			Germe			Baz			Boyut		
	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B
T	10	0	0	5	5	0	1	5	4	3	3	4
M	8	2	0	0	4	6	3	4	3	2	3	5
G	4	0	6	8	2	0	1	0	9	2	0	8

Öğretmen adaylarının lineer bağımlılık-bağımsızlık konusundaki cevapları incelendiğinde; 10 adayın tamamı doğru tahminde bulunmuştur. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 8 aday doğru, 2 aday yanlış işlem yapmıştır. İşlem yapamayan aday yoktur. Gözlemleri incelendiğinde; 4 aday doğru gözlem yaparken, 6 aday herhangi bir gözlemlerde bulunamamıştır. Yanlış gözlem yapan aday yoktur. Doğru tahminde

bulunan 10 adaydan; 8 tanesi doğru, 2 tanesi yanlış matematiksel işlem yapmıştır. Doğru tahminde bulunan 10 adaydan; 4 tanesi doğru gözlem yaparken 6 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının germe konusundaki cevapları incelendiğinde; 5 aday doğru, 5 aday yanlış tahminde bulunmuştur. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 4 aday yanlış işlem yaparken, 6 aday işlem yapamamıştır. Doğru işlem yapabilen aday yoktur. Gözlemleri incelendiğinde; 8 aday doğru, 2 aday yanlış gözlem yapmıştır. Gözlemde bulunamayan aday yoktur. Doğru tahminde bulunan 5 adaydan; 1 tanesi yanlış matematiksel işlem yapmış, 4 tanesi işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 5 adaydan; 3 tanesi matematiksel işlemi de yanlış yapmıştır. 2 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 5 adayın tamamı doğru gözlem yapmıştır. Yanlış tahminde bulunan 5 adaydan; 3 tanesi doğru, 2 tanesi yanlış gözlem yapmıştır.

Öğretmen adaylarının baz konusundaki cevapları incelendiğinde; 1 aday doğru, 5 aday yanlış tahminde bulunmuştur. 4 aday herhangi bir tahmin yapamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 3 aday doğru, 4 aday yanlış işlem yaparken 3 aday da herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; yalnız 1 aday doğru gözlem yaparken geriye kalan 9 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 1 aday matematiksel işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 5 adaydan; 1 tanesi doğru işlem yaparken; 4 tanesi matematiksel işlemi de yanlış yapmıştır. Tahminde bulunamayan 4 adaydan; 2 tanesi doğru işlem yaparken, 2 tanesi işlem yapamamıştır. Sadece doğru tahminde bulunan öğretmen adayı doğru gözlem yapmıştır, diğerleri herhangi bir gözlem yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının boyut konusundaki cevapları incelendiğinde; 3 aday doğru, 3 aday yanlış tahminde bulunmuştur. 4 aday herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 2 aday doğru, 3 aday yanlış işlem yapmıştır. Geriye kalan 5 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 2 aday doğru gözlem yaparken; 8 aday gözlem yapamamıştır. Yanlış gözlem yapan aday yoktur. Doğru tahminde bulunan 3 adaydan; 1'i doğru, 1'i yanlış matematiksel işlem yaparken 1 aday işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 3 adaydan; 1 tanesi yanlış işlem yapmış, 2 tanesi işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 4 adaydan; 1'i doğru, 1'i yanlış işlem yaparken 2 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 3 adaydan; 1 tanesi doğru gözlem yaparken, 2 aday gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 3 adayın tamamı gözlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 4 adaydan; yalnız 1 tanesi doğru gözlem yaparken, 3 tanesi gözlem yapamamıştır.

Lineer bağımlı iki vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA2 öğretmen adayının çalışma yaprağı aşağıda verilmiştir. Aşağıdaki çalışma yaprağı incelendiğinde ÖA2 öğretmen adayı; verilen kümedeki elemanların birbiri cinsinden yazılabildiği için lineer bağımlı olduklarını, germe olmayacağını doğru oluşacağını, lineer bağımlı oldukları için bazı olmayacağını ve boyutunun 1 olacağını tahmin etmiştir. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramını doğru açıklamışken, germe, baz ve boyut kavramlarında açıklamalarının yanlış olduğu görülmektedir.

b) $B = \{ (1, 2, 4), (2, 4, 8) \}$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümelerin gerdiği uzayların geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

Lineer bağımlı olduğunu düşünüyorum. Çünkü verilen kümedeki elemanlar birbirinin katı şeklinde germe olduğunu düşünmüyorum. Bazı yoktur çünkü lineer bağımlı boyutunun 1 olduğunu tahmin ediyorum. Doğru oluşturacağını düşünüyorum.

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

$a_1 v_1 + a_2 v_2 = \vec{0}$ şeklinde sıfır vektörüne eşitlersek
 $a_1 (1, 2, 4) + a_2 (2, 4, 8) = \vec{0}$
 $(a_1 + 2a_2, 2a_1 + 4a_2, 4a_1 + 8a_2) = (0, 0, 0)$ böylece $a_1 + 2a_2 = 0$, $2a_1 + 4a_2 = 0$
 $4a_1 + 8a_2 = 0$ $a_1 = 0$ ve $a_2 = 0$ şeklinde iki sayıya eşitleyebiliriz.
 Bu nedenle bu vektörler lineer bağımlıdır.
 $(a, b, c) = (a_1 + 2a_2, 2a_1 + 4a_2, 4a_1 + 8a_2)$
 $a_1 + 2a_2 = a$, $2a_1 + 4a_2 = b$, $4a_1 + 8a_2 = c$ olduğundan gerer.
 Bazı yoktur çünkü lineer bağımlı boyutu 1'dir.
 Doğru oluşturur.

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

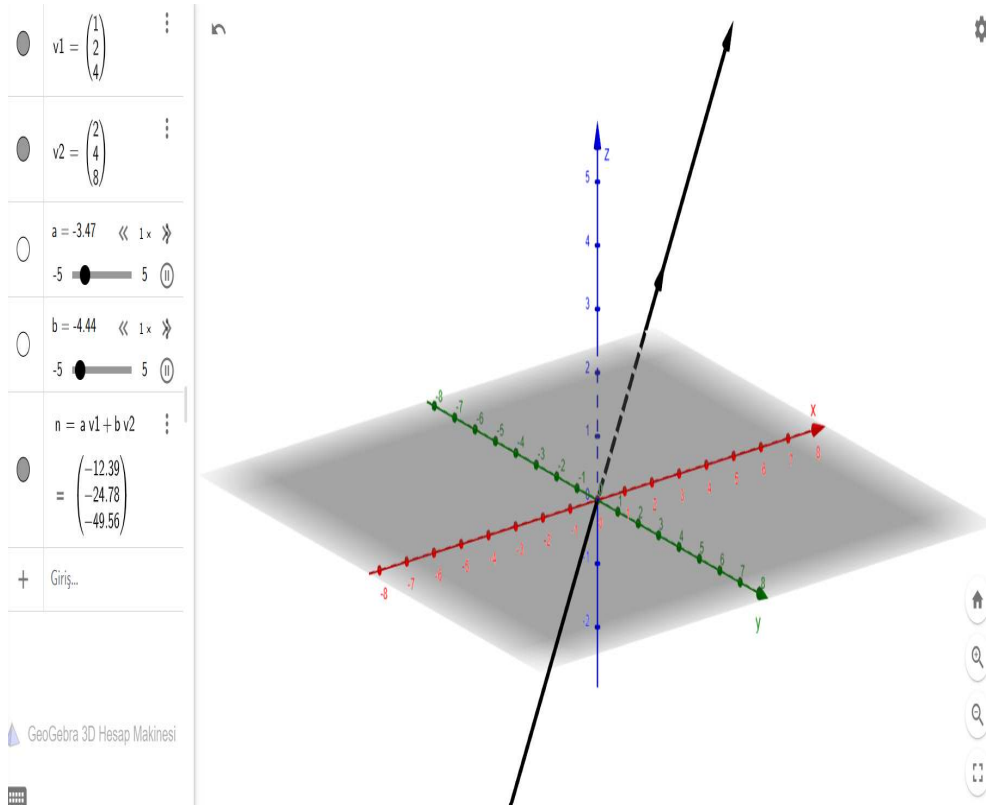
GeoGebra'da oluşturdum. Verilen vektörler doğru oluşturur.
 Bazını GeoGebra'da gözlemleyemedim.
 Boyutu 1'dir.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Tahminimde germe olmadığını düşünüyordum ancak gözlemlediğimde doğruyu gerdiğini gördüm.

Şekil 4.9. ÖA2 öğretmen adayının ikinci sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yaprağından bir kesit

Lineer bağımlı iki vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA2 öğretmen adayının GeoGebra ekranında yapmış olduğu gözlemler aşağıda verilmiştir. ÖA2 Öğretmen adayının Geogebra ekranındaki gözlemleri incelendiğinde; vektörlerin doğru oluşturduğunu ve boyutunun 1 olduğunu gözlemleyebildiği fakat lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz kavramlarında gözlem yapamadığı bulgusuna ulaşılmıştır. Ayrıca germe olmadığını düşünürken verilen vektörlerin doğruyu gerdiğini GeoGebra ile gördüğünü söylemiştir.



Şekil 4.10. ÖA2 öğretmen adayının ikinci sorunun ikinci problemine yönelik Geogebra ekranındaki gözlemleri

Lineer bağımlı iki vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA3 öğretmen adayının çalışma yaprağı aşağıda verilmiştir. ÖA3 öğretmen adayının çalışma yaprağı incelendiğinde; vektörlerin birbirinin katı olduğu için lineer bağımlı olduklarını, vektörlerin doğruyu gereceğini, bazının ve boyutunun 1 olduğunu tahmin etmiştir. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; lineer bağımlılık-bağımsızlık, baz ve boyut kavramlarını doğru açıkladığı ancak germe konusunda bir işlem yapamadığı görülmektedir.

$$b) B = \{(1, 2, 4), (2, 4, 8)\}$$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümelerin gerdiği uzayların geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

Vektörler birbirinin katı. Bu yüzden lineer bağımlı.

Bazı 1. Boyutunun da 1 olduğunu düşünüyorum.

Gerdiği uzayı bilmeden Gerdiği uzayı geometrik olarak doğru olduğunu düşünüyorum.

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

$$2 \cdot v_1 = v_2 \rightarrow \text{lineer bağımlı}$$

$$\text{Baz} = \{(1, 2, 4)\} = 1$$

$$\text{Boyut} = 1$$

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

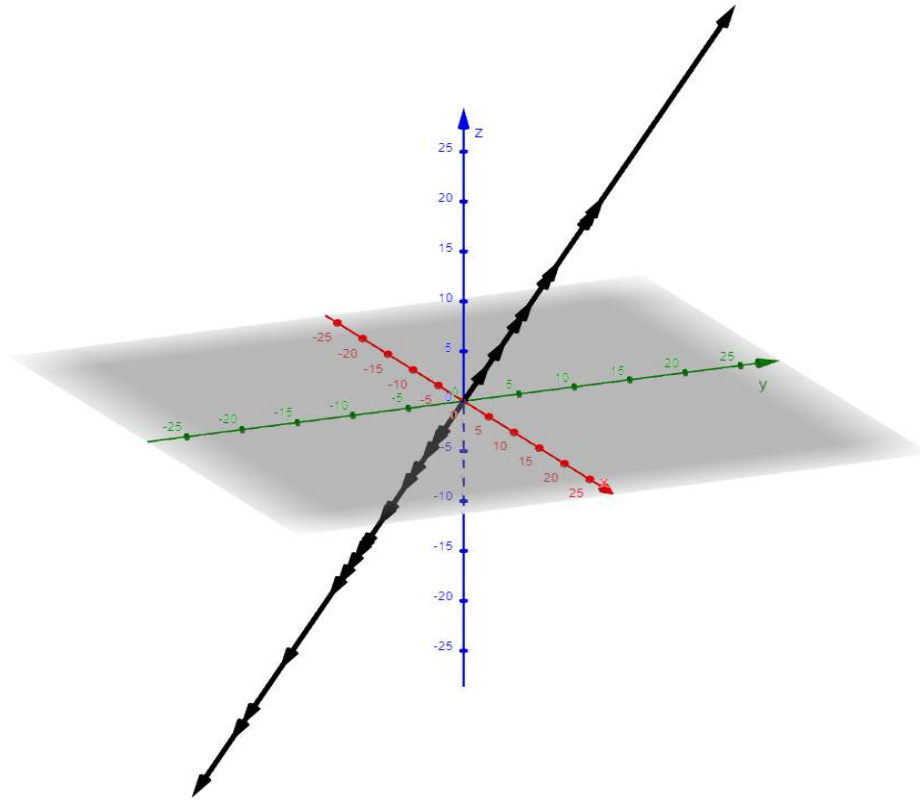
İki vektörün de aynı doğru üzerinde olduğunu gördüm. Bu iki vektörün aynı doğru gerdiğini gördüm. Bu doğru uzayın da bir doğru olarak düşünüyordum. Bu doğruları çalıştırdığımda doğruya denklem vermiyordu. Bu noktadan sonra doğruya denklem verdim ve tekrar çalıştırdığımda bu doğruya denklem verdiğimi gördüm.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Farklılık gözlemlenmedi.

Şekil 4.11. ÖA3 öğretmen adayının ikinci sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yaprağından bir kesit

Lineer bağımlı iki vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA3 öğretmen adayının GeoGebra ekranında yapmış olduğu gözlemler aşağıda verilmiştir. ÖA3 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri incelendiğinde; vektörlerin doğruyu gerdiğini gözlemlediğini belirtmiştir. Öğretmen adayı diğer kavramlar hakkında gözlem yapamamıştır.



Şekil 4.12. ÖA3 Öğretmen adayının ikinci sorunun ikinci problemine yönelik Geogebra ekranındaki gözlemleri

Tablo 4.7. Öğretmen adaylarının üçüncü sorunun birinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA1	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Gerdiği uzayın düzlem belirteceği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutunu 2 olarak gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Boyut konusunda gözlemi ile tahmini arasında farklılık olduğunu beyan etmiş.
ÖA2	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Üç boyutlu uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Bazını 3 olarak tahmin etmiş.	T: Boyutunun 3 olduğunu tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Doğru.
	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.

Tablo 4.7. (devam) Öğretmen adaylarının üçüncü sorunun birinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA2	K: Tahmini ile gözlemlerinin arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Tahmini ile gözlemlerinin arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Bazını 3 olarak tahmin etmiş.	T: Boyutunu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
ÖA3	G: Gözlem yok.	G: Vektörlerin uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Gerdiği uzayı tahmin edememişti ancak GeoGebra sayesinde uzayı gerdiğini farketmiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: $\mathbb{R}^3$ uzayını gerdiği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Yanlış.	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Doğru.
ÖA4	G: Gözlem yok.	G: Üç boyutlu uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutunu 3 olarak gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: GeoGebrada bazını bulmakta zorlandığını, kafasının karıştığını söylemiş.	K: Karşılaştırma yok.
	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: $\mathbb{R}^3$ uzayını gerdiği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Doğru.	M: Doğru.
ÖA5	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Uzayı gerer diye tahminde bulunup düzlemi gerdiğini düşündüğü için tahmini ile gözlemi arasında farklılık olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA6	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Üç boyutlu uzayı gerer diye tahminde bulunmuş.	T: Bazının (1,2,0), (1,0,2), (0,1,2) vektörleri olduğunu tahmin etmiş.	T: Boyutunun 3 olduğu yönünde tahminde bulunmuş.

Tablo 4.7. (devam) Öğretmen adaylarının üçüncü sorunun birinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA6	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Doğru.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Üç boyutlu uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutu 3 olarak gözlemlemiş.
	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.
ÖA7	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Bazını 3 olarak tahmin etmiş.	T: Boyutu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörleri lineer bağımsız olarak gözlemlemiş.	G: Uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutu 3 olarak gözlemlemiş.
	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.
ÖA8	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gerer diye tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA9	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Gerdiği uzayın düzlem olduğu yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörleri lineer bağımsız olarak gözlemlemiş.	G: Uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA10	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Üç boyutlu uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutunu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Doğru.
	G: Gözlem yok.	G: 3 boyutlu uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutu 3 olarak gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.

Tablo 4.8. Üçüncü sorunun birinci problemine yönelik frekans tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık			Germe			Baz			Boyut		
	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B
T	9	1	0	7	2	1	1	3	6	7	0	3
M	6	3	1	3	2	5	2	4	4	4	0	6
G	7	0	3	8	2	0	0	0	10	4	1	5

Öğretmen adaylarının lineer bağımlılık-bağımsızlık konusundaki cevapları incelendiğinde; 9 aday doğru tahminde bulunurken 1 aday yanlış tahminde bulunmuştur. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 6 aday doğru, 3 aday yanlış işlem yapmış 1 aday ise herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 7 aday doğru gözlem yapmış, 3 aday gözlem yapamamıştır. Yanlış gözlem yapan aday yoktur. Doğru tahminde bulunan 9 adaydan; 5 tanesi doğru, 3 tanesi yanlış matematiksel işlem yapmıştır. 1 tanesi ise işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan aday doğru matematiksel işlem yapmıştır. Doğru tahminde bulunan 9 adaydan; 6 tanesi doğru gözlem yapmış, 3 tanesi gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan aday doğru gözlem yapmıştır.

Öğretmen adaylarının germe konusundaki cevapları incelendiğinde; 7 aday doğru, 2 aday yanlış tahmin yapmıştır. 1 aday tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 3 aday doğru, 2 aday yanlış işlem yapmıştır. Geri kalan 5 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 8 aday doğru, 2 aday yanlış gözlem yapmıştır. Doğru tahminde bulunan 7 adaydan; 3'ü doğru, 1'i yanlış işlem yapmıştır. 3 aday ise herhangi bir işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 2 adaydan; 1'i yanlış işlem yapmış, 1'i işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 1 aday matematiksel işlem de yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 7 adaydan; 6 tanesi doğru gözlem yaparken 1 tanesi yanlış gözlem yapmıştır. Yanlış tahminde bulunan 2 adaydan; 1'i doğru, 1'i yanlış gözlem yapmıştır. Tahminde bulunamayan aday ise doğru gözlem yapmıştır.

Öğretmen adaylarının baz konusundaki cevapları incelendiğinde; 1 aday doğru, 3 aday yanlış tahminde bulunurken 6 aday herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 2 tanesi doğru, 4 tanesi yanlış işlem yapmıştır. 4 aday ise işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 10 adayın hiçbirisi doğru ya da yanlış herhangi bir gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan aday matematiksel işlemi de doğru yapmıştır. Yanlış tahminde bulunan 3 adaydan; 2 tanesi yanlış işlem yaparken 1 aday işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 6 adaydan; 1'i doğru, 2'si

yanlış işlem yapmıştır. 3 aday ise işlem yapamamıştır. Adayların hiçbiri gözlemde bulunamamıştır.

Öğretmen adaylarının boyut konusundaki cevapları incelendiğinde; 7 aday doğru tahminde bulunurken geri kalan 3 aday tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 4 aday doğru işlem yapmış, 6 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 4 aday doğru, 1 aday yanlış gözlem yapmıştır. Geri kalan 5 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 7 adaydan; 2 tanesi doğru matematiksel işlem yaparken, 5 aday işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 3 adaydan; 2 tanesi doğru işlem yaparken, 1 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 7 adaydan; 3 tanesi doğru, 1 tanesi yanlış gözlem yapmıştır. Geri kalan 3 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 3 adaydan; 1 tanesi doğru gözlem yaparken, 2 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır.

Lineer bağımsız üç vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA2 öğretmen adayının çalışma yaprağı aşağıda verilmiştir. Aşağıdaki çalışma yaprağı incelendiğinde ÖA2 öğretmen adayı; vektörlerin birbirinin katı olarak yazılamadığı için lineer bağımsız olduğunu, üç boyutlu uzayı gereceğini ve bazının 3 olacağı yönünde tahminde bulunmuştur. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe ve boyut kavramlarını doğru şekilde açıklarken baz kavramını tıpkı boyut gibi bir sayı ile açıkladığı görülmektedir.

a) $A = \{ (1, 2, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2) \}$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümelerin gerdiği uzayların geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

Lineer bağımsız olduğunu düşünüyorum. Üç boyutlu uzayı gerer. Bazının 3 olduğunu tahmin ediyorum. Verilen kümedeki elemanlar birbirlerinin herhangi katları şeklinde yazılamadığı için lineer bağımsız olduğunu tahmin ediyorum.

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = \vec{0}$ şeklinde eşitleme yaparsak lineer bağımlılığı kontrol etmiş oluruz. $a_1(1, 2, 0) + a_2(1, 0, 2) + a_3(0, 1, 2) = \vec{0}$
 $(a_1 + a_2, 2a_1 + a_3, 2a_2 + 2a_3) = (0, 0, 0)$ olduğunu elde ederiz.
 $a_1 + a_2 = 0, 2a_1 + a_3 = 0, 2a_2 + 2a_3 = 0$ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ olmadan sağlanamaz. Yani lineer bağımsızdır.
 $(a, b, c) = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$
 $(a, b, c) = a_1(1, 2, 0) + a_2(1, 0, 2) + a_3(0, 1, 2)$
 $a_1 + a_2 = a, 2a_1 + a_3 = b, 2a_2 + 2a_3 = c$ şeklinde ifade edersek 3 boyutlu uzayı gerdiğini görürüz.
 Bazı 3, boyutu da 3'tür.

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

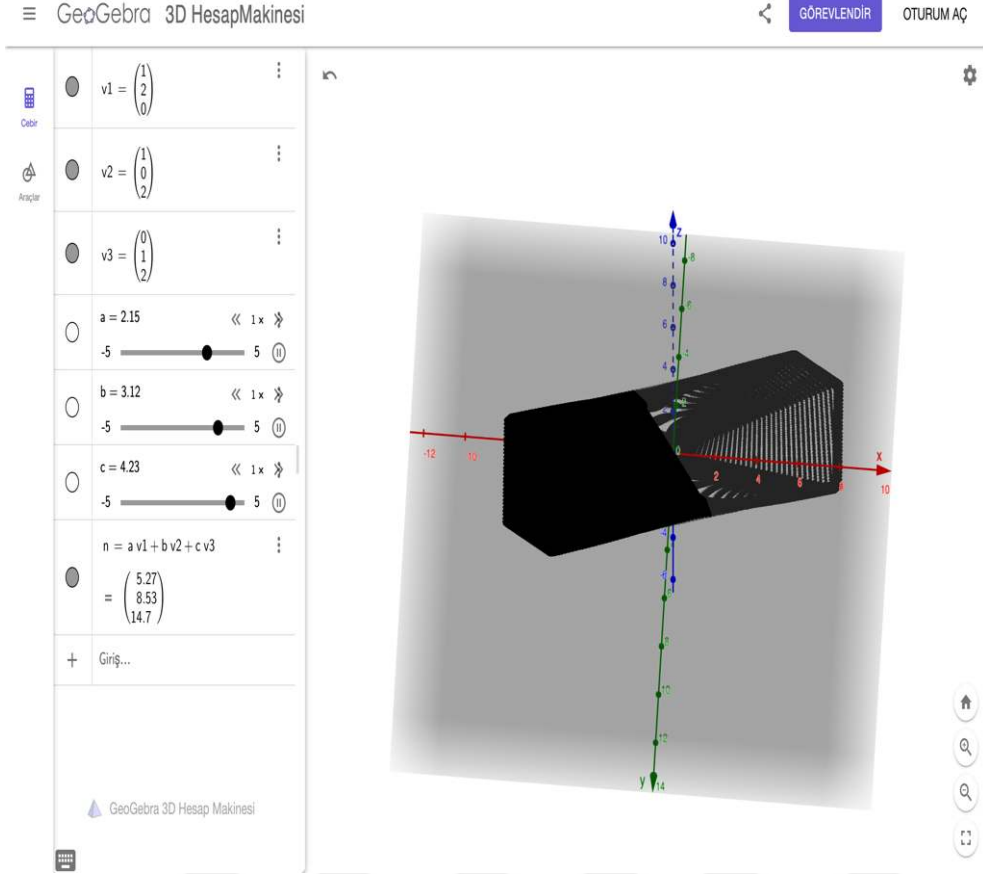
Geogebra'da istenilen ifadeyi oluşturdum. Verilen üç vektörün lineer bağımsız olduğunu gözlemledim. Programı çalıştırdığımda uzayı gerdiğini de gözlemledim.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Gözlemlerim ile tahminim arasında bir farklılık yoktu.

Şekil 4.13. ÖA2 Öğretmen adayının üçüncü sorunun birinci problemine yönelik çalışma yaprağından bir kesit

Lineer bağımsız üç vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA2 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri aşağıda verilmiştir. Gözlemleri incelendiğinde; vektörlerin lineer bağımsız olduğunu ve uzayı gerdiğini gözlemlediği bulgusuna ulaşmıştır. Aday baz ve boyut konusunda gözlem yapamamıştır.



Şekil 4.14. ÖA2 Öğretmen adayının üçüncü sorunun birinci problemine yönelik Geogebra ekranındaki gözlemleri

Lineer bağımsız üç vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA5 öğretmen adayının çalışma yaprağı aşağıda verilmiştir. Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu ve $\mathbb{R}^3$ uzayını gereceğini tahmin etmiştir. Baz ve boyut konusunda tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; lineer bağımlılık-bağımsızlık, baz ve boyut konusunda doğru açıklamada bulunmuşken germe konusunda açıklamada bulunamadığı tespit edilmiştir.

$$a) A = \{ \overbrace{(1, 2, 0)}^{V_1}, \overbrace{(1, 0, 2)}^{V_2}, \overbrace{(0, 1, 2)}^{V_3} \}$$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümelerin gerdiği uzayların geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

Lineer bağımlı olduklarını düşünüyordum.
Gerdiği uzayın $\mathbb{R}^3$ olduğunu tahmin ediyordum.
Bazı ve boyutu hakkında bir tahminim yok.

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

$a_1V_1 + a_2V_2 + a_3V_3 = (0, 0, 0)$ o.s. $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ var ise lineer bağımsızdır.

$$\begin{aligned} a_1(1, 2, 0) + a_2(1, 0, 2) + a_3(0, 1, 2) &= (0, 0, 0) \\ (a_1 + a_2, 2a_1, 2a_3) &= (0, 0, 0) \\ \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ 2a_1 = 0 \\ 2a_3 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$W = \{V_1, V_2, V_3\}$
Bazı = 3
Lineer bağımsızdır.

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

Gözlemlerime göre vektörlerin lineer bağımsız olduklarını ve düzlemi gerdiklerini gördüm.

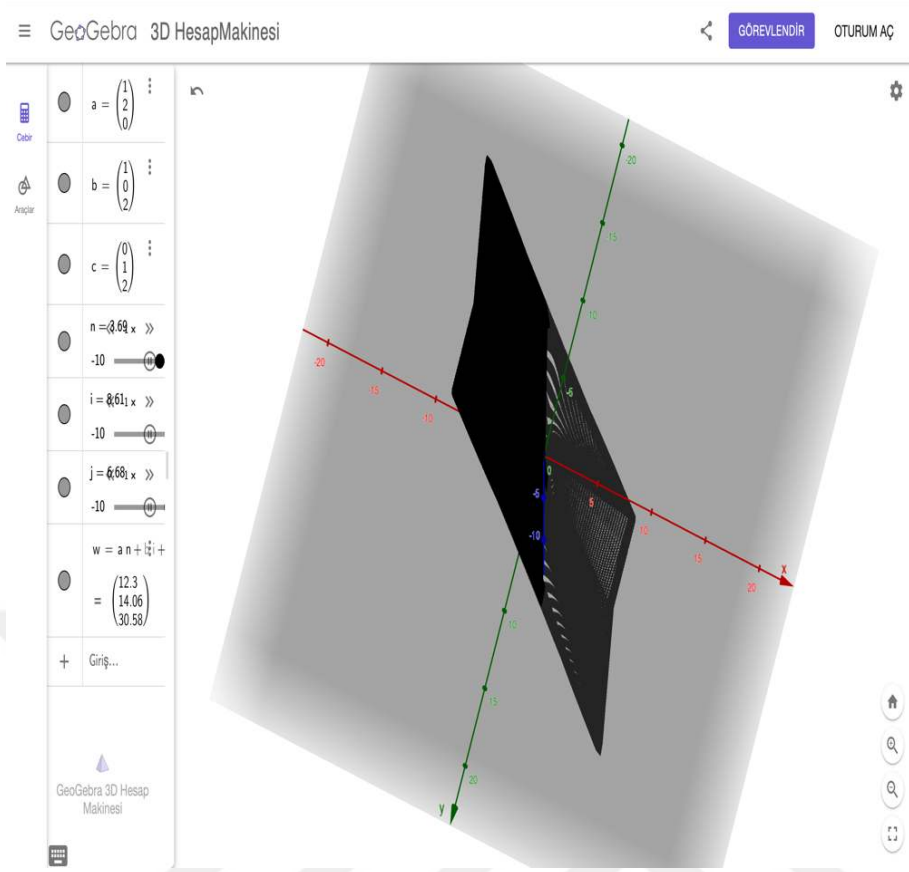
Bazı ve boyutu hakkında bir gözlem yapamadım.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Tahminimle arasımdaki farklılık uzayı değil düzlemi gerdiği oldu.

Şekil 4.15. ÖA5 Öğretmen adayının üçüncü sorunun birinci problemine yönelik çalışma yaprağından bir kesit

Lineer bağımsız üç vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA5 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri aşağıda verilmiştir. ÖA5 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri incelendiğinde; vektörlerin lineer bağımsız olduğunu ve düzlemi gerdiğini ifade etmiştir. ÖA2 öğretmen adayı gibi ÖA5 öğretmen adayı da bazı ve boyut konusunda gözlem yapamamıştır.



Şekil 4.16. ÖA5 Öğretmen adayının üçüncü sorunun birinci problemine yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri

Tablo 4.9. Öğretmen adaylarının üçüncü sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA1	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Gerdiği uzayın düzlem olduğu yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutun 2 olduğunu tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Doğru.
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.	G: Düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutunun 2 olduğunu gözlemlemiş.
	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.
ÖA2	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Üç boyutlu uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutunu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Doğru.	M: Doğru.
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.	G: $\mathbb{R}^3$ uzayını gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Boyutu 3 olarak tahmin etmişti ama boyutu 2 olarak gözlemlemiş.

Tablo 4.9. (devam) Öğretmen adaylarının üçüncü sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA3	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Gerdiği uzayın düzlem olduğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutunu 2 olarak gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini yoktu ama GeoGebra sayesinde düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini yoktu ama GeoGebra sayesinde boyutunu 2 olarak gözlemlemiş.
ÖA4	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Üç boyutlu uzayı gerer diye tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Bağımsız doğrular oluştuğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA5	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: R^3 uzayını gerdiğini tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Doğru.	M: Doğru.
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin R^2 uzayını gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahminiyle gözlemi arasında gerdiği uzay konusunda farklılık olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA6	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı germez şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörleri lineer bağımlı olarak gözlemlemiş.	G: 2 boyutlu uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutunu 2 olarak gözlemlemiş.
	K: Gözlemi ile tahminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA7	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutunu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Yanlış.
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.	G: Uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Bazının 2 olduğunu gözlemlemiş.	G: Boyutunu 3 olarak gözlemlemiş.
	K: Gözlemleri ile tahminlerinin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Gözlemleri ile tahminlerinin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Gözlemleri ile tahminlerinin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Gözlemleri ile tahminlerinin benzer olduğunu düşünüyor.

Tablo 4.9. (devam) Öğretmen adaylarının üçüncü sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA8	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutunu 6 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Tahmini ile gözlemleri arasında farklılık olmadığını düşünüyor.	K: Tahmini ile gözlemleri arasında farklılık olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA9	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu düşünüyor.	T: Vektörlerin düzlemi gerdiği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Bazdaki vektörlerin (4,3,7) ve (-1,2,5) olduklarını tahmin etmiş.	T: Boyutunu 2 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Doğru.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Vektörlerin düzlem belirttiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutunu 2 olarak gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ve gözlemi arasında benzerlik olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ve gözlemi arasında benzerlik olduğunu düşünüyor.
ÖA10	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Vektörlerin üç boyutlu uzayı gerdiği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutunu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: İki boyutlu düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutunu 2 olarak gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Gerdiği uzayı üç boyutlu uzay olduğu yönünde tahminde bulunurken, iki boyutlu bir düzlemi gerdiğini farketmiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Boyutunu 3 olarak tahmin ederken GeoGebra sayesinde 2 olduğunu farketmiş.

Tablo 4.10. Üçüncü sorunun ikinci problemine yönelik frekans tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık			Germe			Baz			Boyut		
	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B
T	8	2	0	2	7	1	1	0	9	2	4	4
M	8	2	0	2	2	6	3	2	5	3	1	6
G	6	0	4	6	4	0	0	1	9	5	1	4

Öğretmen adaylarının lineer bağımlılık-lineer bağımsızlık konusundaki cevapları incelendiğinde; 8 aday doğru, 2 aday yanlış tahminde bulunmuştur. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 8 aday doğru, 2 aday yanlış işlem yapmıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 6 aday doğru gözlem yaparken 4 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan adayların tamamı doğru matematiksel işlem yaparken, yanlış

tahminde bulunan adayların tamamı da yanlış matematiksel işlem yapmıştır. Doğru tahminde bulunan 8 adaydan; 6 tanesi doğru gözlem yaparken, 2 tanesi herhangi bir gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 2 adayın 2'si de gözlem yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının germe konusundaki cevapları incelendiğinde; 2 aday doğru, 7 aday yanlış tahminde bulunmuştur. 1 aday ise herhangi bir tahmin yapamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 2 aday doğru, 2 aday yanlış işlem yaparken geri kalan 6 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 6 aday doğru, 4 aday yanlış gözlem yapmıştır. Doğru tahminde bulunan 2 adaydan; 1'i doğru matematiksel işlem yaparken diğer aday işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 7 adaydan; 1'i doğru, 2'si yanlış işlem yapmış, 4 aday ise işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan aday matematiksel işlem de yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 2 adayın 2'si de doğru gözlem yapmıştır. Yanlış tahminde bulunan 7 adaydan; 3'ü doğru, 4'ü yanlış gözlem yapmıştır. Tahminde bulunamayan aday doğru gözlem yapmıştır.

Öğretmen adaylarının baz konusundaki cevapları incelendiğinde; 1 aday doğru tahminde bulunurken geri kalan 9 aday herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 3 aday doğru, 2 aday yanlış işlem yapmıştır. 5 aday ise herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 1 aday yanlış gözlem yapmış geri kalan 9 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 1 aday doğru matematiksel işlem yapmıştır. Tahminde bulunamayan 9 adaydan, 2'si doğru, 2'si yanlış işlem yapmıştır. 5 aday ise işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan aday gözlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 9 adaydan; 1'i yanlış gözlem yaparken, 8 tanesi gözlem yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının boyut konusundaki cevapları incelendiğinde; 2 aday doğru, 4 aday yanlış tahminde bulunurken 4 aday ise herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 3 aday doğru, 1 aday yanlış işlem yapmıştır. Geri kalan 6 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 5 aday doğru, 1 aday yanlış gözlem yapmıştır. 4 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 2 adaydan; 1 tanesi doğru matematiksel işlem yaparken diğer aday işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 4 adaydan; 1'i doğru, 1'i yanlış işlem yaparken geri kalan 2 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 4 adaydan; 1 tanesi doğru işlem yaparken, 3 aday işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 2 adaydan 2'si de doğru gözlem yapmıştır. Yanlış tahminde bulunan 4 adaydan; 1 tanesi doğru, 1 tanesi yanlış gözlem yaparken geri kalan 2 aday gözlem yapamamıştır.

Tahminde bulunamayan 4 adaydan; 2 tanesi doğru gözlem yaparken, 2 tanesi ise gözlem de yapamamıştır.

İki tanesi lineer bağımsız üç vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA3 öğretmen adayının çalışma yaprağı aşağıda verilmiştir. ÖA3 öğretmen adayının çalışma yaprağı incelendiğinde; ilk vektörün iki katı ile ikinci vektörün toplamının üçüncü vektörü vermesinden ötürü lineer bağımlı olduklarını tahmin etmiştir. Germe, baz ve boyut konusunda herhangi bir tahminde bulunamamıştır. ÖA3 öğretmen adayı matematiksel olarak sadece lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramını açıklamıştır. Diğer kavramları matematiksel olarak da açıklayamamıştır.

v_1 v_2 v_3
b) $B = \{(4, 3, 7), (-1, 2, 5), (7, 8, 19)\}$ kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümenin gerdiği uzayın geometrik olarak ne belirttiğini bulunuz.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

Lineer bağımlıdır çünkü bir vektör diğer iki vektörün toplamıdır. Gerdiği uzay, bazını ve boyutunu bilememişim.

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

$$2v_1 + v_2 = v_3$$

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

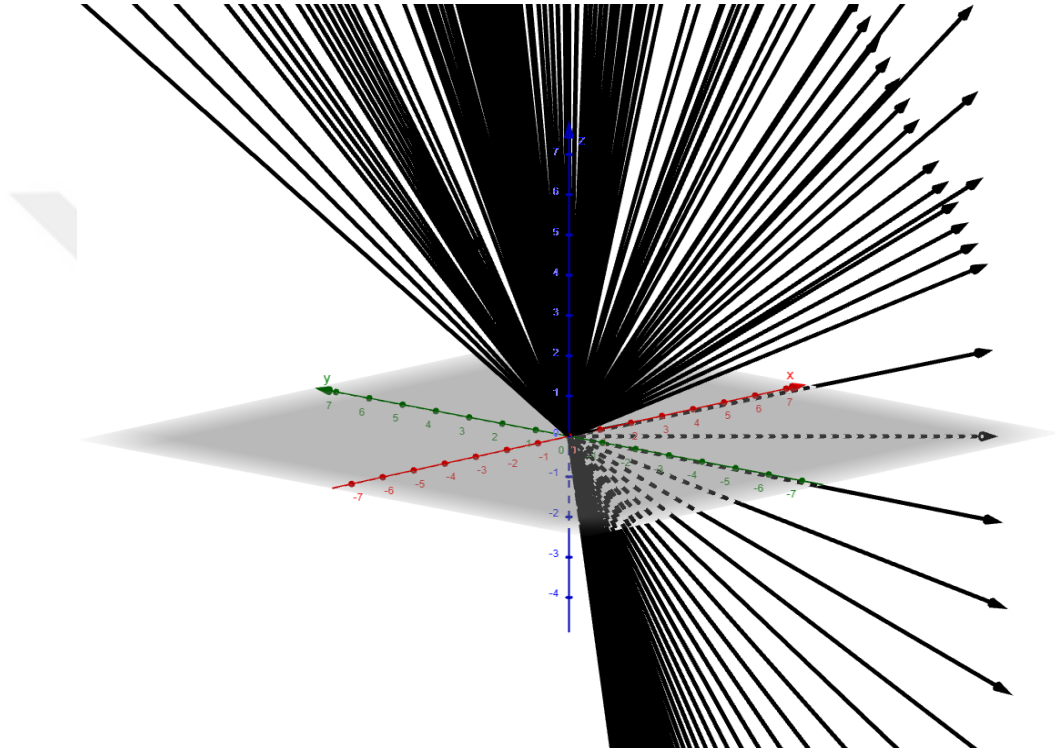
Vektörleri alıştırıp hareket ettirdiğinde vektörlerin bir düzlem üzerinde olduğunu yani düzlemi gerdiğini gördüm. Boyutun 2 olduğunu düşünüyorum. Baz hakkında fikrim yok.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Tahmin edemediklerimi GeoGebra sayesinde görselleştirerek buldum.

Şekil 4.17. ÖA3 Öğretmen adayının üçüncü sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yaprağından kesit

İki tanesi lineer bağımsız üç vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA3 öğretmen adayının Geogebra ekranındaki gözlemleri aşağıda verilmiştir. GeoGebra ekranındaki gözlemleri incelendiğinde; gerdiği uzayın düzlem olduğunu ve boyutunun 2 olduğunu ifade ettiği görülmektedir. Lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz konusunda bir gözlemi bulunmamaktadır. Ayrıca tahmin edemediği bazı kavramları GeoGebra sayesinde görselleştirerek bulduğunu da ifade etmiştir.



Şekil 4.18. ÖA3 Öğretmen adayının üçüncü sorunun ikinci problemine yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri

Diğer taraftan ÖA5 öğretmen adayının çalışma yaprağı incelendiğinde; vektörlerin lineer bağımlı olduğunu ve R^3 uzayını gerdiğini tahmin etmiştir. Baz ve boyut kavramlarında herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; üçüncü vektörü ilk vektörün iki katı ile ikinci vektörün toplamı olarak yazıldığını ifade ederek verilen üç vektörün lineer bağımlı olduğunu doğru şekilde açıklamıştır. Gerdiği uzay konusunda herhangi bir açıklamada bulunmazken üçüncü vektörün kümeden çıkarılmasıyla elde edilen kümenin baz vektörlerini oluşturduğunu ve dolayısıyla boyutunun 2 olduğunu ifade etmiştir.

b) $B = \{(4, 3, 7), (-1, 2, 5), (7, 8, 19)\}$ kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümenin gerdiği uzayın geometrik olarak ne belirttiğini bulunuz.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

Lineer bağımlı olduğunu düşünüyorum.
 $\mathbb{R}^3$ uzayını gerdiğini düşünüyorum çünkü vektörlerin $\mathbb{R}^3$ oluş-
 tırıldığını düşünüyorum.

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

$\rightarrow a_1 \cdot l_1 + a_2 \cdot l_2 + a_3 \cdot l_3 = (0, 0, 0)$ olarak sekilde
 a_1, a_2, a_3 var mı?
 $\rightarrow$ Ya da lineer bağımlılık için vektörler birbirinin
 bir katı mı? buna bakabiliriz.
 $a_1 \cdot l_1 + a_2 \cdot l_2 = l_3$ olarak sekilde $a_1 = 2, a_2 = 1$
 reel sayıları vardır.
 $2 \cdot (4, 3, 7) + 1 \cdot (-1, 2, 5) = (7, 8, 19)$
 $(8, 6, 14) + (-1, 2, 5) = (7, 8, 19)$
 $(7, 8, 19) = (7, 8, 19)$
 Boyutu, $\text{Boy} B = \{l_1, l_2, l_3\}$
 $= \{l_1, l_2\}$
 $= 2$

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

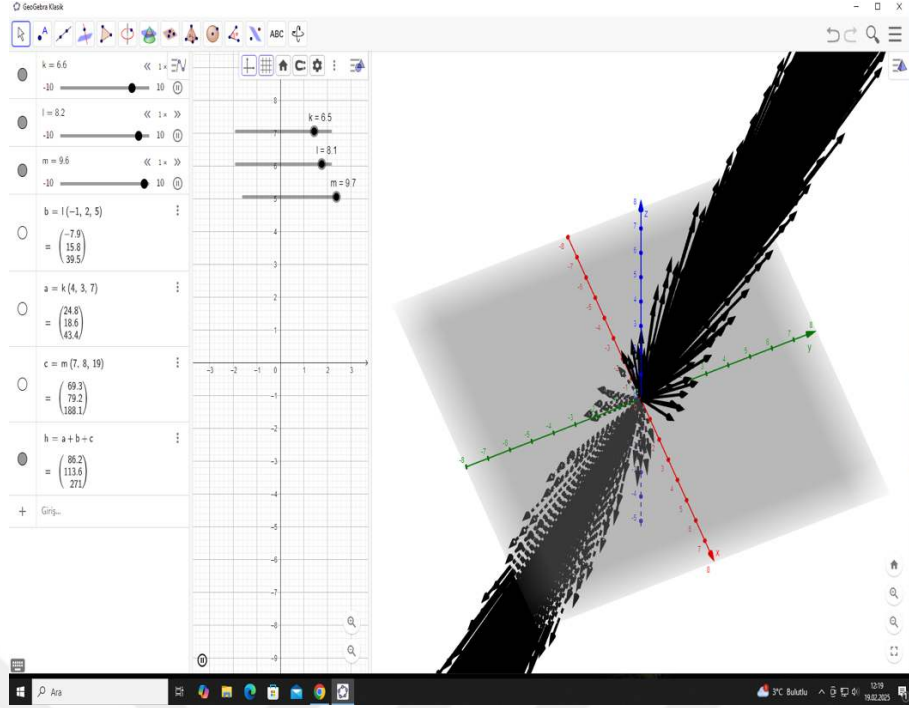
Programda çalıştırdığım zaman vektörlerin lineer
 bağımlı olduğunu ve $\mathbb{R}^2$ uzayını gerdiğini gördüm.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Gözleminimle tahminim arasında bir fark oluştu.
 Gerdiği uzayda tahminimle aynıydı.

Şekil 4.19. ÖA5 Öğretmen adayının üçüncü sorunun ikinci problemine yönelik çalışma yaprağından kesit

ÖA5 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri incelendiğinde; vektörlerin lineer bağımlı olduğunu ve $\mathbb{R}^2$ uzayını gerdiğini ifade ettiği görülmüştür. ÖA3 öğretmen adayı gibi ÖA5 öğretmen adayı da baz ve boyut kavramlarında GeoGebra ekranında herhangi bir gözlem yapamamıştır.



Şekil 4.20. ÖA5 Öğretmen adayının üçüncü sorunun ikinci problemine yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri

Tablo 4.11. Öğretmen adaylarının üçüncü sorunun üçüncü problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Verilen vektörlerin uzayı gerdiği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutunun 2 olduğunu tahmin etmiş.
M: Doğru.	M: Doğru.	M: Doğru.	M: Doğru.
G: Gözlem yok.	G: Uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Bazının olmadığını gözlemlemiş.	G: Boyutunu 3 olduğunu gözlemlemiş.
ÖA1			K: Boyutu 2 olarak tahmin etmiş, matematiksel olarak 1 olduğunu göstermiş fakat GeoGebra'da 3 olarak gözlemlediğini söylemiş.
K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	
T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Gerdiği uzayın doğru olduğunu tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
ÖA2			
G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin doğru oluşturduğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.

Tablo 4.11. (devam) Öğretmen adaylarının üçüncü sorunun üçüncü problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA3	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Gerdiği uzayın doğru olacağını tahmin etmiş.	T: Bazı 1 olarak tahmin etmiş.	T: Boyutu 1 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Doğru.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Vektörlerin doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA4	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Doğru.	M: Doğru.
	G: Gözlem yok.	G: Tek boyutlu bir doğru oluştuğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutun 1 olduğunu gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA5	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Verilen vektörlerin R^3 uzayını gerdiği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmini yok.	T: Tahmini yok.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Doğru.	M: Doğru.
	G: Gözlem yok.	G: Doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	G: Bazının 1 olduğunu gözlemlemiş.	G: Boyutunun 1 olduğunu gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: R^3 uzayını gerer diye tahmin edip GeoGebra sayesinde doğruyu gerdiğini gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA6	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı germez şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Bazının bulunamayacağı yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.	G: Üç vektörün çakışık şekilde doğru oluşturduğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Uzayı germeyeceğini tahmin etmiş ve GeoGebra’da doğru oluştuğunu fark etmiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA7	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Bazını 1 olarak tahmin etmiş.	T: Boyutunu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Yanlış.
	G: Lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.	G: Boyutunu 3 olarak gözlemlemiş.
	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.

Tablo 4.11. (devam) Öğretmen adaylarının üçüncü sorunun üçüncü problemine yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık			Germe	Baz	Boyut
ÖA8	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.			T: Verilen vektörlerin düzlemi gerdiği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.			M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.			G: Düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Tahmini ile gözlemi arasında farklılık olmadığını düşünüyor.			K: Tahmini ile gözlemi arasında farklılık olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA9	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.			T: Verilen vektörlerin gerdiği uzayın doğru olduğu yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.			M: Açıklama yok.	M: Doğru.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.			G: Çakışık bir doğru oluştuğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.			K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA10	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.			T: Gerdiği uzayın doğru olduğu yönünde tahminde bulunmuş.	T: Bazını (10,20,15) olarak tahmin etmiş.	T: Boyutu 1 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.			M: Açıklama yok.	M: Doğru.	M: Doğru.
	G: Gözlem yok.			G: Doğru oluştuğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutu 1 olarak gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.			K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.

Tablo 4.12. Üçüncü sorunun üçüncü problemine yönelik frekans tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık			Germe			Baz			Boyut		
	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B
T	10	0	0	4	4	2	1	3	6	2	4	4
M	10	0	0	2	2	6	6	1	3	4	1	5
G	4	0	6	7	2	1	0	2	8	3	2	5

Öğretmen adaylarının lineer bağımlılık-bağımsızlık konusundaki cevapları incelendiğinde; 10 adayın tamamı hem doğru tahminde bulunmuş hem de doğru matematiksel işlem yapmıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 4 aday doğru gözlem yaparken geri kalan 6 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının germe konusundaki cevapları incelendiğinde; 4 aday doğru, 4 aday yanlış tahminde bulunmuş 2 aday ise herhangi bir tahmin yapamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 2 aday doğru, 2 aday yanlış işlem yapmıştır. 6

aday işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 7 aday doğru, 2 aday yanlış gözlem yapmıştır. 1 aday ise gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 4 adaydan; 1 tanesi yanlış işlem yapmış, 3 tanesi herhangi bir işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 4 adaydan; 1 tanesi doğru işlem yapmıştır. Geri kalan 3 tanesi işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 2 adaydan; 1 tanesi doğru, 1 tanesi yanlış matematiksel işlem yapmıştır. Doğru tahminde bulunan 4 adayın tamamı doğru gözlem yapmıştır. Yanlış tahminde bulunan 4 adaydan; 2'si doğru, 2'si yanlış gözlem yapmıştır. Tahminde bulunamayan 2 adaydan; 1 tanesi doğru gözlem yapmış, 1 tanesi gözlem yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının baz konusundaki cevapları incelendiğinde; 1 aday doğru, 3 aday yanlış tahminde bulunmuştur. 6 aday ise herhangi bir tahmin yapamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 6 aday doğru, 1 aday yanlış işlem yapmıştır. 3 aday ise işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 2 aday yanlış gözlem yapmıştır, 8 aday ise gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan aday doğru matematiksel işlem yapmıştır. Yanlış tahminde bulunan 3 adaydan; 1'i doğru, 1'i yanlış işlem yaparken 1 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 6 adaydan; 4 tanesi doğru işlem yapmış, 2 tanesi işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan aday gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 3 adayın hiçbiri gözlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 6 adaydan; 2 tanesi yanlış gözlem yaparken 4 tanesi gözlem de yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının boyut konusundaki cevapları incelendiğinde; 2 aday doğru, 4 aday yanlış tahminde bulunurken 4 aday herhangi bir tahmin yapamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 4 aday doğru, 1 aday yanlış işlem yapmıştır. Geri kalan 5 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 3 aday doğru, 2 aday yanlış gözlem yapmıştır. 5 aday ise gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 2 adaydan; 1 tanesi doğru işlem yaparken 1 tanesi işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 4 adaydan; 1'i doğru, 1'i yanlış işlem yapmıştır. 2 aday ise işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 4 adaydan; 2'si doğru işlem yaparken 2'si herhangi bir işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 2 adaydan; 1'i doğru gözlem yaparken 1'i gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 4 adaydan; 2'si yanlış gözlem yaparken diğer 2'si herhangi bir gözlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 4 adaydan; 2 tanesi doğru gözlem yaparken 2 tanesi gözlem yapamamıştır.

Lineer bağımlı üç vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA6 öğretmen adayının çalışma yaprağı aşağıda verilmiştir. ÖA6 öğretmen adayının çalışma yaprağı incelendiğinde; ikinci vektör birinci vektörün -

1 katı ve üçüncü vektör birinci vektörün 5 katı olduğu için lineer bağımlı olduğunu, uzayı germeyeceğini ve bazının bulunamayacağını tahmin etmiş, boyut konusunda herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında sadece lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramını doğru açıkladığı; germe, baz ve boyut kavramları ile ilgili herhangi bir işlem yapmadığı görülmektedir.

c) $C = \{ (2, 4, 3), (-2, -4, -3), (10, 20, 15) \}$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümelerin gerdiği uzayların geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

C kümesine baktığım zaman $(2, 4, 3)$ vektörü ile $(-2, -4, -3)$ vektörünün birbirinin (-1) katı olduğunu görüldüğünü fark ettim. Sonuç olarak bu C kümesinin elemanları lineer bağımlı ve dolayısıyla uzayı germez. $(2, 4, 3)$ vektörünün (5) katı yaptığım zaman $(10, 20, 15)$ vektörünü bulabildim. Bazı bulamazım.

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 &= \vec{0} \\ a_1 (2, 4, 3) + a_2 (-2, -4, -3) + a_3 (10, 20, 15) &= (0, 0, 0) \\ 2a_1 - 2a_2 + 10a_3 &= 0 \\ 4a_1 - 4a_2 + 20a_3 &= 0 \\ 3a_1 - 3a_2 + 15a_3 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{lineer bağımlı}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 10 & | & 0 \\ 4 & -4 & 20 & | & 0 \\ 3 & -3 & 15 & | & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 10 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 3 & -3 & 15 & | & 0 \end{vmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{lineer bağımlı}$$

$a_2 = -2a_1 + a_3$

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

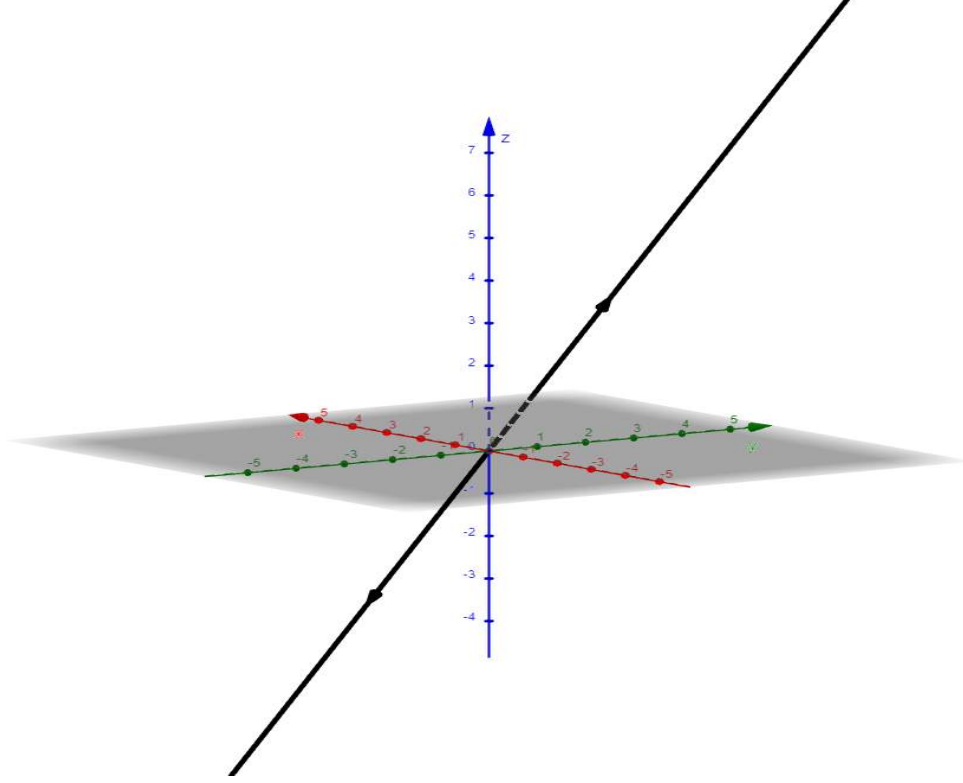
GeoGebra programını kullandığımda bu üç vektörün bağımlı olduğunu gördüm. Dolayısıyla bu üç vektör lineer bağımlı olduğunu gördüm. Bu üç vektör bir doğru oluşturdu. Uzayı germedi. Bazı göremedim.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Gözleminle tahminim çoğunlukla birbirine benzerdi. lineer bağımlı olduğunu gördüm ve matematiksel hesapla belirledim. GeoGebra uygulaması sayesinde bir doğru oluşturduğunu ve lineer bağımlı olduğunu gördüm.

Şekil 4.21. ÖA6 Öğretmen adayının üçüncü sorunun üçüncü problemine yönelik çalışma yaprağından kesit

ÖA6 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri incelendiğinde; vektörlerin çakışıp doğru oluşturduğunu gözlemlemiş, bundan ötürü lineer bağımlı olduklarını ifade etmiştir. Baz ve boyut kavramlarında gözlem yapamamıştır.



Şekil 4.22. ÖA6 Öğretmen adayının üçüncü sorunun üçüncü problemine yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri

Diğer taraftan ÖA10 öğretmen adayının çalışma yaprağı incelendiğinde; ÖA6 öğretmen adayı gibi vektörler arasında kat bulduğunu bundan ötürü kümenin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiştir. Aynı zamanda bir boyutlu doğru oluştuğunu ve bazının $(10, 20, 15)$ vektörü olduğunu tahmin etmiştir. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; lineer bağımlılık-bağımsızlık, baz ve boyut kavramlarını doğru açıklarken, germe konusunda açıklama yapmamıştır.

$$c) C = \{ \overset{v_1}{(2, 4, 3)}, \overset{v_2}{(-2, -4, -3)}, \overset{v_3}{(10, 20, 15)} \}$$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümelerin gerdiği uzayların geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

$v_1 = -v_2$ ve $5v_1 = v_3$ olduğundan lineer bağımlıdır.
 Bir boyutlu doğru oluşturur.
 Baz = $(10, 20, 15)$

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

$a(2, 4, 3) + b(-2, -4, -3) + c(10, 20, 15) = \vec{0}$ $a, b, c = 0$ eşitliğinden farklı a, b, c değerleri bulunabildiğinden lineer bağımlıdır.

$\{ (2, 4, 3), (-2, -4, -3), (10, 20, 15) \}$

Baz = $(10, 20, 15)$

1 boyutlu doğru oluşturur.

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

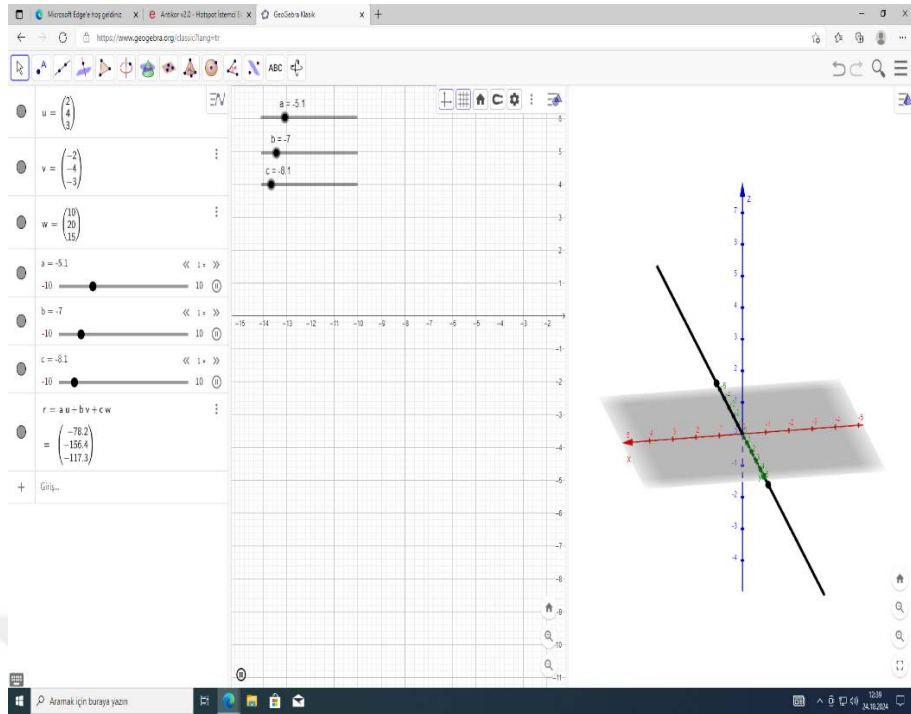
1 boyutlu doğru oluşturdu.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Gözlemin ile tahminim doğru.

Şekil 4.23. ÖA10 Öğretmen adayının üçüncü sorunun üçüncü problemine yönelik çalışma yaprağından kesit

ÖA10 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri incelendiğinde; bir boyutlu doğru oluştuğunu gözlemlediği bulgusuna ulaşılmıştır.



Şekil 4.24. ÖA10 Öğretmen adayının üçüncü sorunun üçüncü problemine yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri

Tablo 4.13. Öğretmen adaylarının dördüncü soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı germez şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutunun olmadığını tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Doğru.	M: Doğru.
ÖA1	G: Gözlem yok.	G: Uzayı germediğini gözlemlemiş.	G: Bazının olmadığını gözlemlemiş.	G: Boyutunun olmadığını gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Bazını tahmin edememişti, GeoGebra sayesinde bazının olmadığını gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.
	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Nokta oluşacağı ve germe yapmayacağı yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutu yoktur şeklinde tahminde bulunmuş.
	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
ÖA2	G: Gözlem yok.	G: Nokta oluştuğunu ve germe yapmadığını gözlemlemiş.	G: Bazı olmadığını yönünde gözlemlemiş.	G: Boyutunun olmadığını gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.

Tablo 4.13. (devam) Öğretmen adaylarının dördüncü soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA3	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Nokta oluştuğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
ÖA4	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Germe yapmaz şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Bazı yoktur şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Boyutu yoktur şeklinde tahminde bulunmuş.
	M: Yanlış.	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Hiçbir şey oluşmadığını boşluk olarak kaldığını gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Vektörlerin R^3 uzayını gerdiği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
ÖA5	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Uzayı germediğini gözlemlemiş.	G: Bazının olmadığını gözlemlemiş.	G: Boyutunun olmadığını gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: R^3 uzayını gerer diye tahmin edip uzayı germediğini gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Bazının (0,0,0) olduğunu tahmin etmiş.	T: Boyutunun 1 olduğunu tahmin etmiş.
ÖA6	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Yanlış.	M: Yanlış.
	G: Gözlem yok.	G: Germe olmadığını gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Hiçbir şey oluşmadığı için boyutsuz bir vektör olduğunu gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Boyutunun 1 olduğunu tahmin edip GeoGebra ile boyutsuz bir vektör olduğunu görmüş.
ÖA7	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı germeyeceği ve nokta oluşacağı yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutunun olmadığını yönünde tahminde bulunmuş.
	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.

Tablo 4.13. (devam) Öğretmen adaylarının dördüncü soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA8	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Gerdiği uzayın nokta olduğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA9	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı germeyeceği ve nokta oluşacağı yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutu yoktur şeklinde tahminde bulunmuş.
	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Nokta belirttiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA10	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Yanlış.	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Noktayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Gerdiği uzay hakkında tahminde bulunamayıp GeoGebra ile noktayı gerdiğini gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.

Tablo 4.14. Dördüncü soruya yönelik frekans tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık			Germe			Baz			Boyut		
	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B
T	4	6	0	3	4	3	1	1	8	5	1	4
M	2	6	2	1	1	8	1	1	8	1	1	8
G	0	0	10	5	4	1	3	0	7	4	0	6

Öğretmen adaylarının lineer bağımlılık-bağımsızlık konusundaki cevapları incelendiğinde; 4 aday doğru, 6 aday yanlış tahminde bulunmuştur. Tahminde bulunamayan aday yoktur. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 2 aday doğru, 6 aday yanlış işlem yaparken 2 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 10 adaydan hiçbirinin gözlem yapamadığı tespit edilmiştir. Doğru tahminde bulunan 4 adaydan; 2'si doğru matematiksel işlem yaparken 2'si yanlış işlem

yapmıştır. Yanlış tahminde bulunan 6 adaydan; 4 tanesi yanlış işlem yapmış, 2 tanesi işlem yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının germe konusundaki cevapları incelendiğinde; 3 aday doğru, 4 aday yanlış tahminde bulunurken geri kalan 3 aday herhangi bir tahmin yapamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 1 aday doğru, 1 aday yanlış işlem yapmıştır. 8 aday işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 5 aday doğru 4 aday yanlış gözlem yaparken 1 aday gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 3 adayın hiçbiri matematiksel işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 4 adaydan; 1 tanesi doğru işlem yaparken 3 tanesi işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 3 adaydan; 1 tanesi yanlış işlem yapmış, 2 tanesi işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 3 adaydan; 2 tanesi doğru gözlem yaparken 1 tanesi gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 4 adayın tamamı yanlış gözlem yapmıştır. Tahminde bulunamayan 3 adayın tamamı doğru gözlem yapmıştır.

Öğretmen adaylarının baz konusundaki cevapları incelendiğinde; 1 aday doğru, 1 aday yanlış tahminde bulunurken 8 aday tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 1 aday doğru, 1 aday yanlış işlem yapmış geri kalan 8 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 3 aday doğru gözlem yaparken 7 aday gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan aday matematiksel işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan aday işlemi de yanlış yapmıştır. Tahminde bulunamayan 8 adaydan; 1'i doğru işlem yaparken 7'si işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan aday gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan aday gözlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 8 adaydan; 3 tanesi doğru gözlem yaparken 5 tanesi gözlem yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının boyut konusundaki cevapları incelendiğinde; 5 aday doğru, 1 aday yanlış tahminde bulunurken 4 aday tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 1 aday doğru, 1 aday yanlış işlem yapmıştır. Geri kalan 8 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 4 aday doğru gözlem yaparken 6 aday gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 5 adaydan; 1 tanesi doğru işlem yaparken 4 tanesi işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan aday işlemi de yanlış yapmıştır. Tahminde bulunamayan 4 adayın tamamı matematiksel işlemi de yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 5 adaydan; 2 tanesi doğru gözlem yaparken 3 tanesi gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan aday doğru gözlem yapmıştır. Tahminde bulunamayan 4 adaydan; 1 tanesi doğru gözlem yaparken 3 tanesi gözlem yapamamıştır.

Sıfır vektöründen oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA2 öğretmen adayının çalışma yaprağı aşağıda verilmiştir. ÖA2 öğretmen adayının çalışma yaprağı incelendiğinde; vektörün lineer bağımsız olduğunu, nokta oluşacağını ve boyutsuz olduğunu tahmin etmiş ve baz hakkında herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel olarak lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramını yanlış açıklarken, germe, baz ve boyut kavramlarında açıklama yapamamıştır.

$A = \{\vec{0} = (0,0,0)\}$ Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, boyutunu ve bu kümenin gerdiği uzayın geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

Lineer bağımsız olduğunu tahmin ediyorum. Uzayda nokta oluşturur. Boyutu yoktur. Bazı hakkında tahminim yok. Germe yapmaz.

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

İfade $a_1 \cdot v_1 = \vec{0}$ anlamı taşır. $a_1 = 0$ olacak şeklindedir. Lineer bağımsızdır. Germesi yoktur. Boyutu yoktur. Bazı yoktur.

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

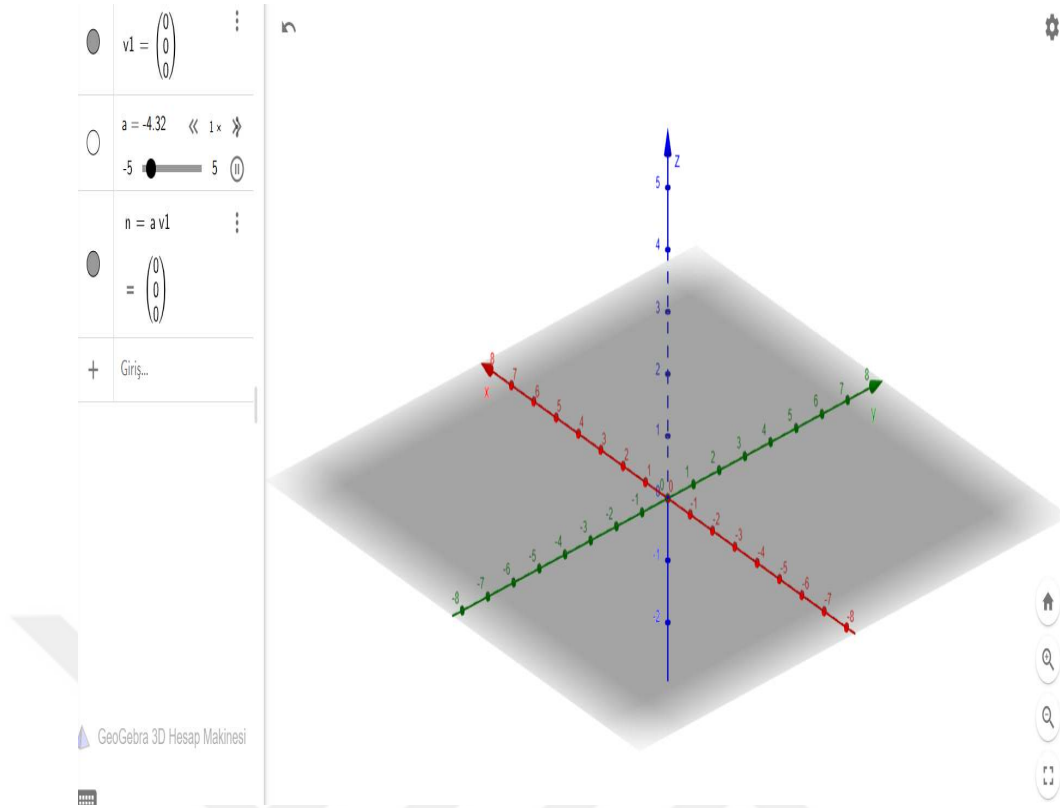
GeoGebra'da oluşturdum. Verilen ifade nokta oluşturdum. Germesi yok, baz ve boyutu yoktur.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Gözlemlerim ile tahminlerim arasında farklılık yok.

Şekil 4.25. ÖA2 Öğretmen adayının dördüncü soruya yönelik çalışma yaprağından kesit

Sıfır vektöründen oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA2 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri aşağıda verilmiştir. ÖA2 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemi ise nokta oluştuğu, baz ve boyutu olmadığı yönünde olmuştur.



Şekil 4.26. ÖA2 öğretmen adayının dördüncü soruya yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri

Diğer taraftan ÖA6 öğretmen adayının sıfır vektöründen oluşan kümeye dair çalışma yaprağındaki cevapları incelendiğinde; lineer bağımsız olduğunu, uzayı gerdiğini, bazının kendisi olduğunu ve boyutunun 1 olduğunu tahmin etmiştir. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; öğretmen adayı sıfır vektörünün her reel sayı katının sıfır vektörü olduğunu yazmasına rağmen lineer bağımsız olduğunu söylemiştir. Bu yüzden bazının kendisi olduğunu ve boyutunun da 1 olduğunu ifade etmiştir. Gerdiği uzayla ilgili matematiksel bir açıklama yapmamıştır.

$A = \{\vec{0} = (0,0,0)\}$ kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, boyutunu ve bu kümenin gerdiği uzayın geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

O vektörü bence lineer bağımlı bir vektördür. Çünkü o vektörü kendi bozdur. Ve uzayı gerer. Tek bağımlı olduğu için tek boyutludur.

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

$a_1 v_1 = \vec{0}$
 $a_1 (0,0,0) = \vec{0}$ } $a_1 = \mathbb{R}$ yani lineer bağımsız
 $0a_1 = 0a_1 = 0a_1$ } $(0,0,0)$ bozdu
uzayı gerer. Tek boyutlu

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

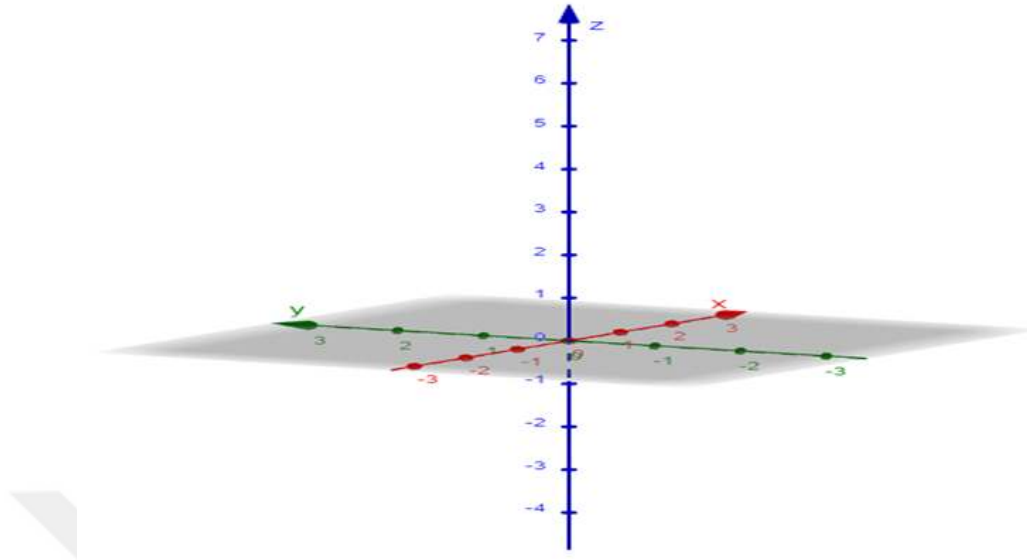
GeoGebra programını kullanarak vektörü giripimde hiçbir şey gözlemedim. O vektörün sıfırı kullanarak tanımlayarak giripimde o vektörün etkilemedi.
Bu durumda o vektörü bağımsızdır.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Gözlemlerim ve tahminim arasında fark vardı. Ben tahminimde lineer bağımsız tek boyutlu bir vektör düşünmüştüm. Ama GeoGebra uygulamasını kullandığımda bağımsız bir vektör gördüm.

Şekil 4.27. ÖA6 Öğretmen adayının dördüncü soruya yönelik çalışma yaprağından kesit

Sıfır vektöründen oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA6 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri aşağıda verilmiştir. ÖA6 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemi; hiçbir şey oluşmadığı bu yüzden bazının ve boyutunun olmadığını yönündedir.



Şekil 4.28. ÖA6 Öğretmen adayının dördüncü soruya yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri

Tablo 4.15. Öğretmen adaylarının beşinci soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.	T: Boyutu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Yanlış.
ÖA1	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutu 2 olarak gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Germe konusunda bir tahminde bulunamamış olsa da, düzlemi gerdiğini gözlemlemiş	K: Karşılaştırma yok.	K: Boyutu 3 olarak tahmin etmişti fakat 2 olarak gözlemlemiş.
	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gereceği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
ÖA2	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin düzlem oluşturduğunu ve düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş, ancak GeoGebra’da lineer bağımlı olduklarını gözlemlemiştir.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.

Tablo 4.15. (devam) Öğretmen adaylarının beşinci soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA3	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Bazı 1 olarak tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.
	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Vektörlerin düzlem oluşturduğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Gerdiği uzay hakkında bir tahminde bulunamamışken GeoGebra ile düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA4	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Yanlış.
	G: Gözlem yok.	G: Dört vektörün uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA5	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Bazını $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,-1,0)$ olarak tahmin etmiş.	T: Boyutu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Yanlış.	M: Yanlış.
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutu 2 olarak gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Uzayı gerdiğini tahmin etmiş, ancak düzlemi gerdiğini gözlemlemiştir.	K: Karşılaştırma yok.	K: Boyutu 3 olarak tahmin etmiş, ancak 2 olduğunu gözlemlemiş.
ÖA6	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı germez şeklinde tahminde bulunmuş. Ancak gerdiği uzayın ne olduğu hakkında bir tahminde bulunamamış.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin düzlem oluşturduğunu ve uzayı germediğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Gerdiği uzay hakkında tahminde bulunamamış ancak, GeoGebra ile düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA7	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gereceği yönünde tahminde bulunmuş.	T: Bazını 2 olarak tahmin etmiş.	T: Boyutunu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Yanlış.

Tablo 4.15. (devam) Öğretmen adaylarının beşinci soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık			Germe			Baz			Boyut		
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.			G: Uzayı gerdiğini gözlemlemiş.			G: Gözlem yok.			G: Boyutunu 3 olarak gözlemlemiş.		
	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.			K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.			K: Karşılaştırma yok.			K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.		
	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.			T: Uzayı gereceği yönünde tahminde bulunmuş.			T: Tahmin yok.			T: Boyutu 6 olarak tahmin etmiş.		
ÖA8	M: Doğru.			M: Açıklama yok.			M: Açıklama yok.			M: Açıklama yok.		
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.			G: Vektörlerin uzayı gerdiğini gözlemlemiş.			G: Gözlem yok.			G: Gözlem yok.		
	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.			K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.			K: Karşılaştırma yok.			K: Karşılaştırma yok.		
	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.			T: Vektörlerin bir doğruyu gerdiğini tahmin etmiştir.			T: Tahmin yok.			T: Boyutu 2 olarak tahmin etmiş.		
ÖA9	M: Doğru.			M: Doğru.			M: Açıklama yok.			M: Açıklama yok.		
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.			G: Gözlem yok.			G: Gözlem yok.			G: Gözlem yok.		
	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.			K: Karşılaştırma yok.			K: Karşılaştırma yok.			K: Karşılaştırma yok.		
	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.			T: Tahmin yok.			T: Tahmin yok.			T: Tahmin yok.		
ÖA10	M: Doğru.			M: Doğru.			M: Doğru.			M: Doğru.		
	G: Gözlem yok.			G: Düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.			G: Gözlem yok.			G: Boyutunu 2 olarak gözlemlemiş.		
	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.			K: Gerdiği uzayı tahmin edememiş ancak, düzlemi gerdiğini gözlemlemiş.			K: Karşılaştırma yok.			K: Karşılaştırma yok.		

Tablo 4.16. Beşinci soruya yönelik frekans tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık			Germe			Baz			Boyut		
	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B
T	8	2	0	0	6	4	0	3	7	1	4	5
M	9	0	1	3	2	5	1	2	7	1	4	5
G	6	1	3	6	3	1	0	0	10	3	1	6

Öğretmen adaylarının lineer bağımlılık-bağımsızlık konusundaki cevapları incelendiğinde; 8 aday doğru, 2 aday yanlış tahminde bulunmuştur. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 9 aday doğru işlem yapmış, 1 aday işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 6 aday doğru, 1 aday yanlış gözlem yapmıştır. Geri kalan 3

aday hiçbir gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 8 adaydan; 7 tanesi doğru matematiksel işlem yapmış, 1 tanesi işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 2 aday doğru matematiksel işlem yapmıştır. Doğru tahminde bulunan 8 adaydan; 5 tanesi doğru, 1 tanesi yanlış gözlem yapmıştır. 2 aday ise herhangi bir gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 2 adaydan; 1'i doğru gözlem yaparken 1'i gözlem yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının germe konusundaki cevapları incelendiğinde; 6 tanesi yanlış tahminde bulunurken, 4 tanesi herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 3 aday doğru, 2 aday yanlış işlem yapmıştır. Geri kalan 5 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 6 aday doğru, 3 aday yanlış gözlem yapmıştır. Geri kalan 1 aday gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 6 adaydan; 2 tanesi doğru matematiksel işlem yaparken, 4 tanesi işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 4 adaydan; 1'i doğru, 2'si yanlış işlem yaparken 1 aday işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 6 adaydan; 3'ü doğru, 2'si yanlış gözlem yaparken 1 aday gözlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 4 adaydan; 3 aday doğru gözlem yaparken 1 aday yanlış gözlem yapmıştır.

Öğretmen adaylarının baz konusundaki cevapları incelendiğinde; 3 aday yanlış tahminde bulunurken, 7 aday tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 1 aday doğru, 2 aday yanlış işlem yapmıştır. Geri kalan 7 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 10 adayın hiçbiri gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 3 adaydan; 2'si yanlış matematiksel işlem yaparken, 1'i herhangi bir işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 7 adaydan; 1 tanesi doğru işlem yaparken, 6 tanesi herhangi bir işlem yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının boyut konusundaki cevapları incelendiğinde; 1 aday doğru, 4 aday yanlış tahminde bulunurken 5 aday herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 1 aday doğru, 4 aday yanlış işlem yapmıştır. Geri kalan 5 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 3 aday doğru, 1 aday yanlış gözlem yaparken 6 aday gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan aday matematiksel işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 4 adaydan; 3 tanesi yanlış işlem yaparken 1 tanesi işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 5 adaydan; 1 tanesi doğru, 1 tanesi yanlış işlem yapmıştır. Geri kalan 3 aday işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan aday gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 4 adaydan; 2'si doğru, 1'i yanlış gözlem yapmıştır. 1 aday ise gözlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 5 adaydan; 1 tanesi doğru gözlem yaparken, 4 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır.

İkisi lineer bağımlı dört vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA2 öğretmen adayının çalışma yaprağı aşağıda verilmiştir. ÖA2 öğretmen adayının çalışma yaprağı incelendiğinde; vektörlerin lineer bağımsız olduğunu ve uzayı gereceğini tahmin etmiştir. Baz ve boyut konusunda herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramını doğru açıklarken germe, baz ve boyut kavramları ile ilgili herhangi bir açıklama yapamamıştır.

$$A = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 2), (1, -1, 0)\}$$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümenin gerdiği uzayın geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

Lineer bağımsız olduklarını tahmin ediyorum. Uzayı gerer.
Bazı hakkında tahminim yok. Düzlem değil.

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0$ eşitleme yapılarak bağımlı-bağımsızlık kontrol edilir. $a_1(1,0,1) + a_2(0,1,1) + a_3(1,1,2) + a_4(1,-1,0) = (0,0,0)$
 $(a_1 + a_3 + a_4, a_2 + a_3 - a_4, a_1 + a_2 + 2a_3) = (0,0,0)$
 $a_1 + a_3 + a_4 = 0, a_2 + a_3 - a_4 = 0, a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = t, a_2 = -3t, a_3 = t, a_4 = -2t$
şeklinde 0 hariç sayılara eşitlenebilir. 0 nedenle lineer bağımlı.
Düzlemi gerer. Bazı 3 tır.

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

GeoGebra'da oluşturdum. Vektörlerin düzlem oluşturduğunu gözlemledim. Lineer bağımlıdır. Düzlemi gerer.

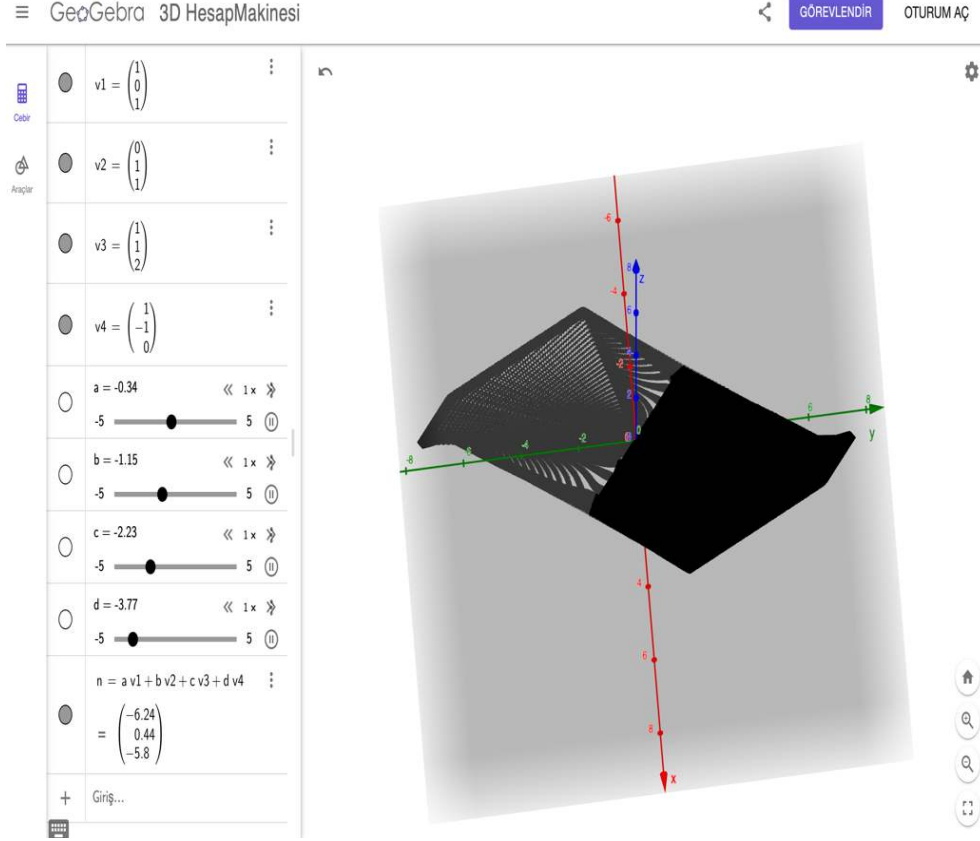
Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Tahminimde lineer bağımsız olduğunu düşünmüştüm. Ancak lineer bağımlı olduğunu gözlemledim. Birbirleri arasında bir olan olduğunu fark etmemiştim.

Şekil 4.29. ÖA2 Öğretmen adayının beşinci soruya yönelik çalışma yaprağından kesit

İkisi lineer bağımlı dört vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA2 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri

aşağıda verilmiştir. ÖA2 öğretmen adayı GeoGebra ekranında; vektörlerin lineer bağımlı olduklarını ve düzlemi geldiklerini gözlemlemiştir. Baz ve boyut kavramlarında gözlem yapamamıştır.



Şekil 4.30. ÖA2 Öğretmen adayının beşinci soruya yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri

İkisi lineer bağımlı dört vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA4 öğretmen adayının çalışma yaprağına yazdığı ifadeler aşağıda verilmiştir. ÖA4 öğretmen adayının çalışma yaprağı incelendiğinde; vektörlerin birbirinin katı olmadığı için lineer bağımsız olduklarını tahmin etmiştir. Germe, baz ve boyut kavramlarında herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemleri incelendiğinde; lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramında doğru açıklama yaparken, germe ve baz kavramlarında yanlış açıklama yapmıştır. Baz kavramında ise herhangi bir açıklama yapamamıştır.

$$A = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 2), (1, -1, 0)\}$$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümenin gerdiği uzayın geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

lineer bağımsız olduğunu düşünüyorum verilen vektörlerin hiç birisi birisinin katı değil. çeme yapıp yamadığından emin değilim. bazı ve boyutu hakkında fikrim yok.

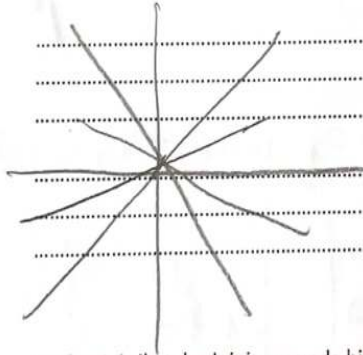
Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

A kümesi lineer bağımlı mıdır?

$$(0,0,0) = a_1(1,0,1) + a_2(0,1,1) + a_3(1,1,2) + a_4(1,-1,0)$$

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 + a_3 + a_4 \\ 0 &= a_2 + a_3 - a_4 \\ 0 &= a_1 + a_2 + 2a_3 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.



bu 4 vektör uzayı peşiyor.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Gözlemim ile tahminim arasında fark yok matematiksel işleminde hata yaptım galiba.

Şekil 4.31. ÖA4 Öğretmen adayının beşinci soruya yönelik çalışma yaprağından birinci kesit

A kümesi lineer bağımlı mıdır?

$$(0,0,0) = a_1(1,0,1) + a_2(0,1,1) + a_3(1,1,2) + a_4(1,-1,0)$$

$$0 = a_1 + a_3 + a_4 \quad 4a_3 + 2a_1 + 2a_2 + 0a_4 = 0 \quad a_1 + a_3 = 0 \quad a_1 = -a_3$$

$$0 = a_2 + a_3 - a_4 \quad 2(a_1 + a_3 + 2a_3) = 0 \quad 2 \cdot 0 = 0 \quad a_2 + a_3 = 0 \quad a_2 = -a_3$$

$$0 = a_1 + a_2 + 2a_3 \quad a_4 = 0 \quad a_3 = -a_1 \quad a_1 = a_2$$

lineer bağımlı determinantla kontrol edicem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lineer bağımlı $\Rightarrow$

A kümesi germe yapar mı?

$$(a,b,c) = a_1(1,0,1) + a_2(0,1,1) + a_3(1,1,2) + a_4(1,-1,0)$$

$$0 = a_1 + a_3 + a_4 \quad a_1 = -a_3 - a_4$$

$$b = a_2 + a_3 - a_4 \quad a_2 = b - a_3 + a_4$$

$$c = a_1 + a_2 + 2a_3 \quad c = (-a_3 - a_4) + (b - a_3 + a_4) + 2a_3 = b - a_3 - a_4 + a_4 + 2a_3 = b + a_3$$

$$a_3 = c - b \quad a_4 = 0$$

$$a_1 = -a_3 - a_4 = -(c - b) - 0 = b - c$$

$$a_2 = b - a_3 + a_4 = b - (c - b) + 0 = 2b - c$$

$$a_1 = b - c \quad a_2 = 2b - c \quad a_3 = c - b \quad a_4 = 0$$

Germe yapar

Şekil 4.32. ÖA4 Öğretmen adayının beşinci soruya yönelik çalışma yaprağından ikinci kesit

A kümesinin bir bazı

A kümesi R_4 germe

A kümesi lineer bağımsız mı $\rightarrow$ A bağımlı

A kümesi R_4 germe mi?

$a_1 = a_2$ olduğu için $(1,0,1), (0,1,1), (1,1,2), (1,-1,0)$

$$a_1 = \frac{3a+b-2c}{2}$$

$$a_3 = c - a$$

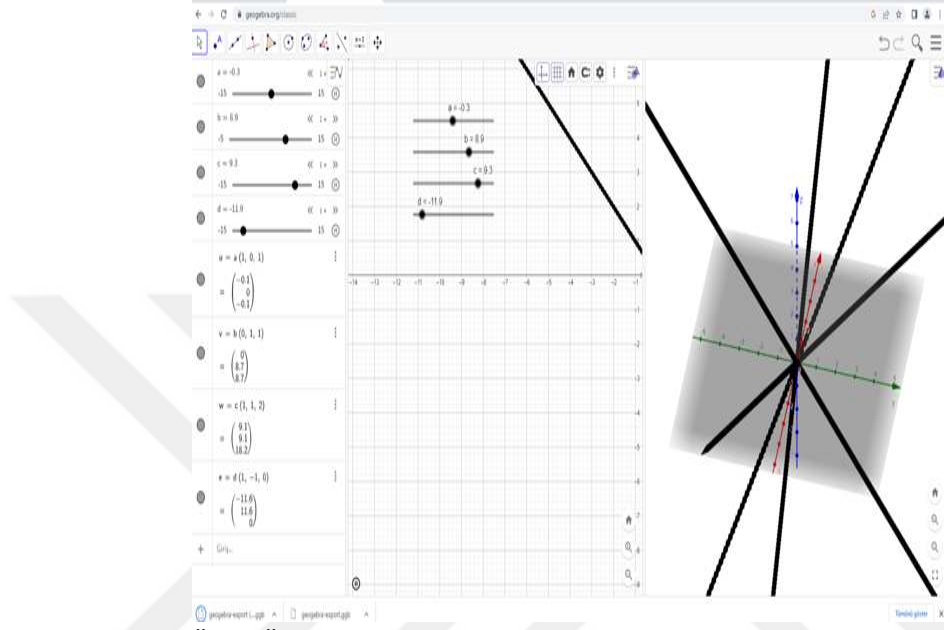
$$a_4 = \frac{a-b}{2}$$

Bağımlı bulamadım 3 boyutta germe

Boyutu ≥ 3

Şekil 4.33. ÖA4 Öğretmen adayının beşinci soruya yönelik çalışma yaprağından üçüncü kesit

İkisi lineer bağımlı dört vektörden oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA4 öğretmen adayının GeoGebra ekranına yazdığı ifadeler aşağıda verilmiştir. ÖA4 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri ise; bu dört vektörün uzayı girdiği yönünde olmuştur. Lineer bağımlılık-bağımsızlık, baz ve boyut kavramlarında herhangi bir gözlem yapamamıştır.



Şekil 4.34. ÖA4 Öğretmen adayının beşinci soruya yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri

Tablo 4.17. Öğretmen adaylarının altıncı soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA1	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin uzayı girdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutu 3 olarak gözlemlemiş.
ÖA2	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.
	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Yanlış.	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin uzayı girdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutu 3 olarak gözlemlemiş.
	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Boyutu tahmin edememişken; 3 olarak gözlemlemiş.

Tablo 4.17. (devam) Öğretmen adaylarının altıncı soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık	Germe	Baz	Boyut
ÖA3	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gerer şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Bazını 4 olarak tahmin etmiş.	T: Tahmin yok.
	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.	G: Vektörlerin uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA4	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: R^3 uzayını gerer şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Yanlış.	M: Doğru.	M: Doğru.	M: Doğru.
	G: Gözlem yok.	G: R^3 uzayını gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA5	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Gerdiği uzayın düzlem olduğu yönünde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Tahmin yok.
	M: Doğru.	M: Açıklama yok.	M: Doğru.	M: Doğru.
	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Bazını 3 olarak gözlemlemiş.	G: Boyutunu 3 olarak gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.	K: Düzlemi gerer şeklinde tahminde bulunmuş ancak, uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA6	T: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gerer şekilde tahminde bulunmuş.	T: Bazının (0,0,0) vektörü olduğunu tahmin etmiş.	T: Boyutunu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Yanlış.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Bazını gözlemleyememiş.	G: Boyutunu 3 olarak gözlemlemiş.
	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.
ÖA7	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.	T: Uzayı gerer şekilde tahminde bulunmuş.	T: Bazını 3 olarak tahmin etmiş.	T: Boyutunu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Yanlış.	M: Doğru.	M: Yanlış.	M: Doğru.
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.	G: Vektörlerin uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutu 3 olarak gözlemlemiş.
	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.

Tablo 4.17. (devam) Öğretmen adaylarının altıncı soruya yönelik çalışma yapraklarına yazmış oldukları ifadelerin analiz tablosu

Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık			Germe	Baz	Boyut
ÖA8	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.		T: Uzayı gerer şekilde tahminde bulunmuş.	T: Tahmin yok.	T: Boyutu 9 olarak tahmin etmiş.
	M: Yanlış.		M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.	M: Açıklama yok.
	G: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemiş.		G: Vektörlerin uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.		K: Tahmini ile gözlemi arasında fark olmadığını düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA9	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.		T: Gerdiği uzayın doğru olduğunu tahmin etmiş.	T: Birbirinin katı olan vektörleri çıkarınca kalanların baz olacağı şeklinde tahminde bulunmuş.	T: Boyutu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Yanlış.		M: Doğru.	M: Doğru.	M: Açıklama yok.
	G: Gözlem yok.		G: Gerdiği uzayın düzlem olduğunu gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Gözlem yok.
	K: Karşılaştırma yok.		K: Gerdiği uzayın doğru olduğu yönünde tahminde bulunmuş ancak, düzlem olduğunu gözlemlemiş.	K: Karşılaştırma yok.	K: Karşılaştırma yok.
ÖA10	T: Vektörlerin lineer bağımlı olduğunu tahmin etmiş.		T: Uzayı gerer şekilde tahminde bulunmuş.	T: Standart baz olarak tahmin etmiş.	T: Boyutunu 3 olarak tahmin etmiş.
	M: Doğru.		M: Doğru.	M: Doğru.	M: Doğru.
	G: Gözlem yok.		G: Vektörlerin uzayı gerdiğini gözlemlemiş.	G: Gözlem yok.	G: Boyutu 3 olarak gözlemlemiş.
	K: Karşılaştırma yok.		K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.	K: Karşılaştırma yok.	K: Tahmini ile gözleminin benzer olduğunu düşünüyor.

Tablo 4.18. Altıncı soruya yönelik frekans tablosu

	Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık			Germe			Baz			Boyut		
	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B	D	Y	B
T	3	7	0	8	2	0	1	3	6	5	1	4
M	3	6	1	5	1	4	4	1	5	4	0	6
G	2	4	4	9	1	0	0	1	9	6	0	4

Öğretmen adaylarının lineer bağımlılık-bağımsızlık konusundaki cevapları incelendiğinde; 3 aday doğru, 7 aday yanlış tahminde bulunmuştur. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 3 aday doğru, 6 aday yanlış işlem yaparken 1 aday işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 2 aday doğru, 4 aday yanlış gözlem yapmıştır.

Geri kalan 4 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 3 adayın tamamı yanlış matematiksel işlem yapmıştır. Yanlış tahminde bulunan 7 adaydan; 3'ü doğru, 3'ü yanlış işlem yapmıştır. Geri kalan aday işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 3 adaydan, 2 tanesi doğru gözlem yaparken, 1 tanesi gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 7 adaydan; 4 tanesi yanlış gözlem yaparken, 3 tanesi herhangi bir gözlem yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının germe konusundaki cevapları incelendiğinde; 8 aday doğru, 2 aday yanlış tahminde bulunmuştur. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 5 aday doğru, 1 aday yanlış işlem yaparken 4 aday herhangi bir işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 9 aday doğru, 1 aday yanlış gözlem yapmıştır. Doğru tahminde bulunan 8 adaydan; 4'ü doğru, 1'i yanlış işlem yaparken 3 aday işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 2 adaydan; 1'i doğru işlem yaparken 1'i işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 8 adayın tamamı doğru gözlem yapmıştır. Yanlış tahminde bulunan 2 adaydan, 1'i doğru, 1'i yanlış gözlem yapmıştır.

Öğretmen adaylarının baz konusundaki cevapları incelendiğinde; 1 aday doğru, 3 aday yanlış tahminde bulunmuştur. Geri kalan 6 aday herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 4 aday doğru, 1 aday yanlış işlem yaparken 5 aday işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 1 aday yanlış gözlem yaparken geri kalan 9 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan aday doğru matematiksel işlem yapmıştır. Yanlış tahminde bulunan 3 adaydan; 1 tanesi yanlış işlem yaparken, 2 tanesi herhangi bir işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 6 adaydan; 3 tanesi doğru işlem yaparken, 3 tanesi işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan aday gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan 3 adayın hiçbirisi gözlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 6 adaydan; 1 tanesi yanlış gözlem yaparken geri kalan 5 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır.

Öğretmen adaylarının boyut konusundaki cevapları incelendiğinde; 5 aday doğru, 1 aday yanlış tahminde bulunmuştur. Geri kalan 4 aday herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; 4 aday doğru işlem yaparken 6 aday işlem yapamamıştır. Gözlemleri incelendiğinde; 6 aday doğru gözlem yaparken 4 aday herhangi bir gözlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 5 adaydan, 2'si doğru işlem yaparken 3'ü herhangi bir işlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan aday matematiksel işlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 4 adaydan; 2'si doğru işlem yaparken 2'si işlem yapamamıştır. Doğru tahminde bulunan 5 adaydan; 4 tanesi doğru gözlem yaparken 1 tanesi herhangi bir gözlem yapamamıştır. Yanlış tahminde bulunan

aday gözlem yapamamıştır. Tahminde bulunamayan 4 adaydan; 2'si doğru gözlem yaparken 2'si herhangi bir gözlem yapamamıştır.

Standart baz ve sıfır vektöründen oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA5 öğretmen adayının çalışma yaprağı aşağıda verilmiştir. ÖA5 öğretmen adayının çalışma yaprağı incelendiğinde; vektörlerin lineer bağımsız olduğunu ve düzlemi gerdiğini tahmin etmiştir. Baz ve boyut kavramlarında herhangi bir tahminde bulunamamıştır. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; lineer bağımlılık-bağımsızlık, baz ve boyut kavramlarında doğru açıklama yaparken, germe konusunda herhangi bir açıklama yapamamıştır.

$$A = \{ \overset{v_1}{(1, 0, 0)}, \overset{v_2}{(0, 1, 0)}, \overset{v_3}{(0, 0, 1)}, \overset{v_4}{(0, 0, 0)} \}$$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümenin gerdiği uzayın geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

lineer bağımsız olduğunu tahmin ediyorum.
Düzlemi gerdiğini tahmin ediyorum.
Baz ve boyutu hakkında tahminim yok.

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 = (0, 0, 0)$ $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ için
sorgulayan $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ var mı? (lineer bağımsız)
 $a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) + a_4(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$
 $a_4 = 0$ a_1, a_2, a_3 sonuçlara göre a_1 da belirlir.
Yani lineer bağımlı. Baz: $\{v_1, v_2, v_3\}$
Boyut = 3

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

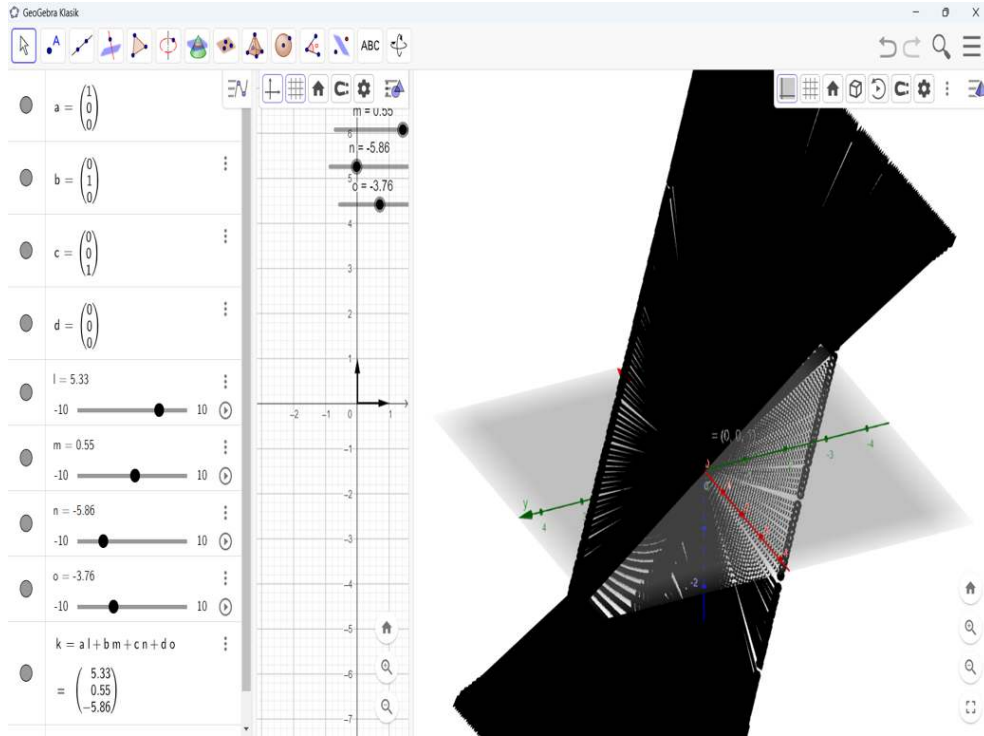
Programı çalıştırdığımda uzayı gerdiğini gördüm.
Böylelikle bazının 3 boyutunun 3 olduğunu.
lineer bağımsız olduğunu gördüm.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Gerdiği uzay tahminimden farklı.

Şekil 4.35. ÖA5 Öğretmen adayının altıncı soruya yönelik çalışma yaprağından kesit

Standart baz ve sıfır vektöründen oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA5 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri aşağıda verilmiştir. GeoGebra ekranındaki gözlemleri ise; vektörlerin lineer bağımsız olduğu, uzayı girdiği, bazının ve boyutunun 3 olduğu yönünde olmuştur.



Şekil 4.36. ÖA5 Öğretmen adayının altıncı soruya yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri

Standart baz ve sıfır vektöründen oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA10 öğretmen adayının çalışma yaprağı aşağıda verilmiştir. ÖA10 öğretmen adayının çalışma yaprağı incelendiğinde; 4. vektör olan sıfır vektörü diğer vektörlerin sıfır katı olarak yazılabileceğinden lineer bağımlı olduğu ve sadece ilk üç vektörün lineer bağımsız olduğunu, üç boyutlu uzayı girdiğini ve bazının standart baz olduğunu tahmin etmiştir. Matematiksel işlemlerine bakıldığında; tüm kavramları doğru açıkladığı tespit edilmiştir.

$$A = \{ \overbrace{(1, 0, 0)}^{v_1}, \overbrace{(0, 1, 0)}^{v_2}, \overbrace{(0, 0, 1)}^{v_3}, \overbrace{(0, 0, 0)}^{v_4} \}$$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümenin gerdiği uzayın geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

$0 \cdot v_1 = v_4$ $0 \cdot v_2 = v_4$ $0 \cdot v_3 = v_4$ Baz: $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
 v_1, v_2, v_3 lineer bağımsızdır.
 3 boyutlu bir uzayı gerer. Standart baz

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

$a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = (a, b, c)$
 Baz: $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \rightarrow$ standart baz
 3 boyutlu uzayı gerer.

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

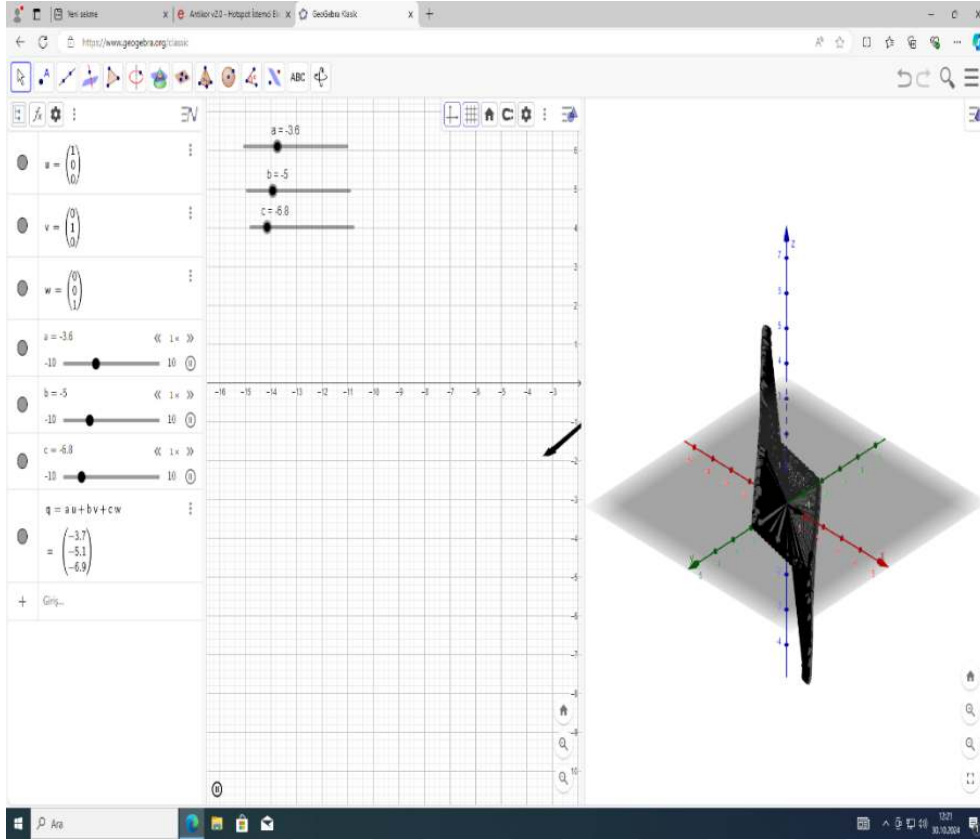
Etkinlik sonucunda 3 boyutlu bir uzayı gerdiğini gördüm.

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

Tahminimde hangi vektörlerin lineer bağımlı - bağımsız olduğunu ve 3 boyutlu bir uzayı gerdiğini söylemiştim. Tahminim ile gözlemim aynı.

Şekil 4.37. ÖA10 Öğretmen adayının altıncı soruya yönelik çalışma yaprağından kesit

Standart baz ve sıfır vektöründen oluşan kümenin yukarıdaki tablolarda verilen durumlarına yönelik olarak ÖA10 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri aşağıda verilmiştir. ÖA10 öğretmen adayının GeoGebra ekranındaki gözlemleri ise; üç boyutlu uzayın gerildiği yönünde olmuştur. Lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz kavramlarında gözlem yapamamıştır.



Şekil 4.38. ÖA10 Öğretmen adayının altıncı soruya yönelik GeoGebra ekranındaki gözlemleri

4.2. Tartışma

Literatür incelendiğinde araştırmacıların lineer cebir dersinin içeriğinden dolayı soyut ve bu yüzden öğrencilerin başarılarının düşük olduğunu vurguladıkları görülmektedir (Dorier, 2002; Wu, 2004; Aydın, 2007; Dikovic, 2007). Bunun için matematik öğretmen adaylarının üç boyutlu uzayda farklı sayıda vektörlerden oluşan kümelerin, lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarını dinamik yazılımlar ile öğrenme süreçleri incelenmiştir. Araştırmada bulgulara yönelik elde edilen sonuçlar tartışılarak çeşitli önerilerde bulunulmuştur.

Sıfırdan farklı tek vektörden oluşan kümenin lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarına yönelik öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde; lineer bağımlılık-bağımsızlık konusunda yarı yarıya doğru tahminde bulundukları, hiçbirinin doğru matematiksel işlem yapamadığı ve yarıdan azının doğru gözlem yaptığı görülmektedir. Öğretmen adaylarının lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık konusundaki cevapları detaylı incelendiğinde, yarısının bir vektörün bileşenlerinin birbirinin katı olmasının, o vektörün lineer bağımlı olduğu anlamına geldiğini düşündüğü görülmektedir. Bu durumu bir öğretmen adayı “*Vektörün elemanları birbirinin katı*

olduğundan lineer bağımlıdır” şeklinde ifade etmiştir. Alan yazın incelendiğinde bu durumu destekleyen çalışmaların olduğu görülmektedir Sierpinska (2000). Lineer cebir öğretiminde öğrencilerin "vektör" kavramını anlamakta güçlük çektiğini ve bileşenler ile vektörün kendisini ayırt edemediklerini belirtmiştir. Harel (1997) öğrencilerin lineer bağımlılığı sıklıkla bileşen düzeyinde yorumladıklarını ve "iki sayı birbirinin katıysa" bu durumu vektörlere yansıttıklarını göstermiştir. Yine bazı öğretmen adaylarının matematiksel işlemlerine bakıldığında, vektörün bileşenlerini birer vektör olarak değerlendirip lineer bağımlılık-bağımsızlık tanımını bu şekilde uygulamaya çalıştıkları sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca verilen vektörü lineer bağımsız üç vektörün toplamı olarak ifade edip bu yüzden lineer bağımsız olduğunu açıklayan öğrenciler de mevcuttur. Öğretmen adaylarının germe konusuna ilişkin verdikleri cevaplar incelendiğinde, tahmin ve matematiksel açıklama açısından doğru yanıt sayısı az olmakla birlikte, en fazla doğru gözlemin bu konuda yapıldığı söylenebilir. Öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu, verilen vektörün gerdiği uzayın 3 boyutlu uzay olduğunu ifade etmiştir. Öyle ki “3 boyutlu uzayı gerer” şeklinde tahminde bulunan bir öğretmen adayı GeoGebra ekranında “Uzayı gerdiğini gözlemledim. Bunun bir vektör olduğunu düşünüyordum. Doğru şeklinde uzadığını gördüm” şeklinde gözlemlerini aktarmasına rağmen tahmini ile gözlemi arasında farklılık olmadığını düşünmüştür. Hatta bir başka öğretmen adayı da “Uzayda bir doğru oluşturdu. Uzayı gerer diye düşündüm. Uzayı gerdi” diyerek, GeoGebra ekranında vektörün gerdiği uzayın orijinden geçen bir doğru olduğunu görmesine rağmen, tahminin doğru olduğunu düşünmüştür. Verilen vektörün üç boyutlu uzayda bir vektör olması ve bu vektörün gerdiği uzayın üç boyutlu uzayın içinde orijinden geçen bir doğru olması sebebiyle üç boyutlu uzayı gemesi olarak düşünülmesine sebep olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının bu konuyla ilgili yaşadıkları kavram yanılgıları Aytekin (2000) çalışmasında da mevcuttur. Öğretmen adaylarının baz ve boyut konusuna ilişkin verdikleri yanıtlara bakıldığında ise hem tahmin hem matematiksel açıklama hem de gözlem açısından doğru yanıt sayısının oldukça düşük olduğu görülmektedir. Nitekim verilen bir kümenin gerdiği uzayın bazını doğru bir şekilde gözlemleyebilen hiçbir öğretmen adayı bulunmamaktadır. Bu durum soyut yapısının öğretmen adaylarında kavramsal zorluklara neden olduğunu göstermektedir (Sierpinska, 2000; Dorier, 2002; Aydın, 2007).

Lineer bağımsız iki vektörden oluşan bir kümeye yönelik olarak öğretmen adaylarının lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarına ilişkin verdikleri cevaplar incelendiğinde; lineer bağımlılık-bağımsızlık konusunda tüm

öğretmen adaylarının doğru tahminde bulunduğu, yarısının bu durumu matematiksel olarak doğru şekilde açıkladığı ve yarıdan fazlasının GeoGebra ekranında vektörlerin lineer bağımsız olduğunu doğru biçimde gözlemlediği görülmektedir. Öğretmen adaylarının verilen vektörlerin gerdiği uzay konusunda doğru tahminde bulunma ve matematiksel olarak doğru açıklama oranları düşük olsa da GeoGebra ekranında en fazla doğru gözlemin germe konusunda yapıldığı söylenebilir. Örneğin yanlış tahminde bulunan, matematiksel işlem yapamayan bir aday “*GeoGebra programında vektörlerin iki boyutlu uzayı gerdiğini gördüm.*” diyerek GeoGebra ile doğru gözlem yapabilmiştir. Bu durum GeoGebra’ nın soyut matematiksel kavramların görselleştirilmesinde etkili olduğunu göstermektedir (Hohenwarter ve Jones, 2007) Buna karşın, baz ve boyut konusunda doğru tahminde bulunma, matematiksel olarak doğru açıklama ve doğru gözlem yapma oranları oldukça düşüktür. Hatta, verilen kümenin bazını doğru tahmin eden veya doğru bir şekilde gözlem yapan hiçbir öğretmen adayı bulunmamaktadır.

Lineer bağımlı iki vektörden oluşan kümenin lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarına yönelik öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar incelendiğinde; öğretmen adaylarının tamamı, lineer bağımlı iki vektörden oluşan kümenin lineer bağımlı olduğunu doğru tahmin etmiş, yarıdan fazlası bu durumu matematiksel olarak doğru bir şekilde açıklamış, ancak yarıdan azı verilen vektörlerin lineer bağımlı olduğunu GeoGebra ekranında doğru bir şekilde gözlemlemiştir. Öğretmen adayları, birbirinin katı olan vektörlerin lineer bağımlı olması gerektiğini kolaylıkla fark etmiş; ancak bazı adayların GeoGebra ortamında lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramını tespit etmede zorlandıkları görülmüştür. Nitekim bir öğretmen adayı, bu durumu “*Programda lineer bağımlılık-bağımsızlığı ayırt edemedim.*” şeklinde ifade etmiştir. Germe kavramına yönelik öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar incelendiğinde, adayların yarısının vektörlerin gerdiği uzayla ilgili doğru tahminde bulunduğu, ancak hiçbirinin bu durumu matematiksel olarak doğru bir şekilde açıklayamadığı görülmüştür. Buna karşılık, öğretmen adaylarının neredeyse tamamı GeoGebra ekranında doğru bir gözlemlerde bulunmuştur. Germe kavramına ilişkin yanlış tahminde bulunan bir öğretmen adayı, GeoGebra'nın sürece katkısını şu sözlerle ifade etmiştir: “*Ben uzayı gerdiğini düşünmüştüm fakat doğruyu gerdiğini gördüm.*” Baz ve boyut kavramlarına ilişkin olarak, lineer bağımsız iki vektörden oluşan kümede olduğu gibi, doğru tahminde bulunma, matematiksel olarak doğru açıklama yapma ve doğru gözlemlerde bulunma oranları yine oldukça düşüktür. Nitekim bir öğretmen adayı bu durumu, “*Doğruyu gerdiğini gördüm. Lineer bağımlı olduğunu fark ettim fakat bazı GeoGebra'da*

göremedim” şeklinde ifade etmiştir. Elde edilen sonuçlara bakıldığında GeoGebra yazılımının öğretmen adaylarının öğrenme süreçlerinde etkili olduğunu göstermektedir. Yapılan araştırmalara da bakıldığında farklı şekillerde yapılan görselleştirme tekniklerinin öğretmen adaylarının lineer cebir kavramlarına yönelik anlamalarını geliştirdiğini ortaya koymaktadır (Konyalıoğlu, 2003; Soylu, 2005; Stewart ve Thomas, 2010). Yine aynı şekilde Harel (2000)’de lineer cebir kavramlarının somutlaştırılması ile öğretmen adaylarının sağlam anlamalar geliştirebileceğini ifade etmiştir.

Öğretmen adaylarının üç lineer bağımsız üç vektörden oluşan bir kümenin lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe, baz ve boyut sorularına verdikleri cevaplar incelendiğinde, adayların neredeyse tamamının lineer bağımlılık-bağımsızlık konusunda doğru tahminde bulunduğu, yarıdan fazlasının matematiksel olarak doğru açıklamalar yaptığı ve yine büyük bir çoğunluğun GeoGebra ekranında doğru gözlemde bulunduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının birçoğu, vektörler arasında ilişki kurarak lineer bağımlı ya da bağımsız olduklarına karar vermeye çalışmıştır. Örneğin, bir öğretmen adayı bu süreci şu şekilde ifade etmiştir: “*Vektörlerin lineer bağımsız olduğunu düşünüyorum çünkü baktığım zaman iki vektörü toplayıp ya da birbirinin katı yaptığımda diğer vektörü elde edemiyorum.*” Ayrıca, vektörlerin lineer bağımsız olduğunu tahmin eden bir başka aday, GeoGebra ekranındaki gözlemine atıfta bulunarak, “*Bu üç vektörün lineer bağımsız olduğunu GeoGebra ekranında da gözlemledim*” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Germe kavramına ilişkin olarak da benzer bir durum söz konusudur. Öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu doğru tahminde bulunmuş, gerdiği uzayı ise neredeyse tamamı GeoGebra ekranında doğru bir şekilde gözlemleyebilmiştir. Hatta yanlış tahminde bulunan ya da herhangi bir tahminde bulunamayan bazı öğretmen adaylarının dahi GeoGebra ortamında doğru gözlem yapabildikleri görülmektedir. Bu duruma örnek olarak bir öğretmen adayı, “*Gerdiği uzayı geometrik olarak tahmin edememiştim ancak GeoGebra sayesinde uzayı gerdiğini fark ettim*” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Bununla birlikte, öğretmen adaylarının baz kavramına ilişkin yanıtları incelendiğinde, yalnızca bir öğretmen adayının verilen kümenin bazını doğru bir şekilde tahmin edebildiği, ancak hiçbir adayın GeoGebra ekranında bu kümenin bazını doğru bir şekilde gözlemleyemediği gözlemlenmiştir. Örneğin, bir öğretmen adayı bu durumu şu şekilde ifade etmiştir: “*Gözlemlerim ile tahminlerim arasında bir fark yok ama GeoGebra’da bazını bulmakta çok zorlandım.*” Bir başka öğretmen adayı ise durumu, “*Bazını bulamadım*” şeklinde açıklamıştır. Boyut kavramına ilişkin olarak, öğretmen adaylarının yarıdan fazlası doğru tahminde bulunmuş, ancak yarıdan azı matematiksel

işlemi doğru yapabilmiş ve gözlemi doğru bir şekilde gerçekleştirebilmiştir. Boyutun 3 olduğunu tahmin eden bir öğretmen adayı “*GeoGebra ekranında boyutunun 3 olup olmadığını doğrulayamadım*” şeklinde ifade etmiştir.

Öğretmen adaylarının iki lineer bağımsız üç vektörden oluşan bir kümeye yönelik lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarına ilişkin verdikleri cevaplar incelendiğinde; adayların neredeyse tamamının lineer bağımlılık-bağımsızlık konusunda doğru tahminde bulunduğu, matematiksel olarak doğru bir şekilde cevapladığı ve yarıdan fazlasının GeoGebra ekranında doğru gözlem yaptığı gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, germe konusundaki cevaplar incelendiğinde; öğretmen adaylarının yarıdan azı doğru tahminde bulunmuş ve doğru matematiksel işlem yapmıştır. Adayların yarıdan fazlası ise doğru gözlem yapabilmıştır. Germe kavramına ilişkin gözlem yapamayan aday bulunmamaktadır. Bir öğretmen adayı, “*Ben üç boyutlu uzayı gerdiğini düşünmüştüm, ancak iki boyutlu bir düzlemi gerdiğini gördüm.*” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Baz kavramına ilişkin öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde; yalnızca bir aday doğru tahminde bulunmuş, yarıdan az sayıda aday doğru matematiksel işlem yapmıştır. Bunun yanı sıra, hiçbir aday doğru ya da yanlış herhangi bir gözlemde bulunamamıştır. Örneğin bir öğretmen adayı “*Tahmin edemediklerimi GeoGebra sayesinde görselleştirerek buldum fakat bazı konusunda bir fikrim yok*” şeklinde bir açıklamada bulunmuştur. Öğretmen adaylarının boyut kavramına ilişkin cevapları incelendiğinde doğru tahminde bulunup, matematiksel olarak doğru cevap sayısının yarıdan az olmasına rağmen adayların yarısı doğru gözlem yaptığı görülmektedir. Örneğin öğretmen adaylarından biri boyut konusunda “*Tahminime göre üç boyutlu idi. Ancak şimdi işlemleri gerçekleştirdiğimde iki boyutlu olduğunu gözlemledim.*” şeklinde açıklama bulunmuştur.

Öğretmen adaylarının, bir lineer bağımsız üç vektörden oluşan kümeye yönelik lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarına ilişkin verdikleri cevaplar incelendiğinde; adayların tamamının lineer bağımlılık-bağımsızlık konusunda doğru tahminde bulunduğu ve matematiksel olarak doğru yanıtlar verdiği, ancak yarıdan azının GeoGebra ekranında doğru gözlem yapabildiği görülmektedir. Örneğin, bir öğretmen adayı gözlemine dayanarak, “*Verilen üç vektörün çakıştığını, dolayısıyla bu üç vektörün lineer bağımlı olduğunu gözlemledim*” şeklinde ifade etmiş; bir başka öğretmen adayı ise, “*Lineer bağımlı mı, bağımsız mı anlayamadım*” demiştir. Germe kavramına ilişkin olarak, doğru tahminde bulunup matematiksel olarak doğru yanıt verenlerin sayısı yarıdan az olmasına karşın, GeoGebra ortamında doğru gözlem yapanların oranı yarıdan

fazladır. Hatta germe kavramında yanlış tahmin yapan ya da tahmin yapamayan adayların çoğunluğu doğru gözlemlerde bulunabilmiştir. Nitekim bir öğretmen adayı, “*Gerdiğim uzayın R^3 olduğunu tahmin ediyordum; ancak GeoGebra sayesinde aslında bir doğruyu gerdiğimi fark ettim*” şeklinde bir açıklamada bulunmuştur.

Baz kavramına ilişkin olarak doğru tahminde bulunan yalnızca bir öğretmen adayı bulunmaktadır. Öğretmen adaylarının yarıdan fazlası matematiksel olarak doğru açıklamalar yapmış olmasına rağmen, hiçbirisi verilen kümenin bazını GeoGebra ekranında gözlemleyememiştir. Adayların en çok yanıtsız bıraktığı bölümün, baz kavramının GeoGebra ortamında gözlemlenmesine ilişkin kısım olduğu tespit edilmiştir. Nitekim bir öğretmen adayı, “*Bu üç vektörün bir doğruyu gerdiğini ve lineer bağımlı olduklarını gözlemledim; ancak kümenin bazını göremedim*” şeklinde ifade etmiştir. Boyut kavramına ilişkin olarak hem doğru tahminde bulunan hem matematiksel olarak doğru açıklama yapan hem de doğru gözlemlerde bulunan adayların sayısı oldukça düşüktür.

Sıfır vektöründen oluşan kümeye ilişkin lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarına yönelik öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlar incelendiğinde; bu kümenin lineer bağımlı olduğunu doğru tahmin eden ve matematiksel olarak doğru açıklama yapan adayların sayısının yarıdan az olduğu görülmektedir. Ayrıca, diğer sorulardan farklı olarak, hiçbir öğretmen adayı bu kümenin lineer bağımlı olduğunu GeoGebra ekranında gözlemleyememiştir. Öğretmen adaylarının sıfır vektörünün gerdiği uzaya ilişkin verdikleri yanıtlar incelendiğinde, doğru tahminde bulunup matematiksel olarak doğru açıklama yapan aday sayısının düşük olduğu görülmektedir. Ancak buna rağmen, en fazla doğru gözlemin germe kavramına yönelik olarak yapıldığı söylenebilir. Gerdiği uzay hakkında bir fikri olmadığını belirten bir öğretmen adayı, “*Sadece bir nokta oluştu, sürgüyle herhangi bir hareket olmadı,*” şeklinde yorum yapmıştır. Bir başka öğretmen adayı ise, “*Gerdiği yer hakkında bir tahminim yoktu; ancak etkinlik sonucunda $(0, 0, 0)$ noktasını gerdiğini gördüm*” diyerek uygulama sayesinde gözlem yapabildiğini ifade etmiştir. Öğretmen adaylarının baz konusuna ilişkin yanıtları incelendiğinde, doğru tahminlerde bulunma ve matematiksel açıdan doğru açıklama yapma oranlarının, diğer sorularda olduğu gibi, düşük seviyede kaldığı görülmektedir. Ancak, bu soruya özgü olarak GeoGebra ekranında doğru gözlemler yapma oranının, diğer sorulara kıyasla daha yüksek olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının yarısı boyut konusunda doğru tahminde bulunmuş, ancak yalnızca bir aday matematiksel olarak doğru bir açıklama yapabilmiştir. Buna karşılık, GeoGebra ekranında doğru gözlem yapan aday sayısının yarıya yaklaştığı görülmektedir. Bazı ve boyutu hakkında hiçbir tahmini olmadığını

belirten bir öğretmen adayı, “*GeoGebra uygulamasında programı çalıştırdığımda vektör gözükmeydi. Bu da bazının ve boyutunun olmadığını gösterdi*” şeklinde açıklama yapmıştır. Bir başka öğretmen adayı ise, “*Verilen ifade bir nokta oluşturdu. Germe yok. Bazı ve boyutu yok*” ifadesiyle benzer bir gözlemde bulunmuştur.

İki tanesi lineer bağımlı dört vektörden oluşan bir kümeye ilişkin öğretmen adaylarının lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarına yönelik yanıtları incelendiğinde; öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramında doğru tahminlerde bulunup, matematiksel olarak da doğru açıklamalar yaptığı görülmektedir. Ayrıca adayların yarıdan fazlası GeoGebra ekranında da doğru gözlem yapmıştır. Katılımcıların çoğu, vektörler arasındaki lineer bağıntıyı fark ederek kümenin lineer bağımlı olduğunu ifade etmiştir. Örneğin bir öğretmen adayı, “*Kümeye baktığımda $(1, 0, 1)$ ve $(0, 1, 1)$ vektörlerini topladığımızda $(1, 1, 2)$ vektörünü elde ettiğimizi gördüm. Dolayısıyla küme lineer bağımlıdır.*” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Germe kavramına ilişkin verilen yanıtlarda ise diğer sorulardan farklı olarak, doğru tahminde bulunan hiçbir öğretmen adayının olmadığı dikkat çekmektedir. Matematiksel olarak doğru açıklama yapan aday sayısı yarıdan az olmakla birlikte, GeoGebra ekranındaki doğru gözlem oranı yarıdan fazladır. Germe kavramında başlangıçta tahminde bulunamayıp, GeoGebra yardımıyla doğru gözleme ulaşan bir aday, “*Gerdiği uzayı geometrik olarak ifade edememiştim. GeoGebra ile bunun düzlem olduğunu anladım.*” ifadeleriyle sürecini açıklamıştır. Başlangıçta vektörlerin lineer bağımsız olduğu ve uzayı gerdiği yönünde yanlış tahminde bulunan bir başka aday ise, GeoGebra sayesinde “*Vektörlerin düzlem oluşturduğunu gözlemledim. Böylece lineer bağımlıdır.*” şeklinde bir açıklama yaparak her iki kavramla ilgili doğru sonuca ulaşmıştır. Baz kavramına ilişkin öğretmen adaylarının yanıtları incelendiğinde ne doğru tahminde bulunan ne de doğru gözlem yapan bir adaya rastlanmıştır. Sadece bir öğretmen adayı matematiksel olarak doğru açıklama yapmıştır. Örneğin bir aday, “*Bazı hakkında gözlem yapamadım.*” şeklinde durumu açıklarken, bir diğeri “*Bazı hakkında bir fikrim yok.*” diyerek benzer bir durumu dile getirmiştir. Boyut kavramında ise yalnızca bir öğretmen adayı doğru tahminde bulunmuş ve sadece bir aday matematiksel olarak doğru açıklama yapmıştır. Ancak, GeoGebra ekranındaki gözlem oranının baz kavramına kıyasla daha yüksek olduğu görülmektedir. Boyutla ilgili doğru gözlem yapan adayların, vektörlerin gerdiği uzaydan yola çıkarak boyut hakkında fikir yürüttükleri anlaşılmaktadır. Örneğin bir öğretmen adayı, “*Etkinlik sonucunda 2 boyutlu bir düzlemi gerdiğini gördüm.*” ifadesini kullanırken, bir diğeri “*Düzlemi gerer, 2 boyutludur.*”

şeklinde gözlemde bulunmuştur. Harel (2000)'e göre somutlaştırma ile gerçekleştirilen bir öğretimin istenilen görselleştirmenin yanında öğrencilerin genelleme yapmalarını sağlamalı ve öğrencileri bu süreçte cesaretlendirmelidir. GeoGebra yazılımının özellikleri düşünüldüğünde bu şekilde bir görselleştirme yaptığı ve öğrencilerin istenilen düzlemleri rahatlıkla gözlemledikleri bu sonuçlarla görülmektedir.

R^3 uzayının standart bazı ile sıfır vektöründen oluşan bir kümeye ilişkin öğretmen adaylarının lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarına yönelik verdikleri yanıtlar incelendiğinde; öğretmen adaylarının çoğunluğunun, küme sıfır vektörünü içermesine rağmen, bu vektörlerin lineer bağımsız olduğu yönünde tahminde bulunduğu görülmektedir. Bu durum, adayların standart bazın lineer bağımsızlığına odaklandıkları ve sıfır vektörünün bu bağımsızlığı bozduğunu göz ardı ettiklerini göstermektedir. Lineer bağımlılık kavramını hem matematiksel olarak doğru açıklayan hem de GeoGebra ekranında doğru gözlem yapan öğretmen adayı sayısı ise yarıdan azdır. Germe kavramına ilişkin verilen yanıtlarda, öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun doğru tahminde bulunduğu, yaklaşık yarısının matematiksel olarak doğru açıklama yaptığı ve neredeyse tamamının GeoGebra aracılığıyla doğru gözlem gerçekleştirdiği belirlenmiştir. Örneğin bir öğretmen adayı, “*Programı çalıştırdığımda uzayı gerdiğini gördüm.*” şeklinde ifadesiyle bu gözlemini paylaşmıştır. Baz kavramına yönelik cevaplar incelendiğinde ise yalnızca bir öğretmen adayının doğru tahminde bulunduğu, yarıdan azının matematiksel olarak doğru açıklama yaptığı ve hiçbir adayın verilen kümenin gerdiği uzayın bazını GeoGebra üzerinden doğru şekilde gözlemleyemediği anlaşılmaktadır. Adaylardan biri bu durumu, “*Bazını GeoGebra uygulamasında göremiyorum*” şeklinde ifade etmiştir. Boyut kavramında ise öğretmen adaylarının yarısı doğru tahminde bulunmuş, yarıdan azı matematiksel olarak doğru açıklama yapmış, buna karşın yarıdan fazlası vektörlerin gerdiği uzaydan yola çıkarak boyutu doğru şekilde ifade etmiştir. Örneğin bir öğretmen adayı, “*Üç boyutlu uzayı gerdiğini gördüm.*” diyerek gözlemlerini aktarmıştır. Dorier (2002) ve Aydın (2007)'de yapmış oldukları araştırmalarında öğrencilerin çıkarımlarının geometrik kavramlar ile sınırlı kaldığını ve yüksek boyutlu uzaylar ve soyut vektör uzayları kavramlarının tam olarak anlaşılamadığını ortaya koymuşlardır. Bunun için Harel (2000)'nin de belirttiği gibi lineer cebir kavramlarının geometrik olarak devamlı somutlaştırılması ve bu şekilde öğrencilerin anlamalarının sağlam bir tabana oturtulması gerekmektedir. Aytekin ve Kıymaz (2019)'da yapmış oldukları araştırma ile görselleştirme yoluyla kavramların daha hızlı şekilde anlaşılabilirdiği sonucuna ulaşmışlardır. Genel olarak bakıldığında öğretmen

adaylarının lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarına yönelik olarak GeoGebra ekranında sürgülere bağlı olarak oluşturmuş oldukları şekilleri bu ikonlar sayesinde değiştirerek farklı gözlemler yapabilme imkânı bulmuşlardır. Matematik ve geometrinin birçok temsilini bir arada bulunduran GeoGebra yazılımı, öğretmen adaylarının sembolik ve görsel temsilleri arasında ilişki kurabilmelerine bu şekilde de matematiksel bir anlayış geliştirmelerine yardımcı olabilmektedir (Dikovic, 2009).



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde yapılan analizler ve değerlendirmeler neticesinde ulaşılan, tez çalışmasına ait sonuçlar ve çözüm önerileri ele alınmıştır.

5.1. Sonuçlar

Yapılan incelemeler doğrultusunda, öğretmen adaylarının farklı sayıda vektörlerden oluşan kümelerin lineer bağımlılık-bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramlarını tahmin edip matematiksel açıdan açıklama ve dinamik matematik yazılımı GeoGebradaki gözlemlerine göre yorumlamalarına bakıldığında, lineer bağımlılık bağımsızlık konusunda tek vektörden oluşan küme ile iki veya daha fazla vektörden oluşan küme arasında farklılıklar ortaya çıktığı görülmektedir. Öğretmen adaylarının tek vektörden oluşan kümenin lineer bağımlılık-bağımsızlık durumunu hem tahmin etme hem matematiksel olarak açıklama hem de GeoGebra ekranında gözlemleyebilme durumlarının iki veya daha fazla vektör içeren kümelerle oranla daha düşük kaldığı görülmektedir. Öğretmen adayları genellikle sıfırdan farklı tek vektörün bileşenlerinin birbirinin katı olmasını vektörün lineer bağımlı olması şeklinde yorumladığı ancak iki veya daha fazla vektör içeren kümelerde ise vektörler arasında bir lineer bağıntı kurmaya çalıştıkları görülmektedir. Ayrıca öğretmen adaylarının hiçbiri sadece sıfır vektöründen oluşan kümenin lineer bağımlılık bağımsızlık durumunu GeoGebrada gözlemleyememiş. Bu yüzden sadece sıfır vektöründen oluşan kümenin lineer bağımlı olduğunu gözlemlemek için GeoGebra'nın yeterli olmadığı söylenebilir. Diğer yandan öğretmen adaylarının tüm sorulara verdikleri cevaplara bakıldığında en çok doğru tahminde bulunup matematiksel olarak da doğru açıklanan kavramın özellikle iki veya daha fazla vektörden oluşan kümeler için lineer bağımlılık bağımsızlık kavramı olduğu sonucuna ulaşılabilir.

Germe konusunda sorular arasında ciddi bir farklılık olmamakla birlikte GeoGebra ekranında en çok doğru gözlemin germe kavramı için yapıldığı görülmektedir. Ayrıca lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramından sonra doğru tahminde bulunulan ve matematiksel olarak doğru olarak açıklanan kavram yine Germe kavramıdır.

Hem teorik olarak hem de dinamik Geometri yazılımı GeoGebradaki başarının en düşük olduğu kavramın ise baz ve boyut kavramları olduğu söylenebilir. Baz ve boyut kavramında sadece sıfır vektöründen oluşan küme ile diğer kümeler arasında farklılıklar olduğu görülmektedir. Öğretmen adayları sadece sıfır vektöründen oluşan kümenin dışındaki diğer kümelerde GeoGebra ekranında baz ve boyut kavramını genellikle

görselleştiremezken; baz ve boyut konusunda en çok doğru gözlemin sadece sıfır vektöründen oluşan küme için yapıldığı görülmektedir.

Sonuç olarak öğretmen adaylarının lineer cebir konularına ilişkin kavramsal bilgi düzeylerinin özellikle soyut kavramlar olan "baz" ve "boyut" alanlarında yetersiz olduğu, buna karşın "lineer bağımlılık-bağımsızlık" ve kısmen de "germe" kavramlarında daha yüksek başarı gösterdikleri tespit edilmiştir. Dinamik matematik yazılımlarının (örneğin GeoGebra) kullanımı, öğretmen adaylarının görsel düzeyde bazı kavramları daha doğru biçimde gözlemleyebilmelerine olanak sağlamış; özellikle "germe" kavramında doğru gözlem oranlarının arttığı gözlemlenmiştir. Ancak, bu teknolojik araçların, kavramların matematiksel temellendirilmesi ve soyut düzeyde anlaşılması açısından tek başına yeterli olmadığı, adayların çoğunlukla yüzeysel gözlemlerle yetindikleri ve kavramlar arası ilişki kurmakta zorlandıkları belirlenmiştir. Bu bağlamda, lineer cebir öğretiminde yalnızca görselleştirmeye dayalı yaklaşımların değil, aynı zamanda kavramsal açıklamaları ve matematiksel akıl yürütmeyi geliştiren öğretim stratejilerinin de bütüncül şekilde ele alınması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

5.2. Öneriler

Yapısından ötürü soyut kalan lineer cebir dersinin öğretimi yapılırken farklı vektör kümeleri vererek öğrencilerin kavram yanılgısı varsa tespit etmek gerekmektedir. GeoGebra gibi dinamik yazılımlar kullanarak kavramların somutlaştırılması konunun daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacaktır.

Araştırma lineer cebirde bağımlılık-bağımsızlık, germe, baz ve boyut kavramları ile sınırlı kalmıştır. Lineer cebirin başka kavramları ve başka dinamik yazılımlar ile çalışma çeşitlendirilebilir.

KAYNAKLAR

- Açıkyıldız, G. (2019). *Vektör uzaylarının öğretimine yönelik öğrenme ortamının tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi* (Yüksek lisans tezi). Trabzon Üniversitesi.
- Açıkyıldız, G., & Kösa, T. (2021). Creating design principles of a learning environment for teaching vector spaces. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 12(1), 244-289.
- Aydın, S. (2007). Bazı özel öğretim yöntemlerinin lineer cebir öğretimine etkileri. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, 6(19), 214-223.
- Aydın, S. (2009). Lineer cebir eğitimi üzerine. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10(1), 93-105.
- Aydın, S. (2009b). The factors affecting teaching linear algebra. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 1, 1549-1553.
- Aytekin, A. (2020). Simplisel leibniz cebirler üzerine. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 10(2), 1224-1232.
- Aytekin, C., & Kıymaz, Y. (2019). Teaching Linear Algebra Supported by GeoGebra Visualization Environment. *Acta Didactica Napocensia*, 12(2), 75-96.
- Baki, A. (1996). Matematik öğretiminde bilgisayar her şey midir?. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12, 135-143.
- Baki, A. (2002). *Öğrenen ve öğretenler için bilgisayar destekli matematik*. Ceren Yayın Dağıtım.
- Baltacı, S. (2014). *Dinamik matematik yazılımının geometrik yer kavramının öğretiminde kullanılmasının bağlamsal öğrenme boyutundan incelenmesi* (Doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi.
- Baltacı, S., Yıldız, A., & Kösa, T. (2015). Analitik geometri öğretiminde GeoGebra yazılımının potansiyeli: Öğretmen adaylarının görüşleri. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 6(3), 483-505.
- Baltacı, S., & Baki, A. (2018). Parabol kavramının öğretiminde dinamik matematik yazılımının bağlamsal öğrenme ortamının oluşmasında rolü. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31(1), 1-28.

- Baltacı, S., & Yıldız, A. (2018). Geometrik yer problemlerinin yazılım destekli çözümleri esnasında tahmin et-gözle açıkla (TGA) stratejisinin kullanımı. *Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 19(3), 1873-1890.
- Britton, S., & Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: An attempt to understand students' conceptual difficulties. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(7), 963-974.
- CalGeo. (2007). *Teaching calculus using dynamic geometric tools*. <http://www.math.uoa.gr/calgeo/> (10 Ekim 2012'de edinilmiştir).
- Carlson, D. (1993). Teaching linear algebra: Must the fog always roll in?. *The College Mathematics Journal*, 24(1), 29-40.
- Cohen, L., & Manion, L. (1994). *Research methods in education* (4th Ed.). Newyork: Rutledge.
- Çelik, D. (2015). Investigating students' modes of thinking in linear algebra: The case of linear independence. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 16(1). Retrieved January 20, 2015.
- Çepni, S. (2007). *Araştırma ve proje çalışmalarına Giriş* (Genişletilmiş 3. Baskı). Trabzon: Celepler Matbaacılık.
- Çepni, S., & Çil, E. (2009). *Fen ve teknoloji programı (tanıma, planlama, uygulama ve sbs'yle ilişkilendirme)*. İlköğretim 1. ve 2. Kademe Öğretmen El Kitabı, Ankara: Pegem A Yayıncılık.
- Diković, L. (2007). Interactive learning and teaching of linear algebra by web technologies: Some examples. *The Teaching of Mathematics*, 19, 109-116.
- Diković, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. <http://www.doiserbia.nb.rs/img/doi/1820-0214/2009/1820-02140902191D.pdf> (15 Nisan 2013'te edinilmiştir).
- Doğan, H. (2018). *Mental schemes of: Linear algebra visual constructs*. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman & M. Zandieh (Ed.) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 219-239). Hamburg: Springer International Publishing.
- Donevska-Todorova, A. (2018). *Fostering students' competencies in linear algebra with digital resources*. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman & M. Zandieh

- (Ed.) Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra (pp. 261-276). Hamburg: Springer International Publishing.
- Dorier, J. L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear Algebra and Its Applications*, 275, 141-160.
- Dorier, J. L. (2002). Teaching linear algebra at university. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 3, 875-884.
- Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). *The obstacle of formalism in linear algebra*. In J. L. Dorier (Ed.), On the teaching of linear algebra (pp. 85–124). Dordrecht: Kluwer Academic.
- Dorier, J.L. (1995). Meta Level in the Teaching of Unifying and Generalizing Concepts in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 175-197.
- Dorier, J.-L., & Sierpinski, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 255–273). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_24
- Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. *Resources for Teaching Linear Algebra*, 42, 107-126.
- Erçerman, B. (2008). *Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerinin lineer cebir bilgilerinin değerlendirilmesi* (Yüksek lisans tezi). Yüzüncü Yıl Üniversitesi.
- Güven, B., & Karataş, İ. (2009). Dinamik geometri yazılımı Cabri'nin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik yer problemlerindeki başarılarına etkisi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 42(1), 1-31.
- Haddad, M. (1999). *Difficulties in the learning and teaching of linear algebra: A personal experience* [Doktora tezi]. Concordia Üniversitesi.
- Harel, G. (1989). Learning and teaching linear algebra: Difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11, 139-148.
- Harel, G. (1997) *The linear algebra curriculum study group recommendations: Moving beyond concept definition*. Carlson D., Johnson, C, Lay, D., Porter, D., Watkins, A. & Watkins, W. (Eds.). Resources for Teaching Linear Algebra.
- Harel, G. (1998). Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa). *The American Mathematical Monthly*, 105(6), 497-507.

- Harel, G. (2000). *Principles of learning and teaching of linear algebra: Old and new observations*. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Herrero, M. P. (2000). Strategies and computer projects for teaching linear algebra. *International Journal of Mathematics Education and Science Technology*, 31(2), 181-186. <https://doi.org/10.1080/002073900287237>
- Hillel, J. (2000). *Modes of description and the problem of representation in linear algebra*. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004). *Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra*. <http://www.GeoGebra.org/publications/pecs> (22 Temmuz 2012'de edinilmiştir).
- Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: The case of GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 126-131.
- Hohenwarter, M., Preiner, J., & Yi, T. (2007). *Incorporating GeoGebra into teaching mathematics at the college level*. Paper presented at Proceedings of the International Conference for Technology in Collegiate Mathematics. Boston, USA: ICTCM.
- Hristovitch, S.P. (2001). *Students' conception of introductory linear algebra notions: The role of metaphors, analogies and symbolization* [Unpublished doctoral dissertation]. Purdue University.
- Kan, O. (2014). *GeoGebra destekli öğretimin lineer cebir dersine ait bazı konularda akademik başarı üzerine etkisi* (Yüksek lisans tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi.
- Kolman, B., Hill, D. R., & Akın, Ö. (2002). *Uygulamalı lineer cebir*. Palme Yayıncılık.
- Konyalıoğlu, A. C. (2003). *Üniversite düzeyinde vektör uzayları ile ilgili kavramların anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımının etkinliğinin incelenmesi* (Doktora Tezi). Atatürk Üniversitesi.
- Konyalıoğlu, S., Konyalıoğlu, A. C., İpek, S., & Işık, A. (2005). The role of visualization approach on student's conceptual learning. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 7(1), 59-67.

- Köse, S., Coştu, A. G. B., & Keser, A. G. Ö. F. (2003). Fen konularındaki kavram yanlışlarının belirlenmesi: Tga yöntemi ve örnek etkinlikler. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 13(13), 43-53.
- Kutluca, T., & Zengin, Y. (2011). Matematik öğretiminde GeoGebra kullanımı hakkında öğrenci görüşlerinin değerlendirilmesi. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17, 160-172.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2nd ed.). Sage Publications
- Moss, L. J. (2000). *The use of dynamic geometry software as a cognitive tool* (Unpublished doctoral dissertation). The University of Texas at Austin.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*.
- Olive, J. (2002). Implications of using dynamic geometry technology for teaching and learning. In M. Saraiva, J. Matos & I. Coelho (Eds.), *Ensino e Aprendizagem de Geometria* (ss. 300-321). SPCE.
- Pecuch-Herrero, M. (2000). Strategies and computer projects for teaching linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(2), 181-186.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.
- Sfard, A. (1997). The many faces of mathematics: Do mathematicians and researchers in mathematics education speak about the same thing? In A. Sierpńska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 491–511). Springer.
- Sierpńska, A. (2000). *On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra*. In J.L.Dorier (Ed.). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Sierpińska, A. (1999). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 105-112). Haifa, Israel.

- Sierpinska, A., Trgalova, J., & Hillel, J. (1999). Teaching and learning linear algebra with Cabri. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 100, 156.
- Soylu, Y. (2005). *Lineer dönüşümler ve lineer dönüşümlerle ilgili kavramların öğretilmesinde geometri ile somutlaştırma yönteminin etkinliği* (Doktora tezi). Atatürk Üniversitesi.
- Spence, E. L., Insel, A. J. & Friedberg, S. H. (2000). *Elementary linear algebra*. Prentice Hall.
- Stewart, S., & Thomas, M. O. J. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 173-188.
- Tabaghi, S. G. (2012, February). Dynamic geometric representation of eigenvectors. *Paper presented at the Research in Undergraduate Mathematics Education Conference*, Portland.
- Tabaghi, S. G., & Sinclair, N. (2013). Using dynamic geometry software to explore eigenvectors: The emergence of dynamic-synthetic-geometric thinking. *Technology, Knowledge and Learning*, 18(3), 149-164.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12(2), 151–169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>.
- Trigo, M., & Perez, H. (2010). High School Teachers' Use of Dinamic Software to Generate Serendipitous Mathematical Relations. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 7(1), 31-46.
- Turgut, M. (2010). *Teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yeteneklerine etkisi* (Doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi.
- Uhlig, F. (2003). A new unified, balanced and conceptual approach to teaching linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, 36(1), 147-159.
- Wang, T. W. (1989). Applied Linear Algebra. *Chemical Engineering Education*, 23(4), 236-241.
- Wellington, J. (2000). *Educational Research, Contemporary Issues And Practical Approaches*. Continuum, London.

- White, R.T., & Gunstone, R. F. (1992). *Probing understanding*. The Falmer Press, London.
- Wu, H. (2004). Basic skills versus conceptual understanding: A bogus dichotomy in mathematics education. *American Educator*, 28(2), 14–19.
- Yıldırım, A., & Simsek, H. (1999). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (11. baski: 1999-2018), Seçkin Yayıncılık.





EKLER

Ek-1. Çalışma Yaprakları

1. Soru

$$A = \{(1, 2, 4)\}$$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümelerin gerdiği uzayların geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

.....

.....

.....

.....

.....

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

.....

.....

.....

.....

.....

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

.....

.....

.....

2. Soru A şıkkı

a) $A = \{ (1, 2, 4), (1, 2, -4) \}$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümelerin gerdiği uzayların geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

.....

.....

.....

.....

.....

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

.....

.....

.....

.....

.....

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

.....

.....

.....

2. Soru B şıkkı

b) $B = \{ (1, 2, 4), (2, 4, 8) \}$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümelerin gerdiği uzayların geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

.....

.....

.....

.....

.....

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

.....

.....

.....

3. Soru A şıklı

a) $A = \{ (1, 2, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2) \}$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümelerin gerdiği uzayların geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

[illegible]

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

[illegible]

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

[illegible]

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

.....

.....

.....

3. Soru B şıkkı

$$b)B= \{ (4, 3, 7), (-1, 2, 5), (7, 8, 19) \}$$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümelerin gerdiği uzayların geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

.....

.....

.....

.....

.....

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

.....

.....

.....

.....

.....

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

.....

.....

.....

3. Soru C şıkkı

c) $C = \{ (2, 4, 3), (-2, -4, -3), (10, 20, 15) \}$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümelerin gerdiği uzayların geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

.....

.....

.....

.....

.....

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

[illegible]

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

[illegible]

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

```
*****
*****
*****
```

4. Soru

$A=\{\vec{0} = (0,0,0)\}$ Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, boyutunu ve bu kümenin gerdiği uzayın geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukardaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

.....

.....

.....

Yukardaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

.....

.....

.....

5. Soru

$$A = \{ (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 2), (1, -1, 0) \}$$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümenin gerdiği uzayın geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

.....
.....
.....

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

.....
.....
.....

6. Soru

$$A = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0) \}$$

Kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını, gerdiği uzayını, bazını, boyutunu ve bu kümenin gerdiği uzayın geometrik olarak ne belirttiğini açıklayınız.

Yukarıdaki problemi dikkate alarak bir tahminde bulununuz ve niçin bu şekilde bir tahminde bulunduğunuzu açıklayınız?

.....

.....

.....

Yukarıdaki tahmininiz kalem kullanarak matematiksel olarak açıklayınız.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

GeoGebra programını çalıştırarak istenilen ifadeyi yazılımda oluşturunuz. Gözlemlerinizi aşağıya yazınız.

.....

.....

.....

.....

.....

Gözleminiz ile tahmininiz arasında bir farklılık var mıdır? Var ise nedenini aşağıya açıklayınız?

.....

.....

.....

Ek-2. Etik Kurul İzni



KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ ETİK KURUL DEĞERLENDİRME VE KARAR FORMU

Değerlendirme Talebinde Bulunan Kişi/Kurum	Memduha EKİCİ		
Değerlendirme Başvuru Tarihi			
Değerlendirilmesi Talep Edilen Eserin/Araştırmacının Adı	İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Temel Lineer Cebir Kavramlarını Öğrenme Süreçlerinin İncelenmesi		
Değerlendirilmesi Talep Edilen Araştırma/Ölçek/Anket/Görüşme Formu			
Değerlendirmeyi Yapan Etik Kurul	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Bilimsel Araştırma ve Yayın Etigi Kurulu		
Değerlendirme Toplantı Bilgileri	Yeri	Tarihi	Saati
	Ziraat Fakültesi Dekanlık Toplantı Salonu	15.03.2024	11:00
Karar No	Karar Tarihi	15.03.2024	
	Karar No	2024/08	
Karar Sonucu	(X) Kabul	(X) Oybirliği	() Oy Çokluğu
	() Ret	() Oybirliği	() Oy Çokluğu

Etik Kurulumuz, yukarıda başvuru bilgileri yer alan eser/araştırma için toplanarak bilimsel araştırmalar ve yayın etiği açısından değerlendirme yapmış ve aşağıda gerekçesi açıklanan karar(lar)ı almıştır:

Karar ve Gerekçesi

Memduha EKİCİ' ye ait " İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Temel Lineer Cebir Kavramlarını Öğrenme Süreçlerinin İncelenmesi" konulu proje araştırmasının bilimsel araştırmalar etiği açısından yapılan değerlendirmesinde kabulüne

Oy birliğiyle karar verilmiştir.

Etik Kurul Başkanı
Prof. Dr. Ahmet KAZANKAY

Ek-3. Anket İzni



T.C.
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Fakültesi Dekanlığı



Sayı : E-15559425-044-00000665402
Konu : Anket İzni (Memduha EKİCİ)

15.08.2024

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 08.08.2024 tarihli ve 044.E.81404231-663331 sayılı yazınız.

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı / Matematik Eğitimi Bilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Memduha EKİCİ'nin "*İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Temel Lineer Cebir Kavramlarını Öğrenme Süreçlerinin İncelenmesi*" isimli tez çalışmasına kaynak teşkil etmesi için ekte yer alan veri toplama aracını, Fakültemiz Matematik Eğitimi Anabilim Dalı öğrencilerine uygulama yapma talebi, Bölüm Başkanlığınızda olumlu görüşleri doğrultusunda, gönüllülük esasına göre olması koşuluyla, Dekanlığımızca uygun görülmüştür.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Doç. Dr. Hamza YAKAR
Dekan V.

Ek: Anket İzni (Memduha EKİCİ)_Ustyazi

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Belge Doğrulama Kodu:E4EC8CE5-9B9D-4F4F-A9C4-3FEC84CE364 Belge Doğrulama Adresi:<https://www.turkiye.gov.tr/kaeu-cbys>

Adres:Ahi Evran Üniv. Eğitim Fakültesi A Blok 262 Nolu Oda KIRŞEHİR

Faks No: 386 280 46 77

e-Posta: kacuietisim@ahievran.edu.tr İnternet Adresi: www.ahievran.edu.tr

Kep Adresi:ahievranuniversitesi@hs01.kep.tr

Bilgi İçin: Ahmet KAHRAMAN

Unvan: Bilgisayar İşletmeni

03862805154



Ek-4. Kongre Katılım Belgesi



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı	Memduha EKİCİ
Uyruğu	T.C.
Orcid Numarası	0009-0005-5686-0282

EĞİTİM BİLGİLERİ	
Lisans	
Üniversite	Başkent
Fakülte	Eğitim
Bölümü	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	2019
Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran
Enstitü	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
Programı	Matematik Eğitimi
Mezuniyet Yılı	2025

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler
Uluslararası Konferans ve Sempozyumlarda Sunulan Bildiriler <u>Ekici M.</u> , Kahraman Aksoyak, F., & Baltacı, S. (2025). Matematik öğretmen adaylarının lineer bağımlı ve lineer bağımsız iki vektörden oluşan kümelerin temel lineer cebir kavramlarını öğrenme süreçlerinin incelenmesi. <i>Aichss 5th International Conference On Humanity And Social Sciences</i> , Muş, Türkiye.