

T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
ANA BİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

İLKÖĞRETİM VE ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİNİN
MATEMATİKSEL PROBLEM ÇÖZME SÜRECİNDE
KAVRAMLAR İLE İLGİLİ ANLAYIŞLARININ VE
KAVRAM-İŞLEM KULLANIMLARININ ROLÜ

DOKTORA TEZİ

Hazırlayan
Yasemin TEMİZÖZ

Ankara
Şubat, 2013

T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
ANA BİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

İLKÖĞRETİM VE ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİNİN
MATEMATİKSEL PROBLEM ÇÖZME SÜRECİNDE
KAVRAMLAR İLE İLGİLİ ANLAYIŞLARININ VE
KAVRAM-İŞLEM KULLANIMLARININ ROLÜ

DOKTORA TEZİ

Yasemin TEMİZÖZ

Danışman: Prof. Dr. Ahmet ARIKAN

Ankara
Şubat, 2013

Yasemin TEMİZÖZ'ün **“İLKÖĞRETİM VE ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL PROBLEM ÇÖZME SÜRECİNDE KAVRAMLAR İLE İLGİLİ ANLAYIŞLARININ VE KAVRAM-İŞLEM KULLANIMLARININ ROLÜ”** başlıklı tezi 14.02.2013 tarihinde, jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Öğretmenliği Bilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Adı Soyadı

İmza

Başkan : Prof. Dr. Aysun UMay

.....

Üye (Tez Danışmanı) : Prof. Dr. Ahmet ARIKAN

.....

Üye : Prof. Dr. Ziya ARGÜN

.....

Üye : Prof. Dr. Safure BULUT

.....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sevgi ATLIHAN

.....

ÖN SÖZ

Tez konusunun belirlenmesinden tezin sonuçlanmasına kadarki her aşamada, desteğini ve yardımını esirgemeyen; paylaştığı değerli bilgi ve tecrübeleri ile, araştırmaya yön veren ve karşılaştığım güçlüklerin üstesinden gelmemde rehberlik eden değerli danışmanım Prof. Dr. Ahmet ARIKAN'a en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Tez çalışmam süresince, değerli görüşleri ve yol gösterici önerileri ile araştırmaya katkıda bulunan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Ziya ARGÜN ve Prof. Dr. Aysun UMay'a çok teşekkür ediyorum.

Doktora öğrenimim esnasında sağlamış olduğu burs desteğinden dolayı TÜBİTAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Sınava hazırlandıklarından dolayı boş vakitleri sınırlı olmasına rağmen, verilerin toplanması sürecinde bana zaman ayırarak araştırmaya katılan ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerine;

Veri toplama öncesinde ve veri analizi öncesinde, uzman görüşlerine başvurulmuş matematik öğretmenlerine ve akademisyenlere; doktora öğrenimim boyunca samimiyetini ve desteğini hep hissettiğim arkadaşım Arş. Gör. Dr. Gönül YAZGAN SAĞ'a;

Bütün eğitim hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen ve sevgileriyle hep yanımda olarak beni yüreklendiren annem Ayten KARA, babam İbrahim KARA ve kardeşlerim Metin KARA ve Derya DOĞAN'a;

Tez çalışmam boyunca bana her zaman destek olan ve anlayış gösteren sevgili eşim Doç. Dr. Osman TEMİZÖZ'e; doktora öğrenimimin ilk yılında dünyaya gelen ve sevgisi ile bana daima güç veren biricik kızım Nergis TEMİZÖZ'e içtenlikle teşekkür ediyorum.

Yasemin TEMİZÖZ

Ankara, 2013

ÖZET

İLKÖĞRETİM VE ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL PROBLEM ÇÖZME SÜRECİNDE KAVRAMLAR İLE İLGİLİ ANLAYIŞLARININ VE KAVRAM-İŞLEM KULLANIMLARININ ROLÜ

TEMİZÖZ, Yasemin
Doktora, Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet ARIKAN
Şubat-2013, 409 sayfa

Bu araştırmanın amacı; ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, matematiksel problem çözme sürecinde, kavramlar ile ilgili anlayışlarının ve kavram-işlem kullanımlarının rolünü belirlemektir. Bu genel amaç doğrultusunda; öğrencilerin, matematiksel problem çözme sürecinde; “problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları”, “kavram-işlem kullanımları” ve “sonuca ulaşmaları” arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Araştırma modeli olarak, nitel araştırma desenlerinden biri olan fenomenoloji (olgubilim) deseni kullanılmıştır. Araştırmanın katılımcıları; Edirne ve Tekirdağ illerinden seçilmiş, Seviye Belirleme Sınavı’na (SBS) hazırlanan üç ilköğretim 8. sınıf öğrencisi ve Yükseköğretime Geçiş Sınavı (YGS) ile Lisans Yerleştirme Sınavı’na (LYS) hazırlanan üç ortaöğretim 12. sınıf sayısal öğrencisidir.

Veri toplama sürecinde; her bir öğrenci ile, Kasım 2009-Ekim 2010 tarihleri arasında, toplam 6 tane birebir görüşme yapılmıştır. Ancak araştırma amacına uygun verilerin çoğu; matematiksel problem çözme ortamlarında, Mart 2010-Haziran 2010 tarihleri arasında ortalama 3-5 haftalık periyotlarla gerçekleştirilen üç asıl görüşmede toplanmıştır. Veri toplama araçları; 2008, 2009 yıllarında yapılmış Seviye Belirleme Sınavı (SBS) ve Öğrenci Seçme Sınavı’nda (ÖSS) yer alan bazı matematik soruları ile hazırlanmış olan “görüşme soruları formları” ve öğrencilerin görüşme sırasında problemleri çözerken kullandıkları kağıtlar (problem kağıtları)dır.

Verilerin analiz edilme sürecinde, nitel veri analizi yaklaşımlarından olan “betimsel analiz” ve “içerik analizi”nden yararlanılmıştır. İçerik analizi sırasında ise; – gömülü teoride kullanılan teknikler olan– açık kodlama, eksensel kodlama ve seçici kodlama gibi nitel araştırma tekniklerinden faydalanılmıştır.

Araştırmadan çıkan bazı sonuçların yanısıra temel olarak; katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili

eksik ya da yanlış anlayışa sahip olmalarının veya bazı merkezi kavramların tanımına dair herhangi bir açıklama yapamamalarının, birçok soru için, kavram–işlem kullanımlarına ve doğru sonuca ulaşmalarına engel olmadığı belirlenmiştir. Problem çözme sürecinin sonunda, şıklarda olan yanlış sonuca ulaşan, iki şık arasında kararsız kalan ya da sonuca ulaşamayan katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, o problem için “kavram–işlem kullanımları” incelendiğinde; bu öğrencilerin, çözüm sürecinin herhangi bir aşamasında ya uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmış, ya uygun kavramı/işlemi eksik veya yanlış şekilde kullanmış ya da hiçbir kavramı kullanmamış oldukları tespit edilmiştir.

Öğrenci, problemin içinde yer alan bazı merkezi kavramları çok iyi bilmemesine rağmen, problemi çözebiliyorsa, bunun başlıca nedeninin; öğrencilerin çözüm esnasında kavramların anlamlarını düşünmeye, tanımlarını bilmeye ve tanımları doğrudan kullanmaya pek ihtiyaç duymamaları olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca hem katılımcı ilköğretim hem de katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, matematiksel problem çözümünde “sonuca ulaşmaları”nda; genelde, “kavram–işlem kullanımları”nın, “kavramlarla ilgili anlayışları”na kıyasla daha belirleyici bir rol oynadığı ve birçok problemde, daha ziyade, *–kavramsal bilgi ağırlıklı değil de–* işlemsel bilgi ağırlıklı bir çözüm yolu takip ettikleri görülmüştür. Araştırmadan elde edilen sonuçlara dayalı olarak; ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenlerine, matematik sınav sorusu hazırlayan uzmanlara ve matematik kitap yazarlarına, matematik eğitimi alanında akademik çalışmalar yapan bilim insanlarına yönelik birtakım önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel kavramlar, kavram tanımı, problem çözme, kavramlar ile ilgili anlayışlar, kavram–işlem kullanımı, kavramsal bilgi, işlemsel bilgi.

ABSTRACT

THE ROLE OF ELEMENTARY AND SECONDARY SCHOOL STUDENTS' UNDERSTANDING OF CONCEPTS AND THEIR USAGE OF CONCEPTS–PROCEDURES IN MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING PROCESS

TEMİZÖZ, Yasemin

PhD., Department of (Secondary School) Mathematics Education

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet ARIKAN

February 2013, 409 pages

The aim of this study is to determine the role of elementary and secondary school students' understanding of the concepts and their usage of concepts–procedures in mathematical problem solving process. To fulfill this aim, we investigate the relationships among students' “understanding of the central concepts relevant to the problem”, “usage of concepts–procedures” and “reaching a conclusion” during the mathematical problem solving process.

Phenomenology, as one of the qualitative research designs, was used in our research. The participants of the study were selected from Edirne and Tekirdağ (Turkey); three were 8-grade students studying for SBS, and three were 12-grade students studying for YGS and LYS.

The data for the study were collected through six interviews with each of the students between November 2009 and October 2010. However, most of the data which were appropriate for the aim of the study were gathered through three main interviews in mathematical problem solving environments, conducted in average 3–5 week periods between March 2010 and June 2010. The tools used in data gathering process were “interview questions forms” included some mathematical problems from SBS and ÖSS in 2008, 2009, and the papers that the students produced to solve problems during the interviews.

In data analysis process, we used “descriptive analysis” and “content analysis”, which are certain approaches in qualitative data analysis. In content analysis, we used qualitative research techniques used in grounded theory; such as, open, axial and selective coding.

With some additional results, our main result of the study is that though the participant students either from an elementary school or a secondary school have wrong or deficient understanding of the central concepts in the problem or are not able to make

explanations regarding the definitions of some central concepts relevant to the problem, these facts do not seem obstacles for them to use concepts–procedures and reach the right answer, in many of the problems. When “usage of concepts–procedures” of the participants who reached the wrong answer, or could not decide between two answers, or could not find any answers at the end of problem solving process were examined, it was established that sometime during the problem solving process, these participants either used the inappropriate concept/procedure, or used the appropriate concept/procedure in a deficient or wrong way, or did not use any concepts at all.

The findings also demonstrated that the main reason for a participant who solved a problem correctly, though s/he does not know some of the central concepts in the problem well is the lack of the need for thinking about the meanings of the concepts, knowing their definitions and using the definitions directly while solving the problem. In addition, it was observed that in both elementary and secondary school participants’ “reaching the answer” in problem solving process, generally their “usage of concepts/procedures” played a more decisive role rather than their “understanding of the concepts”, and that in most of the problems they used –not predominantly conceptual solutions– but mostly predominantly procedural solutions. In the light of the findings of the research, some suggestions were made for elementary and secondary school mathematics teachers, the specialists preparing the mathematical exam problems and authors of mathematics textbooks, and mathematics educators.

Keywords: Mathematical concepts, concept definition, problem solving, understanding of the concepts, concept–procedure usage, conceptual knowledge, procedural knowledge.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

JÜRİ ÜYELERİNİN İMZA SAYFASI	i
ÖN SÖZ	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vii
TABLolar LİSTESİ	xvi
ŞEKİLLER LİSTESİ	xix
KISALTMALAR LİSTESİ	xxi

I. BÖLÜM

GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu	3
1.2. Araştırmanın Amacı	8
1.3. Araştırmanın Önemi	10
1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları	14
1.5. Araştırmanın Varsayımları	14
1.6. Tanımlar	14

II. BÖLÜM

KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR	16
2.1. Matematiksel Tanımlar	16
2.1.1. Matematiksel Tanımlarda Bulunması Gereken Kriterler	17
2.1.2. Matematik Öğretiminde Kavramların ve Tanımların Rolü	19
2.2. Kavram Tanımı ve Kavram İmajı	20
2.3. Kavram Kazanımı	21
2.4. “Matematiksel Tanımlar” ile ilgili Araştırmalar	22
2.4.1. “Matematiksel Tanımlar” ile ilgili Yurtdışında Yapılmış Araştırmalar	22
2.4.2. “Matematiksel Tanımlar” ile ilgili Yurtiçinde Yapılmış Araştırmalar	28
2.5. “Bilgi” ve “Anlama” Türleri	33
2.6. Anlamanın, Matematik Öğrenmedeki Rolü	33
2.7. İlişkisel ve Araçsal Anlama	34
2.7.1. İlişkisel ve Araçsal Anlamanın Avantajları	37
2.8. Kavramsal ve İşlemsel Bilgi	39
2.8.1. “Kavramsal Bilgi” Nedir?	40
2.8.2. “İşlemsel Bilgi” Nedir?	40
2.8.3. Farklı Teorilerde Kavramsal ve İşlemsel Bilgi Ayrımı Üzerine Yapılmış Tartışmalar	41
2.8.4. Kavramsal Bilgi ile İşlemsel Bilginin Karşılaştırılması	43
2.8.5. Kavramsal Bilgi ile İşlemsel Bilgi Arasındaki Gelişimsel İlişkiler	44
2.8.6. Farklı Öğretim Kademesindeki Öğrenciler için Kavramsal Bilgi ile İşlemsel Bilgi Arasındaki İlişkiler	48
2.8.7. Kavramsal Bilgi ile İşlemsel Bilgi Arasında Bağlantılar Kurmanın Önemi	50
2.9. “Kavramsal ve İşlemsel Bilgi” ile ilgili Araştırmalar	52

2.9.1. “Kavramsal ve İşlemsel Bilgi” ile ilgili Yurtdışında Yapılmış Araştırmalar.....	52
2.9.2. “Kavramsal ve İşlemsel Bilgi” ile ilgili Yurtiçinde Yapılmış Araştırmalar.....	62
2.10. “Problem” Terimi ile Kastedilen Anlam Nedir?.....	67
 III. BÖLÜM	
YÖNTEM.....	68
3.1. Araştırma Modeli.....	68
3.2. Katılımcılar.....	69
3.2.1. Katılımcıların Belirlenme Süreci ve Katılımcıların Belirlenmesinde Dikkate Alınan Kriterler.....	70
3.3. Veri Toplama Teknikleri.....	73
3.3.1. Görüşme Soruları Formlarının Hazırlanma Süreci.....	74
3.3.1.1. Matematik alt öğrenme alanlarının belirlenmesi.....	74
3.3.1.2. Görüşmelerde kullanılacak matematik sorularının belirlenmesi.....	76
3.3.1.3. İlk uzman görüşlerinin alınması.....	76
3.3.1.4. Görüşme sorularında irdelenecek kavramların belirlenmesi.....	77
3.4. Veri Toplama Süreci.....	78
3.4.1. Pilot Çalışmaların Yapılması ve Araştırma Probleminin Belirlenmesi.....	78
3.4.2. Katılımcı Öğrencilerle Görüşmelerin Yapılması.....	80
3.4.2.1. Tanışma görüşmelerinin yapılması.....	80
3.4.2.2. Asıl görüşmelerin yapılması.....	80
3.4.2.3. Üçüncü görüşmenin yapılması.....	82
3.4.2.4. Tamamlayıcı görüşmelerin yapılması.....	83
3.4.3. İkinci Uzman Görüşlerinin Alınması.....	83
3.4.3.1. İkinci uzman görüşlerinin değerlendirilmesi.....	84
3.5. Verilerin Analizi.....	85
3.5.1. Görüşme Ses Kayıtlarının Bilgisayarda Yazımı ve Görüşme Dosyalarının Oluşturulması.....	86
3.5.2. Kavram Dosyalarının Oluşturulması.....	86
3.5.3. Verilerin Analiz Edilme Süreci.....	87
3.5.3.1. Yararlanılan veri analizi yaklaşımları.....	89
 IV. BÖLÜM	
BULGULAR ve YORUM.....	93
4.1. İlköğretim Öğrencilerinin “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	94
4.1.1. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	94
4.1.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi.....	95
4.1.1.2. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları Belirlemeleri.....	95
4.1.1.3. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	97
4.1.1.3.1. İlköğretim öğrencilerinin, “en küçük ortak kat” kavramı ile ilgili anlayışları.....	98
4.1.1.3.2. İlköğretim öğrencilerinin, “kat” kavramı ile ilgili anlayışları.....	100

4.1.1.3.3. İlköğretim öğrencilerinin, “ortak kat” kavramı ile ilgili anlayışları.....	100
4.1.1.4. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları.....	101
4.1.1.5. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	104
4.1.2. İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	111
4.1.2.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi.....	112
4.1.2.2. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	112
4.1.2.2.1. İlköğretim öğrencilerinin, “basamak” kavramı ile ilgili anlayışları.....	113
4.1.2.2.2. İlköğretim öğrencilerinin, “rakam” kavramı ile ilgili anlayışları.....	114
4.1.2.2.3. İlköğretim öğrencilerinin, “6 ile bölünebilme” kuralı ile ilgili anlayışları.....	115
4.1.2.2.4. İlköğretim öğrencilerinin, “2 ile bölünebilme” kuralı ile ilgili anlayışları.....	117
4.1.2.2.5. İlköğretim öğrencilerinin, “3 ile bölünebilme” kuralı ile ilgili anlayışları.....	117
4.1.2.3. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları.....	118
4.1.2.4. İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	120
4.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	125
4.2.1. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	125
4.2.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi.....	126
4.2.1.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları Belirlemeleri.....	127
4.2.1.3. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	132
4.2.1.3.1. Ortaöğretim öğrencilerinin, “dikdörtgen” kavramı ile ilgili anlayışları.....	132
4.2.1.3.2. Ortaöğretim öğrencilerinin, “kare” kavramı ile ilgili anlayışları.....	133
4.2.1.3.3. Ortaöğretim öğrencilerinin, “en büyük ortak bölen”, “bölen” ve “ortak bölen” kavramları ile ilgili anlayışları.....	133
4.2.1.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları.....	135

4.2.1.5. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	139
4.2.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	147
4.2.2.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi.....	148
4.2.2.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	149
4.2.2.2.1. Ortaöğretim öğrencilerinin, “tamsayı” kavramı ile ilgili anlayışları.....	149
4.2.2.2.2. Ortaöğretim öğrencilerinin, “asal sayı” kavramı ile ilgili anlayışları.....	150
4.2.2.2.3. Ortaöğretim öğrencilerinin, “özdeşlik” kavramı ile ilgili anlayışları.....	150
4.2.2.3. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları.....	152
4.2.2.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	156
4.3. İlköğretim Öğrencilerinin “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	160
4.3.1. İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	160
4.3.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi.....	161
4.3.1.2. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	161
4.3.1.2.1. İlköğretim öğrencilerinin, “rasyonel sayı” kavramı ile ilgili anlayışları.....	161
4.3.1.3. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları.....	163
4.3.1.4. İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	166
4.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	170
4.4.1. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	170
4.4.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi.....	171
4.4.1.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	171
4.4.1.2.1. Ortaöğretim öğrencilerinin, “rasyonel sayı” kavramı ile ilgili anlayışları.....	172

4.4.1.3. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları.....	173
4.4.1.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	179
4.5. İlköğretim Öğrencilerinin “Çokgenler” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	184
4.5.1. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	184
4.5.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolları” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi.....	185
4.5.1.2. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	186
4.5.1.2.1. İlköğretim öğrencilerinin, “dörtgen” kavramı ile ilgili anlayışları.....	186
4.5.1.2.2. İlköğretim öğrencilerinin, “kare” kavramı ile ilgili anlayışları.....	187
4.5.1.2.3. İlköğretim öğrencilerinin, “dik üçgen” kavramı ile ilgili anlayışları.....	188
4.5.1.3. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları.....	190
4.5.1.4. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	194
4.6. Ortaöğretim Öğrencilerinin “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	199
4.6.1. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	199
4.6.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi.....	201
4.6.1.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	201
4.6.1.2.1. Ortaöğretim öğrencilerinin, “kare” kavramı ile ilgili anlayışları.....	201
4.6.1.2.2. Ortaöğretim öğrencilerinin, “üçgen” kavramı ile ilgili anlayışları.....	202
4.6.1.2.3. Ortaöğretim öğrencilerinin, “benzerlik” kavramı ile ilgili anlayışları.....	203
4.6.1.2.4. Ortaöğretim öğrencilerinin, “Pisagor bağıntısı” ile ilgili anlayışları.....	204
4.6.1.2.5. Ortaöğretim öğrencilerinin, “üçgenin alan” formülü ile ilgili anlayışları.....	204
4.6.1.3. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları.....	206
4.6.1.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	209

4.7. İlköğretim Öğrencilerinin “Olasılık” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	214
4.7.1. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	214
4.7.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi.....	215
4.7.1.2. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	216
4.7.1.2.1. İlköğretim öğrencilerinin, “asal sayı” kavramı ile ilgili anlayışları.....	216
4.7.1.2.2. İlköğretim öğrencilerinin, “olasılık” kavramı ile ilgili anlayışları.....	217
4.7.1.2.3. İlköğretim öğrencilerinin, “örnek uzay” kavramı ile ilgili anlayışları.....	218
4.7.1.2.4. İlköğretim öğrencilerinin, “olay” kavramı ile ilgili anlayışları.....	219
4.7.1.3. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları.....	220
4.7.1.4. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	222
4.8. Ortaöğretim Öğrencilerinin “Olasılık” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	226
4.8.1. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	226
4.8.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi.....	227
4.8.1.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	228
4.8.1.2.1. Ortaöğretim öğrencilerinin, “olasılık” kavramı ile ilgili anlayışları.....	228
4.8.1.2.2. Ortaöğretim öğrencilerinin, “olay” ve “örneklem uzay” kavramları ile ilgili anlayışları.....	229
4.8.1.3. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları.....	230
4.8.1.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	236
4.9. İlköğretim Öğrencilerinin “Sözel Problemler” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	243
4.9.1. İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	243
4.9.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolları” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi.....	244
4.9.1.2. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin	

İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları Belirlemeleri.....	245
4.9.1.3. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	246
4.9.1.3.1. İlköğretim öğrencilerinin, “oran” ve “orantı” kavramları ile ilgili anlayışları.....	247
4.9.1.3.2. İlköğretim öğrencilerinin, “rasyonel sayı” kavramı ile ilgili anlayışları.....	248
4.9.1.4. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları.....	249
4.9.1.5. İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	256
4.9.2. İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	263
4.9.2.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi.....	264
4.9.2.2. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	265
4.9.2.2.1. İlköğretim öğrencilerinin, “TL (lira)” ve “Kr (kuruş)” kavramları ile ilgili anlayışları.....	265
4.9.2.2.2. İlköğretim öğrencilerinin, “denklem” kavramı ile ilgili anlayışları.....	265
4.9.2.3. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları.....	267
4.9.2.4. İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	272
4.10. Ortaöğretim Öğrencilerinin “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	277
4.10.1. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	277
4.10.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi.....	278
4.10.1.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	279
4.10.1.2.1. Ortaöğretim öğrencilerinin, “oran” ve “orantı” kavramları ile ilgili anlayışları.....	279
4.10.1.2.2. Ortaöğretim öğrencilerinin, “denklem” kavramı ile ilgili anlayışları.....	280
4.10.1.3. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları.....	281
4.10.1.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	285
4.10.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları.....	290

4.10.2.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi.....	291
4.10.2.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	292
4.10.2.2.1. Ortaöğretim öğrencilerinin, “hız” kavramı ile ilgili anlayışları.....	292
4.10.2.3. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları.....	293
4.10.2.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	298
 4.11. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Problem Çözme Sürecinde, “Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla ilgili Anlayışları”, “Kavram–İşlem Kullanımları” ve “Sonuca Ulaşmaları” Arasındaki İlişkiler ile ilgili Bulgular.....	303
4.11.1. “Merkezi Kavramlar ile ilgili Anlayışlar”, “Kavram–İşlem Kullanımı” ve “Sonuca Ulaşmak” Adlı (Ana) Kategori Eksenleri Üzerinde Yer Alan Kategoriler.....	303
4.11.2. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Problem Çözme Sürecinde, “Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla ilgili Anlayışları” ve “Kavram–İşlem Kullanımları” Arasındaki İlişkiler ile ilgili Bulgular.....	311
4.11.3. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Problem Çözme Sürecinde, “Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla ilgili Anlayışları” ve “Sonuca Ulaşmaları” Arasındaki İlişkiler ile ilgili Bulgular.....	313
4.11.4. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Problem Çözme Sürecinde, “Kavram–İşlem Kullanımları” ve “Sonuca Ulaşmaları” Arasındaki İlişkiler ile ilgili Bulgular.....	315
 V. BÖLÜM	
SONUÇLAR, TARTIŞMA ve ÖNERİLER.....	317
5.1. Sonuçlar ve Tartışma.....	317
5.1.1. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Problem Çözme Sürecinde, “Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla ilgili Anlayışları” ve “Kavram–İşlem Kullanımları” Arasındaki İlişkiler ile ilgili Sonuçlar ve Tartışma.....	318
5.1.2. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Problem Çözme Sürecinde, “Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla ilgili Anlayışları” ve “Sonuca Ulaşmaları” Arasındaki İlişkiler ile ilgili Sonuçlar ve Tartışma.....	326
5.1.3. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Problem Çözme Sürecinde, “Kavram–İşlem Kullanımları” ve “Sonuca Ulaşmaları” Arasındaki İlişkiler ile ilgili Sonuçlar ve Tartışma.....	329
5.1.4. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Problem Çözme Sürecinde, “Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla ilgili Anlayışları”, “Kavram–İşlem Kullanımları” ve “Sonuca Ulaşmaları” Arasındaki Genel İlişkiler ile ilgili Sonuçlar ve Tartışma.....	336
5.1.4.1. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin,	

Matematiksel Problem Çözümünde “Sonuca Ulaşmaları”nda, “Kavramlarla ilgili Anlayışları”nın ve “Kavram–İşlem Kullanımları”nın Rolü.....	338
5.1.4.2. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Matematiksel Problem Çözme Sürecinde; Kavramsal Bilgi ile İşlemsel Bilginin Rolü.....	342
5.2. Öneriler.....	347
5.2.1. Matematik Öğretmenlerine Yönelik Öneriler.....	347
5.2.2. Matematik Sınav Sorusu Hazırlayan Uzmanlara ve Matematik Kitap Yazarlarına Yönelik Öneriler.....	350
5.2.3. Matematik Eğitimi Alanında Akademik Çalışmalar Yapan Bilim İnsanlarına Yönelik Öneriler.....	355
KAYNAKÇA.....	356
EKLER.....	365

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 2.1. İlişkisel ve Araçsal Öğrenmenin Sınıflandırılması.....	35
Tablo 2.2. İlişkisel ve Araçsal Öğrenci Davranışlarının Karşılaştırılması.....	36
Tablo 3.1. İlköğretim Öğrencilerinin Matematik Başarısı Konusunda “Orta”, “İyi” ve “Çok İyi” Düzey İçin Dikkate Alınan Genel Kriterler.....	72
Tablo 3.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin Matematik Başarısı Konusunda “Orta”, “İyi” ve “Çok İyi” Düzey İçin Dikkate Alınan Genel Kriterler.....	72
Tablo 4.1. İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar.....	94
Tablo 4.2. İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar.....	95
Tablo 4.3. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları Belirlemeleri.....	97
Tablo 4.4. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	101
Tablo 4.5. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	104
Tablo 4.6. İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar.....	111
Tablo 4.7. İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar.....	112
Tablo 4.8. İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	118
Tablo 4.9. İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	121
Tablo 4.10. Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar.....	125
Tablo 4.11. Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar.....	126
Tablo 4.12. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları Belirlemeleri.....	132
Tablo 4.13. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	135
Tablo 4.14. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	139
Tablo 4.15. Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar.....	147
Tablo 4.16. Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar.....	148
Tablo 4.17. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	152
Tablo 4.18. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	156
Tablo 4.19. İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki	

“Rasyonel Sayılar” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar.....	160
Tablo 4.20. İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar.....	161
Tablo 4.21. İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	163
Tablo 4.22. İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	166
Tablo 4.23. Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar.....	170
Tablo 4.24. Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar.....	171
Tablo 4.25. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	173
Tablo 4.26. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	180
Tablo 4.27. İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar.....	184
Tablo 4.28. İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar.....	185
Tablo 4.29. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	189
Tablo 4.30. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	195
Tablo 4.31. Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar.....	200
Tablo 4.32. Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar.....	200
Tablo 4.33. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	206
Tablo 4.34. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	210
Tablo 4.35. İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar.....	214
Tablo 4.36. İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar.....	215
Tablo 4.37. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	219
Tablo 4.38. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	223
Tablo 4.39. Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar.....	226
Tablo 4.40. Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar.....	227
Tablo 4.41. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla	

İlgili Anlayışları.....	230
Tablo 4.42. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	237
Tablo 4.43. İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar.....	243
Tablo 4.44. İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar.....	244
Tablo 4.45. İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları Belirlemeleri.....	246
Tablo 4.46. İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	248
Tablo 4.47. İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	257
Tablo 4.48. İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar.....	263
Tablo 4.49. İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar.....	264
Tablo 4.50. İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	267
Tablo 4.51. İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	273
Tablo 4.52. Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar.....	277
Tablo 4.53. Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar.....	278
Tablo 4.54. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	281
Tablo 4.55. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	286
Tablo 4.56. Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar.....	290
Tablo 4.57. Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar.....	291
Tablo 4.58. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları.....	293
Tablo 4.59. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti.....	298
Tablo 4.60. Araştırmada Yer Verilen 14 Matematik Sorusu İçin; “Merkezi Kavramlar ile ilgili Anlayışlar”, “Kavram–İşlem Kullanımı” ve “Sonuca Ulaşmak” Adlı (Ana) Kategori Eksenleri Üzerinde Yer Alan Tüm Kategorilerin Listesi.....	304
Tablo 4.61. 14 Matematik Sorusu için Çıkan Tüm Kategorilerin, “Öğrenci Numarası–Görüşme Numarası–Soru Numarası”na göre Dağılımları.....	306

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Matematiksel Yeterliliğin İç İç Geçmiş Beş Bileşeni.....	2
Şekil 2.1. İlişkisel ve Araçsal Anlamanın Sürekliliğinin Gösterilmesi.....	37
Şekil 4.1. 2. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	102
Şekil 4.2. 3. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	102
Şekil 4.3. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması.....	106
Şekil 4.4. 1. Öğrencinin, 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	119
Şekil 4.5. İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması.....	122
Şekil 4.6. 4. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	136
Şekil 4.7. 5. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	137
Şekil 4.8. 6. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	137
Şekil 4.9. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması.....	141
Şekil 4.10. 5. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	155
Şekil 4.11. 6. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	155
Şekil 4.12. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması.....	157
Şekil 4.13. 1. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	165
Şekil 4.14. 2. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	165
Şekil 4.15. İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması.....	167
Şekil 4.16. 5. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	176
Şekil 4.17. 4. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile İlgili Problem için İlk Önce Yaptığı Çözüm.....	177
Şekil 4.18. 4. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile İlgili Problem için Daha Sonra Yaptığı Çözüm.....	177
Şekil 4.19. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması.....	181
Şekil 4.20. 1. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	191
Şekil 4.21. 2. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	192
Şekil 4.22. 3. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	193
Şekil 4.23. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması.....	196

Şekil 4.24. 6. Öğrencinin, 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	209
Şekil 4.25. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması.....	211
Şekil 4.26. 1. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	220
Şekil 4.27. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması.....	224
Şekil 4.28. 4. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	234
Şekil 4.29. 5. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	236
Şekil 4.30. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması.....	239
Şekil 4.31. 3. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	252
Şekil 4.32. 1. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	256
Şekil 4.33. İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması.....	258
Şekil 4.34. 1. Öğrencinin, 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	268
Şekil 4.35. 2. Öğrencinin, 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	271
Şekil 4.36. 3. Öğrencinin, 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	272
Şekil 4.37. İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması.....	274
Şekil 4.38. 4. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	283
Şekil 4.39. 5. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	284
Şekil 4.40. 6. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm.....	285
Şekil 4.41. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması.....	287
Şekil 4.42. 5. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile İlgili Problem için Soru Kağıdı Üzerinde Yaptığı Çözüm.....	297
Şekil 4.43. 5. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile İlgili Problem için Cevap Kağıdı Üzerinde Yaptığı Çözüm.....	298
Şekil 4.44. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması	300

KISALTMALAR LİSTESİ

- a. **SBS:** Seviye Belirleme Sınavı
- b. **YGS:** Yükseköğretime Geçiş Sınavı
- c. **LYS:** Lisans Yerleştirme Sınavı
- d. **ÖSS:** Öğrenci Seçme Sınavı
- e. **OKS:** Ortaöğretim Kurumları Öğrenci Seçme ve Yerleştirme Sınavı
- f. **Katılımcı (öğrenci):** Asıl katılımcı (öğrenci)
- g. **Problem kağıtları:** Öğrencilerin görüşme sırasında problemleri çözerken kullandıkları kağıtlar

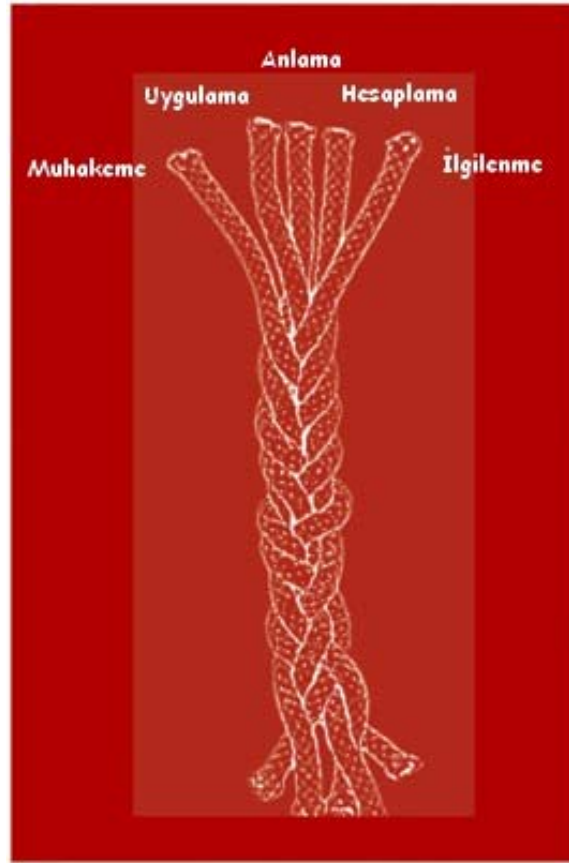
I. BÖLÜM

GİRİŞ

Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı'na ait “İlköğretim Matematik Dersi (6-8. Sınıflar) Öğretim Programı” (2009) ve “Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı” (2005) dosyalarında; günlük hayatta, matematiği kullanabilme ve anlayabilme gereksiniminin önem kazanmakta ve bu gereksinimin sürekli artmakta olduğundan söz edilmiştir. Olağanüstü ve hızlı değişimlerin yaşandığı dünyamızda, matematiği anlayan ve matematik yapabilen bireyler; geleceklerini şekillendirmek adına, daha fazla fırsat ve seçeneklerle karşılaşabilmektedirler. Bu nedenle, Amerika Birleşik Devletleri ve Kanada'nın “Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi” (*National Council of Teachers of Mathematics*) de; herkesin, matematiği anlamaya ihtiyacı olduğunu; her öğrenciye, matematiği derinlemesine ve anlayarak öğrenebilmesi için gerekli olan fırsatların sunulması gerektiğini vurgular (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000).

Bir çocuğun, okul yılları boyunca matematikte başarılı olabilmesi için; öğrendikleri matematiğin, çocuk için anlamlı olması çok önemlidir (Richardson, 2004). “Bir kimsenin başarılı bir şekilde matematik öğrenmesi” anlamını karşılamak üzere “matematiksel yeterlilik” terimi kullanılmış (Kilpatrick, Swafford ve Findell, 2001; Kilpatrick ve Swafford, 2002) ve matematiksel yeterliliğin, iç içe geçmiş beş bileşeni kapsadığından bahsedilmiştir (Kilpatrick ve Swafford, 2002, p. 1):

- “1. Matematiği anlama;
2. Akıcı bir şekilde hesap yapma;
3. Problemleri çözmek için kavramları uygulamaya koyma;
4. Mantıksal akıl yürütme ve
5. Matematiği mantıklı, yararlı ve yapılabilir görerek; matematikle ilgilenme.”



(Kilpatrick ve Swafford, 2002, p. 8)

Şekil 1.1

Matematiksel Yeterliliğin İç İçe Geçmiş Beş Bileşeni

Matematiksel yeterliliğin beş bileşeni (kolu); daha ayrıntılı olarak, aşağıdaki şekilde açıklanmıştır (Kilpatrick ve Swafford, 2002, p. 9):

“1. Anlama (*Understanding*): Matematiksel kavramları, işlemleri ve ilişkileri kavrama – matematiksel sembollerin, diyagramların ve işlemlerin ne anlama geldiğini bilme.

2. Hesaplama (*Computing*): Sayıları esnek, doğru, verimli ve uygun bir şekilde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi, matematiksel işlemleri yapma.

3. Uygulama (*Applying*): Problemleri matematiksel olarak formüle edebilme, ve kavramları ve işlemleri uygun bir şekilde kullanarak bu problemleri çözmek için stratejiler üretebilme.

4. Muhakeme (*Reasoning*): Bir problemin çözümünü açıklamak ve doğrulamak için veya bilinen bir şeyden henüz bilinmeyen bir şeye erişmek için mantığı kullanma.

5. İlgilenme (*Engaging*): Matematiği mantıklı, yararlı ve –eğer üstünde çalışırsan– yapılabilir olarak görme ve üzerinde çalışmaya istekli olma.”

Birçok alanda, problemleri çözmede; öğrencilerin hem temel kavramları hem de doğru işlemleri öğrenmeleri oldukça önemli bir rol oynamaktadır (Rittle-Johnson ve Alibali, 1999). Matematikte yeterlilik kazanmak; hem kavramları, hem sembolleri ve işlemleri, hem de aralarındaki ilişkileri bilmeyi içerir. Öğrenciler, kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişkileri fark etmekte / oluşturmakta çoğu zaman zorlandıklarından; bu iki bilgi türü arasındaki ilişkileri incelemek, zaman harcamaya ve zahmete değer bir iştir (Hiebert ve Lefevre, 1986).

1.1. Problem Durumu

Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı’na ait “İlköğretim Matematik Dersi (6-8. Sınıflar) Öğretim Programı” (2009) ve “Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı” (2005) dosyalarının her ikisinde de; programın, kavramsal bir yaklaşım takip ettiğinden; programın odağında, kavram ve ilişkilerin oluşturduğu öğrenme alanlarının yer aldığından; programın, matematik ile ilgili kavram ve ilişkilerin kazandırılmasını/geliştirilmesini vurguladığından bahsedilmiştir. Bu kavramsal yaklaşımın, matematikle ilgili bilgilerin kavramsal temellerinin oluşturulmasına daha fazla vakit ayırmayı; böylelikle kavramsal ve işlemsel bilgiler arasında ilişkiler kurmayı gerektirdiği de belirtilmiştir. Anlamli öğrenme üzerinde durulan her iki öğretim programında da; öğrencilerin, bilgiyi sadece hatırlamalarının ve tanımlarının değil, aynı zamanda öğrendiklerinin arkasında yatan anlamı kavramalarının hedeflenmesi gerektiği ifade edilmiştir (<http://ttkb.meb.gov.tr>).

NCTM tarafından 2000 yılında yayımlanmış olan “Okul Matematiği için İlke ve Standartlar” (*Principles and Standards for School Mathematics*) adlı kaynakta yer verilen 6 ilkeden biri olan “Öğrenme” ilkesinde; öğrencilerin, eski bilgi ve deneyimleri yardımıyla yeni bilgiyi etkin bir şekilde oluşturarak, matematiği anlayarak öğrenmelerinin gerekliliğine ve matematik öğrenmede, kavramsal anlamının

(*conceptual understanding*) önemine vurgu yapılmaktadır. Öğrencilerin verimli bir şekilde öğrenebilmeleri için; gerçeklere dayalı bilgi ve işlemsel yeterliliğin yanı sıra kavramsal bilginin de olması gereklidir (NCTM, 2000). Öğrencilerin, kavramları anlamalarını değerlendirmede geleneksel olarak takip edilen yol; öğrencilerin kavramların anlamlarını kendi sözcükleriyle, belki bazı açıklayıcı örneklerle birlikte açıklamalarını veya kavramlar etrafında bir sınıf tartışmasına katılmalarını sağlamaktır (Afamasaga-Fuata'i, 2008).

Öğrencilerin, duydukları bir şeyi tam olarak anlamadan tekrar etmeleri sıradışı bir durum değildir. Öğretmenler ise, genellikle bir öğrenci bir tanıımı tam olarak ifade ediyor ve açıklayabiliyorsa; başarı kazanıldığını zannederler (Edwards ve Ward, 2004). Oysa Edwards ve Ward (2004) tarafından yapılan araştırma sonuçları; çoğu öğrencinin, tanımları doğru şekilde ifade ederek, açıklayabildikleri zaman bile, tanımları matematikçiler gibi kullanamadıklarını ortaya koymuştur. Benzer şekilde, Richgels'in (1994), "limit" kavramı üzerine yapmış olduğu tez çalışmasının sonuçları da; formal tanımları ezberden söylemenin, kavramın öğrenilip öğrenilmediğini belirlemede tek ölçüt olmaması gerektiğini göstermiştir. Başka bir çalışmada ise; denklem kavramını yanlış tanımlayan öğretmen adaylarının, denklemlerle ilgili problemleri çözerken zorlanmadıklarını, fakat denklem kavramını tanımlayamadıklarını da itiraf ettikleri görülmüştür (Aydın ve Köğce, 2008).

"Matematik öğrenimi ve öğretiminde tanımların rolü" hakkındaki öğretmen adaylarının görüşlerini tespit etmek amacıyla Soğancı (2006) tarafından yapılan araştırmadan; öğretmen adaylarının, "matematiksel bir tanımın ne olduğu"na dair görüşlerinde farklılıklar olduğu; matematiksel bir tanımda bulunması gereken kriterlerden yeterince haberdar olmadıkları; çoğunlukla formal tanımdan ziyade informal tanımları tercih ettikleri; matematiksel bir kavramın öğrenilmesinde/öğretilmesinde ve problem çözmede, kavramın tanımını bilmenin gerekli olup olmadığı konusunda görüş ayrılıklarının olduğu; bazı öğretmen adaylarının, matematik öğrenimi ve öğretiminde tanımları gerekli, bazılarının yetersiz, bazılarının ise sadece konuya başlangıç aşaması niteliğinde buldukları sonuçları elde edilmiştir.

Soğancı (2006), araştırmasındaki öğretmen adaylarından bazılarının, "ilkokuldan itibaren oluşan matematiksel altyapının içinde aslında kavramların tanımlarının da olduğu; fakat lisedeki eğitim sisteminin doğurduğu sonuçlardan biri olan test çözmenin, tanımları geri plana attığı ve bu eğitim sistemi içinde yetişmiş bireylerin de tanımların gerekli olmadığına inandıkları" şeklinde bir görüş benimsediklerini ifade etmiştir.

Baki ve Kartal (2004) tarafından yürütülmüş çalışmanın sonuçları da, Soğancı'nın (2006) araştırmasındaki öğretmen adaylarının bu görüşlerini destekler niteliktedir. Baki ve Kartal'ın (2004) yaptığı araştırmanın sonucunda, lise öğrencilerinin çoğunluğunun cebirsel bilgilerinde kavram ve işlem bilgilerinin yetersiz olduğu görülmüştür. Bu nedenle lise öğrencilerinin cebirsel bilgilerinin doğasının, kavram ve işlem bilgilerinin dengelendiği kavramsal öğrenmeye değil de; işlemsel bilgilerinin ön planda olduğu matematiksel öğrenmeye dayalı olduğu sonucu çıkarılmıştır. Ayrıca elde edilen bu sonuçlar ışığında; matematik öğretme sürecinde işlemsel çözüm yollarından ziyade kavram ve ilişkilere öncelik verilmesi durumunda, sorunun önemli ölçüde çözüleceği önerisinde bulunulmuştur (Baki ve Kartal, 2004). Soylu ve Aydın (2006) tarafından, sınıf öğretmeni adayları ile gerçekleştirilmiş araştırmanın sonuçları da; öğrencilerin işlemsel bilgiyi gerektiren sorulardaki başarı oranının %73,6 ve kavramsal bilgiyi gerektiren sorulardaki başarı oranının %17 olduğunu; matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelenmediğini, daha çok işlemsel öğrenmenin olduğunu göstermiştir.

Diğer taraftan; uluslararası çalışmaların en kapsamlılarından biri olan TIMSS (The Third International Mathematics and Science Study) 1999 video çalışmasından elde edilen verilere dayalı olarak, matematikte yüksek başarı gösteren 6 ülkede, matematik derslerinde sunulan matematiksel problemlerin türleri karşılaştırılmış ve çarpıcı bulgular elde edilmiştir. Çalışmadaki en başarılı ülkelerden biri olan Hong Kong'da; kavramlara ve matematiksel fikirler arasındaki bağlantılara odaklanan matematik problemlerinin yüzdesinin, sadece %13 olduğu; tersine, bu 6 ülke arasında Hong Kong'un, derslerde, basit hesaplama becerilerine ve işlemlere dayalı problemlere en fazla yer veren ülke (%84) olduğu saptanmıştır. Ayrıca bu 6 ülkenin hepsinde de, sınıflarda her iki problem türüne de yer verildiği; ancak problem yüzdelerinin, öğrencilerin başarı testlerindeki performanslarını haber verici bir rolünün olmadığı tespit edilmiştir (Stigler ve Hiebert, 2004). Doğu Asyalı öğretmenlerin matematikteki yeterliliklerini incelemek amacıyla, Hong Kong ve Kore'de, toplam 18 ilköğretim matematik öğretmeni ile gerçekleştirilen araştırmadan da; Doğu Asyalı öğretmenler, genelde işlemsel ağırlıklı öğretim yapsalar da, öğrencilerinin, matematik başarısına dair yapılan uluslararası araştırmalarda başarılı bulundukları; bunun sebebinin ise, iyi tasarlanmış öğretim programları ve ders kitapları olabileceği sonuçları çıkarılmıştır (Leung ve Park, 2002).

“Matematikte kavramsal ve işlemsel bilgi” ile ilgili bir araştırmanın sonuçları; kavramsal açıdan daha yeterli olan öğrencilerin –*kavramsal açıdan daha başarısız olan öğrencilere kıyasla*– problemleri daha çabuk ve doğru şekilde çözme eğiliminde olduklarını (Canobi, Reeve ve Pattison, 1998); başka bir araştırmanın sonuçları ise, araştırmaya katılan birçok öğrencinin, anlamlı kavramsal bilgiye sahip olduklarını, ama yine de hesaplamaya dayalı hatalar yaptıklarını (Byrnes ve Wasik, 1991) göstermiştir.

Kavramsal ve işlemsel bilginin öğretimdeki önemi ve gelişimsel ilişkilerini ele alan, birbiriyle yarış halinde olan farklı teoriler öne sürülmüştür (Rittle-Johnson ve Koedinger, 2002). İşlemsel beceri ve kavramsal anlama arasında algılanan ikilem; matematik öğretimi için, “geleneksel” işlem-tabanlı yaklaşımlar ile “deneysel” kavram-tabanlı yaklaşımlardan hangisinin tercih edilmesi gerektiği yönündeki tartışmayı körüklemiştir (Chappell ve Killpatrick, 2003). Son zamanlarda, öğretim süreci; işlemsel anlama ve kavramsal anlama arasında denge kurulmasına odaklanmıştır (Che Ghazali ve Zakaria, 2011). Problem çözme sürecinde, çözüm yöntemlerini uygulama noktasında; işlemsel becerilere yönelik bilgi, tek başına yetersiz kalmaktadır. Kavramsal anlama olmaksızın; işlemler, pek bir anlam ifade etmemektedir (Capraro ve Joffrion, 2006). Ancak bazı okullarda, kavramsal anlamaya odaklanılmayarak; –*yalnızca sınavları geçmek amaçlanıyor gibi*– sadece işlemsel anlamının üzerinde durulmaktadır (Che Ghazali ve Zakaria, 2011). Genelde problem çözmenin, anlamayı içerdiği iddia edilse de; problemi çözenlerin, çoğu kez fazla anlamadan da ilerleyebildikleri ve işlemleri anlamadan kullandıkları halde başarılı olabildikleri de iyi bilinmektedir (Silver, 1986). Kar, Çiltaş ve Işık (2011) tarafından yürütülmüş araştırmadan da; öğrencilerin, problem çözümü sırasında ilgili kavramlara yönelik işlemler yapsalar da, kavramın kendisini tanımlamada genel olarak zorlandıklarını ortaya koyan sonuçlara ulaşılmıştır. Kar, Çiltaş ve Işık (2011); bu durumun, öğrencilerin kavramları yeterince çözümseyememelerinden kaynaklanıyor olabileceğini ifade etmişlerdir.

Matematiksel bilgi, işlemsel ve kavramsal bilgiler arasında, anlamlı olan temel ilişkileri içermektedir. Bu iki bilgidен birinin eksik olması durumunda ya da ikisi de kazanılmış olmasına rağmen, ayrı ayrı durmaları durumunda; öğrencilerin matematikte tam yeterlilik kazandıklarından bahsedilemez. İşlemler ve kavramlar arasında bağlantı kurulmadığı zaman; öğrenciler, matematik için sezgileri iyi olsa da, problemleri çözemeyebilir veya cevap üretebilseler de, ne yaptıklarını anlayamayabilirler. Bu nedenle; işlemsel ve kavramsal bilgi arasındaki kritik bağlantılar, sağlam bir bilgi temelinin gelişmesi açısından oldukça önemlidir (Hiebert ve Lefevre, 1986).

Öğrenciler, toplama, çıkarma, çarpma ve bölmeyi, işlemlerin bir dizisi olarak öğrenir, fakat bu sırada sayılara yapısal olarak ne olduğunu anlamazlarsa; doğru cevaplara ulaşabilseler bile, öğrenmeleri sınırlıdır (Richardson, 2004). Bir işlemi kullanırken, mutlaka o işlemde uygulanan elemanların anlamları üzerine düşünmek gerekmediğinden (Byrnes, 1992); öğrencinin, işlemleri kullanarak doğru cevaba ulaşabilmesi, o sırada geçen ilgili kavramların tanımlarını bildiği anlamına da gelmeyebilir. Bu nedenle; doğru cevap, öğrencilerin matematikteki çalışmalarını incelerken, aranılan tek şey olmamalıdır. Sadece öğrenci cevaplarının doğru olup olmadığına bakılması durumunda; öğrencilerin neyi ve nasıl öğrendikleri konusunda çok önemli şeyler kaçırılacaktır. Oysa öğrencilerin hesap problemlerini nasıl çözdüklerini incelemek; onların düşünceleri ile ilgili fikir verebilir ve öğrencilerin hangi matematiksel becerileri bilip, hangilerini öğrenmeleri gerektiğini belirleme konusunda öğretmenlere yardımcı olabilir (Richardson, 2004). Ancak öğrencinin kağıda yazıp çizdiklerinden, bu esnadaki zihinsel süreçleri hakkında doğru çıkarımlar yapmak zor olduğundan; öğretme sürecinde öğrenciyle konuşmak, öğrencinin zihinsel süreçlerini ortaya çıkarmanın en iyi yoludur (Skemp, 1978).

Voutsina'nın (2012) da belirttiği gibi; geçmiş araştırmalar ve teoriler, daha ziyade, matematik öğrenmede kavramsal bilginin mi yoksa işlemsel bilginin mi daha önce geliştiğini tartışmışken (örneğin Byrnes ve Wasik, 1991); matematiksel yeterliliğin, hem ne yapılması hem de neden yapılması gerektiğini bilmeyi gerektirdiğinin anlaşılması üzerine, yakın zamandaki araştırmaların odağı, matematik öğrenme ve öğretmede kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişkilere ve bütünleşmeye (örneğin Rittle-Johnson, Siegler ve Alibali, 2001; Canobi, 2009; Che Ghazali ve Zakaria, 2011; Schneider, Rittle-Johnson ve Star, 2011; Voutsina, 2012) doğru kaymıştır.

Zaslavsky ve Shir (2005), yaptıkları araştırmada, tanımların fiilen kullanımından bağımsız bir ortamda öğrencilerin bir matematiksel tanımları kavrayışlarını incelediklerini belirtmişlerdir. Ayrıca problem çözme gibi, tanımların kullanımını gerektiren çeşitli kullanım ortamlarında, öğrencilerin tanımları kavrayışlarının diğer yönlerinin ortaya çıkarılabileceği önerisinde bulunmuşlardır (p. 341). Karmaşık bilgi alanlarında problem çözmenin, genellikle hem işlemsel hem de kavramsal bilginin uygulamasını gerektirdiğini söyleyen Silver (1986); bu nedenle matematiksel problemlerin, kavramsal ve işlemsel bilgi araştırmaları için uygun, kullanışlı araçlar olabileceğini dile getirmiştir.

Yapılmış araştırmaların ışığı altında; matematiksel yeterlilik açısından, hem kavramsal anlamının hem de kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişkilerin oldua önemli olduğu görülmektedir. Matematik eğitimi alanında yapılmış, gerek “matematiksel tanımlar/kavramlar” gerekse “kavramsal ve işlemsel bilgi” ile ilgili araştırmalar göz önüne alındığında; öğrencilerin “kavram tanımlamaları”na dair (Aydın ve Köğce, 2008) ya da “kavram tanımlamaları” ile “sonuca ulaşmaları”na dair (Kar, iltaş ve Işık, 2011) birtakım bulguların elde edildiği birkaç araştırmaya ulaşılsa da, aynı zamanda öğrencilerin bu problemleri zme sürecindeki “kavram–işlem kullanımları”nın da dikkate alındığı ya da “ğrencilerin, matematiksel problem zme sürecinde; ‘problemin içinde yer alan kavramlarla ilgili anlayışları’, ‘kavram–işlem kullanımları’ ve ‘sonuca ulaşmaları’ arasındaki ilişkiler”in incelendiği türde araştırmalara rastlanamamış ve bu konu, araştırılmaya değer görülmüştür.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı, “ilköğretim ve ortaöğretim ğrencilerinin, matematiksel problem zme sürecinde; ‘problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları’, ‘kavram–işlem kullanımları’ ve ‘sonuca ulaşmaları’ arasındaki ilişkiyi araştırmaktır.”

Bu genel amaç doğrultusunda; aşağıda belirtilen araştırma problemine ve alt problemlere cevap aranacaktır:

Araştırma Problemi:

- İlköğretim ve ortaöğretim ğrencilerinin, matematiksel problem zme sürecinde; “problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları”, “kavram–işlem kullanımları” ve “sonuca ulaşmaları” arasındaki ilişki nasıldır?

Alt Problemler:

- İlköğretim ve ortaöğretim ğrencilerinin, matematiksel problem zme sürecinde; “problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları” ile “kavram–işlem kullanımları” arasındaki ilişki nasıldır?

- İlköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, matematiksel problem çözme sürecinde; “problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları” ile “sonuca ulaşmaları” arasındaki ilişki nasıldır?
- İlköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, matematiksel problem çözme sürecinde; “kavram–işlem kullanımları” ile “sonuca ulaşmaları” arasındaki ilişki nasıldır?

Ayrıca bu araştırma kapsamında;

- Öğrenci, kavram(lar)ı çok iyi bilmemesine rağmen, problemi çözebiliyorsa; bunun sebepleri nelerdir?
- İlköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, matematiksel problem çözme sürecinde “sonuca ulaşmaları” açısından; “kavramlarla ilgili anlayışları” ve “kavram–işlem kullanımları” belirleyici bir rol oynamakta mıdır?
- İlköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, matematiksel problem çözme sürecinde; kavramsal bilgi ile işlemsel bilginin rolü nasıldır?

sorularına da cevap bulunacaktır.

Yukarıda yer alan araştırma (alt) problemlerini cevaplayabilmek için; katılımcı öğrencilerin, birtakım matematiksel problemleri çözme süreçlerinin, araştırmanın genel amacı doğrultusunda incelenmesi gerekecektir. Bu nedenle; bazı matematiksel problemler, araç olarak kullanılacaktır. Araştırma (alt) problemlerini yanıtlamadan önce; araç olarak kullanılan matematiksel problemlerin her biri için, iki araştırma sorusuna cevap aranacaktır. **Matematiksel problem çözme ortamlarına yönelik araştırma soruları** aşağıdaki şekildedir:

- İlköğretim/Ortaöğretim öğrencilerinin; problem çözme sürecinde, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları nasıldır?
- İlköğretim/Ortaöğretim öğrencilerinin; problem çözme sürecinde, problemin içinde yer alan merkezi kavramları–işlemleri kullanımları ve sonuca ulaşmaları nasıldır?

1.3. Araştırmanın Önemi

Bir çocuğun, okul yıllarında matematikte başarılı olabilmesi için; öğrendiği matematiğin, çocuk için anlamlı olması oldukça önemlidir (Richardson, 2004) ve “bir kimsenin başarılı bir şekilde matematik öğrenmesi” anlamını karşılamak üzere “matematiksel yeterlilik” terimi kullanılmıştır (Kilpatrick, Swafford ve Findell, 2001; Kilpatrick ve Swafford, 2002).

Birçok alanda, problemleri çözmede; öğrencilerin hem temel kavramları hem de doğru işlemleri öğrenmeleri önemli rol oynamaktadır (Rittle-Johnson ve Alibali, 1999). Matematikte yeterlilik kazanmak; hem kavramları bilmeyi, hem sembolleri ve işlemleri bilmeyi, hem de aralarındaki ilişkileri bilmeyi içerir. Bilgi birimlerini edindiği halde, aralarında ilişki kuramama; matematik öğrenmeyi ciddi anlamda etkilemektedir. Öğrenciler, kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişkileri fark etmekte veya oluşturmakta çoğu kez zorlandıklarından; bu iki bilgi türü arasındaki ilişkileri incelemek, zaman harcamaya ve zahmete değer bir iştir (Hiebert ve Lefevre, 1986).

Çoğu öğretmen, derslerinde matematiğin metodolojisini açıklamaya yeterince zaman ayırmamakta; bu da öğrencilerin matematiğin yapısına dair belirli bir bakış açısına sahip olmamalarına neden olmaktadır (Vinner, 1976). “Matematik; içinde tanımların çok önemli bir rol oynadığı, teorik bir sistemdir.” (Mariotti ve Fischbein, 1997, p. 220) ve “*tanım* kavramı, birçok matematiksel uygulamada ayrıcalıklı bir konuma sahiptir.” (Morgan, 2005, p. 105). Matematikte önemli bir rol oynayan tanımlar (Edwards ve Ward, 2004; Mamona-Downs ve Downs, 2002; Vinner, 1977), matematik öğreniminde ciddi bir sorun oluşturmaktadır (Vinner, 1991). Birçok öğrencinin belli bir süre sonunda matematiksel tanımların rolünün farkına varmaları olasılığı olsa da; matematiğin doğasına dair bu önemli konu şansa bırakılmamalıdır. Öğrencilere, matematiksel tanımların kullanımına ve tanımlama sürecine yönelik deneyimler yaşattırılmalıdır (Edwards ve Ward, 2004).

Grundmeier, Hansen ve Sousa (2006), yaptıkları araştırmanın sonuçlarını dikkate alarak; eğer öğretmenler, (özellikle sözel) tanımlara ve grafiksel gösterimlere odaklanmazlarsa; birçok öğrencinin temel matematiği (*calculus*) kavramsal anlama olmaksızın, sadece rutin hesaplama yapma (işlemsel akıcılık) yeteneğiyle tamamlayacaklarını ileri sürmüşlerdir. Ayrıca temel matematik öğretmenlerin, bu tür araştırma sonuçlarının farkında olmalarının ve dersin amaçlarına ulaşmak için

yapmaları gerekenler üzerinde düşünmelerinin gerekliliğinden bahsetmişlerdir (Grundmeier, Hansen ve Sousa, 2006).

Öğrencilerin, kavramları anlamalarını değerlendirmede takip edilen geleneksel yol; öğrencilerin kavramların anlamlarını kendi kelimeleriyle, belki bazı açıklayıcı örneklerle birlikte açıklamalarını veya kavramlar etrafında bir sınıf tartışmasına katılmalarını sağlamaktır (Afamasaga-Fuata'i, 2008). Zaslavsky ve Shir (2005), problem çözme gibi, tanımların kullanımını gerektiren farklı kullanım ortamlarında, öğrencilerin tanımları kavrayışlarının diğer yönlerinin ortaya çıkarılabileceğini ifade etmişlerdir (p. 341). Silver (1986) de, karmaşık bilgi alanlarında problem çözmenin, genellikle hem işlemsel hem de kavramsal bilginin uygulamasını gerektirdiğini; bu nedenle matematiksel problemlerin, kavramsal ve işlemsel bilgi araştırmaları için uygun, kullanışlı araçlar olabileceğini belirtmiştir.

Bir işlemi kullanırken, mutlaka o işlemde uygulanan elemanların anlamlarını düşünmek gerekmediğinden (Byrnes, 1992); öğrencinin, işlemleri kullanarak doğru cevaba ulaşabilmesi, o sırada geçen ilgili kavramların tanımlarını bildiği anlamına gelmeyebilir. Bu yüzden; doğru cevap, öğrencilerin matematikteki çalışmalarını incelerken/değerlendirirken, aranılan tek şey olmamalıdır. Yalnızca öğrenci cevaplarının doğru olup olmadığına bakılması durumunda; öğrencilerin neyi ve nasıl öğrendikleri konusunda çok önemli şeyler kaçırılacaktır. Halbuki öğrencilerin hesap problemlerini nasıl çözdüklerini incelemek; onların düşünceleri konusunda fikir verebilir ve öğrencilerin hangi matematiksel becerileri bilip, hangilerini öğrenmeleri gerektiğini belirleme noktasında öğretmenlere yardımcı olabilir (Richardson, 2004). Ancak ülkemizde uygulanan sınavların birçoğunda (özellikle merkezi sınavlarda) çoktan seçmeli sorular kullanılarak; süreç odaklı değil de, (sadece) sonuç odaklı değerlendirmeler yapılmakta ve öğrencilerin problem çözme sürecine dair önemli şeyler atlanabilmektedir.

Yurtiçinde gerçekleştirilmiş bir çalışmada; Aydın ve Köğce (2008), öğretmen adaylarının “denklem ve fonksiyon” kavramlarını ne düzeyde tanımlayabildiklerini ve bu iki kavram arasında nasıl bir ilişki olduğuna dair algılayışlarını araştırmışlardır. Öğrencilerin belirli kavramlara yönelik öğrenme güçlüklerinin tespit edilmesi amacıyla, Kar, Çiltaş ve Işık (2011) tarafından yürütülmüş başka bir araştırmada ise; öğrenciler tarafından tanımlanması istenen kavramlar, doğru ya da yanlış olma durumlarına göre; problem kısımlarının çözümleri ise, sonucun doğru ya da yanlış olma durumuna göre analiz edilmiştir. Ülkemizde yapılmış bu araştırmalarda, öğrencilerin “kavram

tanımlamaları”na dair ya da “kavram tanımlamaları” ile “sonuca ulaşmaları”na dair birtakım bulgular elde edilse de; öğrencilerin bu problemleri çözme sürecindeki “kavram–işlem kullanımları” dikkate alınmamıştır.

Matematik eğitimi alanında yapılmış, gerek “matematiksel tanımlar/kavramlar” gerekse “kavramsal ve işlemsel bilgi” ile ilgili araştırmalar dikkate alındığında; “öğrencilerin, matematiksel problem çözme sürecinde ‘sonuca ulaşmaları’nda; ‘kavramlarla ilgili anlayışları’nın ve ‘kavram–işlem kullanımları’nın belirleyici bir rol oynayıp oynamadığı’nın araştırıldığı; “öğrencilerin, matematiksel problem çözme sürecinde; ‘problemin içinde yer alan kavramlarla ilgili anlayışları’, ‘kavram–işlem kullanımları’ ve ‘sonuca ulaşmaları’ arasındaki ilişki”nin incelendiği herhangi bir araştırmaya rastlanamamıştır. Başka bir deyişle; sadece öğrencilerin “kavramlarla ilgili anlayışları’nın veya “sonuca ulaşmaları’nın değil de, aynı zamanda problem çözme sürecindeki “kavram–işlem kullanımları’nın araştırıldığı herhangi bir çalışmaya ulaşılammıştır. Matematikte tanımların önemli bir rolünün olduğu (Edwards ve Ward, 2004; Mamona-Downs ve Downs, 2002; Vinner, 1977) ve problemleri çözmede, öğrencilerin hem temel kavramları hem de doğru işlemleri öğrenmelerinin önemli rol oynadığı (Rittle-Johnson ve Alibali, 1999) da düşünülerek; “öğrencilerin, matematiksel problem çözme sürecinde; kavramlar ile ilgili anlayışlarının ve kavram–işlem kullanımlarının rolü” araştırılmaya değer bir konu olarak görülmüştür.

Bu araştırmada problem çözme ortamlarında; katılımcı öğrencilerden, problemin içinde yer alan merkezi kavramları tanımlamaları, açıklamaları istenmiştir. Öğrencilerin, ilgili matematiksel kavramlara dair informal tanımlarını öğrenmedeki amaç; öğrencilerin o matematiksel kavrama dair anlayışları hakkında genel olarak bilgi edinmektir.

Bu araştırmadan elde edilen sonuçların; matematik öğretmenlerine, “ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, matematiksel problem çözme esnasındaki düşünme süreçleri; problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları; problemle ilgili tanım, kavram ve işlemleri nasıl kullandıkları (*bilinçli bir şekilde / yeterince farkında olmadan; doğru/eksik/yanlış vs.*); sonuca ulaşmaları ve bunlar arasındaki ilişkiler” ile ilgili bilgi vermesi beklenmektedir. Aynı zamanda, “öğrenci, kavramları çok iyi bilmemesine rağmen, problemi çözebiliyorsa; bunun sebeplerinin neler olabileceği”; “öğrencilerin, matematiksel problem çözme sürecinde ‘kavramlarla ilgili anlayışları’ ile ‘kavram–işlem kullanımları’nın; ‘sonuca ulaşmaları’ açısından belirleyici bir rol oynayıp oynamadığı” ve “öğrencilerin, matematiksel problem çözme

sürecinde; daha çok, işlemsel bilgi ağırlıklı mı, kavramsal bilgi ağırlıklı mı bir çözüm yolu takip ettikleri” sorularına da cevap bulunacaktır.

Araştırma verilerine dayalı olarak, öğretmenler, “öğrencilerin kavram bilgisi ve kavram-işlem kullanımı”na dair sahip oldukları inançları ve öğretim uygulamalarını gözden geçirebilir ve ders içi faaliyetlerini yeniden düzenleyebilirler. Öğretmenlerin matematik öğretimi hakkındaki inançları ve sınıf içi davranışları ile ilgili yıllar boyunca çok sayıda araştırma yapılmıştır. Yapılan bu araştırmaların birçoğundan da, öğretmenlerin görüşleri ile öğretim uygulamaları arasında uyum olduğu (Grant, 1985); öğretmenlerin matematik ve matematik öğretimi konusundaki inançlarının; sınıf içi uygulamalarını (Stipek, Givvin, Salmon ve MacGyvers, 2001; Thompson, 1984), öğrencilerinin matematik ile ilgili inançlarını (Carter ve Norwood, 1997) ve öğrencilerinin başarılarını etkilediği (Muijs ve Reynolds, 2001) sonuçlarına ulaşılmıştır.

Bu bilgiler ışığında; gerek matematik konularının öğretimi esnasında, gerekse sınav ve değerlendirmelerde öğrencilerin kavram bilgilerini sorgulayacak ve kavramları kullanmalarını gerektirecek problem ve etkinliklere (daha fazla) yer verilmesi durumunda; öğretmenlerin, öğrencilerin matematiksel kavram bilgileri konusunda daha derin bilgi sahibi olabilecekleri ve öğrencinin matematikteki başarısı konusunda daha doğru değerlendirmeler yapabilecekleri düşünülmektedir. Öğrencide var olan kavram bilgisini su yüzüne çıkarması hedeflenen bu tür problem ve etkinlikler; öğretmenlere, öğrencilerin eksik/yanlış kavram bilgilerini tespit etme ve bu eksik/yanlış kavram bilgilerini *–ilerde daha ciddi kavram yanlışlarına dönüşmeden–* giderme şansı verebilir. Kavram bilgisini sorgulayan ve çözüm sırasında kavramları kullanmayı gerektiren problemler; öğrencilerin kendi bilişsel süreçleri, bildikleri ve bilmedikleri, yapabildikleri ve yapamadıkları konusunda farkındalık düzeylerinin artmasına da yardımcı olabilir.

Araştırma sürecinde; ortaöğretim (lise) öğrencilerinin nasıl bir matematiksel kavram bilgisine sahip oldukları ve kavramları-işlemleri ne kadar kullanabildikleri konusunda edinilen bilgilerin; öğrencileri, “ileri düzeyde matematiksel düşünme, varsayımda bulunma ve genelleme yapmayı gerektiren üniversite matematiği”ne hazırlayacak eğitimciler açısından yararlı olacağı düşünülmektedir.

Bu araştırmanın sonuçlarının; ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenlerine, matematik eğitimi alanında akademik çalışmalar yapan bilim insanlarına, “öğrencilerin matematiksel problem çözme esnasındaki bilişsel süreçleri;

kavramları tanımlama, açıklama ve kavramları–işlemleri problem çözerken kullanma becerileri” konusunda önemli bir bakış açısı kazandıracağı ümit edilmektedir.

Araştırma sonuçlarına dayalı olarak yapılacak olan önerilerin; ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenlerinin yanı sıra, matematik dersi öğretim programlarının hazırlanmasında ve geliştirilmesinde görev alan uzman kişilere, matematik kitap yazarlarına ve –*özellikle, Türkiye’de uygulanmakta olan birçok merkezi sınav için*– matematik sınav sorusu hazırlayan uzmanlara hitap eden faydalı bilgiler içereceğine inanılmaktadır.

1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları

SBS/LYS sınavları bittiği ve okul ders yılı sona erdiği zaman, birçok katılımcı öğrencinin tatile çıkmasından ve tatil zamanlarının/sürelerinin farklı olmasından dolayı; 4. görüşmeler ile tamamlayıcı görüşmeler arasında üç buçuk ay kadar bir zaman farkı olmuştur. Öğrencilerin tamamlayıcı görüşme sorularına verdikleri yanıtlardaki yanlış/eksik bilgilerin kaynağını (*önbilgilerdeki eksiklikler/yanlışlıklar, ezberlenmiş bilgiler vs.*) tespit etmek zor olsa da; bunların, iki görüşme arasındaki zaman farkından kaynaklanma ihtimali göz ardı edilemez. Bu nedenle 4. görüşme ile tamamlayıcı görüşmeler arasındaki zaman farkı faktörü, araştırmanın bir sınırlılığı olmuştur.

1.5. Araştırmanın Varsayımları

Katılımcı öğrencilerin, görüşme soruları formlarında yer alan problemleri çözme sırasında; gösterebilecekleri en iyi performansı sergiledikleri, sahip oldukları bilgi ve düşüncelerini olduğu gibi (*dürüstçe*) ve rahatlıkla ifade ettikleri varsayılmıştır.

1.6. Tanımlar

Bu araştırmada sıkça geçen bazı terimler, aşağıda verilen anlamlarda kullanılmışlardır:

Merkezî kavram: Problem ifadesinde geçen veya çözümde kullanılması gereken, o problem için kritik öneme sahip olan kavramdır (*Araştırmacı tarafından tanımlanmıştır*).

Kavram tanımı: O kavramı açıkça belirtmek için kullanılan sözcüklerden oluşan bir kalıptır (Tall ve Vinner, 1981).

Formal kavram tanımı: “Matematik topluluğu tarafından genel olarak kabul gören kavram tanımı”dır (Tall ve Vinner, 1981, p. 152).

İnformal kavram tanımı: Kavramın formal tanımı dışında, birey tarafından yeniden yapılandırılarak yapılmış tanımıdır. Diğer bir deyişle; bireyin, zihninde canlanan kavram imajını kendi kelimeleriyle açıklamak amacıyla kullandığı sözcüklerden oluşan bir kalıptır (Tall ve Vinner, 1981).

Kavramsal bilgi: Matematikte kavramsal bilgi; zihinde fikirler ağının bir parçası olarak var olan ve içsel olarak oluşturulmuş mantıksal ilişkilerden oluşan bilgidir (Van de Walle, 2004).

İşlemsel bilgi: Matematikte işlemsel bilgi; rutin matematiksel görevleri yerine getirirken kullanılan kurallar ve işlemlerin, aynı zamanda da matematiği temsil etmek için kullanılan sembollerin bilgisidir (Van de Walle, 2004).

Problem: Çözüm yolunun bulunmasının, problemi çözen kişiden beklendiği ve çözümde daha önceden öğrenilmiş bilgilerin kullanılmasının istendiği, matematiksel soru türlerinden biridir (Baki, 2008).

II. BÖLÜM

KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

2.1. Matematiksel Tanımlar

Bir “kavram”ın ne anlama geldiğinin anlaşılmasında, kavramın tanımı önemli rol oynamaktadır. “Tanım” kelimesinin sözlük anlamı, “bir kavramın niteliklerini eksiksiz olarak belirtme veya açıklama, tarif ”tir (<http://tdkterim.gov.tr/bts/>). Kavramlar, kendilerini karakterize eden ve betimleyen özelliklere sahiptir. Tanım tarafından da içerilen bu özellikler; bir nesnenin, kavramın örneği olması için gerekli koşulları belirler (Toumasis, 1995).

“Tanımların (*var*) olduğu –doğal bir dilin anlambirimlerinin, ‘anlamsal düzey’de genellikle iç yapısının olduğu– fikri; en azından Platon’dan beri, filozofların ve psikologların çok ilgisini çekmektedir” (Fodor, Garrett, Walker ve Parkes, 1980: 264). İnsanların tanımlarla ilk karşılaşmaları, anadili öğrenmeye başladıkları küçük yaşlara dayanmaktadır. Başlangıçta çeşitli türde tanımlarla karşılaşılrsa da; birkaç yıl sonra, özellikle okul yıllarında, tanımın bir türü olan “sözlüksel tanım” ön plana çıkmaktadır. Sözlüksel tanımda, belirli bir sözcüğün (ya da sözcüklerin) anlamı, başka sözcükler yardımıyla açıklanmaktadır (Vinner, 1976).

Bir tanım, bir kelimenin anlamını veriyorsa; bu durumda,

- (1) Bir kelimenin ne anlama geldiğini bilmenin, o kelimenin tanımını bilmek olduğu,
- (2) Bir kelimenin sembolik ifadesini anlamamanın, o tanımın zihinde var olduğunu gösterdiği veya var olmasını gerektirdiği

varsayılabilir (Fodor, Garrett, Walker ve Parkes, 1980).

“Matematik; içinde tanımların çok önemli bir rol oynadığı, teorik bir sistemdir.” (Mariotti ve Fischbein, 1997, p. 220). Tanımlar, bu teorinin “nesneleri”nin tanıtılmasını sağlar (Mariotti ve Fischbein, 1997). Matematiksel *tanım*; matematiğin çeşitli elemanlarının durumunu ve işlevini göstermeye yarayan –aksiyom, teorem, ispat,

yardımcı teorem, önerme ve sonuç gibi– az sayıdaki ileri-matematiksel belirleyici terimlerden biridir (Pimm, 1993).

“*Tanım* kavramı, birçok matematiksel uygulamada ayrıcalıklı bir konuma sahiptir.” (Morgan, 2005, p. 105) Matematiksel kavramlar, çoğunlukla tanımları aracılığıyla elde edilir ve tanım, matematik öğreniminde ciddi bir sorun oluşturur (Vinner, 1991). Matematikte tanımlar önemli bir rol oynamakla birlikte (Edwards ve Ward, 2004; Mamona-Downs ve Downs, 2002; Vinner, 1977); matematiksel tanımların oluşumu ve kullanımı, günlük dildeki tanımlarinkinden farklıdır. Matematiksel tanımlar, koşullu bir yapıya sahiptir (Edwards ve Ward, 2004) ve “kesin, minimal”, “gerekli ve yeterli” gibi terimlerle ilişkili olmasından dolayı; sıradan tanımlardan farklılık göstermektedir (Morgan, 2005).

2.1.1. Matematiksel Tanımlarda Bulunması Gereken Kriterler

Bir tanımın “iyi” bir tanım olabilmesi için önemli sayılan bazı kriterler vardır. “Tanım”ı, “birçok yontulmuş yüzü olan bir elmas parçası”na benzeten ve elmasın formal tarafına ışık tutan Dormolen ve Zaslavsky (2003); mantıksal gereklilik olarak gördüğü bu kriterleri aşağıdaki şekilde sıralamıştır:

Hiyerarşi kriteri: Yeni bir kavram tanımlanırken; yeni kavram, daha genel bir kavramın özel bir durumu olmalıdır. Bu kritere göre; yeni bir kavram tanımlanırken, sadece önceden tanımlanmış genel kavram ve özellikler kullanılabilir (Dormolen ve Zaslavsky, 2003).

Varlık kriteri: Yeni tanımlanmış kavramın, geçerli sistem içinde en azından bir örneğinin bulunması gerektiği kastedilmektedir (Dormolen ve Zaslavsky, 2003).

Denklik kriteri: Bir kavram için birden fazla formülasyon olduğunda; bunların birbirlerine denk olması gerektiğini ifade etmektedir (Dormolen ve Zaslavsky, 2003).

Aksiyomatikleştirme kriteri: Bir tanımın, tümdengelimli sisteme uygun ve sistemin bir parçası olması kastedilmektedir. Bir tanımda geçen tüm kavramların sırasıyla yine aynı tümdengelimli sistem içinde tanımlandığının doğrulanması; tanımın “aksiyomatikleştirme kriteri”ni sağladığı anlamına gelmektedir. Hiyerarşi kriterine göre tanımlanamayan “nokta”, “doğru”, “düzlem” gibi kavramları dolaylı olarak tanımlayabilmek için ise; aksiyomlar ve postulatlar verilmiştir (Dormolen ve Zaslavsky, 2003).

Bu kriterler dışında; mantıksal açıdan bakıldığında gerekli olmadığı düşünülen, ancak genel kültürün bir parçası olarak görülen kriterler de vardır (Dormolen ve Zaslavsky, 2003):

Minimallik kriteri: Kavramın var olması için gerekenin dışında çok fazla özelliğinin verilmemesi kastedilmektedir (Dormolen ve Zaslavsky, 2003).

Şıklık kriteri: Birbirine denk olan iki tanımdan; daha güzel görünen, daha az sembol/sözcük kullanan veya daha basit kavramları kullanan tanımın, (örneğin ders kitabı yazarları tarafından) daha tercih edilir olması kastedilmektedir (Dormolen ve Zaslavsky, 2003).

Dejenerasyon kriteri: Bazen bir tanımın sonucu, kavrama dair sezgisel düşüncemize uymayan örnekler verilir; ki bu tür örnekler, “dejenerasyonlar” olarak adlandırılmıştır. “Kavramı tanımlarken, dahil olacağını ummadığımız kavram örnekleri” olarak da tanımlanabilecek dejenerasyonlar, tanımın mantıksal bir sonucudur. Birisi, bu tür örneklerin olmasından hoşlanmayabilir ve tanımın koşullarını, bu tür örnekleri dışarıda bırakacak şekilde değiştirebilir. Belirli bir örnek için “dejenerasyon” demek, son derece öznel ve bir örneğin “dejenerasyon” olduğuna karar vermede nesnel bir kriter de yoktur. Bir dejenerasyonu dışarıda bırakıp bırakmamak ise, çoğu kez tercih meselesidir (Dormolen ve Zaslavsky, 2003).

Winicki-Landman ve Leikin (2000) ise, –*Khinchin, 1968; Solow, 1984; Vinner, 1991 gibi*– bazı matematikçilerin çalışmalarına dayalı olarak; matematiksel kavramların tanımlanmasında yerine getirilmesi gereken mantıksal ilkeleri, başka bir deyişle bir tanımın matematiksel özelliklerini aşağıdaki şekilde listelemiştir (p. 17):

1. “Tanımlama, bir ad vermedir. Yeni kavramın adı; tanım olarak kullanılan ifadede takdim edilir ve o ifadede yalnızca bir kere görünür.
2. Yeni kavramı tanımlamak için, sadece önceden tanımlanmış kavramlar kullanılabilir.
3. Tanım, kavram için gerekli ve yeterli koşulları belirler.
4. Koşullar kümesi, en az (*minimal*) olmalıdır.
5. Tanım, keyfidir.”

Ancak belirli bir matematiksel kavram için “en uygun” tanım; hem matematiksel olarak doğru hem de öğretim açısından uygun olmalıdır (Winicki-Landman ve Leikin, 2000).

2.1.2. Matematik Öğretiminde Kavramların ve Tanımların Rolü

Matematik eğitimi açısından önemli olduğu düşünülen sorulardan biri, “öğrenciye yeni bir matematiksel kavramı tanıtmamanın en iyi yolunun ne olduğu” sorusudur. Daha öncelerde ise, “(belirli bir) kavramın nasıl tanımlanması gerektiği” sorusuna cevap aranmıştır (Winicki-Landman ve Leikin, 2000). Öğrencilerin formal tanımlarla yaşadıkları zorluklar, yeni bir olgu değildir ve bu olgu, büyük matematikçilerden biri olan Poincaré’nin zihnini de meşgul etmiştir (Tall, 1988). Poincaré (1914), “iyi bir tanım” için şunları söylemiştir:

“İyi bir tanım nedir? Filozof ya da bilim adamı için, tanımlanacak tüm nesnelere ve yalnızca bu nesnelere uygun olan tanımdır; mantık kurallarına uygun tanımdır. Ancak eğitimde durum böyle değildir; iyi tanım, öğrenciler tarafından anlaşılabilen tanımdır.” (p. 117)

Ayrıca Poincaré (1914), “bir tanımı anlamak”, bazı insanlar için, kullanılan tüm terimlerin anlamını bilmek ve herhangi bir çelişkinin olmadığına ikna olmak anlamına gelse de; çoğunluk için durumun hiç de böyle olmadığını dile getirmiştir. Onlar, bir ispatın tüm kıyaslarının doğru olup olmadığını bilmekle yetinmeyerek; neden belli bir sırada birbirleriyle ilişkili olduklarını da bilmek isterler. Öğrencilerin bir kısmı da, kendi kendilerine her zaman bunun ne işe yarayacağını sorarlar ve çevrelerinde gerçekte ya da doğada öyle bir matematiksel kavrama gerekçe bulamadıkları sürece de anlayamazlar. Her kelimenin altına mantıklı bir görüntü koymak isteyen bu kişiler; tanımın da bu görüntüyü çağrıştırmasını isterler; çoğunlukla akıl yürütmek yerine şekillere bakarlar ve yalnızca gördüklerinde anladıklarını sanırlar (Poincaré, 1914, 1969).

Toumasis (1995); matematikteki kavramlar için, “matematikte düşünmenin, özellikle ileri-düzey düşünmenin temel yapı blokları” (p. 98) benzetmesini yapmış ve tecrübeli öğretmenlerin, bunun farkında olduklarını belirtmiştir. 1960’lı yıllardaki “yeni matematik”le; öğrencilerin anlayabilecekleri bir şekilde sunulduğu düşünülen, matematiksel kavramların net tanımlarına dayalı bir yaklaşım oluşturulmaya çalışılmış; ancak bu yüksek ideallere ulaşma noktasında başarılı olunamamıştır. Başarılı olunamamasının başlıca nedeni; bireylerin, matematiksel kavramlar üzerine düşünme yöntemlerinin, daha ziyade sadece tanımda kullanılan sözcük kalıplarına bağlı olmasıdır (Tall, 1992). 1970’li yılların sonları, 1980’li yılların başlarında; birçok yazar, formal

matematikçiler tarafından formüle edilen kavramlar ile öğrenciler tarafından yorumlanan kavramlar arasındaki uyumsuzluğu fark etmişlerdir (Tall, 1992).

Bir kavramı *açıklamanın* aksine, onu bir cümlede *tanımlama* fikrini anlamak; ilk başta hiç de kolay olmamaktadır. Özellikle de, tanımda, tanımlanmamış sözcüklerin olması; durumu daha da zorlaştırmaktadır. Bu tür durumlarda; bireyin, mantıksal olarak formüle edilmiş kavram tanımına değil de; kişisel kavram imajına dayalı birtakım varsayımlarda bulunmadan başlangıç yapması mümkün değildir (Tall, 1992).

2.2. Kavram Tanımı ve Kavram İmajı

“Kavram” kelimesinin sözlük anlamı, “nesnelerin veya olayların ortak özelliklerini kapsayan ve bir ortak ad altında toplayan genel tasarım” şeklindedir (<http://tdkterim.gov.tr/bts/>). Bazı kavramlar somut; bazıları ise daha soyut ve karmaşıktır. Kavramlar, bireyler arasındaki iletişimi kolaylaştırmakla birlikte; bireyler arasında kavram birliği sağlanamadığı takdirde yanlış anlaşılmalara da sebep olabilir (Erden ve Akman, 1997).

Bir kavramın ismi; duyulduğunda veya görüldüğünde, belleğimize gelen bir uyarıcı görevi görür ve bu kavram ismi tarafından belleğimizde birşeyler çağrıştırılır. Genellikle, kavramın bir tanımı mevcut olmasına rağmen; bellekte çağrıştırılan bu şeyler, kavram tanımı değildir (Vinner, 1991). Bütün bu zihinsel görüntüleri içeren, kavram ile ilgili bilişsel yapının bütünü; “kavram imajı (*concept image*)” olarak adlandırılmıştır (Tall ve Vinner, 1981). “Zihinsel görüntü” ile kastedilen şey; resim, sembolik şekil, diyagram, grafik gibi temsil türleridir (Vinner ve Dreyfus, 1989). Başka bir deyişle; kavram imajı, kavram ismiyle zihinde çağrışım yapan sözel olmayan birşeydir (Vinner, 1991).

“Kavram tanımı (*concept definition*)” ise, o kavramı açıkça belirtmek için kullanılan sözcüklerden oluşan bir kalıp olarak düşünülebilir. Kavram tanımı; birey tarafından ezberlenerek öğrenilebileceği gibi, anlamlandırarak da öğrenilebilir. Kavram tanımı; tanımın, birey tarafından yeniden yapılandırılmış hali de olabilir. Bu durumda “kavram tanımı”; öğrencinin, zihninde canlanan kavram imajını kendi kelimeleriyle açıklamak amacıyla kullandığı sözcüklerden oluşan bir kalıptır. Kavram tanımı; bireye verilse de, birey kendisi yapılandırırsa da; zaman zaman değişebilir ve böylece kişisel kavram tanımı, formal kavram tanımından farklılık gösterebilir (Tall ve Vinner, 1981).

“Formal kavram tanımı” ile kastedilen ise; “matematik topluluğu tarafından genel olarak kabul gören kavram tanımı”dır (Tall ve Vinner, 1981, p. 152).

Kavram imajı, bir kavramın zihinde yorumlanmasına imkan verir. Ancak kavramın zihindeki yorumunun, kavram tanımı ile çelişmesi durumunda; kavramın anlaşılmasına ya da bazı yönlerinin yanlış anlaşılmasına zemin de hazırlayabilir. Bir bireyin, aynı kavram için çoklu kavram imajına sahip olması; bilişsel çatışmalar oluşturabilir. “Çatışmaların oluşmadığı bir öğretim benimsenmeli midir?” sorusu ise tartışılmaktadır. Ancak matematikte bilişsel çatışmaların kaçınılmaz olduğu ve çatışmaları çözmenin, öğrencinin önemli bir etkinliği olduğu konusunda şu anda oldukça güçlü bir fikir birliği vardır (Mamona-Downs and Downs, 2002).

2.3. Kavram Kazanımı

Öğrencilerin, kavram hakkında iletişim kurma ihtiyacı duymaları, sonuçta onu yorumlayabilmeleri ve adlandırabilmeleri açısından; bir kavramın tanımını bilmek önemlidir. Öğrencilerin birçoğu, ders kitabında yer alan tanımı tekrar etme eğilimindedir. Bu nedenle; –onu [tanımı] diğerlerinden ayırmak için her örnekte sunulan kritik özellikleri betimlemede– kendi sözcüklerini kullanarak, deneyim kazanmaları gerekir (Toumasis, 1995).

Bir kavramın öğrenilmesindeki ölçüt, kavramın adını söyleyebilmek değil; yeni bir bilgiyi, bu kavramı oluşturan benzerliklere göre sınıflandırmada yol gösterici olabilmektir (Skemp, 1986). “Bir kavram tanımını ezberlemek; o kavramın anlaşıldığını garanti etmez.” (Vinner, 1991, p. 69). Kavramı anlama, ona yönelik bir kavram imajına sahip olma durumunda gerçekleşir (Vinner, 1991).

Tanımların birçoğu, bir kavram imajı biçimlendirmeye yardımcı olsa da; imaj biçimlendiğinde, tanım artık gereksiz olmaya başlar. Kavram ile ilgili ifadeler ele alındığında; tanım pasif kalacak, hatta belki de unutulacaktır (Vinner, 1991). Bu nedenle “kavram oluşumunda tanımın rolü” için “iskele mecazı” akla gelebilir: “Binanın inşası bittiği an, iskele kaldırılır.” (Vinner, 1991, p. 69).

Bir kavram, tek bir adımda elde edilmemekte; kavram kazanımı birbirini takip eden çeşitli adımlar sonunda gerçekleşmektedir. Bir kavramın formal tanımı, mutlaka öğrencilere sunulan çeşitli örneklerin bir sonucu olmalıdır (Vinner ve Dreyfus, 1989). Aksi takdirde tanımlar, doğası gereği kesin ve özel olduklarından ve “son söz” gibi

otoriter bir nitelik taşıdıklarından; keşfetmeyi sınırlandırabilir ve soru sormayı engelleyebilir (Keiser, 2000). Matematik ders kitaplarında tanımlar, genellikle başlangıca yakın bir yerde verilmektedir. Tanıma baş kısımlarda yer verilmesi ise, genellikle öğrencilerin o kavrama dair anlamlı bir temsil oluşturmalarına yardımcı olmamaktadır (Shield, 2004).

2.4. “Matematiksel Tanımlar” ile ilgili Araştırmalar

Bu alt bölümde; “matematiksel tanımlar” ile ilgili olarak, yurtiçinde ve yurtdışında yapılmış araştırmalara yer verilecektir.

2.4.1. “Matematiksel Tanımlar” ile ilgili Yurtdışında Yapılmış Araştırmalar

Matematik eğitimi alanında “matematiksel tanımlar” ile ilgili yurtdışında yapılmış araştırmalar incelendiğinde; farklı öğretim kademelerinde yürütülmüş çeşitli çalışmalara rastlanmıştır.

8. sınıf öğrencilerinin, basit geometrik kavramları kullanmada yaşadıkları zorlukları ortaya çıkarmak amacıyla; Heinze (2002) tarafından bir araştırma yapılmıştır. Matematik derslerinde ispatlara yer vermeye 8. sınıfta başladığından dolayı; araştırmanın 8. sınıf öğrencileri ile yürütüldüğü belirtilmiştir. Araştırmada, “öğrencilerin ‘dörtgen’ (özellikle ‘kare’ ve ‘dikdörtgen’) kavramına dair anlayışlarının; –eşdeğer tanımları fark etme, ters örnek bulma, gerekli ve yeterli koşulları ayırt etme gibi– farklı matematiksel problem durumları için yeterli olup olmadığı” sorusuna yanıt aranmıştır. 106 tane 8. sınıf öğrencisi ile yürütülen bu deneysel araştırmadan; öğrencilerin “dörtgen” kavramı ile ilgili anlayışlarında eksiklikler olduğu sonucu çıkarılmıştır. Özellikle belirli problemler üzerinde çalışmak için kavramları kullanmaları gerektiğinde; öğrencilerin büyük bir kısmının, kavram tanımına başvurmaksızın, daha sınırlı olan kişisel kavram imajını kullandıkları görülmüştür. Bu eksiklikler; özellikle “dörtgenler”in sınıflandırılmasına dair farklı bir anlayıştan, matematiksel dili ve matematiksel düşünmeyi anlamada yaşanan zorluklardan

kaynaklanmaktadır. Eksikliklerin her iki kaynağı da; matematik derslerindeki ispatları öğrenme ve öğretme açısından zorluklara neden olmaktadır.

“Matematiksel tanımlar” konusunda, ortaöğretim kademesinde yapılmış çalışmalar da bulunmaktadır. Öğrencilerin bir matematiksel tanımları kavrayışlarını incelemek amacıyla; Zaslavsky ve Shir (2005) tarafından, 12. sınıf öğrencileri ile bir araştırma yürütülmüştür. Araştırmada öğrencilere; ikisi geometrik (“*kare*” ve “*ikizkenar üçgen*”) ve ikisi analitik (“*artan fonksiyon*” ve “*bir fonksiyonun yerel maksimum noktası*”) olmak üzere, dört matematiksel kavramın her biri için, o kavramı açıklayan yedi/sekiz ifade verilmiştir. Öğrencilerden, –bireysel ve grup etkinlikleri yoluyla– her bir ifadenin, açıklanan kavramın tanımı olup olamayacağını belirlemeleri ve bu ifadelerden, kavramın tanımı olarak tercih ettikleri ifadeyi seçmeleri istenmiştir. Araştırmadan; geometrik kavramlar için alternatif tanımlar düşünürken, tanıma dayalı muhakemenin baskın olduğu; analitik kavramlar için alternatif tanımlar düşünürken ise, örneğe dayalı muhakemenin baskın olduğu sonuçları çıkarılmıştır.

Ortaöğretim kademesinde yapılmış bir başka çalışmada; Rasslan ve Tall (2002), belirli integral kavramına dair öğrenci tanımlarını, imajlarını ve bunlar arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Araştırma; daha deneysel ve kavramsal bir müfredat takip eden ve sınav sonuçları, ortalamanın üstünde olan 41 İngiliz lise son sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Veri toplamak amacıyla hazırlanan 6 soruluk anketin bir sorusu, öğrencilerin belirli integral kavramının tanımını bilip bilmediklerini kontrol etmek; diğer 5 soru ise, öğrencilerin bu kavramla nasıl çalıştıklarını ve bunun, tanımla olan ilişkisini sınıflandırmak amacıyla hazırlanmıştır. Sonuç olarak; 41 öğrenciden sadece 7’sinin, belirli integral tanımını bildiği ve öğrencilerin çoğunluğunun, daha geniş bağlamlarda alanları ve belirli integralleri hesaplayan problemleri yorumlamada zorluklar yaşadıkları tespit edilmiştir.

Lise öğrencileri ile gerçekleştirilmiş diğer bir araştırma da; Richgels (1994) tarafından yürütülmüş olan ve “öğrencilerin matematik hakkındaki inançlarının, ‘limit’ kavramının matematiksel tanımını öğrenmelerindeki rolü”nün araştırıldığı bir tez çalışmasıdır. Katılımcı olmaya gönüllü 23 lise öğrencisi, temel matematik (*calculus*) ders sürecinde; videoya kaydedilen üç değerlendirmeye ve bir öğretim ünitesine katılmışlar; bir de geometri bilgi anketi doldurmuşlardır. Verilerin analizi sonucunda;

- Formal limit kavramı ile öğrencinin limit kavramı konusundaki inançları arasında bağlantı olduğu,

- Formal limit tanımını ezberden söylemenin, formal limit kavramının öğrenilip öğrenilmediğini belirlemede tek ölçüt olmaması gerektiği tespit edilmiştir (Richgels, 1994).

Öğretmen adaylarının, belirli bir kavrama dair matematiksel tanımlarını incelemek amacıyla; yükseköğretim kademesinde de çeşitli araştırmalar yürütülmüştür. İlköğretim öğretmen adaylarının, “çokgenler” kavramına dair kavram imajlarını ve matematiksel tanımlarını incelemek amacıyla; Ward (2004) tarafından, ilköğretim matematik kapsamındaki konuları içeren bir derse kayıt yaptırmış yedi öğretmen adayı ile bir araştırma yapılmıştır. Araştırmada, öğretmen adaylarından; üçgenler ve altıgenlerin bulunduğu çeşitli şekilleri sınıflandırmaları, teşhis etmeleri ve tanımlarını yapmaları istenmiştir. “Çokgenler” konusuna başlanmadan önce, dersin ilk haftasında, öğretmen adayları ile görüşmeler yapılmıştır. Her öğretmen adayı, yerine getirmeleri istenilen üç görevi (“*Bu şekillerden, eğer varsa, hangileri bir üçgendir?*” (p. 43); “*Bu şekillerden, eğer varsa, hangileri bir dik üçgendir?*” (p. 45); “*Bu şekillerden, eğer varsa, hangileri bir altıgendir?*” (p. 47)) tamamlamaları esnasında videoya çekilmiştir. Veri analizi sonucunda; bu öğretmen adaylarının “çokgenler”e yönelik sahip oldukları kavram imajlarının kapsamının sınırlı olduğu görülmüştür. Bu öğretmen adaylarının çoğunun; “dik üçgen” için kavram imajları; dikliği gösterilen, dik kenarları düşey-yatay konumda olan dik üçgenlerdir. “Altıgen” için kavram imajları ise; düzgün, dış bükey ve tabana paralel olan altıgenlerden oluşmaktadır. Sonuç olarak, “çokgenler” için kavram imajlarının; matematiksel tanımlarından ve özelliklerinden daha etkili olmasına rağmen, kapsam açısından sınırlı olan örnekler ve örnek olmayan durumlar olduğu görülmüştür.

Öğretmen adayları ile yapılmış diğer bir araştırma da, yine geometri alanında gerçekleştirilmiştir. Zazkis ve Leikin (2008), öğrenciler tarafından üretilen örneklerin, öğrencilerin belirli matematiksel kavramları anlayışlarını yansıttığını öne sürerek; 40 ortaöğretim matematik öğretmen adayının, “kare” tanımı için ürettikleri örnekleri incelemişlerdir. Öncelikle öğrencilerden, yazılı olarak “bir karenin tanımı için mümkün olduğunca çok örnek vermeleri” istenmiştir. Bir hafta sonra ise, öğrencilere “karenin tanımı için 24 örnekten oluşan bir liste” verilmiş; öncelikle, her bir örneğin geçerliliğini bireysel olarak değerlendirmeleri ve ardından da kararlarını küçük gruplar halinde karşılaştırmaları istenmiştir. Veri analizi yaparken; “ulaşılabilirlik”, “doğruluk”, “zenginlik” ve “genellik” kategorileri esas alınmıştır. Sonuçlar; “bir matematiksel tanımın neleri içermesi gerektiği” konusunda katılımcıların anlayışlarını ortaya

çıkarmış; ayrıca katılımcıların pedagojik tercihleri ile matematiksel düşüncelerini karşılaştırmıştır. Grup tarafından üretilen tanım örnekleri incelendiğinde; katılımcı tercihlerinin daha çok, matematiksel değil de, pedagojik yönde olduğu saptanmıştır. Başka bir deyişle, birçok öğrenci; kendilerine yöneltilen “listedeki örneklerden hangileri geçerli kare tanımlardır?” sorusunu, tartışmalarda dolaylı olarak “öğrencilerimle aşağıdaki tanımlardan hangilerini kullanırdım?” sorusuna çevirmişlerdir.

Literatür taramasında; “matematiksel tanımlar” ile ilgili olarak, öğretmen adayları ile yapılmış bir tez çalışmasına da ulaşılmıştır. Bayazit (2009), doktora tez çalışmasında; matematik öğretmen adaylarının, matematik, ispat, matematiksel tanımlara dair fikirlerini ve öğretmen adaylarının, matematiksel tanımları ve doğruluğunu değerlendirme uygulamasını kullanarak, ispat yazma yaklaşımlarını araştırmıştır. Katılımcıları, dört matematik öğretmen adayı olan bu nitel durum çalışmasında; katılımcılarla dört tane yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. İlk görüşme, katılımcıların matematik, ispat, matematiksel tanımlara dair fikirlerini belirlemek amacıyla gerçekleştirilmiştir. Göreve dayalı olan diğer üç görüşme ise; katılımcıların, Geometri, Kümeler Teorisi ve Lineer Cebir alanlarında, matematiksel tanımları –basit alıştırmalarda, ispat yapmada ve ispatın sağlamasını yapmadaki– kullanımlarını incelemek amacıyla yapılmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre; öğrencilerin matematiksel inançları, onların ispat yapma yaklaşımları hakkında bilgi verebilmektedir. Öğrencilerin ispata dair anlayışlarının; gerekçelendirme, doğrulama ve bazen ispatın açıklama rolü ile çerçevelendiği; ispata dair bu anlayışın, verilen bir ispatın geçerliliğini değerlendirmede onların kriterlerini oluşturduğu sonuçlarına da ulaşılmıştır. Öğrencilerin, kavram imajlarıyla bir sonuca ulaşabildikleri sürece, kavram tanımlarını atlama eğiliminde oldukları; ayrıca öğrencilerin matematiksel bağlamdaki deneyimlerinin, onların rahatlıkla yorum yapabilmeleri adına ve mantıksal çıkarımlarda bulunmak için matematiksel kavramlar arasında bağlantılar kurmak adına ayırıcı olduğu da tespit edilmiştir.

“Matematiksel tanımlar” konusunda yapılmış çalışmalar incelendiğinde; branşı matematik olan üniversite öğrencileri ile gerçekleştirilmiş araştırmalara da rastlanmıştır. Matematik bölümü öğrencilerinin, “bir dizinin limiti”ne dair imajlarının, “bir dizinin limiti”nin tanımlarını anlamalarını nasıl etkilediğini araştırmak amacıyla; Roh (2008) tarafından bir araştırma yapılmıştır. Öğrencilerin, özel olarak tasarlanmış uygulamalı bir etkinlik yardımıyla, dizilerin yakınsamalarını anlatan ifadelerin uygunluğunu

değerlendirdikleri bir dizi yarı-yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Görüşmelerde öğrencilerden, verilen dizileri sayısal ve grafiksel olarak göstermeleri; ayrıca bir dizinin bu gösterimlerinden her biri için, bu dizinin yakınsaklığını/ıraksaklığını ve (eğer varsa) limitini belirlemeleri istenmiştir. Öğrencilerin “bir değere yaklaşan bir dizi” ifadesinden kastettikleri şeyin, “bir dizinin limiti”ne dair sahip oldukları imajlara göre değiştiği görülmüştür. Örneğin bir öğrenci, “limit” tanımını, “bir sayıya yaklaşıyor; fakat o sayıya ulaşmıyor” şeklinde yapmıştır. Araştırmanın bulguları; öğrencilerin “limit” tanımlarını anlamalarının; önceden oluşturmuş oldukları “limit” imajlarının, matematiksel limit kavramıyla uyumlu olup olmamasıyla yakından ilişkili olduğunu göstermiştir.

Branşı matematik olan üniversite öğrencileriyle gerçekleştirilmiş başka bir çalışma da, Grundmeier, Hansen ve Sousa (2006) tarafından yapılmıştır. Öğrencilerin “belirli integral”in sembolik ve sözel tanımını anlamalarını, belirli integralleri hesaplama yeteneklerini ve belirli integrali grafiksel yorumlamalarını incelemek amacıyla yürütülmüş bu araştırmada; integral hesabı konusunda bir ders almış olan 52 matematik öğrencisine bir anket uygulanmıştır. Anket hazırlanırken;

- ✓ İntegrallemenin anlamını, kelimelerle yorumlama ve temsil etme;
- ✓ Belirli integrali, matematiksel semboller kullanarak tanımlama;
- ✓ İntegrallemenin anlamını, grafiksel olarak yorumlama ve gösterme;
- ✓ İntegralleri hesaplama;
- ✓ İntegrallemenin gerçek hayattaki uygulamalarının farkına varma

kriterleri dikkate alınmıştır. Anket sonuçlarından; belirli integralin tanımını anlamanın; işlemsel akıcılığı ve işlemler ile tanımlar arasında bağlantı kurmayı beraberinde getirmediği görülmüştür. Ayrıca belirli integrali grafiksel olarak gösterebilen öğrencilerin, integrali hesaplama yeteneğinde en yüksek ortalama puanı aldıkları belirlenmiştir. Araştırmadan elde edilen bir diğer sonuç ise; öğrencilerin, integrallerin değerlerini bulmak yerine, yöntemi ezberleme yolunu seçebildikleri; yaptıkları şeyin ne olduğunun ve neden yaptıklarının da yeterince farkında olmadıklarıdır. Orton (1983) tarafından, öğrencilerin “integralleme” konusundaki anlayışlarını, yaptıkları ortak hataları ve kavram yanlışlarını ortaya çıkarmak amacıyla yapılmış araştırmanın sonuçları da; bu sonuçla benzerlik göstermektedir. Orton (1983), –verilerin analizine dayalı olarak– birçok öğrencinin, ne yaptığını biliyor gibi görünmesine rağmen; takip ettikleri yöntemler konusunda soru sorulduğunda, aslında yaptıkları şeyi niçin yaptıklarını bilmedikleri yorumunu yapmıştır.

Edwards ve Ward (2004) tarafından, yükseköğretim kademesindeki öğrencilerle yürütülen çalışmada ise; matematik bölümü öğrencilerinin Soyut Cebire Giriş dersindeki tanımları anlamaları ve tanımları kullanımları araştırılmıştır. Veriler, 14 öğrencinin iki yazılı sınıf ödevi ve sınıftan gönüllü 8 öğrenci ile gerçekleştirilen –birer saat süren, ses ve video kayıtları yapılan– iki görüşme aracılığıyla toplanmıştır. Görüşmelerde öğrencilerden, verilen bir dizi tanımları okumaları ve bu tanımlarla ilişkili bir görev üzerinde çalışmaları istenmiştir. Araştırma sonuçları; çoğu öğrencinin, matematiksel tanımları matematikçilerin yaptıkları şekilde sınıflandırmadıklarını; çoğu öğrencinin, tanımları doğru şekilde ifade ederek, açıklayabildikleri zaman bile, tanımları matematikçiler gibi kullanamadıklarını ortaya koymuştur.

“Matematiksel tanımlar” ile ilgili olarak, Edwards (1997) tarafından yapılmış bir doktora tez çalışmasında da; matematik lisans öğrencilerinin, reel analizdeki formal tanımları anlamaları ve kullanmaları araştırılmıştır. Matematik lisans öğrencilerinin, matematiksel tanımları anlama ya da anlamaya çalışma ve kullanma şeklini neyin karakterize ettiğini; ayrıca matematik lisans öğrencilerinin, limit ve sürekliliğe dair anlayışlarını neyin karakterize ettiğini ve bu anlayışların, bu kavramların ve ilişkili kavramların formal tanımlarını anlamalarını nasıl etkilediğini tespit etmek amacıyla; reel analiz dersini ilk defa alan 8 tane matematik lisans öğrencisi ile bir dönem boyunca, görev tabanlı derinlemesine görüşmeler yapılmıştır. Sonuç olarak; öğrencilerin, matematiksel tanımların rolüne ilişkin olarak sözcüksel açıdan ille de matematikçilerin anlayışına katılmadıkları; özellikle süreklilik kavramının tanımlarında, mantık ve ifade karmaşıklığı açısından zorluk yaşadıkları tespit edilmiştir. Ayrıca bazı öğrencilerin limit ve sürekliliği kavramsal anlamalarındaki yetersizlik; çalışmada kullanılan tanımlar, matematiksel olarak daha doğru anlaşıldığında azalmıştır.

Yapılan literatür taramasında; öğretmenler ve üniversite öğrencileri ile yürütülmüş, konu ile ilgili bir araştırmaya da rastlanmıştır. Vinner ve Dreyfus (1989), “fonksiyon” kavramı için imajlar ile tanımları karşılaştırmak için 271 üniversite öğrencisi ve 36 ortaokul öğretmeni ile bir araştırma yapmışlardır. Altı soru, katılımcıların “fonksiyon” imajının bazı yönlerini; bir soru ise, katılımcıların tanımlarını incelemek amacıyla tasarlanmış toplam 7 sorudan oluşan ve yanıtlanması en fazla 20 dakika süren bir soru kağıdı tüm katılımcılara uygulanmıştır. Soru kağıdı kullanılarak; muhakeme yeteneği ve tutarlı bir şekilde tanıma başvurma yeteneği gibi matematiksel

düşüncenin bazı bileşenleri incelenmiştir. Öğrencinin ders seviyesinin, öğrencinin muhakeme örüntülerinin iyi bir göstergesi olduğu sonucuna varılmıştır.

“Matematiksel tanımlar” ile ilgili bir tez çalışmasında ise; tanım ve açıklama örnekleri; bilimsel, eğitimsel dilde ve günlük dilde kabul edilen modellerle karşılaştırılmıştır. Ricciardi (1985); üç matematiksel terim tanımını, birkaç filozof ve eğitimcinin tanım modelleriyle ve birkaç sözlüğün günlük referanslarıyla karşılaştırmıştır. Benzer şekilde; açıklamaları da, birkaç filozof ve eğitimcinin açıklama modelleriyle ve birkaç sözlüğün günlük referanslarıyla kıyaslamıştır. Seçilen ortaöğretim matematik ders kitaplarında yer alan 16 ifade, “tanım”ın çeşitli kullanımlarını ve üç açıklama örneği de, “açıklama”nın çeşitli kullanımlarını göstermektedir. Araştırmadan; “açıklama” veya “tanım” için, evrensel olarak kabul edilen bir modelin olmadığı; matematiksel terimlerin incelenen tanımlarının çeşitliliğinde az tutarlılık olduğu ya da hiç olmadığı; incelenen açıklama örneklerinde alışılmamışlık ve karışıklık olduğu; ortaöğretim matematiğinde “açıklama” ve “tanım” etiketlerinin değişken olduğu; ortaöğretim matematiğini öğretenlerin “açıklama” ve “tanım” formatlarının farkında olmadıkları ve karıştırdıkları; bu anlam belirsizliğinin, ortaöğretim matematik öğretiminde zaten var olan zorluğu daha da arttırdığı sonuçları çıkarılmıştır.

2.4.2. “Matematiksel Tanımlar” ile ilgili Yurtiçinde Yapılmış Araştırmalar

“Matematiksel tanımlar” konusunda yurtdışında yapılmış araştırmaların yanısıra; yurtiçinde yürütülmüş çalışmalara da rastlanmıştır.

Kaplan ve Hızarcı (2005), ilköğretim matematik öğretmen adaylarının “üçgen” kavram tanımlarından hareketle, bu kavram ile ilgili bilgi düzeylerini tespit etmek amacıyla; İlköğretim Matematik Öğretmenliği üçüncü sınıfında öğrenim gören 45 öğrenci ile bir çalışma yapmışlardır. Veri toplama sürecinde; öncelikle öğrencilerden, “üçgen” kavramını tanımlamaları istenmiştir ve öğrenci tanımları incelenerek, altı kategori altında toplanmıştır. Daha sonra ise, bu altı tanım için, üçlü derecelendirme ölçeği şeklinde bir anket oluşturulmuş ve aynı öğrenci grubuna uygulanmıştır. Veriler, yüzde/frekans tekniği kullanılarak analiz edilmiştir. Anket sonuçları

değerlendirildiğinde; ilköğretim matematik öğretmen adaylarının çoğunluğunun, kendilerine sunulan tanımlar arasından en uygun tanımı bulmada başarılı oldukları söylenebilir de; formal üçgen tanımı ve üçgen özellikleri arasındaki farkı iyi bir şekilde analiz edemedikleri ve üçgen tanımını üçgenin temel özelliklerinin bir bileşkesi olarak göremeyerek, üçgene dair bildiği en temel özelliği tanım olarak ifade edebildikleri görülmüştür.

Konu ile ilgili olarak, yine ilköğretim matematik öğretmen adayları ile yapılmış diğer bir çalışma da; Kar, Çiltaş ve Işık (2011) tarafından yürütülmüştür. Öğrencilerin, “fonksiyon”, “birebir fonksiyon”, “örten fonksiyon”, “bağıntı”, “denklik sınıfı”, “kartezyen çarpım kümesi” ve “alt cisim” kavramlarına yönelik öğrenme güçlüklerinin tespit edilmesi amacıyla yapılan bu çalışmanın örneklemini; İlköğretim Matematik Öğretmenliği ikinci sınıfındaki 166 öğrenci oluşturmaktadır. Karma yöntemin kullanıldığı çalışmada; nicel veriler, araştırmacılar tarafından hazırlanmış bilgi testi aracılığıyla; nitel veriler ise, 15 öğrenci ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler aracılığıyla toplanmıştır. Testte yukarıda bahsedilen kavramlara yönelik hazırlanmış olan üç problem, Lineer Cebir-I dersi vize sınav soruları olarak öğretmen adaylarına sorulmuştur. Testte öğrenciler tarafından tanımlanması istenen kavramlar, doğru ya da yanlış olma durumlarına göre; problem kısımlarının çözümleri ise, sonucun doğru ya da yanlış olma durumuna göre analiz edilmiştir. Boş bırakılan ya da analiz edilecek kadar açık olmayan cevaplar ise, “diğer” başlığı altında toplanmıştır. Veriler, yüzde ve frekans değerlerinden faydalanılarak yorumlanmıştır. Veri analizi sonucunda; öğrencilerin bu kavramları tanımlamada; kavramlara yönelik yapmış oldukları sözel açıklamaları, matematiksel dili kullanarak ifade etmede ve kavramlar arasındaki ilişkileri belirlemede güçlükler yaşadıkları sonuçlarına ulaşılmıştır. Ayrıca öğrenciler problem çözümü sırasında ilgili kavramlara yönelik işlemler yapsalar da, kavramın kendisini tanımlamada genel olarak zorlanmışlardır. Bu durumun ise, öğrencilerin kavramları yeterince özümseyememelerinden kaynaklanıyor olabileceği ifade edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin yarısından fazlasının, verilen problemleri doğru çözemedikleri, doğru sonuca ulaşamadıkları da tespit edilmiştir.

Yurtiçinde, ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adayları ile gerçekleştirilmiş başka bir çalışmada; Aydın ve Köğce (2008), öğretmen adaylarının “denklem ve fonksiyon” kavramlarını ne düzeyde tanımlayabildiklerini ve bu iki kavram arasında nasıl bir ilişki olduğuna dair algılayışlarını araştırmışlardır. Denklem

ve fonksiyon kavramlarını tanımlamaya yönelik 2 açık uçlu sorudan ve bu iki kavram arasındaki ilişkileri belirlemeye yönelik doğru-yanlış türünde 10 sorudan oluşan toplam 12 soruluk anket formu; İlköğretim ve Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümlerinde öğrenim gören 108 son sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının vermiş oldukları cevaplar, geliştirilen ölçüte göre değerlendirilerek, doğru-yanlış-boş kategorilerinde gruplandırılmış; yüzde ve frekans tabloları oluşturulmuştur. Ayrıca 6 öğretmen adayı ile de, konu hakkında yapılandırılmamış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Sonuç olarak; öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğunun, fonksiyon ve denklem kavramlarını tanımlamada yetersiz oldukları ve formal bir tanım yapamadıkları; bu iki kavram arasındaki ilişkiyi ortaya koymada başarısız oldukları ve hatta öğretmen adaylarının çoğunluğunun, fonksiyonları denklemlerin bir alt kümesi olarak algıladıkları sonuçları çıkarılmıştır. Yapılandırılmamış görüşmelerde denklem kavramını yanlış tanımlayan öğretmen adaylarının, denklemlerle ilgili problemleri çözerken zorlanmadıklarını, fakat denklem kavramını tanımlayamadıklarını itiraf ettikleri de belirtilmiştir.

Ülkemizde, “matematiksel tanımlar” konusunda, katılımcıları ortaöğretim matematik öğretmen adayları olan bir tez çalışması da yapılmıştır. Soğancı (2006), “öğretmen adaylarının, matematik öğrenimi ve öğretiminde tanımların rolü ile ilgili görüşleri”ni tespit etmek amacıyla; 7 ortaöğretim matematik öğretmen adayı üzerinde bir araştırma yapmıştır. Veriler, hazırlanmış bir görüşme formu aracılığıyla toplanmış ve fenomenografik yöntemle analiz edilmiştir. Verilerin analizi sonucunda; öğretmen adaylarının, “matematiksel bir tanımın ne olduğu”na dair görüşlerinde farklılıklar olduğu; matematiksel bir tanımda bulunması gereken kriterlerden yeterince haberdar olmadıkları; çoğunlukla formal tanımdan ziyade informal tanımları tercih ettikleri; matematiksel bir problemi çözerken, problemin merkezindeki kavram ya da kavramların tanımlarına bazen kavram imajı, bazen kavram tanımı, bazen ise her ikisi ile başvurdıkları; matematiksel bir kavramın öğrenilmesinde/öğretilmesinde ve problem çözmede, kavramın tanımını bilmenin gerekli olup olmadığı konusunda görüş ayrılıklarının olduğu; bazı öğretmen adaylarının, matematik öğrenimi ve öğretiminde tanımları gerekli, bazılarının yetersiz, bazılarının ise sadece konuya başlangıç aşaması niteliğinde buldukları görülmüştür.

Yurtiçinde yürütülmüş başka bir çalışma kapsamında ise; Üreyen (2006), “bir fonksiyonun konkavlığı”nın farklı tanımlarının, öğrencilerin anlamaları üzerindeki etkisini incelemek amacıyla; Türkiye’deki bir üniversitenin Fen ve Mühendislik Fakülteleri’ndeki temel matematik-II dersini alan öğrenciler ile bir araştırma yapmıştır. Öğrenciler, iki gruba ayrılmıştır ve her gruba “konkavlık”ın farklı bir tanımı verilmiştir. Her iki grupta da öğretim üyesi; öncelikle “konkavlık” kavramını tanımlamış ve fonksiyon grafikleri yardımıyla bu tanımı açıklamıştır. Ardından, öğrencilere, fonksiyonun konkavlığını belirlemede “2. türev testi”nin nasıl kullanılacağını göstererek; bu kullanıma birtakım örnekler vermiştir. 2 hafta sonra her iki gruptaki öğrencilere 5 soru sorulmuş ve öğrencilerin –tanıma bağlı olarak– anlamaları belirlenmeye çalışılmıştır. Araştırmadan; öğrencilerin, konkavlık kavramını anlamadan, 2. türev testini kullanarak bir fonksiyonun konkavlığını belirleyebildikleri; farklı tanımları eşit derecede iyi anlamadıkları; doğru olan farklı tanımların, öğrencilerin dikkatini, verilen kavramın hesaplamaya dayalı yönlerinden kavramsal yönlerine çekme konusunda etkili olabileceği sonuçları çıkarılmıştır.

“Matematiksel tanımlar/kavramlar” ile ilgili bu çalışmalar toparlanacak olursa; “kavram tanımı ve kavram imajı” (Heinze, 2002; Rasslan ve Tall, 2002; Roh, 2008; Vinner ve Dreyfus, 1989; Ward, 2004), “öğrencilerin bir matematiksel tanımları kavrayışları” (Zaslavsky ve Shir, 2005), “matematik hakkındaki inançların, matematiksel kavram tanımının öğrenilmesindeki rolü” (Richgels, 1994), “öğrencilerin, matematiksel bir tanım için ürettikleri örnekler” (Zazkis ve Leikin, 2008), “öğrencilerin, ispat yaparken matematiksel tanımları kullanımları” (Bayazit, 2009), “matematik dersinde tanım ve işlemsel akıcılığın incelenmesi” (Grundmeier, Hansen ve Sousa, 2006), “öğrencilerin matematiksel tanımları anlamaları ve kullanmaları” (Edwards ve Ward, 2004; Edwards, 1997), “matematikte tanım ve açıklama örnekleri” (Ricciardi, 1985), “öğrencilerin bir geometrik kavram ile ilgili bilgi düzeyleri” (Kaplan ve Hızarcı, 2005), “cebirdeki kavramlara yönelik öğrenme güçlükleri” (Kar, Çiltaş ve Işık, 2011), “öğrencilerin matematiksel kavramları tanımlayabilme düzeyleri” (Aydın ve Köğce, 2008), “öğretmen adaylarının, matematiksel tanımların rolü ile ilgili görüşleri” (Soğancı, 2006), “bir matematiksel kavramın farklı tanımlarının, öğrencilerin anlamaları üzerindeki etkisi” (Üreyen, 2006) gibi konularda, farklı öğretim kademelerinde çeşitli araştırmalar yürütülmüştür.

“Matematiksel tanımlar/kavramlar” ile ilgili yapılmış bu araştırmalar arasında, “kavram tanımı ve kavram imajı”nın (Heinze, 2002; Rasslan ve Tall, 2002; Roh, 2008; Vinner ve Dreyfus, 1989; Ward, 2004), “öğrencilerin bir matematiksel tanımları kavrayışları”nın (Zaslavsky ve Shir, 2005), “öğrencilerin, ispat yaparken matematiksel tanımları kullanımları”nın (Bayazit, 2009), “öğrencilerin matematiksel tanımları anlamaları ve kullanmaları”nın (Edwards ve Ward, 2004; Edwards, 1997), “cebirdeki kavramlara yönelik öğrenme güçlükleri”nin (Kar, Çiltaş ve Işık, 2011), “öğrencilerin matematiksel/geometrik kavram(lar) ile ilgili bilgi/tanımlayabilme düzeyleri”nin (Aydın ve Köğce, 2008; Kaplan ve Hızarcı, 2005) incelendiği çalışmalar olsa da; “öğrencilerin, matematiksel problem çözme sürecinde; ‘problemin içinde yer alan kavramlarla ilgili anlayışları’nın; ‘kavramlarla ilgili bu anlayışları’nın, ‘kavram–işlem kullanımları’ ve ‘sonuca ulaşmaları’ ile olan ilişkisi”nin incelendiği herhangi bir araştırmaya rastlanamamıştır.

2.5. “Bilgi” ve “Anlama” Türleri

“Bir şeyi bildiğimizi veya bilmediğimizi söylemek mümkündür. Diğer bir deyişle; bilgi, bizim ya sahip olduğumuz ya da olmadığımız bir şeydir. Anlama, başka bir şeydir. *Anlama*, bir fikrin, mevcut fikirlerle olan bağlantılarının, nitelik ve niceliğinin ölçümü olarak tanımlanabilir.” (Van de Walle, 2004, p. 24).

“Bilgi” (*knowledge*) ve “anlama” (*understanding*) kavramları, çok boyutlu kavramlardır (Even ve Tirosh, 2002). Öğrenme ve öğretme ile ilgili literatürde, çok önemli bir rolü olan “bilgi”ye; birçok özellik atfedilmiştir. Farklı bilgi türlerine örnek olarak; “genel ve konu alanına özel bilgi, somut ve soyut bilgi, formal ve informal bilgi, açıklayıcı ve işlemselleştirilmiş bilgi, kavramsal ve işlemsel bilgi, ayrıntılı ve derlenmiş bilgi, yapılandırılmamış ve (iyice) yapılandırılmış bilgi, sözsüz veya durağan bilgi, stratejik bilgi, bilgi edinme bilgisi, yerleşmiş bilgi ve metabilgi” (p. 105) verilebilir (de Jong ve Ferguson-Hessler, 1996).

Matematik eğitim literatüründe de, –ilişkisel, araçsal, kavramsal, işlemsel, kapalı (örtülü), açık, temel, gelişmiş, algoritmik, formal, sezgisel, görsel, yerleşmiş, bir şeyi bilme, nasıl yapılacağını bilme, nedenini bilme gibi– çeşitli bilgi ve anlama türleri tanımlanmıştır (Even ve Tirosh, 2002, p. 223).

2.6. Anlamanın, Matematik Öğrenmedeki Rolü

Bilgiyi temsil etme ve bağlama kapsamında, “anlama”; ya mevcut ağlar ile yeni bilgi arasında ya da zaten içsel olarak temsil edilmiş bilgiler arasında ilişkiler kurma / bağlantılar yapma süreci olarak düşünülebilir (Hiebert ve Carpenter, 1992). Hiebert ve Carpenter (1992), bu tanım kabul edildiği takdirde; anlamanın, matematik öğrenmede özel bir anlamının olmasının şaşırtıcı gelmeyeceğini ifade etmiştir. Anlayarak bilgi edinme, matematik eğitimcileri için özel öneme sahip bir konudur. Bir matematiksel fikrin, işlemin ya da gerçeğin anlaşılabilmesi için; içsel bir ağın parçası olması gerekir. Ağları oluşturan bağlantılar; benzerlikleri, farklılıkları, sınıflandırmayı ve kapsamayı içeren farklı türde ilişkiler oluşturur. Bu bağlantıların sayısı ve gücü ise; anlamanın derecesinde belirleyici rol oynar. Başka bir ifadeyle, ağlar, daha büyük ve düzenli hale geldikçe; bunun paralelinde anlama da artar (Hiebert ve Carpenter, 1992).

Brownell, 1947 yılında yayımlanan “Aritmetik öğretiminde anlamın yeri (*The place of meaning in the teaching of arithmetic*)” adlı makalesinde; son yirmi yıl süresince (*yani 1920’li yıllardan itibaren*) gittikçe artarak, aritmetik öğretimiyle ilgili literatürün “anlam” (“*meaning*”), “anamlı” (“*meaningful*”) ve “anamlı bir şekilde” (“*meaningfully*”) kelimelerini içerdiğini; bunun yanı sıra, aritmetiğin anlamlı bir şekilde öğretilmesine karşı çıkanların da olduğunu belirtmiştir.

Matematiği anlamanın avantajları, aşağıdaki şekilde özetlenebilir (Hiebert ve Carpenter, 1992):

- Anlama; öğrencilerin, matematiksel bilgiyi, ders kitabı veya öğretmenden hazır halde almak yerine; kendi başlarına oluşturmalarını sağlar.
- Anlama, hatırlamaya yardımcı olur.
- Anlama sayesinde; hatırlanması gereken bilgi miktarı azalır.
- Anlama, –yeni problemleri, önceden öğrenilmiş stratejileri kullanarak çözebilmek için gerekli olan– transferi artırır.
- Anlama, öğrencilerin matematiğe dair inançlarını (olumlu yönde) etkiler (Hiebert ve Carpenter, 1992).

2.7. İlişkisel ve Araçsal Anlama

Skemp (1978), matematiksel anlama üzerine yazdığı makalesinde; “ilişkisel anlama” (“*relational understanding*”) ve “araçsal anlama” (“*instrumental understanding*”) olmak üzere iki tür “anlama”dan bahsetmiştir. “İlişkisel anlama”nın, aslında “anlama” ile kastedilen şeye karşılık geldiğini belirten Skemp (1978); “ilişkisel anlama”yı, “hem ne yaptığını hem de [bunu] neden yaptığını bilme” (s. 9) şeklinde tanımlamıştır. “Araçsal anlama”yı, yakın zamana kadar, hiç “anlama” olarak dikkate almadığını ve geçmişte “nedensiz kurallar” (s. 9) olarak tanımlamış olduğunu ifade eden Skemp (1978); birçok öğrencinin ve öğretmenlerinin, “anlama”dan kastettikleri şeyin ise, bir kurala sahip olma ve o kuralı kullanma yeteneği olduğunu da özellikle belirtmiştir.

Skemp (1978), araçsal anlamanın, genellikle kuralların çokluğunu; ilişkisel anlamanın ise, daha genel uygulamanın daha az prensibini gerektirdiğinden bahsetmiştir. Daha genel uygulamanın daha az prensibi, öğrenciler için daha yararlı olsa

da; daha az prensibi öğrenmek çok daha zor, kuralları öğrenmek ise çok daha kolaydır (Reason, 2003). Eğer öğrencilerin, alışkın oldukları düşünme türü, doğru cevaplara ulaşabilmelerinde yeterli oluyorsa; bunun ötesinde başka bir şeyler denemeleri yönünde yapılan önerilerden hoşlanmayacaklardır (Skemp, 1978).

Matematiği “labirent”e, matematik öğrenmeyi ise ‘düşüncelerin mantıklı hale gelmesini sağlayarak ve yeni fikirler üreterek, o labirentte yolu bulma’ya benzeten Reason (2003); sınıflandırma yapmada Skemp’in dilini kullanarak, öğrenme türleri arasındaki farkları listelemiştir (Tablo 2.1):

Tablo 2.1

İlişkisel ve Araçsal Öğrenmenin Sınıflandırılması (Reason, 2003, s. 6)

İlişkisel öğrenme	Araçsal öğrenme
1. ‘Öğrenme, kavramsal bir yapı kurmaktan meydana gelir.’	1. ‘Kapsamlı ilişki bilinci yoktur.’
2. Amaç, ‘zihinsel haritamı genişletmek veya sağlamlaştırmaktır.’	2. Amaç, ‘istenilen bitiş noktalarına (cevaplara)’ varmaktır.
3. ‘Hatalar’ öğrenmeye yol açar. ‘... yanlış bir dönüş yaparsa; ... yanlışını düzeltebilecektir.’	3. Hatalar; adımların tekrar izini süremedikçe ‘ve doğru yola giremedikçe’, ‘kaybolma’ ile sonuçlanır.
4. Şemalar büyüdükçe; ‘olasılıklara dair farkındalığımız artar.’	4. Öğrenme, sadece ‘sayısı giderek artan sabit planların öğrenilmesidir.’
5. Bellek sınırlamalarına karşı çalışır: ‘çok daha az bellek çalışmasını gerektirir.’	5. ‘Her yeni problem sınıfı için farklı bir metodu ... ezberlemeye’ dayanır.
6. ‘Dışarıdan yardım almadan amaca ulaşmanın yeni yollarını bulmada’ güven oluşturur.	6. ‘Öğrenici, amaca ulaşmak için her yeni yolu öğrenmede dışarıdan rehberliğe bağımlıdır.’
7. ‘kendi içinde, içsel tatmin edici bir hedeftir.’	7. Dıştan gelen ödüller gereklidir.
8. Matematik zevkine yol açar.	8. Nihai [en son] başarısızlığa yol açar.
9. ‘Hatırlaması daha kolaydır ... öğrenmesi kesinlikle daha zordur.’	9. ‘Kendi bağlamı içinde anlamak daha kolaydır.’

Ayrıca Reason (2003), –Skemp’in ifadelerinden yararlanarak hazırladığı– Tablo 2.1’deki ifadeleri daha da geliştirerek, ilişkisel ve araçsal öğrencilerin sınıftaki davranışlarını karşılaştırmıştır (Reason, 2003, s. 6) (Tablo 2.2):

Tablo 2.2

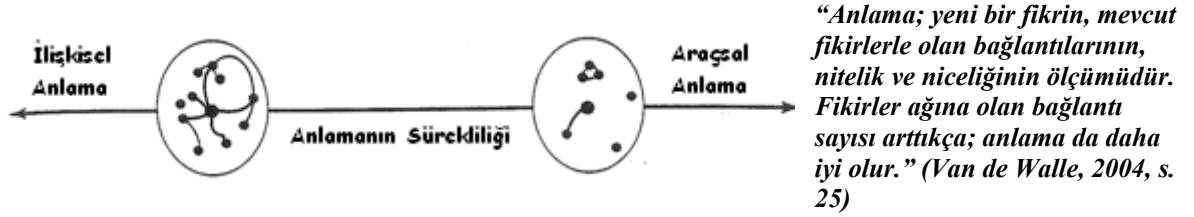
İlişkisel ve Araçsal Öğrenci Davranışlarının Karşılaştırılması

İlişkisel öğrenci	Araçsal öğrenci
• ‘Neden’i açıklayabilir.	• ‘Neden’i açıklayamaz.
• Harekete geçmeden önce düşünür.	• Belirli sorulara anında cevaplar verebilir.
• Sonunda bir cevaba ulaşacaktır.	• Bazen hiç ilerleme kaydedemez ve ‘takılıp kalabilir’.
• Önceki bilgisini kullanarak, herhangi bir göreve uyarlar.	• Yöntem açısından esnek değildir.
• Anlamaya çalışır ve ‘neden?’ diye sorar.	• Ezberlemeye çalışır.
• Bağımsız olarak, onlara yeni gelen matematik oluşturur.	• Öğretmenin örneklerine bağlıdır.
• Kendi iyiliği için, matematik yapmaktan zevk alır.	• Matematiği zevkli bulması olası değildir.

Bir şeylerin ilişkisel olarak anlaşılabilmesi için, öncesinde çoğu kez becerilere ihtiyaç duyulduğunu söyleyen Reason (2003); araçsal anlamının, öğrencilere beceri kazandırmak için gerekli olduğunu; ilişkisel anlamının ise, bunların [bu becerilerin] bağlam içerisinde uygulanmasını sağladığını belirtmiştir.

Anlamanın bir süreklilik boyunca var olduğunu belirten Van de Walle (2004); bu sürekliliğin bir ucunda, bağlantılar açısından çok zengin olan ilişkisel anlamının; diğer ucunda ise, fikirlerin neredeyse ya da tamamen izole olduğu araçsal anlamının yer aldığından bahsetmiştir (Şekil 2.1). Anlaşılan bir fikir, işlemlerin ve kavramların

anlamalı bir ağı içinde yer alan birçok başka fikirle ilişkili iken; ezbere öğrenilen bir bilgi, hemen hemen her zaman araçsal olarak anlaşılmaktadır (Van de Walle, 2004).



Şekil 2.1

İlişkisel ve Araçsal Anlamanın Sürekliliğinin Gösterilmesi (Van de Walle, 2004, p. 25)

Mousley (2004), matematiksel anlamanın gelişimi ile ilgili literatürün odak noktasının, bağlantılı bilgi olduğunu belirtmiş ve yaygın olarak kabul gören üç tür bağlantıdan bahsetmiştir:

- (a) “Öğrenenlerin, yeni bilgi ile mevcut anlamaları arasında kurduğu bağlantılar;
- (b) Çeşitli matematiksel fikirler ve temsiller arasındaki ilişkiler;
- (c) Öğretmenlerin ve çocukların, okul kavramları ile diğer günlük hayatın matematiksel yönleri arasında kurduğu bağlar.” (s. 377)

Beswick (2005); yukarıda listelenen bağlantı türlerinden ikincisinin, Skemp (1978)’in tanımladığına denk geldiğini ifade etmiştir.

2.7.1. İlişkisel ve Araçsal Anlamanın Avantajları

İlişkisel anlamanın başlıca faydaları, Van de Walle (2004: 26-27) tarafından aşağıdaki şekilde sıralanmış ve açıklanmıştır:

- **İçsel ödüllendirme sağlar.**
- **“Hafızayı geliştirir.”:** Hafıza, bilginin bulunup çıkarılması sürecidir ve matematik, ilişkisel olarak öğrenildiğinde; bilginin bulunup çıkarılması daha kolay olmaktadır. Bağlantısız bilgiyi bulup çıkarmaksa; samanlıkta iğne aramaya benzer (Van de Walle, 2004).
- **“Hatırlanacak daha az şey vardır.”**

- **“Yeni kavramları ve işlemleri öğrenmeye yardım eder.”:** Matematikte tam olarak anlaşılan bir fikir, yeni bir fikrin öğrenilmesi için kolayca genişletilebilir. Aksine, bağlantıların olmaması durumunda; karşılaşılan her bir yeni bilgi parçası, ayrı ve ilişkisiz bir fikir olarak öğrenilmek zorunda kalır (Van de Walle, 2004).
- **“Problem çözme yeteneklerini geliştirir.”**
- **“Kendi kendini üretir.”:** Skemp, bilgi edinmenin zevkine varan insanların, kendi başlarına yeni fikirler aramaya veya icat etmeye meyilli olduklarını dile getirmiştir (Van de Walle, 2004).
- **“Tutumları ve inançları geliştirir.”:** İlişkisel olarak öğrenen bir kişide, “Anlıyorum! Ben bunu yapabilirim!” duygusu hakimdir (Van de Walle, 2004).
- **Matematik hakkında pozitif bir bakış açısı geliştirir:** Öğrenciler, matematiğin bağlantılı yapısını ve mantığını algıladıkça; matematiğin kendisi hakkında da pozitif bir bakış açısı kazanırlar (Van de Walle, 2004).

Skemp (1978), araçsal matematik öğretiminin de birtakım avantajlarının olduğunu belirtmiş ve avantajları ile ilgili olarak şunları söylemiştir:

- “Kendi bağlamı içinde, *araçsal matematiği anlamak genellikle daha kolaydır*; bazen çok daha kolaydır.” (p. 12). Kesirli bir sayıya bölme veya iki negatif sayının çarpımı gibi bazı konuların ilişkisel olarak anlaşılması zordur; buna karşın, “bir kesre bölmek için, kesir ters çevrilir ve çarpılır” ve “eksi ile eksi çarpımı artıdır” kolayca hatırlanan kurallardır. Eğer hedef, bir sayfa dolusu doğru cevapsa; araçsal matematik öğretimi, bunu daha kolay ve hızlı bir şekilde sağlayabilir.
- “*Ödüller, daha çabuk ve daha belirgindir.*” (p. 12). Bir sayfa dolusu doğru cevap bulmak; çocukların, öz güven kazanmaları için başarıyı hissetmeleri açısından güzeldir ve bunu da, –ilişkisel matematiğe kıyasla– araçsal matematik ile daha çabuk ve daha kolay başarabilirler.
- Daha az bilgi içerdiği için; ilişkisel düşünmek yerine araçsal olarak düşünerek, doğru cevaplara çoğu kez daha hızlı ve güvenilir bir şekilde ulaşılabilir. (Skemp, 1978).

Ayrıca Skemp (1978), bir öğretmenin, aşağıdaki nedenlerden bir ya da birkaçından dolayı, derste araçsal matematik öğretimini tercih edebileceğini ifade etmiştir:

- İlişkisel anlamayı elde etmek çok uzun sürebilir ve öğrencilerin, büyük olasılıkla, [sadece] belirli bir teknik kullanmaya ihtiyaçları olacaktır.
- Belirli bir konunun ilişkisel olarak anlaşılması çok zordur; fakat öğrencilerin sınavlar için bu konuları bilmeye ihtiyaçları vardır.
- Fen bilgisi gibi başka bir derste kullanılacak bir becerinin, ilişkisel olarak anlamadan önce öğrenilmesi gerekebilir.
- Öğretmen, bütün matematik öğretiminin araçsal olduğu bir okulda yeni (kıdemsiz)dir.

2.8. Kavramsal ve İşlemsel Bilgi

Özellikle, 1986 yılında yayımlanan, Hiebert'in editörü olduğu “Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics” adlı kitabın ardından; “kavramsal bilgi” (“*conceptual knowledge*”) ve “işlemsel bilgi” (“*procedural knowledge*”), matematiksel bilgi üzerine düşünme ve analiz etmede yaygın kullanılan terimler haline gelmiştir (Star, 2002). Öğrencilerin matematiği nasıl öğrendikleri ve matematiğin nasıl öğretilmesi gerektiğine dair sorular; bu iki bilgi türünden hangisinin daha önemli olduğu veya bu iki tür bilgi arasında uygun bir dengenin ne olduğu konusunda spekülasyonlara yol açmıştır (Hiebert ve Lefevre, 1986). Bu iki bilgi çeşidinin birbirini nasıl etkilediğini açıklamak; öğrenmenin nasıl gerçekleştiğini anlayabilmek açısından önemlidir (Rittle-Johnson ve Alibali, 1999). Farklı ama ilişkili oldukları varsayılan bilginin bu iki türü arasındaki ilişkiyi; özellikle de, en uygun olarak hangisinin önce geldiğini belirlemek amacıyla çok çaba harcanmıştır (Star, 2002). Rittle-Johnson ve Siegler (1998), “matematiksel kavramları anlama” ile “işlemleri uygulama becerisi” arasında karşılıklı ilişki olduğunu; bazı durumlarda kavramsal anlamının işlemsel yeterlilikten önce geldiğini, başka durumlarda ise tersinin geçerli olduğunu ifade etmişlerdir.

2.8.1. “Kavramsal Bilgi” Nedir?

Matematikte kavramsal bilgi; zihinde fikirler ağının bir parçası olarak var olan ve içsel olarak oluşturulmuş mantıksal ilişkilerden oluşan bilgidir (Van de Walle, 2004). Hiebert ve Lefevre (1986), kavramsal bilgiyi, “ilişkiler açısından zengin olan bilgi” (s. 3) olarak açıklamıştır. Rittle-Johnson ve Alibali (1999) ise, “kavramsal bilgi” için, “bir alana hakim olan prensiplerin ve bir alandaki bilgi parçaları arasındaki karşılıklı ilişkilerin açık veya örtülü olarak anlaşılması” (s. 175) şeklinde bir tanımlama yapmıştır. Aynı tanımlamayı yapan Rittle-Johnson ve Siegler (1998); bu bilgi türünden, literatürde, “anlama” (*understanding*) veya “prensip haline gelmiş bilgi” (*principled knowledge*) olarak da bahsedildiğini belirtmiştir.

“Kavramsal anlama” terimi için; Marchionda (2006), “işlemsel bilginin ötesine geçen anlama” (s. 15) ifadesini kullanmış ve tanımın devamında, “kavramsal anlama”nın, “bir matematiksel fikri, resimsel ve sembolik olarak gösterebilmeyi ve kavramı, sözel olarak açıklayabilmeyi kapsadığı”nı (s. 15) belirtmiştir.

Kavramsal bilginin gelişiminin, bilgi parçaları arasında ilişkilerin kurulması ile mümkün olduğunu vurgulayan Hiebert ve Lefevre (1986); bu bağlama işleminin; hafızaya alınmış, mevcut iki bilgi parçası arasında veya bir var olan bilgi parçası ile bir yeni öğrenilen bilgi parçası arasında gerçekleşebileceğinden bahsetmiştir. Alana özgü ana kavramlardan ve onların karşılıklı ilişkilerinden oluşan kavramsal bilgi; anlamsal ağ, hiyerarşi ve zihinsel modeller içeren çeşitli yapılar yardımıyla karakterize edilmektedir (Byrnes ve Wasik, 1991; Byrnes, 1992).

2.8.2. “İşlemsel Bilgi” Nedir?

Hiebert ve Lefevre (1986), kendilerinin tanımladığı işlemsel matematik bilgisinin,

- 1) Matematiğin formal dili veya sembol temsil sistemi,
- 2) Matematiksel problemleri çözmede kullanılan algoritmalar, kurallar veya işlemler

olmak üzere; iki farklı parçadan oluştuğunu söylemişlerdir (Hiebert ve Lefevre, 1986). Diğer bir deyişle, matematikte işlemsel bilgi; rutin matematiksel görevleri yerine

getirirken kullanılan kurallar ve işlemlerin, aynı zamanda da matematiği temsil etmek için kullanılan sembollerin bilgisidir (Van de Walle, 2004).

İşlemsel bilgi için, “eylemler dizisi” (s. 78) ifadesini kullanan Hiebert ve Carpenter (1992); işlemlere örnek olarak, aritmetikteki standart hesaplama algoritmalarını vermişlerdir. Rittle-Johnson ve Alibali (1999) de; “işlemsel bilgi”yi, “problemleri çözmek için [kullanılan] eylem dizileri” (s. 175) olarak tanımlamışlardır. Benzer şekilde, Hallett, Nunes ve Bryant (2010) da; işlemsel bilginin, istenilen bir sonucu üretmek için tanımlanmış belirli hareketler dizisini takip etmeyi gerektirdiğini ve burada bahsedilen “istenilen sonuç”un, matematikte genellikle bir problemin “doğru cevabı” olduğunu ifade etmiştir.

İşlemsel bilgi, amaca ulaşmak için gerekli olan adımların bilgisidir ve işlemler; beceri, strateji ve kurallar gibi yapılar yardımıyla karakterize edilmektedir (Byrnes ve Wasik, 1991; Byrnes, 1992). Rittle-Johnson ve Siegler (1998); bu bilgi türünden, literatürde bazen, “beceriler”, “algoritmalar” veya “stratejiler” olarak da bahsedildiğini belirtmiştir.

İşlemlerin en önemli özelliği; önceden belirlenmiş lineer bir sırada, adım adım uygulanmalarıdır (Hiebert ve Lefevre, 1986). Bir işlem bilgisine sahip olabilmek için; çok az bilişsel ilişkiye ihtiyaç duyulur (Van de Walle, 2004). Bir işlemin yürütülebilmesi için bilinmesi gereken tek ilişki; n yinci yönergenin/kuralın, $n-1$ inci yönergeden sonra geldiğidir (Hiebert ve Lefevre, 1986).

İşlemler ile ilgili önemli bir nokta; işlemlerin, kavramlar gibi, tek bir çeşit olmadıkları; yazılı matematiksel sembolleri kullanan işlemlerin yanı sıra; görsel diyagramlar, somut nesneler vs. üzerinde çalışan işlemlerin de olduğudur. İşlemlerin diğer bir önemli özelliği; bazı işlemler, diğerlerinin içine alt işlemler olarak yerleştirilmek suretiyle, hiyerarşik olarak düzenlenmiş olmalarıdır. Alt işlemler veya adım adım yönergeler dizisinin bütünü, bir “süper işlem” olarak tanımlanmıştır (Hiebert ve Lefevre, 1986).

2.8.3. Farklı Teorilerde Kavramsal ve İşlemsel Bilgi Ayrımı Üzerine Yapılmış Tartışmalar

Kavramlar ve işlemler arasındaki ayrım, bilgi kazanımı konusunda önemli bir rol oynamakta; bazı öğrenme ve gelişim teorilerinde ise, bu ayrım daha merkezi bir rol

üstlenmektedir (Hiebert ve Lefevre, 1986). Hiebert ve Lefevre (1986), bilgi türlerinin tanımlandığı birkaç teoriden isim olarak bahsetmiş ve bunların birbirleriyle hemen hemen örtüşüklerini vurgulamıştır. Hiebert ve Lefevre'nin (1986) bahsettiği bu gelişim ve öğrenme kuramcıları ile tanımladıkları bilgi türleri aşağıdaki şekildedir:

Piaget (1978): kavramsal anlama ve başarılı eylem

Tulving (1983): anlamsal hafıza ve episodik hafıza

Anderson (1983): açıklayıcı bilgi ve işlemsel bilgi

Felsefi bilgi teorilerinde de benzer ayrımların mevcut olduğunu söyleyen Hiebert ve Lefevre (1986); örnek olarak, Scheffler'in (1965) "bir şeyi bilme"nin ifadesel kullanımı ve "nasıl yapılacağını bilme"nin işlemsel kullanımı arasında yaptığı ayrımı vermiştir. Hiebert ve Lefevre (1986), kendilerinin kitabın bu bölümünde üzerinde durdukları kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ayrımın; bu ayrımların hiç biriyle aynı anlamda olmasa da, onların her birinden bir şeyler aldığını vurgulamıştır (Hiebert ve Lefevre, 1986). Aynı kitapta; Baroody ve Ginsburg (1986) ise, anlamlı ve mekanik bilgi arasındaki ayırmadan bahsetmiştir.

Sıkıca yapılanmış ve açıkça tanımlanmış içeriğiyle matematik, kavramsal ve işlemsel bilgi ile ilgili tartışmalar için uygun bir alan olmuştur. Matematiksel bilginin bu iki türü üzerine tartışmaların yanı sıra; öğretim sürecinde "beceri" ve "anlama"dan hangisinin üzerinde daha fazla durulması gerektiği de tartışma konusu olmuştur (Hiebert ve Lefevre, 1986). Hiebert ve Lefevre (1986), bununla ilgili olarak; McLellan ve Dewey'in (1895), anlama için tartıştıklarından ve sınıflardaki anlama seviyesini arttıracığına inandıkları bir matematik müfredatı sunduklarından; aksine Thorndike'in (1922) da, beceri öğrenimini savunduğundan ve akılda tutmayı en üst seviyeye çıkarmak için becerilerin nasıl öğretilmesi gerektiğini ayrıntılı bir şekilde anlattığından bahsetmişlerdir. Brownell'in (1935), izole becerileri öğrenme konusunda yapılan vurguya karşı çıkararak, anlama üzerine artan bir vurgu yaptığını söyleyen Hiebert ve Lefevre (1986); aynı tartışmanın, Bruner'in (1960) anlama üzerinde durmasına karşı, Gagné'nin (1977) beceri öğrenme üzerine yaptığı vurgu ile sürdürüldüğünü ifade etmiştir (Hiebert ve Lefevre, 1986).

Gerek kavramsal ve işlemsel bilgi üzerine tartışmalar, gerekse anlama ve beceri ile ilgili tartışmalar; çoğu kez, birinin diğeri karşısındaki önemini vurgulayan öğretimsel programlar önerme şeklinde yürütülmüş ve rağbet gören görüş, inişler çıkışlar yaşamıştır (Hiebert ve Carpenter, 1992).

Hiebert ve Lefevre (1986); bilginin iki türü olan kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişkinin iyi anlaşılmamış olduğunu belirtmiş; bunun başlıca nedeni olarak ise, bu bilgi türlerinin kendilerinin tanımlanmasının zor olmasını göstermişlerdir. Bütün bilgileri, ya kavramsal ya da işlemsel şeklinde sınıflandırmak mümkün olmamakta; her ikisine de uyan bilgiler olduğu gibi, hiçbirine uymayan bilgiler de mevcuttur (Hiebert ve Lefevre, 1986). Hiebert ve Lefevre (1986); yine de, kavramsal ve işlemsel bilgi arasında ayırım yapmanın; öğrenme sürecini yorumlamada yol gösterici olacağına; bunun da, öğrencilerin başarı ve başarısızlıklarının daha iyi anlaşılmasını sağlayacağına inandıklarını dile getirmişlerdir.

Hiebert ve Lefevre (1986), kavramlar ve işlemler arasındaki ilişkiyi araştırmanın; önceden, psikoloji araştırmasının iki ayrı paradigması olan –*kavram öğrenimi ve gelişimi üzerine vurgu yapan*– Gestalt psikolojisi ile –*beceriye dayalı performans üzerine vurgu yapan*– davranış psikolojisini bir araya getirmesi açısından da önemli olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişkiyi araştırmanın; iki ayrı disiplin olan matematik eğitimi ile bilişsel psikolojiyi de birbirine yakınlaştırdığını dile getirmiştir.

2.8.4. Kavramsal Bilgi ile İşlemsel Bilginin Karşılaştırılması

Byrnes (1992), genel olarak kavramsal bilgi için, “o şeyi bilmek” (s. 235) ifadesini; işlemsel bilgi için ise, “nasıl yapıldığını bilmek” (s. 235) ifadesini kullanmıştır. Bir işlemi kullanırken; mutlaka o işlemde uygulanan elemanların anlamları üzerine düşünmek gerekmemektedir (Byrnes, 1992). “Anlam”ın, ancak bilgi birimleri arasındaki ilişkiler fark edildikçe veya oluşturuldukça ortaya çıktığını belirten Hiebert ve Lefevre (1986); –*kendi tanımlarına göre*– kavramsal bilgi, anlamlı bir şekilde öğrenilmek zorunda iken; işlemlerin, anlamlı bir şekilde öğrenilebileceği gibi, –*ilişkilerden yoksun bilgi üreten*– ezbere öğrenme yoluyla da öğrenilebileceğini ifade etmişlerdir. Ancak ezberlenerek öğrenilen bilgi, başka bilgilerle bağlanmış olmadığından ve öğrenildiği bağlama sıkı bir biçimde bağlı olduğundan; başka durumlar için genelleştirilemez, bu tür bilgiye sadece orijinaline benzeyen bağlamlarda ulaşılabilir ve uygulama yapılabilir (Hiebert ve Lefevre, 1986). İşlemlerin ardışık yapısının, yani önceden belirlenmiş lineer bir sırada uygulanmalarının, özellikle ezberleyerek öğrenme için uygun olduğunu ifade eden Hiebert ve Lefevre (1986); bu

nedenle işlemlerin, ezberlenerek öğrenilebildiğini ve büyük olasılıkla da, çoğunlukla ezbere öğrenildiklerini ileri sürmüştür.

Hiebert ve Lefevre (1986); anlamlı bir şekilde öğrenilen işlemlerin, kavramsal bilgi ile bağlanmış işlemler olduğunu öne sürmüştür. İşlemleri, kavramlar olmadan ele almak mümkün olsa da; bunun tersi, yani herhangi bir işlemle bağlanmamış bir kavramsal bilgi düşünmek o kadar kolay değildir. Bu, kısmen de olsa; işlemlerin, kavramsal bilgiyi gözlemlenebilir bir hale dönüştürmesinden ve işlemler olmadan, o bilginin orada olduğunu anlayamamamızdan kaynaklanmaktadır (Hiebert ve Lefevre, 1986).

Hiebert ve Lefevre (1986), kavramsal bilgi ve işlemsel bilgi arasındaki en büyük farkın; işlemsel bilgideki başlıca ilişkinin, *–alt işlemlerin ve süper işlemlerin doğrusal olarak dizilmesini sağlayan–* “sonra” olmasına karşın; kavramsal bilginin, çok çeşitli ilişkilerle dolu olması olabileceğini söylemişlerdir. Kavramsal bilginin bir birimi; ayrı bir bilgi parçası olarak saklanamaz, mutlaka bir ağı parçası olmalıdır (Hiebert ve Carpenter, 1992).

Kavramsal bilgi ile işlemsel bilgi arasındaki ayrım için, Haapasalo ve Kadıjeviç (2000) ise; işlemsel bilginin, çoğu kez, otomatik ve bilinçsiz adımları; kavramsal bilginin ise, genellikle bilinçli düşünmeyi gerektirdiğini dile getirmiştir.

2.8.5. Kavramsal Bilgi ile İşlemsel Bilgi Arasındaki Gelişimsel İlişkiler

Kavramsal ve işlemsel bilginin öğretimdeki önemi ve gelişimsel ilişkilerini ele alan, birbiriyle yarış halinde olan farklı teoriler öne sürülmüştür (Rittle-Johnson ve Koedinger, 2002). İşlemsel beceri ve kavramsal anlama arasında algılanan ikilem; matematik öğretimi için, “geleneksel” işlem-tabanlı yaklaşımlar ile “deneysel” kavram-tabanlı yaklaşımlardan hangisinin tercih edilmesi gerektiği yönündeki tartışmayı körüklemiştir (Chappell ve Killpatrick, 2003).

Rittle-Johnson ve Siegler (1998); kavramsal bilgi ile işlemsel bilgi arasındaki olası ilişkileri, dört başlık altında toplamıştır (p. 77):

1. “İşlemsel bilgi, kavramsal bilgiden önce gelişir.
2. İşlemsel bilgi, kavramsal bilgiden sonra gelişir.
3. İşlemsel ve kavramsal bilgi, aynı zamanda gelişirler.

4. İşlemsel ve kavramsal bilgi; birindeki küçük artışlar diğerinde küçük artışlara yol açarak, bu da ilkinde yeni artışlara neden olarak, yinelemeli olarak gelişirler.”

Yukarıdaki olası ilişki türlerini listeleyen Rittle-Johnson ve Siegler (1998); o zamanlardaki teorinin ve deneysel çalışmaların; üçüncü ve dördüncü olasılıkları test etmedeki birtakım zorluklardan dolayı, bu olası ilişkilerden sadece ilk ikisini ele aldığını ifade etmiştir. Bu durumu, talihsizlik olarak değerlendiren Rittle-Johnson ve Siegler (1998); halbuki dördüncü olasılığın, özellikle mantıklı bir gelişme yolu gibi gözüktüğünü de sözlerine eklemiştir.

Leung ve Park (2002); geleneksel, işlemsel ağırlıklı öğretimin yapıldığı Doğu Asya ülkelerindeki öğrencilerin üstün başarılarını örnek göstererek; işlemsel öğretimin, mutlaka ezbere öğrenme veya anlamadan öğrenme anlamına gelmediğini ifade etmiştir. Anlamlı uygulama yapabilmek için, öncesinde anlamının gerçekleşmiş olması gerektiği varsayımının geçerli olmayabileceğini söyleyen Leung ve Park (2002); öğrenme sürecinin, çoğu kez, işlemlerde yeterlilik kazanmayla başladığını; ancak *–iyi tasarlanmış alıştırmalardan oluşan–* tekrarlanan uygulamalar sayesinde, yavaş yavaş işlemlerin ardındaki kavramları anlamının gerçekleşebildiğini savunmuştur. Bu durumun, özellikle ilkokul öğrencileri için geçerli olduğunu; bu öğrencilerin, ilk başta çoğu kez, anlama olmaksızın uygulamalara gereksinim duyduklarını ve tam anlaşılmadan yapılan işlemler aracılığıyla, zamanla işlemlerin ardındaki kavramları anlamaya başladıklarını dile getirmiştir (Leung ve Park, 2002).

Rittle-Johnson ve Alibali (1999); işlemsel bilginin, işlemi çokça kullanma deneyimi sonrasında veya işlem ile bunun altında yatan kavramlar arasındaki ilişkinin apaçık olması gibi durumlarda, daha fazla kavramsal bilgiye yol açabileceğinden bahsetmiştir. Ayrıca kavramsal ve işlemsel bilginin, biri bir uçta diğeri bir uçta olacak biçimde, fakat birbirinin devamı olarak uzandıklarını ve ayrı tutulamayacaklarını, birbirinden bağımsız olarak gelişmediklerini ifade etmiştir (Rittle-Johnson ve Alibali, 1999).

Rittle-Johnson ve Alibali (1999), matematik öğrenme konusunda yapılan araştırmalardan dört çeşit delil göstererek; bunların, ‘kavramsal anlamının, işlemlerin oluşturulmasında ve benimsenmesinde bir rolünün olduğu’ düşüncesini desteklediğini ifade etmiştir. Bunlardan ilki, daha geniş kavramsal anlayışa sahip olan çocukların, daha geniş işlemsel beceriye yatkın olmalarıdır. İkincisi; birçok alanda, kavramsal anlamının, işlemsel becerinin önünde olması; hatta kavramsal anlama düzeyinin,

gelecekteki işlemsel bilgiyi önceden haber verdiğini gösteren –sayıca sınırlı da olsa– bazı delillerin olmasıdır. Rittle-Johnson ve Alibali (1999), bu tür araştırma sonuçları, kavramsal bilginin işlemsel bilgi üzerinde pozitif bir etkisinin olduğunu akla getirir de; IQ veya motivasyon gibi başka faktörlerin de, görünen bu ilişkiden sorumlu olabileceğine dikkat çekmiştir. Üçüncü delil, işlemlerin yanısıra kavramlar ile ilgili öğretimin de, işlemsel becerinin artışına yol açabilmesidir. Dördüncüsü ise; kavramsal bilgideki artışın, doğru işlemler oluşturmaya yol açtığını gösteren araştırma delilinin olmasıdır. Rittle-Johnson ve Alibali (1999), genelde literatür, kavramsal anlamının, işlemlerin oluşturulmasında ve benimsenmesinde önemli bir rol üstlendiğini ileri sürse de; bu ilişkinin, büyük ihtimalle tek yönlü olmadığını; kavramsal ve işlemsel bilginin birindeki artışın, diğerinde artışa yol açarak ve o da, ilkinde yeni artışlara neden olarak, bu iki bilginin yinelemeli olarak gelişiyor olabileceğini; böylece işlemsel bilginin de, kavramsal anlamayı etkiliyor olabileceğini belirtmiştir. Fakat matematikte işlemsel bilginin, kavramsal bilgi üzerindeki etkisine dair çok az sayıda delil bulunduğunu da sözlerine eklemiştir.

Benzer şekilde, Rittle-Johnson ve Koedinger (2002); kavramsal ve işlemsel bilginin, karşılıklı olarak birbirini destekleyici etkileri olduğunu ve yinelemeli bir süreç oluşturdıklarını öne sürmüşlerdir. Rittle-Johnson ve Koedinger (2002); kavramsal ve işlemsel öğretimin yinelemeli şekilde olmasının, daha iyi öğrenmeye götürebileceğine dair birkaç sebepten bahsetmişlerdir:

- 1) İlk önce bütün kavramsal materyallerin bir anda verilmesi, öğrencilerde kafa karışıklığına yol açabilir. Oysaki, belli bir düzeyde işlemsel akıcılık; belleğin yükünü hafifletir ve kavramsal bilgide artışa olanak tanıyabilir.
- 2) Kavramsal ve işlemsel derslerin yinelemeli şekilde yapılması; her bir ders türünün, diğeri ile olan ilgisini vurgulamaya yardımcı olabilir.
- 3) Birbirinden farklı, fakat ilişkili olan görevlerin yinelemeli şekilde yerine getirilmesi; işlemlerin ve kavramların uygun biçimde genelleştirilmesini destekleyebilir (Rittle-Johnson ve Koedinger, 2002).

Voutsina'nın (2012) da belirttiği gibi; geçmiş araştırmalar ve teoriler, daha ziyade, matematik öğrenmede kavramsal bilginin mi yoksa işlemsel bilginin mi daha önce geliştiğini tartışmışken (örneğin Byrnes ve Wasik, 1991); matematiksel yeterliliğin, hem ne yapılması hem de neden yapılması gerektiğini bilmeyi gerektirdiğinin anlaşılması üzerine, yakın zamandaki araştırmaların odağı, matematik

öğrenme ve öğretmede kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişkilere ve bütünleşmeye (örneğin Rittle-Johnson, Siegler ve Alibali, 2001; Canobi, 2009; Che Ghazali ve Zakaria, 2011; Schneider, Rittle-Johnson ve Star, 2011) doğru kaymıştır.

Kavramsal ve işlemsel bilgi ilişkisini ortaya çıkarmayı hedefleyen araştırma çabaları; birinin diğeri üzerindeki üstünlüğünü vurgulamaya çalışan önceki çabalara göre daha yararlı olmuştur (Hiebert ve Carpenter, 1992). Matematik eğitimi araştırma topluluğu (*The mathematics education research community*), kavramsal anlama ve işlemsel beceri arasındaki ikilemi aşmış ve her bir bilgi türünün önemini kabul etmiş olsa da; bu iki tür bilginin birbirleriyle olan ilişkisi hala tam olarak ortaya konamamıştır (Rittle-Johnson ve Koedinger, 2002).

Hiebert'in, kavramsal–işlemsel bilgi ile ilgili oluşturmuş olduğu yapıya eleştiri getirenler de olmuştur. Star (2002), bu yapıyı iki yönden eleştirmiştir: Birincisi; bu yapıya temel oluşturan çalışmaların neredeyse tamamının, –*sayma, tek basamaklı sayılarla toplama, çok basamaklı sayılarla toplama ve kesirler gibi*– ilkokulun konu alanları ile ilgili olması; cebir, geometri ve temel matematik (calculus) alanlarında kavramsal ve işlemsel bilginin gelişimi ile ilgili çalışmaların bulunmaması. İkincisi; kavramların bilgisinin, çoğu kez, sözel olarak ve çeşitli görevler aracılığıyla değerlendiriliyor olmasının, kavramsal bilginin kompleks ve çok yönlü olduğu izlenimi uyandırması; buna karşın, işlemsel bilginin, bir işlemin yerine getirilmesi gözlemlenerek, tek boyutlu ve sözsüz olarak değerlendiriliyor olması. Bir öğrenci, bir işlemin nasıl yapılacağını biliyor ya da bilmiyordur ve eğer biliyorsa, o işlemi otomatik olarak ve başarılı bir şekilde yerine getirebilir (Star, 2002).

Silver (1986) ise; Hiebert ve Lefevre'nin (1986), daha ziyade kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ayrımlar üzerinde durduklarını; halbuki bu ayrımların, aşılması imkansız bariyerler oluşturmadığını ileri sürmüş; bilgi, bir problemi çözmek veya sıradan olmayan bazı görevleri yerine getirmek için dinamik olarak kullanıldığında, ilişkilerin birincil öneme sahip olduğunu savunmuştur. Karmaşık bilgi alanlarında problem çözmenin, genellikle hem işlemsel hem de kavramsal bilginin uygulamasını gerektirdiğini söyleyen Silver (1986); bu nedenle matematiksel problemlerin, kavramsal ve işlemsel bilgi araştırmaları için uygun, kullanışlı araçlar olabileceğini dile getirmiştir. Bu, özellikle de; problem için bir çözüm yapmadan önce, problem durumunu anlamaya ihtiyaç duyulan problemler için doğrudur. Genelde problem çözmenin, anlamayı içerdiği iddia edilse de; problemi çözenlerin, çoğu kez fazla anlamadan da

ilerleyebildikleri ve işlemleri anlamadan kullandıkları halde başarılı olabildikleri de iyi bilinmektedir (Silver, 1986).

2.8.6. Farklı Öğretim Kademesindeki Öğrenciler için Kavramsal Bilgi ile İşlemsel Bilgi Arasındaki İlişkiler

Hiebert ve Lefevre (1986); okulöncesi dönemdeki çocuklar için, kavramsal ve işlemsel bilginin yakından ilişkili olduğunu; bu durumun, çocuklar okula başladıklarında da hala geçerli olduğunu dile getirmiştir. Bu öğrenciler, kavramsal bilgi seviyelerini aşan algoritmaları henüz öğrenmemişlerdir ve anlamadıkları problemler için doğru cevap vermezler. Okul yıllarında aritmetiğin sınıfta öğretilmesi; öğrencileri, matematiğin formal sembolik dili ile tanıştırsa da; anlamları tam oluşturulmamış yazılı sembollerin işin içine girmesiyle, kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki dinamik etkileşim bozulmakta ve birçok öğrenci için, bu iki bilgi türü ayrılarak farklı taraflara yönelmektedir. Yeni sembolleri kullanmak için verilen kurallar, sadece sembollere bağlı olup, bunların mantıksal temelini oluşturan kavramsal bilgilere bağlı olmadığından; kurallar, bilinen formdaki problemlerde geçerli sonuçlar üretmektedir. Zamanla, öğrenilen sembol kullanım kuralları sayıca daha da artmakta; ilkökul ve ortaokul yıllarında, işlemsel ve kavramsal bilgi, ayrı yollarda gelişmeye devam etmektedir (Hiebert ve Lefevre, 1986).

Hiebert ve Lefevre (1986); lise yıllarına gelindiğinde de durumun pek değişmediğini; öğrencilerin, belirli tür problemleri çözmek için –*kavramsal bilgiden izole olan*– kuralları öğrenmeye devam ettiklerini ve anlamadıkları birçok problem için doğru cevabı verebildiklerini ifade etmişlerdir.

Resmi (*formal*) matematik öğretiminin, kavramlardan ve aralarındaki ilişkilerden daha çok, işlemleri öğretmede daha iyi bir iş çıkarıyor gibi görüldüğünü dile getiren Hiebert ve Lefevre (1986); işlemlerin, kavramlar üzerindeki üstünlüğünün ve ikisi arasındaki ilişki yokluğunun, kısmen de olsa resmi okul öğretiminin doğası ile açıklanabileceğinin farkına varılması gerektiğini ifade etmiştir.

Çok sayıda uzun bölme alıştırmaları yapmanın, bir çocuğun bölmenin ne demek olduğunu anlamasına yardımcı olmayacağını söyleyen Van de Walle (2004); belirli bir işlemde ustalaşan öğrencilerin, sonrasında, o işleme bir anlam yükleme konusunda isteksiz olduklarını da sözlerine eklemiştir. Benzer şekilde, Skemp (1978) de;

öğrencilerin, alışkın oldukları düşünme türü, doğru cevaplara ulaşabilmelerinde yeterli oluyorsa; bunun ötesinde başka bir şeyler denemeleri yönünde yapılan önerilerden hoşlanmayacaklarını dile getirmiştir.

Capraro ve Joffrion (2006); öğrencilerin, hem cebir alanındaki kavramsal anlamalarını, hem de *–sayılar ve değişkenler ile hesap yapabilmeleri için–* işlemsel becerilerini geliştirmeleri durumunda; cebirde başarılı olabileceklerini belirtmiştir. Hallett, Nunes ve Bryant (2010); matematikte kavramsal ve işlemsel bilginin kullanımı ile ilgili olarak, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ örneğini vermiştir. Çocuklar, bu toplamı hesaplama sürecinde; bunu, bir yarımda 2 tane çeyrek olduğunu anlayıp, tüm bu çeyrekleri toplama şeklinde kavramsal olarak yapabilecekleri gibi; en küçük ortak payda algoritmasını uygulayarak işlemsel olarak da yapabilir ya da bu yaklaşımların bir bileşimini deneyebilirler (Hallett, Nunes ve Bryant, 2010).

Son zamanlarda, öğretim süreci; işlemsel anlama ve kavramsal anlama arasında denge kurulmasına odaklanmıştır (Che Ghazali ve Zakaria, 2011). Problem çözme sürecinde, çözüm yöntemlerini uygulama noktasında; işlemsel becerilere yönelik bilgi, tek başına yetersiz kalmaktadır. Kavramsal anlama olmaksızın; işlemler, pek bir anlam ifade etmemektedir (Capraro ve Joffrion, 2006). Kavramsal anlama, çeşitli türden ve yeni karşılaşılan matematiksel problemlerin çözümüne olanak tanımakta; kavramsal bilgi düzeyi yüksek olan öğrenciler; önceden hiç karşılaşmadıkları problemleri çözebilme yeteneğine sahip olmaktadır. Ancak bazı okullarda, kavramsal anlamaya odaklanılmayarak; *–yalnızca sınavları geçmek amaçlanıyor gibi–* sadece işlemsel anlamının üzerinde durulmaktadır (Che Ghazali ve Zakaria, 2011).

Üniversiteye yeni başlayan öğrencilerin matematiğe dair fikirlerini ve matematiği öğrenme yaklaşımlarını incelemek amacıyla, Avustralya'daki bir üniversitenin Matematik bölümünde öğrenim gören yaklaşık 300 tane 1. sınıf öğrencisi ile yapılan bir araştırmada; öğrencilerin çoğunluğunun, matematiği, ezbere öğrenilmesi gereken, zorunlu bir dizi kurallar ve işlemler olarak gördükleri ve öğrencilerin matematiğe dair fikirleri ile matematiği öğrenme yaklaşımları arasında yapısal bir ilişki olduğu tespit edilmiştir (Crawford, Gordon, Nicholas ve Prosser, 1994).

İşlemsel ve kavramsal öğrenmeye eğilimli öğrencilerin özelliklerinden genel olarak bahsedilecek olursa; işlemsel öğrenmeye eğilimli olan öğrenciler, kuralların ve formüllerin nereden çıkarıldığına bakmaksızın; tanımı, kuralı, formülü (genellikle ezberleyerek) aklında tutmaya ve bu kuralların, formüllerin hangi tür problemlerde

kullanıldığını öğrenmeye çalışırlar. Bu tür öğrenciler, problemler ile denklemleri karşılaştırırlar ve bildikleri bir denklemin, sorulan probleme uyması durumunda problemi çözebilir, aksi taktirde çözemazler (Baki ve Bell, 1997). Kavramsal öğrenmeyi benimseyen öğrenciler ise, problem çözmek için, önceden uyguladıkları çözüm yolunu adım adım akılda tutmak yerine; problemin matematiksel yapısı ile ilgilenecek, çözümü kendi başlarına bulmaya çalışırlar. Genellikle kavram bilgisi olmadan, işlemsel kuralların kesinlikle öğrenilemeyeceği kabul edilse de; maalesef çoğu kez, durum böyle olmamaktadır (Van de Walle, 2004).

2.8.7. Kavramsal Bilgi ile İşlemsel Bilgi Arasında Bağlantılar Kurmanın Önemi

Matematiksel bilgi, işlemsel ve kavramsal bilgiler arasında, anlamlı olan temel ilişkileri içermektedir. Bu iki bilgiden birinin eksik olması durumunda ya da ikisi de kazanılmış olmasına rağmen, ayrı ayrı durmaları durumunda; öğrencilerin matematikte tam yeterlilik kazandıklarından bahsedilemez. İşlemler ve kavramlar arasında bağlantı kurulmadığı zaman; öğrencilerin matematik için sezgileri iyi olsa da, problemleri çözemeyebilir veya cevap üretebilseler de, ne yaptıklarını anlayamayabilirler. Bu nedenle; işlemsel ve kavramsal bilgi arasındaki kritik bağlantılar, sağlam bir bilgi temelini gelişmesi açısından oldukça önemlidir (Hiebert ve Lefevre, 1986).

Kavramsal ve işlemsel bilgi arasında kurulan bağlantıların, hem işlemsel bilgi hem de kavramsal bilgi için birçok faydaları vardır. İşlemsel bilgi açısından başlıca avantajları, aşağıdaki şekilde özetlenebilir (Hiebert ve Lefevre, 1986):

- Kavramsal bilgi ile matematiğin formal sembol sistemi arasında ilişkiler kurma, semboller için anlam geliştirmeyi sağlar.
- Kavramsal bilgi ile matematiğin işlemleri arasında ilişkiler kurma; işlemlerin depolanması ve bulunup çıkarılması açısından belleğe/hafızaya yardım ederek, uygun işlemin hatırlanma olasılığını artırır ve bu işlemlerin etkili kullanımını kolaylaştırır.
 - o Kavramsal bilgi, uygun işlemin seçimine yardım etmenin yanı sıra; kullanıcıya, bir işlemin uygun olmadığı bilgisini de verir.
 - o Kavramsal bilgi, işlemin sonucunun, yani cevabın mantıklı olup olmadığını kontrol etme görevi de görür.

- Kavramsal bilgi, işlemi öğrenildiği bağlamdan serbest bırakarak; yapısal olarak benzer olan başka problemlerde kullanımına destek olur.
- Kavramsal bilgi ile kurallar, algoritmalar veya işlemler arasında ilişkiler kurma; öğrenilmesi gereken işlem sayısını azaltır (Hiebert ve Lefevre, 1986).

Kavramsal ve işlemsel bilgi arasında kurulan bağlantıların, kavramsal bilgi açısından başlıca avantajları ise, şöyle özetlenebilir (Hiebert ve Lefevre, 1986):

- Semboller, kavramsal bilginin düzenlenmesi ve üzerinde çalışılması konusunda yardımcı olur. Ayrıca sembol sistemi, bazı durumlarda matematik alanında kavramlar üretebilir veya kavramları geliştirebilir.
- “İşlemler, problemleri çözmek için kavramları uygularlar.” (Hiebert ve Lefevre, 1986)
 - Rutinleşmiş işlemler, problem çözümünde gerekli olan zihinsel çabayı azalttığından; işlemler, kavramsal bilginin uygulanmasını kolaylaştırabilir ve bu da, karmaşık görevlerin çözümlerine olanak tanır.
- İşlemler, bazen bireylerde kavramların gelişmesine önayak olur (Hiebert ve Lefevre, 1986).

Hiebert ve Lefevre (1986); bilgi birimleri arasında ilişkiler kurmanın, her zaman kendiliğinden meydana gelmediğini; bilgi birimleri arasında ilişki kurmayı engelleyen birçok faktör olduğunu belirtmiş ve matematik öğrenme açısından özel önemi olabileceğini düşündüğü üç faktörden bahsetmişlerdir (Hiebert ve Lefevre, 1986):

- **Bilgi temelinde eksiklikler olması:** Kullanışlı ilişkilerin kurulabilmesi için, bilgi temelinin sağlam olması gerekmektedir. İşlemlerdeki veya kavramlardaki eksiklikler; olmayan veya zayıf olan bağlantıların kaynağı olabilir.
- **İlişkileri kodlamada zorluklar yaşanması:** Küçük çocuklar, yetişkinler için apaçık olan kavramsal ilişkileri görememeye veya kodlayamamaya eğilimlidirler.
- **Bilgiyi bölümlere ayırma eğiliminin olması:** Belirli bir bağlamda edinilen bilgilerin, başlangıçta o bağlamın yüzeysel özelliklerine bağlı olması; bireyin, yeni öğrenilen bilgi ile daha önceden edinilmiş bilgi arasındaki benzerliklerin farkına varmasına engel olmaktadır (Hiebert ve Lefevre, 1986).

Bilgi birimleri arasında ilişki kurmayı engelleyen faktörlerin yanı sıra; kavramsal ve işlemsel bilgi ile matematik kaygısının da ilişkili olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının “kesir” kavramına dair kavramsal ve işlemsel bilgileri ile matematik kaygıları arasındaki ilişkiyi inceleyen Rayner, Pitsolantis ve Osana (2009); bu araştırmadan, matematik kaygı puanı arttıkça, hem “kesir” kavramına dair işlemsel bilgi puanının hem de kavramsal bilgi puanının azaldığı sonuçlarına ulaşmışlardır.

2.9. “Kavramsal ve İşlemsel Bilgi” ile ilgili Araştırmalar

Bu alt bölümde; matematik eğitimi alanında “kavramsal ve işlemsel bilgi” ile ilgili olarak, yurtiçinde ve yurtdışında yapılmış araştırmalara yer verilecektir.

2.9.1. “Kavramsal ve İşlemsel Bilgi” ile ilgili Yurtdışında Yapılmış Araştırmalar

Matematik eğitimi alanında “kavramsal ve işlemsel bilgi” ile ilgili yurtdışında yapılmış araştırmalar incelendiğinde; okulöncesi dönemden yükseköğretime kadar farklı öğretim kademelerinde gerçekleştirilmiş çalışmalara rastlanmıştır.

Küçük çocukların, çok-basamaklı bir toplama yaparken kullandıkları farklı aritmetik bilgi türlerini analiz etmek ve çocukların kendi problem çözme yaklaşımlarını geliştirirken ortaya çıkan işlemsel ve kavramsal değişimleri incelemek amacıyla; Voutsina (2012) tarafından bir araştırma yapılmıştır. 5-6 yaşlarındaki 10 tane çocukla gerçekleştirilen klinik görüşmelerde; çocukların, çok-basamaklı bir ödevi çözerken, toplama olgusu, hesaplama işlemi ve aritmetik kavram bilgilerini nasıl birleştirdiğine ve bir dizi problem çözme oturumundaki ödevlerin çözümüyle meşgulken, genel çözüm yaklaşımları ve farklı bilgi türlerini uygulamalarının nasıl değiştiğine ve geliştiğine odaklanılmıştır. Başka bir deyişle; çocukların matematiksel kavramları anlamalarının, işlemleri kullanma becerilerinin ve matematiksel olgulara dair bilgilerinin birbiriyle nasıl bir ilişkisinin olduğu sorusuna cevap aranmıştır. Çocukların açık davranışlarındaki değişimin analiz edilmesi sonucunda; çocukların gelişen ödev temsilleri, gelişmiş işlemleri ve giderek kendi stratejilerinin kavramsal yönlerini daha iyi anlamaları

arasında dinamik bir etkileşim olduğu tespit edilmiştir. Bu araştırmadan elde edilen bulguların; işlemsel ve kavramsal bilgi arasındaki etkileşime dair “yinelemeli model (*iterative model*)” hipotezini desteklediği; ayrıca küçük çocukların aritmetik problem çözümlerinde, farklı bilgi türleri arasındaki etkileşimi teşvik edici eğitimsel yaklaşımlara ve ödevlere olan ihtiyaca dikkat çektiği de belirtilmiştir.

Çocukların toplama kavramını işlemsel ve kavramsal anlamaları arasındaki ilişkiyi incelemek amacıyla; Canobi, Reeve ve Pattison (1998) tarafından da bir araştırma yürütülmüştür. Yaşları 6 ile 8 arasında değişen 48 çocuğun toplama problemlerini çözme hızları, doğruluk, stratejiler ve bir problemin kavramsal yapısının, bir sonraki problemi çözmek için kullanılabileceğini farketme eğilimleri arasındaki bağlantıların araştırıldığı bu çalışmada; öğrenciler, bilgisayar ekranında gösterilen toplama problemlerini çözerken; doğruluğu, hızı ve çözümde kullandıkları stratejiler not edilmiştir. Çocuklar bir problemi çözmeye çalışırken, önceki problem ve cevabı ekranda kalmış; ikinci bir görevde, bir problemin aritmetik özelliklerinin bir sonraki problemi çözmek için kullanılıp kullanılmadığı değerlendirilmek istenmiştir. Sonuç olarak, çocukların kavramsal anlamalarını; toplamının bazı özelliklerinin farkına varma ve bunları açıklama yeteneklerine göre karakterize etmenin anlamlı olduğu yargısına varılmıştır. Kavramsal açıdan daha yeterli olan öğrencilerin –kavramsal açıdan daha başarısız olan öğrencilere kıyasla– problemleri daha çabuk ve doğru şekilde çözme eğiliminde oldukları; ayrıca problem çözme stratejilerini kullanırken, daha esnek davrandıkları sonuçlarına ulaşılmıştır. Bu bulguların; tek basamaklı toplama işlemleri için kavramsal bilginin önemini açıklayıcı ve vurgulayıcı nitelik taşıdığı ifade edilmiştir.

İlköğretim kademesindeki öğrenciler üzerinde yapılan bir diğer çalışmada; Canobi (2009), çocuklar toplama ve çıkarma işlemlerini yaparkenki kavram-işlem etkileşimini incelemek istemiştir. Yaşları 7 ve 8 olan 72 tane öğrenciye, bilgisayar tabanlı problem çözme görevi içeren ve bireysel olarak uygulanan 30 dakikalık bir ön testin ardından; öğrenciler, kendi sınıflarında 3 haftalık bir problem çözme uygulama aşamasını tamamlamış; sonrasında yine bireysel olarak bir son test uygulanmıştır. Ön test ve son testte, rastgele sıralanmış problemlerde yaptıkları işlemler ve doğrulukları; problem çözümlerinde kavram-tabanlı ilişkileri kullandıkları raporları ve kavramsal açıklamaları ile birlikte kaydedilmiştir. Veri analizi sonucunda; uygulama problemlerinin kavramsal sıralamasının; öğrencilerin, işlemsel öğrenmelerini, daha önce

pratik yapmadıkları yeni problemlere genişletme yeteneklerini artırdığı; iyi-yapılandırılmış işlemsel uygulamanın da, öğrencilerin, anahtar kavramları sözle ifade etme yeteneklerini geliştirdiği ve öğrencilerdeki kavramsal gelişmenin, onların başlangıçtaki işlemsel becerileri tarafından tahmin edildiği tespit edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar; çocuklarda, toplama ve çıkarma işlemlerindeki temel kavramların ve anahtar becerilerin yinelemeli bir şekilde geliştiği şeklinde yorumlanmıştır.

İlköğretim kademesindeki öğrencilerle gerçekleştirilmiş başka bir çalışma da, Hiebert ve Wearne (1996) tarafından yapılmıştır. Hiebert ve Wearne (1996); öğretimin, çocukların çok basamaklı sayıları anlamaları ile hesaplama becerileri arasındaki ilişkileri nasıl etkilediğini araştırmışlardır. 70 öğrencinin, okulun ilk üç yılında, iki farklı öğretim ortamında “basamak değeri” ve “çok basamaklı toplama ve çıkarma”yı öğrenirken takibini yapan araştırmacılar; bu öğrencilerle her yıl birkaç kez görüşmeler yapmışlardır. Araştırmadan; hem öğrencilerin henüz ders almadıkları görevlerde, hem de öğretimin ardından daha zor görevlerde; anlama ve becerinin yakından ilişkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin, yeni problem çözümlerinde, yeni işlemler icat etmek ve eski işlemleri modifiye etmek için belirli anlayışları uyguladıkları görülmüştür. Öğrencileri, kendilerine sunulan işlemleri anlamlandırma ve kendi işlemlerini geliştirme konusunda teşvik eden alternatif öğretim; anlama ve beceri arasında daha yakın bağlantılar kurmayı ve daha yüksek düzeyde anlamayı kolaylaştırmaktadır. Bu sonuçlara dayanarak; kavramsal anlamının, matematiksel görevleri tamamlamayı kolaylaştırdığı için oldukça önemli olduğu vurgulanmıştır. Ayrıca erken anlayan öğrenciler, üç yıl sonra, en yüksek düzeyde hesaplama performansı gösterdiklerinden; anlamaları erken oluşturma –şart olmasa da– avantajlı görüldüğü de ifade edilmiştir.

Bazı araştırmaların, çocukların kavramsal bilgiyi işlemsel bilgidan önce öğrendiğini; bazı araştırmaların, işlemsel bilgiyi kavramsal bilgidan önce öğrendiğini; birtakım araştırmaların ise, her iki bilgiyi birlikte öğrendiklerini öne sürdüğünü ifade eden Hallett, Nunes ve Bryant (2010); bu çatışan bulguların, çocukların bu iki bilgi türünü birleştirme yolundaki bireysel farklılıkları ele alınarak açıklanabileceğini ileri sürmüşlerdir. Hallett, Nunes ve Bryant’ın (2010), Birleşik Krallık’ta yaptıkları araştırma kapsamında; 4. ve 5. sınıftan toplam 318 öğrenci, kavramsal ve işlemsel bilginin alt ölçeklerini içeren bir kesirleri anlama ölçeği doldurmuştur. Analiz sonucunda; öğrencilerin kavramsal ve işlemsel problemlerdeki başarılarına göre birbirinden ayrılan 5 ayrı grup tanımlanmıştır. Bazı çocukların, işlemsel bilgiye daha çok güvenirken;

diğerlerinin, daha ziyade kavramsal bilgiye dayandığı; ancak bu farklılıkların, gelişimsel süreçlerle ilişkili olmayabileceği; 5 gruptaki çocukların, toplam kesir performanslarında farklılık gösterdikleri ifade edilmiştir. Ayrıca bu farklılıklar göz önüne alındığında; kavramsal bilgiye dayanan öğrencilerin, daha çok işlemsel bilgiye dayanan öğrencilere kıyasla daha avantajlı durumda olabileceği de belirtilmiştir. Bu araştırma sonuçlarının; hem çocukların ilk önce kavramları öğrendiğini ileri süren geçmiş araştırma sonuçları, hem önce işlemleri öğrendiğini öne süren araştırma sonuçları, hem de ikisini birlikte öğrendiğini ileri süren araştırma sonuçları ile çeliştiği; farklı öğrencilerin bu hipotezlerin her birine uygun düşebileceği ifade edilmiştir. Çocukların bu 5 gruba dağılımında okullar arasında birtakım farklar gözlemlediklerinden, bireysel farklılıklar konusunda “öğretim”in bir faktör olabileceğini söyleyen Hallett, Nunes ve Bryant (2010); bireysel farklılıkların daha iyi anlaşılabilmesi açısından, bu tür araştırmalara ihtiyaç olduğuna değinmişlerdir.

İlköğretim 4. ve 5. sınıf öğrencileri ile gerçekleştirilmiş diğer bir çalışmada; Rittle-Johnson ve Alibali (1999), öğrencilerin, matematiksel eşitliği kavramsal olarak anlamaları ile eşitlik problemlerini çözmede uyguladıkları işlemler arasındaki ilişkileri incelemişlerdir. Verilerin toplanacağı kısa bir dersin öncesinde ve sonrasında; öğrencilerin, eşitlik ile ilgili kavramsal ve işlemsel bilgileri, kağıt-kalem testi ile değerlendirilmiştir. Ders öncesi yapılan değerlendirmede, iki standart eşitlik problemi kullanılmış ve problemleri doğru çözenler (27 öğrenci) ile yanlış çözenler (59 öğrenci) belirlenmiştir. Problemleri yanlış çözen öğrenciler; “kavramsal öğretim”, “işlemsel öğretim”, ve öğretim yapılmayacak “kontrol” gruplarından birine rastgele atanmıştır. Yapılan derste, ya eşitlik kavramına ya da eşitlik problemlerini çözmek için doğru bir işleme odaklanılmıştır. Kavramsal öğretim; artmış kavramsal anlamaya, doğru ve esnek bir işlemin oluşturulmasına ve transferine yol açarken; işlemsel öğretim; artmış kavramsal anlamaya, öğretilen işlemin benimsenmesine fakat sınırlı transferine yol açmıştır. Buradan hareketle; kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişkilerin tek yönlü olmadığı; bu iki bilgi türünün, yinelemeli olarak geliştiği; bir bilgi türündeki artışın, diğer bilgi türündeki artışa götürdüğü ifade edilmiştir. Kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki nedensel ilişkinin altını çizen bulguların; yine de –tersine kıyasla– kavramsal bilginin, işlemsel bilgi üzerinde daha büyük bir etkisinin olabileceği yönünde fikir verdiği de belirtilmiştir. Başka bir deyişle; bu araştırmadan, öğrencilere matematiksel eşitlik problemlerinin çözümü için gerekli olan bir işlemi öğretmek yerine, problemlerin ardındaki kavramı öğretmenin; kavramsal anlama ve esnek problem çözme becerisi

geliştirme açısından daha etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu araştırma ile, aynı zamanda; 4. ve 5. sınıf öğrencilerinin, eşitliğin hangi yönlerini anladığına; hangi yönlerini anlamadığına ama kolayca öğrenebildiğine ve hangi yönleri öğrenmede zorluk yaşadığına dair de bilgi edinilmiştir (Rittle-Johnson ve Alibali, 1999).

İlköğretim öğrencileri ile gerçekleştirilen ve matematik alanındaki işlemsel ve kavramsal bilgi arasındaki ilişkiyi incelemek amacıyla Byrnes ve Wasik (1991) tarafından yürütülen iki deneysel çalışmada; eşzamanlı aktifleştirme görüşü ile dinamik etkileşim görüşü karşılaştırılmıştır. Kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişki hakkındaki eşzamanlı aktifleştirme görüşü, hesaplamaya dayalı hataların, zayıf kavramlardan kaynaklandığını ve bu hataların, sembolleri somut nesnelerle ilişkilendirerek ortadan kaldırılabileceğini iddia ederken; dinamik etkileşim görüşü, artzamanlı olarak birbirini etkileyen farklı sistemleri ve uzmanlıkla birlikte işlemsel bilginin, ilerici bağımsızlığını savunmaktadır. 4. ve 6. sınıftan toplam 70 öğrenci ile yapılan 1. deneyde; 9'u kavramsal bilgiyi ve 6'sı işlemsel bilgiyi değerlendirmeye yönelik toplam 15 maddelik bir test, öğrencilere grupça uygulanmıştır. Bu 1. çalışmadan; 4. ve 6. sınıftaki birçok öğrencinin, anlamlı kavramsal bilgiye sahip oldukları; ama yine de hesaplamaya dayalı hatalar yaptıkları sonuçları çıkarılmıştır. 51 tane 5. sınıf öğrencisinin katıldığı ve öntest-öğretim-sontest deseninin kullanıldığı 2. deney ise; 5. sınıf öğrencilerinin, işlemsel bilgiyi iyice öğrenmeden önce, kavramsal bilgiyi iyice öğrendiklerini göstermiştir. Bu sonuçların ise, dinamik etkileşim görüşünü desteklediği ifade edilmiştir.

Yine ilköğretim kademesindeki öğrenciler ile gerçekleştirilmiş olan bir diğer araştırma da; matematikte kavramsal anlama ve işlemsel becerinin gelişimini ve problem gösteriminin, bu gelişimdeki rolünü incelemek amacıyla, Rittle-Johnson, Siegler ve Alibali (2001) tarafından yapılmıştır. Araştırma, “ondalık kesirler” konusunu öğrenen 5. ve 6. sınıf öğrencileri üzerinde yürütülmüştür. Geleneksel öğretim programında yer almayan, dolayısıyla çoğu öğrencinin çözme işlemiyle ilgili tecrübesinin olmadığı –*başka bir deyişle, “ondalık kesirler” ile ilgili kavramsal bilgiye sahip oldukları, ancak ondalık kesirleri sayı doğrusu üzerine yerleştirme konusunda çok az işlemsel bilgiye sahip oldukları / hiç sahip olmadıkları düşünülen*– birtakım sayı doğrusu problemleri sorulmuştur. Öğrencilerden, ondalık kesirleri, sayı doğrularının üzerlerine yerleştirmeleri istenmiş ve dönüt verilmiştir. Araştırmadan; öğrencilerin baştaki kavramsal bilgilerinin, işlemsel bilgideki ilerlemeyi önceden haber verdiği ve işlemsel bilgideki ilerlemenin de, kavramsal bilgideki gelişimin habercisi olduğu; yani

kavramsal ve işlemsel bilginin gelişiminin yinelemeli bir süreçte gerçekleştiği; ayrıca doğru problem gösteriminin, kavramsal ve işlemsel bilgi arasında önemli bir bağlantı olduğu sonuçları çıkarılmıştır.

İlköğretimin ikinci kademesindeki öğrencilerle gerçekleştirilmiş olan, konu ile ilgili bir çalışma da; Rittle-Johnson ve Koedinger (2002) tarafından yapılmıştır. 72 tane 6. sınıf öğrencisinin katılımıyla gerçekleştirilen bu çalışmada; ondalık basamak değeri ve yeniden gruplandırma kavramlarına dair bilgi ile ondalık sayıları toplama ve çıkarma işlemlerinin birleştirilmesinde alternatif öğretimsel stratejileri karşılaştırmak amaçlanmıştır. Kavramsal ve işlemsel bilginin yinelemeli bir şekilde geliştiğini öne süren araştırmanın esas alındığı ilk durumda; kavramsal ve işlemsel dersler dönüşümlü yapılmıştır. İkinci durumda ise; kavramsal derslerin, işlemsel derslerden önce geldiği sıralama izlenmiştir. Bütün derslerin bilgisayar tabanlı bir öğretim sistemi ile sunulduğu bu çalışmanın sonunda; ilk durumdaki öğrencilerin, ikinci durumdakilere kıyasla, işlemsel bilgide daha büyük ilerlemeler ve kavramsal bilgide de kıyaslanabilir ilerlemeler gösterdikleri tespit edilmiştir. Ayrıca her iki gruptaki öğrencilerin; problemler, semboller yerine para bağlamında sunulduğunda, daha iyi yaptıkları görülmüştür. Hem derslerin yinelemeli düzende olması, hem de problemlerin para bağlamında sunulmasının; öğrencilerin ondalık sayıları toplama ve çıkarma sırasında yaptıkları basamakları sıralama hatalarını azalttığı da, çıkan sonuçlar arasındadır.

Çözüm metotlarını karşılaştırmanın, matematik öğrenme açısından etkilerini değerlendirmek amacıyla; Rittle-Johnson ve Star (2007) tarafından, 7. sınıf öğrencileri ile bir araştırma yapılmıştır. Araştırmacılar, 70 tane 7. sınıf öğrencisini, –ya alternatif çözüm metotlarını karşılaştırma yoluyla ya da aynı çözüm metotları üzerine ayrı ayrı düşünme yoluyla– cebir denklemlerini çözmeyi öğrenecekleri şekilde rastgele ayırmışlardır. Araştırma sonunda uygulanan testte, karşılaştırma grubundaki öğrencilerin –çözüm metotlarını ayrı ayrı, sırayla öğrenen öğrencilere kıyasla– işlemsel bilgi ve işlemsel esnekliklerinde daha fazla artış olduğu; kavramsal bilgilerinde de karşılaştırılabilir bir artış olduğu görülmüştür.

Rittle-Johnson ve Star (2009) tarafından, ilköğretim kademesinde gerçekleştirilen, benzer bir başka deneysel çalışmada ise; 162 tane 7. ve 8. sınıf öğrencisi, (a) aynı çözüm metoduyla çözülen denk problemleri karşılaştırarak, (b) aynı çözüm metoduyla çözülen farklı problem türlerini karşılaştırarak veya (c) aynı problem için farklı çözüm metotlarını karşılaştırarak denklem çözmeyi öğrenmişlerdir. Araştırmadan çıkan sonuçlar özetlenecek olursa; öğrencilerin kavramsal bilgisi ile

işlemsel esnekliğinin, en iyi, çözüm metotlarının karşılaştırılması yoluyla; daha az bir ölçüde ise, problem türlerinin karşılaştırılması yoluyla desteklendiği; örneklerin ilgili özelliklere göre ayrılması durumunda, karşılaştırmanın faydasının artacağı ve karşılaştırma metotlarının, matematik öğrenme açısından yararlı olabileceği tespit edilmiştir. Çözüm metotlarını karşılaştırma –denk ya da farklı problem türlerini karşılaştırmaya kıyasla– genellikle, daha fazla kavramsal bilgiye ve işlemsel esnekliğe yol açsa da; işlemsel bilgiyi arttırmamıştır. Problem türlerini karşılaştırma ise, denk problemleri karşılaştırmaya kıyasla, esnekliği destekleme açısından, daha etkili olsa da; işlemsel veya kavramsal bilgiye etkisi olmamıştır.

İlköğretim öğrencileri ile gerçekleştirilen bir diğer çalışmada; önbilgileri farklı olan iki örnekleme, kavramsal bilgi, işlemsel bilgi ve işlemsel esneklik arasındaki ilişki araştırılmıştır. Schneider, Rittle-Johnson ve Star (2011) tarafından yürütülen bu çalışmada; kavramsal ve işlemsel bilgi arasında var olduğu bilinen ilişkinin çift yönlü olup olmadığı; bu karşılıklı ilişkinin, önbilgi tarafından azaltılıp azaltılmadığı ve iki yapının, işlemsel esnekliğe nasıl katkıda bulunduğu sorularına cevap aranmıştır. Bir okulun 11 sınıfından (5’i normal düzeyde ve 6’sı onur düzeyinde), 228 tane 7. ve 8. sınıf öğrencisinin katıldığı çalışmada; öğrencilere, ilk önce denklem çözmeleri gereken bir ön test uygulanmış; sonraki 3 gün, ikili çalışma için her öğrenci, sınıfındaki başka bir öğrenci ile rastgele eşleştirilerek üç ders yapılmış ve beşinci günde de, son test uygulanmıştır. Öğrencilere cebirde ve denklem çözmede sınırlı öğretim verilen bu birinci çalışma dışında; öğrencilere sınıfta denklem çözme öğretildiğinde ve böylece daha fazla alan bilgisine sahip olduklarında, kavramsal bilgi, işlemsel bilgi ve işlemsel esneklik arasındaki ilişkinin farklı olup olmadığını incelemek amacıyla ikinci bir çalışma yapılmıştır. İkinci çalışma, iki okuldaki toplam 14 sınıfın (2’si normal düzeyde ve 12’si ileri düzeyde), 304 tane 7. ve 8. sınıf öğrencisi ile yapılmıştır. Araştırmadan; kavramsal ve işlemsel bilgi arasında değişmez, çift yönlü ilişkiler olduğu ve önbilginin, bu ilişkileri azaltmadığı; her iki bilgi türünün de, bağımsız olarak, işlemsel esnekliğe katkıda bulunduğu sonuçlarına ulaşılmıştır.

Hem ilköğretim hem de üniversite öğrencileri ile yapılmış, konu ile ilgili çalışmaya da rastlanmıştır. Kavramsal bilginin, işlemlerin kazanımını kolaylaştırdığı önerisinin doğruluğunu araştırmak amacıyla; Byrnes (1992) tarafından, iki araştırma yürütülmüştür. Çocukların tamsayı hesaplamalarını öğrenmelerinin incelendiği ilk çalışmada; 25 tane 7. sınıf öğrencisinin tamsayılarla ilgili kavramsal bilgisi, hesaba

dayalı öğretimin öncesinde; işlemsel bilgisi (yani hesaplama becerisi) ise, hem öğretimin öncesinde hem de sonrasında değerlendirilmiştir. Bu çalışmanın sonunda; var olan kavramsal bilginin, son testteki hesaplama becerisinin iyi bir tahmincisi olduğu ve hata analizlerinin de, öğrencilerin cevaplarının %90'ının, küçük bir kurallar dizisi ile açıklanabileceğini açığa çıkardığı görülmüştür. Yetişkinlere (*yaklaşık yaş ortalaması 22 olan 28 tane üniversite öğrencisi*) üç tane yeni matematiksel kuralın öğretildiği ikinci çalışmanın sonuçları da; yine kavramsal bilginin, işlemsel öğrenmeyi etkilediğini göstermiştir.

Matematik eğitimi alanında yapılmış “kavramsal ve işlemsel bilgi” ile ilgili araştırmaların birçoğu, ilköğretim öğrencileri ile gerçekleştirilmiş olsa da; ortaöğretim ve yükseköğretim kademesinde yürütülmüş çalışmalar da mevcuttur. Öğrencilerin cebirdeki işlemsel ve kavramsal anlamalarını, aynı zamanda matematiği işlemsel anlama ve kavramsal anlama arasındaki ilişkiyi incelemek amacıyla, Che Ghazali ve Zakaria (2011) tarafından yapılan araştırmada; 132 ortaokul öğrencisinden, tarama yöntemi yoluyla veri toplanmıştır. 6'sı kavramsal anlamayı ve 8'i işlemsel anlamayı ölçen toplamda 14 maddeden oluşan bir cebir testi kullanılarak toplanan veriler; yüzde, ortalama ve standart sapmaya dayalı şekilde betimsel olarak analiz edilmiş; ayrıca işlemsel ve kavramsal anlama arasındaki ilişkiyi belirlemek amacıyla, Pearson korelasyonu da kullanılmıştır. Araştırmadan; öğrencilerin işlemsel anlama düzeylerinin yüksek, kavramsal anlama düzeylerinin ise düşük olduğu; matematiği işlemsel anlama ve kavramsal anlama arasında da, anlamlı pozitif bir ilişki olduğu sonuçları çıkarılmıştır. Che Ghazali ve Zakaria (2011), ilişkinin anlamlı pozitif çıkmasının nedenlerini; işlemsel anlamamanın, matematik kavram kazanımına olanak tanıyarak, öğrencilerin kavramsal anlamalarını arttırması ve benzer şekilde, kavramsal anlamamanın da, öğrencilerin işlemsel anlamaya iyice hakim olmalarına olanak tanınması olarak açıklamıştır.

Üniversite öğrencileri ile yapılan bir araştırmada ise; “matematiğin mantıklı olduğu”nu söyleyen bazı öğrenciler, problemlere açık ve yaratıcı bir şekilde yaklaşırken; “matematiğin mantıklı olmadığı”nı ifade eden bazı öğrencilerin ise, problem çözme tekniklerine, rutin işlemlerin yeni bir dizisi olarak muamele ettikleri görülmüştür. Matematiğin mantıklı olmadığını düşünen bazı öğrenciler, bir problemle yüz yüze geldiklerinde; problemin iç yüzünü kavramaya, nedenler ve metotlar bulmaya

çalışma yerine; daha ziyade problem çözmek için öğrendikleri teknikleri hatırlama ve uygulamayla ilgili görünmüşlerdir. Bu öğrenciler, problemleri çözerken; daha ziyade, öğrenilmiş teknikleri ve hazır kuralları uygulayarak, –kavramsal olmayan– işlemsel bir metot kullanmışlardır (Yusof ve Tall, 1996).

Konu ile ilgili olarak, matematik öğretmenleri ile yapılmış araştırmalar da yer almaktadır. Doğu Asyalı öğretmenlerin matematikteki yeterliliklerini incelemek amacıyla, Hong Kong ve Kore’de, toplam 18 ilköğretim matematik öğretmeni ile görüşme yapan Leung ve Park (2002); bu öğretmenlerin, matematikte hem kavramsal hem de işlemsel anlamaya sahip olmalarına rağmen, rapor edilen öğretim stratejilerinin çoğunluğunun, kavramsaldan daha ziyade işlemsel olduğunu tespit etmiştir. Bu araştırmadan elde edilen sonuçlar göz önüne alınacak olursa; katılımcı öğretmenler, genelde işlemsel tarzda öğretim yaptıklarını söylediler de; öğrettikleri konuya dair sağlam anlayışa sahip olmalarından dolayı, matematikte yeterli oldukları düşünülebilir. Doğu Asyalı öğretmenler, genelde işlemsel ağırlıklı öğretim yapsalar da; öğrencileri, matematik başarısına dair yapılan uluslararası araştırmalarda başarılı bulunmaktadır. Bunun sebebi; iyi tasarlanmış öğretim programları ve ders kitapları olabilir. Eğer bu araştırmadaki katılımcı öğretmenler, ülkelerindeki öğretmenleri yansıtıyorsa; bu durumda, Doğu Asyalı öğrencilerin yeterliliğinin, kısmen de olsa, öğretmenlerinin yeterliliğine dayalı olduğu sonucu çıkarılabilir (Leung ve Park, 2002).

Uluslararası çalışmaların en kapsamlılarından biri olan TIMSS (The Third International Mathematics and Science Study) 1999 video çalışmasından elde edilen verilere dayalı olarak; 6 ülkedeki (Avustralya, Çek Cumhuriyeti, Hong Kong, Japonya, Hollanda ve Amerika Birleşik Devletleri) matematik derslerinde sunulan matematiksel problemlerin türleri karşılaştırılmıştır. Basit hesaplama becerilerine ve işlemlere dayalı problemler, “işlemlerin kullanılacağı” problemler; kavramlara ve matematiksel fikirler arasındaki bağlantılara odaklanan zengin matematiksel problemler ise, “bağlantılar yapılacak” problemler olarak isimlendirilmiştir. Bağlantılar yapmaya odaklanan matematik problemlerinin yüzdelerinin; matematikte yüksek başarı gösteren bu 6 ülke arasında büyük farklılıklar gösterdiği tespit edilmiştir. Japonya’daki sınıflarda yer verilen problemlerin %54’ü, “bağlantılar yapılacak” problemler iken; bu yüzdenin – *çalışmadaki en başarılı ülkelerden biri olan*– Hong Kong’da sadece %13 olduğu tespit edilmiştir. Tersine, bu 6 ülke arasında Hong Kong’un, derslerde “işlemlerin kullanılacağı” problemlere en fazla yer veren ülke (%84); Japonya’nın ise, en az yer

veren ülke (%41) olduğu saptanmıştır. Ayrıca bu 6 ülkenin hepsinde de, sınıflarda her iki problem türüne de yer verildiği; ancak problem yüzdelерinin, öğrencilerin başarı testlerindeki performanslarını haber verici bir rolünün olmadığı görülmüştür. Bu çalışmada; matematik derslerinde sunulan her bir problem, bir kez de, problemin sınıfta uygulanmasına göre kodlanmıştır. Bu kez ülkeler, öğretmenlerin “bağlantılar yapılacak” türdeki problemleri uygulama biçimlerine göre –“işlemleri kullanarak” veya “bağlantılar yaparak” şeklinde– incelenmiştir. Bu kodlamaya göre, Hong Kong ve Japonya’nın benzerlik gösterdiği; her iki ülkede de “bağlantılar yapılacak” türdeki problemlerin çoğunluğunun, “bağlantılar yaparak” uygulandığı (Hong Kong: %46; Japonya: %48) belirlenmiştir. Bu araştırmadan elde edilen çarpıcı bir bulgu ise; Amerika Birleşik Devletleri’ndeki öğretmenlerin, “bağlantılar yapılacak” türdeki problemleri, hiç “bağlantılar yaparak” uygulamadıkları (Amerika Birleşik Devletleri: %0); bu problemlerin çoğunu, işlemsel alıştırmalara dönüştürdükleridir (Stigler ve Hiebert, 2004).

Hem matematik öğrencilerinin hem de öğretim üyelerinin katılımı ile gerçekleştirilmiş bir çalışmada; Chappell ve Killpatrick (2003), işlem-tabanlıya karşı kavram-tabanlı öğretim ortamlarının, öğrencilerin kalkülüsteki (calculus) kavramsal anlamaları ve işlemsel bilgileri üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. 305 üniversite düzeyinde matematik öğrencisinin ve –yedisi işlem-tabanlı, biri ise kavram-tabanlı öğretim yapan– 8 öğretim üyesinin katıldığı bir orijinal çalışma ile yine aynı üniversitede yürütölen, 303 üniversite düzeyinde matematik öğrencisinin ve 8 öğretim üyesinin katıldığı bir tekrar çalışması yapılmıştır. Farklı öğrenme ortamlarından öğrencilerin, ilk dönem kalkölüs dersindeki kavramlara ve işlemlere ne derece hakim olduklarını belirlemek için; çoklu başarı ölçekleri kullanılmıştır. İşlemsel yeterliliği ölçmek için iki beceri sınavı ve işlemsel becerilerin yanı sıra kavramsal anlamayı da ölçmek için de bir ara sınav, bir de final sınavı uygulanmıştır. Beceri sınavlarıyla yapılan ölçümlerle; öğrenme ortamının, öğrencilerin işlemsel becerileri kullanmalarında anlamlı bir fark oluşturmadığı tespit edilmiştir. Kavram-tabanlı öğrenme ortamına kayıtlı öğrenciler; işlemsel beceri ile kavramsal anlamının her ikisini de ölçen değerlendirmelerde, işlem-tabanlı öğrenme ortamındaki öğrencilere kıyasla çok daha yüksek puanlar almışlardır. Tekrar çalışmasından elde edilen sonuçlar da, orijinal çalışmanın sonuçları ile tutarlılık göstermiştir. Bu sonuçlar; kavram-tabanlı öğretim

programlarının, öğrencinin hesap yapma becerisini geliştirmeden ödün vermeksizin, kavramları anlamasını geliştirebileceğine dair delil sunmaktadır.

Star (2002) ise; mevcut reform çabalarının ve araştırmaların, öncelikli olarak, daha çok “kavramsal anlama” olarak anılan anlama türü ile ilgilendiğini; bunun sonucunda da, işlemsel yeterliliğin temelini oluşturan, matematiksel anlamının diğer türünün (“işlemsel anlama”) kritik öneminin unutulmaya başladığını ileri sürmüştür. “Matematik yapma”ya, –başka bir deyişle– matematiksel işlem ve becerileri anlama ve kullanmaya vurgu yapan Star (2002); matematik eğitim araştırmalarının, –“*kavramsal anlama*”nın yerini alacak şekilde değil de, ona ek olarak– işlemsel yeterlilik konusuna geri dönebileceği bir yol önermiştir. Star (2002), üç öğrencinin, bir lineer denklem çözümlerini sunduğu ve karşılaştırdığı çalışmasında; bu üç öğrencinin, lineer denklem çözümü hakkında bildikleri arasındaki farklılığın, öğrencilerin, işlemleri planlama bilgisi –*başka bir deyişle, işlemlerle ilgili kavramsal bilgi*– açısından ifade edilebileceğini öne sürmüştür.

2.9.2. “Kavramsal ve İşlemsel Bilgi” ile ilgili Yurtiçinde Yapılmış Araştırmalar

Matematik eğitimi alanında “kavramsal ve işlemsel bilgi” ile ilgili yurtdışında yapılmış araştırmaların yanısıra; yurtiçinde yürütülmüş çalışmalar da bulunmaktadır.

Baki ve Kartal (2004) tarafından yapılmış bir çalışmada, lise öğrencilerinin cebirsel bilgilerinin doğasını, kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında değerlendirmek amaçlanmıştır. Veriler, “bağıntı-fonksiyon-işlem”, “sayılar”, “polinomlar”, “çarpanlara ayırma” ve “birinci dereceden denklemler” gibi konuları içeren; birincisi ağırlıklı olarak işlem bilgisine, ikincisi ise ağırlıklı olarak kavram bilgisine dayanan; her biri 10 sorudan oluşan; uzun cevaplı iki yazılı sınav aracılığıyla toplanmıştır. Beş lisedeki toplam 250 son sınıf öğrencisinden toplanan verilerin analizinden; lise öğrencilerinin çoğunluğunun cebirsel bilgilerinde kavram ve işlem bilgilerinin yetersiz olduğu görülmüştür. Buradan, lise öğrencilerinin cebirsel bilgilerinin doğasının; kavram ve işlem bilgilerinin dengelendiği kavramsal öğrenmeye değil de, işlemsel bilgilerinin ön planda olduğu matematiksel öğrenmeye dayalı olduğu sonucu çıkarılmıştır. Araştırmaya katılan öğrencilerin; yeni problemleri çözerken, geçmiş tecrübelerindeki problem

çözümlerini, sorgulamadan ve ilişkilendirmeden kullanmaya çalıştıkları; yaklaşık %56'sının işlem yürütme becerilerinin yetersiz olduğu; yaklaşık %75'inin kavramsal bilgi gerektiren soruları ya yanlış yanıtladıkları ya da boş bıraktıkları belirtilmiştir.

Benzer bir araştırma; Soylu ve Aydın (2006) tarafından, öğretmen adayları ile gerçekleştirilmiştir. Matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel bilginin dengelenmesinin önemini araştırmak amacıyla yapılan bu çalışmada; Sınıf Öğretmenliği üçüncü sınıfta öğrenim gören 100 öğrenciye, 10 açık uçlu sorunun yer aldığı bir test uygulanmıştır. Bu 10 sorunun 5'i işlemsel bilgiyi, 5'i de kavramsal bilgiyi ölçmektedir ve kavramsal bilgiyi ölçen bazı soruların çözümü yoktur. Öğrencilerin sorulara vermiş oldukları cevap kağıtları ve öğrencilerle yapılan görüşmeler aracılığıyla toplanan verilerin analizinde ise, yüzde-frekans değerleri kullanılmıştır. Sonuç olarak; öğrencilerin işlemsel bilgiyi gerektiren sorulardaki başarı oranının %73,6 ve kavramsal bilgiyi gerektiren sorulardaki başarı oranının %17 olduğu; kavramsal bilgiyi gerektiren sorulardaki başarı oranının düşük olmasının en önemli sebebinin ise, öğrencilerin problemde verilen kavramlar yerine problemde verilen sayılara dikkat etmeleri olduğu tespit edilmiştir. Kısacası; matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelenmediği, daha çok işlemsel öğrenmenin olduğu, dolayısıyla konuların kavrama düzeyinde öğrenilemediği görülmüştür. Araştırmadan çıkan diğer bir sonuç ise; öğrencilerin problemlerde eksik bilgiyi ya da çözümün olmamasını görememeleri; buna gerekçe olarak ise, derslerde ve ders kitaplarında bu tür problemlerle daha önce karşılaşmamış olmalarını göstermiş olmalarıdır.

Sınıf öğretmeni adaylarının katılımıyla gerçekleştirilen diğer bir araştırma ise, İpek, Işık ve Albayrak (2005) tarafından yürütülmüştür. Öğrencilerin, kesir işlemleri konusundaki kavramsal performanslarını incelemek amacıyla yapılan bu çalışmada; – *kesirlerdeki dört işleme ait kuralların gerekçeleri, ilgili işlemlerin görsel ifadesi ve işlemlere ait problem cümlesi oluşturabilme boyutlarını içeren*– toplam 12 sorudan oluşan, kesir işlemleriyle ilgili kavramsal performans testi, 69 sınıf öğretmenliği üçüncü sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Yüzde/frekans tekniği kullanılarak yapılan verilerin analizi sonucunda; katılımcıların, üç boyutta da kavramsal performanslarının yeterli olmadığı tespit edilmiştir. Sınıf öğretmeni adaylarının, kesirlerle işlemlerin gerekçelerini açıklamadaki başarı oranlarının düşük düzeyde kaldığı; kesirlerle işlemlerin gerekçelerini açıklama konusunda toplama ve çıkarma işlemlerindeki performanslarını, çarpma ve bölme işleminde aynı oranda gösteremedikleri; toplama

işlemiyle ilgili problem kurmada diğer işlemlere oranla daha başarılı oldukları; toplama işleminin şekille gösterimindeki performanslarını çıkarma işlemi için gösteremedikleri, şekille gösterim konusundaki başarılarının çarpma ve bölme işleminde çok daha düşük düzeyde olduğu sonuçlarına ulaşılmıştır. İpek, Işık ve Albayrak (2005), kesir işlemleri ile ilgili yaşanan sıkıntıların; daha ziyade, işlemlerin, kavramsal düzeyde algılanamayışından kaynaklanıyor olabileceğini de ifade etmişlerdir.

Öğretmen adayları ile yapılan bir başka çalışmada ise; matematik öğretmen adaylarının “belirli integral” konusunda kullandıkları çoklu temsiller, bu temsiller ile kavramsal ve işlemsel bilgi düzeyleri arasındaki ilişki araştırılmıştır. Delice ve Sevimli’nin (2010) yürüttüğü ve çalışma grubunu, 45 matematik öğretmenliği ikinci sınıf öğrencisinin oluşturduğu bu özel durum çalışmasında; veriler, klasik yazılı sınav, yarı yapılandırılmış görüşme ve doküman analizi aracılığıyla toplanmıştır. İlk önce, matematik öğretmen adaylarının “belirli integral” konusuna yönelik kavram ve işlem bilgilerinin belirlendiği veri toplama sürecinde; daha sonra, kavram tanım ve işlem bilgilerinin, problem çözme sürecinde kullanılan temsillere etkisi araştırılmıştır. Araştırmadan, öğretmen adaylarının belirli integral problemlerini çözme sürecinde, cebirsel temsillere yöneldikleri; kavram bilgisi açısından başarılı adayların, farklı temsilleri ilişkilendirerek kullanabildikleri; işlem bilgisi açısından başarılı adayların ise, cebirsel temsilleri daha çok kullandıkları yönünde sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının, belirli integral sorularında hesaplamaların/işlemlerin nasıl yapılacağını bilmelerine rağmen; kullanılan temsilden emin olmadıkları da, çıkan sonuçlar arasındadır.

2004, 2005 ve 2006 yıllarına ait Ortaöğretim Kurumları Öğrenci Seçme ve Yerleştirme Sınavı (OKS) matematik sorularının/maddelerinin, ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinde var olması gereken matematiksel yeterliklerden hangilerini ve ne derece ölçtüğünü belirlemek ve sınava katılan öğrencilerin bu maddelerden hangilerinde ne derece başarılı olduklarını tespit etmek amacıyla; Yaşar Er (2008) tarafından bir yüksek lisans tez çalışması yapılmıştır. 8. sınıfın bitiminde öğrencilerde bulunması gereken matematiksel yeterlikler, doküman analizi yoluyla incelenmiş ve bu yeterliklere sahip olan öğrencilerde var olduğu düşünülen davranışlar saptanmaya çalışılmıştır. OKS matematik maddelerini bu davranışlar yardımıyla analiz edebilmek için; matematik maddelerinin adım adım çözüm aşamaları ve davranışlardan, bu aşamalarda kullanılması gerekenler tespit edilmeye çalışılmıştır. Ayrıca hazırlanan bazı maddeler,

iki ilköğretim okulundaki toplam 40 tane 8. sınıf öğrencisine yazılı olarak uygulanarak; öğrencilerin, problemleri çözerken kullandıkları farklı çözüm stratejileri belirlenmiştir. Bir yeterliğin var olduğunu gösteren “+” sembollerinin bulunma yüzdeleri hesaplanarak; her bir sorunun, hangi matematiksel yeterliği yüzde kaç ölçebildiği saptanmıştır. Maddelerin, yeterlikleri ölçme yüzdeleri incelendiğinde; maddelerin işlemsel akıcılık yeterliklerini ölçme yüzdeleri ile uyarlanabilir muhakeme ve stratejik beceri yeterliklerini ölçme yüzdeleri arasında ters ilişki olduğu görülmüştür. Ayrıca maddelerin çoğunun, tüm yeterlikleri değişik yüzdelerde ölçtüğü de tespit edilmiştir. Maddelerin çözümünde öğrenci başarısını saptamak amacıyla; 2004, 2005 ve 2006 yıllarında sınava katılan öğrenciler arasından 30.000 öğrenci rastgele seçilmiş ve bu öğrencilerin matematik testine verdikleri cevap şıkları ile genel sıralamalarının bulunduğu verilere ulaşılmıştır. İstatistiksel analizler sonucunda; ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin, kavramsal anlama, işlemsel akıcılık, uyarlanabilir muhakeme yeterliklerini yüksek ya da düşük yüzde ile ölçen maddelerdeki başarıları konusunda bir istikrar olmadığı gözlenmiştir. Öğrencilerin, 2004 yılında işlemsel akıcılık maddelerinde, stratejik beceri maddelerine göre daha başarılı oldukları; 2005 yılında ise stratejik beceri maddelerinde daha başarılı oldukları görülmüştür. Ayrıca işlemsel akıcılık yeterliğini düşük yüzde ile ölçen maddelerde öğrencilerin daha başarılı oldukları da tespit edilmiştir.

Matematik eğitimi alanında ‘kavramsal ve işlemsel bilgi’ ile ilgili bu araştırmalar toparlanacak olursa; “küçük çocukların problem çözmelerinde işlemsel ve kavramsal değişimler” (Voutsina, 2012), “işlemsel ve kavramsal anlama/bilgi arasındaki ilişki(ler)” (Byrnes ve Wasik, 1991; Canobi, Reeve ve Pattison, 1998; Che Ghazali ve Zakaria, 2011; Rittle-Johnson ve Alibali, 1999), “çocuklar işlemleri yaparkenki kavram-işlem etkileşimi” (Canobi, 2009), “öğretimin, anlama ile hesaplama becerileri arasındaki ilişkiler üzerindeki etkisi” (Hiebert ve Wearne, 1996), “kavramsal ve işlemsel bilgide bireysel farklılıklar” (Hallett, Nunes ve Bryant, 2010), “kavramsal anlama ve işlemsel becerinin gelişimi” (Rittle-Johnson, Siegler ve Alibali, 2001), “kavramsal ve işlemsel bilginin birleştirilmesinde alternatif öğretimsel stratejilerin karşılaştırılması” (Rittle-Johnson ve Koedinger, 2002), “çözüm metotlarını karşılaştırmanın, kavramsal ve işlemsel bilgiyi kolaylaştırıp kolaylaştırmadığı” (Rittle-Johnson ve Star, 2007), “öğrenmede farklı karşılaştırmaların, kavramsal bilgi ve

işlemsel esneklik üzerindeki etkileri” (Rittle-Johnson ve Star, 2009), “önbilgileri farklı olan iki örneklemede; kavramsal bilgi, işlemsel bilgi ve işlemsel esneklik arasındaki ilişkiler” (Schneider, Rittle-Johnson ve Star, 2011), “kavramsal bilginin, işlemlerin kazanımını kolaylaştırıp kolaylaştırmadığı” (Byrnes, 1992), “problem çözmeye kavramsal ve işlemsel yaklaşımlar” (Yusof ve Tall, 1996), “Doğu Asyalı öğretmenlerin matematikteki yeterliliklerinin incelenmesi” (Leung ve Park, 2002), “matematik derslerinde sunulan problemlerin türlerinin karşılaştırılması” (Stigler ve Hiebert, 2004), “işlem-bazlıya karşı kavram-bazlı öğretim ortamlarının, öğrencilerin kavramsal anlamaları ve işlemsel bilgileri üzerindeki etkileri” (Chappell ve Killpatrick, 2003), “öğrencilerin cebirsel bilgilerinin doğasının, kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında değerlendirilmesi” (Baki ve Kartal, 2004), “matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel bilginin dengelenmesinin önemi” (Soylu ve Aydın, 2006), “öğrencilerin, işlemler konusundaki kavramsal performansları” (İpek, Işık ve Albayrak, 2005), “öğrencilerin kullandıkları çoklu temsiller, bu temsiller ile kavramsal ve işlemsel bilgi düzeyleri arasındaki ilişki” (Delice ve Sevimli, 2010), “OKS matematik sorularının, ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinde var olması gereken matematiksel yeterliklerden hangilerini ve ne derece ölçtüğü” (Yaşar Er, 2008) gibi konularda, farklı öğretim kademelerinde birtakım araştırmalar yapılmıştır.

‘Kavramsal ve işlemsel bilgi’ ile ilgili bu araştırmalar arasında, “işlemsel ve kavramsal anlama/bilgi arasındaki ilişki”nin (Byrnes ve Wasik, 1991; Canobi, Reeve ve Pattison, 1998; Che Ghazali ve Zakaria, 2011; Rittle-Johnson ve Alibali, 1999), “öğretimin, öğrencilerin kavramsal anlamaları ve işlemsel bilgileri üzerindeki etkileri”nin (Chappell ve Killpatrick, 2003), “öğretimin, anlama ile hesaplama becerileri arasındaki ilişkiler üzerindeki etkisi”nin (Hiebert ve Wearne, 1996), “kavramsal anlama ve işlemsel becerinin gelişimi”nin (Rittle-Johnson, Siegler ve Alibali, 2001), “kavramsal bilginin, işlemlerin kazanımını kolaylaştırıp kolaylaştırmadığı”nın (Byrnes, 1992), “öğrencilerin, işlemler konusundaki kavramsal performansları”nın (İpek, Işık ve Albayrak, 2005) araştırıldığı çalışmalar olsa da; “öğrencilerin, matematiksel problem çözme sürecinde; problemle ilgili tanım, kavram ve işlemleri nasıl kullandıkları; ‘kavram–işlem kullanımları’nın, ‘kavramlarla ilgili anlayışları’ ve ‘sonuca ulaşmaları’ ile olan ilişkisi”nin incelendiği herhangi bir araştırmayla karşılaşılmamıştır.

2.10. “Problem” Terimi ile Kastedilen Anlam Nedir?

Bu araştırma kapsamında, “problem” terimi; matematiksel bir soru türü anlamında kullanılmıştır. Bu çalışmada yer verilen 14 matematik sorusundan (*“rasyonel sayılar” ile ilgili olan “alıştırma” türündeki iki soru dışındaki*) 12 tanesi, “problem” türünden sorulardır. Araştırmada yer verilecek problemlerin seçiminde dikkate alınan en önemli kriter ise; problemin ifadesinde birtakım matematiksel kavramların yer alması veya problemin çözümünde bazı matematiksel kavramların kullanılacak olmasıdır.

Baki ve Bell (1997), matematiksel soru türlerini; “alıştırma”, “problem”, “araştırma” ve “uygulama” şeklinde sınıflandırmıştır (s. 2.6). Aynı şekilde Baki (2008) de, matematikte; alıştırma, problem, uygulama ve araştırma gibi çeşitli soru türlerinin kullanıldığını belirtmiş (s. 61) ve soruların sınıflandırılmasında yararlanılan kriterlerden bahsetmiştir.

Alıştırma türünden sorularda, “öğrenilen bilgi, beceri, işlem çözüm yolunun doğrudan kullanılması istenir” (Baki, 2008, s. 61). Problem türünden sorularda, yine daha önceden öğrenilmiş bilgilerin kullanılması istense de; bu tür sorularda çözüm yolu açık değildir ve çözüm yolunun bulunması, problemi çözen kişiden istenir (Baki, 2008). Uygulama türünden sorular, “günlük hayattaki uygulamalar ile pratiklerden seçilen farklı çözüm yolları ve sonuçları olan sorulardır” (Baki, 2008, s. 63). Uygulama türünden sorularda, tek bir çözüm olmadığı için, problemi çözen kişiden beklenen şey; bilgi, beceri ve deneyimlerini kullanarak, orijinal çözümler/yaklaşımlar üretmesidir (Baki, 2008). Araştırma türünden sorular ise; çözüm yolu da, ortaya ne çıkacağı da belli olmayan açık uçlu sorulardır ve bu tür sorularda; problemi çözen kişiden, yeni ilişkiler/örüntüler keşfetmesi beklenir (Baki, 2008).

“İlköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, matematiksel problem çözme sürecinde; ‘problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları’, ‘kavram–işlem kullanımları’ ve ‘sonuca ulaşmaları’ arasındaki ilişkileri incelemek” amacıyla yürütülmüş olan bu çalışmada; matematiksel problemler, araç olarak kullanılmış ve katılımcı öğrencilerin matematiksel problemleri çözme süreçleri, araştırmanın genel amacı doğrultusunda incelenmiştir.

III. BÖLÜM

YÖNTEM

Bu bölümde; araştırma modeli, katılımcılar, verileri toplama teknikleri, veri toplama süreci ve verilerin analizi ile ilgili bilgilere yer verilecektir.

3.1. Araştırma Modeli

“İlköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, matematiksel problem çözme sürecinde, kavramlar ile ilgili anlayışlarının ve kavram–işlem kullanımlarının rolünü incelemek” amacıyla yürütülmüş olan bu araştırma; –“*gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma*” (Yıldırım ve Şimşek, 2006, s. 39) olarak tanımlanan– nitel bir araştırmadır. “Nitel araştırma”; araştırmacının, katılımcıların görüşlerine güvendiği; katılımcılara genel sorular sorarak, daha çok, sözcüklerden (veya metinlerden) oluşan veriler topladığı; bu sözcükleri, temalara göre betimlediği ve analiz ettiği; öznel bir tutumla araştırmayı yürüttüğü bir araştırma türüdür (Creswell, 2005).

Gerek bugüne kadar “matematiksel tanımlar/kavramlar” ve “matematikte kavramsal ve işlemsel bilgi” konusunda yapılmış birçok araştırmanın sonuçlarından, gerekse araştırmacının bugüne kadarki tecrübelerinden edindiği bilgilere göre; öğrenciler, birçok matematiksel kavramın yeterince bilincinde değildirler ve kavramın formal tanımını ezbere söyleme, kavramın öğrenildiğinin ve doğru şekilde kullanılabildiğinin kesin bir göstergesi değildir. Bu araştırma sürecinde; “öğrencilerin kavramlar ile ilgili anlayışları ve kavram kullanımları”na dair farkında olunan bu olgu, öğrencilerin matematiksel problemleri çözmeleri esnasında gerçekleştirilecek görüşmelerle daha ayrıntılı bir şekilde inceleneceğinden; araştırma modeli olarak, nitel araştırma desenlerinden biri olan “fenomenoloji” uygun görülmüştür. “Farkında

olduğumuz ancak derinlemesine ve ayrıntılı bir anlayışa sahip olmadığımız olgulara odaklanan” (Yıldırım ve Şimşek, 2006, s. 72) fenomenoloji (olgubilim–*phenomenology*) deseninde; insanların yaşantılarına ve –araştırılan olgu ile ilgili– yaşantıları konusundaki algılarına odaklanılmaktadır (Glesne, 1999).

Katılımcıları, Edirne ve Tekirdağ illerinden seçilmiş, Seviye Belirleme Sınavı’na (SBS) hazırlanan üç ilköğretim 8. sınıf öğrencisi ve Yükseköğretime Geçiş Sınavı (YGS) ile Lisans Yerleştirme Sınavı’na (LYS) hazırlanan üç ortaöğretim 12. sınıf sayısal öğrencisi olan bu araştırmanın verileri; her bir öğrenci ile matematiksel problem çözme ortamlarında, ses kayıt cihazı ile yapılan birebir görüşmeler aracılığıyla toplanmıştır.

Veri analizi sürecinde ise; –gömülü teoride (*grounded theory*) kullanılan teknikler olan– açık kodlama, eksensel kodlama ve seçici kodlama gibi nitel araştırma tekniklerinden faydalanılmıştır. “Yararlanılan veri analizi yaklaşımları” adlı alt bölümde (s. 89); bu kodlama teknikleri ile ilgili bilgiler sunulacak ve verilerin analiz edilme sürecinden bahsedilecektir.

3.2. Katılımcılar

Araştırma; Edirne ve Tekirdağ illerinden seçilmiş, Seviye Belirleme Sınavı’na (SBS) hazırlanan beş ilköğretim 8. sınıf öğrencisi (*ikisi erkek, üçü kız öğrenci*) ve Yükseköğretime Geçiş Sınavı (YGS) ile Lisans Yerleştirme Sınavı’na (LYS) hazırlanan beş ortaöğretim 12. sınıf sayısal öğrencisi (*üçü kız, ikisi erkek öğrenci*) ile yürütülmüştür. Beş ilköğretim 8. sınıf öğrencisinden; üçü asıl katılımcı (*biri erkek, ikisi kız öğrenci*) ve ikisi de yedek katılımcı olarak belirlenmiştir. Benzer şekilde; beş ortaöğretim 12. sınıf sayısal öğrencisinden; üçü asıl katılımcı (*biri kız, ikisi erkek öğrenci*) ve ikisi de yedek katılımcı olarak belirlenmiştir. Ancak veri analizi sırasında; sadece asıl olan katılımcı öğrencilerden elde edilen veriler esas alınmıştır. Bu tez çalışması kapsamında; “asıl katılımcı öğrenci” yerine, kısaca “katılımcı öğrenci” ya da “katılımcı” ifadesi kullanılacak; nadiren de olsa “yedek katılımcılar”dan bahsedilecek olduğunda, mutlaka “yedek” kelimesine de yer verilecektir.

Araştırmaya katılacak bu öğrencilerin seçiminde; “nitel araştırma geleneği içinde ortaya çıkmış” (Yıldırım ve Şimşek, 2006, s. 107) ve “nitel örnekleme için kullanılan araştırma terimi olan” (Creswell, 2005, p. 204) amaçlı örnekleme

yöntemlerinden (*purposeful sampling*) biri olan, “kolay ulaşılabilir durum örnekleme”nden (*convenience sampling*) yararlanılmış ve gönüllülük ilkesi esas alınmıştır.

Araştırmanın amacı dikkate alındığında; katılımcılar sınava hazırlanan öğrenciler olacağından ve öğrencilerle 3-5 haftalık periyotlarla görüşmeler yapılacağından; araştırmacı, birkaç katılımcıyı, araştırma için uygun kriterlere sahip olduğunu düşündüğü, pilot çalışmada katılımcı olan ya da tanıdığı öğrenciler arasından seçmiştir. Diğer katılımcılar ise; pilot çalışmada katılımcı olan öğrencilerin, öğrenci velilerinin veya araştırmacının birkaç öğretmen arkadaşının önerilerinden yola çıkılarak, araştırma için uygun oldukları düşünülen öğrencilerden seçilmiştir.

Katılımcı olarak sınava hazırlanan öğrencileri tercih etme gerekçemiz; öğrencilerin sınava hazırlanma sürecinde daha ciddi çalışmaları nedeniyle, problem çözme sırasındaki kavramlara yönelik farkındalık düzeylerinin daha yüksek olacağı ve dolayısıyla öğrencilerin bilişsel süreçlerini, kavramlara dair anlayışlarını ve kavram–işlem kullanımlarını anlamanın daha kolay olacağı beklentisidir.

3.2.1. Katılımcıların Belirlenme Süreci ve Katılımcıların Belirlenmesinde Dikkate Alınan Kriterler

Araştırmanın amacına uygun katılımcıların belirlenmesi, yaklaşık 2 ay sürmüştür (23 Ekim–29 Aralık 2009). Bu süreçte, araştırma için uygun oldukları düşünülen öğrencilerle öncelikle telefonda veya yüz yüze görüşülmüştür ve katılımcı kriterlerine uygun görülen öğrencilerle tanışma görüşmeleri yapılmıştır.

Bir sene önce yapılan pilot çalışmada katılımcı olan ilköğretim 7. sınıf öğrencilerinden biri (*artık 8. sınıf öğrencisi*), katılımcı kriterlerine uygun görülmüş; ayrıca 4 ilköğretim 8. sınıf öğrencisi daha katılımcı olarak belirlenmiş ve bu 5 öğrenci ile görüşmeler yapılmaya başlanmıştır. Tanışma görüşmeleri ve 1. görüşmeler tamamlandıktan sonra; bu öğrencilerden, kriterlere en uygun olan üçünün asıl, diğer ikisinin ise yedek katılımcı olmasına karar verilmiştir.

Benzer şekilde katılımcı ortaöğretim öğrencilerini belirleme sürecinde de; 7 tane 12. sınıf sayısal öğrencisi ile tanışma görüşmeleri yapılmış ve katılımcı kriterlerine uygun görülen 5 öğrenci ile 1. görüşmeler de yapıldıktan sonra, üçü asıl, diğer ikisi ise yedek katılımcı olarak seçilmiştir. Ancak yaklaşık bir ay sonra (Şubat 2010) asıl

katılımcı olan 12. sınıf öğrencilerinden biri, araştırmaya katılmaktan vazgeçince; o öğrencinin yerine, uygun başka bir öğrenci bulunmuş ve yeni öğrenci ile tanışma görüşmesi ile 1. görüşme tek oturumda yapılmak zorunda kalmıştır (21 Mart 2010).

Veri toplama sürecinde, herhangi bir nedenle, asıl olan katılımcıların sayısında bir azalma olma ihtimali göz önüne alınarak; yedek katılımcılarla da aynı ciddiyetle bütün görüşmeler yapılmıştır. Görüşmelerin öncelikle yedek katılımcılarla yapılmasına, böylece bu görüşmelerin “pilot görüşme” görevi görmesine özen gösterilmiştir. Ancak katılımcı öğrencilerin dersane/etüt/özel ders gün ve saatleri, haftadan haftaya değişebildiğinden dolayı; bazı görüşmeler, yedek katılımcılarla yapılmadan önce asıl katılımcılarla yapılmak zorunda kalmıştır. Veri analizi sırasında; sadece asıl olan katılımcı öğrencilerden elde edilen veriler dikkate alınmıştır.

Katılımcıların seçiminde dikkate alınan kriterler; öğrencinin

- ✓ Matematik başarısının orta/iyi/çok iyi düzeyde olması,
- ✓ Düşüncelerini rahatlıkla ifade edebilmesi,
- ✓ Böyle bir çalışmaya katılması konusunda velisinin izninin olması ve
- ✓ Kendisinin de bu çalışmaya katılmak için gönüllü olmasıdır.

Asıl olan katılımcı öğrencileri belirleme sürecinde; hem ilköğretim hem de ortaöğretimden birer “orta”, birer “iyi”, birer de “çok iyi” düzeyde matematik başarısı gösteren öğrencilerin seçilmesine dikkat edilmiştir. Matematik başarısı konusunda “orta”, “iyi” ve “çok iyi” düzey için kastedilen genel kriterler; ilköğretim öğrencileri için Tablo 3.1’de, ortaöğretim öğrencileri için ise Tablo 3.2’de özetlenmiştir:

Tablo 3.1

*İlköğretim Öğrencilerinin Matematik Başarısı Konusunda “Orta”, “İyi” ve “Çok İyi”
Düzey İçin Dikkate Alınan Genel Kriterler*

Öğretim Düzeyi	Matematik Başarı Düzeyi	6. Sınıf ve 7. Sınıf Matematik Karne Notları Ortalaması	6. Sınıf ve 7. Sınıf SBS Puan Ortalaması	Deneme Sınavlarında Matematikten Yanlış–Boş–Net Sayısı		
				Yanlış Sayısı	Boş Sayısı	Net Sayısı
İLKÖĞRETİM	ORTA	3–5	360–420	3–4	2–4	11–14
	İYİ	4–5	420–480	1–3	1–2	14–18
	ÇOK İYİ	5	480–500	0–1	0–1	18–20

Tablo 3.2

*Ortaöğretim Öğrencilerinin Matematik Başarısı Konusunda “Orta”, “İyi” ve “Çok
İyi” Düzey İçin Dikkate Alınan Genel Kriterler*

Öğretim Düzeyi	Matematik Başarı Düzeyi	Okul Türü	9.–10.–11. Sınıf Matematik Karne Notları Ortalaması	YGS Denemelerinde Matematikten Yanlış–Boş–Net Sayısı		
				Yanlış Sayısı	Boş Sayısı	Net Sayısı
ORTAÖĞRETİM	ORTA	Lise / Anadolu Lisesi	3–4	2–8	2–5	25–30
	İYİ	Lise / Anadolu Lisesi	4–5	1–3	1–3	30–35
		Fen Lisesi	3–4			
	ÇOK İYİ	Fen Lisesi	4–5	0–3	0–1	35–40

Çalışmanın etik olması açısından; araştırmanın hiçbir aşamasında, katılımcı öğrencilerin gerçek isimleri kullanılmamıştır. Tanışma görüşmelerinde, her öğrenci için

bir takma isim belirlenmiş ve yapılan bütün görüşmelerde, öğrenciye o takma isimle hitap edilmiştir. Bulguların yazım aşamasında ise; katılımcı öğrenciler numaralandırılmış ve tezin sonuna kadar bu numaralar kullanılmıştır.

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinden, matematik başarı düzeyi “orta” olan öğrenci, “1. öğrenci”; “iyi” olan öğrenci, “2. öğrenci” ve “çok iyi” olan öğrenci de “3. öğrenci” olarak numaralandırılmıştır. Benzer olarak; katılımcı ortaöğretim öğrencilerinden, matematik başarı düzeyi “orta” olan öğrenci, “4. öğrenci”; “iyi” olan öğrenci, “5. öğrenci” ve “çok iyi” olan öğrenci de “6. öğrenci” şeklinde numaralandırılmıştır.

3.3. Veri Toplama Teknikleri

Bu araştırma kapsamında veriler; katılımcı öğrenciler ile, yarı-yapılandırılmış (*semi-structured*) görüşme yöntemi kullanılarak, ses kayıt cihazı ile yapılan birebir görüşmeler aracılığıyla toplanmıştır. Dolayısıyla araştırmada temel veri toplama aracı olarak; 2008, 2009 yıllarında yapılmış SBS (Seviye Belirleme Sınavı) ve ÖSS (Öğrenci Seçme Sınavı) matematik soruları ile hazırlanmış olan “görüşme soruları formları” kullanılmıştır. Ayrıca, öğrencilerin görüşme sırasında problemleri çözerken kullandıkları kağıtlar (problem kağıtları) da, yardımcı veri toplama aracı görevi görmüştür.

Görüşmelerde kullanılacak matematiksel problemlerin, SBS ve ÖSS matematik soruları arasından seçilme nedeni; bu soruların, geçerlik ve güvenilirlik çalışmalarının yapılmış olmasıdır. Kullanılacak matematik sorularının daha güncel olması amacıyla; soru seçimi, son iki yılın (yani 2008 ve 2009 yılları) sınav soruları arasından yapılmıştır.

2008 ve 2009 yıllarına ait SBS/ÖSS soruları arasından, tezde kullanılmak istenen soruların orijinallerinin tezde basılması konusunda izin almak amacıyla; hem “M.E.B. Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü”ne hem de “Ölçme, Seçme ve Yerleştirme Merkezi Başkanlığı”na izin dilekçesi yazılmıştır. “M.E.B. Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü”nden, izin talebinin kabulüne dair olumlu cevap alınmıştır (EK-1). ÖSYM’den, 02.06.2011 tarih ve 11-0136502 evrak no’lu dilekçeye bir cevap alınamayınca; 21.03.2012 tarihinde, durumu hatırlatmak amacıyla ikinci bir dilekçe (Evrak No: 12-0028686) yazılmış, fakat yine bir cevap alınamamıştır.

Bu araştırmada, öğrencilerin problem çözme esnasındaki bilişsel süreçleri, kavram tanımlarını açıklama ve problem çözerken kavramları-işlemleri kullanma becerileri konusunda bilgi toplamak amaçlandığından; görüşmelerde sesli düşünme tekniğinden yararlanılmıştır. Literatürde adı, “sesli düşünme protokol yaklaşımı” (*think-aloud protocol approach*) olarak da geçen bu teknikte amaç; resim çizme ya da problem çözme gibi bir görevi yerine getirme sürecinde bireyin kafasından geçen düşünceleri ve bilişsel süreçleri ortaya çıkarmaktır. Bu tekniğin kullanımı esnasında; birey bir etkinlik ile meşgul iken, görüşmeyi yapan kişi, bireye sorular sorar ve bireyden, görevi yerine getirirken neler düşündüğü konusunda bilgi almaya çalışır (Patton, 2002).

3.3.1. Görüşme Soruları Formlarının Hazırlanma Süreci

Bu alt bölümde; araştırmanın temel veri toplama aracı olan “görüşme soruları formları”nın hazırlanma aşamalarına yer verilecektir.

3.3.1.1. Matematik alt öğrenme alanlarının belirlenmesi. Veri toplama sürecinde, öğrencilerle yapılacak görüşmelerde irdelenecek matematiksel kavramların, hangi matematik alt öğrenme alanları ile ilgili olacağını belirlemek amacıyla; öncelikle Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı’na ait <http://ttkb.meb.gov.tr/> adresinden ulaşılabilen “İlköğretim Matematik Dersi (6-8. Sınıflar) Öğretim Programı (2009 yılı)”, “Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı (2005 yılı)” dosyaları indirilmiştir (12 Kasım 2009). Bu dosyalarda yer alan ilköğretim/ortaöğretim matematik dersi öğretim programları; 6. sınıftan 12. sınıfa kadar her sınıf için, “Öğrenme Alanları”, “Alt Öğrenme Alanları” dikkate alınarak incelenmiştir.

T.C. M.E.B.-Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü¹’ne ait <http://egitek.meb.gov.tr/Sinavlar/index.asp> adresinden; “2008 yılı 6. sınıf ve 7. sınıf Seviye Belirleme Sınavı (SBS) soruları” (12 Mayıs 2009) ile “2009 yılı Ortaöğretime Geçiş Sistemi 6. sınıf, 7. sınıf ve 8. sınıf Seviye Belirleme Sınavı (SBS) soruları”na ulaşılmıştır (12 Kasım 2009). Yükseköğretim Kurulu Öğrenci Seçme ve Yerleştirme Merkezi²’ne (ÖSYM) ait <http://www.osym.gov.tr/> adresinden de; “2008 yılı Öğrenci

¹ 2012’deki adı, “Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü” şeklinde geçmektedir.

² 2012’deki adı, “T.C. Ölçme, Seçme ve Yerleştirme Merkezi” şeklinde geçmektedir.

Seçme Sınavı (ÖSS) Matematik–1 testi ve Matematik–2 testi” (12 Mayıs 2009) ile “2009 yılı Öğrenci Seçme Sınavı (ÖSS) Matematik–1 testi ve Matematik–2 testi” soruları indirilmiştir (12 Kasım 2009).

2008 ve 2009 yıllarında yapılmış SBS ve ÖSS matematik soruları teker teker incelenerek; o sorunun, kaçınıcı sınıfın hangi öğrenme ve alt öğrenme alanlarına denk geldiğı tespit edilmeye çalışılmıştır. Denk geldiğı alt öğrenme alanının karşısına, sorulduğı yılın altına; o sorunun, soru kitapçığındaki numarası yazılmıştır. Birden fazla alt öğrenme alanı ile ilişkili görülen bazı sorularda ise; sorunun numarası, daha yakından ilgili olduğı alt öğrenme alanının karşısına yazılsa da, ilgili olduğı diğerk alt öğrenme alanı da açıklama notu düşölerek belirtilmiştir. Yapılan bu işlemin net bir şekilde anlaşılabilmesi amacıyla; 6. sınıf için hazırlanmış olan tablo, “Ekler” bölümünde örnek olarak verilmiştir (Tablo EK-2).

Her alt öğrenme alanının karşısında bulunan soru numaraları sayılarak, her alt öğrenme alanından 2008 ve 2009 SBS/ÖSS’de kaçartane soru ve iki yılda toplam kaç soru sorulduğı tespit edilmiş ve tablolaştırılmıştır. Yine örnek olması açısından; 2008 ve 2009 SBS için hazırlanmış olan tablo, eklerde verilmiştir (Tablo EK-3).

Öğrenme alanı–Alt öğrenme alanı–Soru sayısı ilişkisini gösteren Tablo EK-3 ile aşğıdaki kriterlerden bir ya da birkaçı dikkate alınarak; öğrencilerle yapılacak görüşmelerde irdelenecek matematiksel kavramların, hangi matematik alt öğrenme alanları ile ilgili olacağına karar verilmiştir (11 Ocak 2010). Matematik alt öğrenme alanları seçilirken dikkate alınan kriterler, aşğıdaki şekilde sıralanabilir:

- ✓ Konunun hem ilköğretim hem de ortaöğretim matematik/geometri öğretim programlarında yer alması. (“Fonksiyon”, “limit” ve “doğrunun analitik incelenmesi” gibi sadece ortaöğretim öğretim programında bulunan birkaç matematik konusu da seçilmiştir.)
- ✓ Mümkün olduğunca her öğrenme alanından en az bir alt öğrenme alanına yer verilmiş olması.
- ✓ Pilot çalışma sürecinde, öğrencilerin o matematik konusunda sorunlar yaşadıklarının tespit edilmiş olması.
- ✓ 2008 veya 2009 SBS/ÖSS’de o matematik alt öğrenme alanından soruların bulunması.

Öğrencilerle yapılacak görüşmelerde irdelenecek matematiksel kavramların ilgili olduğı matematik alt öğrenme alanları ve bu alt öğrenme alanlarının seçilme nedenleri, Tablo EK-4’de özetlenmiştir.

3.3.1.2. Görüşmelerde kullanılacak matematik sorularının belirlenmesi.

Matematik alt öğrenme alanları belirlendikten sonra; 2008 ve 2009 yıllarında sorulmuş SBS ve ÖSS matematik sorularından, belirlenen alt öğrenme alanları ile ilgili olanlar seçilmiştir. Seçilen bu soruların herbiri, ayrıntılı bir şekilde çözülmüş ve her bir soru için, soruda geçen veya çözümde kullanılması gereken kavramlar, araştırmacı tarafından belirlenmeye çalışılmıştır.

Seçilen sorulardan oluşan soru dosyaları incelenip, Tablo EK-4’de yer alan her alt öğrenme alanından birer SBS/ÖSS matematik sorusu seçilerek; “1. Görüşme Soruları Formu” hazırlanmıştır. Bu formda; 7’si ilköğretim, 9’u ortaöğretim olmak üzere toplam 16 soru bulunmaktadır.

Benzer şekilde; soru dosyaları tekrar incelenip, diğer görüşmelerde sorulması düşünülen matematik soruları bir araya getirilerek; “Diğer Görüşme Soruları Formu” hazırlanmıştır. Bu formda; 23’ü ilköğretim, 35’i ortaöğretim olmak üzere toplam 58 soru yer almaktadır. “Diğer Görüşme Soruları Formu”nda; 2. ve 4. görüşmelerde sorulması düşünülen problemlerin yanı sıra, gerekli görülürse yapılması planlanan ek görüşme(ler)de sorulabilecek yedek problemlere de yer verilmiştir.

3.3.1.3. İlk uzman görüşlerinin alınması. Araştırmada, “ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, matematiksel problem çözme sürecinde, kavramlar ile ilgili anlayışlarını ve kavram–işlem kullanımlarını ortaya çıkarmak” amaçlandığından; görüşmeler sırasında öğrencilere, soruda geçen veya çözümde kullanılması gereken kavramların tanımlarına dair soru sorulacaktır. Ayrıca kavram–işlemi, problem çözümünde nasıl kullandığı; ne amaçla, hangi anlamda kullandığı da ortaya çıkarılmaya çalışılacaktır. Bu nedenle; her bir soru için, “soruda geçen veya çözümde kullanılması gerekli görülen kavramlar”ın ve “bu kavramların; çözümde nasıl, ne amaçla, hangi anlamda kullanılması gerektiği”nin belirlenmesi gerekli görülmüştür.

Görüşmelerde kullanılması planlanan sorular belirlendikten sonra, –araştırmacı ve tez danışmanı dışında– 6 uzmanın görüşlerine başvurulmuştur. İlk önce, hazırlanan “1. Görüşme Soruları Formu”, uzmanların görüşlerine sunulmuş; arkasından da “Diğer Görüşme Soruları Formu”nda yer alan matematik soruları için, uzmanların görüşleri alınmıştır.

Her uzmandan; her bir soru için, soruda geçen veya çözümde kullanılması gereken kavramları düşünerek, öğrencilerle görüşmeler esnasında kavram/tanım sorgulamasının gerekli olduğunu düşündükleri kavramları belirtmesi ve her bir kavram için, “bu kavramın; çözümde nasıl, ne amaçla, hangi anlamda kullanılması gerektiği”ne dair açıklama yapması istenmiştir. Her bir uzmana, uzman görüşü için ne yapması gerektiğine dair –hem sözel hem de yazılı olarak– ayrıntılı açıklama yapılmıştır. Ayrıca örnek olması amacıyla; bir ilköğretim, bir de ortaöğretim sorusu için “kavram” örnekleri verilmiş ve “kavramın; problem çözümünde nasıl, ne amaçla, hangi anlamda kullanılması gerektiği”ne dair açıklama yazılmıştır. Formu kağıt üzerinde ya da bilgisayarda doldurma, uzmanların tercihlerine bırakılmıştır.

Öğrencilerle gerçekleştirilecek görüşmelerde kullanılacak sorular, SBS ve ÖSS matematik soruları arasından seçildiği için; görüşlerine başvurulacak uzmanların; dersane, devlet okulu veya özel okulda görev yapmış/yapmakta olan matematik öğretmenleri olması uygun görülmüştür. Görüşleri alınan uzmanların, mezun oldukları lisans/yüksek lisans/doktora programları ve mesleki tecrübeleri ile ilgili bilgiler, Tablo EK-5’de özetlenmiştir.

“1. görüşme soruları formu”, araştırmanın amacına yönelik ilk veri toplama aracı olduğundan dolayı; formda yer alan 7 ilköğretim sorusu için tüm uzmanların görüşleri alınırken, 9 ortaöğretim sorusu için İlköğretim Matematik Öğretmenliği mezunu uzman dışındaki diğer 5 uzmanın görüşlerine başvurulmuştur. 11 Şubat–17 Şubat 2010 tarihleri arasında uzmanlara gönderilen formlar, uzmanlar tarafından doldurulmuş ve yaklaşık 3 hafta içinde araştırmacıya ulaştırılmıştır (11 Şubat–4 Mart 2010).

“Diğer görüşmeler için uzman görüşü formu”ndaki ilköğretim soruları için 3 uzmandan, ortaöğretim soruları için yine 3 uzmandan, ilköğretim ve ortaöğretim geometri soruları için ayrıca 1 uzmandan görüş alınmıştır. 26 Şubat–1 Mart 2010 tarihleri arasında uzmanlara gönderilen bu formdaki soru sayısı daha fazla olduğu için; formu doldurmaları için uzmanlara daha fazla süre verilmiştir. Formlar, uzmanlar tarafından doldurulmuş ve 5 Mart–10 Nisan 2010 tarihleri arasında araştırmacıya ulaştırılmıştır.

3.3.1.4. Görüşme sorularında irdelenecek kavramların belirlenmesi. “Diğer Görüşme Soruları Formu”nda yer alan soruların; 2. görüşme, 4. görüşme ve olası yedek

görüşme için dağılımları yapılırken (Mart 2010); mümkün olduğunca, belirlenen her matematik alt öğrenme alanından soruya yer verilmiş olmasına dikkat edilmiştir.

Her bir görüşme için “ilköğretim ve ortaöğretim görüşme soruları formları” hazırlandıktan sonra; uzman görüşleri, soru bazında analiz edilmiştir. Analiz sırasında; her uzmanın, irdelenmesini önerdiği her kavram dikkate alınmıştır. Uzmanlardan gelen kavram önerilerinden aynı/yakın anlamda olanlar bir araya getirilerek; her bir soru için değerlendirme tablosu oluşturulmuştur.

Uzman görüşleri de dikkate alınarak; “görüşmeler esnasında, tanımının sorulması öngörülen kavramlar” ile “tanımını sormanın mümkün veya gerekli olmadığı, ancak problemin çözümünde kullanılması gereken kavramlar” birbirinden ayrılmaya çalışılmıştır. Böylece her bir görüşme için, görüşme sırasında araştırmacıya rehber olacak “kavram listeleri” hazırlanmıştır. Ayrıca her soru için kavramlar tablolaştırılarak; araştırmacıya, bir sonraki görüşmede irdelenmesi gereken/gerekmeyen kavramlar konusunda ve veri analizi sırasında yardımcı olabilecek “kavram kontrol listeleri” oluşturulmuştur.

3.4. Veri Toplama Süreci

Bu alt bölümde; araştırma öncesinde yapılan pilot çalışmalardan, veri toplama sürecinde katılımcı öğrencilerle gerçekleştirilen görüşmelerden ve ikinci uzman görüşlerinden bahsedilecektir.

3.4.1. Pilot Çalışmaların Yapılması ve Araştırma Probleminin Belirlenmesi

Öncelikle araştırma problemini belirleyebilmek amacıyla, literatür taraması yapılmıştır. Literatür taraması sürecinde; “Advanced Mathematical Thinking” adlı kitapta, Vinner (1991) tarafından yazılmış “The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics” (*“Matematik Öğretiminde ve Öğreniminde Tanımların Rolü”*) isimli makaleden de esinlenilerek, “matematiksel tanımlar” ile ilgili bir araştırma yapılabileceğine karar verilmiştir.

Bir ilköğretim 6. sınıf ve bir ortaöğretim 12. sınıf sayısal öğrencisi ile, “matematiksel tanımlar” konusunda “*Sence hangi tür tanımlar daha anlaşılır oluyor?*,”

Tanımları ne zaman daha iyi anlıyorsun?, Herhangi bir matematiksel tanımı anladığını, özümlediğini nasıl anlıyorsun?” gibi genel sorulardan oluşan pilot çalışma niteliğinde bir görüşme yapılmıştır. Ayrıca bu görüşmede; öğrencilerin tanımları, problem çözümlerinde nasıl kullandıkları konusunda bilgi edinebilmek amacıyla; öğrenciden, defterinden çözebildiği bir problemi seçmesi ve problem çözümünde takip ettiği adımları ayrıntılı bir şekilde anlatması istenmiştir (Kasım 2008). Bu görüşmeler ışığında; araştırma konusu özelleştirilerek, “öğrencilerin matematiksel problem çözme sürecinde tanım/kavram kullanımları”nın incelenmesine karar kılınmıştır.

Araştırma konusuna genel olarak karar verildikten sonra; ilk görüşmenin yapıldığı iki katılımcı öğrenciye ek olarak, dördü 6. sınıf ve birisi 7. sınıf öğrencisi olmak üzere beş öğrenci daha belirlenmiş ve öğrencilerin araştırmaya katılmaları konusunda velilerinden izin alınmıştır. Katılımcı öğrencileri tanımak ve matematik hakkındaki düşüncelerini, matematik dersine nasıl çalıştıklarını öğrenmek amacıyla; 7 öğrenci ile birebir 1. pilot görüşmeler yapılmıştır (Şubat–Mart 2009). Yine bu görüşmede de öğrencilerden, defterlerinden çözebildikleri birkaç problemi seçmeleri ve problem çözümünde takip ettikleri adımları ayrıntılı bir şekilde anlatmaları istenmiştir.

2008 yılında yapılmış “6. Sınıf Seviye Belirleme Sınavı” ve “7. Sınıf Seviye Belirleme Sınavı” soruları arasından altışar, 2008 yılında yapılmış “Öğrenci Seçme Sınavı” sorularından da sekiz soru seçilerek; 2. pilot görüşme için “görüşme soruları formları” hazırlanmıştır. 2. pilot görüşmede de öğrencilerden, takip ettikleri adımları gerekçeleriyle ayrıntılı bir şekilde açıklayarak, problemleri çözmeleri istenmiştir (ilköğretim öğrencileri ile görüşme tarihi: Haziran 2009; ortaöğretim öğrencisi ile görüşme tarihi: Eylül 2009).

Pilot görüşmelerin ışığı altında; *–veri toplama ve analiz sürecinde daha özelleşecek de olsa–* genel olarak, “öğrencilerin matematiksel problem çözme sürecinde tanım/kavram kullanımları”nın araştırılmasına; katılımcı öğrencilerin, sınava hazırlanan ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri olmasına; görüşme sorularının, SBS ve ÖSS soruları arasından seçilmesine karar verilmiştir. Pilot görüşmelerden elde edilen veriler; öğrenci görüşmelerinde irdelenecek matematiksel kavramların, hangi matematik alt öğrenme alanları ile ilgili olacağını belirleme sürecinde de rehber olmuştur.

3.4.2. Katılımcı Öğrencilerle Görüşmelerin Yapılması

Araştırma problemini, katılımcı grubunu ve veri toplama araçlarını belirleme sürecinde rehberlik eden pilot çalışmaların ardından; şimdi de, asıl araştırmanın veri toplama sürecinden bahsedilecektir.

3.4.2.1. Tanışma görüşmelerinin yapılması. Katılımcı öğrenciler belirlendikten ve velilerinden –*telefonla, yüz yüze görüşerek veya katılımcı öğrenci aracılığıyla*– izin alındıktan sonra; öğrencilerle ilk olarak tanışma görüşmeleri yapılmıştır (11 Kasım–21 Aralık 2009).

Görüşmeye başlamadan önce; her öğrenci, bu araştırma hakkında kısaca bilgilendirilmiştir. Bu araştırmada genel olarak, öğrencilerin problemleri çözerken nasıl düşündüklerinin inceleneceği söylenmiş; bu nedenle problem çözümü esnasında yüksek sesle düşünmesinin ve takip ettiği adımları olabildiğince ayrıntılı bir şekilde anlatmasının istendiği vurgulanmıştır. Ayrıca problemleri çözerken herhangi bir süre sınırlamasının olmadığı; bu araştırmanın hiçbir yerinde öğrencinin gerçek isminin geçmeyeceği; öğrenci için bir takma isim belirleyecekleri ve bütün görüşmelerde, öğrenciye o takma isimle hitap edileceği özellikle belirtilmiştir.

Görüşmenin en başında; öğrenciden, bu ve bundan sonra yapılacak olan bütün görüşmelerde sesini kaydedebilmek için izin istenmiştir. Katılımcıları tanımaya ve matematik hakkındaki düşüncelerini, matematik dersine nasıl çalıştıklarını öğrenmeye yönelik soruların ardından; defteri yanında olan öğrencilerden, defterlerinden çözebildikleri birkaç problemi seçmeleri ve problem çözümünde takip ettikleri adımları ayrıntılı bir şekilde anlatmaları istenmiştir. Kısacası; tanışma görüşmelerinde; öğrenciyi biraz tanımaya, öğrencinin matematik seviyesi ve düşüncelerini ifade edebilme yeterliliği konusunda bir fikir edinilmeye çalışılmıştır.

3.4.2.2. Asıl görüşmelerin yapılması. Tanışma ve tamamlayıcı görüşmeler dışında, katılımcı öğrencilerin her biri ile dört görüşme yapılmıştır. Bu görüşmelerden üçü (1., 2. ve 4. görüşmeler) asıl görüşmeler olup, araştırma amacına uygun verileri toplamak için gerçekleştirilmiştir.

Katılımcı öğrencilere, görüşme sorularının SBS/ÖSS matematik soruları olduğu bilgisi verilmemiş ve bunu fark etmelerini engellemek amacıyla; aralarına birkaç tane farklı soru da katılmıştır. SBS/ÖSS sorusu dışındaki sorular; “Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)”e ait web sayfası olan <http://timssandpirls.bc.edu/TIMSS2007/items.html> adresinden ulaşılan sorular ile Özel Dershaneler Birliği Derneği (ÖZ-DE-BİR)’nin web sayfası olan <http://www.ozdebir.org.tr/> adresinden indirilen “YGS deneme (21 Şubat 2010)” sınavında yer alan sorular arasından alınmıştır. TIMSS 2007 8. sınıf matematik soruları arasından seçilen sorular, Türkçe ifade edilerek kullanılmıştır.

Uzman görüşleri alındıktan ve –görüşmelerde kullanılacak matematik problemlerinden oluşan– “görüşme soruları formları” hazırlandıktan sonra; öğrencilerle (asıl) görüşmelere başlanmıştır. Üç asıl görüşmenin (1., 2. ve 4. görüşmeler) her birinde; ilköğretim öğrencileri için 7–8 soruya yer verilmiştir. İlköğretim öğrencileri ile, 10 Mart–24 Mart 2010 tarihleri arasında gerçekleştirilen 1. görüşmelerde, 7 soru üzerinde konuşulmuştur (EK-6) ve 1. görüşmeler 41–56 dakika arasında sürmüştür. 13 Nisan–22 Nisan 2010 tarihleri arasında yapılan 2. görüşmelerde, öğrencilere yine 7 soru sorulmuş (EK-7); bu seferki görüşmelerin süresi ise, 22–49 dakika arasında değişmiştir. 4. görüşmeler ise; 26 Mayıs–2 Haziran 2010 tarihleri arasında gerçekleştirilmiş ve 8 soruluk bu görüşme de (EK-8), yaklaşık 32–54 dakika sürmüştür.

Ortaöğretim öğrencileri için ise, üç asıl görüşmenin (1., 2. ve 4. görüşmeler) her birinde 9–10 soruya yer verilmiştir. Ortaöğretim öğrencileri ile, 16 Mart–23 Mart 2010 tarihleri arasında gerçekleştirilen 1. görüşmelerde, 9 soru üzerinde konuşulmuştur (EK-9) ve 1. görüşmeler 36–70 dakika arasında sürmüştür. 15 Nisan–20 Nisan 2010 tarihleri arasında yapılan 2. görüşmelerde, öğrencilere 10 soru sorulmuş (EK-10); bu seferki görüşmelerin süresi ise, 23–48 dakika arasında değişmiştir. 4. görüşmeler ise; 29 Mayıs–5 Haziran 2010 tarihleri arasında gerçekleştirilmiş ve 10 soruluk bu görüşme de (EK-11), yaklaşık 26–49 dakika sürmüştür.

Görüşmelerde öğrencilerden, problem ifadesini ve çözüm sırasında takip ettikleri adımları, gerekçeleriyle birlikte ayrıntılı bir şekilde açıklayarak problemleri çözmeleri istenmiştir. Öğrenci, problemi çözmeye çalışırken, belli bir süre sessizlik olduğunda; araştırmacı sorular sorarak, öğrenciden, o an neler düşündüğüne dair bilgi almaya çalışmıştır.

Araştırmacı, görüşmelerde “görüşmeler esnasında, tanımının sorulması öngörülen kavramlar” ile “tanımını sormanın mümkün veya gerekli olmadığı, ancak

problemin çözümünde kullanılması gereken kavramlar”ın yer aldığı “kavram listeleri”nden yararlanmıştır. “Kavram listeleri”nde belirtilmiş olan “tanımının sorulması öngörülen kavramlar”a dair öğrencilerin kişisel (informal) tanımlarını öğrenmeye yönelik sorular sormuştur.

Araştırmacı, 2. görüşmeleri yapmadan önce her katılımcı öğrencinin 1. görüşmesinin ses kaydını, 4. görüşmeden önce ise 2. görüşmesinin ses kaydını dinleyerek; her soru için öğrencinin doğru tanımlayabildiği / eksik tanımladığı veya tanımlayamadığı kavramları belirlemiş ve “kavram kontrol listeleri”ni kağıt üzerinde doldurmuştur. Böylece bir sonraki görüşmede irdelenmesi gereken/gerekmeyen kavramları tespit ederek; aynı kavram tanımının tekrar tekrar sorulmasını engellemeye çalışmıştır. Katılımcının söylediklerinin açık olmadığı, anlaşılmadığı zamanlarda veya görüşlerini teyit etmek amacıyla; bir sonraki görüşmede ek sorular sorulduğu da olmuştur.

3.4.2.3. Üçüncü görüşmenin yapılması. 3. görüşme, öğrencilerin araştırma problemini ve görüşmelerdeki matematiksel problemlerin SBS/ÖSS sorusu olduğunu tam olarak anlamalarını engellemek amacıyla yapılmıştır. Odaklanılan noktayı geçici süreliğine başka bir yere çekmek amacıyla gerçekleştirilen bu görüşme sayesinde; öğrencilerin sonraki görüşme(ler)de, görüşme sorularının SBS/ÖSS matematik sorusu olup olmadığına değil de, problem çözme sürecine daha iyi odaklanmaları hedeflenmiştir.

27 Nisan–3 Mayıs 2010 tarihleri arasında yapılan 3. görüşme için, Özel Dershaneler Birliği Derneği’nin (ÖZ-DE-BİR) web sayfası olan <http://www.ozdebir.org.tr/> adresinden indirilen “8. sınıf için SBS II. deneme (14 Mart 2010)” ile “YGS deneme (21 Şubat 2010)” sınavlarında yer alan bazı sorular seçilmiştir. Bu görüşmede öğrenciden; problemleri çözmesi değil de, “soru kağıdına baktığında; problemleri çözmeye başlamadaki öncelik/tercih sırasını, gerekçeleriyle birlikte açıklaması” istenmiştir. Ayrıca “sınava hazırlanma sürecinde, bir gününü nasıl geçirdiğini ayrıntılı bir şekilde anlatması”; “matematiğin, bu süreçteki yerinden ve deneme sınavlarının sonuçlarına göre, matematik alanındaki yaklaşık net (*doğru–yanlış–boş*) sayılarından bahsetmesi” rica edilmiştir. Böylece katılımcı öğrencilerin sınava hazırlık süreci ve bu süreçte matematikteki başarı durumu hakkında da genel olarak bilgi edinilmiştir.

3.4.2.4. Tamamlayıcı görüşmelerin yapılması. Katılımcı öğrencilerle (*üç ilköğretim ve üç ortaöğretim öğrencisi*) yapılan görüşmeler tamamlandıktan sonra; katılımcıların asıl görüşmelerinin (1., 2. ve 4. görüşmeler) ses kayıtları, araştırmacı tarafından tekrar dinlenmiştir. Araştırmacı, her bir öğrenci için, bu üç görüşmesinin ses kayıtlarını sırasıyla dinleyerek; katılımcının söylediklerinin açık olmadığı, anlaşılmadığı yerleri tespit etmeye çalışmıştır. Ayrıca araştırmacı, bu ses kayıtlarını dinlerken; “Burada öğrenciye keşke şunu da sorsaydım!” diye düşündüğü soruları da not almıştır. Araştırmacı, katılımcının söylediklerinin açık olmadığı, anlaşılmadığı noktalara ve “o an keşke şunu da sorsaydım!” dediği sorulara odaklanarak; her bir katılımcı öğrenciye özel, tamamlayıcı görüşme soruları hazırlamıştır. Tamamlayıcı görüşme sorularının sayısı, öğrenciden öğrenciye değişmekle birlikte; soruların birçoğu “Neden?” sorusunu içermektedir.

17 Eylül–31 Ekim 2010 tarihleri arasında gerçekleştirilen tamamlayıcı görüşmelerin süresi, 15–50 dakika arasında değişmiştir. 4. görüşmeler ile tamamlayıcı görüşmeler arasında üç buçuk ay kadar bir süre olmasının sebebi; SBS ve LYS sınavları bittiği ve okul ders yılı sona erdiği için, birçok katılımcı öğrencinin tatile çıkması ve tatil zamanlarının/sürelerinin farklı olmasıdır.

3.4.3. İkinci Uzman Görüşlerinin Alınması

Görüşmelerde kullanılacak soruların her biri için, soruda geçen veya çözümde kullanılması gereken kavramları belirleme konusunda; araştırmacı ve tez danışmanı dışında 6 matematik öğretmeninden öneriler alınmış ve matematik öğretmenlerinden gelen bu kavram önerileri de dikkate alınarak öğrenci görüşmeleri yapılmıştır. Veri analizi öncesinde ise; matematik öğretmenlerinden gelen bu kavram önerilerinden, *–o soru bağlamındaki kullanımı düşünüldüğünde, sorunun yapısında var olan–* matematiksel kavram/işlem/özellik/bağıntı/kural vs. lerin belirlenmesi ve sınıflandırılması konusunda ve kavram önerileri arasından, veri analizi sırasında değerlendirmeye alınacak (matematiksel) kavramların tespit edilmesi noktasında tekrar uzman görüşlerine ihtiyaç duyulmuştur. Bu amaçla; “İlköğretim Fen ve Matematik Eğitimi” bölümünün “İlköğretim Matematik Eğitimi” alanında ya da “Ortaöğretim Fen

ve Matematik Alanları Eğitimi” bölümünün “Matematik Eğitimi” alanında doktora/lisans sonrası doktora yapmış/yapmakta olan 14 uzmandan görüş alınmıştır.

Uzmanlardan; matematik öğretmenlerinin önerdiği her bir kavram için, “(matematiksel) kavram” olduğuna dair katılma düzeyini; “Tamamen katılıyorum (5)”, “Çok katılıyorum (4)”, “Orta derecede katılıyorum (3)”, “Az katılıyorum (2)” ve “Hiç katılmıyorum (1)” şeklinde derecelendirilmiş beşli Likert tipi ölçek üzerinde işaretlemeleri istenmiştir. Ayrıca kavramlar hakkında belirtmek istedikleri düşünceleri veya soru için “listede olmayan kavram önerileri” olursa; bunları, tabloda bırakılan boş satırlara yazmaları rica edilmiştir. Her bir uzmana, uzman görüşü için ne yapmaları gerektiğine dair –yazılı olarak veya hem sözel hem de yazılı olarak– ayrıntılı açıklama yapılmıştır. Uzmanlara gönderilen formda toplam 48 soru bulunduğu için; uzmanlara, “formu doldurmaları için yaklaşık 3 hafta kadar sürelerinin olduğu” belirtilmiştir.

Görüşlerine başvurulacak uzmanların seçiminde, aşağıdaki kriterler dikkate alınmıştır:

- ✓ “İlköğretim Matematik Eğitimi” ya da “Matematik Eğitimi” alanında doktora/lisans sonrası doktora programına kayıtlı olmak/mezun olmak
- ✓ Üniversitede akademik personel olmak (*Uzmanlardan biri, yüksek lisans yaptığı süreçte, üniversitede araştırma görevlisi olarak çalışmıştır. Doktora eğitimi sürecinde ise; dershanede matematik öğretmeni olarak çalışmakta; aynı zamanda da, lise öğrencileri ve üniversite sınavına hazırlanan öğrenciler için kitap yazarlığı, lise öğrencileri ve üniversite sınavına hazırlanan öğrenciler için kitaplar çıkaran bir yayınevinde yayın editörlüğü ve yönetmenliği yapmaktadır.*)
- ✓ Uzman görüşü bildirme konusunda gönüllü olmak.

29 Eylül–4 Ekim 2010 tarihleri arasında 11 uzmana gönderilen formlar; uzmanlar tarafından doldurularak, 1 Ekim–27 Kasım 2010 tarihleri arasında araştırmacıya ulaştırılmıştır. 11 uzmandan 2’si, sadece “ilköğretim görüşme soruları” için görüş belirtirken; diğer 9 uzman, hem “ilköğretim görüşme soruları” hem de “ortaöğretim görüşme soruları” hakkında görüş bildirmiştir. Araştırmacı, ayrıca Aralık 2010’da, Ocak 2011’de ve Şubat 2011’de de birer uzmandan daha görüş almış; böylece uzman görüşü alınan toplam kişi sayısı 14 olmuştur.

3.4.3.1. İkinci uzman görüşlerinin değerlendirilmesi. “Veri analizi sırasında değerlendirmeye alınacak matematiksel kavramlar”ın belirlenmesi amacıyla alınan

uzman görüşleri; hem nitel, hem de nicel olarak değerlendirilmek istenmiştir. Bu amaçla; uzmanların, her bir kavram önerisi için, “matematiksel kavram” olduğuna dair katılma düzeylerini işaretleyecekleri beşli Likert tipi ölçek hazırlanmış; aynı zamanda da kavramlar hakkında belirtmek istedikleri düşüncelerini/önerilerini yazabilmeleri için tabloda boş satırlar bırakılmıştır.

Ancak uzman görüşleri incelendiğinde; 6 uzman dışındaki uzmanların, formu doldururken, “kavram önerisinin bir matematiksel kavram olup olmaması”nı pek dikkate almadıkları fark edilmiştir. “Formun, uzmanlarca farklı bakış açıları ile doldurulduğu” kanaatine varıldığından; uzman görüşlerinin sadece nitel olarak değerlendirilmesi daha uygun görülmüştür. Farklı bakış açıları olan uzmanlar kendi içlerinde gruplandırılmış ve 14 uzmanın görüşleri, tek bir form üzerinde bir araya getirilerek; her bir soru için değerlendirme tablosu oluşturulmuştur.

Ölçeği “kavram önerisinin matematiksel kavram olup olmaması”nı dikkate alarak doldurmuş olan 6 uzmanın görüşleri –diğer 8 uzmanın görüşlerine göre– daha tatmin edici ve işe yarar görüldüğünden; daha çok bu 6 uzmanın görüşlerinden –parça parça da olsa– yararlanılmıştır. Özellikle; (o soru için) “matematiksel kavram” olmadığını düşündükleri kavram önerileri için; açıklama satırına, işlem (prosedür)/beceri/bağıntı/özellik/kural/strateji/sembol/ders aracı gibi notlar yazan uzmanların görüşleri, yol gösterici olmuştur.

İkinci uzman görüşlerinin ardından; “veri analizi sırasında dikkate alınacak matematiksel kavramları/işlemleri/özellikleri/bağıntıları/kuralları vs.” belirleme konusunda, son olarak bir uzmanın daha görüşlerine başvurulmuştur. “Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi” (“Matematik Eğitimi”) bölümünde öğretim üyesi olarak görev yapan bu uzmanın görüşleri de; araştırmacı için yararlı olmuştur.

3.5. Verilerin Analizi

Bu alt bölümde; veri toplama sürecinin bitiminden itibaren, verilerin analizi için gerçekleştirilen işlemlerden adım adım bahsedilecektir.

3.5.1. Görüşme Ses Kayıtlarının Bilgisayarda Yazımı ve Görüşme Dosyalarının Oluşturulması

Asıl katılımcı olan üç ilköğretim ve üç ortaöğretim öğrencisinin görüşme ses kayıtlarının dinlenerek bilgisayarda yazımı ile işe başlanmıştır. Yazım esnasında araştırmacı; ses kaydının tamamını, aynen yazıya aktarmanın yanı sıra; ses kayıt anındaki ayrıntıları ve o andaki öğrenci davranışlarını da olabildiğince yazıya yansıtmaya özen göstermiştir. Örneğin problem çözme sürecinde belli bir süre sessizlik olduğunda, öğrenci soruyu yüksek sesle/mırıldanarak okuduğunda, belli bir süre soru üzerinde düşündüğünde, problemi çözerken kağıda bir şeyler yazdığında ya da çizdiğinde, o an söylenen şey net anlaşılamadığında, ses kaydı kısa süreliğine durdurulduğunda; araştırmacı, görüşme anına ait bu tür ayrıntıları, renkli ve italik yazı tipi stili ile parantez içinde not etmiştir. Araştırmacı, “öğrencinin problem çözme anında kağıda yazdıkları”na dair açıklamalar yazarken; öğrencilerin görüşme sırasında problemleri çözerken kullandıkları kağıtlardan (problem kağıtları) yararlanmıştır.

Görüşme ses kayıtlarının bilgisayarda yazımı tamamlandığında; 6 katılımcı öğrenciden (*üçü ilköğretim, üçü ortaöğretim öğrencisi*) her biri için 4 görüşme dosyası (*1., 2., 4. ve tamamlayıcı görüşme dosyaları*) olmak üzere; toplam 24 tane “görüşme dosyası” oluşmuştur.

3.5.2. Kavram Dosyalarının Oluşturulması

Görüşme ses kayıtlarının bilgisayarda yazımı, asıl katılımcı öğrenciler için tamamlanarak “görüşme dosyaları” oluşturulduktan sonra; tezde incelenecek matematiksel kavramların yer aldığı “kavram dosyaları” hazırlanmıştır. “Kavram dosyaları” isimlendirilirken; daha çok, “alt öğrenme alanları”nın isimlerinden yararlanılmıştır. İlköğretim kademesi için; “Doğal Sayılar”, “Tamsayılar”, “Kesirler”, “Cebirsel İfadeler”, “Olasılık”, “Çokgenler” ve “Sözel Problemler” olmak üzere, toplam 7 tane “kavram dosyası” oluşturulmuştur. Ortaöğretim kademesi için ise; “Doğal Sayılar”, “Rasyonel Sayılar”, “Fonksiyon”, “Çarpanlara Ayırma–Denklem Çözme”, “Olasılık”, “Limit”, “Çokgenler–Dörtgenler”, “Doğrunun Analitik İncelenmesi” ve “Problemler” olmak üzere, toplam 9 tane “kavram dosyası” oluşturulmuştur.

Her bir kavram dosyasında, o alt öğrenme alanı ile ilgili her görüşme sorusu için birer tablo hazırlanmış ve katılımcı öğrencilerin o soruya vermiş oldukları yanıtlar kopyalanarak tabloya yapıştırılmıştır. Böylece kavram dosyalarının her birinde; içinde o kavramın bulunduğu (*genelde*) 3 tane soruya yer verilmiştir. Bunun yanı sıra; 2 ya da 4 tane sorudan oluşan birkaç kavram dosyası da vardır.

Kavram dosyalarında, her bir soru için oluşturulmuş tablonun başına; o sorunun, “kaçıncı görüşmede/kaçıncı soru olarak sorulduğu”, “hangi yıl, hangi sınavda, kaçıncı soru olduğu”, “sorunun doğru cevap şıkkı”, “sorunun ilgili olduğu öğrenme alanı ve alt öğrenme alanı”na dair bilgiler verilmiştir. Soru ile ilgili bu bilgilerin altına da; sorunun orijinal hali, “soruda geçen veya çözümde kullanılması gereken kavramlar konusunda, matematik öğretmenlerinden gelen kavram önerileri” tablosu ve “kavram önerilerinden hangilerinin ‘bir matematiksel kavram’ olduğuna dair alınan uzman görüşleri” tablosu yerleştirilmiştir.

3.5.3. Verilerin Analiz Edilme Süreci

Görüşmelerde kullanılan matematik problemlerinin toplam sayısı 48 olduğundan dolayı; öğrencilerin, bu problemlerin hepsini çözme süreçlerinde kavramlar ile ilgili anlayışları ve kavram–işlem kullanımları konusunda yüzeysel bilgi edinmek yerine, bu problemlerden bir kısmını çözme süreçlerinde biraz daha kapsamlı bilgi elde edilmesi daha uygun görülmüştür.

Verilerin analiz edilme sürecinde; öncelikle bir “kavram dosyası” dikkate alınmış ve sırasıyla, o kavram dosyasında yer alan matematik sorularına odaklanılmıştır. Her matematik sorusu için, katılımcı öğrencilerin yaptıkları çözümler ve araştırmacı–öğrenci diyalogları incelenerek; analiz edilecek matematik soruları belirlenmeye çalışılmıştır.

Analiz edilecek matematik sorularının seçiminde; ilköğretim matematik öğretim programındaki her öğrenme alanından en az bir SBS sorusunun bulunmasına; ÖSS ve SBS sorularının, aynı ya da benzer kavramları içeren sorular olmasına özen gösterilmiştir. Bir öğrenme veya alt öğrenme alanındaki iki ya da daha çok sorudan hangisinin seçileceği konusunda kararsız kalındığında ise; genellikle, çözüm sürecinde veya sonuca ulaşmada (daha fazla) sorun yaşanmış olan soru, öncelikli tercih edilmiştir.

Yukarıda belirtilen kriterler dikkate alınarak, analiz edilecek matematik soruları (7'si SBS ve 7'si ÖSS sorusu olmak üzere toplam 14 soru) belirlenmiştir.

Veri analizi için, kavram dosyasındaki bir soruya odaklandıktan sonra; ilk başta, o soru ile ilgili “kavram önerileri tablosu” ve “ikinci uzman görüşleri tablosu” incelenerek, “değerlendirmeye alınacak matematiksel kavram/işlem/özellik vs.” netleştirilmeye çalışılmıştır. Her bir sorudaki verileri analiz ederken; ilk önce, birey temelli bir yaklaşımdan yararlanılmıştır. Her öğrencinin problemi çözme süreci ve problemin çözümünde takip ettiği yol farklı olabildiğinden dolayı; öncelikle birey temelli bir yaklaşımın benimsenmesi daha uygun görülmüştür. Her bir soru için veriler, öncelikle, her öğrenci için ayrı ayrı analiz edilmiştir. Bu analiz sırasında; ilk başta, öğrencinin o problemi çözme süreci, hızlıca okunmuştur. Bu okuma esnasında; öğrencinin, problemin çözümünde takip ettiği yola odaklanılmaya çalışılmıştır. Ayrıca soru veya çözümle ilgili olmadığı, araştırma problemi ile hiç bağdaşmadığı düşünülen diyaloglar göze çarptığında; bu ilgisiz kısımların tekrar tekrar okunmalarını engellemek için, üzerleri çizilmiştir.

Öğrencinin o problemi çözme süreci hakkında genel bir fikir edindikten sonra; veri, satır satır ve dikkatli bir şekilde tekrar okunmaya başlanmıştır. Bulgular kısmında bahsedilecek veya doğrudan alıntı yapılacak konuşmaları/konuşma kesitlerini ayırt etmek amacıyla; ilgili metne farklı renklerde vurgu yapılmıştır.

Metin üzerinde yapılan renkli vurguların yanı sıra; gerekli görüldükçe, tablonun “Notlar/Açıklamalar” sütununa da kısa açıklamalar yazılmıştır. Önemli olduğu düşünülen açıklamalar, yorumlar ve bazı hatırlatmalar; ilgili görüşme satırının hizasına gelecek şekilde not edilmiştir.

Her bir soru için veri analizi esnasında, ilk önce, birey temelli bir yaklaşım benimsense de; bulguların sunulmasında, soru tabanlı bir yaklaşım tercih edilmiştir. Başka bir deyişle; her bir matematiksel problem için, “ilköğretim/ortaöğretim öğrencilerinin, o problemi çözme sürecinde, genel olarak kavramlar ile ilgili anlayışları ve kavram–işlem kullanımları”na dair bulgular sunulurken; katılımcı öğrencilerin her biri için ayrı başlıklar açılmamış; üç ilköğretim/ortaöğretim öğrencisinden tek bir başlık altında bahsedilmiştir. Bunun için de; her bir soru için, karşılaştırmalı analiz yapılmış; yani üç ilköğretim/ortaöğretim öğrencisi kendi içinde karşılaştırılarak, benzer ve farklı yönlerin tespit edilmesi amaçlanmıştır. Yapılan veri analizine dayalı olarak bulguların yazımı esnasında; benzer bulgular bir arada verilirken; benzerlik göstermeyen bulgular ardı ardına, fakat olabildiğince akıcı bir biçimde sunulmaya çalışılmıştır.

Katılımcı öğrencilerin, problemin içinde yer alan kavramlarla ilgili anlayışlarına, problem çözme sürecinde, genel olarak bakılmış ve öğrencilerin anlayışlarına dair bulgular; öğrencilerin, ilgili kavrama dair yapmış oldukları tanımlar/açıklamalar dikkate alınarak elde edilmiştir.

3.5.3.1. Yararlanılan veri analizi yaklaşımları. Verilerin analiz edilme sürecinde; nitel veri analizi yaklaşımlarından olan “betimsel analiz” ve “içerik analizi”nden yararlanılmıştır.

Betimsel analiz; verilerin, daha önceden belirlenmiş kategorilere göre özetlendiği ve yorumlandığı bir yaklaşımdır. Betimsel analiz; daha çok, kavramsal yapısı önceden açık biçimde belirlenmiş olan araştırmalar için uygundur. Önceden belirgin olmayan kategorilerin ve boyutların ortaya çıkarılmasına olanak tanıyan içerik analizi ise; verilerin yüzeysel olarak değil de, daha derinlemesine analiz edilmesini gerektirir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). İçerik analizinde temelde yapılan işlem; benzer verileri belirli kavramlar ve kategoriler etrafında bir araya getirmek, bunları okuyucunun anlayabileceği şekilde düzenlemek ve yorumlamaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Öğrencinin, bir problemi çözme sürecinde hangi kavramları-işlemleri kullandığını belirleme noktasında; *–o soru ile ilgili “kavram önerileri tablosu” ve “ikinci uzman görüşleri tablosu” incelenerek oluşturulmuş olan– “irdelenecek matematiksel kavram/işlem/özellik vs. tablosu”ndan yararlanılmıştır.* Başka bir deyişle; hangi kavramları-işlemleri kullandığını tespit etme aşamasında; daha önceden oluşturulmuş olan bu “irdelenecek matematiksel kavram/işlem/özellik vs. listesi”ne göre kodlama yapıldığından dolayı, “betimsel analiz”den yararlanılmıştır.

Öğrencinin, o problemi çözme sürecinde, kavramlar ile ilgili anlayışlarını, kavramları-işlemleri nasıl kullandığını araştırırken ise; verilerin daha yakından, ayrıntılı bir şekilde incelenerek, bu verileri açıklayabilecek kavram, kategori ve ilişkilere ulaşma çabası olduğundan dolayı, “içerik analizi” yapılmıştır. İçerik analizi sürecinde; açık kodlama, eksensel kodlama ve seçici kodlama gibi nitel araştırma tekniklerinden yararlanılmıştır. Aşağıda kısaca bu kodlama teknikleri ile ilgili bilgilere yer verilmiştir:

Açık kodlama (*open coding*), “verideki kavramların belirlendiği ve onların özelliklerinin ve boyutlarının keşfedildiği analitik süreç”tir (Strauss ve Corbin, 1998, p. 101). “Özellik (*property*)”, kategoriyi tanımlayan ve ona anlam veren tasvirlerdir.

“Boyut (*dimension*)” ise; kategorinin ayrıntıları verilerek, kategorinin genel özelliklerinin değiştiği aralık şeklinde açıklanabilir. “Boyut”; özelliğin, bir aralık boyunca konumunu göstermektedir. Açık kodlama sürecinde; veri, farklı parçalara ayrılarak, yakından incelenir ve benzerlikler ve farklılıklar açısından karşılaştırılır. Kavramsal olarak benzer olan veya anlamca ilişkili bulunan nesneler, olaylar ve eylemler; “kategoriler” olarak adlandırılan daha soyut kavramlar altında gruplandırılır. Kategoriler belirlenip isimlendirildikten sonra; belirli özelliklerine ve boyutlarına göre geliştirilmeye başlanır (Strauss ve Corbin, 1998).

Kavramlar, her ne kadar ortak ya da benzer özelliklerine göre gruplandırılarak kategoriler oluşturulsa da; belirli bazı özellikleri ve boyutları açısından birbirleriyle kıyaslandıklarında benzer değildirler. Kategorinin belirli özellikleri ve –“*ne kadar*” sorusu yardımıyla– bu özelliklerinin boyutsal aralıklar boyunca nasıl çeşitlendiği belirlenerek; kategoriye kesinlik (*netlik*) kazandırılır. Örneğin; “renk” kavramının özellikleri; gölge, yoğunluk, ton vb. şeklinde sıralanabilir ve bu özelliklerin her biri boyutlandırılabilir. Renk; “gölge”de koyudan açığa, “yoğunluk”ta yüksekte düşüğe, “ton”da ise parlaktan mata doğru çeşitlenebilir. Burada gölge, yoğunluk ve ton; “genel özellikler” olarak adlandırılabilirler ve incelenen nesneyi dikkate almaksızın renge uygulanırlar. Ayrıca her kategori, genellikle birden çok özelliğe sahip olduğundan; her bir özelliği, o özelliğin boyutsal aralığı boyunca yerleştirilmeye çalışılır. Örneğin, bir “çiçek” düşünülecek olursa; çiçeğin sadece rengi yoktur; boyutu, şekli, süresi vb. de vardır (Strauss ve Corbin, 1998).

Eksensel kodlama (*axial coding*); kategorileri, onların özellik ve boyutları doğrultusunda, alt kategorileri ile ilişkilendirme sürecidir. Kodlama, bir kategorinin eksenini çevresinde gerçekleştiği için “eksensel” olarak adlandırılmıştır. Kategoriler gibi, özellikleri ve boyutları olan alt kategoriler; bir fenomenin ne zaman, nerede, neden ve nasıl olduğu gibi sorulara cevap vererek; kategoriye daha ayrıntılı hale getirirler. Eksensel kodlamada amaç; kategorileri sistematik olarak geliştirmek ve ilişkilendirmek, böylece kategoriye derinlik kazandırmaktır. Eksensel kodlama ile, açık kodlamada parçalanmış verilerin tekrar bir araya toplanması süreci başlar. Bu süreçte; fenomenler hakkında daha tam ve kesin açıklamalar oluşturmak amacıyla; kategoriler, alt kategorileri ile ilişkilendirilir (Strauss ve Corbin, 1998).

Seçici kodlama (*selective coding*) ise, kategorileri bütünleştirme ve geliştirme (*inceltme*) sürecidir. Bütünleştirme sürecinde kategoriler, açıklayıcı bir merkezi kavram etrafında organize edilirler. Bu süreci kolaylaştırmak için; ana konuyu (*storyline*)

anlatma veya yazma, diyagramlar kullanma, notları sınıflandırma ve gözden geçirme gibi tekniklerden yararlanılabilir (Strauss ve Corbin, 1998).

Bu kodlama tekniklerinden yararlanılan içerik analizi süreci özetlenecek olursa; verinin parçalara ayrılarak, yakından incelendiği “açık kodlama” aşamasında; kavramlar elde edilip, belirgin özelliklerine –yani benzerlik ve farklılıklarına– göre sınıflandırılmıştır. Kavramlar arasındaki ilişkiler dikkate alınarak, kategoriler elde edilmiş; aynı zamanda, özellikler ve boyutlar, farklı koşullar altında karşılaştırılarak, bu kategorilerin boyutsal olarak nasıl çeşitlilik gösterdiği de ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Her bir matematiksel problem için; öğrencilerin o problemi çözme sürecinde, “merkezi kavramları belirlemeleri”, “merkezi kavramlarla ilgili anlayışları”, “kavram–işlem kullanımları” ve “sonuca ulaşmaları” ile ilgili çıkan kategoriler; tablo üzerinde özetlenmiştir.

“Açık kodlama” sürecinden sonra; kategoriler, –“*ne zaman*”, “*nasıl*”, “*neden*” gibi soruların cevabı olan– alt kategorileri ile ilişkilendirilerek daha ayrıntılı hale getirilmiştir. Kategorileri, onların özellik ve boyutları doğrultusunda, alt kategorileri ile ilişkilendirme süreci olan bu “eksensel kodlama” (Strauss ve Corbin, 1998) aşamasında; kategoriler, ana kategori eksenine üzerine ve alt kategoriler de, ilgili kategori eksenine üzerine yerleştirilerek görselleştirilmiştir (örnek için 106. sayfaya bakabilirsiniz). Kategoriler, eksenler üzerinde gösterilerek somutlaştırıldıktan (yani eksensel olarak kodlandıktan) sonra; sözel olarak da özetlenmiştir (örnek için 108. sayfaya bakabilirsiniz).

Her bir matematiksel problem için ayrı ayrı sunulan bulguların ardından; kategorilerin, açıklayıcı bir merkezi kavram etrafında organize edilerek bütünleştirildiği “seçici kodlama” (Strauss ve Corbin, 1998) aşamasına geçilmiştir. Bu aşamada da; öncelikle, 14 matematiksel problem için çıkan tüm kategorilerin, “öğrenci numarası–görüşme numarası–soru numarası”na göre dağılımlarının yapıldığı bir tablo oluşturulmuştur (s. 306). Ardından, bu tablodan yararlanılarak; genel olarak, öğrencilerin, problem çözme sürecinde, “merkezi kavramlarla ilgili anlayışları”, “kavram–işlem kullanımları” ve “sonuca ulaşmaları” arasındaki ilişkilere dair bulgular sunulmuştur.

Betimsel analiz ve içerik analizi sonucu elde edilen veriler, betimsel bir anlatımla sunulmuş ve bulguların sunumu esnasında, sık sık doğrudan alıntılara ve ara ara araştırmacı-öğrenci diyaloglarına yer verilmiştir. Hem “Bulgular ve Yorum” hem de “Sonuçlar ve Tartışma” adlı bölümlerde yer alan alt bölümlerin sonlarında, o alt bölüm ile ilgili özet bilgiler sunulmuş; böylece okuyucuya o alt bölüme yönelik kısa hatırlatmalar yapılmıştır.

IV. BÖLÜM

BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde; araştırmada toplanan verilerin analizleri sonucunda elde edilen bulgulara ve bunlara ilişkin yorumlara yer verilecektir.

Öncelikle, matematiksel problem çözme ortamlarına yönelik araştırma soruları çerçevesinde organize edilen bulgular sunulacaktır. Bu amaçla; katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, görüşmelerde sorulan bazı matematiksel problemleri çözme sürecinde, genel olarak kavramlar ile ilgili anlayışları ve kavram–işlem kullanımlarına dair bulgulardan –her bir matematiksel problem için ayrı ayrı– bahsedilecektir. Problemi çözebilmek için, öncelikle, problemin nasıl çözüleceğinin / problemin içinde yer alan merkezi kavramların belirlenmesi gereken problemlerde ise; öğrencilerin, merkezi kavramları belirlemeleri ile ilgili bulgular da yer alacaktır.

Bir matematiksel problem için bulgulara geçmeden önce; o sorunun, hangi yıl ve hangi sınavda yer aldığı, katılımcı öğrencilere ne zaman ve kaçınıcı görüşmede sorulduğu, hangi öğrenme/alt öğrenme alanının hangi kazanım(lar)ıyla ilgili olduğuna dair bilgiler verilecektir. Soru ile ilgili bu bilgilerin ardından; “problemin beklenen çözüm yolu” ve “çözüm sürecinde irdelenecek kavramlar” hakkında genel bilgi verilecektir. Öğrencinin, beklenen bu çözüm yolu dışında bir yol takip etmesi durumunda; farklı çözüm yolları da değerlendirmeye açık olacaktır.

Her bir matematiksel problem için ayrı ayrı sunulan bulguların ardından; genel olarak, katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problem çözme sürecinde, “problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları”, “kavram–işlem kullanımları” ve “sonuca ulaşmaları” arasındaki ilişkilere dair bulgulara yer verilecek; fakat ilişkilere dair bu bulgulara yönelik yorumlar ve tartışma, “Sonuçlar ve Tartışma” adlı bölümde yapılacaktır.

4.1. İlköğretim Öğrencilerinin “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

Katılımcı ilköğretim öğrencilerine, “doğal sayılar” ile ilgili iki tane soru sorulmuştur.

4.1.1. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

“Doğal sayılar” ile ilgili bir soru, “2008 yılı 6. sınıf Seviye Belirleme Sınavı (SBS) soruları” arasından seçilmiştir ve katılımcı ilköğretim öğrencilerine, 10 Mart–24 Mart 2010 tarihleri arasında gerçekleştirilen 1. görüşmede sorulmuştur. Bu soru, – kazanımlar açısından– 6. sınıf matematik öğretim programındaki “sayılar” öğrenme alanının “doğal sayılar” alt öğrenme alanında yer alan iki kazanımla ilgili bulunmuştur (Tablo 4.1).

Tablo 4.1
İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar

1. GÖRÜŞME / 1. SORU	KAZANIMLAR
Bir yarış pistini süratleri sabit iki araçtan biri 4 dakikada, diğeri 6 dakikada turluyor. Başlangıç çizgisinden aynı anda ve aynı yönde yarışa başlayan bu araçlar, ilk defa kaç dakika sonra yan yana gelirler? A) 8 B) 12 C) 20 D) 24 (2008 SBS – 6. SINIF – 7. SORU) (Cevap: B)	3.³ Doğal sayıların çarpanlarını ve katlarını belirler. 6. Doğal sayıların ortak bölenleri ile ortak katlarını belirler ve problemlere uygular.

³ Kazanımlar, öğretim programlarındaki numaraları ile birlikte aynen alınmıştır.

Tablo 4.2
İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar

İrdelenecek Matematiksel Kavram Listesi	Matematiksel Kavram
Kat	Matematiksel kavram
Ortak kat	Matematiksel kavram
En küçük ortak kat (ekok)	Matematiksel kavram

4.1.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi

Süratleri sabit olan, başlangıç çizgisinden aynı anda ve aynı yönde yarışa başlayan iki aracın, ilk defa yan yana gelme sürelerini bulmak için takip edilebilecek çözüm yollarından biri; araçların yarış pistini turlama sürelerinin en küçük ortak katını hesaplamaktır. Bu çözüm yolu tercih edilecek olursa; araçların yarış pistini turlama süreleri olan 4 ve 6 dakikanın en küçük ortak katı hesaplanarak, $\text{ekok}(4, 6) = 12$ sonucu elde edilebilir.

Bu problemin çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezdeki kavramlar düşünülerek; katılımcı ilköğretim öğrencilerinin “kat”, “ortak kat” ve “en küçük ortak kat” kavramlarıyla ilgili düşüncelerinin genel olarak ortaya çıkarılmak amacıyla sorgulanması amaçlanmıştır (Tablo 4.2). Ancak sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir.

4.1.1.2. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları Belirlemeleri

“Doğal sayılar” ile ilgili bu problemi çözebilmek için; ilköğretim öğrencilerinin, öncelikle, problemin nasıl çözüleceğini / problemin içinde yer alan merkezi kavramları belirleyebilmeleri gerekmiştir.

Matematik başarı düzeyi “orta” olan 1 no’lu öğrencinin, soruyu okuduktan sonra ilk söylediği; “*Gerçi böyle problemleri hiç çözemem.*” (1. öğrenci – 1. görüşme) cümlesi olmuştur. 1. öğrenci, bu problemin çözümünde “en küçük ortak kat” kavramına ihtiyaç olduğuna dair net bir ifade kullanmamıştır.

Matematik başarı düzeyi “iyi” olan 2 no’lu öğrenci, problemin çözümü üzerinde 30 saniye düşündükten sonra; “[*Ses kaydını*] *Durdurduk mu şu an? Durduralım ya.*” (2. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, araştırmacıdan ses kaydını kısa süreliğine durdurmasını rica etmiştir. 2. öğrenci, ses kaydının durdurulduğu süreçte de soru üzerine düşünmeye devam etmiş; ancak sorunun kökünde yer alan kavramlar ve çözüm konusunda hiç bir fikir yürütememiştir. 1. görüşmedeki tüm problemlerin çözümlerini bitirdikten sonra, bu soruya tekrar dönen 2. öğrenci; bu defa, problemi daha önce çözebildiğini hatırlamış ve “*Şimdi, 6. sınıf soruları mı gelecek aklıma? Onu... ekok’unu falan mı alıyorduk? Ne yapıyorduk?*” (2. öğrenci – 1. görüşme) şeklinde düşüncesini dile getirmiştir.

Matematik başarı düzeyi “çok iyi” olan 3 no’lu öğrenci ise, soruyu okuyup, 15 saniye düşündükten sonra; “*en küçük ortak katlarını alabiliriz*” yorumunu yapmış; böylece çözümde kullanılacak uygun kavramı –kısa süre içerisinde– belirleyebilmiştir.

2. öğrenci, “*Ha, şimdi bu soruda da, galiba onu... Şu an aklıma geldi. Ebob olmayacak diye biliyorum. Ekok olacak.*” (2. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, bu problemin ekok yardımıyla çözüleceğini –geç de olsa– hatırlasa da; “*ekok mu, ebob mu; onu nasıl anladın?*” sorusuna yanıtı, aşağıdaki şekilde olmuştur:

Yaa, şimdi, “ilk defa” hani... “İlk defa” mı oluyor? Yani onları bilmiyorum; sanki içimden geliyor öyle, hep öyle kendim karar veriyorum, öyle bir... Yani onların bir şeyi vardı da. (2. öğrenci – 1. görüşme)

Net bir gerekçe belirtemese de; 2. öğrencinin bu söyleminden, “ekok mu, ebob mu olacağı”na sezgisel olarak karar verdiği anlaşılmıştır.

3. öğrenci ise, soruda “en küçük ortak kat” kavramına karar verme gerekçesini, “*Aslında... (5 sn. sessizlik) Neden ebob değil? (2 sn. sessizlik) Bilmem. Yani yan yana gelecekler. Yani belli bir süre de gidiyorlar. Yani... (4 sn. sessizlik) Bilmem. Yani direkt aklıma ekok geldi.*” (3. öğrenci – 1. görüşme) şeklinde, kısmen de olsa açıklayabilmiştir.

Kısacası; bu problemin çözümünde “en küçük ortak kat” kavramına ihtiyaç olduğunu, 3. öğrenci, kısa süre içerisinde belirleyebilmiş; 2. öğrencinin, bunu belirleyebilmesi ise uzun sürmüştür. Soruda “en küçük ortak kat” kavramına karar verme gerekçesini; 3. öğrenci, kısmen de olsa açıklayabilirken; 2. öğrenci, net bir gerekçe belirtememiş, ancak söylediklerinden, kararının sezgisel olduğu sonucu çıkarılmıştır. 1. öğrenci ise; çözümde “en küçük ortak kat” kavramına ihtiyaç olduğuna dair net bir ifade kullanmamıştır.

Yukarıda yer verilen bilgiler ışığında; katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, problemin içinde yer alan ve çözümde kullanacakları merkezi kavramları belirlemelerinin, 3 kategori altında toplandığı görülmüştür (Tablo 4.3).

Tablo 4.3
İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları Belirlemeleri

Kategoriler	Öğrenci no
Net olarak belirleyememek	1
<i>Geç de olsa</i> uygun kavramı belirlemek	2
<i>Kısa sürede</i> uygun kavramı belirlemek	3

4.1.1.3. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Bu bölümde; ilköğretim öğrencilerinin, –bu problemi çözme sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlar olan– “kat”, “ortak kat” ve “en küçük ortak kat” kavramları ile ilgili anlayışlarına genel olarak yer verilecektir.

1. öğrenci, problemin çözüm sürecinde, “kat”, “ortak kat” ve “en küçük ortak kat” kavramlarından hiç bahsetmediği için; öğrencinin bu kavramlarla ilgili düşünceleri sorgulanamamış ve dolayısıyla ortaya çıkarılamamıştır.

4.1.1.3.1. İlköğretim öğrencilerinin, “en küçük ortak kat” kavramı ile ilgili anlayışları. Bu problemin, belki “ekok” kavramından yararlanılarak çözülebileceği yorumunda bulunan 2. öğrenci ile araştırmacı arasında, “ekok” kavramının anlamına dair aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Görüşmeci: “Ekok” nedir?

Öğrenci: “En küçük ortak kat” diyeyim.

Görüşmeci: Bunu açıklar mısın bana biraz?

Öğrenci: Hiçbir şey hatırlamıyorum. 6. sınıf konusu olduğu için; öyle hiç geri dönmedim. (2. öğrenci – 1. görüşme)

2. öğrenci, “ekok” kısaltmasının açılımını doğru şekilde ifade edebilmiş; fakat “ekok” kavramının ne anlama geldiğine dair bir şey söyleyememiştir. Buna gerekçe olarak ise; “ekok” kavramının 6. sınıfta öğrenilen bir kavram olmasını ve kendisinin, 6. sınıf kavramlarını tekrar çalışmamış olmasını göstermiştir.

“ekok”un anlamına dair bir şey söyleyemeyen 2. öğrenciye; araştırmacı, “iki sayının ortak katı” ifadesinin ne anlama geldiğini, buna bir örnek verip veremeyeceğini sormuştur. “*Mesela 24’ün ekok’unu alalım, mesela.*” (2. öğrenci – 1. görüşme) diyen 2. öğrencinin; tek bir sayının ekok’unu almaya kalkışması dikkati çekmiştir. Araştırmacının, “*24’ün, tek başına ekok’unu alabilir misin?*” sorusu üzerine; 2. öğrenci “*Pardon, yaa!*” diyerek, hatasını fark etmiş ve 24’ün sol tarafına 12 sayısını ekleyerek, 24 ile 12’nin ekok’unu doğru şekilde hesaplamıştır.

Problemin çözümü için “*en küçük ortak katlarını alabiliriz*” (3. öğrenci – 1. görüşme) yorumunu yapan 3. öğrenciden, “ekok” kavramını açıklaması istendiğinde; öğrenci, ekok hesabı sırasındaki algoritmayı ayrıntılı biçimde anlatmıştır. ekok hesabına yönelik algoritmayı anlatırken, “*Yani şimdi, mesela burada şey, şöyle bir çizgi çizersek, ikisini yan yana alıp. Bunları asal sayılara bölüyoruz.*” (3. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, çizginin sağ tarafına yazılan sayıların “asal sayılar” olması gerektiğine de vurgu yapmıştır.

Araştırmacı, 2. ve 3. öğrencinin “ekok” kavramı ile ilgili düşüncelerini biraz daha sorgulamak istemiştir. Bu amaçla; tamamlayıcı görüşmede, araştırmacı ile 3. öğrenci arasında, ekok’un özelliğine dair aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Görüşmeci: İki sayının ekok'u ile o sayıları, o iki sayıyı büyüklük-küçüklük yönünden karşılaştırır mısın? a ; b ve ekok(a,b).

Öğrenci: Hım. Yani... şimdi, ekok, ikisinden de büyük yani; çünkü ikisinin katı, yani de...

Görüşmeci: Hım. Mutlaka büyük mü olmak zorunda?

Öğrenci: Hım (*düşünüyor-4 sn. sessizlik*). Yaani. (*Kısık bir ses tonuyla:*)
“Aslında eksi olursa...” (*düşünüyor-3 sn. sessizlik*) Yani bence büyük ama.

Görüşmeci: Eşit de olabilir mi?

Öğrenci: Ha, birisine eşit olabilir mesela.

Görüşmeci: Hım.

Öğrenci: İki sayı kendi arasında katsa; büyük olana eşit olabilir.

Görüşmeci: Hım, büyük olana eşit olabilir. İki sayı eşitse?

Öğrenci: O zaman kendilerine eşit olur.

Görüşmeci: Eşit olur. “Küçük olamaz” diyorsun, hiçbir durumda.

Öğrenci: Yani. Bence olamaz. (3. öğrenci – Tamamlayıcı görüşme)

Yukarıdaki konuşmadan da anlaşıldığı gibi; 3. öğrenci, iki sayının ekok'unun, her zaman, ekok'u alınan iki sayıdan büyük ya da eşit çıktığının farkındadır. Benzer şekilde 2. öğrenci de; ekok'un, ekok'u hesaplanan sayılara eşit çıkabileceğini, büyük de çıkabileceğini ifade etmiştir. “*Küçük çıkabilir mi, ekok?*” sorusunu ise; “*Sanmıyorum, olmaz. Çıkamaz diye biliyorum ama. Fazla bir düşünmedim yani öyle, hiç öyle ayrıntılı bir şekilde.*” (2. öğrenci – 1. görüşme) diye yanıtlamıştır. 2. öğrencinin bu söyleminden yola çıkılarak; öğrencinin, “ekok” kavramının yapısını ve özelliklerini yeterince zihninde sorgulamamış, tartışmamış olduğu; “ekok” kavramına dair söylediklerinin, daha çok, derste duyduklarından/öğrendiklerinden aklında kalanlar olduğu söylenebilir.

Kısacası, 3. öğrencinin “ekok” kavramının anlamına ve özelliğine dair söyledikleri göz önüne alındığında; –doğrudan anlamına dair bir şey söylemese de– 3. öğrencinin, “ekok” kavramının özelliği ve ekok hesabı sırasındaki algoritma hakkında doğru bilgilere sahip olduğu anlaşılmıştır. Formal ya da informal tanımlama yapmayarak, sadece ekok hesabına yönelik algoritmayı açıkladığından; 3. öğrencinin açıklaması, “eksik açıklama” olarak değerlendirilmiştir. 2. öğrencinin, ilk önce, “ekok”un anlamına dair bir şey söyleyememesi, tanımlama yapamaması ve tek bir sayının ekok'unu almaya kalkışması ise; 2. öğrencinin zihninde, “ekok” kavramının yapılanmamış olduğu düşüncesini oluşturmuştur.

4.1.1.3.2. İlköğretim öğrencilerinin, “kat” kavramı ile ilgili anlayışları. 2. ve

3. öğrenci, “kat” kavramını şöyle açıklamışlardır:

“Şimdi ‘bir sayının katı’ derken; mesela o sayıyı... Katını, o sayıya bölünce işte; tam bir sayı çıkacak işte.” (2. öğrenci – 1. görüşme)

“Mesela, yani mesela ‘4’ün 2 katı’ dediğimizde; onu 2 ile çarpıyoruz. Yani iki tane 4.” (3. öğrenci – 1. görüşme)

Öğrencilerin “kat” kavramı için yapmış oldukları bu açıklamalardan hareketle; kavramı, her iki öğrencinin de, doğru biçimde açıklayabildiği söylenebilir. “Kat” kavramını; 2. öğrenci, kavramın özelliğinden bahsederek; 3. öğrenci ise, sayısal bir örnek üzerinden açıklamaya çalışmıştır.

4.1.1.3.3. İlköğretim öğrencilerinin, “ortak kat” kavramı ile ilgili anlayışları. “Ortak kat” tanımı sorulduğunda; 3. öğrenci, –bu problemin çözümünü düşünerek– *“Mesela yani 4’e ve 6’ya bölünebilen en küçük sayı. Yani ikisine de bölünmesi gerekiyor.”* (3. öğrenci – 1. görüşme) şeklinde, “en küçük ortak kat” kavramını açıklamıştır. “Ortak kat” yerine, kavramın daha özel hali olan “en küçük ortak kat” kavramını açıkladığından; yapmış olduğu açıklama, “eksik açıklama” olarak değerlendirilmiştir. 2. öğrenci ise, *“Ya, onu tam olarak bilmiyorum. Böyle bir, fazla incelemedim onları.”* (2. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, “ortak kat” kavramını tanımlayamamıştır.

İlköğretim öğrencilerinin, bu problemi çözme sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlar ile ilgili yapmış oldukları açıklamalar dikkate alınarak; öğrencilerin problemde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları Tablo 4.4’de listelenmeye çalışılmıştır.

Tablo 4.4

İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Kavramlar	Öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları		
	1. öğrenci	2. öğrenci	3. öğrenci
Kat		doğru açıklamak	doğru açıklamak
Ortak kat		tanımlayamamak	eksik açıklamak
En küçük ortak kat (ekok)		tanımlayamamak	eksik açıklamak

NOT: “Öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları” başlıklı tablo(lar)daki **gri gölgelendirme**, “bahsetmemek” kategorisine karşılık gelmektedir.

4.1.1.4. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, problemin içinde yer alan merkezi kavramları belirlemelerinin ve merkezi kavramlarla ilgili anlayışlarının ardından; şimdi de, öğrencilerin bu problemi çözme sürecinde kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili bulgular sunulacaktır.

2. ve 3. öğrencinin her ikisi de; ekok hesaplamaya yönelik işlem bilgisini doğru şekilde kullanarak, 4 ile 6 sayılarının ekok’unu hesaplamış ve doğru olan 12 sonucuna ulaşmıştır (Şekil 4.1 ve Şekil 4.2).

1)

$$\begin{array}{r}
 72 \quad 24 \quad | \quad 2 \\
 6 \quad 12 \quad | \quad 2 \\
 3 \quad 6 \quad | \quad 2 \\
 3 \quad 3 \quad | \quad 3
 \end{array}$$

Bir yarış pistini süratleri sabit iki araçtan biri 4 dakikada, diğeri 6 dakikada turluyor. Başlangıç çizgisinden aynı anda ve aynı yönde yarışa başlayan bu araçlar, ilk defa kaç dakika sonra yan yana gelirler?

A) 8 B) 12 C) 20 D) 24

$$\begin{array}{r}
 46 \quad | \quad 2 \\
 23 \quad | \quad 2 \\
 13 \quad | \quad 3
 \end{array}$$

Şekil 4.1

2. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

①

$$\begin{array}{r}
 4 \quad 6 \quad | \quad 2 \\
 2 \quad 3 \quad | \quad 2 \\
 1 \quad 3 \quad | \quad 3
 \end{array}$$

Şekil 4.2

3. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

1. öğrenci ise, “Gerçi böyle problemleri hiç çözemem. Ama sanırım, bunları çarpınca... 6 kere 4, 24; doğru cevabı bulmuş olurum.” (1. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, çarpma işlemi yapmıştır. Yanlış sonuca ulaşan 1. öğrenci; “neden çarpma ihtiyacı duydun?” sorusuna ise, aşağıdaki cevabı vermiştir:

“Şimdi, hani... ını (düşünüyor), çarpanlarına ayırırken, asal sayıları kullanıyoruz ya. Hangisinin... ikisini de bölen sayıyı bulmak için. Belki ikisini çarparsam... 24’ü çünkü; hem 6 böler, hem 4 böler. Ortak sayıları o olduğu için, düşündüm.” (1. öğrenci – 1. görüşme)

Öğrencinin ilk önce “Gerçi böyle problemleri hiç çözemem.” (1. öğrenci – 1. görüşme) demesi, daha sonra –emin olmasa da– çarpma işlemi yapması ve neden çarpma işlemi yaptığını açıklarken de “.... 24’ü çünkü; hem 6 böler, hem 4 böler. Ortak sayıları o

olduğu için, düşündüm.” (1. öğrenci – 1. görüşme) ifadesini kullanması; 1. öğrencinin, çözüm yolu hakkında bir fikrinin olmadığı, o an şıklara bakarak ve problemde verilen iki sayıyı düşünerek D şikkının doğru şık olabileceği yönünde fikir üretmiş olabileceği düşüncesini akla getirmiştir.

1. öğrenci ile yapılan tamamlayıcı görüşmede de, bu problem ile ilgili birkaç soruya yer verilmiştir. Öğrenci, soruyu hatırlamak amacıyla okuyunca; *“Hala yapamadığım sorulardan bir tane.” (1. öğrenci – Tamamlayıcı görüşme)* diyerek; bu problemin, hala çözemediği problemlerden biri olduğunu yinelemiştir. *“Bu tür sorularda zor gelen şeyin ne olduğu”* sorusuna; *“Formülleri ezberleme kabiliyetim yok. Bu yüzden. Hiç aram da yok zaten formüllerle.” (1. öğrenci – Tamamlayıcı görüşme)* yanıtını vermiştir. Araştırmacının *“Formül gerektiğine dair [sana] ne ipucu veriyor?”* sorusunu ise, 1. öğrenci şöyle cevaplamıştır:

“Öğrenirken, formülle öğrendiğimizi biliyorum; çünkü formülsüz başka bir şekilde yapamam bunu. Yani biri 4 dakikada gidiyormuş, biri 6 dakikada gidiyormuş. Yani bir yol çizdiğimizde; bir buluşma noktası olacak. Onu hayali olarak belirlediğimde; bu, 4, 4, 4, 4 oraya ne kadar gider? Bu; 6, 6 oraya ne kadar zamanda gider?” (1. öğrenci – Tamamlayıcı görüşme)

Aslında çözümünde hiçbir formüle ihtiyaç duyulmayan bu problem için; öğrencinin ilk önce, bu tür problemlerin formül bilinmeden çözülemeyeceğini ve formülleri ezberleyemediğinden bu problemleri çözemediğini söylemesi dikkat çekmiştir. 1. öğrenci, problemin çözüm sürecinde, “kat”, “ortak kat” ve “en küçük ortak kat” kavramlarından hiç bahsetmediği için, öğrencinin bu kavramlarla ilgili anlayışları sorgulanamamış ve dolayısıyla ortaya çıkarılamamış olsa da; 1. öğrencinin tamamlayıcı görüşmede söylediklerinden hareketle, –kavramlardan isim olarak doğrudan bahsetmemiş olmasına rağmen– öğrencide “kat” ve “ortak kat” fikrinin olduğu ve aslında çözümde “ortak kat” kavramını kullanmış olduğu söylenebilir. 1. öğrencinin, çözüm için, herhangi bir “ortak kat”ın değil de, “ortak katların en küçüğü”nün bulunması gerektiğini düşünememesinin; zihninde “en küçük ortak kat” kavramının yeterince yapılanmadığının bir göstergesi olduğu düşünülebilir.

4.1.1.5. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, 1. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili problemi çözme sürecinde; çözüm yolunu / problemin içinde yer alan merkezi kavramları belirlemeleri, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları, kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili elde edilmiş kategoriler bir araya getirilerek; öğrencilerin, problemi çözme süreçleri Tablo 4.5’de özetlenmiştir. Böylece öğrencilerin, problemi çözme süreçleri; her bir öğrenci için ayrı ayrı da sunulmaya çalışılmıştır.

Tablo 4.5
İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Öğrenci no	Kategoriler (Merkezi kavramları belirlemek)	Merkezi kavramlarla ilgili anlayışları	Kullandıkları kavramlar–işlemler	Kategoriler (Kavram–işlem kullanımı)	Kategoriler (Sonuca ulaşmak)
1	Net olarak belirleyememek	<i>bahsetmemek</i>	Ortak kat	Uygun kavramı eksik kullanmak	Şıklarda olan yanlış sonuca ulaşmak
			Çarpma işlemi	Uygun olmayan işlemi kullanmak	
2	<i>Geç de olsa</i> uygun kavramı belirlemek	Kat (doğru açıklamak) Ortak kat (tanımlayamamak) ekok (tanımlayamamak)	ekok hesaplama algoritması	Uygun işlemi doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak
3	<i>Kısa sürede</i> uygun kavramı belirlemek	Kat (doğru açıklamak) Ortak kat (eksik açıklamak) ekok (eksik açıklamak)	ekok hesaplama algoritması	Uygun işlemi doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak

Şimdi de; katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, 1. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili problemi çözme süreçlerinin özetlendiği yukarıdaki Tablo 4.5’den de yararlanılarak, kategorilerin eksensel olarak kodlandığı Şekil 4.3’e yer verilecektir. Eksensel kodlama sürecinde; bulgulara elde edilen kategoriler, ana kategori eksenleri üzerine yerleştirilmiş ve –kategorilerle ilişkilendirilen– alt kategoriler de, ilgili kategori eksenine üzerine yerleştirilerek görselleştirilmiştir. Şekilde kullanılan kısaltmalardan bahsedilecek olursa;

Ö1: 1. öğrenci,

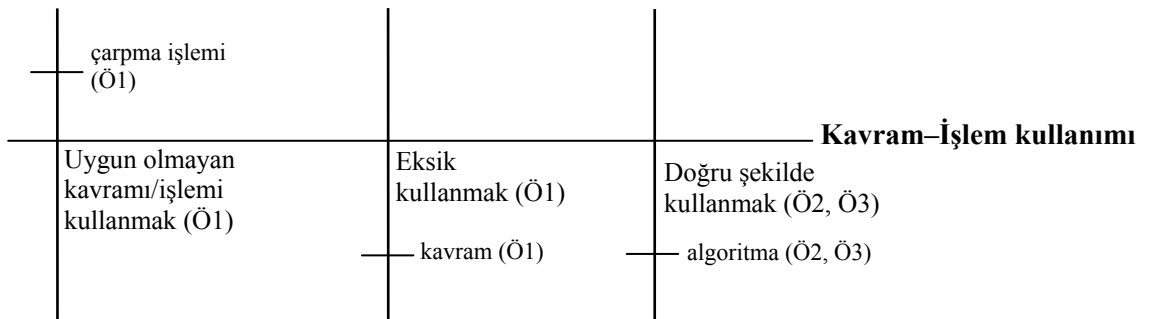
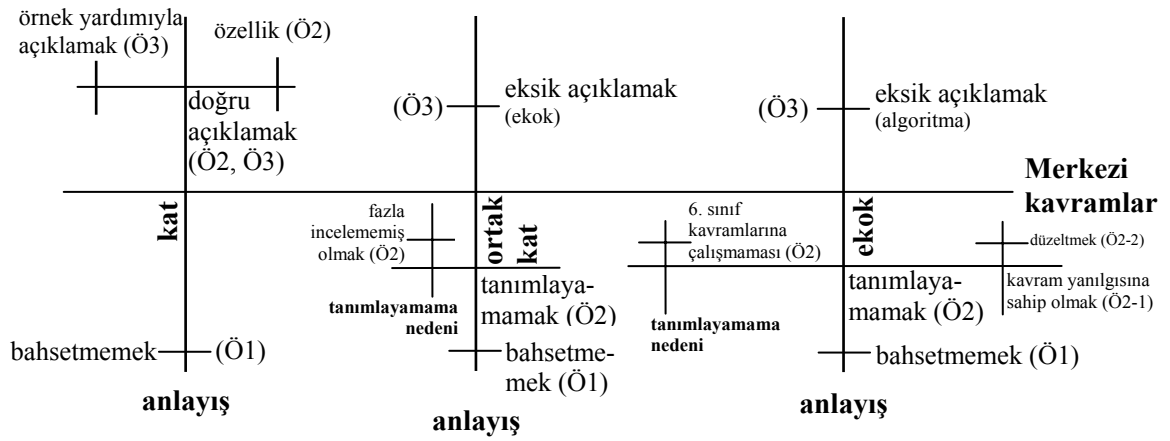
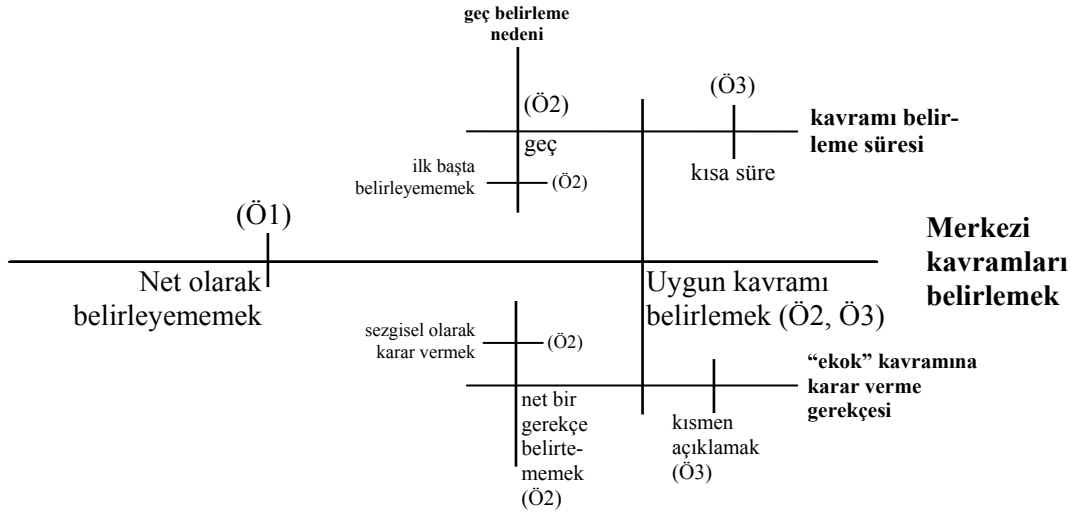
Ö2-1: 2. öğrenci için ilk başta çıkan kategori,

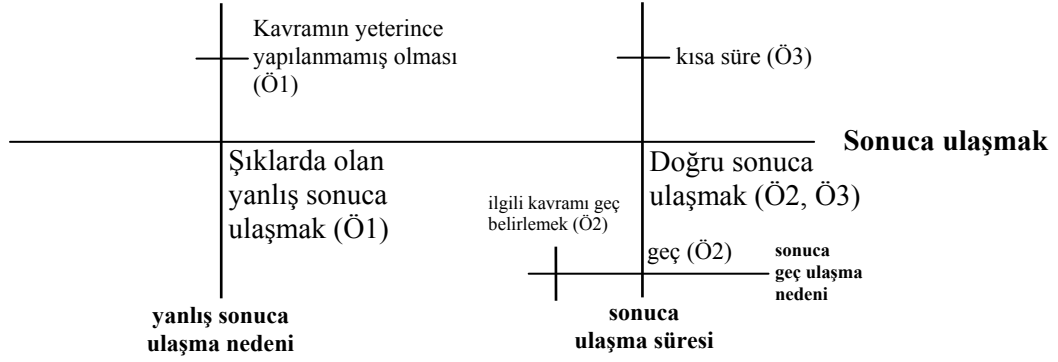
Ö2-2: 2. öğrenci için daha sonra (ikinci olarak) çıkan kategori,

Anlayış: Öğrencilerin ilgili kavrama dair anlayışları,

Eksik kullanmak: Uygun kavramı/işlemi eksik kullanmak,

Doğru şekilde kullanmak: Uygun kavramı/işlemi doğru şekilde kullanmak anlamlarına gelmektedir. Şeklin altında da; hem Şekil 4.3 açıklanmış, hem de öğrencilerin problemi çözme süreçleri özetlenmiştir.





Şekil 4.3

İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması

Bu bölümde, katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, 1. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili problemi çözme süreçlerinin eksenler üzerinde özetlendiği, yani eksensel olarak kodlandığı Şekil 4.3 açıklanacaktır. Bu soruda; öğrencilerin, öncelikle, problemin nasıl çözüleceğini / problemin içinde yer alan merkezi kavramları belirleyebilmeleri gerekmiştir. “Merkezi kavramları belirlemek” adlı ana kategori ekseninde, “net olarak belirleyememek” ve “uygun kavramı belirlemek” şeklinde iki kategori yer almaktadır. “Uygun kavramı belirlemek” kategorisi de, “kavramı belirleme süresi” ve “ ‘ekok’ kavramına karar verme gerekçesi” açısından değerlendirilerek ayrıntılandırılmıştır. “Uygun kavramı belirlemek” kategorisi, “kavramı belirleme süresi” ekseninde boyutsal olarak değerlendirildiğinde, “kısa süre” ve “geç” olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmış; “geç” alt kategorisi ise, –nedeni açısından– “ilk başta belirleyememek” şeklinde daha da ayrıntılandırılmıştır. “Uygun kavramı belirlemek” kategorisi, –gerekçe açısından ise– “net bir gerekçe belirtmemek” ve “kısmen açıklamak” olarak iki alt kategoriye ayrılmıştır. “Net bir gerekçe belirtmemek” alt kategorisi de, “sezgisel olarak karar vermek” şeklinde ayrıntılandırılmıştır. “Merkezi kavramları belirlemek” adlı ana kategori ekseni kısaca açıklanacak olursa; bu problemin çözümünde “en küçük ortak kat” kavramına ihtiyaç olduğunu, 3. öğrenci, kısa süre içerisinde belirleyebilmiş; 2. öğrenci ise, ilk başta sorunun kökünde yer alan kavramlar ve çözüm konusunda hiç bir fikir yürütememiş ve uygun kavramı belirleyebilmesi zaman almıştır. Soruda “en küçük ortak kat” kavramına karar verme gerekçesini; 3. öğrenci, kısmen de olsa açıklayabilirken; 2. öğrenci, net bir gerekçe belirtmemiş, ancak söylediklerinden, kararının sezgisel olduğu yargısına varılmıştır. 1. öğrenci ise; çözümde, “en küçük ortak kat” kavramının kullanılması gerektiğine dair net bir ifade kullanmamıştır.

Bu soruda; öğrencilerin, “kat”, “ortak kat” ve “en küçük ortak kat” kavramları ile ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılması amaçlandığından; “merkezi kavramlar” adlı ana kategori ekseninde, bu üç kategori yer almaktadır. “Kat” kategorisinde; “öğrencilerin ‘kat’ kavramına dair anlayışları” açısından, “doğru açıklamak” ve “bahsetmemek” şeklinde iki alt kategori yer almaktadır. “Doğru açıklamak” alt kategorisi de, “örnek yardımıyla açıklamak” ve “özellik” şeklinde ayrıntılandırılmıştır. “Ortak kat” adlı kategori; öğrencilerin bu kavrama dair anlayışları açısından, “eksik açıklamak”, “tanımlayamamak” ve “bahsetmemek”

şeklinde üç alt kategoriye bölünmüştür. “Tanımlayamamak” alt kategorisi; tanımlayamama nedeni (“fazla incelememiş olmak”) de eklenerek, detaylandırılmıştır. Benzer şekilde, “ekok” kategorisi de; “eksik açıklamak”, “tanımlayamamak” ve “bahsetmemek” şeklinde üç alt kategoriye ayrılmıştır. Alt kategorilerden biri olan “tanımlayamamak” ise, tanımlayamama nedeni (“6. sınıf kavramlarına çalışmaması”) ve –sonrasında düzeltse de, ilk başta– bu kavram ile ilgili “kavram yanlışlığına sahip olduğu” bilgisi eksen üzerinde gösterilerek daha da ayrıntılandırılmıştır. “Merkezi kavramlar” adlı ana kategori eksenini anlatılacak olursa; 1. öğrenci, problemin çözüm sürecinde, “kat”, “ortak kat” ve “en küçük ortak kat” kavramlarından hiç bahsetmediğinden; öğrencinin bu kavramlarla ilgili düşünceleri sorgulanamamıştır. “Kat” kavramını; 2. öğrenci, kavramın özelliğinden bahsederek; 3. öğrenci ise, sayısal bir örnek üzerinden doğru şekilde açıklamışlardır. “Ortak kat” kavramını; 2. öğrenci, tanımlayamamış ve gerekçe olarak, “fazla incelememiş olması”nı da sözlerine eklemiştir. 3. öğrenci ise; “ortak kat” kavramı yerine, kavramın daha özel hali olan “en küçük ortak kat” kavramını açıkladığı için; açıklaması “eksik açıklamak” olarak kategorilendirilmiştir. 2. öğrenci, “ekok” kısaltmasının açılımını doğru şekilde ifade edebilmiş; ancak “ekok” kavramının anlamına dair bir şey söyleyememiş, tanımlama yapamamıştır. Buna gerekçe olarak ise; “ekok”un, 6. sınıfta öğrenilen bir kavram olmasını ve kendisinin, 6. sınıf kavramlarını tekrar çalışmamış olmasını göstermiştir. Ayrıca 2. öğrenci, “ekok” kavramı üzerinde konuşulurken, tek bir sayının ekok’unu almaya kalkışmış; fakat sonrasında hatasını fark ederek düzeltmiştir. Ancak ilk önce yapmış olduğu bu hata; öğrencinin, ekok hesap algoritması ile ilgili kavram yanlışlığına sahip olduğunu göstermiş ve bunun da, öğrencinin zihninde, “ekok” kavramının ve ekok hesabına yönelik algoritmanın tam olarak yapılanmamış olmasından kaynaklandığı düşüncesini akla getirmiştir. 3. öğrenci ise; formal ya da informal bir tanım yapmayarak, sadece ekok hesabına yönelik algoritmayı açıkladığından; 3. öğrencinin açıklaması, “eksik açıklama” olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 4.3’de “kavram–işlem kullanımı” adlı ana kategori ekseninde; “uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmak”, “(uygun kavramı/işlemi) eksik kullanmak” ve “(uygun kavramı/işlemi) doğru şekilde kullanmak” adlı üç kategori bulunmaktadır. “Uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmak” kategorisi, “çarpma işlemi” isimli tek bir alt kategoriden oluşmaktadır. “Eksik kullanmak”

kategorisinde, “kavram” alt kategorisi; “doğru şekilde kullanmak” kategorisinde ise, “algoritma” alt kategorisi yer almaktadır. 2. ve 3. öğrencinin her ikisi de; ekok hesaplamaya yönelik işlem/algoritma bilgisini doğru şekilde kullanarak, 4 ile 6 sayılarının ekok’unu hesaplamışlardır. 1. öğrenci ise; ilk önce, böyle problemleri hiç çözemediğini belirtmiş; daha sonra –ne yaptığının ve neden yaptığının yeterince farkında olmaksızın– çözüm için uygun olmayan bir işlem olan “çarpma işlemi”ni kullanmıştır. 1. öğrencinin tamamlayıcı görüşmede söylediklerinden hareketle; –kavramdan isim olarak doğrudan bahsetmemiş olmasına rağmen– aslında çözümde “ortak kat” kavramını kullanmış olduğu; fakat herhangi bir “ortak kat”ın değil de, “ortak katların en küçüğü”nün hesaplanması gerektiğini düşünemediğinden, uygun kavramı eksik kullandığı yorumu yapılmıştır. “Sonuca ulaşmak” adlı ana kategori ekseninde; “şıklarda olan yanlış sonuca ulaşmak” ve “doğru sonuca ulaşmak” olmak üzere iki tane kategori bulunmaktadır. “Şıklarda olan yanlış sonuca ulaşmak” kategorisi, –“yanlış sonuca ulaşma nedeni” açısından değerlendirildiğinde– “kavramın yeterince yapılanmamış olması” şeklinde bir alt kategoriye; “doğru sonuca ulaşmak” kategorisi ise, –“sonuca ulaşma süresi” ekseninde boyutsal olarak değerlendirildiğinde– “kısa süre” ve “geç” olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. “Sonuca ulaşma süresi” ekseninde yer alan “geç” alt kategorisi de, –nedeni açısından incelendiğinde– “ilgili kavramı geç belirlemek” biçiminde detaylandırılmıştır. “Sonuca ulaşmak” adlı ana kategori eksenini kısaca açıklanacak olursa; 2. ve 3. öğrenci, doğru olan 12 sonucuna ulaşmışlardır. 3. öğrenci, doğru sonuca kısa sürede ulaşabilirken; 2. öğrencinin, ilgili kavramı (ekok) belirlemesi uzun sürdüğünden, çözüm süreci uzamış ve dolayısıyla sonuca ulaşması da geç olmuştur. 1. öğrenci ise, –zihninde “en küçük ortak kat” kavramı yeterince yapılanmamış olduğundan– “ekok” kavramını çözümde kullanamamış ve (şıklarda olan) yanlış sonuca ulaşmıştır.

Ayrıca, çözümünde hiçbir formüle ihtiyaç olmayan bu problem için; 1. öğrencinin, bu tür problemlerin formül bilinmeden çözülemeyeceğini ve formülleri ezberleyemediğinden bu problemleri çözemediğini söylemesi de dikkat çekmiştir. 1. öğrencinin, çözüm sırasında yaptığı bazı açıklamalardan; aslında çözüm yolu hakkında bir fikrinin olmadığı; şıklar arasında doğru şık olabileceğini düşündüğü şıkka göre çözüm yolunu belirlemiş olduğu sonucu çıkarılmıştır.

4.1.2. İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

“Doğal sayılar” ile ilgili diğer soru, “2009 yılı 6. sınıf Seviye Belirleme Sınavı (SBS) soruları” arasından seçilmiştir ve katılımcı ilköğretim öğrencilerine, 26 Mayıs–2 Haziran 2010 tarihleri arasında yapılmış olan 4. görüşmelerde sorulmuştur. Bu soru, – kazanımlar açısından– 6. sınıf matematik öğretim programındaki “sayılar” öğrenme alanının “doğal sayılar” alt öğrenme alanında yer alan bir kazanımla ilgili bulunmuştur (Tablo 4.6).

Tablo 4.6
İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar

4. GÖRÜŞME / 2. SORU	KAZANIMLAR
415_76_ Gökçe yedi basamaklı olan yukarıdaki bilgisayar şifresinin bazı rakamlarını unutuyor. Bu şifrenin 6 ile bölünebildiğini ve rakamlarının birbirinden farklı olduğunu hatırladığına göre, Gökçe’nin bilgisayar şifresi aşağıdakilerden hangisi <u>olabilir</u>? A) 4158762 B) 4158763 C) 4153761 D) 4152762 (2009 SBS – 6. SINIF – 5. SORU) (Cevap: A)	4. Bölünebilme kurallarını açıklar.

Tablo 4.7

İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar

İrdelenecek Matematiksel Kavram/Kural Listesi	Matematiksel Kavram/Kural
Basamak	Matematiksel kavram
Rakam	Matematiksel kavram
6 ile bölünebilme	Kural
2 ile bölünebilme	Kural
3 ile bölünebilme	Kural

4.1.2.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi

Bir sayının 6 ile bölünebilmesi için; sayı, hem 2 hem de 3 ile bölünebilmelidir. Çözüm sürecinde bu kural göz önüne alınacak olursa; 2 ile bölünebilme kuralı (“birler basamağı sıfır veya çift olan sayılar, 2 ile kalansız bölünür”) kullanılarak; B ve C şıkları elenebilir. 3 ile bölünebilme kuralı (“rakamları toplamı 3’ün katı olan sayılar, 3 ile kalansız bölünür”) kullanılarak ve problem ifadesinde geçen “rakamlarının birbirinden farklı olduğu” bilgisi dikkate alınarak; birler ile binler basamağı aynı olan D şikkı da elenebilir. Böylece doğru cevap olarak A şikkına (4158762) ulaşılabilir.

Bu problem ifadesinde geçen veya çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezdeki kavramlar düşünülerek; katılımcı ilköğretim öğrencilerinin “basamak”, “rakam” kavramları ve “6 ile bölünebilme”, “2 ile bölünebilme”, “3 ile bölünebilme” kuralları ile ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır (Tablo 4.7).

4.1.2.2. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Bu bölümde; ilköğretim öğrencilerinin, –bu problemi çözme sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlar olan– “basamak”, “rakam” kavramları ve “6 ile

bölünebilme”, “2 ile bölünebilme”, “3 ile bölünebilme” kuralları ile ilgili yapmış oldukları tanım ve açıklamalara yer verilecektir.

4.1.2.2.1. İlköğretim öğrencilerinin, “basamak” kavramı ile ilgili anlayışları.

“Basamak” kavramı için öğrencilerin yapmış oldukları açıklama ve araştırmacı-öğrenci konuşmaları aşağıdaki şekildedir:

Öğrenci: Basamak; bir sayının katı. Mesela sayı, sola doğru ne kadar artarsa...

Görüşmeci: Sola doğru, mı? (*“Tamam; sonra?” anlamında*)

Öğrenci: Birler, onlar, yüzler, birler (*demek istediği: “binler”*) diye. Yani birinci basamak, onuncu işte...

Görüşmeci: Birler basamağı...

Öğrenci: Sıfırdan dokuza kadar olan sayılar bir tane; yani tek rak... sembol. “Onlar basamağı” dediğinde; 10’dan 99’a olan bütün sayılar, iki sembol içeriyor.

Görüşmeci: Bunun basamakla ilişkisi ne?

Öğrenci: İşte iki, mı (*düşünüyor*)... “10’dan 99’a kadar” dedik ya. Bunlar 10’ar... 10 sayısı, yani iki basamaklı olduğu için; 10 da en ... küçük sayı olduğu için, 10. 100 denince, en küçük sayı 100. 1000 denince, en küçük sayı 1000. (1. öğrenci – 4. görüşme)

Öğrenci: Yani şimdi, burada basamaklar var işte. Birler, onlar, yüzler diye gidiyor mesela. Şu en küçük basamak, “birler” diye adlandırılıyor; sonraki “onlar”, sonraki “yüzler”.

Görüşmeci: “Birler basamağı” hangi taraf?

Öğrenci: En sağdaki.

Görüşmeci: Hım, tamam.

Öğrenci: Ee, tabii şey yani, bu... bunu; şeyde, ondalık kesirlerde farklı adlandırılıyor. (2. öğrenci – 4. görüşme)

“Sayının değeri, bulunduğu yeri. Mesela yani bu rakamın, 6’nın (*yani: “415_76_” sayısındaki 6 rakamı*); bu onlar basamağında, yani 60 oluyor.” (3. öğrenci – 4. görüşme)

“Basamak” tanımı sorulduğunda; matematik başarı düzeyi “orta” olan 1 no’lu öğrenci, “basamak” kavramını örnek üzerinden açıklamış ve birler, onlar vs. basamaklarının neye göre isimlendirildiklerini, neden o şekilde adlandırıldıklarını anlatmıştır. Matematik başarı düzeyi “iyi” olan 2 no’lu öğrenci de, –1. öğrenciye benzer biçimde– “basamak” kavramını örnek üzerinden açıklamıştır. Matematik başarı düzeyi “çok iyi” olan 3 no’lu öğrenci ise, önce “basamak” kavramının informal tanımını yapmış; daha sonra da, soruda verilmiş olan sayı üzerinde “basamak değeri” için bir örnek vermiştir. Öğrencilerin bu açıklamaları dikkate alındığında; 3. öğrencinin “basamak” kavramını

tanımlayabildiği, 1. ve 2. öğrencinin yapmış oldukları açıklamaların da doğru olduğu söylenebilir.

4.1.2.2.2. İlköğretim öğrencilerinin, “rakam” kavramı ile ilgili anlayışları.

“Rakam” kavramı için; 1. öğrenci, “*Sayılar; ama sıfırdan dokuz kadar olan sayılar, rakam... sembol.*” (1. öğrenci – 4. görüşme) şeklinde tanım yapmış; araştırmacının “*Sıfır, dokuz dahil mi, peki?*” sorusuna da, “*Evet*” yanıtını vermiştir. Buradan; 1. öğrencinin, “rakam” kavramını bildiği ve doğru biçimde tanımladığı görülmektedir.

2. öğrenci, “rakam” tanımı üzerine biraz düşündükten sonra,

“(3 sn. sessizlik) Sayılar yani. Normal, ... (anlaşılamadı) öyle. Ama şey, “rakam” deyince; ben yanlış mı biliyorum, onun tanımını bilmiyorum ama. İlkokuldayken, onu... ya unutuyorum onları. ... Şey, böyle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; onlar “sayma sayıları” oluyordu galiba.” (2. öğrenci – 4. görüşme)

sözleriyle; tanımı bilmediğini, “sayma sayıları” ile karıştırdığını ifade etmiştir. Ayrıca artık derslerde “rakam” tanımını ilkokulda olduğu gibi işlemediklerini dile getirmiştir ve devamında, araştırmacı ile 2. öğrenci arasında aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Görüşmeci: Yani “en büyük rakam kaçtır?” desem; söyleyemez misin?

Öğrenci: Söyleyemem. Yani bilmi... şimdi... Öyle... yani normalde 9; ama o sayma sayısı mı hatırlamıyorum işte. Hep karıştırıyorum onları.

Görüşmeci: Hım, tamam.

Öğrenci: Ama 9 mu... yani nasıl oluyor? Anlamadım; ben onları bilmiyorum. Sayma sayısı... sayma sayıları, 0’dan 9’a... Yok! 1’den 9’a kadar olması lazım. Öyle bir ayrım vardı. (2. öğrenci – 4. görüşme)

Bu konuşmada da, “rakam” ile “sayma sayısı” kavramlarını karıştırdığını yineleyen 2. öğrencide; aslında “sayma sayısı” kavramının da yapılanmamış olduğu dikkati çekmiştir.

3. öğrenci ise, “rakam” kavramı için, “*kısaca, tek basamaklı sayılar*” (3. öğrenci – 4. görüşme) tanımlamasını yapmıştır. Araştırmacının “*En büyük rakam kaç, bu durumda?*” sorusuna, “9” cevabını veren 3. öğrenci; “en küçük rakam” sorulduğunda ise, şöyle cevap vermiştir:

“1... mi? 1, galiba. Evet. ‘Rakam’la ‘doğal sayı’yı pek... karıştırdığım için; ‘sıfır dâhil mi?’ diye karıştırıyorum sürekli. ... [Rakamda] dâhildi galiba.” (3. öğrenci – 4. görüşme)

Buradan da görüldüğü gibi; 3. öğrenci de, “en küçük rakam” konusunda 0 ile 1 arasında ikilemde kalmış ve “rakam” ile “doğal sayı” kavramlarını karıştırdığından bahsetmiştir. Az sonra araştırmacı “*Sıfır dâhil midir, değil midir? Bunu net hatırlayamadık mı?*” diye sorduğunda; 3. öğrenci, “*Evet*” yanıtını vermiştir.

Kısacası, üç ilköğretim öğrencisinin, “rakam” kavramına dair söyledikleri yorumlanacak olursa; 1. öğrenci, “rakam” kavramını doğru şekilde tanımlarken; 2. öğrencinin, kavramı net bir şekilde tanımlayamadığı; 3. öğrencinin ise, “rakam” kavramına yönelik bilgisinin eksik olduğu söylenebilir. Ayrıca 3. öğrenci, “rakam” ile “doğal sayı” kavramlarını karıştırdığından bahsederken; 2. öğrenci de, “rakam” ile “sayma sayısı” kavramlarını karıştırdığını dile getirmiş ve buna gerekçe olarak da, artık derslerde bu kavramların tanımlarının ilkokulda olduğu gibi işlenmiyor olmasını göstermiştir.

4.1.2.2.3. İlköğretim öğrencilerinin, “6 ile bölünebilme” kuralı ile ilgili anlayışları. “6 ile bölünebilme kuralı” ile ilgili olarak; 1. öğrenci, önce, aşağıdaki yorumu yapmıştır:

“Şimdi, şöyle bir şey deneyelim: 4, 6 daha; 10, 17, 22, 23. *(Bilgisayar şifresinin belli olan rakamlarının toplamını hesapladı.)* 23’e kaç eklenirse, 6’ya bölünebilen bir sayı olmalı? *(3 sn. sessizlik)* 1 eklenirse olabilir; 7 eklenirse olabilir. *(4 sn. sessizlik)* İını *(düşünüyor)*, sonra? *(Mırıldanarak düşünüyor:)* “6, 12, 18, 24, 30, 36.” 6 oradan, 7 oradan. Bir de 13 eklenirse olabilir.” (1. öğrenci – 4. görüşme)

“6 ile bölünebilme kuralı”nı, yukarıdaki gibi yanlış şekilde ifade eden 1. öğrenci; daha sonra, “*Bilmiyorum. Hem... yani 3 ile... hem 3 ile, hem 2 ile bölünebilmeli.*” (1. öğrenci – 4. görüşme) açıklamasını yapmıştır. Böylece –geç de olsa– kuralı hatırlamış ve doğru biçimde ifade etmiştir. 1. öğrenci; ilk baştaki “23’e kaç eklenirse, 6’ya bölünebilen bir sayı olur?” düşüncesini ise, şöyle izah etmiştir:

“Onu sadece... şey, ben mantık yürüttüm. Hani “rakamları toplamı 6... 6’ya bölünebilen bir sayı olursa, bölünebilir mi?” diye. ... Yani o, bana ait bir şey aslında.” (1. öğrenci – 4. görüşme)

2. öğrenci, “6 ile bölünebilme kuralı”nı unuttuğunu söylemiş ve problemin çözümüyle ilgili olarak şöyle bir mantık yürütmüştür:

“Ee, şimdi mesela, ben böyle soruları... Yani ‘6 ile bölünebilme’, mesela şu an ben de unuttum, mesela ‘6 ile bölünebilme’. Ama 6’nın katları... mesela şıklardan gidersek. Direkt eleyebileceğimiz şıklar var mesela. 6’nın katlarına bakarsak; mesela şu B ve C şıklarında 3 ve 1 diyor. *(bahsettiği şey: “sayıların birler basamağı”)* 6’nın hiçbir katında; 3 ve 1 yok.” (2. öğrenci – 4. görüşme)

“6’nın hiçbir katında, 3 ve 1 olmamasının nedeni” sorulduğunda; 2. öğrenci, önce “Ee, alırsanız üç ve dördüncü katını; yani herhangi bir katlarını. Yani öyle hatırlıyorum ama. İnşallah yoktur.” (2. öğrenci – 4. görüşme) demiş ve biraz düşündükten sonra, gerekçesini de aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

“Ya, ‘çift sayıların çarpımı, çift’... diye biliyorum. Hayır, değil! *(2 sn. sessizlik)* Evet, çift.” (2. öğrenci – 4. görüşme)

Böylelikle 2. öğrenci, 6’nın hiçbir katında, 3 ve 1 olmamasının nedenini açıklayabilmiştir. B ve C şıklarını eleyerek, şıkları ikiye indiren 2. öğrenci; “*İuu (düşünüyor—4 sn. sessizlik)*, ‘6 ile bölünebilme kuralı’, hem 3 ile, hem 2 ile bölünebilecek miydi acaba, o mıydı? Bir, bir... bir dakika! Bakayım bir!” (2. öğrenci – 4. görüşme) diyerek, “6 ile bölünebilme kuralı”nı hatırlamaya çalışmıştır. 15 saniye mırıldanarak düşündükten sonra; “*Şimdi, işte öyle, hem üçe, hem ikiye bölünebildiğini... diye varsayıyorum; öyle hatırlıyorum ama.*” (2. öğrenci – 4. görüşme) sözleriyle, – kendisi tam emin olamasa da– “6 ile bölünebilme kuralı”nı doğru şekilde hatırlayabilmiştir.

3. öğrenci ise; “... 6’ya bölünebilen bir sayı, hem 2’ye hem 3’e bölünebilmesi gerekiyor.” (3. öğrenci – 4. görüşme) sözleriyle, “6 ile bölünebilme kuralı”nı doğru biçimde açıklamıştır.

Kısacası, “6 ile bölünebilme kuralı”nı; ilk başta, 1. öğrenci yanlış hatırlamış ve 2. öğrenci hatırlayamamış olsa da; biraz düşündükten sonra, her ikisi de hatırlayabilmiş ve doğru şekilde ifade etmişlerdir. 3. öğrenci ise; “6 ile bölünebilme kuralı”nı, kısa sürede ve doğru biçimde açıklayabilmiştir.

4.1.2.2.4. İlköğretim öğrencilerinin, “2 ile bölünebilme” kuralı ile ilgili anlayışları. “6 ile bölünebilme kuralı”nı, *–geç de olsa–* “hem 2 hem de 3 ile bölünebilme” şeklinde ifade eden üç öğrenciden; “2 ile bölünebilme” ve “3 ile bölünebilme” kurallarını açıklamaları istenmiştir. “2 ile bölünebilme” kuralı ile ilgili olarak, öğrencilerin yapmış oldukları açıklamalar ve araştırmacı–öğrenci konuşması aşağıdaki şekildedir:

“2 ile bölünebilme; birler basamağında çift basamaklı olan her... Yani çift sayı bulunan her rakam... Yok! Çift rakam, ıııı (*düşünüyor*)... ondan işte, bulunabilen bütün sayılar ikiye bölünebiliyor. Yani bütün sayılar bölünebiliyor da; bunlar tam bölünüyor.” (1. öğrenci – 4. görüşme)

“2’ye bölünme de; son rakamı çift olduğunda, 2’ye bölünebiliyor.” (2. öğrenci – 4. görüşme)

Öğrenci: 2 ile bölünebilme; şey... ıııı (*düşünüyor*), son basamağındaki sayı, çift olmak zorunda, 2’nin katı.

Görüşmeci: “Son” derken, kaçınıcı basamak?

Öğrenci: Birler basamağı. ... Yani 2 ve 2’nin katı.

Görüşmeci: Hım. 2’nin katı. Hangi rakamlar olabilir? Onu da yine bi söyle!

Öğrenci: Yani 2, 4, 6, 8.

Görüşmeci: Bu kadar mı?

Öğrenci: Sıfır. (3. öğrenci – Tamamlayıcı görüşme)

“2 ile bölünebilme kuralı”nı; üç öğrencinin de, doğru bildiği görülmüştür. 1. öğrenci, “2 ile bölünebilme kuralı”nı açıklarken; –diğer iki öğrenciden farklı olarak– “tam bölünebilme” kavramına da vurgu yapmıştır.

4.1.2.2.5. İlköğretim öğrencilerinin, “3 ile bölünebilme” kuralı ile ilgili anlayışları. “3 ile bölünebilme kuralı” için; 1. öğrenci, “3 ile bölünebilmede, orada kazık oluyor. Onu bilmiyorum.” (1. öğrenci – 4. görüşme) demiştir. 2. ve 3. öğrenci ise, kuralı şöyle ifade etmiştir:

“3’e bölünebilme kuralı; şey, sayının tüm rakamlarının toplamı olacaktı; 3’e bölünebiliyorsa, 3’e bölünebilir o sayı.” (2. öğrenci – 4. görüşme)

“Yani o sayının rakamları toplamının, 3 ve 3’ün katı olması gerekiyor.” (3. öğrenci – Tamamlayıcı görüşme)

Öğrencilerin “3 ile bölünebilme kuralı” için söyledikleri değerlendirildiğinde; 2. ve 3. öğrencinin, kuralı doğru şekilde ifade ettiği; 1. öğrencinin ise, kuralı bilmediğinden dolayı ifade edemediği görülmüştür.

İlköğretim öğrencilerinin, problem ifadesinde geçen veya çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlar ile ilgili yapmış oldukları tanım ve açıklamalar göz önüne alınarak; öğrencilerin problemde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları Tablo 4.8’de listelenmeye çalışılmıştır.

Tablo 4.8

İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Kavramlar	Öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları		
	1. öğrenci	2. öğrenci	3. öğrenci
Basamak	doğru açıklamak	doğru açıklamak	doğru tanımlamak
Rakam	doğru tanımlamak	tanımlayamamak	eksik tanımlamak
6 ile bölünebilme	doğru açıklamak	doğru açıklamak	doğru açıklamak
2 ile bölünebilme	doğru açıklamak	doğru açıklamak	doğru açıklamak
3 ile bölünebilme	açıklayamamak	doğru açıklamak	doğru açıklamak

4.1.2.3. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışlarının ardından; şimdi de, öğrencilerin bu problemi çözme sürecinde kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili olarak elde edilmiş bulgular sunulacaktır.

1. öğrenci, “Şimdi bir kere ‘birbirinden farklı’ diyor. O zaman ‘Denizli’ (kastettiği: “D şıkkı”) gitti.” (1. öğrenci – 4. görüşme) ve 3. öğrenci, “Bir kere ‘Denizli’ olamaz, D şıkkı. Çünkü iki tane 2 var. ‘Birbirinden farklı’ diyor.” (3. öğrenci

– 4. görüşme) diyerek; soruda geçen “rakamları birbirinden farklı” ifadesini gerekçe göstermiş ve D şikkını (yani “4152762” sayısını) baştan elemişlerdir.

D şikkını elemiş olan 1. öğrenci, “6 ile bölünebilme kuralı” için, “2 ve 3 ile bölünebilmeli” (1. öğrenci – 4. görüşme) düşüncesini yineleyerek; “Zaten burada iki ta... bir tane şık bölünebiliyor.” (1. öğrenci – 4. görüşme) demiştir. Kendisi açıkça ifade etmese de, 2 ile bölünebilme kuralını kullanarak, B ile C şıklarını eleyen 1. öğrenci; “A” (doğru) şikkını bulmuştur. Daha önce belirtildiği gibi, “3 ile bölünebilmede, orada kazık oluyor. Onu bilmiyorum.” (1. öğrenci – 4. görüşme) sözleriyle, “3 ile bölünebilme kuralı”nı bilmediğini ifade etmiş olan 1. öğrencinin; kuralı bilmemesi, problemin çözümü için sorun olmamış ve öğrenci, doğru sonuca ulaşabilmiştir (Şekil 4.4).

2)

23 1 7 13

415_76_

Gökçe yedi basamaklı olan yukarıdaki bilgisayar şifresinin bazı rakamlarını unutuyor. Bu şifrenin 6 ile bölünebildiğini ve rakamlarının birbirinden farklı olduğunu hatırladığına göre, Gökçe'nin bilgisayar şifresi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 4158762 B) 4158763
C) 4153761 D) 4152762

2 3
basamaklar
yüzler
binler
onlar
birler
sayı: 7

Şekil 4.4

1. Öğrencinin, 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

1. öğrencinin yaptığı gibi, D şikkını baştan elemiş olan 3. öğrenci; “B de olamaz. Çünkü 6’ya bölünebilen bir sayı, hem 2’ye hem 3’e bölünebilmesi gerekiyor. Son basamağı 3 olduğu için; o da olmaz. ... Şimdi... Aa! O zaman C de olmuyor. ... Onun da 1, son basamağı. Bir tek, Adana (kastettiği: “A şikkı”) kalıyor.” (3. öğrenci – 4. görüşme) diyerek, çözümünü kısa sürede tamamlamıştır. 1. öğrenci gibi, “3 ile bölünebilme” kuralının kullanımına ihtiyaç duymadan– sadece “2 ile bölünebilme” kuralını kullanarak, B ve C şıklarını da elemiş olan 3. öğrenci; “A” doğru şikkına ulaşmıştır.

2. öğrenci ise, “Çift sayıyla... herhangi bir sayıyı çarpınca; hep çift çıkıyor. Onun için, B ve C şıklarını eleyebiliriz.” (2. öğrenci – 4. görüşme) diyerek, B ve C

şıklarının üzerlerini çizmekle çözüme başlamıştır. Kendisi tam emin olamasa da, “6 ile bölünebilme kuralı”nı, “hem üçe, hem ikiye bölünebilme” olarak doğru şekilde hatırlayan 2. öğrenci, “3 ile bölünebilme kuralı”nı dikkate alarak; A şıkkındaki sayının rakamlarını, zihinden toplamış ve toplamı 33 bulmuştur. Benzer şekilde, D şıkkındaki sayının rakamları toplamını da 27 olarak hesaplamıştır. 2. öğrenci, *“Bu bölünüyor. Bir de bu da bölünüyor. Demek ki yanlış, ben yanlış şeyi hatırlıyorum.”* (2. öğrenci – 4. görüşme) diyerek; hem 33, hem de 27 sayısının 3’e bölünebildiğini ve bu nedenle kendisinin “6 ile bölünebilme kuralı”nı yanlış hatırladığını düşünmüştür. A ve D şıklarındaki sayıların rakamlarını tekrar toplayarak, hesaplamada hata yapmadığını doğrulayan 2. öğrenci; problemin çözümü ile ilgili aşağıdaki yorumu yapmıştır:

“O da bölünüyor; demek ki, benimki yanlış. O zaman, geriye tek çare kalıyor. İşte direkt birisini böleceğiz; hangisi çıkarsa. O zaman öyle yani. Ama bir dakika! Hayır. Ben bir şeyi yanlış yapıyorum. “Rakamlarının birbirinden farklı” diyor. Onu kaçırmışım.” (2. öğrenci – 4. görüşme)

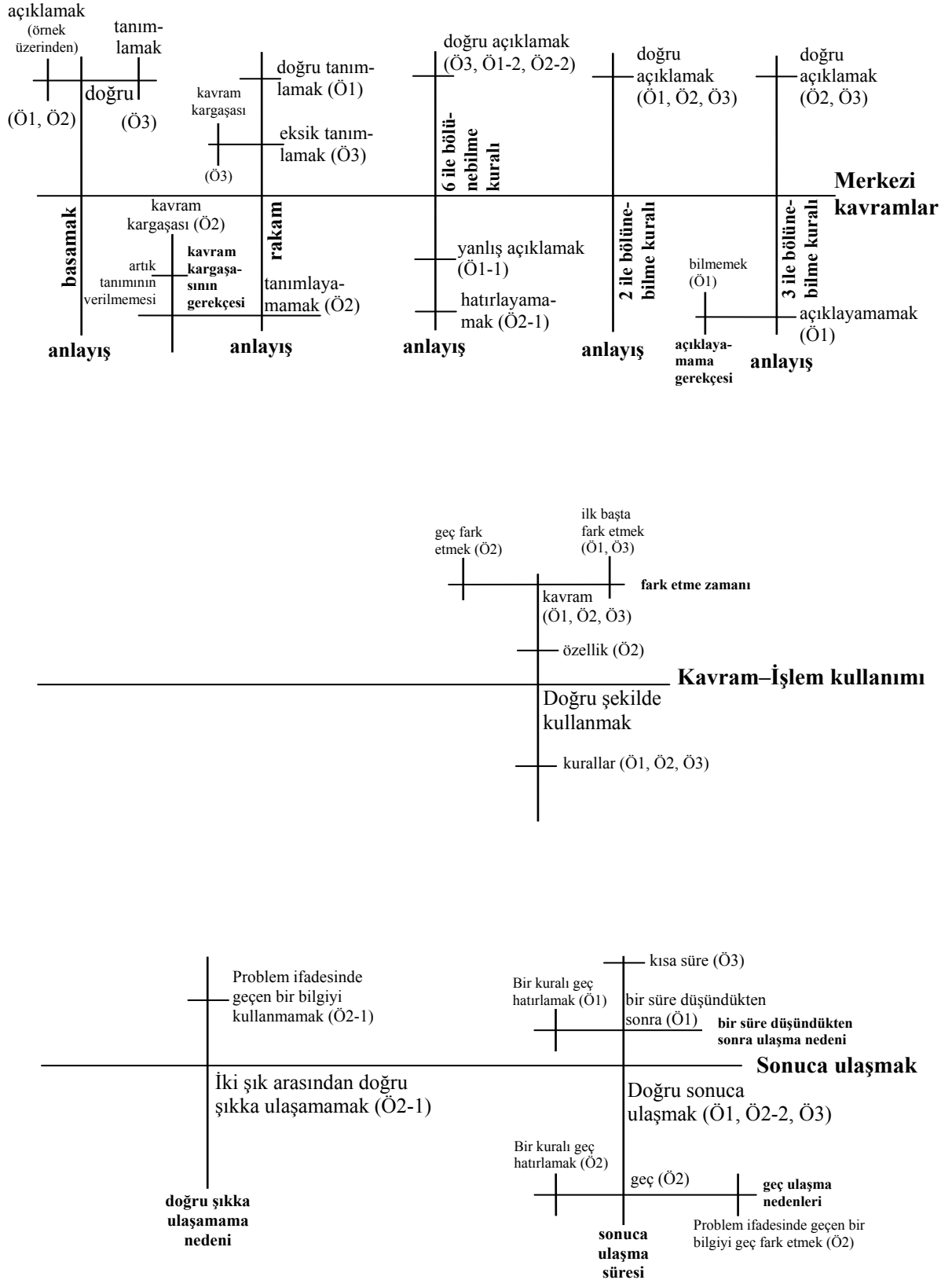
Problem ifadesinde geçen “rakamları birbirinden farklı” ibaresini fark eden 2. öğrenci, derin bir nefes aldıktan sonra; bu durumda doğru yanıtın “A” şıkkı olduğunu söylemiştir. Diğer iki öğrenciye kıyasla, 2. öğrenci, soruda geçen “rakamları birbirinden farklı” ifadesini geç fark ettiğinden; sonuca ulaşması biraz zaman almıştır. Ayrıca 2. öğrenci, *“Şey, okuma hatası olunca bazen mesela böyle şeylerde. ... Zaman kaybı.”* (2. öğrenci – 4. görüşme) diyerek; bu tür okuma hatalarının, zaman kaybına neden olduğundan kendisi de bahsetmiştir.

4.1.2.4. İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, 4. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili problemi çözme sürecinde; problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları, kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili elde edilmiş kategoriler bir araya getirilerek; her bir öğrencinin, problemi çözme süreci Tablo 4.9’da özetlenmiş ve Şekil 4.5’de de eksensel kodlaması gösterilmiştir.

Tablo 4.9
İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Öğrenci no	Merkezi kavramlarla ilgili anlayışları	Kullandıkları kavramlar–işlemler	Kategoriler (Kavram–işlem kullanımı)	Kategoriler (Sonuca ulaşmak)	
1	Basamak (doğru açıklamak) Rakam (doğru tanımlamak) 6 ile bölünebilme (doğru açıklamak) 2 ile bölünebilme (doğru açıklamak) 3 ile bölünebilme (açıklayamamak)	Rakam (“ <i>rakamlarının birbirinden farklı olduğu</i> ” bilgisi) 6 ile bölünebilme kuralı 2 ile bölünebilme kuralı	Uygun kavramı/ kuralları doğru şekilde kullanmak	Bir süre düşündükten sonra doğru sonuca ulaşmak	
2	Basamak (doğru açıklamak) Rakam (tanımlayamamak) 6 ile bölünebilme (doğru açıklamak) 2 ile bölünebilme (doğru açıklamak) 3 ile bölünebilme (doğru açıklamak)	“Çift sayıyla herhangi bir tamsayının çarpımının, her zaman çift sayı olması” özelliği 6 ile bölünebilme kuralı 3 ile bölünebilme kuralı	Uygun özelliği/ kuralları doğru şekilde kullanmak	İki şık arasından doğru şıkla ulaşamamak	Geç de olsa doğru sonuca ulaşmak
		Rakam (“ <i>rakamlarının birbirinden farklı olduğu</i> ” bilgisi)	Geç fark ettiği uygun kavramı doğru şekilde kullanmak		
3	Basamak (doğru tanımlamak) Rakam (eksik tanımlamak) 6 ile bölünebilme (doğru açıklamak) 2 ile bölünebilme (doğru açıklamak) 3 ile bölünebilme (doğru açıklamak)	Rakam (“ <i>rakamlarının birbirinden farklı olduğu</i> ” bilgisi) 6 ile bölünebilme kuralı 2 ile bölünebilme kuralı	Uygun kavramı/ kuralları doğru şekilde kullanmak	Kısa sürede doğru sonuca ulaşmak	



Şekil 4.5

İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, 4. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili problemi çözme süreçleri özetlenecek olursa; bu soruda, ilköğretim öğrencilerinin, “basamak”, “rakam” kavramları ve “6 ile bölünebilme”, “2 ile bölünebilme”, “3 ile bölünebilme” kuralları ile ilgili anlayışlarının incelenmesi amaçlanmıştır. “Basamak” kavramını; 1. ve 2. öğrenci, örnek üzerinden doğru şekilde açıklamış; 3. öğrenci ise, kavramın informal tanımını yapmıştır. “Rakam” kavramını; 1. öğrenci, doğru şekilde tanımlarken; 2. öğrenci, kavramı net bir şekilde tanımlayamamış, “rakam” ile “sayma sayısı” kavramlarını karıştırdığını ifade etmiş ve buna gerekçe olarak da, artık derslerde bu kavramların tanımlarının ilkokuldaykenki gibi işlenmiyor olmasını göstermiştir. 3. öğrenci ise, “rakam” kavramına yönelik eksik bir tanımlama yapmış ve “rakam” ile “doğal sayı” kavramlarını karıştırdığından bahsetmiştir. İlköğretim öğrencilerinin, “bölünebilme kuralları” ile ilgili anlayışları özetlenecek olursa; “6 ile bölünebilme kuralı”nı, ilk başta, 1. öğrenci yanlış hatırlamış ve 2. öğrenci hatırlayamamıştır; fakat biraz düşündükten sonra, her iki öğrenci de, kuralı doğru şekilde ifade edebilmiştir. 3. öğrenci ise; “6 ile bölünebilme kuralı”nı, kısa sürede ve doğru biçimde açıklayabilmiştir. “2 ile bölünebilme kuralı”nı, üç öğrenci de, doğru şekilde açıklayabilmiş; “3 ile bölünebilme kuralı”nı ise, 2. ve 3. öğrenci, doğru şekilde ifade ederken, 1. öğrenci, bilmediğinden dolayı ifade edememiştir.

Tablo 4.9’den da görülebildiği gibi; 1. öğrenci ile 3. öğrenci, problem ifadesinde geçen “şifrenin rakamlarının birbirinden farklı olduğu” bilgisini, 6 ile bölünebilme kuralını ve 2 ile bölünebilme kuralını doğru şekilde kullanarak, doğru sonuca ulaşmışlardır. 3. öğrenci, kısa bir süre içerisinde çözümünü tamamlayarak, doğru sonucu elde ederken; 1. öğrenci, “6 ile bölünebilme kuralı”nı hatırlamakta zorlandığından, sonuca ulaşma süresi biraz uzamıştır. Bu iki öğrenci gibi, doğru sonucu bulan 2. öğrenci ise; problemi çözerken ilk başta, “çift sayıyla herhangi bir tamsayının çarpımının, her zaman çift sayı olması” özelliğinden, 6 ile bölünebilme kuralından ve 3 ile bölünebilme kuralından yararlanmış; fakat problem ifadesinde geçen “rakamları birbirinden farklı” ibaresini fark edemediğinden, iki şık arasından doğru olan şıkkı bulamamıştır. 2. öğrenci; çözüm için bir süre uğraştıktan sonra, soruda verilmiş olan bu bilgiyi fark etmiş ve çözümde kullandıktan sonra da doğru sonucu bulabilmiştir. Ancak “6 ile bölünebilme kuralı”nı hatırlamakta zorlandığından ve soruda geçen “rakamları birbirinden

farklı” ifadesini geç fark ettiğinden; çözüm süreci uzamış ve sonuca geç ulaşabilmiştir.

Ayrıca “3 ile bölünebilmede, orada kazık oluyor. Onu bilmiyorum.” (1. öğrenci – 4. görüşme) sözleriyle, “3 ile bölünebilme kuralı”nı bilmediğini ifade etmiş olan 1. öğrencinin; kuralı bilmemesinin, problemin çözümü için sorun oluşturmaması ve doğru şıkka ulaşmasına engel olmaması dikkati çekmiştir. 1. öğrenci ve 3. öğrenci; çözümde “3 ile bölünebilme kuralı”nın kullanımına ihtiyaç duymadan, doğru sonucu elde edebilmiştir.

4.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerine, “doğal sayılar” ile ilgili üç tane soru sorulmuştur.

4.2.1. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

“Doğal sayılar” ile ilgili bir soru, “2008 yılı Öğrenci Seçme Sınavı (ÖSS) Matematik–1 testi” soruları arasından seçilmiştir ve katılımcı ortaöğretim öğrencilerine, 16 Mart–23 Mart 2010 tarihleri arasında gerçekleştirilen 1. görüşmede sorulmuştur. Bu soru, –kazanımlar açısından– 9. sınıf matematik öğretim programındaki “cebir” öğrenme alanının “sayılar” bölümünün “doğal sayılar” alt öğrenme alanında yer alan bir kazanımla ilgili bulunmuştur (Tablo 4.10).

Tablo 4.10
Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar

1. GÖRÜŞME / 2. SORU	KAZANIMLAR
Eni 81 metre, boyu 270 metre olan dikdörtgen biçimindeki bir tarla, hiç alan artmayacak biçimde eş karelere bölünerek küçük bahçeler yapılıyor. Bu şekilde <u>en az</u> kaç tane eş bahçe elde edilir? A) 27 B) 30 C) 33 D) 35 E) 40 (2008 ÖSS MAT-1 – 13. SORU) (Cevap: B)	6. İki ya da daha çok doğal sayının en büyük ortak bölenini ve en küçük ortak katını bulur.

Tablo 4.11

Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar

İrdelenecek Matematiksel Kavram/Formül Listesi	Matematiksel Kavram/Formül
Dikdörtgen	Matematiksel kavram
Kare	Matematiksel kavram
Bölen	Matematiksel kavram
Ortak bölen	Matematiksel kavram
En büyük ortak bölen (ebob)	Matematiksel kavram
Dikdörtgenin alanı	Formül
Karenin alanı	Formül

4.2.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi

Dikdörtgen biçimindeki bu tarlayı, hiç alan artmayacak biçimde kare şeklindeki eş bahçelere bölmek için; dikdörtgenin iki kenar uzunluklarının en büyük ortak böleni hesaplanabilir. Bu çözüm yolu takip edildiğinde; kare şeklindeki bahçelerin bir kenar uzunluğu ebob $(81, 270) = 27 \text{ metre}$ olarak bulunur. $\frac{\text{dikdörtgenin alanı}}{\text{karenin alanı}}$ ya da $\frac{\text{dikdörtgenin eninin uzunluğu}}{\text{karenin bir kenar uzunluğu}} \cdot \frac{\text{dikdörtgenin boyunun uzunluğu}}{\text{karenin bir kenar uzunluğu}}$ formülünden yararlanılarak; $\frac{81}{27} \cdot \frac{270}{27} = 3 \cdot 10 = 30$ işlemi neticesinde “en az 30 tane eş bahçe elde edileceği” sonucuna ulaşılabilir.

Bu problem ifadesinde geçen veya çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezdeki kavramlar düşünülerek; katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin “dikdörtgen”, “kare”, “bölen”, “ortak bölen”, “en büyük ortak bölen” ve “alan” (“dikdörtgenin alanı”, “karenin alanı” formülleri) kavramlarıyla ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır (Tablo 4.11).

4.2.1.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları Belirlemeleri

“Doğal sayılar” ile ilgili bu problemi çözebilmek için; ortaöğretim öğrencilerinin, öncelikle, problemin nasıl çözüleceğini / problemin içinde yer alan merkezi kavramları belirleyebilmeleri gerekmiştir.

Matematik başarı düzeyi “orta” olan 4 no’lu öğrenci, çözüme, “*Biz bunun çevresini bulabiliriz.*” (4. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, dikdörtgenin çevre uzunluğunu hesaplamakla başlamıştır. Araştırmacının “*Çevreyle işim olduğunu nereden anladın? Ne sana ipucu verdi?*” sorusuna ise, aşağıdaki yanıtı vermiştir:

“Biz burada hani çevreyi bulabilirsek; karelere de ayırabiliriz. Burada hani kare hesabına çevirebiliriz. Hani ortak bir yerden. Mesela bu alan içinde işte, bir sürü olur. Ya da alanını buluruz. Hani çevreden yapamazsam; alanını bulurum.” (4. öğrenci – 1. görüşme)

Öğrencinin verdiği yanıtta da görüldüğü gibi; 4. öğrenci, –çözüm için yanlış belirlediği– çevre hesabını neden yaptığına dair net bir gerekçe belirtememiş ve çevre hesabı ile bulamazsa, alanını hesaplayabileceği yönünde düşünmeye başlamıştır. 4. öğrenci, dikdörtgenin çevre uzunluğunu bulduktan sonra; dikdörtgenin alanını da hesaplamış; ancak çözümde hangisini kullanacağına dair bir şey söylememiştir. Biraz düşündükten sonra, çözüme dair şöyle bir fikir yürütmüştür:

“Mesela işte burada... “en az” dediği için; mesela şuradaki mesafe 81’i... (5 sn. sessizlik) Mesela şöyle yapabiliriz: 3 eşit parçaya bölsek enini; (Dikdörtgenin enini, sayarak üçe bölüyor:) 1, 2, 3. 81 dediği için; bunu 3’e bölersem ben.” (4. öğrenci – 1. görüşme)

Araştırmacının “*Neden 3’e böldük?*” sorusuna; 4. öğrenci, “*‘En az’ dediği için; ben en küçük sayıya böldüm. Hani mesela 1’e bölsem; 81, olmazdı. Yani olur da; ben onu düşünmedim. 2’ye bölmedim. En küçük ondan sonra, 3 geliyordu dedim. 3’e böldüm; 27.*” (4. öğrenci – 1. görüşme) diye cevap vermiştir.

İlk başta “*Şu an sadece enine bakarak, hareket ediyorum.*” (4. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, sadece 81’i dikkate alan 4. öğrenci; daha sonra, 81 ve 270 sayılarının her ikisini de göz önüne almak gerektiğini fark etmiştir. “O zaman, burada o iki sayının neyini bulduğu” sorulduğunda; “*Yine okek’ini galiba. Hep karıştırıyorum ama bunları.*” (4. öğrenci – 1. görüşme) şeklinde cevap vermiştir. Daha sonra da, “okek’ini

buluyorum. Yani “insan ilk dediğinde doğru der, her zaman” diye düşünüyorum. Yani aklından ilk geçirdiği...” (4. öğrenci – 1. görüşme) diyen 4. öğrenci; insanın aklından ilk geçirdiğinin her zaman doğru olduğu düşüncesiyle, sayıların ekok’unu bulduğunu yinelemiştir.

Kısacası; 4. öğrenci; ilk önce, problemin, “dikdörtgenin çevre hesabı” yardımıyla çözüleceği yorumunda bulunmuş; sonrasında, çevre hesabı ile bulamazsa, alanını hesaplayabileceği şeklinde düşünmeye başlamış; ancak hangisini kullanacağına dair bir şey söylememiştir. Daha sonra, sadece dikdörtgenin enine bakarak hareket eden 4. öğrenci; soruda “en az” dediği için, en küçük sayıya böldüğünü söyleyerek, dikdörtgenin enini üçe bölmüştür. Ancak daha sonra, 81 ve 270 sayılarının her ikisini de göz önüne almak gerektiğini fark etmiş ve –tam emin olamasa da– “en küçük ortak kat” kavramı ile çözüleceği yönünde, yanlış bir karar vermiştir.

Matematik başarı düzeyi “iyi” olan 5 no’lu öğrenci, çözüm hakkında “*Şimdi bu, okek–obeb sorusu galiba.*” (5. öğrenci – 1. görüşme) yorumunu yapmış; “bunu nereden anladığı” sorusuna ise, aşağıdaki yanıtı vermiştir:

“Çünkü böyle büyük parçaları, küçük parçalara bölerken veya küçük parçalardan büyük parçalar oluştururken; okek–obeb kullanıyorduk. Küçük parçalardan büyük parça elde etmeye çalışırsak, okek’i kullanıyorduk. Küçük parçaları birleştirerek... Bunu söyledim galiba. Büyük parçaları da küçük parçalara bölerek yapıyorsak da, bunda obeb kullanıyorduk.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

“ekok–ebob sorusu” olma gerekçesini açıklayabilen 5. öğrenci, “*Küçükten büyüğe mi gidiyoruz burada; ilk önce onu tespit etmemiz lazım, küçük parçalardan büyük parça mı oluşturuyoruz, yoksa büyük parçalardan küçük parçalara bölüyor muyuz diye.*” (5. öğrenci – 1. görüşme) şeklindeki düşüncesinin ardından; “*Burada küçük parçalardan büyük parça elde edeceğiz. Yani küçük karelerden bir dikdörtgen elde edeceğiz. Yani parçadan bütüne olduğu için, okek kullanacağız.*” (5. öğrenci – 1. görüşme) şeklinde yanlış kavrama karar vermiş ve 81 ile 270’in ekok’unu hesaplayacağını belirtmiştir.

İki sayının ekok hesabının ardından, “*Açıkçası bu soruların nasıl çözüldüğünü de biraz unuttum.*” (5. öğrenci – 1. görüşme) diyen öğrenci; soruyu kısık sesle okuyarak, tekrar düşünmeye başlamıştır:

“(10 sn. sessizlik) Bir dakika, aklıma geleni yapacağım, inşallah doğrudur. Şimdi bunlarda, hatırladığım kadarıyla; toplam, bu elde edeceğimiz toplam dikdörtgenin alanı 270 çarpı 81... Dikdörtgenin alanı, kısa kenar ile uzun kenarın çarpımıdır. Bölü... Şimdi ben bu eş karelerden oluşturduğum karenin bir kenarına a dersem eğer; bu karenin alanı da a çarpı a eşittir... okek’e mi eşit oluyordu; bunda kararsızım. (Bu sırada kağıt üzerine $\frac{270 \cdot 81}{a \cdot a} = 810$ yazdı.)”

(5. öğrenci – 1. görüşme)

“(Eğer doğruysa), bu eşitliği nereden yazdığı” sorulduğunda; –eşitliği tam hatırlayamasa da– bunun, ezberindeki bir kural olduğu ve nedenini bilmediği anlaşılmıştır. Bu eşitlikten $a = 3\sqrt{3}$ bulan 5. öğrenci; “Hayır, ben burada yanlış yaptım. Kaç tane olduğunu soruyor. (10 sn. sessizlik) Şu formülü hatırlasam yapacağım da.” (5. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, düşünmeye devam etmiştir. 5. öğrenci, biraz düşündükten sonra,

“Ama “en az” diyor. En az olması için, o karenin kenarının en büyük değeri alması gerekir. En büyük. 81 ile 270’in obeb’ini mi alacağız yoksa? Biz bunu yanlış yaptık. Hatırladım ben. okek’ini değil de, burada obeb’ini bulacağız.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

diyerek; problemin, –ekok değil de– ebob kavramı yardımıyla çözüleceği yönünde fikir değiştirmiştir. Araştırmacı, “Neden fikir değiştirdin? Hani şimdi neden ebob düşündün?” sorusunu yönelttiğinde ise; öğrenci,

“İını (düşünüyor); çünkü biz bu eş karelerden, bütün oluşturmaya çalışıyoruz. Bütün oluştururken de, okek diye hatırlıyorum ama. (11 sn. sessizlik) Şimdi yani ben bunun obeb’ini bulayım ilk önce. ... Cevabı bulursam; mantık yürütmeye çalışırım.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

diyerek; ilk önce ebob’u hesaplayacağını ve eğer cevaba ulaşırsa, mantık yürüteceğini ifade etmiştir. Öğrencinin bu söylemi; 5. öğrencinin, çözüm yolunu belirlemede deneme–yanılma yolunu takip ettiği düşüncesini uyandırmıştır.

5. öğrenci ile yapılan tamamlayıcı görüşmede; “çözüm için ekok mu, yoksa ebob mu kullanacağına karar verirken yürüttüğü mantık” üzerine tekrar konuşulmuştur. Bu konuda 5. öğrenci, şunları söylemiştir:

“Şimdi, hocalarımız bize, hani hangisinde ekok kullanırken, hangisinde ebob kullanacağımızı hani bize kavratmak amacıyla... Şimdi, hani tam... yani mantığını aslında tam olarak bize anlatmadılar. Ama hani küçük parçalardan büyük parçaya giderken; hani tam tersini düşünerek mesela biz ezberledik. Hani

mantığını tam olarak şey yapmadık ama. Yani soru... ‘soru çözülürken; hani bu yöntem kullanılacak’ dediler bize. Yani ben öyle hatırlıyorum.” (5. öğrenci – Tamamlayıcı görüşme)

Bu söyleminde, 5. öğrenci; öğretmenlerinin, “çözüm için ekok mu, yoksa ebob mu kullanılacağına karar verirken yürütülen mantık”tan tam olarak bahsetmediklerini ve kendilerinin, ne zaman hangisinin kullanılacağını ezberlediklerini dile getirmiştir.

5. öğrencinin, çözümde kullanacağı merkezi kavramı belirleme süreci özetlenecek olursa; öğrenci, “*Şimdi bu, okek–obeb sorusu galiba.*” (5. öğrenci – 1. görüşme) yorumunu yapmış ve ilk önce, problemin, ekok kavramı ile çözüleceğini söylemiştir. Daha sonra, $\frac{\text{dikdörtgenin alanı}}{\text{karenin alanı}} = \text{ekok}(81,270)$ şeklinde yanlış hatırladığı bir eşitlikten yararlanmayı denemiştir. Buradan da bir sonuç elde edemeyince; “en büyük ortak bölen” kavramından yararlanma yönünde fikir değiştirmiş; fakat fikir değiştirme gerekçesini açıklayamamış ve ilk önce ebob’u hesaplayacağını, cevaba ulaşırsa mantık yürüteceğini ifade etmiştir.

Matematik başarı düzeyi “çok iyi” olan 6 no’lu öğrenci ise, “*İşte burada “eni 81, boyu 270 metre” diyor. Burada bize... ve bahçeler kare olacakmış, eş kareler olacakmış. O zaman bunların yani ebob’unu aldığımız zaman; bir kenarını bulabiliriz. 81 ve 270.*” (6. öğrenci – 1. görüşme) diyerek; çözüm için 81 ve 270 sayılarının ebob’unun alınması gerektiğini hemen fark etmiştir.

“Bu problemin, ebob ile çözüleceğini nereden anladığı” sorusu ile ilgili olarak; araştırmacı ile 6. öğrenci arasında aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Görüşmeci: ... Nereden anladın ebob olduğunu?

Öğrenci: Çünkü bize “en az”ını soruyor. “En az”ını bulmamız için de, ebob’unu almamız gerekiyor. İşte oradan da, en az kaç parça olacağını bulabiliriz.

Görüşmeci: “En çok” deseydi mesela; o zaman da ekok’u mu alacaktık?

Öğrenci: Hayır. “En çok” deseydi; o zaman en büyük ortak bölenlerinin en küçüğünü bulmaya çalışacaktık.

Görüşmeci: Hımm.

Öğrenci: Yani daha doğrusu, en büyük olmazdı o zaman. Ortak bölenlerinin en küçüğünü bulmaya çalışacaktık. “ekob” gibi bir şey olurdu herhalde. (6. öğrenci – 1. görüşme)

6. öğrenci, “bu problemin, ebob ile çözüleceğine nasıl karar verdiği” konusunda; ayrıca aşağıdaki açıklamayı da yapmıştır:

“Yani biraz düşündüğümüz zaman zaten burada “hiç alan artmayacak biçimde eş karelere bölünecek.” O zaman bu yani, bunların için en büyük birimini almalıyım ki, yani en büyük uzunluğu almalıyım ki; en küçük olsun. O zaman da işte ikisine de tam bölebilecek bir şey olması gerekiyor.” (6. öğrenci – 1. görüşme)

Yukarıda geçen konuşmadan ve öğrenci açıklamasından hareketle; 6. öğrencinin, “sorunun, ebob sorusu olması”na dair mantıklı bir gerekçe belirtildiği ve “ebob” kavramının öğrencinin zihninde doğru şekilde yapılanmış olduğu rahatlıkla söylenebilir.

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, problemin içinde yer alan merkezi kavramları belirleme süreçleri özetlenecek olursa; 4. öğrenci; ilk önce, problemin, “dikdörtgenin çevre hesabı” ya da “dikdörtgenin alan hesabı” yardımıyla çözüleceği yorumunda bulunmuş; ancak hangisinin kullanılacağına dair bir şey söylememiştir. Daha sonra, sadece dikdörtgenin enine bakarak hareket eden 4. öğrenci; soruda “en az” dediği için, en küçük sayıya böldüğünü ifade ederek, dikdörtgenin enini üçe bölmüştür. Ancak sonrasında, dikdörtgenin en ve boy uzunluklarının her ikisini de göz önüne almak gerektiğini fark etmiş ve –tam emin olamasa da– “en küçük ortak kat” kavramı ile çözüleceği yönünde, yanlış bir karar vermiştir. 5. öğrenci, “*Şimdi bu, okek–obeb sorusu galiba.*” (5. öğrenci – 1. görüşme) yorumunu yapmış ve ilk önce, problemin, ekok kavramı kullanılarak çözüleceğini belirtmiştir. Daha sonra, $\frac{\text{dikdörtgenin alanı}}{\text{karenin alanı}} = \text{ekok}(81,270)$ olarak yanlış hatırladığı bir formülden yararlanmayı denemiş; fakat buradan da bir sonuç elde edemeyince, “en büyük ortak bölen” kavramından yararlanma yönünde fikir değiştirmiştir. Fikir değiştirme gerekçesini açıklayamayan 5. öğrenci; ilk önce ebob’u hesaplayacağını ve eğer cevaba ulaşırsa, mantık yürüteceğini ifade etmiştir. 6. öğrenci ise; problemin, “ebob” kavramı kullanılarak çözüleceğini kısa sürede fark etmiş ve bunun gerekçesini de mantıklı bir biçimde açıklayabilmiştir.

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, problemin içinde yer alan ve çözümde kullanacakları merkezi kavramları belirlemeleri ile ilgili ortaya çıkan kategoriler, Tablo 4.12’de gösterilmiştir.

Tablo 4.12

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları Belirlemeleri

Kategoriler	Öğrenci no
Uygun olmayan işlemleri/kavramı belirlemek	4
Uygun olmayan kavramı/yanlış formülü belirlemek	5
<i>Geç de olsa</i> uygun kavramı belirlemek	
<i>Kısa sürede</i> uygun kavramı belirlemek	6

4.2.1.3. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Bu bölümde; ortaöğretim öğrencilerinin, –bu problemi çözme sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlar olan– “dikdörtgen”, “kare”, “bölen”, “ortak bölen” ve “en büyük ortak bölen” kavramlarıyla ilgili anlayışlarına yer verilecektir.

4.2.1.3.1. Ortaöğretim öğrencilerinin, “dikdörtgen” kavramı ile ilgili anlayışları. “Dikdörtgen” kavramı için öğrencilerin yapmış oldukları tanım ve açıklamalar, aşağıdaki şekildedir:

“Dikdörtgen; iki tane uzun kenarı, iki tane kısa kenarı olacak. Kısa kenarlar birbirine eşit, uzun kenarlar birbirine eşit olacak.” (4. öğrenci – 1. görüşme)

“Dikdörtgen, dört kenarı olan, paralelkenar şeklinde; ama bütün kenarları birbirine eşit değil, iki kenarı birbirine eşit ve diğer kenarı da birbirine eşit. Yani dört tane kenarının uzunlukları birbirine eşit değil. Kenarları birbirlerine 90 derece şeklinde kesiyorlar.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

“Dikdörtgen, $\square$ (*düşünüyor–4 sn. sessizlik*), işte dört kenarı olan ve açısı 90 derece olan. Zaten ‘dikdörtgen’ oradan geliyor işte. Ondan sonra, kenarları özdeş veya farklı olabilir, aynı olabilir işte.” (6. öğrenci – 1. görüşme)

4. öğrenci, “dikdörtgen” kavramını açıklarken; “açı” kavramını hiç kullanmamış, sadece kenar özelliklerinden bahsetmiştir. Bu nedenle; 4. öğrencinin yapmış olduğu açıklama,

“eksik açıklama” olarak değerlendirilmiştir. 5. öğrenci; dikdörtgenin özelliklerini sıralayarak, kavramı açıklamış; ancak açıklamasında, bütün kenar uzunluklarının birbirine eşit olmadığına vurgu yaparak, dikdörtgenin özel bir hali olan “kare”yi dışarıda bıraktığından, yaptığı açıklama “eksik açıklama” olarak kabul edilmiştir. 6. öğrencinin, “dikdörtgen” için yapmış olduğu yukarıdaki tanım değerlendirilecek olursa; tanımda, bahsedilen şeklin “paralelkenar” olduğu ya da “üç aç ölçüsünün 90° olduğu” vurgulanmadığı için; “eksik bir tanım” olduğu söylenebilir. Ek olarak; 6. öğrenci, dikdörtgenin kenar uzunluklarının özdeş veya farklı olabileceği özelliğinden de söz etmiştir.

4.2.1.3.2. Ortaöğretim öğrencilerinin, “kare” kavramı ile ilgili anlayışları.

“Kare” kavramına dair öğrenci tanımlamaları ve açıklamaları ise, şöyledir:

“Kare; bütün kenarları eşit olacak. Hepsine “a” diyebiliriz; hepsi a olacak.” (4. öğrenci – 1. görüşme)

“Kare, her kenarı birbirine eşit, bütün köşeleri 90 derece olan şekle kare diyoruz.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

“Dikdörtgen,  (*düşünüyor-4 sn. sessizlik*), işte dört kenarı olan ve açısı 90 derece olan. Kare de, bunun (*kastettiği: “dikdörtgenin”*) özelleşmiş şekli biraz daha. Bütün kenarları eşit olması gerekiyor.” (6. öğrenci – 1. görüşme)

4. öğrenci, yine “açı” kavramını hiç kullanmadan, sadece kenar özelliğinden bahsederek; eksik açıklama yapmıştır. 5. öğrencinin, “şekil” ifadesini kullanarak yapmış olduğu tanım ise; “dört kenarlı bir çokgen” ya da “dörtgen” olduğuna dair bir bilgi içermediğinden dolayı, “eksik tanım” olarak kabul edilmiştir. 6. öğrenci ise; “kare” kavramını, “dikdörtgen”e bağlı olarak doğru şekilde tanımlamıştır. 4. öğrenci, “kare” ve “dikdörtgen” kavramları için, “açı” terimini hiç kullanmadan eksik açıklama yapsa da; açılar sorulduğunda, “*Hepsi 90*” şeklinde doğru yanıt vermiştir.

4.2.1.3.3. Ortaöğretim öğrencilerinin, “en büyük ortak bölen”, “bölen” ve “ortak bölen” kavramları ile ilgili anlayışları. 4. öğrenci, iki sayının ekok’unu hesapladığını söylediği için; bu öğrencinin “bölen”, “ortak bölen” ve “en büyük ortak

bölen” kavramları ile ilgili düşünceleri sorgulanamamış ve dolayısıyla ortaya çıkarılamamıştır.

6. öğrenci, “ebob” kısaltmasının açılımını, hemen “en büyük ortak bölen” olarak doğru şekilde ifade edebilmiştir. 5. öğrenci ise, “ebob” kısaltmasının açılımı için, ilk önce “*obeb, en büyük... ıı (düşünüyor), ortak kat mıydı? Tam olarak... (3 sn. sessizlik) En büyük... Bu ‘E’ neydi?*” (5. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, tam bir cevap veremese de; “obeb” yerine “ebob” kısaltmasının da kullanıldığı hatırlatılınca, “en büyük ortak bölen” cevabını verebilmiştir.

“ebob” kısaltmasının açılımını, “en büyük ortak bölen” şeklinde ifade edebilen 5. ve 6. öğrenciden; “bölen” kavramını açıklamaları istenmiştir. Öğrenciler, “bölen” kavramına dair aşağıdaki açıklamaları yapmışlardır:

“ ‘Bölen’ deyince... Mesela bize bir iki sayı verir. Bunların... Mesela bunlar bir sayıya ortak olarak bölünür, ama... yani bir sürü sayıya ortak olarak bölünebilir. Bu ebob, bu iki sayıyı bölen en büyük sayıyı bulmada kullanılıyor.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

“Bölen, işte bir sayının, onu kalansız olarak bölen sayılarını buluyoruz; ebob, şey ebob’da. O da en büyük, yani bu iki sayının ortak en büyük böleni.” (6. öğrenci – 1. görüşme)

5. öğrenci; “bölen” kavramı yerine, daha ziyade, kavramın daha özel halleri olan “ortak bölen” ve “en büyük ortak bölen” kavramlarının anlam ve işlevlerini açıklamıştır. Bu nedenle; 5. öğrencinin “bölen” kavramı için yapmış olduğu açıklama, “eksik açıklama” olarak değerlendirilmiştir. 6. öğrenci ise, “bölen” kavramını açıklamış; arkasından da “ebob” kavramının anlamından bahsetmiştir. 6. öğrenci; ayrıca, “ortak bölen” kavramı için, “*İkisini de bölebilecek ve işte kalanları sıfır olacak sayı.*” (6. öğrenci – 1. görüşme) diyerek; “ortak bölen” olma şartını doğru şekilde açıklamıştır.

Ortaöğretim öğrencilerinin, problem ifadesinde geçen veya çözüm aşamasında göz önüne alınan merkezi kavramlar ile ilgili yapmış oldukları tanım ve açıklamalar dikkate alınarak; öğrencilerin problemde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları Tablo 4.13’de listelenmeye çalışılmıştır.

Tablo 4.13

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

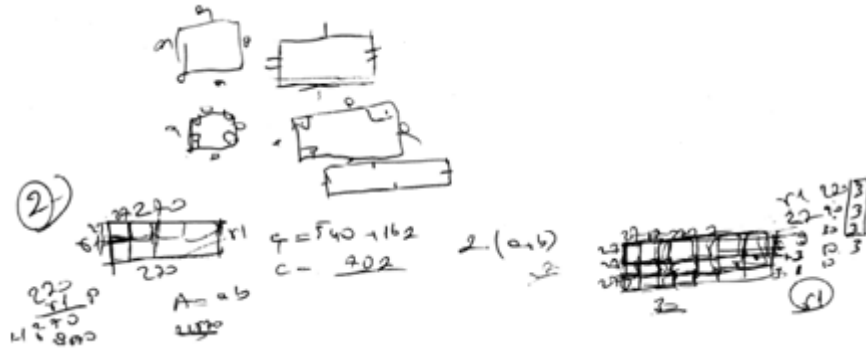
Kavramlar	Öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları		
	4. öğrenci	5. öğrenci	6. öğrenci
Dikdörtgen	eksik açıklamak	eksik açıklamak	eksik tanımlamak
Kare	eksik açıklamak	eksik tanımlamak	doğru tanımlamak
Bölen		eksik açıklamak	doğru açıklamak
Ortak bölen		doğru açıklamak	doğru açıklamak
En büyük ortak bölen (ebob)		doğru açıklamak	doğru açıklamak

4.2.1.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, problemin içinde yer alan merkezi kavramları belirlemelerinin ve merkezi kavramlarla ilgili anlayışlarının ardından; şimdi de, öğrencilerin bu problemi çözme sürecinde kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili bulgular sunulacaktır.

4. öğrenci; çözüm aşamasında, ilk önce, dikdörtgenin çevre formülünü kullanarak, dikdörtgenin çevre uzunluğunu, $C = 540 + 162 = 702$ olarak hesaplamıştır. Çevreyi hesapladıktan sonra; “Çevresi 702’dir. Alanını bulursak... $a \cdot b$ de alanını verir bize.” (4. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, dikdörtgenin alan formülünü ifade etmiş, kullanmış ve $A = 270 \cdot 81 = 21870$ bulmuştur. Çözümde, “çevre” ve “alan” hesabından hangisini kullanacağına karar vermekte zorlanan 4. öğrencinin; problemi, deneme–yanılma yoluyla çözmeye çalıştığı görülmüştür. Daha sonra; soruda “en az” dediği için, dikdörtgenin eni olan 81 metrenin 3 eşit parçaya bölünebileceği şeklinde bir fikir yürütmüştür. Çözüme dair bütün bu fikirlerinin ardından, sonuca ulaşamayan 4. öğrenci; 81 ve 270 sayılarının her ikisini de göz önüne almak gerektiğini fark etmiştir. ekok ve ebob kavramlarını sürekli karıştırdığından bahseden 4. öğrenci, –tam emin olamasa da–

iki sayının ekok'unu hesaplayacağını söylemiş; ancak ebob hesaplamaya yönelik işlemler yürütmüştür. 81 ile 270'in ebob'unu, önce 81 olarak bulmuş; sonra hatasını fark ederek, 27 olarak düzeltmiştir. 4. öğrenci, kağıda çizmiş olduğu dikdörtgenin enini 27 birimlik üç eş parçaya, boyunu ise 27 birimlik on eş parçaya ayırmış ve “İçinde bunun, 10×3 'den 30... 30 tane üçgen... uu (düşünüyor), kare... pardon, kare oluşabilir diyebilirim ben.” (4. öğrenci – 1. görüşme) açıklamasını yaparak, sorunun cevabını 30 (doğru) olarak bulmuştur (Şekil 4.6). 4. öğrencinin zihninde ekok–ebob kavramları tam olarak yapılanmamış olmasına rağmen; hangi kavramı kullandığının farkında olmadan kavramı kullanabilmesi ve bu problemi çözerek doğru cevap şikkına ulaşabilmesi dikkat çekici bulunmuştur.

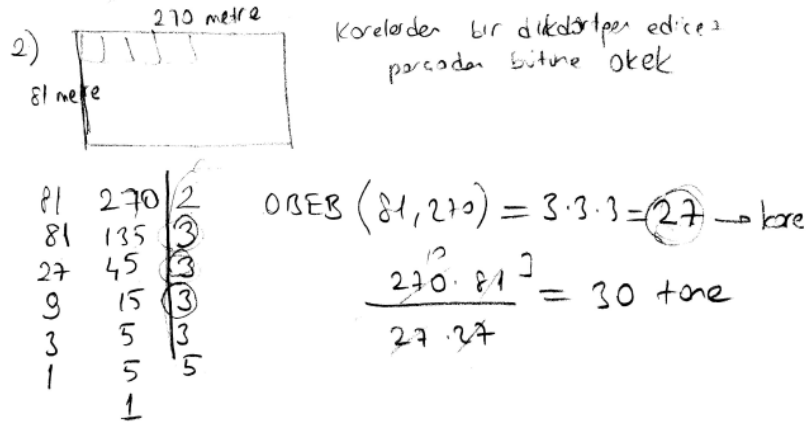


Şekil 4.6

4. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

5. öğrenci, ilk önce “Parçadan bütüne olduğu için, okek kullanacağız.” (5. öğrenci – 1. görüşme) demiş ve ekok hesaplamaya yönelik işlem bilgisini kullanarak, $\text{ekok}(81,270) = 2 \cdot 3^4 \cdot 5 = 810$ olarak hesaplamıştır. Ekok hesabının ardından; formülü tam olarak hatırlayamasa da, $\frac{\text{dikdörtgenin alanı}}{\text{karenin alanı}} = \text{ekok}(81,270)$ şeklindeki – yanlış hatırladığı– eşitliği kullanarak, $a = 3\sqrt{3}$ bulmuştur. 5. öğrenci, biraz düşündükten sonra; gerekçesini açıklayamasa da, problemin –ekok değil de– ebob kavramı yardımıyla çözüleceği yönünde fikir değiştirmiş ve $\text{ebob}(81,270) = 27$ olarak bulmuştur. “Bu 27, karenin [bir kenarının] en büyük alabileceği uzunluğu oluyordu.” (5. öğrenci – 1. görüşme) diyen 5. öğrenci; dikdörtgenin alanını karenin alanına bölerek, yani $\frac{270 \cdot 81}{27 \cdot 27}$ değerini hesaplayarak, doğru cevap olan 30 sonucuna ulaşmıştır (Şekil

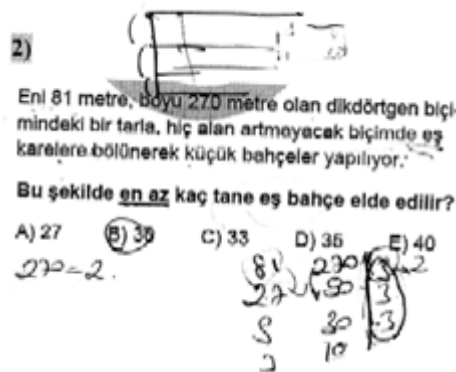
4.7). “Neden alan hesabına geçtiği”ni ise; “Çünkü ıı (*düşünüyor*), yani karenin alanlarının toplamı, dikdörtgenin alanını verecek bize.” (5. öğrenci – 1. görüşme) şeklinde doğru olarak açıklamıştır.



Şekil 4.7

5. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

6. öğrenci de, 81 ve 270 sayılarının ebob'unu kısa yoldan hesaplayarak, 27 değerini elde etmiştir. Ebob hesaplama sürecinde; 81 ve 270 sayılarının yanındaki çizginin sağ tarafına, sadece, ortak bölen olan üç tane 3 sayısını yazmış ve bu üç sayının çarpımlarını hesaplamıştır. 81 sayısını 27'ye bölerek 3 ve 270 sayısını 27'ye bölerek 10 bulan 6. öğrenci; eş bahçe sayısını, —4. öğrenci gibi— 3×10 'dan 30 (*doğru*) olarak bulmuştur (Şekil 4.8).



Şekil 4.8

6. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

Özetlenecek olursa; 4. öğrenci, ilk etapta sırasıyla, dikdörtgenin çevre formülünü, dikdörtgenin alan formülünü ve dikdörtgenin enini 3'e bölme işlemini kullanmayı denemiştir. Çözümün başlangıç aşaması için uygun olmayan bu formülleri ve işlemi kullanarak sonuca ulaşamayan 4. öğrenci; sonrasında, çözüm için uygun işlem olan ebob hesaplamaya yönelik işlemler yürütmüştür. Ancak kendisinin, o süreçte ekok hesabı yaptığını ileri sürmesi, uygun işlemi yeterince farkında olmaksızın kullandığı izlenimi bırakmıştır. Ebob hesabı sırasında; başta işlem hatası yapsa da, hemen hatasını fark ederek düzelten 4. öğrenci; son olarak, dikdörtgenin enini ve boyunu 27 birimlik parçalara bölerek ve bulduğu iki sayıyı çarparak doğru sonuca ulaşmıştır. 5. öğrenci; ilk önce, çözüm için uygun olmayan bir işlem olan ekok hesaplamaya yönelik algoritmayı ve $\frac{\text{dikdörtgenin alanı}}{\text{karenin alanı}} = \text{ekok}(81,270)$ şeklinde –yanlış hatırladığı– bir formülü kullanmıştır. Buradan bir sonuç elde edemeyen 5. öğrenci; gerekçesini açıklayamasa da, problemin –ekok değil de– ebob kavramı kullanılarak çözüleceği yönünde fikir değiştirmiştir. Devamında; çözüm için uygun işlemler/formüller olan ebob hesaplama algoritması, dikdörtgenin alan formülü, karenin alan formülünü doğru şekilde kullanmış ve dikdörtgenin alanını karenin alanına bölerek doğru sonuca ulaşmıştır. 6. öğrenci de, ebob hesabına yönelik işlemler yürüterek, iki sayının ebob'unu kısa yoldan hesaplamış; sonrasında, dikdörtgenin enini ve boyunu, bulduğu bu 27 değerine bölmüş ve son olarak, bölme işlemlerinden elde ettiği iki sayıyı çarparak doğru sonuca ulaşmıştır.

ebob (81,270) = 27 olarak bulan üç öğrenci, bu 27 sayısı için şunları söylemiştir:

“[Karenin] bir köşesinin (*demek istediği: “kenarının”*) yani uzunluğu.” (4. öğrenci – 1. görüşme)

“Bu 27, karenin [bir kenarının] en büyük alabileceği uzunluğu oluyordu.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

“27 bulduğum; bu eş karelerin [bir kenarının] en büyük uzunluğu, alabileceği en büyük uzunluğu.” (6. öğrenci – 1. görüşme)

Öğrencilerin bu söylemlerinden hareketle; üç öğrencinin de, “bu 27 sayısının, karenin bir kenarının alabileceği en büyük değeri ifade ettiği”nin farkında olduğu söylenebilir.

4.2.1.5. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

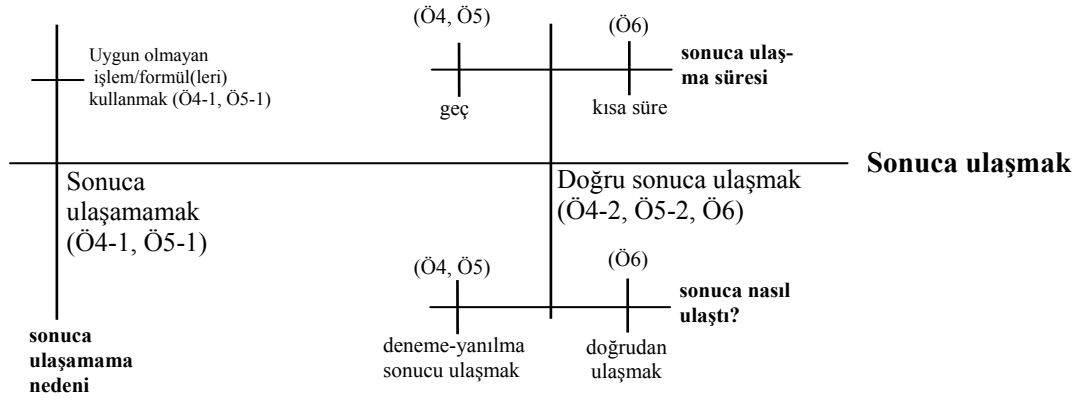
Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, 1. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili problemi çözme sürecinde; çözüm yolunu / problemin içinde yer alan merkezi kavramları belirlemeleri, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları, kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili elde edilmiş kategoriler bir araya getirilerek; öğrencilerin, problemi çözme süreçleri Tablo 4.14’de özetlenmiştir. Böylece öğrencilerin, problemi çözme süreçleri; her bir öğrenci için ayrı ayrı da sunulmaya çalışılmıştır.

Tablo 4.14

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Öğrenci no	Merkezi kavramlarla ilgili anlayışları	Kategoriler (Merkezi kavramları belirlemek)	Kullandıkları kavramlar–işlemler	Kategoriler (Kavram–işlem kullanımı)		Kategoriler (Sonuca ulaşmak)
4	Dikdörtgen (eksik açıklamak) Kare (eksik açıklamak) Dikdörtgenin alanı (doğru bilmek)	Uygun olmayan işlemleri/kavramı belirlemek	Dikdörtgenin çevre formülü Dikdörtgenin alan formülü Bölme işlemi	Uygun olmayan formülleri / işlemi kullanmak		Sonuca ulaşamamak
			ebob hesabına yönelik işlemler	İşlem hatası yapmak	Yeterince farkında olmaksızın uygun işlemi kullanmak	Geç de olsa doğru sonuca ulaşmak
			Bölme işlemi ve çarpma işlemi	Uygun işlemleri doğru şekilde kullanmak		

5	Dikdörtgen (eksik açıklamak)	Uygun olmayan kavramı / yanlış formülü belirlemek	ekok hesaplama algoritması	Uygun olmayan işlemi kullanmak	Sonuca ulaşamamak
	Kare (eksik tanımlamak)		$\frac{\text{dikdörtgenin alanı}}{\text{karenin alanı}} = \text{ekok}(81,270)$ eşitliği (yanlış hatırladı)	Yanlış hatırladığı bir formülü kullanmak	
5	Bölen (eksik açıklamak)	Geç de olsa uygun kavramı belirlemek	ebob hesaplama algoritması	Uygun işlemleri/ formülleri doğru şekilde kullanmak	Geç de olsa doğru sonuca ulaşmak
	Ortak bölen (doğru açıklamak)		Dikdörtgenin alan formülü Karenin alan formülü Bölme işlemi		
6	ebob (doğru açıklamak)	Kısa sürede uygun kavramı belirlemek	ebob hesabına yönelik işlemler (kısa yol)	Uygun işlemleri doğru şekilde kullanmak	Kısa sürede doğru sonuca ulaşmak
	Dikdörtgenin alanı (doğru bilmek)		Bölme işlemi ve çarpma işlemi		
6	Karenin alanı (doğru bilmek)	Kısa sürede uygun kavramı belirlemek	ebob hesabına yönelik işlemler (kısa yol)	Uygun işlemleri doğru şekilde kullanmak	Kısa sürede doğru sonuca ulaşmak
	Dikdörtgen (eksik tanımlamak)		ebob hesabına yönelik işlemler (kısa yol)		
6	Kare (doğru tanımlamak)	Kısa sürede uygun kavramı belirlemek	ebob hesabına yönelik işlemler (kısa yol)	Uygun işlemleri doğru şekilde kullanmak	Kısa sürede doğru sonuca ulaşmak
	Bölen (doğru açıklamak)		Bölme işlemi ve çarpma işlemi		
6	Ortak bölen (doğru açıklamak)	Kısa sürede uygun kavramı belirlemek	ebob hesabına yönelik işlemler (kısa yol)	Uygun işlemleri doğru şekilde kullanmak	Kısa sürede doğru sonuca ulaşmak
	ebob (doğru açıklamak)		Bölme işlemi ve çarpma işlemi		



Şekil 4.9

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması

Bu bölümde; katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, 1. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili problemi çözme süreçlerinin özetlenmeye çalışıldığı Şekil 4.9 açıklanacaktır. Bu soruda; öğrencilerin, öncelikle, problemin nasıl çözüleceğini / problemin içinde yer alan merkezi kavramları belirleyebilmeleri gerekmiştir. “Merkezi kavramları belirlemek” adlı ana kategori ekseninde; “yanlış bir formülü belirlemek”, “uygun olmayan kavramı/işlemi belirlemek” ve “uygun kavramı belirlemek” şeklinde üç kategori bulunmaktadır. “Uygun olmayan kavramı/işlemi belirlemek” kategorisi; “kavram” ve “işlem” alt kategorilerine ayrılmıştır. “Kavram” ekseninde, “ekok” alt kategorisi; “işlem” ekseninde ise, “çevre”, “alan” ve “bölme” alt kategorileri yer almaktadır. “Uygun kavramı belirlemek” kategorisi de; “kavramı belirleme süresi” ve “‘ebob’ kavramına karar verme gerekçesi” açısından değerlendirilerek ayrıntılandırılmıştır. “Uygun kavramı belirlemek” kategorisi; “kavramı belirleme süresi” ekseninde boyutsal olarak değerlendirildiğinde, “kısa süre” ve “geç” olmak üzere iki alt kategoriye; gerekçe açısından ise, “açıklamak” ve “açıklayamamak” olarak iki alt kategoriye ayrılmıştır. “Merkezi kavramları belirlemek” adlı ana kategori eksenini açıklanacak olursa; 4. öğrenci; problemin çözümü için, uygun olmayan kavram ve işlemleri belirlemiştir. İlk önce, problemin, “dikdörtgenin çevre hesabı” ya da “dikdörtgenin alan hesabı” yardımıyla çözüleceği yorumunda bulunmuş; ancak hangisinin kullanılacağına karar vermekte zorlanmış ve problemi, deneme-yanılma yoluyla çözmeye çalışmıştır. Daha sonra da, soruda “en az” dediği için, dikdörtgenin eninin 3 eşit parçaya bölünebileceği şeklinde bir fikir yürütmüş; ancak sonuca ulaşamamıştır. Sonrasında, dikdörtgenin en ve boy uzunluklarının her ikisini de göz önüne almak gerektiğini fark eden 4. öğrenci; –tam emin olamasa da– problemin “en küçük ortak kat” kavramı ile çözüleceği yönünde, yanlış bir karar vermiştir. 5. öğrenci, önce, çözümde kullanmak için uygun olmayan bir kavramı; sonra, yanlış bir formülü belirlemiş; ancak geç de olsa çözüm için uygun olan kavrama karar verebilmiştir. 5. öğrenci, bu sorunun, ekok–ebob sorusu olduğunu fark etmiş ve ilk önce, “*Parçadan bütüne olduğu için, okek kullanacağız.*” diyerek, problemi, –çözüm için uygun olmayan– ekok kavramını kullanarak çözmeye çalışmıştır. Daha sonra, $\frac{\text{dikdörtgenin alanı}}{\text{karenin alanı}} = \text{ekok}(81, 270)$ olarak yanlış hatırladığı bir formülden yararlanmayı denemiş; fakat buradan da bir sonuç elde edemeyince, “en büyük ortak bölen” kavramından yararlanma

yönünde fikir değiştirmiştir. Fikir değiştirme gerekçesini açıklayamayan 5. öğrenci; ilk önce ebob'u hesaplayacağını ve eğer cevaba ulaşırsa, mantık yürütmeye çalışacağını ifade etmiştir. Öğrencinin bu söylemi; 5. öğrencinin de, -4. öğrencide olduğu gibi- çözüm yolunu belirlemede deneme-yanılma yolunu takip ettiği düşüncesini uyandırmıştır. 6. öğrenci ise; problemin, -çözüm için uygun kavram olan- “ebob” kavramı kullanılarak çözüleceğini kısa sürede fark etmiş ve bunun gerekçesini de mantıklı bir biçimde açıklayabilmiştir.

“Merkezi kavramlar” adlı ana kategori ekseninde; “dikdörtgen”, “kare”, “bölen”, “ortak bölen” ve “en büyük ortak bölen” olmak üzere beş kategori yer almaktadır. “Dikdörtgen” kategorisinde, -“öğrencilerin ‘dikdörtgen’ kavramına dair anlayışları” açısından “eksik açıklamak” ve “eksik tanımlamak” adında alt kategoriler bulunmaktadır. “Eksik açıklamak” alt kategorisi, “özellik”; “eksik tanımlamak” alt kategorisi ise, “+özellik” olarak ayrıntılandırılmıştır. “Kare” kategorisi ise; “eksik açıklamak”, “eksik tanımlamak” ve “doğru tanımlamak” şeklinde alt kategorilere ayrılmıştır. “Bölen” kategorisi; “doğru açıklamak”, “eksik açıklamak” ve “bahsetmemek” şeklinde üç alt kategoriye; “ortak bölen” kategorisi de, “doğru açıklamak” ve “bahsetmemek” şeklinde iki alt kategoriye ayrılmıştır. Benzer şekilde, “ebob” kategorisi de, “doğru açıklamak” ve “bahsetmemek” şeklinde iki alt kategoriye ayrılmış; “doğru açıklamak” alt kategorisi ise, -açılımı hatırlama süresi açısından boyutsal olarak değerlendirildiğinde- “hemen” ve “bir süre düşündükten sonra” olmak üzere iki boyut elde edilmiştir. “Merkezi kavramlar” adlı ana kategori eksenini anlatılacak olursa; “dikdörtgen” kavramı için, 4. öğrenci, “açı” terimini hiç kullanmadan, sadece kenar özelliklerinden bahsederek, eksik açıklama yapmıştır. 5. öğrenci; dikdörtgenin özelliklerini sıralayarak, kavramı doğru şekilde açıklamıştır. 6. öğrenci, yapmış olduğu tanımda, şeklin “paralelkenar” olduğunu ya da “üç açı ölçüsünün 90° olduğu”nu vurgulamadığı için; tanımı, “eksik tanım” olarak değerlendirilmiştir. 6. öğrenci, dikdörtgenin kenar uzunluklarının özdeş veya farklı olabileceği özelliğinden de söz etmiştir. “Kare” kavramı için; 4. öğrenci, yine “açı” kavramını hiç kullanmadan, sadece kenar özelliğinden bahsederek; eksik açıklama yapmıştır. 5. öğrencinin tanımı; şeklin “dört kenarlı bir çokgen” ya da “dörtgen” olduğuna dair bir bilgi içermediği için, “eksik tanım” olarak değerlendirilmiştir. 6. öğrenci ise; “kare” kavramını, “dikdörtgen”e bağlı olarak doğru biçimde tanımlamıştır. 4. öğrenci, çözüm esnasında, iki sayının ekok'unu

hesapladığını söylediği için; öğrencinin “bölen”, “ortak bölen” ve “en büyük ortak bölen” kavramları ile ilgili düşünceleri sorgulanamamıştır. “Bölen” kavramını; 6. öğrenci, doğru biçimde açıklamıştır. 5. öğrenci ise, “bölen” kavramı yerine, daha ziyade, kavramın daha özel halleri olan “ortak bölen” ve “en büyük ortak bölen” kavramlarını açıkladığından; 5. öğrencinin “bölen” kavramı için yapmış olduğu açıklama, “eksik açıklama” olarak değerlendirilmiştir. “Ortak bölen” kavramını; 5. ve 6. öğrencinin ikisi de, doğru biçimde açıklamıştır. 6. öğrenci, “ebob” kısaltmasının açılımını, hemen doğru şekilde ifade edebilmiş; 5. öğrenci ise, kısaltmanın açılımını hatırlamakta zorlansa da, sonuçta açılımı söyleyebilmiştir. Her iki öğrenci de; “bölen” kavramı üzerine konuşulurken, “en büyük ortak bölen” kavramının anlamını da doğru şekilde açıklamıştır.

“Kavram-işlem kullanımı” adlı ana kategori ekseninde; “uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmak”, “işlem hatası yapmak”, “yeterince farkında olmadan kullanmak” ve “doğru şekilde kullanmak” adlı dört kategori bulunmaktadır. “Uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmak” kategorisinde; “çevre formülü”, “alan formülü”, “ekok hesap algoritması” ve “yanlış hatırladığı bir formül” şeklinde dört alt kategori yer almaktadır. “İşlem hatası yapmak” kategorisi, “ebob hesabına yönelik işlemler” alt kategorisinden oluşmaktadır. Benzer biçimde, “yeterince farkında olmadan kullanmak” kategorisi de, “ebob hesabına yönelik işlemler” alt kategorisine ayrılmış; bu alt kategori ise, “ekok hesabı yaptığını ileri sürmek” şeklinde ayrıntılandırılmıştır. “Doğru şekilde kullanmak” kategorisinde ise, “ebob hesap algoritması” alt kategorisi yer almakta; bu alt kategori de, “deneme-yanılma sonucunda kullanım” ve “bilinçli kullanım” olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. “Kavram-işlem kullanımı” adlı ana kategori eksenini açıklanacak olursa; 4. öğrenci, ilk başta sırasıyla, dikdörtgenin çevre formülünü, dikdörtgenin alan formülünü kullanmayı ve dikdörtgenin enini üçe bölme işlemini denemiştir. Deneme-yanılma yolunu takip ettiği düşünülen ve çözümün başlangıç aşaması için uygun olmayan bu formülleri ve işlemi kullanarak sonuca ulaşamayan 4. öğrenci; sonrasında, ekok-ebob kavramlarını karıştırdığını ifade etse ve bu problemde ekok hesabı yapacağını söylese de, ebob hesaplamaya yönelik işlemler yürütmüştür. Çözüm için uygun işlem olan ebob hesaplamaya yönelik işlemler yürütse de; kendisinin, o süreçte ekok hesabı yaptığını ileri sürmesi, uygun işlemi yeterince farkında olmaksızın kullandığı izlenimini vermiştir. Ebob hesabı sırasında; başta işlem hatası yapsa da, hemen hatasını fark ederek düzeltmiştir.

Son olarak, dikdörtgenin enini 27 birimlik üç eş parçaya, boyunu ise 27 birimlik on eş parçaya bölen 4. öğrenci; bulduğu iki sayıyı da çarparak sonuca ulaşmıştır. 5. öğrenci; ilk önce, çözüm için uygun olmayan bir işlem olan ekok hesaplamaya yönelik algoritmayı ve $\frac{\text{dikdörtgenin alanı}}{\text{karenin alanı}} = \text{ekok}(81, 270)$ şeklinde –yanlış hatırladığı– bir formülü kullanmıştır. Buradan herhangi bir sonuca ulaşamayan 5. öğrenci; gerekçesini açıklayamasa da, problemin –ekok değil de– ebob kavramı yardımıyla çözüleceği yönünde fikir değiştirmiştir. Devamında; çözüm için uygun işlemler/formüller olan ebob hesaplama algoritması, dikdörtgenin alan formülü, karenin alan formülünü doğru şekilde kullanmış ve dikdörtgenin alanını karenin alanına bölerek sonuca ulaşmıştır. 6. öğrenci de, ebob hesabına yönelik işlemler yürüterek, iki sayının ebob’unu kısa yoldan hesaplamış; dikdörtgenin enini ve boyunu, bulduğu bu ebob değerine bölmüş ve bölme işlemlerinden elde ettiği iki sayıyı çarparak, çözümünü tamamlamıştır. “Sonuca ulaşmak” adlı ana kategori ekseninde; “sonuca ulaşmamak” ve “doğru sonuca ulaşmak” olmak üzere iki tane kategori bulunmaktadır. “Sonuca ulaşmamak” kategorisi de, –nedeni açısından incelendiğinde– “uygun olmayan işlem/formül(leri) kullanmak” biçiminde detaylandırılmıştır. “Doğru sonuca ulaşmak” kategorisi ise, –“sonuca ulaşma süresi” ekseninde boyutsal olarak değerlendirildiğinde– “kısa süre” ve “geç” olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmış; –sonuca nasıl ulaşıldığı açısından incelendiğinde ise– “deneme-yanılma sonucu ulaşmak” ve “doğrudan ulaşmak” şeklinde detaylandırılmıştır. “Sonuca ulaşmak” adlı ana kategori eksenini kısaca açıklanacak olursa; 4. ve 5. öğrenci, başlangıçta uygun olmayan işlem ve formül(ler) kullandıklarından sonuca ulaşamamışlar da, deneme-yanılma sonucu, geç de olsa doğru sonuca ulaşmışlardır. 6. öğrenci ise; doğrudan (doğru işlemler yürüterek), kısa sürede doğru sonuca ulaşmıştır.

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, bu problemi çözme süreçlerinden çıkarılan önemli bir sonuç; 4. öğrencinin, ekok–ebob kavramlarını karıştırdığını ifade etse ve bu problemde ekok hesabı yapacağını söylese de, aslında ebob hesaplamaya yönelik işlemler yürütmüş olması ve sonuçta, doğru cevabı bulmasıdır. Başka bir deyişle; öğrencinin zihninde ekok–ebob kavramları yapılanmamış olmasına rağmen; hangi kavramı kullandığının farkında olmadan kavramı kullanabilmiş ve –diğer iki öğrenci gibi– bu problemi çözerek doğru şıkka ulaşabilmiştir.

4.2.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

“Doğal sayılar” ile ilgili diğer soru, “2008 yılı Öğrenci Seçme Sınavı (ÖSS) Matematik–1 testi” soruları arasından seçilmiştir ve katılımcı ortaöğretim öğrencilerine, 15 Nisan–20 Nisan 2010 tarihleri arasında yapılan 2. görüşmede sorulmuştur. Bu soru, – kazanımlar açısından– 9. sınıf matematik öğretim programındaki “cebiri” öğrenme alanının “sayılar” bölümünün “doğal sayılar” alt öğrenme alanında yer alan bir kazanımla ve 10. sınıf matematik öğretim programındaki “cebiri” öğrenme alanının “polinomlar” bölümünün “çarpanlara ayırma” alt öğrenme alanında yer alan bir kazanımla ilgili bulunmuştur (Tablo 4.15).

Tablo 4.15
Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar

2. GÖRÜŞME / 2. SORU	KAZANIMLAR
a, b ve p birer pozitif tam sayı ve p <u>asal</u> olmak üzere, $a^2 - b^2 = p$ olduğuna göre, a nın p türünden eşiti aşağıdaki-lerden hangisidir? A) $\frac{p+1}{2}$ B) $\frac{p+1}{3}$ C) $\frac{p-1}{2}$ D) $\frac{p-1}{3}$ E) $\frac{p-2}{3}$ (2008 ÖSS MAT-1 – 7. SORU) (Cevap: A)	4. Asal sayıyı ve aralarında asal sayıları belirterek bir doğal sayıyı, asal çarpanlarına ayırır ve pozitif bölenlerinin sayısını bulur. (9. sınıf) 2. Tam kare $((a \pm b)^2)$, $(a + b + c)^2$, iki kare farkı $(a^2 - b^2)$, iki terimin toplamının ve farkının küpü $(a \pm b)^3$, iki terimin küplerinin toplamı ve farkı $(a^3 \pm b^3)$ özdeşliklerini ve binom açılımını kullanarak çarpanlara ayırma uygulamaları yapar. (10. sınıf)

Tablo 4.16

Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar

İrdelenecek Matematiksel Kavram/İşlem Listesi	Matematiksel Kavram/İşlem
Tamsayı	Matematiksel kavram
Asal sayı	Matematiksel kavram
Çarpanlara ayırma	İşlem
Özdeşlik	Matematiksel kavram
Denklem çözme	İşlem

4.2.2.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi

Problemin çözümünde takip edilebilecek bir yol; $a^2 - b^2 = p$ eşitliğinin sol tarafındaki ifadeyi çarpanlarına ayırmak ve böylece, $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ özdeşliğinden yararlanarak, $(a - b) \cdot (a + b) = p$ eşitliğini elde etmektir. p bir asal sayı olduğundan dolayı; çarpanları sadece, 1 ile p olabilir. a , b ve p nin birer pozitif tamsayı olduğu bilindiğine göre; $(a - b) \cdot (a + b) = 1 \cdot p$ eşitliği ve buradan da, $a - b = 1$ ile $a + b = p$ denklemleri yazılabilir. $a - b = 1$ ile $a + b = p$ denklemleri taraf tarafa toplanarak; $2a = p + 1$ eşitliği elde edilebilir. Böylece; a nın p türünden eşiti, $a = \frac{p+1}{2}$ olarak bulunabilir.

Bu problem ifadesinde geçen veya çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezdeki kavramlar düşünülerek; katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin “tamsayı”, “asal sayı” ve “özdeşlik” kavramlarıyla ilgili düşüncelerinin ortaya çıkarılmak amacıyla sorgulanması amaçlanmıştır (Tablo 4.16). Ancak sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir.

4.2.2.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Bu bölümde; ortaöğretim öğrencilerinin, –bu problemi çözme sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlar olan– “tamsayı”, “asal sayı” ve “özdeşlik” kavramlarıyla ilgili anlayışlarından bahsedilecektir.

4.2.2.2.1. Ortaöğretim öğrencilerinin, “tamsayı” kavramı ile ilgili anlayışları. Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin; 2. görüşmedeki başka bir soruda, “tamsayı” kavramı için yapmış oldukları açıklamalar ve araştırmacı-öğrenci diyalogu şöyledir:

Görüşmeci: Hangi sayılar tamsayılarıdır?

Öğrenci: 1, 3, 5, 7 misal, işte 8. Tamsayılar, bunlar. Pozitif tamsayılarıdır. Negatif tamsayılar da -1, -2 mesela.

Görüşmeci: Hım. Sıfır?

Öğrenci: (2 sn. sessizlik) Sıfır? Çok iyi (gülüyor). Sıfır da bir tamsayıdır. (4. öğrenci – 2. görüşme – 1. soru)

“ ‘Tamsayılar’ demek; eksilisi olan veya yani... Negatif ve pozitif sayıların hepsine ‘tamsayı’ denir. Rasyonel olmayan sayılara ve irrasyonel olmayan sayılara.” (5. öğrenci – 2. görüşme – 1. soru)

Görüşmeci: Nasıl anlayabilirim ben; bir sayı tamsayı mı, değil mi? Nedir “tamsayı”?

Öğrenci: Tamsayı işte, mııı (düşünüyor–4 sn. sessizlik); 1, 2, 3, 4, 5, -1, -2, -3. Yani sayılarda virgülden sonraki kısım olmayacak; yani 000 diye gitmesi gerekiyor. (6. öğrenci – 2. görüşme – 1. soru)

Öğrencilerin bu söyledikleri yorumlanacak olursa; 4. öğrenci, “tamsayı” kavramını, örnek sayılar yardımıyla, doğru biçimde açıklamıştır. 5. öğrenci, ifade sırasında “rasyonel sayılar”ı kapsamın dışında bıraktığından; yapmış olduğu tanım, “eksik tanım” olarak kabul edilmiştir. 6. öğrenci de; ilk önce, 4. öğrencinin yaptığı gibi, “tamsayı” için örnek sayılar vermiş; ardından da, “tamsayı”ya dair özellikten bahsederek, kavramı doğru biçimde açıklamıştır.

4.2.2.2.2. Ortaöğretim öğrencilerinin, “asal sayı” kavramı ile ilgili anlayışları. Öğrencilere “asal sayı” tanımı sorulduğunda; öğrencilerin yapmış oldukları açıklama ve tanımlar şöyledir:

“İlmi (*düşünüyor*), kendisi... mesela, 3 mesela; bir kendisine bölünecek, bir de 1'e bölünebilecek. Mesela bir 5 ya da 7; 2. Bunlar birer asal sayıdır.” (4. öğrenci – 2. görüşme)

“Eee, pozitif, kendisine ve 1'e bölünebilen sayılara denir. Kendisine ve sadece 1'e bölünebilen sayılara denir. ... Örneğin 2. Sadece çift sayılardan 2 asal sayı. Sonra 3, 5, 7 diye gidiyor.” (5. öğrenci – 2. görüşme)

“Asal sayı, kendisi ve 1 dışında başka tam, yani pozitif tam böleni olmayan sayı demek oluyor.” (6. öğrenci – 1. görüşme – 2. soru)

“Asal sayı” kavramını, 4. öğrenci, örnek üzerinden açıklarken; 5. öğrenci, önce kavramın tanımını yapmış, ardından da birkaç asal sayı örneği vermiştir. 6. öğrenci ise, –bu iki öğrenciden farklı olarak– tanımda “pozitif tam bölen” ifadesine yer vererek, daha kitabî, formal bir tanımlama yapmıştır.

4.2.2.2.3. Ortaöğretim öğrencilerinin, “özdeşlik” kavramı ile ilgili anlayışları. 4. öğrenci, problemi “özdeşlik” kavramından hiç bahsetmeden ve kullanmadan çözdüğü için; 4. öğrencinin, bu kavrama dair düşünceleri sorgulanmamıştır. Bu problemin çözümü sırasında ismi hiç geçmese de; 5. ve 6. öğrenci, “özdeşlik” kavramını kullanmışlardır. Fakat 1. görüşmede, “özdeşlik” kavramı ve “özdeşlik-denklemler” ilişkisi üzerine konuşulmuş olduğundan; tekrar olmaması amacıyla, bu görüşmede yeniden sorgulanmamıştır. 1. görüşmedeki bir problemin çözümü esnasında, 5. ve 6. öğrenci, $a^2 - 2a - 3 = (a - 3) \cdot (a + 1)$ eşitliğini yazmışlar; bu eşitliğin özel bir adının olup olmadığı sorusuna ise, “İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin çarpanları ayrılmasıdır bu, bu işlem.” (5. öğrenci – 1. görüşme – 5. soru) ve “Çarpanlara ayırma.” (6. öğrenci – 1. görüşme – 5. soru) yanıtlarını vermişlerdir. Bu yanıtlar üzerine; araştırmacı ile öğrenciler arasında aşağıdaki diyaloglar geçmiştir:

Görüşmeci: Peki, hiç “özdeşlik” diye bir şey duydun mu?

Öğrenci: Evet.

....

Görüşmeci: Hımm, denklem–özdeşlik farkı nedir, peki?

Öğrenci: Iıı (4 sn. düşünüyor). Onu bilmiyorum işte tam olarak.

Görüşmeci: Hımm, peki. Hani biliyordun, unuttun mu? Yoksa çok üzerinde durmadığın bir şey...

Öğrenci: Çok üzerinde durmamışımdır. Açıkçası hani şeyde, sınavlarımızda böyle gelmediği için. (5. öğrenci – 1. görüşme – 5. soru)

Görüşmeci: Denklem mi bu, yoksa özdeşlik mi? Hani...

Öğrenci: (3 sn. sessizlik) Özdeşlik. Polinom. Başka...

Görüşmeci: Hım. Hani denklemle ve özdeşlik farkını merak ediyorum da ben.

...

Öğrenci: Denklem–özdeşlik farkını...

Görüşmeci: Farklı mıdır ya da?

Öğrenci: (3 sn. sessizlik) Farklıydı; ama nasıl farklıydı? Ben de tam olarak hatırlamıyorum. Çünkü 9. sınıfta gördüğümüz için. Yani şu anda pek aklımda ondan kalan pek bir şey yok ve sınavlarda yani genelde öyle “fark” falan sormadıkları için.

Görüşmeci: Hı hı. Tamam.

Öğrenci: Yani pek çalışmadım. (6. öğrenci – 1. görüşme – 5. soru)

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinden 5 ve 6 no’lu öğrencilerin “özdeşlik” kavramı ile ilgili söyledikleri değerlendirilecek olursa; öğrencilerin, “denklem-özdeşlik” ilişkisi için bir şey söyleyememesi, iki öğrencinin de zihninde “özdeşlik” kavramının tam olarak yapılanmamış olduğunun bir göstergesi olarak düşünülebilir. Ayrıca her iki öğrencinin; sınavlarda “fark” sorulmadığı için üzerinde fazla durmadıklarını söylemeleri ve bunu, “denklem-özdeşlik” farkını hatırlayamamalarına gerekçe olarak göstermeleri de dikkat çekicidir.

Ortaöğretim öğrencilerinin, problem ifadesinde geçen veya çözüm aşamasında göz önüne alınan merkezi kavramlar ile ilgili yapmış oldukları tanım ve açıklamalar dikkate alınarak; öğrencilerin problemde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları Tablo 4.17’de listelenmeye çalışılmıştır.

Tablo 4.17

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Kavramlar	Öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları		
	4. öğrenci	5. öğrenci	6. öğrenci
Tamsayı	doğru açıklamak	eksik tanımlamak	doğru açıklamak
Asal sayı	doğru açıklamak	doğru tanımlamak	doğru tanımlamak
Özdeşlik		açıklamamak	açıklamamak

4.2.2.3. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışlarının ardından; şimdi de, öğrencilerin bu problemi çözme sürecinde kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili olarak elde edilmiş bulgular sunulacaktır.

Matematik başarı düzeyi “orta” olan 4 no’lu öğrenci, problem ifadesini okuduktan hemen sonra; çözüm ile ilgili olarak aşağıdaki yorumu yapmıştır:

“*a* ya ben 3 dedim; *b* ye 2 dedim. *p* de o zamansa 5 geldi buradan. *p* asal sayı oldu. Şeyi tutturduk yani; ıııı (*düşünüyor*), bizden asal sayı olmasını istiyordu.”
(4. öğrenci – 2. görüşme)

a ya ve *b* ye bağlı olarak, *p* nin değerini hesaplayan ve bu durumda *p* nin, “asal sayı” olma şartını sağladığını belirten 4. öğrenci, “*a* ne demiştim? 3. *p* ye de 5 demiştim. Yerine koyarım. (4 sn. sessizlik) “ ‘Adana’dır” (*kastettiği: “A şıkkı”*) derim.” (4. öğrenci – 2. görüşme) diyerek; *p* nin değerini şıklarda yerine koyduğunda, *a* nın değerini verecek şekilde doğru şıkkı bulmuştur. Böylece değişkenlere değer verme yönteminden, asal sayı olma şartından (özelliklerinden) ve şıklarda yerine koyma yönteminden yararlanarak; çok kısa sürede doğru şıkka ulaşmıştır.

Araştırmacı, “Değer koymadan çözemez miydin problemi? Hani [burada] tuttu. Tutmaya da bilirdi belki, o verdiğin değerler.” dediğinde; 4. öğrenci, soruyu değer vererek çözme gerekçesini şöyle açıklamıştır:

“Tutmayabilirdi; ama hani bu sorularda daha basit düşünerek yapmak istiyorum da ben. Daha basit; temel kavramlar üzerinden hani; değer vererek.” (4. öğrenci – 2. görüşme)

5. ve 6. öğrencinin, çözüm ile ilgili yorumları ise aşağıdaki şekildedir:

“Burada ‘iki kare farkı’ vardır. ‘İki kare farkı’nın formülü de, $(a + b) \cdot (a - b) = p$ dir.” (5. öğrenci – 2. görüşme)

“ $a^2 - b^2$ ifadesini, $(a - b) \cdot (a + b)$ şeklinde yazabiliriz. O da eşittir p imiş.” (6. öğrenci – 2. görüşme)

Her iki öğrenci de, soruda “iki kare farkı” özdeşliği olduğunu fark etmiş ve “iki kare farkı”nı çarpanlarına ayırarak çözüme başlamıştır. 5. ve 6. öğrenci, $(a - b) \cdot (a + b)$ ifadesini p ye eşitledikten sonra; çözüme dair şunları söylemişlerdir:

“Şimdi p asal sayı, asal sayı ise; o asal sayının böleni, ya kendisidir ya da 1’dir. Şimdi, asal sayılar da pozitifdir. O zaman ben bu $(a + b)$ yerine p yi yazarım. $(a - b)$ yerine de 1’i yazarım; çünkü başka çarpanı yoktur bu asal sayının.” (5. öğrenci – 2. görüşme)

“ $(a - b) \cdot (a + b)$, bir asal sayıya denk gelmesi için... Yani ‘asal sayı’; bir kendisi böleni olacak, bir de 1. Burada işte o yüzden $a - b$, 1 olmalı; pozitif dediğine göre; $a - b$, 1 olacak. $a + b$ de, p ye denk gelecek.” (6. öğrenci – 2. görüşme)

Öğrenci söylemlerinden görüldüğü gibi; iki öğrenci de, “çarpımın, bir asal sayıya denk gelmesi için; çarpanlardan birinin 1, diğerinin ise p ye eşit olması gerektiği”ni ifade ederek çözümüne devam etmiştir. “ $a - b$ ve $a + b$ çarpanlarından hangisinin p , hangisinin 1 olacağına nasıl karar verdiği” ile ilgili olarak; 6. öğrencinin söyledikleri ve araştırmacı ile 5. öğrenci arasında geçen diyalog şöyledir:

“Yani işte ‘ a ve b birer pozitif tamsayı’ diyor. $a + b$ muhakkak, yani pozitif bir sayı olacak; ikisi de pozitif olduğu için. $a - b$ yi... yani buna p dersem; o zaman... ıııı *(düşünüyor)*, burada p den de büyük bir şey çıkacak, $a + b$ o zaman p den de büyük bir sayı olmak zorunda oluyor. Ve p ile, p den büyük bir sayının çarpımı da o zaman, p den daha büyük bir sayı çıkar yani.” (6. öğrenci – Tamamlayıcı görüşme)

Görüşmeci: Hani hangisi p , hangisi 1; ona nasıl karar verdin?

Öğrenci: Çünkü p , 1'den büyük olacak kesinlikle. Çünkü hani 1'den küçük veya 1 hani asal sayı olmadığı için; 1'den büyük olacak. $(a - b) \dots$ Şimdi, $(a + b)$, $(a - b)$ ye göre daha büyüktür. Büyük olduğu için; $(a + b)$ yerine p , $(a - b)$ yerine de 1 dedim.

Görüşmeci: Hı hı. Büyüklüğüne nereden karar verdin? Nereden biliyorsun?

Öğrenci: Eee, çünkü p pozitif sayıydı ya; yani p kesinlikle 1'den büyüktür. 1'den büyükse...

Görüşmeci: Tamam. Ha, onu anladım. Hani $(a + b)$ nin, $(a - b)$ den daha büyük olduğunu nereden biliyorsun?

Öğrenci: Çünkü $(a - b)$, $(a + b)$ den daha şeydir, küçüktür. Yani 1'i, $(a - b)$ ye yazarız.

Görüşmeci: Him, yani soruda vermiş mi öyle bir şey?

Öğrenci: Yok, vermemiş. Bunu biz anlıyoruz. (5. öğrenci – 2. görüşme)

Araştırmacı ile 5. öğrenci arasında geçen yukarıdaki diyalogun ardından; araştırmacı, “Her zaman $(a + b)$, $(a - b)$ den büyük müdür?” sorusunu yöneltmiştir. 5. öğrencinin, bu soruya verdiği yanıt ise, şöyle olmuştur:

“Olmayabilir, negatifse. (19 sn. sessizlik) Hımm, şimdi söyleyeceğim. Burada $(a + b)$ nin p olduğuna şuradan karar verdik: Çünkü burada a , b ve p sayılarının pozitif tamsayı olduğunu söylemiş. Buradan anlıyoruz. ... Negatif olsaydı; işler değişecekti.” (5. öğrenci – 2. görüşme)

Sonuçta; hem 5. öğrenci hem de 6. öğrenci, “ $a - b$ ve $a + b$ çarpanlarından hangisinin p , hangisinin 1 olacağına nasıl karar verdiği”ne dair mantıklı açıklama yapabilmıştır.

5. ve 6. öğrenci, çözümlerini aşağıdaki açıklama ile sonlandırmışlardır:

“ $(a + b)$ yerine p yazdık; $(a - b)$ yerine de 1 yazdık. Burada toplarsak bunları; b ler gider, $2a = p + 1$ gelir. a da buradan $\frac{p+1}{2}$ gelir.” (5. öğrenci – 2. görüşme)

“ $a - b = 1$, $a + b = p$ ise; bunları taraf tarafa topladığımızda, b ler birbirini götürcek. $2a = 1 + p$ gelecek. a da eşittir $\frac{p+1}{2}$.” (6. öğrenci – 2. görüşme)

İki öğrenci de; $a - b = 1$ ve $a + b = p$ denklemlerini taraf tarafa toplayarak, a nın p türünden eşitini (doğru şekilde) bulmuştur.

5. ve 6. öğrencinin çözüm süreçleri özetlenecek olursa; iki öğrenci de, “iki kare farkı”na çarpanlara ayırma işlemi uygulayarak, $a - b$ ve $a + b$ çarpanlarını elde etmiştir. “Asal sayı” tanımına başvurarak (bölenlerinden/çarpanlarından birinin 1,

diğerinin ise kendisi olması özelliğini kullanarak), $a + b = p$ ve $a - b = 1$ denklemlerine ulaşan 5. ve 6. öğrenci; bu denklemleri taraf tarafa toplayarak, b değişkenini yok etmiş ve sonuçta, a nın p türünden eşitini doğru şekilde bulmuşlardır (Şekil 4.10 ve Şekil 4.11).

$$\begin{array}{l}
 2) \quad a^2 - b^2 = p \\
 \quad \quad \underbrace{(a+b)}_p \underbrace{(a-b)}_1 = p \\
 \quad \quad \begin{array}{r}
 a+b=p \\
 a-b=1 \\
 + \\
 \hline
 2a = p+1 \\
 a = \frac{p+1}{2}
 \end{array}
 \end{array}$$

Şekil 4.10

5. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

2)

a, b ve p birer pozitif tam sayı ve p asal olmak üzere,

$$a^2 - b^2 = p$$

olduğuna göre, a nın p türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{p+1}{2}$ B) $\frac{p+1}{3}$ C) $\frac{p-1}{2}$

D) $\frac{p-1}{3}$ E) $\frac{p-2}{3}$

$$\begin{array}{l}
 \underbrace{(a-b)}_1 \cdot \underbrace{(a+b)}_p = p \\
 \begin{array}{r}
 a-b=1 \\
 a+b=p \\
 + \\
 \hline
 2a = 1+p \\
 a = \frac{p+1}{2}
 \end{array}
 \end{array}$$

Şekil 4.11

6. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

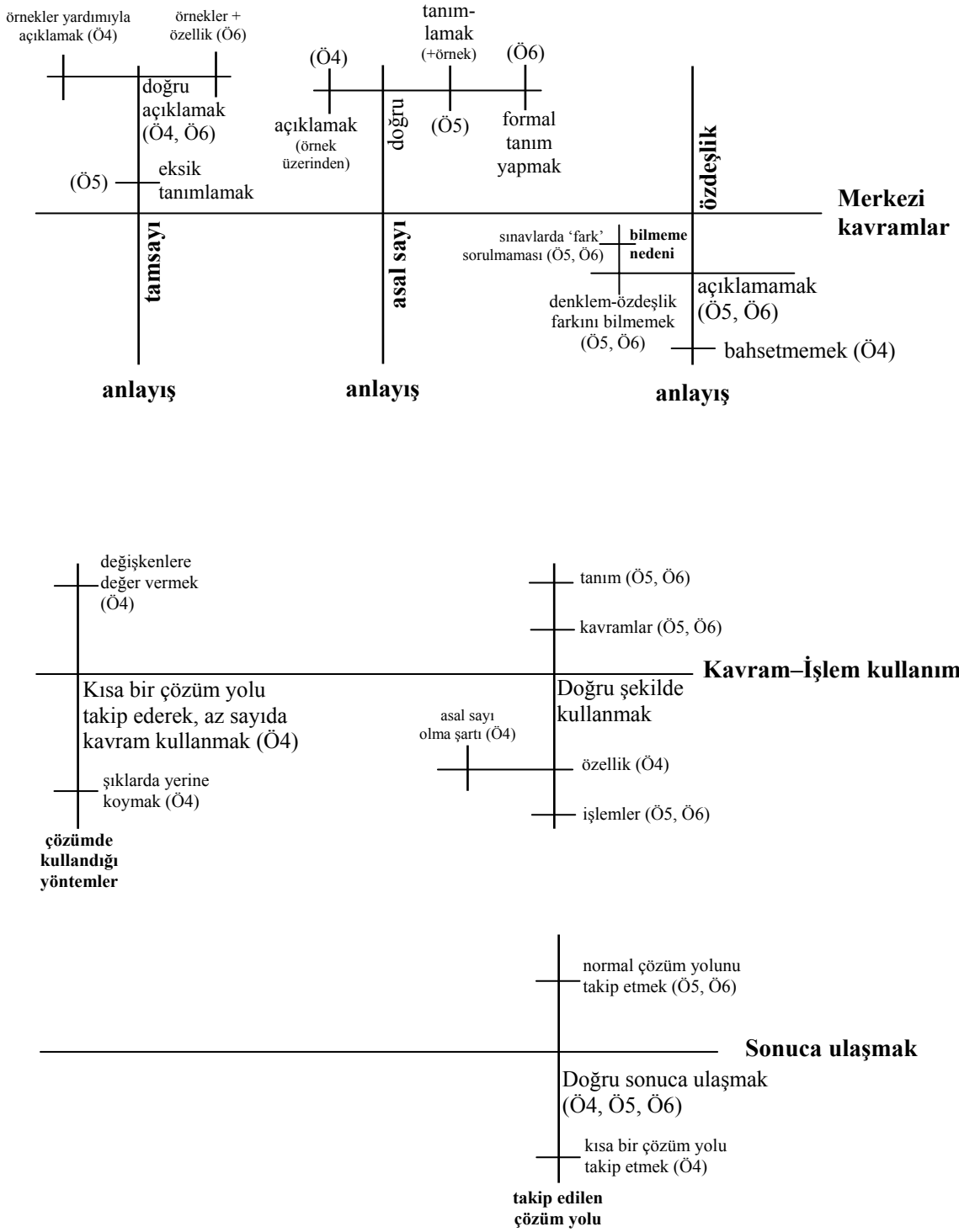
4.2.2.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, 2. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili problemi çözme sürecinde; problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları, kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili çıkan kategoriler bir araya getirilerek; her bir öğrencinin, problemi çözme süreci Tablo 4.18’de özetlenmiş ve Şekil 4.12’de de eksensel kodlaması gösterilmiştir.

Tablo 4.18

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Öğrenci no	Merkezi kavramlarla ilgili anlayışları	Kullandıkları kavramlar–işlemler	Kategoriler (Kavram–işlem kullanımı)	Kategoriler (Sonuca ulaşmak)
4	Tamsayı (doğru açıklamak) Asal sayı (doğru açıklamak)	Asal sayı olma şartı (özelligi)	Uygun özelliği doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak
5	Tamsayı (eksik tanımlamak) Asal sayı (doğru tanımlamak) Özdeşlik (açıklamamak)	“İki kare farkı” özdeşliği Çarpanlara ayırma işlemi Asal sayı tanımı Çarpan/bölen (Pozitif) Tamsayı Denklem çözme işlemi	Uygun kavramları/ işlemleri/ kavram tanımını doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak
6	Tamsayı (doğru açıklamak) Asal sayı (doğru tanımlamak) Özdeşlik (açıklamamak)	“İki kare farkı” özdeşliği Çarpanlara ayırma işlemi Asal sayı tanımı Çarpan/bölen (Pozitif) Tamsayı Denklem çözme işlemi	Uygun kavramları/ işlemleri/ kavram tanımını doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak



Şekil 4.12

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Doğal Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, 2. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili problemi çözme süreçleri özetlenecek olursa; bu soruda, ortaöğretim öğrencilerinin, “tamsayı”, “asal sayı” ve “özdeşlik” kavramları ile ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Ancak sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir. “Tamsayı” kavramını; 4. öğrenci, örnek sayılar yardımıyla; 6. öğrenci de, hem örnekler vererek hem de özelliğinden bahsederek, doğru biçimde açıklamışlardır. 5. öğrenci ise, ifadesinde “rasyonel sayılar”ı kapsam dışında bıraktığından; yapmış olduğu “tamsayı” tanımı, “eksik tanım” olarak değerlendirilmiştir. “Asal sayı” kavramını; 4. öğrenci, örnek üzerinden doğru şekilde açıklarken; 5. öğrenci, önce kavramın tanımını yapmış, arkasından da asal sayı olan birkaç örnek vermiştir. 6. öğrenci ise, –bu iki öğrenciden farklı olarak– tanımda “pozitif tam bölen” ifadesine yer vererek, daha formal bir tanım yapmıştır. 4. öğrenci, çözüm sürecinde “özdeşlik” kavramından hiç bahsetmediği ve kullanmadığı için; 4. öğrencinin, bu kavrama dair düşünceleri sorgulanmamıştır. 5. ve 6. öğrenciler ise, “denklem-özdeşlik” ilişkisi için bir şey söyleyememiş; bu ise, iki öğrencinin zihninde de “özdeşlik” kavramının tam olarak yapılanmamış olduğunun bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Her iki öğrenci de; “denklem-özdeşlik” farkını hatırlayamamalarına gerekçe olarak, sınavlarda “fark” sorulmamasını ve bu nedenle de bunun üzerinde fazla durmamalarını göstermişlerdir.

“Kavram–işlem kullanımı” adlı ana kategori ekseni açıklanacak olursa; 5. ve 6. öğrencinin çözüm yolları paralellik gösterirken; 4. öğrencinin takip ettiği yol, diğer iki öğrenciden farklıdır. 4. öğrenci, bu problemi, değişkenlere değer verme ve şıklarda yerine koyma yöntemiyle, kısa yoldan, çok kısa bir süre içerisinde çözmüştür. 5. ve 6. öğrenci ise; sırasıyla, “iki kare farkı” özdeşliği, çarpanlara ayırma işlemi, asal sayı tanımı, çarpan/bölen ve (pozitif) tamsayı kavramları, denklem çözme işlemini doğru şekilde kullanarak çözümlerini tamamlamışlardır. “Sonuca ulaşmak” adlı ana kategori ekseninden de görülebildiği gibi; –takip edilen çözüm yollarında ve dolayısıyla kullanılan kavramlarda farklılıklar olsa da– sonuçta, öğrencilerin üçü de, doğru sonuca ulaşmışlardır.

5. ve 6. öğrenci, çözüm sırasında “asal sayı” tanımına başvurarak; asal sayının, bölenlerinden/çarpanlarından birinin 1, diğerinin ise kendisi olması özelliğini kullanmıştır. 4. öğrenci ise; “asal sayı” kavramına, sadece, $-a$ ile b ye verdiği değerlere bağlı olarak- p nin “asal sayı” olma şartını sağlayıp sağlamadığını kontrol etme esnasında ihtiyaç duymuştur.

4.3. İlköğretim Öğrencilerinin “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

Katılımcı ilköğretim öğrencilerine, “rasyonel sayılar” ile ilgili üç tane soru sorulmuştur.

4.3.1. İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

“Rasyonel sayılar” ile ilgili bir soru, “2008 yılı 7. sınıf Seviye Belirleme Sınavı (SBS) soruları” arasından seçilmiştir ve katılımcı ilköğretim öğrencilerine, 13 Nisan–22 Nisan 2010 tarihleri arasında gerçekleştirilen 2. görüşmede sorulmuştur. Bu soru, – kazanımlar açısından– 7. sınıf matematik öğretim programındaki “sayılar” öğrenme alanının “rasyonel sayılarla işlemler” alt öğrenme alanında yer alan üç kazanımla ilgili bulunmuştur (Tablo 4.19).

Tablo 4.19
İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar

2. GÖRÜŞME / 3. SORU	KAZANIMLAR
$\frac{1 - \frac{1}{5}}{2}$ işleminin sonucu hangisidir? A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{8}{5}$ D) $\frac{5}{2}$ (2008 SBS – 7. SINIF – 2. SORU) (Cevap: A)	1. Rasyonel sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerini yapar.
	2. Rasyonel sayılarla çarpma ve bölme işlemlerini yapar.
	3. Rasyonel sayılarla çok adımlı işlemleri yapar.

Tablo 4.20

İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar

İrdelenecek Matematiksel Kavram/İşlem/Özellik Listesi	Matematiksel Kavram/İşlem/Özellik
Rasyonel sayı	Matematiksel kavram
Rasyonel sayılarda işlemler	İşlem
Payda eşitleme	
Sadeleştirme	Özellik

4.3.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi

Bu problemin çözümünde; rasyonel sayılarla çok adımlı işlemler yapılarak,

$$\frac{1 - \frac{1}{5}}{2} = \frac{\frac{5}{5} - \frac{1}{5}}{2} = \frac{4/5}{2/1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

şeklinde sonuca ulaşılabilir.

Çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezdeki kavramlar düşünülerek; katılımcı ilköğretim öğrencilerinin “rasyonel sayı” kavramı ile ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır (Tablo 4.20).

4.3.1.2. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Bu bölümde; ilköğretim öğrencilerinin, –bu problemi çözme sürecinde göz önüne alınan merkezi kavram olan– “rasyonel sayı” kavramı ile ilgili anlayışlarından bahsedilecektir.

4.3.1.2.1. İlköğretim öğrencilerinin, “rasyonel sayı” kavramı ile ilgili anlayışları. “Rasyonel sayı” kavramı ile ilgili olarak; araştırmacı–öğrenci diyalogları şöyledir:

Görüşmeci: Peki, burada yaptığın, burada gördüğümüz bu sayılar, mesela $\frac{4}{5}$;

bunların ismini biliyor muyuz?

Öğrenci: Amaan! Ecel soruları. (2 sn. sessizlik) Eyy, kesir sayıları.

Görüşmeci: Hım, “kesir” mi diyorsun?

Öğrenci: Yani kesirli sayılar.

Görüşmeci: Onu bir hatırlayalım. Neydi “kesirli sayılar”?

Öğrenci: (Bıkmış bir ses tonuyla:) “Amaan!” Şimdi, reel sayılar var, rasyonel sayılar var, tamsayılar var. (Öğrenci, aynı zamanda soru kağıdına alt alta “reel”, “rasyonel”, “tamsayılar” yazdı.) (3 sn. sessizlik) Başka ne var?

Görüşmeci: Şimdi, bunlara “kesirli sayılar” dedin, değil mi?

Öğrenci: Evet.

Görüşmeci: Hangisi oluyor yani bunlardan? Ya da o, ayrı bir kategori mi?

Öğrenci: İsimlerini hatırlamıyorum ki! (1. öğrenci – 2. görüşme)

Öğrenci: Şimdi 3. soruya geçelim. Şimdi... işlemi var. Bir rasyonel sayı problemi.

Görüşmeci: Neydi “rasyonel sayı”?

Öğrenci: Yani “pay ve paydası olan sayılar”... diyeyim. Mesela... rasyonel sayılar ayrılıyor mesela; basit... İşte kesirler... kesre de giriyor; rasyonel sayı, kesire...

Görüşmeci: Aynı şey mi?

Öğrenci: Aynı şey.

....

Görüşmeci: Peki, pay ve paydaya, istediğim sayıyı yazabilir miyim ben? Yazamayacağım sayılar var mı? ... Hangi sayılar gelebilir, pay ve paydaya?

Öğrenci: İstedığınız sayıları yazabilirsiniz. Şimdi, sonucunun rasyonel sayı olmasını istiyorsanız; o farklı. Yani mesela köklü bir sayı yazarsanız; olmayabilir mesela. Şeye, paydaya... paydaya ya da paya. Onlar rasyonel sayı olmayabilir mesela, sonuçları. (2. öğrenci – 2. görüşme)

Görüşmeci: Bu $\frac{1}{5}$; bu tür sayılara ne diyoruz?

Öğrenci: “Kesir” ya da “rasyonel sayı”.

Görüşmeci: Hım. Arasında fark var mı bunların?

Öğrenci: Var. Kesir olanlar; yani hep pozitif oluyorlar, artı oluyorlar. “Rasyonel” deyince; eksi olanlar da içine giriyor.

Görüşmeci: Hımm. O zaman bir, “rasyonel sayı”yı tanımlar mısın?

Öğrenci: İııı (düşünüyor), yani pozitif ya da negatif olan sayılar. Yani payı ve paydası olan. (3. öğrenci – 2. görüşme)

Araştırmacı, matematik başarı düzeyi “orta” olan 1 no’lu öğrenciye, $\frac{4}{5}$ türündeki

sayıların ismini sorduğunda; öğrenci, “kesirli sayılar” cevabını vermiş, ancak tanımlama yapamamıştır. 1. öğrenci ile araştırmacı arasında geçen yukarıdaki diyalog dikkate alındığında; 1. öğrencinin zihninde, sayıların özelliklerinin ve sınıflandırılmasının tam

olarak yapılanmamış olduğu; ayrıca öğrencinin, sayıların sınıflandırılması konusunda konuşmaktan pek hoşlanmadığı rahatlıkla söylenebilir. Matematik başarı düzeyi “iyi” olan 2 no’lu öğrenci, “rasyonel sayı” kavramı için, “pay ve paydası olan sayılar” tanımlamasını yapsa da, pay ve paydadaki sayıların tamsayı olması gerektiğini ifade etmediğinden; yapmış olduğu tanım “eksik tanım” olarak kabul edilmiştir. Benzer olarak, matematik başarı düzeyi “çok iyi” olan 3 no’lu öğrenci de; pay ve paydadaki sayıların tamsayı olması gerektiğini ifade etmediğinden; 3. öğrencinin tanımı da “eksik tanım” olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca araştırmacı ile 3. öğrenci arasında geçen konuşma esnasında; 3. öğrencinin, “kesir” ve “rasyonel sayı” kavramları arasındaki farka dair –kesirlerin hep pozitif olduğu, rasyonel sayıların ise negatif de olabildiği şeklinde– kavram yanılgısına sahip olduğu da tespit edilmiştir.

İlköğretim öğrencilerinin, problemde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları Tablo 4.21’de listelenmeye çalışılmıştır.

Tablo 4.21

İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Kavramlar	Öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları		
	1. öğrenci	2. öğrenci	3. öğrenci
Rasyonel sayı	tanımlayamamak	eksik tanımlamak	eksik tanımlamak

4.3.1.3. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları

1. öğrenci; soruyu okuduktan hemen sonra,

“5 kere 1’im, 5. 1 çıkardık, $\frac{4}{2}$. Bunun görünmeyen paydası, 1’dir. $\frac{4}{5}$ çarpı; ters

çevirip yazıyoruz, $\frac{1}{2}$. Bu (kastedtiği: “ $\frac{1}{2}$ ’nin paydası, yani 2”), gitti; bu

(kastettiği: “ $\frac{4}{5}$ ’in payı, yani 4”), 2 ile sadeleşti. Sonuç $\frac{2}{5}$.” (1. öğrenci – 2. görüşme)

diyerek; işlemleri doğru şekilde yapmış ve kısa süre içerisinde, doğru sonucu bulmuştur (Şekil 4.13). 2. öğrenci ve 3. öğrenci de; 1. öğrenciye benzer işlem basamaklarını takip ederek, doğru sonuca ulaşmışlardır (Şekil 4.14). Öğrencilerin üçü de, işleme dayalı çözüm süreçlerinde; “rasyonel sayılarda dört işlem”i, “payda eşitleme”yi, “sadeleştirme” ve “tamsayının paydasının 1 olması” özelliklerini kullanmışlardır. Çözüm, “rasyonel sayı”nın tanımını bilmeyi gerektirmediğinden, “rasyonel sayı”nın tanımını kullanmamışlar; fakat işlemler sırasında, sayıları pay ve payda biçiminde yazarak, “rasyonel sayılar”ın gösterim biçiminden faydalanmışlardır.

Araştırmacı, katılımcı ilköğretim öğrencilerine, “rasyonel sayılarla bölme işlemi yapılırken; neden paydadaki rasyonel sayının ters çevrilerek, paydaki rasyonel sayı ile çarpıldığı”nı sormuştur. Bununla ilgili olarak; araştırmacı–1. öğrenci diyalogu ve 2. öğrencinin yapmış olduğu açıklama aşağıdaki şekildedir:

Görüşmeci: “Ters çevirip çarpıyoruz” dedin. Onu neden yaptığımızı biliyor musun?

Öğrenci: Onu neden yaptığımızı bilmiyorum; biz kural olarak öğrendik. “Neden yaptığımız” bize söylenmedi.

Görüşmeci: Peki.

Öğrenci: Ama sanıyorum ki; $\frac{4}{5}$ ’i yazdığımızda, $\frac{2}{1}$ ’e bölmek için; ters çevirip çarpığımızda çünkü $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$ oranında azalıyor. Onun için olabileceğini düşünüyorum. (1. öğrenci – 2. görüşme)

“Yaa, nasıl olsa bölüyoruz, mesela ikiye bölüyoruz. Ee, $\frac{1}{2}$ ile de çarpınca; 2’ye bölünmüş gibi bir şey oluyor. 2’ye bölünüyor yani. Yani mesela diyorum; 8’i ikiye bölüyoruz, 4 çıkıyor. ... Ee, 8 ile $\frac{1}{2}$ ’yi çarparsak; yine 4 çıkıyor. Ondan dolayı. Yaa, orada işlem kolaylığı sağlasın diye.” (2. öğrenci – 2. görüşme)

Öğrencilerin söyledikleri değerlendirilecek olursa; 2. öğrenci, bunun gerekçesini mantıklı bir biçimde ve örnek yardımıyla açıklayabilmiştir. 1. öğrenci, her ne kadar bunun kendilerine kural olarak öğretildiğini söylese de; kendisi o an tahmin yürüterek,

gerekçeye dair mantıklı bir açıklama yapabilmıştır. 3. öğrenci ise, bu soruya hiçbir yanıt vermemiştir.

$\frac{1 - \frac{1}{5}}{2}$ işleminin sonucu hangisidir?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{8}{5}$ D) $\frac{5}{2}$

$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{1}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$

reel
rasyonel
tam sayılar

Şekil 4.13

1. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

$\frac{1 - \frac{1}{5}}{2}$ işleminin sonucu hangisidir?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{8}{5}$ D) $\frac{5}{2}$

$\frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$

Şekil 4.14

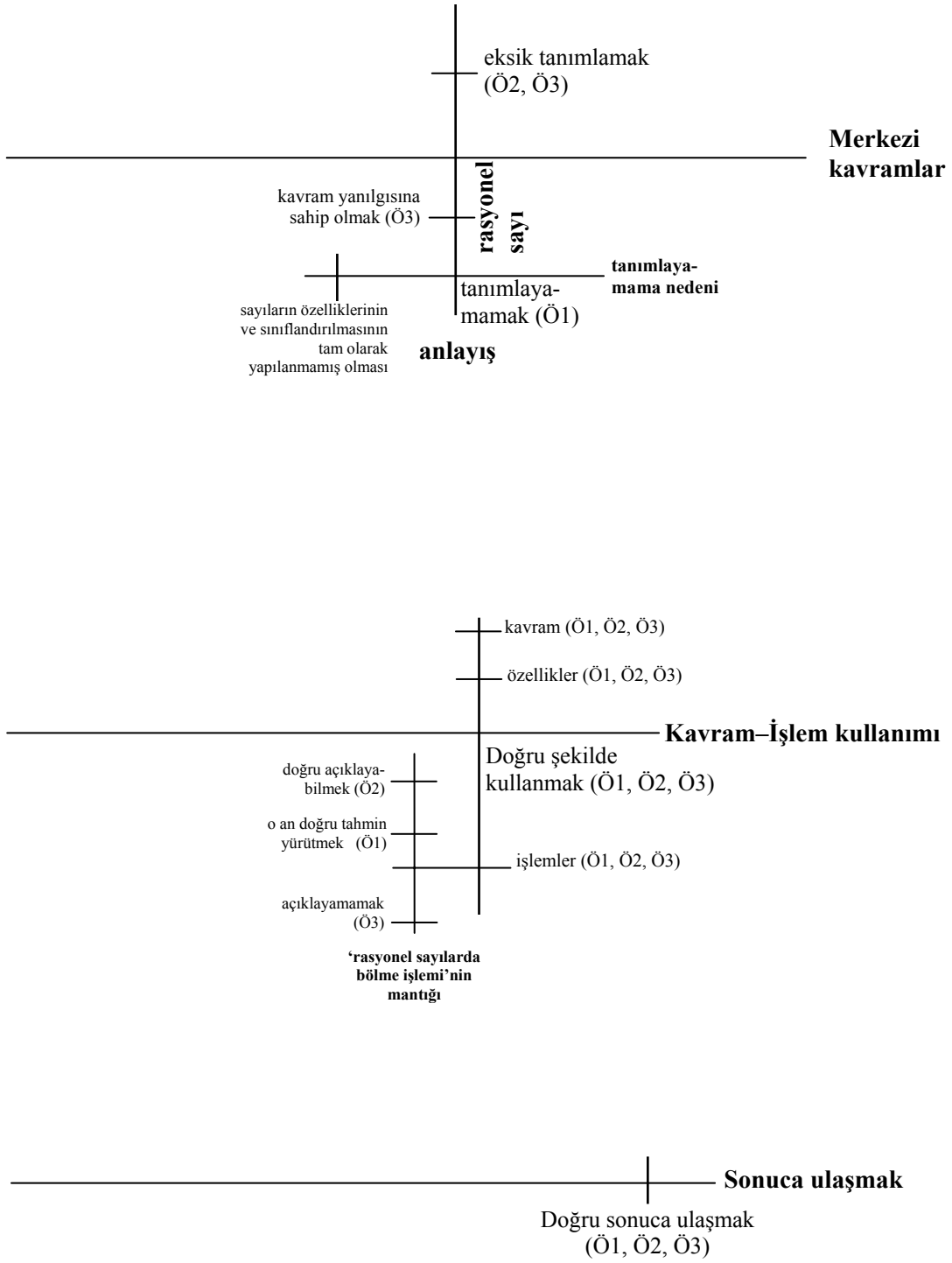
2. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

4.3.1.4. İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, 2. görüşmedeki “rasyonel sayılar” ile ilgili problemi çözme sürecinde; problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları, kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili elde edilmiş kategoriler bir araya getirilerek; her bir öğrencinin, problemi çözme süreci Tablo 4.22’de özetlenmiştir.

Tablo 4.22
İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Öğrenci no	Merkezi kavramlarla ilgili anlayışları	Kullandıkları kavramlar–işlemler	Kategoriler (Kavram–işlem kullanımı)	Kategoriler (Sonuca ulaşmak)
1	Rasyonel sayı (tanımlayamamak)	Rasyonel sayı Payda eşitleme Rasyonel sayılarda işlemler “Tamsayının paydasının 1 olması” özelliği Sadeleştirme özelliği	Uygun kavramı / işlemleri / özellikleri doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak
2, 3	Rasyonel sayı (eksik tanımlamak)	Rasyonel sayı “Tamsayının paydasının 1 olması” özelliği Payda eşitleme Rasyonel sayılarda işlemler Sadeleştirme özelliği	Uygun kavramı / işlemleri / özellikleri doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak



Şekil 4.15

İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması

Bu bölümde; katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, 2. görüşmedeki “rasyonel sayılar” ile ilgili problemi çözme süreçlerinin özetlendiği Şekil 4.15 açıklanacaktır. Bu soruda; öğrencilerin, sadece “rasyonel sayı” kavramı ile ilgili düşünceleri ortaya çıkarılmak amacıyla sorgulandığından; “merkezi kavramlar” adlı ana kategori ekseninde yalnızca “rasyonel sayı” kategorisi yer almaktadır. “Rasyonel sayı” kategorisi ise, –öğrencilerin “rasyonel sayı” ile ilgili anlayışları açısından– “eksik tanımlamak” ve “tanımlayamamak” şeklinde iki alt kategoriye ayrılmıştır. 1. öğrenci, kavram için herhangi bir tanımlama yapamazken; 2. ve 3. öğrenci, tanımlarında, pay ve paydadaki sayıların tamsayı olması gerektiğini dile getirmediklerinden, yapmış oldukları tanımlar “eksik tanım” olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca araştırmacı–öğrenci diyalogları esnasında; 1. öğrencinin zihninde, sayıların özelliklerinin ve sınıflandırılmasının tam olarak yapılanmamış olduğu ve öğrencinin, sayıların sınıflandırılması konusunda konuşmaktan pek hoşlanmadığı; 3. öğrencinin ise, “kesir” ve “rasyonel sayı” kavramları arasındaki farka dair –kesirlerin hep pozitif olduğu, rasyonel sayıların ise negatif de olabildiği şeklinde– kavram yanlışlığına sahip olduğu da tespit edilmiştir.

Çözüm ile ilgili olarak, üç öğrenci de, benzer işlem basamaklarını takip etmiş ve uygun kavram, özellik ve işlemleri doğru şekilde kullanmışlardır. Dolayısıyla “kavram–işlem kullanımı” adlı ana kategori ekseninde, yalnızca “doğru şekilde kullanmak” adlı kategori bulunmaktadır. Bu kategori de; –öğrencilerin, çözüm sürecinde neleri kullandıkları dikkate alınarak oluşturulmuş olan– “kavram”, “özellikler” ve “işlemler” adlı üç alt kategori ile ayrıntılandırılmıştır. Üç öğrenci de, işleme dayalı çözüm yapmış ve çözüm sürecinde; “rasyonel sayılarda dört işlem”i, “payda eşitleme”yi, “sadeleştirme” ve “tamsayının paydasının 1 olması” özelliklerini kullanmışlardır. Ayrıca çözüm, “rasyonel sayı” tanımını bilmeyi gerektirmediğinden, “rasyonel sayı”nın tanımını kullanmamışlar; ancak işlemler sırasında, sayıları pay ve payda biçiminde yazarak, “rasyonel sayılar”ın gösterim biçiminden faydalanmışlardır. Çözüm sürecinin sonunda; öğrencilerin üçü de, doğru sonuca ulaşmışlardır. Bu nedenle; “sonuca ulaşmak” adlı ana kategori ekseninde de, sadece “doğru sonuca ulaşmak” kategorisi yer almaktadır.

Ayrıca katılımcı ilköğretim öğrencilerine, “rasyonel sayılarla bölme işlemi yapılırken; neden paydadaki rasyonel sayının ters çevrilerek, paydaki rasyonel sayı ile çarpıldığı” sorulduğunda; 2. öğrenci, bunun gerekçesini mantıklı bir biçimde ve örnek yardımıyla açıklayabilmiştir. 1. öğrenci, bunun kendilerine kural olarak öğretildiğini söylese de; kendisi o an tahmin yürüterek, gerekçeye dair mantıklı bir açıklama yapabilmiştir. 3. öğrenci ise, bu soruya hiçbir yanıt vermemiştir.

4.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerine, “rasyonel sayılar” ile ilgili üç tane soru sorulmuştur.

4.4.1. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

“Rasyonel sayılar” ile ilgili bir soru, “2009 yılı Öğrenci Seçme Sınavı (ÖSS) Matematik–1 testi” soruları arasından seçilmiştir ve katılımcı ortaöğretim öğrencilerine, 16 Mart–23 Mart 2010 tarihleri arasında gerçekleştirilen 1. görüşmede sorulmuştur. Bu soru, –kazanımlar açısından– 9. sınıf matematik öğretim programındaki “cebir” öğrenme alanının “sayılar” bölümünün “rasyonel sayılar” alt öğrenme alanında yer alan bir kazanımla ilgili bulunmuştur (Tablo 4.23).

Tablo 4.23
Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar

1. GÖRÜŞME / 3. SORU	KAZANIMLAR
$\frac{\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(2-\frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{5}+1}$ işleminin sonucu kaçtır? A) $\frac{-6}{5}$ B) $\frac{-5}{6}$ C) -1 D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{5}{6}$ (2009 ÖSS MAT-1 – 1. SORU) (Cevap: A)	2. Rasyonel sayılar kümesinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri yaparak toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerini belirtir.

Tablo 4.24

Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar

İrdelenecek Matematiksel Kavram/İşlem/Özellik/Kural Listesi	Matematiksel Kavram/İşlem/Özellik/Kural
Rasyonel sayı	Matematiksel kavram
Payda eşitleme	
Rasyonel sayılarda dört işlem	İşlem
İşlem önceliği	Kural
Sadeleştirme	Özellik

4.4.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi

Bu problemin çözümünde; rasyonel sayılarla çok adımlı işlemler yapılarak,

$$\frac{\left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(2 - \frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{5} + 1} = \frac{\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{5}\right) \cdot \left(\frac{10}{5} - \frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{5} + \frac{5}{5}} = \frac{\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{9}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{-36/25}{6/5} = -\frac{36}{25} \cdot \frac{5}{6} = -\frac{6}{5}$$

şeklinde sonuca ulaşılabilir.

Çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezdeki kavramlar düşünülerek; katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin “rasyonel sayı” kavramı ile ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır (Tablo 4.24).

4.4.1.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Bu bölümde; ortaöğretim öğrencilerinin, –bu problemi çözme sürecinde göz önüne alınan merkezi kavram olan– “rasyonel sayı” kavramıyla ilgili anlayışlarına yer verilecektir.

4.4.1.2.1. Ortaöğretim öğrencilerinin, “rasyonel sayı” kavramı ile ilgili anlayışları. “Rasyonel sayı” kavramı ile ilgili olarak; katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin yapmış oldukları açıklamalar ve araştırmacı-öğrenci diyalogları şöyledir:

Görüşmeci: Ne diyoruz bu sayılara?

Öğrenci: Kesir sayılarında... Yani rasyonel sayı bunlar.

Görüşmeci: Rasyonel. “Rasyonel sayı”yı bana anlatabilir misin? Tanımlayabilir misin?

Öğrenci: Rasyonel sayı, bizim, ıııı (*düşünüyor*)... 2 mesela tamsayıdır; ama bu, işte $\frac{1}{2}$ rasyonel. Yani rasyonel sayı, işte tamsayıların daha azlarına diyebiliriz.

Yani tam bir tamsayı olmamışlarına. ıııı (*düşünüyor*), şey kesrinde, mesela sayı doğrusu üzerinde; tam doğru, yani tamların... ıııı (*düşünüyor*), tam... iki tamsayı arasındaki kalan yerler mesela.

Görüşmeci: Hımm. Mesela iki tamsayı arasında kalan yerleri düşünecek olursam; 1 ile 2 arasında mesela $\sqrt{2}$ var.

Öğrenci: $\sqrt{2}$ ama irrasyonel bir sayı.

Görüşmeci: Hımm.

Öğrenci: Bu sayı, ıııı (*düşünüyor*), mesela işte, o da daha bir ufak bir sayı.

Görüşmeci: Rasyonel, irrasyonel nasıl anlayacağım?

Öğrenci: Çok iyi soru. (2 sn. sessizlik) Ya, bunun temeli olması gerekiyor, anlamak için. İnsan, mesela hani bir sayı üzerinde işte... Bizde hani $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$; evet, mesela böyle sayıları rasyonel, yani ıııı (*düşünüyor*), ondalık şeklinde olacaklar.

Görüşmeci: Hımm.

Öğrenci: İrrasyonel sayılar... mesela kareköklü sayılar içindekilere, irrasyonel sayılar. Hani bunların, ıııı (*düşünüyor*), kök, $\sqrt{3}$ 'te mesela hani...

Görüşmeci: $\sqrt{4}$?

Öğrenci: O, 2 oluyor; tamsayı oluyor zaten o. (4. öğrenci – 1. görüşme)

Öğrenci: Rasyonel sayı, ıııı (*düşünüyor*—4 sn. sessizlik), nasıl anlatayım? Pay ve paydası olan her sayıya rasyonel sayı denir. Tamsayılar da aynı zamanda bir rasyonel sayı değil midir çünkü?

Görüşmeci: Öyle midir?

Öğrenci: Evet, öyledir. 1 de, 1 bölü 1'dir. (5. öğrenci – 1. görüşme)

“ıııı (*düşünüyor*), pay ve payda, yani pay ve paydası tamsayı olan sayılar oluyor. Veya gerçi rasyonel de olabilir de.” (6. öğrenci – 1. görüşme)

Matematik başarı düzeyi “orta” olan 4. öğrenci, “rasyonel sayı” kavramı için, ilk önce, “iki tamsayı arasındaki kalan yerler” ifadesini kullanmıştır. Araştırmacının, öğrencinin bu tanımına uyan “ $\sqrt{2}$ ” örneğini vermesi üzerine; öğrenci, bu sayının bir “irrasyonel sayı” olduğunu söylemiştir. Fakat az önce “rasyonel sayı” kavramını açıklarken, “iki

tamsayı arasındaki kalan yerler” ve “2 mesela tamsayıdır; ama bu, işte $\frac{1}{2}$ rasyonel.”

ifadelerini kullandığı ve dolayısıyla “her tamsayının, aynı zamanda bir rasyonel sayı olduğu” ilkesini göz ardı ettiği için; 4. öğrencinin “rasyonel sayı” açıklaması “yanlış açıklama” olarak değerlendirilmiştir. Matematik başarı düzeyi “iyi” olan 5. öğrenci, yaptığı tanımda, pay ve paydadaki sayıların tamsayı olması gerektiğinden bahsetmediğinden; tanımını “eksik tanım” şeklinde değerlendirilmiştir. Matematik başarı düzeyi “çok iyi” olan 6. öğrenci ise; pay ve paydadaki sayıların tamsayı veya rasyonel sayı olması gerekliliğine vurgu yaparak, “rasyonel sayı” kavramını doğru biçimde açıklayabilmiştir.

Ortaöğretim öğrencilerinin, problemde yer alan merkezi kavramlar ile ilgili anlayışları Tablo 4.25’de listelenmeye çalışılmıştır.

Tablo 4.25

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Kavramlar	Öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları		
	4. öğrenci	5. öğrenci	6. öğrenci
Rasyonel sayı	yanlış açıklamak	eksik tanımlamak	doğru açıklamak

4.4.1.3. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları

4. öğrenci, “İlk başta paydalarını eşitleriz, tabii ki de.” (4. öğrenci – 1. görüşme) sözleriyle çözüme başlamıştır. Devamında, araştırmacı ile öğrenci arasında aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Görüşmeci: Nasıl eşitliyoruz paydalarını?

Öğrenci: İııı (*düşünüyor*), bunun altında... $\frac{1}{1}$ 'dir bu. O zamansa bunun da

altına 5 yazarsak; her iki tarafı 5 ile çarparsak, genişletirsek; o zamansa sonuç...

Görüşmeci: Neden 5 ile genişletiyorum? 4 ile genişletemem mi?

Öğrenci: Çünkü aynı payda altında işlemler yapılır. Paydalarının aynı olması gerekiyor. (4. öğrenci – 1. görüşme)

Benzer olarak 5. öğrencinin, çözüm ile ilgili olarak ilk söylediği şey, “*Şimdi çıkarma işlemlerinde, rasyonel sayılarla normal işte tamsayılar arasında çıkarma veya toplama yapılırken; payda eşitlenir.*” (5. öğrenci – 1. görüşme) olmuştur. “Payda eşitleme” konusunda 5. öğrenci ile araştırmacı arasında geçen diyalog ise, şöyledir:

Görüşmeci: Eşitlerken nasıl bir yol izliyorsun? Mesela burada birini 5 ile, birini 1 ile çarptın? Her zaman böyle çapraz mı yazılır?

Öğrenci: Yok, her zaman çapraz değil. Bir sayıda eşitlemeye çalışılır. Mesela $\frac{1}{12}$ ile $\frac{1}{18}$ olsun. Bunların en küçük, yani en küçük de önemli değil yani.

Sadece birleşebilecekleri bir sayı, yani sayıya tamamlamamız gerekiyor.

Görüşmeci: Hımm.

Öğrenci: Mesela ben yani fazla büyük sayılarla uğraşmamak için; 36’da eşitlemek istiyorum.

Görüşmeci: Neden 36’da?

Öğrenci: Çünkü 36; 12’ye de, 18’e de tam bölünebiliyor. (5. öğrenci – 1. görüşme)

6. öğrenci, çözüm sürecinde, “payda eşitleme”den isim olarak hiç bahsetmediği için; 6. öğrenci ile, “payda eşitleme” üzerine doğrudan konuşulmamıştır. Ancak –dolaylı da olsa– konu ile ilgili olarak, 6. öğrenci ile araştırmacı arasında aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Öğrenci: İııı (*düşünüyor*); $\frac{1}{5}$, bu da -1 . -1 , $\frac{5}{5}$ ’e denk gelir; çünkü bir...

Görüşmeci: $\frac{4}{4}$ ’e de denk gelir mi?

Öğrenci: Evet.

Görüşmeci: Neden 5’i seçtin?

Öğrenci: Çünkü burada soruya uydurmaya çalışıyorum ve sorunun... Diğer kesrimiz, paydası 5 olduğu için; işlem daha kolay olsun diye öyle yaptık. Yani

$\frac{4}{4}$ de alsak, pek bir şey fark etmeyecek; ama biraz işlemimiz uzayacaktı. (6.

öğrenci – 1. görüşme)

Kısacası; 4. ve 5. öğrenci, çözüm sürecinde, “payda eşitleme”den isim olarak bahsetmiş ve payda eşitlemenin mantığını doğru biçimde açıklayabilmişlerdir. 6. öğrenci ise, çözüm sürecinde, “payda eşitleme”den isim olarak bahsetmediği için, “payda eşitleme” üzerine doğrudan konuşulmamış; ancak öğrencinin payda eşitlemenin mantığını doğru şekilde bildiği –dolaylı yoldan da olsa– tespit edilmiştir.

4., 5. ve 6. öğrenci, sorudaki tüm rasyonel sayıların paydaları 5 olacak şekilde payda eşitleyerek çözüme başlamıştır. Payda eşitlemenin ardından rasyonel sayılarda çıkarma ve toplama işlemleri yapan üç öğrenci de; ana kesir çizgisinin üst tarafındaki rasyonel sayıları $-\frac{4}{5}$ ve $\frac{9}{5}$, alt tarafındaki rasyonel sayıyı ise, $\frac{6}{5}$ olarak doğru şekilde hesaplamıştır.

6. öğrenci, $-\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{6}$ yazdıktan sonra, ana kesir çizgisinin alt tarafındaki kesri

ters çevirerek, kesirleri $-\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{6}$ şeklinde çarpan haline dönüştürmüştür. Sadeleştirme

ve çarpma işlemi sonucunda ise, kısa sürede $-\frac{6}{5}$ doğru sonucuna ulaşmıştır.

“Burası *(kastettiği: “pay kısmı”)* $-\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5}$. Aşağısı da $\frac{6}{5}$ ’ti. Burası $-\frac{36}{5} \cdot \frac{5}{6}$ ’dan, burası -6 çıkar.” (4. öğrenci – 1. görüşme)

“ $-\frac{36}{5}$ bölü $\frac{6}{5}$ çıkar. Bölme işlemi yapılırken rasyonel sayılarda; pay

kısımındaki rasyonel sayı aynen yazılır. $-\frac{36}{5}$. Bölme işlemi değişir; çarpma

işlemi olur. Alttaki sayı da ters çevrilerek yazılır. *(Kağıda $-\frac{36}{5} \cdot \frac{5}{6}$ yazdı.)*

Bunda sadeleştirme yapılırken; 5’ler gidiyor, çarpma işleminde. 6’lar da gidiyor. Burada -6 kaldı sadece. Cevabımız -6 .” (5. öğrenci – 1. görüşme)

açıklamalarını yapan 4. ve 5. öğrenci ise; rasyonel sayılarla çarpma işlemi yaparken, paydadaki sayıları çarpmadığından dolayı, şıklarda olmayan -6 sonucunu bulmuştur.

-6 sonucunu şıklarda bulamayan 5. öğrenci; hemen yaptığı işlemi kontrol etmeye başlamıştır. Kontrol sırasında “*Pardon, yanlışlık yaptık.*” (5. öğrenci – 1.

görüşme) diyerek işlem hatasını fark eden 5. öğrenci; kağıt üzerindeki yanlış işlemleri silmiş ve “Çarpılırken, çarparken yanlış yaptık. $-\frac{36}{25}$. Yani payları çarparken, paydayı da çarpıyoruz.” (5. öğrenci – 1. görüşme) sözleriyle işlemi devam ettirerek, $-\frac{6}{5}$ doğru cevabını bulmuştur (Şekil 4.16).

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \frac{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}} = \frac{\left(\frac{1-5}{5}\right) \cdot \left(\frac{10-1}{5}\right)}{\frac{1+5}{5}} = \frac{\left(\frac{-4}{5}\right) \cdot \left(\frac{9}{5}\right)}{\frac{6}{5}} \\
 & = -\frac{\frac{36}{25}}{\frac{6}{5}} = -\frac{36}{25} \cdot \frac{5}{6} = -\frac{6}{5} \#
 \end{aligned}$$

Şekil 4.16

5. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

“İşlem hatası yapmışım galiba.” (4. öğrenci – 1. görüşme) diyen 4. öğrenci ise; işlemleri iki defa yeniden yapmasına rağmen, hatasını fark edememiş ve sonuç olarak yine şıklarda olmayan -6 yı bulmuştur.

“Aslında çok kolay soru. Yapıyorum, hemen yapmam gerekirdi; ama...

Gerçekten hani böyle, bir anda şaşırdım çok kötü. (15 sn. sessizlik) $-\frac{5}{6}$

gelecek cevap galiba; ama tam olarak...” (4. öğrenci – 1. görüşme)

diyerek, çözümü tamamlamadan sonuca dair (yanlış) tahminde bulunan 4. öğrenci; başka bir problemin çözümüne geçmiştir. 4. öğrenci, iki tane problemin çözümünün ardından, “3. soruda hala aklım şu an takıldı.” (4. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, tekrar bu probleme dönmüştür. 35 saniye boyunca, kağıt üzerinde işlemleri tekrar yapan öğrenci; “ $-\frac{36}{25}$. Hah, buldum! Yanlışımı buldum.” (4. öğrenci – 1. görüşme) diyerek,

daha önce ana kesir çizgisinin üst tarafındaki rasyonel sayıları çarparken yapmış olduğu

işlem hatasını düzeltmiş ve geç de olsa $-\frac{6}{5}$ doğru sonucuna ulaşmıştır (Şekil 4.17 ve Şekil 4.18).

$$\textcircled{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) \left(2 - \frac{1}{5} \right) = \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{5} \right) \left(\frac{7}{5} \right)$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{6}{30} - \frac{5}{30} = \frac{1}{30}$$

$$2 - \frac{1}{5} = \frac{10}{5} - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{1}{30} \cdot \frac{9}{5} = \frac{9}{150} = \frac{3}{50}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{5}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$-\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} = -\frac{36}{25}$$

$$-\frac{36}{25} \cdot \frac{5}{6} = -\frac{36}{25} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{18}{25}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{5}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{10}{6} - \frac{1}{5} = \frac{50}{30} - \frac{2}{30} = \frac{48}{30} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{-\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{5}{5}} = \frac{-\frac{36}{25}}{-\frac{4}{5}} = \frac{36}{25} \cdot \frac{5}{4} = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$$

Şekil 4.17

4. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile İlgili Problem için İlk Önce Yaptığı Çözüm

$$\textcircled{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{5} \right) \cdot \left(\frac{10}{6} - \frac{1}{5} \right) = \frac{\left(\frac{-4}{5} \right) \left(\frac{9}{5} \right)}{\frac{1}{5} - \frac{5}{5}} = \frac{-\frac{36}{25}}{-\frac{4}{5}} = \frac{36}{25} \cdot \frac{5}{4} = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$$

Şekil 4.18

4. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile İlgili Problem için Daha Sonra Yaptığı Çözüm

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, problemi çözme süreçleri özetlenecek olursa; 6. öğrenci; uygun kavram, özellik ve işlemleri doğru şekilde kullanarak, kısa

sürede doğru sonuca ulaşmıştır. 4. ve 5. öğrenci ise; rasyonel sayılarla çarpma işlemi yaparken, paydadaki sayıları çarpmadığından dolayı, ilk önce, şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmışlardır. 5. öğrenci, yapmış olduğu bu işlem hatasını çok vakit geçmeden fark ederek düzeltmiş ve doğru sonuca ulaşmıştır. 4. öğrenci ise, işlemleri iki defa yeniden yapmasına rağmen, hatasını fark edememiş ve çözümü tamamlamadan sonuca dair (yanlış) tahminde bulunarak, başka bir problemin çözümüne geçmiştir. İki tane problemin çözümünün ardından, tekrar bu probleme dönen 4. öğrenci; bu defa, daha önce yapmış olduğu işlem hatasını düzeltmiş ve geç de olsa doğru sonuca ulaşmıştır. Öğrencilerin üçü de, işleme dayalı çözüm süreçlerinde; “rasyonel sayılarda dört işlem”i, “payda eşitleme”yi, “sadeleştirme” ve “tamsayının paydasının 1 olması” özelliklerini kullanmışlardır. Çözüm, “rasyonel sayı”nın tanımını bilmeyi gerektirmediğinden, “rasyonel sayı”nın tanımını kullanmamışlar; fakat işlemler sırasında, sayıları pay ve payda biçiminde yazarak, “rasyonel sayılar”ın gösterim biçiminden faydalanmışlardır.

Araştırmacı, katılımcı ortaöğretim öğrencilerine, “rasyonel sayılarla bölme işlemi yapılırken; neden paydadaki rasyonel sayının ters çevrilerek, paydaki rasyonel sayı ile çarpıldığı”nı sormuştur. Bununla ilgili olarak; araştırmacı-öğrenci diyalogları aşağıdaki şekildedir:

Öğrenci: Çünkü alttaki tarafın, ıııı (*düşünüyor*), yukarı çıkarken; ters çevriliyor, yani tersi alınıyor.

Görüşmeci: Hani sadece, bu, ezberlemem gereken bir kural mı? Hani nedenini hiç düşündük mü?

Öğrenci: Ezberleme gerektirmiyor aslında. Çünkü hani mesela $\frac{1}{4}$ ’ün tersi 4’tür. Burada biz “alttaki sayının tersini alırız” desek; daha doğru olur, yukarı çıkarken. (4. öğrenci – 1. görüşme)

Görüşmeci: Neden öyle yapıyoruz? Rasyonel sayılarda bölmede... öyle bir kural olarak mı gördünüz onu?

Öğrenci: Evet. “Kural olarak gördük” diyebiliriz.

Görüşmeci: Hani... Peki, beni buna ikna edebilir misin? İki rasyonel sayıyı bölerken, neden acaba... hani “ters çeviririz” dedin.

Öğrenci: Yani...

Görüşmeci: Ya da hiç düşünmüş müydün; gördünüz mü?

Öğrenci: Matematik adına ben hiçbir şeyi ikna edemem. Çünkü böyle zaten genelde... yani mesela “Sıfır neden var?”, hatta “1 neden var?” diye, yani böyle aklımızda sorular da oluyor; ama yani bunlara ikna etmemiz biraz zor olur insanları. Çünkü karşı taraf bunu benimsemeyi istemediği sürece, biraz zor olur; ama yani ikna etmeye çalışsam edebilir miydim? Büyük ihtimalle “Hayır”.

....

Görüşmeci: Yani bir mantıklı açıklaması var mıdır, peki sence?

Öğrenci: Mantıklı açıklaması vardır. Yani matematik her şeyi elbet bir şekilde açıklar; ama nasıl bir açıklama yapmışlardır, orayı da pek bilmiyorum. Çünkü hocalar dershanede biraz daha şey (*sanırım kastettiği: “yüzeysel”*) geçiyor. (6. öğrenci – 1. görüşme)

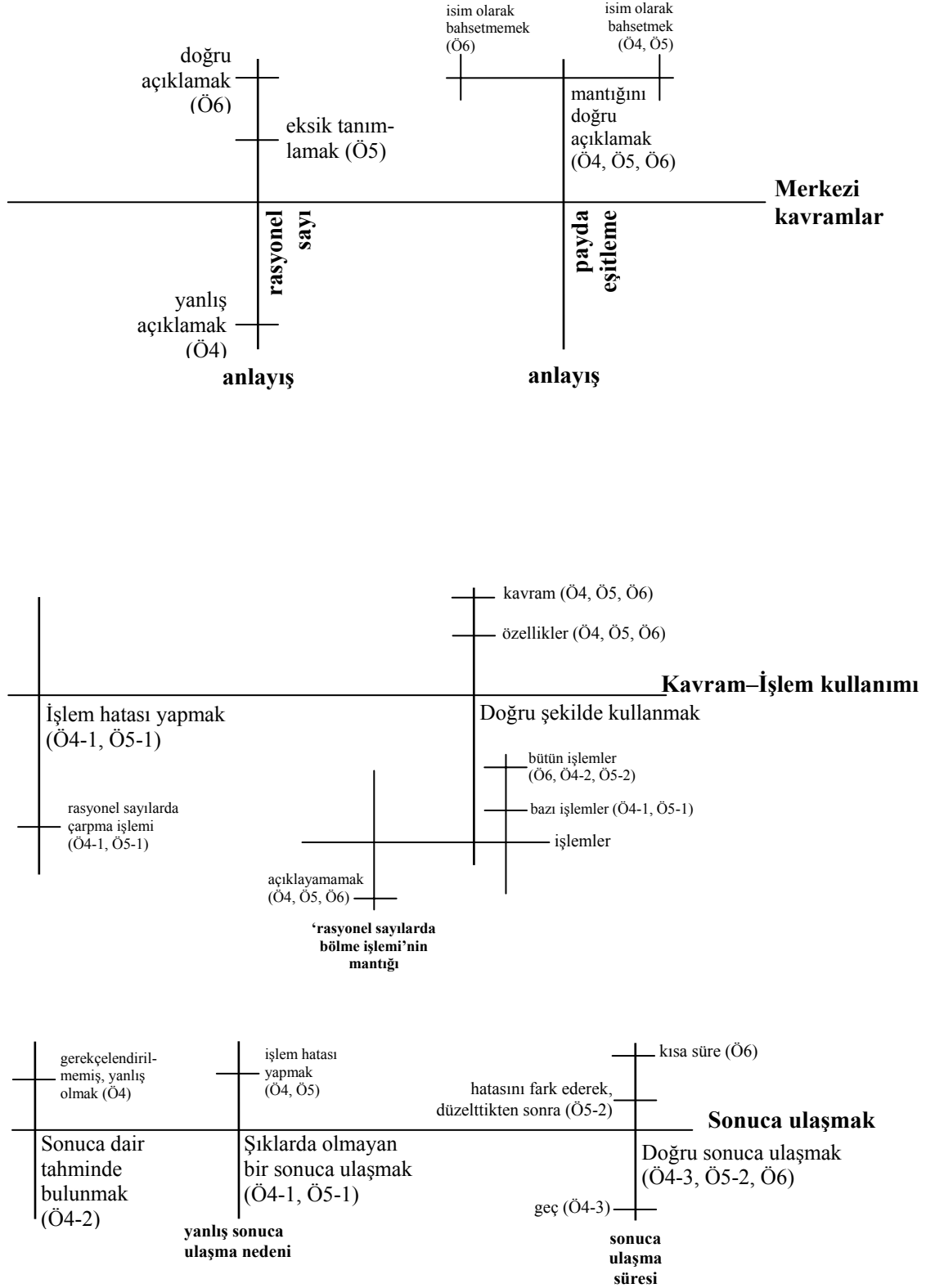
Kısacası; 4. öğrenci, bunun gerekçesini açıklamaya çalışsa da, aslında kuralı tekrar ifade etmiştir. 5. öğrenci, bilmediğini belirterek, hiçbir açıklama yapamamıştır. 6. öğrenci de, mutlaka mantıklı bir açıklamasının olduğunu; fakat kendisinin bunu bilmediğini dile getirmiştir ve buna gerekçe olarak da, dershanede bu tür açıklamalara pek yer verilmemesini göstermiştir. Sonuçta, öğrencilerin üçü de, “rasyonel sayılarla bölme işlemi yapılırken; neden paydadaki rasyonel sayının ters çevrilerek, paydaki rasyonel sayı ile çarpıldığı”nı açıklayamamıştır.

4.4.1.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Ortaöğretim öğrencilerinin, 1. görüşmedeki “rasyonel sayılar” ile ilgili problemi çözme sürecinde; problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları, kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili çıkan kategoriler bir araya getirilerek; her bir öğrencinin, problemi çözme süreci Tablo 4.26’da özetlenmiştir.

Tablo 4.26
Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi
Çözme Süreçlerinin Özeti

Öğrenci no	Merkezi kavramlarla ilgili anlayışları	Kullandıkları kavramlar–işlemler	Kategoriler (Kavram–işlem kullanımı)	Kategoriler (Sonuca ulaşmak)		
4	Rasyonel sayı (yanlış açıklamak) Payda eşitleme (doğru açıklamak)	Rasyonel sayı “Tamsayının paydasının 1 olması” özelliği Payda eşitleme Rasyonel sayılarda çıkarma, toplama ve bölme işlemi Sadeleştirme özelliği	Uygun kavramı/ özellikleri/ işlemleri doğru şekilde kullanmak	Şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmak	İşlem yapmadan, sonuca dair yanlış tahminde bulunmak	Geç de olsa doğru sonuca ulaşmak
		Rasyonel sayılarda çarpma işlemi	İşlem hatası yapmak			
		Rasyonel sayılarda çarpma işlemi	Uygun işlemi doğru şekilde kullanmak			
5	Rasyonel sayı (eksik tanımlamak) Payda eşitleme (doğru açıklamak)	Rasyonel sayı “Tamsayının paydasının 1 olması” özelliği Payda eşitleme Rasyonel sayılarda çıkarma, toplama ve bölme işlemi Sadeleştirme özelliği	Uygun kavramı/ özellikleri/ işlemleri doğru şekilde kullanmak	Şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmak		Hatasını fark ederek, düzelttikten sonra doğru sonuca ulaşmak
		Rasyonel sayılarda çarpma işlemi	İşlem hatası yapmak			
		Rasyonel sayılarda çarpma işlemi	Uygun işlemi doğru şekilde kullanmak			
6	Rasyonel sayı (doğru açıklamak)	Rasyonel sayı “Tamsayının paydasının 1 olması” özelliği Payda eşitleme Rasyonel sayılarda çıkarma, toplama, bölme ve çarpma işlemi Sadeleştirme özelliği	Uygun kavramı/ özellikleri/ işlemleri doğru şekilde kullanmak	Kısa sürede doğru sonuca ulaşmak		



Şekil 4.19

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Rasyonel Sayılar” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması

Bu bölümde; katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, 1. görüşmedeki “rasyonel sayılar” ile ilgili problemi çözme süreçlerinin eksenler üzerinde özetlendiği, yani eksensel olarak kodlandığı Şekil 4.19 açıklanacaktır. Bu soruda; öğrencilerin, “rasyonel sayı” kavramı ile ilgili düşünceleri ortaya çıkarılmak amacıyla sorgulandığından ve görüşme esnasında –öğrencilerin bahsetmelerine bağlı olarak– “payda eşitleme”nin mantığı üzerine de konuşulduğundan; “merkezi kavramlar” adlı ana kategori ekseninde “rasyonel sayı” ve “payda eşitleme” olmak üzere iki kategori yer almaktadır. “Rasyonel sayı” kategorisi; –öğrencilerin “rasyonel sayı” ile ilgili anlayışları açısından– “eksik tanımlamak”, “yanlış açıklamak” ve “doğru açıklamak” olmak üzere üç alt kategoriye ayrılmıştır. “Payda eşitleme” kategorisi de, –öğrencilerin “payda eşitleme”nin mantığı ile ilgili anlayışları açısından– irdelenmiştir. “Rasyonel sayı” kavramı için; 4. öğrenci, “her tamsayının, aynı zamanda bir rasyonel sayı olduğu” ilkesine aykırı bir açıklama yaptığından dolayı, 4. öğrencinin “rasyonel sayı” açıklaması “yanlış açıklamak” kategorisinde; 5. öğrenci de, yaptığı tanımda, pay ve paydadaki sayıların tamsayı olması gerektiğinden bahsetmediğinden, tanımı “eksik tanımlamak” kategorisinde değerlendirilmiştir. 6. öğrenci ise; pay ve paydadaki sayıların tamsayı veya rasyonel sayı olması gerekliliğine vurgu yaparak, “rasyonel sayı” kavramını doğru şekilde açıklayabilmiştir. 4. ve 5. öğrenci, çözüm sürecinde, “payda eşitleme”den isim olarak bahsetmiş ve payda eşitlemenin mantığını doğru biçimde açıklayabilmiş; 6. öğrenci ise, çözüm sürecinde, “payda eşitleme”den isim olarak bahsetmese de, öğrencinin payda eşitlemenin mantığını doğru şekilde bildiği – dolaylı yoldan– tespit edilmiştir.

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, problemi çözme sürecindeki kavram/işlem kullanımlarının özetlendiği “kavram–işlem kullanımı” adlı ana kategori ekseninde, “doğru şekilde kullanmak” ve “işlem hatası yapmak” şeklinde iki kategori bulunmaktadır. “Doğru şekilde kullanmak” adlı kategori de; – öğrencilerin, çözüm sürecinde neleri kullandıkları dikkate alınarak oluşturulmuş olan– “kavram”, “özellikler” ve “işlemler” adlı üç alt kategori ile ayrıntılandırılmıştır. Üç öğrenci de, işleme dayalı çözüm yapmış ve çözüm sürecinde; “rasyonel sayılarda dört işlem”i, “payda eşitleme”yi, “sadeleştirme” ve “tamsayının paydasının 1 olması” özelliklerini kullanmışlardır. Ayrıca çözüm, “rasyonel sayı” tanımını bilmeyi gerektirmediğinden, “rasyonel sayı”nın tanımını

kullanmamışlar; ancak işlemler sırasında, sayıları pay ve payda biçiminde yazarak, “rasyonel sayılar”ın gösterim biçiminden faydalanmışlardır. 6. öğrenci; çözüm sırasında gerekli olan tüm kavram, özellik ve işlemleri doğru şekilde kullanmıştır. 4. ve 5. öğrenci ise; ilk önce, rasyonel sayılarla çarpma işlemi yaparken, paydadaki sayıları çarpmadığından dolayı, işlem hatası yapmışlardır. 5. öğrenci, yapmış olduğu bu işlem hatasını çok vakit geçmeden fark ederek düzeltirken; 4. öğrencinin, işlem hatasının farkına varması ve hatasını düzeltmesi vakit almıştır. “Sonuca ulaşmak” adlı ana kategori ekseninde ise; “sonuca dair tahminde bulunmak”, “şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmak” ve “doğru sonuca ulaşmak” şeklinde üç tane kategori yer almaktadır. “Sonuca dair tahminde bulunmak” kategorisinde, –özellik açısından– “gerekçelendirilmemiş, yanlış olmak” şeklinde; “şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmak” kategorisinde ise, – “yanlış sonuca ulaşma nedeni” açısından incelendiğinde– “işlem hatası yapmak” şeklinde alt kategori ortaya çıkmıştır. “Doğru sonuca ulaşmak” adlı kategori de; – “sonuca ulaşma süresi” ekseninde boyutsal olarak değerlendirildiğinde– “kısa süre”, “hatasını fark ederek, düzelttikten sonra” ve “geç” olmak üzere üç alt kategoriye ayrılmıştır. “Sonuca ulaşmak” adlı ana kategori eksenini açıklanacak olursa; 6. öğrenci, kısa sürede doğru sonuca ulaşırken; 4. ve 5. öğrencinin doğru sonucu bulmaları –ikisinin de yapmış olduğu işlem hatasından dolayı– vakit almıştır. 5. öğrenci; ilk önce, şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmış; daha sonra, yapmış olduğu işlem hatasını fark ederek, düzelttikten sonra doğru sonuca ulaşmıştır. 4. öğrenci ise; önce, şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmış; sonra, herhangi bir işlem yapmadan sonuca dair yanlış bir tahminde bulunmuş; fakat daha sonra, yapmış olduğu işlem hatasının farkına varmış ve geç de olsa doğru sonucu bulmuştur.

Ayrıca katılımcı ortaöğretim öğrencilerine, “rasyonel sayılarla bölme işlemi yapılırken; neden paydadaki rasyonel sayının ters çevrilerek, paydaki rasyonel sayı ile çarpıldığı” sorulduğunda; üç öğrenci de, bunun gerekçesini açıklayamamıştır. 6. öğrenci, bunu bilmemesine gerekçe olarak da, dershanede bu tür açıklamalara pek yer verilmemesini göstermiştir.

4.5. İlköğretim Öğrencilerinin “Çokgenler” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

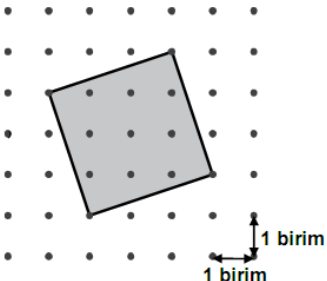
Katılımcı ilköğretim öğrencilerine, “çokgenler” ile ilgili üç tane soru sorulmuştur.

4.5.1. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

“Çokgenler” ile ilgili bir soru, “2008 yılı 7. sınıf Seviye Belirleme Sınavı (SBS) soruları” arasından seçilmiştir ve katılımcı ilköğretim öğrencilerine, 10 Mart–24 Mart 2010 tarihleri arasında yapılan 1. görüşmede sorulmuştur. Bu soru, –kazanımlar açısından– 7. sınıf matematik öğretim programındaki “ölçme” öğrenme alanının “dörtgensel bölgelerin alanı” alt öğrenme alanında yer alan iki kazanımla uyumludur (Tablo 4.27).

Tablo 4.27

İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar

1. GÖRÜŞME / 4. SORU	KAZANIMLAR
Şekildeki dörtgensel bölgenin alanı kaç birim karedir?  A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 (2008 SBS – 7. SINIF – 10. SORU) (Cevap: B)	5. Dörtgensel bölgelerin alanları ile ilgili problemleri çözer ve kurar. 6. Kenar uzunluğu ile alan arasındaki ilişkiyi açıklar.

Tablo 4.28
İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile ilgili
Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar

İrdelenecek Matematiksel Kavram/Formül/Bağıntı Listesi	Matematiksel Kavram/Formül/Bağıntı
Dörtgen	Matematiksel kavram
Kare	Matematiksel kavram
Karenin alanı	Formül
Dik üçgen	Matematiksel kavram
Dik üçgenin alanı	Formül
Benzerlik/Eşlik	Matematiksel kavram
Pisagor bağıntısı	Bağıntı

4.5.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolları” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi

Şekildeki dörtgensel bölgenin alanını hesaplamada takip edilebilecek farklı çözüm yolları vardır. Dörtgenin köşeleri E, F, G ve H olarak isimlendirilecek olursa; dörtgenin dışında kalacak, E, F, G, H noktalarından geçecek ve tabana paralel olacak şekilde, kenar uzunluğu 4 birim olan büyük bir kare çizilebilir. Bu durumda; büyük karenin alanı, soruda verilen dörtgenin alanı ile –dik kenar uzunlukları 1 ve 3 birim olan– dört tane eş dik üçgenin alanları toplamına eşit olmaktadır. Yani büyük karenin köşeleri A, B, C ve D olarak isimlendirilecek olursa;

$$A(\text{Taralı alan}) = A(\text{Büyük kare}) - 4 \cdot A(\text{Dik üçgen})$$

$$\begin{aligned}
 A(EFGH) &= A(ABCD) - 4 \cdot A(AEH) \\
 &= 4^2 - 4 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} \\
 &= 16 - 6 = 10 \text{ br}^2 \quad \text{bulunur.}
 \end{aligned}$$

II. çözüm yolu: Dörtgensel bölge; tabana paralel olan ve kenar uzunluğu 2 birim olan küçük bir kare ile –dik kenar uzunlukları 1 ve 3 birim olan– dört tane eş dik üçgen şeklinde beş parçaya bölünebilir. Bu durumda; dörtgensel bölgenin alanı, küçük karenin alanı ile dört tane eş dik üçgenin alanları toplamına eşit olmaktadır.

$$\begin{aligned}
A(\text{Taralı alan}) &= A(\text{Küçük kare}) + 4 \cdot A(\text{Dik üçgen}) \\
&= 2^2 + 4 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} \\
&= 4 + 6 = 10 \text{ br}^2 \quad \text{bulunur.}
\end{aligned}$$

Bu problem ifadesinde geçen veya çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezdeki kavramlar düşünülerek; katılımcı ilköğretim öğrencilerinin “dörtgen”, “kare”, “dik üçgen”, “alan” (“karenin alanı”, “dik üçgenin alanı” formülleri), “benzerlik”/“eşlik” kavramlarıyla ve “Pisagor bağıntısı” ile ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir.

4.5.1.2. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Bu bölümde; ilköğretim öğrencilerinin, –bu problemi çözme sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlar olan– “dörtgen”, “kare” ve “dik üçgen” kavramları ile ilgili anlayışlarına yer verilecektir. Öğrencilerin üçü de, bu problemi çözme esnasında, “Pisagor bağıntısı”ndan hiç bahsetmediklerinden ve bu bağıntıyı kullanmadıklarından; öğrencilerin bu kavrama dair anlayışları ortaya çıkarılamamıştır. Öğrencilerin, “alan” (“karenin alanı”, “dik üçgenin alanı” formülleri), “benzerlik”/“eşlik” kavramlarıyla ilgili anlayışlarına ise; bir sonraki bölümde, bu kavramları kullanımları sırasında değinilecektir.

4.5.1.2.1. İlköğretim öğrencilerinin, “dörtgen” kavramı ile ilgili anlayışları.

Matematik başarı düzeyi “orta” olan 1. öğrenci, “dörtgen” kavramını “*Dörtgen; dört tane kenarı olan cisim. ... Şekil. Çizgilerden oluşmuş kapalı biçim.*” (1. öğrenci – 1. görüşme) olarak tanımlamıştır. Matematik başarı düzeyi “iyi” olan 2. öğrenci; “dörtgen” kavramını, “*Dört kenarı olan bir çokgen.*” (2. öğrenci – 1. görüşme) şeklinde tanımlarken; “çokgen” kavramının tanımı sorulduğunda, “*Yani işte, yani şey, çokgen, yani nasıl açıklayayım onu? ... Hani çokgenler var ya, onlardan işte. Yani düzgün*

çokgen olmayabiliyor; ama yani çokgen.”(2. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, net bir cevap verememiştir. Matematik başarı düzeyi “çok iyi” olan 3. öğrenci ise; “dörtgen” kavramını, *“Dörtgen; şimdi, dört tane doğrunun... yani kesişecek, yani ayrı ayrı noktalarda. Doğrudaş olmayan dört noktanın... birleştirdiğimizde; kapalı... dört tane kenarı olan kapalı şekil. Dört köşesi, dört kenarı.”*(3. öğrenci – 1. görüşme) olarak tanımlamıştır.

Öğrencilerin “dörtgen” kavramı için yapmış oldukları tanımlar değerlendirilecek olursa; 1. ve 2. öğrenci, kavramı, birkaç kelime ile kısaca tanımlarken; 3. öğrenci, – doğru kelimeleri seçmede biraz zorlansa da– “doğrudaş olmayan dört nokta” ifadesini kullanarak, daha uzun bir tanımlama yapmıştır. 2. öğrenci, “dörtgen” kavramını, “çokgen” terimine bağlı olarak tanımlamış; fakat “çokgen” kavramı için net bir tanım yapamamıştır. 1. ve 3. öğrenci ise, “dörtgen” kavramını, –“çokgen” terimine bağlı olmaksızın– “kapalı şekil” ifadesini kullanarak tanımlamışlardır.

4.5.1.2.2. İlköğretim öğrencilerinin, “kare” kavramı ile ilgili anlayışları.

Sorudaki şekil için, *“... şeklimiz kare sanırsam, dörtgensel bölge.”* (1. öğrenci – 1. görüşme) yorumu yapan 1. öğrenci; “bu şeklin, kare olup olmadığının nasıl anlaşılacağı” sorusunu da şöyle cevaplamıştır:

“İııı (*düşünüyor*–3 sn. sessizlik), şöyle anlayabiliriz: Köşeli... mesela bunu isimlendirirsek, şu şekilde. (*Dörtgenin köşelerini A-B-C-D şeklinde isimlendiriyor.*) A ile D arasındaki uzaklık, şu şekilde... mesela 1, 2, 3 dedik; 1 tane sağa gitmiş. Bunda (*sanırım kastettiği: “B den C ye”*) dir... 1 tane sağa gitmiş; 1, 2, 3. Yani bu kenarla bu kenar birbirine eşitmiş (*kastettiği: “AD ile BC”*). ... Buraya (*kastettiği: “AB kenarı”*) baktığımızda; 1 tane yukarı; 1, 2, 3. Böyle olduğunda, bu da eşittir. Ee, bu eşit olunca; direktmen diğeri de buna eşit oluyor. Çünkü açılarımız 90°.” (1. öğrenci – 1. görüşme)

Araştırmacı, *“90° olduğundan emin miyiz?”* diye sorduğunda; 1. öğrenci, –önce emin olmadığını söylese de– kısa bir süre düşündükten sonra,

“Şekli döndürdüğümüzde, yani karelerine tamamladığımızda; hepsi, bir... bir sonraki kareye denk geliyor. Bu şekilde bir tamamlama yaptığımızda. Ve o şeyleri birleştirdiğimizde; zaten birimler birbirini... ıııı (*düşünüyor*), eşit aralıklarla kesiyor. O zaman 90° lik açıyı buluruz.” (1. öğrenci – 1. görüşme)

diyerek; şeklin, tabana paralel olacak şekilde döndürülebileceği düşüncesiyle, açılarının 90° olduğunu dile getirmiştir. O halde, 1. öğrenci, şekildeki dörtgenin bir kare olduğunu söylemiş ve kenarlarının eşit uzunlukta olmasına mantıklı bir gerekçe gösterebilmiş olsa da; açılarının 90° olmasının nedenini tam olarak açıklayamamıştır.

2. öğrenciye, sorudaki dörtgenin özel bir isminin olup olmadığı sorulduğunda; öğrenci, “*Şu an, şu an hiçbir şey vermediği için bize, hiçbir veri vermiyor yani; “burada eşit mi, değil mi” onu bilmiyoruz. Onun için bir şey diyemiyorum.*” (2. öğrenci – 1. görüşme) diyerek; hiçbir veri verilmediği için, bir şey söyleyemeyeceğini belirtmiştir.

Kısacası; 1. öğrenci, sorudaki dörtgenin bir kare olduğunu ifade etmiş ve bunun gerekçesini kısmen de olsa açıklayabilmiştir. 2. öğrenci, sorudaki dörtgenin özel bir isminin olup olmadığı konusunda bir şey söyleyememiş; 3. öğrenci ile araştırmacı arasında ise, bu konu hakkında herhangi bir konuşma geçmemiştir.

“Kare” kavramı için öğrencilerin yapmış oldukları tanımlar aşağıdaki şekildedir:

“Kare; dört kenarı birbirine eşit olan, açıları birbirine 90° lik... kenarları birbirine 90° lik açıyla inen şekildir.” (1. öğrenci – 1. görüşme)

“Dört kenarı eşit olan bir, işte bir çokgen.” (2. öğrenci – 1. görüşme)

“Dört kenarı eşit olan ve kesişen, yani dört kenarın kestiği... Her açı, 90° olacak ve her kenar, eşit olacak.” (3. öğrenci – 1. görüşme)

1. öğrenci, “kapalı şekil” olduğuna vurgu yapmadan; 2. öğrenci ise, “açı” terimini hiç kullanmadan eksik tanım yapmışlardır. 2. öğrenciye, “sadece dört kenar uzunluğunun eşit olmasının yeterli olup olmadığı” sorulduğunda ise; az önce yapmış olduğu “kare” tanımına “*Ve dört açısı da, 90 derece olacak.*” (2. öğrenci – 1. görüşme) ifadesini de eklemiştir. 3. öğrenci ise, “kare” kavramını doğru şekilde tanımlamıştır.

4.5.1.2.3. İlköğretim öğrencilerinin, “dik üçgen” kavramı ile ilgili anlayışları. 2. öğrenci; “dik üçgen” kavramını aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

“Onlar da, işte 2 tane dik kesişen bir kenarı olacak. Yani dik kesişmesi gerekiyor. Bir tane de hipotenüs olacak işte, ya. O, zaten o... Üçgen olduğu için; üçüncü kenar da, hipotenüs oluyor.” (2. öğrenci – 1. görüşme)

“Üçgen” tanımını, “*Doğrudaş olmayan üç nokta kesişecek. Yani kesişen çizgilerin oluşturduğu kapalı şekil.*” (3. öğrenci – 1. görüşme) olarak doğru şekilde yapan 3. öğrenci ise; “dik üçgen” tanımı için şunları söylemiştir:

“Şimdi, yani mesela bu iki kenar kesiştiğinde... şu yani üç kenardan ikisinin kesiştiği açı, 90° olmak zorunda. Yani bir açının mutlaka 90° olması gerekiyor.” (3. öğrenci – 1. görüşme)

2. öğrencinin, “dik üçgen” kavramını, “iki tane dik kesişen kenar” ifadesini ve “hipotenüs” terimini kullanarak, yani kenar özelliklerinden bahsederek doğru şekilde açıklayabildiği görülmektedir. 3. öğrenci de, –tam olarak düzgün bir cümle ile ifade edemese de– kavramı doğru şekilde tanımlamıştır. 1. öğrenci, çözüm sırasında “dik üçgen” kavramından hiç bahsetmediği için; 1. öğrencinin, bu kavram ile ilgili anlayışları ortaya çıkarılamamıştır.

İlköğretim öğrencilerinin, problem ifadesinde geçen veya çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlar ile ilgili yapmış oldukları tanım ve açıklamalar göz önüne alınarak; öğrencilerin problemde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları Tablo 4.29’da listelenmeye çalışılmıştır.

Tablo 4.29

İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Kavramlar	Öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları		
	1. öğrenci	2. öğrenci	3. öğrenci
Dörtgen	doğru tanımlamak	doğru tanımlamak	doğru tanımlamak
Kare	eksik tanımlamak	eksik tanımlamak	doğru tanımlamak
Dik üçgen		doğru açıklamak	doğru tanımlamak
Pisagor bağıntısı			

4.5.1.3. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışlarının ardından; şimdi de, öğrencilerin bu problemi çözme sürecinde kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili bulgular sunulacaktır.

1. öğrencinin, soru ile ilgili yaptığı ilk yorum, “Burada bize ‘alan’ soruyor; yandık.” (1. öğrenci – 1. görüşme) olmuştur. Şekilde verilen dörtgenin ne olduğu ile “dörtgen”, “kare” kavramları üzerine konuşulduktan sonra; 1. öğrenci, çözüm ile ilgili düşüncesini şöyle dile getirmiştir:

“Az önce, bir tamamlama işlemi yapmıştık, bir sonraki noktalara. ... O şekilde, şekli yeniden yaptığımızda... Zaten kare olduğunu bulmuştuk. Bir kenarının 3 birim olduğunu bulduk.” (1. öğrenci – 1. görüşme)

Şekli, tabana paralel olacak şekilde döndürdüğünde; elde ettiği şeklin, kare olduğunu ve bu karenin bir kenarının uzunluğunun da 3 birim olduğunu söyleyen 1. öğrenci; “Ee, alan hesabında; biz bir kenarın karesini alıyorduk. Bu da, “a çarpı a” ya eşitti.” (1. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, karenin alanını $A = 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ olarak (yanlış) bulmuştur (Şekil 4.20).

1. öğrenci, çözümünü tamamladıktan sonra; öğrencinin uyguladığı “dörtgeni, bir köşesi etrafında döndürme” işlemine dair, araştırmacı ile arasında aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Görüşmeci: Yani sanki sen şöyle mi yaptın?: “O kareyi alıp, hafif şöyle düzelttim” gibi mi düşündün?

Öğrenci: Evet, biraz düzelttim.

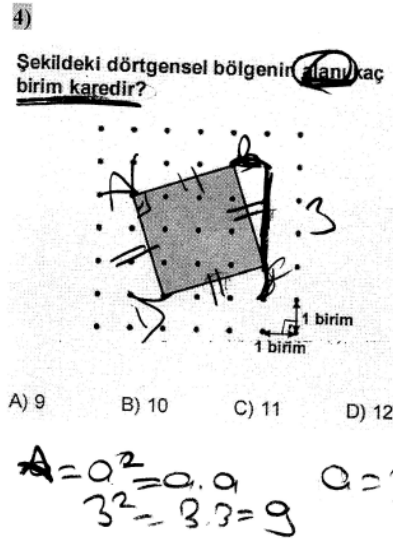
Görüşmeci: Hımm. O zaman sen bana şunu mu diyorsun? Şu kenar (*kastettiği: “BC kenarı–yani sağda çizdiği dik üçgenin hipotenüsü”*) şuna (*kastettiği: “sağda çizdiği dik üçgenin uzun olan dik kenarı”*) eşit midir?

Öğrenci: Evet. Onu demek istiyorum.

Görüşmeci: Hımmm. Emin miyiz?

Öğrenci: (3 sn. sessizlik) Değiliz. (6 sn. sessizlik) Çünkü bunu buna tamamladığımda; mesela şekil öyle denk gelebilir ki, noktalardan dışarıya çıkabilir. Ama fakat bu gördüğüm şekli tamamladığımda; tam oturduğunu düşündüm. (1. öğrenci – 1. görüşme)

1. öğrenci; şekildeki kareyi, sol alt köşesi etrafında, saat yönünde, tabana paralel olacak biçimde döndürdüğünde, kenar uzunluğunun 3 birim olduğu; başka bir deyişle, bu soru için, dik üçgenin hipotenüs uzunluğu ile uzun dik kenar uzunluğunun eşit olduğu yanlışlığına düşmüştür. Devamında karenin alan formülünü doğru kullanan 1. öğrenciyi; düşmüş olduğu bu kavram yanlışlığı, yanlış sonuca götürmüştür.



Şekil 4.20

1. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

2. öğrenci, problemin çözümü üzerine biraz düşünmek istemiş ve 15 saniye sessizliğin ardından; şekildeki dörtgenin iç bölgesini, 4 tane eş dik üçgen ve 1 tane de kare olacak biçimde parçalara ayırmıştır. Problemin çözümü ile ilgili olarak yaptığı “İlk başta, üçgenlerin alanını bulacağız. Taban ve şey, h_A oluyor; nasıl anlatayım? ‘Taban çarpı yükseklik, bölü 2’ üçgenin alanı.” (2. öğrenci – 1. görüşme) açıklamasının ardından; işlem yapmaya başlamıştır:

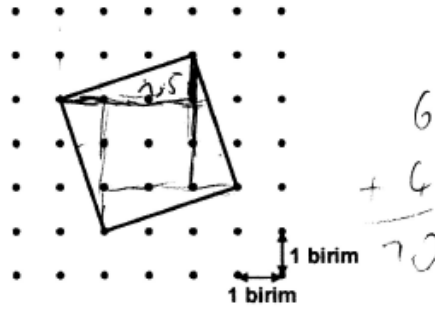
“ $1 \cdot 3 = 3$. Bölü 2; 1,5 oluyor. Bir tanesinin alanı 1,5. Burada (kaç tane üçgen olduğunu sayıyor:) 1–2–3–4 tane üçgen olduğu için, 4 ile çarpınca da; 6 oluyor.” (2. öğrenci – 1. görüşme)

Bir dik üçgenin alanını hesaplayan ve bulduğu değeri 4 ile çarparak, dik üçgenlerin toplam alanını bulan 2. öğrenci; “Karenin bir kenarı 2 olduğuna göre... Karenin alanı $a \cdot a$ dan a^2 . Bir $a = 2$ ise, $a^2 = 4$.” (2. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, küçük karenin

alanını 4 birim kare olarak hesaplamış ve dik üçgenler ile küçük karenin alanlarını toplayarak, $6 + 4 = 10$ doğru sonucuna ulaşmıştır (Şekil 4.21).

4)

Şekildeki dörtgensel bölgenin alanı kaç birim karedir?



A) 9

(B) 10

C) 11

D) 12

Şekil 4.21

2. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

3. öğrencinin, çözüme dair ilk yorumu, “Şimdi, bunu şey yapabiliriz; yani böyle... (3 sn. sessizlik) bir kareye tamamlayabiliriz, ilk baş (kastettiği: “ilk başta”).” (3. öğrenci – 1. görüşme) şeklinde olmuştur. Öğrenci, şekildeki dörtgenin köşelerinden geçecek ve tabana paralel olacak biçimde bir kare çizmiş ve “Bu karenin alanından, bu kenarlardaki şu üçgenlerin alanlarını çıkardığımızda; bunun alanını bulabiliriz.” (3. öğrenci – 1. görüşme) açıklamasında bulunmuştur.

Karenin alan formülü ile ilgili olarak, “Şimdi, karenin alanını; iki kenarı çarparak bulabiliriz. Yükseklik, zaten dik... bir kenara dik inen doğru parçası, yükseklik oluyor. Ondan; bunun zaten her kenarı 90° olduğu için, çarparak bulabiliriz iki kenarı.” (3. öğrenci – 1. görüşme) açıklamasını yapan 3. öğrenci; önce, çizdiği karenin bir kenar uzunluğunun, 5 birim olduğunu söylemiştir. Fakat karenin bir kenarını çizirken geçilen noktaları tekrar saydığında; “Ha, 5 nokta, 4 birim. Pardon!” (3. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, hatasını düzeltmiştir ve bu durumda karenin alanını da 16 birim kare olarak bulmuştur.

3. öğrenci, “Şimdi, bu üçgenlerin her birinin alanını bulursak... Zaten hepsi eşit üçgenler, yani aynı.” (3. öğrenci – 1. görüşme) sözleriyle; çizdiği büyük karenin içinde

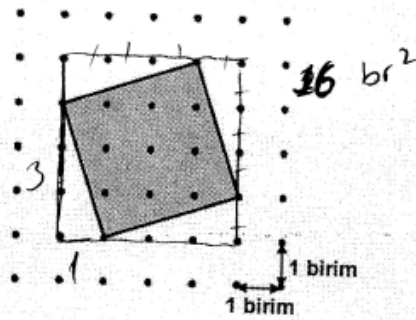
oluşan üçgenlerin her birinin alanını hesaplayacağını ve bu üçgenlerin hepsinin, eşit üçgenler olduğunu belirtmiştir. “Eşit üçgenler olduğunu nereden anladığı” sorusuna, öğrencinin cevabı, “Her birinin bir kenarı 3, bir kenarı 1 birim.” (3. öğrenci – 1. görüşme) olmuştur. Bu üçgenlerin hepsinin dik üçgen olduğunu belirten 3. öğrenci; “Yani şu dik olan iki kenarı çarpıp, 2’ye bölersek.” (3. öğrenci – 1. görüşme) sözleriyle, üçgenin alanını hesaplayacağını dile getirmiştir.

“Bir kenarı 3, diğer kenarı 1. $\frac{3 \cdot 1}{2} = 1,5$. Bundan 4 tane var. Her biri eşit zaten. 4 ile çarptığımızda, 6 oluyor.” (3. öğrenci – 1. görüşme)

diyerek, dik üçgen(ler)in alanını da hesaplamış olan 3. öğrenci; “Yani 16’dan da 6’yı çıkardığımızda; 10 birim kalıyor.” (3. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, çözümünü tamamlamıştır. Böylece büyük karenin alanı olan 16 birim kareden, dik üçgenlerin toplam alanı olan 6 birim kareyi çıkararak; dörtgensel bölgenin alanını “10 birim kare” olarak (doğru şekilde) bulmuştur (Şekil 4.22).

4)

Şekildeki dörtgensel bölgenin alanı kaç birim karedir?



A) 9

(B) 10

C) 11

D) 12

$$\frac{3 \cdot 1}{2} = 1,5 \cdot 4 = 6$$

Şekil 4.22

3. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

“Üçgenin alan formülündeki ‘bölü 2’nin nereden geldiği” ile ilgili olarak, 2. ve 3. öğrenci şunları söylemişlerdir:

“Normalde, dörtgenlerin kısa kenarı ve uzun kenarı ya da işte aynı olan kenarlarının çarpımı; alanı oluyordu. Burada üçgende, dik üçgende... iki tane dik üçgen, bir dörtgen olduğu için; onun yarısı oluyor.” (2. öğrenci – 1. görüşme)

“İkiye bölmemizin sebebi; bu çarptığımızda, bir yani mesela bir dörtgen oluşuyor. Üçgenin iki kenarını çarptığımızda. Bunu ikiye bölmemizin sebebi; üçgen, onun yarısı.” (3. öğrenci – 1. görüşme)

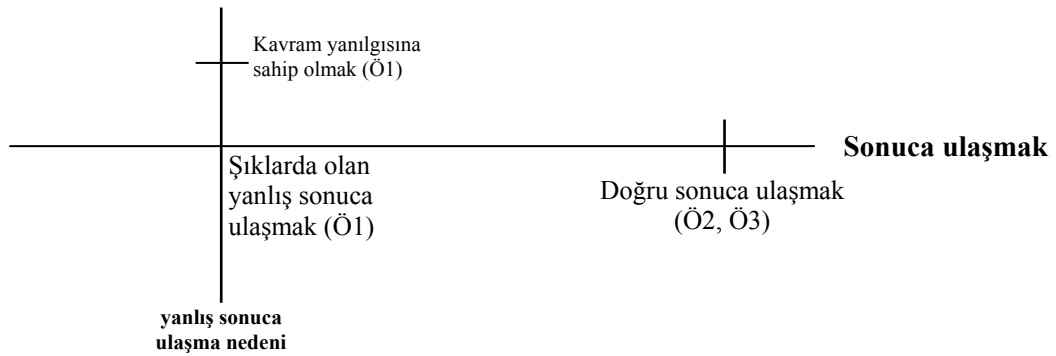
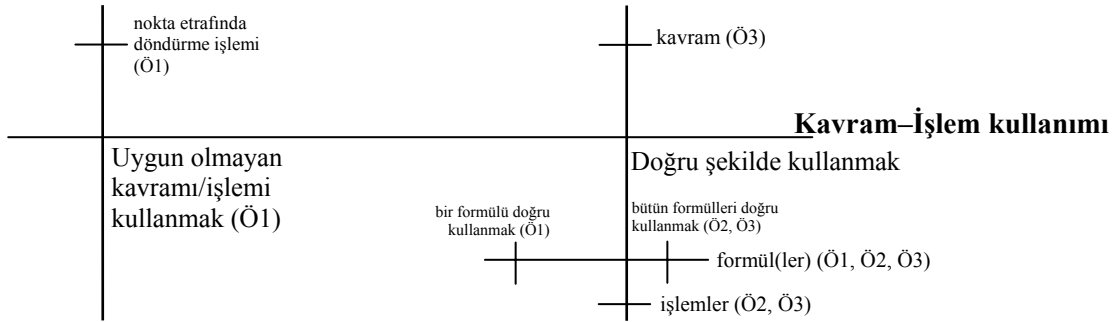
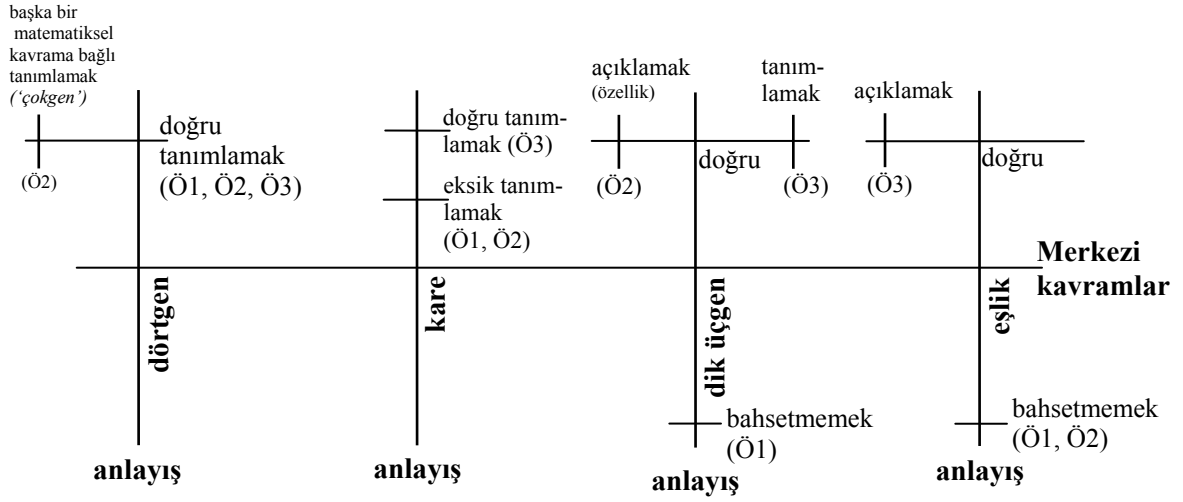
“Üçgenin alan formülündeki ‘bölü 2’nin nereden geldiği”ni doğru biçimde açıklayabilen 2. ve 3. öğrenciye, “burada bahsettiği dörtgenin özel bir adının olup olmadığı” sorulduğunda; iki öğrenciden de, “kare ya da dikdörtgen” (*doğru*) yanıt gelmiştir.

4.5.1.4. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, 1. görüşmedeki “çokgenler” ile ilgili problemi çözme sürecinde; problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları, kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili elde edilmiş kategoriler bir araya getirilerek; her bir öğrencinin, problemi çözme süreci Tablo 4.30’da özetlenmiş ve Şekil 4.23’de de eksenler üzerinde gösterilmiştir.

Tablo 4.30
İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Öğrenci no	Merkezi kavramlarla ilgili anlayışları	Kullandıkları kavramlar–işlemler	Kategoriler (Kavram–işlem kullanımı)	Kategoriler (Sonuca ulaşmak)
1	Dörtgen (doğru tanımlamak)	Dörtgeni, bir köşesi etrafında döndürme	Uygun olmayan işlemi kullanmak	Şıklarda olan yanlış sonuca ulaşmak
	Kare (eksik tanımlamak) Karenin alanı (doğru bilmek)	Karenin alan formülü	Uygun formülü doğru şekilde kullanmak	
2	Dörtgen (doğru tanımlamak) Kare (eksik tanımlamak) Karenin alanı (doğru bilmek) Dik üçgen (doğru açıklamak) Dik üçgenin alanı (doğru bilmek)	Dik üçgenin alan formülü Çarpma işlemi Karenin alan formülü Toplama işlemi	Uygun formülleri/işlemleri doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak
3	Dörtgen (doğru tanımlamak) Kare (doğru tanımlamak) Karenin alanı (doğru bilmek) Dik üçgen (doğru tanımlamak) Dik üçgenin alanı (doğru bilmek) (Üçgenlerde) eşlik (doğru açıklamak)	Karenin alan formülü Dik üçgenin alan formülü Eş üçgenler Çarpma işlemi Çıkarma işlemi	Uygun kavramı/formülleri/işlemleri doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak



Şekil 4.23

İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Çokgenler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, 1. görüşmedeki “çokgenler” ile ilgili problemi çözme süreçleri özetlenecek olursa; bu soruda, öğrencilerin “dörtgen”, “kare”, “dik üçgen” ve “(üçgenlerde) eşlik” kavramları ile ilgili düşünceleri ortaya çıkarılmak amacıyla sorgulanmıştır. Sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir. “Dörtgen” kavramını, 2. öğrenci, “çokgen” terimine bağlı olarak tanımlamış; fakat “çokgen” kavramı için net bir tanım yapamamıştır. 1. ve 3. öğrenci ise, “dörtgen” kavramını, –“çokgen” terimine bağlı olmaksızın– “kapalı şekil” ifadesini kullanarak tanımlamışlardır. “Kare” kavramı için; 1. öğrenci, “kapalı şekil” olduğuna vurgu yapmadan; 2. öğrenci ise, “açı” terimini hiç kullanmadan eksik tanım yapmışlardır. 3. öğrenci ise, “kare” kavramını doğru şekilde tanımlamıştır. “Dik üçgen” kavramını; 2. öğrenci, kenar özelliklerinden bahsederek doğru şekilde açıklamış; 3. öğrenci de, kavramı doğru şekilde tanımlamıştır. 1. öğrenci, çözüm sırasında “dik üçgen” kavramından hiç bahsetmediği için; 1. öğrencinin, bu kavram ile ilgili anlayışları ortaya çıkarılamamıştır. Çözüm esnasında ortaya çıkan (dik) üçgenlerin eşit üçgenler olduğunu sadece 3. öğrenci dile getirmiş ve “eşit üçgenler olduğunu nereden anladığı”nı doğru biçimde açıklayabilmiştir. Ayrıca 3. öğrencinin, “üçgen” ve “dörtgen” kavramlarını tanımlarken, “doğrudaş olmayan üç/dört nokta” ifadesini kullandığı dikkat çekmiştir. Bu da, 3. öğrencinin yaptığı bu iki kavram tanımının, –diğer iki öğrencinin tanımlarına kıyasla– daha formal bir tanım olduğu kanaatini oluşturmuştur.

Çözüm ile ilgili olarak, üç öğrenci de, farklı fikirler yürütmüş ve farklı çözüm yolları takip etmişlerdir. 2. öğrenci, şekildeki dörtgenin iç bölgesini, –4 tane eş dik üçgen ve 1 tane de (küçük) kare olacak biçimde– parçalara ayırarak; 3. öğrenci ise, şekildeki dörtgenin köşelerinden geçecek ve tabana paralel olacak biçimde (büyük) bir kare çizerek düşünmüştür. Her iki öğrenci de, “karenin alan formülü” ile “dik üçgenin alan formülü”nü kullanmıştır. 2. öğrenci, 4 dik üçgen ile 1 küçük karenin alanlarını toplayarak; 3. öğrenci ise, oluşan büyük karenin alanından, 4 tane eş dik üçgenin alanlarını çıkararak, dörtgensel bölgenin alanını doğru şekilde hesaplamış ve doğru sonucu bulmuştur. 1. öğrenci ise; şekli, sol alt köşesi etrafında, saat yönünde, tabana paralel olacak biçimde döndürmüş ve “dik

üçgenin hipotenüs uzunluğu ile uzun dik kenar uzunluğunun eşit olduğu yanlışlığına düşmüştür. 1. öğrenci, düştüğü bu kavram yanlışlığından dolayı; yanlış çözüm yolundan, (şıklarda olan) yanlış sonuca ulaşmıştır.

4.6. Ortaöğretim Öğrencilerinin “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

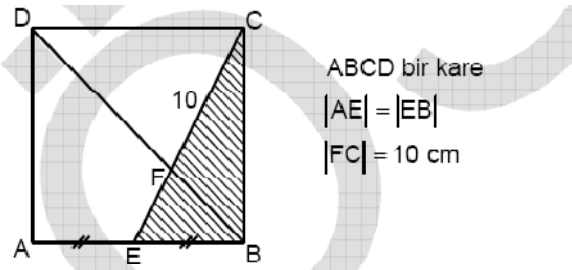
Katılımcı ortaöğretim öğrencilerine, “çokgenler–dörtgenler” ile ilgili üç tane soru sorulmuştur.

4.6.1. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

“Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili bir soru, “2008 yılı Öğrenci Seçme Sınavı (ÖSS) Matematik–1 testi” soruları arasından seçilmiştir ve katılımcı ortaöğretim öğrencilerine, 29 Mayıs–5 Haziran 2010 tarihleri arasında gerçekleştirilmiş 4. görüşmede sorulmuştur. Bu soru, –kazanımlar açısından– 9. sınıf geometri dersi öğretim programının (2010) II. ünitesi olan “çokgenler ve düzlemde kaplamalar” ünitesinde yer alan iki kazanımla; 10. sınıf geometri dersi öğretim programının (2010) V. ünitesi olan “üçgenler” ünitesinde yer alan bir kazanımla ve 11. sınıf geometri dersi öğretim programının (2010) II. ünitesi olan “özel dörtgenler” ünitesinde yer alan bir kazanımla ilgili bulunmuştur (Tablo 4.31).

Tablo 4.31

Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar

4. GÖRÜŞME / 8. SORU	KAZANIMLAR
 ABCD bir kare $AE = EB$ $FC = 10 \text{ cm}$ Yukarıdaki verilere göre, EBC üçgeninin alanı kaç cm^2 dir? A) 25 B) 30 C) 40 D) 45 E) 50 (2008 ÖSS MAT-1 – 24. SORU) (Cevap: D)	2. Çokgenlerin çevre uzunlukları ve çokgensel bölgelerin alanları ile ilgili bağıntıları oluşturur, uygulamalar yapar. (9. sınıf) 5. Üçgenlerde benzerlik teoremlerini açıklar ve uygulamalar yapar. (9. sınıf) 9. Bir üçgensel bölgenin alanını veren bağıntıları ispatlar ve uygulamalar yapar. (10. sınıf) 9. Kareyi açıklar, özellikleri ile ilgili teoremi ispatlar ve uygulamalar yapar. (11. sınıf)

Tablo 4.32

Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar

İrdelenecek Matematiksel Kavram/Formül/Bağıntı Listesi	Matematiksel Kavram/Formül/Bağıntı
Kare	Matematiksel kavram
Üçgenin alanı	Formül
Üçgen	Matematiksel kavram
(Üçgenlerde) benzerlik	Matematiksel kavram
Pisagor bağıntısı	Bağıntı

4.6.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi

$|AE| = |EB| = a$ cm dersek; $ABCD$ nin bir kare olması ve “karenin tüm kenar uzunluklarının birbirine eşit olması” özelliğinden dolayı, $|AD| = |DC| = |CB| = 2a$ cm yazılabilir. $DFC \sim BFE$ benzerliğinden, $\frac{|DC|}{|BE|} = \frac{|FC|}{|FE|} \Rightarrow \frac{2a}{a} = \frac{10}{|FE|} \Rightarrow |FE| = 5$ cm olur. EBC üçgeninde Pisagor bağıntısı uygulanacak olursa; $|BE|^2 + |CB|^2 = |EC|^2 \Rightarrow a^2 + 4a^2 = 15^2 \Rightarrow a = 3\sqrt{5}$ elde edilir. Buradan da; EBC üçgeninin alanı, $\frac{|CB| \cdot |BE|}{2} = \frac{6\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}}{2} = 45$ cm² olarak bulunur.

Bu problem ifadesinde geçen veya çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezdeki kavramlar düşünülerek; katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin “kare”, “üçgen”, “(üçgenlerde) benzerlik”, “alan” (“üçgenin alan” formülü) kavramlarıyla ve “Pisagor bağıntısı” ile ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır (Tablo 4.32).

4.6.1.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Bu bölümde; ortaöğretim öğrencilerinin, –bu problemi çözme sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlar olan– “kare”, “üçgen”, “(üçgenlerde) benzerlik”, “alan” (“üçgenin alan” formülü) kavramlarıyla ve “Pisagor bağıntısı” ile ilgili yapmış oldukları tanım ve açıklamalara yer verilecektir.

4.6.1.2.1. Ortaöğretim öğrencilerinin, “kare” kavramı ile ilgili anlayışları.

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin “kare” ve “üçgen” kavramlarına dair anlayışları daha önceki görüşmelerde ortaya çıkarılmış olduğundan; bu kavramlar 4. görüşmede tekrar sorgulanmamıştır. “Kare” kavramı için; öğrenciler, 1. ya da 2. görüşmede şunları söylemişlerdir:

“Kare; dört tane eşit kenarları bulunan... *iiii (düşünüyor–3 sn. sessizlik), ... (anlaşılamadı)*, bir çokgen. Dört kenarı bulunan; kenarları dik, 90° kesen.” (4. öğrenci – 2. görüşme)

“Kare, her kenarı birbirine eşit, bütün köşeleri 90 derece olan şekle kare diyoruz.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

“Dikdörtgen, 1111 (*düşünüyor*–4 sn. sessizlik), işte dört kenarı olan ve açısı 90 derece olan. Kare de, bunun (*kastettiği: “dikdörtgenin”*) özelleşmiş şekli biraz daha. Bütün kenarları eşit olması gerekiyor.” (6. öğrenci – 1. görüşme)

“Kare” kavramını; 4. öğrenci, “çokgen” terimine bağlı olarak; 6. öğrenci, “dikdörtgen”e bağlı olarak doğru şekilde tanımlamışlardır. 5. öğrencinin –herhangi bir terime bağlı olmaksızın, “şekil” ifadesini kullanarak– yapmış olduğu tanım ise; “dört kenarlı bir çokgen” ya da “dörtgen” olduğuna dair bir bilgi içermediğinden dolayı, “eksik tanım” olarak kabul edilmiştir.

“Kare” kavramını, “dikdörtgen” kavramına bağlı olarak tanımlamış olan 6. öğrencinin, “dikdörtgen” için yapmış olduğu yukarıdaki tanım değerlendirilecek olursa; tanımda, bahsedilen şeklin “paralelkenar” olduğu ya da “üç açı ölçüsünün 90° olduğu” vurgulanmadığı için; “eksik bir tanım” olduğu söylenebilir. Benzer şekilde; “kare” tanımını “çokgen” terimine bağlı olarak yapan 4. öğrencinin, 1. görüşmede “çokgen” için yapmış olduğu “Çokgen de; n eleman sayılı bir, 111 (*düşünüyor*), çizilmiş geometrik şekildir, diyebiliriz.” (4. öğrenci – 1. görüşme) şeklindeki tanım da, eksik bir tanımdır.

4.6.1.2.2. Ortaöğretim öğrencilerinin, “üçgen” kavramı ile ilgili anlayışları.

“Üçgen” kavramı için, öğrencilerin 1. ya da 2. görüşmede yapmış oldukları tanım ve açıklamalar şöyledir:

“Üçgen; üç kenarı bulunan, iç açılarının toplamı 180° olan bir çokgendir. Üç köşesi var; (*sayıyor:*) bir, iki, üç köşesi; üç kenarı.” (4. öğrenci – 2. görüşme)

“Üçgen; üç kenardan oluşan, üç köşesinin de iç açıları [*toplamı*] 180 derece olan şekle denir.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

“Üçgen; üç kenarı bulunan, iç açıları toplamı 180, dış açıları toplamı 360 olan geometrik şekil.” (6. öğrenci – 1. görüşme)

“Üçgen” kavramı için öğrencilerin söyledikleri yorumlanacak olursa; 4. öğrenci, yine “çokgen” terimine bağlı olarak tanım yapmıştır. Yaptığı tanımda, –üçgenin üç köşesinin olduğu, iç açıları toplamının 180° olduğu şeklinde– üçgene ait birkaç özellikten de bahsederek; gereğinden fazla bilgiye yer vermiştir. 5. öğrenci, üçgenin formal bir tanımını yapmamış; fakat –üçgenin üç kenarının ve üç köşesinin olduğu, iç açıları

toplamının 180° olduğu şeklinde– üçgene ait birkaç özellikten bahsetmiştir. Benzer şekilde, 6. öğrenci de; tanımlamak yerine, –üçgenin üç kenarının olduğu, iç açıları toplamının 180° ve dış açıları toplamının 360° olduğu şeklinde– üçgene ait birkaç özelliği sıralamıştır.

Ayrıca soruda “dik üçgen” kavramından hiç bahsetmeyen 4. öğrenciye, “EBC üçgeninin nasıl bir üçgen olduğu” sorulduğunda; öğrenci, “*İkizkenar olacağını sanmıyorum ama; ikizkenar mı? (4 sn. sessizlik) Hani şuradan bir tanesini verseydi; bulurduk hani. Yani belki bulabiliriz; ama ben bulamıyorum hani.*” (4. öğrenci – 4. görüşme) şeklinde yanıt vermiştir. Bir 12. sınıf sayısal öğrencisinin, basit bir akıl yürütmeyle kolayca cevaplanabilecek bu soruyu cevaplayamaması dikkati çekmiştir.

4.6.1.2.3. Ortaöğretim öğrencilerinin, “benzerlik” kavramı ile ilgili anlayışları. 4. öğrenci, bu soruda “benzerlik” kavramından hiç bahsetmediği için; bu kavrama dair anlayışları ortaya çıkarılamamıştır. 5. öğrenci ile “benzerlik” kavramı üzerine, daha önceki bir görüşmede (1. görüşme) konuşulmuştur. 5. öğrenci, 1. görüşmede “benzerlik” kavramını şöyle tanımlamıştır:

“Benzerlik... mesela iki üçgen var. Bu iki üçgende üç açının... mesela işte üç açı da birbirlerine mesela benzer... yani üç açı birbirine eşitse; o eş açıların karşısındaki kenarların birbirlerine oranları eşit birbirlerine.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

Araştırmacı, 6. öğrenciden, “benzerlik” kavramını ve koşullarını bir hatırlatmasını rica ettiğinde; 6. öğrenci, şunları söylemiştir:

“Benzerlik, iki üçgenin işte kenarlarının, açılarının, ıııı (*düşünüyor*)... Kenarlarının oran... aralarında bir oran; açıları da birbirine eşit olursa işte; benzerlik vardır. Benzerlikte gerçi çeşitler var: Kenar–açı–kenar, Açık–açı...” (6. öğrenci – 4. görüşme)

“Benzerlikte açılar her zaman eşit mi olmalı?” sorusunu ise; 6. öğrenci, şöyle cevaplamıştır:

“İşte kenar–açı... Gerçi ‘kenar–kenar–kenar’da olmak zorunda değil. Ama burada şimdi açılarımız eşit çıktığı için; burada açı–açı–açı benzerliği var. Ama ‘kenar–açı–kenar’da olmaması gerekiyor yaa, bildiğim kadarıyla. Çünkü (3 sn.

sessizlik) mesela (4 sn. *sessizlik*) olmaması lazım herhalde yaa. ... Ama tam emin değilim ama.” (6. öğrenci – 4. görüşme)

5. öğrenci; genel olarak “benzerlik” tanımı yerine, “üçgenlerde benzerlik teoremleri”nden biri olan “A.A.A. (Açı–Açı–Açı) benzerlik teoremi”ni açıklamıştır. 6. öğrenci, “benzerlik” kavramını doğru biçimde tanımlayabilmiştir. Fakat kavram bilgisini biraz daha ayrıntılı sorgulamak amacıyla, “benzerlikte açılar her zaman eşit mi olmalı?” sorusu yöneltildiğinde; 6. öğrenci, “kenar–kenar–kenar” ve “kenar–açı–kenar” benzerliklerini düşünerek, benzerlikte açılarının her zaman eşit olmak zorunda olmadığı yanılıgısına düşmüş; fakat tam olarak emin olmadığını da sözlerine eklemiştir.

4.6.1.2.4. Ortaöğretim öğrencilerinin, “Pisagor bağıntısı” ile ilgili anlayışları. “Pisagor bağıntısı” için, 6. öğrenci şunları söylemiştir:

“Pisagor bağıntısı; dik üçgenlerde, işte 90’ın karşısındaki kenarın... ‘Hipotenüs’ün karesi, eşittir, diğer kenarların kareleri toplamı.” (6. öğrenci – 4. görüşme)

Buradan da görüldüğü gibi; 6. öğrenci, “Pisagor bağıntısı”nı doğru şekilde ifade edebilmiştir. 4. öğrenci, bu soruda “Pisagor bağıntısı”ndan hiç bahsetmediği ve 5. öğrenci, EBC üçgeninde Öklid bağıntısını uygulayacağını ifade ettiği için; bu soruda bu iki öğrencinin, “Pisagor bağıntısı”na dair anlayışları ortaya çıkarılamamıştır.

4.6.1.2.5. Ortaöğretim öğrencilerinin, “üçgenin alan” formülü ile ilgili anlayışları. Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili düşüncelerinin yanı sıra; “üçgenin alan formülü” ve “formüldeki bölü 2’nin nereden geldiği” hakkındaki fikirleri de sorgulanmıştır.

Araştırmacı, “*Üçgenin alan formülü neydi?*” diye sorduğunda; 4. öğrenci, 5 saniye düşündükten sonra, “ ‘*Taban çarpı yükseklik bölü iki*’ olması gerekiyor.” (4. öğrenci – 4. görüşme) yanıtını vermiştir. “Bu formülün nereden çıktığı” sorusu üzerine; 4. öğrenci, birkaç saniye düşündükten sonra, şunları söylemiştir:

“Şurası yüksekliği, tabanı. Bölü 2’si, ıııı (*düşünüyor*). Aslında hiç düşünmedim, nereden geliyor hani. Formülleri ezberlemişiz, yani körü körüne.”
(4. öğrenci – 4. görüşme)

4. öğrenci, üçgenin alan formülündeki “bölü 2”nin nereden geldiğini açıklayamamış; açıklayamama gerekçesini de, kendiliğinden, ‘formülleri körü körüne ezberlemiş olması’ şeklinde ifade etmiştir. Üçgenin alan formülünü doğru biçimde hatırlayan 5. ve 6. öğrenciye, “üçgenin alan formülündeki ‘bölü 2’nin nereden geldiği” sorulmuştur. 5. öğrencinin bu soruya yanıtı, aşağıdaki şekilde olmuştur:

“Şu an aklıma geldi. Mesela ben şu E kenarından, DC kenarına şöyle paralel çizdim mi; $x \cdot 2x$, o dikdörtgenin alanıdır. Ama o üçgen ikiye böldüğü için; bölü 2 diyoruz.” (5. öğrenci – 4. görüşme)

6. öğrenciden ise; 7 saniyelik bir sessizliğin ardından, şöyle bir yanıt gelmiştir:

“Çünkü şimdi, bu şekli bir dikdörtgene tamamlarsak; dikdörtgenin alanı $x \cdot 2x$ idi. Ve burada bana yarısını sorduğu için, $\frac{1}{2}$ olabilir. Herhalde oradan.” (6. öğrenci – 4. görüşme)

5. ve 6. öğrencinin bu söyledikleri dikkate alındığında; her iki öğrencinin de, bu sorunun cevabını, akıl yürütme yoluyla o an buldukları söylenebilir.

Ortaöğretim öğrencilerinin, problem ifadesinde geçen veya çözüm aşamasında göz önüne alınan merkezi kavramlar ile ilgili yapmış oldukları tanım ve açıklamalar dikkate alınarak; öğrencilerin problemde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları Tablo 4.33’de listelenmeye çalışılmıştır.

Tablo 4.33

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Kavramlar	Öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları		
	4. öğrenci	5. öğrenci	6. öğrenci
Kare	doğru tanımlamak	eksik tanımlamak	doğru tanımlamak
Üçgen	doğru tanımlamak	doğru açıklamak	doğru açıklamak
Üçgenin alanı	eksik bilmek	doğru bilmek	doğru bilmek
(Üçgenlerde) benzerlik		doğru açıklamak	doğru tanımlamak
Pisagor bağıntısı			doğru açıklamak

4.6.1.3. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları

4. öğrencinin, problem ifadesini okuduktan sonraki ilk yorumu, şöyle olmuştur:

“ABCD bir kareymiş. $|AE| = |EB|$, $|FC| = 10$ cm imiş. Şurası 10 cm. Başka bir şey vermemişler. (11 sn. sessizlik) Vay be! Başka bir şey vermemişler yani (güliyor). Bari bir kareyi verseydiler de, bulsaydık. (3 sn. sessizlik) Aslında bir geometrici, bunu çok güzel yapar; ama ben yapmıyorum işte, yapamıyorum.” (4. öğrenci – 4. görüşme)

4. öğrencinin, soru hakkında yapmış olduğu bu yorum; kendisinin bu problemi çözebilmesi için, verilenleri yeterli bulmadığını göstermektedir. Aslında geometri problemlerini çözebilen birisinin, bu problemi rahatça çözebileceğini, ama kendisinin yapamadığını da sözlerine ekleyen 4. öğrenci; problemin nasıl çözüleceği yönünde herhangi bir fikir üretememiştir. 4. öğrenci, çözüm yapamasa da; “30 falandır, onun da cevabı ama.” (4. öğrenci – 4. görüşme) diyerek, bu sorunun “B) 30” şıkkına işaret koymuştur.

5. öğrenci, soruyu okuduktan sonra; “Şimdi AE kenarına x desem, EB kenarı da x olacak. Karenin bütün kenarları eşit olduğu için; DC kenarı da $2x$ olacak. Şimdi burada bir kelebek görüyoruz, kelebek kuralı.” (5. öğrenci – 4. görüşme) demiş ve

kırmızı kalemle D–C–F–E–B–F–D noktalarını birleştirerek, bahsettiği kelebeği çizmiştir. 5. öğrenci, aşağıdaki sözlerle devam etmiştir:

“DC kenarıyla EB kenarı benzer, yani oranı. Şimdi şöyle yazayım ben: $\frac{|EB|}{|DC|}$ eşittir... (Mırıldanarak düşünüyor:) “EB yi ilk önce yazdık.” $\frac{|EF|}{|FC|}$ dir. Şimdi, EB ile DC arasındaki oran $\frac{1}{2}$ ise; EF bölü FC, yani 10, yani eşittir birbirlerine. ... Buradan EF kenarı, 5 cm olarak buluruz.” (5. öğrenci – 4. görüşme)

5. öğrenci, çizmiş olduğu kelebek şekli üzerinde kurduğu benzerlik yardımıyla, EF kenar uzunluğunu hesaplayarak çözüme başlamıştır.

6. öğrencinin, soru ile ilgili olarak ilk söylediği, “Burada şimdi, benzerlik yapacağız.” (6. öğrenci – 4. görüşme) olmuştur ve sözlerine şöyle devam etmiştir:

“Şu FDC üçgeni ile FEB üçgeni benzerdir. Gerçi benzerlik sıralamasını söylemem lazımdı. Şu C açısı ile E açısı, iç ters olduğu için; açıları birbirine eşittir. D açısı ile de B açısının açıları birbirine eşittir. Ve burası x dersek, şu AE ye x dersek; EB... $|AE| = |EB|$ ise, orası da x dir. Karenin bir kenarı $2x$ ise, o zaman $|DC| = 2x$ olur. Yani bu FEB üçgeni ile FCD üçgeni arasında, 1’e 2 oranı benzerlik vardır.” (6. öğrenci – 4. görüşme)

Benzerlik sıralamasının önemli olduğunu belirten 6. öğrenci, eş olan açıları – gerekçesini açıklayarak– şekil üzerinde gösterdikten sonra; “FEB üçgeni ile FCD üçgeni arasında, 1’e 2 oranında benzerlik olduğunu” söylemiştir. İki üçgen arasında benzerlik kuran 6. öğrenci ile, “benzerlik” kavramı ve koşulları üzerine konuşulduktan sonra; öğrenci, çözümüne şöyle devam etmiştir:

“Şimdi burada nokta açısının karşısında, yani D açısının karşısında 10 varmış. B açısının karşısında FE var. O zaman $\frac{10}{|FE|}$ yazarsak eğer; eşittir, F açısının karşısında... DFC üçgeninde, F açısının karşısında $2x$ var. FEB üçgeninde ise, x var. O zaman buradan, 1’e 2 çıktı. O zaman $|FE| = 5$ gelir. Yani bu kenarımız 5 cm miş, FE.” (6. öğrenci – 4. görüşme)

Görüldüğü gibi; 5. ve 6. öğrencinin ikisi de, doğru parçalarının eşitliğinden ($|AE| = |EB|$), “bir karenin tüm kenar uzunluklarının birbirine eşit olması” özelliğinden ve FEB üçgeni ile FCD üçgeni arasındaki “benzerlik”ten yararlanarak, $|FE| = 5$ cm olarak bulmuştur.

FE kenar uzunluğunu 5 cm olarak bulan 5. öğrenci, “Şimdi bir de EB kenarına x dedik biz. BC kenarına da $2x$ diyeceğiz. Çünkü hani bu bir kare.” (5. öğrenci – 4. görüşme) dedikten sonra; EBC üçgeninde Öklid bağıntısını uygulayacağını ifade etmiştir. “Bir özelliği var mı bu üçgenin?” sorusuna, “dik üçgen” yanıtını veren 5. öğrenci; sözlerine, “Zaten dik üçgende Öklid bağıntısı yapabiliyoruz.” (5. öğrenci – 4. görüşme) şeklinde devam etmiştir. Benzer şekilde, 6. öğrenci de, BC kenar uzunluğunun –karenin bir kenarı olduğu gerekçesiyle– $2x$ olduğunu belirtmiş ve “Ondan sonra burada, Pisagor bağıntısı yapmamız lazım.” (6. öğrenci – 4. görüşme) demiştir.

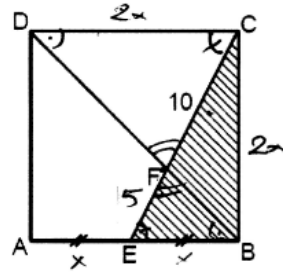
5. ve 6. öğrencinin her ikisi de; “Pisagor bağıntısı”nı kullanarak, $x^2 + 4x^2 = 15^2$ denklemini elde etmiş ve bu ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi çözerek, $x = 3\sqrt{5}$ eşitliğini bulmuştur. 5. ve 6. öğrenci, problemin çözümüne aşağıdaki şekilde devam etmişlerdir:

“EBC üçgeninin alanı da $\frac{x \cdot 2x}{2}$, yani x^2 dir. O da, demin zaten bulmuştuk; 45’tir. Cevap ‘Denizli’ (kastettiği: “D şıkkı”).” (5. öğrenci – 4. görüşme)

“Bana EBC üçgeninin alanını soruyorsa; $3\sqrt{5}$... yani x çarpı $2x$. $2x$ de $6\sqrt{5}$... bölü 2 dir. (6. öğrenci, kağıda $\frac{3\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}}{2}$ yazdı.) 2 ile 6 gider, sadeleşir; 3 gelir. 3... 9 geldi. 5 de orada var, $\sqrt{5}$ den... $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$ den 5 gelir. O zaman 45 dir.” (6. öğrenci – 4. görüşme)

$x = 3\sqrt{5}$ eşitliğini bulmuş olan iki öğrenci de; üçgenin alan formülünü kullanarak, EBC üçgeninin alanını doğru şekilde hesaplamış ve doğru sonuca ulaşmışlardır (Şekil 4.24).

8)



ABCD bir kare

$$|AE| = |EB|$$

$$|FC| = 10 \text{ cm}$$

Yukarıdaki verilere göre, **EBC** üçgeninin alanı kaç cm^2 dir?

- A) 25 B) 30 C) 40 **D) 45** E) 50

$$x^2 + 4x^2 = 225$$

$$5x^2 = 225$$

$$x^2 = 45$$

$$x = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\frac{10}{|FE|} = \frac{2x}{x}$$

$$FE = 5$$

$$\frac{3\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}}{2} = 9.5$$

Şekil 4.24

6. Öğrencinin, 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

Bu görüşmede, çözümde kullandığı bağıntıdan “Öklid bağıntısı” olarak bahseden 5. öğrenciye; tamamlayıcı görüşmede “Dik kenar uzunlukları a ve b , hipotenüs uzunluğu c olan bir dik üçgen düşünecek olursak; $a^2 + b^2 = c^2$ bağıntısının adı nedir?” diye sorulmuştur. Bu kez 5. öğrenciden gelen cevap, “Pisagor bağıntısı” olmuştur. 4. görüşme sırasında “Öklid bağıntısı” dediği hatırlatıldığında ise; “Öklid o değil.” (5. öğrenci – Tamamlayıcı görüşme) demiş ve “Öklid bağıntısı”nı doğru biçimde açıklayabilmiştir. Bu nedenle; 5. öğrencinin, 4. görüşme süresince “Pisagor bağıntısı”ndan “Öklid bağıntısı” olarak bahsetmesinin; kavram kargaşasından değil de, öğrencinin o süreçte bağıntı isimlerini karıştırmamasından kaynaklandığı söylenebilir.

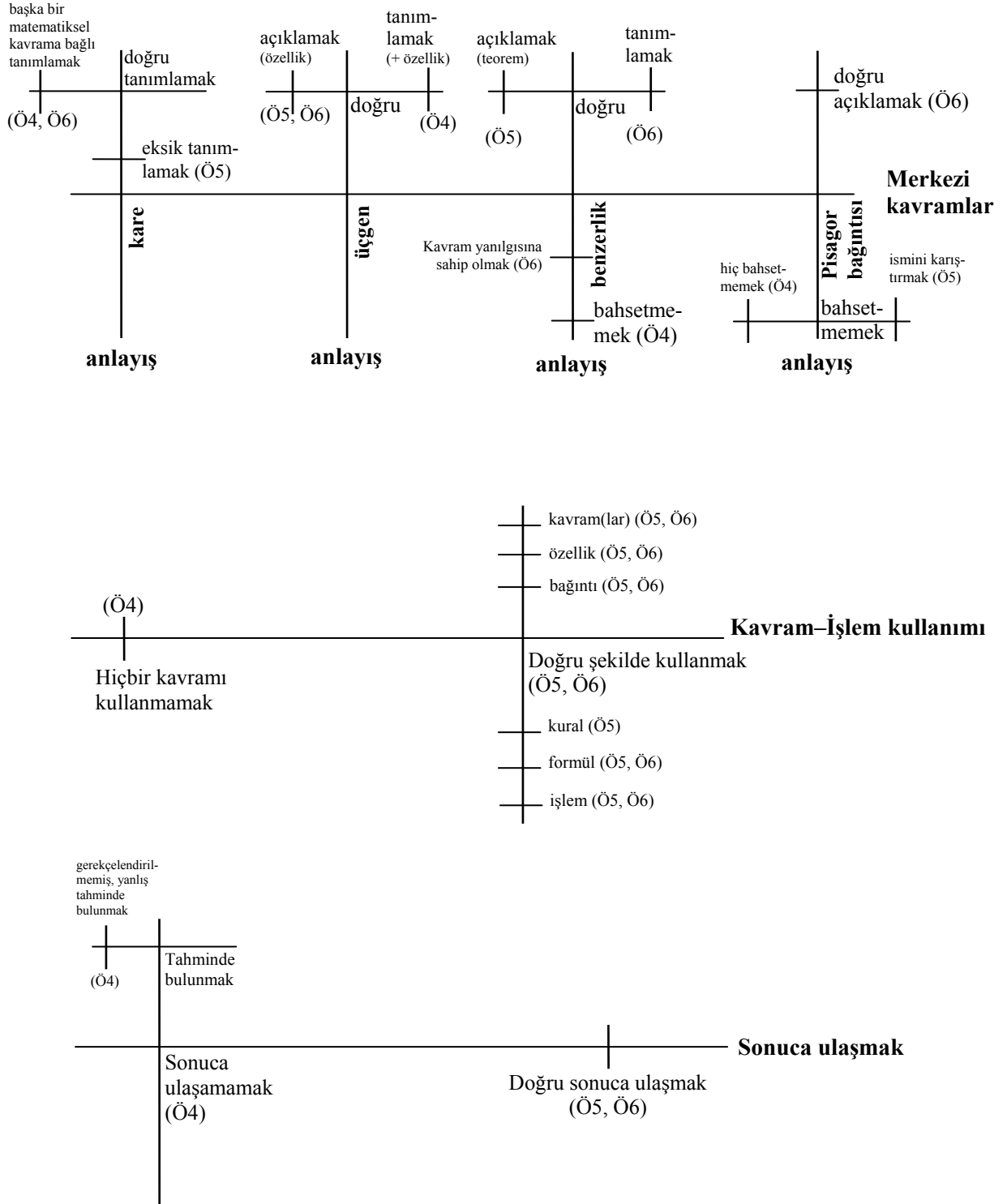
4.6.1.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Ortaöğretim öğrencilerinin, 4. görüşmedeki “çokgenler–dörtgenler” ile ilgili problemi çözme sürecinde; problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili

anlayışları, kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili çıkan kategoriler bir araya getirilerek; her bir öğrencinin, problemi çözme süreci Tablo 4.34’de özetlenmiş ve Şekil 4.25’de de eksenler üzerinde gösterilmiştir.

Tablo 4.34
Ortaöğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Öğrenci no	Merkezi kavramlarla ilgili anlayışları	Kullandıkları kavramlar–işlemler	Kategoriler (Kavram–işlem kullanımı)	Kategoriler (Sonuca ulaşmak)
4	Kare (doğru tanımlamak) Üçgen (doğru tanımlamak) Üçgenin alanı (eksik bilmek)	yok	Hiçbir kavramı kullanmamak	Sonuca ulaşmamak
5	Kare (eksik tanımlamak) Üçgen (doğru açıklamak) Üçgenin alanı (doğru bilmek) (Üçgenlerde) benzerlik (doğru açıklamak)	Kare (<i>özellik</i>) Kelebek kuralı (Üçgenlerde) benzerlik Pisagor bağıntısı İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklem çözme işlemi Üçgenin alan formülü	Uygun özelliği/ kuralı/ kavramı/ bağıntıyı/ işlemi / formülü doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak
6	Kare (doğru tanımlamak) Üçgen (doğru açıklamak) Üçgenin alanı (doğru bilmek) (Üçgenlerde) benzerlik (doğru tanımlamak) Pisagor bağıntısı (doğru açıklamak)	İç ters açılar Kare (<i>özellik</i>) (Üçgenlerde) benzerlik Pisagor bağıntısı İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklem çözme işlemi Üçgenin alan formülü	Uygun kavramları/ özelliği/ bağıntıyı/ işlemi / formülü doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak



Şekil 4.25

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Çokgenler–Dörtgenler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, 4. görüşmedeki “çokgenler–dörtgenler” ile ilgili problemi çözme süreçleri özetlenecek olursa; bu soruda, öğrencilerin “kare”, “üçgen”, “(üçgenlerde) benzerlik” kavramlarıyla ve “Pisagor bağıntısı” ile ilgili düşünceleri ortaya çıkarılmak amacıyla sorgulanmıştır. Sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir. “Kare” kavramını; 4. öğrenci, “çokgen” terimine bağlı olarak; 6. öğrenci de, “dikdörtgen”e bağlı olarak doğru şekilde tanımlamışlardır. Ancak 4. öğrencinin “çokgen” kavramı için, 6. öğrencinin de “dikdörtgen” kavramı için yapmış oldukları tanımların, “eksik tanım”lar oldukları tespit edilmiştir. 5. öğrencinin –herhangi bir terime bağlı olmaksızın, “şekil” ifadesini kullanarak– yapmış olduğu “kare” tanımı ise, –“dört kenarlı bir çokgen” ya da “dörtgen” olduğuna dair bir bilgi içermediğinden dolayı– “eksik tanım” olarak değerlendirilmiştir. “Üçgen” kavramı için, yine “çokgen” terimine bağlı olarak tanım yapan 4. öğrenci; tanımında üçgene ait birkaç özellikten de bahsederek, gereğinden fazla bilgiye yer vermiştir. 5. ve 6. öğrenci ise; “üçgen” kavramını tanımlamak yerine, üçgene ait birkaç özelliği sıralamıştır. 4. öğrenci, bu soruda “benzerlik” kavramından ve “Pisagor bağıntısı”ndan hiç bahsetmemiş; dolayısıyla öğrencinin bu kavramlarla ilgili düşünceleri sorgulanamamıştır. 5. öğrenci; genel “benzerlik” tanımı yerine, “A.A.A. (Açı–Açı–Açı) benzerlik teoremi”ni doğru şekilde açıklamıştır. 6. öğrenci, “benzerlik” kavramını doğru biçimde tanımlayabilse de; “benzerlikte açılar her zaman eşit mi olmalı?” sorusuna verdiği cevaptan, benzerlikte açıların her zaman eşit olmak zorunda olmadığı şeklinde bir kavram yanılgısına düştüğü görülmüştür. 6. öğrenci, “Pisagor bağıntısı”nı doğru şekilde ifade edebilmiştir. 5. öğrenci, EBC üçgeninde Öklid bağıntısını uygulayacağını ifade ettiği için; öğrencinin, “Pisagor bağıntısı”na dair anlayışları bu soruda ortaya çıkarılamamıştır. 5. öğrenci, 4. görüşmede, “Pisagor bağıntısı” ile “Öklid bağıntısı”nı isim olarak karıştırmasına rağmen; tamamlayıcı görüşmede, bu isim karışıklığının ortadan kalkmış olduğu görülmüştür.

4. öğrenci, “üçgenin alan formülü”nü doğru hatırlasa da; “formüldeki ‘bölü 2’nin nereden geldiği”ne dair hiçbir fikir yürütememiş ve ‘aslında nereden geldiğini hiç düşünmediğini; formülleri körü körüne ezberlemiş olduğunu’ itiraf

etmiştir. Ayrıca 4. öğrencinin, “EBC üçgeninin nasıl bir üçgen olduğu” sorusuna net bir cevap verememesi de gözden kaçmamıştır. 5. ve 6. öğrenci ise, “üçgenin alan formülü”nü doğru şekilde ifade edebilmiş ve “formüldeki ‘bölü 2’nin nereden geldiği” sorusunu da –o an akıl yürütme yoluyla– doğru cevaplayabilmişlerdir.

Ortaöğretim öğrencilerinin, “çokgenler–dörtgenler” ile ilgili bu problemi çözme süreçleri özetlenecek olursa; 4. öğrenci, kendisinin bu problemi çözebilmesi için, verilenleri yeterli bulmadığını dile getirmiş ve problemin çözümüne dair hiç fikir yürütememiştir. Çözüme dair hiçbir işlem yapmayan 4. öğrenci, problemi çözememiş de olsa; doğru cevabın 30 olacağına dair, gerekçelendirilmemiş (*yanlış*) bir tahminde bulunmuştur. 5. ve 6. öğrenci ise, “karenin tüm kenar uzunluklarının birbirine eşit olması” özelliğini, “(üçgenlerde) benzerlik” kavramını, “Pisagor bağıntısı”nı ve “üçgenin alan” formülünü doğru şekilde kullanarak; benzer çözüm yolunu takip etmiş ve doğru cevabı bulmuşlardır.

4.7. İlköğretim Öğrencilerinin “Olasılık” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

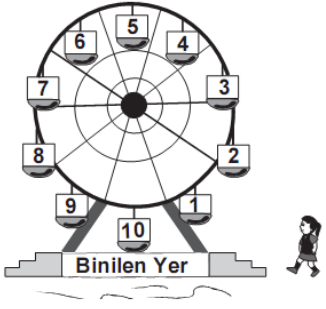
Katılımcı ilköğretim öğrencilerine, “olasılık” ile ilgili üç tane soru sorulmuştur.

4.7.1. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

“Olasılık” ile ilgili bir soru, “2009 yılı 6. sınıf Seviye Belirleme Sınavı (SBS) soruları” arasından seçilmiştir ve katılımcı ilköğretim öğrencilerine, 10 Mart–24 Mart 2010 tarihleri arasında gerçekleştirilen 1. görüşmede sorulmuştur. Bu soru, –kazanımlar açısından– 6. sınıf matematik öğretim programındaki “sayılar” öğrenme alanının “doğal sayılar” alt öğrenme alanında yer alan bir kazanımla ve “olasılık ve istatistik” öğrenme alanının “olasılıkla ilgili temel kavramlar” alt öğrenme alanında yer alan iki kazanımla uyumludur (Tablo 4.35).

Tablo 4.35

İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar

1. GÖRÜŞME / 5. SORU	KAZANIMLAR
 Ayça, dönme dolaba binmek için durmasını bekliyor. Dönme dolap durduğunda Ayça'nın 1'den 10'a kadar numaralandırılmış oturaklardan numarası asal sayı olan birine oturma olasılığı nedir? A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{5}$ (2009 SBS – 6. SINIF – 15. SORU) (Cevap: B)	5. Asal sayıları belirler. (“doğal sayılar”)
	2. Bir olayı ve bu olayın olma olasılığını açıklar. (“olasılıkla ilgili temel kavramlar”)
	3. Bir olayın olma olasılığı ile ilgili problemleri çözer ve kurar. (“olasılıkla ilgili temel kavramlar”)

Tablo 4.36

İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar

İrdelenecek Matematiksel Kavram/Özellik Listesi	Matematiksel Kavram/Özellik
Asal sayı	Matematiksel kavram
Olasılık	Matematiksel kavram
Örnek uzay	Matematiksel kavram
Olay	Matematiksel kavram
Sadeleştirme	Özellik

4.7.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi

Bir olayın olma olasılığını (*yani* $P(A)$) bulmak için, $\frac{\text{istenilen durumların sayısı } (s(A))}{\text{tüm durumların sayısı } (s(\ddot{O}))}$ oranı hesaplanabilir. İstenilen durumlar, 1’den 10’a kadar olan asal sayılar; tüm durumlar ise, 1’den 10’a kadar olan doğal sayılar olacaktır.

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$\ddot{O} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$s(A) = 4$ ve $s(\ddot{O}) = 10$ olduğundan; $P(A) = \frac{s(A)}{s(\ddot{O})} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ şeklinde bulunabilir.

Bu problem ifadesinde geçen veya çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezdeki kavramlar düşünülerek; katılımcı ilköğretim öğrencilerinin “asal sayı”, “olasılık”, “örnek uzay” ve “olay” kavramları ile ilgili düşüncelerinin ortaya çıkarılmak amacıyla sorgulanması amaçlanmıştır (Tablo 4.36). Sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir.

4.7.1.2. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Bu bölümde; ilköğretim öğrencilerinin, –bu problemi çözme sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlar olan– “asal sayı”, “olasılık”, “örnek uzay” ve “olay” kavramları ile ilgili anlayışlarından bahsedilecektir.

4.7.1.2.1. İlköğretim öğrencilerinin, “asal sayı” kavramı ile ilgili anlayışları.

“Asal sayı” kavramı ile ilgili olarak, öğrencilerin yapmış oldukları tanımlar ve araştırmacı–öğrenci diyalogları aşağıdaki şekildedir:

Öğrenci: Asal sayı... 1’e ve kendisine bölünebilen sayılardır. Yani ne çarpanı, ne de bölüneni olan sayılardır.

Görüşmeci: “1’e ve kendisine.” Mesela 4’ü düşünüyorum; 1’e ve kendisine bölünüyor, tamam.

Öğrenci: Ama 2’ye de bölünüyor.

Görüşmeci: Hım, sadece mi?

Öğrenci: Sadece 1’e ve kendisine bölünecek.

Görüşmeci: Peki. 1 sayısı mesela. Tamam; 1...

Öğrenci: 1 sayısı, asal sayı olarak kabul edilmiyor. Ben bunu öğretmene sormuştum; ama açıklamamıştı. O günden beri hiç açıklamadı. (1. öğrenci – 1. görüşme)

Öğrenci: Şimdi, kendisinden başka bölünemeyen... Yani mesela... şimdi, 4 mesela; hem kendisine bölüyor, ayriyeten 2’ye bölünüyor. Bu olmaz. Sadece kendisine ve 1’e bölünebilecek.

Görüşmeci: Hımm, o zaman mesela 1 de, bir asal sayı mıdır?

Öğrenci: Hayır, değil. Ama 1, asal sayıya uymuyor. O... bilmiyorum; onun nedeni bilmiyorum, ama... (2. öğrenci – 1. görüşme)

Öğrenci: Asal sayı; 1’e ve kendisinden başka sayıya bölünemeyen sayılar.

Görüşmeci: Hımm, 1’e ve kendisinden başka... Mesela 1. ... 1, o zaman asal sayı mı?

Öğrenci: Değil. Ama değil. Yani ikisi de aynı sayı çünkü; aynı sonuç çıkıyor ikisinde de. (3. öğrenci – 1. görüşme)

1. öğrencinin ilk başta yapmış olduğu “asal sayı” tanımının eksik bir tanım olduğu; ancak devamında araştırmacının “asal sayı” kavramına yönelik sormuş olduğu sorulara doğru yanıt verebildiği görülmüştür. Bu nedenle; 1. öğrencinin tanımındaki eksikliğin, bilgi kaynaklı olmadığı; öğrencinin düşüncelerini ifade ederken, doğru kelimeleri seçememesinden kaynaklandığı söylenebilir. Açıklamasına, ters bir örnek olan 4 sayısı

üzerinden başlayan 2. öğrenci, “1’den büyük doğal sayı olma” şartından bahsetmediğinden; yapmış oldukları açıklama, “eksik açıklama” olarak kabul edilmiştir. Benzer gerekçeyle; 3. öğrencinin “asal sayı” kavramı için yapmış olduğu tanım da, “eksik tanım” olarak değerlendirilmiştir.

4.7.1.2.2. İlköğretim öğrencilerinin, “olasılık” kavramı ile ilgili anlayışları.

“Olasılık” kavramı ile ilgili olarak, öğrencilerin düşünceleri ve araştırmacı-öğrenci konuşmaları aşağıdaki şekildedir:

“Olasılık; bir olayın ya da olmama... olması veya olmamasını; tahminen, yüzdelerle açıklamaktır.” (1. öğrenci – 1. görüşme)

“Yani bir şeyi seçme olasılığımız yani. Mesela atıyorum; bir torbadan mesela farklı renkli toplar var, bilyeler var. Onu çekme olasılığımız ya da ondan bulma olasılığımız mesela. Hani diyoruz mesela, bir şık var mesela. Diyeceğiz mesela, sallayacağız. %25 olasılığımız var mesela; 4 şık var mesela. Ondan birini, mesela tutturma şansımız var. Tutturamama olasılığımız da; 75, %75. Yani burada $\frac{1}{4}$ ile $\frac{3}{4}$ gibi.” (2. öğrenci – 1. görüşme)

Öğrenci: Olasılık; yani mesela, ıııı (*düşünüyor*), bir şeyde yani, mesela bu soruda böyle, bir şeyin... bir... (*3 sn. sessizlik*) Ayy! (*usanmış gibi bir ses tonu ile söyledi*) Yaani. Şimdi... yani olasılığı, tam olarak anlatamayacağım, anlatamıyorum daha doğrusu. Yani yapıyorum da, anlatamıyorum yani.

....

Görüşmeci: Olasılığı... (*2 sn. sessizlik*) hiç anlatamayacak mısınız?

Öğrenci: ıı (*“Hayır” anlamında*). Yaani. Aslında “olasılık”la aram pek iyi değil yani de; ondan. (3. öğrenci – 1. görüşme)

1. öğrenci; “olasılık” kavramını, rahatlıkla ve doğru biçimde, kendi sözcükleriyle açıklayabilmiştir. 2. öğrenci; düşüncelerini sözcüklere dökmekte zorlanarak, düzgün şekilde ifade edemese de; bu kavramı, iki örnek üzerinden açıklamıştır. Ayrıca bu açıklama esnasında –isim olarak bahsetmese de– “tümleyen olay” kavramına da değinmiştir. 3. öğrenci ise, “olasılık” kavramını açıklamayı denemiş; fakat düşüncelerini kelimelere dökmekte zorlanmış ve kavramı açıklayamamıştır. 3. öğrenci; “olasılık” problemini çözebildiğini, fakat kavramın anlamını anlatamadığını, “olasılık” ile arasının pek iyi olmadığını kendisi de dile getirmiştir. 3. öğrenci, bu “olasılık” problemini doğru şekilde çözerek, doğru sonuca ulaştıktan sonra; öğrenciden, “yaptığı

işlemi düşünerek, ‘olasılık’ kavramını tanımlamaya çalışması” istenmiştir. Bu konuda, araştırmacı ile öğrenci arasında geçen konuşma şöyledir:

Görüşmeci: ... Mesela burada yaptığın işlemi düşünerek; olasılığı tanımlamaya çalışır mısın bana?

Öğrenci: Ha, böyle belli bir şey... mesela bir şeyler var böyle. Mesela burada oturak var. Oturaklardan, belirlenen şeyin gelme ihtimali.

Görüşmeci: Hımm, tamam. ... Ne yapıyorsun peki, o işlemi yaparken? Bir de bunu sözele dökelim, istersen. Paydaki ifadem ne? Paydadaki ne?

Öğrenci: Paydadaki, toplam yani... toplamda olan eşyalar, yani. Mesela oturaklar, oturakların hepsi. Paydaki de, soruda istenilen, mesela “asal sayı” yazılı olan oturaklar. (3. öğrenci – 1. görüşme)

İlk başta “olasılık” kavramını açıklayamayan 3. öğrenci; problemin çözümünü tamamladıktan sonra araştırmacı ile arasında geçen yukarıdaki konuşma sırasında, bu problemdeki veriler yardımıyla kavramı açıklayabilmiştir.

4.7.1.2.3. İlköğretim öğrencilerinin, “örnek uzay” kavramı ile ilgili anlayışları. 1. öğrenci, “örnek uzay” kavramından bahsetmediği için; bu kavram ile ilgili düşünceleri doğrudan sorgulanamamıştır. Ancak öğrencinin çözüm esnasında yazmış olduğu, elemanları 1’den 10’a kadar sayılar olan kümenin, –olasılık kavramı bağlamında– özel bir adının olup olmadığı sorulduğunda; 1. öğrenci, genel olarak küme bağlamında düşünerek *“İuu (düşünüyor), şey... ‘evrensel küme’ olarak adlandırabiliriz.”* (1. öğrenci – 1. görüşme) yanıtını vermiştir. 2. öğrenci ise; problem ifadesini okuduktan sonra, kendiliğinden, “örnek uzay” kavramı ile ilgili şöyle bir açıklamada bulunmuştur:

“Şimdi, 1’den 10’a kadar olduğu için; 10 tane sayı var. Şimdi, örnek uzayımız 10 oluyor. Sanıyorum, öyle miydi? ‘Örnek uzay’ mıydı? Hatırlamıyorum. Öyle bir terim. İşte, paydamız 10 oluyor yani, olasılıkta işte.” (2. öğrenci – 1. görüşme)

Burada bahsettiği terimin “örnek uzay” olup olmadığından pek de emin olamayan 2. öğrenciden, “örnek uzay” kavramını tanımlaması istenmiştir. Öğrenci, “*‘Oradaki olan tüm veriler’ diye hatırlıyorum. Yanlış hatırlıyor olabilirim.*” (2. öğrenci – 1. görüşme) diyerek; –kendisi yine emin olamasa da– “örnek uzay” kavramını doğru açıklamıştır. 3. öğrenci ise, çözüm sırasında “örnek uzay” kavramından isim olarak hiç bahsetmediği

için; öğrencinin bu kavramla ilgili düşünceleri sorgulanamamış ve dolayısıyla ortaya çıkarılamamıştır.

4.7.1.2.4. İlköğretim öğrencilerinin, “olay” kavramı ile ilgili anlayışları.

“Olay” kavramı için, 1. öğrencinin yapmış olduğu açıklama aşağıdaki şekildedir:

“Mesela bu, bir durum olabilir. Mesela bir zar atıldığında, 3 gelme. Yani 3 gelmesi, bir olaydır. 2 gelmesi. Ya da bir madeni para atıldığında; yazı ya da tura gelmesi, bir olaydır.” (1. öğrenci – 1. görüşme)

Buradan da görüldüğü gibi; 1. öğrenci, “olay” kavramını, örnekler üzerinden doğru şekilde açıklayabilmiştir. Diğer iki öğrenci ise, çözüm sürecinde, “olay” kavramından hiç bahsetmemişlerdir; dolayısıyla 2. ve 3. öğrencinin bu kavramla ilgili düşünceleri sorgulanamamıştır.

İlköğretim öğrencilerinin, problemde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları Tablo 4.37’de listelenmeye çalışılmıştır.

Tablo 4.37
İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Kavramlar	Öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları		
	1. öğrenci	2. öğrenci	3. öğrenci
Asal sayı	eksik tanımlamak	eksik açıklamak	eksik tanımlamak
Olasılık	doğru açıklamak	doğru açıklamak	doğru açıklamak
Örnek uzay		doğru açıklamak	
Olay	doğru açıklamak		

4.7.1.3. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları

Matematik başarı düzeyi “orta” olan 1 no’lu öğrenci; çözüm aşamasında, ilk olarak kağıda $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ yazmış ve devamında, “Önce kesir çizgimizi çizelim. Kaç tane eleman varsa; o kada... o sayıyı aşağıya yazıyoruz. Çünkü o sayıların içinde arayacağız.” (1. öğrenci – 1. görüşme) açıklamasını yaparak, paydaya 10 sayısını yazmıştır. Ardından, “Şimdi... 2, 3, 5, 7; burada asal sayı. (1. öğrenci, küme içindeki bu sayıları, daire içine aldı.) 4 tane sayı seçtiğimiz için; yu... paya “4” yazıyoruz. Çünkü 4 sayıda işlem yapacağız. (1. öğrenci, kağıda $\frac{4}{10}$ yazdı.) Fakat bu, 2 ile sadeleştiği için; $\frac{2}{5}$, sorumuzun cevabı olacaktır.” (1. öğrenci – 1. görüşme) diyerek; problemin çözümünü tamamlamış ve doğru cevabı bulmuştur (Şekil 4.26).

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Şekil 4.26

1. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

Matematik başarı düzeyi “iyi” olan 2 no’lu öğrenci de; 1. öğrencinin takip ettiği çözüm yoluna paralel bir yoldan gitmiştir. “Şimdi, örnek uzayımız 10 olduğuna göre; paydamız 10 oluyor.” (2. öğrenci – 1. görüşme) dedikten sonra; 2’den 10’a kadar olan her bir sayının bölünebildiği sayıları (yani bölenlerini) tek tek düşünerek, asal sayıları tespit etmiştir. Bu sırada dönme dolaptaki oturaklardan, numarası asal sayı olanları (yani 2, 3, 5, 7) daire içine almış; asal olmayanların ise, üzerlerini çizmiştir. Asal sayı olanları sayarak 4 bulan 2. öğrenci; “10 taneden 4 tanesini seçeceğimize göre. Binme olasılığı, 4 tanesine binme olasılığımız var. Şimdi $\frac{4}{10}$ ’dan, o da sadeleşirse; ikiye böldüm, 2; 10’u da ikiye böldük, 5. $\frac{2}{5}$ oluyor.” (2. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, doğru yoldan doğru sonuca ulaşmıştır.

Benzer şekilde, matematik başarı düzeyi “çok iyi” olan 3 no’lu öğrenci de; “Yani şimdi, burada 1’den 10’a kadar olan asal sayılar: 2, 3, 5, 7. (3. öğrenci, dönme dolap üzerindeki asal sayıları, yuvarlak içine aldı.) Dört tane var. On tane de şey var, $\frac{4}{10}$ (5 sn. düşünüyor), oturak var on tane. (3. öğrenci, kağıda $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ yazıyor.) Bu da, $\frac{2}{5}$ oluyor.” (3. öğrenci – 1. görüşme) diyerek; sonucu kısa sürede ve doğru şekilde bulmuştur.

Araştırmacı ile 1. öğrenci arasında, “sadeleştirmenin mantığı” üzerine şöyle bir diyalog geçmiştir:

Görüşmeci: Sadeleştirmenin mantığı nedir?

Öğrenci: Sadeleştirmenin mantığı; küçük sayılarla çalışmaktır. Çünkü sayılar ne kadar büyürse; işlem yapmak o kadar zorlaşır ve bir o kadar da yüksek sayılar çıkar ve... $\frac{4}{10}$ (düşünüyor–3 sn. sessizlik), insanların bir çeşit algılama yeteneği burada zorlaşır. Çünkü yüksek sayılarla işlem yapmak; hem zordur, hem de onları kullanmak da zordur. Ama küçük sayılar pratiktir.

Görüşmeci: Peki, hani bir şekle dökecek olursan; bunu bana açıklayabilir misin? Hani $\frac{4}{10}$, $\frac{2}{5}$ e neden eşit olsun ki?

Öğrenci: $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{10}$ un yarıya bölünmüş hali. Yani $\frac{4}{10}$, $\frac{2}{5}$ in iki katıdır.

Görüşmeci: Hım.

Öğrenci: Bu kesri genişlettiğimizde...

Görüşmeci: O zaman, $2 = 1$ gibi bir şey mi bu?

Öğrenci: (2 sn. sessizlik) Değil. İki tane yarımın, 1’e eşit olması gibi. (1. öğrenci – 1. görüşme)

“Sadeleştirme”yi, “ikisini ortak bölen bir sayıya bölme” şeklinde anlatan 3. öğrenci ile araştırmacı arasında ise, aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Görüşmeci: Bana bir şekil üzerinde... beni birazcık daha ikna edebilir misin? Sadeleştirmede ne yapıyorsun aslında? Hani bu, buna eşit midir? $\frac{4}{10}$, $\frac{2}{5}$ e eşit midir?

Öğrenci: Yaani. Yani mesela bunu... Şimdi, hani paydayı genişletiyoruz ya; hani mesela 2 ile çarptığımızda. İkisini de 2 ile çarparsak; $\frac{4}{10}$ oluyor.

Görüşmeci: Hımm. “Bir şekil üzerinde falan acaba anlatabilir misin?” dedim; ama aklına gelmiyor mu?

Öğrenci: Cık (“Hayır” anlamında). (3. öğrenci – 1. görüşme)

1. öğrenci, ifade ederken bazı yerlerde yanlış kelimeleri seçmiş olduğundan; “sadeleştirme”nin mantığını, kısmen açıklayabildiği düşünülmektedir. 3. öğrenci ise, “sadeleştirme” terimini açıklayabilmiş; fakat “sadeleştirme”nin mantığına dair pek bir şey söyleyememiştir. 2. öğrenci ile ise, “sadeleştirme” üzerine konuşulmamıştır.

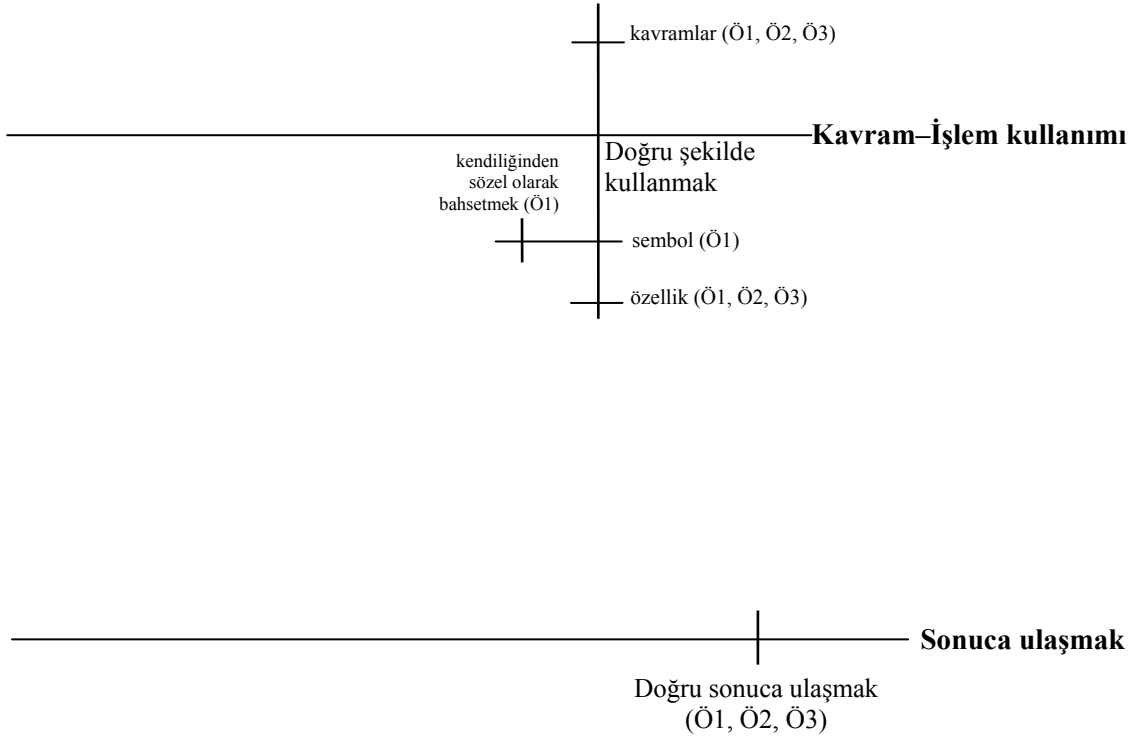
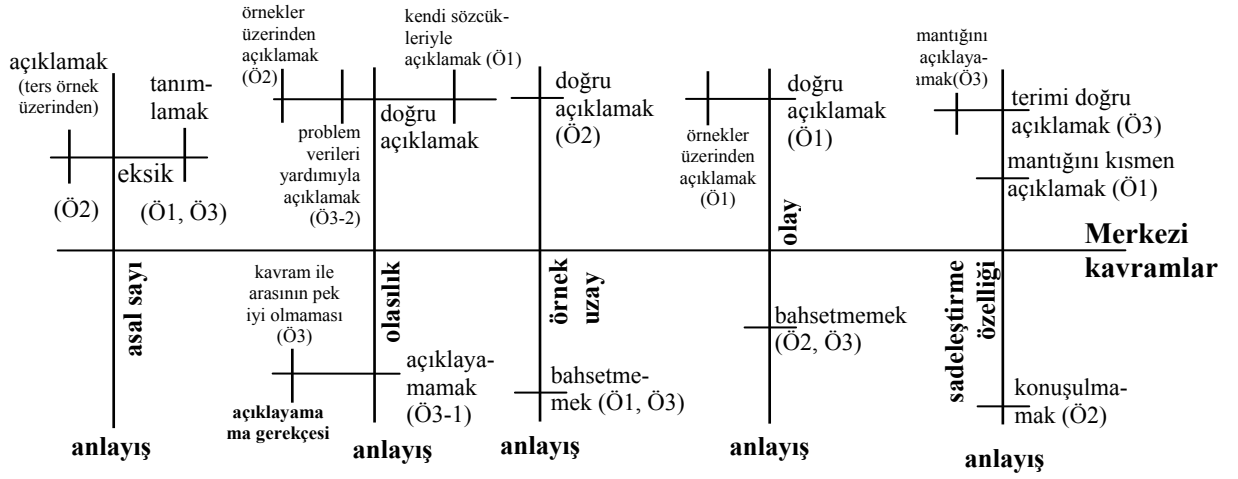
Özetlenecek olursa; üç öğrenci de, çözüm sürecinde benzer işlemleri yürütmüşlerdir. Öğrencilerin üçü de, “örnek uzay”ı ve –“asal sayı” olma şartından yararlanarak– “olay kümesi”ni belirlemiş; olay kümesinin eleman sayısını, örnek uzayın eleman sayısına oranlayarak, numarası asal sayı olan bir oturağa oturma olasılığını doğru biçimde hesaplamış ve sadeleştirme özelliğinden yararlanarak, doğru cevap şikkına ulaşmışlardır.

4.7.1.4. İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, 1. görüşmedeki “olasılık” ile ilgili problemi çözme sürecinde; problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları, kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili elde edilmiş kategoriler bir araya getirilerek; her bir öğrencinin, problemi çözme süreci Tablo 4.38’de özetlenmiş ve Şekil 4.27’de de eksenler üzerinde gösterilmiştir.

Tablo 4.38
İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Öğrenci no	Merkezi kavramlarla ilgili anlayışları	Kullandıkları kavramlar–işlemler	Kategoriler (Kavram–işlem kullanımı)	Kategoriler (Sonuca ulaşmak)
1	Asal sayı (eksik tanımlamak) Olasılık (doğru açıklamak) Olay (doğru açıklamak) Sadeleştirme özelliği (eksik açıklamak)	Örnek uzay Kesir çizgisi (<i>sözel olarak</i>) Asal sayı Olay kümesi Pay (<i>sözel olarak</i>) Oran Olasılık Sadeleştirme özelliği	Uygun kavramları/sembolü/özelliği doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak
2	Asal sayı (eksik açıklamak) Olasılık (doğru açıklamak) Örnek uzay (doğru açıklamak) Sadeleştirme özelliği (<i>konusulmamak</i>)	Örnek uzay Payda (<i>sözel olarak</i>) Bölünebilme/Bölen Asal sayı Olay kümesi Oran Olasılık Sadeleştirme özelliği	Uygun kavramları/özelliği doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak
3	Asal sayı (eksik tanımlamak) Olasılık (doğru açıklamak) Sadeleştirme özelliği (doğru açıklamak)	Asal sayı Olay kümesi Örnek uzay Oran Olasılık Sadeleştirme özelliği	Uygun kavramları/özelliği doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak



Şekil 4.27

İlköğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, 1. görüşmedeki “olasılık” ile ilgili problemi çözme süreçleri özetlenecek olursa; bu soruda, ilköğretim öğrencilerinin, “asal sayı”, “olasılık”, “örnek uzay” ve “olay” kavramları ile ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Ancak sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir. “Asal sayı” kavramını; 1. ve 3. öğrenci, eksik şekilde tanımlamıştır. Açıklamasına, ters örnek ile başlayan 2. öğrenci de; “asal sayı” kavramını eksik olarak açıklamıştır. “Olasılık” kavramını; 1. öğrenci, rahatlıkla ve doğru biçimde, kendi sözcükleriyle açıklayabilirken; 2. öğrenci, düşüncelerini sözcüklere dökmekte zorlanarak, düzgün şekilde ifade edemese de, kavramı, iki örnek üzerinden açıklamıştır. 3. öğrenci ise, “olasılık” kavramını açıklamayı denemiş; fakat düşüncelerini kelimelere dökmekte zorlanmış ve kavramı açıklayamamış; buna gerekçe olarak da, “olasılık” ile arasının pek iyi olmamasını göstermiştir. İlk başta “olasılık” kavramını açıklayamayan 3. öğrenci; problemin çözümünü tamamladıktan sonra, bu problemdeki veriler yardımıyla kavramı açıklayabilmiştir. “Örnek uzay” kavramı için, 2. öğrenci, –kendisi doğruluğundan emin olamasa da– doğru bir açıklama yapmıştır. 1. ve 3. öğrenci ise, çözüm sırasında “örnek uzay” kavramından isim olarak bahsetmediklerinden; öğrencilerin bu kavramla ilgili düşünceleri sorgulanamamıştır. “Olay” kavramını; 1. öğrenci, örnekler üzerinden doğru şekilde açıklayabilmiştir. Diğer iki öğrenci ise, çözüm sürecinde, “olay” kavramından hiç bahsetmediklerinden dolayı; 2. ve 3. öğrencinin bu kavramla ilgili düşünceleri sorgulanamamıştır.

Çözüm sürecinde; üç öğrenci de, benzer işlemleri yürütmüşlerdir. Özetlenecek olursa; genel olarak, öğrencilerin üçü de, “örnek uzay”ı ve –“asal sayı” olma şartından faydalanarak– “olay kümesi”ni belirlemiş; olay kümesinin eleman sayısını, örnek uzayın eleman sayısına oranlayarak, numarası asal sayı olan bir oturağa oturma olasılığını doğru şekilde hesaplamış ve sadeleştirme özelliğinden yararlanarak, doğru sonuca ulaşmışlardır. “Sadeleştirme” terimini, 3. öğrenci açıklayabilse de; “sadeleştirme”nin mantığına dair pek bir şey söyleyememiştir. 1. öğrenci, “sadeleştirme”nin mantığını kısmen açıklayabilmiş; 2. öğrenci ile ise, “sadeleştirme” konusunda konuşulmamıştır.

4.8. Ortaöğretim Öğrencilerinin “Olasılık” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

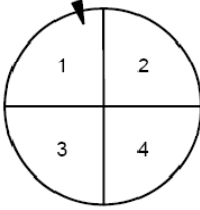
Katılımcı ortaöğretim öğrencilerine, “olasılık” ile ilgili iki tane soru sorulmuştur.

4.8.1. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

“Olasılık” ile ilgili bir soru, “2009 yılı Öğrenci Seçme Sınavı (ÖSS) Matematik–1 testi” soruları arasından seçilmiştir ve katılımcı ortaöğretim öğrencilerine, 16 Mart–23 Mart 2010 tarihleri arasında gerçekleştirilen 1. görüşmede sorulmuştur. Bu soru, – kazanımlar açısından– 10. sınıf matematik öğretim programındaki “olasılık ve istatistik” öğrenme alanının “permütasyon, kombinasyon ve olasılık” bölümünün “olasılık” alt öğrenme alanında yer alan iki kazanımla ilgili bulunmuştur (Tablo 4.39).

Tablo 4.39

Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar

1. GÖRÜŞME / 6. SORU	KAZANIMLAR
Bir mağazadan belirli miktarın üzerinde alışveriş yapan müşteriler, 4 eş parçaya ayrılmış birinci çarkı iki defa çevirmektedir. Bu iki çevirişte gelen iki sayının toplamı 6 ya da 6 dan büyükse 6 eş parçaya ayrılmış ikinci çarkı çevirerek çıkan hediyeyi almaktadır.  I. çark  II. çark Buna göre, birinci çarkı çevirmeyi hak eden bir müşterinin çamaşır makinesi kazanma olasılığı kaçtır? A) $\frac{1}{14}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{5}{24}$ D) $\frac{3}{28}$ E) $\frac{5}{32}$ (2009 ÖSS MAT-1 – 17. SORU) (Cevap: B)	3. Eş olasılı (olumlu) örneklem uzayı açıklar ve bu uzayda verilen bir A olayı için $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)}$ olduğunu belirtir. 5. Bağımsız ve bağımlı olayları örneklerle açıklar, A ve B bağımsız olayları için $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ olduğunu gösterir.

Tablo 4.40

Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar

İrdelenecek Matematiksel Kavram/Özellik Listesi	Matematiksel Kavram/Özellik
Olasılık	Matematiksel kavram
Örneklem uzay	Matematiksel kavram
Olay	Matematiksel kavram
Sadeleştirme	Özellik

4.8.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi

1. çark için, istenilen durumların kümesi (*yani olay kümesi*) N harfi ile, ve iki çevirişte gelmesi istenen iki sayı “(birinci çevirmede gelen sayı, ikinci çevirmede gelen sayı)” şeklinde gösterilecek olursa;

$$N = \{(2, 4), (4, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$$

yazılabilir. 1. çarkı ilk çevirişte 4 farklı sayı ve ikinci çevirişte de yine 4 farklı sayı gelebileceği için; 1. çarkın iki defa çevrilmesinde gelebilecek tüm durumların sayısı (*yani örneklem uzayın eleman sayısı* $s(E)$), $4 \cdot 4 = 16$ dır. Bu durumda, 1. çarkı iki çevirişte gelen iki sayının toplamının 6 ya da 6 dan büyük olma olasılığı,

$$P(N) = \frac{\text{istenilen durumların sayısı } (s(N))}{\text{tüm durumların sayısı } (s(E))} = \frac{6}{16}$$

olarak hesaplanır. 2. çark, 6 eş parçaya ayrılmış olduğundan ve çamaşır makinesi, bu parçalar arasında sadece bir parçayı oluşturduğundan; 2. çarkta çamaşır makinesi gelme olasılığı,

$$P(M) = \frac{\text{istenilen durumların sayısı } (s(M))}{\text{tüm durumların sayısı } (s(E'))} = \frac{1}{6} \text{ dır.}$$

Burada N ve M olayları birlikte gerçekleşeceğinden; 1. çarkı çevirmeyi hak eden bir müşterinin çamaşır makinesi kazanma olasılığı,

$$P(N \cap M) = P(N) \cdot P(M)$$

$$= \frac{6}{16} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{16}$$

olarak bulunabilir.

Bu problem ifadesinde geçen veya çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezdeki kavramlar düşünülerek; katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin “olasılık”, “örneklem uzay” ve “olay” kavramları ile ilgili düşüncelerinin ortaya çıkarılmak amacıyla sorgulanması amaçlanmıştır (Tablo 4.40). Sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir.

4.8.1.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Bu bölümde; ortaöğretim öğrencilerinin, –bu problemi çözme sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlar olan– “olasılık”, “örneklem uzay” ve “olay” kavramları ile ilgili yapmış oldukları tanım ve açıklamalara yer verilecektir.

4.8.1.2.1. Ortaöğretim öğrencilerinin, “olasılık” kavramı ile ilgili anlayışları.

“Olasılık” kavramı ile ilgili olarak, öğrencilerin yapmış oldukları tanım ve açıklamalar aşağıdaki şekildedir:

“Mesela olasılık nedir? Bir zar atarım ben. Bu zarın üst yüzeyinde 2 gelme olasılığı, $\frac{1}{6}$ 'dır. Hani 6 tane yüzey vardır. 2 gelme olasılığı, –bir kere atacağımız için, hani bir kere atıyoruz– $\frac{1}{6}$ 'dır. İki kere atıp da, ikisinde de mesela 2 gelme olasılığı; $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ 'dır mesela.” (4. öğrenci – 1. görüşme)

“Olasılık nedir? İıı (*düşünüyor*), mesela bir durumun... İıı (*düşünüyor*), nasıl anlatayım onu? (*5 sn. sessizlik*) Olasılık nedir? Çok kolay soru; ama şimdi nasıl anlatacağım? ... Yani matematik diliyle nasıl anlatabilirim diye düşünüyorum. (*4 sn. sessizlik*) Mesela bizim için gerekli olan durumlar vardır. Bir de toplam, yani olabilecek tüm durumlar vardır. Ama bizim istediğim durumlar vardır. Bu istediğim durumlar, bölü tüm durumlar; o durumun olma olasılığıdır.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

“Olasılık, bir olayın gerçekleşme ihtimali. Yani... Mesela bir zarı attığımızda; üzerine, yukarıya düşen sayının 6 olma olasılığı, mesela $\frac{1}{6}$ ’dır.” (6. öğrenci – 1. görüşme)

“Olasılık” kavramını, 4. öğrenci, örnek üzerinden doğru biçimde açıklamış; 5. öğrenci, –ilk başta kelimelere dökmekte biraz zorlansa da– kavramın tanımını yapabilmıştır. 6. öğrenci ise, önce “olasılık” kavramının formal tanımını yapmış; ardından da bir örnek vermiştir.

4.8.1.2.2. Ortaöğretim öğrencilerinin, “olay” ve “örneklem uzay” kavramları ile ilgili anlayışları. “Olay” kavramının anlamı sorulduğunda; 6. öğrenci, *“Mesela bir zarı attığımızda; üzerine, yukarıya düşen sayının 6 olma olasılığı, mesela $\frac{1}{6}$ ’dır.”* (6. öğrenci – 1. görüşme) açıklamasını yapmıştır. Örnek yardımıyla yaptığı bu açıklamada; “bir zar atıldığında, üst yüze 6 gelmesi”nin, olasılık hesabında bir “olay” olduğuna vurgu yapmaksızın, daha ziyade “olasılık” kavramına dair bir örnek vermiş olduğundan; 6. öğrencinin “olay” kavramı için yapmış olduğu bu açıklama, “eksik açıklama” olarak değerlendirilmiştir. 4. öğrenciye ise, “olay” kavramı ile ilgili olarak; “paydaki ifadeye mi, paydadakine mi ‘olay’ diyoruz?” sorusu yöneltildiğinde; öğrenci, *“Yukarıdaki, yani paydakine.”* (4. öğrenci – 1. görüşme) doğru cevabını vermiştir. Bunun üzerine sorulan “Aşağıya ne diyorduk?” sorusuna, öğrencinin verdiği cevap ise; *“O... paydada hani olayların hepsi; yani olayın ana merkezi. Mesela kaç tane, ıı (düşünüyor), etken varsa. Mesela hani 36 ise... hani bir şeyde, yapıta mesela 6 tane şans varsa; 6’dır paydası.”* (4. öğrenci – 1. görüşme) olmuştur. Çözüm sürecinde, “örneklem uzay” kavramından hiç bahsetmemiş olan 4. öğrencinin bu açıklamasından hareketle; öğrencinin, olasılık hesabında paydaya, tüm durumların sayısının yazıldığının farkında olduğu; fakat bu tüm durumların kümesine “örneklem uzay” dendiğini ifade etmediği/hatırlayamadığı söylenebilir. Benzer şekilde 6. öğrenci de, “örneklem uzay” kavramından isim olarak bahsetmese de, çözüm esnasında “toplam olay” ifadesini kullanmış; bunun üzerine, araştırmacı, “toplam olay”a ne isim verildiğini sormuştur. Öğrenci, biraz düşündükten sonra; “evrensel küme” yanıtını vermiştir. Yukarıda 4. öğrenci için yapılmış olan yorum yinelenerek, 6. öğrencinin de; olasılık hesaplarken, paydaya, tüm durumların sayısının yazıldığını bildiği; ancak bu tüm durumların kümesine “örneklem uzay” dendiğini ifade edemediği/hatırlayamadığı söylenebilir.

5. öğrenci ise, çözüm esnasında, “örneklem uzay” ve “olay” kavramlarından hiç bahsetmemiş; dolayısıyla öğrencinin bu kavramlarla ilgili düşünceleri sorgulanamamıştır.

Ortaöğretim öğrencilerinin, problem ifadesinde geçen veya çözüm aşamasında göz önüne alınan merkezi kavramlar ile ilgili yapmış oldukları tanım ve açıklamalar dikkate alınarak; öğrencilerin problemde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları Tablo 4.41’de listelenmeye çalışılmıştır.

Tablo 4.41

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Kavramlar	Öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları		
	4. öğrenci	5. öğrenci	6. öğrenci
Olasılık	doğru açıklamak	doğru tanımlamak	doğru tanımlamak
Örneklem uzay			
Olay	doğru bilmek		eksik açıklamak

4.8.1.3. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları

Matematik başarı düzeyi “orta” olan 4. öğrenci, aşağıdaki düşünceyle çözüme başlamıştır:

“İlk başta, birinci çarkı çevirecek bu adam ya da insan. 4 tane sayı var; bunları iki kere çevirecek mesela. $4+2$ olabilir; $2+4$ de olabilir. Yani 6 veya 6’nın üstü olacak. $3+4$ olabilir; $4+3$ olabilir; $4+4$. (Kaç alternatif olduğunu sayıyor:) Bir, iki, üç, dört, beş. Yani 5 ihtimalde hani...” (4. öğrenci – 1. görüşme)

Sessizce çözümle uğraşmaya devam eden ve kağıda bir şeyler yazan 4. öğrenciye, 17 saniye sessizliğin ardından; “şimdi ne yaptığı, ne düşündüğü” sorulmuştur. Öğrenci şöyle cevap vermiştir:

“İlk başta, hani 2... İni (*düşünüyor*), buradan çevirip de, 2 gelme olasılığını düşündüm. “2 gelme olasılığı, 4 çarkta $\frac{1}{4}$ dür” dedim. ... Bir de dedim ki: Bunun yanına dedim, 4 gelme olasılığı dedim; yine çevirecek dedim. $\frac{1}{4}$ dür dedim. Hani 4 gelecek yanına ki...” (4. öğrenci – 1. görüşme)

Kağıda yazmış olduğu $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ çarpımı için yukarıdaki açıklamayı yapan 4. öğrenci; 2 ile 4 sayılarının gelme sırasını karıştırarak, bu yazdığının, $4 + 2$ gelmesini ifade ettiğini söylemiştir. 4. öğrenci, açıklamasına aşağıdaki sözlerle devam etmiştir:

“Sonraki de yine de 2+4 gelme olasılığını hesapladım. O da $\frac{1}{16}$; artı... 3+4 olasılığını hesapladım. O da $\frac{1}{16}$. Artı, 4 bölü 3 de (*kastettiği: “4+3”*) $\frac{1}{16}$. Artı, 1 bölü... Yani 4, 4 (*kastettiği: “4+4”*) gelmesi de $\frac{1}{16}$ dır dedim. [Toplamları] $\frac{5}{16}$ dır dedim. ‘Birinci çarktan 6... toplamaları 6 veya 6 büyük olma ihtimali’ dedim, $\frac{5}{16}$ dır dedim.” (4. öğrenci – 1. görüşme)

1. çark için olay kümesini belirledikten sonra, –kendisi isim olarak bahsetmese de– önce olayların kesişiminin olasılığı, sonra da olayların birleşiminin olasılığı formüllerinden yararlanmış olan 4. öğrenci, doğru şekilde mantık yürütmüş olmasına rağmen; olay kümesini belirlerken, “her iki çevirişte de 3 gelmesi” olayını hesaba katmadığından, 1. çark için olasılık hesabında yanlış sonuç bulmuştur.

Matematik başarı düzeyi “iyi” olan 5. öğrenci, problem ifadesini kısık sesle birkaç kez okuduktan sonra; şunları söyleyerek çözüme başlamıştır:

“Şimdi, birinci çarkta iki sayının nasıl... hangi sayıların nasıl toplamı hani 6’ya eşit olur; ilk önce bunu bulmamız gerekiyor. Şimdi mesela birinci, yani birinci çarkı çevirdiğimde; ilk sayı 1 ise, hani diğer sayı gelecek, toplamı 6 olacak. Böyle bir imkan yok. 2 gelirse, 4 olunca toplamı 6 olur. Veya birincisi 4 gelir, ikincisi 2 gelirse; yine 6 olur. Yani burada iki durumda 6 çıkar. Ama “6 ve 6’dan büyükse” diyor. İni (*düşünüyor*), bir de 3–4, 4–3 olduğunda, toplamaları 7 olduğu için; buradan da iki durum gelir. Toplam 4 durum vardır burada. Yani ikinci çarkı çevirebilmem için.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

5. öğrenci; 1 sayısı da dahil, birinci çarkı ilk çevirişte gelebilecek alternatifleri tek tek düşünerek, ikinci çevirişte gelmesi beklenen sayıları tespit etmeye çalışmış; böylece olay kümesinin elemanlarını belirlemiştir. Ancak 3–3 ve 4–4 alternatiflerini hesaba katmadığı için; istenen durumların sayısını yanlış bulmuştur.

Olay kümesini (eksik) belirleyen 5. öğrenci,

“Tüm durumlar nedir, peki? Ona bakmamız lazım ilk önce. (1,1) olabilir, (2,2) olabilir, (3,3) olabilir, (4,4) olabilir. (1,2) olabilir, (1,3) olabilir, (1,4) olabilir, (2,3) olabilir, (2,4) olabilir, (3,4) olabilir gelen sayılar. 10 tane durum var. Ama şöyle bir şey de var: Hani sayıların ilkinde 2, ikincisinde 1; hani bunların tam tersi de olabilir. 1, 2, 3, 4, 5, 6. 6 durum da buradan gelir. Yani 16 tane durumum var benim, toplamda.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

diyerek, tüm alternatifleri tek tek düşünmüş ve örneklem uzayını doğru şekilde oluşturmuştur.

İstenilen durumların sayısını 4 ve tüm durumların sayısını 16 olarak bulmuş olan 5. öğrenci, “Ama bu 16 durumdan, 4 durumum sağlıyor. $\frac{4}{16}$. diyorum. Yani benim için gerekli olan durum, bölü toplam durum.” (5. öğrenci – 1. görüşme) diyerek; 1. çark için olasılığı, $\frac{4}{16}$ olarak bulmuştur. 5. öğrenci de, –4. öğrenci gibi– doğru şekilde mantık yürütmüş olmasına rağmen; olay kümesini belirlerken, “her iki çevirişte de 3 gelmesi” ve “her iki çevirişte de 4 gelmesi” olaylarını hesaba katmadığından, 1. çark için olasılık hesabında yanlış sonuç elde etmiştir.

Matematik başarı düzeyi “çok iyi” olan 6. öğrenci, çözüme aşağıdaki sözlerle başlamıştır:

“Şimdi toplamlara baktığımız zaman; 1 artı 2; 3 gelebilir en küçük. En büyük de... Gerçi, pardon! 2’ye 8 gelebilir. Bizim matematik öğretmenimiz, şey demişti; zarlarla ilgili: “2 ve 12. Gelme durumları 1 – 1” demişti bunların, “bir ihtimaldir”. Ondan sonra 3 mesela, iki durumdur. 11, iki durumdur. Böyle içeriye doğru gittikçe; gelme ihtimalleri artıyor. Ben de burada aynı yöntemi uygulayacağım ama. (Bu sırada kağıda yazmıştır.)” (6. öğrenci – 1. görüşme)

Toplam:	2	3		10	11	12
Farklı durum:	1	2		3	2	1

Burada ne yaptığını bir daha açıklaması istendiğinde ise; şunları söylemiştir:

“Yani şu anda iki zar attığımızda; ikisinin... yani 1–1 gelme olasılığı bir durum dersek, 6–6 gelme olasılığı da bir durumdur. Bu alta (kastedtiği: “alt satıra”) gelme olasılıklarını yazdığımız zaman; 2–1 gelme olasılığı: Bir birincisi 2 gelse, 2. durumda da mesela ikincisi 2 gelse; 2 durum olabiliyor. 11’de de aynı: 6 ile 5, 7–4. ... Böyle... Şey, pardon! 7–4 olmuyor gerçi de. 6–5, 5–6.” (6. öğrenci – 1. görüşme)

6. öğrenci; 1. çark için olasılığı hesaplarken, diğer iki öğrenciye göre daha farklı bir yoldan gitmeyi tercih etmiştir. Matematik öğretmeninden öğrendiğini söylediği bu pratik yolun mantığından bahsettikten sonra; soru kağıdına,

Toplam:	2	3	4	5	6	7	8
Farklı durum:	1	2	3	4	3	2	1

yazmaya başlamış ve aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

“Bize “6 ya da 6 dan büyük”... Yani biz şuraları alacağız. (Öğrenci, alt satırın en sağındaki 3 2 1 sayılarını işaretliyor.) Buranın gelme olasılığı 3 2 1; ıııı (düşünüyor–bu üç sayıyı topluyor) 5, 6’dır. Toplam olay ise, burası 6, 6; 12 (kastettiği: “6 + 6 = 12”) ve şu (kastettiği: “4”). Yani 16’dır.” (6. öğrenci – 1. görüşme)

Olay kümesini ve örneklem uzayı açık açık yazmaksızın, doğrudan eleman sayılarını hesaplayan 6. öğrenci; 1. çark için istenilen durumların sayısını 6, tüm durumların sayısını 16 olarak bulmuş ve olasılık değeri için de, doğru olan $\frac{6}{16}$ oranını yazmıştır.

İkinci çark için olasılık hesabına geçen 4. öğrenci, “İkinci çarktan da, (sayıyor:) 1, 2, 3, 4, 5, 6 tane olasılık var. Yani 6 tane hediye var bizde buradan. $\frac{1}{6}$ sını... hani çamaşır makinesi gelme olasılığı $\frac{1}{6}$ dır dedim.” (4. öğrenci – 1. görüşme) diyerek; 2. çarkta çamaşır makinesi gelme olasılığını doğru şekilde bulmuştur. Benzer şekilde, 5. öğrenci de; “Şimdi, burada, ikinci çarkta 6 tane bölme var, yani 6 tane durum var. Ama ben çamaşır makinesi gelmesini istiyorum. Yani bu da, $\frac{1}{6}$ ’dır bunun olasılığı.” (5. öğrenci – 1. görüşme) demiş; böylece 2. çark için olasılığı doğru biçimde hesaplamıştır. Yine 6. öğrenci de, 2. çarkta çamaşır makinesi gelme olasılığının $\frac{1}{6}$ olduğunu söylemiş; buna gerekçe olarak da, “Çünkü bu çark da sadece 6’ya bölünmüş ve sadece çamaşır makinesini bir bölüme yazmışlar. O zaman $\frac{1}{6}$ olasılıkla gelecek.” (6. öğrenci – 1. görüşme) açıklamasında bulunmuştur. Kısacası; üç öğrenci de; 2. çark için “olay kümesinin eleman sayısı”nı, “örneklem uzayının eleman sayısı”na oranlayarak, 2. çark için olasılığı doğru şekilde hesaplamıştır.

1. çark için olasılığı $\frac{5}{16}$ ve 2. çark için olasılığı $\frac{1}{6}$ olarak bulmuş olan 4. öğrenci; sessizce düşünmeye başlamıştır. 25 saniyelik bir sessizliğin ardından; araştırmacı, öğrenciye, ne düşündüğünü sormuştur. “Şu an... şeyi düşünüyorum aslında, “şıkkı düşünüyorum” desem; daha doğru olur. Mesela “Edirne” gibi geliyor bana.” (4. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, doğru cevabın “E şıkkı” olduğu yönünde (yanlış) tahminde bulunan 4. öğrenci; bu tahminine dair net bir gerekçe belirtememiş ve

problem ifadesini yeniden okumaya başlamıştır. Devamında, öğrenci ile araştırmacı arasında şöyle bir konuşma geçmiştir:

Öğrenci: Yani çarkı çevirecek, buradakini. Çevirdikten sonra, burada “2’ye 4 gelme olasılığı” dedim ben. Yani $\frac{1}{16}$ dır diye ihtimal verdik. $\frac{1}{16}$ dır, dedim. (2 sn. sessizlik) Buradan $\frac{1}{16}$ ’sı geldi. Hani, kesinlikle olabilir. Sonra diyor ki: “Birincisini kazanmış” diyor. Hani hak etmiş; yani $\frac{1}{16}$ ’sı şansında tutturmuş. Bunun... artı, ikinci çarktan da $\frac{1}{6}$ ’sını kazanma olasılığını diyor bize. (6 sn. sessizlik) Şurada $\frac{16}{6}$... Şuradaki işlemde kararsız kaldım.

Görüşmeci: (3 sn. sessizlik) Hangi işlemde?

Öğrenci: Yani $\frac{5}{16} + \frac{1}{6}$ mı yazsam? Yoksa $\frac{1}{16} + \frac{1}{6}$ mı yazsam diye ama.

Görüşmeci: Hımmm. Neden artı yazıyoruz?

Öğrenci: Hani ikisinin de toplamı olacak diye. Hani “birinciden gelmiş, ikinciden de gelecek” hesabı. (4. öğrenci – 1. görüşme)

4. öğrenci, ilk başta akıl yürütme yoluyla doğru çözüm yolundan gitmesine rağmen; sonrasında, şıklarda olan bir sonuca ulaşabilmek için deneme–yanılma yoluna yönelmiş ve bu süreçte, yanlış akıl yürütmeler de yapmıştır. Her iki çark için ayrı ayrı hesaplamış olduğu olasılıkları toplamak gerektiğini söylemiş; ancak toplayacağı iki sayı konusunda kararsız kalarak, herhangi bir sonuca ulaşamamıştır (Şekil 4.28).

The image shows handwritten mathematical work. On the left, there are several fractions: $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{2}$, and $\frac{1}{10}$. In the center, there are calculations involving these fractions, such as $\frac{1}{16} + \frac{1}{6}$ and $\frac{1}{16} + \frac{1}{10}$. On the right, there are more fractions: $\frac{5}{16}$, $\frac{1}{10}$, and $\frac{1}{6}$. Some of these are circled or crossed out. The work appears to be a student's attempt to solve a probability problem by adding different fractions.

Şekil 4.28

4. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

5. öğrenci; 1. çark için olasılığı $\frac{4}{16}$ ve 2. çark için olasılığı $\frac{1}{6}$ olarak bulduktan sonra; çözüme aşağıdaki sözlerle devam etmiştir:

“Şimdi, bu olasılıkta da, mesela 2–3 durum ard arda yapıldığında... Şimdi ben birinci çarktaki olasılığı buldum. İş bitmediyse, çarpı koyuyorum. İş bittiyse; başka şeyler yapabiliyorum. Yani bir sürü şeyler var bunların, hani çözüm yöntemleri var. İş bitmediyse, çarpım koyuyorum; sonra ikinci durumdaki olasılığa bakıyorum; bu iki durumu da çarpıyorum. Sadeleştirilme yapıldığında... (4 sn. sessizlik) 4 olsun (yaptığı sadeleştirme: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$). $\frac{1}{24}$ buldum. Şıklarda da yok. Yanlış buldum.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

Şıklarda yer almayan bir sonuca ulaşan 5. öğrenci; mırıldanarak, yaptığı işlemleri kontrol etmiş ve problem ifadesini tekrar gözden geçirmiştir. Ayrıca “Acaba iki durum mu diyeceğiz burada? $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{32}$ olur. O da yok (kastettiği: “Şıklarda yok”).” (5. öğrenci – 1. görüşme) diyerek; –4. öğrenci gibi– şıklarda olan bir sonuç bulabilmek için, deneme–yanılma yoluna yönelmiştir. Kağıda bir şeyler yazarak ve mırıldanarak bir süre düşündükten sonra; öğrencinin “Buradaki hatamı göremiyorum şu an.” (5. öğrenci – 1. görüşme) demesi üzerine, başka bir problemin çözümüne geçilmiştir. Bütün problemlerin çözümleriyle uğraştıktan sonra, en son tekrar bu probleme dönen 5. öğrenci; çözüm üzerine biraz düşündükten sonra, daha önce 1. çark için yapmış olduğu olasılık hesabını adım adım tekrar açıklamıştır. 2. çarkın olasılığı için daha önce yazmış olduğu $\frac{1}{6}$ oranını silen 5. öğrenci,

“Çarpı... şimdi, ikinci çarkta 3 tane ütü var, 1 kahve makinesi var, 1 tost makinesi var, 1 de çamaşır makinesi var. Yani aslında benim karşıma gelebilecek 4 tane durum var. 4 durum var. Ama çamaşır makinesinin gelme olasılığı $\frac{1}{4}$ ’dür. Bunun ikisini çarptığımızda (yani $\frac{4}{16} \cdot \frac{1}{4}$); $\frac{1}{16}$ gelir.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

şeklinde bir açıklama yapmıştır. 2. çarkın “örneklem uzayının eleman sayısı” için yanlış mantık yürüten 5. öğrenci, yanlış çözüm yolunu takip etmiş; fakat iki çark için bulmuş olduğu olasılıkları çarpıp, sadeleştirme özelliğini kullandığında, tesadüfen doğru olan sonucu bulmuştur (Şekil 4.29).

5. öğrencinin bu problemi çözme süreci genel olarak değerlendirilecek olursa; öğrenci, 1. çark için olasılık hesabı sırasında iki olayı hesaba katmadığından dolayı, ilk başta, şıklarda olmayan $\frac{1}{24}$ sonucunu bulmuştur. Fakat öğrenci; hatayı, 2. çark için olasılığı hesaplarken yaptığını düşünmüş ve –aslında doğru akıl yürütme yoluyla doğru hesaplamış olduğu– 2. çark için olasılık üzerinde tekrar düşünmeye başlamıştır. Bu defa yanlış akıl yürütmeler ve yanlış hesaplamalar yapsa da; tesadüfen doğru olan sonuca

ulaşmıştır. Bu soru, şıklı bir soru olduğundan dolayı; öğrencinin şıklarda olan bir sonuca ulaşabilmek için deneme–yanılma yoluna yönelmesi, bu süreçte, başta doğru olan akıl yürütmelerinin sonrasında yanlışa dönüşmesi ve sonunda tesadüfen doğru sonuca ulaşması dikkati çekmiştir.

Handwritten student work for a probability problem. On the left, a tree diagram shows two stages: Stage 1 with outcomes 2 and 4 (labeled "2 durum"), and Stage 2 with outcomes 3 and 4 (labeled "2 durum"). A bracket groups these into "4 durum". On the right, a list of 16 ordered pairs (1,1) through (4,4) is shown, labeled "16 durum". Below this, the calculation $\frac{4}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ is written.

Şekil 4.29

5. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

1. çark için olasılığı $\frac{6}{16}$, 2. çark için olasılığı $\frac{1}{6}$ olarak bulmuş olan 6. öğrenci ise; kağıda $\frac{6}{16} \cdot \frac{1}{6}$ yazmış, pay ile paydadaki 6 sayılarını sadeleştirmiş ve doğru cevap olan $\frac{1}{16}$ sonucuna, doğru çözüm yolundan ulaşmıştır.

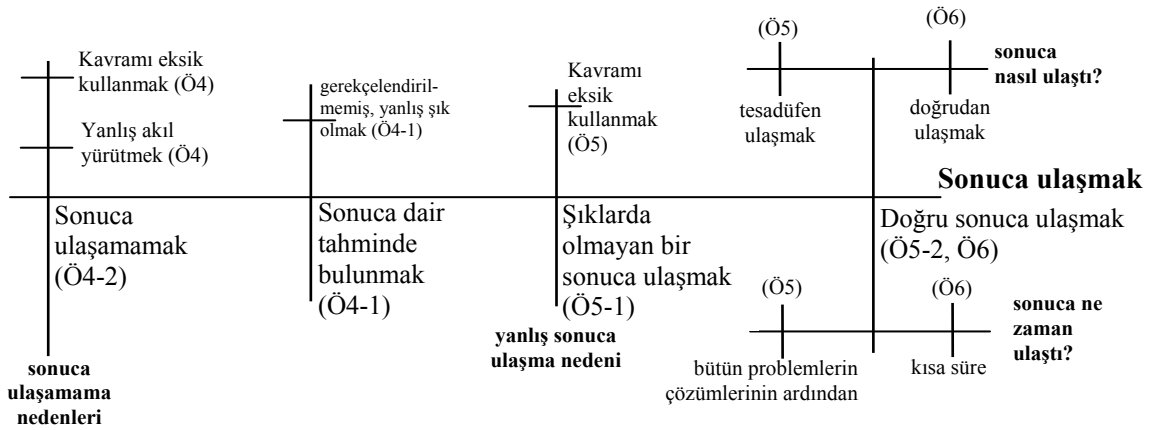
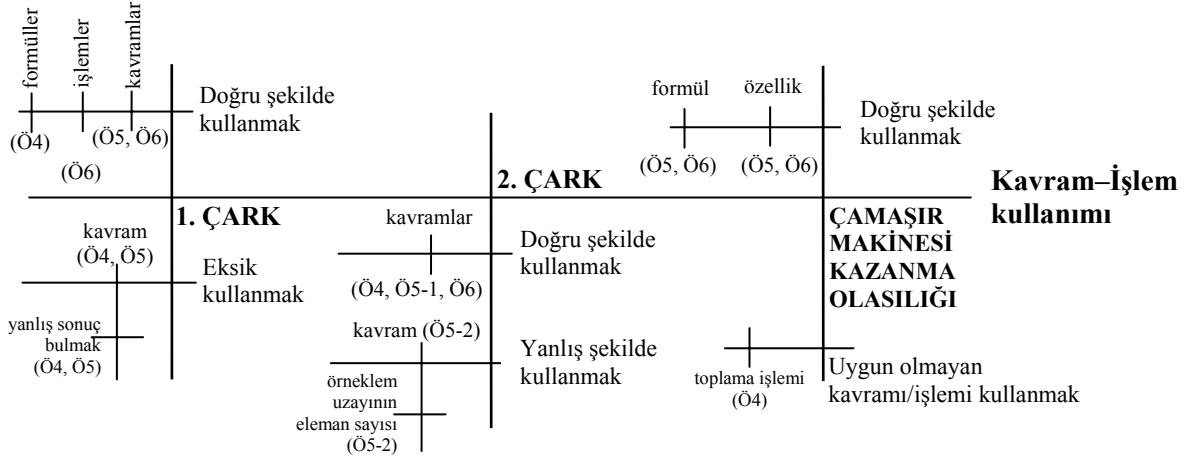
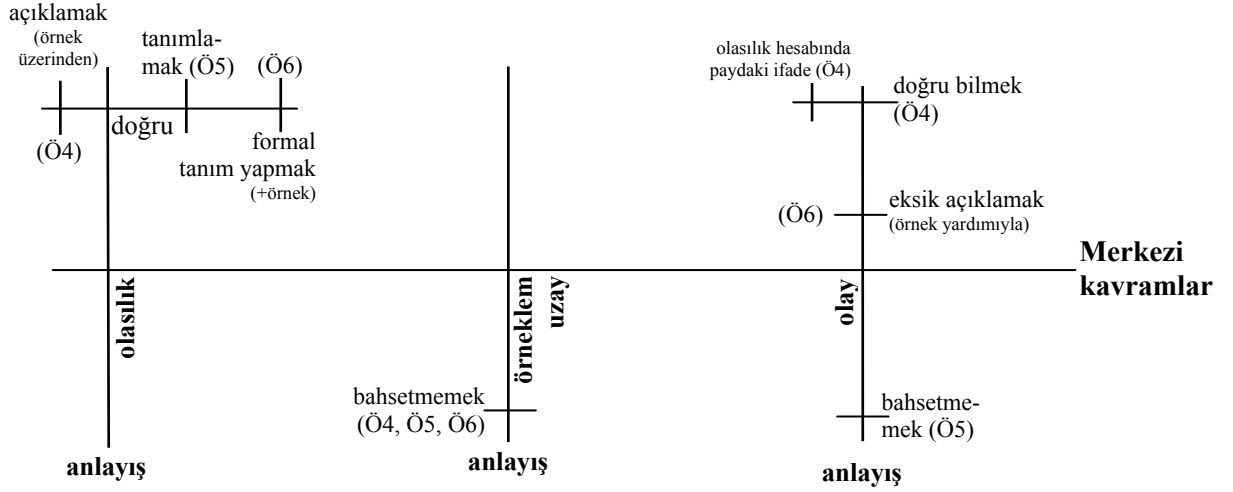
4.8.1.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, 1. görüşmedeki “olasılık” ile ilgili problemi çözme sürecinde; problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları, kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili çıkan kategoriler bir araya getirilerek; her bir öğrencinin, problemi çözme süreci Tablo 4.42’de özetlenmiş ve Şekil 4.30’da da eksenler üzerinde gösterilmiştir.

Tablo 4.42
Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Öğrenci no	Merkezi kavramlarla ilgili anlayışları	Kullandıkları kavramlar–işlemler	Kategoriler (Kavram–işlem kullanımı)	Kategoriler (Sonuca ulaşmak)		
4	Olasılık (doğru açıklamak) Olay (doğru bilmek)	Olay kümesi (1. çark için)	Uygun kavramı eksik kullanmak → yanlış sonuç	1. çark için yanlış sonuç bulmak	İşlem yapmadan, sonuca dair yanlış tahminde bulunmak	Sonuca ulaşamamak
		Olayların kesişiminin olasılığı (formülü) Olayların birleşiminin olasılığı (formülü) (1. çark için)	Uygun formülleri doğru şekilde kullanmak			
		Örneklem uzayının eleman sayısı (2. çark için) Oran Olasılık (2. çark için)	Uygun kavramları doğru şekilde kullanmak	2. çark için doğru sonuç bulmak		
		Toplama işlemi (Çamaşır makinesi kazanma olasılığı için)	Uygun olmayan işlemi kullanmak	Toplayacağı iki sayı konusunda kararsız kalmak		
5	Olasılık (doğru tanımlamak)	Olay kümesi (1. çark için)	Uygun kavramı eksik kullanmak → yanlış sonuç	1. çark için yanlış sonuç bulmak	Şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmak	Tesadüfen doğru sonuca ulaşmak
		Örneklem uzay (1. çark için)	Uygun kavramı doğru şekilde kullanmak → doğru sonuç			
		Oran Olasılık (1. çark için)	Uygun kavramları doğru şekilde kullanmak			
		Örneklem uzayının eleman sayısı (2. çark için) Oran Olasılık (2. çark için)	Uygun kavramları doğru şekilde kullanmak	2. çark için doğru sonuç bulmak		

		Çamaşır makinesi kazanma olasılığı için $P(N \cap M) = P(N) \cdot P(M)$ formülü	Uygun formülü doğru şekilde kullanmak		
		Örneklem uzayının eleman sayısı (2. çark için)	Uygun kavramı yanlış şekilde kullanmak	2. çark için yanlış sonuç bulmak	
		Oran Olasılık (2. çark için)	Uygun kavramları doğru şekilde kullanmak		
		Çamaşır makinesi kazanma olasılığı için $P(N \cap M) = P(N) \cdot P(M)$ formülü Sadeleştirme özelliği	Uygun formülü/ özelliği doğru şekilde kullanmak		
6	Olasılık (doğru tanımlamak) Olay (eksik açıklamak)	<i>Pratik bir yol</i> Olay kümesinin eleman sayısı hesabı (1. çark için) Örneklem uzayının eleman sayısı hesabı (1. çark için) Oran Olasılık (1. çark için) Örneklem uzayının eleman sayısı (2. çark için) Olay kümesinin eleman sayısı (2. çark için) Oran Olasılık (2. çark için) Çamaşır makinesi kazanma olasılığı için $P(N \cap M) = P(N) \cdot P(M)$ formülü Sadeleştirme özelliği	Uygun işlemleri/ kavramları/ formülü/ özelliği doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak	



Şekil 4.30

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Olasılık” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, 1. görüşmedeki “olasılık” ile ilgili problemi çözme süreçleri özetlenecek olursa; bu soruda, ortaöğretim öğrencilerinin, “olasılık”, “örneklem uzay” ve “olay kümesi” kavramları ile ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Ancak sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir. “Olasılık” kavramını; 4. öğrenci, örnek üzerinden doğru biçimde açıklarken; 5. öğrenci, –ilk başta kelimelere dökmekte biraz zorlansa da– kavramı tanımlayabilmiştir. 6. öğrenci ise, önce “olasılık” kavramının formal tanımını yapmış; ardından da olasılığa bir örnek vermiştir. “Örneklem uzay” kavramından, üç öğrenci de, isim olarak bahsetmediklerinden; öğrencilerin bu kavramla ilgili düşünceleri doğrudan sorgulanmamıştır. “Olay” kavramının anlamı sorulduğunda; 6. öğrenci, yaptığı açıklamada, daha ziyade “olasılık” kavramına dair bir örnek vermiş olduğundan; 6. öğrencinin bir örnek yardımıyla yaptığı açıklama, “eksik açıklama” olarak değerlendirilmiştir. 4. öğrencinin, “paydaki ifadeye mi, paydadakine mi ‘olay’ diyoruz?” sorusuna, *“Yukarıdaki, yani paydakine.”* (4. öğrenci – 1. görüşme) cevabını vermesi; –kavram tanımı üzerine konuşulmasa da– öğrencinin, “olay” kavramını bildiğinin bir göstergesi olarak düşünülmüştür. 5. öğrenci ise, çözüm esnasında, “olay”/“olay kümesi” kavramından hiç bahsetmemiş; dolayısıyla öğrencinin bu kavramla ilgili düşünceleri sorgulanmamıştır.

“Kavram–işlem kullanımı” adlı ana kategori eksenine; “1. çark”, “2. çark” için olasılık ve “çamaşır makinesi kazanma olasılığı” olmak üzere üç bölüme ayrılmıştır. Ortaöğretim öğrencilerinin, “olasılık” ile ilgili bu problemi çözerken, 1. çark için olasılık hesaplama süreçleri özetlenecek olursa; 4. öğrenci, ikinci çarka geçebilmek için birinci çarkı iki çevirişte gelebilecek sayıları (yani 1. çark için olay kümesini) belirledikten sonra; –kendisi isim olarak bahsetmeden– önce olayların kesişiminin olasılığı, sonra da olayların birleşiminin olasılığı formüllerinden yararlanmıştır. 4. öğrenci, doğru şekilde mantık yürütmüş olmasına rağmen; olay kümesini belirlerken, “her iki çevirişte de 3 gelmesi” olayını hesaba katmadığından (yani kavramı eksik kullandığından), 1. çark için olasılık hesabında yanlış sonuç elde etmiştir. 5. öğrenci; 1 sayısı da dahil, birinci çarkı ilk çevirişte gelebilecek alternatifleri tek tek düşünerek, ikinci çevirişte gelmesi beklenen

sayıları tespit etmeye çalışmış; ancak 3–3 ve 4–4 alternatiflerini hesaba katmadığı için (yani kavramı eksik kullandığı için), istenen durumların sayısını (olay kümesinin eleman sayısını) yanlış bulmuştur. İstenilen durumların sayısını 4 ve tüm durumların sayısını 16 olarak bulmuş olan 5. öğrenci de, –4. öğrenci gibi– doğru şekilde mantık yürütmüş olmasına rağmen; olay kümesini eksik belirlediğinden, 1. çark için olasılık hesabında yanlış sonuç bulmuştur. 6. öğrenci ise; 1. çark için olay kümesinin ve örneklem uzayın eleman sayılarını belirlemede, diğer iki öğrenciye göre daha farklı bir yoldan gitmeyi tercih ederek; matematik öğretmeninden öğrendiğini söylediği bir pratik yolu takip etmiştir. Olay kümesini ve örneklem uzayı açık açık yazmaksızın, doğrudan eleman sayılarını hesaplayan 6. öğrenci; oran ve olasılık kavramlarını kullanarak, 1. çark için olasılık değerini doğru şekilde hesaplamıştır.

Ortaöğretim öğrencilerinin, “olasılık” ile ilgili bu problemi çözerken, 2. çark için olasılık hesaplama süreçleri özetlenecek olursa; üç öğrenci de, 2. çark için “olay kümesinin eleman sayısı”nı, “örneklem uzayının eleman sayısı”na oranlayarak, 2. çark için olasılığı –ilk etapta– doğru şekilde hesaplamıştır.

1. ve 2. çark için olasılık hesaplarının ardından, –herhangi bir işlem yapmaksızın– doğru cevabın “E şıkkı” olduğu yönünde (yanlış) tahminde bulunan 4. öğrenci; bu tahminine dair net bir gerekçe belirtmemiştir. 4. öğrenci, ilk başta akıl yürütme yoluyla doğru çözüm yolunu takip etmiş olmasına rağmen; sonrasında, şıklarda olan bir sonuca ulaşabilmek için deneme–yanılma yoluna yönelmiş ve bu süreçte, yanlış akıl yürütmeler de yapmıştır. Her iki çark için ayrı hesaplamış olduğu olasılıkları toplamak gerektiğini söylemiş; ancak toplayacağı iki sayı konusunda kararsız kalarak, herhangi bir sonuca ulaşamamıştır. 5. öğrenci, 1. çark için olasılık hesabı sırasında iki olayı hesaba katmadığından dolayı, ilk başta, şıklarda yer almayan $\frac{1}{24}$ sonucunu bulmuştur. Bunun üzerine, –4. öğrenci gibi– şıklarda olan bir sonuç bulabilmek için, deneme–yanılma yoluna yönelen 5. öğrenci; buradan da şıklarda yer alan bir sonuç elde edememiştir. Bütün problemlerin çözümlerinin ardından, tekrar bu probleme dönen 5. öğrenci; hatayı, 2. çark için olasılığı hesaplarken yaptığını düşünmüş ve –aslında doğru akıl yürütme yoluyla doğru hesaplamış olduğu– 2. çark için olasılık üzerinde tekrar düşünmeye başlamıştır. Bu defa 2. çarkın “örneklem uzayının eleman sayısı” için yanlış mantık yürüten 5. öğrenci, yanlış akıl yürütmeler ve

dolayısıyla yanlış hesaplamalar yapsa da; iki çark için bulmuş olduğu olasılıkları çarpıp, sadeleştirme özelliğini kullandığında, tesadüfen, doğru olan sonuç şikkına ulaşmıştır. 6. öğrenci ise; 1. çark için bulmuş olduğu olasılık ($\frac{6}{16}$) ile 2. çark için bulmuş olduğu olasılığı ($\frac{1}{6}$) çarpmış ve sadeleştirme sonucunda, doğru cevap olan $\frac{1}{16}$ sonucuna ulaşmıştır.

Bu problemde “kavram–işlem kullanımı” ile “sonuca ulaşmak” adlı ana kategorilere ait kategoriler; “1. çark”, “2. çark” ve “çamaşır makinesi kazanma olasılığı” için birbiriyle iç içe geçmiş olduğundan; “sonuca ulaşmak” adlı ana kategoriye ait kategorilerden yukarıda bahsedilmiştir. “Sonuca ulaşmak” adlı ana kategori eksenini tekrar açıklanacak olursa; 4. öğrenci, önce, sonuca dair gerekçelendirilmemiş, yanlış bir tahminde bulunmuş; daha sonra ise, –eksik kavram kullanımı ve yanlış akıl yürütmeler nedeniyle– herhangi bir sonuca ulaşamamıştır. 5. öğrenci, –4. öğrenciye benzer şekilde– eksik kavram kullanımından dolayı, ilk başta, şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmış; bütün problemlerin çözümlerinin ardından ise, –yanlış akıl yürütmeler ve dolayısıyla yanlış hesaplamalar yapsa da– tesadüfen, doğru olan sonuç şikkına ulaşmıştır. 6. öğrenci ise, doğrudan (doğru çözüm yolu takip ederek), kısa süre içerisinde doğru sonuca ulaşmıştır.

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, bu problemi çözme süreçlerinde dikkati çeken önemli bir nokta; bu soruda yer alan şıkların, 4. ve 5. öğrencinin çözüm ile ilgili akıl yürütmelerinde, üstlendiği yönlendirici rol olmuştur. Bu soru, şıklı bir soru olduğundan dolayı; 4. ve 5. öğrencinin şıklarda olan bir sonuca ulaşabilmek için deneme–yanılma yoluna yönelmesi; ayrıca 5. öğrencinin, bu süreçte, başta doğru olan akıl yürütmelerinin sonrasında yanlışla dönüşmesi ve sonunda tesadüfen doğru sonuca ulaşması dikkat çekici bulunmuştur.

4.9. İlköğretim Öğrencilerinin “Sözel Problemler” ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

Katılımcı ilköğretim öğrencilerine, “sözel problemler” ile ilgili üç tane soru sorulmuştur.

4.9.1. İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

“Sözel problemler” ile ilgili bir soru, “2009 yılı 7. sınıf Seviye Belirleme Sınavı (SBS) soruları” arasından seçilmiştir ve katılımcı ilköğretim öğrencilerine, 13 Nisan–22 Nisan 2010 tarihleri arasında gerçekleştirilen 2. görüşmede sorulmuştur. Bu soru, – kazanımlar açısından– 7. sınıf matematik öğretim programındaki “sayılar” öğrenme alanının “oran ve orantı” alt öğrenme alanında yer alan bir kazanımla ve “rasyonel sayılar” alt öğrenme alanında yer alan bir kazanımla uyumludur (Tablo 4.43).

Tablo 4.43

İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar

2. GÖRÜŞME / 7. SORU	KAZANIMLAR															
Tablo: Makinelerin Dokuduğu Kumaş Miktarları <table><tr><th>Makine numaraları</th><th>Süre (dakika)</th><th>Kumaş miktarı (metrekare)</th></tr><tr><td>I.</td><td>40</td><td>46</td></tr><tr><td>II.</td><td>30</td><td>36</td></tr><tr><td>III.</td><td>70</td><td>76</td></tr><tr><td>IV.</td><td>60</td><td>66</td></tr></table> Dört farklı makinenin, aynı tür kumaşı belirli sürelerde ne kadar dokudukları tabloda verilmiştir. Tabloya göre, aynı sürede <u>en çok</u> kumaş dokuyan makine hangisidir? A) I B) II C) III D) IV (2009 SBS – 7. SINIF – 3. SORU) (Cevap: B)	Makine numaraları	Süre (dakika)	Kumaş miktarı (metrekare)	I.	40	46	II.	30	36	III.	70	76	IV.	60	66	2. Doğru ve ters orantıyla ilgili problemleri çözer ve kurar. (“<i>oran ve orantı</i>”) 3. Rasyonel sayıları karşılaştırır ve sıralar. (“<i>rasyonel sayılar</i>”)
Makine numaraları	Süre (dakika)	Kumaş miktarı (metrekare)														
I.	40	46														
II.	30	36														
III.	70	76														
IV.	60	66														

Tablo 4.44
İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar

İrdelenecek Matematiksel Kavram Listesi	Matematiksel Kavram
Oran	Matematiksel kavram
Orantı	Matematiksel kavram
Rasyonel sayı	Matematiksel kavram
Sıralama	Matematiksel kavram
Ondalık kesir	Matematiksel kavram
Kat (II. yol)	Matematiksel kavram
En küçük ortak kat (Ekok) (II. yol)	Matematiksel kavram

4.9.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolları” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi

Aynı sürede en çok kumaş dokuyan makineyi bulmak için; takip edilebilecek farklı çözüm yolları vardır.

I. çözüm yolu: Her bir makinenin 1 dakikada (birim zamanda) dokuduğu kumaş miktarı hesaplanabilir. Her bir makine için $\frac{\text{Kumaş miktarı (metrekare)}}{\text{Süre (dakika)}}$ oranı yazılarak; $\frac{46}{40}$, $\frac{36}{30}$, $\frac{76}{70}$ ve $\frac{66}{60}$ rasyonel sayıları elde edilebilir. Her rasyonel sayının payındaki değer paydasındaki değere bölünerek; rasyonel sayıların ondalık açılımları (yaklaşık olarak) hesaplanabilir ve bu ondalık kesirler karşılaştırılarak, en büyük sayı $\frac{36}{30} = 1,2$ olarak bulunabilir. Böylece; aynı sürede en çok kumaş dokuyan makinenin II. makine olduğu bulunmuş olur.

II. çözüm yolu (uzun yol): Amaç, aynı sürede en çok kumaş dokuyan makineyi bulmak olduğu için; dört makine için tabloda verilmiş olan süreler eşitlenmeye çalışılabilir. Bunun için; her bir makine için tabloda verilmiş olan sürelerin en küçük ortak katı hesaplanarak, $\text{ekok}(40, 30, 70, 60) = 840 \text{ dakika}$ elde edilebilir. Her bir makine için doğru orantı kurularak; her makinenin 840 dakikada kaç metrekare kumaş dokuduğu hesaplanabilir.

(Örneğin I. makine için;

40 dakikada		46 m ² kumaş	dokuyorsa;
840 dakikada		X m ² kumaş	dokur.

$$X = \frac{46 \cdot 840}{40} = 966 \text{ m}^2 \text{ olarak bulunur.})$$

Her bir makinenin 840 dakikada dokuduğu kumaş miktarları hesaplandıktan sonra; 1008 m² lik değerle, II. makinenin en çok kumaş dokuyan makine olduğu bulunmuş olur.

Bu problemin çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezdeki kavramlar düşünülerek; katılımcı ilköğretim öğrencilerinin “oran”, “orantı”, “rasyonel sayı”, “ondalık kesir”, “kat” ve “en küçük ortak kat” kavramlarıyla ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır (Tablo 4.44). Sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir.

4.9.1.2. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları Belirlemeleri

Bu sözel problemi çözebilmek için; ilköğretim öğrencilerinin, öncelikle, problemin nasıl çözüleceğini / problemin içinde yer alan merkezi kavramları belirleyebilmeleri gerekmiştir.

Matematik başarı düzeyi “orta” olan 1 no’lu öğrenci; soruyu okuduktan sonra, ilk olarak “Oranlara baksak.” (1. öğrenci – 2. görüşme) yorumunda bulunmuş; böylece çözümde kullanılacak uygun kavramı –dokuz saniye gibi kısa bir süre içerisinde– belirleyebilmiştir. Matematik başarı düzeyi “iyi” olan 2 no’lu öğrenci de, ilk önce “O zaman oran-orantı kuracağız burada.” (2. öğrenci – 2. görüşme) demiş; az sonra da “‘Oran-orantı’ konusu var; ama biz burada orantı kuracağız, ‘doğru orantı’ olarak.” (2. öğrenci – 2. görüşme) ifadesini kullanmıştır. Yani 2. öğrenci de, çözüm için uygun başka bir kavramı belirlemiş; ancak belirleme süreci, 1. öğrenciye göre biraz daha uzun (17 saniye) sürmüştür. 3. öğrenci ise, problem ifadesini okuduktan hemen sonra,

“Mesela bunların hepsini bir yerde eşitleyebiliriz. Mesela belli bir sürede ya da... (5 sn. sessizlik) Yani bir sürede eşitlesek, o zaman ne kadar (3 sn.

sessizlik)... onu bir birim kabul etsek; birimde ne kadar kumaş şey yaptıklarını bulabiliriz, dokuduklarını. Hepsi aynı olursa. Yani bunları... ya, hepsini 10 dakikada yapsak. 10'un katı, ne de olsa.” (3. öğrenci – 2. görüşme)

diyerek; kavramın isminden doğrudan bahsetmese de, makinelerin hepsinin ortak bir sürede eşitlenebileceğini söylemiş; böylece çözüm yolunu hemen doğru biçimde belirlemiştir.

Yukarıda yer verilen bilgiler ışığında; katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, problemin içinde yer alan ve çözümde kullanacakları merkezi kavramları belirlemelerinin, iki kategori altında toplandığı görülmüştür (Tablo 4.45).

Tablo 4.45
İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları Belirlemeleri

Kategoriler	Öğrenci no
Uygun kavramı belirlemek	1, 2
<i>Hiçbir kavramdan isim olarak bahsetmeden</i> doğru çözüm yolunu belirlemek	3

4.9.1.3. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Bu bölümde; ilköğretim öğrencilerinin, –bu problemi çözme sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlar olan– “oran”, “orantı” ve “rasyonel sayı” kavramlarıyla ilgili yapmış oldukları tanım ve açıklamalara yer verilecektir.

Katılımcı ilköğretim öğrencileri, bu problemi çözme sürecinde; “ondalık kesir” kavramından isim olarak hiç bahsetmediklerinden, “kat” ve “en küçük ortak kat” kavramlarını ise çözümde hiç kullanmadıklarından; bu soruda, öğrencilerin bu kavramlarla ilgili düşünceleri irdelenmemiştir.

4.9.1.3.1. İlköğretim öğrencilerinin, “oran” ve “orantı” kavramları ile ilgili anlayışları. “Oran” kavramı ile ilgili olarak, öğrencilerin düşünceleri ve araştırmacı–öğrenci konuşmaları aşağıdaki şekildedir:

Görüşmeci: Nedir “oran”?

Öğrenci: Yani hepsinde 1 bölü... 1 tam 1 bölü kaç çıkacak? Bakalım.

Görüşmeci: Yok, yani hani “oranlara bakalım” dedin. “Oran”dan kastettiğin nedir?

Öğrenci: Yani hepsi... “süre”den “metrekare miktarı” 6 fazla. (1. öğrenci – 2. görüşme – çözümün başlangıç aşamasında)

“Bir sayının diğer sayıya bölündüğünde ortaya çıkan sonuç.” (1. öğrenci – 2. görüşme – çözümün bitim aşamasında)

“Ha, %25 mesela, oran. Yani birbirini, mesela... Mesela bir şey var. Mesela... nasıl anlatayım? x sayısının, y sayısına oranı gibi bir şey yani. x sayısının, y sayısına oranı; $\frac{x}{y}$ dir mesela.” (2. öğrenci – 2. görüşme)

Kısacası; 1. öğrenci, çözümün başlangıç aşamasında “oran” kavramının tanımına yönelik net bir şey söylememiş; fakat çözümünü tamamladıktan sonra, –tam doğru ifade kullanamasa da– bir tanım yapabilmıştır. “Oran” kavramında asıl önemli olan, “bölme yoluyla karşılaştırma” iken; 1. öğrenci, tanımında bundan bahsetmemiş ve “ortaya çıkan sonuç” ifadesini kullanmıştır. Bu nedenle; 1. öğrencinin “oran” tanımı “eksik tanım” olarak değerlendirilmiştir. 2. öğrenci; ifade etmekte biraz zorlansa da, örnek üzerinden “oran” kavramını açıklayabilmıştır.

Araştırmacı, “oran–orantı” ifadesini kullanan 2. öğrenciye, “*Nedir oran–orantı?*” sorusunu yöneltmiştir. Öğrencinin verdiği cevap, “*Yani... nasıl anlatayım onu? ... Oran–orantı, bir konu diye biliyorum.*” (2. öğrenci – 2. görüşme) biçiminde olmuştur. “Orantı”nın ne anlama geldiğini ve “orantı” ile “oran” arasındaki ilişkiyi açıklayamasa da; burada “doğru orantı” kuracağını söylemiş ve “doğru orantı” kavramını, “*Yani mesela şimdi, aynı miktarda mesela bir şeyi azalttınız, o miktar da azalacak; ya da çoğalttınız, o da çoğalıyorsa; doğru orantı.*” (2. öğrenci – 2. görüşme) sözleriyle açıklamıştır. “Aynı oranda (artan/azalan)” ifadesini kullanması gerekirken, “aynı miktarda” ifadesini kullandığı için; 2. öğrencinin bu açıklaması, tam doğru kabul edilememiş ve “eksik açıklama” şeklinde değerlendirilmiştir.

3. öğrenci ise, çözüm sürecinde “oran” ve “orantı” kavramlarından isim olarak hiç bahsetmediğinden; öğrencinin bu kavramlarla ilgili düşünceleri sorgulanamamış ve dolayısıyla ortaya çıkarılamamıştır.

4.9.1.3.2. İlköğretim öğrencilerinin, “rasyonel sayı” kavramı ile ilgili anlayışları. Bu problemde; 3. öğrenci, “rasyonel sayı” kavramından bahsetmemiş ve bu kavramı çözümde kullanmamıştır. 1. ve 2. öğrenci ise, çözüm sürecinde “rasyonel sayılar” elde etmiş olmalarına rağmen; 2. öğrenci, “rasyonel sayı” kavramından isim olarak bahsetmemiş; 1. öğrenci ise, “kesirli sayı” olarak bahsetmiştir. 1. ve 2. öğrencilerin “rasyonel sayı” kavramı ile ilgili düşünceleri, bu görüşmedeki (2. görüşme) “rasyonel sayılar” ile ilgili başka bir problemde irdelenmiş olduğundan; bu soruda tekrar sorgulanmamıştır. Ancak 1. ve 2. öğrencilerin “rasyonel sayı” kavramı ile ilgili – diğer problemde ortaya çıkarılmış olan– anlayışlarından; ilerde, “ilköğretim öğrencilerinin, 2. görüşmedeki “sözel problemler” ile ilgili problemi çözme süreçlerinin özeti” kısmında, kısaca bahsedilecektir.

İlköğretim öğrencilerinin, problemde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları Tablo 4.46’da listelenmeye çalışılmıştır.

Tablo 4.46

İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Kavramlar	Öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları		
	1. öğrenci	2. öğrenci	3. öğrenci
Oran	eksik tanımlamak	doğru açıklamak	
Orantı		tanımlayamamak	
Rasyonel sayı	tanımlayamamak	eksik tanımlamak	
Ondalık kesir			
Kat (II. yol)			
En küçük ortak kat (ekok) (II. yol)			

4.9.1.4. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları

1. öğrenci, çözüme “Oranlara baksak.” (1. öğrenci – 2. görüşme) yorumuyla başlamış ve her makine için, kumaş miktarının süreye oranını hesaplamıştır. İlk önce her bir makine için $\frac{\text{Kumaş miktarı (metrekare)}}{\text{Süre (dakika)}}$ oranını rasyonel sayı olarak yazmış; daha sonra zihinden paydaki değeri paydadaki değere bölerek, rasyonel sayının ondalık açılımını (yaklaşık olarak) hesaplamıştır. Bu süreçte; I. makine için hesaplama yaparken,

“ $\frac{46}{40}$ yaparsak; (zihinden bölme işlemini yapıyor:) 1 kere var. 60’da 40, 1 kere var. 20’de 40, yok. (0 koyuyor–HATA) 200’de 40, (4 sn. sessizlik) beş kere var. (1,105 sonucunu buldu.)” (1. öğrenci – 2. görüşme)

diyerek; bölme sırasında işlem hatası yapmış ve sonucu 1,105 olarak yanlış bulmuştur. III. makine için de,

“ $\frac{76}{70}$ yaparsak; 1 kere var. 60’da 70 yok. Bir sıfır koyduk. 600’de 70... (7’nin katlarını sayıyor:) 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56. Sekiz kere var. 40’da 70 yok. (0 koyuyor–HATA) Bu, bu şekilde devrediyor.” (1. öğrenci – 2. görüşme)

diyerek; –az önceki gibi– bölme sırasında virgülden sonra fazladan bir 0 koymuş ve 1,080... sayısının bu şekilde devrettiği şeklinde yanlış bir ifade kullanmıştır. II. ve IV. makine için hesaplamaları ise, doğru şekilde yapmıştır.

Dört makine için yapmış olduğu bu bölme işlemlerinin ardından, “Şimdi burada, kumaş miktarını süreye oranladık.” (1. öğrenci – 2. görüşme) açıklamasını yapan 1. öğrenci ile araştırmacı arasında, devamında aşağıdaki diyalog geçmiştir:

Görüşmeci: Neden böyle yaptık?

Öğrenci: Çünkü süreyi, kumaş miktarına, ıııı (düşünüyor), oranlasaydık; kesirli sayılar çıkacaktı ve işlemiz daha da zorlaşacaktı.

Görüşmeci: Hım. Öyle de yapabilir miydin ama; hani zoru kabul etsem?

Öğrenci: Ya, tabii ki! Zoru kabul edip, onunla yapabilirdik. (1. öğrenci – 2. görüşme)

Bu diyalogdan da görüldüğü gibi; 1. öğrenci, süreyi kumaş miktarına oranlayarak da problemin çözülebileceğini; ancak bu durumda kesirli sayılar çıkacağı için, işin daha zor olacağını ifade etmiştir.

1. öğrenci, her bir makine için $\frac{\text{Kumaş miktarı}}{\text{Süre}}$ oranını rasyonel sayı olarak yazıp, rasyonel sayıların ondalık açılımlarını (yaklaşık olarak) hesapladıktan sonra; doğru cevaba nasıl karar vereceği ile ilgili olarak, araştırmacı ile 1. öğrenci arasında geçen konuşma şöyledir:

Görüşmeci: Peki, şimdi nasıl karar vereceksin, hangisinin doğru olduğuna?

Öğrenci: Virgülden sonraki sayı, tam sayıya ne kadar yakınsa; sayı o kadar büyüktür. Yani o sayı, en büyüktür.

Görüşmeci: Mesela burada hangisi en büyüktür?

Öğrenci: Burada $\frac{76}{70}$; çünkü virgülden sonra sıfırla başlamış... (8 sn. sessizlik)

mı? (4 sn. sessizlik) Ama şimdi şöyle bir şey var: Bu devrediyor. O zaman III ile (3 sn. sessizlik) I gitti (A ve C şıklarının üzerlerini çizdi); çünkü diğerlerinde (yani II ve IV) bir basamak varken; birinde (yani I) üç basamak, diğerinde (yani III) devam eden basamaklar var. Basamak sayısı...

Görüşmeci: “Devrediyor” derken...?

Öğrenci: Yani “işlem daha devam ediyor” manasında. Sayı devretmiyor. Ama şunu unuttum: Virgülden sonra ne kadar çok sayı varsa; sayı o kadar küçük oluyor. Onun için; virgülden sonra tek sayıya indirdim önce. Daha sonra... hangisi büyük? (8 sn. sessizlik) Virgülden sonraki sayı 2 olduğu için; (1,2 deki 2 rakamını yuvarlak içine alıyor) 36 daha büyüktür. II. si. (1. öğrenci – 2. görüşme)

Öğrencinin bu söyledikleri dikkate alınacak olursa; 1. öğrencide “Virgülden sonra ne kadar çok sayı varsa; sayı o kadar küçük oluyor.” şeklinde, ondalık kesirlerde sıralama ile ilgili yanlış yapılanmanın olduğu ve bu yanlış yapılanmayı, problem çözümünde kullandığı söylenebilir. Ayrıca 1. öğrencinin; burada “devrediyor” sözcüğünü de, – matematiksel anlamı dışında– “devam ediyor” anlamında kullandığı görülmektedir.

Kısacası; 1. öğrenci, $\frac{\text{Kumaş miktarı}}{\text{Süre}}$ oranını kullandığı çözüm sürecinde, bölme sırasında işlem hataları yapmış olmasına, “ondalık kesirlerde sıralama” ile ilgili yanlış yapılanmış bilgileri olmasına ve bu yanlış yapılanmalarını kullanmasına rağmen; – tesadüfen de olsa– doğru cevap şikkına ulaşmıştır (Şekil 4.32).

2. öğrenci, çözümüne “Şimdi biz bunları, hepsini en küçük olarak 30’da eşitlesek, II. makineye göre.” (2. öğrenci – 2. görüşme) sözleriyle başlamış ve

devamında, “Şimdi, birisinde mesela doğru orantı kuralım: “40 dakikada, 46 işte m^2 kumaş dokuyorsa; yani 30 dakikada kaç?” diye x koyarız şuraya.” (2. öğrenci – 2. görüşme) diyerek, I. makine için doğru orantı kurmuş ve $x = \frac{30 \cdot 46}{40}$ değerini, 34,5 olarak bulmuştur. Sözlerine “Ya, burada (kastettiği: “II.’de”) 36 şey dokumuş. Bu da 34,5 olduğuna göre; direkt I’i eyleyim.” (2. öğrenci – 2. görüşme) şeklinde devam etmiş ve tabloda I. satırın üzerini çizmiştir. 2. öğrenci, III. ve IV. makineler için de benzer şekilde doğru orantı kurmuştur. III. makine için, $x = \frac{76 \cdot 30}{70}$ işlemini yazmış ve “32’li bir cevap çıktığı için; hiç uğraşmayayım diyorum. 32; bu da gider. ” (2. öğrenci – 2. görüşme) diyerek, tabloda III. satırın da üzerini çizmiştir. Benzer işlemleri IV. makine için de yapan 2. öğrenci; buradan da x in değerini 33 bulmuş ve 36 ile kıyaslayarak, bunu da elemiştir. “Demek ki; en büyük... bu da (kastettiği: “IV. makine”) elendiğine göre, en büyük II. II. makine.” (2. öğrenci – 2. görüşme) diyen 2. öğrenci; diğer üç şıkkı eleme sonucunda, doğru cevap şıkkına ulaşmıştır.

3. öğrenci de, “Ya, hepsini 10 dakikada yapsak. 10’un katı, ne de olsa.” (3. öğrenci – 2. görüşme) yorumuyla çözüme başlamıştır. I. makine için, “Şimdi bu 40 dakika, 10 dakika olursa; bunu da 4’e bölmemiz gerekir, 46’yı.” (3. öğrenci – 2. görüşme) diyen öğrenci; bölme işlemini zihinden yapmış ve bulduğu 11,5 sonucunu, tabloda 46’nın yanına yazmıştır. Benzer düşünceyle yaptığı bölme işlemlerinin sonucunda; II. makine için 12, III. makine için 10,8 ve IV. makine için 11 değerlerini elde etmiştir. Kağıt üzerinde hiçbir işlem yapmamış olan 3. öğrenci; elde ettiği bu ondalık kesirleri zihinden karşılaştırmış ve “Hım, en çok dokuyan burada II. 12 metrekare.” (3. öğrenci – 2. görüşme) diyerek, kısa sürede doğru cevaba ulaşmıştır (Şekil 4.31).

7)

Tablo: Makinelerin Dokuduğu Kumaş Miktarları

Makine numaraları	Süre (dakika)	Kumaş miktarı (metrekare)
I.	40 ¹⁰	46 ^{11,5}
II.	30 ¹⁰	36 ¹²
III.	70 ¹⁰	76 ^{10,8}
IV.	60 ¹⁰	66 ¹¹

Dört farklı makinenin, aynı tür kumaşı belirli sürelerde ne kadar dokudukları tabloda verilmiştir. Tabloya göre, aynı sürede en çok kumaş dokuyan makine hangisidir?

A) I B) II C) III D) IV

Şekil 4.31

3. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

2. öğrenciye, orantı kurarken her makine için süreyi 30 dakikaya eşitlemeye çalışmasının özel bir sebebinin olup olmadığı sorulmuştur. 2. öğrenci, “Yani çünkü ‘aynı sürede’ diyor. ‘Aynı sürede’ dediği için. Ya, her neyse! 70’de de eşitlenirdi.” (2. öğrenci – 2. görüşme) doğru yanıtını vermiştir. Benzer şekilde, fakat her makine için süreyi 10 dakikaya eşitleyerek çözüm yapan 3. öğrenci ile araştırmacı arasında ise, aşağıdaki diyalog geçmiştir:

Görüşmeci: Hani 10 dakika değil, başka bir dakika da alabilir miydin?

Öğrenci: Alabilirdim.

Görüşmeci: Sonuç değişmez mi?

Öğrenci: Değişmez. Yani ne de olsa... Yani büyük olan, yani 10 dakikada fazla dokuyan; daha fazla olanda da fazla dokur.

....

Görüşmeci: Yani hani ilk aklına gelen ... neden 10 oldu?

Öğrenci: Yani, hım. İlk gözüme çarpan 10’un katı olduklarıydı. (3. öğrenci – 2. görüşme)

Buradan; hem 2. hem de 3. öğrencinin, aynı sürede en çok kumaş dokuyan makineyi bulabilmek için, bütün makinelerin sürelerinin eşitlenmesi gerektiğinin farkında oldukları rahatlıkla söylenebilir.

2. ve 3. öğrencinin, problemi çözme süreçleri özetlenecek olursa; her iki öğrenci de, “bütün makineler için süreleri eşitleme” şeklinde benzer bir mantık yürüterek çözüme başlamıştır. 2. öğrenci, süreleri –tabloda II. makine için verilmiş süre olan– 30 dakikada eşitlerken; 3. öğrenci, her bir makinenin dokuduğu kumaş miktarını 10 dakikaya göre hesaplamıştır. Merkezi kavram olarak; 2. öğrenci, “doğru orantı” kavramını kullanmıştır. 3. öğrenci ise, –çözüm için 2. öğrencininkine benzer bir mantık yürütse de– çözüm esnasında hiçbir kavram isminden bahsetmemiş ve problemi, bölme işlemini kullanarak çözmüştür. Sonuçta; her iki öğrenci de, doğru çözüm yolları takip etmiş ve doğru cevabı bulmuştur.

Araştırmacı, 1. öğrencinin söylediği “*Virgülden sonra ne kadar çok sayı varsa; sayı o kadar küçük oluyor.*” (1. öğrenci – 2. görüşme) ifadesini doğru anlayıp anlamadığını netleştirmek istemiş ve bu amaçla, öğrenci ile arasında aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Görüşmeci: Peki, az önce bir şey söyledin: Hani “Virgülden sonra kaç sayı varsa; o daha...”

Öğrenci: Küçük oluyor.

Görüşmeci: Daha küçük oluyor. Mesela burada “1,2305” deseydi; o daha mı küçük olacaktı?

Öğrenci: Evet.

Görüşmeci: Onun için direkt eledin mi? 1,105 ile 1,080’i onun için direkt mi eledin?

Öğrenci: Evet.

Görüşmeci: Hani hiç sayı değerinin önemi yok mudur?

Öğrenci: (3 sn. sessizlik) Ya, tamam, ona bakalım. Ama şimdi burada 2 var. 2’ye göre yola çıktım.

Görüşmeci: Hım. Peki, “1 virgül iki bin... dediğim gibi, üç yüz sekiz” (yani “1,2308”) olsaydı?

Öğrenci: O zaman diğerlerini de... mesela $\frac{76}{70}$ ’ın hepsini hesaplamam gerekecekti.

Görüşmeci: Hım. Peki. Direkt ona göre karar verdik yani.

Öğrenci: Evet. (1. öğrenci – 2. görüşme)

Bu konuşma; 1. öğrencinin ondalık kesirlerde sıralama ile ilgili bu (yanlış) yapılanmasının varlığını ve bu yanlış yapılanmasını problem çözümünde kullandığını doğrulamaktadır.

Problemin $\frac{\text{Süre}}{\text{Kumaş miktarı}}$ oranından yararlanılarak da çözülebileceğini ifade

etmiş olan 1. öğrenci ile araştırmacı arasında şöyle bir konuşma geçmiştir:

Görüşmeci: Peki, hani dedin ya az önce: “‘Süre’ bölü ‘kumaş miktarı’ da yapabilirdik; ama zor olurdu.”

Öğrenci: Evet.

Görüşmeci: Öyle yapsaydık; onda neye göre karar verecektik?

Öğrenci: Orada kesirlerin sıfır ya da 1’e yakınlığına göre. (1. öğrenci – 2. görüşme)

Bu konuşmanın devamında; 1. öğrenci, bu problemi, $\frac{\text{Süre}}{\text{Kumaş miktarı}}$ oranından yararlanarak da çözmek istemiştir. İlk önce her bir makine için $\frac{\text{Süre}}{\text{Kumaş miktarı}}$ oranını rasyonel sayı olarak yazmış ve sadeleştirme özelliğinden yararlanarak, bu rasyonel sayıların eşdeğerlerini $\frac{20}{23}$, $\frac{15}{18}$, $\frac{35}{38}$ ve $\frac{10}{11}$ olarak yazmıştır. Daha sonra, 1. öğrencinin çözüm süreci, aşağıdaki diyalogla devam etmiştir:

Öğrenci: Şimdi, paydası en küçük olan en büyüktür. Buradan “Denizli” *(kastedtiği: “D şıkkı”)* buluyoruz; nasıl oldu?

Görüşmeci: *(4 sn. sessizlik)* Yani onda da en büyük sayıya göre mi yine karar verirdin?

Öğrenci: Hayır, burada kuralı şey: Paydası en küçük olan sayı, en büyüktür. Çünkü en az... yani ayrılan parçalar daha büyüktür.

Görüşmeci: Yok, ıı; benim demek istediğim: ... Bu kesirlerde hangisinin doğru şık olduğuna nereden karar verirdin?

Öğrenci: İşte, paydası en küçük olan sayı, en büyüktür.

Görüşmeci: Ha, yani yine en büyük sayıyı arıyorsun sen.

Öğrenci: Evet.

Görüşmeci: İstersen süreyi kumaş miktarına böl; ister kumaş miktarını süreye böl; ikisinde de, en büyük sayıyı mı arıyoruz?

Öğrenci: *(3 sn. sessizlik)* Evet. (1. öğrenci – 2. görüşme)

1. öğrenci, rasyonel sayıları sadeleştirip, eşdeğerlerini yazdıktan sonra; rasyonel sayılarda sıralamayı kullanarak, en büyük rasyonel sayıyı bulmaya çalışmıştır. Bu süreçte, “Paydası en küçük olan sayı, en büyüktür.” ifadesini dile getirmiş ve kullanmış; ancak sözünü ettiği bu kuralın, payı eşit olan pozitif rasyonel sayılar için geçerli olduğu koşulunu göz ardı etmiştir. Ayrıca, $\frac{\text{Kumaş miktarı}}{\text{Süre}}$ formülünü kullandığında da, $\frac{\text{Süre}}{\text{Kumaş miktarı}}$ formülünü kullandığında da; çözüm için en büyük rasyonel sayıyı bulmaya çalışmıştır. Bu ise; 1. öğrencinin, pay ve paydadaki değerler yer değiştirdiğinde, sıralamanın tersine dönmesi gerektiğinin farkında olmadığının bir göstergesi olarak düşünülebilir.

Özetle; 1. öğrenci, ilk başta $\frac{\text{Kumaş miktarı}}{\text{Süre}}$ formülünü kullandığı çözüm sürecinde, işlem hatası yapmış olmasına ve ondalık kesirlerde sıralama ile ilgili olarak yapılanmış olan yanlış bilgileri kullanmış olmasına rağmen; sonuç olarak –tesadüfen de olsa– doğru cevap şikkına ulaşmıştır. Fakat ikinci yol olarak, $\frac{\text{Süre}}{\text{Kumaş miktarı}}$ formülünü kullandığında; bu kez, farklı (*yanlış*) bir sonuç bulmuştur. Ulaşmış olduğu bu iki şık (B ve D şıkları) arasında kararsız kalan 1. öğrenci; hangisinin doğru şık olduğuna karar verememiştir.

Araştırmacı, 1. öğrencinin zihnindeki “sıralama” ile ilgili yapılanmayı sayısal bir örnek üzerinde daha görmek istemiştir. Bu amaçla; alt alta 1,0123–1,21387–1,2–1,23 ondalık kesirlerini yazmış ve “*Bunlardan, bu yazdığım dört sayıdan, hangisi en büyüktür?*” sorusunu yöneltmiştir. 1. öğrenci, ondalık kesirlerin ondalık kısımlarını rasyonel sayıya çevirerek; kağıda $\frac{2}{10}$, $\frac{23}{100}$, $\frac{123}{10000}$, $\frac{21387}{100000}$ yazmış ve “*Şimdi, 1,2 en büyüktür; çünkü paydası en küçük olan o.*” (1. öğrenci – 2. görüşme) cevabını vermiştir (Şekil 4.32). 1. öğrencinin “sıralama” ile ilgili olarak yapmış olduğu bu akıl yürütme; öğrencide ondalık kesirler için “*Virgülden sonra ne kadar çok sayı varsa; sayı o kadar küçük oluyor.*” şeklindeki yanlış yapılanmanın kaynağı ile ilgili ipuçları vermektedir. Ondalık kesirlerde sıralama ile ilgili olarak öğrencinin zihninde yapılanmış olan bu yanlış bilginin; rasyonel sayılarda sıralama ile ilgili olarak yapılandırmış olduğu “*Paydası en küçük olan sayı, en büyüktür.*” şeklindeki eksik bilgidен kaynaklanmış olabileceği düşüncesini akla getirmiştir.

7)

Tablo: Makinelerin Dokuduğu Kumaş Miktarları

Makine numaraları	Süre (dakika)	Kumaş miktarı (metrekare)
I.	40	46
II.	30	36
III.	70	76
IV.	60	66

Dört farklı makinenin, aynı tür kumaşı belirli sürelerde ne kadar dokudukları tabloda verilmiştir. Tabloya göre, aynı sürede en çok kumaş dokuyan makine hangisidir?

~~A) I~~ ~~B) II~~ ~~C) III~~ D) IV
 $\frac{46}{40} = 1,15$ $\frac{36}{30} = 1,2$ $\frac{76}{70} = 1,085$ $\frac{66}{60} = 1,1$

$\frac{40}{46} = \frac{20}{23}$ $\frac{30}{36} = \frac{15}{18}$
 $\frac{70}{76} = \frac{35}{38}$ $\frac{60}{66} = \frac{30}{33} = \frac{10}{11}$

$1,0123$ $\frac{100}{10000}$
 $1,21387$ $\frac{21387}{100000}$
 $\frac{12}{100}$ $\frac{2}{10}$
 $1,23$ $\frac{23}{100}$

Şekil 4.32

1. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

4.9.1.5. İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, 2. görüşmedeki “sözel problemler” ile ilgili problemi çözme sürecinde; çözüm yolunu / problemin içinde yer alan merkezi kavramları belirlemeleri, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları, kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili elde edilmiş kategoriler bir araya getirilerek; her bir öğrencinin, problemi çözme süreci Tablo 4.47’de özetlenmiş ve Şekil 4.33’de de eksenler üzerinde gösterilmiştir.

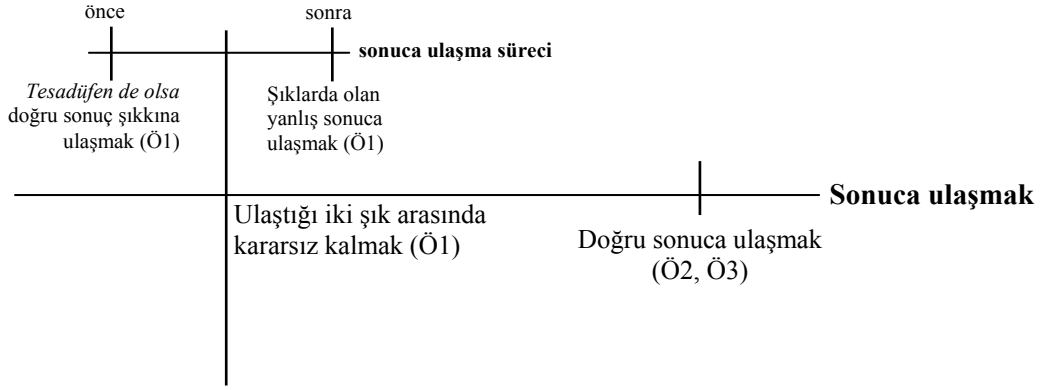
Tablo 4.47
İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi
Çözme Süreçlerinin Özeti

Öğrenci no	Merkezi kavramları belirlemek	Merkezi kavramlarla ilgili anlayışları	Kullandıkları kavramlar–işlemler	Kategoriler (Kavram–işlem kullanımı)	Kategoriler (Sonuca ulaşmak)	
1	Uygun kavramı belirlemek	Oran (eksik tanımlamak) Rasyonel sayı (tanımlayamamak)	Oran ($\frac{\text{Kumaş miktarı}}{\text{Süre}}$) Rasyonel sayı	Uygun kavramları doğru şekilde kullanmak	Tesadüfen de olsa doğru sonuca ulaşmak	Doğru şık konusunda kararsız kalmak
			Bölme işlemi Rasyonel sayının ondalık açılımı	İşlem hatası yapmak		
			Ondalık kesir Ondalık kesirlerde sıralama	Uygun kavramları yanlış şekilde kullanmak (yanlış yapılmış bilgiler)		
			Oran ($\frac{\text{Süre}}{\text{Kumaş miktarı}}$) Rasyonel sayı Sadeleştirme özelliği	Uygun kavramları/ özelliği doğru şekilde kullanmak	Şıklarda olan yanlış sonuca ulaşmak	
			Rasyonel sayılarda sıralama	Uygun kavramı yanlış şekilde kullanmak		
2	Uygun kavramı belirlemek	Oran (doğru açıklamak) Orantı (tanımlayamamak) Rasyonel sayı (eksik tanımlamak)	Doğru orantı Sadeleştirme özelliği Çarpma ve bölme işlemi Ondalık kesirlerde sıralama	Uygun kavramları/ işlemleri/ özelliği doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak	
3	Hiçbir kavramdan isim olarak bahsetmeden doğru çözüm yolunu belirlemek	bahsetmemek	Bölme işlemi Ondalık kesirlerde sıralama	Uygun kavramları/ işlemleri doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak	

		(Ö1)	(Ö2)	
	hemen (Ö3)	kısa süre	bir süre düşündükten sonra	kavramı belirleme süresi
Çözüm yolunu belirlemek	doğru çözüm yolunu belirlemek (Ö3)	oran	doğru orantı	belirlenen kavramlar
	Hiçbir kavramdan isim olarak bahsetmemek (Ö3)		Uygun kavramı belirlemek	Merkezi kavramları belirlemek

açıklamak (örnek yardımıyla)				
(Ö2)	doğru		eksik	
tanımlamak (Ö1)	eksik	orantı	tanımlamak (Ö2)	
	oran	doğru orantı (eksik açıklamak)	rasyonel sayı	Merkezi kavramlar
		(Ö2)	tanımlayamamak (Ö1)	ondalık kesir
	bahsetmemek (Ö3)	tanımlayamamak (Ö2)	bahsetmemek (Ö3)	
anlayış		bahsetmemek (Ö1, Ö3)	anlayış	anlayış

İşlem hatası yapmak (Ö1)	Yanlış yapılanmış bilgilere sahip olmak (Ö1)	Bütün kavramlar/işlemler/özellik (Ö2)	
	yanlış kullanma nedenleri		
	Yanlış şekilde kullanmak (Ö1)	Doğru şekilde kullanmak	Kavram-İşlem kullanımı
	birçok kez (Ö1)	Bazı kavramlar/özellik (Ö1)	
		Hiçbir kavramdan isim olarak bahsetmemek (Ö3)	
		'bölme işlemi'ni kullanmak (Ö3)	



Şekil 4.33

*İlköğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi
Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması*

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, 2. görüşmedeki “sözel problemler” ile ilgili problemi çözme süreçleri özetlenecek olursa; öğrencilerin, öncelikle, problemin nasıl çözüleceğini / problemin içinde yer alan merkezi kavramları belirleyebilmeleri gerekmiştir. 1. öğrenci; çözümde kullanılabilecek uygun kavramı (“oran” kavramı) –dokuz saniye gibi kısa bir süre içerisinde– belirleyebilmiştir. 2. öğrenci de, çözüm için uygun başka bir kavram olan “doğru orantı” kavramını belirlemiş; ancak belirleme süreci, 1. öğrenciye göre biraz daha uzun (17 saniye) sürmüştür. 3. öğrenci ise, hiçbir kavramdan isim olarak bahsetmemiştir; fakat problem ifadesini okuduktan hemen sonra, makinelerin hepsinin ortak bir sürede eşitlenebileceğini söyleyerek, çözüm yolunu doğru biçimde belirlemiştir.

Bu soruda; katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, “oran”, “orantı”, “rasyonel sayı” ve “ondalık kesir” kavramlarıyla ilgili anlayışları incelenmiştir. Sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir. Katılımcı öğrencilerden hiçbiri, bu problemi çözme sürecinde, “ondalık kesir” kavramından isim olarak bahsetmemiş; bu nedenle, öğrencilerin bu kavramla ilgili düşünceleri irdelenmemiştir. 3. öğrenci, çözüm sürecinde “oran” ve “orantı” kavramlarından isim olarak hiç bahsetmediğinden; öğrencinin bu kavramlarla ilgili düşünceleri sorgulanamamış ve dolayısıyla ortaya çıkarılamamıştır. “Oran” kavramı için, 1. öğrenci, –tam doğru ifade kullanamasa da– bir tanım yapmıştır. Ancak “oran” kavramında asıl önemli olan “bölme yoluyla karşılaştırma”dan bahsetmeyerek, “ortaya çıkan sonuç” ifadesini kullandığı için; 1. öğrencinin “oran” tanımı “eksik tanım” olarak değerlendirilmiştir. 2. öğrenci ise; ifade etmekte biraz zorlansa da, örnek üzerinden “oran” kavramını açıklayabilmiştir. Bu soruda, “orantı” kavramından sadece 2. öğrenci bahsetmiştir; fakat ne anlama geldiğini açıklayamamıştır. Burada “doğru orantı” kuracağını söyleyen 2. öğrenci, “doğru orantı” kavramı için yaptığı açıklamada, “aynı oranda (artan/azalan)” ifadesi yerine “aynı miktarda” ifadesini kullandığı için; 2. öğrencinin bu açıklaması, “eksik açıklama” şeklinde değerlendirilmiştir. 1. ve 2. öğrencinin “rasyonel sayı” kavramı ile ilgili –başka bir problemde ortaya çıkarılmış olan– anlayışlarından kısaca bahsedilecek olursa; 1. öğrenci, kavram için herhangi bir tanımlama yapamazken; 2. öğrenci,

tanımında, pay ve paydadaki sayıların tamsayı olması gerektiğini dile getirmediğinden, yapmış olduğu tanım “eksik tanım” olarak değerlendirilmiştir. 3. öğrenci ise; bu problemde, “rasyonel sayı” kavramından bahsetmemiş ve bu kavramı çözümde kullanmamıştır.

Problemi çözme sürecinde; öğrencilerin üçü de, genelde farklı kavramları kullanmışlardır. Merkezi kavram olarak; 1. öğrenci, “oran”; 2. öğrenci, “doğru orantı” kavramından yararlanmıştır. 3. öğrenci de, çözüm için –“bütün makineler için süreleri eşitleme” şeklinde– 2. öğrencinininkine benzer bir mantık yürütmüş; fakat çözüm esnasında hiçbir kavram isminden bahsetmemiş ve problemi, bölme işlemini kullanarak çözmüştür. 2. ve 3. öğrenci, doğru çözüm yolları takip etmiş ve doğru cevabı bulmuşlardır. 1. öğrenci ise; ilk önce, $(\text{Kumaş miktarı})/(\text{Süre})$ oranını kullanarak problemi çözmüştür. Bu süreçte, bölme sırasında işlem hatası yapmış olmasına, “ondalık kesirlerde sıralama” ile ilgili yanlış yapılanmış bilgileri olmasına ve bu yanlış bilgilerini kullanmasına rağmen; sonuç olarak –tesadüfen de olsa– doğru cevap şikkına ulaşmıştır. Fakat daha sonra, ikinci yol olarak, $\text{Süre}/(\text{Kumaş miktarı})$ oranını kullanmış ve bu kez, farklı (yanlış) bir sonuç bulmuştur. Ulaşmış olduğu bu iki şık (B ve D şıkları) arasında kararsız kalan 1. öğrenci; hangisinin doğru şık olduğuna karar verememiştir.

Bu problemi çözme bağlamında; 1. öğrencinin, “ondalık kesirlerde sıralama” ve “rasyonel sayılarda sıralama” konularında yanlış yapılanmalarının olduğu ve bu yanlış yapılanmaları, problem çözümünde kullandığı tespit edilmiştir. “Ondalık kesirlerde sıralama” ile ilgili olarak, öğrencide var olduğu tespit edilmiş olan yanlış yapılanmalar; “Virgülden sonra ne kadar çok sayı varsa; sayı o kadar küçük oluyor.” şeklindedir. “Rasyonel sayılarda sıralama” ile ilgili olarak ise, “Paydası en küçük olan sayı, en büyüktür.” ifadesini dile getirmiş ve kullanmış; ancak sözünü ettiği bu kuralın, payı eşit olan pozitif rasyonel sayılar için geçerli olduğu koşulunu göz ardı etmiştir. “Ondalık kesirlerde sıralama” ile ilgili olarak, 1. öğrencide var olan “Virgülden sonra ne kadar çok sayı varsa; sayı o kadar küçük oluyor.” şeklindeki yanlış yapılanmanın kaynağının; “rasyonel sayılarda sıralama” ile ilgili olarak yapılandırmış olduğu “Paydası en küçük olan sayı, en büyüktür.” şeklindeki eksik bilgi olabileceğine dair birtakım veriler de elde edilmiştir. Ayrıca, $(\text{Kumaş miktarı})/(\text{Süre})$ formülünü kullandığında da, $\text{Süre}/(\text{Kumaş miktarı})$ formülünü kullandığında da; çözüm için en büyük rasyonel sayıyı bulmaya çalışmıştır. Bu ise; 1. öğrencinin, pay ve paydadaki değerler yer

değiştirdiğinde, sıralamanın tersine dönmesi gerektiğinin farkına varmadığını ya da farkında olmadığını göstermektedir.

4.9.2. İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

“Sözel problemler” ile ilgili diğer bir soru, “2009 yılı 8. sınıf Seviye Belirleme Sınavı (SBS) soruları” arasından seçilmiştir ve katılımcı ilköğretim öğrencilerine, 26 Mayıs–2 Haziran 2010 tarihleri arasında yapılmış olan 4. görüşmelerde sorulmuştur. Bu soru, –kazanımlar açısından– 8. sınıf matematik öğretim programındaki “cebir” öğrenme alanının “denklemler” alt öğrenme alanında yer alan iki kazanımla uyumludur (Tablo 4.48).

Tablo 4.48
İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar

4. GÖRÜŞME / 8. SORU	KAZANIMLAR
Bir pastanede bir günde satılan börek ve poğaçaların toplam sayısı 144 ve bu satıştan elde edilen gelir 88 TL’dir. Börek 50 Kr, poğaçaya 75 Kr olduğuna göre kaç adet poğaçaya satılmıştır? A) 80 B) 64 C) 58 D) 44 (2009 SBS – 8. SINIF – 17. SORU) (Cevap: B)	3. Bir bilinmeyenli rasyonel denklemleri çözer.
	4. Doğrusal denklem sistemlerini cebirsel yöntemlerle çözer.

Tablo 4.49

İlköğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar

İrdelenecek Matematiksel Kavram Listesi	Matematiksel Kavram
TL (Lira)	Türk para birimi
Kr (Kuruş)	Türk para birimi
(İki bilinmeyenli) denklem	Matematiksel kavram
Bilinmeyen	Matematiksel kavram

4.9.2.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi

Börek sayısı b ve poğaçaya sayısı p harfi ile gösterilecek olursa;

$$b + p = 144 \Rightarrow b = 144 - p$$

ve

$$50 \cdot b + 75 \cdot p = 8800 \quad (1 \text{ TL} = 100 \text{ Kr olduğundan})$$

eşitlikleri yazılabilir. b yerine $144 - p$ yazılacak olursa;

$$50 \cdot (144 - p) + 75 \cdot p = 8800$$

$$7200 - 50p + 75p = 8800$$

$$25p = 1600$$

$$p = 64$$

eşitliğine ulaşılır. O halde 64 adet poğaçaya satılmıştır.

Bu problemin çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezdeki kavramlar düşünülerek; katılımcı ilköğretim öğrencilerinin “TL (lira)”, “Kr (kuruş)” ve “denklem” kavramlarıyla ilgili düşüncelerinin ortaya çıkarılmak amacıyla sorgulanması amaçlanmıştır (Tablo 4.49). Ancak sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir.

4.9.2.2. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Bu bölümde; ilköğretim öğrencilerinin, –bu problemi çözme sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlar olan– “TL (lira)”, “Kr (kuruş)” ve “denklem” kavramlarıyla ilgili yapmış oldukları açıklamalara yer verilecektir.

4.9.2.2.1. İlköğretim öğrencilerinin, “TL (lira)” ve “Kr (kuruş)” kavramları ile ilgili anlayışları. “TL (lira)” ve “Kr (kuruş)” kavramları ile ilgili olarak, öğrencilere “1 TL’nin kaç Kr olduğu” sorusu yöneltilmiştir. Matematik başarı düzeyi “orta” olan 1 no’lu öğrenci, “100 kuruş. (3 sn. sessizlik) Değil, 10 kuruş.” (1. öğrenci – 4. görüşme) diyerek, yanlış cevap vermiş ve –bu cevabına paralel olarak– çözümünde de lirayı kuruşa yanlış şekilde çevirmiştir. Matematik başarı düzeyi “iyi” olan 2. öğrenci ve matematik başarı düzeyi “çok iyi” olan 3. öğrenci ise, “100 (kuruş)” diyerek, doğru cevabı vermiştir. Buradan da; 2. ve 3. öğrencinin, “TL (lira)” ve “Kr (kuruş)” kavramlarını bildiği; 1. öğrencinin ise, TL-Kr arasındaki ilişkiyi tam olarak bilmediği yargısına varılmıştır. Bu nedenle; 1. öğrencinin “TL (lira)” bilgisi “eksik bilgi”, “Kr (kuruş)” bilgisi ise “yanlış bilgi” olarak değerlendirilmiştir.

4.9.2.2.2. İlköğretim öğrencilerinin, “denklem” kavramı ile ilgili anlayışları. 2. öğrenci; problemi, denklem kurma–denklem çözme yoluyla çözmediğinden ve çözüm sürecinde “denklem” kavramından hiç bahsetmediğinden; öğrencinin “denklem” kavramı ile ilgili düşünceleri sorgulanmamıştır.

Problemi çözme sürecinde “denklem kurma–denklem çözme” işlemlerinden yararlanan 1. ve 3. öğrencinin “denklem” kavramı ile ilgili anlayışları; daha ziyade, bir önceki görüşmede (2. görüşme), “özdeşlik–denklem ilişkisi” üzerine konuşulurken ortaya çıkarılmıştır. “Özdeşlik–denklem ilişkisi” bağlamında, araştırmacı ile öğrenciler arasında geçen konuşmalar şöyledir:

(1. öğrencinin, 2. görüşmedeki bir problemin çözümünde $(a - 6)^2 = a^2 - 12a + 36$ eşitliğini elde etmesinin ardından:)

Görüşmeci: Peki, biz bu eşitliklere bir şey söylüyor muyuz? Bir adı var mıydı onun?

Öğrenci: Özdeşlikler.

Görüşmeci: Özdeşlik. Çok güzel. Peki, “özdeşlik” ve “denklem” farkını biliyor muyuz, Meltem?

Öğrenci: Özdeşlikte; “eşittir”in sağ tarafı, sol tarafını sağlıyordu. Fakat denklemde, sağlamayabiliyordu.

Görüşmeci: Nasıl yani? ... Ama “eşittir” koyuyoruz, ikisinde de.

Öğrenci: Ama orada n değeri vardır. Bilinmeyen değer veya buna x değeri de denebiliyor.

Görüşmeci: Tamam.

Öğrenci: Özdeşlikte; bu iki ... yani x in yerine hangi sayıyı koyarsak koyalım; sağ tarafı sağlayabiliyordu. Fakat, ııı (*düşünüyor*), denklemde; x yerine, herhangi bir sayıyı koyamıyorduk.

Görüşmeci: Hımm.

Öğrenci: Belirli bir sayısının olması gerekiyordu. (1. öğrenci – 2. görüşme – 5. soru)

(3. öğrencinin, 2. görüşmedeki bir problemin çözümünde $(a - 6)^2 = a^2 - 12a + 36$ eşitliğini elde etmesinin ardından:)

Görüşmeci: Peki, şimdi sen buraya bir eşitlik yazdın. Bu bir eşitlik, değil mi?

Öğrenci: Evet.

Görüşmeci: O zaman sol tarafı ile bu eşitliğin, sağ tarafı eşit midir?

Öğrenci: Evet.

Görüşmeci: Peki, biz bu eşitliklere bir şey diyor muyduk? Özel bir adı var mı?

Öğrenci: Özdeşlik miydi?

Görüşmeci: Neydi “özdeşlik”? Nedir “özdeşlik”?

Öğrenci: İki taraf, eşit oluyor. Yani bir eşitlikte yani böyle sağ ve sol taraf, eşitliğin iki tarafı da eşit.

Görüşmeci: Eşit oluyor. Bir de “denklem” var mesela. Denklem de bir eşitlik değil mi?

Öğrenci: Evet.

Görüşmeci: Ne farkı var acaba denklemle özdeşliğin?

Öğrenci: Hımm. (3 sn. sessizlik) Özdeşlikte a ya her sayıyı verebiliyorsunuz. Ama denklemde tek bir, yani sayı verebiliyorsunuz.

Görüşmeci: Hımm. Bazen iki de olamaz mı denklemde?

Öğrenci: Nasıl?

Görüşmeci: İki sayıyı da karşılayamaz mı? Hani “tek” dedin ya denklemde. Birden fazla da olabilir mi?

Öğrenci: ıı (*“Hayır” anlamında*). (3. öğrenci – 2. görüşme – 5. soru)

Görüşmeci: “Denklem”den kastettiğin ne, “denklem” derken?

Öğrenci: ıııı (*düşünüyor*), içinde böyle bilinmeyen sayılar olan eşitlik. (3. öğrenci – 4. görüşme)

Kısacası; 1. öğrencinin, denklem-özdeşlik farkını bildiği ve denklemdeki eşitliğin, bilinmeyen için sağlandığını ifade ederek, denklemi doğru biçimde açıklayabildiği söylenebilir. 3. öğrenci ise, 4. görüşmede “denklem” kavramı için bir tanımlama yapmış; ancak burada bahsettiği eşitliğin, bilinmeyen için

sağlanması gerektiğini belirtmediğinden, tanımı “eksik tanım” olarak kabul edilmiştir. Ayrıca 3. öğrenci, 2. görüşmede denklem-özdeşlik farkını anlatırken; denklemdeki eşitliğin, bilinmeyen tek bir değeri için sağlandığını ifade etmiştir. Bu da, öğrencide “denklem” kavramı ile ilgili yanlış bir yapılanmanın olduğunun göstergesi olarak düşünülebilir.

İlköğretim öğrencilerinin, problem ifadesinde geçen veya çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlar ile ilgili yapmış oldukları tanım ve açıklamalar dikkate alınarak; öğrencilerin problemde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları Tablo 4.50’de listelenmeye çalışılmıştır.

Tablo 4.50

İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Kavramlar	Öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları		
	1. öğrenci	2. öğrenci	3. öğrenci
TL (Lira)	eksik bilmek	doğru bilmek	doğru bilmek
Kr (Kuruş)	yanlış bilmek	doğru bilmek	doğru bilmek
Denklem	doğru açıklamak		eksik tanımlamak

4.9.2.3. İlköğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları

1. öğrenci; problem ifadesini okuduktan sonra, problemde hoşlanmadığını belli eden bir ses tonuyla “İyyy!” demiş ve “Şimdi böreğe x , poğaçaya y dersek; $x + y = 144$ müş.” (1. öğrenci – 4. görüşme) ifadesini kullanarak, $x + y = 144$ şeklindeki iki bilinmeyenli denklemi doğru biçimde kurmuştur. 10 saniyelik bir sessizliğin ardından, “ x , 50 kuruş; y 75 kuruş. Yani $75x$ ile $50x$... Pardon! $50x$ ile $75y$; 144 ’e eşitmiş.” (1. öğrenci – 4. görüşme) diyerek; kağıda $50x + 75y = 144$ biçiminde (yanlış kurduğu) iki bilinmeyenli diğer denklemi yazmıştır. Bunun üzerine, araştırmacının “ ‘ 144 ’e eşit’

diyorsun. Aynı zamanda ' $x + y; 144$ 'e eşit' dedin." demesi üzerine; öğrenci, "Pardon! Bir yerde hata yaptım. (9 sn. sessizlik) Şöyle düzeltelim." (1. öğrenci – 4. görüşme) diyerek, $x + y = 144$ ve $50x + 75y = 144$ eşitliklerinin üzerlerini çizmiştir. Üzerlerini çizdiği denklemlerin yan tarafına " $x + y = 88$ TL" yazdıktan sonra; araştırmacı ile arasında aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Öğrenci: Kuruşa çevirirsek; 880 Kr mu oluyor?

Görüşmeci: Bir lira kaç kuruş; 1 TL?

Öğrenci: 100 kuruş. (3 sn. sessizlik) Değil, 10 kuruş. 880 Kr yapıyor. (7 sn. sessizlik) Şimdi, $50x + 75y = 880$ e eşitmiş. (7 sn. sessizlik) $x + y = 880$... (13 sn. sessizlik) Yok; ben bu soruyu yapamayacağım. (1. öğrenci – 4. görüşme)

TL–Kr ilişkisini yanlış bilen ya da karıştıran 1. öğrenci, lirayı kuruşa çevirme işlemini yanlış yapmış; ayrıca ilk başta doğru yazmış olduğu $x + y = 144$ denklemini de silerek, yerine $x + y = 880$ şeklindeki yanlış denklemi yazmıştır. 1. öğrenci, çözümüne devam edememiş ve bu problemi çözemeyeceğini belirterek, çözümünü yarım bırakmıştır (Şekil 4.34).

8)

Bir pastanede bir günde satılan börek ve poğaçaların toplam sayısı 144 ve bu satıştan elde edilen gelir 88 TL'dir. Börek 50 Kr, poğaçaya 75 Kr olduğuna göre kaç adet poğaçaya satılmıştır?

A) 80

B) 64

C) 58

D) 44

$$\begin{array}{l} \cancel{x+y=144} \quad \cancel{50x+75y=144} \\ x+y=88 \text{ TL} = 880 \text{ Kr} \\ 50x+75y=880 \\ x+y=880 \end{array}$$

Şekil 4.34

1. Öğrencinin, 4. Görüşmedeki "Sözel Problemler" ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

2. öğrencinin problem ifadesini okumasının ardından, öğrencinin çözümde kullanacağı strateji ile ilgili olarak, öğrenci ile araştırmacı arasında şöyle bir konuşma geçmiştir:

Öğrenci: Ben bu soruları deneyerek yapıyorum; çoğu zaman. Öyle bir, belirli bir şeyim yok.

Görüşmeci: Mesela şıklar verilmemiş olsaydı sana, klasik olsaydı bu; o zaman nasıl bir yol izledin?

Öğrenci: Ya hiç öyle... (3 sn. sessizlik) “Nasıl olurdu?”, hiç düşünmemiştim onu ama; öyle. Şey yapmıyorum mesela öyle hiç. Hep şıklar olduğu için.

Görüşmeci: Şıklar seni rahatlatıyor mu, şıkkın olması?

Öğrenci: Evet. Yani şık... zaten bizim SBS olacağı için; hep böyle şıklı gelir, yani şeylerde.

Görüşmeci: Hı hı.

Öğrenci: Var burada, hah! ... İşte hep öyle, hep şıklı. Bu sorular, hep böyle deneme yoluyla. Kendime yakın olan şıkkı deniyorum ilk baş. Yani mesela direkt sıfırı verecek bana, sıfır sonucu. Öyle, şeylerle uğraştırmayacak, mesela şimdi “4 kere 6” ya da 4 kere... öyle şeylerle, “elde var 3” falan değil de. Mesela “8 kere 5, 40” mesela. Öyle sıfırlı sayılarla uğraşıyorum. (2. öğrenci – 4. görüşme)

2. öğrencinin bu söylediklerinden; öğrencinin, bu tür soruları deneme–yanılma yoluyla şıkları sırayla deneyerek çözmeye çalıştığı; SBS sisteminden dolayı hep şıklı sorularla karşılaştığı için, deneme–yanılma yolu dışında başka çözüm yollarını düşünme ihtiyacını pek de duymamış olduğu anlaşılmaktadır. Araştırmacının tekrar “*Klasik sınavda olduğunu düşün! Nasıl bir şey yazardın kâğıda? Nasıl bir çözüm yapardın?*” demesi üzerine; 2. öğrenci, biraz daha düşünmüş; ancak yine

“Şimdi ben yani deneme yoluyla yapıyorum. Şıklı olduğu için, şıklardan gidiyorum hep. Yani hemen... işlem kolay. Hemen de yapıyorum zaten; işlemler de kolay oluyor.” (2. öğrenci – 4. görüşme)

şeklinde benzer şeyler söylemiştir. Araştırmacının “*Mesela şık vermeseydim; boş mu bırakırdın o zaman, bu soruyu?*” sorusuna karşılık; öğrencinin verdiği cevap ise, “*Ya belki 75 ile şeyin, 50’nin ekok’unu falan alırdım belki. Bilmiyorum. Oran mı alırım? Bilmiyorum ki.*” (2. öğrenci – 4. görüşme) olmuştur. Bu cevaptan da anlaşılacağı gibi; 2. öğrenci, şıkların verilmemesi durumunda, –tam emin olamasa da– çözümde “ekok” ya da “oran” kavramlarından yararlanabileceğini ifade ederek; problemle hiçbir ilgisi olmayan yanlış kavramlardan bahsetmiştir.

2. öğrenci, çözümüne, “*Mesela şimdi, A şıkkını deniyorum mesela hemen.*” (2. öğrenci – 4. görüşme) diyerek başlamıştır. A şıkkında verilen 80 sayısını, poğaça fiyatı

olan 75 ile çarpan 2. öğrenci, işlem hatası yaparak 600 sonucunu bulmuştur. “80 poğaça dediğimize göre; 144’den 80’i çıkarınca, 64 de şey olacak, börek.” (2. öğrenci – 4. görüşme) diyen 2. öğrenci, 64 sayısını da, börek fiyatı olan 50 ile çarparak, 3200 sayısını elde etmiştir. 2. öğrenci, bulduğu 600 ve 3200 sayılarını toplamış ve “Toplamda 3800 oluyor. Yani 38 TL oluyor. 38 TL vermedi mesela bizim. A şıkkı vermedi.” (2. öğrenci – 4. görüşme) diyerek A şıkkını elemiştir.

A şıkkını eledikten sonra, B şıkkına geçen 2. öğrenci; bu kez benzer işlemleri B şıkkı için yapmıştır. B şıkkında verilen 64 sayısını, poğaça fiyatı olan 75 ile çarpan 2. öğrenci; buradan 4800 sonucunu bulmuştur. 144’den 64’ü çıkararak bulduğu 80 sayısını (yani börek sayısı) da, börek fiyatı olan 50 ile çarpmış ve 4000 bulmuştur. “Sonra 4800 ile 4000 kuruşu toplayınca; 8800 kuruş, yani 88 TL oluyor. ... Bu B şıkkı veriyor.” (2. öğrenci – 4. görüşme) diyerek, doğru sonuca ulaşan 2. öğrenci; son olarak, “Bunları normalde... şu an uzun gibi geliyor ama; yani normalde böyle bir dakikamı falan alıyor, en fazla.” (2. öğrenci – 4. görüşme) demiştir (Şekil 4.35). Kısacası, 2. öğrenci; bu problemi denklem kurarak çözmek yerine, şıkları sırasıyla deneyerek ve doğal sayılarla işlemler yaparak çözmüş ve doğru sonuca ulaşmıştır. Bu tür problemleri, şıkları deneyerek çözdüğünü daha önce belirtmiş olan 2. öğrenci; bunları çözmesinin normalde 1 dakika gibi az bir zamanını aldığını da sözlerine eklemiştir.

2. öğrenci ile gerçekleştirilen tamamlayıcı görüşmede; öğrenci, yine bu problemin çözümüne dair farklı bir şey söyleyememiştir. Ayrıca “Bunu nasıl çözülür ki ya? Bunu bana... nasıl çözülüyor, bana gösterseniz hani.” (2. öğrenci – Tamamlayıcı görüşme) diyerek; araştırmacıdan, problemin –deneme-yanılma yöntemi dışında– nasıl çözülebileceğini göstermesini rica etmiştir.

8)

Bir pastanede bir günde satılan börek ve poğaçaların toplam sayısı 144 ve bu satıştan elde edilen gelir 88 TL'dir. Börek 50 Kr, poğaçaya 75 Kr olduğuna göre kaç adet poğaçaya satılmıştır?

A) 80

B) 64

C) 58

D) 44

Handwritten student work for problem 8. The work is divided into two parts, A and B, showing different algebraic approaches to solve the system of equations.

Part A:

$$\begin{aligned} x + y &= 144 \\ 50x + 75y &= 8800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 50x + 50y &= 7200 \\ \underline{25y} &= 1600 \\ y &= 64 \end{aligned}$$

Part B:

$$\begin{aligned} x + y &= 144 \\ 50x + 75y &= 8800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25x + 25y &= 3600 \\ \underline{25x + 75y} &= 8800 \\ -50y &= -5200 \\ y &= 104 \end{aligned}$$

The student has circled the answer 64 in part A.

Şekil 4.35

2. Öğrencinin, 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

3. öğrencinin problem ifadesini okuduktan sonra söylediği ilk cümle, “İki bilinmeyenli denklemler.” (3. öğrenci – 4. görüşme) olmuştur. Hemen çözüme başlayan öğrenci, kağıda $x + y = 144$ yazmış ve yazdığı bu denklem için, “Mesela x , şey olsun, börek. y de, poğaçaya. Yani bunların toplamı, 144.” (3. öğrenci – 4. görüşme) açıklamasını yapmıştır. Sonra da, “Yani mesela x tane börek, 50 kuruşa satıldığında; $50x$ para, yani fiyat. Bu da, $75y$ dir. Toplamı, yani 88 TL, yani 8800 kuruş.” (3. öğrenci – 4. görüşme) diyerek, kağıda $50x + 75y = 8800$ denklemini yazmıştır.

“Şimdi burada iki şey yapmamız gerekiyor, eşitlik. Yani yok edeceğiz birini. O zaman... burada x leri yok edebiliriz; nasıl olsa ‘poğaçaya’yı soruyor, y yi bulmamız gerekiyor. Bunu (kastettiği: $x + y = 144$), 50 ile genişletebiliriz.” (3. öğrenci – 4. görüşme)

diyen 3. öğrenci, $50x + 50y = 7200$ yazmış ve bu eşitliğin her iki tarafını da eksi ile çarpmıştır. Elde etmiş olduğu $-50x - 50y = -7200$ ve $50x + 75y = 8800$ denklemlerini taraf tarafa toplayan 3. öğrenci, $25y = 1600$ eşitliğine ulaşmıştır.

Eşitliğin her iki tarafını 25 sayısına bölen öğrenci, $y = 64$ doğru sonucunu elde etmiştir (Şekil 4.36).

Kısacası 3. öğrenci; bu problemi, iki bilinmeyenli denklem sistemini, yok etme yönteminden yararlanarak, kısa sürede çözmüştür. “Bu tür sorularda, genelde denklem kurmayı mı tercih ediyorsun?” diye soran araştırmacıya; 3. öğrencinin verdiği yanıt, “Yani bu seneye kadar, genelde şıkları deniyordum. ... Öğrenince ‘iki bilinmeyenli denklemler’i; daha kolay geldi.” (3. öğrenci – 4. görüşme) şeklinde olmuştur.

8)

Bir pastanede bir günde satılan börek ve poğaçaların toplam sayısı 144 ve bu satıştan elde edilen gelir 88 TL'dir. Börek 50 Kr, poğaça 75 Kr olduğuna göre kaç adet poğaça satılmıştır?

A) 80 (B) 64 C) 58 D) 44

$$\begin{array}{r}
 \text{Börek} \quad \text{Poğaça} \\
 50/x + y = 144 \\
 50x + 75y = 8800 \\
 -/ 50x + 50y = 7200 \\
 50x + 75y = 8800 \\
 \hline
 -50x - 50y = -7200 \\
 + 50x + 75y = 8800 \\
 \hline
 25y = 1600 \\
 y = 64
 \end{array}$$

Şekil 4.36

3. Öğrencinin, 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

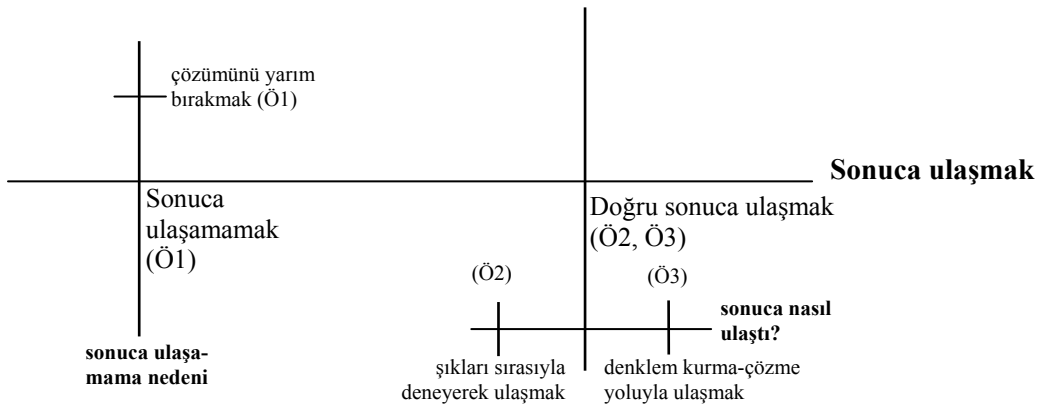
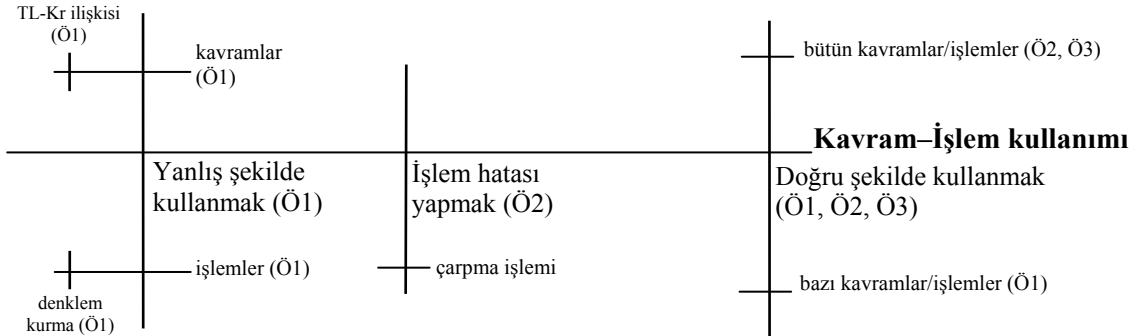
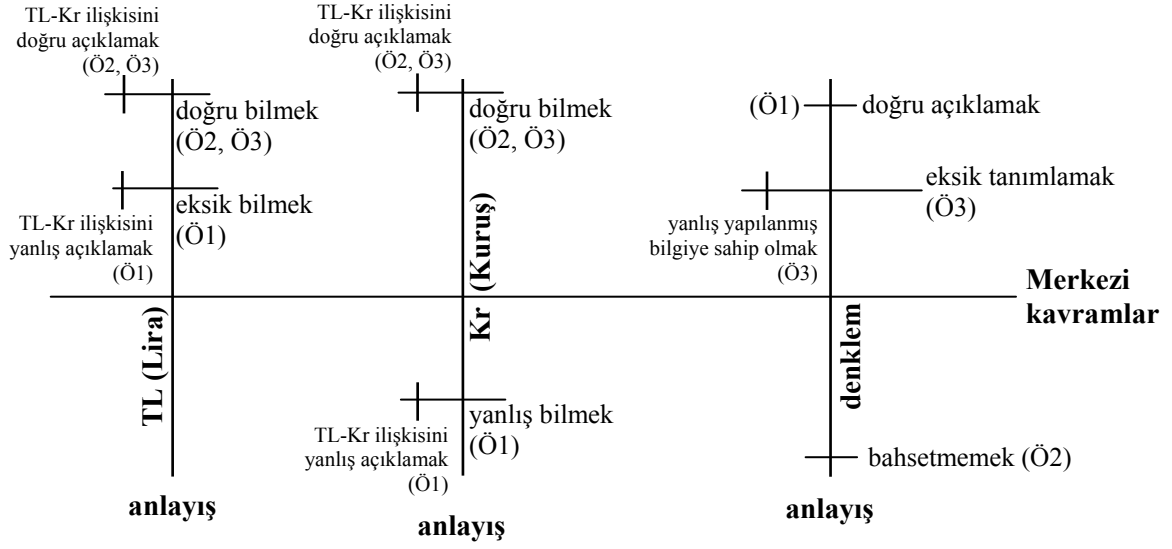
4.9.2.4. İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, 4. görüşmedeki “sözel problemler” ile ilgili problemi çözme sürecinde; problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları, kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları

ve sonuca ulaşmaları ile ilgili elde edilmiş kategoriler bir araya getirilerek; her bir öğrencinin, problemi çözme süreci Tablo 4.51’de özetlenmiş ve Şekil 4.37’de de eksenler üzerinde gösterilmiştir.

Tablo 4.51
İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Öğrenci no	Merkezi kavramlarla ilgili anlayışları	Kullandıkları kavramlar–işlemler	Kategoriler (Kavram–işlem kullanımı)	Kategoriler (Sonuca ulaşmak)
1	TL (Lira) (eksik bilmek) Kr (Kuruş) (yanlış bilmek) Denklem (doğru açıklamak)	Bilinmeyen İki bilinmeyenli denklem kurma işlemi	Uygun kavramı/ işlemi doğru şekilde kullanmak	Çözümünü yarım bırakarak, sonuca ulaşamamak
		İki bilinmeyenli denklem kurma işlemleri TL (Lira) Kr (Kuruş)	Uygun işlemleri/ kavramları yanlış şekilde kullanmak	
2	TL (Lira) (doğru bilmek) Kr (Kuruş) (doğru bilmek)	(Doğal sayılarda) çarpma işlemi	İşlem hatası yapmak	Şıkları sırasıyla deneme yoluyla, doğru sonuca ulaşmak
		Çıkarma işlemi Çarpma işlemi Toplama işlemi Kr (Kuruş) TL (Lira)	Uygun işlemleri/ kavramları doğru şekilde kullanmak	
3	TL (Lira) (doğru bilmek) Kr (Kuruş) (doğru bilmek) Denklem (eksik tanımlamak)	Bilinmeyen İki bilinmeyenli denklem kurma işlemleri TL (Lira) Kr (Kuruş) İki bilinmeyenli denklem sistemini çözme işlemi Cebirsel ifadelerle işlemler	Uygun kavramları/ işlemleri doğru şekilde kullanmak	Kısa sürede doğru sonuca ulaşmak



Şekil 4.37

İlköğretim Öğrencilerinin, 4. Görüşmedeki “Sözel Problemler” ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, 4. görüşmedeki “sözel problemler” ile ilgili problemi çözme süreçleri özetlenecek olursa; bu soruda, ilköğretim öğrencilerinin, “TL (lira)”, “Kr (kuruş)” ve “denklem” kavramları ile ilgili düşüncelerinin sorgulanması amaçlanmıştır. Ancak sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir. 2. ve 3. öğrenci, TL’yi (lira) Kr’a (kuruş) doğru şekilde çevirirken; 1. öğrenci, yanlış çevirmiştir. Bu nedenle; 2. ve 3. öğrencinin, “TL (lira)” ve “Kr (kuruş)” kavramlarını bildiği; 1. öğrencinin ise, “TL (lira)” bilgisinin eksik, “Kr (kuruş)” bilgisinin de yanlış olduğu yargısına varılmıştır. 1. öğrenci, denklemdeki eşitliğin, bilinmeyen bazı değerleri için sağlandığını ifade ederek, “denklem” kavramını doğru biçimde açıklayabilmiştir. 3. öğrenci ise, yapmış olduğu “denklem” tanımında, eşitliğin, bilinmeyen bazı değerleri için sağlanması gerektiğini belirtmediğinden, tanımı “eksik tanım” olarak kabul edilmiştir. Ayrıca 3. öğrencinin, bir önceki görüşmede (2. görüşmede) denklem-özdeşlik farkını anlatırken, denklemdeki eşitliğin, bilinmeyen (sadece) tek bir değeri için sağlandığını ifade etmesi; öğrencide “denklem” kavramı ile ilgili yanlış bir yapılanmanın olduğu şeklinde değerlendirilmiştir. 2. öğrenci; problemi, denklem kurma–denklem çözme yoluyla çözmediğinden ve çözüm sürecinde “denklem” kavramından hiç bahsetmediğinden; öğrencinin “denklem” kavramı ile ilgili düşünceleri sorgulanamamıştır.

Tablo 4.51’den de görülebildiği gibi; 1. öğrenci, problemi çözme sürecinde, “bilinmeyen” kavramını da kullanarak, satılan toplam börek ve poğaça sayısını veren iki bilinmeyenli denklemi doğru biçimde kurmuştur. Satıştan elde edilen geliri gösteren iki bilinmeyenli denklemi yanlış yazan 1. öğrenci; hata yaptığını dile getirmiş ve az önce doğru yazmış olduğu toplam börek ve poğaça sayısını veren denklemi de silerek, yanlış olan başka iki denklem yazmıştır. 1. öğrenci; lirayı kuruşa çevirme işlemini de yanlış yapmış ve bu problemi çözemeyeceğini belirterek, çözümü burada bırakmıştır. 2. öğrenci ise; bu problemi denklem kurarak çözmek yerine, şıkları sırasıyla deneyerek ve bu süreçte doğal sayılarla işlemler yaparak çözmüştür. A şıkkını denemeye başlayan 2. öğrenci; çarpma işlemi sırasında işlem hatası yapmış ve hatasını fark etmeden devam etmiştir. A şıkkını eledikten sonra, B şıkkına geçmiş ve diğer iki şıkkı denemeye

gerek kalmadan, çözümünü bitirmiştir. 3. öğrenci ise; iki bilinmeyenli denklemler kurarak, denklem sistemini yok etme yöntemi ile çözerek ve bu sırada cebirsel ifadelerle doğru işlemler yaparak, çözümünü kısa sürede tamamlamıştır. Sonuçta; 1. öğrenci, çözümünü yarım bırakarak, sonuca ulaşamazken; 2. ve 3. öğrenci, doğru sonuca ulaşmışlardır. Ancak problemi, 3. öğrenci, denklem kurma ve çözme yoluyla kısa sürede çözerken; 2. öğrenci, denklem kurarak çözmek yerine, şıkları sırasıyla deneme yolunu takip etmiştir.

Ayrıca 2. öğrenci, SBS sisteminden dolayı hep şıklı sorularla karşılaştığı için; bu tür problemleri, çoğu zaman şıkları sırayla deneyerek çözdüğünü de özellikle belirtmiştir. Bu problemde şıklar verilmemiş olsaydı nasıl bir yol izleyeceği sorulduğunda ise; –tam emin olamasa da– çözümde “ekok” ya da “oran” kavramlarından yararlanabileceğini ifade etmiş; böylece problemle hiçbir ilgisi olmayan yanlış kavramlardan bahsetmiştir. Buradan da; SBS sisteminden dolayı genellikle şıklı sorularla karşılaştığı için, şıkları tek tek deneme dışında alternatif çözüm yollarını düşünmesini gerektirecek durumlarla pek karşılaşmamış olduğu yargısına varılmıştır.

4.10. Ortaöğretim Öğrencilerinin “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemleri Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerine, “problemler” ile ilgili dört tane soru sorulmuştur.

4.10.1. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

“Problemler” ile ilgili bir soru, “2008 yılı Öğrenci Seçme Sınavı (ÖSS) Matematik–1 testi” soruları arasından seçilmiştir ve katılımcı ortaöğretim öğrencilerine, 16 Mart–23 Mart 2010 tarihleri arasında gerçekleştirilen 1. görüşmede sorulmuştur. Bu soru, –kazanımlar açısından– 9. sınıf matematik öğretim programındaki “cebir” öğrenme alanının “sayılar” bölümünün “gerçek sayılar” alt öğrenme alanında yer alan bir kazanımla ve “problemler” alt öğrenme alanında yer alan bir kazanımla ilgili bulunmuştur (Tablo 4.52).

Tablo 4.52

Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar

1. GÖRÜŞME / 4. SORU	KAZANIMLAR
Bir poliklinikte bir doktora 50 hasta, bir hemşireye de 25 hasta düşmektedir. Bu poliklinikteki doktor, hemşire ve hasta sayılarının toplamı 318 olduğuna göre, doktor sayısı kaçtır? A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6 (2008 ÖSS MAT-1 – 12. SORU) (Cevap: E)	5. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini değişik sayı kümelerinde bulur. (“Gerçek sayılar” alt öğrenme alanında) 1. Oran ve orantı, yüzde ve faiz, hareket vb. günlük hayatla ilgili problemleri çözer. (“Problemler” alt öğrenme alanında)

Tablo 4.53
Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar

İrdelenecek Matematiksel Kavram Listesi	Matematiksel Kavram
Oran	Matematiksel kavram
(Doğru) orantı	Matematiksel kavram
Denklem (Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem)	Matematiksel kavram

4.10.1.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi

Doktor sayısı d , hemşire sayısı e ve hasta sayısı da a ile gösterilecek olursa; çözüm sürecinde aşağıdaki adımlar takip edilebilir:

Bir doktora 50 hasta düştüğü bilindiğine göre; doğru orantı kurularak, d doktora düşen toplam hasta sayısı $a = 50d$ olarak bulunabilir. Bir hemşireye 25 hasta düştüğü belirtildiğine göre; hemşire sayısı da, –toplam hasta sayısının 25’e oranı hesaplanarak–

$$e = \frac{a}{25} = \frac{50d}{25} = 2d$$

şeklinde bulunur. Doktor, hemşire ve hasta sayılarının toplamı 318 olduğuna göre;

$$d + e + a = d + 2d + 50d = 318$$

denklemini kurulabilir. Birinci dereceden bir bilinmeyenli bu denklem çözülerek;

$$53d = 318$$

$$d = 6$$

sonucuna ulaşılabilir. Böylece poliklinikteki doktor sayısı, 6 olarak bulunmuş olur.

Çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezdeki kavramlar düşünülerek; katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin “oran”, “orantı” ve “denklem” kavramlarıyla ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır (Tablo 4.53). Ancak sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir.

4.10.1.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Bu bölümde; katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, –bu problemi çözme sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlar olan– “oran”, “orantı” ve “denklem” kavramlarıyla ilgili yapmış oldukları tanım ve açıklamalara yer verilecektir.

4.10.1.2.1. Ortaöğretim öğrencilerinin, “oran” ve “orantı” kavramları ile ilgili anlayışları. Matematik başarı düzeyi “orta” olan 4 no’lu öğrenci, çözüm sürecinde “oran”, “orantı” ve “denklem” kavramlarından bahsetmediği ve bu kavramları kullanmadığı için; öğrencinin bu kavramlarla ilgili düşünceleri sorgulanamamış ve dolayısıyla ortaya çıkarılamamıştır.

Matematik başarı düzeyi “iyi” olan 5 no’lu öğrenci, “oran” ve “(doğru) orantı” kavramlarını, matematik başarı düzeyi “çok iyi” olan 6 no’lu öğrenci de, “(doğru) orantı” kavramını kullanmış olsalar da; çözüm sürecinde, bu kavramlardan isim olarak bahsetmemişler ve dolayısıyla bu soruda öğrencilerin bu kavramlarla ilgili düşünceleri sorgulanamamıştır. Ancak bu görüşmedeki başka bir problem bağlamında, 5. ve 6. öğrenci ile “oran”–“orantı” ilişkisi üzerine konuşulmuş olduğundan; aşağıda iki öğrencinin, bu kavramlarla ilgili düşüncelerine yer verilmiştir:

(9. soruda kullandığı $\frac{1}{4} = \frac{2}{k-2}$ eşitliği ile ilgili olarak konuşuluyor:)

Öğrenci: Evet, orantıdır, hı hı. Çünkü 1’in 4’e oranı, 2’nin $k-2$ ’ye oranı birbirine eşittir. Yani bu 2 kat arttıysa; bu da 2 kat artacak.

Görüşmeci: Hımmm. O zaman “orantı”yı nasıl tanımlayabiliriz? Eğer orantıysa bu. (4 sn. sessizlik) Tanımlayabilir miyiz ya da?

Öğrenci: (5 sn. sessizlik) Yani orantıda, o iki sayının bölümü birbirine daima eşit oluyor. Yani sadeleştirilmiş şekli mutlaka eşit oluyor. Ama nasıl diyeyim,

mesela $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$. Bunlar, hepsi birbirine eşit ve bu, orantıdır.

Görüşmeci: Orantı mıdır?

Öğrenci: Hı hı, orantıdır. Doğru orantıdır. (5. öğrenci – 1. görüşme – 9. soru)

Görüşmeci: Peki, “orantı” nedir? Orantı olması için, neye ihtiyacımız vardır? (3 sn. sessizlik) Orantı.

Öğrenci: Orantı. İki (3 sn. sessizlik) çokluk mu desem... yani iki şeyin, belli oranlarda bulunması, orantı oluyor.

Görüşmeci: Oran, hı.

Öğrenci: “Oran” öyleydi. “Orantı” da işte bu... (5 sn. sessizlik)

Görüşmeci: Orantı.

Öğrenci: (2 sn. sessizlik) Orantı.

Görüşmeci: Mesela burada bana bir “oran” gösterebilir misin? Hangisi bir “oran”dır mesela?

Öğrenci: Oran, $\frac{1}{2}$ bir orandır.

Görüşmeci: Hah. Yandaki? $\frac{4}{k-2}$?

Öğrenci: 4, k eksi... O da, orandır.

Görüşmeci: Hı hı. “Orantı” nedir?

Öğrenci: Bunların ikisini birleştirdiğimiz zaman; işte “orantı” oluyor.

Görüşmeci: “Orantı”dır. Tamam. Eşitlediğimiz zaman mı acaba? “Eşitliği” diyebilir miyiz? En az iki “oran”ın.

Öğrenci: Evet, iki “oran”ın eşitliği. (6. öğrenci – 1. görüşme – 9. soru)

Araştırmacı ile 5. ve 6. öğrenci arasında geçen yukarıdaki diyaloglardan da görüldüğü gibi; iki öğrenci de, “orantı”yı, “oran” kavramı yardımıyla, doğru şekilde açıklayabilmişlerdir. “Orantı” kavramını açıkladıktan sonra, “orantı”ya bir örnek veren 5. öğrenci; “oran” kavramı için ise, ayrıca bir açıklama yapmamıştır. Ancak “orantı” kavramını açıklarken, “oran” kelimesini “bölüm” anlamında yerli yerinde kullanmasından; 5. öğrencinin, “oran” kavramını da doğru bildiği anlaşılmıştır.

4.10.1.2.2. Ortaöğretim öğrencilerinin, “denklem” kavramı ile ilgili anlayışları. 6. öğrenci, çözüm sırasında “denklem” kavramından bahsetmediği ve bu kavramı kullanmadığı için; bu soruda, öğrencinin bu kavramla ilgili düşünceleri irdelenmemiştir. 5. öğrenci ile araştırmacı arasında ise, “denklem” ile ilgili olarak aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Öğrenci: Buradan $53x=318$ ise, x de 6 çıkar. Yani ben doktor sayısına da x dediğim için, 6 tane doktor vardır.

Görüşmeci: Hı hı, peki. Aslında burada sen ne yapmış oldun, hani şu eşitliğe bakacak olursak?

Öğrenci: Denklem çözmeyle çözdüm soruyu, denklem oluşturmayla.

Görüşmeci: Hımm, hı hı. Peki, bu, kaç bilinmeyenli bir denklem?

Öğrenci: Bir bilinmeyenli.

Görüşmeci: Kaçınıcı dereceden?

Öğrenci: Birinci dereceden.

(5. öğrenci – 1. görüşme)

Yukarıdaki konuşmada “denklem” kelimesi geçmiş olmasına rağmen; öğrencinin “denklem” tanımını bilip bilmediği sorgulanmamış, sadece o denkleme ait birkaç özellik üzerine konuşulmuştur.

Ortaöğretim öğrencilerinin, çözüm aşamasında göz önüne alınan merkezi kavramlar ile ilgili yapmış oldukları açıklamalar dikkate alınarak; öğrencilerin problemde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları Tablo 4.54’de listelenmeye çalışılmıştır.

Tablo 4.54

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Kavramlar	Öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları		
	4. öğrenci	5. öğrenci	6. öğrenci
Oran		doğru bilmek	
Orantı		doğru açıklamak	doğru açıklamak
Denklem		sorgulanmamak	

4.10.1.3. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları

4. öğrenci, soruyu gördüğü an, –henüz tam olarak okumadan– soru ile ilgili olarak “Bu soru da şey sorusu, olasılık sorusu olması gerekiyor. Ya da... ‘Olasılık’ diye tahmin ediyorum. Çünkü bunu da ÖSS’de görmüştüm, ÖSS sorularını çözerken.” (4. öğrenci – 1. görüşme) şeklinde yanlış bir tahminde bulunmuştur. 4. öğrenci, çözümünü bitirdikten sonra da; araştırmacı, bu problem ile ilgili olarak “Olasılık sorusu gibi mi?” diye sormuştur. Öğrencinin yanıtı, “Olasılık so... uu (düşünüyor), olasılığa benziyor, evet. ‘Olasılık’ ya da ‘permütasyon’ konusunda vardır bu soru.” (4. öğrenci – 1.

görüşme) biçiminde olmuştur. Tamamlayıcı görüşmede, araştırmacının “Sana bu soruda ne ipucu verdi ki; hani ‘olasılık ya da permütasyon’ dedin buna?” sorusuna cevap olarak; “Belki hani önceden çözdüy... Bu soruyu çözmüştüm ben galiba önceden de. O konu başlığı altında görmüşümdür belki.” (4. öğrenci – Tamamlayıcı görüşme) demiştir. Hala öyle düşünüp düşünmediği sorulduğunda ise; öğrenciden, “Evet aslında, öyle düşünüyorum. Ama permütasyon değil bu. Mesela hani 4 faktöriyel (yani: “4!”) falan. Permütasyon sorusu değil bu. Olasılık yani. Permütasyon değil; kesinlikle permütasyon olmaması gerekiyor hani. “Kesinlik” demeyeyim de. Yani permütasyon olmaması gerekiyor. Olasılık olabilir.” (4. öğrenci – Tamamlayıcı görüşme) yanıtı gelmiştir. Bu problemi henüz tam olarak okumadan “olasılık sorusu” olduğu yönünde yanlış bir tahminde bulunan ve bu tahminine mantıklı bir gerekçe gösteremeyen 4. öğrencinin bu söyledikleri; öğrencinin, daha önceden çözmüş olduğu, geçmiş yıllarda çıkmış ÖSS problemlerini görünce, –gerekçelerini yeterince irdelemeksizin– ilgili olduğu konu başlığını da hatırlamaya çalıştığı düşüncesini akla getirmiştir.

Katılımcı ortaöğretim öğrencileri, problem ifadesini okuduktan sonra, aşağıdaki açıklamaları yapmışlardır:

“Hemşireleri burada, hani “hemşire, bir hastayı tedavi edemez” diye, atmak istiyorum ben. Hani doktordan şaysız... Bağımlı hareket etmesi gerekiyor. Doktora bağımlı bunlar. Hani doktorun emrinde çalışıyor diye.” (4. öğrenci – 1. görüşme)

“Şimdi, bir doktorun 50 hastaya baktığını varsayalım. Bir hemşire de 25 hastaya bakıyormuş. Şimdi, doktorun yanında mutlaka hemşire olacak. Yani bunlar ayrı ayrı bir hastaya bakmıyorlar. Doktorun yanında hemşire var. İlk önce sorunun doğru anlaşılması gerekiyor.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

“O zaman 1 doktor artı 2 hemşire 50 hastaya bakıyor. (Soru kağıdına “ $1d + 2h \rightarrow 50$ ” yazıyor.) Yani bizim dersane hocamız şey demişti: “Bir hemşire bir hastaya bakamaz; çünkü yani şey olarak aldığımızda doktor değil yani sonuç itibarıyla.”” (6. öğrenci – 1. görüşme)

Öğrenci söylemlerinden de görüldüğü gibi; üç öğrenci de, soruyu okuduktan sonra, – araştırmacının herhangi bir yönlendirmesi olmaksızın– “bir hemşirenin doktordan bağımsız olarak, tek başına bir hastaya bakamayacağı”na dair benzer açıklamalarda bulunmuştur. 6. öğrencinin, bu yorumu dersane öğretmeninden duyduğunu belirtmesi ve 4. öğrencinin, bu soruyu ÖSS sorularını çözerken görmüş olduğunu söylemesi; derslerde geçmiş yıllarda çıkmış ÖSS problemlerinin çözümü esnasında yapılan

açıklamaların benzerlik gösterebildiği ve öğrencilerin geçmiş sınav sorularını tekrar gördüklerinde bu açıklamaları aynen hatırlayabildikleri düşüncesini akla getirmiştir.

4. öğrenci, problemi şöyle çözmüştür:

“İlmi (*düşünüyor*), şöyle diyebiliriz: 1 doktora 50 hasta düşüyor mesela. 2 doktora 100, 3 doktora 150’nci... yani 150 hasta, 4’e 200, 5’e 250. Şöyle. 6 tane doktor varsa; 300 tane hani hasta olur. 18 tane de hemşireyi katabilirim ben oraya. “6 tane doktor vardır” diyorum.” (4. öğrenci – 1. görüşme)

Araştırmacı, sadece “kat” kavramını kullanarak, sezgisel çözüm yapan ve doğru sonucu bulan 4. öğrenciye, “250’de duramaz mıydın; neden 300’e kadar geldin?” sorusunu yöneltmiştir. 4. öğrenci, “Ama mesela hani toplamaları, ‘toplamaları 318’ demişti ya bize. ‘Doktor artı hasta artı hemşire eşittir 318’ demişti ya. (*Öğrenci, kağıda “D + H + H = 318” yazdı.*) Doktorların... Mesela 6 tane doktor varsa; –bir doktora 50 tane hasta düşmektedir– 6 tane doktora, yani 6×50 ’den 300 tane dedim.” (4. öğrenci – 1. görüşme) açıklamasını yapmıştır. Araştırmacı, “Hani 6 doktoru nereden takıldık?” şeklinde soruyu yinelediğinde; 4. öğrenci, “Hani katları. 1 hastaya 50; 2’nci...” (4. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, 50 sayısının “kat”larını aldığını belirtmiştir. 50’nin katları arasında neden –mesela 200’de ya da 250’de değil de– 300’de durduğunu gerekçelendiremeyen 4. öğrenci; az sonra “Hani bu soruyu... Cevabını hatırlamıyorum...” (4. öğrenci – 1. görüşme) sözleriyle, problemin cevabını (*sanırım kastettiği şey: “çözüm yolu”*) hatırlamadığını ifade etmiştir. Araştırmacının “Burada sanki mantıkla da yaptın gibi, değil mi?” sorusu üzerine; 4. öğrenci, “Evet, mantıkla yaptım.” (4. öğrenci – 1. görüşme) cevabını vererek, sezgisel bir çözüm yaptığını kendisi de kabul etmiştir (Şekil 4.38).

Handwritten student work showing a list of doctor counts and patient counts, a multiplication table, and a final calculation.

Doktor	Hasta
1	50
2	100
3	150
4	200
5	250
6	300

Below the table, the student has written: $6 \times 50 = 300$. To the right, there is a calculation: $D + H + H = 18$ and $6 \times 18 = 108$.

Şekil 4.38

4. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

5. öğrenci, problemi çözerken şunları söylemiştir:

“Şimdi, 50 hasta olduğunu varsayarsak; bir doktor buna bakar. Ama 25 hastaya bir hemşire bakıyorsa; 50 hastaya 2 hemşire bakar. Yani bir doktorun yanında, iki hemşire olacak. “1 doktor + 2 hemşire” (*aynı zamanda kağıda yazıyor*) olacak. Yani en küçük olarak. Şimdi ben doktor sayısına x dersem... Hemşire sayısına $2x$ derim. Çünkü 2 katı kadar olacak. E, doktor... Şimdi bir doktor varken, 50 hasta geliyorsa; doktor sayısı x ise, hasta sayısı da $50x$ olur. Şimdi, bu poliklinikteki doktor, hemşire ve hasta sayılarının toplamı... Buradaki bütün kişilerin toplamı da, $50x+2x+x=318$ 'i verir bize. Buradan $53x=318$ ise, x de 6 çıkar. Yani ben doktor sayısına da x dediğim için, 6 tane doktor vardır.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

5. öğrencinin bu problemi çözme süreci özetlenecek olursa; 5. öğrenci, “doğru orantı”, “oran”, “kat” kavramlarını kullanmış ve oluşturduğu “birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem”i çözererek doğru sonuca ulaşmıştır (Şekil 4.39). 5. öğrenci, “Denklem çözmeyle çözdüm soruyu, denklem oluşturmayla.” (5. öğrenci – 1. görüşme) diyerek; çözüm sürecinde denklem kurma ve denklem çözme becerisini gösterdiğini kendisi de ifade etmiştir.

$$\begin{array}{l}
 4) \quad 1 \text{ doktor} \rightarrow 50 \text{ hasta} \\
 \quad \quad 1 \text{ hemşire} \rightarrow 25 \text{ hasta} \\
 \\
 \quad \quad 1 \text{ doktor} + 2 \text{ hemşire} \\
 \text{doktor} \rightarrow x \quad \text{hasta} \rightarrow 50x \\
 \text{hemşire} \rightarrow 2x \\
 \\
 \quad \quad 50x + 2x + x = 318 \\
 \quad \quad 53x = 318 \\
 \quad \quad x = 6 \rightarrow 6 \text{ tane doktor vardır.}
 \end{array}$$

Şekil 4.39

5. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

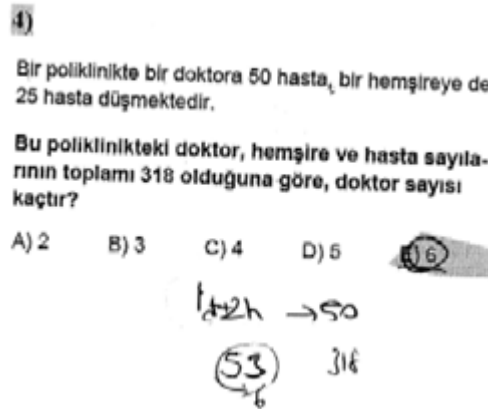
6. öğrenci ise, çözümüne “ ‘1 doktor artı 2 hemşire’ olarak alacağız. 1 doktor artı 2 hemşire, 50 hastaya bakıyorsa; o zaman 53 kişi, yani bir grup olarak alabiliriz.”

(6. öğrenci – 1. görüşme) sözleriyle başlamıştır. Devamında araştırmacı ile 6. öğrenci arasında aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Görüşmeci: Bir doktora 50 hasta düşüyor. Öbürünü nasıl buldun, “2 hemşire”yi?

Öğrenci: Yaa, bir doktora 50 hasta düşüyorsa, bir hemşireye de 25 hasta düşüyorsa; o zaman iki hemşire 50 hastaya bakacak ve o zaman bunlar da doktorun yanında olur herhalde. Yani büyük ihtimalle (gülüyor). 53. Yani bir grup 53 kişi olacak. 318’i böldüğümüz zaman da, 6 çıkıyor. O zaman 6 tane doktor olması lazım. (6. öğrenci – 1. görüşme)

Kısacası 6. öğrenci de, 5. öğrencininkine benzer, fakat daha kısa bir çözüm yolu takip etmiştir. 50 hastayı ve bu hastalara bakan doktor ile hemşireleri bir grup olarak düşünen 6. öğrenci; denklem kurmaya ihtiyaç duymadan, bölme işlemi yaparak doğru sonucu bulmuştur (Şekil 4.40).



Şekil 4.40

6. Öğrencinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile İlgili Problem için Yaptığı Çözüm

4.10.1.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

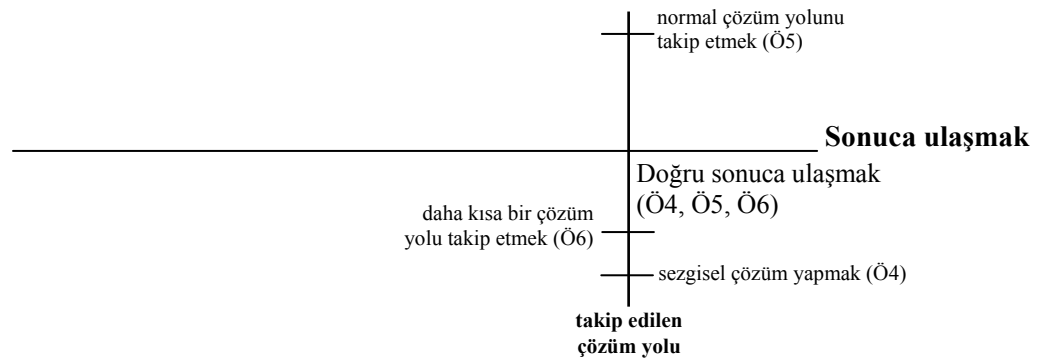
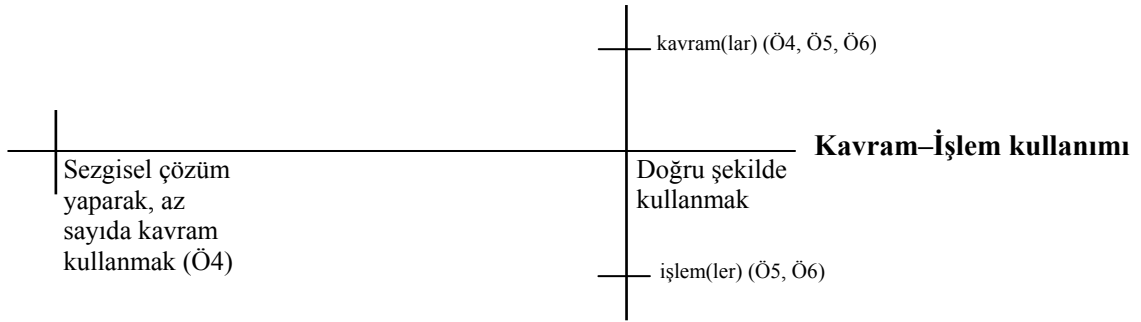
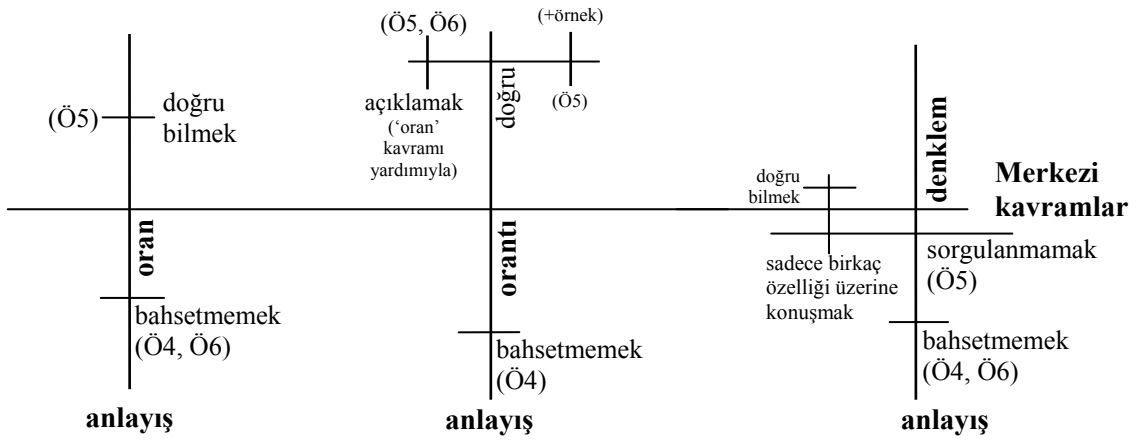
Ortaöğretim öğrencilerinin, 1. görüşmedeki “problemler” alt öğrenme alanı ile ilgili problemi çözme sürecinde; problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları, kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili çıkan kategoriler bir araya getirilerek; her bir öğrencinin,

problemi çözüme süreci Tablo 4.55’de özetlenmiş ve Şekil 4.41’de de eksenler üzerinde gösterilmiştir.

Tablo 4.55

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Öğrenci no	Merkezi kavramlarla ilgili anlayışları	Kullandıkları kavramlar–işlemler	Kategoriler (Kavram–işlem kullanımı)	Kategoriler (Sonuca ulaşmak)
4	<i>bahsetmemek</i>	Kat	Uygun kavramı doğru şekilde kullanmak (<i>sezgisel çözüm</i>)	Doğru sonuca ulaşmak
5	Oran (doğru bilmek) Orantı (doğru açıklamak) Denklem (<i>sorgulanmamak</i>)	Doğru orantı Oran Kat Denklem çözme işlemi (<i>Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem</i>)	Uygun kavramları/ işlemi doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak
6	Orantı (doğru açıklamak)	Doğru orantı Toplama işlemi Bölme işlemi	Uygun kavramı/ işlemleri doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak



Şekil 4.41

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 1. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, 1. görüşmedeki “problemler” alt öğrenme alanı ile ilgili problemi çözme süreçleri özetlenecek olursa; bu soruda, ortaöğretim öğrencilerinin, “oran”, “orantı” ve “denklem” kavramları ile ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Ancak sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir. Çözüm sürecinde, 6. öğrenci, “denklem” kavramından; 4. öğrenci ise, üç kavramdan da bahsetmediği ve bu kavramları kullanmadıkları için; öğrencilerin bu kavramlarla ilgili düşünceleri irdelenememiştir. 5. öğrenci, “oran” ve “(doğru) orantı” kavramlarını, 6. öğrenci de, “(doğru) orantı” kavramını kullanmış olsalar da; çözüm sürecinde, bu kavramlardan isim olarak bahsetmemişlerdir. Ancak bu görüşmedeki başka bir problem bağlamında, 5. ve 6. öğrenci ile “oran”–“orantı” ilişkisi üzerine yapılan konuşmada; iki öğrencinin de, “orantı”yı, “oran” kavramı yardımıyla, doğru şekilde açıklayabildiği görülmüştür. “Orantı” kavramını açıkladıktan sonra, “orantı”ya bir örnek veren 5. öğrenci; “oran” kavramı için, ayrıca bir açıklama yapmasa da; “orantı” kavramını açıklarken, “oran” kelimesini “bölüm” anlamında yerli yerinde kullanmasından, “oran” kavramını da doğru bildiği anlaşılmıştır. 5. öğrenci, çözümünü tamamladıktan sonra, bu problemi denklem oluşturmayla çözdüğünü belirtmiş olsa da; öğrencinin “denklem” tanımını bilip bilmediği sorgulanmamış, sadece o denkleme ait birkaç özellik üzerine konuşulmuştur.

“Kavram–işlem kullanımı” adlı ana kategori ekseni açıklanacak olursa; 4. öğrenci, bir doktora düşen hasta sayısı olan 50’nin katlarını sırasıyla yazmış ve 300’de durarak, doktor sayısının 6 olduğunu söylemiştir. Sadece “kat” kavramını kullanarak, sezgisel çözüm yapan 4. öğrenci; 50’nin katları arasında neden – mesela 200’de ya da 250’de değil de– 300’de durduğunu gerekçelendirememiş ve sezgisel bir çözüm yaptığını kendisi de kabul etmiştir. 5. öğrenci; “doğru orantı”, “oran”, “kat” kavramlarını kullanmış ve oluşturduğu “birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem”i çözerek sonuca ulaşmıştır. 6. öğrenci de, 5. öğrencininkine benzer, fakat daha kısa bir çözüm yolu takip etmiştir. 50 hastayı ve bu hastalara bakan doktor ile hemşireleri bir grup olarak düşünen 6. öğrenci; denklem kurmaya ihtiyaç duymadan, “doğru orantı” kavramını kullanarak ve toplama ile bölme işlemleri yaparak sonucu bulmuştur. “Sonuca ulaşmak” adlı ana kategori

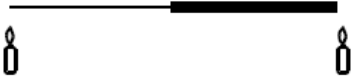
ekseninden de görülebildiği gibi; –takip edilen çözüm yollarında ve dolayısıyla kullanılan kavramlarda farklılıklar olsa da– sonuçta, öğrencilerin üçü de, doğru sonuca ulaşmışlardır.

Ayrıca 4. öğrenci, bu problemi henüz tam olarak okumadan “olasılık sorusu” olduğu yönünde yanlış bir tahminde bulunmuş; ancak bu tahminine mantıklı bir gerekçe gösterememiştir. 4. öğrencinin söylediklerinden; öğrencinin, daha önceden çözmüş olduğu, geçmiş yıllarda çıkmış ÖSS problemlerini görünce, –gerekçelerini yeterince irdelemeksizin– ilgili olduğu konu başlığını da hatırlamaya çalıştığı yargısına varılmıştır. Üç öğrenci de, soruyu okuduktan sonra, “bir hemşirenin doktordan bağımsız olarak, tek başına bir hastaya bakamayacağı” yönünde benzer açıklamalar yapmışlardır. 6. öğrencinin, bu yorumu dersane öğretmeninden duyduğunu belirtmesi ve 4. öğrencinin, bu soruyu ÖSS sorularını çözerken görmüş olduğunu söylemesi; derslerde geçmiş yıllara ait ÖSS problemlerinin çözümü sırasında yapılan açıklamaların benzerlik gösterebildiği ve öğrencilerin geçmiş sınav sorularını tekrar gördüklerinde bu açıklamaları aynen hatırlayabildikleri şeklinde yorumlanmıştır.

4.10.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde Kavramlar ile ilgili Anlayışları ve Kavram–İşlem Kullanımları

“Problemler” ile ilgili diğer bir soru, “2008 yılı Öğrenci Seçme Sınavı (ÖSS) Matematik–1 testi” soruları arasından seçilmiştir ve katılımcı ortaöğretim öğrencilerine, 15 Nisan–20 Nisan 2010 tarihleri arasında gerçekleştirilen 2. görüşmede sorulmuştur. Bu soru, –kazanımlar açısından– 9. sınıf matematik öğretim programındaki “cebir” öğrenme alanının “sayılar” bölümünün “problemler” alt öğrenme alanında yer alan bir kazanımla ilgili bulunmuştur (Tablo 4.56).

Tablo 4.56
Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Soru ve İlgili Kazanımlar

2. GÖRÜŞME / 4. SORU	KAZANIMLAR
Bir yarısı ince diğer yarısı kalın olan 20 metre uzunluğundaki bir ip her iki ucundan aynı anda yakılıyor.  Ateşin ilerleme hızı ipin ince tarafında saniyede 2 metre, kalın tarafında ise 1 metre olduğuna göre, ipin tamamının yanması kaç saniye sürer? A) 8 B) 7 C) $\frac{19}{3}$ D) $\frac{17}{2}$ E) $\frac{15}{2}$ (2008 ÖSS MAT-1 – 19. SORU) (Cevap: E)	1. Oran ve orantı, yüzde ve faiz, hareket vb. günlük hayatla ilgili problemleri çözer.

Tablo 4.57

Ortaöğretim Öğrencileri ile Gerçekleştirilecek 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemin Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar

İrdelenecek Matematiksel Kavram Listesi	Matematiksel Kavram
Hız	Matematiksel kavram
Doğrultu/yön	Matematiksel kavram
Oran–Orantı	Matematiksel kavram

4.10.2.1. “Problemin Beklenen Çözüm Yolu” ve “Çözüm Sürecinde İrdelenecek Kavramlar” Hakkında Genel Bilgi

İnce ipin sol taraftaki ucu K , ince ipin sağ (aynı zamanda kalın ipin sol) taraftaki ucu L ve kalın ipin sağ taraftaki ucu M harfi ile gösterilecek olursa;

$$|KL| = 10 \text{ metre} \quad \text{ve} \quad |LM| = 10 \text{ metre}$$

olacaktır. $v_{KL} = 2 \text{ m/s}$ ve $v_{LM} = 1 \text{ m/s}$ olarak verildiğine göre; $t = \frac{x}{v}$ formülü kullanılarak,

$$t_{KL} = \frac{|KL|}{v_{KL}} = \frac{10}{2} = 5 \text{ saniye}$$

bulunabilir. O halde ipin ince kısmı olan KL uzunluğunun tamamının, 5 saniyede yandığı söylenebilir. Aynı zamanda bu 5 saniyelik süreçte, ipin kalın kısmından da

$$x = v_{LM} \cdot 5 = 1 \cdot 5 = 5 \text{ metre}$$

yanmıştır. Bu durumda ipin kalın kısmının sağ yarısının yanması da tamamlanmıştır. İpin kalın kısmının orta noktası da, N harfi ile gösterilsin. Geriye kalan ipin kalın kısmının 5 metrelik sol yarısı (yani LN uzunluğu), hem soldaki mum hem de sağdaki mum tarafından yanmaya devam edeceği için; bu kısımda yanma hızı iki katına çıkarak,

$$v_{LN} = 2 \cdot 1 = 2 \text{ m/s}$$

olacak ve

$$t_{LN} = \frac{|LN|}{v_{LN}} = \frac{5}{2} \text{ saniye}$$

olarak bulunacaktır. O halde ipin tamamının yanma süresi,

$$5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2} \text{ saniye}$$

şeklinde hesaplanmış olacaktır.

Bu problem ifadesinde geçen veya çözüm sürecinde göz önüne alınan merkezdeki kavramlar düşünülerek; katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin “hız” ve “oran–orantı” kavramlarıyla ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır (Tablo 4.57). Ancak sorgulanan kavramlar; öğrencilerin, kavramdan bahsedip bahsetmemelerine/kavramı kullanıp kullanmamalarına bağlı olarak, öğrenciden öğrenciye farklılık göstermiştir.

4.10.2.2. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Bu bölümde; katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, –bu problemi çözme sürecinde göz önüne alınan merkezi kavramlardan biri olan– “hız” kavramı ile ilgili yapmış oldukları tanım ve açıklamalara yer verilecektir.

4.10.2.2.1. Ortaöğretim öğrencilerinin, “hız” kavramı ile ilgili anlayışları.

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, “hız” kavramı için yapmış oldukları tanımlar ve araştırmacı–öğrenci konuşmaları şöyledir:

“Birim zamanda yapılan... ııııı (*düşünüyor*), iş. Olmadı. Yani $x = v \cdot t$. Yani, evet. ‘Birim zamanda yapılan iş’ diyebilirim. Zaman t ; yol... Birim zamanda alınan yol.” (4. öğrenci – 2. görüşme)

Görüşmeci: “Hız” nedir?

Öğrenci: Hız nedir? Hız, bir cismin saniyede aldığı yoldur.

Görüşmeci: Hı hı, tamam. İlla “saniye” mi olmak zorunda?

Öğrenci: “metre/saniye” kullanılır genelde. (5. öğrenci – 2. görüşme)

“Hız, ııııı (*düşünüyor*), belirli bir zamanda aldığımız yol.” (6. öğrenci – 2. görüşme)

4. öğrenci, ilk önce “hız” kavramı yerine “güç” kavramını tanımlamış, sonrasında fark ederek düzeltmiş de olsa ve 5. öğrenci, “birim zaman” yerine “saniye” terimini kullanmış da olsa; sonuç itibarıyla katılımcı öğrencilerin üçü de, “hız” kavramı için doğru tanım yapabilmıştır.

Bu problemin çözüm sürecinde; 4. ve 6. öğrenci, “oran–orantı” kavramlarından isim olarak hiç bahsetmemiş ve kullanmamışlar; 5. öğrenci ise, kavramdan isim olarak bahsetmeden kullanmıştır. Bu nedenle üç öğrencinin de “oran–orantı” kavramlarıyla ilgili düşünceleri ortaya çıkarılmak amacıyla sorgulanamamıştır.

Ortaöğretim öğrencilerinin, problem ifadesinde geçen veya çözüm aşamasında göz önüne alınan merkezi kavramlar ile ilgili yapmış oldukları tanım ve açıklamalar dikkate alınarak; öğrencilerin problemde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları Tablo 4.58’de listelenmeye çalışılmıştır.

Tablo 4.58
Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla İlgili Anlayışları

Kavramlar	Öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları		
	4. öğrenci	5. öğrenci	6. öğrenci
Hız	doğru tanımlamak	doğru tanımlamak	doğru tanımlamak
Oran–Orantı			

4.10.2.3. Ortaöğretim Öğrencilerinin; Problem Çözme Sürecinde, Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramları–İşlemleri Kullanımları ve Sonuca Ulaşmaları

Katılımcı ortaöğretim öğrencileri, ipin ince tarafının yanma süresi için aşağıdaki açıklamaları yapmışlardır:

“10 metre ince ip, 10 metre kalın ip varmış. Ateşin hızı, ipin ince tarafına saniyede 2 metre. Yani 5 saniyede ince tarafı yanacak.” (4. öğrenci – 2. görüşme)

“Fizikteki formüle gelelim: $x = v \cdot t$ dir. v hız, t zaman, x de yoldur. Saniyede bu 2 metre yanıyormuş; v yerine 2 yazıyorum. Çarpı t yi yazıyorum, t yi bulmak

istiyorum. x de 10 cm. t buradan 5 çıkar. Yani 5 saniyede bu ince ip yanar.” (5. öğrenci – 2. görüşme)

“(İpin ince kısmını A ve kalın kısmını B olarak isimlendirdikten sonra:) Şimdi bu $A=10$ m ise, 10 metre eşittir... 2 metre alacaksa saniyede... Çarpı ‘zaman’ dersek; yani $2 \cdot t = 10$ olacak. t eşittir, buradan 5 saniye gelir.” (6. öğrenci – 2. görüşme)

Üç katılımcı ortaöğretim öğrencisi de, $x = v \cdot t$ formülünü kullanarak; ipin ince tarafının yanma süresini 5 saniye olarak doğru şekilde bulmuştur.

4. öğrenci, çözümüne aşağıdaki düşünceyle devam etmiştir:

“[Ateşin hızı] kalın tarafta ise, [saniyede] 1 metre. 10 saniye de burada yanacak. (7 sn. sessizlik) Bu sorunun cevabı, $\frac{15}{2}$ ’dir diye düşünüyorum.” (4. öğrenci – 2. görüşme)

4. öğrenci, $10 = v \cdot t$ formülünü kullanarak, ince ipin ve kalın ipin yanma sürelerini ayrı ayrı hesapladıktan hemen sonra; cevabın $\frac{15}{2}$ olduğu tahmininde bulunmuştur. Bu tahmininin gerekçesi için, şunları söylemiştir:

“Burası, 5 saniyede yanacak tamamı. ... İnce taraf. Kalın taraf da 10 saniyede yanacak; ama yani ince taraf bittikten... ince tarafta yanan mum bittikten sonra, kalın tarafa da geçerse. Ben “toplam 15 saniyede biter” diye düşünmüştüm; ama $\frac{15}{2} = 7,5$ ’tur diye düşünüyorum. Hani bunu da tam emin olarak yapmadım ama.” (4. öğrenci – 2. görüşme)

Bahsettiği 15 sayısını nereden bulmuş olduğu sorusunu ise,

“İki (düşünüyor), 5 saniyede ince taraf yanacak demiştim. 10 saniyede de kalın taraf yanacağını düşünmüştüm. Hani bu mumlar ayrı bir şey olsaydı, hani etkilemeseydi birbirlerini; ikisinin toplamı 15 saniyede ederdi diye düşündüm. $\frac{15}{2}$ ’den 7,5; hani ikisinin toplamının yarısı.” (4. öğrenci – 2. görüşme)

diye cevaplamıştır. 15’i ikiye bölme nedenini de, “Hani iki tane mum, hani aynı anda etki etmeye başlarsa diye, devam ederse diye düşündüm.” (4. öğrenci – 2. görüşme) sözleriyle açıklamaya çalışmıştır. Sonuç itibarıyla 4. öğrenci, çözüm sırasında yanlış akıl yürütmeler ve “ortalama alma” gibi yanlış işlemler yapmış olmasına rağmen; tesadüfen doğru sonucu bulmuştur. 4. öğrencinin, çözüm sırasında söylediği “Ben

‘toplam 15 saniyede biter’ diye düşünmüştüm; ama $\frac{15}{2} = 7,5$ ‘tur diye düşünüyorum.

Hani bunu da tam emin olarak yapmadım ama.” (4. öğrenci – 2. görüşme) şeklindeki sözleri; öğrencinin, cevabın 15 olduğunu düşündüğünü; fakat 15’i şıklarda göremeyince, E şikkındaki $\frac{15}{2}$ sayısının doğru cevap olabileceği yönünde tahminde bulunmuş ve bu tahminine dayalı olarak mantık yürütmüş olabileceği düşüncesini akla getirmiştir.

5. öğrenci de, ilk önce 4. öğrenci gibi– “Kalın ip de saniyede 1 metre yanıyormuş. v si 1, t sini bulmak istiyorum. x i de 10. t de buradan 10 çıkar.” (5. öğrenci – 2. görüşme) diyerek; kalın ipin yanma süresini, tek mumu dikkate alarak yanlış şekilde hesaplamıştır. Devamında “Ama bu böyle çözülüyor.” (5. öğrenci – 2. görüşme) diyerek, hemen hatasını fark eden 5. öğrenci; 15 saniye düşündükten sonra,

“5 saniyede bunun, kalın ipin 5 cm’si (*“metre” yerine yanlışlıkla “santimetre” ifadesini kullanıyor*) kalacak; çünkü... Şurada 5 cm kalacak, 5 cm’si yanacak. Bu ince ipin 10 cm’si de yanacak, 5 saniyede. Geriye, kalın ipimden benim 5 cm kalacak.” (5. öğrenci – 2. görüşme)

açıklamasında bulunmuştur. Benzer şekilde 6. öğrenci de, “Aynı sürede, bu kalın diğer mum da kalın kısımda saniyede 1 metre alıyorsa; 5 saniye geçtiği için, 5 metre yol alacak. B şu anda... o mum burada, diğeri de burada. Arada 5 metre yol var.” (6. öğrenci – 2. görüşme) ifadesini kullanmıştır. Böylece 5. öğrenci ve 6. öğrenci, 5 saniyenin sonunda ipin ince tarafının tamamının, kalın tarafının ise 5 metresinin yanmış olacağını; geriye ise sadece kalın ipten 5 metrelik bir kısmın kaldığını söyleyebilmiştir.

5. öğrenci ve 6. öğrenci, geriye kalan 5 metrelik kalın ipin yanması ile ilgili olarak aşağıdaki açıklamaları yapmışlardır:

“Şimdi ama iki tane benim şeyim olacak, ateşim olacak. Yani iki taraftan da yanacak bu. Bir taraftan bir ateş saniyede 1 metre yanmasını sağlıyorsa, 1 metre; şimdi iki tane ateşim olduğu için benim, iki ateş birden 2 metre yakacak bunu saniyede. Yani $x = v \cdot t$ ’den; $x = 5$, $v = 2$, t yi bulacağım. t buradan $\frac{5}{2}$ gelir. Bu kalın ip de $\frac{5}{2}$ süre sonra iki ateş tarafından yanar.” (5. öğrenci – 2. görüşme)

“ $5 = (2 + 1) \cdot t$ yapacağız. Buradan da (3 sn. sessizlik) $\frac{5}{3}$ saniye gelecek zaman. Buradaki zaman $\frac{5}{3}$.” (6. öğrenci – 2. görüşme)

Geriye kalan 5 metrelik kalın ipin $\frac{5}{2}$ saniyede yanacağını doğru şekilde hesaplamış olan 5. öğrenci, “ $\frac{5}{2}$ burada var. Ee, baştan da 5 saniyede ince ip bitmişti; kalın ipin de yarısı bitmişti. (Kağıda $\frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$ yazıyor.) $\frac{15}{2}$ gelir buradan. Cevap, Edirne (kastettiği: “E şıkkı”).” (5. öğrenci – 2. görüşme) diyerek, doğru cevap şıkkına ulaşmıştır (Şekil 4.42 ve Şekil 4.43). Geriye kalan 5 metrelik kalın ipin $\frac{5}{3}$ saniyede yanacağını söylemiş olan 6. öğrenci ise, “Diğer tarafta da 5 saniye vardı. Yani 5 saniye şuraya geldiler; $\frac{5}{3}$ saniyede burada karşılaştılar. O zaman toplam zaman, $\frac{20}{3}$ olması lazım ama.” (6. öğrenci – 2. görüşme) demiş; fakat ulaşmış olduğu $\frac{20}{3}$ sonucunun şıklarda olmadığını görünce, çözümüne geri dönmüştür.

“A, 10 metreydi; B de, 10 metreydi. Bu 1 saniye, kalın tarafı 1 saniyede. Ha, pardon! İkisi de 1 metre alacak burada. Pardon, özür dilerim. Burada ikisi de, 1'er metre yol alacak. O zaman $5 = 2t$; t de oradan $\frac{5}{2}$ gelecek. $\frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$.” (6. öğrenci – 2. görüşme)

diyen 6. öğrenci, az önce dikkatsizlik sonucu yapmış olduğu hatayı fark etmiştir. 6. öğrenci; “ateşin ilerleme hızının muma değil de, ipin ince/kalın olmasına bağlı olduğu” ilkesini dikkate alarak, hatasını hemen düzeltmiş ve doğru sonuca ulaşmıştır.

Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, bu problemi çözme süreçleri özetlenecek olursa; üç öğrenci de, ipin ince tarafının yanma süresini, $t = \frac{x}{v}$ formülünü kullanarak doğru şekilde hesaplamışlardır. İpin kalın tarafının ve dolayısıyla tamamının yanma süresini hesaplama esnasında ise; öğrencilerin üçü de, yanlışlıklar yapmışlardır. 4. öğrenci; kalın ipin yanma süresini, tek mumu dikkate alarak yanlış şekilde hesaplamış ve ipin tamamının yanma süresini bulmak için de, ince ve kalın iplerin yanma

sürelerinin ortalamalarını almıştır. 4. öğrenci, çözüm sırasında yanlış akıl yürütmeler ve “ortalama alma” gibi yanlış işlemler yapmış olmasına rağmen; tesadüfen de olsa doğru sonucu bulmuştur. 5. öğrenci de, ilk önce –4. öğrenci gibi– kalın ipin yanma süresini, tek mumu dikkate alarak yanlış şekilde hesaplamış; ancak hemen hatasını fark ederek düzeltmiştir. Çözüm sırasında, isim olarak bahsetmeden oran–orantı kavramlarını da kullanan 5. öğrenci, doğru yoldan doğru sonuca ulaşmıştır. 6. öğrenci ise; “bu soruda ateşin ilerleme hızının muma değil de, ipin ince/kalın olmasına bağlı olduğu”nu ilk başta gözden kaçırmış ve bu dikkatsizliği neticesinde, şıklarda olmayan bir sonuç elde etmiştir. Hatasını hemen fark ederek düzelten 6. öğrenci de, diğer iki öğrenci gibi doğru sonuca ulaşmıştır. Çözüm esnasındaki öğrenci hatalarının/yanlışlarının kaynağı belirlenmek istenirse; 4. öğrencinin hatasının mantıksal bir hata olduğu ve yanlış akıl yürütmeler sonucu ortaya çıktığı; 5. ve 6. öğrencinin hatalarının ise, dikkatsizlikten kaynaklandığı söylenebilir.

4)

Bir yarısı ince diğer yarısı kalın olan 20 metre uzunluğundaki bir ip her iki ucundan aynı anda yakılıyor.

Ateşin ilerleme hızı ipin ince tarafında saniyede 2 metre, kalın tarafında ise 1 metre olduğuna göre, ipin tamamının yanması kaç saniye sürer?

A) 8 B) 7 C) $\frac{19}{3}$ D) $\frac{17}{2}$ E) $\frac{15}{2}$

Handwritten calculations:

$$x = v \cdot t$$

$$10 = 2 \cdot t$$

$$t = 5$$

$$10 = 1 \cdot t$$

$$t = 10$$

Şekil 4.42

5. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile İlgili Problem için Soru Kağıdı Üzerinde Yaptığı Çözüm

5 cm

$x = v \cdot t$

$5 = 2 \cdot t$

$t = \frac{5}{2}$

1 metre

2 metre

$\frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$

Şekil 4.43

5. Öğrencinin, 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile İlgili Problem için Cevap Kağıdı Üzerinde Yaptığı Çözüm

4.10.2.4. Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

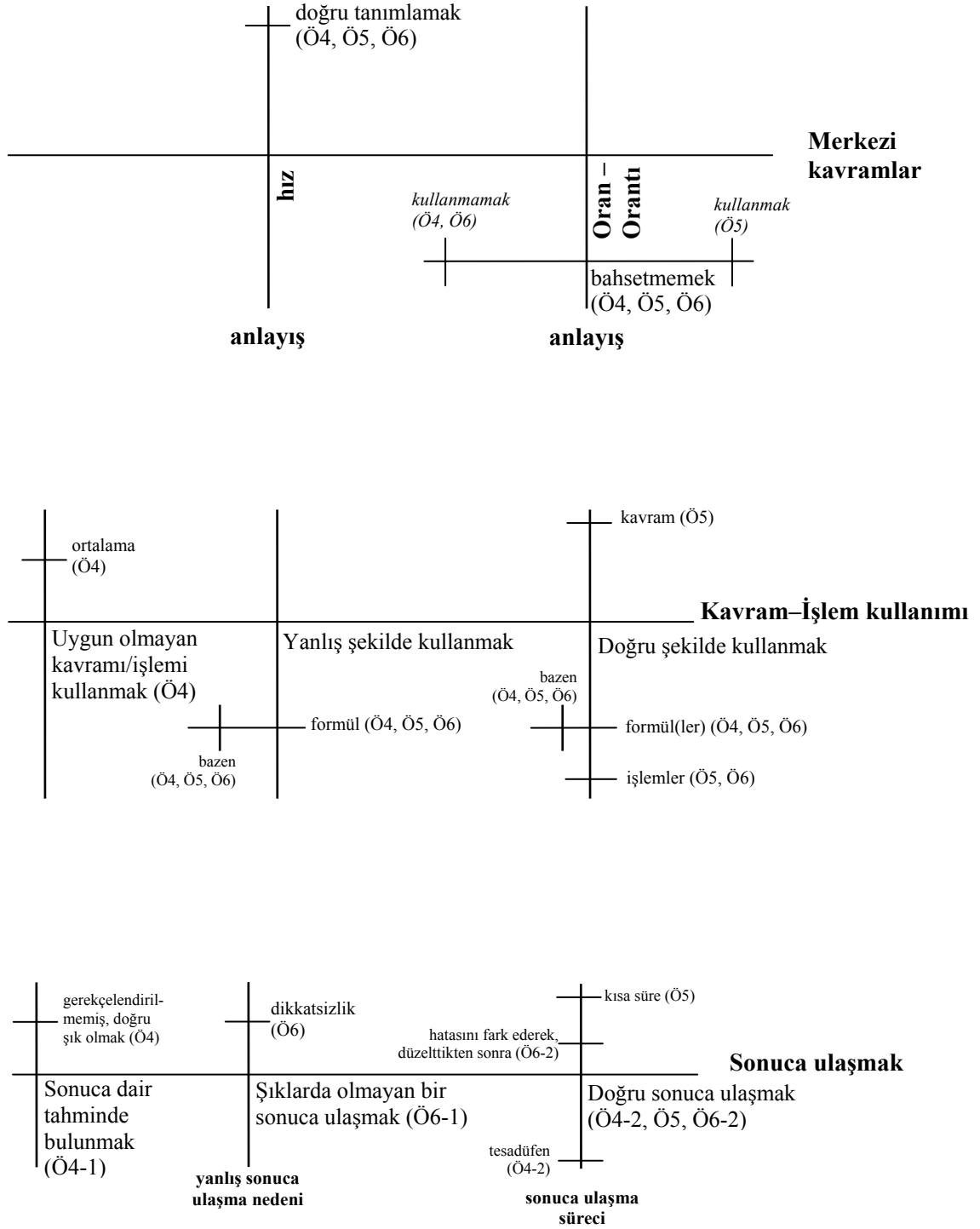
Ortaöğretim öğrencilerinin, 2. görüşmedeki “problemler” alt öğrenme alanı ile ilgili problemi çözme sürecinde; problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları, kullandıkları kavramlar–işlemler, bu kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları ve sonuca ulaşmaları ile ilgili çıkan kategoriler bir araya getirilerek; her bir öğrencinin, problemi çözme süreci Tablo 4.59’da özetlenmiş ve Şekil 4.44’de de eksenler üzerinde gösterilmiştir.

Tablo 4.59

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Özeti

Öğrenci no	Merkezi kavramlarla ilgili anlayışları	Kullandıkları kavramlar–işlemler	Kategoriler (Kavram–işlem kullanımı)	Kategoriler (Sonuca ulaşmak)	
4	Hız (doğru tanımlamak)	$t = \frac{x}{v}$ formülü (ipin ince tarafının yanma süresi için)	Uygun formülü doğru şekilde kullanmak	Cevap şıkkı konusunda (doğru) tahminde bulunmak	Tesadüfen doğru sonuca ulaşmak
		$t = \frac{x}{v}$ formülü (ipin kalın tarafının yanma süresi için)	Uygun formülü yanlış şekilde kullanmak		
		Ortalama	Uygun olmayan kavramı kullanmak		

5	Hız (doğru tanımlamak)	$t = \frac{x}{v}$ formülü (ipin ince tarafının yanma süresi için)	Uygun formülü doğru şekilde kullanmak		Doğru sonuca ulaşmak
		$t = \frac{x}{v}$ formülü (ipin kalın tarafının yanma süresi için)	Uygun formülü yanlış şekilde kullanmak		
		$x = v \cdot t$ formülü Çıkarma işlemi Oran–orantı $t = \frac{x}{v}$ formülü (ipin kalın tarafının sol yarısının yanma süresi için) Toplama işlemi	Uygun formülleri/ işlemleri / kavramları doğru şekilde kullanmak		
6	Hız (doğru tanımlamak)	$t = \frac{x}{v}$ formülü (ipin ince tarafının yanma süresi için) $x = v \cdot t$ formülü Çıkarma işlemi	Uygun formülleri/ işlemi doğru şekilde kullanmak		Doğru sonuca ulaşmak
		$v = v_1 + v_2$ formülü	Uygun formülü yanlış şekilde kullanmak (hatanın kaynağı)	Hatalı sonuçlar bulmak	
		$t = \frac{x}{v}$ formülü (ipin kalın tarafının sol yarısının yanma süresi için) Toplama işlemi	Uygun formülü/ işlemi kullanmak		
		$v = v_1 + v_2$ formülü $t = \frac{x}{v}$ formülü (ipin kalın tarafının sol yarısının yanma süresi için) Toplama işlemi	Uygun formülleri/ işlemi doğru şekilde kullanmak		



Şekil 4.44

Ortaöğretim Öğrencilerinin, 2. Görüşmedeki “Problemler” Alt Öğrenme Alanı ile ilgili Problemi Çözme Süreçlerinin Eksensel Olarak Kodlanması

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, 2. görüşmedeki “problemler” alt öğrenme alanı ile ilgili problemi çözme süreçleri özetlenecek olursa; bu soruda, katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, “hız” ve “oran-orantı” kavramlarıyla ilgili anlayışlarının incelenmesi amaçlanmıştır. Ancak 4. ve 6. öğrenci, “oran-orantı” kavramlarından isim olarak hiç bahsetmemiş ve kullanmamış, 5. öğrenci ise, kavramdan isim olarak bahsetmeden kullanmış olduğundan; üç öğrencinin de “oran-orantı” kavramlarıyla ilgili düşünceleri sorgulanamamıştır. “Hız” kavramı için ise; katılımcı öğrencilerin üçü de, doğru tanım yapabilmıştır.

Problemi çözme sürecinde; üç öğrenci de, ipin ince tarafının yanma süresini, $t = \frac{x}{v}$ formülünü kullanarak doğru şekilde hesaplamışlardır. İpin kalın tarafının ve dolayısıyla tamamının yanma süresini hesaplarken ise; öğrencilerin üçü de, hatalar/yanlışlar yapmışlardır. Bu öğrenci hatalarından/yanlışlarından kısaca bahsedilecek olursa; 4. öğrenci, kalın ipin yanma süresini, tek mumu dikkate alarak yanlış şekilde hesaplamış; ince ipin ve kalın ipin yanma sürelerini ayrı ayrı hesapladıktan hemen sonra, cevabın $\frac{15}{2}$ olduğu tahmininde bulunmuş ve ipin tamamının yanma süresini bulmak için, ince ve kalın iplerin yanma sürelerinin ortalamasını almıştır. 5. öğrenci de, ilk önce, kalın ipin yanma süresini, –4. öğrenci gibi– tek mumu dikkate alarak yanlış şekilde hesaplamış; 6. öğrenci ise, ilk başta, “bu soruda ateşin ilerleme hızının muma değil de, ipin ince/kalın olmasına bağlı olduğu”nu göz önünde bulundurmadan işlem yapmıştır. 5. öğrenci, hatasını hemen fark ederek düzeltirken; 6. öğrenci, şıklarda olmayan bir sonuca ulaştıktan sonra, çözümüne geri döndüğünde hatasını fark etmiş ve düzeltmiştir. 4. öğrenci ise, yanlış düşündüğünün farkında olmadan ve “ortalama alma” gibi yanlış işlemler yürüterek çözümünü tamamlamış ve tesadüfen de olsa doğru cevap şikkına ulaşmıştır. Sonuç olarak; her üç öğrenci de, doğru cevap şikkına ulaşmıştır. Öğrencilerin yapmış oldukları, yukarıda bahsedilen hataların kaynağı ile ilgili olarak; 4. öğrencinin hatasının, yanlış akıl yürütmeler sonucu ortaya çıkmış mantıksal bir hata olduğu; 5. ve 6. öğrencinin hatalarının ise, dikkatsizlikten kaynaklandığı söylenebilir. Çözüm sırasında, $t = \frac{x}{v}$ formülü haricinde kullanılan merkezi kavramlar ve işlemlerden söz edilecek olursa; 5. öğrenci, isim olarak hiç bahsetmese de, oran-orantı kavramlarını kullanmış ve rasyonel sayılarla toplama–çıkarma işlemleri yapmıştır. 6. öğrenci, $v = v_1 + v_2$

biçimindeki hız formülünü ve rasyonel sayılarla toplama–çıkarma işlemlerini kullanırken; 4. öğrenci, bu problemin çözümü için uygun olmayan “ortalama” kavramını kullanmıştır.

Ayrıca, 4. öğrencinin, çözüm esnasında söylediği “Ben ‘toplam 15 saniyede biter’ diye düşünmüştüm; ama $\frac{15}{2}=7,5$ ’tur diye düşünüyorum. Hani bunu da tam emin olarak yapmadım ama.” (4. öğrenci – 2. görüşme) şeklindeki sözleri; öğrencinin, cevabın 15 olduğunu düşündüğünü; fakat 15’i şıklarda göremeyince, E şıkkındaki $\frac{15}{2}$ sayısının doğru cevap olabileceği yönünde tahminde bulunmuş ve bu tahminine dayalı olarak mantık yürütmüş olabileceği düşüncesini akla getirmiştir. 4. öğrencinin, cevap şıkkı ile ilgili tahmin yürütmesinde ve ilk başta, şıklarda olmayan bir sonuca ulaşan 6. öğrencinin hatasını fark ederek düzeltmesinde; soruların şıklı verilmiş olmasının etkisi açıkça görülmektedir.

4.11. KATILIMCI İLKÖĞRETİM VE ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİNİN, PROBLEM ÇÖZME SÜRECİNDE, “PROBLEMİN İÇİNDE YER ALAN MERKEZİ KAVRAMLARLA İLGİLİ ANLAYIŞLARI”, “KAVRAM–İŞLEM KULLANIMLARI” VE “SONUCA ULAŞMALARI” ARASINDAKİ İLİŞKİLER İLE İLGİLİ BULGULAR

Her bir matematiksel problem için ayrı ayrı sunulan bulguların ardından; şimdi de, bu araştırmada yer verilen tüm matematiksel problemler dikkate alınarak, “katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problem çözme sürecinde, ‘problemnin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları’, ‘kavram–işlem kullanımları’ ve ‘sonuca ulaşmaları’ arasındaki ilişkiler”e yönelik bulgular ortaya konacaktır.

Öncelikle, bu araştırmada yer verilen 14 matematik sorusu için; “merkezi kavramlar ile ilgili anlayışlar”, “kavram–işlem kullanımı” ve “sonuca ulaşmak” adlı (ana) kategori eksenleri üzerinde yer alan tüm kategoriler listelenecektir. Daha sonra, 14 soru için çıkan tüm kategorilerin; “öğrenci numarası–görüşme numarası–soru numarası”na göre dağılımlarını gösteren bir tabloya yer verilecektir. Ardından da, bu tablodaki verilerin yardımıyla; genel olarak, katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problem çözme sürecinde, “problemnin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları”, “kavram–işlem kullanımları” ve “sonuca ulaşmaları” arasındaki ilişkilerden bahsedilecektir. Ancak ilişkilere dair bu bulgulara yönelik yorumlar ve tartışma, “Sonuçlar ve Tartışma” adlı bölümde yapılacaktır.

4.11.1. “Merkezi Kavramlar ile ilgili Anlayışlar”, “Kavram–İşlem Kullanımı” ve “Sonuca Ulaşmak” Adlı (Ana) Kategori Eksenleri Üzerinde Yer Alan Kategoriler

Bu araştırmada yer verilen 14 matematik sorusunun “merkezi kavramlar” adlı ana kategori eksenini üzerinde; o soruda sorgulanan matematiksel kavram sayısınca kategori bulunmaktadır. Her bir kategori için de, o matematiksel kavram ile ilgili öğrenci anlayışları dikkate alınarak; farklı alt kategoriler oluşturulmuştur. Bu alt kategorilerden başlıcaları; “tanımlayamamak”/“açıkla(ya)mamak”, “hatırlayamamak”, “bahsetmemek”, “kavram yanlışlığına sahip olmak”, “yanlış açıklamak/bilmek”, “eksik

açıklamak/tanımlamak/bilmek” ve “doğru açıklamak/tanımlamak/bilmek” şeklinde listelenebilir.

“Kavram–işlem kullanımı” adlı ana kategori ekseninde ise; toplam 9 kategori bulunmaktadır. Bu kategoriler; “uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmak”, “hiçbir kavramı kullanmamak”, “işlem hatası yapmak”, “uygun kavramı/işlemi yanlış şekilde kullanmak”, “uygun kavramı/işlemi eksik kullanmak”, “kısa bir çözüm yolu takip ederek, az sayıda kavram kullanmak”, “sezgisel çözüm yaparak, az sayıda kavram kullanmak”, “uygun kavramı/işlemi yeterince farkında olmadan kullanmak” ve “uygun kavramı/işlemi doğru şekilde kullanmak”tır.

“Sonuca ulaşmak” adlı ana kategori ekseninde çıkan tüm kategoriler listelenecek olursa; bu kategoriler, “sonuca ulaşmamak”, “iki şık arasından doğru şıkka ulaşmamak”, “ulaştığı iki şık arasında kararsız kalmak”, “sonuca dair *doğru/yanlış* tahminde bulunmak”, “şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmak”, “şıklarda olan yanlış sonuca ulaşmak”, “*tesadüfen* doğru sonuca ulaşmak” ve “doğru sonuca ulaşmak” olmak üzere toplam 8 kategoridir.

“Merkezi kavramlar ile ilgili anlayışlar”, “kavram–işlem kullanımı” ve “sonuca ulaşmak” adlı (ana) kategori eksenlerinde yer alan, yukarıda adı geçen alt kategorilerden ya da kategorilerden anlamca birbirine yakın olanlar Tablo 4.60’da gösterildiği şekilde birleştirilerek, sayıları azaltılmıştır; ayrıca bazıları isim olarak da kısaltılmıştır.

Tablo 4.60

Araştırmada Yer Verilen 14 Matematik Sorusu İçin; “Merkezi Kavramlar ile ilgili Anlayışlar”, “Kavram–İşlem Kullanımı” ve “Sonuca Ulaşmak” Adlı (Ana) Kategori Eksenleri Üzerinde Yer Alan Tüm Kategorilerin Listesi

(Ana) kategoriler	“Alt kategoriler” ya da “Kategoriler”	“Birleştirilmiş alt kategoriler” ya da “Birleştirilmiş kategoriler”
MERKEZİ KAVRAMLAR İLE İLGİLİ ANLAYIŞLAR	Bahsetmemek	Bahsetmemek
	Tanımlayamamak/Açıkla(ya)mamak	Açıklayamamak
	Hatırlayamamak	
	Kavram yanılgısına sahip olmak	Yanlış açıklamak
	Yanlış açıklamak/bilmek	
	Eksik açıklamak/tanımlamak/bilmek	Eksik açıklamak
	Doğru açıklamak/tanımlamak/bilmek	Doğru açıklamak

KAVRAM-İŞLEM KULLANIMI	Uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmak	Uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmak
	Hiçbir kavramı kullanmamak	Kavram kullanmamak
	İşlem hatası yapmak	İşlem hatası yapmak
	Uygun kavramı/işlemi yanlış şekilde kullanmak	(Uygun kavramı/işlemi) Yanlış şekilde kullanmak
	Uygun kavramı/işlemi eksik kullanmak	Eksik kullanmak
	Kısa bir çözüm yolu takip ederek, az sayıda kavram kullanmak	Az sayıda kavram kullanmak
	Sezgisel çözüm yaparak, az sayıda kavram kullanmak	
	Uygun kavramı/işlemi yeterince farkında olmadan kullanmak	Yeterince farkında olmadan kullanmak
	Uygun kavramı/işlemi doğru şekilde kullanmak	Doğru şekilde kullanmak
SONUCA ULAŞMAK	Sonuca ulaşamamak	Sonuca ulaşamamak
	İki şık arasından doğru şıkka ulaşamamak	İki şık arasında kararsız kalmak
	Ulaştığı iki şık arasında kararsız kalmak	
	Sonuca dair <i>doğru/yanlış</i> tahminde bulunmak	Sonuca dair <i>doğru/yanlış</i> tahminde bulunmak
	Şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmak	Şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmak
	Şıklarda olan yanlış sonuca ulaşmak	Şıklarda olan yanlış sonuca ulaşmak
	<i>Tesadüfen</i> doğru sonuca ulaşmak	<i>Tesadüfen</i> doğru sonuca ulaşmak
	Doğru sonuca ulaşmak	Doğru sonuca ulaşmak

14 matematik sorusu için; “merkezi kavramlar ile ilgili anlayışlar”, “kavram–işlem kullanımı” ve “sonuca ulaşmak” adlı (ana) kategori eksenleri üzerinde yer alan tüm kategoriler listelendikten sonra; 14 soru için çıkan tüm kategorilerin, “öğrenci numarası–görüşme numarası–soru numarası”na göre dağılımlarını gösteren bir tablo hazırlanmıştır (Tablo 4.61).

Tablo 4.61

14 Matematik Sorusu için Çıkan Tüm Kategorilerin, “Öğrenci Numarası–Görüşme Numarası–Soru Numarası”na göre Dağılımları

MERKEZİ KAVRAMLAR İLE İLGİLİ ANLAYIŞLAR	KAVRAM-İŞLEM KULLANIMI	SONUCA ULAŞMAK	İlköğretim öğrenci no– görüşme no– soru no	Ortaöğretim öğrenci no– görüşme no– soru no
Bahsetmemek / Doğru açıklamak	Uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmak Eksik kullanmak	Şıklarda olan yanlış sonuca ulaşmak	Ö1–1–1 (3/0) ⁴	
	Doğru şekilde kullanmak (Uygun kavramı/işlemi) Yanlış şekilde kullanmak Uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmak	Sonuca dair <i>doğru</i> tahminde bulunmak ⇒ <i>Tesadüfen</i> doğru sonuca ulaşmak		Ö4–2–4 (1/1)
	Eksik kullanmak Doğru şekilde kullanmak (Uygun kavramı/işlemi) Yanlış şekilde kullanmak	Şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmak ⇒ <i>Tesadüfen</i> doğru sonuca ulaşmak		Ö5–1–6 (2/1)
	Eksik kullanmak Doğru şekilde kullanmak Uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmak	Sonuca dair <i>yanlış</i> tahminde bulunmak ⇒ Sonuca ulaşamamak		Ö4–1–6 (1/2)
	Kavram kullanmamak	Sonuca ulaşamamak Sonuca dair <i>yanlış</i> tahminde bulunmak		Ö4–4–8 (2/2)

⁴ 1. görüşmedeki 1. sorunun içinde yer alan merkezi kavram sayısı 3+0=3 tür. 1. öğrencinin bahsetmediği kavram sayısı 3 ve doğru açıklayabildiği kavram sayısı da 0’dır.

MERKEZİ KAVRAMLAR İLE İLGİLİ ANLAYIŞLAR	KAVRAM-İŞLEM KULLANIMI	SONUCA ULAŞMAK	İlköğretim öğrenci no- görüşme no- soru no	Ortaöğretim öğrenci no- görüşme no- soru no
	Az sayıda kavram kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak		Ö4-2-2 (1/2) Ö4-1-4 (3/0)
	(Uygun kavramı/işlemi) Yanlış şekilde kullanmak $\Rightarrow$ Doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak		Ö5-2-4 (1/1)
	(Uygun kavramı/işlemi) Yanlış şekilde kullanmak $\Rightarrow$ Doğru şekilde kullanmak	Şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmak $\Rightarrow$ Doğru sonuca ulaşmak		Ö6-2-4 (1/1)
	İşlem hatası yapmak Doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak	Ö2-4-8 (1/2)	
	Doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak	Ö3-2-7 (4/0)	Ö6-1-4 (2/1)
Bahsetmemek / Eksik açıklamak / Doğru açıklamak	Doğru şekilde kullanmak Uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmak	Şıklarda olan yanlış sonuca ulaşmak	Ö1-1-4 (2/1/1) ⁵	
	Uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmak $\Rightarrow$ İşlem hatası yapmak $\Rightarrow$ Yeterince farkında olmadan kullanmak	Sonuca ulaşamamak $\Rightarrow$ Doğru sonuca ulaşmak		Ö4-1-2 (3/2/0)

⁵ 1. görüşmedeki 4. sorunun içinde yer alan merkezi kavram sayısı 2+1+1=4 tür. 1. öğrencinin; bahsetmediği kavram sayısı 2, eksik açıkladığı kavram sayısı 1 ve doğru açıklayabildiği kavram sayısı da 1'dir.

MERKEZİ KAVRAMLAR İLE İLGİLİ ANLAYIŞLAR	KAVRAM-İŞLEM KULLANIMI	SONUCA ULAŞMAK	İlköğretim öğrenci no- görüşme no- soru no	Ortaöğretim öğrenci no- görüşme no- soru no
	Doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak	Ö2-1-4 (1/1/2); Ö1-1-5 (1/2/2); Ö2-1-5 (2/1/2); Ö3-1-5 (2/2/1)	Ö5-4-8 (1/1/2) Ö6-1-6 (1/1/1)
Bahsetmemek / Açıklayamamak / Eksik açıklamak	Doğru şekilde kullanmak İşlem hatası yapmak (Uygun kavramı/işlemi) Yanlış şekilde kullanmak	<i>Tesadüfen</i> doğru sonuca ulaşmak ⇒ Şıklarda olan yanlış sonuca ulaşmak ⇒ İki şık arasında kararsız kalmak	Ö1-2-7 (2/1/1)	
Bahsetmemek / Açıklayamamak / Eksik açıklamak / Doğru açıklamak	Doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak	Ö2-2-7 (1/1/1/1)	
Açıklayamamak / Doğru açıklamak	Doğru şekilde kullanmak	İki şık arasında kararsız kalmak ⇒ Doğru sonuca ulaşmak	Ö2-4-2 (1/4)	
	Doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak	Ö2-1-1 (2/1); Ö1-4-2 (1/4);	Ö6-2-2 (1/2)

MERKEZİ KAVRAMLAR İLE İLGİLİ ANLAYIŞLAR	KAVRAM-İŞLEM KULLANIMI	SONUCA ULAŞMAK	İlköğretim öğrenci no- görüşme no- soru no	Ortaöğretim öğrenci no- görüşme no- soru no
			Ö1-2-3 (1/0)	
Açıklayamamak / Eksik açıklamak / Doğru açıklamak	Doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak		Ö5-2-2 (1/1/1)
Yanlış açıklamak / Doğru açıklamak	İşlem hatası yapmak $\Rightarrow$ Doğru şekilde kullanmak	Şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmak $\Rightarrow$ Sonuca dair <i>yanlış</i> tahminde bulunmak $\Rightarrow$ Doğru sonuca ulaşmak		Ö4-1-3 (1/1)
	Doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak	Ö3-2-3 (1/0)	
Yanlış açıklamak / Eksik açıklamak / Doğru açıklamak	(<i>Uygun kavramı/işlemi</i>) Yanlış şekilde kullanmak	Sonuca ulaşamamak	Ö1-4-8 (1/1/1)	
Eksik açıklamak / Doğru açıklamak	Uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmak $\Rightarrow$ Doğru şekilde kullanmak	Sonuca ulaşamamak $\Rightarrow$ Doğru sonuca ulaşmak		Ö5-1-2 (3/2)
	İşlem hatası yapmak $\Rightarrow$	Şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmak		Ö5-1-3 (1/1)

MERKEZİ KAVRAMLAR İLE İLGİLİ ANLAYIŞLAR	KAVRAM-İŞLEM KULLANIMI	SONUCA ULAŞMAK	İlköğretim öğrenci no- görüşme no- soru no	Ortaöğretim öğrenci no- görüşme no- soru no
	Doğru şekilde kullanmak	⇒ Doğru sonuca ulaşmak		
	Doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak	Ö3-1-1 (2/1); Ö3-4-2 (1/4); Ö2-2-3 (1/0); Ö3-4-8 (1/2)	Ö6-1-2 (1/4)
Doğru açıklamak	Doğru şekilde kullanmak	Doğru sonuca ulaşmak	Ö3-1-4 (4)	Ö6-1-3 (2); Ö6-4-8 (4); Ö5-1-4 (3)

Tablo 4.61'deki verilerin yardımıyla; ilk önce, katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problem çözme sürecinde;

- “problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları” ve “kavram–işlem kullanımları” arasındaki ilişkiler ile ilgili bulgular;
- “problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları” ve “sonuca ulaşmaları” arasındaki ilişkiler ile ilgili bulgular;
- “kavram–işlem kullanımları” ve “sonuca ulaşmaları” arasındaki ilişkiler ile ilgili bulgular

ayrı ayrı ele alınacaktır. Ancak ilişkiler ile ilgili bu bulgulara yönelik yorumlar ve tartışma, “Sonuçlar ve Tartışma” adlı bölümde yapılacaktır. “Sonuçlar ve Tartışma” bölümünde; ilişkilere dair bütün bu bulguların ayrı ayrı yorumlanmasının ve tartışılmasının ardından da, genel olarak, katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problem çözme sürecinde; “problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları”, “kavram–işlem kullanımları” ve “sonuca ulaşmaları” arasındaki ilişkiler ortaya konacaktır.

4.11.2. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Problem Çözme Sürecinde, “Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla ilgili Anlayışları” ve “Kavram–İşlem Kullanımları” Arasındaki İlişkiler ile ilgili Bulgular

Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri; birçok problemin çözümünde, problemin içinde yer alan bazı merkezi kavramlardan isim olarak hiç bahsetmemişlerdir. Bu nedenle; o öğrencilerin o kavramlarla ilgili düşünceleri sorgulanamamış ve dolayısıyla ortaya çıkarılamamıştır. İsim olarak hiç bahsedilmeyen ve dolayısıyla sorgulanamayan kavramlar, sorudan soruya ve öğrenciden öğrenciye değişiklik göstermiştir. Çözüm sürecinde, öğrencinin isim olarak bahsetmediği, ismi hiç geçmeyen bu kavramlara dair öğrencilerin informal tanımları öğrenilemediğinden; öğrencinin o kavrama dair anlayışları “bahsetmemek” şeklinde değerlendirilmiştir. “Bahsetmemek” kategorisi; “öğrencinin o kavramın tanımını bilmediği, tanımlayamadığı veya yanlış şekilde tanımladığı” anlamına gelmemektedir ve hiçbir zaman da, o şekilde yorumlanmamıştır.

Katılımcı öğrencilerin, kavramdan isim olarak bahsetmedikleri halde; kavramı çözüm sürecinde kullandıkları birçok soru olmuştur (*örneğin Ö3-1-5; Ö5-2-4 vs.*).

Katılımcı öğrencinin, isim olarak çözüm için uygun olmayan bir kavramdan bahsetmesine rağmen; –bahsettiği kavrama yönelik değil de– çözüm için uygun olan kavrama yönelik işlemler yürüttüğü birkaç durumla da karşılaşmıştır. “En büyük ortak bölen” kavramının kullanımını gerektiren “doğal sayılar” ile ilgili bir problemde; 4. öğrenci, ekok–ebob kavramlarını karıştırdığını ifade etse ve bu problemde ekok hesabı yapacağını söylese de, aslında ebob hesaplamaya yönelik işlemler yürütmüştür (*Ö4-1-2*). Çözüm için “Pisagor bağıntısı”nın uygulanması gereken, “çokgenler–dörtgenler” ile ilgili bir başka problemde ise; 5. öğrenci, Öklid bağıntısını uygulayacağını söylemiş, fakat “Pisagor bağıntısı”nı kullanmıştır. 5. öğrenci, 4. görüşme süresince “Pisagor bağıntısı”ndan “Öklid bağıntısı” olarak bahsetmiş; ancak bu durumun, kavram kargaşasından değil de, öğrencinin o süreçte bağıntı isimlerini karıştırmasından kaynaklandığı, tamamlayıcı görüşme ile anlaşılmıştır (*Ö5-4-8*).

Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri, birçok soruda, problemin içinde yer alan bazı merkezi kavramlara dair eksik/yanlış bilgileri olmasına veya bazı kavramların anlamına dair herhangi bir açıklama yapamamalarına rağmen; çözüm için gerekli olan kavramları–işlemleri doğru şekilde kullanabilmişlerdir (*örneğin Ö2-1-1; Ö2-4-2; Ö1-2-3; Ö3-2-3; Ö5-2-2; Ö6-2-2 vs.*):

- “En küçük ortak kat” kavramının kullanımını gerektiren “doğal sayılar” ile ilgili bir problemde; 2. öğrenci, “ortak kat” ve “ekok” kavramlarını tanımlayamamış; ancak çözüm için gerekli tek işlem olan “ekok hesaplama algoritması”nı doğru şekilde kullanabilmiştir (*Ö2-1-1*).
- 2. öğrenci, 4. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili soruda “rakam” kavramını tanımlayamamış; ancak bu durum, problem ifadesinde geçen “rakamlarının birbirinden farklı olduğu” bilgisini ve diğer özellik–kuralları kullanmasına engel olmamıştır (*Ö2-4-2*).
- 2. görüşmedeki “rasyonel sayılar” ile ilgili soruda; 1. öğrenci, “rasyonel sayı” kavramı için herhangi bir tanımlama yapamasa da; kavramla ilgili işlemleri doğru biçimde yürütebilmiştir (*Ö1-2-3*).

- Yine aynı soruda, yani 2. görüşmedeki “rasyonel sayılar” ile ilgili soruda; 3. öğrenci, “rasyonel sayı” kavramına dair yanlış bir tanımlama yapsa (*daha doğrusu eksik tanım yapsa, aynı zamanda kavram yanlışlığına sahip olsa*) da; kavramla ilgili işlemleri doğru biçimde yürütebilmiştir (Ö3–2–3).
- Ortaöğretim öğrencilerinden de birkaç örnek verilecek olursa; 2. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili soruda, 5. öğrenci, “tamsayı” için eksik tanım yapmasına ve denklem–özdeşlik farkına dair bir şey söyleyememesine rağmen; çözüm için gerekli olan kavramları–işlemleri doğru şekilde kullanabilmiştir (Ö5–2–2). Aynı şekilde, 6. öğrenci de, denklem–özdeşlik ilişkisini açıklayamasa da; ilgili kavramları–işlemleri doğru şekilde kullanabilmiştir (Ö6–2–2).

Bir soruda yer alan merkezi kavramlarla ilgili tek tür değil de, farklı kategorilerde anlayışları (“bahsetmemek / eksik açıklamak / doğru açıklamak” gibi) olan katılımcı öğrencilerin bu anlayışları; kavram–işlem kullanımları hakkında bir fikir vermemektedir. Diğer bir deyişle, kavram–işlem kullanımları da, katılımcı öğrenciden öğrenciye değişiklik gösterebilmektedir (*örneğin Ö1–1–4; Ö4–1–2; Ö2–1–4 vs.*).

Problemin içinde yer alan tüm merkezi kavramlarla ilgili doğru açıklamalar yapan katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri ise; çözüm için uygun kavramları–işlemleri doğru şekilde kullanmışlardır (Ö3–1–4; Ö6–1–3; Ö6–4–8; Ö5–1–4).

4.11.3. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Problem Çözme Sürecinde, “Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla ilgili Anlayışları” ve “Sonuca Ulaşmaları” Arasındaki İlişkiler ile ilgili Bulgular

Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri, birçok problemin içinde yer alan bazı merkezi kavramlara dair eksik/yanlış bilgiye sahip olmalarına, bazı kavramların anlamını açıklayamamalarına veya bazı kavramlardan isim olarak bahsetmemelerine rağmen; doğrudan, doğru sonuca ulaşabilmişlerdir (*örneğin Ö6–1–6; Ö2–1–1; Ö1–4–2; Ö3–2–3 vs.*):

- 1. görüşmedeki “olasılık” ile ilgili soruda 6. öğrenci; merkezi kavramlardan “olasılık” kavramını doğru tanımlamış, “olay” kavramını eksik açıklamış ve

“örneklem uzay” kavramından hiç bahsetmemiştir; çözümünün sonunda ise, doğru sonuca ulaşmıştır (Ö6-1-6).

- Merkezi kavramları “kat”, “ortak kat” ve “en küçük ortak kat” olan “doğal sayılar” ile ilgili bir soruda; 2. öğrenci, “ortak kat” ve “ekok” kavramlarının anlamlarına dair bir açıklama yapamamıştır. Ancak kavram bilgilerindeki bu eksikliklere rağmen; yine de, doğru sonuca ulaşabilmiştir (Ö2-1-1).
- 1. öğrenci, 4. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili soruda; “3 ile bölünebilme kuralı”nı bilmemesine rağmen, doğru şıkka ulaşmıştır (Ö1-4-2).
- 3. öğrenci, 2. görüşmedeki “rasyonel sayılar” ile ilgili soruda; “rasyonel sayı” kavramına dair yanlış bir tanım yapmasına (*daha doğrusu eksik tanım yapmasına, aynı zamanda da kavram yanlışlığına sahip olmasına*) rağmen; çözüm sonunda doğru sonucu bulmuştur (Ö3-2-3).

Bir soruda yer alan merkezi kavramlarla ilgili tek tür değil de, farklı kategorilerde anlayışları (“bahsetmemek / eksik açıklamak / doğru açıklamak” gibi) olan katılımcı öğrencilerin bu anlayışları; sonuca ulaşmalarına dair bir fikir vermemektedir. Diğer bir deyişle; “sonuca ulaşmaları” ile ilgili kategoriler de, katılımcı öğrenciden öğrenciye değişiklik gösterebilmektedir (*örneğin Ö1-1-4; Ö4-1-2; Ö5-4-8 vs.*).

Bir sorudaki merkezi kavramların bir kısmı ile ilgili eksik açıklama yapan, diğerlerini ise doğru şekilde açıklayan katılımcı öğrencilerin; direkt olarak doğru sonuca ulaştıkları 5 durumla (Ö3-1-1; Ö3-4-2; Ö2-2-3; Ö3-4-8; Ö6-1-2) karşılaşmıştır. Ayrıca ilk önce sonuca ulaşamaları ya da şıklarda olmayan bir sonuca ulaşsalar bile, daha sonra doğru sonuca ulaştıkları da 2 durumla (Ö5-1-2; Ö5-1-3) karşılaşmış; zaten “sonuca ulaşmaları” ile ilgili bunlar dışında bir kategori de çıkmamıştır.

Problemin içinde yer alan tüm merkezi kavramlarla ilgili doğru açıklamalar yapan katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri ise; o problemi çözme süreci sonunda, direkt olarak doğru sonuçlara ulaşmışlardır (Ö3-1-4; Ö6-1-3; Ö6-4-8; Ö5-1-4).

4.11.4. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Problem Çözme Sürecinde, “Kavram–İşlem Kullanımları” ve “Sonuca Ulaşmaları” Arasındaki İlişkiler ile ilgili Bulgular

Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, çözüm sürecinde, uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmalarına (Ö4–2–4) ya da uygun kavramı/işlemi eksik veya yanlış şekilde kullanmalarına (Ö5–1–6 vs.) ya da uygun kavramı/işlemi yeterince farkında olmadan kullanmalarına (Ö4–1–2) rağmen; problem çözme sürecinin sonunda doğru sonuca ulaştıkları durumlara rastlanmıştır.

- 4. öğrenci, 2. görüşmedeki “problemler” alt öğrenme alanı ile ilgili 4. problemin çözümü sırasında; hem uygun bir formülü ($t = \frac{x}{v}$ formülü) yanlış şekilde kullanmış olmasına, hem de çözüm için uygun olmayan bir kavram olan “ortalama”yı kullanmış olmasına rağmen; çözümünün sonunda, tesadüfen doğru cevap şıkkına ulaşmıştır (Ö4–2–4).
- 5. öğrenci, 1. görüşmedeki “olasılık” ile ilgili olan 6. problemin çözümünün farklı aşamalarında; hem uygun kavramı (1. çark için “olay kümesi”) eksik kullanmış, hem de başka bir uygun kavramı (2. çarkın “örneklem uzayının eleman sayısı”) yanlış şekilde kullanmış olmasına rağmen; tesadüfen, doğru olan sonuç şıkkına ulaşmıştır (Ö5–1–6).
- 4. öğrenci, 1. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili problemi çözerken; (çözüm için uygun olmayan) ekok hesabı yapacağını söylemesine rağmen; aslında (çözüm için uygun olan) ebob hesaplamaya yönelik işlemler yürütmüş ve sonuç olarak, doğru cevabı elde etmiştir. Diğer bir deyişle; 4. öğrenci, hangi kavramı kullandığının yeterince farkında olmasa da, kavramı kullanabilmiş ve sonuçta, doğru şıkka ulaşabilmiştir (Ö4–1–2).

Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, çözüm sürecinde, beklenenden daha az sayıda kavram kullanmalarına rağmen; (direkt olarak) doğru sonuca ulaştıkları iki durumla (Ö4–2–2; Ö4–1–4) karşılaşmıştır.

- 4. öğrenci, 2. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili 2. problemi; değişkenlere değer verme ve şıklarda yerine koyma yöntemiyle, kısa yoldan çözmüş ve çok kısa bir süre içerisinde doğru şıkkı bulmuştur. Çözüm sürecinde; (kavram–işlem olarak) sadece asal sayı olma şartından (özelliklerinden) faydalanmıştır (Ö4–2–2).

- Yine 4. öğrenci, 1. görüşmedeki “problemler” alt öğrenme alanı ile ilgili olan 4. problemin çözümünde; sadece “kat” kavramını kullanarak, sezgisel çözüm yapmış olsa da, doğru sonuca ulaşmıştır (Ö4-1-4).

Tablo 4.61’de, problem çözme sürecinin sonunda, şıklarda olan yanlış sonuca ulaşan, iki şık arasında kararsız kalan ya da sonuca ulaşamayan katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, o problem için “kavram-işlem kullanımları” dikkate alındığında; bu öğrencilerin, çözüm sürecinin herhangi bir aşamasında ya uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmış (Ö1-1-1; Ö1-1-4; Ö4-1-6), ya uygun kavramı/işlemi eksik (Ö4-1-6) veya yanlış şekilde kullanmış (Ö1-2-7; Ö1-4-8) ya da hiçbir kavramı kullanmamış (Ö4-4-8) oldukları görülmüştür. Aşağıda, bu durumlar için birkaç örnek verilecektir:

- 1. görüşmedeki “çokgenler” ile ilgili 4. soruda; 1. öğrenci, çözüm için uygun olmayan “dörtgeni, bir köşesi etrafında döndürme” işlemini kullanmış ve yanlış çözüm yolundan, şıklarda olan yanlış sonuca ulaşmıştır (Ö1-1-4).
- 4. öğrenci, 1. görüşmedeki “olasılık” ile ilgili olan 6. soruda; 1. çark için olasılık hesaplama sürecinde olay kümesini belirlerken, “her iki çevirişte de 3 gelmesi” olayını hesaba katmamış (yani “*olay kümesi*” kavramını eksik kullanmış); ayrıca çözümün son aşamasında uygun olmayan “toplama işlemi”ni kullanmış; ancak toplayacağı iki sayıda kararsız kalmış ve herhangi bir sonuca ulaşamamıştır (Ö4-1-6).
- 1. öğrenci, 2. görüşmedeki “sözel problemler” ile ilgili 7. problemin çözümünde; ilk başta, bölme sırasında işlem hatası yapmış olmasına ve “ondalık kesirlerde sıralama”yı yanlış şekilde kullanmış olmasına (yani “*ondalık kesirlerde sıralama*” ile ilgili olarak yapılmış olan yanlış bilgileri kullanmış olmasına) rağmen; – *tesadüfen de olsa*– doğru cevap şikkına ulaşmıştır. Fakat daha sonra, ikinci bir çözüm yolu takip ettiğinde; bu kez de, “rasyonel sayılarda sıralama”yı yanlış şekilde kullanmış ve farklı (yanlış) bir sonuç bulmuştur. Ulaştığı bu iki şık arasında kararsız kalan 1. öğrenci; hangisinin doğru şık olduğuna karar verememiştir (Ö1-2-7).
- 4. görüşmedeki “çokgenler-dörtgenler” ile ilgili 8. soruda, 4. öğrenci; kendisinin bu problemi çözebilmesi için, verilenleri yeterli bulmadığını ifade etmiş ve problemin çözümüne dair hiç fikir yürütememiştir. Çözümüne dair hiçbir kavramı-işlemi kullanamayan 4. öğrenci, problemi çözememiş ve sonuca ulaşamamıştır (Ö4-4-8).

V. BÖLÜM

SONUÇLAR, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu araştırmada yer verilen 14 matematik sorusu dikkate alınarak; “merkezi kavramlar ile ilgili anlayışlar”, “kavram–işlem kullanımı” ve “sonuca ulaşmak” adlı (ana) kategori eksenleri üzerinde çıkan farklı kategoriler belirlenmiştir.

“Merkezi kavramlar” adlı ana kategori ekseninde; o soruda sorgulanan matematiksel kavram sayısı kadar kategori yer almaktadır. Bu kategorilerin her biri için, o matematiksel kavram ile ilgili öğrenci anlayışları esas alınarak oluşturulmuş olan başlıca alt kategoriler aşağıda listelenmiştir:

- Bahsetmemek;
- Açıklayamamak;
- Yanlış açıklamak;
- Eksik açıklamak;
- Doğru açıklamak.

“Kavram–işlem kullanımı” adlı ana kategori ekseninde çıkmış olan başlıca kategoriler de;

- Uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmak;
- Kavram kullanmamak;
- İşlem hatası yapmak;
- (Uygun kavramı/işlemi) Yanlış şekilde kullanmak;
- (Uygun kavramı/işlemi) Eksik kullanmak;
- Az sayıda kavram kullanmak;

- (Uygun kavramı/işlemi) Yeterince farkında olmadan kullanmak;
- (Uygun kavramı/işlemi) Doğru şekilde kullanmak

şeklinde sıralanabilir.

“Sonuca ulaşmak” adlı ana kategori ekseninde yer alan başlıca kategoriler ise, şunlardır:

- Sonuca ulaşmamak;
- İki şık arasında kararsız kalmak;
- Sonuca dair *doğru/yanlış* tahminde bulunmak;
- Şıklarda olmayan bir sonuca ulaşmak;
- Şıklarda olan yanlış sonuca ulaşmak;
- *Tesadüfen* doğru sonuca ulaşmak;
- Doğru sonuca ulaşmak.

5.1.1. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Problem Çözme Sürecinde, “Problemın İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla ilgili Anlayışları” ve “Kavram–İşlem Kullanımları” Arasındaki İlişkiler ile ilgili Sonuçlar ve Tartışma

Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri; birçok problemin çözümü esnasında, problemin içinde yer alan merkezi kavramların bir kısmından isim olarak hiç bahsetmemişler ve dolayısıyla o öğrencilerin o kavramlarla ilgili anlayışları ortaya çıkarılamamıştır. Çözüm sürecinde ismi hiç geçmeyen ve dolayısıyla sorgulanamayan kavramlar, sorudan soruya ve öğrenciden öğrenciye değişiklik göstermiştir. “Bahsetmemek” kategorisi; “öğrencinin o kavramın tanımını bilmediği, tanımlayamadığı veya yanlış şekilde tanımladığı” anlamına gelmemektedir ve hiçbir zaman da, o şekilde yorumlanmamıştır.

- 1) Katılımcı öğrencilerin, kavramdan isim olarak hiç bahsetmedikleri halde; çözüm sürecinde o kavramı kullandıkları sorular olmuştur. Bu duruma birkaç örnek verilecek olursa;

- 3. öğrenci, 1. görüşmedeki “olasılık” ile ilgili 5. problemin çözümü sırasında, “örnek uzay” ve “olay” kavramlarından bahsetmemiş olsa da; çözümünde bu iki kavramdan da faydalanmıştır.
- Benzer olarak, 5. öğrenci de, 2. görüşmedeki “problemler” alt öğrenme alanı ile ilgili 4. problemi çözerken; “oran–orantı” kavramlarını, isim olarak bahsetmeden kullanmıştır.

Başka bir deyişle; **katılımcı öğrencilerin, çözüm esnasında bazı merkezi kavramlardan isim olarak bahsetmemeleri; illaki çözüm sürecinde o kavramı kullanmadıkları anlamına gelmemektedir.**

2) Katılımcı öğrencinin, isim olarak çözüm için uygun olmayan bir kavramdan bahsetmesine rağmen; –bahsettiği kavrama yönelik değil de– çözüm için uygun olan kavrama yönelik işlemler yürüttüğü birkaç durumla da karşılaşmıştır:

- Çözüm için “en büyük ortak bölen” kavramının kullanımı gereken, “doğal sayılar” ile ilgili bir problemde; 4. öğrenci, ekok–ebob kavramlarını karıştırdığını ifade etse ve bu problemde ekok hesabı yapacağını söylese de, aslında ebob hesaplama yönelik işlemler yürütmüştür. “O zaman, burada o iki sayının neyini bulduğu” sorulduğunda; *“Yine okek’ini galiba. Hep karıştırıyorum ama bunları.”* (4. öğrenci – 1. görüşme) şeklinde yanıt vermiştir. Daha sonra da, *“okek’ini buluyorum. Yani “insan ilk dediğinde doğru der, her zaman” diye düşünüyorum. Yani aklından ilk geçirdiği...”* (4. öğrenci – 1. görüşme) diyen 4. öğrenci; insanın aklından ilk geçirdiğinin her zaman doğru olduğu düşüncesiyle, sayıların ekok’unu bulduğunu yinelemiştir. Kısacası; **4. öğrencinin zihninde ekok–ebob kavramları yapılanmamış olmasına rağmen; hangi kavramı kullandığının farkında olmadan kavramı kullanabilmiştir (Ö4–1–2).** Elde edilen bu sonuç; *–katılımcı öğrencilerin öğretim düzeyleri ve matematiksel kavram farklı olsa da–* Grundmeier, Hansen ve Sousa (2006) tarafından gerçekleştirilmiş araştırmadan çıkan “yaptıkları şeyin ne olduğunun ve neden yaptıklarının yeterince farkında olmadıkları” sonucunu destekler niteliktedir.
- “Pisagor bağıntısı”nın uygulamasını gerektiren, “çokgenler–dörtgenler” ile ilgili bir başka problemde de; 5. öğrenci, “Öklid bağıntısı”nı kullanacağını ifade

etmiş, ancak “Pisagor bağıntısı”nı kullanmıştır. 5. öğrenci, 4. görüşme süresince “Pisagor bağıntısı”ndan “Öklid bağıntısı” diye bahsetmiş; fakat bu durumun, kavram kargaşasından değil de, öğrencinin o süreçte bağıntı isimlerini karıştırmamasından kaynaklandığı, tamamlayıcı görüşmede anlaşılmıştır (Ö5–4–8).

- 3) Hem katılımcı ilköğretim hem de ortaöğretim öğrencileri, birçok soruda, problemin içinde yer alan bazı merkezi kavramlara dair eksik/yanlış bilgiye sahip olmalarına veya bazı kavramların anlamına dair herhangi bir açıklama yapamamalarına rağmen; çözüm için gerekli olan kavramları-işlemleri doğru şekilde kullanabilmişlerdir (örneğin Ö2–1–1; Ö2–4–2; Ö1–2–3; Ö3–2–3; Ö5–2–2; Ö6–2–2 vs.). **Aşağıda, bu durumun geçerli olduğu birtakım örnekler sunulacaktır. Bu sırada, aynı zamanda, öğrenci açıklamalarından alıntılara ve araştırmacı-öğrenci konuşmalarına yer verilerek; öğrencilerin kavramlara dair eksik/yanlış anlayışlarından ve açıklama yapamadıkları kavramlardan da bahsedilecektir:**

- Çözüm için “en küçük ortak kat” kavramının kullanılması gereken “doğal sayılar” ile ilgili bir problemde; 2. öğrenci, “ortak kat” ve “ekok” kavramlarına dair tanım yapamamış; fakat çözüm için gerekli olan “ekok hesaplama algoritması”nı doğru şekilde kullanabilmiştir (Ö2–1–1).
- Problemin, belki “ekok” kavramından yararlanılarak çözülebileceği yorumunda bulunan 2. öğrenci ile araştırmacı arasında, “ekok” kavramının anlamına ilişkin olarak aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Görüşmeci: “Ekok” nedir?

Öğrenci: “En küçük ortak kat” diyeyim.

Görüşmeci: Bunu açıklar mısın bana biraz?

Öğrenci: Hiçbir şey hatırlamıyorum. 6. sınıf konusu olduğu için; öyle hiç geri dönmedim. (2. öğrenci – 1. görüşme)

2. öğrenci, “ekok” kısaltmasının açılımını doğru şekilde ifade edebilse de; “ekok” kavramının ne anlama geldiğine dair bir açıklama yapamamıştır. Buna gerekçe olarak ise; “ekok” kavramının 6. sınıfta öğrenilen bir kavram olmasını ve kendisinin, 6. sınıf kavramlarını tekrar çalışmamış olmasını göstermiştir.

Benzer şekilde; “ortak kat” kavramı için de, “*Ya, onu tam olarak bilmiyorum. Böyle bir, fazla incelemedim onları.*” (2. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, bir tanımlama yapamamıştır.

- 2. öğrencinin, 4. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili soruda “rakam” kavramını tanımlayamaması; problem ifadesinde geçen “rakamlarının birbirinden farklı olduğu” bilgisini ve diğer özellik–kuralları kullanmasına engel olmamıştır (Ö2–4–2).

- 2. öğrenci, “rakam” tanımı üzerine biraz düşündükten sonra,

“(3 sn. sessizlik) Sayılar yani. Normal, ... (anlaşılamadı) öyle. Ama şey, “rakam” deyince; ben yanlış mı biliyorum, onun tanımını bilmiyorum ama. İlkokuldayken, onu... ya unutuyorum onları. ... Şey, böyle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; onlar ‘sayma sayıları’ oluyordu galiba.” (2. öğrenci – 4. görüşme)

sözleriyle; tanımı bilmediğini, “sayma sayıları” ile karıştırdığını ifade etmiştir. Ayrıca, “*Yani ilkokuldayken, hep böyle şey oluyordu da; şimdi hiç öyle bir ayırım yapmıyorum. Hani ‘rakam’ olarak verilmiyor bize.*” (2. öğrenci – 4. görüşme) diyerek; artık derslerde “rakam” tanımını işlemediklerini dile getirmiştir ve devamında, araştırmacı ile 2. öğrenci arasında aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Görüşmeci: Yani “en büyük rakam kaçtır?” desem; söyleyemez misin?

Öğrenci: Söyleyemem. Yani bilmi... şimdi... Öyle... yani normalde 9; ama o sayma sayısı mı hatırlamıyorum işte. Hep karıştırıyorum onları.

Görüşmeci: Hım, tamam.

Öğrenci: Ama 9 mu... yani nasıl oluyor? Anlamadım; ben onları bilmiyorum. Sayma sayısı... sayma sayıları, 0’dan 9’a... Yok! 1’den 9’a kadar olması lazım. Öyle bir ayırım vardı. (2. öğrenci – 4. görüşme)

Bu konuşmada da, “rakam” ile “sayma sayısı” kavramlarını karıştırdığını yineleyen 2. öğrencide; aslında “sayma sayısı” kavramının da yapılanmamış olduğu dikkati çekmiştir.

- 2. görüşmedeki “rasyonel sayılar” ile ilgili soruda; 1. öğrenci, “rasyonel sayı” kavramına dair herhangi bir tanım yapamasa da; kavramla ilgili işlemleri doğru şekilde yürütebilmiştir (Ö1–2–3).
- “Rasyonel sayı” kavramı ile ilgili olarak; araştırmacı–1. öğrenci diyalogu aşağıdaki şekildedir:

Görüşmeci: Peki, burada yaptığın, burada gördüğümüz bu sayılar, mesela $\frac{4}{5}$;

bunların ismini biliyor muyuz?

Öğrenci: Amaan! Ecel soruları. (2 sn. sessizlik) Eyy, kesir sayıları.

Görüşmeci: Hım, “kesir” mi diyorsun?

Öğrenci: Yani kesirli sayılar.

Görüşmeci: Onu bir hatırlayalım. Neydi “kesirli sayılar”?

Öğrenci: (Bıkmış bir ses tonuyla:) “Amaan!” Şimdi, reel sayılar var, rasyonel sayılar var, tamsayılar var. (Öğrenci, aynı zamanda soru kağıdına alt alta “reel”, “rasyonel”, “tamsayılar” yazdı.) (3 sn. sessizlik) Başka ne var?

Görüşmeci: Şimdi, bunlara “kesirli sayılar” dedin, değil mi?

Öğrenci: Evet.

Görüşmeci: Hangisi oluyor yani bunlardan? Ya da o, ayrı bir kategori mi?

Öğrenci: İsimlerini hatırlamıyorum ki! (1. öğrenci – 2. görüşme)

Yukarıdaki diyalog dikkate alındığında; 1. öğrencinin zihninde, sayıların özelliklerinin ve sınıflandırılmasının tam olarak yapılanmamış olduğu; ayrıca öğrencinin, sayıların sınıflandırılması konusunda konuşmaktan pek hoşlanmadığı anlaşılmaktadır.

- Yine aynı soruda, yani 2. görüşmedeki “rasyonel sayılar” ile ilgili soruda; 3. öğrenci, “rasyonel sayı” kavramına dair yanlış bir tanımlama yapmasına (*daha doğrusu eksik tanım yapmasına, aynı zamanda da kavram yanılgısı olmasına*) rağmen; kavramla ilgili işlemleri doğru şekilde yürütebilmiştir (Ö3–2–3).
- “Rasyonel sayı” kavramı ile ilgili olarak; araştırmacı ile 3. öğrenci arasında aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Görüşmeci: Bu $\frac{1}{5}$; bu tür sayılara ne diyoruz?

Öğrenci: “Kesir” ya da “rasyonel sayı”.

Görüşmeci: Hım. Arasında fark var mı bunların?

Öğrenci: Var. Kesir olanlar; yani hep pozitif oluyorlar, artı oluyorlar. “Rasyonel” deyince; eksi olanlar da içine giriyor.

Görüşmeci: Hımm. O zaman bir, “rasyonel sayı”yı tanımlar mısın?

Öğrenci: İııı (*düşünüyor*), yani pozitif ya da negatif olan sayılar. Yani payı ve paydası olan. (3. öğrenci – 2. görüşme)

Pay ve paydadaki sayıların tamsayı olması gerektiğini ifade etmediğinden; 3. öğrencinin tanımı, “eksik tanım” olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca bu konuşma esnasında; 3. öğrencinin, “kesir” ve “rasyonel sayı” kavramları arasındaki farka dair –kesirlerin hep pozitif olduğu, rasyonel sayıların ise negatif de olabildiği şeklinde– kavram yanılgısına sahip olduğu da ortaya çıkmıştır.

- Bu duruma, ortaöğretim öğrencilerinden de birkaç örnek vermek gerekirse; 2. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili 2 no’lu soruda, 5. öğrenci, “tamsayı” kavramı için eksik tanım yapmış ve denklem–özdeşlik farkı için bir şey söyleyememiş de olsa; çözüm için gerekli olan kavramları–işlemleri doğru şekilde kullanabilmiştir (Ö5–2–2). Aynı şekilde, 6. öğrenci de, denklem–özdeşlik arasındaki ilişkiyi açıklayamamasına rağmen; ilgili kavramları–işlemleri doğru şekilde kullanabilmiştir (Ö6–2–2).

- 5. öğrencinin, “tamsayı” kavramı ile ilgili olarak yapmış olduğu tanım aşağıdaki şekildedir:

“ ‘Tamsayılar’ demek; eksilisi olan veya yani... Negatif ve pozitif sayıların hepsine ‘tamsayı’ denir. Rasyonel olmayan sayılara ve irrasyonel olmayan sayılara.” (5. öğrenci – 2. görüşme – 1. soru)

5. öğrenci, ifade sırasında “rasyonel sayılar”ı kapsamın dışında bıraktığından; yapmış olduğu tanım, “eksik tanım” olarak kabul edilmiştir.

“Denklem–özdeşlik” ilişkisi ile ilgili olarak ise; araştırmacı ile öğrenciler arasında aşağıdaki konuşmalar geçmiştir:

Görüşmeci: Peki, hiç “özdeşlik” diye bir şey duydun mu?

Öğrenci: Evet.

....

Görüşmeci: Hımm, denklem–özdeşlik farkı nedir, peki?

Öğrenci: İıı (4 sn. düşünüyor). Onu bilmiyorum işte tam olarak.

Görüşmeci: Hımm, peki. Hani biliyordun, unuttun mu? Yoksa çok üzerinde durmadığın bir şey...

Öğrenci: Çok üzerinde durmamışımdır. Açıkçası hani şeyde, sınavlarımızda böyle gelmediği için. (5. öğrenci – 1. görüşme – 5. soru)

Görüşmeci: Hım. Hani denklemle ve özdeşlik farkını merak ediyorum da ben.

...

Öğrenci: Denklem–özdeşlik farkını...

Görüşmeci: Farklı mıdır ya da?

Öğrenci: (3 sn. sessizlik) Farklıydı; ama nasıl farklıydı? Ben de tam olarak hatırlamıyorum. Çünkü 9. sınıfta gördüğümüz için. Yani şu anda pek aklımda ondan kalan pek bir şey yok ve sınavlarda yani genelde öyle “fark” falan sormadıkları için.

Görüşmeci: Hı hı. Tamam.

Öğrenci: Yani pek çalışmadım. (6. öğrenci – 1. görüşme – 5. soru)

Katılımcı ortaöğretim öğrencilerinden 5 ve 6 no’lu öğrencilerin, “denklem–özdeşlik” ilişkisi için bir şey söyleyememesi; iki öğrencinin de zihninde

“denklem” ve “özdeşlik” kavramlarının tam olarak yapılanmamış olduğunun bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca her iki öğrencinin de; sınavlarda “fark” sorulmadığı için, üzerinde fazla durmadıklarını söylemeleri ve bunu, “denklem-özdeşlik” farkını hatırlayamamalarına gerekçe olarak göstermeleri ilginçtir. Matematik başarı düzeyi “iyi” ve “çok iyi” olan bu iki öğrencinin, “denklem-özdeşlik” ilişkisine dair bir açıklama yapamamış olması; Kar, Çiltaş ve Işık (2011) tarafından, ilköğretim matematik öğretmen adayları ile yürütülmüş araştırma ve Aydın ve Köğce (2008) tarafından, ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adayları ile gerçekleştirilmiş araştırmadan çıkan bazı sonuçlarla benzerlik göstermektedir. Öğrencilerin öğretim düzeyleri ve irdelenen matematiksel kavramlar farklı olsa da; Kar, Çiltaş ve Işık (2011), yaptıkları araştırmadan; öğrencilerin –irdelenen– kavramları tanımlamada ve kavramlar arasındaki ilişkileri belirlemede güçlükler yaşadıklarına dair birtakım sonuçlar elde etmişlerdir. Öğretmen adaylarının “denklem ve fonksiyon” kavramlarını ne düzeyde tanımlayabildiklerini ve bu iki kavram arasında nasıl bir ilişki olduğuna dair algılayışlarını araştıran Aydın ve Köğce (2008) de; öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğunun, fonksiyon ve denklem kavramlarını tanımlamada yetersiz oldukları ve formal bir tanım yapamadıkları; bu iki kavram arasındaki ilişkiyi ortaya koymada başarısız oldukları yönünde sonuçlara ulaşmışlardır.

Kısacası; **katılımcı öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili eksik ya da yanlış anlayışa sahip olmaları veya bazı merkezi kavramların tanımına dair herhangi bir açıklama yapamamaları; birçok soru için, kavram–işlem kullanımlarına engel oluşturmamıştır.** Bu sonuç; *–öğrencilerin öğretim düzeyleri ve irdelenen matematiksel kavramlar farklı olsa da–* Aydın ve Köğce (2008); Kar, Çiltaş ve Işık (2011); Üreyen (2006) tarafından gerçekleştirilen araştırmalardan elde edilen birtakım sonuçlarla paralellik göstermektedir. Aydın ve Köğce (2008) tarafından yapılan araştırmada; yapılandırılmamış görüşmelerde denklem kavramını yanlış tanımlayan öğretmen adaylarının, denklemlerle ilgili problemleri çözerken zorlanmadıkları ifade edilmiştir. Benzer şekilde, Kar, Çiltaş ve Işık (2011) tarafından yürütülmüş araştırmadan çıkan; öğrencilerin, problem çözümü sırasında ilgili kavramlara yönelik işlemler yapsalar da, kavramın kendisini tanımlamada genel olarak zorlandıklarını ortaya koyan sonuçla da benzerlikler içermektedir. Kar, Çiltaş ve Işık

(2011); bu durumun, öğrencilerin kavramları yeterince özümseyememelerinden kaynaklanıyor olabileceğini ifade etmişlerdir. Üreyen (2006) tarafından, üniversite öğrencileri ile yapılan başka bir araştırmadan da; öğrencilerin, konkavlık kavramını anlamadan, 2. türev testini kullanarak bir fonksiyonun konkavlığını belirleyebildiklerini gösteren sonuçlara ulaşılmıştır.

4) Bir problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili tek tür değil de, farklı kategorilerde anlayışlara (*“bahsetmemek / eksik açıklamak / doğru açıklamak” gibi*) sahip olan katılımcı öğrencilerin bu anlayışları; kavram–işlem kullanımları konusunda bir fikir vermemektedir. Başka bir deyişle, kavram–işlem kullanımları da, katılımcı öğrenciden öğrenciye çeşitlilik gösterebilmektedir (*örneğin Ö1–1–4; Ö4–1–2; Ö2–1–4 vs.*). Bu nedenle, bu tür durumlarda; **katılımcı öğrencilerin, “problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları” ve “kavram–işlem kullanımları” arasında belirli bir ilişki olmadığı görülmüştür.**

5) **Problemin içinde yer alan tüm merkezi kavramlarla ilgili doğru açıklamalar yapan, –yaptıkları bu açıklamalar dikkate alındığında– ilgili kavramlara dair doğru anlayışlara sahip oldukları düşünülen katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri ise; çözüm için uygun kavramları–işlemleri doğru şekilde kullanmışlardır (Ö3–1–4; Ö6–1–3; Ö6–4–8; Ö5–1–4).** Aşağıda bu 4 tane bulgunun ilk ikisinden kısaca bahsedilecektir:

- 1. görüşmedeki “çokgenler” ile ilgili soruda merkezi kavramlar olan “dörtgen”, “kare”, “dik üçgen”i doğru tanımlayan ve “eşlik” kavramını da doğru açıklayan 3. öğrenci; çözüm için uygun olan “karenin alan formülü”nü, “dik üçgenin alan formülü”nü, “eş üçgenler” kavramını ve “çarpma ve çıkarma işlemleri”ni doğru biçimde kullanmıştır (Ö3–1–4).
- 1. görüşmedeki “rasyonel sayılar” ile ilgili soruda merkezi kavram olan “rasyonel sayı”yı doğru açıklayan ve *–isminden bahsetmese de–* “payda eşitleme”nin mantığını doğru bildiği tespit edilmiş olan 6. öğrenci; çözüm için uygun olan, “rasyonel sayı” ile ilişkili kavram, özellik ve işlemleri doğru biçimde kullanmıştır (Ö6–1–3).

Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problem çözme sürecinde, “problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları” ve “kavram-işlem kullanımları” arasındaki ilişkiler ile ilgili çıkan başlıca sonuçlar özetlenecek olursa;

- Katılımcı öğrencilerin, çözüm esnasında bazı merkezi kavramlardan isim olarak bahsetmemeleri; illaki çözüm sürecinde o kavramı kullanmadıkları anlamına gelmemektedir.
- Katılımcı öğrencinin, isim olarak çözüm için uygun olmayan bir kavramdan bahsetmesine rağmen; –bahsettiği kavrama yönelik değil de– çözüm için uygun olan kavrama yönelik işlemler yürüttüğü birkaç durumla da karşılaşmıştır.
- Katılımcı öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili eksik ya da yanlış anlayışa sahip olmaları veya bazı merkezi kavramların tanımına dair herhangi bir açıklama yapamamaları; birçok soru için, kavram-işlem kullanımlarına engel oluşturmamıştır.
- Problemin içinde yer alan tüm merkezi kavramlarla ilgili doğru açıklamalar yapan, –yaptıkları bu açıklamalar dikkate alındığında– ilgili kavramlara dair doğru anlayışlara sahip oldukları düşünülen katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri; çözüm için uygun kavramları-işlemleri doğru şekilde kullanmışlardır.

5.1.2. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Problem Çözme Sürecinde, “Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla ilgili Anlayışları” ve “Sonuca Ulaşmaları” Arasındaki İlişkiler ile ilgili Sonuçlar ve Tartışma

1) Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri, birçok soruda, problemin içinde yer alan bazı merkezi kavramlara dair eksik/yanlış bilgileri olmasına, bazı kavramların anlamına dair herhangi bir açıklama yapamamalarına veya bazı kavramlardan isim olarak hiç bahsetmemiş olmalarına rağmen; problem çözme sürecinin sonunda, direkt olarak doğru sonuca ulaşabilmişlerdir (*örneğin Ö6–1–6; Ö2–1–1; Ö1–4–2; Ö3–2–3 vs.*):

- 1. görüşmedeki “olasılık” ile ilgili soruda 6. öğrenci; problemin içinde yer alan merkezi kavramlardan “olasılık” kavramını doğru şekilde tanımlamış, “olay”

kavramını eksik açıklamış ve “örneklem uzay” kavramından ise hiç bahsetmemiştir; çözüm sonunda ise, doğru sonuca ulaşmıştır (Ö6-1-6).

- Merkezi kavramları “kat”, “ortak kat” ve “en küçük ortak kat” olan “doğal sayılar” ile ilgili bir problemde; 2. öğrenci, “ortak kat” ve “ekok” kavramlarına dair tanım yapamamış; fakat kavram bilgilerindeki bu eksiklikler, doğru sonuca ulaşmasına engel oluşturmamıştır (Ö2-1-1).
- 1. öğrenci, 4. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili olan 2 no’lu soruda, “3 ile bölünebilmede, orada kazık oluyor. Onu bilmiyorum.” (1. öğrenci – 4. görüşme) sözleriyle, “3 ile bölünebilme kuralı”nı bilmediğini ifade etmiş; ancak kuralı bilmemesi, doğru şıkka ulaşmasına engel olmamıştır (Ö1-4-2).
- 2. görüşmedeki “rasyonel sayılar” ile ilgili soruda; 3. öğrenci, “rasyonel sayı” kavramına dair yanlış bir tanımlama yapmasına (*daha doğrusu eksik tanım yapmasına, aynı zamanda da kavram yanlışlığı olmasına*) rağmen; çözümünün sonunda doğru sonuca ulaşmıştır (Ö3-2-3).

Kısacası; **katılımcı öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili eksik/yanlış anlayışa sahip olmaları, bazı merkezi kavramların tanımına dair herhangi bir açıklama yapamamaları veya bazı kavramlardan hiç bahsetmemiş olmaları; birçok soru için, doğru sonuca ulaşmalarına engel olmamıştır.** Bu sonuç; Silver’in (1986) söylediklerini doğrular niteliktedir. Silver (1986); genelde problem çözmenin, anlamayı içerdiği iddia edilse de; problemi çözenlerin, çoğu kez fazla anlamadan da ilerleyebildikleri ve işlemleri anlamadan kullandıkları halde başarılı olabildiklerinin de iyi bilindiğini ifade etmiştir. Kar, Çiltaş ve Işık (2011) tarafından yapılmış araştırmada ise; ilköğretim matematik öğretmen adayları tarafından tanımlanması istenen kavramlar, doğru ya da yanlış olma durumlarına göre; problem kısımlarının çözümleri ise, sonucun doğru ya da yanlış olma durumuna göre analiz edilmiştir. Veri analizi sonucunda da; öğrencilerin ilgili kavramları tanımlamada genel olarak zorlandıkları ve öğrencilerin yarısından fazlasının, verilen problemleri doğru çözemedikleri, doğru sonuca ulaşamadıkları tespit edilmiştir (Kar, Çiltaş ve Işık, 2011).

- 2) Bir problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili tek tür değil de, farklı kategorilerde anlayışlara (“bahsetmemek / eksik açıklamak / doğru açıklamak” gibi) sahip olan katılımcı öğrencilerin bu anlayışları; sonuca ulaşmaları ile ilgili bir

fikir vermemektedir. Başka bir deyişle; “sonuca ulaşmaları” ile ilgili kategoriler de, katılımcı öğrenciden öğrenciye çeşitlilik gösterebilmektedir (*örneğin Ö1-1-4; Ö4-1-2; Ö5-4-8 vs.*). Bu nedenle, bu tür durumlarda; **katılımcı öğrencilerin, “problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları” ve “sonuca ulaşmaları” arasında belirli bir ilişki olmadığı görülmüştür.**

- 3) Bir problemin içinde yer alan merkezi kavramların bir kısmı ile ilgili eksik açıklama yapan, diğerlerini ise doğru şekilde açıklayan katılımcı öğrencilerin; direkt olarak doğru sonuca ulaştıkları 5 durumla (*Ö3-1-1; Ö3-4-2; Ö2-2-3; Ö3-4-8; Ö6-1-2*) karşılaşılmıştır. Ayrıca ilk başta sonuca ulaşamamaları ya da şıklarda olmayan bir sonuca ulaşsalar bile, sonrasında doğru sonuca ulaştıkları da 2 durumla (*Ö5-1-2; Ö5-1-3*) karşılaşılmış; zaten bunlar dışında “sonuca ulaşmaları” ile ilgili farklı bir kategori de çıkmamıştır. **Bu 7 durum dikkate alındığında; bu araştırma kapsamındaki problemleri çözen katılımcı öğrencilerin, bir soruda bazı kavramları doğru açıklayıp, diğerleri ile ilgili eksik açıklama yapmış olduklarında; bu eksik bilgilerinin doğru sonuca ulaşmalarını engellemediği, eninde sonunda doğru sonucu bulabildikleri söylenebilir.**
- 4) Problemin içinde yer alan tüm merkezi kavramlarla ilgili doğru açıklamalar yapan, *–yaptıkları bu açıklamalar dikkate alındığında–* ilgili kavramlara dair doğru anlayışlara sahip oldukları düşünülen katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri ise; o problemi çözme sürecinin sonunda, direkt olarak doğru sonuçlara ulaşmışlardır (*Ö3-1-4; Ö6-1-3; Ö6-4-8; Ö5-1-4*).

Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problem çözme sürecinde, “problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları” ve “sonuca ulaşmaları” arasındaki ilişkiler ile ilgili çıkan başlıca sonuçlar özetlenecek olursa;

- Katılımcı öğrencilerin, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili eksik/yanlış anlayışa sahip olmaları, bazı merkezi kavramların tanımına dair herhangi bir açıklama yapamamaları veya bazı kavramlardan hiç bahsetmemiş olmaları; birçok soru için, doğru sonuca ulaşmalarına engel olmamıştır.

- Bu araştırma kapsamındaki problemleri çözen katılımcı öğrencilerin, bir soruda bazı kavramları doğru açıklayıp, diğerleri ile ilgili eksik açıklama yapmış olduklarında; bu eksik bilgilerinin doğru sonuca ulaşmalarını engellemediği, eninde sonunda doğru sonucu bulabildikleri görülmüştür.

- Problemin içinde yer alan tüm merkezi kavramlarla ilgili doğru açıklamalar yapan, *–yaptıkları bu açıklamalar dikkate alındığında–* ilgili kavramlara dair doğru anlayışlara sahip oldukları düşünülen katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri; o problemi çözme sürecinin sonunda, direkt olarak doğru sonuçlara ulaşmışlardır.

5.1.3. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Problem Çözme Sürecinde, “Kavram–İşlem Kullanımları” ve “Sonuca Ulaşmaları” Arasındaki İlişkiler ile ilgili Sonuçlar ve Tartışma

1) Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, çözüm sürecinde, uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmalarına (Ö4–2–4) ya da uygun kavramı/işlemi eksik (Ö5–1–6) veya yanlış şekilde kullanmalarına (Ö4–2–4; Ö5–1–6) ya da uygun kavramı/işlemi yeterince farkında olmadan kullanmalarına (Ö4–1–2) rağmen; problem çözme sürecinin sonunda doğru sonuca ulaştıkları durumlara rastlanmıştır:

- 2. görüşmedeki “problemler” alt öğrenme alanı ile ilgili 4. soruda, 4. öğrenci, ipin kalın tarafının yanma süresini hesaplarken; tek mumu dikkate alarak, uygun formülü ($t = \frac{x}{v}$ formülü) yanlış şekilde kullanmıştır. İpin tamamının yanma süresini hesaplarken de;

“İmi (*düşünüyor*), 5 saniyede ince taraf yanacak demiştim. 10 saniyede de kalın taraf yanacağını düşünmüştüm. Hani bu mumlar ayrı bir şey olsaydı, hani etkilemeseydi birbirlerini; ikisinin toplamı 15 saniyede ederdi diye düşündüm.

$\frac{15}{2}$ ’den 7,5; hani ikisinin toplamının yarısı.” (4. öğrenci – 2. görüşme)

diyerek, çözüm için uygun olmayan bir kavram olan “ortalama”yı kullanmıştır.

4. öğrenci, hem uygun formülü yanlış şekilde kullanmış olmasına, hem de uygun olmayan bir kavramı kullanmış olmasına rağmen; çözümünün sonunda, tesadüfen de olsa doğru cevap şikkına ulaşmıştır (Ö4–2–4).

- 1. görüşmedeki “olasılık” ile ilgili olan 6. soruda, 5. öğrenci; 1 sayısı da dahil, birinci çarkı ilk çevirişte gelebilecek alternatifleri tek tek düşünerek, ikinci çevirişte gelmesi beklenen sayıları tespit etmeye çalışmış; ancak 3–3 ve 4–4 alternatiflerini hesaba katmadığı için (*yani “olay kümesi” kavramını eksik kullandığı için*), istenen durumların sayısını (*yani olay kümesinin eleman sayısını*) yanlış bulmuştur. 2. çark için olasılığı hesaplarken; –ilk etapta– uygun kavramları doğru şekilde kullanarak, (*2. çark için*) doğru sonucu elde etmiştir. 1. çark için olasılık hesabı sırasında iki olayı hesaba katmadığından dolayı; sorunun cevabı olarak, ilk başta, şıklarda yer almayan $\frac{1}{24}$ sonucunu bulmuştur. Bunun üzerine, şıklarda olan bir sonuç bulabilmek için, deneme–yanılma yoluna yönelen 5. öğrenci; buradan da şıklarda yer alan bir sonuç elde edememiştir. Bütün problemlerin çözümlerinin ardından, tekrar bu probleme dönen 5. öğrenci, hatayı, 2. çark için olasılığı hesaplarken yaptığını düşünmüş ve –*aslında doğru akıl yürütme yoluyla doğru hesaplamış olduğu*– 2. çark için olasılık üzerinde tekrar düşünmeye başlamıştır. Bu kez 2. çarkın “örneklem uzayının eleman sayısı” için yanlış mantık yürüten 5. öğrenci; uygun kavramı yanlış şekilde kullanmıştır. **5. öğrenci, çözüm sürecinin farklı aşamalarında, hem uygun kavramı eksik kullanmış, hem de yine uygun olan başka bir kavramı yanlış şekilde kullanmış olmasına rağmen; tesadüfen, doğru olan sonuç şikkına ulaşmıştır (Ö5–1–6).**
- 4. öğrenci, 1. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili 2. problemin çözümünde; (*çözüm için uygun olmayan*) ekok hesabı yapacağını söylese de, aslında (*çözüm için uygun olan*) ebob hesaplamaya yönelik işlemler yürütmüş ve sonuçta, doğru cevabı elde etmiştir. Başka bir deyişle; **öğrenci, hangi kavramı kullandığının farkında olmadan kavramı kullanabilmiş ve bu problemi çözerek doğru şikkına ulaşabilmiştir (Ö4–1–2).** Benzer sonuçlar; Orton (1983) ve Grundmeier, Hansen ve Sousa (2006) tarafından gerçekleştirilmiş araştırmalarda da elde edilmiştir. Orton (1983), birçok öğrencinin, ne yaptığını biliyor gibi görünmesine rağmen; takip ettikleri yöntemler konusunda soru sorulduğunda, aslında yaptıkları şeyi niçin yaptıklarını bilmediklerini ortaya çıkarmıştır. Grundmeier, Hansen ve Sousa’nın (2006) araştırmasından ise; öğrencilerin, yöntemi ezberleme yolunu seçebildikleri, yaptıkları şeyin ne olduğunun ve neden yaptıklarının yeterince farkında olmadıkları sonuçları çıkarılmıştır.

Bu durumlar; –Richardson’ın (2004) da ifade ettiği gibi– doğru cevabın, öğrencilerin matematikteki çalışmalarını incelerken, aranılan tek şey olmaması gerektiğinin birer göstergesidir. Sadece öğrenci cevaplarının doğru olup olmadığına bakılması durumunda; öğrencilerin neyi, nasıl öğrendikleri (Richardson, 2004) ve çözüm sırasında kavramları–işlemleri nasıl kullandıkları konusunda çok önemli şeyler kaçırılacaktır.

2) Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, çözüm sırasında, beklenenden daha az sayıda kavram kullanmalarına rağmen; (doğrudan) doğru sonuca ulaştıkları iki durumla (Ö4–2–2; Ö4–1–4) karşılaşmıştır.

- 2. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili 2. problemi okuduktan hemen sonra;

“*a* ya ben 3 dedim; *b* ye 2 dedim. *p* de o zamansa 5 geldi buradan. *p* asal sayı oldu. Şeyi tutturduk yani; ıııı (düşünüyor), bizden asal sayı olmasını istiyordu.”
(4. öğrenci – 2. görüşme)

yorumunu yapan 4. öğrenci; “*a* ne demiştim? 3. *p* ye de 5 demiştim. Yerine koyarım. (4 sn. sessizlik) “ ‘Adana’dır” (kastettiği: “A şıkkı”) derim.” (4. öğrenci – 2. görüşme) diyerek, kısa yoldan, çok kısa bir süre içerisinde doğru şıkka ulaşmıştır. Değişkenlere değer verme ve şıklarda yerine koyma yöntemini uyguladığı çözüm sürecinde; (kavram–işlem olarak ise) sadece asal sayı olma şartından (özelliğinden) yararlanmıştır (Ö4–2–2).

- Yine 4. öğrenci, 1. görüşmedeki “problemler” alt öğrenme alanı ile ilgili olan 4. problemi çözerken; bir doktora düşen hasta sayısı olan 50’nin katlarını sırasıyla yazmış ve 300’de durarak, doktor sayısının 6 olduğunu söylemiştir. Sadece “kat” kavramını kullanarak, sezgisel çözüm yapan ve doğru sonucu bulan 4. öğrenci; 50’nin katları arasında niçin –mesela 200’de ya da 250’de değil de– 300’de durduğunu gerekçelendirememiş ve sezgisel bir çözüm yaptığını kendisi de kabul etmiştir (Ö4–1–4). Bu durum; hem Orton (1983), hem de Grundmeier, Hansen ve Sousa’nın (2006) araştırmalarından çıkan, ‘birçok öğrencinin, aslında yaptıkları şeyi niçin yaptıklarının yeterince farkında olmadıkları’ şeklindeki sonuçla da uyumludur.

3) Tablo 4.61’de, **problem çözme sürecinin sonunda, şıklarda olan yanlış sonuca ulaşan, iki şık arasında kararsız kalan ya da sonuca ulaşamayan katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, o problem için “kavram–işlem**

kullanımları” incelendiğinde; bu öğrencilerin, çözüm sürecinin herhangi bir aşamasında ya uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmış (Ö1-1-1; Ö1-1-4; Ö4-1-6), ya uygun kavramı/işlemi eksik (Ö4-1-6) veya yanlış şekilde kullanmış (Ö1-2-7; Ö1-4-8) ya da hiçbir kavramı kullanmamış (Ö4-4-8) oldukları tespit edilmiştir. Aşağıda, bu durumun geçerli olduğu birkaç örnek sunulacaktır:

- 1. öğrenci, 1. görüşmedeki “çokgenler” ile ilgili 4. soruda; çözüm için uygun olmayan bir işlem olan “dörtgeni, bir köşesi etrafında döndürme”yi kullanmış ve dik üçgenin hipotenüs uzunluğu ile uzun dik kenar uzunluğunun eşit olduğu yanlışlığına düşmüştür. Sonuç olarak; 1. öğrenci, uygun olmayan işlem kullanımı ve düştüğü kavram yanlışlığından dolayı; yanlış çözüm yolundan, şıklarda olan yanlış sonuca ulaşmıştır (Ö1-1-4).
- 1. görüşmedeki “olasılık” ile ilgili olan 6. soruda; 4. öğrenci, 1. çark için olasılık hesaplama sürecinde olay kümesini belirlerken, “her iki çevirişte de 3 gelmesi” olayını hesaba katmadığından (yani “*olay kümesi*” kavramını eksik kullandığından), 1. çark için olasılık hesabında yanlış sonuç elde etmiştir. 1. ve 2. çark için olasılık hesaplarının ardından, –herhangi bir işlem yapmaksızın– doğru cevabın “E şıkkı” olduğu yönünde (yanlış) tahminde bulunan 4. öğrenci; bu tahminine dair net bir gerekçe belirtmemiştir. 4. öğrenci, ilk başta mantık yürütme yoluyla doğru çözüm yolunu takip etmiş olmasına rağmen; sonrasında, şıklarda olan bir sonuca ulaşabilmek için deneme–yanılma yoluna yönelmiş ve bu süreçte, yanlış mantık yürütmeler de yapmıştır. Çözüm için uygun olmayan “toplama işlemi”ni kullanmış; “*Şuradaki işlemde kararsız kaldım. Yani $\frac{5}{16} + \frac{1}{6}$ mı yazsam? Yoksa $\frac{1}{16} + \frac{1}{6}$ mı yazsam diye ama.*” (4. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, toplayacağı iki sayı konusunda kararsız kalmış ve herhangi bir sonuca ulaşamamıştır (Ö4-1-6).
- 1. öğrenci, 2. görüşmedeki “sözel problemler” ile ilgili 7. problemin çözümünde; ilk başta çözüm için uygun olan $\frac{\text{Kumaş miktarı}}{\text{Süre}}$ oranını kullanmıştır. Bu süreçte, bölme sırasında işlem hatası yapmış olmasına ve “ondalık kesirlerde sıralama”yı yanlış şekilde kullanmış olmasına (yani “*ondalık kesirlerde sıralama*” ile ilgili olarak yapılmış olan yanlış bilgileri kullanmış olmasına) rağmen; sonuç olarak –tesadüfen de olsa– doğru cevap şıkkına ulaşmıştır. Fakat daha sonra,

ikinci yol olarak, $\frac{\text{Süre}}{\text{Kumaş miktarı}}$ oranını uyguladığında; bu kez de, “rasyonel sayılarda sıralama”yı yanlış şekilde kullanmış ve farklı (*yanlış*) bir sonuç bulmuştur. Ulaşmış olduğu bu iki şık arasında kararsız kalan 1. öğrenci; hangisinin doğru şık olduğuna karar verememiştir (Ö1–2–7). Aşağıda, kısaca, 1. öğrencide var olduğu tespit edilen, “ondalık kesirlerde sıralama” ile ilgili bu yanlış yapılanmaya değinilecektir:

- o 1. öğrenci, her bir makine için $\frac{\text{Kumaş miktarı}}{\text{Süre}}$ oranını rasyonel sayı olarak yazıp, rasyonel sayıların ondalık açılımlarını (yaklaşık olarak) hesapladıktan sonra; doğru cevaba nasıl karar vereceği ile ilgili olarak, araştırmacı ile 1. öğrenci arasında aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Görüşmeci: Peki, şimdi nasıl karar vereceksin, hangisinin doğru olduğuna?

Öğrenci: Virgülden sonraki sayı, tam sayıya ne kadar yakınsa; sayı o kadar büyüktür. Yani o sayı, en büyüktür.

Görüşmeci: Mesela burada hangisi en büyüktür?

Öğrenci: Burada $\frac{76}{70}$; çünkü virgülden sonra sıfırla başlamış... (8 sn.

sessizlik) mı? (4 sn. *sessizlik*) Ama şimdi şöyle bir şey var: Bu devrediyor. O zaman III ile (3 sn. *sessizlik*) I gitti (A ve C şıklarının üzerlerini çizdi); çünkü diğerlerinde (*yani II ve IV*) bir basamak varken; birinde (*yani I*) üç basamak, diğerinde (*yani III*) devam eden basamaklar var. Basamak sayısı...

Görüşmeci: “Devrediyor” derken...?

Öğrenci: Yani “işlem daha devam ediyor” manasında. Sayı devretmiyor. Ama şunu unuttum: Virgülden sonra ne kadar çok sayı varsa; sayı o kadar küçük oluyor. Onun için; virgülden sonra tek sayıya indirdim önce. Daha sonra... hangisi büyük? (8 sn. *sessizlik*) Virgülden sonraki sayı 2 olduğu için; (1,2 deki 2 rakamını yuvarlak içine alıyor) 36 daha büyüktür. II. si. (1. öğrenci – 2. görüşme)

Öğrencinin bu söylediklerine dayalı olarak; 1. öğrencide “Virgülden sonra ne kadar çok sayı varsa; sayı o kadar küçük oluyor.” şeklinde, ondalık kesirlerde sıralama ile ilgili yanlış yapılanmanın olduğu ve bu yanlış yapılanmayı, problem çözümünde kullandığı söylenebilir.

Araştırmacı, 1. öğrencinin söylediği “Virgülden sonra ne kadar çok sayı varsa; sayı o kadar küçük oluyor.” (1. öğrenci – 2. görüşme) ifadesini doğru anlayıp anlamadığını netleştirmek istemiş ve bu amaçla, öğrenci ile arasında aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Görüşmeci: Peki, az önce bir şey söyledin: Hani “Virgülden sonra kaç sayı varsa; o daha...”

Öğrenci: Küçük oluyor.

Görüşmeci: Daha küçük oluyor. Mesela burada “1,2305” deseysen; o daha mı küçük olacaktı?

Öğrenci: Evet.

Görüşmeci: Onun için direkt eledin mi? 1,105 ile 1,080’i onun için direkt mi eledin?

Öğrenci: Evet.

Görüşmeci: Hani hiç sayı değerinin önemi yok mudur?

Öğrenci: (3 sn. sessizlik) Ya, tamam, ona bakalım. Ama şimdi burada 2 var. 2’ye göre yola çıktım.

Görüşmeci: Hım. Peki, “1 virgül iki bin... dediğim gibi, üç yüz sekiz” *(yani “1,2308”)* olsaydı?

Öğrenci: O zaman diğerlerini de... mesela $\frac{76}{70}$ ’in hepsini hesaplamam gerekecekti.

Görüşmeci: Hım. Peki. Direkt ona göre karar verdik yani.

Öğrenci: Evet. (1. öğrenci – 2. görüşme)

Bu konuşma; 1. öğrencinin “ondalık kesirlerde sıralama” ile ilgili bu (yanlış) yapılanmasının varlığını ve bu yanlış yapılanmasını problem çözümünde kullandığını doğrulamaktadır.

Araştırmacı, 1. öğrencinin zihnindeki “sıralama” ile ilgili yapılanmayı sayısal bir örnek üzerinde daha görmek istemiştir. Bu amaçla; alt alta 1,0123–1,21387–1,2–1,23 ondalık kesirlerini yazmış ve “*Bunlardan, bu yazdığım dört sayıdan, hangisi en büyüktür?*” sorusunu yöneltmiştir. 1. öğrenci, ondalık kesirlerin ondalık kısımlarını rasyonel

sayıya çevirerek; kağıda $\frac{2}{10}$, $\frac{23}{100}$, $\frac{123}{10000}$, $\frac{21387}{100000}$ yazmış ve “*Şimdi,*

1,2 en büyüktür; çünkü paydası en küçük olan o.” (1. öğrenci – 2. görüşme) yanıtını vermiştir. 1. öğrencinin “rasyonel sayılarda sıralama” ile ilgili olarak yapmış olduğu bu mantık yürütme; öğrencide ondalık kesirler için “*Virgülden sonra ne kadar çok sayı varsa; sayı o kadar küçük oluyor.*” şeklindeki yanlış yapılanmanın kaynağı hakkında ipuçları vermektedir. Ondalık kesirlerde sıralama ile ilgili olarak öğrencinin zihninde yapılanmış olan yanlış bilginin kaynağının; rasyonel sayılarda sıralama ile ilgili olarak yapılandırmış olduğu “*Paydası en küçük olan sayı, en büyüktür.*” şeklindeki eksik bilgi olabileceği düşüncesini akla getirmiştir.

- 4. görüşmedeki “çokgenler–dörtgenler” ile ilgili 8. soru hakkında;

“ABCD bir kareymiş. $|AE|=|EB|$, $|FC|=10$ cm imiş. Şurası 10 cm. Başka bir şey vermemişler. (11 sn. sessizlik) Vay be! Başka bir şey vermemişler yani (güliyor). Bari bir kareyi verseydiler de, bulsaydık. (3 sn. sessizlik) Aslında bir geometrici, bunu çok güzel yapar; ama ben yapmıyorum işte, yapamıyorum.” (4. öğrenci – 4. görüşme)

şeklinde bir yorum yapan 4. öğrenci; kendisinin bu problemi çözebilmesi için, verilenleri yeterli bulmadığını dile getirmiş ve problemin çözümüne dair hiç fikir yürütememiştir. Çözüme dair hiçbir kavramı-işlemi kullanamayan 4. öğrenci, problemi çözememiş ve sonuca ulaşamamıştır. 4. öğrenci, çözüm yapamasa da; “30 falandır, onun da cevabı ama.” (4. öğrenci – 4. görüşme) diyerek, sonuca dair, gerekçelendirilmemiş (yanlış) bir tahminde bulunmuştur (Ö4-4-8).

Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problem çözme sürecinde, “kavram-işlem kullanımları” ve “sonuca ulaşmaları” arasındaki ilişkiler ile ilgili çıkan başlıca sonuçlar özetlenecek olursa;

- Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, çözüm sürecinde, uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmalarına ya da uygun kavramı/işlemi eksik veya yanlış şekilde kullanmalarına ya da uygun kavramı/işlemi yeterince farkında olmadan kullanmalarına rağmen; problem çözme sürecinin sonunda doğru sonuca ulaştıkları durumlara rastlanmıştır.

- Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, çözüm sırasında, beklenenden daha az sayıda kavram kullanmalarına rağmen; (doğrudan) doğru sonuca ulaştıkları birkaç durumla karşılaşmıştır.

- Problem çözme sürecinin sonunda, şıklarda olan yanlış sonuca ulaşan, iki şık arasında kararsız kalan ya da sonuca ulaşamayan katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, o problem için “kavram-işlem kullanımları” incelendiğinde; bu öğrencilerin, çözüm sürecinin herhangi bir aşamasında ya uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmış, ya uygun kavramı/işlemi eksik veya yanlış şekilde kullanmış ya da hiçbir kavramı kullanmamış oldukları tespit edilmiştir.

5.1.4. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Problem Çözme Sürecinde, “Problemin İçinde Yer Alan Merkezi Kavramlarla ilgili Anlayışları”, “Kavram–İşlem Kullanımları” ve “Sonuca Ulaşmaları” Arasındaki Genel İlişkiler ile ilgili Sonuçlar ve Tartışma

1) Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problem çözme süreci sonunda doğru sonuca ulaşmaları; her zaman, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili doğru anlayışlara sahip oldukları ve çözüm sürecinde gerekli olan kavramları–işlemleri doğru şekilde kullanabildikleri anlamına gelmemektedir:

Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin;

- problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili eksik/yanlış anlayışlara sahip olmalarına (*örneğin Ö3–2–3; Ö5–2–2 vs.*) veya bazı merkezi kavramların tanımına dair herhangi bir açıklama yapamamalarına (*örneğin Ö2–1–1; Ö1–4–2; Ö1–2–3; Ö6–2–2 vs.*) rağmen;
- problem çözme sürecinde gerekli olan kavramları–işlemleri eksik/yanlış şekilde kullanmalarına veya uygun olmayan kavramları–işlemleri kullanmalarına rağmen (*örneğin Ö4–2–4; Ö5–1–6*);
- hem problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili eksik/yanlış anlayışlara sahip olmalarına veya bazı merkezi kavramların tanımına dair herhangi bir açıklama yapamamalarına; hem de problem çözme sürecinin herhangi bir aşamasında, uygun olmayan kavramları–işlemleri kullanmalarına veya işlem hatası yapmalarına rağmen (*örneğin Ö4–1–2*);

problem çözme süreci sonunda doğru sonuca ulaştıkları birçok durumla karşılaşmıştır. Bu sonuçlar; Silver’in (1986) söylediklerini doğrulamaktadır. Silver (1986); genelde problem çözmenin, anlamayı içerdiği iddia edilse de; problemi çözenlerin, çoğu kez fazla anlamadan da ilerleyebildikleri ve işlemleri anlamadan kullandıkları halde başarılı olabildiklerinin de iyi bilindiğini ifade etmiştir. Aynı zamanda bu sonuçlar; – Richardson’ın (2004) da ifade ettiği gibi– doğru cevabın, öğrencilerin matematikteki çalışmalarını incelerken, aranılan tek şey olmaması gerektiği mesajını vermektedir. Richardson (2004); sadece öğrenci cevaplarının doğru olup olmadığına bakılması durumunda, öğrencilerin neyi ve nasıl öğrendikleri konusunda çok önemli şeylerin kaçırılacağını; halbuki öğrencilerin hesap problemlerini nasıl çözdüklerini incelemenin, onların düşünmeleri ile ilgili fikir verebileceğini ve öğrencilerin hangi matematiksel

becerileri bilip, hangilerini öğrenmeleri gerektiğini belirlemede öğretmenlere yardımcı olabileceğini dile getirmiştir.

2) Katılımcı bir ilköğretim öğrencisinin, kavrama dair yanlış yapılanmış bilgileri olmasına ve bu yanlış yapılanmaları, problem çözümünde kullanmasına rağmen; –soruda verilen sayılar, öğrencide var olan bu yanlış yapılanmaya uygun geldiğinden dolayı– ilk başta tesadüfen doğru sonuç şikkına ulaştığı bir durumla karşılaşmıştır:

- 1. öğrenci, 2. görüşmedeki “sözel problemler” ile ilgili 7. problemin çözümünde; ilk başta çözüm için uygun olan $\frac{\text{Kumaş miktarı}}{\text{Süre}}$ oranını kullanmıştır. Bu süreçte, bölme sırasında işlem hatası yapmış olmasına ve “ondalık kesirlerde sıralama” ile ilgili “Virgülden sonra ne kadar çok sayı varsa; sayı o kadar küçük oluyor.” şeklindeki yanlış yapılanmış bilgisini kullanmış olmasına rağmen; –*tesadüfen de olsa*– doğru sonuç şikkına ulaşmıştır (Ö1–2–7). Şıklar üzerinde düşünerek ve şıkları teker teker eleyerek çözüm yapan öğrenci; –*soruda “süre” ve “kumaş miktarı” için verilen sayılar, öğrencide var olan bu yanlış yapılanmaya uygun geldiğinden dolayı*– tesadüfen doğru sonuca ulaşmıştır.

3) Problemin içinde yer alan tüm merkezi kavramlarla ilgili doğru açıklamalar yapan, –yaptıkları bu açıklamalar dikkate alındığında– ilgili kavramlara dair doğru anlayışlara sahip oldukları düşünülen katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri; çözüm için uygun kavramları–işlemleri doğru şekilde kullanarak, direkt olarak doğru sonuçlara ulaşmışlardır (Ö3–1–4; Ö6–1–3; Ö6–4–8; Ö5–1–4).

- Bu durum, araştırmada yer verilen 14 sorudan 4 soruda sadece birer öğrenci için geçerli olmuştur.
- Bu öğrenciler; bir soruda matematik başarı düzeyi “çok iyi” olan katılımcı ilköğretim öğrencisi, iki soruda matematik başarı düzeyi “çok iyi” olan katılımcı ortaöğretim öğrencisi ve bir soruda da matematik başarı düzeyi “iyi” olan katılımcı ortaöğretim öğrencisidir.

Bu tespit; Canobi, Reeve ve Pattison (1998) tarafından yürütülmüş araştırma sonuçlarını da doğrular niteliktedir. Yaşları 6 ile 8 arasında değişen öğrenciler üzerinde yürütülmüş bu araştırmadan; kavramsal açıdan daha yeterli olan öğrencilerin, –*kavramsal açıdan*

daha başarısız olan öğrencilere kıyasla– problemleri daha çabuk ve doğru şekilde çözme eğiliminde oldukları sonucu çıkarılmıştır (Canobi, Reeve ve Pattison, 1998).

5.1.4.1. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Matematiksel Problem Çözümünde “Sonuca Ulaşmaları”nda, “Kavramlarla ilgili Anlayışları”nın ve “Kavram–İşlem Kullanımları”nın Rolü

1) Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problem çözme sürecinin herhangi bir aşamasında şıklarda olan yanlış sonuca ulaşma, iki şık arasında kararsız kalma ya da sonuca ulaşamama nedenlerinden, “problemin içinde yer alan merkezi kavramlara dair anlayışları” ile ilgili olarak, bu araştırma kapsamında tespit edilmiş olanlar;

- Kavramın yeterince yapılanmamış olması (Ö1–1–1),
- Kavram yanlışlığının olması (Ö1–1–4),
- Yanlış mantık yürütmesi/yorumlar yapması (Ö4–1–6),
- Yanlış yapılanmış bilgilerin olması (Ö1–2–7)

şeklinde sıralanabilir.

2) Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problem çözme sürecinin herhangi bir aşamasında şıklarda olmayan bir sonuca ulaşma, şıklarda olan yanlış sonuca ulaşma, iki şık arasında kararsız kalma ya da sonuca ulaşamama nedenlerinden, “kavram–işlem kullanımları” ile ilgili olarak, bu araştırma kapsamında tespit edilmiş olanları ise;

- Problem ifadesinde geçen bir bilgiyi kullanmama (Ö2–4–2),
- Uygun olmayan işlem/formül(leri) kullanma (Ö1–1–1; Ö1–1–4; Ö4–1–2; Ö5–1–2; Ö4–1–6),
- İşlem hatası yapma (Ö4–1–2; Ö4–1–3; Ö5–1–3),
- Hiçbir kavramı kullanmama (Ö4–4–8),
- Uygun kavramı eksik kullanma (Ö4–1–6; Ö5–1–6),
- Uygun kavramı–işlemi yanlış şekilde kullanma (Ö1–4–8),
- Yanlış yapılanmış bilgilerini kullanma (Ö1–2–7),
- Çözümünü yarım bırakma (Ö1–4–8),

- Dikkatsizlik (Ö6-2-4)

şeklinde listelenebilir.

3) Araştırmada yer verilen birçok soruda, katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problemin içinde yer alan bazı merkezi kavramları eksik ya da yanlış şekilde açıklamaları veya kavram tanımına dair herhangi bir açıklama yapamamaları; problem çözme süreci sonunda doğru sonuca ulaşmalarına engel olmamıştır. Genel olarak, katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problemleri çözme süreçleri göz önüne alındığında; **“öğrenci, problemin içinde yer alan bazı merkezi kavramları çok iyi bilmemesine rağmen, problemi çözebiliyorsa; bunun başlıca nedeni”nin; öğrencilerin çözüm esnasında kavramların anlamlarını düşünmeye, tanımlarını bilmeye ve tanımları doğrudan kullanmaya pek ihtiyaç duymamaları olduğu** söylenebilir. Aşağıda, bu duruma ilişkin olarak, katılımcı öğrenci söylemlerinden birkaç alıntıya yer verilecektir:

- Çözüm için “en büyük ortak bölen” kavramının kullanılması gereken, 1. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili bir problemde; 4. öğrenci, ekok–ebob kavramlarını karıştırdığını ifade etmiş ve bu problemde ekok hesabı yapacağını söylemiş olsa da; aslında ebob hesaplamaya yönelik işlemler yürütmüştür. “O zaman, burada o iki sayının neyini bulduğu” sorusuna, *“Yine okek’ini galiba. Hep karıştırıyorum ama bunları.”* (4. öğrenci – 1. görüşme) şeklinde cevap vermiştir. “Neden karıştırıyor?” sorusu için ise; aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

“Şu an hani böyle sanki... kendi adıma konuşayım ben: Şu an hani bunları tek başıma otursam; hani bütün soruları tek başıma bitirmiştım. Hani bir insana da anlatmak hani... Hani şimdi size de yanlış bir şeyler söylemek istemiyorum aslında. Hani on kere düşünüyorum şu an aklımda bir şeyleri. Hani mesela, öteki türlü olsa; hani direkt işlemleri... yapardım, geçerdim. Hani 10 dakikamı almazdı bunlar.” (4. öğrenci – 1. görüşme – 2. soru)

4. öğrencinin zihninde ekok–ebob kavramları yapılanmamış olmasına rağmen; hangi kavramı kullandığının farkında olmadan kavramı kullanabilmiş ve bu problemi çözerek doğru şıkka ulaşabilmiştir (Ö4-1-2).

- Yine aynı soru için; 5 no’lu öğrenci ile, “çözüm için ekok mu, yoksa ebob mu kullanacağına karar verirken yürüttüğü mantık” üzerine konuşulduğunda; 5. öğrenci,

“Şimdi, hocalarımız bize, hani hangisinde ekok kullanırken, hangisinde ebob kullanacağımızı hani bize kavratmak amacıyla... Şimdi, hani tam... yani mantığını aslında tam olarak bize anlatmadılar. Ama hani küçük parçalardan büyük parçaya giderken; hani tam tersini düşünerek mesela biz ezberledik. Hani mantığını tam olarak şey yapmadık ama. Yani soru... ‘soru çözülürken; hani bu yöntem kullanılacak’ dediler bize. Yani ben öyle hatırlıyorum.” (5. öğrenci – Tamamlayıcı görüşme)

diyerek; öğretmenlerinin, “çözüm için ekok mu, yoksa ebob mu kullanılacağına karar verirken yürütülen mantık”tan tam olarak bahsetmediklerini ve kendilerinin, ne zaman hangisinin kullanılacağını ezberlediklerini dile getirmiştir.

Yukarıdaki öğrenci söylemleri de; bazı katılımcı öğrencilerin, çözüm sürecinde kavram tanımlarını düşünmeleri, hatırlamaları ve doğrudan kullanmaları gereken matematiksel problemlerle –*sınavlarda ve matematik derslerinde*– fazla karşılaşmadıklarını; çözüm sırasında, –*kavramlardan ziyade*– o soruda hangi çözüm yönteminin kullanılacağı, hangi işlemlerin yapılacağı ile daha fazla ilgilendiklerini doğrular niteliktedir. Bu tespit; Heinze (2002) ve Bayazit (2009) tarafından yapılmış araştırmalardan elde edilen bazı sonuçlarla benzerlikler içermektedir. Heinze (2002), yaptığı deneysel araştırmanın sonunda; özellikle belirli problemler üzerinde çalışmak için kavramları kullanmaları gerektiğinde, öğrencilerin büyük bir kısmının, kavram tanımına başvurmaksızın, daha sınırlı olan kişisel kavram imajını kullandıklarını ortaya çıkarmıştır. Benzer şekilde, Bayazit (2009) de, yaptığı araştırmadan; öğrencilerin, kavram imajlarıyla bir sonuca ulaşabildikleri sürece, kavram tanımlarını atlama eğiliminde oldukları sonucunu çıkarmıştır. Soğancı (2006) tarafından, “öğretmen adaylarının, matematik öğrenimi ve öğretiminde tanımların rolü ile ilgili görüşleri”ni tespit etmek amacıyla yapılmış araştırmanın sonuçları; bazı matematik öğretmen adaylarının görüşlerinin de bu yönde olduğunu göstermektedir. Soğancı (2006), yapmış olduğu bu araştırmanın sonucunda; öğretmen adaylarının, çoğunlukla formal tanımdan ziyade informal tanımları tercih ettiklerini; matematiksel bir problemi çözerken, problemin merkezindeki kavram ya da kavramların tanımlarına bazen kavram imajı, bazen kavram tanımı, bazen ise her ikisi ile başvurdıklarını; matematiksel bir kavramın öğrenilmesinde/öğretilmesinde ve problem çözmede, kavramın tanımını bilmenin gerekli olup olmadığı konusunda görüş ayrılıklarının olduğunu; bazı öğretmen adaylarının, matematik öğrenimi ve öğretiminde tanımları gerekli, bazılarının yetersiz, bazılarının ise sadece konuya başlangıç aşaması niteliğinde bulduklarını tespit etmiştir.

4) **Problem çözme sürecinin sonunda şıklarda olan yanlış sonuca ulaşan, iki şık arasında kararsız kalan ya da sonuca ulaşamayan katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin,** o problem için “kavram-işlem kullanımları” incelendiğinde; bu öğrencilerin, çözüm sürecinin herhangi bir aşamasında

- **Ya uygun olmayan kavramı/işlemi kullanmış** (Ö1-1-1; Ö1-1-4; Ö4-1-6),
- **Ya uygun kavramı/işlemi eksik** (Ö4-1-6) **veya yanlış şekilde kullanmış** (Ö1-2-7; Ö1-4-8)
- **Ya da hiçbir kavramı kullanmamış** (Ö4-4-8)

oldukları tespit edilmiştir. Genel olarak, katılımcı öğrencilerin, problemleri çözme süreçleri göz önüne alındığında; **hem katılımcı ilköğretim hem de katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, matematiksel problem çözümünde “sonuca ulaşmaları”nda; genelde, –“kavramlarla ilgili anlayışları”na nazaran– “kavram-işlem kullanımları”nın daha belirleyici bir rol oynadığı** söylenebilir. Aşağıda, bu kanaatin oluşmasında etkili olan durumlara birkaç örnek verilecektir:

- 1. görüşmedeki “doğal sayılar” (“*ekok*”) ile ilgili 1. soruda, “ekok” kavramı üzerinde konuşulurken; 2. öğrenci, bir ara, “*Mesela 24’ün ekok’unu alalım, mesela.*” (2. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, tek bir sayının ekok’unu almaya kalkışmıştır. Merkezi kavramları “kat”, “ortak kat” ve “en küçük ortak kat” olan bu problemde; 2. öğrenci, “ortak kat” ve “ekok” kavramlarına dair tanım yapamamıştır. Ancak kavram bilgilerindeki bu eksikliklere rağmen; çözüm için uygun işlemi doğru şekilde kullanabilmiş ve doğru sonuca ulaşabilmiştir (Ö2-1-1).
- 1. öğrenci, 4. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili 2. soruda, “*3 ile bölünebilmede, orada kazık oluyor. Onu bilmiyorum.*” (1. öğrenci – 4. görüşme) diyerek, “3 ile bölünebilme kuralı”nı açıklayamamıştır. 1. öğrenci, “3 ile bölünebilme kuralı”nı bilmemesine rağmen; çözümde “3 ile bölünebilme kuralı”nın kullanımına ihtiyaç duymadan, diğer kavram ve kuralları doğru şekilde kullanarak, doğru sonucu elde edebilmiştir (Ö1-4-2).
- 4. öğrenci, 4. görüşmedeki “çokgenler-dörtgenler” ile ilgili 8. soruda; merkezi kavramlardan, problem ifadesinde geçen iki tane kavramı (“*kare*” ve “*üçgen*”) doğru biçimde tanımlayabilmiştir. Bu soru hakkında,

“ABCD bir kareymiş. $|AE|=|EB|$, $|FC|=10$ cm imiş. Şurası 10 cm. Başka bir şey vermemişler. (11 sn. sessizlik) Vay be! Başka bir şey vermemişler yani

(*güliyor*). Bari bir kareyi verseydiler de, bulsaydık. (3 sn. sessizlik) Aslında bir geometrici, bunu çok güzel yapar; ama ben yapmıyorum işte, yapamıyorum.” (4. öğrenci – 4. görüşme)

şeklinde bir yorum yapan 4. öğrenci; kendisinin bu problemi çözebilmesi için, verilenleri yeterli bulmadığını dile getirmiş ve problemin çözümüne dair hiç fikir yürütememiştir. Çözüme dair hiçbir kavramı–işlemi kullanamayan 4. öğrenci, problemi çözememiş ve sonuca ulaşamamıştır.

5.1.4.2. Katılımcı İlköğretim ve Ortaöğretim Öğrencilerinin, Matematiksel Problem Çözme Sürecinde; Kavramsal Bilgi ile İşlemsel Bilginin Rolü

Hem katılımcı ilköğretim hem de ortaöğretim öğrencileri, araştırmada yer verilen bazı problemlerde;

- Problemin içinde yer alan bazı merkezi kavramlara dair eksik/yanlış bilgiye sahip olmalarına veya bazı kavramların anlamına dair herhangi bir açıklama yapamamalarına rağmen (*örneğin* $\bar{O}2-1-1$; $\bar{O}2-4-2$; $\bar{O}1-2-3$; $\bar{O}3-2-3$; $\bar{O}5-2-2$; $\bar{O}6-2-2$ vs.);
- “Denklem”–“özdeşlik” ($\bar{O}5-2-2$; $\bar{O}6-2-2$) gibi iki kavram arasındaki ilişkiyi açıklayamamalarına rağmen;
- Yaptıkları işlemin temelinde yatan kavram(lar)ın ne olduğunu ve neden o işlemi uyguladıklarını bilmemelerine rağmen (*örneğin* *ekok–ebob* ($\bar{O}4-1-2$); *rasyonel sayılarla bölme işlemi* ($\bar{O}3-2-3$; $\bar{O}4-1-3$; $\bar{O}5-1-3$; $\bar{O}6-1-3$));

çözüm için gerekli olan kavramları–işlemleri doğru şekilde kullanabilmişlerdir. Genel olarak, katılımcı öğrencilerin, problemleri çözme süreçlerinde yukarıdaki durumlar dikkate alındığında; **hem katılımcı ilköğretim hem de katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin; birçok problemde, daha ziyade, –kavramsal bilgi ağırlıklı değil de– işlemsel bilgi ağırlıklı bir çözüm yolu takip ettikleri** söylenebilir. Aşağıda, bu kanaatin oluşmasında etkili olan birkaç örnekten bahsedilecektir:

- 1. görüşmedeki “rasyonel sayılar” ile ilgili 3. soruda; katılımcı ortaöğretim öğrencilerine, “rasyonel sayılarla bölme işlemi yapılırken; neden paydadaki rasyonel sayının ters çevrilerek, paydaki rasyonel sayı ile çarpıldığı” sorulmuştur. Bununla ilgili olarak; araştırmacı–öğrenci konuşmaları aşağıdaki şekildedir:

Öğrenci: Çünkü alttaki tarafın, 1111 (*düşünüyor*), yukarı çıkarken; ters çevriliyor, yani tersi alınıyor.

Görüşmeci: Hani sadece, bu, ezberlemem gereken bir kural mı? Hani nedenini hiç düşündük mü?

Öğrenci: Ezberleme gerektirmiyor aslında. Çünkü hani mesela $\frac{1}{4}$ 'ün tersi 4'tür. Burada biz "alttaki sayının tersini alırız" desek; daha doğru olur, yukarı çıkarken. (4. öğrenci – 1. görüşme)

Görüşmeci: Neden öyle yapıyoruz? Rasyonel sayılarda bölmede... öyle bir kural olarak mı gördünüz onu?

Öğrenci: Evet. "Kural olarak gördük" diyebiliriz.

Görüşmeci: Hani... Peki, beni buna ikna edebilir misin? İki rasyonel sayıyı bölerken, neden acaba... hani "ters çeviririz" dedin.

Öğrenci: Yani...

Görüşmeci: Ya da hiç düşünmüş müydün; gördünüz mü?

Öğrenci: Matematik adına ben hiçbir şeyi ikna edemem. Çünkü böyle zaten genelde... yani mesela "Sıfır neden var?", hatta "1 neden var?" diye, yani böyle aklımızda sorular da oluyor; ama yani bunlara ikna etmemiz biraz zor olur insanları. Çünkü karşı taraf bunu benimsemeyi istemediği sürece, biraz zor olur; ama yani ikna etmeye çalışsam edebilir miydim? Büyük ihtimalle "Hayır".

....

Görüşmeci: Yani bir mantıklı açıklaması var mıdır, peki sence?

Öğrenci: Mantıklı açıklaması vardır. Yani matematik her şeyi elbet bir şekilde açıklar; ama nasıl bir açıklama yapmışlardır, orayı da pek bilmiyorum. Çünkü hocalar dershanede biraz daha şey (*sanırım kastettiği: "yüzeysel"*) geçiyor. (6. öğrenci – 1. görüşme)

Kısacası; 4. öğrenci, bunun gerekçesini açıklamaya çalışsa da, aslında kuralı tekrar ifade etmiştir. 6. öğrenci de, mutlaka mantıklı bir açıklamasının olduğunu; fakat kendisinin bunu bilmediğini dile getirmiştir ve buna gerekçe olarak da, dershanede bu tür açıklamalara pek yer verilmemesini göstermiştir. 5. öğrenci ise, bilmediğini söyleyerek, hiçbir açıklama yapamamıştır. Sonuçta, öğrencilerin üçü de, "rasyonel sayılarla bölme işlemi yapılırken; paydadaki rasyonel sayının ters çevrilerek, paydaki rasyonel sayı ile çarpılması"nın gerekçesini açıklayamamıştır. Fakat "rasyonel sayılarla bölme işlemi"nin mantığını bilmeseler de; bunu bir kural olarak uygulayarak, problemi çözebilmişlerdir. İpek, Işık ve Albayrak (2005) tarafından, sınıf öğretmeni adaylarının, kesir işlemleri konusundaki kavramsal performanslarını incelemek amacıyla yürütülen araştırmadan da; benzer sonuçlar elde edilmiştir. Araştırmadan, sınıf öğretmeni adaylarının, kesirlerle işlemlerin gerekçelerini açıklamadaki başarı oranlarının düşük düzeyde kaldığı; kesirlerle işlemlerin gerekçelerini açıklama konusunda toplama ve çıkarma işlemlerindeki performanslarını, çarpma ve bölme işleminde

aynı oranda gösteremedikleri sonuçlarına ulaşan İpek, Işık ve Albayrak (2005); kesir işlemleri ile ilgili yaşanan sıkıntıların; daha ziyade, işlemlerin, kavramsal düzeyde algılanamayışından kaynaklanıyor olabileceğini de sözlerine eklemişlerdir.

- 2. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili 2 no’lu soruda, 5. öğrenci ve 6. öğrenci, denklem–özdeşlik arasındaki ilişkiyi açıklayamamasına rağmen; ilgili kavramları–işlemleri doğru şekilde kullanabilmiştir (Ö5–2–2; Ö6–2–2).

Hem katılımcı ilköğretim hem de katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin; bu araştırma kapsamındaki birçok problemde, daha ziyade, *–kavramsal bilgi ağırlıklı değil de–* işlemsel bilgi ağırlıklı bir çözüm yolu takip ettiklerine dair sonuçlar; Che Ghazali ve Zakaria (2011), Baki ve Kartal (2004), Soylu ve Aydın (2006), Yusof ve Tall (1996) tarafından gerçekleştirilmiş araştırmaların bazı sonuçları ile tutarlılık göstermektedir. Che Ghazali ve Zakaria’nın (2011) araştırmasından; ortaokul öğrencilerinin işlemsel anlama düzeylerinin yüksek, kavramsal anlama düzeylerinin ise düşük olduğu yönünde sonuçlar elde edilmiştir. Baki ve Kartal’ın (2004) yaptığı araştırmanın sonucunda; lise öğrencilerinin çoğunluğunun cebirsel bilgilerinde kavram ve işlem bilgilerinin yetersiz olduğu; bu nedenle lise öğrencilerinin cebirsel bilgilerinin doğasının, kavram ve işlem bilgilerinin dengelendiği kavramsal öğrenmeye değil de; işlemsel bilgilerinin ön planda olduğu matematiksel öğrenmeye dayalı olduğu sonucu çıkarılmıştır. Benzer şekilde Soylu ve Aydın (2006) tarafından, sınıf öğretmeni adayları ile gerçekleştirilmiş araştırmanın sonuçları da; öğrencilerin işlemsel bilgiyi gerektiren sorulardaki başarı oranının %73,6 ve kavramsal bilgiyi gerektiren sorulardaki başarı oranının %17 olduğunu; matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelenmediğini, daha çok işlemsel öğrenmenin olduğunu göstermiştir. Yusof ve Tall (1996) tarafından, üniversite öğrencileri ile yapılan bir araştırmada ise; matematiğin mantıklı olmadığını düşünen bazı öğrencilerin, bir problemle yüz yüze geldiklerinde; problemin iç yüzünü kavramaya, nedenler ve metotlar bulmaya çalışma yerine, daha ziyade problem çözmek için öğrendikleri teknikleri hatırlama ve uygulamayla ilgili gördükleri tespit edilmiştir. Bu öğrencilerin, problemleri çözerken de; daha ziyade, öğrenilmiş teknikleri ve hazır kuralları uygulayarak, *–kavramsal olmayan–* işlemsel bir metot kullandıkları saptanmıştır (Yusof ve Tall, 1996).

Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problem çözme sürecinde, “problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları”, “kavram–işlem kullanımları” ve “sonuca ulaşmaları” arasındaki genel ilişkiler ile ilgili çıkan başlıca sonuçlar özetlenecek olursa;

- Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problem çözme süreci sonunda doğru sonuca ulaşmaları; her zaman, problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili doğru anlayışlara sahip oldukları ve çözüm sürecinde gerekli olan kavramları–işlemleri doğru şekilde kullanabildikleri anlamına gelmemektedir.

- Katılımcı bir ilköğretim öğrencisinin, kavrama dair yanlış yapılanmış bilgileri olmasına ve bu yanlış yapılanmaları, problem çözümünde kullanmasına rağmen; – soruda verilen sayılar, öğrencide var olan bu yanlış yapılanmaya uygun geldiğinden dolayı– ilk başta tesadüfen doğru sonuç şikkına ulaştığı bir durumla karşılaşmıştır.

- Problemin içinde yer alan tüm merkezi kavramlarla ilgili doğru açıklamalar yapan, –*yaptıkları bu açıklamalar dikkate alındığında*– ilgili kavramlara dair doğru anlayışlara sahip oldukları düşünülen katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri; çözüm için uygun kavramları–işlemleri doğru şekilde kullanarak, direkt olarak doğru sonuçlara ulaşmışlardır. Ancak bu durum, araştırmada yer verilen 14 sorudan 4 soruda ve sadece –*matematik başarı düzeyi “çok iyi” ya da “iyi” olan*– birer öğrenci için geçerli olmuştur.

- Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problem çözme sürecinin herhangi bir aşamasında şıklarda olan yanlış sonuca ulaşma, iki şık arasında kararsız kalma ya da sonuca ulaşamama nedenlerinden, “problemin içinde yer alan merkezi kavramlara dair anlayışları” ile ilgili olarak, bu araştırma kapsamında tespit edilmiş olanlar; kavramın yeterince yapılanmamış olması, kavram yanlışlığının olması, yanlış mantık yürütmesi/yorumlar yapması veya yanlış yapılanmış bilgilerinin olması şeklinde sıralanabilir.

- Katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problem çözme sürecinin herhangi bir aşamasında şıklarda olmayan bir sonuca ulaşma, şıklarda olan yanlış sonuca ulaşma, iki şık arasında kararsız kalma ya da sonuca ulaşamama nedenlerinden, “kavram–işlem kullanımları” ile ilgili olarak, bu araştırma kapsamında tespit edilmiş olanları ise; problem ifadesinde geçen bir bilgiyi kullanmama, uygun olmayan işlem/formül(leri) kullanma, işlem hatası yapma, hiçbir kavramı kullanmama, uygun kavramı eksik kullanma, uygun kavramı–işlemi yanlış şekilde kullanma, yanlış

yapılanmış bilgilerini kullanma, çözümünü yarım bırakma veya dikkatsizlik şeklinde listelenebilir.

- Genel olarak, katılımcı ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, problemleri çözme süreçleri göz önüne alındığında; “öğrenci, problemin içinde yer alan bazı merkezi kavramları çok iyi bilmemesine rağmen, problemi çözebiliyorsa; bunun başlıca nedeni”nin; öğrencilerin çözüm esnasında kavramların anlamlarını düşünmeye, tanımlarını bilmeye ve tanımları doğrudan kullanmaya pek ihtiyaç duymamaları olduğu tespit edilmiştir.

- Hem katılımcı ilköğretim hem de katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin, matematiksel problem çözümünde “sonuca ulaşmaları”nda; genelde, –*“kavramlarla ilgili anlayışları”na nazaran*– “kavram–işlem kullanımları”nın daha belirleyici bir rol oynadığı belirlenmiştir.

- Hem katılımcı ilköğretim hem de katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin; birçok problemde, daha ziyade, –*kavramsal bilgi ağırlıklı değil de*– işlemsel bilgi ağırlıklı bir çözüm yolu takip ettikleri görülmüştür.

5.2. ÖNERİLER

Bu bölümde; araştırmadan elde edilen sonuçlara dayalı olarak, ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenlerine, matematik sınav sorusu hazırlayan uzmanlara ve matematik kitap yazarlarına, matematik eğitimi alanında akademik çalışmalar yapan bilim insanlarına yönelik birtakım önerilere yer verilecektir.

5.2.1. Matematik Öğretmenlerine Yönelik Öneriler

1) Hem katılımcı ilköğretim hem de katılımcı ortaöğretim öğrencilerinden birkaçı; bazı kavramları ve bazı işlemlerin arkasında yatan mantığı tam olarak anlayamadıklarından dolayı; çözüm için gerekli olan formülleri veya çözüm yöntemlerini ezberlemek zorunda kaldıklarını dile getirmişlerdir:

- Çözümünde hiçbir formüle ihtiyaç duyulmayan, 1. görüşmedeki “doğal sayılar” (“*ekok*”) ile ilgili 1. soru için; 1. öğrenci, “*Formülleri ezberleme kabiliyetim yok. Bu yüzden. Hiç aram da yok zaten formüllerle. Öğrenirken, formülle öğrendiğimizi biliyorum; çünkü formülsüz başka bir şekilde yapamam bunu.*” (1. öğrenci – Tamamlayıcı görüşme) yorumunu yapmıştır (Ö1-1-1).
- **Görüşmeci:** “Ters çevirip çarpıyoruz” dedin. Onu neden yaptığımızı biliyor musun?
Öğrenci: Onu neden yaptığımızı bilmiyorum; biz kural olarak öğrendik. “Neden yaptığımız” bize söylenmedi. (1. öğrenci – 2. görüşme – 3. soru)
- “Şimdi, hocalarımız bize, hani hangisinde ekok kullanırken, hangisinde ebob kullanacağımızı hani bize kavratmak amacıyla... Şimdi, hani tam... yani mantığını aslında tam olarak bize anlatmadılar. Ama hani küçük parçalardan büyük parçaya giderken; hani tam tersini düşünerek mesela biz ezberledik. Hani mantığını tam olarak şey yapmadık ama. Yani soru... ‘soru çözülürken; hani bu yöntem kullanılacak’ dediler bize. Yani ben öyle hatırlıyorum.” (5. öğrenci – Tamamlayıcı görüşme)
- “Üçgenin alan formülü” sorulduğunda; 4. öğrenci, 5 saniye düşündükten sonra, “ ‘*Taban çarpı yükseklik bölü iki*’ olması gerekiyor.” (4. öğrenci – 4. görüşme) yanıtını vermiştir. “Bu formülün nereden çıktığı” sorusu üzerine; 4. öğrenci, birkaç saniye düşündükten sonra, şunları söylemiştir:

“Şurası yüksekliği, tabanı. Bölü 2’si, ını *(düşünüyor)*. Aslında hiç düşünmedim, nereden geliyor hani. Formülleri ezberlemiştir, yani körü körüne.”
(4. öğrenci – 4. görüşme – 8. soru)

Che Ghazali ve Zakaria’nın (2011) da belirttiği gibi; öğrencilerin algoritmaları ve ezber bilgileri kullanımlarını en aza indirebilmek için; öğretimin, öğrencileri kavramsal anlamının önemine ve gerekliliğine ikna edebilecek şekilde yeniden düzenlenmesine ihtiyaç vardır. Bu noktada, hem ilköğretim hem de ortaöğretim matematik öğretmenlerine ciddi iş düşmektedir.

Birçok alanda, problemleri çözmede; öğrencilerin hem temel kavramları hem de doğru işlemleri öğrenmeleri önemli rol oynamaktadır (Rittle-Johnson ve Alibali, 1999). Matematikte yeterlilik kazanmak; hem kavramları bilmeyi, hem sembolleri ve işlemleri bilmeyi, hem de aralarındaki ilişkileri bilmeyi içerir. Bilgi birimlerini edindiği halde, aralarında ilişki kurmama; matematik öğrenmeyi ciddi anlamda etkilemektedir (Hiebert ve Lefevre, 1986). Öğrenciler, kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişkileri fark etmekte veya oluşturmakta çoğu kez zorlandıklarından (Hiebert ve Lefevre, 1986); kavramlar ile işlemler arasındaki bağlantıların kurulmasında, öğretmenin yönlendirmesine ihtiyaç vardır. Katılımcı öğrencilerin yukarıda söylediklerine dayalı olarak, **matematik öğretmenlerine; derslerinde, işlemlerin temelinde yatan kavramların, hangi kavramların-işlemlerin ne zaman ve neden kullanılmaları gerektiğinin, kavramlar ile işlemler arasındaki ilişkilerin üzerinde daha fazla durmaları önerisinde bulunulabilir. Matematiksel kavramların birbirleri ile olan ilişkilerinin ve kavramlar ile işlemler arasındaki ilişkilerin ortaya konmasında kavram haritalarından da yararlanılabilir.**

2) Bu araştırmadan elde edilen sonuçlar; bazı katılımcı öğrencilerin, çözüm sürecinde kavram tanımlarını düşünmeleri, hatırlamaları ve doğrudan kullanmaları gereken matematiksel problemlerle –*sınavlarda ve matematik derslerinde*– fazla karşılaşmadıklarını; çözüm sırasında, –*kavramlardan ziyade*– o soruda hangi çözüm yönteminin kullanılacağı, hangi işlemlerin yapılacağı ile daha fazla ilgilendiklerini göstermektedir. **Gerek matematik konularının öğretimi esnasında, gerekse sınav ve değerlendirmelerde öğrencilerin kavram bilgilerini sorgulayacak ve kavramları kullanmalarını gerektirecek problem ve etkinliklere (daha fazla) yer verilmesi** durumunda; öğretmenlerin, öğrencilerin matematiksel kavram bilgileri

konusunda daha derin bilgi sahibi olabilecekleri ve öğrencinin matematikteki başarısı konusunda daha doğru değerlendirmeler yapabilecekleri düşünülmektedir.

Öğrencide var olan kavram bilgisini su yüzüne çıkarması hedeflenen bu tür problem ve etkinlikler; öğretmenlere, öğrencilerin eksik/yanlış kavram bilgilerini tespit etme ve bu eksik/yanlış kavram bilgilerini –ilerde daha ciddi kavram yanlışlarına, yanlış yapılanmalara dönüşmeden– giderme şansı verebilir. Kavram bilgisini sorgulayan ve çözüm sırasında kavramları kullanmayı gerektiren problemler; öğrencilerin kendi bilişsel süreçleri, bildikleri ve bilmedikleri, yapabildikleri ve yapamadıkları konusunda farkındalık düzeylerinin artmasına da yardımcı olabilir.

- 3) Ortaöğretim matematik öğretmen adayları üzerinde yapmış oldukları araştırma sonucunda, üniversite derslerinde öğrenilen matematikle okul matematiği arasında boşluk olduğunu tespit eden Leikin ve Zazkis'in (2010) yapmış oldukları öneriye de paralel olarak; **üniversitelerde olduğu gibi okullarda da, tanım kavramına, tanımın yapısına ve matematikteki rolüne dair tartışmalara daha fazla yer verilebilir.**
- 4) Rasslan ve Tall'un (2002) da öneride bulunduğu gibi; **öğrenciler, –kavrama dair daha derinlemesine anlayış oluşturmalarına yardımcı olacak şekilde– fikirlerini ifade etme konusunda teşvik edilmelidir.**

Matematik derslerinde bir kavrama yönelik tanımlama sürecinden sonra; öğrencilerin o kavram tanımından ne anladıklarını öğrenmek için, öğrencilerden, o tanımı, kendi kelimeleri ile açıklamaları istenebilir. Öğrencilerden, tanımı, kendi kelimeleri ile açıklamalarını (ifade etmelerini) istemek; –Toumasis'in (1995) de belirttiği gibi– hem öğrencilerin terimlerinin doğruluğunu artırır; hem de öğrencilerin, –özellikleri karşılaştırarak ve örnek ile örnek olmayan durumlar (*nonexamples*) vererek– tanımı analiz etmelerine yardımcı olur.

Öğrencilerin kavramlara dair anlayışları konusunda bilgi sahibi olmak, böylece mevcut kavram yanlışlarını, eksik ve yanlış yapılanmalarını belirlemek için; **öğrencilerden, matematik derslerinde problem çözerken, problemin içinde yer alan merkezi kavramların anlamları üzerine düşünmeleri, bazı kavramları açıklamaları ve çözüm sırasında yaptıkları işlemleri anlamlandırmaları da istenebilir.** Hiebert ve Wearne (1996) tarafından yapılan araştırmada; öğrencileri,

kendilerine sunulan işlemleri anlamlandırma ve kendi işlemlerini geliştirme konusunda teşvik eden öğretimin; anlama ve beceri arasında daha yakın bağlantılar kurmayı ve daha yüksek düzeyde anlamayı kolaylaştırdığı tespit edilmiştir.

5.2.2. Matematik Sınav Sorusu Hazırlayan Uzmanlara ve Matematik Kitap Yazarlarına Yönelik Öneriler

- 1) Genel olarak, katılımcı öğrencilerin, problemleri çözme süreçleri dikkate alındığında; hem katılımcı ilköğretim hem de katılımcı ortaöğretim öğrencilerinin; birçok problemde, daha ziyade, *–kavramsal bilgi ağırlıklı değil de–* işlemsel bilgi ağırlıklı bir çözüm yolu takip ettikleri kanaatine varılmıştır. Katılımcı öğrenciler, araştırmada yer verilen bazı problemlerde; problemin içinde yer alan bazı merkezi kavramlara dair eksik/yanlış bilgiye sahip olmalarına veya bazı kavramların anlamına dair herhangi bir açıklama yapamamalarına rağmen; kavramlar arasındaki ilişkiyi açıklayamamalarına rağmen; yaptıkları işlemin temelinde yatan kavram(lar)ın ne olduğunu ve neden o işlemi uyguladıklarını bilmemelerine rağmen; çözüm için gerekli olan kavramları–işlemleri doğru şekilde kullanabilmiş ve doğru sonuca ulaşabilmişlerdir. Bunun başlıca nedeninin; öğrencilerin çözüm esnasında kavramların anlamlarını düşünmeye, tanımlarını bilmeye, tanımları doğrudan kullanmaya, kavramlar arasında ilişki kurmaya, yaptıkları işlemin temelinde yatan kavram(lar)ın ne olduğunu düşünmeye pek gereksinim duymamaları; problemlerin birçoğunun, doğrudan kavramsal bilgiye ihtiyaç duyulmadan da çözülebilmesi olduğu söylenebilir.

Halbuki sınavlarda ve matematik kitaplarında, öğrencilerin kavram bilgilerini sorgulayacak ve kavram tanımlarını kullanmalarını gerektirecek problemlere (daha fazla) yer verilmesi durumunda; kavramların tanımını bilen, aynı zamanda kavramı kullanabilen öğrenciler ile bilmeyen/kullanamayan öğrencileri birbirinden ayırmak mümkün olabilecektir. Bu durumda; öğrencinin matematikteki başarısına dair yapılan değerlendirmelerin de, daha doğru ve gerçekçi olacağı düşünülmektedir. Öğrencilerin çalışma tarzları, –yeterli sayıda soruya doğru cevap vermek olan– çalışma amaçlarından etkilenebildiğinden (Skemp, 1978) dolayı; sınavlarda kavram bilgisini gerektiren soru sayısının artması durumunda; öğrencilerin de, matematiksel kavramlara daha fazla

önem verecekleri ve sınavlara daha kavram odaklı hazırlanacakları öngörülmektedir.

2) Aşağıda yer verilen araştırmacı–katılımcı öğrenci konuşmaları ve alıntılar da; bazı öğrencilerin, bir şeyi öğrenip öğrenmemeye, sınavda sorulma ihtimaline göre karar veriyor olabileceğini göstermektedir:

- “Ama bu soru kolaymış; ben ilk baktığımda hiç göremedim. Çünkü bayadan beri öyle ekok soruları çözmediğim için SBS durumundan dolayı. Şimdi bakınca anladık. O zamanlar işlediğim için, hemen baktığımda çözmüştüm.” (2. öğrenci – 1. görüşme – 1. soru)
- **Görüşmeci:** Peki, hiç “özdeşlik” diye bir şey duydun mu?
Öğrenci: Evet.
....
Görüşmeci: Hımm, denklem–özdeşlik farkı nedir, peki?
Öğrenci: İıı (4 sn. düşünüyor). Onu bilmiyorum işte tam olarak.
Görüşmeci: Hımm, peki. Hani biliyordun, unuttun mu? Yoksa çok üzerinde durmadığın bir şey...
Öğrenci: Çok üzerinde durmamışımdır. Açıkçası hani şeyde, sınavlarımızda böyle gelmediği için. (5. öğrenci – 1. görüşme – 5. soru)
- **Görüşmeci:** Hım. Hani denklemle ve özdeşlik farkını merak ediyorum da ben.
...
Öğrenci: Denklem–özdeşlik farkını...
Görüşmeci: Farklı mıdır ya da?
Öğrenci: (3 sn. sessizlik) Farklıydı; ama nasıl farklıydı? Ben de tam olarak hatırlamıyorum. Çünkü 9. sınıfta gördüğümüz için. Yani şu anda pek aklımda ondan kalan pek bir şey yok ve sınavlarda yani genelde öyle “fark” falan sormadıkları için.
Görüşmeci: Hı hı. Tamam.
Öğrenci: Yani pek çalışmadım. (6. öğrenci – 1. görüşme – 5. soru)

Matematikte yeterlilik kazanmak; hem kavramları bilmeyi, hem sembolleri ve işlemleri bilmeyi, hem de aralarındaki ilişkileri bilmeyi içerir. Bilgi birimlerini edindiği halde, aralarında ilişki kurmama; matematik öğrenmeyi ciddi anlamda etkilemektedir (Hiebert ve Lefevre, 1986). Bu nedenle; **sınavlarda ve matematik kitaplarında, öğrencilerin kavram bilgilerini sorgulayacak soruların yanısıra, kavramlar arasındaki ilişkileri bilmeyi gerektirecek sorulara da (daha fazla) yer verilmesinin; öğrencilerin matematikte yeterlilik kazanmalarına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.**

3) SBS, YGS ve LYS gibi merkezi sınavlarda, çoktan seçmeli sorulardan oluşan testler kullanılmaktadır. Yapılan bu araştırma kapsamında; çoktan seçmeli sorulardaki şıkların, öğrencinin çözüm sürecinde, oldukça yönlendirici ve etkin bir rol

oynayabildiğini gösteren bazı bulgular elde edilmiştir. Aşağıda, bu durumu örneklendirmek adına, çarpıcı birkaç bulguya değinilecektir:

- 1. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili 1. soruda; 1. öğrenci, “*Gerçi böyle problemleri hiç çözemem. Ama sanırım, bunları çarpınca... 6 kere 4, 24; doğru cevabı bulmuş olurum.*” (1. öğrenci – 1. görüşme) diyerek, çözüm için uygun olmayan bir işlem yapmış ve şıklarda olan yanlış sonuca ulaşmıştır. Öğrencinin ilk önce “*Gerçi böyle problemleri hiç çözemem.*” (1. öğrenci – 1. görüşme) demesi, daha sonra –*emin olmasa da*– çarpma işlemi yapması ve neden çarpma işlemi yaptığını açıklarken de “.... 24’ü çünkü; hem 6 böler, hem 4 böler. Ortak sayıları o olduğu için, düşündüm.” (1. öğrenci – 1. görüşme) ifadesini kullanması; 1. öğrencinin, aslında çözüm yolu hakkında bir fikrinin olmadığı, o an şıklara bakarak ve problemde verilen iki sayıyı düşünerek D şikkının doğru şık olabileceği yönünde fikir üretmiş olabileceğini göstermektedir.
- 1. görüşmedeki “olasılık” ile ilgili olan 6. soruda, 5. öğrenci; sorunun cevabı olarak, ilk başta, şıklarda yer almayan $\frac{1}{24}$ sonucunu bulmuştur. Bunun üzerine, şıklarda olan bir sonuç bulabilmek için, deneme–yanılma yoluna yönelen 5. öğrencinin; başta doğru olan mantık yürütmeleri, bu kez yanlışla dönüşmüştür. 5. öğrenci, çözüm sürecinin farklı aşamalarında, hem uygun kavramı eksik kullanmış, hem de yine uygun olan başka bir kavramı yanlış şekilde kullanmış olmasına rağmen; sonunda tesadüfen, doğru olan sonuç şikkına ulaşmıştır (Ö5–1–6).
- 1. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili bir problem için; 5. öğrenci, “*Şimdi bu, okek–obeb sorusu galiba.*” (5. öğrenci – 1. görüşme) yorumunu yapmış ve ilk önce, problemin, “ekok” kavramı ile çözüleceğini söylemiştir. Buradan bir sonuç elde edemeyince; “ebob” kavramından yararlanma yönünde fikir değiştirmiştir. Fakat fikir değiştirme gerekçesi sorulduğunda; cevabı şöyle olmuştur:

“.... Şimdi yani ben bunun obeb’ini bulayım ilk önce. ... Cevabı bulursam; mantık yürütmeye çalışırım.” (5. öğrenci – 1. görüşme)

Öğrencinin bu sözleri; 5. öğrencinin, çözüm yolunu belirlemede deneme–yanılma yolunu takip ettiği düşüncesini uyandırmıştır. Sonuçta; 5. öğrenci, bu problemi çözerek, geç de olsa doğru sonuca ulaşabilmiştir.

Yukarıdaki örneklerden de görülebildiği gibi; soruların şıklı verilmesinden dolayı;

- Öğrencinin, çözüm yolu hakkında hiçbir fikri olmasa bile; soruda verilen sayılarla şıklarda yer alan sayılar arasında kendince bir ilişki kurarak, boş bırakmak yerine, çağrışım yapan o şıkkı işaretlemesi;
- Öğrencinin, şıklarda yer almayan bir sonuca ulaştığında; şıklarda olan bir sonuç bulabilmek için deneme–yanılma yoluna yönelerek, *–tesadüfen de olsa–* bir sonuç şıkkına ulaşması;
- Öğrencinin, mantıklı adımlarla ilerleyerek doğru sonuca ulaşmak yerine; cevaba ulaşması durumunda mantık yürütmeyi tercih etmesi

gibi durumlarla karşılaşmıştır. Bu tür durumlarda; şıklar, bazen öğrenci için can simidi görevi görerek, kurtarıcı olabilmekte ve öğrenciyi o an için herhangi bir kıyıya ulaştırabilmektedir. Ancak öğrenci, güvenli kıyıya (*doğru sonuç şıkkına*) ulaşabilse bile; bu durum, öğrencinin yüzmeyi (*anlamlı bir şekilde matematik*) öğrenmesine katkı sağlamamaktadır. Katılımcı ilköğretim öğrencilerinin, görüşme sorularının SBS matematik soruları olduğunu fark etmelerini engellemek amacıyla sorulan bir TIMSS sorusu hakkında, öğrenci ile araştırmacı arasında aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Öğrenci: ... (*Öğrencinin gözü, şıkları olmayan 6. soruya takılıyor:*)

“Cevap: ” yazıyor ama burada; bu ne?

Görüşmeci: O 6. sorunun cevabını yazacaksın.

Öğrenci: (*Ses tonu şaşkınlıktan bir anda artıyor:*) Hadi ya!

Görüşmeci: Şıksız bir soru.

Öğrenci: (*Kısık sesle:*) “Eyvah eyvah!” (2. öğrenci – 2. görüşme – 6. soru)

Bu konuşma; bazı öğrencilerin, şıksız sorulardan pek hoşlanmıyor olabileceklerinin bir göstergesidir. Öğrencide şıksız soruya karşı gelişen bu olumsuz tutumda; öğrencilerin hazırlandıkları sınavlarda hep çoktan seçmeli soruların kullanılıyor olmasının da payı olduğu düşünülmektedir.

Gelecekte iş bulma açısından sınavların önemi düşünüldüğünde; öğrencilerin başlıca amaçlarından birinin, bu sınavlarda başarı elde etmek olması gayet doğaldır. Öğrencilerin çalışma tarzları da, –yeterli sayıda soruya doğru cevap vermek olan– çalışma amaçlarından etkilenebilmektedir (Skemp, 1978). **SBS, YGS ve LYS gibi merkezi sınavlarda; çoktan seçmeli soruların yanı sıra, –öğrencinin, bulduğu sayısal cevabı, optik formda kodlayabileceği– şıksız matematik sorularına da yer verilebilir. Bu durumda; öğrencilerin sınava çalışma tarzlarında da değişimler olması; öğrencilerin, çözüm için gerekli kavramları–işlemleri daha bilinçli bir şekilde belirlemesi, kullanması ve sonuç odaklı değil de süreç odaklı bir çözüm yolu takip etmesi ve dolayısıyla, çoktan seçmeli sorulardaki şıkların da, öğrencinin**

çözüm sürecinde oynadığı yönlendirici ve etkin rolün biraz hafiflemesi beklenmektedir.

4) Bu araştırma sürecinde; katılımcı öğrencinin, yanlış yapılanmış bilgilerinden ya da kavram bilgisindeki eksiklikten dolayı, normalde yanlış sonuca ulaşması ya da soruyu çözmemesi beklenirken; soruda verilen sayılar uygun geldiğinden dolayı, (tesadüfen de olsa) doğru sonuç şıkkına ulaştığı birkaç durumla karşılaşmıştır:

- 1. öğrenci, 2. görüşmedeki “sözel problemler” ile ilgili 7. problemin çözümünde; “ondalık kesirlerde sıralama” ile ilgili “Virgülden sonra ne kadar çok sayı varsa; sayı o kadar küçük oluyor.” şeklinde yanlış yapılanmış bilgisi olmasına ve bu yanlış yapılanmaları kullanmasına rağmen; –*soruda “süre” ve “kumaş miktarı” için verilen sayılar, öğrencide var olan bu yanlış yapılanmaya uygun geldiğinden dolayı*– ilk başta tesadüfen, doğru sonuç şıkkına ulaşmıştır (Ö1–2–7).
- 1. öğrencinin, 4. görüşmedeki “doğal sayılar” ile ilgili olan 2 no’lu soruda, “3 ile bölünebilmede, orada kazık oluyor. Onu bilmiyorum.” (1. öğrenci – 4. görüşme) sözleriyle, “3 ile bölünebilme kuralı”nı bilmediğini ifade etmesi; ancak kuralı bilmemesinin, problemin çözümü için sorun oluşturmaması ve doğru şıkka ulaşmasına engel olmaması dikkati çekmiştir. Cevap şıklarında yer verilen sayıların, “3 ile bölünebilme kuralı”nı bilmeyi gerektirmemesinden dolayı; 1. öğrenci, çözümde bu kuralın kullanımına ihtiyaç duymadan, şıkları eleme yoluyla problemi çözebilmiş ve doğru cevap şıkkına ulaşabilmiştir (Ö1–4–2).

Problem ifadesinde geçen sayıların ve çoktan seçmeli sorulardaki şıkların belirlenmesinde, öğrencilerde var olduğu tespit edilen bu tür yanlış yapılanmaların dikkate alınması; öğrenci başarısına dair doğru değerlendirmeler yapılabilmesi açısından önemlidir. Ancak öğrencilerde var olan bu tür yanlış yapılanmaların, kavram yanlışlarının tespit edilmesi noktasında; matematik eğitimi alanında akademik çalışmalar yapan bilim insanlarına ciddi iş düşmektedir.

5.2.3. Matematik Eğitimi Alanında Akademik Çalışmalar Yapan Bilim İnsanlarına Yönelik Öneriler

- 1) “İlköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin; matematiksel problem çözme sürecinde, kavramlar ile ilgili anlayışlarının ve kavram–işlem kullanımlarının rolü”nün incelendiği bu araştırmaya benzer çalışmalar; farklı öğretim kademelerindeki (daha fazla sayıda) öğrencilerle ve farklı matematiksel kavramları içeren problemler kullanılarak da yapılabilir.
- 2) Gerek yurtiçinde gerekse yurtdışında; öğrencilerin, matematiksel problem çözme sürecinde kavram–işlem kullanımlarının incelendiği herhangi bir araştırmaya rastlanmadığından; bu araştırmada, sadece belirli bir öğrenme alanında yer alan matematiksel kavramları içeren problemler yerine, farklı öğrenme alanlarından matematiksel kavramlar içeren problemler tercih edilmiştir. Böylece “ilköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin, matematiksel problem çözme sürecinde; ‘problemin içinde yer alan merkezi kavramlarla ilgili anlayışları’, ‘kavram–işlem kullanımları’ ve ‘sonuca ulaşmaları’ arasındaki ilişki” genel olarak ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu araştırmaya benzer çalışmalar; belirli birkaç kavramı içeren çok sayıda matematiksel problem kullanılarak da yapılabilir. Bu durumda; öğrencilerin, matematiksel problem çözme sürecinde, belirli kavramlara yönelik anlayışlarını ve kavram–işlem kullanımlarını daha derinlemesine incelemek ve bu konuda daha detaylı bilgiler elde etmek mümkün olabilir.

KAYNAKÇA

- Afamasaga-Fuata'i, K. (2008). Students' conceptual understanding and critical thinking: A case for concept maps and vee-diagrams in mathematics problem solving. *Australian Mathematics Teacher (AMT)*, 64(2), 8-17.
- Aydın, M. ve Köğce, D. (Haziran, 2008). Öğretmen adaylarının “denklem ve fonksiyon” kavramlarına ilişkin algıları. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, V (I), 46-58. Web: http://efdergi.yyu.edu.tr/makaleler/cilt_V/02_2008_koce_aydin.pdf adresinden 17 Ocak 2012’de alınmıştır.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* (Genişletilmiş 4. basım). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.
- Baki, A. ve Bell, A. (1997). *Ortaöğretim matematik öğretimi* (1. cilt). Ankara: YÖK/Dünya Bankası.
- Baki, A. ve Kartal, T. (2004). Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerinin cebir bilgilerinin karakterizasyonu. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2(1), 27-46.
- Baroody, A. J. and Ginsburg, H. P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 75-112). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Bayazit, N. (2009). *Prospective mathematics teachers' use of mathematical definitions in doing proof*. Unpublished doctoral dissertation, Florida State University, Tallahassee, Florida, Amerika Birleşik Devletleri.
- Beswick, K. (2005). Preservice teachers' understandings of relational and instrumental understanding. In H. L. Chick and J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 161-168). Melbourne: PME.
- Brownell, W. A. (1947). The place of meaning in the teaching of arithmetic. *The Elementary School Journal*, 47(5), 256-265.
- Byrnes, J. P. and Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology*, 27(5), 777-786.
- Byrnes, J. P. (1992). The conceptual basis of procedural learning. *Cognitive Development*, 7, 235-257.
- Canobi, K. H., Reeve, R. A., and Pattison, P. E. (1998). The role of conceptual understanding in children's addition problem solving. *Developmental Psychology*, 34(5), 882-891.

- Canobi, K. H. (2009). Concept-procedure interactions in children's addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102, 131-149.
- Capraro, M. M. and Joffrion, H. (2006). Algebraic equations: Can middle-school students meaningfully translate from words to mathematical symbols? *Reading Psychology*, 27, 147-164.
- Carter, G. and Norwood, K. S. (1997). The relationship between teacher and student beliefs about mathematics. *School Science and Mathematics*, 97(2), 62-67.
- Chappell, K. K. and Killpatrick, K. (2003). Effects of concept-based instruction on students' conceptual understanding and procedural knowledge of calculus. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 13(1), 17-37.
- Che Ghazali, N. H. and Zakaria, E. (2011). Students' procedural and conceptual understanding of mathematics. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 5(7), 684-691.
- Crawford, K., Gordon, S., Nicholas, J., and Prosser, M. (1994). Conceptions of mathematics and how it is learned: The perspectives of students entering university. *Learning and Instruction*, 4, 331-345.
- Creswell, J. W. (2005). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research* (Second edition). New Jersey: Pearson Merrill Prentice Hall.
- de Jong, T. and Ferguson-Hessler, M. G. M. (1996). Types and qualities of knowledge. *Educational Psychologist*, 31(2), 105-113.
- Delice, A. ve Sevimli, E. (2010). Matematik öğretmeni adaylarının belirli integral konusunda kullanılan temsiller ile işlemsel ve kavramsal bilgi düzeyleri. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 9 (3), 581-605. Web: <http://sbe.gantep.edu.tr/~sbd/index.php/sbd/article/view/267/174> adresinden 30 Temmuz 2012'de alınmıştır.
- Dormolen, J. V. and Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 91-106.
- Edwards, B. S. (1997). *Undergraduate mathematics majors' understanding and use of formal definitions in real analysis*. Unpublished doctoral dissertation, Pennsylvania State University, Pennsylvania.
- Edwards, B. S. and Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *American Mathematical Monthly*, 111(5), 411-424.
- Erden, M. ve Akman, Y. (1997). *Eğitim psikolojisi: Gelişim-öğrenme-öğretme* (4. baskı). Ankara: Arkadaş Yayınevi.

- Even, R. and Tirosh, D. (2002). Teacher knowledge and understanding of students' mathematical learning. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 219-240). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Fodor, J. A., Garrett, M. F., Walker, E. C. T., and Parkes, C. H. (1980). Against definitions. *Cognition*, 8, 263-367.
- Glesne, C. (1999). *Becoming qualitative researchers: An introduction* (Second edition). New York: Longman.
- Grant, C. E. (1985). A study of the relationship between secondary mathematics teachers' beliefs about the teaching-learning process and their observed classroom behaviors (conceptions). *Dissertation Abstracts International*, 46(4), 919.
- Grundmeier, T. A., Hansen, J., and Sousa, E. (2006). An exploration of definition and procedural fluency in integral calculus. *Primus*, 16(2), 178-191.
- Haapasalo, L. and Kadijevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal für Mathematik-Didaktik (JMD)*, 21(2), 139-157.
- Hallett, D., Nunes, T., and Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102(2), 395-406.
- Heinze, A. (2002). „... aber ein Quadrat ist kein Rechteck“ – Schülerschwierigkeiten beim Verwenden einfacher geometrischer Begriffe in Jahrgang 8. *ZDM*, 34(2), 51-55.
- Hiebert, J. and Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hiebert, J. and Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York, NY: Macmillan Publishing Company.
- Hiebert, J. and Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, 14(3), 251-283.
- İpek, A. S., Işık, C., ve Albayrak, M. (2005). Sınıf öğretmeni adaylarının kesir işlemleri konusundaki kavramsal performansları. *Atatürk Üniversitesi Kâzım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11, 537-547. Web: <http://e-dergi.atauni.edu.tr/index.php/kkefd/article/viewFile/4012/3836> adresinden 7 Temmuz 2012'de alınmıştır.
- Kaplan, A. ve Hızarcı, S. (2005). Matematik öğretmen adaylarının üçgen kavramı ile ilgili bilgi düzeyleri. *Atatürk Üniversitesi Kâzım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11, 472-478. Web: [http://e-](http://e-dergi.atauni.edu.tr/index.php/kkefd/article/viewFile/4012/3836)

dergi.atauni.edu.tr/index.php/kkefd/article/viewFile/4006/3830 adresinden 17 Ocak 2012’de alınmıştır.

- Kar, T., Çiltaş, A., ve Işık, A. (Eylül, 2011). Cebirdeki kavramlara yönelik öğrenme güçlükleri üzerine bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 19 (3), 939-952. Web: http://www.kefdergi.com/pdf/19_3/19_3_18.pdf adresinden 16 Kasım 2011’de alınmıştır.
- Keiser, J. M. (2000). The role of definition. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 5(8), 506-511.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., and Findell, B. (Editors). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*, Washington, DC: National Academy Press. Web: <http://www.nap.edu/catalog/9822.html> adresinden 15 Ağustos 2011’de alınmıştır.
- Kilpatrick, J. and Swafford, J. (Editors). (2002). *Helping children learn mathematics*, Washington, DC: National Academy Press. Web: <http://www.nap.edu/catalog/10434.html> adresinden 15 Ağustos 2011’de alınmıştır.
- Leikin, R. and Zazkis, R. (2010). On the content-dependence of prospective teachers’ knowledge: A case of exemplifying definitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(4), 451-466.
- Leung, F. and Park, K. (2002). Competent students, competent teachers? *International Journal of Educational Research*, 37, 113-129.
- Mamona-Downs, J. and Downs, M. (2002). Advanced mathematical thinking with a special reference to reflection on mathematical structure. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 165-195). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marchionda, H. (2006). *Preservice teachers’ procedural and conceptual understanding of fractions and the effects of inquiry-based learning on this understanding*. Unpublished doctoral dissertation, Clemson University, Clemson, SC.
- Mariotti, M. A. and Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219-248.
- Morgan, C. (2005). Words, definitions and concepts in discourses of mathematics, teaching and learning. *Language and Education*, 19(2), 103-117.
- Mousley, J. (2004). An aspect of mathematical understanding: The notion of “connected knowing”. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 377-384).
- Muijs, D. and Reynolds, D. (2001). Teachers’ beliefs and behaviors: What really matters? *Journal of Classroom Interaction*, 37(2), 3-15.

- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics* [Executive Summary]. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Web: http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/12752_exec_pssm.pdf adresinden 4 Ağustos 2012'de alınmıştır.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 1-18.
- Özel Dershaneler Birliği Derneği (ÖZ-DE-BİR). "8. sınıf için SBS II. deneme (14 Mart 2010)", "YGS deneme (21 Şubat 2010)". Web: <http://www.ozdebir.org.tr/> adresinden 25 Nisan 2010'da alınmıştır.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & Evaluation methods* (Third edition). Thousand Oaks, California: Sage Publications.
- Pimm, D. (1993). Just a matter of definition. [Review of the Book *Learning Mathematics Through Inquiry*]. *Educational Studies in Mathematics*, 25, 261-277.
- Poincaré, Henri. (1914). *Science and method*. (Çev. F. Maitland). London, Edinburgh, Dublin, & New York: Thomas Nelson and Sons. Web: <http://www.archive.org/details/cu31924012248179> adresinden 22 Kasım 2011'de alınmıştır.
- Poincaré, H. (1969). Mathematical definitions and teaching (çev. G. B. Halsted). *The Mathematics Teacher*, 62(4), 295-304.
- Rasslan, S. and Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. In A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 89-96). Norwich, UK. Web: <http://www.davidtall.com/> adresinden 17 Kasım 2011'de alınmıştır.
- Rayner, V., Pitsolantis, N., and Osana, H. (2009). Mathematics anxiety in preservice teachers: Its relationship to their conceptual and procedural knowledge of fractions. *Mathematics Education Research Journal*, 21(3), 60-85.
- Reason, M. (2003). Relational, instrumental and creative understanding. *Mathematics Teaching*, 184, 5-7.
- Ricciardi, E. G. (1985). The usage of definition and explanation in secondary school mathematics. *Dissertation Abstracts International*, 46/03, 640.
- Richardson, K. (2004). Going beyond the right answer. *Teaching Pre K-8*, 34(4), 52-53.
- Richgels, G. W. (1994). The role of student's beliefs about mathematics in the learning of the mathematical definition of limit. *Dissertation Abstracts International*, 54/11, 4022.

- Rittle-Johnson, B. and Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175-189.
- Rittle-Johnson, B. and Koedinger, K. R. (2002). Comparing instructional strategies for integrating conceptual and procedural knowledge. *Proceedings of the Annual Meeting [of the] North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Athens, GA.
- Rittle-Johnson, B. and Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 75-110). East Sussex, UK: Psychology Press. Web: <http://www.psy.cmu.edu/~siegler/rj-sieg98.pdf> adresinden 25 Ağustos 2012'de alınmıştır.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., and Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346-362.
- Rittle-Johnson, B. and Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, 99(3), 561-574.
- Rittle-Johnson, B. and Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101(3), 529-544.
- Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69(3), 217-233.
- Schneider, M., Rittle-Johnson, B., and Star, J. R. (2011). Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology*, 47(6), 1525-1538.
- Shield, M. (2004). Formal definitions in mathematics. *Australian Mathematics Teacher*, 60(4), 25-28.
- Silver, E. A. (1986). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 181-198). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, 26(3), 9-15.
- Skemp, R. R. (1986). *The psychology of learning mathematics* (Second edition). London: Penguin Books.
- Soğancı, Ö. (2006). *Matematik öğreniminde ve öğretiminde öğretmen adaylarının matematiksel tanımlara yaklaşımları üzerine fenomenografik bir çalışma*.

Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

- Soylu, Y. ve Aydın, S. (2006). Matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelenmesinin önemi üzerine bir çalışma. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi*, 8 (2), 83-95. Web: http://www.erzincan.edu.tr/birimler/egitim/userfiles/eefdergi/8_2/83-95.pdf adresinden 16 Kasım 2011’de alınmıştır.
- Star, J. R. (2002). Re-“Conceptualizing” procedural knowledge in mathematics. *Reports-Descriptive*, ED 472 948, 1-8. Web: <http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED472948.pdf> adresinden 8 Temmuz 2012’de alınmıştır.
- Stigler, J. W. and Hiebert, J. (2004, February). Improving mathematics teaching. *Educational Leadership*, 61(5), 12-17.
- Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M., and MacGyvers, V. L. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and Teacher Education*, 17, 213-226.
- Strauss, A. and Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (Second edition). Thousand Oaks, California: Sage Publications.
- Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. Öğretmenler Portalı. “İlköğretim Matematik Dersi (6-8. Sınıflar) Öğretim Programı (2009 yılı)”, “Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı (2005 yılı)”. Web: <<http://ttkb.meb.gov.tr/>> adresinden 12 Kasım 2009’da alınmıştır.
- Tall, D. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Tall, D. (1988). Concept image and concept definition. In J. de Lange and M. Doorman (Eds.), *Senior secondary mathematics education* (pp. 37-41). OW&OC Utrecht. Web: <http://www.davidtall.com/> adresinden 16 Kasım 2011’de alınmıştır.
- Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). New York, NY: Macmillan Publishing Company.
- Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.
- Toumasis, C. (1995). Concept worksheet: An important tool for learning. *The Mathematics Teacher*, 88(2), 98-100.

- Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS). Web: <http://timssandpirls.bc.edu/TIMSS2007/items.html> adresinden 26 Şubat 2010'da alınmıştır.
- Türk Dil Kurumu. Büyük Türkçe Sözlük. Web: <http://tdkterim.gov.tr/bts/> adresinden 16 Haziran 2009'da alınmıştır.
- T.C. Millî Eğitim Bakanlığı (M.E.B.)–Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü. “2008 yılı 6. sınıf ve 7. sınıf Seviye Belirleme Sınavı (SBS) soruları”, “2009 yılı Ortaöğretime Geçiş Sistemi 6. sınıf, 7. sınıf ve 8. sınıf Seviye Belirleme Sınavı (SBS) soruları”. Web: <http://egitek.meb.gov.tr/Sinavlar/index.asp> adresinden 12 Mayıs 2009 ve 12 Kasım 2009'da alınmıştır.
- Üreyen, M. (2006). The role of definition in students' understanding with particular reference to the concavity of a function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(5), 600-604.
- Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (Fifth edition). Boston, MA: Pearson Education.
- Vinner, S. (1976). The naive concept of definition in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 7(4), 413-429.
- Vinner, S. (1977). The concept of exponentiation at the undergraduate level and the definitional approach. *Educational Studies in Mathematics*, 8(1), 17-26.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Vinner, S. and Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.
- Voutsina, C. (2012). Procedural and conceptual changes in young children's problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 193-214.
- Ward, R. A. (2004). An investigation of K-8 preservice teachers' concept images and mathematical definitions of polygons. *Issues in Teacher Education*, 13(2), 39-56.
- Winicki-Landman, G. and Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: Part 1. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 17-21.
- Yaşar Er, F. (2008). *2004, 2005 ve 2006 yıllarına ait OKS matematik soru takımlarının matematiksel yeterlikler açısından analizi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2006). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (6. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

- Yusof, Y. B. M. and Tall, D. (1996). Conceptual and procedural approaches to problem-solving. In *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 20)*, Vol. 4 (pp. 3-10). Web: <http://www.davidtall.com/> adresinden 16 Kasım 2011’de alınmıştır.
- Yükseköğretim Kurulu Öğrenci Seçme ve Yerleştirme Merkezi (ÖSYM). “2008 yılı Öğrenci Seçme Sınavı (ÖSS) Matematik–1 testi ve Matematik–2 testi”, “2009 yılı Öğrenci Seçme Sınavı (ÖSS) Matematik–1 testi ve Matematik–2 testi”. Web: <http://www.osym.gov.tr/> adresinden 12 Mayıs 2009 ve 12 Kasım 2009’da alınmıştır.
- Zazkis, R. and Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131-148.
- Zaslavsky, O. and Shir, K. (2005). Students’ conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 317-346.

EK-1. M.E.B. Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü'ne gönderilmiş olan izin dilekçesinin kabul yazısı

T.C.
MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI
Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü



Sayı : B.08.0.ETG.0.06.04.00-408.01/ **656**

12/01/2012

Konu : SBS İstatistik Bilgiler

Sayın : Yasemin TEMİZÖZ
Atakent Mh.
Elvankent Küme Evleri No:3 (C16/2)
06790-Etimesgut/ANKARA

İlgi : 03.01.2011 tarihli dilekçeniz.

İlgi dilekçenizde belirtilen amaç doğrultusunda kullanımına izin istediğiniz 2008-2009 yıllarına ait Seviye Belirleme Sınavlarında bulunan soru numaralarını belirttiğiniz Matematik sorularının, tez çalışmanızda kaynakça belirterek, amacı dışında kullanılmamak şartıyla kullanılmasında sakınca bulunmamaktadır.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Dr.Nurcan ATEŞOK DEVECİ
Bakan a.
Grup Başkanı



Ayrıntılı bilgi için : Nilgün KAPUDAN
Tel : 0312) 497 40 86
Faks : 0312) 499 40 63
E-posta : etg_de_ku@meb.gov.tr
İnternet : http://etg.meb.gov.tr
Eğitim Portalı : http://www.egitim.gov.tr
56930 Tekeköy/Beşiktaş - 34090 M.B.



Tablo EK-2. 2008 ve 2009 Yılı 6. Sınıf SBS Sorularının, Öğrenme ve Alt Öğrenme Alanlarına Göre Dağılımı

ÖĞRENME ALANLARI	ALT ÖĞRENME ALANLARI	2008 yılı 6. sınıf SBS soru no	2009 yılı 6. sınıf SBS soru no
SAYILAR	1. Doğal Sayılar	7	1, 5
	2. Tam Sayılar	1	3
	3. Kesirler	6	12
	4. Ondalık Kesirler		2
	5. Yüzdelere	11	
	6. Oran ve Orantı	4	4
	7. Kümeler	2	
GEOMETRİ	1. Doğru, Doğru Parçası ve Işın	8	7
	2. Açılar		6
	3. Çokgenler	9	9
	4. Eşlik ve Benzerlik		
	5. Dönüşüm Geometrisi	5, 13	
	6. Örüntü ve Süslemeler		
	7. Geometrik Cisimler		11
ÖLÇME	1. Açılar Ölçme		
	2. Uzunlukları Ölçme	10	
	3. Alanı Ölçme	12	8, 13
	4. Hacmi Ölçme		
	5. Sıvıları Ölçme		
OLASILIK VE İSTATİSTİK	1. Olası Durumları Belirleme		
	2. Olasılıkla İlgili Temel Kavramlar	14	15
	3. Olay Çeşitleri		
	4. Araştırmalar İçin Sorular Oluşturma ve Veri Toplama		
	5. Tablo ve Grafikler	15	14
	6. Merkezî Eğilim ve Yayılma Ölçüleri		
CEBİR	1. Örüntüler ve İlişkiler		16
	2. Cebirsel İfadeler	3	10
	3. Eşitlik ve Denklem	16	
AYNI ZAMANDA SÖZEL PROBLEM FORMATINDA OLAN SORULAR		3, 4, 6, 7, 11, 16	1, 4, 10

Tablo EK-3. 2008 ve 2009 Yılı SBS Soru Sayılarının, Öğrenme ve Alt Öğrenme Alanlarına Göre Dağılımı

ÖĞRENME ALANLARI	ALT ÖĞRENME ALANLARI	2008		2009			2008 & 2009
		6. sınıf SBS soru sayısı	7. sınıf SBS soru sayısı	6. sınıf SBS soru sayısı	7. sınıf SBS soru sayısı	8. sınıf SBS soru sayısı	TOPLAM soru sayısı
SAYILAR	Doğal Sayılar	1		2			3
	Tam Sayılar	1	1	1	1		4
	Kesirler / Rasyonel Sayılar	1	2	1	1		5
	Ondalık Kesirler			1			1
	Yüzdelere	1					1
	Oran ve Orantı	1	2	1	2		6
	Kümeler	1					1
	Bilinçli Tüketim Aritmetiği				1		1
	Üslü Sayılar					1	1
	Kareköklü Sayılar					3	3
	Gerçek Sayılar						0
	Toplam	6	5	6	5	4	26
GEOMETRİ	Doğru, Doğru Parçası ve Işın	1	1	1			3
	Açılar		1	1	1		3
	Çokgenler	2	2	2	6		12
	Eşlik ve Benzerlik		1				1
	Dönüşüm Geometrisi	2	1		1	1	5
	Geometrik Cisimler		1	1	1	3	6
	Çember ve Daire		1		1		2
	Üçgenler					2	2
	İz Düşümü					1	1
	Toplam	5	8	5	10	7	35

ÖĞRENME ALANLARI	ALT ÖĞRENME ALANLARI	2008		2009			2008 & 2009
		6. sınıf SBS soru sayısı	7. sınıf SBS soru sayısı	6. sınıf SBS soru sayısı	7. sınıf SBS soru sayısı	8. sınıf SBS soru sayısı	TOPLAM soru sayısı
ÖLÇME	Alanı Ölçme	1		1			2
	Üçgenlerde Ölçme					2	2
	Toplam	1	0	1	0	2	4
OLASILIK VE İSTATİSTİK	Olasılıkla İlgili Temel Kavramlar	1	1	1	1	1	5
	Tablo ve Grafikler	1	1	1	1	1	5
	Merkezî Eğilim ve Yayılma Ölçüleri		1			1	2
	Toplam	2	3	2	2	3	12
CEBİR	Örüntüler ve İlişkiler		1	1	1	1	4
	Cebirsel İfadeler	1	1	1		1	4
	Eşitlik ve Denklem	1				1	2
	Eşitsizlikler					1	1
	Toplam	2	2	2	1	4	11
AYNI ZAMANDA SÖZEL PROBLEM FORMATINDA OLAN SORU SAYISI		6	2	3	4	2	17

Tablo EK-4

Görüşmelerde İncelenecek Matematiksel Kavramların İlgili Olduğu Matematik Alt Öğrenme Alanları ve Seçilme Nedenleri

ÖĞRENME ALANI		ALT ÖĞRENME ALANI	İLKÖĞRETİM	ORTAÖĞRETİM	ALT ÖĞRENME ALANININ SEÇİLME NEDEN(LER)İ
İlköğretim	Ortaöğretim				
SAYILAR	CEBİR (SAYILAR)	Doğal sayılar	+	+	Pilot çalışma sürecinde, “ekok-ebob” kavramlarında, her iki öğretim kademesinde de sorunlar olduğunun görülmesi.
		Tamsayılar	+		Pilot çalışma sürecinde, ilköğretim kademesinde “tamsayılarda çıkarma”nın yeterince özümselememiş olduğunun görülmesi.
		Rasyonel sayılar/Kesirler–Ondalık kesirler	+	+	Pilot çalışma sürecinde, ilköğretim kademesinde “rasyonel sayılarda bölme”nin (başarılı öğrencilerce bile) sadece kural olarak bilindiğinin tespit edilmesi.
	CEBİR 1: (BAĞINTI, FONKSİYON VE İŞLEM) 2: (FONKSİYONLAR)	1: Fonksiyon–İşlem– Fonksiyonlarda işlemler 2: Mutlak değer fonksiyonu		+	Öğretmen arkadaşlardan alınan duyumların, tecrübelerin ve pilot çalışmanın ışığında; “fonksiyon” konusunda sorunlar olduğunun bilinmesi.

ÖĞRENME ALANI		ALT ÖĞRENME ALANI	İLKÖĞRETİM	ORTAÖĞRETİM	ALT ÖĞRENME ALANININ SEÇİLME NEDEN(LER)İ
İlköğretim	Ortaöğretim				
CEBİR	CEBİR (POLİNOMLAR)	<u>İlköğretim:</u> Cebirsel ifadeler <u>Ortaöğretim:</u> Çarpanlara ayırma	+	+	İlköğretim kademesinde “Cebir” öğrenme alanından bir alt öğrenme alanına da yer verilmek istenmesi.
OLASILIK VE İSTATİSTİK	OLASILIK (PERMÜTASYON, KOMBİNASYON VE OLASILIK)	Olasılık	+	+	2008-2009 SBS ve ÖSS soruları incelendiğinde; bu öğrenme alanındaki alt öğrenme alanları arasında, “olasılık” konusunda çıkmış soru sayısının daha fazla olması.
	TEMEL MATEMATİK (LİMİT VE SÜREKLİLİK)	Limit		+	Yurtdışında “limit” konusunda yapılmış ilgili araştırmalar bulunduğu; literatürle tartışma açısından uygun bir konu olması.
					•
GEOMETRİ	GEOMETRİ	<u>İlköğretim:</u> Çokgenler <u>Ortaöğretim:</u> Çokgenler–Dörtgenler	+	+	Yurtdışında “çokgenler” konusunda yapılmış ilgili araştırmalar bulunduğu; literatürle tartışma açısından uygun bir konu olması.
	ANALİTİK GEOMETRİ	DOĞRUNUN ANALİTİK İNCELENMESİ		+	2008-2009 ÖSS soruları incelendiğinde; bu alandaki soru sayısının, “çemberin analitik incelenmesi”ne kıyasla daha fazla olması.

Tablo EK-5

Görüşleri Alınan Uzmanların, Mezun Oldukları Lisans/Yüksek Lisans/Doktora Programları ve Mesleki Tecrübeleri ile ilgili Bilgiler

UZMAN NO	MEZUN OLDUĞU LİSANS PROGRAMI	YÜKSEK LİSANS PROGRAMI	DOKTORA PROGRAMI	MESLEKİ TECRÜBESİ
1	Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı	Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Öğretmenliği	Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Öğretmenliği (devam ediyordu)	2,5 yıl dersane 4,5 yıl üniversite–araştırma görevlisi (halen çalışmakta idi)
2	Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı	Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı	Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi (devam ediyordu)	7 yıl devlet okulu 2 yıl üniversite–araştırma görevlisi (halen çalışmakta idi)
3	Fen Fakültesi Matematik Bölümü	Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı (devam ediyordu)		12 yıl devlet okulu (halen çalışmakta idi)
4	Fen Fakültesi Matematik Bölümü	Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Öğretmenliği (Tezsiz Yüksek Lisans)		6 yıl dersane 1 yıl özel okul (halen çalışmakta idi)
5	Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Öğretmenliği (Tezsiz Yüksek Lisans)		8 yıl dersane (halen çalışmakta idi)
6	Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği			3 yıl özel ilköğretim okulu 3 yıl dersane O yıl geçici olarak çalışmıyordu

EK-6

İlköğretim Öğrencilerinin 1. Görüşme Soruları

1)*¹

Bir yarış pistini süratleri sabit iki araçtan biri 4 dakikada, diğeri 6 dakikada turluyor. Başlangıç çizgisinden aynı anda ve aynı yönde yarışa başlayan bu araçlar, ilk defa kaç dakika sonra yan yana gelirler?

- A) 8 B) 12 C) 20 D) 24

(2008 SBS – 6. SINIF – 7. SORU)
(Cevap: B)²

2)

Aşağıdaki tabloda Elazığ ilinin dört günlük hava sıcaklık değerleri verilmiştir. Tabloya göre, gece ve gündüz sıcaklıkları farkı hangi gün en fazladır?

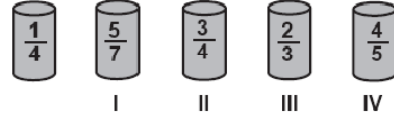
Tablo: Elazığ'ın Dört Günlük Hava Sıcaklık Değerleri (°C)

Günler	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe
Zaman				
Gece	-9	-5	+1	-2
Gündüz	-4	+3	+8	+4

- A) Pazartesi B) Salı
C) Çarşamba D) Perşembe

(2008 SBS – 6. SINIF – 1. SORU)
(Cevap: B)

3)



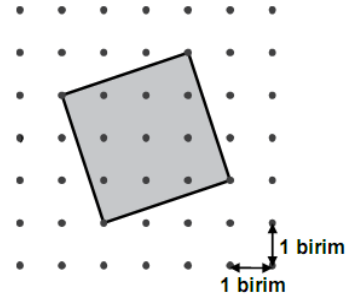
Yukarıda verilen eş bardakların kaçta kaçının su ile dolu olduğu üzerlerine yazılmıştır. $\frac{1}{4}$ 'inde su bulunan bardak, kaç numaralı bardağa boşaltılırsa o bardaktaki su taşar?

- A) I B) II C) III D) IV

(2009 SBS – 6. SINIF – 12. SORU)
(Cevap: D)

4)*

Şekildeki dörtgensel bölgenin alanı kaç birim karedir?



- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12

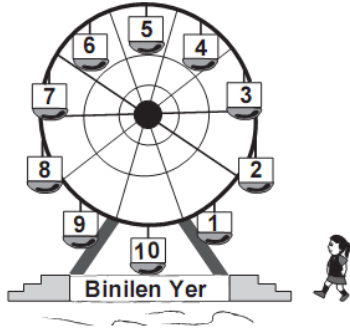
(2008 SBS – 7. SINIF – 10. SORU)
(Cevap: B)

¹ Bu tez çalışması için veri analizi yapılan ve “Bulgular ve Yorum” bölümünde bahsedilen sorular; * ile işaretlenmiştir.

² Bu kısımlar, okuyucuyu soru hakkında bilgilendirmek amacıyla sonradan eklenmiştir.

EK-6 (devamı)

5)*



Ayça, dönme dolaba binmek için durmasını bekliyor. Dönme dolap durduğunda Ayça'nın 1'den 10'a kadar numaralandırılmış oturaklardan numarası asal sayı olan birine oturma olasılığı nedir?

- A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{5}$

(2009 SBS – 6. SINIF – 15. SORU)
(Cevap: B)

7)

Her biri 0,3 litre su alan bardaklar, bir sürahideki su ile dolduruluyor. Sekizinci bardak tam dolmadığına göre, sürahideki su miktarı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 1,8 L B) 2,1 L C) 2,3 L D) 2,4 L

(2009 SBS – 8. SINIF – 19. SORU)
(Cevap: C)

6)

Tanesi 4,50 TL'ye satın alınan tişörtlerin her birinin üzerine 1,25 TL'ye yazı yazdırılıyor. Bu tişörtlerin tanesi 9,50 TL'ye satıldığında, x tanesinden elde edilen kârı gösteren cebirsel ifade aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(4,50 - 1,25)x - 9,50x$
B) $9,50x - 4,50x + 1,25x$
C) $(4,50 + 1,25)x - 9,50x$
D) $9,50x - 4,50x - 1,25x$

(2009 SBS – 6. SINIF – 10. SORU)
(Cevap: D)

EK-7

İlköğretim Öğrencilerinin 2. Görüşme Soruları

1)

$$\blacksquare \times \blacktriangle + \bullet$$

–8, +3, –2 sayıları yukarıdaki semboller yerine hangisindeki gibi yerleştirilirse elde edilen işlemin sonucu en büyük olur?

$\blacksquare$	$\blacktriangle$	$\bullet$
A) –8	+3	–2
B) +3	–8	–2
C) –2	+3	–8
D) –8	–2	+3

(2008 SBS – 7. SINIF – 3. SORU)
(Cevap: D)

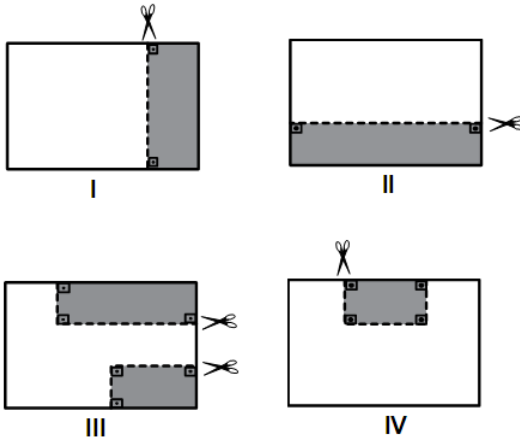
3)*

$$\frac{1 - \frac{1}{5}}{2} \text{ işleminin sonucu hangisidir?}$$

- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{8}{5}$ D) $\frac{5}{2}$

(2008 SBS – 7. SINIF – 2. SORU)
(Cevap: A)

2)

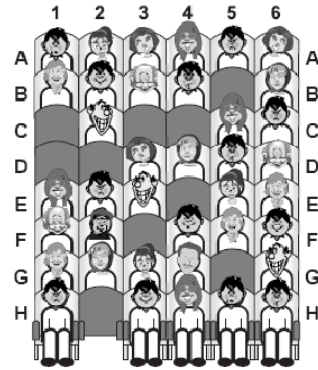


Eş dosya kâğıtları yukarıdaki gibi kesilerek boyalı parçalar atılıyor. Kalan parçanın çevre uzunluğu hangisinde en büyüktür?

- A) I B) II C) III D) IV

(2008 SBS – 6. SINIF – 10. SORU)
(Cevap: D)

4)



Şekilde bir konferans salonundaki boş ve dolu koltukların yerleri belirtilmiştir. Bu salona sonradan gelen bir kişinin C sırasında veya çift numaralı bir koltuğa oturma olasılığı nedir?

- A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{3}{5}$

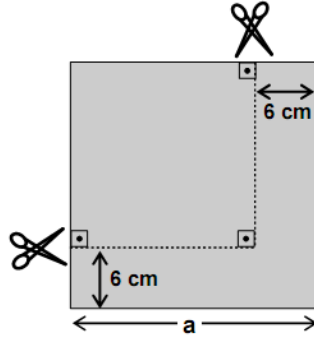
(2009 SBS – 7. SINIF – 18. SORU)
(Cevap: D)

EK-7 (devamı)

5)

Kenar uzunlukları a cm olan karesel bölge şeklindeki bir kâğıt parçası kenarlarından şekildeki gibi kesiliyor.

Oluşan karesel bölgenin alanı aşağıdaki-lerden hangisiyle ifade edilir?



- A) $a^2 - 6a + 36$ B) $a^2 - 6a + 12$
C) $a^2 - 12a + 12$ D) $a^2 - 12a + 36$

(2008 SBS – 7. SINIF – 15. SORU)
(Cevap: D)

6)

Bir gezideki çocukların sayısı 55'ten büyük, 65'ten küçüktür. Çocukları 7'şerli gruplara ayırmak mümkün; fakat 8'erli gruplara ayırmak mümkün değildir. Gezide kaç çocuk vardır?

Cevap: _____

(TIMSS 2007–MATEMATİK–8. SINIF–M032381)
(Cevap: 63)

7)*

Tablo: Makinelerin Dokuduğu Kumaş Miktarları

Makine numaraları	Süre (dakika)	Kumaş miktarı (metrekare)
I.	40	46
II.	30	36
III.	70	76
IV.	60	66

Dört farklı makinenin, aynı tür kumaşı belirli sürelerde ne kadar dokudukları tabloda verilmiştir. Tabloya göre, aynı sürede en çok kumaş dokuyan makine hangisidir?

- A) I B) II C) III D) IV

(2009 SBS – 7. SINIF – 3. SORU)
(Cevap: B)

EK-8

İlköğretim Öğrencilerinin 4. Görüşme Soruları

1)

$a = 3$ ve $b = -1$ olduğuna göre;
 $2a + 3(2 - b)$ işleminin değeri nedir?

- (A) 15
 (B) 14
 (C) 13
 (D) 9

(TIMSS 2007–MATEMATİK–8. SINIF–M042082)

(Cevap: A)

3)



Verilen sayı doğrusunda aşağıdakilerden hangisi -2 tam sayısını gösterir?

- A) K B) N C) L D) M

(2009 SBS – 7. SINIF – 1. SORU)
 (Cevap: C)

2)*

415_76_

Gökçe yedi basamaklı olan yukarıdaki bilgisayar şifresinin bazı rakamlarını unutuyor. Bu şifrenin 6 ile bölünebildiğini ve rakamlarının birbirinden farklı olduğunu hatırladığına göre, Gökçe'nin bilgisayar şifresi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 4158762 B) 4158763
 C) 4153761 D) 4152762

(2009 SBS – 6. SINIF – 5. SORU)
 (Cevap: A)

4)

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
---------------	---------------

Kesir takımındaki $\frac{1}{3}$ 'lük çubuklardan iki tanesinin uç uca getirilmesiyle şekildeki büyüklük elde edilmiştir. Aynı büyüklük, kaç tane $\frac{1}{6}$ 'lık çubuğun uç uca getirilmesiyle elde edilir?

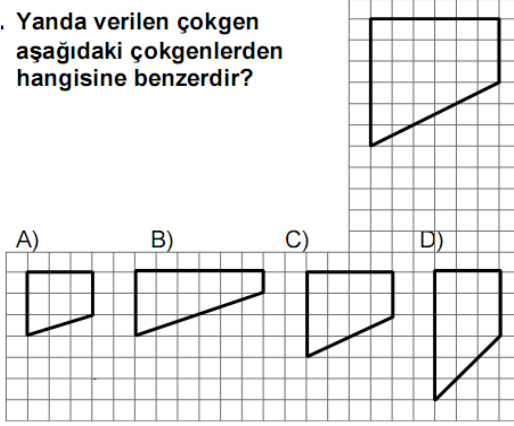
- A) 2 B) 4 C) 6 D) 9

(2008 SBS – 6. SINIF – 6. SORU)
 (Cevap: B)

EK-8 (devamı)

5)

. Yanda verilen çokgen aşağıdaki çokgenlerden hangisine benzerdir?



(2008 SBS – 7. SINIF – 6. SORU)
(Cevap: C)

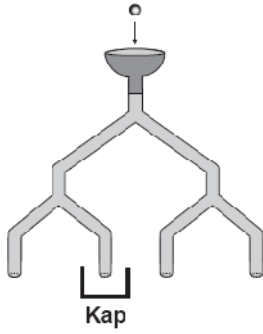
7)

Bir sınıfta yapılacak etkinlik için öğrenciler, sayıları x ve y olan iki gruba ayrılıyor. Öğretmen her öğrenciye, grubundaki öğrenci sayısı kadar şeker dağıtıyor. Gruplardaki öğrenci sayıları farkı ile şeker sayılarının farkını kullanarak sınıf mevcudunu hesaplamak için aşağıdaki özdeşliklerden hangisinden yararlanmak daha uygundur?

- A) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
 B) $(2x - y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$
 C) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
 D) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

(2009 SBS – 8. SINIF – 20. SORU)
(Cevap: D)

6)



Aynı özelliklere sahip şekildeki borular eş açılarla ikiye ayrılmaktadır. Huniye bırakılan bir topun kaba düşme olasılığı nedir?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$

(2009 SBS – 8. SINIF – 12. SORU)
(Cevap: B)

8)*

Bir pastanede bir günde satılan börek ve poğaçaların toplam sayısı 144 ve bu satıştan elde edilen gelir 88 TL'dir. Börek 50 Kr, poğaçaya 75 Kr olduğuna göre kaç adet poğaçaya satılmıştır?

- A) 80 B) 64 C) 58 D) 44

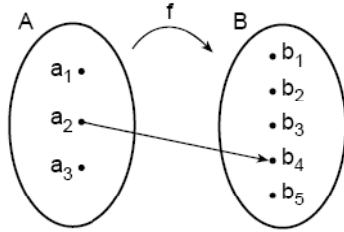
(2009 SBS – 8. SINIF – 17. SORU)
(Cevap: B)

EK-9

Ortaöğretim Öğrencilerinin 1. Görüşme Soruları

1)

Aşağıda $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ ve $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ kümeleri verilmiştir.



A dan B ye $f(a_2) = b_4$ olacak biçimde kaç tane birebir f fonksiyonu tanımlanabilir?

- A) 24 B) 20 C) 16 D) 12 E) 10

(2008 ÖSS MAT-2 – 9. SORU)
(Cevap: D)

2)*

Eni 81 metre, boyu 270 metre olan dikdörtgen biçimindeki bir tarla, hiç alan artmayacak biçimde eş karelere bölünerek küçük bahçeler yapılıyor.

Bu şekilde en az kaç tane eş bahçe elde edilir?

- A) 27 B) 30 C) 33 D) 35 E) 40

(2008 ÖSS MAT-1 – 13. SORU)
(Cevap: B)

3)*

$$\frac{\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(2-\frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{5}+1}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{6}{5}$ B) $-\frac{5}{6}$ C) -1
D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

(2009 ÖSS MAT-1 – 1. SORU)
(Cevap: A)

4)*

Bir poliklinikte bir doktora 50 hasta, bir hemşireye de 25 hasta düşmektedir.

Bu poliklinikteki doktor, hemşire ve hasta sayılarının toplamı 318 olduğuna göre, doktor sayısı kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

(2008 ÖSS MAT-1 – 12. SORU)
(Cevap: E)

EK-9 (devamı)

5)

$$\frac{a^2 - 2a + 3}{\left(\frac{1}{a} + 1\right)\left(\frac{3}{a} - 1\right)}$$

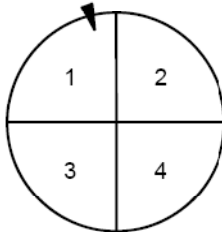
ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-3a^2$ B) $-a^2$ C) $2a^2$
D) $a-2$ E) $a+1$

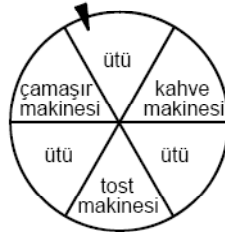
(2009 ÖSS MAT-1 – 10. SORU)
(Cevap: B)

6)*

Bir mağazadan belirli miktarın üzerinde alışveriş yapan müşteriler, 4 eş parçaya ayrılmış birinci çarkı iki defa çevirmektedir. Bu iki çevirişte gelen iki sayının toplamı 6 ya da 6 dan büyükse 6 eş parçaya ayrılmış ikinci çarkı çevirerek çıkan hediyeyi almaktadır.



I. çark



II. çark

Buna göre, birinci çarkı çevirmeyi hak eden bir müşterinin çamaşır makinesi kazanma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{14}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{5}{24}$
D) $\frac{3}{28}$ E) $\frac{5}{32}$

(2009 ÖSS MAT-1 – 17. SORU)
(Cevap: B)

7)

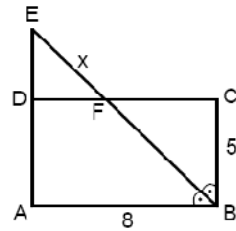
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x^2}{|1-x|}$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

(2009 ÖSS MAT-2 – 11. SORU)
(Cevap: A)

8)



ABCD bir dikdörtgen

$$m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{EBC})$$

$$|AB| = 8 \text{ cm}$$

$$|BC| = 5 \text{ cm}$$

$$|EF| = x$$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç cm dir?

- A) $2\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $\sqrt{13}$ E) $\sqrt{15}$

(2008 ÖSS MAT-1 – 25. SORU)
(Cevap: B)

9)

Dik koordinat düzlemi üzerinde A(0, -1), B(2, 0) ve C(k, 4) noktaları veriliyor.

Bu noktaların üçü de aynı doğru üzerinde olduğuna göre, k kaçtır?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

(2008 ÖSS MAT-1 – 28. SORU)
(Cevap: D)

EK-10**Ortaöğretim Öğrencilerinin 2. Görüşme Soruları****1)**

Tam sayılar kümesinden tam sayılar kümesine f ve g fonksiyonları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \equiv 0 \pmod{2} \text{ ise} \\ 3x, & x \equiv 1 \pmod{2} \text{ ise} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ 3x+1, & x \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ x-1, & x \equiv 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}$$

Buna göre, $g(f(6))$ değeri kaçtır?

- A) 55 B) 40 C) 18 D) 17 E) 12

(2009 ÖSS MAT-1 – 14. SORU)
(Cevap: B)

2)*

a , b ve p birer pozitif tam sayı ve p asal olmak üzere,

$$a^2 - b^2 = p$$

olduğuna göre, a nın p türünden eşiti aşağıdaki-lerden hangisidir?

- A) $\frac{p+1}{2}$ B) $\frac{p+1}{3}$ C) $\frac{p-1}{2}$
D) $\frac{p-1}{3}$ E) $\frac{p-2}{3}$

(2008 ÖSS MAT-1 – 7. SORU)
(Cevap: A)

3)

I. $x\sqrt{2} + 1$ bir rasyonel sayıysa x de rasyoneldir.

II. $\frac{x}{x+1}$ bir rasyonel sayıysa x de rasyoneldir.

III. Hem x^2 hem de x^3 bir rasyonel sayıysa x de rasyoneldir.

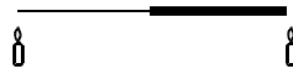
Yukarıda verilen gerçel sayılarla ilgili üç önerme-den hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) II ve III

(2009 ÖSS MAT-2 – 4. SORU)
(Cevap: E)

4)*

Bir yarısı ince diğer yarısı kalın olan 20 metre uzunluğundaki bir ip her iki ucundan aynı anda yakılıyor.



Ateşin ilerleme hızı ipin ince tarafında saniyede 2 metre, kalın tarafında ise 1 metre olduğuna göre, ipin tamamının yanması kaç saniye sürer?

- A) 8 B) 7 C) $\frac{19}{3}$ D) $\frac{17}{2}$ E) $\frac{15}{2}$

(2008 ÖSS MAT-1 – 19. SORU)
(Cevap: E)

EK-10 (devamı)

5)

$$a + b + c = A$$

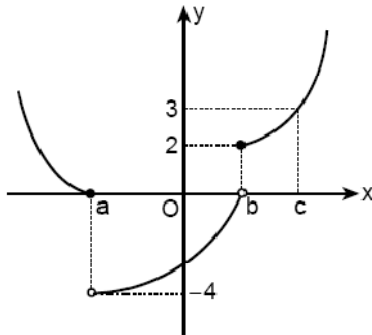
$$a - b - c = B$$

olduğuna göre, $A^2 - B^2$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $4a(b+c)$ B) $4b(a+c)$ C) $2c(a+b)$
D) $2a(b-c)$ E) $2b(a-c)$

(2009 ÖSS MAT-1 – 11. SORU)
(Cevap: A)

6)



Yukarıda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

(2008 ÖSS MAT-2 – 14. SORU)
(Cevap: B)

7)

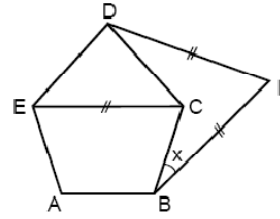
$$x = \frac{1}{y+2}$$

olduğuna göre, $y + yx + 2x - \frac{1}{x} + 3$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

(2008 ÖSS MAT-2 – 3. SORU)
(Cevap: E)

8)



ABCDE bir düzgün beşgen

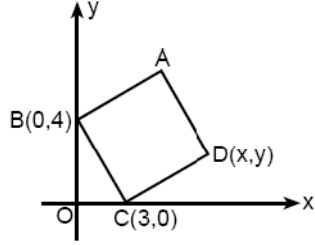
$$|EC| = |DF| = |FB|$$

$$m(\widehat{CBF}) = x$$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç derecedir?

- A) 24 B) 30 C) 32 D) 36 E) 40

(2008 ÖSS MAT-2 – 27. SORU)
(Cevap: A)

EK-10 (devamı)**9)**

Dik koordinat düzlemi üzerine şekildeki gibi ABCD karesi yerleştirilmiştir.

Buna göre, D noktasının koordinatlarının toplamı kaçtır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

(2009 ÖSS MAT-1 – 29. SORU)
(Cevap: E)

10)

Mehmet'in elinde yeterli sayıda 1 YTL, 10 YTL ve 100 YTL lik banknotlar vardır.

Mehmet 299 YTL tutarındaki bir ödemeyi, bu banknotlardan her birini en az bir kez kullanmak şartıyla kaç farklı biçimde yapabilir?

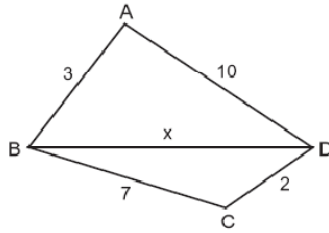
- A) 28 B) 29 C) 30 D) 42 E) 43

(2008 ÖSS MAT-1 – 20. SORU)
(Cevap: A)

EK-11

Ortaöğretim Öğrencilerinin 4. Görüşme Soruları

1)



ABCD bir dörtgen, $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 7$ cm
 $|CD| = 2$ cm, $|AD| = 10$ cm, $|BD| = x$ cm

Yukarıdaki verilere göre, x in alabileceği değer aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

(ÖZ-DE-BİR/2010/YGS Deneme Sınavı 1/

A Kitapçığı/30. soru)

(Cevap: C)

2)

a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$660 = k \cdot 2^a \cdot 3^b$$

eşitliğini sağlayan en küçük k pozitif tam sayısı kaçtır?

- A) 30 B) 44 C) 55 D) 60 E) 66

(2009 ÖSS MAT-1 – 12. SORU)

(Cevap: C)

3)

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

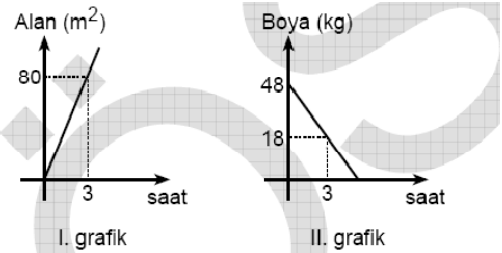
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 4 B) 6 C) 9 D) 12 E) 18

(2009 ÖSS MAT-1 – 5. SORU)

(Cevap: E)

4)



Yukarıdaki doğrusal grafiklerden birincisi zamana bağlı olarak bir boya ustasının boyadığı duvar alanını, ikincisi ise yine zamana bağlı olarak ustanın boya kutusunda kalan boya miktarını göstermektedir.

Bu boya ustası, 48 kg boyanın tümüyle kaç m^2 lik duvar boyayabilir?

- A) 94 B) 106 C) 108 D) 114 E) 128

(2009 ÖSS MAT-1 – 19. SORU)

(Cevap: E)

EK-11 (devamı)

5)

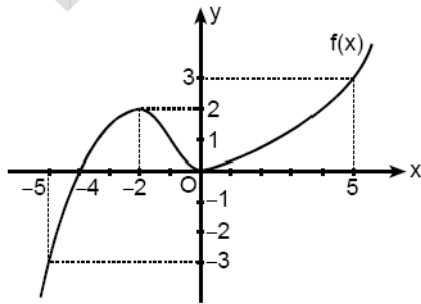
İfadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) x C) y

D) $\frac{x+y}{x-y}$ E) $\frac{x-y}{x+y}$

(2008 ÖSS MAT-2 – 2. SORU)
(Cevap: E)

6)



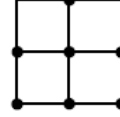
Yukarıda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu için $[-5, 5]$ aralığında $||f(x)| - 2| = 1$ eşitliğini sağlayan kaç tane x değeri vardır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

(2009 ÖSS MAT-2 – 12. SORU)
(Cevap: D)

7)

Aşağıdaki yedi nokta, eş karelerin köşeleri üzerinde bulunmaktadır.



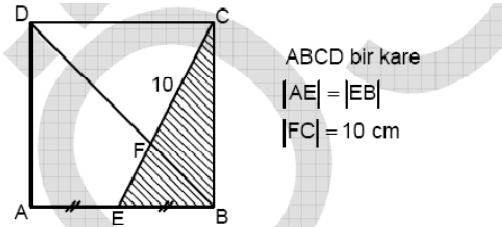
Bu yedi noktadan rastgele seçilen üç noktanın bir üçgen oluşturma olasılığı aşağıdakilerden hangisidir?

(Aynı doğru üzerindeki üç noktanın bir üçgen oluşturmadığı kabul edilecektir.)

- A) $\frac{32}{35}$ B) $\frac{27}{35}$ C) $\frac{24}{35}$
- D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{3}{7}$

(2008 ÖSS MAT-1 – 21. SORU)
(Cevap: A)

8)*



Yukarıdaki verilere göre, EBC üçgeninin alanı kaç cm^2 dir?

- A) 25 B) 30 C) 40 D) 45 E) 50

(2008 ÖSS MAT-1 – 24. SORU)
(Cevap: D)

EK-11 (devamı)

9)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x} - x \right)$$

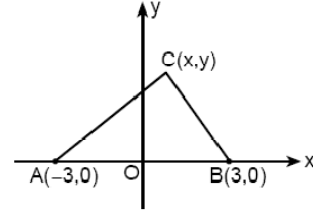
limitinin değeri kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

(2008 ÖSS MAT-2 – 15. SORU)

(Cevap: B)

10)



Şekilde verilen ABC üçgeninin $[AC]$ ve $[BC]$ kenarlarının eğimleri çarpımı $-\frac{4}{9}$ olduğuna göre,

C köşesinin koordinatları aşağıdaki denklemlerden hangisini sağlar?

A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ B) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{18} = 1$

C) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$ D) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

E) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

(2009 ÖSS MAT-2 – 30. SORU)

(Cevap: D)

