

T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

İLKÖĞRETİM SEKİZİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN “BASAMAK” VE
“BASAMAK DEĞERİ” KAVRAMLARI İLE İLGİLİ ZİHİNSEL
YAPILARININ İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS
TEZİ

Hazırlayan
H. Aydan KAPLAN

Danışman
Prof. Dr. Ziya ARGÜN

Ankara-2008

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

H. Aydan KAPLAN'a ait **“İLKÖĞRETİM SEKİZİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN BASAMAK VE BASAMAK DEĞERİ KAVRAMLARI İLE İLGİLİ ZİHİNSEL YAPILARININ İNCELENMESİ”** adlı çalışma, jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Üye:

(Danışman)

Üye:

Üye:

ÖZET

İLKÖĞRETİM SEKİZİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN “BASAMAK” VE “BASAMAK DEĞERİ” KAVRAMLARI İLE İLGİLİ ZİHİNSEL YAPILARININ İNCELENMESİ

KAPLAN, H. Aydan

Yüksek Lisans, Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ziya ARGÜN

Mart-2008

Bu araştırmanın amacı, öğrencilerin “basamak” ve “basamak değeri” ile ilgili kavrayışlarını belirleyebilmektir. Bu kavrayışları belirleyebilmek için “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarının (a) matematiksel yapısından (b) tarihsel yapısından (c) matematik programı içindeki yerinden yararlanılmıştır.

Araştırmanın modelini nitel araştırma desenlerinden durum çalışması oluşturmaktadır. Araştırmaya 8. sınıf öğrencilerinden, 7 öğrenci katılmış ve her bir öğrenci ayrı bir “durum” olarak incelenmiştir. Veriler, öncelikle, araştırmacılar tarafından hazırlanan ve pilot çalışması daha önceden yapılan bir ölçekle 119 sekizinci sınıf öğrencisinden yazılı olarak toplanmıştır. Daha sonra da ölçekten elde edilen verilerden yararlanılarak maksimum çeşitliliği sağlayacağı düşünülen 7 öğrenci ile görüşme formu yardımıyla bire bir görüşmeler yapılmıştır.

Veriler betimsel analize tabi tutularak, her bir “durum” ayrı ayrı irdelenmiştir. Verilerin analizinden elde edilen bulgulara göre, katılımcıların çoğunda, onluk sayı sisteminde “basamak” kavramının yer ile, “basamak değeri” kavramının ise bir çarpım sonucu ile ilgili olduğu belirlenmiştir.

Katılımcılar, onluk sayı sisteminde ifade edilen sayılarda birden fazla basamağın bulunabileceğini, sayının yazılışındaki rakamın miktarının “konum”u ile değiştiğini, basamak değerinin sayıyı oluşturan rakamlar tarafından belirlendiğini ve bir ondalık sayıda kesirli kısımdaki rakamların da birer “konum”a sahip olduğunu düşünmektedirler.

Ayrıca katılımcıların çoğunun, onluk sayı sisteminden farklı bir sayı sistemindeki “basamak” ve “basamak değeri” ile ilgili fikirlerini açıklarken, onluk sayı sistemindeki “basamak” ve “basamak değeri” kavramları ile ilgili alışkanlıklarını sürdürmeye devam ettikleri gözlemlenmiştir.

ABSTRACT

AN EXAMINATION OF 8TH GRADE STUDENTS' CONSTRUCTION ABOUT "PLACE" AND "PLACE VALUE" CONCEPTS

KAPLAN, H. Aydan

Master,Principal Discipline of Mathematics Education

Thesis counselor: Prof. Dr. Ziya ARGÜN

March-2008

The aim of this study is to identify the students' conceptions about "place" and "place value". In order to fulfil this aim, a) mathematical structure, b) historical structure, c) area in mathematics curriculum of "place" and "place value" are used.

Case study design is used as a model for this study. Seven students at the 8th grade level participated in the study and each students' responses were analyzed as an individual "case". First, data were collected from 119 8th grade students through a scale which was already piloted and developed by the researchers. With respect to the collected data, seven students, who were considered to ensure the maximum variety, interviewed for data collection.

Descriptive analysis were administered for data and each "case" investigated individually. Based on the findings, the data provided that most of participants perceptions about 'place' concept in the decimal system related with location and concept of 'place value' related with result of a multiplication.

The participants think that numbers in the decimal system could have more than one place, quantity of the digit in the number changes with the location, place

value is determined by the digits in a number and in a decimal number the fraction part digits have a location.

Also, when most of the participants explaining their ideas about place and place value in different based system, it seemed that they keep on the routine of place and place value concept in the decimal system.

TEŞEKKÜR

Çalışmanın her aşamasında görüşleriyle farklı bir bakış açısından yararlanmamı sağlayan, bu konudaki fikirlerini benimle paylaşmaktan çekinmeyip bana yol gösteren ve ihtiyacım olduğu her zaman yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım sayın Prof. Dr. Ziya ARGÜN' e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ne kadar uzak da olsa sorularıma içtenlikle yanıt verip bana yol gösteren, engin bilgilerinden bolca yararlandığım ve yararlanacağım Sayın Yard. Doç. Dr. İsmail Özgür ZEMBAT'a ve en ümitsiz olduğum anlarda beni cesaretlendirip yol gösteren Sayın Doç. Dr. Ahmet ARIKAN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ayrıca, arkadaşlarım Arş. Gör. Neslihan BULUT ve Arş. Gör. Gözdegül Arık'a her an yanımda oldukları için teşekkür ederim.

Hayatımın vazgeçilmezi aileme her konuda olduğu gibi bu konuda da beni destekledikleri için teşekkür ederim. Son olarak da en iyi arkadaşım, dostum, eşim Selçuk KAPLAN' a hayatımın parçası olduğu gibi tezimin de bir parçası olduğu için minnettarım.

H. Aydan KAPLAN

İÇİNDEKİLER

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAY SAYFASI	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	x
TABLOLAR LİSTESİ.....	x
BÖLÜM I GİRİŞ	
1.1. Problem Durumu.....	1
1.2. Problem Cümlesi.....	5
1.3. Araştırmanın Amacı.....	5
1.4. Araştırmanın Önemi	6
1.5. Varsayımlar.....	7
1.6. Sınırlılıklar.....	7
1.7. Tanımlar/Kısaltmalar.....	8
1.7.1. Tanımlar.....	8
1.7.2. Kısaltmalar.....	9
BÖLÜM II KAVRAMSAL ÇERÇEVE	
2.1. Basamak ve Basamak Değeri Fikri.....	10
2.2. Basamak ve Basamak Değeri Kavramlarının Matematiksel Yapısı	12
2.3. Basamak ve Basamak Değeri Kavramlarının Tarihsel Yapısı	14
2.4. Basamak ve Basamak Değeri Kavramlarının Matematik Öğretimindeki Yeri.....	24
2.5. İlgili Araştırmalar	30
BÖLÜM III ARAŞTIRMANIN YÖNTEMİ	
3.1. Araştırmanın Modeli	33
3.2. Örneklem.....	35
3.3. Veri Toplama Teknikleri.....	36
3.3.1. BADKÖ (Basamak ve Basamak Değeri Kavrayışı Ölçeği) Sorularının Seçimi	37
3.3.2. Görüşme Sorularının Seçimi.....	42
3.4. Verilerin Analizi	45

BÖLÜM IV BULGULAR

4.1. Görüşmeye Dayalı Bulgular.....	48
4.1.1. Gamze'nin Durumu.....	50
4.1.1.1 Gamze'nin basamak ve basamak değeri kavramlarına genel bakış açısı...	50
4.1.1.2. Gamze'nin ondalık sayılardaki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı.....	51
4.1.1.3. Gamze'nin onluk sayı sistemi dışında kalan diğer sayı sistemlerindeki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı.....	53
4.1.2. İbrahim'in Durumu.....	58
4.1.2.1 İbrahim'in basamak ve basamak değeri kavramlarına genel bakış açısı...	58
4.1.2.2. İbrahim'in ondalık sayılardaki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı.....	59
4.1.2.3. İbrahim'in onluk sayı sistemi dışında kalan diğer sayı sistemlerindeki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı.....	61
4.1.3. Kaan'ın Durumu.....	66
4.1.3.1 Kaan'ın basamak ve basamak değeri kavramlarına genel bakış açısı.....	66
4.1.3.2. Kaan'ın ondalık sayılardaki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı.....	67
4.1.3.3. Kaan'ın onluk sayı sistemi dışında kalan diğer sayı sistemlerindeki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı.....	69
4.1.4. Cihan'ın Durumu.....	74
4.1.4.1 Cihan'ın basamak ve basamak değeri kavramlarına genel bakış açısı.....	74
4.1.4.2. Cihan'ın ondalık sayılardaki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı.....	74
4.1.4.3. Cihan'ın onluk sayı sistemi dışında kalan diğer sayı sistemlerindeki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı.....	76
4.1.5. Berk'in Durumu.....	80
4.1.5.1 Berk'in basamak ve basamak değeri kavramlarına genel bakış açısı.....	80
4.1.5.2. Berk'in ondalık sayılardaki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı.....	82

4.1.5.3. Berk'in onluk sayı sistemi dışında kalan diğer sayı sistemlerindeki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı.....	83
4.1.6. Selçuk'un Durumu.....	93
4.1.6.1 Selçuk'un basamak ve basamak değeri kavramlarına genel bakış açısı....	93
4.1.6.2. Selçuk'un ondalık sayılardaki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı.....	95
4.1.6.3. Selçuk'un onluk sayı sistemi dışında kalan diğer sayı sistemlerindeki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı.....	95
4.1.7. Murat'ın Durumu.....	102
4.1.7.1 Murat'ın basamak ve basamak değeri kavramlarına genel bakış açısı.....	102
4.1.7.2. Murat'ın ondalık sayılardaki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı.....	104
4.1.7.3. Murat'ın onluk sayı sistemi dışında kalan diğer sayı sistemlerindeki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı.....	107
BÖLÜM V SONUÇ VE ÖNERİLER	
5.1. Sonuçlar	118
5.2. Öneriler	122
KAYNAKÇA.....	124
EKLER LİSTESİ	130

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1 – M.Ö 30000 yıllarına ait olduğu düşünülen kurt kemiği resmi....	15
Şekil 2 – Mısır sayı sistemindeki semboller.....	16
Şekil 3 – Roma sayı sistemindeki semboller.....	17
Şekil 4 – Babil sayı sistemindeki semboller.....	19
Şekil 5 – Babil bilgin sayılaması	20
Şekil 6 – Hindistan’ da gerçekleşen keşifler.....	22
Şekil 7 – Basamak değeri bilgisinin üç temel ögesi.....	25
Şekil 8 – 34 sayısı için verilen etkinlik	26
Şekil 9 – Gamze’nin Babil sayısına verdiği yanıt.....	54
Şekil 10 – Gamze’nin dijital saat sorusuna verdiği yanıt.....	56
Şekil 11 – İbrahim’in Babil sayısına verdiği yanıt.....	62
Şekil 12 – Kaan’ın Babil sayısına verdiği yanıt.....	70
Şekil 13 – Cihan’ın Babil sayısına verdiği yanıt.....	77
Şekil 14 – Berk’in Babil sayısına verdiği yanıt.....	84
Şekil 15 – Selçuk’un Babil sayısına verdiği yanıt.....	96
Şekil 16 – Murat’ın oluşturduğu sayı sisteminin sembolleri.....	108
Şekil 17 – Murat’ın Babil sayısına verdiği yanıt.....	109

TABLolar LİSTESİ

Tablo 1 – Katılımcıların takma adları ve şubeleri.....	49
--	----

1. GİRİŞ

Bu bölümde “Problem Durumu”, “Problem Cümlesi”, “Araştırmanın Amacı”, “Araştırmanın Önemi”, “Varsayımlar”, “Sınırlılıklar” ve “Tanımlar/Kısaltmalar” alt başlıkları ele alınmıştır.

1.1. Problem Durumu

Kamii (1992)’nin belirttiği üzere, Piaget, bilginin iki çeşidi olduğunu düşünmekteydi: fiziksel bilgi ve mantıksal-matematiksel bilgi. Fiziksel bilgi, dış dünyadaki nesnelerin bilgisidir. Bir pulun rengi ve ağırlığı, pulun havaya atıldığında düşeceği bilgisi fiziksel bilgiye örnektir. Fiziksel bilgi gözlemlenebilirdir. Bununla birlikte, kırmızı ve mavi bir pulun birbirinden farklı olduğu düşünüldüğünde, bu farklılık mantıksal-matematiksel bilgiye örnek olacaktır. Pullar gözlemlenebilirdir, ancak aralarındaki farklar gözlemlenemez. Farklılık, iki nesne arasında bağlantı kuran bireyin zihninde oluşan bir *ilişki*dir. Farklılık ne kırmızı puldandır ne de mavi pulda ve eğer birey, nesneler arasında bir bağlantı kurmazsa, farklılık bireyde var olmayacaktır.

Piaget ve arkadaşları, sayı kavramının, bireyin, ilişkileri oluşturarak ve düzenleyerek yapılandırıldığını düşünmüşlerdir. Çünkü sayı, her bireyin kendisi tarafından yapılandırılır. Sayı kavramının mantıksal-matematiksel yapısı direk olarak öğretilemez, çocuk bu yapıyı kendisi inşa etmek durumundadır. (Kamii,1992)

Çocuk sayı kavramını yapılandırıldığı zaman, $5+5$ ve 5×2 işlemlerini yapabilir hale gelecektir. 999 ve 1000 gibi büyük sayıları yapılandırmaya kalkıştığında ise, nesne kümelerinden bir soyutlamayla tüm sayıları öğrenmenin imkansız hale geleceği aşikardır. 1 000 002 nesneyi görmedikten ya da saymadıktan sonra 1 000 002 sayısını 5 ya da 7 sayısı gibi anlamlandırmak imkansızdır. (Kamii,

1992). İşte bu esnada devreye “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarının girmesi gerekmektedir.

Herkes bilir ki, bir çocuk sağlam bir basamak değeri anlayışına sahip değilse, aritmetik o çocuk için hiçbir anlamı olmayan bir işlemler bütünü haline gelecektir. Çoğu matematik eğitimcisi, öğrencilerin Hint-Arap sayı sistemi (onluk sayı sistemi) ve bu sistemin içinde yer alan basamak değeri kavramının eksiksiz bir anlayışına sahip olması gerektiğinin önemini sorgulamaz (Sharma, 1993, s.4). Şimdi bu anlayışın 2005 yılında Türkiye’de uygulanmaya başlanan İlköğretim matematik dersi öğretim programında (İMDÖP) ne kadar yer aldığına bakalım.

İMDÖP dökümanında “basamak” ve “basamak değeri” hakkında yapılan açıklamalar şu şekilde belirtilmiştir:

Öğrenciler okula, zengin sayı ve sayma bilgileriyle gelirler. Öğretmenler, öğrencilerin temel sayma becerilerinden daha ileri düzey sayı bilgilerini oluşturmalarına, sayılarla işlem yapmalarına, sayılar arasındaki ilişkileri, sayı örüntülerini ve basamak kavramını anlamalarına yardımcı olmalıdır.(s.21)

İkinci sınıftan itibaren, basamak kavramı ve onluk sayı sisteminin sağlam temelleri atılmalıdır. Bir sayının somut modellerle gösterimi ile sayının okunuşu ve yazılışı arasındaki ilişkilere dikkat çekilmelidir. Öğrenci 10’un onluk sistemde özel bir birim olduğunu anlamalıdır. 10’un hem bir birim olduğunu hem de 10 tane birden oluştuğunu düşünebilmelidir.(s.22)

Öğrencilerin basamak kavramını anlamaları, verilen ilginç, zengin içerikli problemleri çözmek için strateji geliştirdikleri zaman gelişir ve derinleşir. Öğrenciler; geliştirdikleri bu stratejileri, yaklaşımları açıklamaya ve özellikle tartışmaya teşvik edilmelidir. Ayrıca, yüzlük tablosu gibi modeller kullanılarak basamak kavramı ile ilgili örüntü arama ve oluşturma gibi düzenli etkinlikler bu kavramın gelişimine yardımcı olur.(s.22)

Şimdi “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarının kazanımlar içerisinde ne kadar yer aldığına bakalım:

İMDÖP, kademeli olarak ilk önce birinci sınıf seviyesinde bir öğrenciden bir basamaklı, 2. sınıf seviyesinde bir öğrenciden iki basamaklı, 3. sınıf seviyesinde bir öğrenciden üç basamaklı, 4. sınıf seviyesinde bir öğrenciden 4, 5, 6 basamaklı ve en son 5. sınıf seviyesinde bir öğrenciden 7, 8 ve 9 basamaklı doğal sayıların basamaklarını, basamaklarındaki rakamların basamak değerlerini belirtmesini beklemektedir.

6-8. sınıflarda ise doğrudan “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarına ait bir kazanım bulunmamakta, dolaylı olarak “sayı hissine” dayalı kazanımlar bulunmaktadır. Özellikle;

1. Ondalık kesirleri çözümler.
2. Kesirlerin ondalık açılımlarını belirler
3. Ondalık kesirleri karşılaştırır ve sıralar.
4. Ondalık kesirleri belirli bir basamağa kadar yuvarlar.
5. Ondalık kesirlerle toplama ve çıkarma işlemlerini yapar.
6. Ondalık kesirlerle çarpma işlemini yapar.
7. Ondalık kesirlerle bölme işlemini yapar.

şeklinde sıraladığımız kazanımların yapılandırılması için basamak ve basamak değeri kavramlarının öğrenciler tarafından tamamen yapılandırılması gerekmektedir. Bilhassa 5, 6 ve 7 numaralı kazanımların yapılandırılması için, öğrencilerin “basamak” ve “basamak değeri” fikirleri hakkındaki kavrayışlarının veya bu kavramlarla ilgili düşüncelerinin ortaya çıkarılması gerektiği düşüncesindeyiz. Amacımızın daha iyi anlaşılması için, kavranmasında “basamak” ve “basamak

değeri” fikirlerinin gerekli olduğunu düşündüğümüz etkinlik örnekleri aşağıda belirtilmiştir.

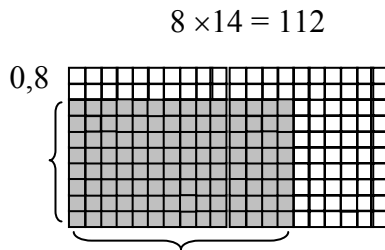
- 6. sınıf matematik dersi programında “ondalık kesirlerle çarpma işlemini yapar” kazanımı için verilen etkinliklerde aşağıdaki çarpma işlemlerinden söz edilmiştir.

$$2 \times 0,4 = 2 \times \frac{4}{10} = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$0,7 \times 0,6 = \frac{7}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{42}{100} = 0,42$$

Benzer çarpma işlemlerinde, çarpanların kesir kısmının basamak sayısı ile çarpımın kesir kısmının basamak sayısı arasındaki ilişkiye dikkat çekilir. Öğrencilerin, ondalık kesirlerle çarpma işlemi için bir kural geliştirmeleri sağlanır.

- 1,4×0,8 işlemi için yüzlük kartlar kullanılır. Yüzlük kartlarda her çarpan işaretlenerek bir dikdörtgen elde edilir. Dikdörtgenin alanı yüzlük karttaki kareler cinsinden buldurulur. Bu işlem basamak tablosunda gösterilir.



$$\frac{8}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{32}{100}$$

$$\frac{8}{10} \times 1 = \frac{8}{10}$$

Onlar B.	Birler B.		Onda Birler B.	Yüzde Birler B.
	1	,	4	
×	0	,	8	
	0	,	3	2
+	0	,	8	0
	1	,	1	2

- Ondalık kesirleri kısa yoldan 10, 100 ve 1000 ile çarparken ondalık kesir, kesir olarak ifade ettirilir. Elde edilen kesrin 10, 100 ve 1000 ile çarpımları bulunup oluşan örüntüler incelenerek çarpma işlemini kısa yoldan yapmak için kural geliştirilir.

$$\text{a. } 0,253 \cdot 1000 = \frac{253}{1000} \cdot 1000 = 253$$

$$\text{b. } 0,253 \cdot 100 = \frac{253}{1000} \cdot 100 = 25,3$$

$$\text{c. } 0,253 \cdot 10 = \frac{253}{1000} \cdot 10 = 2,53$$

Bu etkinliklerin amaçlarına ulaşabilmesi için öğrencilerin “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarıyla ilgili düşüncelerinin nasıl yapılandığının bilinmesi gerekmektedir.

1.2. Problem Cümlesi

Bu çalışmanın temel problemi, “Öğrencilerin Basamak ve Basamak Değeri Kavramları Hakkındaki Zihinsel Yapıları Nasıldır?” sorusunun araştırılmasıdır.

1.2. Araştırmanın Amacı

Van De Walle’ye (2004) göre “ Sayı, karmaşık ve çok yönlü bir kavramdır. Sayının iyi şekilde anlaşılması, konuyla alakalı bir anlayışı, değişik fikirleri, ilişkileri ve becerileri içermektedir. Bütün bunlar ise basamak değeri anlayışı ile derinlemesine bağlantılıdır. Ne sayı hissi ne de hesaplama anlayışı, sağlam bir basamak değeri anlayışı olmadan geliştirilemez”.

Basamak değeri kavramının öğrencilerin matematikteki diğer kavramları anlamalarına ve farklı matematik düşünceleri arasında bağlantı kurmalarına,

matematiksel düşünme, akıl yürütme, çıkarım yapma, tümdengelimci argümanlar geliştirme becerilerinin gelişmesine, daha ileri matematik kavramlarının öğrenilmesine taban oluşturduğu çok değişik araştırmalarda ve NCTM gibi dünyanın saygı duyduğu ve faydalandığı dokümanlarda belirtilmektedir.

Bu çalışmanın genel amacı, öğrencilerin “basamak” ve “basamak değeri” kavramları hakkındaki fikirlerini belirlemektir. Bu belirlemede, kavramların matematiksel yapısından, tarihsel yapısından ve matematik programındaki yerinden yararlanılmıştır.

1.4. Araştırmanın Önemi

Bugüne kadar “basamak değeri” ile ilgili pek çok araştırma yapılmıştır. Basamak değeri ile ilgili literatür araştırmaları, basamak değeri kavramını öğrenmenin temel-kavramsal ve kullanışlı yönünün, ayrıca bu kavramı anlamayı test eden bir anlayış eksikliğinin olduğunu göstermektedir. Araştırmacılar basamak değeri ile ilgili farklı metotları test eder ya da kavramsal olarak hatalı öğretimin sonuçlarını değerlendirir. Basamak değeri öğrenimi ile ilgili toplumsal ya da kültürel farklılıklar bulduklarında, görünen etkenlere odaklanmış görünürler, kavramsal bir bakış açısından bakılırsa, diğer etkenlerden daha anlamlı olası sebeplerden daha az bahsedilir. (Garlikov, 2000, s.2).

Bu araştırmada amaçlanan şey, “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarının öğrencilerinin zihninde nasıl yapılanmış olduğuna dair fikirler edinmektir. Bu fikirleri ortaya çıkarmak amacıyla bu kavramların “matematiksel yapısı”, “tarihsel yapısı” ve “matematik programındaki yeri” diye adlandırdığımız teorik yapımızdan yararlanarak tarafımızdan BADKÖ (Basamak ve Basamak Değeri Kavrayışı Ölçeği) geliştirilmiştir. Bu ölçeğin öğrencilerin zihnindeki “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarını anlamayı test eden bir araç olduğunu düşünmekteyiz.

Bu açıdan, araştırmamızın diğer araştırmalardan farklı ve bu nedenden ötürü de önemli olduğunu düşünmekteyiz.

Öğretmenler, öğrencilerin “basamak” ve “basamak değeri” kavramları hakkındaki bilişsel süreçlerini anlamada ve ders içi faaliyetlerini bu verileri göz önüne alarak hazırlamada, öğrenciler, kendi öğrenme biçimlerini görerek kendi öğrenme ve çalışma stillerini oluşturmada, program değerlendirme uzmanları, programın yapısında bu kavramlarla ilgili tespit edilebilecek eksiklikleri gidermede bu araştırmadan yararlanabilirler. Ayrıca bu araştırma, öğrencilerin bu kavramlara yaklaşımlarını gözlemlemek adına da okura yardımcı olabilir.

1.5. Varsayımlar

Araştırmada aşağıdaki durumlar varsayım olarak kabul edilmiştir.

1. Araştırmada kullanılan ölçme araçlarının ölçülmek istenen davranışları doğru olarak ölçtüğü kabul edilmiştir.
2. Görüşme yapılan öğrencilerin soruları ciddiyetle yanıtlayacakları, sorulara samimiyetle ve açık cevaplar verecekleri varsayılmıştır.

1.6 Sınırlılıklar

1. Araştırma, 2007-2008 eğitim-öğretim yılında Ankara’nın bir devlet okulunda okuyan 8. sınıf öğrencilerinin tümünden belirli kriterlere göre seçilen 7 aday ile sınırlıdır.

2. Bu araştırma “basamak” ve “basamak değeri” kavramları ile sınırlıdır.

1.7. Tanımlar / Kısaltmalar

1.7.1 Tanımlar

Sayı: Sayma ya da ölçüm sonucu belirlenen niceliği ya da miktarı belirtmeye yarayan soyut bir kavramdır. Sayılar binlerce yıl sonunda insanoğlunun geliştirdiği rakam dediğimiz evrensel simgelerle ifade edilirler. Sayıların farklı gösterimleri vardır. Mesela “üç” miktarı “3” biçiminde veya “ $\frac{6}{2}$ ” biçiminde gösterilebilir. Aynı şekilde “yarım”ı belirten miktar, “ $\frac{1}{2}$ ” ya da “0,5” biçiminde de gösterilebilir. İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programında (İMDÖP) 0,5 gösterimi için “ondalık kesir” tabiri kullanılmıştır, fakat bu tezde 0,5 gösterimi ondalık sayı diye adlandırılacaktır.

Rakam: Sayıları yazılı olarak göstermeye yarayan sembollere verilen ad.

Sayı sistemi: Toplama ya da çarpma gibi işlemlerden bir ya da daha fazlasını içeren sayı kümesidir.

Konumlu sayı sistemi / Basamak değerli sayı sistemi: Sayıdaki her konumun taban adı verilen ortak bir çarpan ya da ortak bir bölenle, yanındakiyle ilişkili olduğu sayı sistemidir.

Onluk sayı sistemi: Büyüklüğü önemli olmayan herhangi bir sayıyı yazmak için rakam olarak adlandırılan çeşitli sembollerin kullanıldığı, on farklı sembolden (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) daha fazlasını gerektirmeyen on tabanlı sayı sistemidir.

Basamak: Konumlu sayı sisteminde yer, konum, pozisyon, konumu belirleyen kutucuk.

Basamak değeri: Konumlu sayı sisteminde sembollerin/rakamların, basamaklara göre aldıkları değer.

Basamak tabanı: Konumlu sayı sisteminde sembollerin/rakamların yerleştirildikleri basamaklar arasındaki sabit oran veya kat.

1.7.2. Kısaltmalar

BADKÖ: Basamak ve Basamak Değeri Kavrayışı Ölçeği

NCTM: Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi (National Council Teachers of Mathematics)

PSSM: Okul Matematiği için Standartlar ve Prensipler (Principles and Standards for School Mathematics)

İMDÖP: İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı.

3-5. sınıf: 3. Sınıftan 5. sınıfa kadar

6-8. sınıf: 6. sınıftan 8. sınıfa kadar

2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölümde “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarına, bu kavramların matematiksel yapısına, tarihsel yapısına, matematik öğretimindeki yerine ve bu kavramlarla ilgili araştırmalara yer verilmiştir.

2.1. Basamak ve Basamak Değeri Fikri

Rakamları harflere benzetirsek, sayıları da kelimelere benzetmemiz gerekir. Harflerle kelimeleri, rakamlarla sayıları oluşturabiliriz. Her rakam kombinasyonu belirli bir sayıyı oluşturabilir ancak her harf kombinasyonu bir sözcük değildir. Alfabemizde 29 harf sınırlı sayıda anlamlı kelimeler meydana getirebilirken, onluk sayı sisteminde sadece 10 rakam, sayılamayacak kadar çok sayı oluşturmaktadır.

Türkçe’de “i” ve “p” harflerini birleştirerek “ip” kelimesini oluşturabiliriz. Harflerin yerini değiştirirsek, “pi” kelimesi karşımıza çıkar, tamamen anlamı farklı bir kelime elde ederiz. Matematikte de böyledir. “1” ve “2” rakamlarından “12” ve “21” sayılarını oluşturabiliriz. Bu sayıların anlamları da birbirinden farklıdır. Asıl sorun şu ki, “ip” ile “pi” kelimeleri arasındaki farklılıkları çocuklarımıza öğretebiliyorken, “12” ile “21” sayısı arasındaki farklılıkları çocuklarımıza tam olarak öğretip öğretmediğimiz. Öğretmenler ve öğretmen yetiştiren kurumlar olarak, bu soruyu kendimize sormamız gerektiği düşüncesindeyiz.

Sayı sistemine bir dil gibi bakacak olursak, her dilin kendisine göre kendisini oluşturan kurallara sahip olması gibi, sayı sistemlerinin de kendisini oluşturan

kuralları vardır. Bunlardan en önemlisi -olmazsa olmazlardan biri - her rakamın konumuna göre farklı sayısal değerler yüklenmesidir. Mesela;

		3
--	--	---

	3	
--	---	--

3		
---	--	--

Yukarıda, üç sütuna sahip olan tablolardan her biri, onluk sayı sistemindeki birer sayıyı temsil etsin. Bunları dildeki “ kelime” lere benzetebiliriz. Birinci kelimedeki 3 sembolü “üç” anlamına; ikinci kelimedeki 3 sembolü “otuz” anlamına ve üçüncü kelimedeki 3 sembolü ise “üç yüz” anlamına gelmektedir.

Sonuç olarak, basamak değeri, sembollerin basamaklara göre yüklendiği değerdir. Tabi ki, bu değer sayı sisteminin tabanına da bağlıdır. Mesela İngilizce’deki “nice” kelimesinin Türkçe karşılığı “güzel” iken, bu kelimenin Türkçe’deki anlamı bambaşkadır. Farklı sayı sistemlerinde de bu böyledir; aynı sayı, tabana bağlı olarak farklı anlamlar içerebilir.

Dilimizi oluşturan kurallar ne kadar önemliyse, sayılarımızı oluşturan kurallar da o derece önemlidir. Bu açıdan bakıldığında, “basamak değeri” kavramının matematik öğretimi içerisinde çok özel ve önemli bir yere sahip olduğu düşüncesindeyiz. Bu denli öneme sahip bir matematik kavramı hakkında öğrencilerin kafasında nasıl bir fikir olduğunu ortaya çıkarmak bu araştırmanın amacını belirlemiştir. Öğrencilerin “basamak” ve “ basamak değeri” kavramları hakkında neler düşündüklerini ortaya çıkarabilmek için aşağıdaki alt başlıklar belirlenmiş ve bu başlıklarla ilgili literatür araştırması yapılmıştır.

2.2 “Basamak” ve “Basamak Değeri” Kavramlarının Matematiksel Yapısı

“Basamak değeri”nin ne olduğuna dair görüşlerden bazıları aşağıda verilmiştir:

- Sayıdaki konumuyla belirlenen rakamın değeridir (örneğin, 11 sayısındaki bir rakamının değeri konumuna göre 10 da olabilir 1 de olabilir).

<http://mdk12.org/instruction/curriculum/mathematics/glossary.shtml>

- Değişik miktarları gösterebilmek için rakamları farklı konumlara yerleştirerek sayıları kaydetme metodudur.

http://www.decs.sa.gov.au/limestonecoast/files/links/Glossary_of_mathematical_t.doc

- Sayı sistemindeki tabana bağlı olarak, sayıdaki her konumun belirlediği değerdir.

<http://www.yourdictionary.com/place-value>

- Sayısal gösteriminde bulunan konumuna bağlı olarak değişen sembolün değeridir.(Burton, 1999)

- Basamak değeri ilkesi, bir rakamın nominal değeri (örneğin 5 sembolünün beşi ifade etmesi) ile sayıya özgü pozisyonundan dolayı sahip olduğu değeri (örneğin 5; 52 sayısında elli değerine, 534 sayısında beş yüz değerine sahiptir) ayırt etmeyi sağlar.(Catchart, Pothier, Vance, Bezuk, 2003, s. 102)

Türk Dil Kurumunun terimler sözlüğünde “basamak değeri” kavramı ile ilgili bir bilgi bulunmamakla birlikte, “basamak” kavramı ile ilgili aşağıdaki tanım verilmiştir.

- Ondalık sayı sisteminde bir sayının sağdan sola doğru rakamlarının derecelerine göre her birinin bulunduğu yer, hane:

“Onlar basamağı. Yüzler basamağı”

<http://www.tdk.gov.tr>

“Basamak” ve “basamak değeri” kavramlarının matematiksel yapısından bahsedecek olursak, şunları belirtebiliriz:

“Basamak”, “konumlu bir sayı sisteminde herhangi bir sayıyı oluşturan sembollerin ayrı ayrı ya da bir küme halinde yazıldığı yer, konum” dur. Her basamak bir tek sembolle veya sınırlı sayıda sembol kümesi ile ifade edilebilir. Basamaktaki sembol sayısı, “taban” adını verdiğimiz, ayrıcalıklı bir sayıya bağlı olarak değişir. Ifrah (2005), tabanı “işlevi bir üst basamağın bir birimini oluşturmak için belli bir basamak içinde öbeklenmesi gereken birimlerin sayısını belirtmek olan, önceden belirlenmiş sabit bir sayı” olarak tanımlamıştır. Dolayısıyla konumlu sayı sistemindeki bir sayıda birden fazla basamak, bir basamakta da birden fazla sembol bulunabilir.

“Basamak değeri”, ise “konumlu bir sayı sisteminde herhangi bir sayıyı oluşturan sembollerin basamaklarına bağlı olarak aldığı değer”dir. Bu değer, bir yanındakine “taban” adını verdiğimiz sabit bir kat veya sabit bir oran ile bağlıdır. Her bir basamaktaki değer, tabanın belli bir kuvveti ile o basamaktaki sembol ya da sembollerin miktarlarının çarpılması sonucu ortaya çıkar. Sayının değeri ise, tüm basamaklardaki sembollerin basamak değerleri toplamıdır.

2.3. “Basamak” ve “Basamak değeri” Kavramlarının Tarihsel Yapısı

“Basamak” ve “basamak değeri” kavramlarının tarihinden önce sayıların tarihine şöyle bir göz atalım:

Sayıların tarihinin ne zaman ve nerede başladığını kestirebilmek mümkün değildir. Ancak sayıların, toplumların gereksinimlerinden dolayı ortaya çıktığını söyleyebiliriz.

“Toplu yaşamın gereksinimlerini karşılamak için alet ya da silah stoğu yapanların, yiyeceklerini saklayanların, silahlarının, aletlerinin, yiyeceklerinin durumunun, daha önce bıraktıklarıyla aynı olup olmadığını doğrulamaları gerekiyordu. Komşu topluluklarla dostça olmayan ilişkilere girenlerin, her askeri seferin sonunda, askerlerin sayısının tam olup olmadığını bilmeleri gerekiyordu; gerektiğinde savaşta verilen kayıpların sayısını bilmeleri gerekiyordu. Değiş-tokuş işi yapanların da besin maddesi satın alacak ya da bir malın karşılığında başka bir mal verebilecek durumda olabilmeleri için “değer biçebilmeleri” gerekiyordu.” (Ifrah, çev.Dinçer, 2005, s.9)

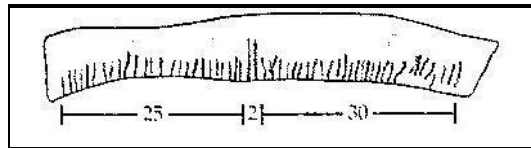
“Değer biçme” gereksinimi insanlara bir şekilde sayma ve kaydetme zorunluluğu getirmiştir. Bu şekilde başladığı tahmin edilen sayıların tarihini, “çetele tutma”, “gruplandırma”, “sembolleştirme”, “sembollerini toplama-çıkarma”, “konum” başlıkları altında toplamayı daha uygun gördük.

Çetele tutma: Sayı fikrini görsel olarak ifade etmenin en eski ve dolaysız tekniği çetele tutmadır. Çetele tutmadaki düşünce, yığındaki nesneleri sayabilmek için daha kolay kullanılan nesnelerle –atalarımıza göre bunlar, parmak, deniz kabuğu veya taşlardı- eşleştirme yapmaktır. Mesela bir zafer, antlaşma ya da yeni bir köy inşa etme durumunda - her insan bir taşla temsil edilmek üzere - bir taş yığını oluşturma (Burton, 1999).

Bir çetele dizisi, soyut - sayısal sembol fikrine hizmet eder ve nesnelerin herhangi bir kümesini (hayvanlar, insanlar gibi) temsil eder. Ayrıca, insanların, sahip oldukları nesnelerle ilgili algılamalarını sınırlandırmalarının üstesinden gelmelerine yardımcı olur. (Dehaene, 1997, s. 96)

Gruplandırma: Sayma işlemi, taşlara çizgi çizmekle, tahta sopaya ya da kemik parçasına kertikle, farklı renk ve uzunluktaki iplere düğüm atmakla devam etti. Bu çetelelerin insan gözüyle algılanma aşaması zor bir hal aldığı zaman, o dönemin insanları çeteleleri, bir eldeki parmak sayısını ifade eden beşli grup gibi daha kolay ayırt edilebilir gruplara göre düzenlediler. Gruplandırarak sayma, teker teker saymaya nazaran daha kayda değer bir gelişmedir (Burton, 1999).

Gruplandırarak çetele tutma işlemine dair en eski arkaeolojik delillerden biri M.Ö. 30 000 yıllarına ait olduğu düşünülen ve 1937’ de Çekoslovakya’da bulunan bir kurt kemiğidir (Burton, 1999). Kemikte iki satıra beşerli gruplar halinde yerleştirilmiş toplam 55 kertik vardır. Kertiklerin, bir avcının öldürdüğü hayvan sayısını ya da bir kabilede yaşayan insan sayısını gösterdiği düşünülmektedir (Bassarar, 2005).



Şekil 1- M.Ö. 30 000 yıllarına ait olduğu düşünülen kurt kemiği resmi

Sembolleştirme: Çetele ve gruplandırma, sadece kağıt gibi ince-yumuşak tabakalı nesneler üzerinde uygundu. Bir sopa parçasını kazımak, tahta parçası boyunca oyma yapmak yorucuydu. Tahta parçasını belirli bir açıda kesmek daha kolaydı ve her seferinde eğik çubuklardan yapılmış -V sembolü gibi- sembolleri seçmek, çobanların binlerce yıl önce benimsediği metodun ta kendisidir.(Dehaene, 1997, s.97).

Semboller toplama – çıkarma: Semboller toplanarak diğer sayılar biçim kazandı... Sayının değerinin sayıdaki sembollerin toplamına eşit olduğu **ekleme ilkesi**, Roma, Mısır, Sümer sayılarında olduğu gibi, çoğu sayı notasyonlarının temelini oluşturur. Ekleme ilkesi, zamandan ve alandan tasarruf sağlar, örneğin 38, bire-bir eşlemeye dayalı somut nesnelerle gösterildiğinde otuz sekiz özdeş sembol kullanılırken, bu sayı artık, sadece yedi Roma sembolü ile ($38 = 10 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1$ ya da XXXVIII) gösterilebilmektedir.(Dehaene, 1997, s.97).

Mısır ve Roma sayı sistemleri Bassarer (2005)'in de belirttiği üzere, **eklemeli sistem** olarak adlandırılırlar. Çünkü eklemeli bir sistemde, bir sayının değeri, sayıdaki sembollerin toplam değeridir.(Bassarar, 2005, s.104). Eklemeli sisteme örnek olarak Mısır ve Roma sayı sistemleri tanıtılacaktır.

Mısırdaki bilinen en eski yazılı sayılar yaklaşık 5000 yıl önceye aittir. Mısırlılar, bataklıklarda büyüyen, “papirüs” diye adlandırılan su bitkisinden kendi kağıtlarını üretmişlerdir....Mısırlılar sayıları göstermek için, resim sembollerle (hiyeroglif) çetele tutmayı birleştiren bir sayı sistemi geliştirmişlerdir.(Bassarar, 2005, s. 103).

Aşağıda Mısır sayı sistemindeki semboller tanıtılmıştır:

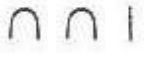
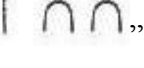
1,000,000	100,000	10,000	1000	100	10	1
						
Şaşkın adam	Larva	İşaret eden parmak	Nilüfer çiçeği	Nakış	Ayak kemigi	Çizgi

Şekil 2- Mısır Sayı Sistemindeki Semboller

Mısırlılar, yukarıdaki sembollerin kombinasyonlarını kullanarak miktarları gösterebiliyorlardı. Örneğin 2312 sayısını $1000 + 1000 + 100 + 100 + 100$

+ 10 + 1 + 1 olarak görüyorlardı ve bunu “        ”

biçiminde yazıyorlardı.(Bassarar, 2005, s.104). Bu açıdan bakıldığında Mısır sayı sistemi eklemeli bir sistemdir.

Mısır sisteminin “basamak değeri” düşüncesine ihtiyacı yoktur. Çünkü 21 sayısı, genellikle “ ” biçiminde yazılmakla birlikte “ ” ya da “ ” biçiminde de yazılabilirdi. (Burris, 2005, s.85).

Bir diğer eklemeli sistem olarak adlandırılan Roma sayı sistemindeki semboller aşağıda verilmiştir:

Miktar	Eski Roma	Yeni Roma
1	I	I
5	V or A	V
10	X	X
50	L	L
100	C	C
500	D and D	D
1000	M or ∞	M

Şekil 3- Roma Sayı Sistemindeki Semboller

Aslında, Roma sayı sistemi de Mısır sayı sistemi gibi eklemeli bir sistemdir. Bununla birlikte Yeni Roma sayı sisteminin **eksiltici** bir yanı da vardır. Örneğin, IV “beşten bir önce” olarak görüldü.(Bassarar, 2005, s.105).

Konum: Geçmişe bakıldığında, ekleme ilkesinin büyük sayıları ifade etmekte yeterli olmadığı açık olarak görülmektedir. Artık çarpma işlemi zorunlu hale gelmiştir.(Dehaene, 1997, s.97). Bu yüzden, artık çarpma işleminin söz konusu olduğu **konumlu sayı sistemine** geçilmiştir.

Konumlu sayı sisteminde bir rakamın konumu, o rakam tarafından ifade edilen değeri belirler. Konumlu sayı sistemi, yeni sembol oluşturmaya gerek

duymadan, rakamların değişmeyen bir kümesini kullanır. Bu tip bir sistemin avantajı, ne kadar büyük olduğu önemli olmayan herhangi bir sayının, uygun konumda uygun rakamın yerleştirilmesiyle gösterilebilmesidir. (Burris, 2005, s. 73).

Konumlu bir sayılama, örneğin dokuzun, birinci, ikinci ya da üçüncü basamağın birimleri arasına yerleştirildiğinde aynı değeri taşımadığı bir dizgedir.(Ifrah, 2005, s.18).

Konum ilkesi kuralına uyan her rakam kombinasyonu yalnız ve yalnız bir sayıyı temsil ettiği gibi her sayı da yalnızca bir rakam kombinasyonunu temsil eder (Guedj, 2007, s.48).

NCTM (2004)' ye göre konumlu ya da basamak değerli sayı sisteminde olması gereken üç öge şunlardır:

- Taban olarak seçilecek birden büyük keyfi bir sayı; b ,
- “0” sayısını da içeren b kümesinin birbirinden farklı rakamları
- Toplama ve çarpma ilkeleri. (Çarpma ilkesi, her bir rakamın miktarının, yazıldığı konuma karşılık gelen taban kuvvetiyle birlikte çarpılmasıdır. Toplama ilkesi ise rakamlarla ifade edilen sayının bu çarpım sonuçların toplamı olmasıdır).

Gerçekte bu temel kural, tarih boyunca yalnızca dört kez akla gelmiştir. İlk kez milattan önce II. binin başında Babil bilginlerince ortaya atılmıştır. Sonra Hristiyan çağının başlamasından biraz önce Çinli matematikçilerce, ardından M.S. III. ile V. yüzyıl arasında Maya gökbilimcilerince, son olarak da V. yüzyıl yakınlarında Hint matematikçilerince yeniden keşfedilmiştir.(Ifrah, 2005, s.18)

Biz bu araştırmada, konumlu sayı sisteminin ilk örneği olan Babil sayı sisteminden ve son örneği olan Hint-Arap sayı sisteminden bahsedeceğiz.

Bassarar (2005)' in de belirttiği gibi, Babilliler, sayılarını Mısırlılar gibi papirüse yazmak yerine, kil tabletlerinin üzerine yazmışlardı. Bu yüzden sembolleri

Mısır sembolleri gibi süslü olamazdı. Bu fiziksel sınırlama muhtemelen kendi sistemlerinin ilerlemesi için bir güçlük oluşturuyordu. Çünkü sadece iki sembolleri vardı. “Bir” i sembolize eden dikey bir çivi ve “on”u sembolize eden yatay bir çivi. Aslında, Babillilerin yazı sistemi çivi yazısı olarak adlandırılıyordu. Aşağıda Babillilerin kullandığı semboller verilmiştir:

Miktar	Sembol
1	!
10	◄

Şekil 4- Babil Sayı Sistemindeki Semboller

Babil bilginlerinin sayılaması, bizim bugünkü konumlu dizgemiz gibi onluk olmak yerine, altmışlı bir taban üzerine kurulmuştur. Bu demektir ki, belli bir basamağın altmış birimi orada bir üst basamağın bir birimine denkti. (Ifrah, 2005, s.166)

Ifrah (2005) Babil sayı sisteminde sayıların nasıl yazıldığını Şekil 5’te gösterildiği gibi açıklamıştır:

BABİL BİLGİN SAYILAMASI*

Görüşü : ~ M.Ö. 1800 Tip : C 1 (1. türden konumlu sayılama: şek. 28.37). – Taban: 60. Sıfır imi gereği : Var – Sıfır imi : Var, ama ancak geç bir dönemde (M.Ö. yaklaşık IV. yüzyılda). Betimleme olanakları : Sınırlı (bkz. 13. Bölüm).											
Temel rakamlar  1 2 3 4 5 6 ... 10 20 30 ... 59 (Biri 1 sayısını, öteki 10 sayısını betimleyen iki temel imden yola çıkarak toplama ilkesiyle oluşturulmuş imler.											
Konum değerleri <table> <tr> <td>1. aşım :</td><td>1</td></tr> <tr> <td>2. aşım :</td><td>60</td></tr> <tr> <td>3. aşım :</td><td>$60^2 = 3\ 600$</td></tr> <tr> <td>4. aşım :</td><td>$60^3 = 216\ 000$</td></tr> <tr> <td>5. aşım :</td><td>$60^4 = 12\ 960\ 000$</td></tr> </table>		1. aşım :	1	2. aşım :	60	3. aşım :	$60^2 = 3\ 600$	4. aşım :	$60^3 = 216\ 000$	5. aşım :	$60^4 = 12\ 960\ 000$
1. aşım :	1										
2. aşım :	60										
3. aşım :	$60^2 = 3\ 600$										
4. aşım :	$60^3 = 216\ 000$										
5. aşım :	$60^4 = 12\ 960\ 000$										
Örnek : 7659  2 ; 7 ; 39 $(7\ 659 = 2 \times 60^3 + 7 \times 60 + 39)$ Konum ilkesine dayanan betimleme, şu tip bir ayrıştırmaya göre yapılır: [1+1 ; 1+1+1+1+1+1+1 ; 10+10+10+1+1+1+1+1+1+1+1+1] * Bu, tarihin ilk konumlu sayılamasıdır.											

Şekil 5- Babil Bilgin Sayılaması

Büyük sayıları göstermek için Babilliler, “sayıdaki yerinin fonksiyonun dönüşen rakamın değeri” fikrini ortaya attı. Bu, kayıtlı tarihteki “basamak değeri” kavramının en eski olayıdır.(Bassarar, 2005, 106).

Aslında bu sayı sistemi, tam bir altmışlık taban değildir. Çünkü, 60’ dan küçük sayılar basit bir onlu grupta sistemiyle, 60’dan büyük sayılar ise altmış tabanlı konum ilkesiyle belirlenmiştir. (NCTM, 2004, s.36).

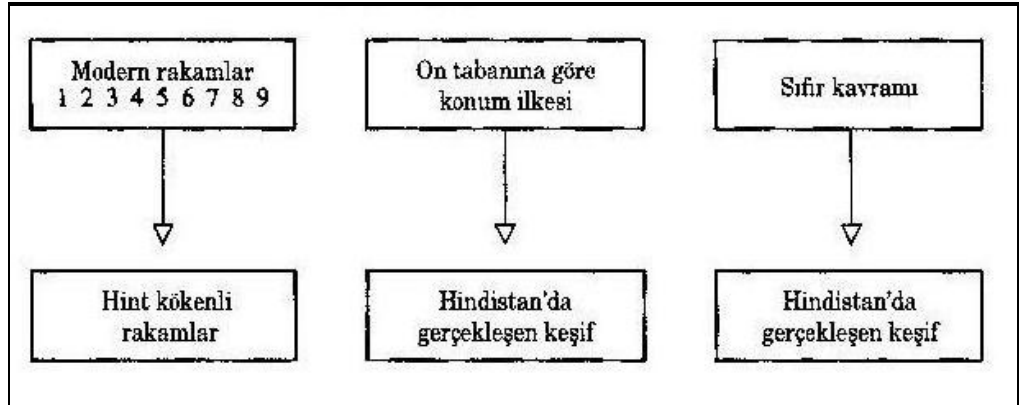
Babillilerin neden altmışlık taban kullandıkları kesin olarak belirlenememektedir. Altmışlık taban kullanmalarının nedeninin, büyük birimin küçük birimden altmış kat büyük olduğu bazı eski ağırlık ve ölçü sistemlerindeki miktarlardan kaynaklandığı söylenilebilir.(NCTM, 2004, s.37).

Babil sayı sistemi, Mısır ve Roma sayı sistemlerinden daha karmaşıktır. Bununla birlikte, bazı küçük teknik problemler de söz konusuydu. Örneğin 3624 nasıl gösterilebilirdi? 3624, $3600 + 24$ olarak düşünülürse, 3600'ü göstermek için üçüncü konumda “” sayısı ve 24'ü göstermek için birinci konumda “” sayısı kullanılmalı, fakat ikinci konum boş olmalıydı. Eğer, “” sayısını yazsalar, bu sayının $60 + 24 = 84$ olmadığı nasıl anlaşılacaktı? (Bassarar, 2005, s. 107).

Arkeologlar, Babil yazarlarının “boş bir yeri” göstermek için, çeşitli notasyonlar denediklerinin kanıtlarını buldu. M.Ö. 300 yıllarında bulunan bir Babil tableti, “sıfır” mış gibi davranan yeni bir sembol “” içermektedir. Artık 3624, “” şeklinde ifade ediliyordu.(Bassarar, 2005, s.107).

Bir diğer konumlu sayı sistemi olarak adlandırılan Hint- Arap sayı sistemi için Ifrah (2005) şöyle demiştir:

“Modern sayılamamızın keşfini ve bugün kullandığımız yazılı hesabın temellerinin atılışını Hint uygarlığına ve yalnız ona borçluyuz. Çok büyük bir tarihsel önemi bulunan bu olay büyük bir olasılıkla M.S. IV yüzyıl dolaylarında olmuştur. Aşağıdaki üç büyük fikir, bu fikirleri bir araya getirmeyi bilmiş olan Hint bilginlerinin dehasından çıkmıştır”



Şekil 6- Hindistan'da Gerçekleşen Keşifler

Bu ilerlemelere karşın, son aşamayı geçmek yine Hint bilginlerine kalıyordu, bu da sıfır kavramını yetkinleştirmek, onu bugünkü sayısal anlamı bakımından zenginleştirmekti. Gerçekte o zamana dek sayısal simge ya da çizgisel im olarak *shunya** (Sanskritçe’de sıfır, boşluk, gökyüzü) yalnızca belirli bir basamağın birimlerinin yokluğunu belirtmeye yarıyordu. Ama Hint bilginleri eksikliği çabucak gidermişlerdir. Böylece bu kavram hızla bugün “sıfır sayısı” ya da “yok nicelik” denen şeyin eş anlamlısı haline gelmiştir.(Ifrah, 2005, s. 194).

M.S. 800 yılı civarında sistem Bağdat’a getirildi ve dünya ülkeleriyle ilişkide önemli bir rol oynayan Araplar tarafından benimsendi. Araplar, asla bu buluş için bir hak iddia etmedi, her zaman Hintlilere, hem sayıların biçimi hem de basamak değeri kavramının ayırt edici özellikleri için minnettar kaldılar. Pers’li al-Khowarizmi 825’te bir kitabında, özellikle Hintlilere atfettiği sistemin açıklamasını yaptı.(NCTM, 2004. s.48).

Al-Khowarizmi, Hint kökenli rakamları hesap yöntemlerini ve cebir işlemlerini, gerek Müslüman dünyaya gerek Hristiyan Batı’ya tanıtmakta büyük katkısı bulunan iki kitabıyla çok ünlenmiştir. *Al cabr va’l mukabala* (Dönüştürme ve İndirgeme) adlı kitabı cebir biliminin temel işlemlerine ayrılmıştır. Bu kitap çağında o kadar ünlüydü ki, bugün cebir denen bu temel matematik dalı, evrensel olarak kabul edilen adını (algèbre) ona borçludur.(Ifrah, 2005, s. 45)

İbn al Nadim'in *Fihrist*'inden öğrendiğimize göre, Al Khwarizmi'nin öteki kitabı *Kitab al cami va'l tafrik bi hisab al hind* (Hint Hesabına Göre Toplama ve Çıkarma Kitabı) adını taşıyordu. Özgün metin ne yazık ki kayıp ama XII. yüzyıldan beri yapılmış bir çok Latince çevirisi duruyor. Hint kökenli ondalık konumlu sayılamanın ve hesap yöntemlerinin çok sayıda örnekle ayrıntılı açıklama konusu edildiği bilinen ilk Arapça kitap budur.(Ifrah, 2005, s.45)

X. yüzyılın sonundan itibaren kültür açlığı içindeki bir Fransız rahip, İran kökenli bilgin Al Khwarizmi'nin Arap-İslam dünyasında oynadığı rolle karşılaştırılabilecek bir rol oynar. İki yüz yıldan biraz az bir süre önce Mağrib ile Endülüs'e girmiş olan Hint keşiflerini Hristiyan Batıya yayacaktır. Bu rahip, bin yılında papa olacak Aurillaclı Grebert'tir.(Ifrah, 2005, s. 150).

Gerçekte Gerbert'in girişimi, esas olarak Roma kökenli sayılamaya ve hesap yöntemlerine, deyim yerindeyse, yapışıp kalmış olan Hristiyan halklarının tutuculuğundan kaynaklanan büyük bir direnişle karşı karşıya kaldı. Çağın uzmanlarının çoğu, kendilerini büyük Roma geleneğinin onurlu ve sadık mirasçıları olarak gördüklerinden, başka bir yöntemin üstünlüğünü kolay kolay kabul edemiyorlardı.(Ifrah, 2005, s. 152).

Ifrah (2005)'e göre Avrupa'da hesabın yaygınlaşmasının ilk adımı, Fibonacci adıyla bilinen Pisa'lı Leonardo'nun 1202 yılında yazmış olduğu *Liber Abaci* (Çöçkü Üzerine Kitap) adlı kitabıdır.

Bu aşamalardan geçen modern sayı sistemimizin adının Hint-Arap sayı sistemi olarak adlandırılmasının nedeni, Hintliler tarafından bulunmuş ve Araplar tarafından yayılmış olmasıdır.

Nispeten ayrıntılı sayı sistemimiz aşağıdaki dört özelliklerle tanımlanır:

1. *Konumsal özellik.* Her bir rakamın bulunduğu sayıdaki konumuyla belirlenerek gösterilen miktarlar.

2. *On-taban özelliği.* Sağdan sola doğru onun kuvvetleriyle artan konumların miktarı.
3. *Çarpımsal özellik.* Rakamın nominal değeri ile konumuna göre belirlenen değerın çarpılmasıyla elde edilen değer.
4. *Toplamsal özellik.* Sayının değeri, içindeki her bir rakamın değeri toplamıdır.(Ross, 1989, s. 47).

Masingila ve arkadaşlarına göre (2002) Hint-Arap sayı sisteminin aşağıdaki gibi altı temel özelliği vardır:

Tanım 1: Bir sayı sistemi birden büyük sayılarla tekrarlı gruptama sürecini yansıtırsa, bu sayı sistemi bir “**taban**”a sahiptir.

Tanım 2: Bir sayı sisteminde her rakamın değeri o rakamın bulunduğu sayıdaki konumuyla belirleniyorsa, bu sayı sistemi bir “**basamak değeri**”li sistemdir.

Tanım 3: Bir sayı sisteminde bir sayıdaki sembol, miktarının farklı katlarını temsil edebiliyorsa, bu sayı sistemi **çarpımsal** bir sistemdir.

Tanım 4: Bir sayı sisteminde, bir sayıdaki semboller kümesinin miktarı içerdiği sembollerin miktarları toplamını temsil edebiliyorsa, bu sayı sistemi **toplamsal** bir sistemdir.

Tanım 5: Bir sayı sisteminde boş kümedeki eleman sayısını gösteren bir sembol varsa, bu sayı sistemi bir “**sıfır**”a sahiptir.

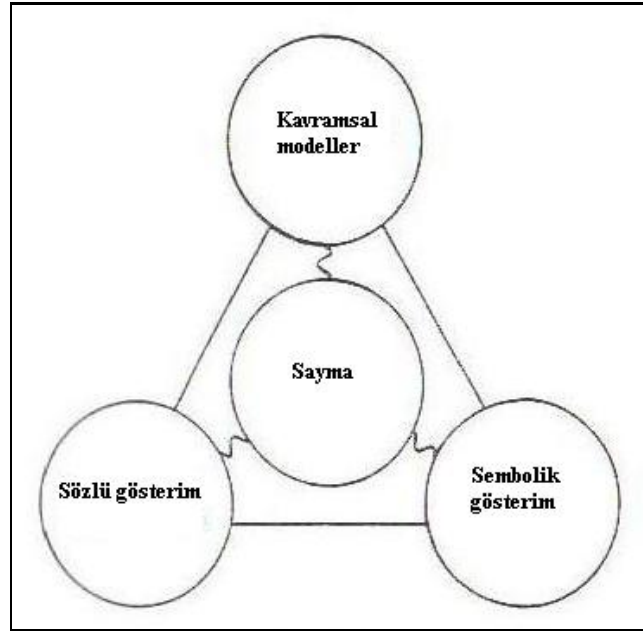
Tanım 6: Bir sayı sisteminde her sayı bir ve yalnızca bir miktara tekabül ederse, bu sayı sistemi **tek gösterimli** bir sistemdir.(Masingila, Lester, Raymond, 2002, s. 42-43-44).

2.4. “Basamak” ve “Basamak değeri” Kavramlarının Matematik Öğretimindeki Yeri

Van de Walle (2004)’e göre, çeşitli zihinsel metotlar, kağıt-kalem metotları, tahmin yetenekleri ve etkili bilgisayar ve hesap makinesi hesaplamaları, basamak değerini tam anlamıyla anlamaya bağlıdır. Toplama ve çıkarma hesaplama stratejileri

basamak değerini anlayarak geliştirilebilir. Tamsayı basamak değeri fikri, irrasyonel sayı yaklaşımlarının ve rasyonel sayıların bütününe tanıtımını mümkün kılmak için genişletebilir.

Basamak-değeri anlayışı; yeni ve yapılandırması zor olan onar onar gruplandırma kavramı ile (on-taban kavramı) , grupların basamak değeri şemamızda nasıl kaydedildiği, sayıların nasıl yazıldığı ve nasıl söylendiği gibi işlemsel bilgilerin bütünleşmesini gerektirir.(Van de Walle, 2004, s. 179).

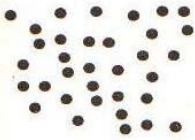
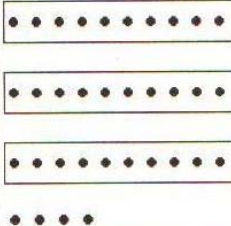


Şekil 7- Basamak Değeri Bilgisinin Üç Temel Öğesi

Basamak değeri bilgisinin üç temel öğesi, Şekil 7’ de gösterildiği gibi üçgensel bir yapıda sunulmuştur. Yapının en üstünde, “kavramsal modeller” vardır, bunlar öğrencide on-taban kavramsal bilgisini biçimlendiren ya da temsil eden materyallerdir. Daha aşağıdaki iki köşe, bu kavramların sözlü ve yazılı gösterimleridir. “Basamak değerini anlama”dan kasıt, üstte söz edilen “modellerle sunulan kavramsal bilgiye sahip olma, bu bilgiyi sözlü ve sembolik gösterimlerle ilişkilendirme”dir. Bu ilişkilendirme, şeklin kenarlarında çizgilerle gösterilmiştir. (Thompson, 1990, s. 90).

Çok sayıda nesneyi bir kerede saymak can sıkıcı hale gelebilir, ikili, üçlü, beşli, onlu vb. gruplarla saymak işi daha da kolaylaştırır. Öğrencilere bu yolla sayma öğretilmeli, tekrarlar yapılmalı ve genellikle bu yöntemin büyük miktarları saymada daha hızlı ve kolay olduğu söylenmelidir. Ayrıca bu yöntem, çarpmaya bir başlangıç olarak düşünülebilir, bu durum gruplayarak saymanın (örneğin üçer üçer) gruptaki eleman sayısının katlarını (üçün katlarını) belirttiğini bilinç altına itene kadar devam eder. Ve dolayısıyla, onarlı gruplandırma, on tabanlı aritmetiği anlamının da bir başlangıcıdır.(Garlikov, 2000, s.6).

Okun ve Toluk (2003)'e göre, basamak değeri kavramı “gruplama” becerisine dayanır. Onluk sayı sistemi onarlı gruplamayı içerir. Bu nedenle sayıların basamak değeri öğretilmeden önce yeterince gruplama etkinlikleri yapılmalıdır.

Nesneleri sayma	Nesneleri Gruplama	Sözel	Sembolik
		Üç Onluk Dört birlik veya Otuzdört	30 ve 4 34
Bir grup nesne vererek, öğrencilerin nesneleri sayması istenir. Kaç tane? sorusuna yanıt aranır. Bu durumda öğrenci, 34 sayısını 34 tane birden oluşan bir çokluk olarak düşünür.	Öğrencilerin verilen nesneleri 10 luk gruplara ayırarak sayması istenir. Öğrenciye kaç tane 10 luk grup olduğu sorulur. Böylece çocuğun dikkati 34 sayısının yapısına çekilir. Sayılarla, nesneler arasındaki ilişki vurgulanır.	Öğrencinin kaç tane nesne olduğunu sözel olarak ifade etmesi istenir.	Sayı olarak yazması ve söylemesi istenir.

Şekil 8- 34 Sayısı için Verilen Etkinlik

Yukarıdaki etkinlikte 34 sayısının basamak değeri incelenirken, sayının somut nesnelerle temsiline, hem sözel hem de sembolik temsili arasında bir bağlantı kurulmuştur. Bu etkinliği takiben öğrenciye 34 sayısında 3 ve 4 rakamlarının neyi

gösterdiği sorularak, basamak değeri kavramına geçiş yapılabilir.(Olkun ve Toluk, 2003, s.83).

Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi (NCTM) ‘nin “Okul Matematiği için Standartlar ve Prensipler” (Principles and Standarts for School Mathematics) adlı dökümanında “sayı hissi” ve “basamak değeri” hakkında yapılan açıklamalar ise aşağıda belirtilmiştir:

Tarih boyunca sayılar, tüm dünyadaki matematik dersi programlarının temel taşı olmuştur. Anaokulundan 12. sınıfa kadar bütün sınıflarda yer alan matematik dersi içeriğinin neredeyse tamamı sayı hissi ve sayı kavramı üzerine oturtulmaktadır... Sayı hissi, Howden (1989) tarafından, “Sayılar ve sayılar arasındaki ilişkilerle ilgili iyi bir önsezidir. Sayı hissi; sayıları keşfetmenin, sayıları değişik çevre ve şartlarda görselleştirmenin ve sayıları birbirleriyle geleneksel algoritmalarla sınırlı olmayan şekillerde ilişkilendirmenin sonucu olarak yavaş yavaş gelişir.” olarak tanımlanmıştır. Sowder (1992) ise “Sayı hissi, öğrencilerin, sayıların büyüklüğünü anlamalarını, sayıların gösterimlerini ve sayıları düşünmenin çeşitli yollarını edinmelerini, istenilen nesne için sayıları kullanmalarını ve işlemlerin sayılar üzerindeki etkisi hakkında doğru bir kavrayış oluşturmalarını geliştirir” demiştir.(s.80).

Anaokulu öncesinden 12. sınıfa kadar tüm sınıfların matematiği sayı kavramına dayandırılmıştır. Cebirdeki denklem çözme ilkeleri, sayı sistemlerindeki yapısal özelliklerle aynıdır. Geometri ve ölçmede nitelikler sayılarla tanımlanır. Tüm veri analizi alanı sayı hissi alanını içerir. Problem çözme sürecinde öğrenciler sayı anlayışlarını keşfeder ve somutlaştırır. Küçük çocukların matematiksel muhakemeleri daha çok sayıların durumlarıyla ilgilidir ve onlar için ilk matematiksel gösterimler muhtemelen sayılar olacaktır. Araştırmalar, sayı ve işlemleri öğrenmenin çocuklar için karmaşık bir süreç olduğunu göstermiştir.(s.32).

NCTM standartlarında sayı ve işlemleri anlama, sayı hissi geliştirme ve aritmetik hesaplarda akıcılık kazanma ilk sınıfların matematik eğitiminin temelini oluşturmaktadır. Öğrenciler anaokulundan 12. sınıfa doğru ilerledikçe, sayılarla ilgili zengin bir anlayışa ulaşmalıdırlar. Sayıların ne oldukları, nesnelerle, rakamlarla ya da sayı doğrusunda nasıl gösterildikleri, birbirleriyle nasıl ilişkili oldukları, bazı özelliklere ve yapılar sahip olan sayı sistemlerine nasıl gömüldükleri ve problem çözmede sayıların ve işlemlerin nasıl kullanıldıkları gibi. (s.32).

NCTM (2000)'nin, sayı ve işlemlerdeki 1. standardı “Anasınıfından 12. sınıfa kadar öğretim programı tüm öğrencilere; sayıları, sayıların gösterim yollarını, sayılar arasındaki ilişkileri ve sayı sistemlerini anlamaları için olanak sağlar” dır. Şimdi bu standart altında nelerden bahsedildiğine bakalım:

Sayıların kavranması anaokulu öncesinden 2. sınıfa kadar olan dönemi kapsar. Öğrenciler bu dönemde saymayı ve bir kümede "kaç" eleman olduğunu bulmayı öğrenirler. Bir anahtar düşünce, bir sayının birden fazla yolla düşünülmesi ve ayrıştırılmasıdır. Örneğin 24 sayısı 2 onluk 4 birlik olarak ayrıştırılabileceği gibi, 2 tane 12'lik olarak da ayrıştırılabilir. 10 sayısını hem 1 onluk, hem de 10 birlik olarak görebilmek, on tabanlı sayı sisteminin yapısını anlayabilmelerinde öğrencilerin kavramaları gereken ilk basamaktır.(Cobb and Wheatly 1988).(s.33).

Öğrencilerin sayı sisteminin anlamını geliştirmeleri için sayıların nasıl yazıldığını içeren birçok öğretimsel deneyime ihtiyaçları vardır. Örneğin, sayarken 10'nun katlarının “köprü” görevini gördüğünü (38,39,40,41) ve 10'nun on tabanlı sayı sisteminde özel bir birim olduğunu anlayabilmeli, “on” kelimesinin yalnız bir varlık gösterdiğini (1 onluk), aynı zamanda 10 birime ayrıldığını (10 birlik) ve gösterimlerin yer değiştirilebilir olduğunu fark etmelidir.(Cobb ve Wheatley, 1988).(s.81).

Öğrenciler hesaplama yapmak için geliştirdikleri stratejiler aracılığıyla basamak değeri anlamını geliştirirler (Fuson, 1997). Öğrencilerden, 2 ve 3 basamaklı sayılarla problem çözmelerine fırsat vermeden önce basamak değeri anlayışının tamamen gelişmesini beklemek olanaklı değildir. Bazı problemler ilginç ortamlarda ortaya çıkarsa, özellikle de öğrencilerin geliştirdikleri stratejileri ve yaklaşımları açıklamak ve tartışmak için fırsatları varsa, basamak değeri anlayışını içeren ve derinleştiren problemleri çözmek için yöntemler geliştirebilirler. Öğretmenler uygun sorular sorarak, bir sayıdan 10 az ve 10 fazlayı bulmak gibi problemleri seçerek ve ilk sayıyla, verilen cevapların karşılaştırılmasına yardım ederek basamak değerini vurgular. Basamak değeri kavramlarını geliştiren problemlerle yapılan düzenli deneyimlerin bir sonucu olarak, 2.sınıf öğrencileri yüzlüklerde sayabilir, basamak değeriyle ilişkili sayı sistemindeki örüntüleri keşfedebilir ve 2-ve 3 basamaklı sayıları oluşturabilir (farklı kombinasyonlar aracılığı ile meydana getirir) ve ayrıştırabilir (farklı biçimlere parçalar).(s.82).

3-5.sınıflarda, öğrencilerden on tabanlı sayı sisteminin basamak değeri yapısını anlamaları ile tam sayılarla ondalık sayıları göstermeleri ve kıyaslamaları beklenir.(s.176)

İlköğretim ikinci kademedeki öğrenciler ondalık sayılarla ilgili de derin bir anlayış geliştirmeli ve sayı bilgilerini onlara verilen etkinliklerle zenginleştirmelidirler. Ondalık sayılarla ilgili anlayış, tam sayılara ve basamak değeri kavramına dayanır. 3-5. sınıf düzeyinde, öğrenciler ondalık sayıların, 1'den küçük miktarları göstermek için on tabanlı basamak değerli sistemin doğal bir uzantısı olduğunu öğrenmelidirler. 6-8, sınıf düzeyinde ondalık sayıların paydalarının 10'un kuvveti şeklinde yazılabilen kesirler olduğunu da öğrenirler.(s.216).

2.5. İlgili Araştırmalar

Mieko Kamii, 1982 yılında yaptığı araştırmada, 4 ile 9 yaş arası çocuklarla birlikte çalışmış, bu çocuklara 16 sayısındaki “1”in ne anlama geldiğini sormuştur. Bu miktarın “on” anlamına geldiğini söyleyebilen çocuklar arasında, %13 oranında 7 yaş, %18 oranında 8 yaş ve %42 oranında 9 yaş çocukları bulunmaktadır. Buna ithafen Constance Kamii, 1985 yılında aynı çalışmayı 4, 6 ve 8. sınıf seviyesindeki öğrencilerle birlikte yapmıştır. 16 sayısındaki 1 sayısının “on” miktarını belirttiğini söyleyebilen 4. sınıftaki öğrencilerin oranı %51 (n=35), 6. sınıftaki öğrencilerin oranı %60 (n= 48) ve 8. sınıf seviyesindeki öğrencilerin oranı %78 (n=41) olarak belirlenmiştir.

Ross, 1985 yılında yaptığı çalışmada, 2-5. sınıf seviyesindeki öğrencilerin basamak değeri kavramının gelişimini incelemiştir. Bu çalışmada 60 öğrenci ile birlikte çalışılmış, her bir öğrenciye iki basamaklı bir sayının rakamlarıyla, nesne miktarları arasındaki benzerlik sorulmuştur. Çalışmadaki öğrencilerin çoğunun, 25’in yirmi beş nesneyi ifade ettiğini bildikleri halde, 2’nin 20’yi, 5’in de kalan beş nesneyi temsil ettiğini bilmedikleri gözlemlenmiştir. Sonuçlardan da öğrencilerin basamak değeri kavramını anlamaları için, sayı kavramı ve parça-bütün ilişkisi bilgisine sahip olmaları gerektiği elde edilmiştir.

Moore, 1997 yılında 52 birinci sınıf öğrencisiyle yaptığı çalışmada, basamak değeri kavramı öğretimi için iki farklı metodu karşılaştırmıştır. Bir grupta somut modellerle birlikte standart bir ders kitabıyla; diğer grupta ise onluk bloklar kullanılarak basamak değeri öğretimi gerçekleştirilmiştir. Sonuçlar iki grup arasında önemli bir fark olmadığını göstermiştir.

Varales ve Becker (1997), ilköğretim birinci kademe öğrencileriyle yaptıkları çalışmalarını, birbiriyle alakalı iki boyutta ele almışlardır: sayı değeri ve basamak

değeri. Çalışmalarında, bu kavramların öğretimine ilişkin bir model geliştirmişler ve bu modelin (a) çok basamaklı sayılarda sayı değeri ile basamak değeri arasındaki farkı belirlemeye (b) çok basamaklı bir sayıda yer alan rakamların basamak değerleri toplamının sayının kendisini verdiği anlayışını belirlemeye yardımcı olduğunu düşünmektedirler. Ayrıca, öğrencilerin basamak değeri anlayışını test eden bir çalışma yapmışlar ve bu çalışmada öğrencilerin % 96,5 'inin basamak değeri ile sayı değeri kavramları konusunda sorun yaşadıklarını ortaya koymuşlardır.

Rusch (1997), öğretmen adaylarının basamak değeri kavramı anlayışlarını değerlendirmek amacıyla bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmada kullanmak için bir değerlendirme aracı geliştirilmiş ve bu araç işlemsel beceriye karşıt olarak basamak değeri ile ilgili net bir anlayış hakkında bilgilere ulaşmak amacıyla kullanılmıştır. Çalışmada öğretmen adayları bir kursa dahil olmuş, değerlendirme aracı bu kurstan önce ve sonra öğretmen adaylarına uygulanmıştır. Sonuçlar, öğretmen adaylarının çoğunun kursa yüzeysel bir basamak değeri anlayışıyla girdiklerini, kursu bu yüzeysel anlayışın, ihtiyaçları olan anlayıştan çok uzak olduğunu fark ederek bitirdiklerini göstermiştir.

Brizuela, 2001 yılında yaptığı çalışmada, çocukların sayılar ve sayıların nasıl çalıştığı hakkındaki fikirlerini, bu fikirlerin sayı sisteminin geleneksel anlayışının gelişimi içinde nasıl bir aşamadan geçtiğini ve bu fikirlerin sayı sisteminin çalışmasıyla ne kadar paralel olduğunu keşfetmeyi amaçlamıştır. Çalışma 30 anasınıfı öğrencisiyle birlikte yürütülmüştür. Bu çalışmada bizim araştırmamızla ilgili sonuç olarak, çocukların, sayıların yazılışında konumu dikkate almadıkları, sayıdaki rakamların konumunu, sayıları birbirinden ayırt etmek için kullandıkları elde edilmiştir.

Nagel ve Swingen, 1998 yılında yaptıkları çalışmada, öğrencilerin basamak değeri kavramının anlamını nasıl açıkladıklarını araştırmışlardır. 6 ile 13 yaş arası 52 öğrenci ile birlikte çalışmışlar ve bu öğrencilerin yazılı ve sözlü açıklamalarına

odaklanmışlardır. Zengin sınıf içi etkileşim ve tartışmalardan, sık sık kullanılan hareketli nesnelerden, çeşitli gruplandırma deneyimlerinden ve basamak değeri kavramı hakkındaki fikirlerin paylaşımından yararlanılarak, öğrencilere “elde” kavramının anlamını açıklamak için yardımcı olunabileceğini söylemişlerdir.

Artut ve Tarım, 2006 yılında yaptıkları araştırmada ilköğretim birinci kademe öğrencilerinin basamak değer kavramını hangi düzeyde doğru bir şekilde öğrenebildiklerini ve öğrenemeyenlerin ise ne tür hatalar yaptıklarını belirlemeye çalışmışlardır. Elde ettikleri verilerle, öğrencilerin sadece %1.5’inin “16” sayısının onlar basamağında yer alan “1” için 10 tane sayma çubuğu gösterebildiğini ortaya konmuştur. % 98.5’inin ise ilk aşamada bu parçayı doğru olarak gösteremediğini ancak verilen bir ipucundan sonra % 46.2’sinin yanlışı düzelterek doğru cevap verdiğini gözlemişlerdir. Cinsiyet açısından ise bu konuda yaşanan güçlüklerin benzer olduğunu görmüşlerdir.

Nataraj ve Thomas, 2007 yılında yaptıkları araştırmada onluk sayı sisteminin, daha geniş bir kavram olan konumsal sayı sisteminin bir parçası olarak düşünülmeden, öğrenciler tarafından tam olarak anlaşılamayacağını söylemişlerdir. Bu yüzden çalışmalarında sayı sistemlerinin tarihsel gelişimi ile somut materyallerle modellemenin bir kombinasyonunu kullanılmışlar, farklı sayı tabanlarındaki basamak değeri kavramını ele almışlardır. Çalışma, ilköğretim ikinci kademe seviyesinde okuyan 27 adet 13 yaş öğrencisiyle yürütülmüştür. Sonuç olarak, tarihsel yapı ile somut model kombinasyonunun öğrencilerin basamak değeri kavramını anlamalarına yardımcı olduğunu gözlemlemişlerdir.

3. YÖNTEM

Bu bölümde “Araştırmanın Modeli”, “Evren ve Örneklem”, “Veri Toplama Teknikleri” ve “Verilerin Analizi” alt başlıkları ele alınmıştır.

3.1. Araştırmanın Modeli

Bu araştırmanın modelini, nitel araştırma desenlerinden “durum çalışması” oluşturmaktadır. Öncelikle nitel araştırmanın ne olduğundan kısaca bahsedelim.

Merriam (1998)’e göre nitel çalışma, sosyal bir olgunun anlamını, doğal yapısının mümkün olduğu kadar küçük parçalarından yararlanarak anlamaya ve açıklamaya yardımcı olan sorgulamaların çeşitli biçimlerini kapsayan bir şemsiyedir....Nitel araştırmacıları, insanların yapılandırmış oldukları şeyler, yani dünyalarını nasıl anlamlandırdıkları ve sahip oldukları deneyimler ilgilendirir.(Merriam, 1998, s. 6).

Nitel araştırma, gözlem, görüşme, doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanabilir.(Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 39).

Nitel metotlar, az sayıdaki insan ve durum hakkında detaylı bilgi zenginliği verir. Bu olay, çalışılan durumları daha iyi anlamamızı sağlar, ayrıca genellemeyi indirger.(Patton, 1990, s. 14).

Bu çalışmada, “basamak” ve “basamak değeri kavramlarının nasıl yapılandırılmış olduğu, öğrencilerin bu kavramları nasıl algıladığı, nasıl anlamlandırdığı incelendiğinden ve bir genelleme kaygısı gütmekten sınırlı sayıda öğrenciyle birlikte çalışıldığından, çalışmamızın nitel bir çalışma olarak

adlandırılabilirliğini düşünmekteyiz. Şimdi de durum çalışmasının ne olduğundan kısaca bahsedelim.

Gillham (2000) bir “durum” için şunlardan söz etmiştir:

- Sadece ortamında anlaşılabilir veya çalışılabilir
- Halihazırda, burada ve şu anda oluşabilen
- Ortamıyla birleşen ve dolayısıyla ince sınırlarının çizimi çok zor olan
- Gerçek dünyanın içine gömülmüş insan faaliyetlerinin her biri.

Bir durum, tek bir *birey*, aile ya da bir sınıf olarak seçilebilen bir *grup*, bir *kurum* ya da bir *toplum* olabilir... Durumların seçimi, sizin ne istediğinize bağlı olarak değişir.(Gilham, 2000, s.1).

Bir durum çalışması modeli, durumun derin bir anlayışını elde etmek için kullanılır. Sonuçlardan ziyade sürece, belirli bir değişkenden ziyade bir ortama, ispattan ziyade keşfe odaklanmıştır.(Merriam, 1998, s.19).

Durum çalışması, araştırmacının olaylar üzerinde az miktarda bir kontrole sahip olduğunda, nasıl ve niçin soruları araştırıldığında ve gerçek hayat ortamları içindeki güncel olgular üzerine odaklanıldığında tercih edilen bir stratejidir.(Yin, 2003, s.1).

Bu çalışmada, durum, öğrencilerden her biri olarak düşünülmüştür. Her durumun yani her öğrencinin “basamak” ve “basamak değeri” kavramları hakkındaki fikirlerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Araştırmacının kontrol edemediği bir olgunun ya da olayın derinlemesine incelemesi yapılacağı için araştırmamızda “durum çalışması” yöntemi kullanılacaktır.

3.2. Örneklem

Araştırmanın çalışma örneklemini, 2007-2008 eğitim-öğretim yılında Ankara'nın bir devlet okulunda okuyan 8. sınıf öğrencilerinin tümü oluşturmaktadır. Okulun konumu ve okula ulaşılabilirlik açısından, bu okul örneklem olarak seçilmiştir.

Bu araştırma için, 8. sınıf öğrencilerinin seçilmesinin başlıca iki farklı nedeni vardır. (a) Belirlenen amacın soyut düşünme evresine geçmiş olan öğrencilerle birlikte gerçekleşebileceğinin düşünülmesi (b) “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarının öğreniminden fazla uzaklaşmamış öğrencilerle birlikte çalışmanın gerekliliğine olan inanç. Araştırma yapılan okulda, 8. sınıf seviyesinde toplam 4 şube ve 119 öğrenci bulunmaktadır. Bu 119 öğrenci, 1991-2005 yılları arasında uygulanan Matematik Programı ile öğrenim görmüştür. Bu programda öğrencilerden, ilköğretimin ilk kademesinde doğal sayıların, 6. sınıfta ise ondalık sayıların hem tam hem de kesir kısımlarında bulunan “basamak” ve “basamak değeri”lerini söyleyip yazma davranışını kazanmaları beklenmiştir. Yine bir önceki Matematik Programı'nda 6. sınıfta, “bir ondalık sayının farklı basamaklarında tekrar eden bir rakamın basamak değerleri arasındaki farklılığı söyleyip yazma”, “bir ondalık sayıyı çözümleme”, “çözümlenmiş olarak verilen bir ondalık sayıyı yazıp okuma” ve “ondalık sayılarla toplama, çıkarma, çarpma, bölme işlemlerini yapabilme” hedef-davranışları; 7. sınıfta ise, “10'un pozitif tam sayı kuvvetleri şeklinde gösterilebilen sayılarla işlem yapabilme” ve “sıfırla bir arasında olan, 10'un negatif tam sayı kuvvetleri şeklinde gösterilebilen sayılarla işlem yapabilme” hedefleri mevcuttur.

Örnekleimde bulunan 119 öğrenciye yapılandırılmamış ve yapılandırılmış soruların içinde bulunduğu BADKÖ (Basamak ve Basamak Değeri Kavrayışı Ölçeği) (Ek.1) uygulanmıştır. Öğrencilerin sorulara verdikleri yanıtlar tablolastırılmış ve belirli kriterlere göre öğrenciler arasından seçilen 7 öğrenci çalışmanın örneklemini oluşturmuştur. Şimdi hangi kriterlere göre öğrenci seçtiğimizden bahsedelim.

Nitel araştırmada örneklem seçimi, -nicel araştırma örneklemindeki daha büyük ve rastgele seçimden farklı olarak- çoğu zaman (her zaman olmamakla birlikte) rastgele değildir.(Merriam, 1998, s.8).

Bu araştırmada, amaçlı örneklem yöntemlerinden “maksimum çeşitleme” kullanılmıştır. Yıldırım ve şimşek (2005)’e göre, maksimum eşitlemede amaç göreli olarak kk bir örneklem oluşturmak ve bu örneklemde çalışılan probleme taraf olabilecek bireylerin çeşitliliğini maksimum derecede yansıtmaktır.

Patton (1987)’ye göre, maksimum çeşitlilik için kk bir örneklem seçildiğinde, veri toplama ve analizi için iki çeşit sonuç vardır: (1) her durumun iyi bir şekilde, detaylı olarak tanımlanması (2) farklı durumlar arasında ortaya çıkan ortak örüntüler ve bu durumların heterojenliğinden kaynaklanan nemleri.

BADK’den alınan yanıtlar bir ereve altında toplanmış ve her soruya verilen yanıtların tüm eşitleri belirlenmiştir. Yanıtların çeşitliliğini, verdikleri cevaplarla kapsadığına inandığımız 7 ğrenci çalışmaya dahil olmuştur. Ayrıca bu konuda öğrencilerin matematik öğretmeninin görüşlerine de başvurulmuştur.

Çalışmaya katılan öğrencilere bu çalışmanın bir araştırma konusu olduğu, hiçbir şekilde isimlerinin deşifre edilmeyeceği, bu araştırmanın kendi okullarıyla alakalı veya konuyla ilgili bir değerlendirmenin hiçbir zaman söz konusu olmadığı belirtilmiştir. Çalışmanın etiği açısından katılımcıların ismi gizli tutulmuş, her bir öğrenciye araştırmacı tarafından bir takma ad verilmiştir.

3.3. Veri Toplama Teknikleri

Bu araştırmada verileri toplamak amacıyla uzman görüşler doğrultusunda BADK (Basamak ve Basamak Değeri Kavrayışı leği) hazırlanmış ve ölçeğin pilot çalışması örneklem belirlendiği okuldan farklı bir devlet okulunda

gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışma vasıtasıyla, hazırlanan ölçekte gerekli düzenlemeler yapılmış, ölçeğin son hali belirlendikten sonra örnekleme uygulanmış ve yanıtlar yazılı olarak alınmıştır.

Yıldırım ve Şimşek (2005)'in de belirttiği üzere, nitel araştırmada geçerlik ve güvenirlik için “veri çeşitlemesi” yapılması gerekmektedir. Farklı yöntemlerle elde edilen verilerin birbirlerini teyit amacıyla kullanılması, ulaşılan sonuçların geçerliğini ve güvenirliğini artırır.

Durum çalışmalarında genellikle, birden fazla veri toplama yöntemi işe koşulur; bu yolla zengin ve birbirini teyit edebilecek veri çeşitliliğine ulaşılmaya çalışılır. Durumlar birbirinden farklı olduğu için sonuçların genellenmesi söz konusu değildir. Ancak bir duruma ilişkin olarak elde edilen sonuçların benzer durumların anlaşılmasına yönelik örnekler ve deneyimler oluşturması beklenir.(Yıldırım ve Şimşek, 2005, s.77).

Çalışmamızın, hem daha anlamlı olması hem de geçerlik ve güvenirliğinin sağlanması için BADKÖ'ye ek olarak örneklemdaki öğrencilerle bire- bir görüşme yapılmıştır. Gillham (2000)'in de söylediği gibi, eğer bireylerle ilgili durum çalışması yapılacaksa, görüşme tekniği kullanışlı ve muhtemelen de gerekli olacaktır.

Görüşmelerde, öğrencilerden ölçekteki sorulara verdikleri yanıtları daha ayrıntılı olarak açıklamaları istenmiş ve ayrıca ek sorular sorulmuştur. Sorulan ek soruların verileri daha da aydınlatacağı düşünülmüştür. Görüşmeler ses kayıt cihazına kaydedilmiş, daha sonra da transkript edilmiştir.

3.3.1. BADKÖ (Basamak ve Basamak Değeri Kavrayışı Ölçeği) sorularının seçimi

BADKÖ soruları, “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarının matematiksel yapısından, tarihsel yapısından ve matematik öğretimindeki yerinden

yararlanılarak hazırlanmıştır. Bu çalışmada, “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarının tarihsel yapısından yararlanılmasına gerekçe olarak aşağıdakileri gösterebiliriz.

Öğrenciler genelde alışık olmadıkları sayı sistemleri ile karşılaşınca büyülenirler ve kullandıkları sistemle eski sistemlerin farklılıklarını öğrenmeye karşı isteklidirler. (Burris, 2005, s.84)

Farklı sayı sistemlerinin gelişimi tarihinden yararlanmak, matematik ve fiziksel dünya arasındaki ilişkiyi açıklamak ve insanların neden matematik yaptıklarına dair sebeplerini göstermek için mükemmel bir yoldur. (NCTM, 2004, s.6).

Piaget,” insan bilgisi”ni anlamak istiyorsak, onun kökenine ve tarihteki gelişim sürecine bakmamız gerektiğine inanmaktaydı. (Piaget,1967,1976, Piaget&Garcia,1983/1989, akt. Kamii, s.21). Bugünkü bilgi, bir inşa süreci boyunca yüzyılları aşkın bir sürede oluşturulmuşsa, çocukların bilgiyi bugün inşa etmeleriyle insanoğlunun geçmişte inşa etmeleri arasında bir paralellik söz konusu olduğunu düşünüyordu. (Kamii, 2004, s.21). Öğrencilerin “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarını nasıl anlamlandırdıklarının belirlenmesi için, bu paralellikten yararlanmanın kaçınılmaz olduğunu düşünmekteyiz.

Şimdi sorulan sorulara ve bu soruların neden seçildiğine bakalım:

Soru 1: *Kuzeniniz, kardeşiniz veya bir yakınınızın çocuğu sizden “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarının ne olduğu ile ilgili yardım isteseydi, onlara bu kavramları nasıl açıklardınız? Cevabınızı ayrıntılı olarak yazınız.*

Bu soru, öğrencideki “basamak” ve “basamak değeri” fikrini genel hatlarıyla belirlemek için seçilen yapılandırılmamış bir sorudur. Yapılandırılmamış olarak düzenlenmesinin nedeni öğrencilerin zihninde en başta, bu kavramlarla ilgili nasıl bir fikir olduğunu açığa çıkarmaktır. Bu yüzden bu soru, ilk soru olarak seçilmiştir.

Soru 2: Roma uygarlığının geliştirdiği sayı sisteminde kullanılan semboller aşağıda verilmiştir. İnceleyiniz.

<i>Roma Sayı Sisteminde Kullanılan Semboller</i>	<i>I</i>	<i>V</i>	<i>X</i>	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>M</i>
<i>Günümüzde Kullanılan Sayı Sistemindeki Karşılığı</i>	<i>1</i>	<i>5</i>	<i>10</i>	<i>50</i>	<i>100</i>	<i>500</i>	<i>1000</i>

Roma sayı sisteminde yazılan iki farklı sayı örneğini inceleyiniz:

XI : Günümüzde kullandığımız sayı sistemindeki karşılığı, bir tane 10 ve bir tane 1, $(10 + 1)$ yani 11

XXIII : Günümüzde kullandığımız sayı sistemindeki karşılığı, iki tane 10 ve üç tane 1, $(10 + 10 + 1 + 1 + 1)$ yani 23

Siz de 12 ve 33 sayılarını Roma sayı sisteminde yazınız.

Sayıların, günümüzde kullanılan onluk sayı sistemindeki gösterimi ile Roma uygarlığının geliştirdiği sayı sistemindeki gösterimini karşılaştırınız. Neler söyleyebilirsiniz? Açıklayınız.

Bu soru, Roma sayı sistemini kullanarak öğrencideki “basamak” ve “basamak değeri” fikirlerini açığa çıkarmak amacıyla sorulan bir sorudur. Bu sorunun seçilmesinin nedeni, basamak ve basamak değeri fikrine dayanmayan sayı sistemlerini kullanarak öğrencilerin bu kavramlara nasıl yaklaşacağını belirlemektir.

Soru 3: Babilliler bizim şu anda kullandığımız bir ve on sayıları için aşağıdaki sembolleri kullanmışlardır:

Babil Sayı Sisteminde Kullanılan Semboller		
Günümüzde Kullanılan Sayı Sistemindeki Karşılığı	1	10

Tarihi kayıtlara göre “basamak” ve “basamak değeri” fikrini kullanan ilk uygarlığın Babilliler olduğu bilim adamları tarafından ifade edilmektedir. Ayrıca, onların kullandığı sayı sistemi altmışlık sayı sistemidir (Altmışlık sayı sisteminden kasıt, her bir basamakta en fazla 59’un ifade edilebilmesidir, saatin dijital bir saatte gösterildiği gibi). Sayıları yazarken de her bir basamak yanındakiyle herhangi bir noktalama işareti ile ayrılmıştır.

Örneğin, günümüzde kullanılan **yetmiş iki** sayısı Babil sayı sisteminde  ;    biçiminde yazılmaktadır. Soldaki  sembolü 60’ı, sağdaki    sembolleri 12’yi temsil etmektedir. Başka bir deyişle altmışlık sayı sistemini kullanan Babilliler, 72’yi 60+12 olarak görmüşlerdir.

Sizce, günümüzde kullanılan **iki yüz on iki** ve **dört bin iki yüz seksen bir** sayıları, Babil sayı sisteminde nasıl yazılırdı? Açıklayınız.

Babil sayı sisteminde   ;   ;   şeklinde ifade edilen sayının günümüzde kullandığımız onluk sayı sisteminde hangi sayıya karşılık geldiğini yazınız ve neden bu şekilde yazdığınızı açıklayınız.

Bu sorular, öğrencilerin Babil sayı sistemindeki “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarını nasıl kullandıklarını belirlemek amacıyla sorulmuş

yapılandırılmış sorulardır. Yani bu sorular, Babil sayı sistemindeki bakış açısından yararlanarak, bu kavramların öğrencilerde nasıl yapılandırılmış olduğunu belirlemek amacıyla seçilmiştir.

Soru 4: *Sayıların, günümüzde kullanılan onluk sayı sistemindeki gösterimi ile Babil uygarlığının geliştirdiği sayı sistemindeki gösterimini karşılaştırınız. Neler söyleyebilirsiniz? Açıklayınız.*

Bu soru, Babil sayı sistemini kullanarak öğrencideki “basamak” ve “basamak değeri” fikirlerini açığa çıkarmak amacıyla sorulan bir sorudur. Bu sorunun seçilmesinin nedeni, basamak ve basamak değeri fikrine dayanan sayı sistemlerini kullanarak, öğrencilerin bu kavramlara nasıl yaklaşacağını belirlemektir.

Soru 5: *Dijital bir saatte “ 10:25:59” sembolleri görülmektedir. Siz bu gösterimden ne anlıyorsunuz? Açıklayınız.*

“10:25:59” gösterimi sizce kaç basamaklıdır? Açıklayınız.

Tarihsel olarak atalarımız, koyunları akılda tutmak, tohumun ne zaman ekileceğini hesaplamak gibi pratik problemlerini çözmek için aritmetiği keşfettiler. Bundan dolayı çocuklardan da günlük yaşamlarını kullanarak aritmetiği keşfetmeleri beklenir.(Kamii, 2000, s. 66).

Bu sorular, dijital saat sistemini kullanarak, öğrencideki “basamak” ve “basamak değeri” fikirlerini ortaya çıkarmak amacıyla sorulmuştur. Bu sorunun seçilmesinin nedeni, yukarıda belirtildiği gibi hem bu kavramları günlük hayatla ilişkilendirmek hem de dijital saat bakış açısıyla bu kavramların nasıl yapılandırıldığına dair ipuçları alabilmektir.

3.3.2. Görüşme sorularının seçimi

BADKÖ uygulandıktan sonra, ölçekten elde edilen veriler tablolaştırıldı ve maksimum çeşitlilik sağlayacağı düşünülen 7 öğrenci görüşme için seçildi. Bu öğrencilerin BADKÖ sorularına verdikleri yanıtların daha da aydınlatılması amacıyla, ölçek soruları görüşmelerde daha da irdelendi. Görüşmelerde ayrıca aşağıda belirtilen ek sorular da sorulmuştur.

Soru A: *Roma sayı sisteminde basamak değeri var mı?*

Öğrencinin yanıtı hayır ise, ona Roma sayı sisteminde çıkarmalı bir örnek yazdırılıp, aşağıdaki soru yöneltilmiştir.

Soru : *Bu açıdan baktığında, Roma sayı sisteminde basamak değeri var mıdır?*

Bu sorunun sorulma amacı, öğrencinin, sayılardaki sembollerin yerinin değişmesinin basamak değeri kavramının oluşması için yeterli olmadığını belirleyip belirleyemediğini anlayabilmektir. Öğrenci bu soruya da hayır der ise,

Soru : *Peki sence Roma sayı sisteminde basamak değeri olması için ne lazımdı?* sorusu yöneltilmiştir.

Bu sorunun amacı, öğrencinin, basamak değerinin oluşması için hangi şartların gerektiğini belirleyip belirleyemediğini anlayabilmektir.

Eğer öğrenci ilk soruya evet yanıtını vermişse daha sonraki sorular hiç sorulmamıştır.

Soru B: *Onluk sayı sisteminde, en sağdaki basamak her zaman birler basamağı mıdır?*

Bu soruyu sormadaki amaç, öğrencilerin, ondalık sayıların ifade edilmesinde onluk sayı sisteminin nasıl kullanıldığı ve sayıların genişlemesinde bu sistemin nasıl bir rol oynadığıyla ilgili düşüncelerini almaktır. Bu soruya öğrencinin yanıtı evet ise, görüşmenin başka bir aşamasında; öğrencinin yanıtı hayır ise o anda ondalık bir sayı yazdırılıp aşağıdaki sorular sorulmuştur.

Soru : Sence bu sayı kaç basamaklı? Bu sayıyı bana çözümler misin?

Bu sorudaki amaç, öğrencilerin, ondalık sayıların kesirli kısmındaki rakamların bulunduğu yerleri basamak olarak algılayıp algılamadıklarını, bu rakamların basamak değerine sahip olduğunu belirleyip belirleyemediklerini anlayabilmektir.

Soru C: *Ölçek sorularındaki dijital saat örneğinde “10: 25: 59” gösterimi vardı. Bu gösterime basamaklı demişsin. Peki senden bu gösterimi çözümlemeni istesem nasıl yaparsın?*

Bu sorudaki amaç, öğrencinin zihninde 10:25:59 gösterimindeki “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarının hangi biçimde mevcut olduğunu belirleyebilmektir.

Soru D: *Sadece aşağıdaki sembollerin kullanıldığı basamak fikrine dayanan bir sayı sisteminde, her basamakta yalnız bir sembol yer almaktadır. Aşağıdaki sembollerini inceleyiniz:*

<i>Bahsedilen Sayı Sisteminde Kullanılan Semboller</i>	δ		∨	⌋	□	◻
<i>Günümüzde Kullanılan Sayı Sistemindeki Karşılığı</i>	0	1	2	3	4	5

Bu sayı sistemini kullanan bir toplulukta $\vee$ | $\square$ ile $\square \delta \square$ sayıları toplansaydı, sonuç aynı sembollerle nasıl gösterilirdi? Açıklayınız.

$\vee$ ve $\vee \delta$ ile gösterilen iki sayıyı göz önüne alalım. $\vee$ sembolünün bu iki sayıda ifade ettiği miktarları karşılaştırınız.

Bu sorudaki amaç, öğrencilerin taban ve gösterim olarak aşına olmadıkları bir sayı sisteminde “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarını nasıl algıladıklarını anlayabilmektir. Toplama işlemini seçmemizin nedeni öğrencilerin gruplamayı doğru biçimde anlamlandırıp anlamlandıramadığını belirleyebilmektir. Bu konuda Burris (2005) şu şekilde açıklama yapmıştır:

Örneğin bir öğrencinin aşağıdaki hatayı yaptığını düşünün:

$$27 + 35 = 512$$

İlk başta görünen öğrencinin toplama işlemi ile ilgili bir sorunu olduğudur. Fakat, yapılan hata gerçekte bir toplama hatası değil, bir gruplama hatasıdır. “Basamak değeri” kavramına ait sağlam bir anlayışı (ve geri dönüp yanıtını kontrol etmeyi öğrenmiş) olan öğrenci bu tarz bir hata yapmayacaktır ya da fark edip hatasını düzeltecektir. (Burris, 2005, s.70-71).

Araştırmacılar olarak, altılık bir sayı sisteminde yedi miktarını ifade eden gösterimi belirlerken 4+3 yerine 5+2’nin tercih edilmesi, öğrencide “gruplama” hissinin bulunduğunu gösterebileceğini düşünmekteyiz.

Soru E: Aşağıdaki şekil bir elektrik sayacını temsil etmektedir:

--	--	--	--

Bu kutucukların her birinde 0,1,2,3,4,5 sembolleri dışında başka bir sembol bulunmamakta ve her kutucukta bu sembollerden sadece birisi görünmektedir.

Sayaç okuma memuru sayaçtaki kutucuklarda soldan sağa sırasıyla 1, 2, 0, 4 sembollerini görmüştür. Bugünkü sayı sistemine göre, sizce kaç birim elektrik tüketilmiştir? Cevabınızı açıklayınız.

Sayaçtaki 2 sembolü hangi basamakta yer almaktadır? Neden? Açıklayınız.

Bu sorudan önce, elektrik ve su sayacı tanıtılmıştır. Hatta, birkaç elektrik ve su sayacının video kaydı çekilip öğrencilere bu kaydı izlettirmek amaçlanmıştır, ancak okulun o anki teknolojik yetersizliğinden dolayı amaç gerçekleşmemiştir. Bunun yerine bu sayaçların nasıl çalıştığı sözlü olarak açıklanmıştır. Öğrencilerin çoğu bu sayaçlardan birini gördüğünü ifade etmiştir. Bu soruda elektrik sayacının seçilmesinin nedeni, sayaçta “basamak değeri” fikrine göre bir çalışma sisteminin bulunmasıdır.

Bu sorunun seçilmesinin nedeni, hem “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarını günlük hayatla ilişkilendirmek hem de elektrik sayacı bakış açısıyla bu kavramların nasıl yapılandırıldığına dair ipuçları alabilmektir.

3.4. Verilerin Analizi

Yıldırım ve Şimşek (2005)’in de belirttiği üzere, nitel araştırmalarda asıl amaç, araştırılan konu ile ilgili okuyucuya betimsel ve gerçekçi bir resim sunmaktır. Bunun için de toplanan verilerin ayrıntılı ve derinlemesine olması, araştırmaya konu olan bireylerin görüş ve deneyimlerinin mümkün olduğu ölçüde doğrudan sunulması önemlidir. Gerek görüşmeler, gerekse gözlem ve dökümanlar yoluyla elde edilen verilerin ayrıntılı ve derinlemesine olması, araştırma sonucunda ulaşılan sonuçların geçerlik ve güvenilirliğine ilişkin önemli bir göstergedir.

Merriam (1998)’e göre, nitel araştırma, “süreç”, “anlam” ve “kavrayış”ı odaklandığı sürece, nitel çalışmanın ürünü, zengin bir betimleme olacaktır. Gillham

(2000)'in de belirttiği gibi, bir durumun titiz bir betimlemesi, diğer araştırma rapor biçimlerinden daha büyük bir etkiye sahiptir. Bu çalışmada, öğrencilerin “basamak” ve “basamak değeri” kavramları ile ilgili nasıl bir algılamaya sahip oldukları belirlenmek istendiğinden, verilerin analizi için “betimsel analiz” yöntemi kullanılacaktır.

Yıldırım ve Şimşek (2005)'e göre, nitel çalışmada elde edilen verilerin analizi için iki genel yöntem önerilebilir. Bunlardan ilki betimsel, ikincisi ise içerik analizidir.

Betimsel analize göre elde edilen veriler, daha önceden belirlenen temalara göre özetlenir ve yorumlanır. Veriler araştırma sorularının ortaya koyduğu temalara göre düzenlenebileceği gibi, görüşme ve gözlem süreçlerinde kullanılan sorular ya da boyutlar dikkate alınarak da sunulabilir.(Yıldırım ve Şimşek, 2005, s.224).

Bu çalışmada görüşme ve BADKÖ sorularından elde edilen temalar aşağıda verilmiştir. Bulguların tanımlanması ve yorumlanması bu temalara göre yapılacaktır.

- Öğrencilerin “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarına genel bakış açısı
Bu temayı belirlemek amacıyla Soru 1 kullanılmıştır.
- Öğrencilerin ondalık sayılardaki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı
Bu temayı belirlemek amacıyla Soru B kullanılmıştır.
- Öğrencilerin onluk sayı sistemi dışında kalan diğer sayı sistemlerindeki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı
Bu temayı belirlemek için kademe kademe gidilmiştir. Öncelikle içinde “basamak” ve “basamak değeri” kavramları bulunmayan sayı sistemi (Soru 2 ve Soru A), sonra içinde bu kavramların bulunduğu, taban ve gösterim olarak aşına olmadıkları sayı sistemleri (Soru 3, Soru 4 ve Soru D), ve son olarak yine bu kavramların bulunduğu, gösterim olarak aşına oldukları, taban olarak aşına olmadıkları sayı sistemleri (Soru 5, Soru D ve Soru E) kullanılmıştır.

Betimsel analizde amaç, elde edilen bulguları düzenlenmiş ve yorumlanmış bir biçimde okuyucuya sunmaktır. Bu amaçla elde edilen veriler önce sistematik ve açık bir biçimde betimlenir. Daha sonra yapılan bu betimlemeler açıklanır ve yorumlanır, neden-sonuç ilişkileri irdelenir ve birtakım sonuçlara ulaşılır. Ortaya çıkan temaların ilişkilendirilmesi, anlamlandırılması ve ileriye yönelik tahminlerde bulunulması da araştırmancının yapacağı yorumların boyutları arasında yer alabilir.(Yıldırım ve Şimşek, 2005, s.224).

Yıldırım ve Şimşek (2005)'e göre betimsel analiz “betimsel analiz için bir çerçeve oluşturma”, “tematik çevreye göre verilerin işlenmesi”, bulguların tanımlanması” ve “bulguların yorumlanması” şeklinde dört aşamadan oluşur.

4. BULGULAR

Görüşme verilerinden elde edilen bulguları yazma, araştırmacının etken olduğu bir girişimdir. Verilerin “kendisini anlatması” ndan ziyade, araştırmacı tecrübeye dayanan anlam ve yapım sürecini belge ile kanıtlar. Konuşmaların kayıtlarından elde edilen verilerle birlikte, görüşülenin sergilediği karmaşık, düzensiz etkinlikler tanıtılır. Amaç, görüşülenin anlamlandırmasının, görüşünün, bağlantısının görüşme ortamıyla birlikte nasıl oluşturulduğunu ortaya çıkarmaktır. Rapor, görüşülenin bahsettiklerini düzenlemez ve özetlemez, yaşanan deneyim hikayelerinin *ne* sini ve *nasıl* ını okuyucuya gösterir.(Holstein ve Gubrium, 2004, s.156).

Bu bölümde, araştırmada ortaya çıkan verilerin üçüncü bölümde belirtilen yöntem ve teknikler kullanılarak yapılan analizleri sonucunda, araştırmanın problemine ve analiz yöntemi için belirlenmiş temalara göre elde edilen bulgulara, bunlara ilişkin yorumlara ve tartışmalara yer verilmiştir.

4.1 Görüşmeye Dayalı Bulgular

Araştırmaya 8. sınıf seviyesinde 7 öğrenci katılmıştır. Verilerin analizi yapılırken her bir öğrenciye birer takma ad verilmiştir. Bu aşamadan sonra araştırmaya katılan öğrenciler, “katılımcı” şeklinde ifade edilecektir. Aşağıdaki tabloda, her katılımcıya ait takma ad ve katılımcıların öğrenim gördüğü şubeler gösterilmiştir.

Tablo 1- Katılımcıların Takma Adları ve Şubeleri

Takma Adı	Şubesi
Gamze	A
İbrahim	B
Kaan	B
Cihan	C
Berk	D
Selçuk	D
Murat	D

Araştırmada katılımcılar ile birebir yapılan görüşmeler sonucunda veriler toplanmıştır. Katılımcılara BADKÖ sorularına ek olarak 5 tane soru sorulmuş ve katılımcıların “basamak” ve “basamak değeri” kavramları hakkındaki görüşleri belirlenmiştir.

Görüşmede sorulan sorular sorgulayıcı bir tutumla değil, bilgi vermeye davet edici bir konuşma tarzında sorulmaya çalışılmıştır. Görüşme bireylerle sohbet tarzında birebir gerçekleştirilmiş böylelikle görüşülen bireylerin daha rahat yanıt vermeleri hedeflenmiştir. Görüşme sürecinde verilerin kaydedilmesi için katılımcılardan da izin alınarak ses kayıt cihazı kullanılmıştır. Görüşmeler 30-40 dakika sürmüştür. Görüşmelere katılan katılımcıların sorulara samimi olarak cevap verdiği düşüncesine ulaşılmıştır.

Bu bölümde katılımcılar için, onlara verilen takma adın baş harfleri, araştırmacı için de A harfi kullanılacaktır. Bulgular kısmı yazılırken, önce ilgili konuyla katılımcılarla yapılan diyalog kısmı verilip, sonra da araştırmacının bu diyalogdan elde ettiği bulgular sunulacaktır.

4.1.1. Gamze'nin durumu

4.1.1.1 . Gamze'nin “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarına genel bakış açısı

“Kuzeniniz, kardeşiniz veya bir yakınınızın çocuğu sizden basamak ve basamak değeri kavramlarının ne olduğu ile ilgili yardım isteseydi, onlara bu kavramları nasıl açıklardınız?” sorusu için Gamze aşağıdakilerden bahsetmiştir.

G: Benim anladığım biçimde anlatmaktansa, örneklerle göstermeyi düşünürdüm. Sürekli basamağında aynı sayılar olan sayı verirdim. Mesela dokuz yüz doksan dokuzu verdikten sonra, hani öğretmenler açıklıyor ya, dokuz çarpı on üzeri sıfır, dokuz çarpı on üzeri bir gibi.

Katılımcının “basamağında aynı sayılar olan sayı verirdim” demesi ve 999 sayısını seçmesi katılımcıda basamak ve yer kavramlarının ilişkili olduğunu gösterebilir.

G: Rakamların bulunduğu basamaklara göre on'un farklı kuvvetleriyle çarpılıyorlar. Bu da rakamların basamak değerlerinin büyümesine ya da küçülmesine neden oluyor.

Katılımcı, onluk sayı sisteminde, bir sayının gösterimindeki rakamların on'un farklı kuvvetleri ile çarpıldığının farkındadır, buna göre de basamak değerlerinin büyüüp küçüldüğünü söylemektedir.

A: Şu büyümesi ya da küçülmesi kısmını bana açıklayabilir misin bana? Orada neyi kastettin?

G: Büyümesi derken, hani mesela yüz on bir var ya, bu bir (111 sayısındaki en sağdaki 1 gösteriliyor) burada en baştaki birden (111 sayısındaki en soldaki 1 gösteriliyor) daha küçük oluyor. Bu (111 sayısındaki en sağdaki 1 gösteriliyor) bir oluyor, bu da (111 sayısındaki en solundaki 1 gösteriliyor) yüz oluyor. Çarpıldığında

çarpıma göre büyüyüp küçülüyor. Burayı (111 sayısındaki en soldaki 1 gösteriliyor) yüzle çarpıyoruz, burayı (111 sayısındaki ortadaki 1 gösteriliyor) onla, burayı da (111 sayısındaki en sağdaki 1 gösteriliyor) birle çarpıyoruz. Bunu anlatmaya çalıştım.

Burada katılımcı 111 sayısındaki 1'lerin bulunduğu yere göre miktarlarının değiştiğinden bahsetmektedir. Sonuç olarak şimdiye kadar elde edilen verilerle söyleyebiliriz ki, katılımcıda basamak fikri konum ile basamak değeri fikri ise bir çarpım ile ilişkilidir ve katılımcı basamak değerinin, ait olduğu rakamın bulunduğu yere göre on'un kuvvetleriyle çarpıldığının ve bu değerlere bağlı olarak artıp azalmakta olduğunu farkındadır.

Katılımcı “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarına ek olarak aşağıdakileri belirtmiştir:

A: Duymuş muydun altılı, dokuzlu, örnekler verdin ya sen? Duydun mu daha önceden yani?

G: Altılıyı bir testte görmüştüm, test çözerken. Dokuzluyu da şimdi söyledim. Bir, altılı görmüştüm galiba.

A: Yani farklı sayı sistemlerinin olduğunu biliyorsun.

G: Hıhı, biliyorum.

Katılımcı, onluk sayı sisteminden başka altılık sayı sistemini duymuş ve dokuzluk bir sayı sisteminin de olabileceğini söylemiştir.

4.1.1.2 Gamze'nin ondalık sayılardaki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı

A: Onluk sayı sisteminde, en sağdaki basamak her zaman birler basamağı mıdır sence?

G: En sağıdaki. Virgüllü basamaklarda onluk sayı sistemine dahil oluyorsa değildir ama

A: Sence dahil olur mu?

G: Oluyor olabilir, eksilerde olarak.

A: Mesela örnek gösterebilir misin bununla ilgili?

Katılımcı 10,1 yazar.

G: On tam onda bir desek. Burası da (10,1 sayısının kesirli kısmı gösteriliyor) on üzeri eksi bir.

Katılımcı 10,1 sayısının kesirli kısmının miktarını “on üzeri eksi bir” olarak belirtmektedir. Bu da bize katılımcının, 10,1 sayısındaki kesirli kısmın bir “değer”i olduğunu düşündüğünü göstermektedir.

A: Peki bu (10,1 sayısı gösteriliyor) kaç basamaklı sence?

G: Bunun (10,1 sayısı gösteriliyor) iki basamağı var ama bu da (10,1 sayısının kesirli kısmı gösteriliyor) dahil olursa üç basamaklı olur. Hani burada eksi olarak düşünürsek bunu da (10, 1 sayısının kesirli kısmı gösteriliyor) üç basamaklı olur diye düşünüyorum

A: Üç basamaklıdır diye düşünüyorsun.

G: Hıhı.

Katılımcı 10,1 sayısını üç basamaklı olarak düşünmektedir, bu da bize katılımcının 10,1 sayısının kesirli kısmındaki rakamın da bir “konum”unun olduğunu düşündüğünü göstermektedir. Sonuç olarak katılımcının, 10,1 ondalık sayısının kesirli kısmındaki rakamın da “basamak” ve “basamak değeri”ne sahip olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca katılımcının ondalık sayıların kesirli kısımlarının onluk sayı sisteminde ifade edilip edilmediği konusunda tereddütleri vardır.

4.1.1.3. Gamze'nin onluk sayı sistemi dışında kalan diğer sayı sistemlerindeki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı

Katılımcı Roma sayı sistemini daha önceden duymuş ve sayıların Roma sayı sisteminde nasıl yazıldığı hakkında fikri mevcuttur. Ayrıca katılımcı Roma sayı sisteminin basamak ve basamak değeri fikriyle oluşmadığını ölçekte daha önceden belirtmiştir.

A: Peki senden mesela dokuzu yazmanı istesem.

G: Dokuz şöyle mi oluyordu?

Katılımcı IX yazar.

A: On biri yazmanı istesem

G: Şöyle

Katılımcı XI yazar.

A: Sence bu ikisi arasındaki farklılıklar ne?

G: Bu (X sembolü gösteriliyor) onu anlatıyor. Burada (IX sayısı gösteriliyor) iksten bir çıkarmamızı söylüyor. Bu tarafa attığımızda da (sağ tarafı gösteriyor) iksle bir toplamamızı söylüyor. Sağ taraf atınca toplama, sol tarafa atınca çıkarma oluyor

A: Peki, Roma sayı sisteminde basamak değeri yok demiştin, bu açıdan baktığında sence var mı, çıkarmalı örnekler olduğunda?

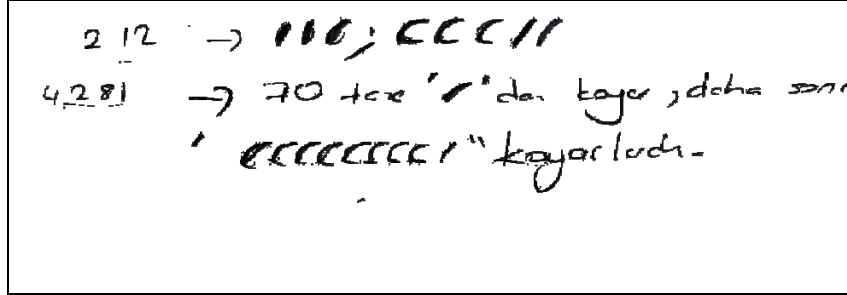
G: Yoo, yine basamağa göre yapılmamış bence. Bu tarafa attığımızda toplanıyor, bu tarafa attığımızda çıkarılıyor yani.

A: Basamağa göre yapılması için peki ne lazımdı?

G: Herhalde bir sayı sistemi lazım. Altılı olabilir, onlu olabilir, dokuzlu olabilir. Öyle bir şey lazım. Katları olması lazım yani.

Katılımcı, bir sistemde basamak değeri fikrine dayanması için o sistemde bir sayının katlarının bulunması gerektiğini düşünmektedir. Burada “sayının katları” diye kast edilen kısmın “sayının kuvvetleri” olma ihtimali de mevcuttur. Bu durumda katılımcının, sayıdaki rakamların konumunun rakamın değerini değiştirdiğinin farkında olduğu söylenebilir.

Katılımcı, 212 ve 4281 sayılarının Babil sayı sistemindeki karşılıklarını aşağıdaki gibi yazmıştır:



Şekil 9- Gamze'nin Babil sayısına verdiği yanıt

A: Yetmiş tane bu ( sembolü gösteriliyor), bunu açıklayabilir misin bana?

G: Altmışlık kullanmışlardı bunlar. Noktalı virgülden önce koydukları ne kadar altmış olduğunu ifade ediyor. Bunun (4281 sayısı kastediliyor) içindeki altmışları buldum, sonra geri kalanını hesapladım.

A: Altmış tane yetmiş, dört bin iki yüz. Sonra seksen bir mi ekledin buraya?

G: Hıhı.

Katılımcı, 4281 sayısının Babil sayı sistemindeki karşılığını bulmak için işe 4281 de kaç tane altmış olduğunu bulmakla başlamıştır. Ama öncelikle 4281 sayısının içinde kaç tane 3600 olacağını bulmasıyla başlanması gerekirdi. Yani Babil sayı sistemindeki sayının üç basamaklı olması gerekirken, katılımcı ikinci basamaktan üçüncü basamağa geçmesi gerektiğinin farkında değildir.

Katılımcı, Babil sayı sisteminde  ;  ;  sayısının onluk sayı sistemindeki karşılığı olarak 151 yanıtını vermiştir.

A: Şurada da ( ;  ;  sayısının onluk sayı sisteminde hangi sayıya karşılık geldiğini soran soru kastediliyor) yüz yirmi artı yirmi artı on bir yüz elli bir demişsin. Değiştirmek ya da eklemek istediğin bir şey var mı?

G: Şurası ($11; 66; 61$ sayısının en soldaki kısmı gösteriliyor) acaba daha fazla basamak olabilir mi? Bu ($11; 66; 61$ sayısının en soldaki kısmı gösteriliyor) bin iki yüz, bu ($11; 66; 61$ sayısının ortadaki kısmı gösteriliyor) iki yüz olabilir. Çünkü burada üç tane yapmışlar ama. Orayı tam olarak çözemedim, iki virgül olduğu için.

G: Ama tabi bu da (151 sonucu kastediliyor) olabilir, burası bin iki yüz, basamak değerli diye düşünürsek öyle de olabilir.

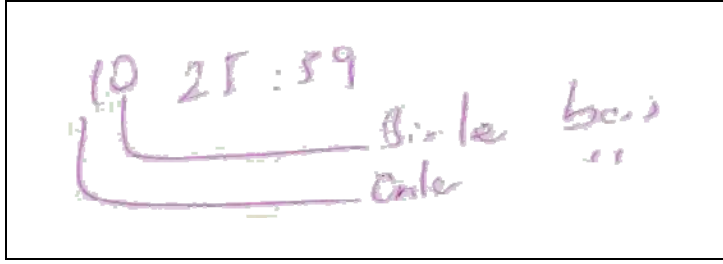
A: Yani o da olabilir diyorsun, bin iki yüz, iki yüz, on bir.

G: Eğer böyle ($1200+200+11$ sonucu kastediliyor) olursa önceki de (4281 sayısının Babil sayı sisteminde hangi sayıya karşılık geldiğini soran soru kastediliyor) değişir demin kullandığım benim, ondan sonra da basamak basamak giderim.

Katılımcı ilk başta üçüncü basamakta bulunan miktarı altmışla, birinci ve ikinci basamakta bulunan miktarı ise bir ile çarpıp sonucu 151 bulmuştur. Daha sonra da üç basamaklı bir Babil sayısı ile karşılaşmış ve verdiği cevap olan 151'in doğruluğundan şüphe duymuştur. Öncelikle 120 dediği en soldaki kısma sonradan 1200, 20 dediği kısma ise 200 olabilir demiştir. Yani, önceden söylediği sayıları 10 ile çarpmıştır. Kısacası, altmışlık sayı sisteminde basamakları 10 ile çarpmayı tercih etmiştir.

Önceden elde edilen veriler göz önüne alındığında katılımcı, bir sistemde “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarının olması için bir sayının kuvvetinin yerine katının alınması gerektiğini söylemiş, basamak değerli bir sistemde de tabandan farklı bir sayının katını almıştır. Kısacası katılımcının, basamak değerli sayı sistemlerinde tabanın kuvvetlerinin alınması gerektiğinin farkında olmadığını söyleyebiliriz.

Dijital saat sorusunda katılımcı, 10:25:59 gösterimine iki basamaklıdır demiş ve bunu aşağıdaki gibi belirtmiştir:



Şekil 10- Gamze'nin dijital saat sorusuna verdiği yanıt

A: *Tamam. İki basamaklıdır demişsin. Açıklamışsin. Birler, onlar. Bunu (10:25:59 gösterimi kastediliyor) çözümlemişsin. Ben zaten çözümleneni isteyecektim. Peki yirmi beşi (10:25:59 gösteriminin 25 kısmı kastediliyor) çözümlmek istesen?*

G: *İşte onu demin de anlattığım gibi eksili kuvvetlerle çözümlayebilirim belki. Onun eksili kuvvetleriyle. Öyle yaparak şey yapabilirim, bunu virgüllü sayı olarak düşünürsek.*

Katılımcı 10:25:59 gösterimini iki basamaklı ve 10'un tam sayı kısmı, 25'in de kesirli kısım olduğunu söylemektedir. Yani katılımcı dijital saatteki gösterimi ondalık bir sayı gibi düşünmüştür.

Katılımcı soru D için aşağıdakileri söylemiştir:

G: *İki yüz on dörtle; üç, sıfır, beş, beş yüz üç. Yedi yüz yedi. Her rakam bir sembolü ifade ediyor. Birden fazla kullanılmıyor. Yediyi oluşturmak için beş artı bir, bir yazamayacağıma göre, yediyi kullanmak için tek bir sembolde kullanmam gerekiyor. Bilmem, yazılır mı ki bu? Babil sistemi gibi olsaydı yazabilirdim belki ama böyle... Şu an yazabileceğimi sanmıyorum herhalde. Çünkü burada tek bir sembol kullanılıyor her bir basamak için.*

A: *Evet*

G: *Bu yedide bir sembol olmadığı için. Eğer on'a kadar olsaydı veya dokuz kadar, yazabilirdim de. Bu (7 sembolü kastediliyor) sembol ifade etmediği için veya rakam. O yüzden yazamam herhalde.*

Katılımcı onluk sayı sisteminde olsaydı yediyi yazabileceğini ama bu sayı sisteminde yazamayacağını söylemekte, verilen sayı sisteminin onluk sayı sisteminden farklı olduğunu belirtmektedir. Yediyi verilen sistemde yazamayışı, katılımcıda, sayıları gruplama veya farklı tabanlarda sayıların ifadesiyle ilgili eksiklikleri olduğunu gösterebilir.

Katılımcı görüşmenin sonraki aşamalarında bu sorunun yanıtı için

$$\square \delta \square + \vee | \vee = 717 \text{ yazmıştır. Burada katılımcının bu soruyu}$$

anlamlandırmak adına bu yanıtı verdiğini düşünmekteyiz.

A: Şu ($\vee$ sayısı gösteriliyor) ve şu ($\vee \delta$ sayısı gösteriliyor), iki tane sayı var. Şu sembolün ($\vee$ sembolü gösteriliyor) bu iki sayıda ifade ettiği miktarları karşılaştırınız demişiz.

G: Bu ($\vee$ sayısı gösteriliyor) iki, bu da ($\vee \delta$ sayısı gösteriliyor) yirmi. İşte demin de anlattığım gibi biri iki çarpı on üzeri sıfır, biri de iki çarpı on üzeri biri ifade ediyor. Burada yirmiyi, burada da ikiyi ifade ediyor. Yani basamakları değiştiği için farklı şeyleri ifade ediyor.

Katılımcı biraz önce bu sayı sisteminin onluk sayı sisteminden farklı olduğunu belirtmiş, şu anda ise sembollerin ifade ettikleri miktarları onluk sayı sistemindeki gibi belirlemiştir. Yani katılımcının bu konuda kavram karmaşası yaşadığını söyleyebiliriz.

Katılımcı soru E için ise aşağıdakileri belirtmiştir:

G: Burada da beşe kadar gidiyor. Herhalde bin iki yüz dört olarak şey yapılır, başka sayı kullanılmadığına göre. Bin iki yüz dört birim elektrik.

A: Bin iki yüz dört birim elektrik

G: Hıhı

A: Tamam. Sayaçtaki şu sembol (2 sembolü gösteriliyor) hangi basamakta yer almaktadır?

G: Yüzler basamağında yer alıyor. Ama orada beşlik sistem kullanılıyor, beşe kadar gidiyor burada. Böyle yazarsak (1204 gösterimini kastediyor) bugünde yüzler basamağı olarak ifade ediyor ama bu beşe kadar kullanıldığı için başka bir şey ifade etmesi lazım.

...

G: Bugünkünü düşünürsek yüzler basamağı oluyor ama, bunlar beşe kadar kullandığı için, hangi sistem olduğunu çözsem zaten şunu da (Kaç birim elektrik tüketildiğini soran soru kastediliyor) size söyledim ama. Şu beşlik sayı sistemini çözemediğim için burada da hangi basamak olduğunu bilmiyorum. Hani beşin katları olarak yazsalar. Şuna (1204 sayısındaki 4 rakamı gösteriliyor) dört çarpı beş üzeri sıfır, sıfır çarpı beş üzeri bir desem...

G: Sistemi aslında çözsem. Hep onluk sistemi kullandığımız için doğal olarak hep o tarafa kayıyor kafam ama. Yani şurayı, beşe kadar kullanıyorlar ya orayı anlayamadım. Ama bugünkünde yüzler basamağını ifade ediyor.

Katılımcı bu soruda onluk sayı sistemi dışında bir sistem kullanıldığının farkında ama bunu anlamlandıramamaktadır. Sonuç olarak katılımcıda, sağlam bir “taban” ve “oran” kavramı olmadığını ve bu yüzden bu soruları anlamlandırmakta zorlandığını düşünmekteyiz.

4.1.2. İbrahim’in durumu

4.1.2.1 . İbrahim’in “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarına genel bakış açısı

“Kuzeniniz, kardeşiniz veya bir yakınınızın çocuğu sizden basamak ve basamak değeri kavramlarının ne olduğu ile ilgili yardım isteseydi, onlara bu kavramları nasıl açıklardınız?” sorusu için İbrahim aşağıdakilerden bahsetmiştir.

İ: Mesela üç yüz yetmiş beş. Birler basamağı bu (375 sayısındaki 5 gösteriliyor). Onlar basamağı buysa (375 sayısındaki 7 gösteriliyor), yani yanında bir sıfır varmış gibi kabul edeceğiz. Sonra diğer basamağa (375 sayısında 3'ün bulunduğu basamak gösteriliyor) gelince iki sıfır. Bu yüze benziyor, yanında iki tane sayı var. Bunun da yüzler basamağı olacağını söyledim. Böylece basamaklar bitmiş olurdu. Sonra da o sayının basamak değerine göre o değeriyle çarpmasını söyledim.

Katılımcı, “bu yüze benziyor, yanında iki tane sayı var. Bunun da yüzler basamağı olacağını söyledim” diyerek, rakamın sağındaki rakam adedi kadar sıfırın basamağı belirleyeceğinden bahsetmiştir. Ayrıca katılımcı “o sayının basamak değerine göre” demiştir ki, bu da bize katılımcıda “basamak değeri değişebilir”, “basamak değeri görecelidir” fikrinin olduğunu gösterebilir.

İ: Üç yüz yetmiş beş sayısını verirdim ve onun birler basamağındaki sayının basamak değerini bulmasını söyledim. Beş sayısının, sonra birler basamağı olduğu için birle çarpmasını söyledim.

Burada katılımcının “birler basamağındaki sayının” demesi katılımcıda basamak ve konum kavramlarının ilişkili olduğunu gösterebilir. “Birler basamağındaki sayının basamak değeri” şeklinde bir ifade kullanması ise katılımcının basamak değeri kavramının sayıdaki rakamlara ait olduğunun farkında olduğunu gösterebilir.

4.1.2.2 İbrahim’in ondalık sayılardaki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı

İ: Birler basamağı her zaman sağdadır.

A: Peki en sağdaki her zaman birler basamağı mıdır?

İ: Evet

Katılımcı, en sağdaki basamağın her zaman birler basamağı olduğunu söylemektedir. Buna gerekçe olarak söyleyebiliriz ki, katılımcı o an ondalık sayıları aklına getirememiş, sadece doğal sayıları göz önüne alarak cevap vermiş olabilir. Bu ihtimali bir sonraki diyalogda açığa çıkaracağız.

A: Tamam. Şöyle bir sayı (1,253 sayısı yazılır) gelse gözünün önüne, bu sayı nasıl bir sayıdır diye sorsam ben sana.

İ: Nasıl bir sayıdır?

A: Hıhı. Ne anlıyorsun sen bu sayıdan?

İ: Virgüllü bir sayı

A: Virgüllü bir sayı.

İ: Şura (1,253 sayısındaki 2 rakamı gösteriliyor) herhalde onda birler, yüzde birler miydi, öyle bir şeydi herhalde.

A: Tamam. Peki sence bu sayı hangi sisteme ait?

İ: Onluk sistem

A: Onluk sisteme ait. Neden?

İ: Yine burada bir grubu var yani bunun. Yani onda birler diye ayırmışız, yüzde birler diye ayırmışız. Yine bir sistem var, on üzerinden.

Katılımcı 1,253 sayısının onluk sayı sisteminde yer aldığını belirtmektedir. 1,253 sayısının kesirli kısmı için “Yine burada bir grubu var yani bunun” demiştir ki, bu da, bu sayı için katılımcının zihninde bir “sayı grubu” kavramının olduğunu gösterebilir. Ayrıca katılımcı “yine bir sistem var, on üzerinden” diyerek, bu sayının bir sayı üzerinden oluşan bir sisteme ait olduğunu söylemektedir.

A: Peki sence kaç basamaklı bu sayı (1,253 sayısı gösteriliyor)?

İ: Dört basamaklıdır bu sayı

A: Dört basamaklı diyorsun.

0,25 sayısı yazılır

A: Şu sayı (0,25 sayısı gösteriliyor) peki sence kaç basamaklı?

İ: Üç basamaklı

Katılımcı 1,253 sayısı için dört basamaklı, 0,25 sayısı için de üç basamaklıdır demektedir. Bu da bize katılımcının ondalık sayıların kesirli kısmındaki rakamların da birer “konum”a sahip olduğunu düşündüğünü gösterebilir. Sonuç olarak katılımcının bu kısımda sorulan ilk soruya düşünmeden yanıt verdiğini söyleyebiliriz.

4.1.2.3. İbrahim’in onluk sayı sistemi dışında kalan diğer sayı sistemlerindeki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı

Katılımcı Roma sayı sistemini daha önceden duymuş ve sayıların Roma sayı sisteminde nasıl yazıldığı hakkında fikri mevcuttur. Ayrıca katılımcı, Roma sayı sisteminin basamak ve basamak değeri fikriyle oluşmadığını daha önceden belirtmiştir.

A: Peki bana on bir yazabilir misin Roma sayı sisteminde?

İ: On bir yazarım

Katılımcı XI yazar.

A: Dokuz yazabilir misin?

Katılımcı IX yazar.

A: Anlatır mısın bana nasıl yazdığını?

İ: On yazdığımız zaman ikstir on. Onun yanına üçe kadar bir sayı ekleyebiliriz. Üçe kadar yanına yazdığımız sayıları toplayarak buluruz .Eğer iksin soluna da bir sayı yazarsak bunları çıkartırız anlamına gelir.

A: Yani çıkarmalı bir yanı da var değil mi?

İ: Evet, çıkarmalı bir yanı da var.

A Peki, bu açıdan baktığında, çıkarmalı bir yönü olduğu açısından baktığında, basamak değeri fikri var mı?

İ: Basamak değeri fikri yok.

A: Yok diyorsun. Peki basamak değeri fikri olması için sence ne lazımdı?

İ: Basamak değeri fikri olması için ne olabilirdi? Bilemiyorum

A: Yani bizim sayı sistemimizden farkı ne? Biz de basamak değeri var, onlarda yok.

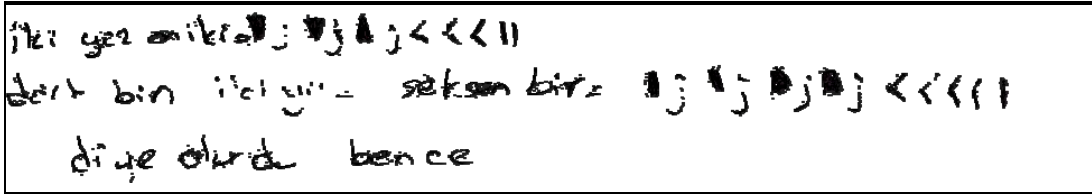
İ: Basamak değeri yok, çünkü bunlar toplanıyor yani.

A: Biz ne yapıyoruz?

İ: Biz direk olduğu gibi okuyoruz. Yani on üçü biz direk böyle okuruz, toplamamıza gerek yoktur. Ama bunu çıkartmamız gerekir veya on biri toplamamız gerekir.

Katılımcı, bir sistemin basamak değeri fikrine dayanması için sayının toplanarak yazılmasına gerek kalmadan direk olduğu gibi okunması gerektiğinden bahsetmiştir.

Katılımcı, 212 ve 4281 sayılarının Babil sayı sistemindeki karşılıklarını aşağıdaki gibi yazmıştır:



Şekil 11- İbrahim'in Babil sayısına verdiği yanıt

İ: Bu ( sembolü kastediliyor) altmış dediğine göre, iki yüz on iki. Ben bunu bölmüşüm ilk önce, yüz seksene tamamlamışım bu altmışlarla. Daha sonra da bu ( sembolü gösteriliyor) onluk demektir herhalde, yüz seksen, yüz doksan, iki yüz, iki yüz on, iki yüz on iki diye tamamlamışım.

Katılımcının iki yüz on iki sayısını yazarken izlediği yol geçerlidir, ancak katılımcı ikinci basamakta bulunması gereken altmışların arasına noktalı virgül yerleştirmiştir. İki basamaklı olması gereken bu sayı, katılımcıya göre dört basamaklıdır.

A: Tamam, dört bin iki yüz seksen biri nasıl yaptın?

İ: Onu da yine altmışar altmışar bölmüşümdür. Bu dörtle iki yüz kırk ediyor. Bunu biraz herhalde az yapmışım.

A: Şurası (I ; I ; I ; I ; CCCC I sayısının sağındaki kısmı gösteriliyor) kaç; en sağdaki?

İ: İşte onlar da (C sembolü kastediliyor) on, o da (I sembolü kastediliyor) bir. İki yüz kırk, iki yüz altmış, iki yüz yetmiş, iki yüz seksen, iki yüz seksen bir. Ben herhalde şu bini yapmamışım, iki yüz seksen bir olarak yapmışım.

A: Peki dört bin olsaydı yine aynı şekilde mi yapardın?

İ: Herhalde altmışlara tamamlardım, sonra da şunlarla (I ve C sembolleri kastediliyor) devam ederdim.

Katılımcı soruda sorulan sayıyı ilk başta 281 olarak algıladığı için bu yanıtı verdiğinden bahsetmiştir. 281 sayısında da 212 sayısında izlediği yolu izlemiş ve bu sayıyı 5 basamaklı olarak yazmıştır. Katılımcı, 4281 sayısı için ise aynı yöntemi kullanacağından, bu sayının içindeki 3600'lerin aranması gerekirken içindeki altmışları arayacağından bahsetmiştir. Yani üç basamaklı olması gereken Babil sayı sistemindeki sayıda, katılımcı ikinci basamaktan üçüncü basamağa geçmesi gerektiğinin farkında değildir.

Katılımcı, Babil sayı sisteminde I I ; CC ; CI sayısının onluk sayı sistemindeki karşılığı olarak 151 yanıtını vermiştir.

İ: Şimdi bunlar (I I ; CCC ; CI sayısının I I kısmı gösteriliyor) altmış altmış olduğu için, ilk önce altmışla altmışı topladım, yüz yirmi. Ondan sonra (I I ; CC ; CI sayısının CC kısmı gösteriliyor) bunlar onluk olduğu için onları da topladım, yirmi daha ekledim. Daha sonra birisi (I I ; CCC ; CI

sayısının 1 kısmındaki 6 gösteriliyor) on, birisi (11;66;61 sayısının 1 kısmındaki 1 gösteriliyor) bir, on bir ekledim buna, yüz elli bir buldum.

Katılımcı üçüncü basamaktaki sayıları 3600 ile çarpması gerekirken, altmışla çarpmıştır. Buradan hareketle şunu söyleyebiliriz ki, katılımcı basamaklardaki sayıların ifade ettikleri miktarların bir sayı ile çarpılacağına farkında ancak, bu sayının ne olacağına farkında değildir.

Sonuç olarak, katılımcının taban olgusunun –basamak değeri fikrine sahip sayı sisteminde ifade edilen sayıların basamaklarının belirledikleri miktarlar arasındaki sabit kat veya oranın- farkında olmadığı düşüncesindeyiz.

Dijital saat sorusunda katılımcı, 10:25:59 gösterimine altı basamaklıdır demiştir ve bu gösterim için aşağıdakilerden bahsetmiştir:

A: Şu sayıyı (10:25:59 gösterimi gösteriliyor) bana çözümler misin?

İ: Neyine göre?

A: Basamaklarına ve basamak değerlerine göre. Hani biz çözümleme yaparken şöyle ok çıkarıp, birler, onlar, yüzler işte çarpıyorduk falan ya. O tarz bir çözümleme.

İ: Şu (10:25:59 gösteriminin 59 kısmındaki 9 gösteriliyor) birlerdir, şu (10:25:59 gösteriminin 59 kısmındaki 5 gösteriliyor) onlardır. Yine tekrar şu (10:25:59 gösteriminin 25 kısmındaki 5 gösteriliyor) birdir, şu (10:25:59 25 kısmındaki 2 gösteriliyor) ondur. Bu da yine (10:25:59 gösteriminin 10 kısmındaki 0 gösteriliyor) birdir, diğeri de (10:25:59 gösteriminin 10 kısmındaki 1 gösteriliyor) ondur diye düşünüyorum.

Katılımcı 10:25:59 gösterimini altı basamaklı olarak, bu gösterimin basamaklarındaki sayıları ise onluk sayı sistemine göre düşünmektedir.

Katılımcı soru D için aşağıdakileri söylemiştir:

İ: Toplarsak yedi yüz on yedi eder.

A: Hıhı

İ: Yedi yok burada.

A: Yedi yok.

İ: Ekleyerek mi yapacağız?

...

İ: Zor bir soruymuş. Yanına toplama işareti koyabilir miyim?

A: Nasıl istersen, hiç sorun değil.

Katılımcı sonuç olarak $\square + \vee \mid \square + \vee$ yazar.

A: Uydu değil mi bu? Basamak değeri var ve her basamakta yalnızca bir sembol var

İ: Bence uydu.

Katılımcı, yediği ifade etmek için 5+2 yazmış ve bu tercihinin soruya uygun bir yanıt olduğunu söylemiştir. Katılımcının altılık sayı sisteminde 4+3 yerine 5+2 yi tercih etmesi katılımcıda sayıları gruplama hissinin olduğunu gösterebilir.

İ: Bu ($\vee$ sayısı gösteriliyor) iki olur, bu da ($\vee \delta$ sayısı gösteriliyor) yirmi olur.

Katılımcı, bu sayıların miktarlarını onluk sayı sistemindeki gibi belirlemiştir. Buradan, katılımcının bu sayı sisteminin farklı bir sayı sistemi olduğunun farkında olmadığını söyleyebiliriz.

Katılımcı soru E için aşağıdakileri belirtmiştir:

İ: Kaç birim elektrik, birim derken?

A: Mesela, watt, kilowatt .

İ: O zaman bin iki yüz dört kilowatt

A: Bin iki yüz dört diyorsun.

İ: Bin iki yüz dört kilowatt elektrik tüketilmiştir.

A: Tamam. Sayaçtaki şu sembol (2 sembolü gösteriliyor) hangi basamakta yer almaktadır? Neden?

İ: Yüzler basamağındadır

A: Yüzler basamağındadır.

İ: Ayırırsak tek tek bunları, yüzler basamağında çıkar.

Katılımcı bu sayı sistemini onluk sayı sistemi gibi düşünüp soruları o şekilde yanıtlamıştır. Dolayısıyla katılımcının, burada farklı bir sayı sisteminin bulunduğu farkında olmadığını, “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarını tam olarak yapılandıramadığını söyleyebiliriz.

4.1.3. Kaan’ın durumu

4.1.3.1 . Kaan’ın “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarına genel bakış açısı

“Kuzeniniz, kardeşiniz veya bir yakınınızın çocuğu sizden basamak ve basamak değeri kavramlarının ne olduğu ile ilgili yardım isteseydi, onlara bu kavramları nasıl açıklardınız?” sorusu için Kaan aşağıdakilerden bahsetmiştir.

K: Mesela bir sayı olsun, şu sayı (987654321 sayısı gösteriliyor). Basamak değerleri böyle on ve onun katları olarak artar. Basamak değeri dendiğinde sayının kendisi sayı değeri denildiğinde ise rakamların toplamı yazılır.

A: Mesela bana bir sayı yazabilir misin? Çok büyük olmasına gerek yok.

Katılımcı 123 sayısını yazar.

A: Bu sayıda basamak değeri nedir, sayı değeri nedir?

K: Basamak değeri yüz yirmi üç, sayı değeri bir artı, iki artı üçten altıdır.

Katılımcıda kavram karmaşası mevcut olduğu düşünülmektedir. Bir yandan “*basamak değerleri böyle on ve onun katları olarak artar*” diyerek bir rakamın konumuna göre basamak değerinin değiştiğinden ve bu basamak değerlerinin bir sayının katı olarak arttığından bahsetmekte, bir yandan da “*basamak değeri dendiğinde sayının kendisi*” diyerek “sayının basamak değerinden” söz etmektedir. Halbuki basamak değeri sayıyı ifade etmede kullanılan rakamlar için söz konusudur.

K: Onluk sayma sistemi ta ilk çağlarda bulunmuş bir şey. Eğer basamak değeri olmasaydı, zaten sayı diye bir şey olmazdı, taa padişahlardan beri var. Askeri eğitimde kullanmışlar.

Katılımcı basamak değeri olmadan sayılardan söz edilemeyeceğini düşünmekte ve bu savını da sayıların tarihine dayandırmaktadır. Üstelik yanlış yapıldığı düşünülen bir tarih sürecinden bahsetmektedir.

4.1.3.2 Kaan’ın ondalık sayılardaki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı

A: Peki sana bir şey daha soracağım. Onluk sayı sisteminde en sağdaki basamak her zaman birler basamağı mıdır?

K: Hayır değil

A: Peki bana örnek verebilir misin?

Katılımcı 0, 5 yazar

A: Bu sayıda en sağdaki basamak birler basamağı değil, öyle mi?

K: Evet

A: Peki bunu nereden anlıyorsun?

K: Çünkü virgülden sonraki kısım on’un eksili üsleri olarak gidiyor.

Katılımcı öncelikle ondalık sayıların onluk sayı sistemiyle ifade edildiğinin farkındadır. Ayrıca, “*virgülden sonraki kısım on’un eksili üsleri olarak gidiyor*”

diyerek, ondalık sayıların kesirli kısmındaki rakamların da birer değere sahip olduğunu ve bu değerlerin, bir sayının eksili kuvvetleri olarak ilerlediğini söylemektedir.

A: Peki sence bu sayı kaç basamaklı?

K: Eksi bir basamaklı

A: Bunu bana nasıl açıklarsın?

K: Çünkü beş çarpı on üzeri eksidir

A: Bu yüzden eksidir bir basamaklı diyorsun yani

K: Evet

Katılımcı 0,5 sayısının beş çarpı on üzeri eksidir bir şekilde gösterilebileceğini söylemekte ve 0,5 sayısını eksidir bir basamaklı olarak nitelemektedir. Yani katılımcıya göre burada, basamak sayısı, tabanın kuvvetidir.

A: Peki ben sana bir sayı yazsam

1,23 sayısı yazılır

A: Sence bu sayı kaç basamaklı?

K: Eksidir dört basamaklı

A: Nasıl?

K: Çünkü bu sayı yüz yirmi üç bölü bindir bu da bir virgül yirmi üç çarpı on üzeri eksidir dört olur. Onun için.

Burada katılımcı 1,23 sayısının “yüz yirmi üç bölü bin” ya da “bir virgül yirmi üç çarpı on üzeri eksidir dört” olarak gösterileceğini düşünmektedir. Eksidir dört basamaklı demesinin nedeni de, on’un kuvvetinin eksidir dört olmasından kaynaklanmaktadır.

Katılımcının küçük sayıları on’un kuvveti biçiminde yazma konusunda sıkıntıları mevcuttur. Ama araştırma problemimiz için önemli olan, katılımcının ondalık sayıların basamak sayısını tabanın kuvveti olarak düşünmesidir. Ayrıca kurduğu cümlelerden basamak değeri fikri ile ilgili hiçbir ipucu vermemektedir.

4.1.3.3. Kaan'ın onluk sayı sistemi dışında kalan diğer sayı sistemlerindeki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı

Katılımcı Roma sayı sistemini daha önceden duymuş ve sayıların Roma sayı sisteminde nasıl yazıldığıyla ilgili fikri mevcuttur.

A: Peki sence Roma sayı sisteminde basamak ve basamak değeri var mı?

K: Evet var.

A: Bunu neye göre söylüyorsun? Mesela bana yüz yirmi üç sayısına karşılık gelen sayıyı yazar mısın?

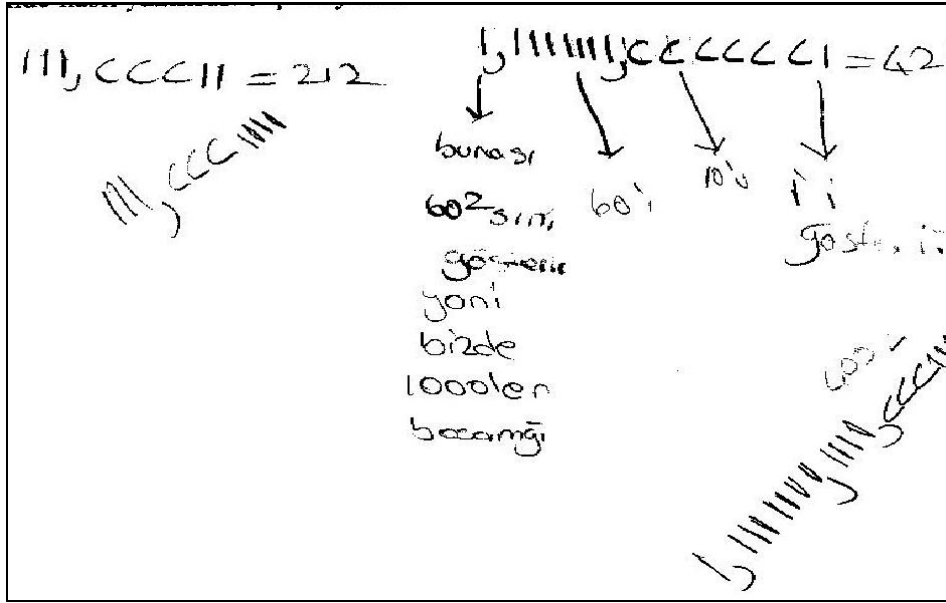
Katılımcı CXXIII yazar.

A: Bunda bir basamak değeri ile ilgili neler var?

K: Şuradaki üç çubuk (CXIII sayısındaki birler kastediliyor) birler basamağı, iksler (X harfi kastediliyor) onlar basamağı, ce de (C harfi kastediliyor) yüzler basamağıdır.

Katılımcı Roma sayı sisteminde basamak değeri fikrinin olduğunu düşünmektedir. CXIII sayısında C sembolünün yüzler basamağını, X sembolünün onlar basamağını, III sembollerinin birler basamağını temsil ettiğini söylemektedir.

Katılımcı, 212 ve 4281 sayılarının Babil sayı sistemindeki karşılıklarını aşağıdaki gibi yazmıştır:



Şekil 12- Kaan'ın Babil sayısına verdiği yanıt

K: Şimdi şunlar ( sayısının solundaki  gösteriliyor) altmış, altmış, altmış yani yüz seksen. Geriye otuz dört kalır. Ben burada yanlış yapmışım.

A: Önemli değil, altına doğrusunu yapabilirsin.

K: Şöyle olacak

Katılımcı sonuç olarak  yazar.

Katılımcının 212 sayısı için daha önceden yazmış olduğu yanıt doğru, sonradan değiştirmiş olduğu yanıt yanlıştır. Ama araştırma problemimize göre bunun önemi yoktur. Sonuçta 212 sayısı için burada izlediği yol geçerlidir.

A: Tamam. Dört bin iki yüz seksen bir sayısını nasıl yazdın peki?

K: Burası ( sayısının en solundaki  gösteriliyor) altmışın karesi. Şuranın her biri de  sayısının orta kısmındaki 7 adet 

sembolü gösteriliyor) altmış. Şurası da (| , | | | | | | | , <<<<<<< |

sayısının en sağındaki <<<<<<< | gösteriliyor) altmış bir

A: Yani üç bin altı yüz, yedi tane altmış ve altmış bir. Toplam kaç ediyor?

K: Bir dakika yanlış olmuş

A: Tamam doğrusunu yaz.

K: Biraz daha altmış gerekli

Katılımcı | , | | | | | | | , | | | | , <<< | | | | | | | | | |
yazar.

A: Bunu nasıl yazdın?

K: Dört tane altmış daha ekledim.

Katılımcı öncelikle 4281 sayısı için üçüncü basamağın yazılması gerektiğinin ve bu basamağın 3600'ü temsil ettiğinin farkındadır. Ayrıca 4281 sayısı için ilk verdiği yanıtın eksik olduğunu bir şeyler daha eklemesi gerektiğini söylemiş ve sayıya dört tane altmış eklemiştir. Ama eklediği altmışları ikinci basamağa değil, ayrı bir basamağa yerleştirmiştir.

Katılımcı, Babil sayı sisteminde | | ; << ; < | sayısının onluk sayı sistemindeki karşılığı olarak 7233 yanıtını vermiştir.

K: Şimdi şurası (| | ; << ; < | sayısının solundaki | |
gösteriliyor) iki tane üç bin altı yüz. Şura (| | ; << ; < | sayısının
ortasındaki << gösteriliyor) yirmi, şurası da (| | ; << ; < | sayısının
sağındaki < | gösteriliyor) on bir, toplam yedi bin iki yüz otuz üç.

Katılımcı üçüncü basamakta ifade edilen miktarı 3600 ile çarpmış, ikinci basamakta ifade edilen miktarı ise 60 ile çarpması gerekirken, 1 ile çarpmıştır. Bir önceki soruda ise ikinci basamakta ifade edilen miktarı 60 ile çarpmıştı. Buna dayanarak, katılımcının bu soruya düşünmeden yanıt verdiğini söyleyebiliriz.

K: Bizde onun üsleri alınıyor, onlarda altmışın. Mesela üç bin altı yüz.

Sonuç olarak katılımcı, Roma sayı sisteminde basamak ve basamak değeri kavramlarının bulunduğunu ifade etmektedir. Katılımcının, Babil sayı sisteminde ise basamakların ifade ettikleri miktarların farkında olduğunu söyleyebiliriz.

Dijital saat sorusunda katılımcı, 10:25:59 gösterimine üç basamaklıdır demiştir ve bu gösterim için aşağıdakilerden bahsetmiştir:

A: Tamam. Şurada üç basamaklı demişsin. Peki senden bu gösterimi çözümlemeni istesem.

K: Neye göre çözümleyeyim? Saate, dakikaya?

A: İstediğini ele alabilirsin..

K: Saate göre çözümlemem on artı sıfır virgül yirmi beş artı sıfır virgül sıfır elli dokuz saat. Dakikaya göre altı yüz dakika artı yirmi beş dakika artı sıfır virgül elli dokuz dakika.

A: Peki saniyeye görse çözümlersen?

K: Altı yüz çarpı altmış ne eder? Üç yüz altmış bin saniye. Yirmi beş çarpı altmış, bin beş yüz saniye artı elli dokuz saniye.

Katılımcı, 10:25:59 gösteriminin farklı birimlere göre çözümlenebileceğini söylemiş ve bu gösterimi sırasıyla saate, dakikaya ve saniyeye göre çözümlenmiştir. Ama katılımcı birim dönüşümlerini yani dakikanın saate ya da saniyenin saate dönüşümünü yaparken on'un kuvvetlerini kullanmıştır.

Katılımcı soru D için aşağıdakileri söylemiştir:

K: Aynı bizdeki gibi. İki yüz on dört ve beş yüz üç.

Katılımcı $214+503=717$ yazar.

K: Toplayınca yedi yüz on yedi ediyor. Aralara virgül koyabilir miyim?

A: İstediğini yapabilirsin.

Katılımcı $\square \vee, |, \square \vee$ yazar.

A: Yani bu yazdığın bizim burada bahsettiğimiz sayı sistemine uydu değil mi?

K: Evet, uydu.

Katılımcı yediyi, 5 ve 2 'yi temsil eden sembolleri yan yana yazarak göstermiş ve bu sayı gösteriminin verilen sayı sistemine uygun olduğunu söylemiştir. Katılımcının altılık sayı sisteminde yediyi ifade etmek için, 4+3 yerine 5+2 yi tercih etmesi, katılımcıda gruplandırma hissinin olduğunu gösterebilir.

K: Şimdi bu sayılar iki ve yirmi. Biri diğerinin on katı

Katılımcı, bu sayıların miktarlarını onluk sayı sistemindeki gibi belirlemiştir. Buradan da katılımcının bu sayı sisteminin farklı bir sayı sistemi olduğunun farkında olmadığını söyleyebiliriz.

Katılımcı soru E için aşağıdakileri belirtmiştir:

K: Şimdi bu bin iki yüz dört. İki, sıfırın yanına on sekiz olarak geçer. Her dokuzda bir artıyor ya. Artık orda sıfır kalır. Bir de yanına dokuz olarak geçer. O dokuz da yanına seksen bir olarak geçer. Yani on sekiz çarpı dokuz artı seksen bir çarpı dokuz artı dört olur.

A: Peki sayaçtaki şu sembol (2 sembolü gösteriliyor) hangi basamaktadır sence?

K: Yüzler basamağında

Katılımcının burada neden böyle bir yanıt verdiğini kestirebilmek çok güç. Bu katılımcının kafasının karışık olduğunu ve bu yönüyle de ilginç bir katılımcı olduğunu düşünmekteyiz.

4.1.4. Cihan'ın durumu

4.1.4.1. Cihan'ın “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarına genel bakış açısı

“Kuzeniniz, kardeşiniz veya bir yakınınızın çocuğu sizden basamak ve basamak değeri kavramlarının ne olduğu ile ilgili yardım isteseydi, onlara bu kavramları nasıl açıklardınız?” sorusu için Cihan aşağıdakilerden bahsetmiştir

C: Önce değişik basamaklı sayılar yazıp, bu basamakların anlamını açıklarım. Bunun için önce bir, yüz, bir milyon sayılarını yazarım. Sıfırların rakamı nasıl değiştirdiğini anlatırım

A: Sıfırların rakamı nasıl değiştirdiği kısmını bana biraz açar mısın? Ne demek istedin?

C: Yani sıfırlar sağa eklenince basamakları nasıl değiştirdiğini açıklamak.

A: Nasıl değiştiriyor peki?

C: Mesela arttırıyor sayıyı.

Katılımcının “*değişik basamaklı sayılar yazıp, bu basamakların anlamını açıklarım*” demesi, bir sayıda birden fazla basamağın olabileceğinin farkında olduğunu göstermektedir. Ayrıca katılımcı sayının sağına sıfır eklenince o sayının değiştiğinden bahsetmektedir. Bu da bize katılımcının, sayının, ifade edilişindeki rakamın konumu ile değiştiğinin farkında olduğunu göstermektedir.

4.1.4.2. Cihan'ın ondalık sayılardaki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı

C: Her zaman en sağdaki basamak birler basamağı değildir.

A: Aksine örnek verebilir misin bana? Hangi durumlarda değil?

C: Ondalık basamaklarda

A: Mesela?

C: Mesela sıfır virgül bir (0,1 sayısı kastediliyor)

A: Sıfır virgöl bir, huh.

C: Sıfır virgöl bir, sıfır virgöl sıfır bir (0,1 ve 0,01 sayıları kastediliyor)

A: Bu sayılar hangi sayı sistemine göre ifade edilmiştir sence?

C: Onluk sayı sistemine göre.

A: Neye göre dedin bunu?

C: Çünkü burada toplamaya dayalı değil. Mesela Roma sayı sisteminde iki tane bu (I sembolü gösteriliyor) yazıldığında iki anlamına gelir, bizde on bir anlamına gelmektedir.

Katılımcı ondalık sayıların onluk sayı sisteminde ifade edilebildiklerini söylemekte ve bunun nedeni olarak da ondalık sayıların toplamaya dayalı olarak yazılmamasını göstermektedir. Başka bir açıdan, katılımcı II sayısının Roma sayı sisteminde ikiyi, onluk sayı sisteminde ise on biri temsil ettiğini, ondalık sayıların Roma sayı sistemindeki gibi toplamaya dayalı olarak yazılmadığını söylemektedir.

A: Peki sence şu sayı (0,01 sayısı gösteriliyor) kaç basamaklıdır?

C: İki basamaklıdır.

A: Şu sayı (0,1 sayısı gösteriliyor) kaç basamaklı?

C: Bu da bir basamaklı ama bu ikisi eksilerde yani, on üzeri eksi bir ve on üzeri eksi iki olmak üzere.

Katılımcı, 0,1 ve 0,01 sayısı için “ikisi eksilerde yani, on üzeri eksi bir ve on üzeri eksi iki olmak üzere” diyerek, ondalık sayıların yazılışında on’un negatif kuvvetlerinin kullanıldığını söylemektedir.

A: Neye göre dedin iki ya da bir basamaklı diye?

C: Yani iki basamaklı sağdan ikili

A: Virgülden sonraki kısmı mı dedin yani?

C: Evet. Burada geriye doğru olduğu için de eksi işareti var.

Katılımcı 0,1 sayısına bir basamaklı, 0,01 sayısına iki basamaklı demiş ve 0,01 sayısı için “*yani iki basamaklı sağdan ikili*” diyerek basamak sayısını kesirli kısımdaki rakam sayısına göre belirlemiştir.

Burada katılımcı “*geriye doğru*” ifadesini kullanmış, bu ifade araştırmacı tarafından “soldan sağa doğru” olarak değerlendirilmiştir. Katılımcı ondalık sayıların kesirli kısımlarında on’un negatif kuvvetlerinin kullanıldığını belirtmiştir.

4.1.4.3. Cihan’ın onluk sayı sistemi dışında kalan diğer sayı sistemlerindeki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı

Katılımcı Roma sayı sistemini daha önceden duymuş ve sayıların Roma sayı sisteminde nasıl yazıldığı hakkında fikri mevcuttur. Ayrıca katılımcı Roma sayı sisteminin basamak ve basamak değeri fikrine dayanmadığını ölçekte daha önceden belirtmiştir.

A: Dokuzu nasıl yazıyorduk hatırlıyor musun?

C: Bu şekilde

Katılımcı IX yazar.

A: On biri?

Katılımcı XI yazar.

A: Aradaki farkları söyler misin bana?

C: Burada koyduğumuz birin yer değiştirmesi sonucunda aradaki fark ortaya çıkar. Roma sayı sistemi toplamaya ya da çıkarmaya dayalı olduğu için, bir sola gelince on eksi bir, dokuz, on artı bir olunca da on bir.

A: Bu açıdan baktığında, yani çıkarmalı kısmından da baktığında, sence basamak değeri var mı?

C: Hayır.

A: Yok. Peki basamak değeri olması için ne lazım?

ortadaki kısmı gösteriliyor) dört yüz yirmi, burası da ( ;        ;  sayısının sağdaki kısmı gösteriliyor) bir.

C: Hıhı.

Katılımcı, 4281 sayısının Babil sayı sistemindeki karşılığını bulurken işlem hatası yapmış olsa da izlediği yol “basamak” ve “basamak değeri” fikrine dayanmaktadır. Katılımcı bu soruyu yaparken, dijital saat sisteminden yararlandığını da söylemiştir.

Katılımcı, Babil sayı sisteminde   ;   ;  sayısının onluk sayı sistemindeki karşılığı olarak 8411 yanıtını vermiştir.

A: Şunu (  ;    sayısının onluk sayı sisteminde hangi sayıya karşılık geldiğini soran soru gösteriliyor) nasıl yaptığını açıklar mısın?

C: Dakikaya dayanarak. Şuradaki iki tane birlik (  ;    sayısının soldaki kısmı gösteriliyor) üç bin altı yüz, üç bin altı yüzle toplanınca yedi bin iki yüz. Şurada iki onluk var (  ;    sayısının ortadaki kısmı gösteriliyor), altmışla yirmiyi çarpınca bin iki yüz, yedi bin iki yüzle toplanıyor. Sonra buradaki (  ;    sayısının sağdaki kısmı gösteriliyor) on bir sayısıyla da toplanınca sekiz bin dört yüz on bir sayısına denk gelir.

Katılımcının, Babil sayı sisteminde basamakları ve basamaklardaki sayıların miktarını belirlerken, işlem hatası dışında önemli bir hatası bulunmamaktadır. Hatta sayıların bu sistemde nasıl yazıldığını, kendi kendine şu şekilde belirlemiştir:

C: Yan yana olanlar kendi aralarında toplanıyor, aralarında virgül olanlar ise altmışlık sistemde basamak değeri oluyor.

Dijital saat sorusunda katılımcı, 10:25:59 gösterimine sürpriz bir şekilde altı basamaklıdır demiştir ve bu gösterim için aşağıdakilerden bahsetmiştir:

A: Peki bunu çözümlemeni istesem ben senin? Nasıl çözümlersin şu gösterimi? On, yirmi beş, elli dokuzu (10:25:59 gösterimi kastediliyor)?

C: On çarpı üç bin altı yüz, yirmi beş çarpı altmış, bir çarpı elli dokuz. Bu şekilde yazılır.

Katılımcı yukarıda da söylediğimiz gibi, 10:25:59 gösterimi için altı basamaklıdır demiş, fakat bu gösterimi üç basamaklıymış gibi çözümleyip, $10.3600+25.60+1.59$ yazmıştır. Bu konuda katılımcıda bir zihinsel veya kavram karmaşası olduğunu söyleyebiliriz.

Katılımcı soru D için aşağıdakileri belirtmiştir:

C: Bu iki sayı toplansaydı, bunun normal işlemini yapmamamız gerekir.

A: Tamam.

C: İki, bir, dört ve beş, sıfır, üç. Toplarsak yedi, bir, yedi

Katılımcı $214+503=717$ yazar.

C: Burada bu basamak sistemine dayandığı için, yediler gösterilemez. Çünkü bize bu, tekabül edilen değerlerde verilmemiş. Ancak biri gösterebilirim. Sonrasında, yedilere karşılık gelmediği için gösterilemez diye düşünüyorum.

Katılımcı, verilen soruda yediye karşılık gelen bir sembol bulunmadığı için sonucun gösterilemeyeceğini düşünmektedir. Yediyi verilen sistemde yazamayışı, katılımcıda, sayıları grupta veya farklı tabanlarda sayıların ifadesiyle ilgili eksiklikleri olduğunu gösterebilir.

A: Şöyle iki sayımız ($\bigvee$ ile $\bigvee \delta$ sayıları gösteriliyor) var. Şu sembolün ($\bigvee$ sembolü gösteriliyor) bu iki sayıda ifade ettiği miktarlar sence nasıldır?

C: Birincisinde sadece ikiyi gösterir, öbüründe yirmiye göstermektedir.

Katılımcı, bu sayıların miktarlarını onluk sayı sistemindeki gibi ifade etmiştir. Buradan da katılımcının bu sayı sisteminin farklı bir sayı sistemi olduğunun farkında olmadığını söyleyebiliriz.

Katılımcı soru E için aşağıdakileri belirtmiştir:

C: Bugünkü sisteme göre burada yazdığı gibi bin iki yüz dört birim elektrik tüketilmiştir.

A: Tamam. Peki sayaçtaki şu sembol (2 sembolü gösteriliyor) hangi basamakta yer almaktadır?

C: Yüzler basamağındadır. Çünkü iki, iki yüzü temsil etmektedir.

Katılımcı bu sayı sistemini onluk sayı sistemi gibi düşünüp soruları o şekilde yanıtlamıştır. Katılımcı, burada farklı bir sayı sistemi bulunduğunun farkında değildir. Sonuç olarak katılımcının, farklı bir sayı sistemi ile karşılaşınca, onu anlamlandırabiliyorsa yani günlük hayatıyla ilişkilendirebiliyorsa, sorulara geçerli yanıtlar verebilmekte, aksi takdirde farklı bir sayı sisteminin söz konusu olduğunu fark edememekte olduğunu söyleyebiliriz.

4.1.5. Berk'in durumu

4.1.5.1. Berk'in “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarına genel bakış açısı

“Kuzeniniz, kardeşiniz veya bir yakınınızın çocuğu sizden basamak ve basamak değeri kavramlarının ne olduğu ile ilgili yardım isteseydi, onlara bu kavramları nasıl açıklardınız?” sorusu için Cihan aşağıdakilerden bahsetmiştir.

A: Bir sayının sahip olduğu değerdir demişsin basamağa. Mesela herhangi bir sayı yazar mısın bana?

Katılımcı tarafından 347 sayısı yazılır

A: Burada basamak nedir desem ben sana, sen de yaptığın tanıma göre bir cevap verebilir misin?

B: Basamak yedi, kırk ve üç yüz. Onluk sayma sisteminde bu sayıların, nasıl desem.

Katılımcı, 347 sayısında basamak için “yedi, kırk ve üç yüz” den bahsetmiş, yani basamağı, ifade ettiği miktar ile özdeşleştirmiştir. Buradan da katılımcıda basamak ile basamak değeri kavramlarının karışmış durumda olduğunu söyleyebiliriz.

B: Basamak değeri yani yedi artı kırk artı üç yüz.

Katılımcı, 347 sayısında basamak değeri için ise “yedi artı kırk artı üç yüz” den bahsetmiştir. Buradan da katılımcıda basamak değeri ile çözümleme kavramlarının karışmış durumda olduğunu söyleyebiliriz.

Katılımcı “basamak” ile “basamak değeri” fikirlerine ek olarak beşlik sayı sisteminden bahsetmiş ve bu sistem ile ilgili aşağıdakileri belirtmiştir:

A: Şurada beşlik sayı sisteminden bahsetmişsin ya. Onu anlamadım ben neyi kastettiğini. Beşlik sayı sistemi hakkında ne biliyorsun? Nedir yani bu sistem? Basamak değeri var mıdır bu sistemde mesela?

B: Burada yedi on üzeri sıfır, daha sonra on üzeri bir, on üzeri iki. Beşlik sayı sisteminde beş üzeri sıfır, beş üzeri bir, beş üzeri iki.

A: Peki basamak değeri var mıdır beşlik sayı sisteminde sence?

B: Beşlik sayma sisteminde basamak değeri var mıdır?

A: Hıhı

B: Yok gibi.

Katılımcı beşlik sayı sisteminde basamakların beş üzeri sıfır, beş üzeri bir, beş üzeri iki diye gittiğini bilmekte ama bu sayı sisteminde basamak değeri

olmadığını söylemektedir. Halbuki katılımcının beşlik sayı sistemi için kurduğu cümlelerde “basamak” ve “basamak değeri” fikirlerinin varlığı hissedilebilmektedir. Kısacası, katılımcı bahsettiği düşüncelerde bilinçli görünmemektedir.

4.1.5.2. Berk’in ondalık sayılardaki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı

A: Peki şeyi soracaktım sana. Onluk sayı sisteminde her zaman en sağdaki basamak birler basamağı mıdır?

B: Evet

Katılımcı, en sağdaki basamağın her zaman birler basamağı olduğunu söylemektedir. Buna gerekçe olarak söyleyebiliriz ki, katılımcı o an ondalık sayıları aklına getirememiş, sadece doğal sayıları göz önüne alarak cevap vermiş olabilir. Bu ihtimali bir sonraki diyalogda açığa çıkaracağız.

A: Şöyle bir sayı yazsam sana (1,256 yazılır), ne dersin bunla ilgili?

B: Bir virgül, bir tam binde iki yüz elli altı

A: Tamam. Bu sayı hangi sayı sisteminde ifade edilmektedir sence?

B: Onluk

A: Onluk sayı sisteminde ifade ediliyor diyorsun. Neden?

B: Şey, virgüllü olunca on üzeri eksi bir diye gidiyor.

Katılımcı, 1,256 sayısının onluk sayı sisteminde ifade edilmekte olduğunu düşünmektedir. 1,256 sayısının virgüllü olduğundan ve dolayısıyla da “on üzeri eksi bir” diye gittiğinden bahsetmektedir.

A: Peki, kaç basamaklı bu sayı sence?

B: Kaç basamaklı?

A: Evet

B: Dört basamaklı

A: Dört basamaklı diyorsun. Şu (0,25 sayısı yazılır) kaç basamaklı peki?

B: İki

A: İki. Buna niye iki basamaklı dedin?

B: Çünkü sıfır var.

Katılımcı 1,256 sayısını dört basamaklı, 0,25 sayısını iki basamaklı olarak düşünmekte, 0,25 sayısını iki basamaklı olarak düşünmesinin nedeni olarak da 0,25 sayısının içinde sıfırın bulunmasını göstermektedir. Katılımcıda, kesirli kısımdaki rakamlara dair “konum” olgusunun mevcut olduğunu söyleyebiliriz. Fakat katılımcı, işin içine sıfır rakamı girdiğinde, sıfırın “basamak tutucu”luğu görevini göz ardı etmektedir. Sonuç olarak katılımcının basamak ve sıfır kavramı ile ilgili tam bir kavrayışa sahip olmadığını söyleyebiliriz.

4.1.5.3. Berk’in onluk sayı sistemi dışında kalan diğer sayı sistemlerindeki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı

Katılımcı Roma sayı sistemini daha önceden duymuş ve sayıların Roma sayı sisteminde nasıl yazıldığı hakkında fikri mevcuttur.

A: Demişsin ki bizim kullandığımız sayı sisteminde basamak ve basamak değeri vardır, Roma rakamlarında sayı değerleri toplanır. Peki, Roma rakamlarında basamak ve basamak değeri var mıdır? Onu sorayım.

B: Yok.

A: Bana dördü yazabilir misin?

Katılımcı IV yazar.

A: Peki niye bu tarafa yazdın?

B: Bu tarafa yazınca çıkartılıyor (V işaretinin sol tarafı gösteriliyor) bu tarafa yazınca (V işaretinin sağ tarafı gösteriliyor) toplanıyor.

A: Peki bu açıdan baktığında sence basamak değeri var mı?

B: Yok.

A: Bu açıdan da baktığında yok diyorsun. Basamak ve basamak değeri olması için ne lazım peki bir sistemde?

B: Hiçbir fikrim yok

A: Hiçbir fikrin yok. Kendi sistemimizi düşünebilirsin. Basamak ve basamak değeri ile ilgili ne gibi özellikler var kendi sistemimizde hiç düşündün mü?

Katılımcı başıyla hayır işareti yaptı

A: Peki şimdi düşünsen bana cevap verebilir misin?

B: Bunun basamak değeri olması için ne olması lazım?

A: Özellikler ne yani basamak ve basamak değeri olması için bir sistemin ne gibi özellikleri olması lazım?

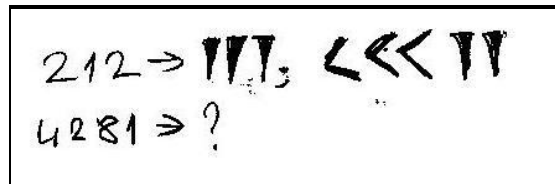
B: Bir şeyler aklıma geliyor da nasıl anlatacağımı bilmiyorum.

A: Yazarak anlatabilirsin, örnek vererek anlatabilirsin. Yani düşüncelerini olduğu gibi söyle bana hiç sorun değil.

B: Mesela on ikide biz bunu böyle yazmıyoruz (XI yazılıyor). Bu on iki yerine önce onu kullanıyoruz (X yazılıyor), yanına da birleri koyuyoruz.

Katılımcı bir yandan Roma sayı sisteminde basamak değeri kavramının bulunmadığından bahsetmekte, diğer yandan bir sayı sisteminde basamak ve basamak değeri fikirlerinin bulunması için neler gerektiğine dair ipucu vermemektedir. Bu nedenle de bu diyaloga bakıldığında katılımcının basamak ve basamak değeri fikri ile ilgili kavrayışı hakkında bir şeyler söylemek zordur.

Katılımcı, 212 ve 4281 sayılarının Babil sayı sistemindeki karşılıklarını aşağıdaki gibi yazmıştır:



Şekil 14- Berk'in Babil sayısına verdiği yanıt

B: Ben şöyle yaptım. Altmış, altmış, altmış, yüz seksen dedim, buraya gelince de ( sayısında noktalı virgölün sağ tarafı gösteriliyor) gerisini yazdım.

A: Peki dört bin iki yüz seksen bire niye soru işareti koydun? Hatırlıyor musun?

B: Yetmiş tane bundan mı ( işareti gösteriliyor) koyacağız yani?

A: Ne yapmak istiyorsan öyle. Yetmiş tane şundan mı ( işareti gösteriliyor) koyman lazımdı o zaman?

B: Hıhı.

A: Bana gösterebilir misin? Önemli değil yetmiş tane çizmene gerek yok. Bana bir yap dört bin iki yüz seksen biri. Nasıl gösterirdin?

B: Şey ben çözemem

A: Bana biraz önce, yetmiş tane şu sembolden ( işareti gösteriliyor) dedin ya. Bana bir açıklar mısın nasıl düşündüğünü?

B: Şey, yetmiş bir altmışlık yapmalıyım, yani yirmi bir kalır.

A: Yetmiş tane hangi sembolden dedin?

B: Şundan ( işareti gösteriliyor)

A: Yetmiş tane bundan ( işareti gösteriliyor) yazdık, sonra ne yazacağız?

B: Yetmiş bir tane olsa o zaman yirmi bir kalıyor.

A: Tamam yetmiş bir tane bundan olsun ( işareti gösteriliyor), sonra ne yapardın?

B: İki tane bundan ( işareti gösteriliyor) koyardım.

A: Tamam. Aralarında bir şey var mı, işaret falan? Bana olduğu gibi yaz.

Katılımcı sonuç olarak  yazar

A: Burası ( sayısında noktalı virgölün sağ tarafı gösteriliyor) kaç oldu şimdi?

B: Yirmi bir

A: Yirmi bir, yetmiş bir tane de bu ( işareti gösteriliyor) diyorsun. Niye böyle düşündüğünü açıklar mısın?

B: Ona en yakın altmışın katını aldık.

A: Yetmiş bir tane olduğuna karar verdin, geriye de yirmi birin kaldığını düşündün? Öyle mi?

B: Hıhı.

Katılımcı, 4281 sayısının Babil sayı sistemindeki karşılığını bulmak için işe 4281 de kaç tane altmış olduğunu bulmakla başlamış, sonuç olarak da 71 tane bulmuştur. 71, $60+11$ olarak ele alındığında, katılımcı, 71.60 yerine $60.60+11.60$ parçalanmasını düşünüp, 3600'ü ifade eden bir basamak olması gerektiğini belirtmeliydi. Kısacası Babil sayı sistemindeki sayının üç basamaklı olması gerekirken, katılımcı ikinci basamaktan üçüncü basamağa geçmesi gerektiğinin farkında değildir.

Katılımcı, Babil sayı sisteminde   ;   ;   sayısının onluk sayı sistemindeki karşılığı için aşağıdakilerden bahsetmiştir:

A: Şuna (  ;   ;   sayısında en soldaki kısım gösteriliyor) iki demişsin, şuna (  ;   ;   sayısında ortadaki kısım gösteriliyor) yirmi demişsin, şuna da (  ;   ;   sayısında en sağdaki kısım gösteriliyor) on bir demişsin. Bunda hemfikirsin değil mi?

Katılımcı başıyla evet işareti yaptı.

A: Peki, bu sayı nedir diye sana sorsam

B: Ha bu şey, tam normal bir sayı mı?

A: Hıhı, evet.

B: İki tane noktalı virgülle ne yapacağız, onu anlayamadım?

A: Sen ne düşünüyorsun?

B: Bir şey düşünemiyorum. Siz açıklayabilir misiniz?

A: Benim açıklamam önemli değil, senin düşüncelerin önemli.

B: Bir şey düşünemiyorum.

A: Yani, şu bir sayı ( sayısı gösteriliyor), bizim günümüzde kullandığımız hangi sayıya karşılık geliyor acaba? Hani mesela dört bin iki yüz seksen biri bu şekilde (Katılımcının dört bin iki yüz seksen bir sayısını Babil sayı sisteminde yazdığı gösterim gösteriliyor) yazdın ya, biz de tam tersini istiyoruz.

Böyle bir sayı ( sayısı gösteriliyor) veriyoruz sana, bizim sayı sisteminde yazmanı istiyoruz.

B: Böyle gelince ( sayısında ikinci basamak gösteriliyor) altmışa kadar, böyle gelince...

A: İki tane noktalı virgöl olduğu için mi takıldın?

B: Evet.

A: Biraz önce öyle demiştin çünkü. Peki, şöyle olsaydı ( sayısı gösteriliyor)?

B: O zaman o başka, altmışları gösterir. Altmışın karesini mi gösteriyor?

A: Bilmiyorum ki. Bana sorma, sen söyle. Sen düşün. Doğru ya da yanlış cevabı yok bunun tamam mı, sen ne düşünüyorsan onu söyle.

B: Şu ( sembolü gösteriliyor) altmışı ifade ediyor da, şu ( sembolü gösteriliyor) neyi ifade ediyor?

...

A: Tamam, istersen geçelim. Var mı söylemek istediğin bir şey?

Katılımcı başıyla hayır işareti yaptı.

Katılımcı, sorulan sayıyı ilk başta bir bütün olarak algılayamamış, yanıtını da ona göre vermiştir. Sayının bir bütün olarak algılanmasının gerekliliğini fark ettikten sonra, sayıda iki tane noktalı virgöl bulunmasını anlamlandıramamıştır. Araştırmacı soruya farklı bir açıdan yaklaşmayı denemiş ve katılımcıya sayıda bir tane noktalı virgöl olsaydı ne yapacağını sormuştur. Daha sonra katılımcı “*altmışın karesini mi gösteriyor?*” diyerek, bize zihnindeki “basamak değeri” kavramı hakkında ipucu vermiştir. Ayrıca katılımcı ikinci basamakta,  sembolü olsaydı altmışı

göstereceğini,  sembolünün ise neyi göstereceğini anlamlandıramadığını belirtmiştir.

Sonuç olarak, katılımcının üçüncü basamağın altmışın karesini gösterdiği hissine sahip olduğu ama bunu söylerken emin olmadığı gözlemlenmiştir. Ayrıca katılımcının ikinci basamakta  sembolünün “1.60” ı temsil ettiğinin farkında olmadığını söyleyebiliriz. Bir ihtimal de, kullanılan semboller katılımcının kafasını karıştırmış olabilir.

Katılımcı Babil sayı sistemi hakkındaki görüşlerine ek olarak aşağıdakileri belirtmiştir:

B: Noktalı virgülden önce katı alınıyor, noktalı virgülden sonra basamak değerli.

A: Noktalı virgülden önce dediğin noktalı virgülün sağ tarafı mı oluyor?

B: Hıhı

A: Ne dedin burada?

B: Basamak değeri yok

A: Peki şurada?(Noktalı virgülün sol kısmı gösteriliyor)

B: Bu kez altmışın katı alınıyor.

A: Noktalı virgülden önce basamak değeri yok dedin, noktalı virgülden sonra?

B: Oraya gelince basamak değeri oluşuyor.

Katılımcı Babil sayı sistemindeki sayılarda, en sağdaki basamak için basamak değeri bulunmadığından, soldaki basamaklar için ise basamak değerinin bulunduğu söz etmektedir. Buradan da, katılımcının sağdaki basamağın 60⁰’ı temsil ettiğinin farkında olmadığını söyleyebiliriz. Basamakları noktalı virgülle ayırmanın katılımcıya aşina gelmediğini ve bunun kafa karışıklığına neden olabileceğini de belirtmekte fayda vardır.

Dijital saat sorusunda katılımcı, 10:25:59 gösterimine altı basamaklıdır demiştir ve bu gösterim için aşağıdakilerden bahsetmiştir:

A: Tamam.Bu gösterim altı basamaklıdır demişsin.

B: On diye birler basamağı olmaz diye düşündüm.

A: On diye birler basamağı olmaz ya da yirmi beş diye başka bir basamak olmaz?

B: Evet

A: Peki bunu bana çözümleyebilir misin?

B: Neyi?

A: On, yirmi beş, elli dokuzu (10:25:59 gösterimi kastediliyor)

B: Dokuz çarpı on üzeri sıfır artı...Burada ama her olduğunda değil elli dokuz olduğunda bir artıyor, yani bu dakikalar, elli dokuz çarpı kaç dakika olduğunu gösteriyor.

A: Çözümlmek istesek nasıl çözümleriz?

B: Bu (10:25:59 gösteriminin en solundaki 9 gösteriliyor) her dokuz olduğunda bir artıyor, dokuz çarpı on üzeri sıfır. Bu (10:25:59 gösteriminin 59 kısmındaki 5 gösteriliyor) her beş olduğunda, altıya çıkmıyor.

A: Dokuz çarpı on üzeri sıfır artı? Ne gelecek? Devam ettirebilir misin?

...

A: Tamam bu kalsın, şeyi yapabilir misin? Mesela üç yüz kırk yediyi adlandırıyorduk ya birler, onlar, yüzler diye.Bu gösterimi adlandırmak istesek? Ne deriz bunların adlarına?

B: Şu birler (10:25:59 gösteriminin 59 kısmındaki 9 gösteriliyor)

A: Şurası (10:25:59 gösteriminin 59 kısmındaki 5 gösteriliyor)?

B: Beşler basamağı desem?

A: Tamam de, beşler. Şurası (10:25:59 gösteriminin 25 kısmındaki 5 gösteriliyor)?

B: Gittikçe saçmalaşıyor

A: Önemli değil, söyle

B: Bu da her on olunca...Hiçbir fikrim yok

Katılımcı, basamaklarda birden fazla sembolün bulunmayacağını düşündüğünden, 10:25:59 gösterimine altı basamaklı dediğini belirtmiştir. Ayrıca katılımcı, 10:25:59 gösterimindeki 59 ‘un basamaklarını adlandırırken; 9 için birler basamağı, 5 için ise beşler basamağı demiştir. 5 için beşler basamağı demesinin nedeni olarak da katılımcının, o basamağın 6’ya çıkamadığını düşünmesi olduğunu söyleyebiliriz.

Katılımcı soru D için aşağıdakileri söylemiştir.

B: Beşin yanına iki tane çizgi koyardık

Katılımcı $503+214=717$ yazar.

B: Bir olunca bir kenarı var, iki olunca iki kenarı var.

A: Sonuç ne bana bir yazar mısın, bununla bunu topla ve bu sembollerle göster bana.

B: Saçmalayabilirim

A: Hiç önemli değil. İstedğin kadar saçmalayabilirsin.

B: Ama basamak değeri olunca bayağı bir fazla oluyor. Şöyle desem

Katılımcı sonuç olarak $\square \mid \mid \mid \square \mid \mid$ yazar.

A: Tamam, nasıl yaptın bir bakayım. Çevirdin kendi sistemimize. Şu

($\surd \mid \square$ sayısı gösteriliyor) beş yüz üç dedin, şu ($\square \delta \square$ sayısı gösteriliyor)

iki yüz on dört dedin. Sonuç yedi yüz on yedi. Sonra bu sayıyı, bu sistemdeki bir sayıya mı çevirmeye çalıştın?

B: Evet

A: Nasıl oluyor? Şurası mı ($\square \mid \mid \mid \square \mid \mid$ sayısının $\square \mid \mid$ kısmı gösteriliyor) yedi oluyor?

Katılımcı başıyla evet işareti yaptı.

A: Burası yedi dedin. Sonra? Bunu açıklayabilir misin bana, anlayamadım ben.

...

A: Anlatır mısın bana?

B: Anlatamam.

A: Niye?

B: Doğru değil çünkü

A: Ama yaptın bir şeyler. Ben sana doğru cevabı sormuyorum, ben sana bunu nasıl yazdığını soruyorum.

B: Şuraya ( || gösteriliyor) yedi dedim, ondan sonra yanına bir daha koydum, ama olmaz bu yani sekiz gibi bir şey olur.

A: Olmaz diyorsun. Peki başka bir alternatif düşünebiliyor musun?

Katılımcı başıyla hayır işareti yaptı.

Katılımcı, yediği gösterebilmek için 5 ve 2 sembollerini yana yana koymuştur. Bununla birlikte, 717 sayısını yazarken 7 nin yanına 1 sembolünü yerleştirince 5, 2 ve 1 sembollerinin sekiz edeceğini ve bunun yanlış bir fikir olduğunu belirtmiştir. Kısacası, katılımcı yediği basamak değeri kavramıyla değil de toplamıyla ifade ettiğinden, katılımcıda sayıları gruplandırma konusunda bir eksiklik olduğunu söyleyebiliriz.

A: Tamam böyle diyorsun. Peki şuna bakalım. İki sayı var elimizde ( ve  sayıları gösteriliyor). Bu sembolün ( sembolü gösteriliyor) bu iki sayıda ifade ettiği miktarları karşılaştırınız.

B: Basamak değeri varmış. Bu ( sayısı gösteriliyor) ikiyi ifade ederken bu ( sayısı gösteriliyor) yirmiyi ifade eder.

Katılımcı, bu sayıların miktarlarını onluk sayı sistemindeki gibi belirlemiştir. Buradan da katılımcının bu sayı sisteminin farklı bir sayı sistemi olduğunun farkında olmadığını söyleyebiliriz.

Katılımcı soru E için aşağıdakileri belirtmiştir:

Katılımcı kutucukların içine soldan sağa sırasıyla 1204 yazar.

B: Bu (1204 teki en sağdaki kutucuk gösteriliyor) beşe kadar gidince, bu dört oluyor, sıfırlanıyor, bir oluyor. Kaç birim elektrik tüketilmiştir?

A: Evet.

B: Beşlik sayma sistemi var o zaman.

A: Tamam.

B: Altı yüz iki diyeceğim.

A: Altı yüz iki diyeceksin, nasıl dedin? Yazabiliriz istersen. Neye göre altı yüz iki dedin

B: Yanlış yani

A: Önemli değil yanlış olması. Hiç önemli değil

B: Onluk sayma sisteminde bin iki yüz dört, beşlik sayma sisteminde altı yüz iki.

A: Onluk sayma sisteminde bin iki yüz dört, beşlik sayma sisteminde, ikiye böldün galiba değil mi, altı yüz iki.

Katılımcı başıyla evet işareti yaptı.

A: Tamam. Sayaçtaki şu sembol (1204 sayısındaki 2 sembolü gösteriliyor) sence hangi basamakta yer almaktadır?

B: Hangi basamakta?

A: Hıhı

B: Bir şey düşünebilir miyim bu soruda?

A: Tabi ki

B: Yirmi beşler basamağı

A: Yirmi beşler basamağı

B: Bir şey daha düşüneceğim

A: Tabi, hıhı.

B: Beşlik sayı sisteminde beşin katları alınır. Bu (1204 sayısındaki 4 gösteriliyor) beş üzeri sıfır, bu (1204 sayısındaki 0 gösteriliyor) sıfır zaten. Bu (1204 sayısındaki 2 gösteriliyor) iki çarpı beş üzeri iki, şu da (1204 sayısındaki 1 gösteriliyor) bir çarpı beş üzeri üçtür.

A: Diye düşündün. Yani soru ne oldu?

B: Yüz yetmiş dokuz

A: Yüz yetmiş dokuz diye değiştirdin mi ne oldu?

B: Evet.

Katılımcı verilen sayma sisteminin beşlik sayı sistemi olduğunu söylemiş ve onluk sayı sisteminde 1204 birim elektriğin beşlik sayı sisteminde 602 olacağını belirtmiştir. Daha sonra da bu yanıtını, geçerli yanıt sayılabilecek 179 diye değiştirmiş ve 1204'teki 2 sembolünün yirmi beşler basamağında olacağını açıklamıştır. Kısacası katılımcının, beşlik sayı sisteminde basamakların nasıl ilerlediği hakkında fikri olmasına rağmen, farklı sayı sistemlerinin tabanının sembol sayısına göre belirleneceğinin farkında olmadığı söylenebilir.

4.1.6. Selçuk'un durumu

4.1.6.1. Selçuk'un “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarına genel bakış açısı

“Kuzeniniz, kardeşiniz veya bir yakınınızın çocuğu sizden basamak ve basamak değeri kavramlarının ne olduğu ile ilgili yardım isteseydi, onlara bu kavramları nasıl açıklardınız?” sorusu için Selçuk aşağıdakilerden bahsetmiştir.

S: Şimdi şurada (Katılımcının daha önceden yazmış olduğu 408 sayısının basamaklarına ayrılmış hali gösteriliyor) –ler basamağı sözcüğünü çıkarırız. Bu sayıyla (408 sayısındaki 8 gösteriliyor) çarptığımızda 8 ile diyelim, bir kalıyor burada. Bu sayıyla çarptığımızda basamak değerini buluyoruz. Diyelim burada sıfır. Yine çıkardık on kalıyor (408 sayısındaki 0 gösteriliyor). Sıfır kere on sıfır bu da sıfırın basamak değeri sıfır. Dört, -ler basamağını çıkarız yüz kalıyor (408 sayısındaki 4 gösteriliyor). Dört kere yüz de dört yüz. Dört yüz de basamak değeri. Bunların toplamı da sayıyı veriyor. Basamak değerlerinin toplamı.

Katılımcı, birler basamağı, onlar basamağı gibi basamağın ismi olarak ifade ettiği kelimelerden “ -ler” kısmını çıkarıp; o basamakta bulunan miktarla çarpıldığında basamak değerinin bulunacağından bahsetmektedir. Buradan, katılımcıda basamak ile yer; basamak değeri ile çarpım sonucunun ilişkili olduğu söylenebilir. Ayrıca katılımcı, basamak değerleri toplamının sayının miktarını verdiğinin farkındadır.

Katılımcı “basamak” ile “basamak değeri” fikirlerine ek olarak beşlik sayı sisteminden bahsetmiş ve bu sistem ile ilgili aşağıdakileri belirtmiştir:

A: Tamam. Şurada bir de beşlik sayı sistemi hakkında biraz bilgi verebilir misin bize?

S: Dedim ki dört yüz otuz iki, beş ($(432)_5$ kastediliyor). Bu sayıların üzerine sırasıyla sıfır, bir, iki yazıyoruz. Bu sayı, iki çarpı on üzeri, pardon beş üzeri sıfır artı üç çarpı beş üzeri bir artı iki çarpı yoo pardon dört çarpı beş üzeri iki. Buradan da sonuç iki artı on beş artı yüz çıkıyor, buradan da yüz on yedi çıkıyor.

A: Bu şekilde söyledin beşlik sayı sistemi. Beşlik sayı sisteminin peki ne gibi özellikler var?

S: Sayılar yani, bir, beş, yirmi beş, yüz yirmi beş diye gidiyor. Katları

A: Peki basamak değeri var mı bu sayı sisteminde?

S: Var. Biz nasıl onlar basamağı diyoruz, onlarda beşler basamağı, yirmi beşler basamağı gibi.

Katılımcı, beşlik sayı sistemindeki bir sayının onluk sayı sistemindeki karşılığının nasıl bulunacağını, basamaklarının nasıl adlandırılacağı ve bu sayı sisteminde basamak değeri kavramının bulunduğunun farkındadır.

4.1.6.2. Selçuk'un ondalık sayılardaki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı

A: Şunu soruyorum sana: En sağdaki basamak her zaman birler basamağı mıdır?

S: Evet birler basamağıdır.

Katılımcı, en sağdaki basamağın her zaman birler basamağı olduğunu söylemektedir. Buna gerekçe olarak söyleyebiliriz ki, katılımcı o an ondalık sayıları aklına getirememiş, sadece doğal sayıları göz önüne alarak cevap vermiş olabilir. Bu ihtimali bir sonraki diyalogda açığa çıkaracağız.

A: Şöyle bir sayı yazdığımızda (Katılımcı tarafından daha önceden yazılmış olan 165,23 sayısı gösteriliyor) bu hangi sayı sistemine aittir?

S: Onluk sayı sistemi

A. Onluk sayı sistemine aittir. Kaç basamaklıdır peki?

S: Sonuçta bunlar da bir basamak (165,23 sayısının kesirli kısmı gösteriliyor). Onda birler, yüzde birler. Bu yüzden beş bas...Tam kısmı üç basamaklı, ondalık kısmı iki basamaklı, toplamda beş basamaklı.

Katılımcı, 165,23 sayısının onluk sayı sisteminde yer aldığını ve beş basamaklı olduğunu söylemektedir. Bu da bize katılımcının ondalık sayıların kesirli kısmındaki rakamların da birer “konum” a sahip olduğunu düşündüğünü gösterebilir. Sonuç olarak katılımcının bu kısımda sorulan ilk soruya düşünmeden yanıt verdiğini söyleyebiliriz.

4.1.6.3. Selçuk'un onluk sayı sistemi dışında kalan diğer sayı sistemlerindeki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı

Katılımcı Roma sayı sistemini daha önceden duymuş ve sayıların Roma sayı sisteminde nasıl yazıldığı hakkında fikri mevcuttur. Ayrıca katılımcı Roma sayı

sisteminin basamak ve basamak değeri fikriyle oluşmadığını ölçekte daha önceden belirtmiştir.

A: Tamam. Roma sayı sisteminde bir tane şöyle bir örnek versem sana, dokuz (Roma sayı sisteminde dokuz sayısı araştırmacı tarafından yazıldı). Bu açıdan baktığında, normalde Roma sayı sistemine basamak değersiz dedin. Bu açıdan baktığında basamak değeri var mı?

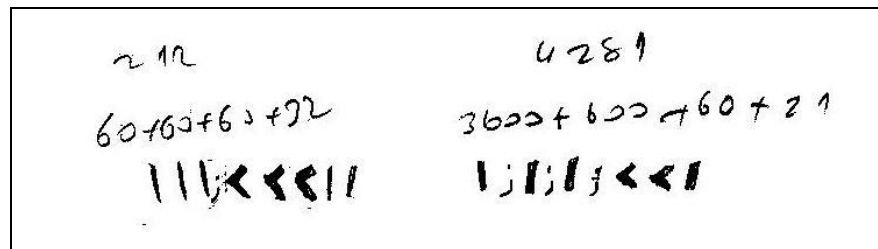
Katılımcı, başıyla hayır işareti yaptı

A: Yok?

S: Çünkü buraya bir şey eklediğimizde (Roma rakamlarıyla dokuzun yani IX in sağ tarafı gösteriliyor), onun hakkında bir şey diyemeyiz. Çünkü buna birler onlar dedik (IX' in sembollerinin altına sağdan sola sırasıyla onlar, birler yazıldı) buraya bir şey ekledik (IX' in sağ tarafı gösteriliyor) oraya da yani bir şey diyemeyiz.

Katılımcı, Roma sayı sisteminde eğer basamak değeri olsaydı ve yazılan bir sayıda basamaklar adlandırılısaydı, sayının sağına başka bir sembol eklendiğinde bu sembole bir ad verilemeyeceğini söylemiştir. Burada katılımcının ondalık sayıların Roma sayı sisteminde yazılamayacağı için bu sistemde basamak değeri olmadığını düşündüğünü söyleyebiliriz.

Katılımcı, 212 ve 4281 sayılarının Babil sayı sistemindeki karşılıklarını aşağıdaki gibi yazmıştır:



Şekil 15- Selçuk'un Babil sayısına verdiği yanıt

A: Tamam. Babilliler' de bu şekilde. Şu sayıyı (212 sayısı gösteriliyor) şu şekilde (Katılımcının yazmış olduğu  sayısı gösteriliyor) yazmışsın. Altmış, altmış, altmış, otuz iki. Şurayı da (Katılımcının 4281 sayısını Babil sayı sistemine çevirdiği,  gösterimi gösteriliyor) üç bin altı yüz, altı yüz, altmış ve yirmi bir. Buraya eklemek istediğin ya da değiştirmek istediğin bir şey var mı?

S: Bakayım, yok.

Katılımcı, 212 sayısı için geçerli yanıt bulurken, 4281 sayısı için dört basamaklı bir gösterim sunmayı tercih etmiş ve üçüncü basamağın ifade ettiği miktarı 600 olarak belirlemiştir.

Katılımcı, Babil sayı sisteminde  sayısının onluk sayı sistemindeki karşılığı olarak 4232 yanıtını vermiştir.

S: Şimdi şu bir ( sayısındaki  kısmının  sembolü gösteriliyor), şu da on ( sayısındaki  kısmının  sembolü gösteriliyor). On bir ediyor burası. Burası ( sayısındaki  kısmının  sembolleri gösteriliyor) on, on daha yirmi. Burası ( sayısındaki  kısmı gösteriliyor) her zaman çizgiler değişiyor, bunlar ( sembolü kastediliyor) değişmiyor. Burası ( sayısındaki  kısmının sağ tarafındaki  sembolü gösteriliyor) altmış, burası da ( ;  sayısındaki  kısmının sol tarafındaki  sembolü gösteriliyor) üç bin altı yüz, altmış üzeri ikiden. Üç bin altı yüz, altmış, yirmi, on bir daha üç bin yedi yüz elli bir.

A: Değiştiriyorsun yani sonucunu, şunu (Katılımcının daha önceden yapmış olduğu $4200 + 20 + 11 = 4232$ toplamı gösteriliyor) yanlış toplamışsın.

S: Evet yanlış toplamışım.

Katılımcı, Babil sayı sistemindeki sayıyı ilk başta 4232 olarak düşünmüş, sonra da yanlış topladığını fark edip sonucu 3751 olarak değiştirmiştir. 3751 sonucunu ise $3600+60+20+11$ toplamından elde etmiştir. Katılımcı gerçek sonucu 2.3600 olan ve üçüncü basamakta yer alan **!** sayısını $3600+60$ olarak düşünmüştür. Ayrıca katılımcı, gerçek sonucu 20.60 olan ikinci basamakta ifade edilen miktarı 20 olarak hesaplamıştır. Bunun nedeni ise, ikinci basamakta sadece **!** sembolünün değiştiğini düşünmesidir. Kısacası, katılımcı ikinci basamakta **!** sembolü bulunsaydı, miktarın altmış olacağına ama **!** sembolü bulunduğu için miktarın değişmeyeceğine on miktarını göstereceğini inanmaktadır. Katılımcının genel olarak “basamak” ve “basamak değeri” kavramları hakkındaki fikirlerine bakıldığında, Babil sayı sistemini anlamlandıramadığı için bu kısımda geçerli yanıtlar veremediğini düşünmekteyiz.

Dijital saat sorusunda katılımcı, 10:25:59 gösterimine üç basamaklıdır demiş ve bu gösterim için aşağıdakilerden bahsetmiştir:

S: Buradaki basamak (10:25:59 gösterimindeki 59 kısmı gösteriliyor) burayı (10:25:59 gösterimindeki 25 kısmı gösteriliyor) etkiliyor, buradaki basamak (10:25:59 gösterimindeki 25 kısmı gösteriliyor) ise burayı (10:25:59 gösterimindeki 10 kısmı gösteriliyor) etkiliyor.

A: Peki on, yirmi beş, elli dokuzu (10:25:59 gösterimi kastediliyor) senden çözümlemeni istesek, isim vermeni istesek, elli dokuza ne isim verirdin?

S: Saniyeler basamağı. Dakikalar basamağı (10:25:59 gösteriminin 25 kısmı kastediliyor), saat (10:25:59 gösteriminin 10 kısmı kastediliyor).

A: Saniyeler, dakikalar ve saat basamağı derdin. Peki basamak değerini sorsam sana. Elli dokuzun basamak değeri kaç?

S: Elli dokuz. Yirmi beşi altmışla çarparız, çünkü bir dakika altmış saniye, yirmi beş dakika da oradan

A: Tamam, onun basamak değeri?

S: Onun basamak değeri, on saat, on saatin kaç dakika olduğunu buluruz, oradan da saniyeye çeviririz.

A: Hım, o şekilde

S: Sayı değerleri de aynı zaten, elli dokuz, yirmi beş, on.

Katılımcı 10:25:59 gösteriminin üç basamaklı olduğunu, bu basamakların sırasıyla saat, dakika ve saniyeler basamağı olduğunu belirtmektedir. Ayrıca, 10:25:59 gösterimindeki 59'un basamak değeri için 59, 25'in basamak değeri için 25.60 ve en son 10'un basamak değeri için de 10 saatin saniyeye çevrilmesi gerektiğini söylemektedir.

Katılımcı soru D için aşağıdakileri söylemiştir.

Katılımcı $214+503$ ve $998+103=1101$ işlemlerini yazar.

A: Bu sayıları ($\vee$ | $\square$ ile $\boxtimes$ δ $\square$ sayıları kastediliyor) bizim

sayı sistemimize mi çevirdin? Daha doğrusu şöyle diyeyim, bizim sayı sistemimize değil de tanıdık şeyler kullandın.

S: Dörtle ikiyi topladım, yedi, beş tane sayı var.

A: Şuradan ($998+103=1101$ işlemi kastediliyor) yola çıkarak açıklarsan.

S: (Katılımcı $998+103=1101$ işlemini nasıl yaptığını anlatır) Diyelim ki bizde on tane sayı var, sekiz üçü topladık, on bir. Ondan çıkarırız bir yazarız buraya, elde var bir diyoruz. Dokuz artı sıfır dokuz bir de elde vardı on diyoruz. On tane rakam var. Ondan onu çıkarırız sıfır, buraya sıfır yazıyoruz, bir de elde kalıyor. Dokuz bir daha on, bir de elde vardı, on bir. En solda olduğu için onu aynen yazıyoruz.

A: Hıhı, evet. Peki şunu ($214+503$ işlemi kastediliyor) açıklar mısın bana?

S: (Katılımcı $214+503$ işlemini nasıl yaptığını açıklar). Şimdi iki, bir, dört, beş, sıfır, üç topluyoruz. Dört, üç daha yedi. Onlarda, altı tane sayı var burada, beş diye düşünmüştüm. Burada altı tane sayı var. Dört, üç daha yedi, bundan altıyı çıkarırız,

bir. Biri gösteren bu (| sembolü yazılır). Bir, sıfır daha bir, bir de elde vardı, iki

($\vee$ sembolü yazılır). İki beş daha yedi, altı tane sayı var. Burada da altı tane sayı var, altıdan çıkarıyoruz, bir. Ama bu en solda olduğu için aynen yazıyoruz. İki beş daha yedi, böyle bir sembol olmadığı için yediği nasıl yazabiliriz ki? Bir saniye. On biri böyle yazıyoruz (Katılımcı tekrardan $998+103=1101$ işlemine geri döner). Allah Allah. Yediği nasıl yazabiliriz? İki, beş yedi. Orada takıldım. İki beş daha yedi ediyor. Burada altı tane sayı var, bir kalıyor. O zaman ne yaparız? Bunu yazayım

($| \vee \vee |$ yazılır).

A: Bunu yazdın. Şu ($| \vee \vee |$ sayısının en solundaki iki sembol $| \vee$ gösteriliyor) kaç oluyor?

S: Yedi.

A: Yedi oluyor. Şu ($| \vee \vee |$ sayısının sağdaki $\vee$ sembolü gösteriliyor) iki. Şu da ($| \vee \vee |$ sayısının en sağındaki $|$ sembolü gösteriliyor) bir.

Katılımcı, verilen sayı sisteminde toplama işlemi yaparken onluk sayı sistemindeki bir toplama işleminden yararlanmış ve sayıları gruplandırarak işlemi sonlandırmıştır. Katılımcının verdiği yanıt, geçerli bir yanıttır. Sonuç olarak genel anlamda diyaloglara bakıldığında, katılımcıda diğer katılımcılara göre daha sağlam bir “basamak” ve “basamak değeri” fikri olduğu söylenebilir.

A: Şu iki sayıyı ($\vee$ sayısı ile $\vee \delta$ sayıları gösteriliyor) göz önüne aldığında, şu sembolün ($\vee$ sembolü gösteriliyor) iki sayıda ifade ettiği miktarları karşılaştırınız.

S: Şimdi burada ($\vee$ sayısı gösteriliyor) ikiyi ifade ediyor, burada ($\vee \delta$ sayısı gösteriliyor)...

Katılımcı $0.5^0 + 2.5^1$ yazar.

S: Burada da ($\sqrt{\delta}$ sayısı kastediliyor) onu ifade ediyor.

A: İki ve on.

Katılımcı $(20)_6 = 0.10^0 + 2.6^1$ yazar.

S: Bu on iki oluyor herhalde.

A: On iki.

S: Bu iki, bu on iki.

A: Tamam.

Katılımcı, bu soruda verilen sayı sistemini önce beşlik sayı sistemi gibi algılamış, sonradan altılık sayı sistemi olduğunun farkına varmıştır. Verdiği yanıtlar geçerli yanıtlardır.

Katılımcı soru E için aşağıdakileri belirtmiştir:

S: Burada altı tane sayı var, demek ki altılık sayma sistemi. Oradan dört, sıfır, elli, yüz yirmi beş. Pardon, yok. Dört, sıfır, yetmiş iki, iki yüz on altı, oradan da iki yüz doksan iki.

A: İki yüz doksan iki, tamam. Peki sayaçtaki iki sembolü hangi basamakta yer almaktadır? Açıklayınız.

S: Bizde onluk sayı sistemi onlar, yüzler diye gidiyor. Onlarda da altı üzeri sıfır yani birler, altı üzeri bir altılar, altı üzeri iki otuz altılar, iki yüz on altılar basamağı diye. İki de otuz altılar basamağına düşüyor.

Katılımcı, verilen sayı sistemini, içinde bulunan sembol miktarına bağlı olarak adlandırıldığının ve bu miktarla birlikte basamaklardaki sembollerin basamak değerinin belirlendiğinin farkındadır. Kısacası katılımcının altılık sayı sisteminde “taban” ve “oran” olgusunun farkında olduğunu söyleyebiliriz.

4.1.7. Murat'ın durumu

4.1.7.1. Murat'ın “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarına genel bakış açısı

“Kuzeniniz, kardeşiniz veya bir yakınınızın çocuğu sizden basamak ve basamak değeri kavramlarının ne olduğu ile ilgili yardım isteseydi, onlara bu kavramları nasıl açıklardınız?” sorusu için Murat aşağıdakilerden bahsetmiştir

A: Birinci soruyu bana nasıl anlatırsın?

M: Tam olarak anlatacağım şey basamak ve basamak değeri mi?

A: Evet, hıhı.

M: Basamak değerini anlatmak için herhalde ilk önce sıfırı anlatmak lazım. Sıfırları anlatmadan zaten bir şey yapamayız. Basamakların değerini örnek vererek daha güzel olurdu bence. Mesela 111 yazmışım. Tek tek gösterirdim.

Burada katılımcı “basamak değerini anlatmak için herhalde ilk önce sıfırı anlatmak lazım” demiş, görüşmenin sonraki aşamalarında ise “sonuç olarak zaten biz basamak değerinde sıfırı kullanıyoruz” diye bir cümle kurmuştur. Bu iki cümleden de anlaşılacağı üzere, katılımcı basamak değeri kavramı için sıfırın gerekliliğinden bahsetmiştir.

A: Ben senin kardeşinim şu an, bana anlat hadi

M: Nasıl anlatayım? Bir saniye. Benim anlatmam aslında çok kötüdür. Ben sadece yapabiliyorum. Nasıl anlatsam bir saniye.

A: ... ağabey basamak ne? Kardeşinim ya.

M: Ya gerçekten bir anda sus oldum yani ya. Biz yıllardır bunu öğreniyoruz ama hala belli bir kavram yok kafamda. Basamak değeri, sayıların yerlerine göre değişmesidir.

Katılımcı yıllardır bu kavramı öğrendiğinden ve zihninde hala belli bir kavram olmadığından bahsetmektedir. Yani katılımcı kendi durumunun farkındadır.

A: Mesela bana bir sayı yazar mısın, rasgele bir sayı

Katılımcı 323 yazar.

A: Tamam. Sence bunun basamağı nedir? Basamak burada ne göreve yarar, ne işe yarar?

M: Basamak burada mesela nasıl desem, bu en sondadır üç değerini taşır (323 sayısının sağındaki 3 rakamı gösteriliyor). Aslında burada bir tane daha sıfır vardır yirmi değerini taşır o iki (323 sayısındaki 2 rakamı gösteriliyor). Buradaki üç de üç yüz değerini taşır (323 sayısının solundaki 3 rakamı gösteriliyor)

A: Peki basamak değeri nedir?

M: Basamak değeri?

A: Evet

M: Basamağın değerini zaten gösteriyorum size. Üç, yirmi, üç yüz diye. Yani basamak değeri budur.

Katılımcıda, basamak ve basamak değeri kavramları ile ilgili doğru bir kavram imajı olduğu ama bunu ifade ederken yanlış bir şekilde ifade ettiği söylenebilir.

A: Peki basamak değerinde ne gibi özellikler var? Aklında bir şeyler var mı? Basamak değeri. Niye bu üç yüz, niye bu yirmi, niye bu üç?

M: Zaten ben eski zamandan bu zamana kadar her şeyin değişime uğradığını düşünen biriyim. Bu da tıpkı onun gibi her şeyi kolaylaştırmak adına yapılan bir şey. Nasıl iki tane çiçek bir tane böcek çizeceğine, gidiyorsun onu öyle yapıyorsun. Daha akla uygun gelir, daha uygun yöntem.

Katılımcı onluk sayı sisteminde rakamları ya da rakamların sayıda ifade ettikleri miktarları “her şeyi kolaylaştırmak adına yapılan bir şey” ve “daha akla uygun gelir, daha uygun yöntem” olarak görmektedir. Ayrıca katılımcı “nasıl iki tane çiçek bir tane böcek çizeceğine, gidiyorsun onu öyle yapıyorsun” demiştir, bu da bize katılımcının onluk sayı sisteminde sembollerin önemli olmadığını düşündüğünü gösterebilir.

A: Tamam. Peki bir şey soracağım. Sence bu bir gelişim süreciyse, ilerde onluk sayı sisteminden başka sayı sistemi oluşturabilir miyiz? Belki daha kullanışlı olabilir mi o zaman? Sence daha kullanışlısı var mı?

M: Şöyle bir şey var. İmkansız diye bir şey yoktur. İmkansız diye bir şey olsa uçak hiç olmazdı. Ama şimdi nasıl bir sayı kullanırız tam olarak bilemeyeceğim.

A: Olabilir mi diyorsun, yani ben anlamadım şimdi. Olabilir mi?

M: Evet olabilir.

A: Belki olabilir diyorsun. Belki daha mı kolay olacak? Belki daha mı zor olacak? Bilmiyorum ki.

M: Galiba biz kolayları biraz aştık. Zorlara doğru biraz ilerleyeceğiz gibi sanıyorum.

A: Öyle mi diyorsun?

M: Evet.

Burada katılımcı, onluk sayı sisteminin bir gelişim süreci boyunca elde edildiğinin farkındadır ve ilerde belki de başka sayı sistemlerinin keşfedilebileceğini ima etmektedir.

4.1.7.2. Murat'ın ondalık sayılardaki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı

A: Tamam. Bir de bir şey soracağım. En sağdaki basamak her zaman birler basamağı mıdır? Onluk sayı sisteminden bahsediyorum.

M: En sağdaki basamak?

A: Evet. Her zaman birler basamağı mıdır onluk sayı sisteminde?

M: Benim bildiğim birler basamağı da farklı bir durum varsa söyleyebilirsiniz ben de öğrenmiş olurum

A: Hayır canım, merak ettim ya böyle nasıl düşündüğünü. Her zaman birler mi şu en sağdaki?

M: Evet. Ya bunun başka bir alternatifi var mı?

A: Tamam öyle düşünüyorsun, sorun yok.

Katılımcı, en sağdaki basamağın her zaman birler basamağı olduğunu söylemektedir. Buna gerekçe olarak söyleyebiliriz ki, katılımcı o an ondalık sayıları aklına getirememiş, sadece doğal sayıları göz önüne alarak cevap vermiş olabilir. Bu ihtimali bir sonraki diyalogda açığa çıkaracağız.

A: Tamam. Şimdi şunu soracağım sana. Şöyle bir sayı var (1,253 yazılır). Görünce neler düşünüyorsun bu sayıyla ilgili? Nedir sence bu sayı? Nasıl bir sayıdır?

M: Bir ikiye doğru geçerken iki yüz elli üç ilerlemiş işte. Bunda yorum yapacak bir şey yok, normal bir sayı bu.

A: Tamam. Peki sence bunun (1,253 sayısı gösteriliyor) ait olduğu bir sayı sistemi var mı? Bu sayının ifade edildiği bir sayı sistemi var mı?

M: Bunu onluk sisteme aslında bağlayabiliriz de. Var mı yok mu bilemeyeceğim fakat herhalde onluk sisteme bağlamışlar diye düşünüyorum ben.

A: Tamam. Öyle düşünüyorsun.

M: Çünkü birle iki arasında ne var. İşte bunlar var. Teker teker göstermişler.

Katılımcı 1,253 sayısının onluk sayı sistemiyle ifade edildiğini düşünmekte, bunun nedeni olarak da 1,253 sayısının 1 ile 2 arasında olmasından kaynaklandığını söylemektedir.

A: Tamam, sence şunun (1,253 sayısı gösteriliyor) kaç basamağı var?

M: İki mi?

A: Sen söyle, şu gördüğün sayının (1,253 sayısı gösteriliyor) onluk sayı sisteminde ifade edildiğini düşünüyorsun.

M: Evet.

A: Kaç basamaklı? Mesela şu (323 sayısı gösteriliyor) kaç basamaklı?

M: Üç

A: Şu (1,253 sayısı gösteriliyor) kaç basamaklı, şu (0,25 sayısı gösteriliyor) kaç basamaklı?

M: Hangisinden başlayayım?

A: Ben aslında şunu (0,25 sayısı gösteriliyor) soruyorum sana.

M: İyi o zaman. O iki basamaklı.

A: İki basamaklı. Açıklar mısın bana nedenini, niye iki basamaklı dediğini?

M: Mesela şundan (1,253 sayısı gösteriliyor) örnek vereyim. Bu birle iki arasında

A: Bu sayı (1,253 sayısı kastediliyor) kaç basamaklı?

M: Dört basamaklı.

A: Dört basamaklı, tamam. Şimdi bana açıklayabilir misin?

M: Zaten bu (1,253 sayısından bahsediliyor) bir ile dört arasında. Basamağın adını veremeyeceğim ama sonuçta bunların da (1,253 sayısının kesirli kısmındaki rakamlar kastediliyor) bir değeri var. İkidten bunu çıkardığımda yedi yüz kırk yedi oluyor herhalde. Sonuçta onların bir değeri var olarak gözüküyor ve dört basamaklı dedim ben buna.

Katılımcı 1,253 sayısındaki rakamların bir değeri olduğunu düşündüğünden bu sayıya dört basamaklı demiştir. Yani katılımcı 1,253 sayısının kesirli kısmındaki rakamların bir “konum”u olduğunu düşünmektedir.

A: Peki buna (0,25 sayısı gösteriliyor) niye iki basamaklı dedin?

M: Ben buna (0,25 sayısı gösteriliyor) üç de diyebilirim. Çünkü şurada sıfır da (0,25 sayısındaki 0 gösteriliyor) var. Sonuçta onun da bir değeri var.

Katılımcı 0,25 sayısındaki sıfırın bir değeri olmadığını düşündüğü için 0,25 sayısına ilk önce iki basamaklı, daha sonra da fikrini değiştirip üç basamaklı olabilir demiştir.

4.1.7.3. Murat'ın onluk sayı sistemi dışında kalan diğer sayı sistemlerindeki basamak ve basamak değeri kavramlarına bakış açısı

Katılımcı Roma sayı sistemini daha önceden duymuş ve sayıların Roma sayı sisteminde nasıl yazıldığı hakkında fikri mevcuttur.

A: Roma sayı sisteminde var mı, yok mu basamak değeri?

M: Bence yok. Çünkü arkaya gelenle öne gelenin bir farkı olmuyor, ya toplayacaksın ya da çıkaracaksın

A: Onun için yok diyorsun. Ya toplayacaksın ya çıkaracaksın. Peki bizde nasıl yani, bizde niye var da onlarda yok? Karşılaştırırsan bunları. Biz de topluyoruz mesela.

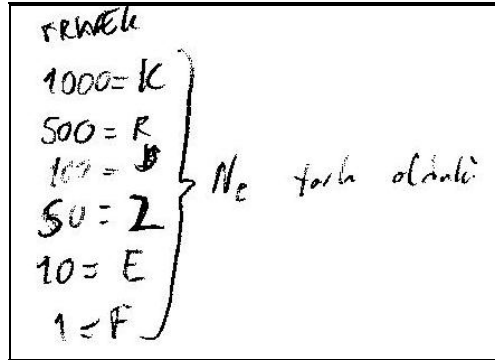
M: Biz de topluyoruz da, bizim toplamamızda çok daha değişik bir sistem var. Bizde arkaya öne gelenler basamak değerine göre ayırt ediliyor. Fakat burada tam tersi sadece çıkarma ve toplama işlemleri kullanılarak yapıyor bu iş.

Katılımcı, Roma sayı sisteminde basamak değeri kavramının bulunmadığını, buna gerekçe olarak da bu sistemde arkaya gelenle öne gelenin bir farkı olmadığını, ya toplanacağını ya da çıkarılacağını söylemektedir. Ayrıca katılımcı, onluk sayı sisteminde bir sembolün, sayının arkasına ya da önüne gelmesinin basamak değerine göre ayırt edildiğini belirtmektedir.

M: Bunlarda (Roma sayı sistemi kastedilmektedir) önüne geleni dizmişler gibi bir şey olmuş. Bu da belli bir gelişim sürecidir. Zaten basamak değeri olmasaydı üç, iki ve üç rakamları olurdu. Olduğu için zaten üç yüz yirmi üç diyoruz buna.

Katılımcı, basamak değeri kavramı olmasaydı, 323 sayısının “üç yüz yirmi üç” yerine “üç iki üç” diye okunacağını söylemektedir.

Katılımcı, Roma sayı sistemine ek olarak bir sayı sistemi kurmuş ve sembolleri aşağıdaki gibi belirlemiştir:



Şekil 16- Murat'ın oluşturduğu sayı sisteminin sembolleri

A: .Kendin mi kurdun bu sistemi?

M: Evet. Kendim kurdum.

A: Harf verdin galiba, bine ka (K harfi kastediliyor) demişsin, beş yüze re (R harfi kastediliyor).

M: Sonra be (B harfi kastediliyor), ze (Z harfi kastediliyor), e (E harfi kastediliyor), fe (F harfi kastediliyor).

A: Rastgele kurdun. Galiba biraz şeyden (Roma sayı sistemi kastediliyor olabilir) yararlanmışsın sembolleri seçerken.

M: Zaten sorunun söylediğiyle bu biraz uyumlu gibi geliyor. Bunları değiştir değiştir kullan, ne fark edecek ki. Sonuçta anlatılan şey tekrar bunlardır (1000, 500 ... sayıları gösteriliyor). Ben isterseniz bunla da (Katılımcının kendi kurduğu sistem kastediliyor) üç yüz yirmi üç yazarım.

A: Hıhı

M: Hemen yazayım, be (B harfi kastediliyor), be, be.

Katılımcı BBEEFF yazıyor.

M: Bu yine üç yüz yirmi üç. Bir şey fark etmedi benim için.

Katılımcı kendince bir sistem kurmuş ve bu sistemde sayıların Roma sayı sistemindeki gibi yazılabileceğinden bahsetmiştir. Bu da bize katılımcının, bir sayı sisteminin, sembollerinden bağımsız olarak ifade edilebileceğini düşündüğünü göstermektedir.

Katılımcı, 212 ve 4281 sayılarının Babil sayı sistemindeki karşılıklarını aşağıdaki gibi yazmıştır:

The image shows handwritten text in a box. The first line represents the number 212 in Babil (Sumerian) script, with the cuneiform symbols for 1, 10, 60, and 32, followed by the equation $120 + 60 + 32 = 212$. The second line represents the number 4281 in Babil script, with the cuneiform symbols for 4, 2, 8, and 1, followed by the text "Yapamadım. Negozikliği."

Şekil 17- Murat'ın Babil sayısına verdiği yanıt

M: O zaman şurada ileriye doğru gittiğimizde nasıl katlanacak?

A: Bilmiyorum, sence?

M: Tekrar yine altmış olur herhalde, yok altı yüz falan mı olacak? Sonuç olarak ileriye doğru gittiğinde bir artış söz konusu olabilir de bu artışı bilmiyorum.

Katılımcı Babil sayı sisteminde basamakların ileriye doğru gittiğinde bir artış olabileceğini ama bu artışın nasıl olduğu hakkında bir fikri olmadığını belirtmektedir.

A: Mesela bizde nasıl? Onlarda nasıl olabilir?

M: Bizim sayı sistemimizle bunları kıyasladığımızda arada çok yoğun bir fark gözüktüyor. Bunların çok önemli olan sayı sistemini biz saat sistemi olarak kullanmışız, sanki küçümsermiş gibi. Nasıl katlandığını hala ben anlamış değilim. Sistem biraz garip geldi herhalde bana. Aşağı doğru inişini anladım da çıkışını anlayamadım. Zaten ben burada nasıl yapmışım? Herhalde altmış ikiye doğru katlanıyor, bir saat, bir saat. Öyle düşündüm ama o da doğru mu bilemeyeceğim.

A: Yorum yok. Zaten doğru ya da yanlış hiç bir şey demiyorum.

M: Bana kalsa yanlış olabilir ama.

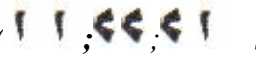
A: Olabilir de olmayabilir de. Sorun değil yani. Hiç önemli değil doğru ya da yanlış olması

M: Bu, Roma sayı sistemine benzemiyor. Öyle her gelen yapamıyor. Nasıl katlandığını ben anlamadım. Kesinlikle ben burada yanlış olduğunu savunurum.

Çünkü altmış, yüz yirmi gidecekse, ben burada dört bini anlatana kadar üzerinden yıllar geçer.

Katılımcı, Babil sayı sisteminde basamakların nasıl ilerlediğini anlamadığını belirtmektedir. Basamakların altmış, yüz yirmi diye giderse büyük sayıları ifade ederken zorlanılacağını düşünmekte ve dolayısıyla basamakların böyle ilerlememesi gerektiğini sezgisel olarak söylemektedir.

Katılımcı, Babil sayı sisteminde  sayısının onluk sayı sistemindeki karşılığı olarak aşağıdakileri belirtmiştir:

A: Tamam, geçiyorum. Şunu ( sayısının onluk sayı sisteminde hangi sayıya karşılık geldiğin soran soru gösteriliyor) anlayamadım demişsin.

M: Zaten artışını anlayamazsam bunu nasıl anlayacağız?

Katılımcının, Babil sayı sistemindeki basamakların artış miktarını anlayamadığı için bu soruyu anlamlandıramadığını söyleyebiliriz.

Dijital saat sorusunda katılımcı, 10:25:59 gösterimine altı basamaklıdır demiştir ve bu gösterim için aşağıdakilerden bahsetmiştir:

A: Şu (10:25:59 gösterimi kastediliyor) altı basamaklıdır dedin.

M: Altı basamaklı dedim. Bunda şöyle bir şey yaptım. Altmış saniye, altmış dakika, yirmi dört saat olarak altı basamaklı sonuçta. Oradan giderek küçültülmüş rakamlar olarak altı basamaklı dedim ben buna.

A: Peki şunu (10:25:59 gösterimi gösteriliyor) çözümlemeni istesek. Hani mesela üç yüz yirmi üçü bu şekilde çözümledin ya. Daha doğrusu basamak adlarını belirledin. Sen ne dersin buna (10:25:59 gösterimi gösteriliyor)?

M: Şimdi rakam olarak mı çözümlüyoruz yoksa ad olarak mı yazıyoruz onu anlamadım. Rakam olarak mı söyleyeceğiz yoksa ad ile mi? Birler, onlar.

A: Rakam olarak söyle.

M: Şimdi bura altmış saniye burası direk dokuz. Nasıl olsa en arkada.

A: Dokuz dediğin?

M: Şura (10:25:59 gösteriminin 59 kısmındaki 9 gösteriliyor), dokuz.

A: Tamam.

M: Şurası da (10:25:59 gösteriminin 59 kısmındaki 5 gösteriliyor) elli. Neden? Saniye elli çünkü şurada bir de sıfır var.

A: Tamam.

M: Saniyeden dakikaya geçince bir dakika eşittir altmış saniyeden, şurayı (10:25:59 gösteriminin 25 kısmındaki 5 gösteriliyor) çarptım, üç yüz saniye çıktı.

A: Anladım.

M: Fakat buraya geldiğimde burada (10:25:59 gösteriminin 25 kısmındaki 2 gösteriliyor) yirmi olarak gözükte bana. Yani burası (10:25:59 gösteriminin 25 kısmındaki 5 gösteriliyor) beş, burası (10:25:59 gösteriminin 25 kısmındaki 2 gösteriliyor) yirmi, o oranda gözükte. Yirmi kere altmış çarptım. Artık buraya (10:25:59 gösterimindeki 10 gösteriliyor) doğru ilerlediğimizde daha yüksek bir çarpım söz konusu olur diye düşünüyorum. Yani öyle ilerler diye düşündüm.

Katılımcı, 10:25:59 gösteriminin 59 kısmındaki 9 sembolünün dokuzu, 5 sembolünün elliye ifade ettiğini belirtmektedir. Ayrıca, 25 kısmında ise 5 sembolünün beşi, 2 sembolünün 20'yi temsil ettiğinden; ama bu kısmın, dakikalar kısmı olduğu için altmışla çarpılması gerektiğinden söz etmektedir.

Katılımcı soru D için aşağıdakileri söylemiştir.

Katılımcı $214+503 = 717$ yazar.

M: Güzel bir sayı çıktı. Sadece bunlar varsa ben bu yediye nasıl göstereceğim? Bir saniye

A: Tamam.

M: Şimdi bunların (Sistemdeki sembollere karşılık gelen sayılardan bahsediliyor) içinden bir şeyler çıksaydı, galiba bunda var basamak değeri. Çünkü

bunun (0 rakamından bahsediliyor) olduğu her yerde basamak değeri vardır. Fakat bunları içinde bir yedi yok ki ben buna yedi yüz desem. Nasıl gösterilir?

...

M: Normal rakamlarda yedi yüz on yedi buldum ama. Bulamadım ben bunu.

Katılımcı, verilen soruda yediye karşılık gelen bir sembol bulunmadığı için sonucu gösteremeyeceğini düşünmektedir. Yediyi verilen sistemde yazamayışı, katılımcıda, sayıları gruplandırma konusunda bir eksiklik olduğunu gösterebilir.

A: Tamam. Peki şunla ($\bigvee \delta$ sayısı gösteriliyor) şu ($\bigvee$ sayısı gösteriliyor), iki sayı var elimizde. Bu sembolün ($\bigvee$ sembolü gösteriliyor) iki sayıda ifade ettiği miktarları karşılaştırınız.

M: Biri ikiyi, biri de yirmiyi ifade ediyor. Az önce de dediğim gibi basamak değeri var.

Katılımcı, bu sayıların miktarlarını onluk sayı sistemindeki gibi belirlemiştir. Buradan da katılımcının bu sayı sisteminin farklı bir sayı sistemi olduğunun farkında olmadığını söyleyebiliriz.

Katılımcı soru E için aşağıdakileri belirtmiştir:

M: Soldan sağa doğru bin iki yüz dört yazmışlar. Herhalde virgülle ayırmışlar ki sonuç direk aynı olmasın diye. Çünkü sonuç bin iki yüz dört çıkar bence.

A: Bin iki yüz dört.

M: Çünkü sadece bunlar (0,1,2,3,4,5 sembolleri kastediliyor) kullanılmış diyorsunuz, zaten beşe yer vermemiş. Dört, sıfır, iki ve bir kullanmış.

A: Tamam

M: Bir saniye, şu sıfıra (1204 sayısındaki 0 gösteriliyor) bir şey diyemeyeceğim. Şu (1204 sayısındaki 4 gösteriliyor) dördü ifade ediyor, bu da (1204

sayısındaki 2 gösteriliyor) iki yüzü bu da (1204 sayısındaki 1 gösteriliyor) bini ifade ediyor. Sonuç olarak oradaki artış bunları gösteriyor.

A: Yani şu (1204 sayısındaki 1 gösteriliyor) bin diyorsun, şu (1204 sayısındaki 2 gösteriliyor) iki yüz, şu da (1204 sayısındaki 4 gösteriliyor) dört. Tamam, öyle diyorsun. Sayaçtaki şu sembol (2 sembolü gösteriliyor) hangi basamakta yer almaktadır? Neden? Açıklayınız.

M: İki sembolü yüzler basamağında yer almış ve iki yüzü ifade ediyor da. Neden demişsiniz, artıştan belli. Burada dört, yüzü bulmuş, yüz doksan dokuz gitmiş, iki yüz olmuş, iki yüzden de iki yüz dörde varmış.

A: Yüzler basamağı diyorsun

M: Evet.

Katılımcı bu sayı sistemini onluk sayı sistemi gibi düşünüp soruları o şekilde yanıtlamıştır. Katılımcının burada da farklı bir sayı sistemi bulunduğunun farkında olmadığı söylenebilir. Ayrıca, katılımcının “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarını onluk sayı sistemi içinde düşündüğünü söyleyebiliriz.

Kısaca toplamak istersek şunları söyleyebiliriz:

- Gamze, onluk sayı sistemindeki “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarıyla ilgili düşünceleri için ipuçları vermiştir. Gamze’de “basamak” kavramı konum ile, “basamak değeri” kavramı çarpım ile ilişkilidir. Ayrıca Gamze, onluk sayı sisteminde bir sayının ifade edilışinde rakamların on’un farklı kuvvetleri ile çarpıldığını, buna göre de basamak değerlerinin artıp azaldığını belirtmektedir. Gamze, farklı sayı sistemleriyle daha önceden karşılaşmış olduğu için bu araştırmada onluk sayı sistemi dışındaki bazı sayı sistemlerini, görünce fark etmiş ancak tanıyamamıştır. Gamze, Babil sayı sisteminde sayıları yazarken, iki basamak ile sınırlı kalmış, üçüncü basamağa geçememiştir. Yani, Gamze’nin Babil sayı sistemindeki taban olgusunun- basamak fikrine dayanan sayı sisteminde ifade edilen sayıların basamaklarının ifade ettikleri miktarlar arasındaki oran veya kat- farkında olmadığı söylenebilir. Ayrıca diğer bir altmışlık sistem olarak belirlenen dijital saatteki gösterimi ondalık sayı gibi

düşünmüştür. Toplama işlemine verdiği yanıtlardan, Gamze’de sayıları “gruplama” eksikliğinin görüldüğünü söyleyebiliriz.

- İbrahim, onluk sayı sistemindeki “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarıyla ilgili düşünceleri için ipuçları vermiştir. İbrahim’de “basamak” kavramı konum ile, “basamak değeri” kavramı çarpım ile ilişkilidir. İbrahim bu çalışmada onluk sayı sisteminden farklı sayı sistemlerini, görünce fark edememiştir. Ayrıca, ondalık sayıların onluk sayı sistemiyle ifade edileceğini, ondalık sayılarda bir “sayı grubunun” olduğunu, ondalık sayıların bir sayı üzerinden oluşan bir sistem olduğunu belirtmektedir. İbrahim, Babil sayı sisteminde sayıları yazarken, üçten fazla basamak kullanmış ancak, bu basamakların ifade ettiği miktarları hep 60 ile çarpmıştır. Yani, İbrahim’in Babil sayı sistemindeki taban ve oran olgusunun basamak fikrine dayanan sayı sisteminde ifade edilen sayıların basamaklarının ifade ettikleri miktarlar arasındaki oran veya kat - farkında olmadığı söylenebilir. Ayrıca diğer bir altmışlık sistem olarak belirlenen dijital saatteki gösterim için altı basamaklı diye düşünmesine rağmen, iki basamaklı üç sayı gibi çözümlenmesi gerektiğini söylemektedir. Toplama işlemine verdiği yanıtlardan, İbrahim’de sayıları “gruplama” hissinin olduğu söylenebilir.
- Kaan belki de araştırma katılımcılarının arasındaki en ilginç katılımcıdır. Onluk sayı sistemindeki “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarıyla ilgili düşünceleri için söyleyeceğimiz tek şey, Kaan’ın bu kavramlar hakkında kafasının karışık olduğudur. Çünkü tutarlı olmadığına inandığımız fikirleri mevcuttur. Kaan, bu çalışmada onluk sayı sisteminden farklı sayı sistemlerini, görünce fark edememiştir. Ayrıca Kaan, “basamak değeri” fikrine dayanmayan bir sayı sisteminin bulunmadığını düşünmektedir. Dolayısıyla da bu fikirler için “taban” ve “oran” kavramlarının gerekli olduğunun farkında olmadığını söyleyebiliriz. Şimdiye kadar “basamak” ve “basamak değeri” kavramları için tutarlı fikirler vermediğine inandığımız Kaan, Babil sayı sisteminde sayıları yazarken, geçerli sayılabilecek yanıtlar vermiştir. Bunun sebebi olarak, Kaan’ın, Babil sayı sistemindeki sayıları anlamlandırarak değil de, dijital saatten yararlanarak bulmuş olması ihtimali gösterilebilir. Ayrıca diğer bir altmışlık

sistem olarak belirlenen dijital saatteki gösterim için üç basamaklıdır demiş ve farklı birimlere göre çözümleme yapmıştır. Ancak birim dönüşümlerinde on'un kuvvetlerini kullanmıştır. Buradan da, Kaan'da "taban" olgusunda bir sıkıntı mevcut olduğu söylenebilir. Toplama işlemine verdiği yanıtlardan ise, Kaan'da sayıları "gruplama" hissinin olduğu söylenebilir.

- Cihan, onluk sayı sistemindeki "basamak" ve "basamak değeri" kavramlarıyla ilgili düşünceleri için ipuçları vermiştir. Cihan, bir sayıda birden fazla basamağın bulunabileceğinden, sayının, ifade edilişindeki rakamın konumu ile değiştiğinden söz etmektedir. Cihan, Babil sayı sisteminde sayıları yazarken geçerli yanıtlar vermiş, verdiği yanıtlar için dijital saatten yararlandığını belirtmiş; hatta Babil sayı sisteminde sayıların nasıl yazıldığı hakkında kendi kendine geçerli bir görüş benimsemiştir. Ayrıca diğer bir altmışlık sistem olarak belirlenen dijital saatteki gösterim için altı basamaklı diye düşünmesine rağmen, gösterimi altmış tabanını kullanarak, üç basamaklıymış gibi çözümlemiştir. Cihan'ın bu gösterimin altı basamaklı olduğunu düşünmesine gerekçe olarak, görüşme esnasında Cihan'ın, bir basamakta bir sembol bulunacağına dair verdiği ifadeleri gösterebiliriz. Cihan'ın farklı bir sayı sistemi ile karşılaşınca, onu anlamlandırabiliyor ya da günlük hayatla ilişkilendirebiliyorsa sorulara geçerli yanıtlar verdiğini, aksi takdirde farklı bir sayı sisteminin içinde bulunduğunu fark etmediğini söyleyebiliriz. Toplama işlemine verdiği yanıtlardan ise, Cihan'da sayıları "gruplama" eksikliğinin görüldüğü söylenilebilir.
- Berk'in, onluk sayı sistemindeki "basamak" ve "basamak değeri" kavramlarıyla ilgili düşüncelerini ifade ederken bilinçli görülmediği düşünülmektedir. Berk'in, beşlik sayı sisteminde basamakların nasıl ilerlediği hakkında fikri olmasına rağmen, basamak değerine dayanan sayı sistemlerinde tabanın belirttiği miktar ile sembol sayısının belirttiği miktarın aynı olduğunun farkında olmadığı söylenebilir. Buradan hareketle, Berk'te "gruplama" kavramının eksikliğinden söz edilebilir. Ayrıca Berk beşlik sayı sisteminde basamak değerinin olmadığını belirtmektedir. Berk'in, Babil sayı sistemindeki "basamak" ve "basamak değeri" kavramlarıyla da ilgili düşüncelerini ifade ederken bilinçli görülmediği

düşünülmektedir. Ayrıca diğer bir altmışlık sistem olarak belirlenen dijital saatteki gösterim için, basamaklarda birden fazla sembol bulunamayacağını düşündüğünden altı basamaklıdır demiştir. Toplama işlemine verdiği yanıtlardan da, Berk'te, sayıları “gruplama” eksikliğinin görüldüğünü söyleyebiliriz.

- Selçuk, onluk sayı sistemindeki “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarıyla ilgili düşünceleri için ipuçları vermiştir. Selçuk'ta “basamak” kavramı konum ile, “basamak değeri” kavramı çarpım sonucu ile ilişkilidir. Ayrıca, basamak değerleri toplamının sayının miktarını verdiğinden söz etmektedir. Selçuk, farklı sayı sistemlerinin olduğunu bilmekte, bu sayı sistemlerini görünce tanımaktadır. Hatta, bu sayı sistemlerinde tabanın belirttiği miktar ile sembol sayısının belirttiği miktarın aynı olduğunu, basamakların hangi miktarlarda ilerlediğinin, basamak adlarının neler olabileceğinin farkındadır. Buradan hareketle, Selçuk'ta sayıları “gruplama”, “oran ve “taban” hissinin olduğu söylenebilir. Selçuk, Babil sayı sisteminde sayıları yazarken geçerli yanıtlar verememiş, ancak diğer bir altmışlık sistem olarak belirlenen dijital saatteki gösterim için geçerli yanıtlar vermiştir. Buradan hareketle Selçuk'un Babil sayı sistemini tam olarak anlamlandıramamış olduğunu söyleyebiliriz. Toplama işlemine verdiği yanıtlardan da, Selçuk'ta sayıları “gruplama” hissinin olduğu söylenebilir.
- Murat, onluk sayı sistemindeki “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarıyla ilgili düşünceleri için ipuçları vermiştir. Murat, “basamak” kavramının konum ile, “basamak değeri” kavramının çarpım sonucu ile ilişkili olduğu hissine sahiptir. Ayrıca, “basamak değeri” kavramı için sıfırın gerekliliğinden bahsetmiştir. Murat, onluk sayı sisteminin bir gelişmişlik örneği olduğunu düşünmekte, “sembolleştirme” ve sayıları ifade etme süreci boyunca, en ekonomik dönemde bulunulduğunu söylemektedir. Murat, bu araştırmada onluk sayı sisteminden farklı sayı sistemlerini, görünce fark edememiştir. Murat'ın Babil sayı sistemindeki “taban” ve “oran” olgusunu ise anlamlandıramadığı gözlemlenmiştir. Ayrıca diğer bir altmışlık sistem olarak belirlenen dijital saatteki gösterim için altı basamaklı diye düşünmesine rağmen, iki basamaklı üç sayı gibi çözümlenmesi gerektiğini söylemektedir. Toplama işlemine verdiği

yanıtlardan, Murat'ta sayıları “gruplama” eksikliğinin görüldüğünü söyleyebiliriz.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmamızda elde edilen bulgulara dayalı sonuçlar üzerinde durulacaktır. Ayrıca araştırma bulguları çerçevesinde, hem bu uygulamaya hem de bu konuda çalışma yapmak isteyen araştırmacılara ve eğitimcilere yönelik önerilerde bulunulacaktır.

5.1. Sonuçlar

Bu araştırma ile 8. sınıf öğrencilerinin “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarını nasıl anlamlandırdıkları belirlenmeye çalışılmıştır. Çalışmanın amacı dikkate alındığında, öğrencilerin görüşleri önem kazanmaktadır. Araştırmaya 7 öğrenci katılmıştır. Her öğrencinin durumu betimsel analize tabi tutularak, bulgular açığa çıkarılmaya çalışılmıştır.

Katılımcılardan basamak ve basamak değeri kavramlarının ne olduğunu anlatmaları istendiğinde, alışkanlıklarından dolayı tümü, onluk sayı sistemindeki “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarından söz etmiştir. Bu kavramlarla ilgili elde edilen bulgulara göre söylenebilir ki; katılımcıların çoğu, “basamak” kavramını konum ile, “basamak değeri” kavramını ise çarpım sonucu ile ilişkilendirmiştir.

Katılımcılar, onluk sayı sisteminde ifade edilen sayılarda birden fazla basamağın bulunabileceğini, sayının yazılışındaki rakamın miktarının “konum”u ile değiştiğini, basamak değerinin sayıyı oluşturan rakamlar tarafından belirlendiğini düşünmektedirler. Bu sonuçlara ek olarak, bir katılımcı basamak değeri fikri için sıfırın gerekliliğinden bahsetmiştir. Bu durumdan yola çıkarak bu katılımcının sıfırın “basamak tutuculuğu” rolünü göz önüne aldığını söyleyebiliriz.

Katılımcılar (aralarında tereddütlü olanları bulunsa da), ondalık sayıların onluk sayı sisteminde ifade edilebileceğini belirtmektedirler. Buna gerekçe olarak da

katılımcıların, ondalık sayıların kesirli kısımlarındaki rakamların belirttikleri miktarların on'un negatif kuvveti ile ifade edildiğini düşündükleri gösterilebilir. Bu bulgulara ek olarak bir katılımcı, ondalık sayılarda “bir sayı grubu” bulunduğunu ve ondalık sayıların, bir sayıyı taban kabul eden bir sistemle birlikte yazıldığını belirtmektedir.

Katılımcılar, bir ondalık sayıda kesirli kısımdaki rakamların da birer “konum” a sahip olduğunu düşünmektedirler. Bir ondalık sayının kaç basamaklı olacağı sorusuna verdikleri yanıtlar incelendiğinde, katılımcıların çoğunun ondalık sayıların basamak sayısını belirlerken hem tam kısmı, hem de kesirli kısmı göz önüne aldıkları gözlemlenmiştir. Örneğin bir katılımcı, 1,253 sayısının dört basamaklı ve 0,25 sayısının üç basamaklı olduğundan söz etmiştir. Bu durumdan farklı olarak; ondalık sayılarda basamak sayısını bir katılımcı kesirli kısımdaki rakam sayısına göre (örneğin 0,1 sayısının bir basamaklı olarak belirlenmesi), diğer bir katılımcı on'un kuvvetine göre (0,5 sayısının $5 \cdot 10^{-1}$ gösteriminden dolayı -1 basamaklı olması) belirlemiştir. Başka bir katılımcı ise tam kısmı sıfır olan üç basamaklı bir ondalık sayı için (0,253 gibi) iki basamaklıdır demiştir. Bu katılımcının sıfırın “basamak tutuculuğu” rolünün farkında olmadığı söylenebilir.

Katılımcıların hemen hemen hepsi, Roma sayı sisteminin basamak değeri fikrine dayanmadığını ölçekte daha önceden belirtmiştir. Bir sistemin “basamak değeri” fikrine dayanması için hangi vasıflara sahip olması gerektiği sorusuna, katılımcıların verdiği yanıtlarda bu vasıfların neler olduğu ile ilgili herhangi bir ip ucuna rastlanamamıştır. Sadece bir katılımcı, bir sistemin basamak değeri fikrine dayanması için o sistemde bir sayının katlarının bulunması gerektiğinden söz etmiştir ki burada katılımcının “sayının katları” yerine “sayının kuvvetleri” demek istediği düşünülmektedir.

Yukarıdaki görüşlerden farklı olarak, bir katılımcı basamak değeri fikrine dayanmayan bir sayı sisteminin olmayacağından, dolayısıyla Roma sayı sisteminin de basamak değeri fikrine dayanması gerektiğinden söz etmiştir. Örnek olarak CXIII

sayısında C sembolünün yüzler basamağını, X sembolünün onlar basamağını, III sembollerinin ise birler basamağını temsil ettiğini söylemektedir.

Katılımcıların bazıları, basamak değeri fikrine dayanan Babil sayı sistemindeki sayıların hem ikinci hem de üçüncü basamağında ifade edilen miktarları 60 ile çarpmıştır. Bu katılımcılar, üç basamaklı bir Babil sayısı ile karşılaştıklarında, üçüncü basamakta ifade edilen miktarı yine 60 ile çarpmayı tercih etmişlerdir. Bu katılımcılara aynı örnek onluk sayı sisteminde sorulsaydı, katılımcıların birinci basamakta ifade edilen miktarı 10 ile, ikinci basamakta ifade edilen miktarı 100 ile, üçüncü basamakta ifade edilen miktarı 1000 ile çarpacaklarını söyleyebilirdik. Buradan hareketle, bu katılımcıların basamak değeri fikrine dayanan bir sayı sisteminin yapısına tam olarak hakim olamadıklarını söyleyebiliriz.. Diğer bir yandan altmışlık sayı sisteminde bir haneye birden fazla sembol yazılabilmesinin katılımcıların zihinlerini karıştırmış olabileceğini de düşünmekteyiz. Bu durumda Babil sayı sisteminin yapısı üzerine odaklanmanın güçleştiğini ifade edebiliriz.

Yukarıdaki durumdan farklı olarak, üçüncü basamakta ifade edilen miktarın 120 ile ya da 3600 ile çarpılması gerektiğini düşünen katılımcılar da vardır.

Diğer bir altmışlık sistem olarak belirlenen dijital saatteki 10:25:59 gösteriminin kaç basamaklı olduğuna dair üç farklı fikir ortaya çıkmıştır: bunlar, 10:25:59 gösterimini iki basamaklı olarak düşünme, üç basamaklı olarak düşünme ve altı basamaklı olarak düşünme şeklindedir. Bu konu ile ilgili, katılımcıların hemen hemen hepsinin (6 katılımcının), görüşmenin başka bir aşamasında, basamak değeri fikrine dayanan sayı sistemindeki bir sayının her basamağında, bir sembol bulunabileceğini belirttiklerinden söz etmekte fayda vardır. Bu düşünceler göz önüne alındığında 6 katılımcıda “basamak” ve “basamak değeri” fikrinin uygun bir şekilde yapılanmadığını söylemek abartılı olmaz. Çünkü basamak değeri fikrine dayanan bir sayı sisteminde esas olan, bir konumda yer alan sembol sayısı değildir. Yani, aynı konumdaki sembol gruplarına aynı anlam yüklenebilir, şöyle ki; konumu gereği bir sembolü tabanın hangi kuvveti etkilemişse, aynı konumdaki diğer semboller de

tabanın aynı kuvveti tarafından etkilenmektedir. Sonuç olarak 6 katılımcının da bu düşünceye sahip olmadığını gözlemlemekteyiz.

Bir katılımcı 10:25:59 gösterimini iki basamaklı ve 10'un tam sayı kısmı, 25'in de kesirli kısım olduğunu söylemiştir (bakınız, sayfa 57). Yani dijital saatteki gösterimde, saat hanesini sayının tam kısmı olarak, dakika ve saniye hanesini ise sayının kesirli kısmı olarak düşünmüştür.

Bu gösterim için altı basamaklı diyen katılımcılar, gösterimdeki her sembolü ikişerli çözümlemeyle onluk sayı sistemindeki gibi çözümlemişlerdir. Yani, altı basamaklı bir sayıyı çözümlemek yerine üç tane iki basamaklı sayıyı çözümlemeyi tercih etmişlerdir. Bu durumdan farklı olarak bir katılımcı, bu gösterim için altı basamaklı demesine rağmen, bu gösterimi üç basamaklıymış gibi düşünüp $10.3600+25.60+1.59$ olarak çözümlemiştir. Buna gerekçe olarak bu katılımcının, “bir basamakta bir sembol bulunması gerektiği” fikrine sahip olduğu gösterilebilir.

Yukarıdaki durum göz önüne alındığında, katılımcılarda “basamak” ve “basamak değeri” fikirlerinin bulunduğunu ancak tam olarak yapılandırılmamış olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü altmışlık sayı sistemindeki bir sayıyı çözümleme işine gelindiğinde katılımcıların, sayının tamamını altmışlık sayı tabanına göre göz önüne almalarına rağmen, basamaklarda ifade edilen miktarların çözülmesini onluk sayı sistemine göre düşündükleri gözlemlenmiştir. Basamak ve basamak değeri fikrinin tam olarak yapılandığını söyleyebilmek için, katılımcıların basamaklarda ifade edilen miktarları da altmışlık sayı sisteminde düşünmeleri gerekmektedir.

İki katılımcı ise 10:25:59 gösterimi için üç basamaklıdır demiştir. Katılımcılardan biri bu gösterimi farklı birimlere göre (saate, dakikaya ve saniyeye) çözümlemiş, ancak birim dönüşümlerini yani dakikanın saate ya da saniyenin saate dönüşümünü yaparken on'un kuvvetlerini kullanmıştır. Diğer katılımcı ise, basamakların saniyeler basamağı, dakikalar basamağı, saatler basamağı diye adlandırılabilceğinden, 59'un basamak değerinin elli dokuz, 25'in basamak

değerinin 25.60, 10'un basamak değerini bulmak için ise on saatin kaç saniye olduğunu bulmak gerektiğinden bahsetmiştir. Ayrıca bu katılımcı basamak değeri fikrine dayanan sayı sistemindeki bir sayının bir basamağında birden fazla sembol bulunabileceğini daha önceden belirtmiştir.

Katılımcıların çoğunun, onluk sayı sisteminden farklı bir sayı sistemindeki “basamak” ve “basamak değeri” ile ilgili fikirlerini açıklarken, onluk sayı sistemindeki “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarıyla ilgili alışkanlıklarını sürdürmeye devam ettikleri gözlemlenmiştir.

5.2. Öneriler

Bu araştırmadan elde ettiğimiz tecrübeler ışığında araştırmalara ve eğitimcilere yönelik sunulabilecek öneriler şöyledir:

- NCTM'nin Standart 1'ine bakılacak olursa, NCTM, sadece sayıların nasıl sayılacağı anlayışının değil, aynı zamanda onluk sayı sisteminin nasıl çalıştığı anlayışının gelişiminin de önemini vurguladığı görülebilir (Bassarar, 2005, s. 100). NCTM 2004'ün de belirttiği gibi sayı sisteminin bileşenlerinin tarihsel analizi, aritmetik öğretimine, ilginç olduğu kadar sağlam bir anlayış da katabilir.

Daha sonraki araştırmalara yol göstermesi amacıyla sıralanan öneriler ise şöyledir:

- Araştırma, bazı sorulara yanıt verirken sınırlı kalmıştır. Bu olumsuz etkiyi ortadan kaldırmak için daha çok veri toplama tekniklerinden faydalanılabilir ve araştırma süreci daha da genişletilebilir.

- Görüşmeler esnasında bazı öğrencilerde araştırmacının yabancı biri olmasından kaynaklanan problemler ortaya çıkmıştır. Görüşmeler öncesi bu olumsuz etkiyi kaldırabilecek şekilde öğrencilerle daha çok vakit geçirilebilir.
- Görüşmeler sırasında ses kayıt cihazının bulunması öğrencilerin sorulara rahat cevap verememelerine neden olmuştur. Bu olumsuz etkiyi ortadan kaldırmak için görüşmelerden önce öğrencilerle sohbet edilip ses kayıt cihazı aşına hale getirilebilir.
- “Basamak” ve “basamak değeri kavramlarıyla ilgili zihinsel durumların ortaya çıkarılmasının, aritmetik öğretiminde ve dersin planlanmasında etkili olacağını düşünmekteyiz. Bu kavramlarla ilgili zihinsel durumları belirleyecek çalışmalara daha çok gereksinim vardır.

KAYNAKÇA

ARTUT, P. ve TARIM, K. (2006). **İlköğretim Öğrencilerinin Basamak Değeri Kavramını Anlama Düzeyleri**. Eğitimde Kuram ve Uygulama. 2(1). s.26-36.

BASSARER, T. (2005). **Mathematics for Elementary School Teachers**. (Üçüncü Baskı). New York & Boston: Houghton, Mifflin Company.

BRIZUELA, B. M. (2001). **Children's Ideas About The Written Number System**. (Ph.D Thesis, Harvard University).

BURRIS, A.C. (2005). **Understanding the Math You Teach: Content and Methods for Prekindergarten Through Grade Four**. New Jersey: Pearson Education, Inc.

BURTON, D.M. (1999). **The History of Mathematics: An Introduction**. (Dördüncü Baskı). United States of America: McGraw-Hill.

CATCHART, G., POTHIER, Y., VANCE, J., BEZUK, N. (2003). **Learning Mathematics in Elementary and Middle Schools**. (Üçüncü Baskı). New Jersey: Pearson Education, Inc.

DEHAENE, S. (1997). **The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics**. United States of America: Oxford University Pres.

GILLHAM, B. (2000). **Case Study Research Methods**. London: Continuum.

GUEDJ, D. (2007). **Sayılar İmparatorluğu**. Çeviren: Ömer Aygün. Yapı Kredi Yayınları.

HOLLSTEIN, J. A. GUBRIUM J. F. (2004). The Active Interview. In **Qualitative Research: Theory, Method and Practice**. Silverman, D. (Ed.). London: Sage Publications.

IFRAH, G. (2005). **Rakamların Evrensel Tarihi I: Bir Gölgenin Peşinde**. (On üçüncü Basım). Çeviren: Kurtuluş Dinçer. Tübitak Popüler Bilim Kitapları.

IFRAH, G. (2005). **Rakamların Evrensel Tarihi II: Çakıl Taşlarından Babil Kulesine**. (On ikinci Basım). Çeviren: Kurtuluş Dinçer. Tübitak Popüler Bilim Kitapları.

IFRAH, G. (2005). **Rakamların Evrensel Tarihi V: Sıfırın Gücü**. (Onuncu Basım). Çeviren: Kurtuluş Dinçer. Tübitak Popüler Bilim Kitapları.

IFRAH, G. (2005). **Rakamların Evrensel Tarihi VII: İslam Dünyasında Hint Rakamları**. (Altıncı Basım). Çeviren: Kurtuluş Dinçer. Tübitak Popüler Bilim Kitapları.

IFRAH, G. (2005). **Rakamların Evrensel Tarihi VIII: Hesabın Destanı**. (Üçüncü Basım). Çeviren: Kurtuluş Dinçer. Tübitak Popüler Bilim Kitapları.

KAMII, C. (1992). **Number In Preschool and Kindergarten: Implications of Piaget's Theory**. Washington: National Association for the Education of Young Children.

KAMII, C. (1994). **Young Children Countinue to Reinvent Arithmetic. 3rd Grade: Implications of Piaget's Theory**. New York: Teachers College Press.

KAMII, C. (2000). **Young Children Countinue to Reinvent Arithmetic.: Implications of Piaget's Theory**. (İkinci Basım). New York: Teachers College Press.

MASINGILA, J.O., LESTER, F.K., RAYMOND, A.M., (2002). **Mathematics for Elementary Teachers via Problem Solving**. United States of America: Pearson Education, Inc.

MEB (Milli Eğitim Bakanlığı). (2002). **İlköğretim Okulu Matematik Programı**. Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

MEB (Milli Eğitim Bakanlığı). (2005). **İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı ve Kılavuzu**. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü.

MERRIAM, S. B. (1998)**Qualitative Research and Case Study Applications in Education..** California: Jossey-Bass, Inc.

MOORE, B. S. (1992). **A Comparison Of Two Approches To Place Value Instruction In First Grade Classrooms.** (MS Thesis, San Jose State University).

NAGEL, N. G. & SWINGEN C. C. (1998). **Students' Explanation of Place Value in Addition and Subtraction.** Teaching Children Mathematics. Vol.5, No.3, Nov. s.164.

NATARAJ, M. S & THOMAS, M.O.J. (2007). **Developing The Concept of Place Value.** Mathematics: Essential Research, Essential Practice, cilt.2. <http://www.merga.net.au/documents/RP472007.pdf> adresinden 12 Aralık 2007 tarihinde indirilmiştir.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (2004). **Historical Topics for the Mathematics Classroom.** United States of America.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (2004). **Principles and Standarts for School Mathematics.** United States of America.

OLKUN, S. TOLUK, Z. (2003). **İlköğretimde Etkinlik Temelli Matematik Öğretimi.** Ankara: Anı yayıncılık.

PATTON, M. Q. (1987). **How To Use Qualitative Methods in Evaluation.** United States of America: Sage Publication.

PATTON, M. Q. (1990). **Qualitative Education and Research Methods.** (İkinci Baskı). United States of America: Sage Publication.

ROSS, S. H. (1985). **The Development Of Children's Place Value Numeration Concepts In Grades Two Through Five.** (PH.D Thesis, University of California, Berkeley).

ROSS, S. H. (1989). **Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View.** The Arithmetic Teacher. Vol.36, No.6, Feb. s.47.

RUSCH, L. T. (1997). **Mathematics Content Cousework For Prospective Elementary Teachers: Examining The Influence of Instructional Strategy On The Developmant Of Essential Place Value Knowledge.** (Ph.D Thesis, The University of Texas at Austin).

SHARMA, M. C. (1993). **Place Value Concept: How Children Learn It and How to Teach It.** Math Notebook, cilt.10, s.1-2. <http://www.eric.ed.gov> adresinden 13 Eylül 2007 tarihinde indirilmiştir.

THOMPSON, C. (1990). Place value and larger numbers. In **Mathematics for the young child.** Payne, J. N. (Ed.). United States of America: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

VAN DE WALLE, J.A. (2004). **Elementary and Middle School Mathematics.**(Beşinci Baskı). United States of America: Perason Education, Inc.

YILDIRIM, A. ŞİMŞEK, H. (2005). **Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri**. (Beşinci Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

YIN, R. K. (2003). **Case Study Research**. (Üçüncü Baskı). United States of America: Sage Publication.

- (1) <http://tech.worlded.org/docs/maththing/nylp7.htm> (02 Şubat 2007)
- (2) <http://en.wikipedia.org> (21 Temmuz 2007)
- (3) <http://www.cut-the-knot.org/ctk/SelfDescriptive.shtml> (05 Haziran 2007)
- (4) <http://www.garlikov.com/PlaceValue.html> (18 Aralık 2006)
- (5) <http://www.tdk.gov.tr> (10 Ocak 2008)
- (6) <http://www.yourdictionary.com/place-value> (11 Aralık 2007)
- (7) http://www.decs.sa.gov.au/limestonecoast/files/links/Glossary_of_mathematical_t.doc (14 Kasım 2007)
- (8) <http://mdk12.org/instruction/curriculum/mathematics/glossary.shtml> (07 Nisan 2007)

EK-1 BADKÖ (Basamak ve Basamak Değeri Kavrayışı Ölçeği)

Aşağıda “basamak” ve “basamak değeri” ile ilgili cevaplandırmanızı istediğimiz sekiz adet soru bulunmaktadır. Bu sorularla ilgili samimi düşüncelerinizi yazmanız, sorularda yer alan, anlaşılmayan kelime veya sembolleri öğretmenlerinize sormanız ve onlardan açıklama beklemeniz bizim için çok önemlidir. Her bir sorunun veya şıkkın cevabını size bırakılan boşluklara yazınız. Yardımlarınız için şimdiden teşekkür ederiz.

Öğrencinin Adı ve Soyadı:

SORULAR:

1. Kuzeniniz, kardeşiniz veya bir yakınınızın çocuğu sizden “basamak” ve “basamak değeri” kavramlarının ne olduğu ile ilgili yardım isteseydi, onlara bu kavramları nasıl açıklardınız? Cevabınızı ayrıntılı olarak yazınız.

2. Roma uygarlığının geliştirdiği sayı sisteminde kullanılan semboller aşağıda verilmiştir. İnceleyiniz.

Roma Sayı Sisteminde Kullanılan Semboller	I	V	X	L	C	D	M
Günümüzde Kullanılan Sayı Sistemindeki Karşılığı	1	5	10	50	100	500	1000

Roma sayı sisteminde yazılan iki farklı sayı örneğini inceleyiniz:

X I : Günümüzde kullandığımız sayı sistemindeki karşılığı, bir tane 10 ve bir tane 1, (10+ 1) yani 11

X X I I I : Günümüzde kullandığımız sayı sistemindeki karşılığı, iki tane 10 ve üç tane 1, (10+10+1+1+1) yani 23

Siz de 12 ve 33 sayılarını Roma sayı sisteminde yazınız.

Sayıların, günümüzde kullanılan onluk sayı sistemindeki gösterimi ile Roma uygarlığının geliştirdiği sayı sistemindeki gösterimini karşılaştırınız. Neler söyleyebilirsiniz? Açıklayınız.

3. Babilliler, şu anda kullanılan bir ve on sayıları için aşağıdaki sembolleri kullanmışlardır:

Babil Sayı Sisteminde Kullanılan Semboller		
Günümüzde Kullanılan Sayı Sistemindeki Karşılığı	1	10

Tarihi kayıtlara göre “basamak” ve “basamak değeri” fikrini kullanan ilk uygarlığın Babilliler olduğu bilim adamları tarafından ifade edilmektedir. Ayrıca, onların kullandığı sayı sistemi altmışlık sayı sistemidir (Altmışlık sayı sisteminden kasıt, her bir basamakta en fazla 59’un ifade edilebilmesidir, saatin dijital bir saatte gösterildiği gibi). Sayıları yazarken de her bir basamak yanındakiyle herhangi bir noktalama işareti ile ayrılmıştır.

Örneğin, günümüzde kullanılan **yetmiş iki** sayısı Babil sayı sisteminde  ;  biçiminde yazılmaktadır. Soldaki  sembolü 60’ı, sağdaki  sembolleri 12’yi temsil etmektedir. Başka bir deyişle altmışlık sayı sistemini kullanan Babilliler, 72’yi 60+12 olarak görmüşlerdir.

Sizce, günümüzde kullanılan **iki yüz on iki** ve **dört bin iki yüz seksen bir** sayıları, Babil sayı sisteminde nasıl yazılırdı? Açıklayınız.

Babil sayı sisteminde  ;  ;  şeklinde ifade edilen sayının günümüzde kullandığımız onluk sayı sisteminde hangi sayıya karşılık geldiğini yazınız ve neden bu şekilde yazdığınızı açıklayınız.

Sayıların, günümüzde kullanılan onluk sayı sistemindeki gösterimi ile Babil uygarlığının geliştirdiği sayı sistemindeki gösterimini karşılaştırınız. Neler söyleyebilirsiniz? Açıklayınız.

4. Dijital bir saatte “ 10:25:59” sembolleri görülmektedir. Siz bu gösterimden ne anlıyorsunuz? Açıklayınız.

“10:25:59” gösterimi sizce kaç basamaklıdır? Açıklayınız.

EK-2 GÖRÜŞME FORMU

Roma sayı sisteminde basamak değeri var mıdır?

Çıkarmalı yönünden baktığında, Roma sayı sisteminde basamak değeri var mıdır?

Roma sayı sisteminde basamak değeri olması için ne lazımdı?

Onluk sayı sisteminde, en sağdaki basamak her zaman birler basamağı mıdır?

Sence bu ondalık sayı kaç basamaklı? Bu sayıyı bana çözümler misin?

Ölçek sorularındaki dijital saat örneğinde “10: 25: 59” gösterimi vardı. Bu gösterime basamaklı demişsin. Peki senden bu gösterimi çözümlemeni istesem nasıl yaparsın?

Sadece aşağıdaki sembollerin kullanıldığı basamak fikrine dayanan bir sayı sisteminde, her basamakta yalnız bir sembol yer almaktadır. Aşağıdaki sembolleri inceleyiniz:

Bahsedilen Sayı Sisteminde Kullanılan Semboller	δ		$\vee$	$\sqsupset$	$\square$	$\square$ (diagonal line)
Günümüzde Kullanılan Sayı Sistemindeki Karşılığı	0	1	2	3	4	5

Bu sayı sistemini kullanan bir toplulukta $\vee$ | $\square$ ile $\square$ δ sayıları toplansaydı, sonuç aynı sembollerle nasıl gösterilirdi? Açıklayınız.

$\vee$ ve $\vee \delta$ ile gösterilen iki sayıyı göz önüne alalım. $\vee$ sembolünün bu iki sayıda ifade ettiği miktarları karşılaştırınız.

Aşağıdaki şekil bir elektrik sayacını temsil etmektedir:

--	--	--	--

Bu kutucukların her birinde 0,1,2,3,4,5 sembolleri dışında başka bir sembol bulunmamakta ve her kutucukta bu sembollerden sadece birisi görünmektedir.

Sayaç okuma memuru sayaçtaki kutucuklarda soldan sağa sırasıyla 1, 2, 0, 4 sembollerini görmüştür. Bugünkü sayı sistemine göre, sizce kaç birim elektrik tüketilmiştir? Cevabınızı açıklayınız.

Sayaçtaki 2 sembolü hangi basamakta yer almaktadır? Neden? Açıklayınız.