

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**İNCE FİLM DENKLEMİ İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:
Feyyaz MARANGOZ

İSTANBUL, 2014

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**İNCE FİLM DENKLEMİ İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Feyyaz MARANGOZ

Öğrenci No:

120860003

Danışman:

Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

İSTANBUL, 2014

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**İnce Film Denklemi İçin Cauchy Probleminin Sayısal Çözümü**” başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yazmam esnasında işim dolayısı ile edindiğim bilgi, beceri ve tecrübelerimi kullandığımı ve çalışmamda yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir onurumla doğrularım. 22/10 / 2014

Feyyaz MARANGOZ



T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 120860003 no'lu Feyyaz MARANGOZ'un 22/10/2014 tarihinde yapılan tez savunma sınavı¹ sonucunda 50 (Elli) dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında² oybirliğiyle, kabul kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

Anabilim Dalı : Matematik-Bilgisayar
Programı : Uygulamalı Matematik
Tez Başlığı³ : İnce Film Denklemi İçin Cauchy Probleminin Sayısal Çözümü

Tez Sınav Jürisi

Öğretim Üyesi

İmza

Danışman : Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL
Üye : Prof.Dr. Mahir RESULOV
Üye : Yrd.Doç.Dr. Kenan ŞENTÜRK



¹ Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

² Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında “kabul”, “düzeltme” veya “red” kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi başarısız bulunan öğrencinin Enstitü ile ilişkisi kesilir. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. Bu savunma sınavında da tezi kabul edilmeyen öğrencinin enstitü ile ilişkisi kesilir. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

³ İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

ÖNSÖZ

Bu tez konusunu bana öneren, tezimin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, yüksek lisans öğrenimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV ile Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL'a en içten saygılarımı sunar, teşekkür ederim.

Feyyaz MARANGOZ

İstanbul, 2014

İNCE FİLM DENKLEMİ İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Tezi Hazırlayan: **Feyyaz MARANGOZ**

ÖZET

Çeşitli fiziksel uygulamalarda ortaya çıkan ince film denklemi, katı bir yüzey üzerinde ince viskoz sıvı filmlerin yüzey-gerilim odaklı evrimini tanımlar. Uygulama alanları boya ve diğer yüzey kaplamalarının akış davranışını, kimyasal ve nükleer reaktör tasarımını, tarımla ilgili kimyasal madde uygulamalarını, ayrıca kornea üzerindeki ve akciğerlerdeki ince filmleri içeren bir çok biyoakışkan uygulamalarını içerir. Matematiksel olarak, dördüncü mertebeden dejenere olan bir difüzyon denklemidir. Bu tür denklemlerin analizi nonlinearlik ve yüksek mertebe nedeniyle iki kat daha karmaşıktır.

Tezin ilk bölümünde gereken alt yapı ve gerekli bilgi verildikten sonra, sınırlı bir bölgenin kenarları boyunca sıfır temas açısına sahip viskoz bir sıvının akışını modelleyen dördüncü mertebeden dejenere olan difüzyon denkleminin sönümlene davranışı araştırılmıştır.

Son bölümde ise, dördüncü mertebeden dejenere olan difüzyon denkleminin çözümünün asimptotik davranışı incelenmiştir. Problemin klasik çözümünün olmayışı nedeniyle zayıf çözüm kavramı dahil edilmiştir. Denklemin çözümü için esas probleme göre bazı avantajlara sahip olan özel bir yardımcı problem önerilmiştir. Bu yardımcı problem kullanılarak, sayısal çözümün belli anlamda gerçek çözüme yakınsadığı ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Cauchy, İnce Film Denklemi, Problem

NUMERICAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THIN FILM EQUATION

Thesis Prepared by: **Feyyaz MARANGOZ**

ABSTRACT

The thin-film equation arising in numerous physical applications describes the surface-tension-driven evolution of thin viscous liquid films on a solid surface. The application areas include flow behavior of paints and other surface coatings, chemical, and nuclear reactor design, agrochemical applications, as well as several biofluid applications including thin films on the cornea and in the lungs. Mathematically, it is a fourth-order degenerate diffusion equation. The analysis of such equations is doubly complex due to the nonlinearity and the high order.

After the required background and the necessary information are given in the first chapter of the thesis, the extinction behavior of a fourth order degenerate diffusion equation in a bounded domain that models the flow of a viscous fluid over the edges at which zero contact angle conditions has been studied.

In the last chapter, we analyze the asymptotic behavior of the solution to the fourth order degenerate diffusion equation. Since the problem has no classical solution, a weak solution has been introduced. For the solution of the equation, a special auxiliary problem having some advantages over the main problem has been proposed. Using the auxiliary problem, the convergence of the numerical solution to the exact solution is proven.

Key Words: Cauchy, Thin Film Equation, Problem

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
1. GİRİŞ	1
1.1 Moleküller Arası Kuvvetlerin Tesirleri	1
1.1.1 Viskozluk	2
1.1.2 Yüzey Gerilimi ve Yüzey Enerjisi	2
1.1.3 Kılcallık	3
1.2 Temas Açısı-Young Denklemi	4
1.3 Temas Açısı Gecikmesi	6
1.4 İnce Film Denkleminin Sınırlı Bölgede Asimptotik Davranışı	8
1.4.1 Sonsuz Zaman Sönümlenmesi $0 < n < 2$	11
1.4.2 Kararlı ve Yarı-Kararlı Davranış	11
1.4.3 Lineer ve Zayı Nonlineer Durumlar	15
1.4.4 Sonlu Zaman Sönümlenmesi: $n < 0$	17
1.4.5 $n < 1/2$ İçin Başlangıç Kütle Artışı	23
1.4.6 Tartışma	25
2. İNCE FİLM DENKLEMİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	29
2.1 Asimptotik Çözümün Diferansiyellenebilme Özellikleri	29
2.2 Yardımcı Problem	34
2.3 Sayısal Algoritmalar	35
2.3.1 Aşık Şemalar	37
2.3.2 Kapalı Şemalar	37

SONUÇ	42
KAYNAKLAR	43

1. GİRİŞ

Islanma konusu hem temel hem de uygulama bakış açısından muazzam ilgi çekmektedir. Petrol çıkarma, yağlama, sıvı kaplama, baskı ve püskürtmeli (sprey) yangın söndürme gibi pek çok endüstriyel prosesinde önemli rol oynamaktadır. Son yıllarda, kendi kendini temizleme, nanoakışkanlık ve elektro-ıslanma gibi potansiyel uygulamalarından ötürü süper-hidrofobik yüzeylerin çalışılmasında artan bir ilgi vardır. Islanabilirlik çalışmaları genellikle birincil veri olarak bir katı ve sıvının etkileşimindeki ıslanma derecesini gösteren temas açılarının ölçülmesini içerir. Küçük temas açıları ($< 90^\circ$) yüksek ıslanabilirliğe karşılık gelirken, büyük temas açıları ($> 90^\circ$) düşük ıslanabilirliğe karşılık gelir.

Bu bölümde ıslanma ve temas açısı olgularının arkasındaki temel bilgileri sunulacaktır.

1.1 Moleküller Arası Kuvvetlerin Tesirleri

Bir sıvı içinde moleküller arasında kohezyon kuvvetleri vardır ve bu çekim kuvvetleri molekülleri bir arada tutar. Bu kohezyon kuvvetleri ile bir sıvı belli bir hacime sahip olduğu halde gazlarda bu çekim kuvvetleri çok zaman ihlal edilebilir. Moleküller arası kuvvetlerin tesirlerinden birisi de adhezyondur. Adhezyon, bir cismin diğer bir cisim üzerine yapışmasıdır. Pudra ve toz hemen hemen her şey üzerine yapışır. Su, cama yapışır (adhezyon yapar), yağ, suya ve boya duvarlara yapışır. Bunlar moleküller arası kuvvetlerin tesirlerini gösteren çok açık örneklerden birkaçıdır. Madenler üzerine sürülen yağın yağlama özelliği de diğer faydalı bir örnektir. Gazların katılara adhezyon yapmalarına gazların adsorpsiyonu (massedilme) adı verilir. Örneğin, bir mangal kömürü yüzeyi pek çok gaz moleküllerini kendisine çeker.

Bir sıvının özelliklerini moleküller arası kuvvetleri hesaba katmadan izah edilemez. Bu kuvvetlerin varlığı neticesinde sıvının gaz haline geçmesi önlenir. Buharlaşıma olayında bazı moleküller komşu moleküllerin çekimlerinden kaçarlar. Bu işlem bir iş yapılmasını gerektirir. Sıvı molekülleri arasındaki bu çekim kuvvetleri sıvı yüzeylerinin gergin bir zar gibi davranmasına ve osmoz olayına sebep olurlar. Bu kuvvetlerin yaşayan organizmalardaki çok karışık tesirlerinin biyofizik adı verilen yeni bir ilimde sayısız örnekleri vardır.

Sıvılarda bu moleküller arası kuvvetlerin sebep oldukları üç özel tesir vardır: 1) Viskozluk, 2) Yüzey gerilimi, 3) Kılcallık.

1.1.1 Viskozluk

Günlük tecrübelerimizde bazı sıvıların diğerlerinden daha çabuk ve kolaylıkla aktığını biliriz. Bal, gliserin, katran ve ağır yağlar gibi bazı sıvılar mükemmel olmaktan çok uzaktırlar ve bunlara viskoz sıvılar adı verilir. Bu sıvılar viskozluk denilen özelliğe sahiptir ve bu da sıvının iç sürtünmesinin bir neticesidir. Bir sıvının hareketi, komşu tabakaların birbirleri üzerinde kayması gibi düşünülebilir ve temasta olan sıvının tabakaları arasındaki iç sürtünmeye viskozluk adı verilir.

1.1.2 Yüzey Gerilimi ve Yüzey Enerjisi

Su sineği gibi bazı böceklerin bir su yüzeyi üzerinde yürüdükleri (kaydıkları), bir musluktan damlayan su damlalarının bir müddet asılı kalarak bir armut biçimini aldıktan sonra düştükleri, dağılan cıva damlalarının bir araya toplanması çok iyi bilinen gerçeklerdir. Çelikten kuru bir iğne veya bir jilet bıçağı dikkatli davranılırsa bir su yüzeyi üzerinde yüzdürülebilir. Bütün bu gözlemlerle bir sıvı yüzeyinin, bu sıvıyı örten gergin ve esnek bir zar (veya film) gibi tesir ettiği anlaşılır. Bir sıvı yüzeyinde, bu yüzeyin büzülmesine (çekilmesine) çalışan tesire yüzey gerilimi adı verilir.

Bir sıvı yüzeyinin neden gergin ve esnek bir zar gibi davrandığı sıvı yüzeyindeki moleküllere tesir eden kohezyon kuvvetleri ile izah edilebilir. Sıvı yüzeyindeki moleküller üzerine tesir eden bu kuvvetlerle bu moleküller sıvının içerisine doğru hareket etmeye çalışacaklardır. Bunun neticesi sıvı yüzeyi büzülme (çekilme) isteyecek ve mümkün olan en küçük yüzeyi alacaktır. Buna göre 1) sıvı yüzeyi, bu sıvıyı örten bir zar gibi tesir eder. 2) Verilen bir sıvı hacmi için bu yüzeyin yüz ölçümü minimum olur.

Küre, verilen bir hacim için minimum bir yüzeye sahip geometrik bir şekil olduğu için sıvıların küresel bir biçim alması beklenir. Yalnız yerçekimi gibi kuvvetlerin karşılanmasına dikkat edilmesi gerekir. Plateau (1801-1883) bir yağ damlasını, aynı yoğunluktaki bir alkol ve su karışımı içine koydu. Yağ damlasının ağırlığı karışımın kaldırma kuvveti ile dengelendiği için yer çekiminin damla üzerindeki tesiri karşılandı ve damlanın tam bir küre şeklini aldığı gözlemlendi. Gözlemler masa üzerindeki küçük bir cıva damlasının, havada düşen bir yağmur (su) damlasının ve bir sabun kabarcığının (sabun balonu) küresel olduğunu gösterdi. Bir musluktan damlayan armut biçimli su damlaları, ancak yer çekimi ile deforme olmuş bir yağmur damlasıdır. Saçma taneleri, erimiş ince bir

kurşun akımını uzun bir kule (fırın) den akıtarak yapılır. Yüzey gerilimi kuvvetleri sebebiyle, bu akım küçük küresel damlalara ayrılır.

Bir sıvı yüzeyi esnek ve gergin bir zar gibi tesir ettiği için kabaca gerilmiş bir kauçuk zara benzetilebilir. Sıvı yüzeyinin bir çizgi boyunca kesildiğini düşünelim. Bu çizginin iki tarafında yüzeyin çekilmesini (büzülme) temin eden AB ye dik eşit ve zıt iki kuvvet tesir eder. Bir sıvının σ yüzey gerilimi veya yüzey gerilimi katsayısı bu yüzeyi kesen bir çizginin birim uzunluğu başına tesir eden ve bu çizgiye dik olan çekim kuvvetidir. Bu tarife göre yüzey gerilimi katsayısı gerçek bir kuvvet olmayıp bir kuvvetin bir uzunluğa bölümüdür. Bunun için yüzey gerilimi katsayısının boyutu MT^{-2} olur ve santimetre başına din veya metre başına newton ile ölçülür. Uzunluğu x olan bir sınır çizgisi için yüzey gerilimi kuvvetinin değeri $F = \sigma x$ olacaktır. Yüzey gerilimi verilen bir sıcaklıkta belli bir sıvı için bir sabittir.

Bir sıvı yüzeyi kendiliğinden büzüldüğü (çekildiği) için sıvının serbest yüzeyinin genişletilmesinde bir iş yapılması gerekir. Bir sıvının yüzey gerilimi, bu sıvının yüzeyini izotermik şartlar altında 1 cm^2 arttırmak için yapılan işe eşittir. Bu potansiyel enerjiye serbest yüzey enerjisi adı da verilir.

Mekanikte çok iyi bilinen bir prensibe göre bir cismin potansiyel enerjisi minimum olduğu vakit bu cisim kararlı denge halindedir. Bu prensibe göre verilen bir sıvı hacminin, yüzey gerilimi kuvvetlerinin tesiri ile minimum bir yüzey alması gerekir. Bu da bir küre biçimindedir.

1.1.3 Kılcallık

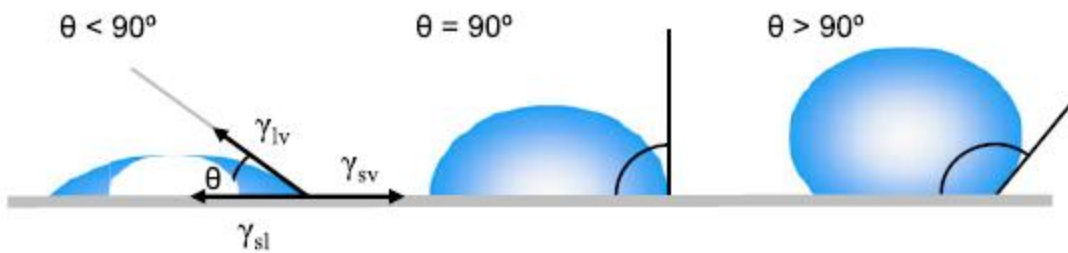
Kılcal borular adı verilen çok küçük çaplı borularda suyun yükselmesi için çok tanınan bir olaydır. Bitki özsu (usare) nun ağaçlardaki yükselmesi kısmen kılcallık tesiri ile olur. Su kayalardaki yarıklar ve çatlaklardan yukarıya doğru tırmanır ve çok zaman donarak kayaların parçalanmasına sebep olur. Toprak sürülmezse, su topraktaki gözeneklerden yukarı tırmanır ve buharlaşarak toprağın kurummasına sebep olur.

Kılcal borularda sıvıların yükselmesi veya alçalması olayına kılcallık adı verilir. Mürekkebin kurutulmasında kullanılan kurutma kağıdı, mürekkep üzerine bastırılınca, sıvı kağıdın gözeneklerinden derhal yükselir, yani mürekkep emilir. Kılcallık tesiri, bir yandan sıvı ve katı molekülleri arasındaki çekimden (adhezyon kuvvetleri) diğer yandan yüzey geriliminden ileri gelir. Adhezyon kuvvetleri kohezyon kuvvetlerinden büyük veya küçük olabilir.

Yüzey geriliminin tesiri ile sıvı molekülleri minimum yatay bir yüzey almaya zorlanacaktır. Katı çeperinin çekimi ile de bu moleküller düşey bir zar halinde çepere tırmanırlar. Neticede bu iki tesirle sıvı yüzeyi belli bir θ açısı ile yükselmiş olur. Bu θ açısına, yani katının sıvı içindeki yüzeyi ile sıvının katı ile birleştiği yerde bu sıvı yüzeyine çizilen teğet arasındaki açıya temas veya değme açısı adı verilir. Bu açı daima sıvı içinde gösterilir. Verilen iki yüzey arasındaki temas açısı, bu yüzeylerin tazeliği ve temizliği ile fazlaca değişir. Bir yüzeyi ıslatan sıvılarda temas açısı çok küçük olup 0° alınabilir. Cam temiz değilse bu açı 8° olabilir. Halbuki civa bir cam kılcal boru içinde yaklaşık olarak 150° lik bir temas açısı ile konveks bir menisk teşkil eder. Temiz bir cam yüzeyi üzerine düşen su damlaları yayılır ve camı ıslatır. Halbuki civa parçaları küçük yuvarlak halinde toparlanır ve camı ıslatmaz.

1.2 Temas Açısı-Young Denklemi

Düz ve yatay katı yüzey üzerinde serbest duran bir sıvı damlasını göz önüne alalım (Şekil 1). Temas açısı sıvı-katı arayüzü ve sıvı-buhar arayüzünün kesişimi ile oluşan açı olarak tanımlanır (Geometrik olarak damlacık profilindeki sıvı-buhar arayüzü üzerindeki temas noktasından teğet doğrusu çizilerek elde edilir). Katı, sıvı ve buhar fazlarının aynı anda mevcut olduğu arayüz “üç fazlı temas doğrusu” olarak isimlendirilir. Şekil 1, sıvı yüzey üzerinde yayıldığında küçük (dar) bir temas açısı görülürken sıvı yüzey üzerinde boncuk gibi durduğunda büyük (geniş) bir temas açısı gözlemlendiğini göstermektedir.



Şekil 1: Düzgün homojen katı yüzey üzerindeki sıvı damlalarının oluşturduğu temas açılarının gösterimi

Daha spesifik söylersek, doksan dereceden küçük bir temas açısı yüzeyin ıslanmasının beklendiğini ve akışkanın yüzey üzerinde geniş bir alanda yayılacağını belirtirken, doksan dereceden büyük bir temas açısı genellikle yüzeyin ıslanmasının beklenmediğini ve bundan dolayı akışkanın yüzeye temasını en aza indireceğini ve kompakt bir sıvı damlacığı oluşturacağını belirtir. Örneğin, temas açısı sıfır olduğunda damlacık düz bir su

birikintisine dönüşürken komple bir ıslanma meydana gelir. Süper-hidrofobik yüzeylerde su temas açıları çoğunlukla 150 dereceden büyüktür. Sıvı damla ve yüzey arasında neredeyse temas yoktur ve “lotus etkisi” ortaya çıkabilir. Dahası, temas açıları katı üzerindeki sıvı-buhar arayüzüyle sınırlı değildir ve katı üzerindeki sıvı-sıvı arayüzüne de uygulanabilir.

İdeal olarak, sıvı damlacığının biçimi sıvının yüzey gerilimi tarafından belirlenir. Saf bir sıvıda, kütle içindeki her molekül komşu sıvı molekülleri tarafından eşit şekilde çekilir ve net kuvvet sıfır olur. Ancak, yüzeye değen moleküller dengede net bir kuvvet sağlayacak tüm yönler komşu moleküllere sahip değildir. Bunun yerine komşu moleküller tarafından içeri doğru çekilirler (Şekil 2) ve bu bir iç basınç yaratır. Sonuç olarak, sıvı en düşük yüzey serbest enerjisini sürdürmek için gönüllü olarak yüzey alanını küçültür.



Şekil 2: Yüzey gerilimi yüzeydeki sıvı moleküllerinin dengede olmayan kuvvetleri tarafından oluşturulur

Günlük yaşamdan biliyoruz ki küçük damlacıklar ve kabarcıklar küreseldir ve bu sabit hacimde en küçük yüzey alanını verir. Yüzeyi daraltan moleküllerarası kuvvete yüzey gerilimi denir ve sıvı damlacıkların biçiminden sorumludur. Pratikte, yerçekimi gibi dış kuvvetler damlacığının formunu bozarlar ve bunun sonucunda temas açısı yüzey gerilimi ve dış kuvvetlerin (genellikle yerçekimi) kombinasyonu ile belirlenir. Teorik olarak, temas açısının belirli bir çevrede verilen bir katı-sıvı sistem için karakteristik olması beklenir.

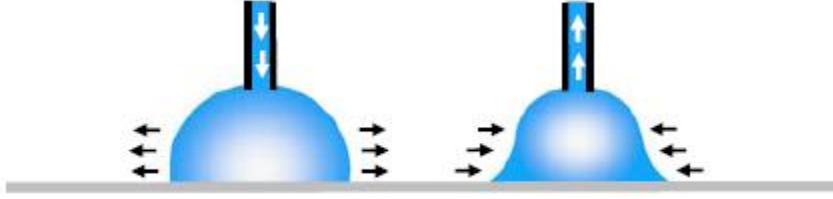
1805 yılında Thomas Young tarafından ilk kez betimlendiği gibi [21], ideal bir katı yüzey üzerindeki bir sıvı damlasının temas açısı, üç arayüzey geriliminin (Şekil 1) eylemi altındaki damlanın mekanik dengesi ile tanımlanır:

$$\gamma_{lv} \cos \theta_Y = \gamma_{sv} - \gamma_{sl}$$

Burada γ_{lv} , γ_{sv} , γ_{sl} sırasıyla sıvı-buhar, katı-buhar ve sıvı-katı arayüz gerilimlerini ve θ_Y temas açısını simgelemektedir. Bu eşitlik genellikle Young denklemi ve θ_Y Young temas açısı olarak bilinir.

1.3 Temas Açısı Gecikmesi

Spesifik bir katı-sıvı sisteme uygulanan Young denkleminde, üç termodinamik parametre γ_{lv} , γ_{sv} ve γ_{sl} tek ve benzersiz bir temas açısı θ_Y verir. Fakat pratikte katı üzerindeki bir damlacığın pek çok metastabil (yarı kararlı) durumları vardır ve gözlenen temas açıları genellikle θ_Y 'ye eşit değildir. Islanma olgusu sadece durgun bir durumdan olmaktan fazlasıdır. Sıvı katının temiz yüzeyine nüfuz etmek ve sonunda onu ıslatmak için hareket eder. Islanma davranışını karakterize etmek için durağan tek bir temas açısının ölçümü artık yeterli değildir. Eğer üç-fazlı temas hattı gerçek bir hareket halinde ise, oluşan temas açısı “dinamik” temas açısı olarak isimlendirilir. Özel olarak, genişleyen ve daralan sıvı tarafından oluşturulan temas açıları (Şekil 3) sırasıyla genişleyen temas açısı θ_a ve daralan temas açısı θ_r olarak adlandırılır.



Şekil 3: Genişleyen ve daralan temas açılarının gösterimi

Bu açılar bir aralığın içindedir ve genişleyen açılar maksimum bir değere yaklaşırken daralan açılar minimum bir değere yaklaşır. Dinamik temas açıları çeşitli hız oranlarında ölçülebilir. Düşük hızlarda, uygun şekilde ölçülmüş durağan temas açısına yakın veya eşit olmalıdır. Genişleyen açı ve daralan açı arasındaki farka gecikme (H) denir:

$$H = \theta_a - \theta_r$$

Temas açısı gecikmesinin önemi geniş şekilde incelenmiştir ve genel çıkarım gecikmenin yüzey pürüzlülüğü ve/ya heterojenliğinden kaynaklandığıdır. Homojen olmayan yüzeylerde temas hattının hareketini engelleyen bölgeler mevcuttur. Örneğin, su itici bölgeler suyun ön cephesi ilerlerken onun hareketini engeller ve gözlenen temas açısında bir artışa neden olur. Aynı bölgeler su gerilediğinde suyun ön cephesinin daraltıcı hareketini geri getirecektir ve böylece gözlenen temas açısında bir azalmaya sebep olur. Yüzey pürüzlülüğünün gecikmeyi sağlamada rol oynadığı durumlarda, yüzeydeki eğimin gerçek mikroskobik varyasyonları temas açısının hareketini sınırlayan ve makroskobik temas açılarını değiştiren engeller (bariyerler) yaratır. Söz konusu temas açısı verisini

Young denklemi ile yorumlamaya çalışmak yanıltıcı olabilir çünkü bu denklem yüzey topografyasını dikkate almaz.

Temas açısı olgularının karmaşıklığından ötürü deneysel olarak gözlemlenen temas açısı Young temas açısı θ_Y 'ye eşit olabilir de olmayabilir de. Ancak, ideal katı yüzeylerde temas açısı gecikmesi yoktur ve deneysel olarak gözlenen temas açısı Young temas açısı θ_Y 'ye eşittir. Düzgün ama kimyasal olarak heterojen yüzeylerde deneysel olarak gözlenen temas açısı θ_Y 'ye eşit olmayabilir. Yine de, deneysel genişleyen temas açısı θ_a 'nın, θ_Y 'yin iyi bir yaklaşımı olması beklenebilirken, deneysel daralan temas açısı θ_r sıvı emilimi veya katı şişmesi nedeniyle genellikle daha az tekrar-üretilebilirliğe sahiptir. Pürüzlü katı yüzeylerde θ_a ve θ_Y arasında genellikle bir ilişki yoktur. Pürüzlü yüzeylerdeki tüm temas açıları Young denklemi bakımından büyük ölçüde anlamsızdır. Pürüzlü ve heterojen yüzeyler üzerindeki termodinamik denge temas açıları sırasıyla Wenzel ve Cassie-Baxter açıları olarak isimlendirilir ve Young temas açılarına eşdeğer değildirler.

Temas açısı üzerinde belirgin bir etkiye sahip olmayan yüzey pürüzlülüğü için katı yüzeyin ne kadar pürüzsüz olması gerektiği ile ilgili genel kurallar henüz yoktur. Bundan dolayı katı yüzeyin mümkün olduğu kadar pürüzsüz ve kullanılan sıvılara özel hazırlanması önerilmektedir. Pürüzsüz homojen katı yüzeylerin hazırlanması için ısı presleme, çözücü döküm, kendi kendine toplanan tek-katmanlar, daldırma ile kaplama, buhar biriktirme ve yüzey parlatma gibi pek çok teknik geliştirilmiştir. Temas açısı ölçümü için 1960 da W.A Zisman tarafından dizayn edilmiş olan ilk gonyometre Şekil 4 de gösterilmiştir.



Şekil 4: Rame-hart temas açısı teleskop gonyometresi

1.4 İnce Film Denkleminin Sınırlı Bölgede Asimptotik Davranışı

$n > 0$ pozitif bir sayı olsun. Bilindiği üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^n \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1.1)$$

gözenekli ortam denkleminin uygun sınır koşulları $x = \pm 1$ de $u = 0$ çerçevesinde sönümlene davranışının açıklanmasındaki rollerini gösterebilmek için

$$t \rightarrow \infty \text{ iken } u \approx t^{-\frac{1}{n}} f(x), \quad (n > 0) \quad (1.2)$$

ve

$$t \rightarrow t_c^- \text{ iken } u \approx (t_c - t)^{-\frac{1}{n}} f(x), \quad -1 < n < 0 \quad (1.3)$$

cinsinden çözümler kullanılmaktadır, ([2], [7], [14]). Benzer bir sorun olan,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(u^n \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \quad (1.4)$$

ince film denklemini $n < 2$ için, akışkanın alt tabakanın kenarlarından akmasına izin vermeyen

$$x = \pm 1 \quad \text{iken} \quad u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

sıfır temas açısı koşulları ile birlikte ($u_0(x) \geq 0$ sonlu kütleyi göstermek üzere)

$$t = 0 \quad \text{iken} \quad u = u_0(x) \quad (1.6)$$

başlangıç koşulu çerçevesinde ele alacağız.

(1.4) de, $u(x, t)$, sonlu yatay bir alt tabaka ($|x| < 1$) üzerinde bulunan akışkan filmin tipik kalınlığını göstermektedir. (1.5) de verilen şartlar, $n < 2$ kısıtlamasını gerektirmektedir (bunun önemini ilerleyen kısımlarda açıklayacağız). (1.4) formundaki dördüncü mertebeden difüzyon denklemleri, özellikle yüzey gerilimi altında yayılan viskoz bir sıvının damlacıkları gibi bir takım fiziksel olayların incelenmesinde ortaya çıkmaktadır (etki eden kuvvet yer çekimi olduğunda ikinci mertebeden denklem (1.1) uygulanır). Bu durumu burada daha ayrıntılı açıklamayacağız, ayrıntılı bilgi için [3] e bakabilirsiniz. (1.4) denklemi yakın zamanda yapılmış bir çok çalışmanın konusu olmuştur, ([4], [6], [8]), ancak, bildiğimiz kadarıyla, (1.5) sınır şartları hakkında bir bilgi verilmemiştir; yarı sonsuz bölgelerde bu tür sınır-şartları hakkında daha kapsamlı bir tartışma, [9] de yapılmıştır. p ile basıncı ifade edersek, (1.4) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^n \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad p = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu aşamada, yerel davranışı $x \rightarrow 1^-$ iken tanımlamak yararlı olacaktır; eşdeğer tanımlar. $x \rightarrow (-1)^+$ iken verilebilir. (1.4) den

$$\frac{d}{dt} \int_{-1}^1 u dx = u^n \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=-1} - u^n \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=1} \quad (1.7)$$

elde ederiz. Burada

$$J(t) = u^n \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=1}$$

denklemini, $|x| < 1$ şeridi boyunca $x = 1$ kenarından bölgeyi terk eden malzemenin akışı olarak tanımlanmaktadır. [5] deki bulguları kullanarak ve yeniden düzenleyerek, aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz:

(I) $\frac{1}{2} < n < 2$ için, $x \rightarrow 1^-$ iken,

$$u \approx \left(\frac{(n+1)^3 J(t)}{3(2n-1)(2-n)} (1-x)^3 \right)^{\frac{1}{n+1}} + K(t) (1-x)^{\frac{1+4n+(1+20n-8n^2)^{\frac{1}{2}}}{2(n+1)}},$$

$$p \approx - \left(\frac{(n+1)^{-(2n-1)} (3(2-n))^n J(t)}{(2n-1)} (1-x)^{-(2n-1)} \right)^{\frac{1}{n+1}}. \quad (1.8)$$

elde ederiz. $J > 0$ dır ve K , çözümün bir parçası olarak belirlenmelidir. Yerel davranışın serbestlik derecesinin iki olmasına gerek duyulduğunu belirgin hale getirmek amacıyla u ya düzeltme terimleri eklenmiştir (J ve K nın (1.8) deki durumu).

Ayrıca belirtelim ki,

$$x \rightarrow 1^-, u \approx \left(\frac{(n+1)^3 J(t)}{3(2n-1)(2-n)} (1-x)^3 \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

denklemini, $n < 2$ için olası bir denge oluşturmakta, ancak yerel genişlemede, $J(t)$ ye ek olarak, iki serbestlik derecesi daha bulunmaktadır ($K(t)$ teriminin yanı sıra, $n < 2$ olduğunda,

$$L(t) (1-x)^{\frac{1+4n-(1+20n-8n^2)^{\frac{1}{2}}}{2(n+1)}}$$

miktarı eklenebilir), bu şekilde problem yeterince açık ifade edilememektedir. Üstelik, $n < 2$ için $J < 0$ olması akışkanın drenajından ziyade enjeksiyonuna karşılık gelmektedir.

Bu olasılığı burada daha fazla ele almak yerine, $-J$ pozitif bir enjeksiyon oranının alınmasının, $n < 2$ için, doğru şekilde belirtilmiş ve fiziksek olarak anlam ifade eden bir problemin elde edilmesini sağlayacağı düşünülmektedir.

(II) $n = 1/2$ için, $x \rightarrow 1^-$ iken,

$$\begin{aligned} u &\approx (3J(t)/4)^{2/3} (1-x)^2 \left(\log^{\frac{2}{3}}(1/(1-x)) - \log^{-\frac{1}{3}}(1/(1-x)) \log \log(1/(1-x))/3 \right) \\ &+ K(t)(1-x)^2 \log^{\frac{1}{3}}(1/(1-x)), \\ p &\approx -2(3J(t) \log(1/(1-x))/4)^{2/3}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

elde edilir.

(III) $n < 1/2$ için, $x \rightarrow 1^-$ iken yerel davranış

$$\begin{aligned} u &\approx B(t)(1-x)^2 - \frac{J(t)}{2B^n(t)(3-2n)(1-n)(1-2n)} (1-x)^{3-2n}, \\ p &\approx -2B(t) \end{aligned} \quad (1.10)$$

gerçekler. Burada B ve J , problemin çözümünün parçası olarak belirlenmiştir. $n < 2$ için $J > 0$ şartına gereksinim duyan (1.8) ve (1.9) un aksine, (1.10) yerel ifadesi J işaretine hiç bir kısıtlama getirmemektedir. Bu soruna ileride tekrar değinilecektir. Her durumda, bu şekilde $p < 0$ sınırlara yeterince yakın olmakta ($p \rightarrow -\infty$ ile, $1/2 < n < 2$ için $x \rightarrow 1^-$ olmak üzere), $p > 0$ u nun maksimum değerinde ve bu değere teğet durumdadır. Bu nedenle $u(x, t)$ profili, her bir t için en az iki dönüm noktası içermektedir.

Bölüm 1.4 ü aşağıdaki şekilde özetleyeceğimiz alt kısımlarla detaylandıracağız. Bölüm 1.4.1 de, (1.2) formuna öz benzer çözümler kullanılarak, $0 < n < 2$ için sonsuz sönümlenme süresi davranışı tanımlanmıştır. Bunu takiben, Bölüm 1.4.2 de, çözümlerin kararlı bir hale evrildiği $n > 2$ düzeni ele alınmıştır; bu aşamadan sonra, $n = 2$ de asimptotik davranışta görülen ani geçişi açıklamak için limit $n \rightarrow 2$ nin bir analizi yapılmıştır. Sonsuz sönümlenme zamanı rejimi $0 < n < 2$ yi sonlu sönümlenme zamanı $n < 0$ durumundan ayıran, diğer kritik durum $n = 0$, Bölüm 1.4.4 de çözümlenmiştir ve $n = 0$ daki geçiş, $n \rightarrow 0$ için limit davranışının analizi üzerinden incelenmiştir. Bölüm 1.4.5 de (1.2) çözümlerinin sönümlenme davranışının açıkladığı $n < 0$ durumu incelenmektedir; Ayrıca, $n \rightarrow -\infty$ limiti, davranışın zamana bağlılığı hakkında daha fazla fikir vermesi için analiz edilmektedir. Yeterince küçük n için, çözümler bir başlangıç ortaya koyabilir, maddesel olmayan kütlede artış meydana gelebilir ve negatif olabilir; bu durum Bölüm 1.4.6 da tartışılmıştır.

1.4.1 Sonsuz Zaman Sönümlenmesi: $0 < n < 2$

$0 < n < 2$ aralığında, (1.3) de verilen, $f(x)$ in başlangıç verisinden bağımsız olduğu, asimptotik davranışın çözümünün aşağıdaki şekilde olduğunu önermekteyiz:

$$\frac{d}{dx} \left(f^n \frac{d^3 f}{dx^3} \right) = \frac{1}{n} f, \quad (1.11)$$

$$x = \pm 1 \text{ de } f = \frac{df}{dx} = 0 \quad (1.12)$$

dır. Burada, çözüm, $|x| < 1$ de pozitif olmaktadır. Bu varsayımı desteklemek için 1.7. kısımda ek sayısal formülasyonda belirtilen sayısal yaklaşım kullanılmış, tipik olarak ortaya çıkan sonuçlar Şekil 5 de verilmiştir. Daha ileri örnekler, [9] da yer almaktadır.

(1.3)'den elimizde,

$$t \rightarrow \infty, \log_u(0, t) \approx -\frac{1}{n} \log t + \log f(0) \quad (1.13)$$

bulunmakta ve Şekil 5 bu tür bir davranışın sayısal kanıtını ortaya koymaktadır. Ayrıca Şekil 6 da ayrılabilir form (1.3) e yakınsaması, çeşitli t değerleri için x e karşı $t^{\frac{1}{n}}u$ ve $t^{\frac{1}{n}}p$ yi yerleştirerek gösterilmiştir; $f(x)$ in profilinin yeniden ölçeklendirilmiş kapalı çözümleri Şekil 6 (a) da verilmiştir.

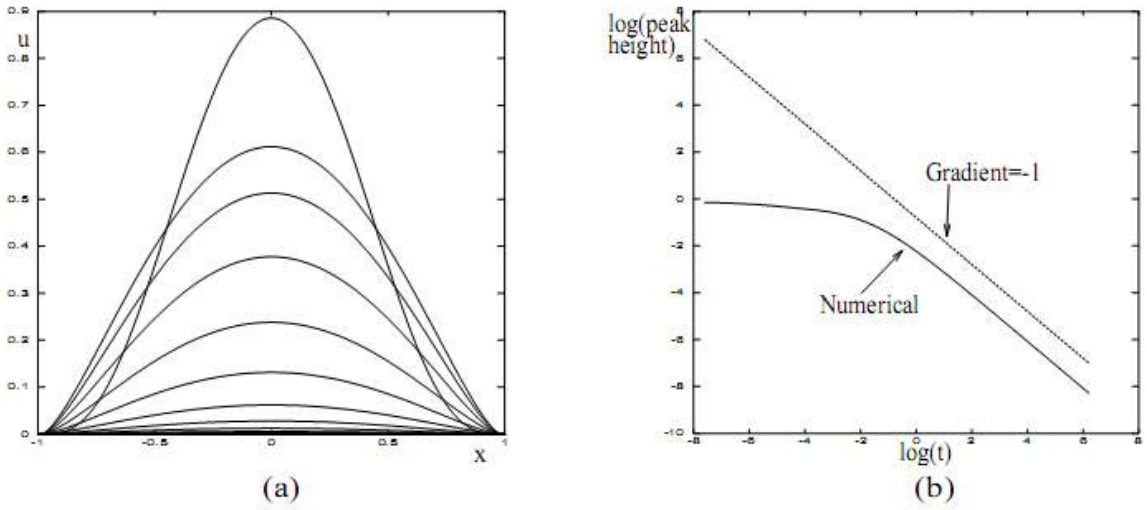
1.4.2 Kararlı ve Yarı-Kararlı Davranış

I. $n \geq 2$ durumu:

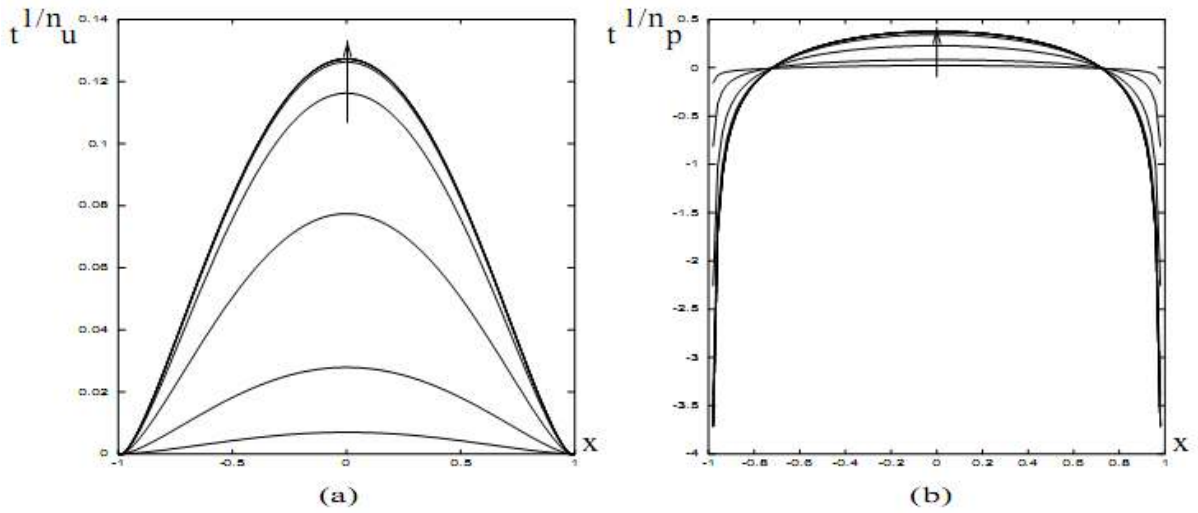
n değeri 2 ye doğru arttığında, bazıları ifadenin açılımında kapalı olan, [5] de açıklanan sebeplerden dolayı, sıfır temas açısı şartları (4) $n \geq 2$ için uygulanamaz. Onun yerine, uygun çözümler kütleyi korurlar, bu durumda şartlar

$$x = \pm 1, \quad u = u^n \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1.14)$$

$x = \pm 1$ de en akıcı halde olan çözümlerde (1.5)'in yerini almaktadır



Şekil 5: $n = 1$ için sayısal çözümler. **(a)** $u(x,t)$ çözümü, u maksimum değerinin zaman ile azalması. **(b)** (12) nin sayısal doğrulaması; kalın çizgi $\log u(0,t)$ için sayısal sonuçları vermektedir ve kesikli doğrunun eğimi -1 dir.



Şekil 6: **(a)** u ve **(b)** p nin $n=1$ için ayrılabilir çözümleri için ayrılabilir çözüme yakınsaklığını ifade eden grafik. Oklar artan t yi göstermektedir.

Şartlar (1.14), esasında her hangi bir n değerine uygulanabilir ve

$$t \rightarrow \infty, \quad u \approx \frac{3}{4} M_0 (1 - x^2) \quad (1.15)$$

olduğunda,

$$M_0 = \int_{-1}^1 u_0(x) dx$$

toplam kütleyi ifade eder. Eğer $n \geq 3$ ise, arayüzeyler, örneğin u sıfıra düştüğü zaman x in aldığı değer değişmez, [15], bu rejime ilişkin tartışmalara burada daha fazla yer vermeyeceğiz.

II. $n \rightarrow 2^-$ olması hali:

Belirtildiği gibi, sınır değerleri en düzenli çözüm için, $n < 2$ (sönümlenme) için geniş zaman davranışı $n \geq 2$ (kararlı halden) farklıdır. Bu ani geçiş hakkında fikir sahibi olabilmek için limit $n \rightarrow 2^-$ alındığında, beklendiği gibi, $t \rightarrow \infty$ ve $n \rightarrow 2$, kilit bir rol oynayan yavaş şekilde sönen yarı-kararlı çözüm, birbirlerine çevrilememektedir.

$t = O(1)$ için $n = 2 - \varepsilon$ yazarız, baş terim çözümü $u \approx U_0(x, t)$, $n = 2$ ile $\varepsilon \rightarrow 0$ (1.4)-

(1.5) ün doğrulaması olmaktadır, bu durumda (1.15) den

$$t \rightarrow \infty, \quad U_0(x, t) \approx \frac{3}{4} M_0 (1 - x^2) \quad (1.16)$$

Evrilmenin ikinci fazı $T = \varepsilon t = O(1)$ zaman çizelgesinde meydana gelir.

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial T} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{2-\varepsilon} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)$$

baş terimi $x = \pm 1$ den ıraksanır,

$$T = O(1), x = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad u \approx A_0(T) (1 - x^2), \quad p \approx 2A_0(T) \quad (1.17)$$

burada, belirli bir işlev için, $A_0(t)$ henüz belirlenememiştir. $x = 1$ e yakın baş terim sınır katman çözümü hemen, $J(T; \varepsilon) \approx \varepsilon J_0(T)$ ile (1.8)'den okunabilir. Böylece $v = u/(1 - x)$ nin başterime şu şekilde verilerek,

$$T = O(1), \ln(1 - x) = O(1/\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad v_0 = (3J_0(T))^{1/3} \exp(\varepsilon \ln(1 - x)/3) \quad (1.18)$$

burada sınır tabakasının uzunluk ölçeği üssel olarak ε de küçüktür; diğer sınır katmanı, $x = -1$ e yakın olan, aynı formu alır. (1.17) ve (1.18) ile eşleştirilmesi aşağıdaki ifadeyi ortaya çıkarır.

$$A_0(T) = (3J_0(T))^{1/3} / 2 \quad (1.19)$$

A_0 ve J_0 için ikinci bir ilişki bir sonraki derecede çözülebilirlik koşulu olarak çıkarılabilir veya daha basit şekilde, kütle sonucunun korunmasıyla elde edilebilir (1.7), ve şu şekilde yazılabilir.

$$\frac{d}{dt} \int_{-1}^1 u dx = -J_+(t) - J_-(t) \quad (1.20)$$

burada,

$$J_+ = J = u^n \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=1}, \quad J_- = -u^n \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=-1};$$

(1.17) dan, baş terim geniş zaman davranışı x de simetriktir ve (1.20) şu ifadeye açılır.

$$\frac{4}{3} \frac{dA_0}{dT} = -2J_0 \quad (1.21)$$

(1.21) ile (1.19) i birleştirdiğimizde ve (1.16) ile eşleştirdiğimizde şu ifadeyi elde ederiz,

$$A_0 = \frac{3M_0}{4} / \left(1 + \frac{9M_0^2}{8} T\right)^{\frac{1}{2}}, \quad J_0 = \frac{9M_0^3}{8} / \left(1 + \frac{9M_0^2}{8} T\right)^{\frac{3}{2}},$$

ve bu şekilde

$$n \rightarrow 2, \quad f(x) \approx \frac{1}{(2(2-n))^{\frac{1}{2}}} (1-x)^2 \quad (1.22)$$

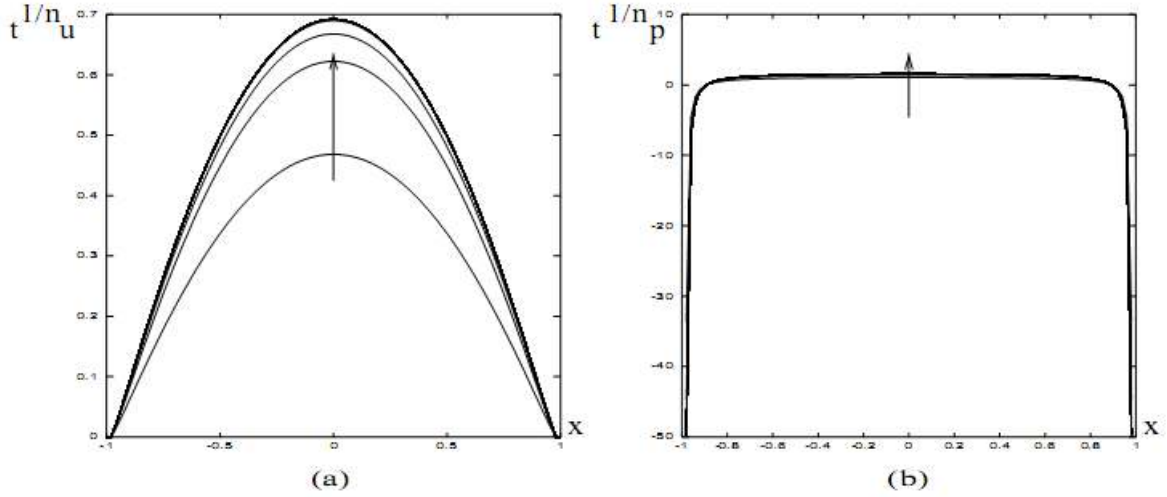
$$T \rightarrow \infty, \quad A_0 \approx 1/(2T)^{\frac{1}{2}}, \quad J_0 \approx 2^{\frac{3}{2}} / 3T^{\frac{3}{2}}$$

elde edilir ve

Bu ifade, gerektirdiği gibi, başlangıç verilerine bağımlı değildir. Şekil 7, (1.17) nin sayısal doğrulamasını göstermektedir, burada, Şekil 7 (b) de sınır katmanlarının belirgin şekilde görünür olduğu görülmektedir; ancak, yukarıda yer alan analizlerin p için tam asimptotik yapıları vermediğini, $x = 1 - \varepsilon X$ in ek ölçeklendirmesinin

$$T = O(1), \quad X = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad p \approx 2A_0 - J_0 / 4A_0^2 X$$

ile gerektiğini belirtmek isteriz.



Şekil 7: (a) u ve (b) p nin $n = 1.99$ için ayrılabilir çözümleri için ayrılabilir çözüme yakınsaklığını gösteren grafik. Üçüncü ve dördüncü defa gösterilenler $t \approx 16$ ve $t \approx 190$ dır ve n nin ikiye yavaş evrilmesini ortaya koymaktadır.

Bu şekilde, n ikiye doğru artarak bu durum devam eder, n ikiye aşağıdan yaklaştıkça, çözüm daha uzun sürer ve (1.16) dan farklılaşarak evrilmeye başlar.

1.4.3 Lineer ve Zayıf Nonlineer Durumlar

I. Lineer durum:

$n = 0$ için, başlangıç verilerini denkleştirmek amacıyla kısa ve öz yazmak için kendimizi kısıtlayarak, (3)-(4), değişkenlerine ayırmayla kolaylıkla çözülebilir:

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda_m^4 t} A_m (\cosh(\lambda_m) \cos(\lambda_m x) - \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m x)) \quad (1.23)$$

Burada;

$$A_m = \frac{\int_{-1}^1 u_0(x) (\cos(\lambda_m x) \cosh(\lambda_m) - \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m x)) dx}{\cosh^2(\lambda_m) \left(1 - \frac{\sin(2\lambda_m)}{2\lambda_m}\right) + \cos^2(\lambda_m) \left(1 - \frac{\sinh(2\lambda_m)}{2\lambda_m}\right)}$$

ve λ_m , $\tanh \lambda + \tan \lambda = 0$ 'ın pozitif kökleridir. Sonsuz zaman sönümlenmesi, yeniden gerçekleşir, fakat ayrılabilir geniş zaman çözümü, t ile birlikte, cebirsel olarak değil, katlanarak azalır,

$$t \rightarrow \infty, \quad u(x, t) \approx e^{-\lambda_0^4 t} A_0 (\cosh(\lambda_0) \cos(\lambda_0 x) - \cos(\lambda_0) \cosh(\lambda_0 x)) \quad (1.24)$$

formülünde $\lambda_0 \approx 2.365$. Analitik çözüm (1.23), sayısal çözümün doğruluğunu onaylamak için faydalı bir yol sunmaktadır, [9].

II. $n \rightarrow 0$ olması hali:

“Nispeten lineer olmayan” limit $n \rightarrow 0$ ı çözümlemede, $n = 0$ için elde edilen sonuçlardan faydalanılabilir. $t = O(1)$ için, $n \rightarrow 0$ iken baş terim çözümü (1.23) de verilmektedir, fakat daha uzun zaman ölçekli $T = nt = O(1)$ için,

$$n \rightarrow 0^+, \quad u \approx (a_0(x, T) + na_1(x, T) + \dots)e^{\phi(T)/n} \quad (1.25)$$

açılımı,

$$\frac{\partial^4 a_0}{\partial x^4} = -e^{-\phi} \frac{d\phi}{dT} a_0$$

vermektedir; böylece

$$e^{-\phi} \frac{d\phi}{dT} = -\lambda_0^4$$

bu da

$$\phi = -\ln(1 + \lambda_0^4 T), \quad a_0 = A(T)f_0(x).$$

anlamına gelmektedir. Burada,

$$f_0(x) = \cosh(\lambda_0) \cos(\lambda_0 x) - \cos(\lambda_0) \cosh(\lambda_0 x).$$

Buna ek olarak, a_1 aşağıdakini karşılamaktadır:

$$\frac{\partial^4 a_1}{\partial x^4} - \lambda_0^4 a_1 = -(1 + \lambda_0^4 T) \frac{\partial a_0}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln a_0 \frac{\partial^3 a_0}{\partial x^3} \right).$$

Bunun çözülebilirlik şartı aşağıdadır:

$$\int_{-1}^1 \left((1 + \lambda_0^4 T) a_0 \frac{\partial a_0}{\partial T} + a_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln a_0 \frac{\partial^3 a_0}{\partial x^3} \right) \right) dx = 0 \quad (1.26)$$

(1.26) dan

$$(1 + \lambda_0^4 T) \frac{dA}{dT} - \lambda_0^4 A \ln a + \lambda_0^4 A \ln A = 0$$

sonucu çıkar. Burada, a sabiti şu şekilde tanımlanır:

$$\lambda_0^4 \ln a = \left(\int_{-1}^1 \left(\frac{d^2 f_0}{dx^2} \right)^2 dx - \lambda_0^4 \int_{-1}^1 f_0^2 \ln f_0 dx \right) / \int_{-1}^1 f_0^2 dx \quad (1.27)$$

$t = O(1)$ in içine eşleştirip (1.24) ü kullanarak

$$A(T) = a \exp(\ln(A_0/a)/(1 + \lambda_0^4 T))$$

elde ederiz. (1.11)-(1.12) deki $f(x)$

$$n \rightarrow 0^+, \quad f(x) \approx a(n\lambda_0^4)^{1/n} f_0(x) \quad (1.28)$$

koşulunu karşılamaktadır. Bu da, gerektiği üzere, ((1.24) ün A_0 a bağlı olduğu $n = 0$ durumunun aksine) başlangıç verilerinden bağımsızdır.

$n \rightarrow 0^-$ için uygun analiz, $T = -nt$ yi gerektirir. (1.24) teki hesaplama, α nın yeniden (1.27) ye göre tanımlandığı

$$\phi = -\ln(1 - \lambda_0^4 T), \quad a_0 = A(T)f_0(x), \quad A(T) = a \exp(\ln(A_0/a)/(1 - \lambda_0^4 T)) \quad (1.29)$$

verir. $T \rightarrow (1/\lambda_0^4)^-$ olduğundan, (1.29) de açıkça görülen düzgünsüzlük, sönümlenme süresindeki bir bozunmadan kaynaklanmaktadır. (1.29), $n \rightarrow 0^-$ olduğundan

$$u \approx (t_c - t)^{-1/n} f(x), \quad f(x) \approx a(-n\lambda_0^4)^{-1/n} f_0(x) \quad (1.30)$$

ile denktir. $n \rightarrow 0^-$ olduğundan

$$t_c \approx \lambda_0^{-4} (1 - n \ln(A_0/a))/(-n) \quad (1.31)$$

(1.31), A_0 vesilesiyle t_c nin başlangıç verilerine bağımlılığını barındırırken, (1.30) daki $f(x)$ (gerekli olduğu üzere) yine $u_0(x)$ ten bağımsızdır. Herhangi bir A_0 sabiti için, sınır değer problemi (3)-(4),

$$u \rightarrow A_0 u, \quad t \rightarrow A_0^{-n} t$$

yeniden ölçeklendirmesi dahilinde değişmezdir. (1.31) in A_0 ya bağımlılığı, başterime göre bu niteliğe uygundur.

1.4.4 Sonlu zaman sönümlenmesi: $n < 0$

I. Keyfi negatif n için:

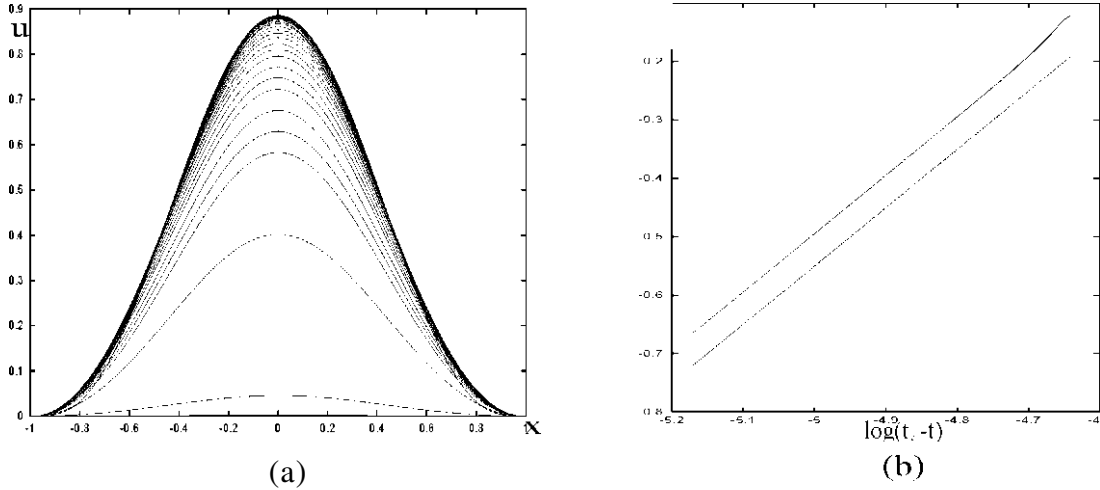
Tüm $n < 0$ durumları için, $f(x)$ in değil, sönümlenme zamanı t_c nin başlangıç verilerine bağımlı olduğu, $t \geq t_c$ için $u \equiv 0$ olan sonlu sönümlenim zaman davranışı (1.2) bulunmuştur. Elimizde

$$\frac{d}{dx} \left(f^n \frac{d^3 f}{dx^3} \right) = -\frac{1}{n} f \quad (1.32)$$

ve (1.12) vardır. (1.2) den $t \rightarrow t_c$ olduğundan,

$$\log_u(0, t) \approx -\frac{1}{n} \log(t_c - t) + \log f(0) \quad (1.33)$$

$n = -1$ için sayısal sonuçların grafiği Şekil 8 de gösterilmektedir. Ayrılabilir çözüme yakınsama grafikleri Şekil 9 ve 10 da verilmiştir.



Şekil 8: $n = -1$ için sayısal çözümler. (a) $u(x, t)$ çözümü, en yüksek değer zaman içerisinde azalır, (b) $n = -1$ için (32) nin sayısal doğrulaması; Düz çizgi sayılar sonuçları verir ve kesikli çizginin eğimi 1 dir. Sönümlenme zamanı $t_c \approx 9,64 * 10^{-3}$

$n = -1$ için (1.32) nin kesin ilk integrali

$$g = \int_0^x f(x') dx'$$

yazılarak bulunabilir. Buradan,

$$x = 0, \quad \frac{df}{dx} = \frac{d^3 f}{dx^3} = 0$$

İkincisini kullanarak ($f(x)$, her n çift olduğundan),

$$\left(\frac{dg}{dx}\right)^n \frac{d^4 g}{dx^4} = -\frac{1}{n} g,$$

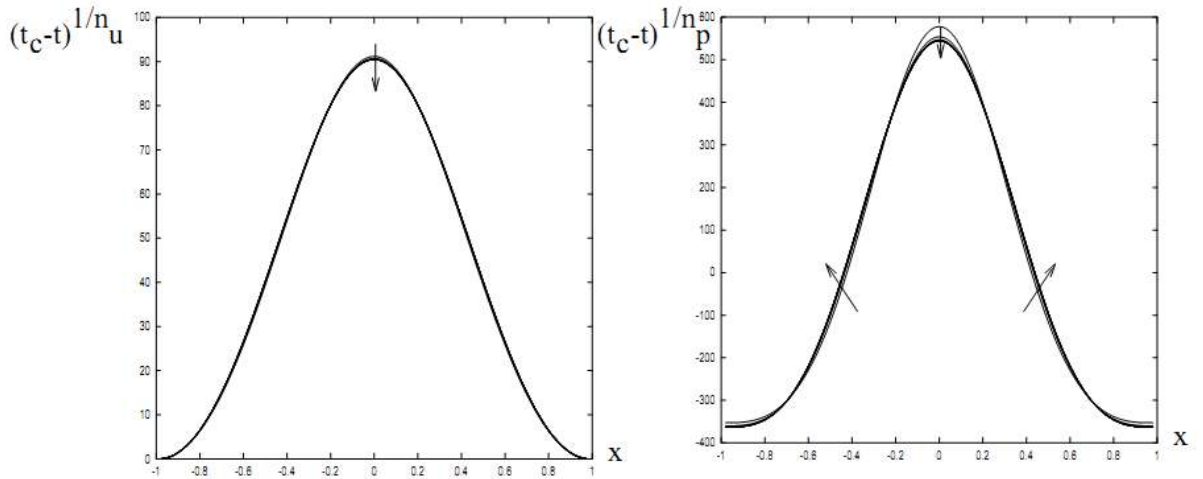
$$x = \pm 1, \quad \frac{dg}{dx} = \frac{d^2 g}{dx^2} = 0$$

bulunur. $n = -1$ için ilk integral aşağıdadır:

$$\frac{d^3 g}{dx^3} = \frac{1}{2}(g^2 - g_0^2)$$

burada g_0 aşağıdaki şekilde verilen bir sabittir

$$g_0^2 = -2 \frac{d^2 f}{dx^2}(0).$$



Şekil 9: u ve p nin $n = -1$ için yakınsamasını gösteren grafikler. Oklar artan t nin yönünü göstermektedir

II. $n \rightarrow -\infty$ durumu:

Limit $n \rightarrow -\infty$ Kısım 4.2 de tartışılmıştır. Büyük bir negatif n nin tümler limitindeki davranıştan bahsetmek gerekir. $n = -1/\nu$ $0 < \nu < 1$ yazılır, en yüksek değer $x = x_0$ da ve en yüksek $u_0(x) = 1$ olacak şekilde ölçeklenir. Sadeleştirmek amacıyla $0 < x < x_0$ için $u'_0(x) > 0$ ve $x_0 < x < 0$ için $u'_0(x) < 0$ olduğu varsayılır.

Üssel olarak kısa zaman ölçekleri $t_v \approx u_1$ de (bu ifade aşağıda $u_1(t)$ yi tanımlamaktadır), $0 < u_1 < 1$ olacak şekilde her u_1 değeri için,

$$u \approx u_0(x), \quad S_0(t) < x < s_0(t).$$

$$u \approx u_1(1-x^2)/(1-s_0)^2, \quad s_0(t) < x < 1. \quad (1.34)$$

$$u \approx u_1(1+x^2)/(1+s_0)^2, \quad -1 < x < S_0(t).$$

Burada $s_0(t)$ ve $S_0(t)$, $u_0(s_0)=u_0(S_0)=u_1(t)$ olarak verilmektedir. (1.34) deki ikinci ve üçüncü ifadeler, (1.4) ün yarı sabit çözümlerine tekabül eder. Birinci ve ikinci arasındaki s_0 daki geçiş,

$$x = s(t;v) + vz, \quad u = u_1(t)(1 + 4v \ln(1/v) - vU)$$

ölçeklemeli iç katman aracılığıyla, $s(t;0)=s_0(t)$ ve baş terim olarak,

$$e^{U_0 \frac{\partial^3 U_0}{\partial z^3}} = z + u_1 U_0 / u'_0(s_0),$$

$$z \rightarrow -\infty, \quad U_0 \approx -u'_0(s_0)z / u_1 \quad (1.35)$$

$$z \rightarrow +\infty, \quad U_0 \approx 2z / (1-s_0)$$

Burada (1.34) le eşleştirilmiştir ($u'_0(s_0) < 0$ ve birinci sınır koşulu olarak $z \rightarrow -\infty$, ikinci sınır koşulu olarak $z \rightarrow +\infty$ olduğundan, (1.35) doğru şekilde belirtilmiş olmaktadır). Aynı formun iç katmanı, $S_0(t)$ 'ye yakın mevcuttur.

u_I bire ulaştığında, hem s_0 hem de S_0 , x_0 'a denk gelir ve bir sonraki evrimin formu tanımlanabilir. Aşağıda, $u_m(t;v)$ 'nin $u(x,t)$ 'nin en yüksek değeri olduğu ve $x=q(t,v)$ 'de bulunduğu tanımlanmaktadır.

$q(t;0)=q_0(t)$, $u_m(t;0)=u_m^0(t)$ yazarak dış çözümler elde edilir.

$$u \approx u_m^0(1-x)^2 / (1-q_0)^2, \quad q_0 < x < 1.$$

$$u \approx u_m^0(1+x)^2 / (1+q_0)^2, \quad -1 < x < q_0.$$

İç katman ölçeklemeleri aşağıdadır:

$$x = q(t;v) + vz, \quad u = u_m(t;v)(1 - vU). \quad (1.36)$$

ve

$$e^{U_0 \frac{\partial U_0}{\partial z^3}} = -a(q_0)z + b(q_0)U_0 + c(q_0),$$

$$z \rightarrow -\infty, \quad U_0 \approx 2(-z) / (1+q_0)^2.$$

$$z = 0, \quad U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial z} = 0. \quad (1.37)$$

$$z \rightarrow +\infty, \quad U_0 \approx 2z/(1-q_0)^2.$$

sonuçlarını verir. Burada

$$v^3 u_m^{(1-v)/v} \frac{du_m}{dt} \approx -a(q_0), \quad v^3 u_m^{1/v} \frac{dq}{dt} \approx b(q_0)$$

$a(-q_0) > 0$ ile (1.37) sınır değer probleminin simetri özelliklerinden,

$$a(-q_0) = a(q_0), \quad b(-q_0) = -b(q_0), \quad c(-q_0) = -c(q_0)$$

Belirli q_0 için, (1.37)'deki altı sınır koşulu bulunmaktadır. Bu sebeple, a, b ve c'nin yanı sıra $U_0; u_m$ ve q , (1.38) aracılığıyla başterime sonradan determine edilmiştir. Elimizde, t_c nin sönümlenim zamanı olduğu

$$u_m \approx (t_c - t)^v$$

(1.39)

vardır. u_m in niceliği $O(1)$ dendir ve (1.39) bu evrimin son aşamasının gerçekleşeceği zaman ölçeklerini ifade eder. Bunlar, $t_c(v)$ 'ye üssel olarak yakındır. Sönümlenme zamanı, yukarıda tanımlanan iki formülasyon arasındaki geçişi tanımlayan zaman ölçeği ile başterime determine edilmiştir. Aslında, gerçekleşmesi en uzun zaman ölçeğidir. İlgili ölçeklemeler aşağıdadır:

$$t = v^4 T, \quad x = x_0 + vX, \quad u = 1 - vU$$

Birçok ayrıntı gözardı edilmektedir fakat başterim dengesi sınır ve başlangıç koşullarının eşleştirme ile elde edildiği aşağıdaki formülle verilir:

$$\frac{\partial U_0}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial X} \left(e^{U_0} \frac{\partial^3 U_0}{\partial X^3} \right) \quad (1.40)$$

(1.40) ın yanıtı, sonlu zaman patlamasına maruz kalır. Böylece, $T \rightarrow T_c^-$ ve $X = O(1)$ olduğundan $U_0 = -\ln(T_c - T)$ dir. Bazı T_c ler yalnızca (1.40) ı çözerek belirlenebilir.

$$v \rightarrow 0, \quad t_c \approx v^4 T_c$$

Son olarak, $n \rightarrow -\infty$ olduğundan $f(x)$ in asimptotik formu, dış çözüm olarak çıkarım yapılabilir.

$$n \rightarrow -\infty, \quad (1-|x|)^2, \quad 0 < |x| < 1, \quad (1.41)$$

ve bir iç problem

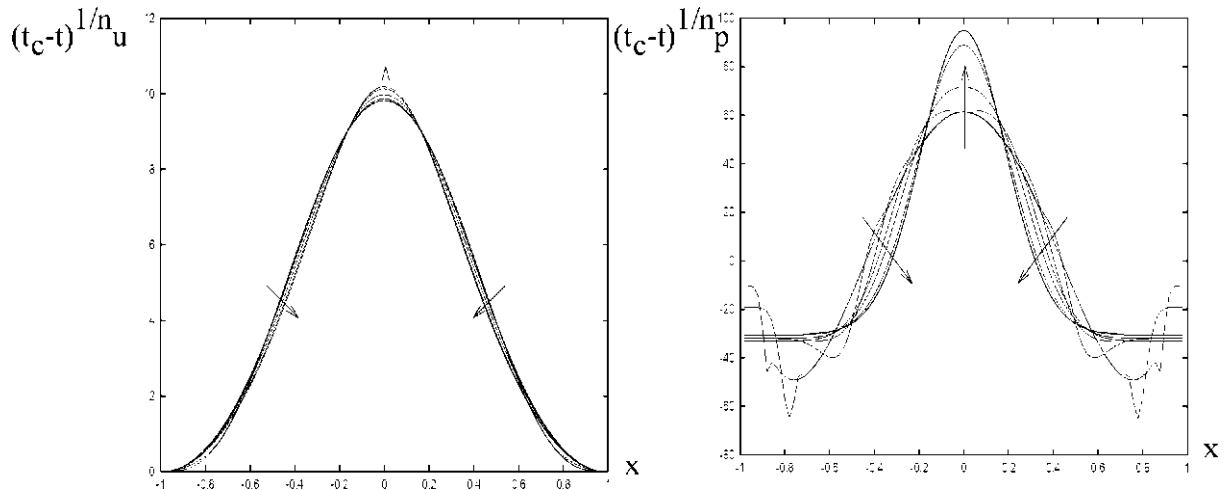
$$x = vX, \quad f = 1 + 4v \ln(1/v) - vF$$

Burada

$$\begin{aligned} e^{F_0} \frac{d^3 F_0}{dX^3} &= -X, \\ X = 0, \quad \frac{dF_0}{dX} &= 0 \\ x \rightarrow +\infty, \quad F_0 &\approx -2X \end{aligned} \quad (1.42)$$

Bu, (1.37)-(1.38) nin sönümlenim davranışına tekabül etmektedir. Burada, $q \rightarrow 0$ ve U_0 , z nin bir simetrik fonksiyonu olmaktadır. (1.37), $a(0) = \exp(-F_0(0))$ olduğundan (1.42) e denktir.

Yukarıda söz edilen asimptotik davranışa dair bazı fikirler $n = -3$ ün sayısal simülasyonunu gösteren Şekil 6 da yer almaktadır. Daha negatif n için sayısal çözümler elde etmek, $u \rightarrow 0$ oldukça yayınlık u^n hızla düştüğünden ve $x = \pm 1$ yakınındaki zaman ölçekleri çok hızlandığından kolay değildir. Bu durumda, drenajın dinamiklerinin uygun bir şekilde bulunabilmesi için çok kısa bir zaman adımı gereklidir. Açık yerine kapalı bir zaman adımlama yönteminin uygulanması, bu sorunun aşılmasında faydalı olabilir.



Şekil 10: u ve p nin $n = -3$ için yakınsamasını gösteren grafikler. Oklar artan t ve $t_c \approx 7.33 \times 10^8$ in yönünü göstermektedir.

1.4.5 $n < 1/2$ için Başlangıç Kütle Artışı

Şekil (9) da gösterildiği gibi, yeteri kadar kısa bir süre için $n < 1/2$ iken, kütlede maddesel olmayan bir artış meydana gelebilir, bunu takiben kütle kaybı meydana gelir (yukarıda verilen sönümlenme sonuçlarına bağlı olarak, $J(t) > 0$ in yeteri kadar büyük bir t kadar sürdüğü sonucu çıkar). Çok sayıda n için kütlenin t ye

$$M(t) = \int_{-1}^1 u(x, t) dx \quad (1.43)$$

karşı sayısal grafiği Şekil 7 de verilmiştir. Görüldüğü üzere, çözümün yerel olarak negatif olmasından dolayı, kütlede artış $n < 1/2$ için de meydana gelebilir; aşağıda bu durum genişletilecektir. Sayısal çözüm için, $-1 < n < 3/2$ çözümün sonlu bir süre için negatif olmasını sağlayacak şekilde, u^n yerine $|u|^n$ in difüzivitesini temsil eden bir ayrıştırma kullandık. Toplam kütle için analitik ifade $n = 0$ iken elde edilebilir; (1.23) den hareketle,

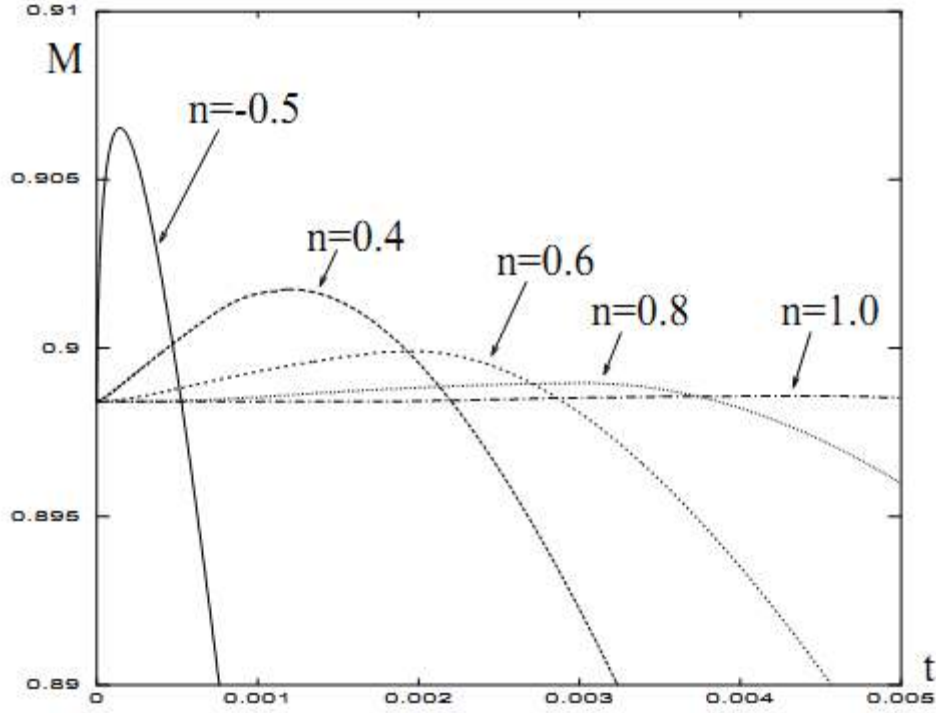
$$M(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2A_m}{\lambda_m} e^{-\lambda_m^4} (\cosh(\lambda_m) \sin(\lambda_m) - \cos(\lambda_m) \sinh(\lambda_m))$$

sayısal sonuçlar ile oldukça uyumlu sonuçlar veren bir ifadeyi elde ederiz , [9].

Burada daha fazla ayrıntıya girmek gereksiz olacaktır ancak, pozitif katsayılar A ve a için $u_0(x) \approx A(1-x)^a, x \rightarrow 1^-$ iken yerel davranışın kısa süreli analizleri sonucu ortaya çıkan bazı hesaplamalara dikkat çekmek gerekebilir (sayısal çözüm $a = 3$ e karşılık gelmektedir). Bu analiz, takip eden rejimlerin kısa süreler için sayısal şema ile seçilen, (1.5)-(1.6) denklemlerine bağlı olarak şu denklemin çözümü ile ortaya çıktığını göstermektedir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(|u|^n \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)$$

(i) $3/2 < n < 2$. $a > 2$ için, sonlu bir süre için drenaj meydana gelmezken bekleme süresi davranışı görülür; $a > 2$ için ise, derhal drenaj başlar. Her durumda çözüm pozitif olmayı sürdürür.



Şekil 10: Kısa zaman aralıkları için başlangıç kütle artışını gösteren sayısal sonuçlar. Başlangıç koşulları için başlangıç kütlesi 0,89841 (1.56).

(ii) $1/2 < n < 3/2$. $a > 3/n$ için bekleme süresi davranışı görülür. $2 < a < 3/n$, için u sınıra yakinken aşağıdaki ilişki ile negatif olur:

$$x \rightarrow 1^-, \quad u \approx - \left(\frac{(n+1)^3 J(t)}{3(2n-1)(2-n)} (1-x)^3 \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

u negatif hale geldiği için $J > 0$ sabiti artık kütle artışına karşılık gelmektedir (1.43), bu durum Şekil 7 ile tutarlıdır. $a < 2$ için pozitiflik sürdürülür (en azından başlangıçta) ve $M(t)$ drenaj sonucu düşer.

(iii) $0 < n < 1/2$. Bekleme süresi rejimi $a > 3/n$ olarak kalır; $3/(n+1) > a > 3/n$ için çözüm yerel olarak negatif olur ve $M(t)$ artar iken, $2 > a > 3/(n+1)$ için pozitiflik kaybedilmeden kütle artışı meydana gelir (bu, yerel davranış (9) un J veya B nin belirtilerinde belirleyici olmayışı ile tutarlıdır). $a < 2$ için çözüm pozitif olmayı sürdürür ve kütle kaybı meydana gelir.

(iv) $-1 < n < 0$. $a < 3/(n+1)$ ise, çözüm yerel olarak negatif olur ve kütle artar, $2 < a < 3$ ise, pozitif olmayı sürdürür ve kütle artar ve $a < 2$ ise, pozitif kalırken kütle kaybı meydana gelir.

(v) $n < -1$. Çözüm pozitif kalır, $a > 2$ ise başlangıçta kütle artar, $a < 2$ ise başlangıçta kütle azalır.

Fiziksel olarak, u nun negatifliği de kütle artışı da (yalnızca drenaja izin verilen koşullarda) anlamlı değildir ve sayısal şema ile seçilen çözümün maddesel açıdan kabul edilebilir olmayabileceği mevcut durum, bunlardan biridir; bu, yüksek dereceden dejenere denklikler ile yaşanan zorluklar ile ilişkilendirilen (1.7) nin teklik dışı özelliklerinin göstergesidir. $n < 3/2$ (mevcut içerikte bahsedilen durumların ortaya çıktığı aralık) için arayüzey oluşabilir ve bu arayüzey sınırdan içeriye doğru hareket edebilir, [5] ve sağa sınır verilerine dair maddesel açıdan anlamlı, uygun bir hüküm aşağıdaki şekli alır (sıfır temas açısı için):

$$\text{Eğer } J(t) \geq 0, \quad x=1, \quad u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad n < 1/2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geq 0, \quad x=1 \quad (1.44)$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = u^n \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad x = s(t) < 1$$

(1.45)

Dolayısıyla, J veya u negatif hale geleceğinde, sınırdan bir arayüzey çekilir, bunu takiben $u = 0$ ile $s(t) \leq x \leq 1$ de tutulur; (43), $s(t)$ e ve (1.45), arayüzey $x = s(t)$ de sıfır akıya karşılık gelir.

Yukarıda açıklanan sönümlenme davranışı buna uygun hareket eder, dolayısıyla, (1.44) ün (1.45) in yerine geçtiği nokta olan $x = 1$ e sonlu bir süre içinde dönmek için $s(t)$ artmalıdır (benzer şekilde, sayısal olarak seçilen çözüm her noktada pozitif olmalıdır, azalan kütle ile birlikte, sönümlenmeye yeteri kadar yakın olmalıdır). Başlangıç verilerine bağlı olarak, sönümlenmeden önce $s(t)$ nin $x = 1$ den uzaklaşması prensipte mümkündür.

Dikkat edilmesi gereken bir diğer nokta ise, (1.5) deki koşullar geçerli iken $n = 0$ lineerdir, eğer (1.45) uygulanacaksa (u veya J nin negatif olmalarını engellemek için) $n = 0$ için dahi problem lineer değildir çünkü, $x = s(t)$ deney öncesi bilinmeyen hareketli bir sınırdır. Bölüm 1.4.4 ün analizi ancak birinci durum için uygundur; A_0 sabitinin başlangıç verileri ile artık doğrudan açıklanamayacak oluşu dışında, Bölüm 1.4.4 de açıklanan sönümlenme davranışı (1.44)-(1.45) teki koşullar için uygulanabilir değildir.

1.4.6 Tartışma

Bölüm 1.4 de, (1.4) için fiziksel açıdan anlamlı en basit problemlerden biri olan başlangıç sınır değer problemlerini inceledik, asimptotik davranışın özellikle basit bir hâl olduğunu

gösterdik, rastgele seçilmiş başlangıç verilerini ayrılabilir çözümlerden elde ettik. n in çeşitli sınır koşulları için elde ettiğimiz sonuçlar, asimptotik davranışın ayrılabilir tabiatını doğrulamanın yanı sıra, $f(x)$ için baş terimleri içeren ifadeler sağlamaktadır.

Yukarıdaki analizin birkaç doğal genellemesi mevcuttur. Öncelikle, ∂/∂_n dışarıya doğru olan normalin türevini ifade ettiği ve $\Omega \subset \mathfrak{R}^N$ 'in sınırlı bir alan olduğu çok boyutlu problem,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot (u^n \nabla \Delta u)$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

oldukça benzer bir davranış gösterir; $n < 2$ için, uzun süreli davranışın tekrar ayrılabilir olması beklenir ve akıcı $\partial\Omega$ için alanın ucuna yakın en ilişkili davranış yerel olarak tek boyutludur (örn. (1.8)-(1.10) un baş terimleri ile verilmiştir). $n \geq 2$ için kütle yine korunur. İkinci olarak, tamsayı $m \geq 2$ için daha yüksek dereceden difüzyon denklemleri (ve bunlara karşılık gelen daha çok boyutlu problemler)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^m \frac{\partial}{\partial x} \left(u^n \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}} \right) \quad (1.46)$$

de ilgi konusudur; bu durumda (1.5) in uygun genellemesi aşağıdaki şekli alır:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k} = 0, \quad x = \pm 1, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (1.47)$$

Öyleyse, (1.8)-(1.10) u $m \geq 2$ için genelleyecek sonuçlar aşağıdaki gibidir; baş terimi sadece u ile ifade ettik ve şu şekilde sunduk

$$J(t) = (-1)^m \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}} \Big|_{x=1}$$

(I) $m/(m+1) < n < (m+1)/m$ için

$$x \rightarrow 1^-, \quad u \approx \left(\frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{2m+1}{n+1} - 2m\right) J(t)}{\Gamma\left(\frac{2m+1}{n+1} + 1\right)} (1-x)^{2m+1} \right)^{\frac{1}{n+1}}. \quad (1.48)$$

(II) $n = m/(m+1)$ için

$$x \rightarrow 1^-, \quad u \approx \left(\frac{(2m+1)J(t)}{(m+1)(m+1)!(m-1)!} \right)^{\frac{m+1}{2m+1}} (1-x)^{m+1} \log \frac{m+1}{2m+1} (1/(1-x)) \quad (1.49)$$

(III) $n < m/(m+1)$ için

$$x \rightarrow 1^-, \quad u \approx B(t)(1-x)^{m+1} \quad (1.50)$$

$n \geq (m+1)/m$ için (1.47) deki koşullar uygulanamaz ve ilgili çözümlerde kütle korunur. (1.46) nın (1.4) e indirgendiği $m=0$ için, (1.49) ve (1.50) geçerli değildir ve davranış farklıdır; (1.48) ifadesi $n > -1$ için geçerli iken, $n \leq -1$ için $x = \pm 1$ de $u = 0$ ı karşılayan bir çözüm yoktur, [14]. İkinci ve daha yüksek dereceden durumlardaki zıtlıklara özellikle negatif n için dikkat edilmiştir ve (1.50), $m \geq 1$ iken tüm $n < m/(m+1)$ için geçerlidir. Bir diğer önemli konu ise, problemlerin derecesi arttıkça olası hükümlerin çeşitliliğinin de artmasıdır (Örneğin, $m=0$ için $x = \pm 1$ de $u = 0$ olan koşullarda, hem (1.5) hem de (1.14) eşit derecede anlamlı $m=1$ e genellemeler sağlamaktadır.) Bu tür teklik dışı sorunlardan kaçınmak için analizlerimizi sınırlarda en yüksek akıcılık veren çözümlere yoğunlaştırdık; $n < 2$ için bu çözümler sıfır temas açısına karşılık gelirken, $n \geq 2$ için bu çözümlerde kütle korunur.

$m=1$ için olası diğer hükümlerde, $n < 2$, (1.5) i

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \mp \lambda, \quad x = \pm 1 \quad (1.51)$$

sonlu temas açısı koşulları ile değiştirmeyi içerir. Eğer $\lambda > 0$ ise, akışkanın bir kısmı akar ve başlangıç koşulları yeteri kadar geniş olduğu takdirde $u \equiv 0$ olan bir bölgenin, sınırdan çekilen temas çizgisinin her iki sınırı ile de bağlantı geliştirmeyeceği şekilde (bu varsayım, sınır koşulları (1.51) de belirtildiği gibi iken kapalıdır), uzun süreli davranış şu şekilde ifade edilir:

$$t \rightarrow \infty, \quad u \approx \frac{\lambda}{2} (1-x^2)$$

İki tarafta farklı temas açıları varsa, daha büyük açılı ara yüzey mutlaka uçtan uzaklaşarak, örneğin,

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda_+, \quad x = 1, \quad (1.51)$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda_-, \quad u^n \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad x = s(t) \quad (1.52)$$

$-1 < x < s(t)$ ($s(t) < 1$) için, $\lambda_- > \lambda_+$ ve $u \equiv 0$ ile uygulanır, ve sonrasında $n < 2$ için asimptotik davranışa dair doğal varsayım, t_c ve η_0 gibi sabitler için şu ifade ile sonlu süreli sönümlenmedir:

$$u \approx (t_c - t)^{\frac{1}{4-n}} f(\eta), \quad \eta = (1-x)/(t_c - t)^{\frac{1}{4-n}}, \quad s \approx 1 - \eta_0 (t_c - t)^{\frac{1}{4-n}}, \quad t \rightarrow t_c^-$$

$2 \leq n < 3$ için, (1.53) koşulları olasıdır ancak sınırdan kütle kaybı meydana gelmez ve (1.52) deki temas açısı koşulları uygulanamaz; M_0 in $x_0 > -1$ i sağlayacak şekilde küçük

olduğu koşullarda $x_0 = 1 - (6M_0 / \lambda_-)^{\frac{1}{2}}$ iken uzun süreli davranış, (1.15) ün yerine,

$$u \approx \lambda_- (1-x)(x-x_0)/(1-x_0), \quad x_0 < x < 1, u \rightarrow 0, \quad -1 < x \leq x_0, \quad t \rightarrow \infty$$

şeklini alabilir. Umuyoruz ki bu özet niteliğindeki yorumlar, bu tür problemlerde karşılaşılabilecek, geniş aralıktaki olası davranışları göstermek için yeterlidir.

2. İNCE FİLM DENKLEMLERİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

2.1 Asimptotik Çözümün Diferansiyellenebilme Özellikleri

$R^2(x, t)$ ile (x, t) noktalarının Euclid uzayını gösterelim ve $G = I \times [0, T) \subset R^2$ sınırlı bir bölge olsun. Burada $I = [-a, a]$ dır ve T ise bilinen bir sabittir. G de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right), \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^k u(\pm a, t)}{\partial x^k} = 0, \quad k = 0, 1 \quad (2.3)$$

problemını göz önüne alalım. Kolaylık için $a=1$ olsun. Burada $u_0(x) \geq 0$ başlangıçtaki kütleyi, sınır koşulları ise $x = \pm a$ noktalarında akışın olmadığını gösterir.

[10] da elde edilen asimptotik çözümün incelenmesi sonucu aşağıdaki bulgular elde edilmiştir:

$$u = \left(\frac{8J(t)}{3} (1-x)^3 \right)^{1/2} + K(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} \quad (2.4)$$

yani $u(x, t)$ fonksiyonu sürekli ve

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} u(x, t) = 0$$

dır. $u(x, t)$ fonksiyonunun türevi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-3 \frac{8J(t)}{3} (1-x)^2}{2 \sqrt{\frac{8J(t)}{3} (1-x)^3}} - \frac{5+\sqrt{13}}{4} K(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}} \\ &= \frac{-4J(t)(1-x)^2}{\sqrt{\frac{8J(t)}{3} (1-x)^3}} - \frac{5+\sqrt{13}}{4} K(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-4J(t)(1-x)^2}{\sqrt{\frac{8J(t)}{3}}(1-x)^{3/2}} - \frac{5+\sqrt{13}}{4} K(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}} \\
&= -\sqrt{6J(t)}^{1/2}(1-x)^{1/2} - \frac{5+\sqrt{13}}{4} K(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}} \quad (2.5)
\end{aligned}$$

olmaktadır. (2.5) ifadesinden görüldüğü gibi $x \rightarrow 1^-$ olduğunda $\frac{\partial u}{\partial x}$ ifadesi sürekli ve sınırlı olmaktadır. (2.5) ifadesinden bir kez daha türev alırsak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{6J(t)}^{1/2}(1-x)^{-1/2} + \frac{5+\sqrt{13}}{4} \times \frac{1+\sqrt{13}}{4} K(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}-1} \\
&= \frac{\sqrt{6J(t)}}{2\sqrt{1-x}} + \frac{9+3\sqrt{13}}{8} K(t)(1-x)^{\frac{-3+\sqrt{13}}{4}} \quad (2.6)
\end{aligned}$$

olur. Buradan görüleceği üzere

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\infty$$

dır, yani $x \rightarrow 1^-$ olduğunda ikinci türev mevcut değildir. Üçüncü türev ise

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= \frac{1}{2} \sqrt{6J(t)}(1-x)^{-3/2} - \left(\frac{9+3\sqrt{13}}{8} \right) \times \left(\frac{-3+\sqrt{13}}{4} \right) K(t)(1-x)^{\frac{-3+\sqrt{13}}{4}-1} = \\
&\frac{1}{4} \frac{\sqrt{6J(t)}}{\sqrt{(1-x)^3}} - \frac{3}{8} K(t)(1-x)^{\frac{-7+\sqrt{13}}{4}} \quad (2.7)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. (2.7) ifadesinden görüldüğü gibi $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ türevi de $x \rightarrow 1^-$ olduğunda mevcut değildir. Şimdi aşağıdaki ifadeyi hesaplayalım

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} &= \left[\left(\frac{8J(t)}{3} (1-x)^3 \right)^{1/2} + K(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} \right] \times \\
&\left[-\sqrt{6J(t)}^{1/2}(1-x)^{1/2} - \frac{5+\sqrt{13}}{4} K(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sqrt{8J(t)}}{\sqrt{3}}(1-x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{6J(t)}\sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{8J(t)}}{\sqrt{3}}(1-x)^{\frac{3}{2}}\frac{5+\sqrt{13}}{4}K(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}} - \\
&\quad \sqrt{6J(t)}^{1/2}K(t)(1-x)^{1/2}(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} - \frac{5+\sqrt{13}}{4}K^2(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}}(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}} \\
&= -4J(t)(1-x)^2 + \left[-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}\left(\frac{5+\sqrt{13}}{4}\right) - \sqrt{6} \right] \times \\
&\quad \sqrt{J(t)}K(t)(1-x)^{\frac{7+\sqrt{13}}{4}} - \frac{5+\sqrt{13}}{4}K^2(t)(1-x)^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} \tag{2.8}
\end{aligned}$$

(2.8) den görüldüğü gibi $u \frac{\partial u}{\partial x}$ ifadesi $x \rightarrow 1^-$ olduğunda sürekli ve sınırlıdır. $u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ yi hesaplırsak

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left[\left(\frac{8J(t)}{3}(1-x)^3 \right)^{1/2} + K(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} \right] \times \left[\frac{\sqrt{6J(t)}}{2\sqrt{1-x}} + \frac{9+3\sqrt{13}}{8}K(t)(1-x)^{\frac{-3+\sqrt{13}}{4}} \right] = \\
&\quad \left(\frac{8J(t)}{3}(1-x)^3 \right)^{1/2} \frac{\sqrt{6J(t)}}{2\sqrt{1-x}} + \left(\frac{8J(t)}{3}(1-x)^3 \right)^{1/2} \frac{9+3\sqrt{13}}{8}K(t)(1-x)^{\frac{-3+\sqrt{13}}{4}} + \\
&\quad K(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} \frac{\sqrt{6J(t)}}{2\sqrt{1-x}} + K(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} \frac{9+3\sqrt{13}}{8}K(t)(1-x)^{\frac{-3+\sqrt{13}}{4}} = \\
&\quad 2J(t)(1-x) + \left[\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}\left(\frac{9+\sqrt{13}}{8}\right) + \frac{\sqrt{6}}{2} \right] \sqrt{J(t)}(1-x)^{\frac{3+\sqrt{13}}{4}} + \frac{9+3\sqrt{13}}{8}K^2(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}} \tag{2.9}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Elde edilen sonuçtan görüldüğü üzere $u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ifadesi de $x \rightarrow 1^-$ olduğunda sürekli ve sınırlıdır. Son olarak $u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ ifadesini hesaplırsak

$$u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \left[\left(\frac{8J(t)}{3}(1-x)^3 \right)^{\frac{1}{2}} + K(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} \right] \times \left[\frac{1}{4} \frac{\sqrt{6J(t)}}{\sqrt{(1-x)^3}} - \frac{3}{8}K(t)(1-x)^{\frac{-7+\sqrt{13}}{4}} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left[\frac{8J(t)}{3 \cdot 16} (1-x)^3 \frac{6J(t)}{(1-x)^3} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{8} \left(\frac{8J(t)}{3} (1-x)^3 \right)^{\frac{1}{2}} K(t)(1-x)^{\frac{-7+\sqrt{13}}{4}} + \\
&\frac{1}{4} \left(\frac{6J(t)}{(1-x)^3} \right)^{\frac{1}{2}} K(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} - \frac{3}{8} K^2(t)(1-x)^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}} = -\frac{3}{8} K^2(t)(1-x)^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}} + \\
&\left\{ \left[-\frac{3}{8} \left(\frac{8J(t)}{3} (1-x)^3 \right)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{-7+\sqrt{13}}{4}} \right] + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{6J(t)}{(1-x)^3} \right)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} \right] \right\} K(t) + J(t) \\
&= J(t) - \frac{3}{8} K^2(t)(1-x)^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

buluruz. (2.10) ifadesinden de görüldüğü gibi $u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ ifadesi $x \rightarrow 1^-$ olduğunda mevcuttur.

Bu sonuçlara dayanarak, problemin klasik çözümünün mevcut olmadığını varsayabiliriz.

İleride yapacağımız işler için bazı değerlendirmeleri inceleyelim.

(2.1) denklemi $u(x, t) = 0$ olduğunda dejenere olduğu için, bu denklemi [4] de olduğu gibi Q_T de

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left((u^\varepsilon + \varepsilon) \frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial x^3} \right) \tag{2.11}$$

şeklinde düzenleyelim. Burada ε yeteri kadar küçük pozitif bir parametredir. Bu durumda $u_0(x)$ fonksiyonuna da $H^1(\Omega)$ normunda $C^{4+\alpha}$ sınıfından olan $u_0^\varepsilon(x)$ fonksiyonları ile yaklaşmamız gerekir

$$u(x, 0) = u_0^\varepsilon(x). \tag{2.12}$$

Bu koşullar çerçevesinde $u^\varepsilon(x, t)$ fonksiyonu için $0 < \sigma < T$ durumu için aşağıdaki değerlendirmeleri bulabiliriz.

u fonksiyonu yerine $u^\varepsilon(x, t)$ alarak devam edersek

$$\begin{aligned}
&\int_I \left[\left(\frac{\partial u(x, t+\tau)}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \\
&\int_I \left[\frac{\partial u(x, t+\tau)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial u(x, t+\tau)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dx =
\end{aligned}$$

$$-\int_I \left[\frac{\partial^2 u(x, t+\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] [u(x, t+\tau) - u(x, t)] dx$$

yazabiliriz. Sınırdaki $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0$ olduğundan τ ya bölüp, $\tau \rightarrow 0$ iken limit alırsak, herhangi

$0 < t_1 < t_2 < \sigma$ için

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_I \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \int_I \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx \Big|_{t_1}^{t_2}$$

alırız. (2.11) ifadesini $\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}$ ile çarpıp, $Q_T(0 < T < \sigma)$ üzerinden integrallersek ve yukarıdaki eşitliği kullanırsak

$$\frac{1}{2} \int_I \left(\frac{\partial u^\varepsilon(x, T)}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^T \int_I (u^\varepsilon + \varepsilon) \left(\frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial x^3} \right)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_I \left(\frac{\partial u^\varepsilon(x, 0)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.13)$$

elde ederiz. Buradan

$$\frac{1}{2} \int_I \left(\frac{\partial u^\varepsilon(x, T)}{\partial x} \right)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_I \left(\frac{\partial u^\varepsilon(x, 0)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.14)$$

olur. Şimdi (2.11) ifadesinin Ω_T üzerinden integralini alırsak

$$\int_I \left(\frac{\partial u^\varepsilon(x, T)}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^T \int_I (u^\varepsilon + \varepsilon) \left(\frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial x^3} \right)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_I \left(\frac{\partial u^\varepsilon(x, 0)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.15)$$

buluruz. Dolayısıyla

$$\int_I \left(\frac{\partial u^\varepsilon(x, T)}{\partial x} \right)^2 dx \leq \int_I \left(\frac{\partial u^\varepsilon(x, 0)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.16)$$

ve

$$\int_I u^\varepsilon(x, T) dx \leq \int_I u^\varepsilon(x, 0) dx \quad (2.17)$$

elde ederiz.

Önemle belirtebiliriz ki, herhangi bir $\varepsilon \rightarrow 0$ olduğunda $\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$ olan $\gamma(\varepsilon)$ için

$$\int_I u_{0\varepsilon, x}^2 dx \leq (1 + \gamma(\varepsilon)) \int_I u_{0, x}^2 dx \quad (2.18)$$

dır.

(2.14), (2.16) ve Poincare eşitsizliğinden I da $|u_\varepsilon(x, t)| \leq A$ olur. (2.16), (2.18) ve Sobolev eşitsizliğini dikkate alarak I_σ da

$$|u_\varepsilon(x_2, t) - u_\varepsilon(x_1, t)| \leq K|x_2 - x_1|^{1/2}$$

alırız. Burada K sayısı, ε ve σ dan bağımsız sabittir.

2.2 Yardımcı Problem

(2.1) denklemini x e göre $-a$ dan x e kadar integrallersek

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x u(\xi, t) d\xi = u(x, t) \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} - u(-a, t) \frac{\partial^3 u(-a, t)}{\partial x^3} \quad (2.19)$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned} u(x, t) \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

eşitliğini dikkate alarak, (2.19) ifadesini $-a$ dan x e kadar bir kez daha integrallersek

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x \int_{-a}^x u(\xi, t) d\xi d\xi &= u(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - u(-a, t) \frac{\partial^2 u(-a, t)}{\partial x^2} \\ &\quad - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(-a, t)}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

alırız. Bu kez

$$u(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2$$

eşitliğini dikkate alarak, (2.19) ifadesini integrallersek

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x \int_{-a}^x \int_{-a}^x u(\xi, t) d\xi d\xi d\xi = u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - u(-a, t) \frac{\partial u(-a, t)}{\partial x} - \frac{3}{2} \int_{-a}^x \left(\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (2.21)$$

elde ederiz. (2.21) eşitliğini bir kez daha integrallersek

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x \int_{-a}^x \int_{-a}^x \int_{-a}^x u(\xi, t) d\xi d\xi d\xi d\xi = \frac{1}{2} u^2(x, t) - \frac{1}{2} u^2(-a, t) - \frac{3}{2} \int_{-a}^x \int_{-a}^x \left(\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi d\xi \quad (2.22)$$

alırız. Cauchy formülünü kullanarak (2.22) yi daha kolay şekilde yazabiliriz.

$$\frac{1}{3!} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x (x - \eta)^3 u(\eta, t) d\eta = \frac{1}{2} u^2(x, t) - \frac{3}{2} \int_{-a}^x (x - \eta) \left(\frac{\partial u(\eta, t)}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \quad (2.23)$$

olarak yazabiliriz.

Yukarıda ispatladığımız ifadelerle göre $u(x,t)$ ve $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ sürekli olduğundan (2.4) ve (2.1) denklemleri denktirler. Gerçekten de (2.23) denklemini dört kez x e göre diferansiyellersek

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x \frac{\partial(x-\eta)^3}{\partial x} u(\eta,t) d\eta &= u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \\ \frac{3}{2} \int_{-a}^x \frac{\partial(x-\eta)}{\partial x} \left(\frac{\partial u(\eta,t)}{\partial \eta} \right)^2 d\eta &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x (x-\eta)^2 u(\eta,t) d\eta \\ &= u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{3}{2} \int_{-a}^x \left(\frac{\partial u(\eta,t)}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \end{aligned}$$

buluruz. İkinci integrallemeden sonra

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x (x-\eta) u(\eta,t) d\eta &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 \\ &= u(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

alırız. Üçüncü integralleme neticesinde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x u(\eta,t) d\eta &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) - u(-a,t) \frac{\partial^2 u(-a,t)}{\partial x^2} \\ &\quad - \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(-a,t)}{\partial x} \right)^2 \right] = \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} &- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 = u(x,t) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

olduğu görülür.

2.3 Sayısal Algoritmalar

(2.23) denkleminin (2.2), (2.3) koşulları çerçevesinde çözümünün bulunmasına yardımcı problem diyeceğiz.

(2.23) denkleminin aşağıdaki avantajları vardır:

1. (2.23) denklemi $u(x,t)$ fonksiyonunun sadece birinci türevini içermektedir. Fakat söz konusu fonksiyonun mevcut olmayan ikinci ve üçüncü türevlerini içermemektedir. Ayrıca

(2.10) dan görüldüğü üzere $u(x,t) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}$ fonksiyonu da mevcut değildir.

2. (2.23) diferansiyel denkleminde görüldüğü üzere, burada $u(x,t)$ ve $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ fonksiyonları süreksiz de olabilir.

3. (2.23), (2.2) probleminin sayısal çözümünün bulunması için t ye göre yüksek mertebeden sonlu farklar şemaları da yazmak mümkündür.

Bu bölümde (2.23), (2.2) probleminin sayısal çözümünü bulmak için bir yöntem geliştireceğiz. $[0, T)$ yarı aralığında

$$\omega_{h,t} = \{t_k = kh_t, k = 0, 1, 2, \dots, h_t > 0\}$$

oluşturalım.

$$\xi_\nu = a_x + \nu \frac{h}{10}, \quad \nu = 0, 1, \dots, 10n$$

$[-a, a]$ aralığı üzerinde birincisi

$$\omega_{h_x} = \left\{ x_i = -a + ih_x, i = 1, 2, \dots, n; h_x = \frac{2a}{n} \right\}$$

ve ikincisi ise

$$\omega_{h_\xi} = \left\{ \xi_\nu = -a + \nu h_\xi, \nu = 0, 1, 2, \dots, pn; h_\xi = \frac{h_x}{p} > 0 \right\}$$

biçiminde olan iki farklı ağ kuralım. Buradaki p doğal sayısı $[x_i, x_{i+1}]$, $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ parçasındaki düğüm noktalarının sayısını göstermektedir. $\omega_{h_\xi} \subseteq \omega_{h_x}$ olduğu açıkça görülmektedir.

G bölgesini $\Omega_{h_x h_t} = \omega_{h_x} \times \omega_{h_t}$ ağı ile örtelim. Açıkça görüldüğü üzere $\Omega_{h_x h_t} \subseteq \Omega_{h_\xi h_t} = \omega_{h_\xi} \times \omega_{h_t}$ olmaktadır. (2.23) denklemini sonlu farklara ayrıklaştırabilmek

için $\int_{-a}^x (x-\xi)^3 u(\xi, t) d\xi$ ve $\int_{-a}^x (x-\xi) \left(\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi$ integrallerine çeşitli yollarla kuadratur

formülleri kurmalıyız. Örneğin, dikdörtgenler yöntemini kullanarak

$$\int_{-a}^x (x-\xi)^3 u(\xi, t) d\xi \equiv h_\xi \sum_{\nu=1}^{p_i} (x_i - \xi_\nu)^3 U_{\nu,k} \quad (2.24)$$

alırız. Benzer şekilde

$$\int_{-a}^x (x - \xi) \left(\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi = h_\xi \sum_{v=1}^{pi} (x_i - \xi_v)^3 \left[\frac{U_{v,k} - U_{v-1,k}}{h_x} \right]^2 \quad (2.25)$$

yazabiliriz.

(2.24), (2.25) kuadratr formüllerini dikkate alarak (2.23) denklemi için aşağıdaki sonlu farklar şemalarını yazalım.

2.4.1 Aşık Şema

Ω_{h_x, h_t} ağının herhangi bir (x_i, t_k) noktasında

$$\frac{1}{6} \left[h_\xi \sum_{v=1}^{pi} (x_i - \xi_v)^3 \frac{(U_{v,k+1} - U_{v,k})}{h_t} \right] = \frac{1}{2} U_{i,k}^2 - \frac{3}{2} h_\xi \sum_{v=1}^{pi} (x_i - \xi_v) \left[\frac{U_{v,k} - U_{v-1,k}}{h_x} \right]^2 \quad (2.26)$$

$(i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots)$

Not 2.1 (2.23) denklemi için aşağıdaki sonlu fark karşılıkları da yazılabilir:

i) ileriye doğru aşık şema

$$\frac{h_\xi}{6h_t} \sum_{v=1}^{pi} (x_i - \xi_v)^3 (\hat{U}_v - U_{v,k}) = \frac{1}{2} U_{i,k}^2 - \frac{3}{2} h_\xi \sum_{v=1}^{pi} (x_i - \xi_v) \left(\frac{U_{v+1,k} - U_{v,k}}{h_x} \right)^2, \quad (2.27)$$

$(i = 0, 1, \dots, n-1)$

ii) merkezi aşık şema

$$\frac{h_\xi}{6h_t} \sum_{v=1}^{pi} (x_i - \xi_v)^3 (\hat{U}_v - U_{v,k}) = \frac{1}{2} U_{i,k}^2 - \frac{3}{2} h_\xi \sum_{v=1}^{pi} (x_i - \xi_j) \left(\frac{U_{v+1,k} - U_{v-1,k}}{2h_x} \right)^2, \quad (2.28)$$

$(i = 0, 1, \dots, n-1)$.

Bu şemalardan hangisinin kararlı olduğuna sonraki bölümde cevap arayacağız.

2.4.2. Kapalı Şemalar

a) ileriye doğru kapalı şema

$$\frac{h_\xi}{6h_t} \sum_{v=1}^{pi} (x_i - \xi_v)^3 (\hat{U}_v - U_v) = \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - \frac{3}{2} h_\xi \sum_{v=1}^{pi} (x_i - \xi_v) \left(\frac{\hat{U}_{v+1} - \hat{U}_v}{h_x} \right)^2, \quad (2.29)$$

$(i = 0, 1, \dots, n-1)$

b) geriye doğru kapalı şema

$$\frac{h_\xi}{6h_t} \sum_{v=1}^{pi} (x_i - \xi_v)^3 (\hat{U}_v - U_v) = \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - \frac{3}{2} h_\xi \sum_{v=1}^{pi} (x_i - \xi_v) \left(\frac{\hat{U}_v - \hat{U}_{v-1}}{h_x} \right)^2, \quad (2.30)$$

$$(i = 0, 1, \dots, n)$$

c) merkezi kapalı şema

$$\frac{h_\xi}{6h_t} \sum_{v=1}^{pi} (x_i - \xi_v)^3 (\hat{U}_v - U_v) = \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - \frac{3}{2} h_\xi \sum_{v=1}^{pi} (x_i - \xi_v) \left(\frac{\hat{U}_{v+1} - \hat{U}_{v-1}}{2h_x} \right)^2, \quad (2.31)$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Burada U_i , $U_{i\pm 1}$ ve $\hat{U}_{i\pm 1}$, $u(x, t)$ fonksiyonunun Ω_{h_x, h_t} ağıının sırasıyla herhangi (x_i, t_k) , $(x_{i\pm 1}, t_k)$ ve $(x_{i\pm 1}, t_k + \tau)$ noktalarındaki yaklaşık değerlerini göstermektedir.

Bu şemaları incelemek için (2.26) denklemini ele alarak araştırmaya başlayacağız.

Bu amaçla (2.26) denklemini

$$\frac{h_\xi}{6h_t} (x_i - \xi_i)^3 (\hat{U}_i - U_i) + \frac{h_\xi}{6h_t} \sum_{v=1}^{pi-1} (x_i - \xi_v)^3 (\hat{U}_v - U_v) = \frac{1}{2} U_i^2 - \frac{3}{2} h_\xi \sum_{v=1}^{pi} (x_i - \xi_v) \left(\frac{U_v - U_{v-1}}{h_x} \right)^2$$

şeklinde tekrar yazalım. $x_i \neq \xi_j$ ifadesini hatırlatarak, $A_{ij} = x_i - \xi_j$ notasyonunu içereyim.

Bu notasyon yardımıyla (2.26) denklemini

$$A_{ii}^3 (\hat{U}_i - U_i) + \sum_{v=1}^{pi-1} A_{iv}^3 (\hat{U}_v - U_v) = \frac{3h_t}{h_\xi} U_i^2 - 9h_t \sum_{v=1}^{pi} A_{ij} \left(\frac{U_v - U_{v-1}}{h_x} \right)^2$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$\hat{U}_i = U_i - \frac{1}{A_{ii}^3} \sum_{v=1}^{pi-1} A_{ij}^{(i)} (\hat{U}_v - U_v) + \frac{3h_t}{h_\xi} \frac{1}{A_{ii}^3} U_i^2 - \frac{9h_t}{A_{ii}^3} \sum_{v=1}^{pi} A_{iv} \left(\frac{U_v - U_{v-1}}{h_x} \right)^2 \quad (2.32)$$

$$(i = 0, 1, \dots, n)$$

elde ederiz. Bu durumda başlangıç ve sınır koşulları

$$U_{i0} = u_0(x_i), \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

$$U_{0,k} = U_{n,k} = 0, \quad \left. \frac{U_1 - U_0}{h_x} \right|_i = 0 = \frac{U_n - U_{n-1}}{h_x} \quad (2.33)$$

olur. Benzer şekilde, (2.27) ve (2.28) denklemleri için sonlu farklar şemaları sırasıyla

$$\hat{U}_i = U_i - \frac{1}{A_{ii}^3} \sum_{j=1}^{pi-1} A_{iv}^3 (\hat{U}_v - U_v) + \frac{3h_t}{h_\xi} \frac{1}{A_{ii}^3} U_i^2 - \frac{9h_t}{A_{ii}^3} \sum_{v=1}^{pi} A_{iv} \left(\frac{U_{v+1} - U_v}{h_x} \right)^2,$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1)$$

ve

$$\hat{U}_i = U_i - \frac{1}{A_{ii}^3} \sum_{v=1}^{pi-1} A_{ii}^3 (\hat{U}_v - U_v) + \frac{3h_t}{h_\xi} \frac{1}{A_{ii}^3} U_i^2 - \frac{9h_t}{A_{ii}^3} \sum_{v=1}^{pi} A_{ii} \left(\frac{U_{v+1} - U_{v-1}}{h_x} \right)^2,$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1)$$

olarak yazılabilir.

Şimdi (2.29) sonlu fark denklemini kullanarak bir algoritma yazalım.

$$\frac{h}{\tau} \sum_{j=1}^i A_j^{(i)} (\hat{U}_j - U_j) = \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - h \sum_{j=1}^i B_j^{(i)} \left(\frac{\hat{U}_{j+1} - \hat{U}_j}{h} \right)^2$$

Sonuncu denklemi

$$\begin{aligned} & \frac{h}{\tau} A_i^{(i)} (\hat{U}_i - U_i) + \frac{h}{\tau} \sum_{j=1}^{i-1} A_j^{(i-1)} (\hat{U}_j - U_j) \\ &= \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - h B_i^{(i)} \left(\frac{\hat{U}_{i+1} - \hat{U}_i}{h} \right)^2 - h \sum_{j=1}^{i-1} B_j^{(i-1)} \left(\frac{\hat{U}_{j+1} - \hat{U}_j}{h} \right)^2 \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz.

$$\begin{aligned} P_j^{(i-1)} &= \sum_{j=1}^{i-1} A_j^{(i-1)} (\hat{U}_j - U_j), \\ Q_j^{(i-1)} &= \sum_{j=1}^{i-1} B_j^{(i-1)} \left(\frac{\hat{U}_{j+1} - \hat{U}_j}{h} \right)^2 \end{aligned}$$

notasyonları dahilinde

$$\frac{h}{\tau} A_i^{(i)} \hat{U}_i - \frac{h}{\tau} A_i^{(i)} U_i = \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - h B_i^{(i)} \left(\frac{\hat{U}_{i+1} - \hat{U}_i}{h} \right)^2 - \frac{h}{\tau} P_j^{(i-1)} - h Q_j^{(i-1)}$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \frac{h}{\tau} P_j^{(i-1)} + h Q_j^{(i-1)} = F_j^{(i-1)}, \\ & \frac{h}{\tau} A_i^{(i)} \hat{U}_i - \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 + h B_i^{(i)} \left(\frac{\hat{U}_{i+1} - \hat{U}_i}{h} \right)^2 = -\tilde{F}_j^{(i-1)}, \\ & \tilde{F}_j^{(i-1)} = F_j^{(i-1)} - \frac{h}{\tau} A_i^{(i)} U_i, \\ & h B_i^{(i)} \left(\frac{\hat{U}_{i+1} - \hat{U}_i}{h} \right)^2 = \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - \frac{h}{\tau} A_i^{(i)} \hat{U}_i - \tilde{F}_j^{(i-1)} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{\hat{U}_{i+1} - \hat{U}_i}{h} = \sqrt{\frac{1}{hB_i^{(i)}} \left[\frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - \frac{h}{\tau} A_i^{(i)} \hat{U}_i - \tilde{F}_j^{(i-1)} \right]}$$

ifadesinden

$$\hat{U}_{i+1} = \hat{U}_i + h \sqrt{\frac{1}{hB_i^{(i)}} \left[\frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - \frac{h}{\tau} A_i^{(i)} \hat{U}_i - \tilde{F}_j^{(i-1)} \right]}$$

olur. Benzer şekilde, (2.30) ve (2.31) denklemleri için sonlu farklar şemaları yazılabilir.

Not 2.2 Bu algoritmanın çalışması için önce x_0 noktasında Euler şemasını çalıştırıp $\hat{U}_0$ elde edilir. Sonra ise $t_k = (k+1)\tau$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) katındaki değerler elde edilen algoritma ile gerçekleştirilir. Denklemdaki katsayılar ve serbest terimler ise t_k katında hesaplanır.

Şimdi, (2.5) çözümüne (2.25) sonlu farklar şemasının yakınsaklığı ve kararlılığı sorusunu araştıracağız.

$\varepsilon_{i,k}$, $\eta_{i,k}$ (2.25) sonlu farklar denkleminde içerilen integrallerin küpsel formülleriyle yaklaşım hataları olsun.

Diğer taraftan, $\delta_{i,k}$, $\omega_{i,k}$ sırasıyla $\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}$ ve $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ türevlerine sonlu fark yaklaşımlarının hataları olsun.

Burada

$$w(x,t) = \int_{-a}^x (x-\eta)^3 u(\eta,t) d\eta$$

ve

$$\varepsilon_{i,k} = w(x,t) - h \sum_{j=1}^i (x_i - \eta_j)^3 U_j,$$

$$\eta_{i,k} = \int_{-a}^x (x-\eta) \left(\frac{\partial u(\eta,t)}{\partial \eta} \right)^2 d\eta - h \sum_{j=1}^i (x_i - \eta_j) \left[\frac{U_{j+1} - U_j}{h} + \omega_{j,k} \right],$$

$$\delta_{i,k} = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - \frac{\hat{W}_i - W_i}{\tau},$$

$$\omega_{i,k} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{U_{i+1} - U_i}{h}$$

olmaktadır. $u(x,t)$ ve $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ sürekli fonksiyonlar olduklarından $\omega_{i,k} \rightarrow 0$ dır, yani

$$\omega_{i,k} = \frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial x} - \frac{U_{i+1} - U_i}{h} = \frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_i^*, t_k)}{\partial x} = \pi \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \rightarrow 0, \quad (2.32)$$

$$x_i^* \in (x_i, x_{i+h})$$

olmaktadır. Burada $\pi(f)$ herhangi bir $[-a, a]$ aralığında herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun sürekli modülü olmaktadır, yani

$$\pi(f) = \sup_{|t-x|<h} |f(t) - f(x)|$$

dır. $\varphi(x, t)$ ile $(x - \eta)^3 u(x, t) = \varphi(x, t)$ fonksiyonunu gösterelim. $\varphi(x, t)$ ve $\varphi'(x, t)$ fonksiyonlarının sürekli oldukları kolayca gösterilebilir. Bu durumda, $\varepsilon_{i,k}$ için belli bir $z \in [-a, a]$ için

$$\varepsilon_{i,k} = ah\varphi'(z, t) \quad (2.33)$$

dır.

$$\psi(x, t) = (x - \eta) \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2$$

olsun. $\psi(x, t)$ fonksiyonu $\eta_{i,k}$ için sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} \eta_{i,k} &= \int_{-a}^x \psi(\eta, t) d\eta - h \sum_{j=1}^i (x_i - \eta_j) \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \\ &\quad - h \sum_{j=1}^i (x_i - \eta_j) \omega_{j,k} = ah\psi'(z, t) - h \sum_{j=1}^i (x_i - \eta_j) \omega_{j,k} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \delta_{i,k} &= \frac{1}{3!} \frac{\partial w(x_i, t_k)}{\partial t} - \frac{1}{3!} \frac{\hat{W}_i - W_i}{\tau} \\ &= \frac{1}{2} U^2(x_i, t_k) - \frac{3}{2} \int_{-a}^{x_i} \psi(\eta, t) d\eta - \left[\frac{1}{2} U_i^2 - \frac{3}{2} h \sum_{j=1}^i \psi_j \right] \\ &= \frac{1}{2} (U^2(x_i, t_k) - U_j^2) - \left[\frac{3}{2} \int_{-a}^{x_i} \psi(\eta, t) d\eta - \frac{3}{2} h \sum_{j=1}^i \psi_j \right] = \max_{(x_i, t_k)} u \cdot \pi(u) - \frac{3}{2} \eta_{i,k} \end{aligned}$$

alırız. Buradan da görüleceği üzere (2.25) sonlu farklar şeması kararlıdır.

SONUÇ

Tezde elde edilen sonuçları aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz:

1. Dördüncü mertebeden dejenere olabilen nonlinear difüzyon denkleminin sayısal çözümünün bulunması için esas problem üzerinde bazı avantajlara sahip olan ve ele alınan problemin fiziksel özelliklerini doğru yansıtabilen ve gerçek çözümün bulunmasına yardım eden özel bir yardımcı problem önerilmiştir.
2. İnce film denklemlerinin çözümü için süreksiz fonksiyonlar sınıfında yüksek hassasiyete sahip sayısal şemalar oluşturulmuştur.
3. Yardımcı problem kullanılarak elde edilen sayısal çözümün belli anlamda gerçek çözüme yakınsadığı ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Acheson, D. Elementary Fluid Dynamics. vlarendon Press. Oxford, 1990.
- [2] Aronson, D.G., Peletier, L.A., Large Time Behaviour of Solutions of the Porous Medium Equation in Bounded Domians, J. Diff. Eq., 39, 378-412, 1981.
- [3] Bernis, F., The Free Boundary of Thin Viscous Flows, ZAMM, 76, 369-372, 1996.
- [4] Bernis. F., Friedman A. Higher Order Nonlinear Degenerate Parabolic Equations, Journal of Differential Equations 83, 179-203, 1990.
- [5] Bernis, F., Hushof, J., King, J.R., Dipoles and Similarity Solutions to the Thin Film Equation in the Half-Line, Nonlinearty, 13, 1-27, 2000.
- [6] Bernis, F., Peletier, L., Williams, S., Source Type Solutions of a Fourth Order Nonlinear Degenerate Parabolic Equation, Nonlin. Anal., 18, 217-234, 1992.
- [7] Berryman, J.G., Holland, C.J., Stability of the Separable Solution for Fast Diffusion, Arch. Rat. Mech. Anal., 74, 379-388, 1980.
- [8] Bertozzi, A., Brenner, M., Dupont, T., Kadanoff, L., Singularities and Similarities in Interface Flows, Trends and Perspectives in Applied Mathematics, 100, 155-208, 1994.
- [9] Bowen, M., Higher Order Diffusion, Ph.D. Thesis, University Of Nottingham, 1998.
- [10] Bowen, M., King, J.R., Asymptotic Behavior of the Thin Film Equation in Bounded Domains, European J. Appl. Math., 2(3), 321-356, 2001.
- [11] Dupont, T., Goldstein, R., Kadanoff, L. & Zhou, S., Finite-Time Singularity Formation in Hele-Shaw Systems, Phys. Rev. E, 42, 4182-4196, 1993.
- [12] Erdik, E., Mekanik ve Maddenin Özellikleri, Türk Tarih Kurumu Basımevi, Ankara, 1972.
- [13] King, J.R., Integral Results for Nonlinear Diffusion Equations, Journal of Engineering Mathematics, 25, 191-205, 1991.
- [14] King, J.R., Asymptotic Results For Nonlinear Outdiffusion, Euro. J. Appl. Math., 5, 359-390, 1994.
- [15] King, J.R., Bowen, M., Moving Boundary Problems and Non-Uniqueness for the Thin Flim Equation, Euro. J. Appl. Math., 12, 321-356, 2001.
- [16] Myers, T.,G., Thin Film with Hith Surface Tension. SIAM rev. Vol. 40, No 3, pp.441-462. 1998.
- [17] Rasulov, M.A., On a Method of Solving the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dok. 43, No.1, 1991.

- [18] Rasulov, M.A., Ragimova, T.A., A Numerical Method of the Solition of ne Nonlinear Equation of a Hyperbolic Type of the First Order Differential Equations, Minsk, Vol. 28, No.7, pp. 2056-2063, 1992.
- [19] Richmyer, R.D., Morton, K.W., Difference Methods for Initial Value Problems, New York, Wiley, Int., 1967.
- [20] Ward, JP, King, J.R., Thin-film Modelling of Biofilim Growth and Quorum Sensing, Journal Eng. Math., 73, 71-92, 2012.
- [21] Young, T., An Essay on the Cohesion of Fluids, Philos. Trans. R. Soc. London, 95, 65-87, 1805.
- [22] Yuehua, Y, Lee, T.R., Contact Angle and Wetting Properties, In Surface Analytical Techniques; Editors: G. Bracco and B. Holst; Springer Series in Surface Sciences 51, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2013.

ÖZGEÇMİŞ

Feyyaz MARANGOZ, 21.08.1989 tarihinde Edirne’de doğdu. 2003 yılında Kapaklı Cumhuriyet İlköğretim Okulu’ndan, 2007 yılında Çerkezköy Hacı Fahri Zümbül Anadolu Lise’nden, 2011 yılında Edirne Trakya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden mezun oldu. 2012 yılından itibaren Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde yüksek lisansına (Uygulamalı Matematik) devam etmektedir.

Feyyaz MARANGOZ