



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



DOKTORA TEZİ

**İNDİRGENEMEZ KARAKTER DERECELERİ VE TÜREV
UZUNLUĞU**

Burcu ÇINARCI

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Temha ERKOÇ YILMAZTÜRK

Aralık, 2018

İSTANBUL

Bu çalışma 21.12.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

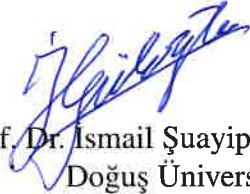
Tez Jürisi



Dr. Öğr. Üyesi Temha ERKOÇ YILMAZTÜRK (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Prof. Dr. İsmail Şuayip GÜLOĞLU
Doğuş Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi



Prof. Dr. Kazım İlhan İKEDA
Boğaziçi Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi



Doç. Dr. Şükrü YALÇINKAYA
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin 27148 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans ve doktora öğrenimim boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, hoşgörüyle beni destekleyen, insani ve ahlaki değerlerini de örnek aldığım değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Temha Erkoç Yılmaztürk'e, bu tez çalışmasının oluşması sırasında gösterdiği ilgi ve özveriden dolayı teşekkür ederim.

Tez izleme komitemde yer alan değerli görüş ve önerilerinden faydalandığım Prof. Dr. İsmail Şuayip Güloğlu'na ve Doç. Dr. Şükrü Yalçinkaya'ya teşekkür ederim.

İstanbul Üniversitesi'ndeki öğrenimim boyunca ders aldığım ve desteklerini benden esirgemeyen hocalarıma teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında beni cesaretlendiren ve akademik birikimlerini benimle paylaşan Prof. Dr. Davut Uğurlu'ya teşekkür ederim.

Manevi destekleriyle her zaman yanımda olan arkadaşlarım Aynur Dinç'e, Funda Lafçı'ya, Azime Çetinkaya'ya, Dilek Gün'e ve Büşra Can'a teşekkür ederim.

Son olarak eğitim hayatım boyunca varlıklarıyla en büyük manevi desteği veren ve yetişmemde büyük emeği olan aileme teşekkür eder ve bu tezi onlara ithaf ederim.

Aralık, 2018

Burcu ÇINARCI

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
TABLO LİSTESİ	iii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	iv
ÖZET	v
SUMMARY	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	7
2.1. GRUP TEORİSİ	7
2.2. KARAKTER TEORİSİ	11
2.3. REEL DEĞERLİ KARAKTERLER VE MONOLİTİK KARAKTERLER	17
2.4. TAKETA EŞİTSİZLİĞİ	27
3. MALZEME VE YÖNTEM	33
4. BULGULAR	34
4.1. REEL KARAKTERLER, MONOLİTİK KARAKTERLER VE TAKETA EŞİTSİZLİĞİ	34
4.2. KARAKTER ÇARPIMLARININ İNDİRGENEMEZ ÖĞELERİ VE TÜREV UZUNLUĞU	46
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	53
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	59

TABLO LİSTESİ

	Sayfa No
Tablo 2.1: S_3 grubunun karakter tablosu.....	12
Tablo 4.1: S_4 grubunun karakter tablosu.....	38



SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$ A $	: A kümesinin eleman sayısı
$F(G)$	: G grubunun Fitting alt grubu
$\phi(G)$	: G grubunun Frattini alt grubu
$Z(G)$	: G grubunun merkezi
$G^{(n)}$	: G grubunun n -inci komütatör grubu
$dl(G)$	: G grubunun türev uzunluğu
$O^p(G)$	: G içindeki indeksi p asalının kuvveti olan minimal normal alt grup
$E^p(G)$	: $G/E^p(G)$ grubunu elemanter abelyen p -grubu yapan minimal alt grup
$Syl_p(G)$	: G grubunun p -Sylow alt gruplarının kümesi
$G(n, \mathbb{C})$	: $n \times n$ boyutunda tersi var olan kompleks matrislerin oluşturduğu grup
$tr(A)$	: A matrisinin izi
$Irr(G)$	: G grubunun indirgenemez karakterlerinin kümesi
$Irr(G N)$	: N yi çekirdeğine almayan G nin indirgenemez karakterlerinin kümesi
$Irr_1(G)$	: G grubunun lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin kümesi
$Irr_m(G)$	: G grubunun monolitik karakterlerinin kümesi
$Irr_{\mathbb{R}}(G)$	: G grubunun reel değerli indirgenemez karakterlerinin kümesi
$Lin(G)$	: G grubunun lineer karakterlerinin kümesi
$cd(G)$	: G grubunun indirgenemez karakter derecelerinin kümesi
χ_H	: χ karakterinin H alt grubuna kısıtlanmış
$\bar{\chi}$	: χ karakterinin kompleks eşleniği
$ker(\chi)$	: χ karakterinin çekirdeği
ϕ^G	: Bir ϕ karakterinin G grubuna yükseltilmesiyle oluşan karakter
$I_G(\lambda)$	: λ karakterinin G içindeki inertia grubu
$Q(\chi)$	: χ karakterinin bir G grubu üzerinde aldığı değerlerden oluşan cisim
$\square$	: İspat bitti

ÖZET

DOKTORA TEZİ

İNDİRGENEMEZ KARAKTER DERECELERİ VE TÜREV UZUNLUĞU

Burcu ÇINARCI

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Temha ERKOÇ YILMAZTÜRK

K. Taketa'nın M -gruplarının çözülebilir olduğunu gösterdiği [35] çalışmasında, M -gruplarının türev uzunluğunun indirgenemez karakter dereceleri kümesinin eleman sayısından küçük veya eşit olduğu görülmektedir. Bunun üzerine herhangi bir sonlu çözülebilir G grubunun türev uzunluğu $dl(G)$ ve bu grubun indirgenemez karakter dereceleri kümesi $cd(G)$ olmak üzere, $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliğinin geçerli olduğu sanısı ilk olarak I. M. Isaacs and G. Seitz tarafından ifade edilmiştir. Bu problem hâlâ açık olmasına rağmen, bazı özelliklere sahip sonlu çözülebilir gruplar için bu eşitsizliğin geçerli olduğunu gösteren çalışmalar literatürde yer almaktadır. Bu tez çalışmasında da birtakım özelliklere sahip monolitik veya reel değerli indirgenemez karakterleri olan sonlu çözülebilir grupların Taketa eşitsizliğini sağladığı gösterilmiştir. Ayrıca χ sonlu çözülebilir G grubunun bir indirgenemez karakteri olmak üzere $\chi\bar{\chi}$ karakterinin indirgenemez öğelerinin çekirdekleri ile G grubunun yapısı arasında birtakım ilişkiler bulunarak, bazı durumlarda Taketa eşitsizliğinin geçerli olduğuna yönelik sonuçlar elde edilmiştir.

Aralık 2018, 66 sayfa.

Anahtar kelimeler: Çözülebilir gruplar, türev uzunluğu, karakter dereceleri, monolitik ve reel karakterler, karakterlerin çarpımları, Taketa eşitsizliği.

SUMMARY

Ph.D. THESIS

IRREDUCIBLE CHARACTER DEGREES AND DERIVED LENGTH

Burcu ÇINARCI

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Temha ERKOÇ YILMAZTÜRK

K. Taketa has proved that all M -groups are solvable in [35]. The proof of this fact shows that if G is an M -group, then the derived length of G is at most the cardinality of the set of all irreducible character degrees of G . Then, it has been conjectured by I. M. Isaacs and G. Seitz that the inequality $dl(G) \leq |cd(G)|$ holds for arbitrary finite solvable group G , where $dl(G)$ is the derived length of G and $cd(G)$ is the set of all irreducible complex character degrees of G . Although this conjecture is still open, in the literature there are several results which prove that some classes of solvable groups satisfy this inequality. In this thesis, we prove that the Taketa inequality holds for a finite solvable group G if monolithic or real irreducible characters of G have some special properties. We also present relations between the structure of a finite solvable group G and the kernels of irreducible constituents of the character $\chi\bar{\chi}$ where χ is an irreducible character of G and thus we obtain some results for the Taketa inequality.

December 2018, 66 pages.

Keywords: Solvable groups, derived length, character degrees, monolithic and real characters, products of characters, Taketa inequality.

1. GİRİŞ

Karakter teorisi sonlu gruplarla ilgili bazı teoremlerin ispatlarında önemli bir yere sahiptir. G bir sonlu grup olmak üzere $Irr(G)$, G grubunun tüm indirgenemez karakterlerinin kümesi ve $cd(G)$ de bu grubun tüm indirgenemez karakter derecelerinin kümesi olsun. Örneğin, Ito teoremi G grubunun bir normal abelyen p -Sylow alt grubunun olması için gerek ve yeter koşulun p asalının $cd(G)$ kümesindeki hiçbir dereceyi bölmemesi gerektiğini söyler. Ayrıca Thompson teoremi ile $cd(G) \setminus \{1\}$ kümesindeki her derece p asalı ile bölünüyorsa G grubunun bir normal p -komplementi olduğu görülür.

G bir sonlu çözülebilir grup olmak üzere $dl(G)$, G grubunun türev uzunluğunu gösterebilir. Herhangi bir sonlu çözülebilir G grubunun türev uzunluğunun, bu grubun indirgenemez karakter dereceleri kümesinin eleman sayısı ile üstten sınırlandırılıp sınırlandırılmayacağı, yani $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliğinin geçerli olup olmayacağı karakter teorisinin açık problemlerinden biridir ve bu problem literatürde Isaacs-Seitz sanısı veya Taketa problemi olarak bilinir. Taketa problemi yaklaşık 50 yıldır araştırmacıların üzerinde çalıştığı ama günümüze kadar çözülememiş olan bir problemdir. K. Taketa adlı matematikçinin adıyla anılan bu eşitsizlik aslında Taketa tarafından ortaya konulan bir problem değildir. Taketa, 1930 yılında [35] çalışmasında M -gruplarının çözülebilir olduğunu ispatlamıştır. İspat incelendiğinde M -gruplarının türev uzunluğunun indirgenemez karakter dereceleri kümesinin eleman sayısından küçük veya eşit olduğu görülmektedir. Daha sonra $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliğinin tüm sonlu çözülebilir G grupları için geçerli olup olmayacağı sorusu I. M. Isaacs ve G. Seitz adlı matematikçiler tarafından ortaya atılmıştır ve bu sanıyı destekleyen ilk çalışmalar Isaacs tarafından yapılmıştır.

Isaacs, 1975 yılında sonlu çözülebilir G grupları için $dl(G) \leq 3|cd(G)| - 2$ olduğunu ve eğer G abelyen olmayan ve tek mertebeli bir grup ise $dl(G) \leq 2|cd(G)| - 2$ olduğunu göstermiştir ([22]). Mertebesi tek olan gruplar için elde edilen bu sonucu 1976 yılında T. R. Berger genelleştirmiş ve mertebesi tek olan grupların Taketa eşitsizliğini sağladığını göstermiştir ([5]). Ayrıca D. Gluck, 1985 yılında [16] çalışmasında Isaacs'ın sonucunu genelleştirerek,

sonlu çözülebilir G grupları için $dl(G) \leq 2|cd(G)|$ olduğunu ispatlamıştır. T. M. Keller 2003'te [25] çalışmasında sonlu çözülebilir G grubu için

$$dl(G) \leq |cd(G)| + 24\log_2(|cd(G)|) + 364$$

eşitsizliğini ve 2012'de ise K. Kildetof, G bir sonlu çözülebilir grup ve $|cd(G)| \geq 3$ olduğunda $dl(G) \leq 2|cd(G)| - 3$ eşitsizliğini elde etmiştir ([26]). Bu son iki sonuca dikkat edilirse Kildetof'un sonucu $|cd(G)| \leq 587$ olduğunda en iyi üst sınır olurken, Keller'inki ise $|cd(G)| \geq 588$ iken en iyi sonuç olduğu görülür.

Bazı araştırmacılar yukarıda bahsedildiği gibi sonlu çözülebilir bir grubun türev uzunluğunu, indirgenemez karakter derecelerinin eleman sayısının bir lineer fonksiyonu ile üstten sınırlandırmaya çalışırken, bazıları ise $cd(G)$ kümesinin eleman sayısı veya G grubunun yapısı üzerinden bir inceleme yapmışlardır. Örneğin, Isaacs 1970 yılında $|cd(G)| \leq 3$ olması durumunda G grubunun çözülebilir olduğunu ve Taketa eşitsizliğini sağladığını göstermiştir ([21]). 1973'te S. Garrison [15] referanslı doktora tezinde, G bir sonlu çözülebilir grup ve $|cd(G)| = 4$ olduğunda Taketa eşitsizliğinin sağlandığını gösterirken, 2001'de M. L. Lewis [30] çalışmasında, G sonlu çözülebilir bir grup ve $|cd(G)| = 5$ iken $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir. $|cd(G)| \geq 6$ durumunda ise Taketa eşitsizliğinin sağlanıp sağlanmadığı hâlâ ispatlanamamış bir problem olarak karşımıza çıkmaktadır. 2013'te K. Aziziheris ve Lewis [4] referanslı çalışmalarında, sonlu bir G grubunun indirgenemez karakter dereceleri tek sayı ise G grubunun çözülebilir olduğunu ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliğinin sağlandığını kanıtlarken, yine aynı çalışmada $cd(G) \setminus \{1\}$ kümesindeki her derece 2 ile bölündüğünde, G grubunun Taketa eşitsizliğini sağlayan çözülebilir bir grup olduğunu ispatlamışlardır.

Bir sonlu çözülebilir grubun karakter derece çizgesi üzerinden de incelemeler yapılarak Taketa problemiyle ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. 1998'de Lewis [28] çalışmasında karakter derece çizgesi bağlantısız olan çözülebilir grupların ve 2015'te [27] çalışmasında ise çapı 3 olan karakter derece çizgesine sahip sonlu çözülebilir grupların Taketa eşitsizliğini sağladığını göstermiştir. [31] referanslı çalışmadan sonlu çözülebilir bir grubun karakter derece çizgesi bağlantılı ise bu çizgenin çapı en fazla 3 olabileceğinden, çapı 1 veya

2 olan karakter derece çizgesine sahip çözülebilir grupların Taketa eşitsizliğini sağlayıp sağlamadığı ise açık bir problem olarak literatürde bulunmaktadır.

Sonlu çözülebilir grupların türev uzunluğu ve indirgenemez karakter dereceleri üzerine olan bu tez çalışması, temel olarak 5 bölüm ve Kaynaklar kısmından oluşmaktadır.

Birinci bölüm olan Giriş bölümünde, Taketa probleminin çıkış noktası anlatıldıktan sonra literatürde yer alan bazı çalışmalara yer verilmiştir.

İkinci bölüm olan Genel Kısımlar bölümünde grup teorisinde ve karakter teorisinde yer alan bazı temel tanım ve teoremler özetlenmiştir. Bir sonlu grubun reel değerli indirgenemez karakterleri ve monolitik karakterleri tanıtarak, bu karakterlere ait bazı teoremler referanslarıyla birlikte anlatılmıştır. Ayrıca K. Taketa'nın M -gruplarının çözülebilir olduğunu gösteren teoreminin ispatı verilmiştir. Daha sonra bulgular kısmında sıklıkla kullanılacak olan literatürdeki bazı teoremler üzerinde durulmuştur.

Üçüncü kısım olan Malzeme ve Yöntem bölümünde bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların ispatlarında kullanılan matematiksel ispat tekniklerinden bahsedilmiştir.

Tezin dördüncü bölümü olan Bulgular bölümünü iki kısma ayırabiliriz. Birinci kısımda bir sonlu çözülebilir G grubunun bazı özelliklere sahip reel değerli indirgenemez karakterlerinden veya monolitik karakterlerinden yararlanarak elde ettiğimiz teoremler ve onların sonuçları yer almaktadır. χ , G grubunun bir indirgenemez karakteri olsun. χ karakteri, G grubu üzerinde reel değerler alıyorsa bu karaktere reel değerli denir ve G grubunun tüm indirgenemez karakterleri reel değerli ise G bir reel grup olarak adlandırılır. Ayrıca $G/\ker(\chi)$ grubunun biricik minimal normal alt grubu varsa χ karakterine monolitik karakter denir.

Bu tez çalışmasında sonlu gruplar ile ilgilenildiğinden grup denildiğinde sonlu bir grup olduğu anlaşılacaktır. Bulguların birinci bölümünde elde edilen teoremlere ve bazı sonuçlara Çınarcı ve Erkoç [11] referanslı çalışmada da yer verilmiştir. Bu bölümdeki teorem ve sonuçlar aşağıdaki gibidir:

Teorem 1.1. ([11]). G grubunun 2-Sylow alt grubu normal ise G çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliğini sağlar.

Teorem 1.2. ([11]). Kabul edelim ki G grubu aşağıdakilerden birini sağlasın.

- (a) G grubunun tüm monolitik karakter dereceleri tek sayı olsun.
- (b) G grubunun her lineer olmayan monolitik χ karakteri için $\chi(1)$ çift sayı olsun.

O halde G grubu çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliği gerçekleşir.

Teorem 1.3. ([11]). G aşağıdakilerden birini sağlayan bir grup olsun.

- (a) G grubunun tüm reel değerli indirgenemez karakter dereceleri tek sayı olsun.
- (b) G grubunun her lineer olmayan reel değerli indirgenemez karakter derecesi çift sayı olsun.

O halde G grubu çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.4. ([11]). G bir çözülebilir grup olsun. Eğer G grubunun lineer olmayan, reel değerli ve tek dereceli indirgenemez karakterleri sadık ise G grubu, Taketa eşitsizliğini sağlar.

Teorem 1.5. ([11]). G bir grup olsun. G grubunun lineer olmayan monolitik karakter dereceleri birbirinden farklı ise G çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliği gerçekleşir.

Bu teoremin bir sonucu şu şekildedir:

Sonuç 1.6. ([11]). G bir çözülebilir grup olsun. G grubunun her lineer olmayan χ indirgenemez karakteri için $|Irr_\chi(G)| \leq 2$ ise $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliği sağlanır. Burada $Irr_\chi(G)$, G grubunun derecesi $\chi(1)$ sayısına eşit olan tüm indirgenemez karakterlerinin kümesidir.

Teorem 1.7. ([11]). G bir çözülebilir reel grup olsun. Eğer G grubunun çift dereceli monolitik karakter dereceleri birbirinden farklı ise G grubu Taketa eşitsizliğini gerçekleştirir.

"Komütatör grubu süperçözülebilir olan gruplar Taketa eşitsizliğini sağlar mı?" sorusundan yola çıkarak bazı özel şartlar altında bu soruya olumlu cevap bulduğumuz teoremler şu şekildedir:

Teorem 1.8. ([11]). G bir grup olsun. G' süperçözülebilir ve G grubunun her reel değerli tek dereceli monolitik χ karakteri için $G/\ker(\chi)$ çekirdeği elemanter abelyen 2-grubu olan Frobenius grubu olmasın. O halde G grubu çözülebilirdir ve Taketa eşitsizliğini sağlar.

Sonuç 1.9. ([11]). G bir grup ve $O^{2'}(G) = G$ olsun. Eğer G' süperçözülebilir ise G çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ olur.

Teorem 1.10. G bir grup ve G' süperçözülebilir olsun. Eğer G grubunun tek dereceli lineer olmayan indirgenemez karakterleri reel değerli ise G çözülebilirdir ve Taketa eşitsizliğini sağlar.

Sonuç 1.11. ([11]). G bir reel grup ve G' süperçözülebilir olsun. O halde G çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ olur.

χ , G grubunun bir indirgenemez karakteri olmak üzere $\chi\bar{\chi}$ karakterinin indirgenemez ögeleri ile G grubunun yapısıyla ilgili bazı sonuçlar E. Adan-Bante'nin [1] referanslı çalışmasında mevcuttur. Bulguların ikinci kısmı olarak değerlendirdiğimiz bölümde, $\chi\bar{\chi}$ karakterinin indirgenemez ögelerinin çekirdekleri ile G grubunun yapısı arasında birtakım ilişkiler bulunarak, bazı durumlarda Taketa eşitsizliğinin geçerli olduğuna yönelik aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Hipotez 1: (P) , sonlu çözülebilir grupların bazı indirgenemez karakterlerinin sahip olduğu bir özellik olsun. $Irr_{(P)}(G)$, bir sonlu çözülebilir G grubunun (P) özelliğine sahip lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin kümesi olsun ve aşağıdakiler gerçeklensin:

- (i) Eğer $Irr_{(P)}(G)$ kümesi boş küme ise G grubu Taketa eşitsizliğini gerçekler.
- (ii) Her $N \trianglelefteq G$ için $Irr_{(P)}(G/N) \subseteq Irr_{(P)}(G)$ olsun.

Teorem 1.12. Hipotez 1 ile verilenleri kabul edelim. Her $\chi \in Irr_{(P)}(G)$ için $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki tüm indirgenemez ögelerinin çekirdekleri içinde bir maksimal çekirdek abelyen oluyorsa G grubu Taketa eşitsizliğini sağlar.

Teorem 1.13. G bir abelyen olmayan çözülebilir grup ve $\chi \in Irr_{m,1}(G)$ olsun. Eğer $\ker(\chi)$, G grubunun lineer olmayan monolitik karakterlerinin çekirdekleri arasında bir maksimal

çekirdek ise $\chi\bar{\chi}$ karakterinin indirgenemez ögelerinin çekirdeklerinin hepsi aynı olamaz.

Teorem 1.14. G bir abelyen olmayan çözülebilir grup ve χ , G grubunun lineer olmayan tek dereceli bir monolitik karakteri olsun. $\ker(\chi)$ bir 2-grubu ve G grubunun lineer olmayan monolitik karakter çekirdekleri arasında maksimal çekirdek ise G grubunun 2-Sylow alt grubu normaldir. Ayrıca G bir reel grup değildir.

Teorem 1.15. G bir abelyen olmayan çözülebilir grup olsun. G grubunun her çift dereceli χ monolitik karakteri için $\chi\bar{\chi} = 1_G + \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$ yazılışında $\ker(\alpha_1) = \dots = \ker(\alpha_n)$ ise G grubunun 2-Sylow alt grubu normaldir. Ayrıca G bir reel grup olamaz.

Teorem 1.16. G bir çözülebilir grup olsun. G grubunun bir lineer olmayan indirgenemez χ karakteri için $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki tüm indirgenemez ögelerinin çekirdekleri birbirine eşitse χ tek dereceli reel değerli karakter değildir.

Teorem 1.17. G bir sonlu çözülebilir grup ve $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{R},1}(G)$ olsun. $\ker(\chi)$, G grubunun lineer olmayan reel değerli indirgenemez karakterlerinin çekirdekleri arasında bir maksimal çekirdek ise $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki tüm indirgenemez ögelerinin çekirdeklerinin hepsi aynı olamaz.

Sonuç 1.18. G bir sonlu çözülebilir grup ve $\text{Irr}_{\mathbb{R},1}(G) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda en az bir $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{R},1}(G)$ için $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki indirgenemez ögelerinin çekirdeklerinin hepsi aynı değildir.

Tez çalışmasının son kısmı olan Tartışma ve Sonuç'ta, Bulgular kısmının bir genel değerlendirmesi yapılmıştır. Isaacs-Seitz sanısının doğru olabileceğine yönelik bulduğumuz teoremler özetle verilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. GRUP TEORİSİ

Bu bölümde sonlu gruplarla ilgili bilinen bazı temel tanım ve teoremlere yer vereceğiz ve I. M. Isaacs'ın [19] ve [20] çalışmalarını referans olarak alacağız. G boştan farklı bir küme ve $\circ$, G üzerinde tanımlanmış bir asosyatif ikili işlem olsun. " G kümesinin her x elemanı için $x \circ e = e \circ x = x$ ve ayrıca her $x \in G$ için $x \circ y = y \circ x = e$ olacak biçimde $y \in G$ vardır" koşullarını sağlayan bir $e \in G$ varsa G kümesine $\circ$ işlemine göre bir grup denir. $\circ$ ikili işlemi komütatif ise G grubuna bir komütatif grup veya abelyen grup denir. Bir $g \in G$ için $G = \langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ olarak ifade edilebilen G grubuna bir devresel grup adı verilir ve açıkça görüldüğü gibi bu grup abelyendir. G grubunun boş kümeden farklı bir H alt kümesi, G grubundaki işleme göre grup olma özelliklerini sağlıyorsa H grubuna G grubunun bir alt grubudur denir ve $H \leq G$ yazılır. Grup teorisinde önemli bir yere sahip olan Lagrange teoremi ise $H \leq G$ için H alt grubunun mertebesinin G grubunun mertebesini böldüğünü ifade eder. $\frac{|G|}{|H|}$ sayısına H grubunun G içindeki indeksi denir ve $|G : H|$ ile gösterilir. Lagrange teoremin tersi ise bazı gruplar için doğru değildir. Örneğin, mertebesi 12 olan A_4 alterne grubunun mertebesi 6 olan bir alt grubu yoktur.

G bir grup ve p bir asal sayı olsun. $a \in \mathbb{N}$ olmak üzere $p^a \mid |G|$ ve $p^{a+1} \nmid |G|$ ise G grubunun p^a mertebeli en az bir alt grubu vardır ve bu alt gruba G grubunun bir p -Sylow alt grubu denir. G grubunun tüm p -Sylow alt gruplarının kümesi ise $Syl_p(G)$ ile gösterilir. G grubunun mertebesi bir p asalının kuvveti biçiminde ise bu gruba bir p -grup denir. Bir abelyen p -grubunun elemanlarının hepsinin mertebesi p ise bu gruba elemanter abelyen p -grubu adı verilir.

$H \leq G$ olmak üzere her $g \in G$ için $gHg^{-1} = H^g = H$ eşitliği sağlanıyorsa H grubuna G grubunun bir normal alt grubudur denir ve $H \trianglelefteq G$ ile ifade edilir. $\{1_G\}$ ve G , G grubunun trivial normal alt gruplardır. Trivial normal alt grupları dışında normal alt grubu bulunmayan G grubuna bir basit grup denir. Bir H alt grubunun G içindeki normalizatörü olan $N_G(H)$,

$H^g = H$ eşitliğini sağlayan G grubunun tüm g elemanlarından oluşan bir alt gruptur. H , G grubunun bir normal alt grubu ise açıkça görüldüğü gibi $N_G(H) = G$ olur.

G ve H iki grup olmak üzere $\varphi : G \rightarrow H$ tasvirine, her $x, y \in G$ için $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ eşitliği sağlanıyorsa bir grup homomorfisi denir. G grubunun

$$\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = 1\}$$

normal alt grubuna φ homomorfisinin çekirdeği denir. φ homomorfisine, bire-bir ve örten tasvir ise izomorfi denir ve G grubundan kendisi üzerine tanımlanmış φ izomorfisine ise otomorfi adı verilir. $\varphi : G \rightarrow H$ tasviri bir örten homomorfi ise $H \cong G/\ker(\varphi)$ olduğu grup teorisinde birinci izomorfi teoremi olarak bilinir. G grubunun tüm otomorfileri tarafından sabit bırakılan C alt grubuna bir karakteristik alt grup denir. Ayrıca $N \trianglelefteq G$ ve C, N grubunun bir karakteristik alt grubu ise $C \trianglelefteq G$ olur. G grubunun bir S p -Sylow alt grubu normal ise bu alt grup karakteristikdir.

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. G grubunun $H \leq K \leq G$ koşulunu sağlayan her K alt grubu için $K = H$ veya $K = G$ oluyorsa H grubuna kapsama bağıntısına göre G grubunun bir maksimal alt grubu denir. G grubunun tüm maksimal alt gruplarının kesişimine Frattini alt grup denir ve $\phi(G)$ ile gösterilir. G grubunun bir H alt grubunun G içindeki merkezleyeni $C_G(H)$ ile gösterilir. G grubunun merkezi ise

$$Z(G) = C_G(G) = \{y \in G \mid \text{her } x \in G \text{ için } xy = yx\}$$

olur.

K ve L , G grubunun $K \cap L = 1$ koşulunu sağlayan iki normal alt grubu olsun. Her $x \in G$ için $x = kl$ olacak biçimde tek türlü belirli $k \in K$ ve $l \in L$ varsa G grubuna bir direkt çarpım grubu denir ve $G = K \times L$ olarak ifade edilir. $N \trianglelefteq G$ olsun. G grubunun $G/N \cong H$ ve $N \cap H = 1$ olacak biçimde bir H alt grubu varsa G grubuna bir yarı direkt çarpım grubu denir ve $G = N \rtimes H$ yazılır. Buradaki H grubuna N grubunun bir komplementi denir. P , G grubunun bir p -Sylow alt grubu olmak üzere G grubunun $G = N \rtimes P$ olacak biçimde bir N normal alt grubu varsa bu alt gruba da G grubunun normal p -komplementi denir. G grubunun

normal p -komplemente sahip olması için yeterli bir koşul aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.1.1. ([20, Sonuç 5.14]). G bir sonlu grup, $P \in \text{Syl}_p(G)$ ve p ise G grubunun mertebesini bölen en küçük asal sayı olsun. Eğer P devresel ise G bir grubunun bir normal p -komplementi vardır.

Bir yarı direkt çarpım grubu olan Frobenius gruplarının tanımını verelim. G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Her $g \in G - H$ için $H^g \cap H = 1$ ve $N_G(H) = H$ olsun. Bu durumda $N = G - \bigcup_{g \in G} (H - \{1\})^g$, G grubunun bir normal alt grubudur ve bu gruba Frobenius çekirdeği adı verilir. $G = N \rtimes H$ yarı direkt çarpım grubuna ise bir Frobenius grubu denir. H ise G grubunun bir Frobenius tümleyenidir. Bilinen en küçük mertebeli Frobenius grup örneği S_3 simetrik grubudur.

Bir G grubu,

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$$

ve her $0 \leq i < n$ için G_{i+1}/G_i abelyen olacak biçimde $G_0, G_1, \dots, G_n$ normal alt gruplarına sahipse bu G grubuna çözülebilir denir. Eğer her $0 \leq i < n$ için G_{i+1}/G_i bölüm grubu devresel olacak biçimde G_i normal alt grup serisi varsa G grubu süperçözülebilir adını alır. Dikkat edilmelidir ki süperçözülebilir gruplar aynı zamanda çözülebilirdirler.

G bir grup olsun. G/N bölüm grubunu abelyen yapan N normal alt grupları arasında en küçük mertebeli olan normal alt grup, G grubunun karakteristik alt grubudur. Bu alt gruba G grubunun komütatör alt grubu denir ve G' ile gösterilir. $G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = G'$ ve $n > 0$ için $G^{(n)} = (G^{(n-1)})'$ olmak üzere G grubunun

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq \dots$$

normal abelyen serisini elde ederiz ve bu seriye G grubunun türev serisi denir. G grubunun çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $G^{(n)} = 1$ olacak şekilde n tam sayısının var olmasıdır. $G^{(n)} = 1$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif m tam sayısına G grubunun türev uzunluğu denir ve $dl(G) = m$ ile gösterilir. K ve L bir çözülebilir G grubunun iki normal alt grubu ve $K < L$ olsun. G grubunun, $K < M < L$ olacak biçimde hiç $M \trianglelefteq G$ yoksa G grubunun L/K baş çarpanı elemanter abelyen p -gruptur ([19, Sonuç 8.7]).

Bir G grubunun

$$1 = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_m = G$$

ve her $1 \leq i < m$ için $N_i/N_{i-1} \leq Z(G/N_{i-1})$ koşullarını sağlayan N_i normal alt grupları varsa bu G grubuna bir nilpotent grup denir. Örnek verecek olursak, p -grupları ve abelyen gruplar nilpotenttirler. En küçük abelyen olmayan nilpotent grup örneği ise

$$Q_8 = \langle x, y \mid x^4 = 1, x^2 = y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

kuaterniyonlar grubudur. Ayrıca nilpotent grupların alt grupları, bölüm grupları ve direkt çarpımlarından oluşan gruplar da nilpotenttir. G grubunun nilpotent normal alt gruplarının en büyüğüne Fitting alt grubu denir ve bu grup $F(G)$ ile gösterilir. Bir grubun nilpotent olup olmadığına karar verebilmek için kullanışlı olan aşağıdaki teoremi vererek bu bölümü bitirelim.

Teorem 2.1.2. ([19, Teorem 8.19]). G bir sonlu grup olsun. O halde aşağıdakiler birbirine eş değerdir:

- (a) G nilpotenttir.
- (b) Her $H < G$ için $N_G(H) > H$.
- (c) G grubunun her maksimal alt grubu normaldir.
- (d) G grubunun her Sylow alt grubu normaldir.
- (e) p_i , G grubunun mertebesi bölen asallar olmak üzere G , p_i -grupların bir direkt çarpımına izomorftur.

2.2. KARAKTER TEORİSİ

Bu bölümde karakter teorisinde önemli bir yeri olan I. M. Isaacs'ın [18] referanslı kitabında ve E. Adan-Bante'nin [1] referanslı çalışmasında yer alan sonlu grupların karakterleriyle ilgili bazı önemli tanımlara ve teoremlere yer vereceğiz. Öncelikle bir sonlu grubun temsillerinden ve karakterlerinden bahsederek başlayalım. $\mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesini göstermek üzere bileşenleri $\mathbb{C}$ kümesinden alınan $n \times n$ boyutunda ve tersi var olan matrislerin oluşturduğu gruba genel lineer grup denir ve bu grup $GL(n, \mathbb{C})$ ile gösterilir. Bir $A \in GL(n, \mathbb{C})$ matrisinin izi ise esas köşegende yer alan bileşenlerin toplamı olarak tanımlanır ve $tr(A)$ ile gösterilir.

G bir sonlu grup ve n bir pozitif tam sayı olsun. Bir $\psi : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ grup homomorfisine G grubunun bir $\mathbb{C}$ -temsili veya $\mathbb{C}$ -gösterilişi denir. Buradaki n pozitif tam sayısına bu temsilin derecesi denir. Her $g \in G$ için $\chi(g) = tr(\psi(g))$ ile tanımlanan χ fonksiyonuna, ψ temsili tarafından belirlenen G grubunun bir karakteri denir. $\chi(1) = 1$ olması durumunda χ karakterine lineer karakter denir. Sonlu bir G grubunun lineer karakterlerinin sayısı G/G' bölüm grubunun mertebesi kadardır. Örneğin, her $g \in G$ için $(det \chi)(g) = det(\psi(g))$ olarak tanımlanan $det \chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ tasviri de G grubunun bir lineer karakterini belirler.

G grubunun bir χ karakterinin çekirdeği olan

$$ker(\chi) = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$$

alt grubu, aynı zamanda G grubunun χ karakterini belirleyen ψ temsiline de çekirdeğidir. $ker(\chi) = 1$ ise χ karakterine sadık karakter denir.

Karakterler, G üzerinde birer sınıf fonksiyonudurlar, yani G grubunun eşlenik eleman sınıfları üzerinde aldıkları değerler aynıdır. α ve β , G grubunun iki karakteri olmak üzere bu iki karakterin iç çarpımı

$$[\alpha, \beta] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)}$$

biçiminde tanımlanır. G grubunun bir χ karakterinin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $[\chi, \chi] = 1$ olmasıdır. G grubunun indirgenemez karakterlerinin kümesi $Irr(G)$ ile gösterilir. $Irr(G)$ kümesinin elemanları G üzerindeki sınıf fonksiyonlarının bir tabanıdır

dolayısıyla θ , G grubunun herhangi bir karakteri olmak üzere bu θ karakterinin G grubunun indirgenemez karakterlerinin bir lineer toplamı biçiminde yazılışı tek türlü belirlidir. Ayrıca $Irr(G)$ kümesinin eleman sayısı, G grubunun eşlenik eleman sınıflarının sayısına eşittir. G grubunun indirgenemez karakterlerinin eşlenik eleman sınıfları üzerinde aldıkları değerleri gösteren kare şeklindeki tabloya G grubunun karakter tablosu denir. Örneğin, S_3 simetrik grubunun karakter tablosu aşağıdaki gibidir:

	$[I]$	$[(12)]$	$[(123)]$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Tablo 2.1: S_3 grubunun karakter tablosu.

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. G grubunun bir χ karakterin H alt grubuna kısıtlanması olan χ_H , H grubunun bir karakteridir. Tersine H alt grubundan alınan bir λ karakterinin yardımıyla G grubunun bir λ^G karakteri aşağıdaki gibi tanımlanır. Her $g \in G$ için

$$\lambda^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \overset{\circ}{\lambda}(xgx^{-1})$$

ve burada

$$\overset{\circ}{\lambda}(y) = \begin{cases} \lambda(y), & y \in H \\ 0, & y \in G - H \end{cases}$$

olarak tanımlıdır. λ^G karakterinin derecesi $\lambda^G(1) = |G : H|\lambda(1)$ olur. Aşağıda verilen Lemma karakter teorisinde Frobenius karşılığı olarak bilinir.

Lemma 2.2.1. ([18, Lemma 5.2]). G bir grup ve $H \leq G$ olsun. ϕ , H grubunun μ ise G grubunun bir karakteri olmak üzere $[\phi^G, \mu] = [\phi, \mu_H]$ eşitliği sağlanır.

Bir grubun indirgenemez karakterleri o grubun yapısı hakkında birtakım bilgiler verir. Örneğin, indirgenemez karakterleri bilinen bir grubun komütatör grubu, merkezi ve diğer normal alt grupları belirlenebilir. Bu sayede, o grubun basit, çözülebilir veya nilpotent olup

olmadığına karar verebiliriz. G grubunun mertebesini

$$|G| = \sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(1)^2$$

eşitliği yardımıyla bulabiliriz. $cd(G)$, G grubunun indirgenemez karakter derecelerinin kümesi olmak üzere $cd(G) = \{1\}$ olması için gerek ve yeter koşul G grubunun abelyen olmasıdır. O halde bir grubun karakter tablosuna bakarak abelyen olup olmadığına rahatlıkla karar verebiliriz.

Şimdi bulgular kısmında yer alan teoremlerin ispatında kullanılacak olan bazı önemli teoremlere yer verelim. Bir χ indirgenemez karakterini herhangi bir alt gruba kısıtladığımızda o alt grubun da bir karakteri olduğu bilinirken, kısıtladığımız N grubu G grubunun bir normal alt grubu ise χ_N karakteri Clifford teoremi ile aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

Teorem 2.2.2. (Clifford Teoremi, [18, Teorem 6.2]). $H \trianglelefteq G$ ve χ , G grubunun bir indirgenemez karakteri olsun. θ , χ_H karakterinin bir indirgenemez ögesi ve $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_t$ karakterleri ise θ karakterinin G içindeki birbirinden farklı eşlenikleri olmak üzere

$$\chi_H = e \sum_{i=1}^t \theta_i$$

olur. Burada $e = [\chi_H, \theta]$ ile verilir.

$N \trianglelefteq G$ ve $\theta \in Irr(N)$ olsun. Eğer G grubunun bir χ indirgenemez karakteri için $\chi_N = \theta$ eşitliği sağlanıyorsa θ karakteri, G grubuna genişler denir. Ayrıca G grubu, $Irr(N)$ kümesi üzerine eşlenik alma ile etki eder. Bu etki göz önüne alındığında θ karakterinin G içindeki stabilizatörü ise

$$I_G(\theta) = \{g \in G \mid \theta^g = \theta\}$$

olarak tanımlanır. Bu gruba θ karakterinin G içindeki inertia grubu diyeceğiz. Açıkça görüldüğü gibi $N \leq I_G(\theta) \leq G$ kapsamı geçerlidir. $G = I_G(\theta)$ eşitliğini sağlayan θ karakterine G -invariant adı verilir. Gallagher teoremi, G grubuna genişleyebilen bir θ indirgenemez karakteri için θ^G karakterinin indirgenemez ögeleri ile ilgili bilgi verir.

Teorem 2.2.3. (Gallagher Teoremi, [18, Sonuç 6.17]). $N \trianglelefteq G$ ve $\chi \in Irr(G)$ olmak üzere $\chi_N = \theta \in Irr(N)$ olsun. O halde her $\beta \in Irr(G/N)$ için $\beta\chi \in Irr(G)$ olur. Ayrıca $\beta\chi$ karakterleri θ^G karakterinin tüm indirgenemez ögeleridir.

N, G grubunun bir normal alt grubu ve $\theta \in Irr(N)$ olsun. $Irr(G | \theta)$ kümesi ile N grubuna kısıtladığımızda θ karakterini bir indirgenemez öge olarak kabul eden G grubunun indirgenemez karakterlerinin kümesini gösterelim. $\chi \in Irr(G)$, θ karakterinin G grubuna bir genişlemesi olmak üzere

$$Irr(G | \theta) = \{\beta\chi | \beta \in Irr(G/N)\}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{array}{ccc} Irr(G/N) & \longrightarrow & Irr(G | \theta) \\ \beta & \longmapsto & \beta\chi \end{array}$$

iyi tanımlı örten ve bire-bir eşleşme olduğunu Gallagher teoremi ile söyleyebiliriz.

Karakter dereceleri ile grup yapısı arasında önemli bir ilişki vardır. Ito ve Thompson teoremleri bu anlamda karakter teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Teorem 2.2.4. ([18, Teorem 6.9]). G bir grup olsun. Her $\chi \in Irr(G)$ için $\chi(1)$ bir p asalının kuvveti ise G grubunun bir normal abelyen p -komplementi vardır.

Teorem 2.2.5. (Ito Teoremi, ([18, Teorem 6.15]). A, G grubunun bir normal ve abelyen alt grubu olsun. O halde her $\chi \in Irr(G)$ için $\chi(1) \mid |G : A|$.

Bu teoremlerin ardından, çözülebilir bir G grubunun normal abelyen p -Sylow alt grubunun olması için gerek ve yeter koşulun $cd(G)$ kümesindeki derecelerin p asal sayısı ile aralarında asal olması gerektiği sonucu görülür ([18, Sonuç 12.34]).

Teorem 2.2.6. (Thompson Teoremi [18, Sonuç 12.2]). p bir asal sayı olmak üzere her $\chi \in Irr_1(G)$ için $p \mid \chi(1)$ ise G grubunun bir normal p -komplementi vardır.

Teorem 2.2.7. ([18, Sonuç 11.29]). N, G grubunun bir normal alt grubu ve $\chi \in Irr(G)$ olsun. $\theta \in Irr(N)$ için $[\chi_N, \theta] \neq 0$ ise $\chi(1)/\theta(1)$ sayısı $|G : N|$ indeksini böler.

Teorem 2.2.8. ([18, Lemma 12.3]). G bir çözülebilir grup olsun. Eğer G' , G grubunun biricik minimal normal alt grubu ise G grubunun lineer olmayan karakter dereceleri bir f sayısına eşit olur ve aşağıdaki durumlardan bir tanesi sağlanır:

- (a) G bir p -grubudur, $Z(G)$ devreseldir ve $G/Z(G)$ mertebesi f^2 olan bir elemanter abelyen gruptur.
- (b) G bir Frobenius grubudur. G grubunun Frobenius komplementi, mertebesi f olan bir abelyen gruptur. G grubunun Frobenius çekirdeği ise G' grubudur ve bu grup elemanter abelyen p -grubudur.

G bir grup ve χ , G grubunun bir karakteri olsun. Her $g \in G$ için $\bar{\chi}(g) = \chi(g^{-1})$ ile tanımlanan $\bar{\chi}$ fonksiyonu G grubunun bir karakteridir. G grubunun bu $\bar{\chi}$ karakterine χ karakterinin kompleks eşlenik karakteri denir. $\bar{\chi}$ karakterinin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul χ karakterinin indirgenemez olmasıdır. Karakterlerin çarpımı yine bir karakter olduğundan $\chi\bar{\chi}$ karakteri, G grubunun indirgenemez karakterlerinin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Şimdi $\chi(1) > 1$ olsun. İç çarpımın özelliklerinden $[\chi\bar{\chi}, 1_G] = [\chi, \chi] = 1$ olduğu ve $\chi(1) > 1$ olduğu göz önüne alındığında $\chi\bar{\chi}$ karakterinin 1_G dışında en az bir indirgenemez ögesi vardır. Bu durumda $\chi\bar{\chi}$ karakterinin birbirinden farklı indirgenemez ögeleri $1_G, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ise

$$\chi\bar{\chi} = 1_G + \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i,$$

$n > 0$ ve $m_i > 0$ olacak biçimde bir yazılış vardır. Adan-Bante [1] çalışmasında yer alan Lemma 4.4 ve Lemma 5.1, tezin bulgular kısmında kullanılmaktadır. Bu lemmalar aşağıda ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Lemma 2.2.9. ([1, Lemma 4.4]). G bir sonlu çözülebilir grup ve $\chi \in Irr(G)$ olsun. $I := \{\alpha_i \mid i = 1, \dots, \eta(\chi)\}$ kümesi $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakterden farklı indirgenemez ögelerinin kümesi ve $N \trianglelefteq G$ olsun. O halde $\chi_N \in Irr(N)$ olması için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için $N \not\leq ker(\alpha_i)$ olmasıdır.

İspat. İç çarpımın özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
[\chi_N, \chi_N] &= [\chi_N \bar{\chi}_N, 1_N] \\
&= \left[\left(1_G + \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i \right)_N, 1_N \right] \\
&= \left[1_N + \sum_{i=1}^n m_i (\alpha_i)_N, 1_N \right] \\
&= [1_N, 1_N] + \sum_{i=1}^n m_i [(\alpha_i)_N, 1_N] \\
&= 1 + \sum_{i=1}^n m_i [(\alpha_i)_N, 1_N]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $[\chi_N, \chi_N] = 1$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{i=1}^n m_i [(\alpha_i)_N, 1_N] = 0$$

olmasıdır. Diğer taraftan her $i \in I$ için $m_i > 0$ olduğundan $[\chi_N, \chi_N] = 1$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $[(\alpha_i)_N, 1_N] = 0$ olmasıdır ki bu eşitliğin sağlanması için ise gerek ve yeter koşul $N \not\leq \ker(\alpha_i)$ olmasıdır. Sonuç olarak $\chi_N \in Irr(N)$ olması için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için $N \not\leq \ker(\alpha_i)$ olmasıdır. $\square$

Lemma 2.2.10. ([1, Lemma 5.1]). G bir sonlu grup ve $\chi \in Irr(G)$ sadık olsun. $I = \{\alpha_i \in Irr(G) \mid i = 1, \dots, n\}$, $\chi \bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki indirgenemez öğelerinin kümesi ise

$$Z(G) = \bigcap_{i=1}^n \ker(\alpha_i)$$

olur.

İspat. Isaacs [18] Lemma 2.21 kullanılırsa

$$\ker(\chi \bar{\chi}) = \ker(1_G) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \ker(\alpha_i) \right) = \bigcap_{i=1}^n \ker(\alpha_i)$$

olduğu görülür. Ayrıca $(\chi \bar{\chi})(g) = \chi(1)^2$ olması için gerek ve yeter koşul $g \in Z(\chi)$ olmasıdır ve buradan $\ker(\chi \bar{\chi}) = Z(\chi)$ elde edilir. χ , G grubunun sadık indirgenemez karakteri olduğundan Isaacs [18] Lemma 2.27(f) yardımıyla $\ker(\chi \bar{\chi}) = Z(G)$ bulunur. $\square$

2.3. REEL DEĞERLİ KARAKTERLER VE MONOLİTİK KARAKTERLER

Bu bölümde, sonlu bir G grubunun reel değerli karakterleri ve monolitik karakterleriyle ilgili bilinen bazı teoremlere yer verilecektir.

Sonlu bir G grubunun indirgenemez karakterleri reel değerli ise G grubuna bir reel grup denir. Trivial olmayan bir reel grubun mertebesi çifttir. Reel bir grubunun her bölüm grubu da bir reel gruptur. $Irr_{\mathbb{R}}(G)$ ile G grubunun reel değerli indirgenemez karakterlerinin kümesini göstereceğiz. G grubunun bir x elemanı G grubundaki tersi ile eşlenik ise bu x elemanına bir reel eleman denir. G grubunun reel elemanlarından oluşan eşlenik eleman sınıfına ise bir reel sınıf denir. Bir grubun reel değerli karakterlerinin o grubun yapısı üzerinde belirleyici bir özelliği vardır. Örneğin, 1_G karakterinin, G grubunun biricik reel değerli indirgenemez karakteri olması için gerek ve yeter koşul $|G|$ tek olmasıdır. Öte yandan G grubunun mertebesinin tek sayı olması için gerek ve yeter koşul $\{1_G\}$ sınıfının G grubunun biricik reel eşlenik eleman sınıfı olmasıdır. G grubunun bir χ indirgenemez karakterinin belirlediği $\det \chi$ karakterinin $Hom(G, \mathbb{C})$ içindeki mertebesi $o(\chi)$ ile gösterilir. Bu durumda $|G : \ker(\det \chi)| = o(\chi)$ olduğundan $o(\chi)$, G grubunun mertebesini böler. $\chi \in Irr_{\mathbb{R}}(G)$ olması durumunda ise $o(\chi)$, 2 asalını böler.

Bir G grubunun biricik minimal normal alt grubu varsa bu gruba monolit denir. $\chi \in Irr(G)$ olmak üzere $G/\ker(\chi)$ grubunun biricik minimal normal alt grubu varsa χ indirgenemez karakterine monolitik karakter denir. Örneğin, tüm basit gruplar monolittir. Bir p -grubunun monolit olması için gerek ve yeter koşul o grubun merkezinin devresel olmasıdır. Ayrıca bir p -grubunun tüm indirgenemez karakterleri monolitik karakterlerdir. Bir G grubunun tüm monolitik karakterlerinin kümesi $Irr_m(G)$ ile gösterilir. Monolitik karakterler G grubunun normal alt gruplarını belirlememizi sağlar, yani G grubunun her N normal alt grubu için

$$N = \bigcap_{\substack{\chi \in Irr_m(G) \\ N \leq \ker(\chi)}} \ker(\chi)$$

yazılışı vardır. Ayrıca

$$Irr_m(G/N) = Irr(G/N) \cap Irr_m(G)$$

olduğu da kolayca görülür. G grubunun tüm monolitik karakter çekirdeklerinin kesişimi

1_G karakteridir ve tüm lineer olmayan monolitik karakterlerin çekirdeklerinin kesişimi ise $Z(G)$ tarafından kapsanır. Bu sebeplerden dolayı G grubunun monolitik karakterleri, $Irr(G)$ kümesinin önemli bir parçasını oluşturmaktadır. Benzer şekilde, $cd_m(G)$ notasyonu ile G grubunun monolitik karakter dereceleri kümesini gösterirsek, bu küme bir çok örnekte $cd(G)$ ile kıyaslandığında daha küçük bir küme olarak karşımıza çıkmaktadır. Örneğin, $p_1, \dots, p_n$ birbirinden farklı tek asallar, G_i mertebesi $2p_i$ olan dihedral grup olmak üzere $G = G_1 \times \dots \times G_n$ grubunu ele aldığımızda $|cd(G)| = n + 1$ ve $|cd_m(G)| = 2$ olduğunu görürüz. G bir sonlu grup olmak üzere $|cd_m(G)| = 1$ olması için gerek ve yeter koşul G grubunun abelyen olmasıdır. Ayrıca Berkovich [9] ile $|cd_m(G)| \leq 3$ ise G grubunun çözülebilir olduğu bilinmektedir. Yine monolitik karakterler üzerine olan [6] referanslı çalışmada araştırmacılar, $cd_m(G) \setminus \{1\}$ kümesindeki dereceler birbirinden farklı ise G grubunun çözülebilir olduğunu ve hatta ikinci komütatör grubu olan G'' grubunun nilpotent olduğunu ispatlamışlardır. Görüldüğü gibi $cd_m(G)$ kümesi G grubunun yapısıyla ilgili bazı bilgiler vermektedir.

Karakter Teorisi bölümünde yer verilen Ito-Michler ve Thompson teoremlerinin reel karakterler için olan versiyonlarını bu kısımda anlatacağız. Ayrıca Teorem 2.3.7 ile bu ünlü teoremlerin G grubunun monolitik karakterleri için de geçerli olduğunu vereceğiz. Öncelikle merbesi çift olan çözülebilir bir grubun, trivial olmayan rasyonel değerli tek dereceli indirgenemez karakterinin varlığıyla ilgili teoremi vererek başlayalım.

Teorem 2.3.1. ([34, Lemma 3.1]). G mertebesi çift olan bir sonlu çözülebilir grup olsun. Bu durumda G grubunun trivial olmayan rasyonel değerli tek dereceli bir indirgenemez karakteri vardır.

İspat. Teoremin ispatını $|G|$ üzerinden tümevarım ile yapacağız. $1 < N \trianglelefteq G$ olsun. G/N grubunun mertebesi çift olsa tümevarım gereği G/N grubunun trivial olmayan rasyonel değerli tek dereceli bir indirgenemez karakteri var olur. Bu karakter G grubunun da karakteri olduğundan istenilen elde edilir. Bu durumda G grubunun her N normal alt grubu için G/N grubunun mertebesinin tek olduğunu varsayabiliriz. Özel olarak N grubunu, G grubunun bir minimal normal alt grubu olarak seçelim. G mertebesi çift olan bir çözülebilir grup olduğundan, N elemanter abelyen 2-grubudur. Dolayısıyla $Irr(N) = Irr_{\mathbb{Q}}(N)$ olur. $1 \neq \theta \in Irr(N)$ ve $T = I_G(\theta)$ inertia grubu olsun. $|T : N|$ tek ve θ , T grubu içinde değişmez

olduğundan Isaacs [18] Teorem 6.30 kullanılırsa θ karakterinin T inertia grubuna biricik rasyonel $\hat{\theta}$ genişlemesi vardır ve $\hat{\theta}_N = \theta$ eşitliği sağlanır. O halde $\hat{\theta}$ rasyonel değerli indirgenemez karakterin tekliği ve Clifford teoremi kullanılırsa $(\hat{\theta})^G \in Irr(G)$ bulunur. Ayrıca $\hat{\theta}$ rasyonel değerli ve

$$(\hat{\theta})^G(1) = |G/T|\hat{\theta}(1) = |G : T|$$

tek olduğundan, $(\hat{\theta})^G$ rasyonel değerli tek dereceli indirgenemez karakterdir. $\square$

G bir sonlu grup ve $g \in G$ olsun. n bir pozitif tam sayı olmak üzere $\vartheta_n(g) = |\{k \in G \mid k^n = g\}|$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon, açıkça görüldüğü gibi G grubunun aynı eşlenik eleman sınıfına ait olan elemanlar üzerinde aynı değeri alır, yani ϑ_n , G üzerinde bir sınıf fonksiyonudur. Dolayısıyla

$$\vartheta_n = \sum_{\chi \in Irr(G)} v_n(\chi) \chi \quad (v_n(\chi) \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

şeklinde G grubunun indirgenemez χ karakterlerinin bir lineer toplamı olarak ifade edilebilir.

Teorem 2.3.2. ([10, Teorem 1.1]). G bir sonlu grup olsun. G grubunun tüm reel değerli indirgenemez karakterleri lineer ise O mertebesi tek olan bir grup ve $P \in Syl_2(G)$ olmak üzere $G = O \times P$ direkt çarpım grubudur.

İspat. İspatı $|G|$ üzerinden tümevarım ile yapacağız. G grubunun mertebesini çift olarak kabul edebiliriz. ϑ_2 , G üzerinde bir sınıf fonksiyonu olduğundan

$$\vartheta_2(g) = \sum_{\chi \in Irr(G)} v_2(\chi) \chi(g)$$

yazılışı vardır. $v_2(\chi)$ sayısını inceleyecek olursak Isaacs [18] sayfa 58 den χ reel değilse $v_2(\chi) = 0$, χ reel ama reel bir temsilden elde edilemiyorsa $v_2(\chi) = -1$ ve son olarak χ bir reel temsilden elde ediliyorsa $v_2(\chi) = 1$ olduğu görülür. Teoremin hipotezinden G grubunun tüm reel değerli indirgenemez karakterleri lineer olduğundan lineer olmayan her χ karakteri için $v_2(\chi) = 0$ olur. Aynı zamanda lineer karakterleri G grubunun birer temsili olduğundan

$$V = \{\lambda \in Irr(G) \mid \lambda(1) = 1 \text{ ve } \lambda \text{ reel değerli}\}$$

olmak üzere $\vartheta_2(g) = \sum_{\lambda \in V} \lambda(g)$ olarak yazılabilir.

T , G grubunun mertebesi tek olan elemanlarının doğurduğu alt grubu olsun. λ lineer ve reel olduğundan $o(\lambda) = |G : \ker(\lambda)| \leq 2$, yani

$$T \leq \bigcap \{\ker(\lambda) \mid \lambda \in V\}$$

ve sonuç olarak T grubu, reel değerli lineer indirgenemez λ karakterlerinin çekirdekleri tarafından kapsandığından her $g \in T$ için

$$\vartheta_2(g) = |V|\lambda(1) = |V|$$

olur. Özel olarak $g = 1$ alınırsa t , G grubunun involüsyonlarının sayısı olmak üzere $\vartheta_2(1) = |V| = t + 1$ eşitliği bulunur.

b mertebesi tek olan bir eleman ve $u = b^2$ olmak üzere u , T grubunun bir elemanıdır.

$$S = \{b\tau \mid \tau^2 = 1 \text{ ve } \tau \in C_G(b)\}$$

olarak tanımladığımızda $(b\tau)^2 = b^2\tau^2 = u$ olduğundan $S \leq \{h \in G \mid h^2 = u\} =: S_2(u)$ kapsamı geçerlidir. Şimdi $S = S_2(u)$ olduğunu gösterelim. $x \in S_2(u)$ olsun. $x = x_0x_2 = x_2x_0$ olacak biçimde mertebesi tek olan x_0 ve mertebesi 2 asalının bir kuvveti olan x_2 elemanının tek türlü var olduğunu biliyoruz. Bu durumda $u = b^2 = x^2 = x_0^2x_2^2$ bulunur ve b^2 elemanının mertebesi tek olduğundan $x_0^2 = b^2$ ve $x_2^2 = 1$ olmalıdır. x_0 ve b her ikisi de tek mertebeli olduğundan $x_0 = b$ olduğunu bildiğimizden $x = bx_2$, $x_2 \in C_G(b)$ ve $x_2^2 = 1$ olur, yani $x \in S$ olur. O halde $S = S_2(u)$ eşitliğini yazabiliriz. Ayrıca $u \in T$ olduğundan $|S_2(u)| = |S| = |V| = t + 1$ elde edilir. Sonuç olarak, G grubunun her involüsyonu b ile komütatiftir, yani T grubunun tüm elemanlarıyla da komütatif olur.

$P \in \text{Syl}_2(G)$ ve z ise $Z(P)$ içinde bulunan bir involüsyon olsun. $G = TP$ ve bir önceki paragraftan z involüsyonu T ile komütatif olduğundan $z \in Z(G)$ olur. Açıkça görüldüğü gibi $G/\langle z \rangle$ grubunun her reel değerli indirgenemez karakteri de lineer olduğundan, tümevarım

gereği

$$G/\langle z \rangle = P/\langle z \rangle \times H/\langle z \rangle$$

olacak biçimde mertebesi tek olan $H/\langle z \rangle \leq G/\langle z \rangle$ vardır. Böylelikle $P \trianglelefteq G, H \trianglelefteq G$ ve $G = PH$ bulunur. Diğer taraftan $|H/\langle z \rangle|$ tek ve z merkezde bulunan bir involüsyon olduğundan $H = \langle z \rangle \times O$ olacak biçimde karakteristik bir O alt grubu vardır. Dolayısıyla $O \trianglelefteq G$ ve buradan $G = P \times O$ elde edilerek istenilen gösterilir. $\square$

Not 2.3.3. Bir G grubuna, eğer tüm reel değerli indirgenemez karakterleri lineer ise Chillag-Mann tipindedir diyeceğiz.

Teorem 2.3.4. ([33, Teorem A]). G bir sonlu grup olsun. G grubunun her reel değerli lineer olmayan indirgenemez χ karakterinin derecesinin çift sayı olması için gerek ve yeter koşul G grubunun bir normal 2-komplementinin olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki K , G grubunun bir normal 2-komplementi olsun. Bu durumda G grubunun her reel değerli lineer olmayan indirgenemez karakterinin çift dereceli olduğunu gösterelim. $2 \nmid \chi(1)$ olacak biçimde bir $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{R},1}(G)$ ve olduğunu varsayalım. Teorem 2.2.7 yardımıyla $\chi_K = \theta \in \text{Irr}(K)$ elde edilir. O halde θ , K grubunun reel değerli tek dereceli indirgenemez karakteri olur. Diğer taraftan $|K|$ tek olduğundan bu grubun biricik reel değerli indirgenemez karakteri vardır, yani $\chi_K = 1_K$ olur bu ise χ karakterinin lineer olmaması ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır ve G grubunun her reel değerli lineer olmayan indirgenemez χ karakterinin derecesi çifttir.

Şimdi G grubunun reel değerli lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin çift dereceli olduğunu kabul edip, bir normal 2-komplementi olduğunu gösterelim. $P \in \text{Syl}_2(G)$ ve $\lambda \in \text{Irr}(P/\phi(P))$ olsun. $P/\phi(P)$ elemanter abelyen 2-grubu olduğundan λ bir reel değerli indirgenemez karakterdir. λ^G karakteri de reel değerli olduğundan,

$$\lambda^G = \Delta + \Lambda + \sum_{\chi \in \Xi} a_{\chi}(\chi + \bar{\chi})$$

yazılışı vardır. Burada Δ ; λ^G karakterinin çift dereceli indirgenemez öğelerinin toplamı, Λ ; λ^G karakterinin tek dereceli reel değerli indirgenemez öğelerinin toplamı ve Ξ ise λ^G karakterinin reel olmayan tek dereceli indirgenemez öğelerinin kümesidir. $\lambda^G(1) = |G:P|\lambda(1) = |G:P|$ olduğundan $\lambda^G(1)$ tektir ve dolayısıyla öyle $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{R}}(G)$

vardır ki $2 \nmid \chi(1)$ ve $[\chi_P, \lambda] \neq 0$ olur. Teoremin hipotezinden $\chi(1) = 1$ ve buradan $\chi_P = \lambda$ elde edilir. χ reel değerli ve lineer olduğundan $o(\chi) = |G : \ker(\chi)| \leq 2$ olduğu görülür. O halde $M = E^2(G)$, $G/E^2(G)$ grubunu elemanter abelyen 2-grubu yapan minimal normal alt grup olmak üzere $M \leq \ker(\chi)$ ve buradan

$$M \cap P \leq \ker(\chi) \cap P = \ker(\chi_P) = \ker(\lambda)$$

elde edilir. Yapılan işlemler herhangi bir $\lambda \in \text{Irr}(P/\phi(P))$ için tekrarlandığında $M \cap P \leq \phi(P)$ bulunur. Ayrıca $\phi(P)$, $P/\phi(P)$ grubunu elemanter abelyen yapan minimal normal alt grup olduğundan $\phi(P) \leq M \cap P$ kapsamı geçerlidir, yani $M \cap P = \phi(P)$ olduğu görülür. Isaacs [18] Problem 6.20 yardımıyla

$$1 = O^2(P) = O^2(G) \cap P$$

sonucuna ulaşılır. Buradan $O^2(G)$, G grubunun bir normal 2-komplementidir ve istenilen elde edilmiş olur. $\square$

Bu tezde çözülebilir gruplarla çalıştığımız için [13] Teorem A ile verilen önermeyi G grubunun bir çözülebilir grup olması durumu için vermemiz yeterli olacaktır.

Teorem 2.3.5. ([13, Teorem A]). G bir sonlu çözülebilir grup ve $P \in \text{Syl}_2(G)$ olmak üzere G grubunun tüm reel değerli indirgenemez karakter derecelerinin tek olması için gerek ve yeter koşul $P \trianglelefteq G$ ve P grubunun Chillag-Mann tipinde olmasıdır.

İspat. Öncelikle G grubunun Chillag-Mann tipinde bir normal p -Sylow alt grubunun olduğunu varsayalım ve bu Sylow alt grubuna P diyelim. $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{R}}(G)$ için $2 \nmid \chi(1)$ olduğunu ispatlayalım. θ , χ_P karakterinin bir indirgenemez ögesi olsun. [13] Lemma 4.1 ile χ_P karakterinin tüm indirgenemez öğeleri reel değerli olduğundan $\theta \in \text{Irr}_{\mathbb{R}}(P)$ olur. Öte yandan P grubu Chillag-Mann tipinde olduğundan θ reel değerli karakteri lineerdir. Buradan Teorem 2.2.7 kullanılırsa

$$\chi(1) = \frac{\chi(1)}{\theta(1)} |G : P|$$

ve buradan $\chi(1)$ tek olduğu elde edilip istenilen gösterilir.

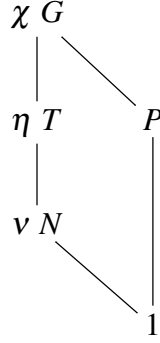
Şimdi kabul edelim ki $\text{Irr}_{\mathbb{R}}(G)$ kümesi içindeki her karakterin derecesi tek olsun ve $|G|$

üzerinden tümevarım ile $P \trianglelefteq G$ olduğunu gösterelim. N , G grubunun trivial olmayan bir normal alt grubu olsun. $\text{Irr}_{\mathbb{R}}(G/N) \subseteq \text{Irr}_{\mathbb{R}}(G)$ olduğundan, G/N teoremin hipotezini sağlar ve tümevarım gereği $PN/N \trianglelefteq G/N$ Chillag-Mann tipindedir. $\theta \in \text{Irr}_{\mathbb{R}}(PN)$ olsun. [13] Lemma 4.1 yardımıyla bir $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{R}}(G|\theta)$ vardır. $\chi(1)$ tek olduğundan, Frobenius karşılıklı ve Clifford teoremi kullanılırsa $\theta(1)|\chi(1)$, yani θ reel değerli karakterinin derecesinin de tek olduğu görülür. Bu ise $\text{Irr}_{\mathbb{R}}(PN)$ kümesindeki karakterlerin derecelerinin tek olduğunu söyler. Diğer taraftan eğer $PN < G$ olsa PN tümevarım hipotezini sağladığından $P \trianglelefteq PN$ ve P bir karakteristik alt grup olduğundan $P \trianglelefteq G$ elde edilir. Dolayısıyla her $1 < N \trianglelefteq G$ için $G = PN$ yazabilir ve tümevarım gereği $P \neq 1$ ve $P \not\trianglelefteq G$ olarak alabiliriz.

M_1 ve M_2 , G grubunun birbirinden farklı iki minimal normal alt grubu olsa hipotezden $G/M_1 \times G/M_2$ grubunun 2-Sylow alt grubu normal olacağından G grubunun da 2-Sylow alt grubu normal olur. O halde G grubunun biricik M minimal normal alt grubu vardır ve G çözülebilir olduğundan M elemanter abelyen q -grubudur. Dikkat edilirse $2||M|$ olsa $G = MP = P$ çelişkisine varılır. O halde $q \neq 2$ ve $G = M \rtimes P$ yazılışı var olur.

$M \trianglelefteq G$ olduğundan $C_P(M) \trianglelefteq G$ ve M biricik minimal normal alt grubu olduğundan $C_P(M) = 1$ bulunur. Bu durumda P , M minimal normal alt grup üzerine trivial olmayan etki eder. $1 \neq x \in P$ involüsyonunu seçelim. Farz edelim ki x , $\text{Irr}(M)$ kümesinin tüm elemanlarını sabit bıraksın. Isaacs [18] Teorem 6.32 ile x , M grubunun tüm eşlenik elemanlarını da sabit bırakır. Ayrıca $(|M|, o(x)) = 1$ olduğundan Isaacs [20] Teorem 4.34, $M = C_M(\langle x \rangle) \times [M, x]$ olduğunu gösterir. x , M grubunun tüm elemanlarını sabitlediğinden $M \leq C_M(\langle x \rangle)$ ve böylelikle $[M, x] = 1$, yani $x \in C_P(M) = 1$ çelişkisi bulunur. O zaman x elemanı M grubunun bazı indirgenemez karakterlerini sabitlemez sonucuna varılır. Dolayısıyla bir $\lambda \in \text{Irr}(M) \setminus \{1\}$ ve $x \in P$ için $1 \neq v = \lambda^{-1}\lambda^x$, yani $v^x = \bar{v}$ olur. Şimdi $T = I_G(v)$, v karakterinin G içindeki inertia grubu olsun. $(|T : M|, |M|) = 1$ ve v , T -invariant olduğundan Isaacs [18] Sonuç 6.28 ile verilen koşullar sağlanır, yani v karakterinin T grubuna bir kanonik genişlemesi olan η biriciktir ve $o(v) = o(\eta)$ eşitliğini gerçekler. Diğer yandan $\bar{\eta}^x$ karakteri de v karakterinin T grubuna olan bir kanonik genişlemesidir ve η karakteri bu koşulu sağlayan biricik genişleme olduğundan $\bar{\eta}^x = \eta$ eşitliği sağlanır. Clifford teoreminden $\eta^G = \chi$ olacak

biçimde $\chi \in Irr(G)$ vardır ve



şeklinde bir diyagram elde ederiz. Dikkat edilirse η karakterinin G grubuna yükseltmekle elde edilen karakter, bir eşleniği olan η^x karakterini yükseltmek aynıdır, yani $\eta^G = (\eta^x)^G$ eşitliği vardır. O halde

$$\bar{\chi} = \overline{\eta^G} = (\bar{\eta})^G = (\eta^x)^G = \eta^G = \chi$$

olur ki bu ise $\chi \in Irr_{\mathbb{R}}(G)$ olduğunu bulmamızı sağlar. Öte yandan kabulümüzden $\chi(1)$ tek olduğundan

$$\eta^G(1) = |G : T| \eta(1) = \chi(1)$$

ve buradan $|G : T|$ tektir. Bu ise $G = T$ olması ile mümkün olur ki ν karakterinin G -invariant olduğu sonucunu elde ederiz. Böylece $\bar{\nu} = \nu^x = \nu$ ve kolayca görüldüğü gibi $\nu \in Irr_{\mathbb{R}}(M)$ sağlanır. Hâlbuki mertebesi tek olan M grubunun reel değerli biricik indirgenemez karakteri 1_M olduğundan $1_M = \nu \neq 1_M$ çelişkisi elde edilir ki bu çelişki ile ispat tamamlanır. $\square$

Not 2.3.6. $G(p) = \bigcap_{\substack{\chi \in Irr(G) \\ p \mid \chi(1)}} ker(\chi)$ ve $G(p') = \bigcap_{\substack{\chi \in Irr(G) \\ p \nmid \chi(1)}} ker(\chi)$ olarak tanımlansın.

Berkovich ve Zhmud [8] referanslı çalışmada sırasıyla Teorem 14.27(c) ile Not 25.2 kullanılırsa $G(p)$ grubunun bir normal p -Sylow alt grubunun olduğu ve $G(p')$ grubunun da normal p -komplemente sahip bir çözülebilir grup olduğu görülür.

$G(p)$ ve $G(p')$ gruplarının özelliklerini aşağıdaki teoremi ispatlarken kullanacağız.

Teorem 2.3.7. ([8, Önerme 30.18]). G bir sonlu grup ve p , G grubunun mertebesini bölen bir asal sayı olsun.

(a) Eğer G grubunun her lineer olmayan monolitik χ karakteri için $p \mid \chi(1)$ ise G grubunun bir normal p -komplementi vardır ve bu grup çözülebilirdir.

(b) G grubunun her χ monolitik karakteri için $p \nmid \chi(1)$ olması için gerek ve yeter koşul G grubunun bir abelyen normal p -Sylow alt grubunun olmasıdır.

İspat. G grubu, (a) ve (b) hipotezlerini sağlayan minimal mertebeli aksi örnek olsun. Teoremin koşulları G grubunun bölüm grupları için de geçerli olduğundan, G grubunun biricik minimal normal alt grubu vardır. Aksi halde N_1 ve N_2 , G grubunun birbirinden farklı minimal normal alt grupları olsa $\varphi : G \longrightarrow G/N_1 \times G/N_2$ kanonik homomorfisini düşünürsek G , bu direkt çarpım grubunun bir alt grubuna izomorf olur. Dolayısıyla G grubu teoremi gerçekler. Bu biricik minimal normal alt gruba N diyelim. N grubunu çekirdeğinde içermeyen indirgenemez karakterler sadık olmak zorundadır. Dolayısıyla bu sadık indirgenemez karakterler monolitiktir, yani

$$Y = Irr(G) - Irr(G/N) \subseteq Irr_m(G)$$

kapsaması geçerlidir. O halde her $\chi \in Y$ için $p \nmid \chi(1)$ ve teoremin kabulünden $N \leq G(p')$ olduğundan Not 2.3.6 kullanılırsa N grubunun çözülebilir olduğu elde edilir. Tümevarım gereği G/N çözülebilir olduğundan, G de çözülebilirdir. Dolayısıyla N elemanter abelyen p -grubudur. Kabul edelim ki $P \in Syl_p(G)$ olmak üzere $N \leq \phi(P)$ olsun. Tümevarım gereği G/N grubunun bir normal p -komplementi vardır ve [8] referanslı kaynakta Lemma 14.1(a) yardımıyla $N \leq \phi(G)$ olduğundan G grubunun da bir normal p -komplementi vardır. Dolayısıyla $N \not\leq \phi(P)$ olarak kabul edebiliriz, yani bir $\lambda \in Lin(P)$ için $N \not\leq ker(\lambda)$ olur. Diğer yandan $p \nmid \lambda^G(1)$ olduğundan, $p \nmid \chi(1)$ olacak biçimde λ^G karakterinin bir χ indirgenemez ögesi vardır. $N \leq ker(\chi)$ olsa

$$N \leq ker(\chi) \cap P = ker(\chi_P) \leq ker(\lambda)$$

çelişkisi elde edileceğinden, $N \not\leq ker(\chi)$ kabul edebiliriz. Bununla birlikte N biricik minimal normal alt grup olduğundan χ karakteri sadıktır, yani monolitiktir. Bu ise G grubunun monolitik karakter derecelerinin p ile bölünmesi ile çelişir. Son çelişki ile (a) şıkkı ispatlanmış olur.

Şimdi (b) şıkkının ispatını yapalım. G grubunun her χ monolitik karakteri için $p \nmid \chi(1)$ olsun. Öncelikle G grubunun bir normal p -Sylow alt grubunun olduğunu göstermekle başlayalım. Yine $Y = Irr(G) - Irr(G/N) \subseteq Irr_m(G)$ olmak üzere teoremin hipotezinden, G grubunun her monolitik karakter derecesi p ile bölünmediğinden, dereceleri p ile bölününen indirgenemez

karakterler N grubunu çekirdeğinde içerir, yani $N \leq G(p)$ sağlanır. Not 2.3.6 yardımıyla $G(p)$ grubunun bir normal p -Sylow alt grubu olduğundan, N grubunun da bir normal p -Sylow alt grubu vardır. Tümevarım gereği G/N de bir normal p -Sylow alt gruba sahip olduğundan, N bir p' -grubu olur. $P \in \text{Syl}_p(G)$ olmak üzere tümevarım gereği $PN/N \trianglelefteq G/N$ olduğundan $PN \trianglelefteq G$ elde edilir. Şimdi L/N , G/N grubunun minimal normal p -alt grubu olsun. N biricik minimal normal alt grup ve $L \cap P \in \text{Syl}_p(L)$ olduğundan $L \cap P \not\trianglelefteq L$. Buradan Ito teoreminden $p|\lambda(1)$ olacak biçimde $\lambda \in \text{Irr}_1(L)$ vardır. χ , λ^G karakterinin bir indirgenemez ögesi olmak üzere $\lambda(1)$, $\chi(1)$ derecesini böldüğünden $p|\chi(1)$, yani χ karakterinin monolitik olmadığı elde edilir. Bununla birlikte $\lambda \in \text{Irr}(\chi_L)$ olduğu göz önüne alınırsa $N \leq \ker(\chi_L) \leq \ker(\lambda) \leq L$ kapsamı görülür ve L/N bir abelyen p -grup olduğundan λ ise lineer olmalıdır ki bu ise λ karakterinin seçimi ile çelişir. Bu son çelişki ile $P \trianglelefteq G$ olduğu görülür.

Geriye ise P grubunun abelyen olduğunu göstermek kalır. Bunun için P grubunun abelyen olmadığını kabul edip bir önceki paragrafta yapılanlar tekrar edilirse N grubunun bir p -grubu ve $N < P$ kapsamının geçerli olduğu elde edilir. Tümevarımdan P/N abelyendir. $\lambda \in \text{Irr}_1(P)$ olmak üzere $p|\lambda(1)$ ve $N \not\leq \ker(\lambda)$ olur. λ^G karakterinin bir χ indirgenemez ögesini alırsak Clifford teoreminden $\lambda(1)|\chi(1)$ ve dolayısıyla $p|\chi(1)$ olur, yani χ monolitik değildir. Buradan $N \leq \ker(\chi)$ ile birlikte $N \leq P \cap \ker(\chi) \leq \ker(\lambda)$ ve bu kapsama ile $\lambda(1) = 1$ çelişkisi elde edilir. Böylelikle P grubunun abelyen ve normal olduğunu göstermiş oluruz.

Tersine G grubunun bir abelyen normal p -Sylow alt grubu var olsun. Isaacs [18] Sonuç 12.34 ile p asalı G grubunun indirgenemez karakter derecelerini bölmez ve dolayısıyla monolitik karakter dereceleri de bölmez ve (b) şikkını ispatı tamamlanmış olur. $\square$

2.4. TAKETA EŞİTSİZLİĞİ

Bu bölümde, Taketa probleminin çıkış noktası olan M -grupları ile ilgili bazı bilgiler verdikten sonra bu problemle ilgili literatürde yer alan bazı teoremleri anlatacağız.

χ , G grubunun bir karakteri olsun. $\chi = \lambda^G$ olacak biçimde $H \leq G$ ve $\lambda \in \text{Lin}(H)$ varsa χ karakterine bir monomial karakter denir. Ayrıca her indirgenemez χ karakteri monomial olan G grubuna bir M -grubu denir. Örneğin, nilpotent ve süperçözülebilir gruplar M -grubudur. S_4 simetrik grubu ise süperçözülebilir olmayan bir M -grubu örneğidir. Diğer yandan bir M -grubunun her bölüm grubu da M -grubu olurken, alt grupları için aynı durum geçerli olmak zorunda değildir. Ancak Dornhoff [14] makalesinde M -gruplarının normal Hall alt gruplarının da M -grubu olduğunu göstermiş ve bu durumun tüm normal alt gruplar için de geçerli olduğunu iddia etmiştir. Daha sonra, bir M -grubunun normal alt gruplarının M -grubu olması gerekmediğini birbirinden bağımsız olarak Dade [12] ve Wall [36] referanslı çalışmasında ispatlamıştır. Ayrıca Huppert [17] Teorem 18.10 ile çözülebilir bir grubun, bir M -grubunun içine yatırılabilirliğini, yani bir M -grubunun alt grubu olduğunu görebiliriz.

Şimdi vereceğimiz teorem ve sonrasındaki sonuç K. Taketa'ya aittir.

Teorem 2.4.1. ([18, Teorem 5.12]). G bir M -grup ve $1 = f_1 < f_2 < \dots < f_k$ ise G grubunun birbirinden farklı indirgenemez karakter dereceleri olsun. Bu durumda, $\chi \in \text{Irr}(G)$ ve $\chi(1) = f_i$ için $G^{(i)} \leq \ker(\chi)$ olur. Burada $G^{(i)}$, G grubunun i -inci komütatör grubudur.

İspat. Eğer $i = 1$ ise χ lineer olduğundan $G^{(1)} \leq \ker(\chi)$ olur ve istenilen elde edilir. O halde $i > 1$ kabul edelim ve ispatın devamını i üzerinden tümevarım ile yapalım. $\chi \in \text{Irr}(G)$ ve $\chi(1) = f_i$ olsun ve ψ ise $\psi(1) < \chi(1)$ koşulunu sağlayan G grubunun bir indirgenemez karakteri olsun. Dolayısıyla $\psi(1) = f_j$ ve $j < i$ olur ve tümevarım gereği $G^{(i-1)} \leq G^{(j)} \leq \ker(\psi)$ olmalıdır. G bir M -grup olduğundan tanımı gereği $\chi = \theta^G$ olacak biçimde $K \leq G$ ve $\theta \in \text{Lin}(K)$ vardır. $[(1_K)^G, 1_G] = [1_K, 1_K] = 1$ ve buradan $(1_K)^G$, G grubunun indirgenemez karakteri olmadığı görülür. $(1_K)^G$ karakterinin her bir indirgenemez ψ ögesi için

$$\psi(1) < (1_K)^G(1) = [G : K] = \theta^G(1) = \chi(1)$$

olduğundan $G^{(i-1)} \leq \ker(\psi)$ olur. O halde Isaacs [18] Lemma 5.11 yardımıyla

$$G^{(i-1)} \leq \ker((1_K)^G) = \bigcap_{x \in G} (\ker(1_K))^x = \bigcap_{x \in G} K^x \leq K$$

bulunur. Dolayısıyla $G^{(i)} \leq K' \leq \ker(\theta)$ ve $G^{(i)} \triangleleft G$ olduğundan

$$G^{(i)} \leq \bigcap_{x \in G} (\ker(\theta))^x = \ker(\theta^G) = \ker(\chi)$$

ile ispat tamamlanır. □

Sonuç 2.4.2. ([18, Sonuç 5.13]). G bir M -grup olsun. O halde G grubu çözülebilirdir.

Yukarıdaki teoremin ispatı incelendiğinde G bir M -grubu iken $k = |cd(G)|$, $\chi \in Irr(G)$ ve $\chi(1) = f_i$ olmak üzere $G^{(k)} \leq G^{(i)} \leq \ker(\chi)$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$$G^{(k)} \leq \bigcap_{\chi \in Irr(G)} \ker(\chi) = 1$$

bulunur. Sonuç olarak G bir M -grup iken G grubunun türev uzunluğunun en fazla birbirinden farklı indirgenemez karakter derecelerinin sayısı olan k olabileceği açıkça görülmektedir. Isaacs ve Seitz ise bu durumun herhangi bir çözülebilir G grubu için de doğru olabileceğini iddia etmişlerdir. M grubu olmayan bir çözülebilir grup örneği $SL(2,3)$ grubudur. Çünkü $SL(2,3)$ grubunun 3 tane derecesi 2 olan indirgenemez karakteri vardır ama $SL(2,3)$ içindeki indeksi 2 olan bir alt grubu yoktur.

$N \trianglelefteq G$ ve $\chi \in Irr(G)$ olsun. $\varphi^G = \chi$ ve $\varphi_N \in Irr(N)$ olacak biçimde $N \leq H \leq G$ kapsamasını sağlayan H alt grubu ve $\varphi \in Irr(H)$ karakteri varsa χ karakterine N grubuna göre göreceli bir M -karakter denir. Bu koşullar G grubunun her indirgenemez χ karakteri için gerçekleşiyorsa G grubuna N grubuna göre göreceli M -grup denir. Her M -grup aynı zamanda $\{1_G\}$ grubuna göre göreceli M -gruptur. Ayrıca G , N grubuna göre göreceli M -grup ve G/N bir M -grup iken G grubunun M -grup olması gerekmez. Bu duruma örnek olarak yine $G = SL(2,3)$ ve $N = Z(G)$ alırsak $G/N \cong A_4$ bir M -grup ama yukarıda da bahsedildiği gibi $SL(2,3)$ bir M -grup değildir. Aşağıdaki teoremle göreceli bir M -grubunun aynı zamanda M -grup olması için yeterli bir koşulu verelim.

Teorem 2.4.3. ([18, Teorem 6.23]). G bir çözülebilir grup, $N \trianglelefteq G$ ve N grubunun tüm Sylow alt grupları abelyen olsun. Eğer G grubu N grubuna göre göreceli M -grup ise G bir M -grubudur.

Bu bölümün devamında bazı özelliklere sahip çözülebilir grupların Taketa eşitsizliğini sağladığı ve bu eşitsizliği sağlamayan minimal mertebeli bir çözülebilir grup varsa bu aksi örneğin hangi yapısal özelliklere sahip olması gerektiği incelenmiştir. Bu bilgiler, bulgular kısmında yer verilen sonuçların ispatlarında önemli birer araç olacaktır.

Teorem 2.4.4. ([37, Teorem 2.2]). G bir grup olsun. Eğer G grubunun bir normal 2-komplementi varsa G çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. $N \trianglelefteq G$ ve N , G grubunun bir normal 2-komplementi olsun. $|N|$ tek ve G/N bir 2-grubudur. O halde N ve G/N çözülebilir olduğundan G de çözülebilirdir. Mertebesi tek olan gruplar Berger [5] ile Taketa eşitsizliğini sağladığından $|G|$ çift olarak kabul edebiliriz. N/N' abelyen ve G/N bir 2-grubu olduğundan Teorem 2.4.3 ile G/N' bir M -grubu olur, yani $dl(G/N') \leq |cd(G/N')|$ sağlanır. Diğer taraftan N , G grubunun bir normal Hall alt grubu olduğundan $cd(N)$ kümesindeki elemanlar $cd(G)$ kümesinin elemanlarının $2'$ -kısımıdır ve Teorem 2.2.5 ile $cd(G/N')$ kümesinin her elemanı $|G : N|$ indeksini böler. Bu ise $|cd(G/N')| + |cd(N)| - 1 \leq |cd(G)|$ eşitsizliğini verir. O halde

$$dl(G) \leq dl(G/N') + dl(N') \leq dl(G/N') + dl(N) - 1 \leq |cd(G/N')| + |cd(N)| - 1 \leq |cd(G)|$$

ile ispat tamamlanır. □

Önerme 2.4.5. ([37, Önerme 2.7]). (H) , çözülebilir bir grubun bölüm gruplarına geçebilen bir hipotez ve A ise (H) hipotezini sağlayan tüm çözülebilir grupların bir kümesi olsun. Kabul edelim ki A kümesinde Taketa eşitsizliğini sağlamayan bir minimal mertebeli G grubu var olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

- (a) G grubunun biricik minimal normal alt grubu vardır.
- (b) M , G grubunun minimal normal alt grubu olmak üzere $cd(G/M) = cd(G)$ eşitliği gerçekleşir.
- (c) p bir asal sayı olmak üzere $F(G)$ bir p -grubudur.

İspat. Kabul edelim ki M_1 ve M_2 , G grubunun birbirinden farklı minimal normal alt grupları olsun. Bu durumda $M_1 \cap M_2 = 1$ olduğundan G grubu, $G/M_1 \times G/M_2$ direkt çarpım grubunun bir alt grubuna izomorftur. Diğer taraftan G/M_1 ve G/M_2 grupları Taketa eşitsizliğini sağladığından,

$$dl(G) \leq \max\{dl(G/M_1), dl(G/M_2)\} \leq \max\{|cd(G/M_1)|, |cd(G/M_2)|\} \leq |cd(G)|$$

olur ve teoremin hipotezini sağlayan G grubunun biricik M minimal normal alt grubu olduğu elde edilir. G çözülebilir olduğundan bir p asal sayısı için M elemanter abelyen p -grubudur ve dolayısıyla $F(G)$ bir p -grubu olur. Böylelikle (a) ve (c) şıklarının ispatı tamamlanır. $cd(G/M) \subseteq cd(G)$ olduğunu biliyoruz. Kabul edelim ki $cd(G/M) \subset cd(G)$ olsun. $dl(G/M) \leq |cd(G/M)|$ ve M abelyen olduğundan,

$$dl(G) \leq dl(G/M) + dl(M) \leq |cd(G/M)| + 1 \leq |cd(G)| - 1 + 1 = |cd(G)|$$

ile (b) şıkkı ispatlanmış olur. □

Lemma 2.4.6. ([4, Lemma 2.1]). G bir grup ve p bir asal sayı olsun. Eğer $cd(G)$ kümesinin elemanları p asalının bir kuvveti ise G bir M -grubudur ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ olur.

İspat. Teorem 2.2.4 kullanılırsa G grubunun bir normal abelyen p -komplementi olduğu görülür. N , G grubunun bir normal abelyen p -komplementi olsun. N ve G/N çözülebilir olduğundan G grubu da çözülebilirdir. G/N bir p -grubu olduğundan nilpotenttir ve Isaacs [18] Teorem 6.22 kullanılırsa G grubunun N grubuna göre göreceli bir M -grup olduğu elde edilir. Öte yandan N abelyen ve G, N grubuna göre göreceli bir M -grup olduğundan Teorem 2.4.3 e göre G bir M -grubudur ve böylelikle G , Taketa eşitsizliğini sağlar. □

Teorem 2.4.7. ([4, Teorem 1]). G bir grup olmak üzere eğer G grubunun lineer olmayan indirgenemez karakter dereceleri çift sayı ise G çözülebilirdir ve Taketa eşitsizliğini sağlar.

İspat. Her $\chi \in Irr(G)$ için $2|\chi(1)|$ olduğundan Teorem 2.2.6 kullanılırsa G grubunun bir normal 2-komplementi olduğu görülür. Bu komplemente H diyelim. G/H , bir 2-grubu olduğundan çözülebilirdir ve H mertebesi tek olduğundan odd order teoreminden çözülebilirdir ve dolayısıyla G grubu da çözülebilirdir. $\theta \in Irr(H)$ ve $[\chi_H, \theta] \neq 0$ olsun.

Teorem 2.2.7 ile $\frac{\chi(1)}{\theta(1)} ||G : H|$ ve H, G grubunun bir normal 2-komplementi olduğundan

$$cd(H) = \{a_{2'} \mid a \in cd(G)\}$$

elde edilir. Diğer taraftan $H/H' \trianglelefteq G/H'$ ve H/H' abelyen olduğundan Teorem 2.2.5 ile $cd(G/H')$ kümesindeki dereceler 2 asalının bir kuvveti biçimindedir. Dolayısıyla

$$|cd(H) - \{1\}| \leq |\{a \in cd(G) \mid a \neq 2^m, m \in \mathbb{N}\}| \leq |cd(G)| - |cd(G/H')|$$

olup, buradan

$$|cd(H)| + |cd(G/H')| \leq |cd(G)| + 1$$

bulunur. Lemma 2.4.6 yardımıyla $dl(G/H') \leq |cd(G/H')|$ olur ve böylelikle

$$dl(G) + 1 \leq dl(H) + dl(G/H') \leq |cd(H)| + |cd(G/H')| \leq |cd(G)| + 1$$

ve buradan $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. $\square$

Teorem 2.4.8. ([4, Teorem 2]). G grubunun indirgenemez karakter dereceleri tek sayı ise G çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. G grubunun indirgenemez karakter dereceleri tek ise Teorem 2.2.5 yardımıyla $P \in Syl_2(G)$ abelyen ve $P \trianglelefteq G$ olur. P ve G/P çözülebilir olduğundan G çözülebilirdir. Şimdi n , G grubunun birbirinden farklı indirgenemez karakter derecelerinin sayısı olsun. Eğer $P = 1$ ise $|G|$ tektir ve Berger [5] çalışmasından $dl(G) \leq |cd(G)|$ olur. O halde $P > 1$ kabul edebiliriz ve tekrar Berger [5] çalışmasından $dl(G/P) \leq |cd(G/P)| \leq n$ elde edilir. Diğer taraftan $\varphi : G \rightarrow G/P$ kanonik homomorfisini düşünürsek, $dl(G/P) = m$ olmak üzere $G^{(m)} \leq P$ olur ve buradan ise $m \leq n$ olduğundan $G^{(n)} \leq P$ bulunur.

Şimdi $N = O_{2'}(G)$ olsun ve ispatı $|G|$ üzerinden tümevarım ile yapalım. Kabul edelim ki $N > 1$ olsun. O halde G/N grubunun karakter derecelerinin sayısı n veya daha küçük olduğundan $dl(G/N) \leq |cd(G/N)| \leq n$ ve tümevarım hipotezi gereği $G^{(n)} \leq N$ kapsamı geçerlidir. Buradan ise $G^{(n)} \leq N \cap P = 1$ ve dolayısıyla $dl(G) \leq n = |cd(G)|$ eşitsizliği bulunur. Şimdi $N = 1$ kabul edebiliriz. O halde P, G grubunun Fitting alt grubudur. $\chi(1) = \max(cd(G))$ olmak üzere, Isaacs [18] Teorem 12.19 ve Sonuç 12.20 yardımıyla $\ker(\chi)$ nilpotent ve $\ker(\chi) < P$ olduğu görülür. Buradan G/P grubunun en fazla $n - 1$ tane

birbirinden farklı indirgenemez karakter derecesi vardır ve

$$dl(G) \leq dl(G/P) + dl(P) \leq |cd(G/P)| + 1 \leq |cd(G)| - 1 + 1 = |cd(G)|$$

eşitsizliği ile istenen elde edilir. □

Berger, [5] çalışmasında mertebesi tek olan tüm grupların Taketa eşitsizliğini sağladığını göstermiştir. Teorem 2.4.8 ile Aziziheris ve Lewis indirgenemez karakter dereceleri tek olan grupların Taketa eşitsizliğini sağladığını göstererek, Berger'in [5] çalışmasının bir genel halini elde etmişlerdir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Sonlu çözülebilir gruplar için açık bir problem olan Taketa problemi ile ilgili günümüze kadar bir çok çalışma yapılmış ve tezimizin giriş kısmında da belirtiltiği gibi araştırmacılar çeşitli ispat teknikleriyle problemin çözümüne yönelik katkı sağlamışlardır. Bu çalışmada da çözülebilir bir grubun bazı özelliklere sahip reel değerli indirgenemez karakterleri veya monolitik karakterlerinden yararlanarak Isaacs-Seitz sanısı, yani Taketa problemi üzerine bazı bulgular elde edilmiştir. Bu monolitik ve reel karakterlerin varlığı ve birtakım özellikleriyle ilgili teoremler referanslarıyla birlikte verilmiş olup, bulgular bölümündeki ispatlarımızda bu teoremler yeri geldiğinde kullanılmıştır.

Bulgular elde edilirken kullanılan tekniklerden birisi olmayana ergi metodudur, yani teoremin yanlış olduğunu varsayarak elde edilen çelişkiyle teoremin doğruluğu ispatlanmıştır. Bu metod kullanılırken teoremin hipotezini sağlayan ancak Taketa eşitsizliğini sağlamayan en küçük mertebeli bir G grubunun varlığı kabul edilmiştir. Sonra G grubunun yapısı incelenerek çelişki elde etmek suretiyle teoremin doğruluğu ispat edilmiştir.

Kullanılan ispat yöntemlerinden bir diğeri ise tümevarım yöntemidir. Bulgular kısmında yer verilen bazı teoremlerin ispatları, sonlu G grubunun mertebesi üzerinden tümevarım ile yapılmıştır, yani mertebesi G grubunun mertebesinden küçük olan ve teoremin hipotezini sağlayan gruplar için teorem doğru kabul edilip, G grubu için de doğruluğu gösterilmiştir.

Elde edilen sonuçlar için kaynaklar kısmında yer verilen kitaplardan ve makalelerden faydalanılırken, tezin yazımı için ise LaTeX programı kullanılmıştır.

4. BULGULAR

4.1. REEL KARAKTERLER, MONOLİTİK KARAKTERLER VE TAKETA EŞİTSİZLİĞİ

Giriş bölümünde bahsedildiği gibi Taketa problemi yaklaşık 50 yıldır bazı özel durumlar hariç çözümüne ulaşılamamış bir problemdir. Bu bölümde bazı özelliklere sahip sonlu çözülebilir grupların Taketa eşitsizliğini sağladığını gösteren teoremleri vereceğiz. Her sonlu çözülebilir grup, monolitik karakterlere ve reel değerli indirgenemez karakterlere sahiptir. Bu karakterlerin varlığı bu bölümde yer verilen teoremlerin ispatlarında sıklıkla kullanılacaktır. Bu bölümde G bir sonlu grubu, $Irr_1(G)$ ve $Irr_{m,1}(G)$ ise sırasıyla G grubunun lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin kümesini ve lineer olmayan monolitik karakterlerinin kümesini gösterecektir.

Teorem 4.1.1. ([11]). G grubunun 2-Sylow alt grubu normal ise G çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliğini sağlar.

İspat. $P \in Syl_2(G)$ olsun. G/P bölüm grubu ve P grubu çözülebilir olduğundan, G grubu da çözülebilirdir. Şimdi bu grubun Taketa eşitsizliğini sağladığını gösterelim. Eğer $P = 1$ ise G grubunun mertebesi tek olur ve Berger [5] ile G grubu Taketa eşitsizliğini sağlar. O halde $P \neq 1$ olarak kabul edebiliriz. P/P' , G/P' grubunun normal ve abelyen alt grubu olduğundan Teorem 2.2.5 ile G/P' grubunun her indirgenemez karakterinin derecesi $|G : P|$ sayısını böler ve buradan $cd(G/P')$ kümesindeki karakter derecelerinin tek sayı olduğu elde edilir. Ayrıca Teorem 2.4.8 kullanılırsa $dl(G/P') \leq |cd(G/P')|$ olduğu görülür. Öte yandan P bir 2-grubu olduğundan, her $\chi \in Irr(G)$ tek dereceli karakteri için χ_P karakteri, P grubunun lineer karakterlerinin bir toplamıdır. Dolayısıyla $\chi \in Irr(G/P')$ olur. Sonuç olarak

$$Irr(G/P') = \{\chi \in Irr(G) \mid \chi(1) \text{ tek dereceli}\}$$

olduğu görülür. $P \in Syl_2(G)$, G grubunun bir normal alt grubu olduğundan, Teorem 2.2.7 ile

$$cd(P) = \{\chi(1)_2 \mid \chi(1) \in cd(G)\}$$

olur ve buradan

$$|cd(P)| - 1 \leq |\{\chi(1) \in cd(G) \mid \chi(1) \text{ çift dereceli}\}|$$

eşitsizliği bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} |cd(P)| + |cd(G/P')| - 1 &\leq |\{\chi(1) \in cd(G) \mid \chi(1) \text{ çift}\}| + |\{\chi(1) \in cd(G) \mid \chi(1) \text{ tek}\}| \\ &= |cd(G)| \end{aligned}$$

olduğu görülür. $dl(P) \leq |cd(P)|$ ve $dl(G/P') \leq |cd(G/P')|$ olduğundan

$$dl(G) \leq dl(P) + dl(G/P') - 1 \leq |cd(P)| + |cd(G/P')| - 1 \leq |cd(G)|$$

bulunur ve istenilen gösterilmiş olur. □

Teorem 2.4.8 ile tüm indirgenemez karakter dereceleri tek sayı olan grupların Taketa eşitsizliğini sağladığı görülmektedir. G grubunun tüm karakter derecelerinin tek olması için gerek ve yeter koşul 2-Sylow alt grubun normal ve abelyen olmasıdır ([18, Sonuç 12.34]). Hâlbuki Teorem 4.1.1, G grubunun Taketa eşitsizliğini sağlaması için 2-Sylow alt grubunun abelyen olmasına gerek olmadığını, normal olmasının yeterli olduğunu gösterir. Bununla Teorem 2.4.8 hipotezinin bir genel hali de elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.2. ([11]). Kabul edelim ki G grubu aşağıdakilerden birini sağlasın.

(a) G grubunun tüm monolitik karakter dereceleri tek sayı olsun.

(b) G grubunun her $\chi \in Irr_{m,1}(G)$ için $\chi(1)$ çift sayı olsun.

O halde G grubu çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. G grubunun her monolitik karakter derecesinin tek olduğunu kabul edelim. Teorem 2.3.7(b) ile G grubunun 2-Sylow alt grubunun normal olduğu bulunur ve Teorem 4.1.1 kullanılırsa G grubunun çözülebilir olduğu ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliği elde edilir. O halde şimdi G grubunun her lineer olmayan monolitik karakter derecesinin çift olduğunu, yani (b) şikkını gerçekleştirdiğini varsayalım. G grubunun lineer olmayan monolitik karakter dereceleri 2 ile bölündüğünden Teorem 2.3.7(a) kullanılırsa G grubunun bir normal 2-komplementinin olduğu görülür. Dolayısıyla Teorem 2.4.4 ile G , Taketa eşitsizliğini sağlayan bir çözülebilir gruptur. □

Teorem 4.1.3. ([11]). G , aşağıdakilerden birini sağlayan bir grup olsun.

(a) G grubunun tüm reel değerli indirgenemez karakter dereceleri tek sayı olsun.

(b) G grubunun her lineer olmayan reel değerli indirgenemez karakter derecesi çift sayı olsun.

O halde G grubu çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki G grubu (a) şikkını sağlasın ve $P \in Syl_2(G)$ olsun. G grubunun reel değerli indirgenemez karakterleri dereceleri tek sayı olduğundan Teorem 2.3.5 gerçekleşir ve $P \trianglelefteq G$ olduğu görülür. Dolayısıyla Teorem 4.1.1 ile G çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ olur. Şimdi varsayalım ki G grubunun lineer olmayan reel değerli karakter dereceleri çift olsun, yani teoremin (b) şikkı sağlansın. Bu durumda Teorem 2.3.4 ile G grubunun bir normal 2-komplementi vardır. Teorem 2.4.4 kullanılırsa G grubunun çözülebilir olduğu ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliği elde edilir. $\square$

Aziziharis ve Lewis [4] referanslı çalışmalarında, Teorem 1 ile lineer olmayan indirgenemez karakter dereceleri çift olan G grubunun Taketa eşitsizliğini sağladığını, Teorem 2 ile ise tüm indirgenemez karakter dereceleri tek sayı olan G grubunun Taketa eşitsizliğini sağladığını göstermişlerdir. Teorem 4.1.2 (ya da Teorem 4.1.3) ile [4] referanslı çalışmada verilen Teorem 1 ve Teorem 2 genelleştirilmiştir.

Bir sonlu grubun reel değerli indirgenemez karakterleri üzerine yapılan çalışmaların bazılarında, bu reel değerli indirgenemez karakterlerin sayısına göre o grubun bazı özellikleri verilmiştir. Bu özelliklerden yararlanarak, bir grubun reel değerli indirgenemez karakterleri ve Taketa eşitsizliğiyle ilgili elde ettiğimiz bir sonuç aşağıdaki gibidir:

Sonuç 4.1.4. G bir grup ve $|Irr_{\mathbb{R}}(G)| \leq 3$ olsun. Bu durumda G çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. $|Irr_{\mathbb{R}}(G)| = 1$ olsun. Bu durumda G grubunun bir tane reel değerli indirgenemez karakteri olduğundan $|G|$ tektir ve dolayısıyla odd-order teoreminden G çözülebilirdir. Berger [5] ile $dl(G) \leq |cd(G)|$ olur. Böylece bir tane reel değerli indirgenemez karaktere sahip olan grupların Taketa eşitsizliğini sağladığı görülür. Şimdi kabul edelim ki $|Irr_{\mathbb{R}}(G)| = 2$ olsun. O halde Iwasaki [24] referanslı çalışmadan $P \in Syl_2(G)$ olmak üzere $P \trianglelefteq G$ bulunur. Dolayısıyla G grubu çözülebilirdir ve 2-Sylow alt grubu normal

olduğundan Teorem 4.1.1 ile G grubu Taketa eşitsizliğini sağlar. Son olarak $|Irr_{\mathbb{R}}(G)| = 3$ olsun. [32] referanslı çalışmadan G grubu çözülebilirdir ve 2-Sylow alt grubu ya normaldir ya da devreseldir. G grubunun 2-Sylow alt grubun normal olması durumunda Teorem 4.1.1 ile $dl(G) \leq |cd(G)|$ bulunur. G grubunun 2-Sylow alt grubunun devresel olması durumunda ise Teorem 2.1.1 ile G grubunun bir normal 2-komplementi olduğu görülür ve dolayısıyla G grubu, Teorem 2.4.4 ile $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliğini sağlar. $\square$

G bir çözülebilir grup ve χ , G grubunun lineer olmayan tek dereceli reel değerli sadık indirgenemez karakteri olsun. Kabul edelim ki $N \trianglelefteq G$ ve $|N|$ tek olsun. Dolayısıyla 1_N , N grubunun biricik reel değerli indirgenemez karakteridir. χ karakterinin tek dereceli reel değerli indirgenemez karakter olduğu ve Clifford teoremi göz önüne alındığında χ_N karakterinin indirgenemez ögeleri reel değerli olacağından $\chi_N = \chi(1)1_N$ bulunur. Böylece χ karakterinin sadık olduğu da göz önüne alındığında $N = 1$ elde edilir. Sonuç olarak çözülebilir bir G grubunun lineer olmayan tek dereceli reel değerli sadık indirgenemez karakteri varsa $O_{2'}(G) = 1$ olur. Dolayısıyla G grubunun bir minimal normal alt grubu elemanter abelyen 2-grubudur.

Teorem 4.1.5. ([11]). G bir çözülebilir grup olsun. Eğer G grubunun lineer olmayan reel değerli ve tek dereceli indirgenemez karakterleri sadık ise G grubu Taketa eşitsizliğini sağlar.

İspat. G minimal mertebeli aksi örnek olsun. Mertebesi tek olan gruplar Berger [5] ile Taketa eşitsizliğini sağladığından, G grubunun mertebesinin çift sayı olduğunu kabul edebiliriz. G grubunun tek dereceli reel değerli lineer olmayan indirgenemez karakterleri sadık olduğundan, G grubunun has bölüm grupları bu özellikte bir indirgenemez karaktere sahip değildir. Dolayısıyla Teorem 4.1.3 ile G grubunun has bölüm grupları Taketa eşitsizliğini sağlar. Buradan Önerme 2.4.5(a) ile G grubunun biricik M minimal normal alt grubu vardır. G çözülebilir olduğundan bir p asalı için M elemanter abelyen p -grubudur ve bunun bir sonucu olarak $F(G)$ bir p -grubudur. Isaacs [18], Teorem 12.19 ve Lemma 12.20 ile $cd(G/F(G))$ kümesi $cd(G)$ kümesinde bulunan en büyük indirgenemez karakter derecenin içermez, yani $|cd(G/F(G))| < |cd(G)|$ olur. Kabul edelim ki $F(G)$ abelyen olsun. O halde tümevarım gereği $dl(G/F(G)) \leq |cd(G/F(G))|$ olduğundan

$$dl(G) \leq dl(G/F(G)) + dl(F(G)) \leq |cd(G/F(G))| + 1 \leq |cd(G)|$$

çelişkisi elde edilir. Bu yüzden $F(G)$ abelyen olmayan bir gruptur, yani $1 < M \leq F'(G)$ kapsamı geçerlidir. Diğer taraftan M biricik minimal normal alt grup olduğundan, G grubunun sadık indirgenemez χ karakteri vardır. $\chi_{F(G)}$ karakterinin $M \not\leq \ker(\theta)$ olacak biçimde $\theta \in \text{Irr}(F(G))$ ögesi vardır. Çünkü $\chi_{F(G)}$ karakterinin her indirgenemez θ ögesi için $M \leq \ker(\theta)$ olsa $M \leq \ker(\chi_{F(G)})$ olur ve $M = 1$ çelişkisine varılır. $M \leq F'(G)$ olduğundan $\theta(1) > 1$ olmalıdır ve $\theta, \chi_{F(G)}$ karakterinin bir indirgenemez ögesi olduğundan $\theta(1), \chi(1)$ derecesini böler. Diğer taraftan $F(G)$ bir p -grubu ve $\theta \in \text{Irr}(F(G))$ olduğundan $p|\chi(1)$ elde edilir. Sonuç olarak p asalı G grubunun her sadık indirgenemez karakter derecesini böler.

Şimdi kabul edelim ki G grubunun reel değerli indirgenemez karakterleri lineer olsun. O halde Teorem 4.1.3(a) kullanılırsa G grubunun Taketa eşitsizliğini sağladığı elde edilir. Buradan G grubunun en az bir tane lineer olmayan reel değerli indirgenemez karakterinin var olduğu sonucuna ulaşılır. Eğer G grubunun lineer olmayan reel değerli indirgenemez karakter dereceleri çift ise Teorem 4.1.3(b) ile $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla G grubunun en azından bir tane lineer olmayan tek dereceli reel değerli indirgenemez χ karakteri vardır. Teoremin hipotezinden $\ker(\chi) = 1$ ve ilk paragrafta yapılanlar kullanılırsa $p|\chi(1)$ olduğu görülür. $\chi(1)$ tek sayı olduğundan M elemanter abelyen p -grubunun mertebesi de tektir ve buradan $1_M, M$ grubunun biricik reel değerli indirgenemez karakteridir. Ayrıca χ reel değerli tek dereceli indirgenemez karakter olduğundan Teorem 2.2.2 (Clifford teoremi) ile $\chi_M = \chi(1)1_M$ eşitliği elde edilir. Buradan $1 = \ker(\chi_M) = M$ çelişkisi bulunur. O halde G grubu, Taketa eşitsizliğini sağlar. $\square$

S_4 grubunun karakter tablosunu inceleyelim:

	$[I]$	$[(12)]$	$[(12)(34)]$	$[(123)]$	$[(1234)]$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	2	-1	0
χ_4	3	1	-1	0	-1
χ_5	3	-1	-1	0	1

Tablo 4.1: S_4 grubunun karakter tablosu.

Daha önce de bahsettiğimiz gibi S_4 simetrik grubu bir M -grubudur ve dolayısıyla Taketa eşitsizliğini sağlar. Bu grubun karakter tablosu incelendiğinde χ_4 ve χ_5 dereceleri 3 olan reel değerli sadık indirgenemez karakterlerdir ve dolayısıyla S_4 , Teorem 4.1.5 ile verilen teoremin hipotezini sağlayan bir çözülebilir grup örneğidir.

Teorem 4.1.6. ([11]). G bir grup olsun. G grubunun lineer olmayan monolitik karakter dereceleri birbirinden farklı ise G çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. Öncelikle G grubunun lineer olmayan monolitik karakter dereceleri birbirinden farklı ise [6] Teorem 2.1 yardımıyla G grubunun çözülebilir olduğunu söyleyebiliriz. Kabul edelim ki G , Taketa eşitsizliğini sağlamayan minimal mertebeli aksi örnek olsun. $N \trianglelefteq G$ için $Irr_m(G/N) = Irr(G/N) \cap Irr_m(G)$ olduğundan G/N grubunun da monolitik karakter dereceleri birbirinden farklıdır. Dolayısıyla tümevarım hipotezi gereği $dl(G/N) \leq |cd(G/N)|$ olur. Teoremin hipotezi bölüm grupları için de geçerli olduğundan Önerme 2.4.5(a) ile G grubunun biricik M minimal normal alt grubu vardır ve dolayısıyla G grubunun bir sadık indirgenemez karakteri de vardır. G grubunun sadık indirgenemez karakterleri monolitikdir. Ayrıca

$$|G| = |G : G'| + \sum_{\substack{\chi \in Irr_1(G) \\ M \leq ker(\chi)}} \chi(1)^2 + \sum_{\substack{\chi \in Irr_1(G) \\ M \not\leq ker(\chi)}} \chi(1)^2 \quad (4.1)$$

olur. M , G grubunun biricik minimal normal alt grubu olduğundan $M \leq G'$ kapsamı geçerlidir. Dolayısıyla

$$|G/M| = |G : G'| + \sum_{\substack{\chi \in Irr_1(G) \\ M \leq ker(\chi)}} \chi(1)^2 \quad (4.2)$$

eşitliği vardır. Dikkat edilirse χ karakterinin, G grubunun sadık indirgenemez karakteri olması için gerek ve yeter koşul $M \not\leq ker(\chi)$ olmasıdır. Diğer taraftan G minimal aksi örnek olduğundan Önerme 2.4.5(b) ile $cd(G/M) = cd(G)$ olur, yani G grubunun her sadık indirgenemez χ karakterine karşılık, $\chi(1) = \theta_\chi(1)$ koşulunu sağlayan sadık olmayan bir $\theta_\chi \in Irr(G)$ karakteri vardır. Ayrıca teoremin hipotezinden G grubunun sadık indirgenemez karakter dereceleri birbirinden farklı olduğundan ve $M \leq ker(\theta_\chi)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{\chi \in Irr_1(G) \text{ sadık}} \chi(1)^2 &= \sum_{\substack{\chi \in Irr_1(G) \\ M \not\leq ker(\chi)}} \chi(1)^2 \leq \sum_{\substack{\chi \in Irr_1(G) \\ M \not\leq ker(\chi)}} \theta_\chi(1)^2 \\
&\leq \sum_{\substack{\psi \in Irr_1(G) \\ M \leq ker(\psi)}} \psi(1)^2 \leq |G : M| - |G : G'|,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

(4.1) ile (4.2) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılıp ve (4.3) eşitsizliği kullanılırsa,

$$|G| - |G : M| = \sum_{\substack{\chi \in Irr_1(G) \\ M \not\leq ker(\chi)}} \chi(1)^2 \leq |G : M| - |G : G'|$$

bulunur ve bu eşitsizlik düzenlenirse

$$(|M| - 2)|G'| \leq -|M| \leq -2$$

çelişkisi elde edilir. Bu ise G grubunun monolitik karakter dereceleri birbirinden farklı ise $dl(G) \leq |cd(G)|$ olduğunu gösterir. $\square$

Yukarıdaki teoremin ispatında da görüldüğü gibi G grubunun bölüm grupları için de geçerli olan bir önerme için Taketa eşitsizliğini sağlamayan minimal mertebeli G grubunun biricik minimal normal alt grubu vardır ve dolayısıyla (4.1) ile (4.2) eşitliklerini yazabiliriz. Öte yandan G grubunun en az bir sadık indirgenemez karakteri vardır ve bu sadık indirgenemez karakterlerin dereceleri birbirinden farklı ise (4.3) eşitsizliğini de ifade edebiliriz. Bu (4.1), (4.2) ve (4.3) denklemlerini aşağıdaki sonuç ve devamındaki teoremde kullanacağız.

Sonuç 4.1.7. ([11]). G bir çözülebilir grup olsun. G grubunun her lineer olmayan χ indirgenemez karakteri için $|Irr_\chi(G)| \leq 2$ ise $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliği sağlanır. Burada $Irr_\chi(G)$, G grubunun derecesi $\chi(1)$ sayısına eşit olan tüm indirgenemez karakterlerinin kümesidir.

İspat. Kabul edelim ki G grubu teoremin hipotezini sağlayan minimal mertebeli karşıt örnek olsun. $1 < N$, G grubunun normal alt grubu olmak üzere G/N bölüm grubunun her lineer

olmayan χ indirgenemez karakteri için de $|Irr_\chi(G/N)| \leq 2$ olduğundan teoremin hipotezi, G grubunun bölüm grupları için de geçerli olur. Dolayısıyla Önerme 2.4.5(a) kullanılırsa G grubunun biricik M minimal normal alt grubu vardır ve G grubu, bir sadık indirgenemez χ karakterine sahiptir. Diğer taraftan yine Önerme 2.4.5(b) ile $cd(G/M) = cd(G)$ olduğundan bu χ sadık karakterine karşılık, G grubunun sadık olmayan ve $\chi(1) = \theta_\chi(1)$ eşitliğini sağlayan bir θ_χ indirgenemez karakteri var olur. $|Irr_\chi(G)| \leq 2$ olduğundan G grubunun $\chi(1)$ derecesine sahip indirgenemez karakterleri χ ve θ_χ olur. θ_χ sadık olmadığından, G grubunun sadık indirgenemez karakter dereceleri birbirinden farklıdır sonucuna varılır ve M biricik minimal normal alt grup olduğundan $M \leq G'$ olur. O halde (4.1), (4.2) eşitlikleri ve (4.3) eşitsizliği kullanılırsa

$$(|M| - 2)|G'| \leq -|M| \leq -2$$

çelişkisi bulunur ve bu ise teoremin hipotezini sağlayan G grubu için $dl(G) \leq |cd(G)|$ olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 4.1.8. ([11]). G bir çözülebilir reel grup olsun. Eğer G grubunun çift dereceli monolitik karakter dereceleri birbirinden farklı ise G grubu Taketa eşitsizliğini sağlar.

İspat. G minimal mertebeli aksi örnek olsun. G bir reel grup olduğundan, $|G|$ çift olarak kabul edebiliriz. Teoremin hipotezinin G grubunun bölüm grupları için de geçerli olduğu kolaylıkla görülür. Önerme 2.4.5(a) ile G grubunun elemanter abelyen p -grubu olan biricik M minimal normal alt grubu ve dolayısıyla G grubunun bir reel değerli χ sadık indirgenemez karakteri vardır. $F(G)$, Fitting alt grup olmak üzere $cd(G/F(G))$ kümesi $cd(G)$ kümesindeki maksimal olan dereceyi içermez, yani $|cd(G/F(G))| < |cd(G)|$ olur. Kabul edelim ki $F(G)$ abelyen olsun. Tümevarım gereği $dl(G/F(G)) \leq |cd(G/F(G))|$ olduğundan

$$dl(G) \leq dl(G/F(G)) + dl(F(G)) \leq |cd(G/F(G))| + 1 \leq |cd(G)|$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $1 < M \leq F'(G)$ kapsamı vardır. Bu durumda G grubunun χ sadık indirgenemez karakteri için $\chi_{F(G)}$ karakterinin $M \not\leq \ker(\lambda)$ olacak biçimde bir $\lambda \in Irr_1(F(G))$ indirgenemez ögesi var olur. $F(G)$ bir p -grubu olduğundan p , $\lambda(1)$ derecesini ve dolayısıyla $\chi(1)$ derecesini böler, yani G grubunun her sadık indirgenemez karakter derecesi p asalı ile bölünür. Kabul edelim ki $\chi(1)$ tek olsun. Bu durumda $p \neq 2$ olduğundan 1_M , M grubunun biricik reel değerli indirgenemez karakteridir. χ bir reel

değerli tek dereceli indirgenemez karakter olduğu ve Teorem 2.2.2 göz önüne alındığında $\chi_M = \chi(1)1_M$, yani $M \leq \ker(\chi) = 1$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişki ile G grubunun sadık indirgenemez karakter derecelerinin 2 ile bölündüğü görülür. G grubunu sadık indirgenemez karakterleri monolitik olduğundan, teoremin hipotezi gereği G grubunun sadık indirgenemez karakter derecelerinin de birbirinden farklı olduğu görülür. O halde (4.1), (4.2) eşitlikleri ve (4.3) eşitsizliği kullanılırsa

$$(|M| - 2)|G'| \leq -|M| \leq -2$$

çelişkisi bulunur. Böylece $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliği sağlanır. $\square$

Aşağıdaki teoremi ispatlamaya başlamadan önce süperçözülebilir bir G grubunun mertebesini bölen en büyük asal sayı p ise G grubunun p -Sylow alt grubunun normal olduğunu ve G' grubunun nilpotent olduğunu hatırlayalım.

Teorem 4.1.9. ([11]). G bir grup olsun. G' süperçözülebilir ve G grubunun her reel değerli tek dereceli monolitik χ karakteri için $G/\ker(\chi)$ çekirdeği elemanter abelyen 2-grubu olan Frobenius grubu olmasın. O halde G çözülebilirdir ve Taketa eşitsizliğini sağlar.

İspat. Açıkça görüldüğü gibi G/G' ve G' çözülebilir olduğunda G de çözülebilirdir. Şimdi teoremin yanlış olduğunu varsayalım ve çelişkiye ulaşmaya çalışalım. G , teoremin hipotezini sağlayan minimal mertebeli karşıt örnek olsun. Açıkça görüldüğü gibi bu hipotez, G grubunun bölüm gruplarına da taşınır ve tümevarım gereği bu bölüm grupları Taketa eşitsizliğini sağlar. O halde Önerme 2.4.5(a) ile G grubunun elemanter abelyen olan biricik M minimal normal p -alt grubu vardır. G grubunun lineer olmayan reel değerli indirgenemez karakter dereceleri çift sayı ise Teorem 4.1.3 ile G grubu Taketa eşitsizliğini sağlar. Böylelikle G grubunun lineer olmayan, reel değerli ve tek dereceli indirgenemez karakterinin var olduğunu varsayabiliriz ve χ ise G grubunun bu özellikteki indirgenemez karakterlerinin içinde bir maksimal çekirdekli olanı olsun. $\ker(\chi) = 1$ olduğunu varsayalım. Teorem 4.1.5 ispatının ilk paragrafında yapılanlara benzer düşünce ile p asalı $\chi(1)$ derecesini böler ve dolayısıyla $\chi(1)$ tek olduğundan $|M|$ tek olduğu elde edilir. Teorem 2.2.2 kullanılırsa $\chi_M = \chi(1)1_M$, yani $M = 1$ çelişkisine ulaşılır. Dolayısıyla $\ker(\chi) \neq 1$ olmalıdır. $\bar{G} = G/\ker(\chi)$ ve $\bar{G}$ grubunun Fitting alt grubunu ise $\bar{F} = F(G/\ker(\chi))$ olarak gösterelim. χ , $\bar{G}$ grubunun tek dereceli reel değerli sadık indirgenemez karakteri olduğundan $\bar{F}$ bir

2-grubudur. Diğer taraftan $\lambda \in Irr(\overline{F})$, $\chi_{\overline{F}}$ karakterinin bir indirgenemez ögesi ise $\chi(1)$ tek sayı ve $|\overline{F}|$ çift olduğundan $\lambda(1) = 1$ olmak zorundadır. χ karakterinin $\overline{G}$ grubunun bir sadık karakteri olduğu da göz önüne alınırsa $\overline{F}' = 1$, yani $\overline{F}$ grubunun bir abelyen 2-grubu olduğu sonucu elde edilir.

G' süperçözülebilir olduğundan $\overline{G}'$ grubu da süperçözülebilirdir ve $\overline{G}'$ mertebesini bölen en büyük q asalına karşılık gelen q -Sylow alt grubu $\overline{Q}$ ise $\overline{Q} \trianglelefteq \overline{G}'$ olur. Diğer taraftan $\overline{Q}$ bir karakteristik alt grup ve $\overline{G}' \trianglelefteq \overline{G}$ olduğundan $\overline{Q} \trianglelefteq \overline{G}$ elde edilir. $\overline{F}$ bir 2-grubu olduğundan $q = 2$ olmak zorunda kalır ve böylece $\overline{G}' \leq \overline{F} \leq \overline{G}$ kapsamasının geçerli olduğu görülür. Buradan $\overline{F}$, $\overline{G}$ grubunun maksimal nilpotent normal alt grubu olduğu da göz önüne alınırsa $\overline{G}/\overline{F}$ abelyen ve mertebesinin tek olduğu kolaylıkla görülür. Böylelikle $\overline{G} = \overline{F} \rtimes \overline{O}$ olacak biçimde $\overline{G}$ grubunun $\overline{O}$ bir 2-komplementi vardır. Ayrıca χ , bir lineer olmayan indirgenemez karakter ve $\overline{F}$ abelyen olduğundan $\overline{O} \neq 1$ olmalıdır.

$\overline{K}$, $\overline{G}/\overline{K}$ grubunu abelyen yapmayan maksimal normal alt grup olsun. Kabul edelim ki $\overline{K} \neq 1$ olsun. $\overline{F}$, $\overline{G}$ grubunun normal abelyen bir alt grubu olduğundan Teorem 2.2.5 ile $\overline{G}$ grubunun indirgenemez karakter dereceleri tek sayıdır. Ayrıca $ker(\chi)$, G grubunun lineer olmayan reel değerli tek dereceli karakterler içinde bir maksimal çekirdek olduğundan $\overline{G}/\overline{K}$ grubunun reel değerli indirgenemez karakterleri lineerdir. O halde Teorem 2.3.2 kullanılırsa $\overline{P}/\overline{K} \in Syl_2(\overline{G})$ ve $\overline{H}/\overline{K}$ mertebesi tek olan bir alt grup olmak üzere

$$\overline{G}/\overline{K} = \overline{P}/\overline{K} \times \overline{H}/\overline{K}$$

yazılışı elde edilir. Diğer taraftan $\overline{G}$ çözülebilir olduğundan $\overline{G}/\overline{K}$, Teorem 2.2.8 ile verilen koşulları sağlar. Kabul edelim ki $\overline{G}/\overline{K}$ bir p -grubu olsun. $cd(\overline{G}/\overline{K}) \subseteq cd(\overline{G})$ ve $\overline{G}$ grubunun indirgenemez karakter dereceleri tek olduğundan $p \neq 2$, yani

$$\overline{G}' \leq \overline{F} \leq \overline{K} \leq \overline{G}$$

olur. Buradan $\overline{G}/\overline{K}$ abelyendir ve bu ise $\overline{K}$ grubunun seçimi ile çelişir. Diğer taraftan $\overline{G}/\overline{K}$ grubu $\overline{P}/\overline{K}$ ile $\overline{H}/\overline{K}$ grubunun bir direkt çarpımı olduğundan $Z(\overline{G}/\overline{K}) > 1$ olmalıdır, yani $\overline{G}/\overline{K}$ grubu bir Frobenius grubu da olamaz. Dolayısıyla $\overline{K} = 1$, yani $\overline{G}'$, $\overline{G}$ grubunun biricik minimal normal alt grubudur ve $\overline{G}$ grubu Teorem 2.2.8 ile verilen teoremin koşullarını sağlar.

Açıkça görüldüğü gibi, $\overline{O} \neq 1$ olduğundan $\overline{G} = \overline{F} \rtimes \overline{O}$ bir Frobenius grubudur. Bu gösterir ki reel değerli tek dereceli indirgenemez karakter olan χ , aynı zamanda monolitik karakterdir ve $\overline{G}$ ise çekirdeği elemanter abelyen 2-grubu olan bir Frobenius grubudur. Bu son çelişki ile ispat tamamlanır. $\square$

Yukarıdaki teoremin ispatına dikkat edilirse, aksi örneğimizin sahip olduğu tek dereceli lineer olmayan reel değerli indirgenemez karakteri üzerinden ispat ilerlemiştir. Burada kullanılan teknikleri aşağıdaki sonuca da uyarlayacağız.

Sonuç 4.1.10. ([11]). G bir grup ve $O^{2'}(G) = G$ olsun. Eğer G' süperçözülebilir ise G çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ olur.

İspat. G' çözülebilir ve G/G' çözülebilir olduğundan G grubu da çözülebilirdir. Açıkça görüldüğü gibi teoremin hipotezi G grubunun bölüm grupları için de geçerlidir, yani eğer G teoremin hipotezini sağlayan minimal mertebeli aksi örnek ise G grubunun bölüm grupları tümevarım gereği Taketa eşitsizliğini sağlar. Önerme 2.4.5(a) ile G grubunun biricik minimal normal alt grubu vardır. Diğer taraftan Teorem 4.1.3 ile G grubunun bir lineer olmayan tek dereceli reel değerli indirgenemez karakterinin var olduğunu kabul edebiliriz. χ karakterini, G grubunun lineer olmayan tek dereceli reel değerli indirgenemez karakterler içinden bir maksimal çekirdekli olanı olarak alalım. $\overline{G} = G/\ker(\chi)$ ve $\overline{G}$ grubunun Fitting alt grubu $\overline{F} = F(G/\ker(\chi))$ olmak üzere Teorem 4.1.9 ispatında kullanılan benzer düşünceler ile $\overline{F}$ grubunun abelyen olduğu ve $\overline{G} = \overline{F} \rtimes \overline{O}$ eşitliği bulunur. Teoremin hipotezi gereği $O^{2'}(\overline{G}) = \overline{G}$ olduğundan $\overline{G} = \overline{F}$ yazılır. Bu ise χ indirgenemez karakterinin lineer olduğu çelişkisini verir. O halde teoremin hipotezini sağlayan gruplar için Taketa eşitsizliği geçerlidir. $\square$

$N \trianglelefteq G$ olmak üzere $Irr(G|N)$, N grubunu çekirdeğinde bulundurmayan G grubunun tüm indirgenemez karakterlerinin kümesini gösterebiliriz. Eğer $N = G'$ olarak alırsak $Irr(G|G')$, G grubunun tüm lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin kümesi olur ve buradan $|cd(G|G')| = |cd(G)| - 1$ olduğu görülür.

Teorem 4.1.11. G bir grup ve G' süperçözülebilir olsun. Eğer G grubunun tek dereceli lineer olmayan indirgenemez karakterleri reel değerli ise G çözülebilirdir ve Taketa eşitsizliğini sağlar.

İspat. G/G' ve G' çözülebilir olduğundan G de çözülebilirdir. Kabul edelim ki G teoremin hipotezini sağlayıp Taketa eşitsizliğini sağlamayan minimal mertebeli aksi örnek olsun. G grubunun bölüm gruplarının komütatör grupları da süperçözülebilir ve tek dereceli lineer olmayan indirgenemez karakterleri de reel değerli olduğundan tümevarım gereği bu bölüm grupları Taketa eşitsizliğini sağlar. Önerme 2.4.5(a) kullanılırsa G grubunun biricik M minimal normal alt grubu vardır. G çözülebilir olduğundan bir p asalı için M bir elemanter abelyen p -grubudur ve Fitting alt grubu olan $F(G)$ de bir p -grubu olur. Kabul edelim ki $p = 2$ olsun. G' süperçözülebilir olduğundan bu grubun mertebesini bölen en büyük q asalı için $Q \in Syl_q(G')$ ise $Q \trianglelefteq G'$, yani Q , G' grubunun karakteristik alt grubudur ve dolayısıyla $Q \trianglelefteq G$ olur. $F(G)$ maksimal nilpotent normal alt grubunun bir 2-grubu olduğunu göz önüne alırsak $q = 2$ ve dolayısıyla $G' \leq F(G) \leq G$ kapsaması geçerlidir. G' nilpotent olduğundan Isaacs [23] Sonuç 3.3 ile $dl(G') \leq |cd(G|G')|$ olduğunu görürüz. Buradan

$$dl(G) \leq dl(G/G') + dl(G') \leq 1 + |cd(G|G')| \leq 1 + |cd(G)| - 1 = |cd(G)|$$

olup, istenilen gösterilmiş olur. Dolayısıyla $p \neq 2$ kabul edebiliriz. Ayrıca G'' nilpotent olduğundan, $G'' \leq F(G)$ bulunur. Kabul edelim ki G grubunun tüm indirgenemez karakter dereceleri çift sayı olsun. O halde Teorem 2.2.6 ile G grubunun bir normal 2-komplementi var olup, Teorem 2.4.4 ile G grubu Taketa eşitsizliğini sağlar. Böylelikle G grubunun lineer olmayan ve derecesi tek sayı olan bir χ indirgenemez karakterinin var olduğunu kabul edebiliriz ve teoremin hipotezi gereği bu karakter reel değerlidir. $[\chi_{G''}, \theta] \neq 0$ olacak biçimde $\theta \in Irr(G'')$ alalım. χ bir reel değerli tek dereceli indirgenemez karakter olduğundan, bu karakteri mertebesi tek olan bir normal alt gruba kısıtladığımızda, indirgenemez öğelerinin de reel değerli olması gerekir. Dolayısıyla θ indirgenemez karakteri de reel değerlidir. Ancak $|G''|$ tek ve $1_{G''}$ bu grubun biricik reel değerli indirgenemez karakteri olduğundan $\theta = 1_{G''}$ olup, Clifford teoreminden $\chi_{G''} = \chi(1)1_{G''}$ yazılışı vardır. Bu ise G grubunun her tek dereceli lineer olmayan indirgenemez χ karakteri için $G'' \leq ker(\chi)$ olduğunu gösterir. Ayrıca G grubunun tüm lineer karakter çekirdeklerinin de G'' grubunu içerdiği göz önüne alınırsa $|cd(G|G'')| \leq |cd(G)| - 2$ ve G'' nilpotent olduğundan $dl(G'') \leq |cd(G|G'')|$ olur ([23, Sonuç 3.3]). Buradan

$$dl(G) \leq dl(G/G'') + dl(G'') \leq 2 + |cd(G|G'')| \leq 2 + |cd(G)| - 2 = |cd(G)|$$

ile istenilen gösterilmiş olur. $\square$

Sonuç 4.1.12. ([11]). G bir reel grup ve G' süperçözülebilir olsun. O halde G çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ olur.

İspat. G' ve G/G' çözülebilir gruplar olduğundan G grubu da çözülebilirdir. Açıkça görüldüğü gibi, G grubunun lineer olmayan tek dereceli indirgenemez karakterleri reel değerli olduğundan Teorem 4.1.11 ile G grubu Taketa eşitsizliğini sağlar. $\square$

4.2. KARAKTER ÇARPIMLARININ İNDİRGENEMEZ ÖĞELERİ VE TÜREV UZUNLUĞU

G bir sonlu grup, $\chi \in Irr_1(G)$ olsun. $\chi\bar{\chi}$ karakterinin birbirinden farklı indirgenemez öğeleri $1_G, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, olmak üzere

$$\chi\bar{\chi} = 1_G + \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i,$$

$n > 0$ ve $m_i > 0$ olacak biçimde bir yazılış vardır. Bu bölümün devamında $\chi\bar{\chi}$ karakterinin indirgenemez öğelerine ayrılışını sıklıkla kullanacağız.

Hipotez 1: (P) , sonlu çözülebilir grupların bazı indirgenemez karakterlerinin sahip olduğu bir özellik olsun. $Irr_{(P)}(G)$, bir sonlu çözülebilir G grubunun (P) özelliğine sahip lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin kümesi olsun ve aşağıdakiler gerçeklensin:

- (i) Eğer $Irr_{(P)}(G)$ kümesi boş küme ise G grubu Taketa eşitsizliğini gerçekleştir.
- (ii) Her $N \trianglelefteq G$ için $Irr_{(P)}(G/N) \subseteq Irr_{(P)}(G)$ olsun.

G bir çözülebilir grup olsun. $Irr_{(P)}(G)$ kümesini G grubunun lineer olmayan tek dereceli monolitik karakterleri kümesi olarak alalım. Eğer $Irr_{(P)}(G) = \emptyset$ ise Teorem 4.1.2(b) ile G , Taketa eşitsizliğini sağlar ve her $N \trianglelefteq G$ için $Irr_{(P)}(G/N) \subseteq Irr_{(P)}(G)$ olur. Benzer şekilde (P) özelliğini, G grubunun çift dereceli monolitik karakterleri olarak alırsak $Irr_{(P)}(G)$ kümesi Hipotez 1 i sağlar. Aynı düşünceler reel değerli indirgenemez karakterler için de geçerlidir. Örneğin, (P) özelliğini reel değerli tek dereceli indirgenemez karakter olma veya reel değerli çift dereceli indirgenemez karakter olma özelliği olarak alıp, Teorem 4.1.3(a) ve (b) kullanırsak $Irr_{(P)}(G)$ kümesinin Hipotez 1 ile verilenleri gerçeklediğini görürüz.

Teorem 4.2.1. Hipotez 1 geçerli olsun. Her $\chi \in Irr_{(p)}(G)$ için $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki tüm indirgenemez ögelerinin çekirdekleri içinde bir maksimal çekirdek abelyen oluyorsa G grubu Taketa eşitsizliğini sağlar.

İspat. İspatı $|G|$ üzerinden tümevarımla yapacağız. Hipotez 1 ile $Irr_{(p)}(G) \neq \emptyset$ kabul edebiliriz. Şimdi $\chi \in Irr_{(p)}(G)$ olsun. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki tüm indirgenemez ögelerinin kümesi ve K , bu indirgenemez ögelerin çekirdekleri içinde bir maksimal abelyen çekirdek olsun. E/K , G grubunun bir baş çarpanı ise K bir maksimal çekirdek olduğundan her $i = 1, \dots, n$ için $E \not\leq ker(\alpha_i)$ olur. Lemma 2.2.9 ile $\chi_E \in Irr(E)$ olduğu görülür. Ayrıca dikkat edilirse E/K çözülebilir bir grubun baş çarpanı olduğundan elementer abelyen p -grubudur ve buradan $dl(E) = 2$ olduğu kolaylıkla görülür. K , E grubunun bir normal ve abelyen alt grubu olduğundan Teorem 2.2.5 kullanılırsa $\chi_E(1) = \chi(1)$ derecesi, p asalının bir pozitif tam sayı kuvveti olur. Eğer G grubunun tüm indirgenemez karakter dereceleri p asalının bir kuvveti biçiminde ise Lemma 2.4.6 ile G grubunun Taketa eşitsizliğini sağladığı elde edilir. Buradan Lewis [28] Teorem A yardımıyla $q \neq p$ ve $pq | \vartheta(1)$ olacak biçimde bir q asal sayısı ve $\vartheta \in Irr(G)$ vardır. Şimdi x ve y sayılarını sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$x = \max \{ \lambda(1) \mid \lambda \in Irr(G) \text{ ve } \lambda(1) = p^a, a \in \mathbb{N} - \{0\} \}$$

$$y = \max \{ \vartheta(1) \mid \vartheta \in Irr(G) \text{ ve } pq | \vartheta(1) \}.$$

Kabul edelim ki $E \leq ker(\lambda)$ ve $\lambda(1) = x$ olacak biçimde bir $\lambda \in Irr(G)$ var olsun. O halde Teorem 2.2.3 ile $\lambda\chi \in Irr(G)$ olur ve buradan $\lambda\chi$ karakterinin derecesi p asalının bir kuvvetidir ve $\lambda\chi(1) > x = \lambda(1)$ olur. Bu ise λ karakterinin seçimi ile çelişir. Benzer şekilde, eğer G grubunun bir ϑ indirgenemez karakteri için $E \leq ker(\vartheta)$ ve $\vartheta(1) = y$ koşulları gerçekleşirse $\vartheta\chi \in Irr(G)$ ve $\vartheta\chi(1) > y$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\lambda(1) = x$ ve $\vartheta(1) = y$ koşulunu sağlayan her $\lambda, \vartheta \in Irr(G)$ için $E \not\leq ker(\lambda)$ ve $E \not\leq ker(\vartheta)$ olur. O halde $|cd(G/E)| \leq |cd(G)| - 2$ bulunur. Diğer taraftan eğer G/E grubunun bu (P) özelliğine sahip indirgenemez karakteri yoksa Hipotez 1(i) gereği G/E , Taketa eşitsizliğini sağlar. Bununla birlikte $Irr_{(p)}(G/E) \neq \emptyset$ ise teoremin hipotezi bölüm grupları için de geçerli olduğundan

tümevarım gereği $dl(G/E) \leq |cd(G/E)|$ olur. Bu durumda

$$dl(G) \leq dl(G/E) + dl(E) \leq |cd(G/E)| + 2 \leq |cd(G)| - 2 + 2 = |cd(G)|$$

olur ki bu ise teoremin hipotezini gerçekleyen çözülebilir grupların $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliğini sağladığını gösterir. $\square$

Teorem 4.2.2. G bir abelyen olmayan çözülebilir grup ve $\chi \in Irr_{m,1}(G)$ olsun. Eğer $ker(\chi)$, G grubunun lineer olmayan monolitik karakterlerinin çekirdekleri arasında bir maksimal çekirdek ise $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki indirgenemez ögelerinin çekirdeklerinin hepsi aynı olamaz.

İspat. $\chi\bar{\chi}$ karakterinin birbirinden farklı indirgenemez ögeleri $1_G, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ($n \geq 1$) olsun. $ker(\alpha_1) = \dots = ker(\alpha_n)$ olduğunu kabul edelim. $\chi, \bar{G} := G/ker(\chi)$ grubunun bir sadık karakteri olacağından, Lemma 2.2.10 ile

$$\bigcap_{i=1}^n \overline{ker(\alpha_i)} = Z(\bar{G}) = \overline{ker(\alpha_1)} = \overline{ker(\alpha_2)} = \dots = \overline{ker(\alpha_n)}$$

olur. Burada $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\overline{ker(\alpha_i)}$, $ker(\alpha_i)/ker(\chi)$ grubunu göstermektedir. $ker(\chi)$, G grubunun lineer olmayan monolitik karakterlerinin çekirdekleri arasında bir maksimal çekirdek olduğundan her $\bar{N} \trianglelefteq \bar{G}$ için $Irr_{m,1}(\bar{G}/\bar{N}) = \{1_{\bar{G}}\}$ olur, yani $\bar{G}/\bar{N}$ abelyen olur. Bu durumda $\bar{G}'$, $\bar{G}$ grubunun biricik minimal normal alt grubudur. Teorem 2.2.8 ile $\bar{G}$ grubu ya bir p -grubudur ya da bir Frobenius grubudur. Kabul edelim ki $\bar{G}$ bir p -grubu olsun. $Z(\bar{G}) > 1$ olacağından,

$$\bar{G}' \leq Z(\bar{G}) = \overline{ker(\alpha_1)} = \dots = \overline{ker(\alpha_n)} \leq \bar{G}$$

kapsaması geçerlidir. Her $i \in \{1, \dots, n\}$ için α_i karakterleri $\bar{G}/Z(\bar{G})$ grubunun sadık lineer karakterleri olduğundan, $\bar{G}/Z(\bar{G})$ devresel olmalıdır. Bu ise Teorem 2.2.8(a) ile yani $\bar{G}/Z(\bar{G})$ grubunun $(\chi(1))^2$ mertebeli bir elemanter abelyen grup olması ile çelişir. O halde $\bar{G}$ bir Frobenius grubu olmalıdır. Bu durumda ise

$$1_{\bar{G}} = Z(\bar{G}) = \overline{ker(\alpha_1)} = \dots = \overline{ker(\alpha_n)}$$

olacağından her $i \in \{1, \dots, n\}$ için $\ker(\alpha_i) = \ker(\chi)$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla α_i indirgenemez karakterleri de monolitiktir ve $\alpha_i(1) = \chi(1)$ olmalıdır (Teorem 2.2.8). Bu durumda da

$$\chi(1)^2 = 1 + \sum_{i=1}^n m_i \chi(1)$$

çelişkisi elde edilir ve teoremin ispatı tamamlanır. $\square$

Teorem 4.2.3. G bir abelyen olmayan çözülebilir grup ve χ , G grubunun lineer olmayan tek dereceli bir monolitik karakteri olsun. $\ker(\chi)$ bir 2-grubu ve aynı zamanda G grubunun lineer olmayan monolitik karakter çekirdekleri arasında bir maksimal çekirdek ise G grubunun 2-Sylow alt grubu normaldir. Dolayısıyla G bir reel grup değildir.

İspat. $\overline{G} := G/\ker(\chi)$ olsun. $\ker(\chi)$ bir maksimal çekirdek olduğundan her $\overline{N} \trianglelefteq \overline{G}$ için $\overline{G}/\overline{N}$ grubu abelyendir. Dolayısıyla $\overline{G}'$, $\overline{G}$ grubunun biricik minimal normal alt grubudur. Teorem 2.2.8 ile $\overline{G}$ bir p -grubudur veya bir Frobenius grubudur. $2 \nmid \chi(1)$ olduğundan $\overline{G}$ bir 2-grubu değildir. O halde $2 \neq p \in \mathbb{P}$ olmak üzere $\overline{G}$ bir p -grubu ise $\ker(\chi) \in \text{Syl}_2(G)$ olacağından G grubunun 2-Sylow alt grubu normal olur. Diğer taraftan $\overline{G}$ bir Frobenius grubu ise Teorem 2.2.8 kullanılırsa $\overline{G}$ grubunun Frobenius tümleyeni tek mertebeli bir grup ve Frobenius çekirdeği ise elemanter abelyen 2-grubu olur. $\ker(\chi)$ bir 2-grubu olduğundan, G grubunun 2-Sylow alt grubunun normal olduğu sonucu elde edilir. Ayrıca $P \in \text{Syl}_2(G)$ olmak üzere G bir reel grup olsa G/P de bir reel grup olacağından, $G = P$ olur ve bu ise G grubunun lineer olmayan tek dereceli bir monolitik karakteri olması ile çelişir Dolayısıyla G bir reel grup olamaz. $\square$

Teorem 4.2.4. G bir abelyen olmayan çözülebilir grup olsun. G grubunun her çift dereceli χ monolitik karakteri için $\chi\overline{\chi} = 1_G + \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$ yazılışında $\ker(\alpha_1) = \dots = \ker(\alpha_n)$ ise G grubunun 2-Sylow alt grubu normaldir. Ayrıca G bir reel grup olamaz.

İspat. İspatı $|G|$ üzerinden tümevarım ile yapalım. $P \in \text{Syl}_2(G)$ olsun. Kabul edelim ki M_1 ve M_2 , G grubunun birbirinden farklı minimal normal alt grupları olsun. Tümevarım gereği G/M_1 ve G/M_2 gruplarının 2-Sylow alt grupları normaldir. $M_1 \cap M_2 = 1$ olduğundan G , $G/M_1 \times G/M_2$ grubunun içine yatırılabilir ve dolayısıyla G grubunun da 2-Sylow alt grubu normal olur. O halde G grubunun biricik M minimal normal alt grubu vardır. Eğer M elemanter abelyen 2-grubu ise tümevarım gereği $P/M \trianglelefteq G/M$ ve dolayısıyla $P \trianglelefteq G$ olur. Böylelikle $2 \nmid |M|$ olarak kabul edebiliriz. Tümevarımla $PM/M \trianglelefteq G/M$ olduğundan

$N := PM \trianglelefteq G$ olur. Ito teoreminden, N grubunun lineer olmayan karakter derecelerinin çift sayı olduğunu biliyoruz. Her $\lambda \in \text{Irr}_{1,m}(N)$ için $M \leq \ker(\lambda)$ olsa [8] Not 30.1 ile $M \leq Z(N)$ olacağından $N = P \times M$ ve dolayısıyla $P \trianglelefteq G$ elde edilir. O halde $M \not\leq \ker(\lambda)$ olacak biçimde bir $\lambda \in \text{Irr}_{m,1}(N)$ vardır. $M \not\leq \ker(\lambda^G)$ olduğundan $M \not\leq \ker(\chi)$ olacak biçimde λ^G karakterinin bir χ indirgenemez ögesi vardır. M biricik minimal normal alt grup olduğundan χ sadıktır. $0 \neq [\lambda^G, \chi] = [\lambda, \chi_N]$ ve Teorem 2.2.2 ile $\lambda(1) | \chi(1)$ olur. Sonuç olarak χ çift dereceli monolitik sadık bir karakterdir. $\chi\bar{\chi} = 1_G + \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$ olmak üzere Lemma 2.2.10 ve teoremin hipotezinden

$$1 = Z(G) = \ker(\alpha_1) = \dots = \ker(\alpha_n)$$

bulunur. Dolayısıyla Lemma 2.2.9 ile $\chi_M \in \text{Irr}(M)$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişkiyle, $P \trianglelefteq G$ olduğu görülmüş olur.

Teorem 4.2.2 ile G grubunun en az bir tane lineer olmayan tek dereceli monolitik karakteri vardır. Bu durumda $G/P \neq 1$ olduğundan, G bir reel grup olamaz. $\square$

$SL(2,3)$ bir çözülebilir monolitik gruptur. Bu grubun merkezi, grubunun biricik minimal normal alt grubudur. $SL(2,3)$ grubunun derecesi 2 olan reel değerli χ indirgenemez karakteri sadık olduğundan monolitikdir. $\chi\bar{\chi}$ karakteri, $SL(2,3)$ grubunun derecesi 3 olan indirgenemez karakteri ile 1_G karakterinin toplamı olarak yazılır. Dolayısıyla çözülebilir bir grubun monolitik veya çift dereceli reel değerli bir χ indirgenemez karakteri için $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki tüm indirgenemez ögelerinin çekirdekleri birbirine eşit olabileceği görülmüş olur. Diğer taraftan derecesi tek olan lineer olmayan reel değerli indirgenemez karakterler için bu durumun mümkün olamayacağı ise aşağıdaki teorem yardımıyla elde edilebilir.

Teorem 4.2.5. G bir çözülebilir grup olsun. G grubunun bir lineer olmayan indirgenemez χ karakteri için $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki tüm indirgenemez ögelerinin çekirdekleri birbirine eşitse χ tek dereceli reel değerli indirgenemez karakter değildir.

İspat. Kabul edelim ki G grubunun bir lineer olmayan tek dereceli reel değerli indirgenemez χ karakteri için $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki tüm indirgenemez ögelerinin çekirdekleri birbirine eşit olsun. $\bar{G} := G/\ker(\chi)$ ve $\bar{F}, \bar{G}$ grubunun Fitting alt grubu olsun. $\bar{M}, \bar{G}$ grubunun bir minimal normal alt grubu olmak üzere $\bar{M}$ elemanter abelyen

p -grubudur. Şimdi $p = 2$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $p \neq 2$ olsun. $\chi, \bar{G}$ grubunun tek dereceli reel değerli indirgenemez karakteri ve $1_{\bar{M}}, \bar{M}$ grubunun biricik reel değerli indirgenemez karakteri olduğundan Teorem 2.2.2 gereği $\chi_{\bar{M}} = \chi(1)1_{\bar{M}}$ yazılışı vardır. Bu ise $\bar{M} = 1_{\bar{G}}$ çelişkisini verir, yani $p = 2$ olduğu görülür. Diğer taraftan benzer düşünce ile $\chi, \bar{G}$ grubunun tek dereceli reel değerli sadık indirgenemez karakteri olduğundan $\bar{F}$ abelyen 2-grubu olmalıdır. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki tüm indirgenemez ögelerinin kümesi olsun. Lemma 2.2.10 kullanılırsa

$$\bigcap_{i=1}^n \overline{\ker(\alpha_i)} = Z(\bar{G}) = \overline{\ker(\alpha_1)} = \overline{\ker(\alpha_2)} = \dots = \overline{\ker(\alpha_n)}$$

olur. Burada $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\overline{\ker(\alpha_i)}, \ker(\alpha_i)/\ker(\chi)$ grubunu temsil etmektedir. Şimdi $\bar{E}/Z(\bar{G}), \bar{G}$ grubunun $\bar{E} \leq \bar{F}$ koşulunu sağlayan bir baş çarpanı olsun. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\bar{E} \not\leq \overline{\ker(\alpha_i)}$ sağlandığından Lemma 2.2.9 ile $\chi_{\bar{E}} \in \text{Irr}(\bar{E})$ elde edilir. Böylelikle $\bar{E}$ abelyen 2-grubu olduğundan $\chi(1) = 1$ çelişkisi bulunur ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.2.6. G bir sonlu çözülebilir grup ve $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{R},1}(G)$ olsun. $\ker(\chi), G$ grubunun lineer olmayan reel değerli indirgenemez karakterlerinin çekirdekleri arasında bir maksimal çekirdek ise $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki tüm indirgenemez ögelerinin çekirdeklerinin hepsi aynı olamaz.

İspat. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki indirgenemez ögelerinin kümesi olmak üzere

$$\ker(\alpha_1) = \ker(\alpha_2) = \dots = \ker(\alpha_n)$$

olduğunu varsayalım. Teorem 4.2.5 ile $\chi(1)$ çift sayı olmalıdır. $\chi, \bar{G} := G/\ker(\chi)$ grubunun bir sadık karakteri olduğundan

$$Z(\bar{G}) = \overline{\ker(\alpha_1)} = \dots = \overline{\ker(\alpha_n)}$$

olur. Burada $i \in \{1, \dots, n\}$ için $\overline{\ker(\alpha_i)}, \ker(\alpha_i)/\ker(\chi)$ grubunu göstermektedir. $\bar{M}, \bar{G}$ grubunun bir minimal normal alt grubu olsun. $Z(\bar{G}) = 1$ olsa Lemma 2.2.9 ile $\chi_{\bar{M}} \in \text{Irr}(\bar{M})$ çelişkisi elde edilir. O halde her $i \in \{1, \dots, n\}$ için $\overline{\ker(\alpha_i)} = Z(\bar{G}) > 1$ olmalıdır. $\chi\bar{\chi}$ bir reel karakter ve

$$\chi(1)^2 = 1 + \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i(1)$$

bir çift sayı olduğundan, en az bir $j \in \{1, \dots, n\}$ için α_j karakteri reel değerli karakter olmalıdır. $\ker(\chi)$, lineer olmayan reel değerli indirgenemez karakterler içinde bir maksimal çekirdek ve $\overline{\ker(\alpha_j)} > 1$ olduğundan α_j karakterinin lineer olması gerekir. Dolayısıyla $\chi\bar{\chi}$ karakterinin tüm indirgenemez ögeleri lineerdir. Bu durumda $\bar{G}/Z(\bar{G})$ sadık lineer karaktere sahip olduğundan devreseldir ve dolayısıyla $\bar{G}$ abelyendir. Bu ise $\chi(1) > 1$ olması ile çelişir. $\square$

Sonuç 4.2.7. G bir sonlu çözülebilir grup ve $\text{Irr}_{\mathbb{R},1}(G) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda en az bir $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{R},1}(G)$ için $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki indirgenemez ögelerinin çekirdeklerinin hepsi aynı değildir.

İspat. $\text{Irr}_{\mathbb{R},1}(G) \neq \emptyset$ olduğundan, G grubunun lineer olmayan reel değerli indirgenemez karakterlerinin arasında bir maksimal çekirdeğe sahip olan χ indirgenemez karakteri için $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki indirgenemez ögelerinin çekirdeklerinin hepsinin aynı olmadığı sonucunu Teorem 4.2.6 ile elde ederiz. $\square$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasındaki bulguları iki kısımda değerlendirebiliriz. Birinci kısımda, bir grubun bazı özelliklere sahip olan monolitik karakterleri veya reel değerli indirgenemez karakterleri ile Taketa eşitsizliği arasında ilişkiler elde edilirken, ikinci kısımda ise bir sonlu G grubunun indirgenemez χ karakteri için $\chi\bar{\chi}$ karakterinin indirgenemez ögelerinin çekirdekleri ile G grubunun yapısı arasındaki ilişki incelenmiştir. Özetle aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1 ile 2-Sylow alt grubu normal olan grupların Taketa eşitsizliğini sağladığı gösterilmiştir. Bu teorem ve Teorem 2.4.4 ten faydalanarak $cd_{\mathbb{R}}(G)$ kümesindeki her derece tek sayı veya $cd_{\mathbb{R}}(G) \setminus \{1\}$ kümesindeki elemanların hepsi çift sayı ise $dl(G) \leq |cd(G)|$ olduğu elde edilmiştir (Teorem 4.1.3). Ayrıca benzer durumların monolitik karakter dereceleri kümesi olan $cd_m(G)$ üzerinde de geçerli olduğu Teorem 4.1.2 ile verilmiştir. Bu teoremlerle, [4] referanslı çalışmada Teorem 1 ve Teorem 2 ile verilenlerin bir genelleştirilmesi bulunmuştur, yani verilen bir G grubunun tüm indirgenemez karakterleri derecelerinin tek sayı veya çift sayı olmasının incelenmesi yerine reel değerli indirgenemez karakter derecelerinin veya monolitik karakter derecelerinin incelenmesinin yeterli olduğu sonucuna varılmıştır. G grubunun reel değerli indirgenemez karakterlerinin sayısı üzerinden yaptığımız incelemede, $|Irr_{\mathbb{R}}(G)| \leq 3$ eşitsizliğini sağlayan gruplar için Taketa eşitsizliğinin doğruluğu Sonuç 4.1.4 ile gözlenmiştir. Diğer taraftan reel değerli lineer olmayan tek dereceli karakterleri sadık olan çözülebilir gruplar için de Taketa probleminin sağlandığı ispatlanmıştır (Teorem 4.1.5). Lineer olmayan monolitik karakter dereceleri birbirinden farklı olan grupların Teorem 4.1.6 kullanılarak $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliğini sağlayan çözülebilir gruplar olduğu görülürken, grubun reel ve çözülebilir olması durumunda ise çift dereceli monolitik karakter derecelerinin birbirinden farklı olması bu eşitsizliğin sağlanması için yeterli olmuştur (Teorem 4.1.8).

Komütatör grubu nilpotent olan grupların Taketa eşitsizliğini sağladığı bilinmektedir. "Komütatör grubu süperçözülebilir olan gruplar Taketa eşitsizliğini sağlar mı?" sorusundan

yola çıkarak, Teorem 4.1.9 ile bazı özel şartlar altında G' süperçözülebilir olan grupların bu eşitsizliği sağladığı ispatlanmıştır. Bu teoremin bir sonucu olarak G' süperçözülebilir ve $O^{2'}(G) = G$ olması durumunda G için Taketa eşitsizliğinin gerçekleştiği bulunmuştur (Sonuç 4.1.10). Diğer taraftan yine komütatör grubu süperçözülebilir ve tek dereceli lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin hepsi reel değerli olan grupların Taketa eşitsizliğini sağladığı Teorem 4.1.11 ile verilmiştir. Sonuç 4.1.12 ile G bir reel grup ve G' süperçözülebilir ise $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliğinin sağlandığı sonucu elde edilmiştir. Bu sonuçlara rağmen komütatör grubu süperçözülebilir olan tüm grupların Taketa eşitsizliğini sağlayıp sağlamadığı ise açık bir problem olarak kalmıştır.

Bulguların ikinci kısmı olarak değerlendirdiğimiz bölümde öncelikle Hipotez 1 ile (P) , sonlu çözülebilir grupların bazı indirgenemez karakterlerinin sahip olduğu bir özellik olarak tanımlanıp, sonlu bir G grubunun bu özelliğe sahip lineer olmayan indirgenemez karakterlerinin kümesi $Irr_{(P)}(G)$ ile gösterildi. Ayrıca bu hipotezde, G grubunun bu (P) özelliğine sahip lineer olmayan indirgenemez karakteri yoksa G grubunun Taketa eşitsizliğini sağladığı ve bu (P) özelliğinin G grubunun bölüm gruplarının bazı indirgenemez karakterlerine de geçebilen bir özellik olduğu ifade edilmiştir. Daha sonra Hipotez 1 ile verilenler kabul edilirse, bir (P) özelliğine sahip G grubunun her indirgenemez χ karakteri için, $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki tüm indirgenemez ögelerinin çekirdekleri içinde bir maksimal çekirdek abelyen oluyorsa G grubunun Taketa eşitsizliğini sağladığı gösterilmiştir (Teorem 4.2.1).

G bir abelyen olmayan çözülebilir grup ve $\chi \in Irr_{m,1}(G)$ olmak üzere G grubunun yapısıyla ilgili elde edilen bazı teoremler aşağıdaki gibidir:

- (i) Eğer $\ker(\chi)$, G grubunun lineer olmayan monolitik karakter çekirdekleri arasında bir maksimal çekirdek ise $\chi\bar{\chi}$ karakterinin indirgenemez ögelerinin çekirdeklerinin hepsi aynı olamaz (Teorem 4.2.2).
- (ii) $2 \nmid \chi(1)$, $\ker(\chi)$ bir 2-grubu ve G grubunun lineer olmayan monolitik karakter çekirdekleri arasında bir maksimal çekirdek ise G grubunun 2-Sylow alt grubu normaldir. Dolayısıyla G bir reel grup değildir (Teorem 4.2.3).
- (iii) G grubunun her çift dereceli χ monolitik karakteri için $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter

dışındaki indirgenemez ögelerinin çekirdekleri birbirine eşitse G grubunun 2-Sylow alt grubu normaldir. Ayrıca G bir reel grup olamaz (Teorem 4.2.4).

Teorem 4.2.5 ile G bir çözülebilir grup olmak üzere G grubunun bir lineer olmayan indirgenemez χ karakteri için $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki tüm indirgenemez ögelerinin çekirdekleri birbirine eşit olduğunda, χ indirgenemez karakterinin tek dereceli reel değerli olamayacağı gösterilmiştir. Ayrıca çözülebilir bir G grubunun en azından bir lineer olmayan reel değerli indirgenemez χ karakteri için $\chi\bar{\chi}$ karakterinin esas karakter dışındaki tüm indirgenemez ögelerinin çekirdeklerinin birbirine eşit olamayacağı sonucu Teorem 4.2.6 kullanılarak elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1]. Adan-Bante, E., 2003, Products of characters and derived length, *J. Algebra*, 266, 305-319.
- [2]. Adan-Bante, E., 2005, Products of characters and derived length II, *J. Group Theory*, 8, 453-459.
- [3]. Adan-Bante, E., 2007, Products of characters with few irreducible constituents, *J. Algebra*, 311, 28-68.
- [4]. Aziziheris, K., Lewis, M.L., 2013, Taketa's theorem for some character degree sets, *Arch. Math.*, 100, 215-220.
- [5]. Berger, T.R., 1976, Characters and derived length in groups of odd order, *J. Algebra*, 39, 199-207.
- [6]. Berkovich, Y.G., Isaacs, I.M and Kazarin, L., 1999, Groups with distinct monolithic character degrees, *J. Algebra*, 216, 448-480.
- [7]. Berkovich, Y.G., Zhmud, E. M., 1997, *Characters of finite groups, part 1*, Transl. Math. Monogr. 172, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [8]. Berkovich, Y.G. and Zhmud, E.M., 1999, *Characters of finite groups, part 2*, Transl. Math. Monogr. 181, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [9]. Berkovich, Y.G., 1997, On Isaacs' three character degrees theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(3), 669-677.
- [10]. Chillag, D. and Mann, A., 1998, Nearly odd-order and nearly real finite groups, *Comm. Algebra*, 26(7), 2041-2064.
- [11]. Çınarcı, B. and Erkoç, T., 2018, Real characters, monolithic characters and the Taketa inequality, *J. Algebra Appl.*, <https://doi.org/10.1142/S0219498819501834>.
- [12]. Dade, E., 1973, Normal subgroups of M-groups need not be M-groups, *Math. Z.*, 133, 313-317.
- [13]. Dolfi, S., Navarro, G. and Tiep, P.H., 2008, Prime dividing the degrees of real characters, *Math. Z.*, 259, 755-774.
- [14]. Dornhoff, L., 1967, M-groups and 2-groups, *Math. Z.*, 100, 226-256.
- [15]. Garrison, S., 1973, *On groups with a small number of character degrees*, Thesis (PhD), University of Wisconsin, Madison.
- [16]. Gluck, D., 1985, Bounding the number of character degrees of a solvable groups, *J. London Math. Soc.*, (2)31, 457-462.

- [17]. Huppert, B., 1967, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin.
- [18]. Isaacs, I.M., 1976, *Character theory of finite groups*, Academic press, New York.
- [19]. Isaacs, I.M., 1994, *Algebra a graduate course*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.
- [20]. Isaacs, I.M., 2008, *Finite group theory*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.
- [21]. Isaacs, I.M., 1969, Groups having at most three irreducible character degrees, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 21, 185-188.
- [22]. Isaacs, I.M., 1975, Character degrees and derived length of a solvable group, *Can. J. Math.*, 146-151.
- [23]. Isaacs, I.M. and Knutson G., 1998, Irreducible character degrees and normal subgroups, *J. Algebra*, 199, 302-326.
- [24]. Iwasaki, S., 1979, On Finite groups with exactly two real conjugacy classes, *Arch. Math.*, 33, 512-517.
- [25]. Keller, T.M., 2003, *Orbits in Finite Group Actions*. In Campbell, C.M., Robertson, E.F., Smith, G.C., Groups St. Andrews 2001 in Oxford. Vol II. Cambridge: Cambridge University Press, 306-331.
- [26]. Kildetoft, T., 2012, Bounding the derived length of a solvable group: An improvement on a result by Gluck, *Comm. Algebra*, 40, 1856-1859.
- [27]. Lewis, M.L., Sass, C.B., 2015, The Taketa problem and character degree graphs with diameter three, *Algebr. Represent. Theory*, 18, 1395-1399.
- [28]. Lewis, M.L., 1998, Derived lengths and character degrees, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126, 1915-1921.
- [29]. Lewis, M.L., 2002, A solvable groups whose character degree graph has diameter 3, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(3), 625-630.
- [30]. Lewis, M.L., 2001, Derived lengths of solvable groups having five irreducible character degrees I, *Algebr. Represent. Theory*, 4(5), 469-489.
- [31]. Manz, O., Willems, W. and Wolf, T.R., 1989, The Diameter of The Character Degree Graph, *J. Reine Angew. Math.*, 402, 181-198.
- [32]. Moreto, A., Navarro, G., 2008, Groups with three real valued irreducible characters, *Israel J. Math.*, 163, 85-92.
- [33]. Navarro, G., Sanus, L. and Tiep, P.H., 2009, Real characters and degrees, *Israel J. Math.*, 171, 157-173.
- [34]. Navarro, G. and Tiep, P.H., 2008, Rational irreducible characters and rational conjugacy classes in finite groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(5), 2443-2465.

- [35]. Taketa, K., Über die Gruppen, 1930, deren Darstellungen sich sämtlich auf monomiale, *Gestalt. Proc. Imp. Acad.*, 6(2), 31–33.
- [36]. Waall, R.W., 1974, On the embedding of minimal non-M-groups, *Indag. Math.*, 36, 157-167.
- [37]. Yilmaztürk, U., Erkoç, T. and Güloğlu, İ.Ş., 2013, Some sufficient conditions for the Taketa inequality, *Proc. Japan Acad.*, 89, 103-106.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Burcu Çınarcı
Doğum Yeri	Sivas
Doğum Tarihi	28.08.1989
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
E-Posta Adresi	burcu-cinarcı@hotmail.com



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2011

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Matematik
Mezuniyet Tarihi	2014

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Matematik
Mezuniyet Tarihi	2018

Makale ve Bildiriler	
Makaleler	
Çınarcı, B. and Erkoç, T., 2018, Real characters, monolithic characters and the Taketa inequality, <i>J. Algebra and Its Applications</i> , https://doi.org/10.1142/S0219498819501834 .	
Bildiriler	
Çınarcı, B. and Erkoç, T., 2018, On the Taketa inequality, <i>The Mediterranean International Conference of Pure-Applied Mathematics and Related Areas</i> ,	

Antalya-Turkey, October 26-29.

Çınarcı, B., 2018, Çözülebilir bir grubun indirgenemez karakter dereceleri, *İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü Genel Seminerleri*.

