

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNDE
İKİLİ SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN BAZI UYGULAMALARI



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Halid YILDIZ

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ümit ÇAKAN

TEMMUZ 2025

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNDE
İKİLİ SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN BAZI UYGULAMALARI



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Halid YILDIZ
(36223614002)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ümit ÇAKAN

TEMMUZ 2025

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNDE
İKİLİ SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN BAZI UYGULAMALARI

Tezi Hazırlayan: Halid YILDIZ
Yüksek Lisans Tezi

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemeyen; beni her konuda yönlendiren danışman hocam Doç.Dr. Ümit ÇAKAN' a,

Hayatım boyunca ve çalışmam süresince desteğini esirgemeyen aileme ve değerli eşime,

Tezde kullandığım bilgileri bana öğreten ve beni destekleyen tüm lisans ve lisansüstü derslerimde eğitim aldığım hocalarıma teşekkür ediyorum.



ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “İntegral Denklem Sistemlerinde İkili Sabit Nokta Teoremlerinin Bazı Uygulamaları ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Halid YILDIZ



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	iv
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE İKİLİ SABİT NOKTAYA İLİŞKİN SONUÇLAR	5
2.1 Temel Kavramlar	5
2.2 İkili Sabit Nokta Teorisine İlişkin Bazı Yeni Sonuçlar	8
3. $BC(\mathbb{R}_+)$ UZAYINDA BAZI İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPOTOTİK KARARLILIĞI.....	10
3.1 Bazı Örnekler.....	21
KAYNAKLAR.....	24
ÖZGEÇMİŞ	25

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}_+$	: Nagatif olmayan reel sayılar kümesi
E	: Banach uzayı
μ	: Kompaktsızlık ölçüsü
ω	: Süreklilik modülü
$\bar{A}$	: A kümesinin kapanışı
$\text{Conv}A$	: A kümesinin konveks kapanışı
$\text{diam}A$	: A kümesinin çapı
B_r	: θ merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
Γ	: Gama fonksiyonu
$\ \cdot\ _\infty$	: $BC(\mathbb{R}_+)$ üzerindeki norm
$\ \cdot\ $	: $BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$ üzerindeki norm



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNDE İKİLİ SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN BAZI UYGULAMALARI

HALİD YILDIZ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

25+vi sayfa

2025

Danışman: Doç. Dr. Ümit ÇAKAN

Üç bölümden oluşan bu tezin ilk bölümünde, integral denklemler, sabit nokta teorisi ve kompaktsızlık ölçüsünün kullanım alanları ile tarihçesine ilişkin bilgiler sunulmuştur. İkinci bölümde bazı temel kavramlar ve ikili sabit nokta teorisine ilişkin bazı yeni sonuçlar verilmiştir. Son bölümde ise $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında kesirli mertebeden bir integral denklem sistemi ele alınmış ve bir takım varsayımlar altında bu denklem sisteminin en az bir çözümünün var olduğu ispat edilmiştir. Ayrıca ele alınan denklem sisteminin çözümlerinin asimptotik kararlılığı gösterilmiş ve bu bölümde sunulan temel sonuç örneklendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit Nokta Teoremleri, İkili Sabit Nokta Teoremleri, İntegral Denklem Sistemleri, Çözümlerin Varlığı

ABSTRACT

Master Thesis

SOME APPLICATIONS OF COUPLED FIXED POINT THEOREMS IN SYSTEMS OF INTEGRAL EQUATIONS

Halid YILDIZ

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

25+vi pages

2025

Supervisor: Doç. Dr. Ümit ÇAKAN

In the first chapter of this thesis consisting of three chapters, information about the areas of use and history of integral equations, fixed point theory and measure of noncompactness is presented. In the second chapter, some basic concepts and some new results related to coupled fixed point theory are given. In the last chapter, a system of integral equations of fractional order in $BC(\mathbb{R}_+)$ space is considered and it is proved that this system has at least one solution under some assumptions. In addition, the asymptotic stability of the solutions of the system is shown and the basic result presented in this chapter is exemplified.

Keywords: Fixed Point Theorems, Coupled Fixed Point Theorems, Systems of Integral Equations, Existence of Solutions

1. GİRİŞ

İntegral denklemler, içerisinde bilinmeyen bir fonksiyonun integralinin yer aldığı matematiksel denklemler olarak tanımlanır. Bu denklemler pek çok fiziksel, biyolojik ve mühendislik probleminin çözümünde doğal olarak ortaya çıkar. Özellikle fiziksel olayların modellenmesinde sıklıkla karşılaşılan bu tür denklemler, klasik mekanikten kuantum mekaniğine, ısı iletiminden popülasyon dinamiklerine, ekonomi modellerinden sinyal işleme ve görüntü analizine kadar çok geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir, [1].

İntegral denklemler, soyut matematiksel yapılardan öte, uygulamalı problemlerin doğasında kendiliğinden ortaya çıkmaktadır. Örneğin bir fiziksel sistemdeki birikimli etkilerin modellenmesinde, geçmişe bağlı etkilerin hesaba katılması gereken durumlarda veya uzay-zaman içerisindeki yayılma süreçlerinin tanımlanmasında integral denklemler doğal bir araç hâline gelir.

İntegral denklemlerle ilgili sistematik çalışmalar 19. yüzyılın başlarında başlamıştır. Norveçli matematikçi Niels Henrik Abel'in 1823 yılında bir mekanik problemini incelerken karşılaştığı bir ifade, literatürde kayda geçen ilk integral denklem örneklerinden biri olarak kabul edilir. Ancak bu kavramın sistemli bir kuramsal çerçeveye oturtulması ve "integral denklem" teriminin bilimsel literatürde ilk kez yer alması, Alman matematikçi Paul Du Bois-Reymond'un 1888 yılında yayımladığı çalışmasıyla olmuştur, [2]. Bu tarihten itibaren Fredholm, Volterra, Hilbert ve Schmidt gibi birçok önemli matematikçi, integral denklemler kuramının gelişmesine büyük katkılar sağlamıştır. Özellikle 20. yüzyılın başlarından itibaren fonksiyonel analiz, çekirdek fonksiyonlar (kernel), kompakt operatörler ve Hilbert uzayları gibi kavramlarla birlikte integral denklemler teorisi güçlü bir matematiksel yapı kazanmıştır.

Günümüzde integral denklemler, ters problemlerin çözümünden nükleer reaktör fiziğine, elektrostatiğin temel problemlerinden biyomedikal görüntülemeye kadar birçok disiplinde karşılaşılan problemler için temel bir çözüm yaklaşımı sunmaktadır. Bu yönüyle integral denklemler, hem kuramsal matematiksel yapısı hem de uygulamalı bilimlerdeki yeri açısından oldukça önemli ve zengin bir araştırma alanı olarak karşımıza çıkmaktadır.

İntegral denklemler, yapılarına göre Fredholm ve Volterra türleri olmak üzere iki ana gruba ayrılmasının yanı sıra birinci tür, ikinci tür ve üçüncü tür gibi alt başlıklarda sınıflandırılır. Bu ayrım, denklemlerin çözüm yöntemlerini ve sahip oldukları özellikleri doğrudan etkiler. Analitik çözüm yollarının yanı sıra sayısal çözüm yöntemleri de özellikle karmaşık sistemlerde büyük

önem taşımaktadır. Bilgisayar destekli algoritmalarla yapılan sayısal çözümler, hem mühendislik uygulamalarında hem de doğa bilimlerinde integral denklemlerin etkin biçimde kullanılmasına olanak tanımaktadır.

Diğer taraftan sabit nokta teorisi matematiksel analiz ve uygulamalı matematikte birçok problemin çözümünde merkezi bir rol oynamaktadır. Sabit nokta teoremleri, diferansiyel denklemler, integral denklemleri, oyun teorisi, ekonomi, mühendislik ve fizik gibi çeşitli alanlarda çözüm varlığını ve tekliğini araştırmak için güçlü araçlar sunar. Sabit nokta teorisinin temelleri Banach'ın klasik sabit nokta teoremi ile atılmıştır, [3]. Banach'ın bu teoremi, tam metrik uzaylarda daralma (kontraksiyon) koşulu altında sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eder. Daha sonra Schauder, Tarski ve diğer araştırmacılar bu teoremi genişleterek farklı türde sabit nokta sonuçları elde etmişlerdir, [4], [5]. Özellikle ikili sabit nokta teoremleri (coupled fixed point theorems), klasik sabit nokta teoremlerinin ötesine geçerek, çiftler halinde tanımlanan fonksiyonlar için çözümün varlığını ve tekliğini inceleyen genişletilmiş sonuçlar ortaya koymaktadır. İkili sabit nokta teoremleri ilk kez 2006 yılında Bhaskar ve Lakshmikantham tarafından formüle edilmiş ve daha sonra birçok araştırmacı tarafından genelleştirilmiştir, [6]. Bu yaklaşımda, sabit nokta kavramı iki bağımsız değişkenli fonksiyonlar için genişletilmiş ve çiftler halinde çözümler incelenmiştir. Sonraki çalışmalarda, kısmi sıralı metrik uzaylarda ve değişken kontraksiyon koşulları altında ikili sabit nokta sonuçları geliştirilmiştir, [7], [8]. Bu sonuçlar, özellikle simetri özellikleri içeren veya çiftler halinde etkileşen sistemlerin çözümünde oldukça etkilidir. Sabit nokta teorisinin bu genişletilmiş formu, integral denklem sistemleri başta olmak üzere birçok sistemin çözüm analizinde kullanılmaktadır.

İntegral denklem sistemleri, birçok fiziksel, biyolojik ve mühendislik probleminin matematiksel modellenmesinde sıkça karşılaşılan yapılardır. Bu denklemler, sistemin gelecekteki durumunun geçmiş durumlarına bağlı olduğu durumları modellemek için idealdir. Dolayısıyla, bu sistemlerin çözümlerinin varlığı, tekliği veya çözümlerin karakteristik özellikleri hem teorik hem de pratik açıdan büyük önem arz etmektedir. İntegral denklem sistemlerinde, Hammerstein, Volterra, Fredholm ve Urysohn tipi denklemler üzerinde yoğunlaşmıştır, [9]. Bu tür sistemlerin çözümlerinin varlığına dair sonuçlar elde etmek için sabit nokta teoremleri, özellikle Darbo'nun genişleme teoremi, Krasnoselskii ve Schauder sabit nokta teoremi yaygın şekilde kullanılmaktadır, [10], [11].

Diğer taraftan Kuratowski ve Hausdorff [12], [13] tarafından literatüre kazandırılan ve özellikle sonsuz boyutlu Banach uzaylarında sabit nokta teorisi ve integral denklemler teorisinde kullanılan güçlü araçlardan biri de kompaktsızlık ölçüsüdür. Kompaktsızlık ölçüsü (measure of noncompactness; MNC) kabaca bir kümenin kompakt olmaktan ne kadar uzak olduğunu ölçer. Darbo 1955 yılında [11] kompaktsızlık ölçüsünü sabit nokta teorisi ile birleştirerek operatör denklemler teorisine önemli bir katkı sunmuştur. Darbo Sabit Nokta Teoremi, klasik sabit nokta teorisinin önemli bir genellemesi olup, integral ve diferansiyel denklemlerde çözüm varlığının ispatında güçlü ve esnek bir yöntem sunmaktadır. Bu teorem kompaktsızlık ölçüsü kavramının yardımıyla sabit noktanın varlığına dair sonuçlar elde edilebilmekte ve söz konusu noktanın karakterine ilişkin bazı sonuçlara varılabilmektedir. Böylece birçok uygulamalı problem bu araçla çözüme kavuşturulabilmektedir.

Mühendislik ve uygulamalı bilimlerde sistemlerin dinamik davranışları çoğunlukla diferansiyel ve integral denklemlerle ifade edilir. Bu sistemlerin çözümünün sadece var olması çoğu zaman yeterli değildir; çözümün zamanla nasıl davrandığı da büyük önem taşır. Bu bağlamda kararlılık (stability) kavramı, özellikle de asimptotik kararlılık (asymptotic stability), sistemlerin uzun vadeli davranışlarını incelemeye temel bir kavramdır, [14], [15]. Asimptotik kararlılık, uygulamalı matematikte ve mühendislikte sistemlerin uzun vadeli davranışlarının analizinde temel rol oynamaktadır. Fiziksel sistemlerde salınımlar, titreşimler; biyolojik sistemlerde popülasyon modelleri, çatallanma analizi; ekonomik modellerde piyasa denge analizleri gibi konularda kararlılık hayati öneme sahiptir. Zira asimptotik kararsız sistemlerde, küçük bir hata zamanla büyüyerek sistemi tamamen dengesiz hale getirebilir. Özellikle kontrol mühendisliği, robotik ve otomasyon gibi alanlarda asimptotik kararlılık çoğu zaman tasarım kriterlerinden biridir. Bu bağlamda kompaktsızlık ölçüsü ile birleştirilen sabit nokta teoremlerinin söz konusu denklemin ilgili uzayda çözümünün varlığına ilişkin sonuç vermenin yanı sıra çözümlerin monotonluğu veya asimptotik kararlılığı gibi özelliklerini de irdeleyebiliyor olması önemli bir avantaj sağlar.

Son yıllarda, integral denklem sistemleri için ikili sabit nokta teoremlerinin uygulanmasıyla daha genel sonuçlar elde edilmektedir, [16], [17]. 2018 yılında Samadi [17] $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında

$$\begin{aligned} x(t) &= F\left(t, h(t, x(\alpha(t)), y(\alpha(t))), (Tx)(t) \int_0^{\eta(t)} \varphi(t, s) g(t, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s))) ds\right) \\ y(t) &= F\left(t, h(t, y(\alpha(t)), x(\alpha(t))), (Ty)(t) \int_0^{\eta(t)} \varphi(t, s) g(t, s, y(\gamma(s)), x(\gamma(s))) ds\right) \end{aligned}$$

denklem sistemini ele almış ve çözümün varlığını incelemiştir. Bu tezde ise $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında kesirli mertebeden

$$\begin{aligned} x(t) &= F \left(t, h(t, x(\alpha(t)), y(\alpha(t))), \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s) g(t, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} ds \right) \\ y(t) &= F \left(t, h(t, y(\alpha(t)), x(\alpha(t))), \frac{(Ty)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s) g(t, s, y(\gamma(s)), x(\gamma(s)))}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} ds \right) \end{aligned} \quad (1.0.1)$$

integral denklem sistemi ele alınacaktır. Dikkat edilirse $\beta = 1$ alınması durumunda bu denklem yukarıdaki denkleme dönüşür. Bu yönüyle bu tez çalışması mevcut literatüre genişlik katmaktadır. Bu tezde bilinen fonksiyonlara ve sabitlere ilişkin bir takım varsayımlar altında (1.0.1) denkleminin çözümlerinin varlığı incelenecektir. Bu amaçla ikili sabit nokta teorisi ve kompaktsızlık ölçüsünden faydalanılacaktır. Ayrıca $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında kullanılacak olan kompaktsızlık ölçüsünün de özelliklerinden yararlanarak (1.0.1) denkleminin çözümlerinin asimptotik kararlılığı da analiz edilecektir. Son olarak verilen varlık teoreminin uygulanabilirliğini göstermek üzere bir integral denklem sistemi örnek olarak incelenecektir.

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE İKİLİ SABİT NOKTAYA İLİŞKİN SONUÇLAR

Matematiksel analizde, özellikle fonksiyonel analiz ve diferansiyel denklemler teorisinde, kompaktlık kavramı temel bir rol oynamaktadır. Ancak birçok problemde karşılaşılan operatörler ve kümeler tam anlamıyla kompakt olmayabilir. İşte bu noktada kompaktsızlık ölçüsü (measure of noncompactness, MNC) kavramı devreye girer. Kompaktsızlık ölçüsü, bir kümenin kompaktlıktan ne kadar uzak olduğunu nicel olarak ölçen bir fonksiyondur. Bu kavram, analitik problemlerin incelenmesinde güçlü bir araç olup, özellikle sabit nokta teorisi, integral ve diferansiyel denklemlerin varlık teorileri, optimizasyon ve kontrol teorisinde geniş uygulama alanı bulmuştur.

Kompaktsızlık ölçüsünün ilk sistematik tanımı, 1930 yılında Kuratowski [13] tarafından verilmiştir. Kuratowski, kapalı ve sınırlı bir kümenin kompaktlığa yakınlığını ölçen bir fonksiyon tanımlamıştır. Bu ölçü, daha sonra Kuratowski kompaktsızlık ölçüsü olarak anılmıştır. Kuratowski'nin çalışmasını temel alan bu kavram, fonksiyonel analizde çözüm kümelerinin analizi ve operatör teorisinde önemli uygulamalar kazanmıştır.

Kuratowski'nin ardından 1955 yılında Darbo [11] çalışmasında kompaktsızlık ölçüsünü kullanarak Banach sabit nokta teoreminin genelleştirilmiş bir versiyonunu ortaya koymuştur. Bu sonuç günümüzde Darbo Sabit Nokta Teoremi olarak bilinmekte ve sıkça kullanılmaktadır. Darbo'nun bu katkısı, kompakt olmayan operatörler altında bile sabit nokta sonuçlarının elde edilmesine imkân tanımıştır. Kompaktsızlık ölçüsünün mevcut tanımları içerisinde uygulamalı analiz ve sabit nokta teorisi açısından en elverişli olanı ise 1980 yılında Banaś [18] tarafından verilen aksiyomatik tanımdır.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. (X, d) tam metrik uzay olsun. A bu uzayda boş olmayan ve sınırlı bir küme ve olmak üzere;

$$\alpha(A) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : A \subset \bigcup_{i=1}^n S_i \subset X, \text{diam} S_i < \varepsilon \right\},$$

olarak verilen fonksiyona Kuratowski kompaktsızlık ölçüsü denir, [13].

Aynı matematiksel yapı üzerinde

$$\chi(A) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_i), x_i \in X \text{ ve } r_i < \varepsilon \right\}$$

ile verilen χ fonksiyonu ise literatürde Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü olarak bilinir, [12].

Tanım 2.1.2. $(E, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı, E 'nin boş kümeden farklı ve sınırlı kümelerinin ailesi $\mathfrak{M}_E$ ve $\mathfrak{M}_E$ 'nin relatif kompakt elemanlarından oluşan alt aile η_E ile temsil edilsin. Bu durumda her $A, B \in \mathfrak{M}_E$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$(1) \mu(A) = 0 \Leftrightarrow A \in \ker \mu \subset \eta_E,$$

$$(2) A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B),$$

$$(3) \mu(\bar{A}) = \mu(A),$$

$$(4) \mu(\text{Conv}A) = \mu(A),$$

$$(5) \mu(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda \mu(A) + (1 - \lambda) \mu(B),$$

$$(6) (X_n) \mathfrak{M}_E \text{'deki kapalı kümelerin } X_{n+1} \subset X_n \text{ şeklindeki dizisi ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_n) = 0 \text{ ise } \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$$

koşullarının sağlanması halinde, $\mu : \mathfrak{M}_E \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu E üzerinde bir kompaktsızlık ölçüsü olarak adlandırılır, [18].

Örnek 2.1.1. $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında boş kümeden farklı ve sınırlı X kümesi ve $T > 0$ verilsin. Bu durumda

$$\omega^T(x, \varepsilon) = \{\sup |x(t) - x(s)| : t, s \in [0, T] \text{ ve } |t - s| \leq \varepsilon\}$$

olarak verilen $\omega^T(x, \cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $\varepsilon > 0$ için, x fonksiyonunun $[0, T]$ aralığındaki süreklilik modülüdür. Diğer taraftan

$$\omega^T(X, \varepsilon) = \sup \{\omega^T(x, \varepsilon) : x \in X\}, \quad (2.1.1)$$

$$\omega_0^T(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega^T(X, \varepsilon) \text{ ve}$$

$$\omega_0(X) = \lim_{T \rightarrow \infty} \omega_0^T(X)$$

olsun. Bu durumda

$$\mu(X) = \omega_0(X) + \limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam} X(t) \quad (2.1.2)$$

şeklinde tanımlı $\mu : \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \mathbb{R}_+$ $BC(\mathbb{R}_+)$ üzerinde bir kompaktsızlık ölçüsüdür, [18].

Tanım 2.1.3. $F : X \times X \rightarrow X$ ve $x, y \in X$ olsun. Şayet

$$F(x, y) = x,$$

ve

$$F(y, x) = y,$$

ise (x, y) ikilisine F dönüşümünün ikili sabit noktası denir, [6].

Tanım 2.1.4. $\mathbb{R}_+$ ’ dan $\mathbb{R}$ ’ ye tanımlanan, sınırlı ve sürekli olan fonksiyonların kümesi $BC(\mathbb{R}_+)$ ile gösterilir. $BC(\mathbb{R}_+)$ kümesi

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |x(t)|$$

normu ile birlikte bir Banach uzayıdır, [19].

Tanım 2.1.5. $X \neq \emptyset$ ve $T : X \subset BC(\mathbb{R}_+) \rightarrow BC\mathbb{R}_+$ operatörü verilsin. $Tx = x$ denkleminin herhangi u ve v çözümleri için,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - v(t)| = 0$$

özellği X cümlesine göre düzgün olarak sağlanıyorsa $Tx = x$ denkleminin çözümlerine global asimptotik kararlı denir, [18]

Tanım 2.1.6. $X \neq \emptyset$ ve $T : X \subset BC(\mathbb{R}_+) \rightarrow BC(\mathbb{R}_+)$ bir operatör olmak üzere, $Tx = x$ denkleminin keyfi $u, v \in B(x_0, r) \cap X$ çözümleri için,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - v(t)| = 0$$

özellği $B(x_0, r) \cap X$ cümlesine göre düzgün olarak sağlanıyorsa $Tx = x$ denkleminin çözümlerine lokal asimptotik kararlı denir, [18].

Tanım 2.1.7. $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\theta : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan (θ, f) dönüşüm ikililerinin ailesi Δ ile gösterilir, [20].

Δ_1) Kesin azalan her (t_n) dizisi için $(\theta(t_n)) \rightarrow 0$ ’ dır.

Δ_2) f kesin artan bir fonksiyondur.

Δ_3) Her pozitif (α_n) dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = -\infty$.

Δ_4) $(t_n) \rightarrow 0$ dizisi artmayan ve $\theta(t_n) < f(t_n) - f(t_{n+1})$ iken $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$ dir.

Tanım 2.1.8. Aşağıdaki özelliklere sahip $\phi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonlarının ailesi Θ ile gösterilir, [17].

- i) ϕ her iki değişkene göre azalmayandır.
- ii) Her pozitif (t_n) dizisi için $t_{n+1} < \phi(t_n, t_n)$ olması $t_{n+1} < t_n$ olmasını gerektirir.
- iii) Her $t \geq 0$ için $\phi(t, t) \leq t$ dir.

Teorem 2.1.1. $C \neq \emptyset$, E Banach uzayında konveks, sınırlı ve kapalı bir küme olsun. $T : C \rightarrow C$ operatörü sürekli ve C' nin her $X \neq \emptyset$ kümesi için

$$\theta(\psi(\mu(T(X)))) + f(\psi(\mu(T(X)))) \leq f(\phi(\psi(\mu(X))), \psi(\mu(X)))$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada μ , E üzerindeki herhangi bir kompaktsızlık ölçüsü olup $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ azalmayan fonksiyonu $\psi(t) = 0$ eşitliğini ancak ve ancak $t = 0$ için sağlasın. Ayrıca $\phi \in \Theta$ ve $(\theta, f) \in \Delta$ olsun. Böylece T operatörünün en az bir sabit noktası vardır, [17].

2.2 İkili Sabit Nokta Teorisine İlişkin Bazı Yeni Sonuçlar

Teorem 2.2.1. $C \neq \emptyset$, E Banach uzayında konveks, sınırlı ve kapalı bir küme olsun. $\zeta > 0$ olmak üzere; sürekli $G : C \times C \rightarrow C$ dönüşümü boş olmayan her $X_1, X_2 \subset C$ kümesi için

$$\zeta + f(\psi(\mu(G(X_1 \times X_2))) + \psi(\mu(G(X_2 \times X_1)))) \leq f(\phi(\psi(\mu(X_1) + \mu(X_2))), \psi(\mu(X_1) + \mu(X_2))) \quad (2.2.1)$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada μ , E üzerindeki herhangi bir kompaktsızlık ölçüsü olup $\phi \in \Theta$ ve $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ sınıfına ait ikinci bileşen bir fonksiyondur. Ayrıca $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ azalmayan fonksiyonu her $u, v \geq 0$ için $\psi(u + v) \leq \psi(u) + \psi(v)$ eşitsizliğini sağlasın ve $\psi(u) = 0$ eşitliği ancak ve ancak $u = 0$ için sağlansın. Bu durumda F operatörünün en az bir ikili sabit noktası vardır.

İspat: $T : C \times C \rightarrow C \times C$ operatörü $T(x, y) = (G(x, y), G(y, x))$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda G operatörünün bir ikili noktaya sahip olması ancak ve ancak T operatörünün bir sabit noktaya sahip olması ile mümkündür. Dolayısıyla T operatörünün bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermek yeterlidir.

G operatörünün sürekliliği göz önüne alınırsa, T' nin sürekli olduğu görülebilir. Ayrıca X_1 ve X_2 X' in E üzerindeki doğal izdüşümleri olmak üzere; tanımı gereği T operatörü $T(X) \subset$

$G(X_1 \times X_2) \times G(X_2 \times X_1)$ kapsamasını sağlar. Diğer taraftan f ve ψ dönüşümlerinin azalmayan olduğu ve $\psi(u+v) \leq \psi(u) + \psi(v)$ eşitsizliğinin sağlandığı kullanılarak $C \times C$ kümesinin her $X \neq \emptyset$ alt kümesi için

$$\begin{aligned} f(\psi(\bar{\mu}(T(X)))) &\leq f(\psi(\bar{\mu}(G(X_1 \times X_2) \times G(X_2 \times X_1)))) \\ &= f(\psi(\mu(G(X_1 \times X_2)) + \mu(G(X_2 \times X_1)))) \\ &\leq f(\psi(\mu(G(X_1 \times X_2))) + \psi(\mu(G(X_2 \times X_1)))) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

yazılabilir. Böylece (2.2.1) ve (2.2.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} \zeta + f(\psi(\bar{\mu}(T(X)))) &\leq \zeta + f(\psi(\mu(G(X_1 \times X_2))) + \psi(\mu(G(X_2 \times X_1)))) \\ &\leq f(\phi(\psi(\mu(X_1) + \mu(X_2)), \psi(\mu(X_1) + \mu(X_2)))) \\ &= f(\phi(\psi(\bar{\mu}(X)), \psi(\bar{\mu}(X)))) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\bar{\mu}$ ile $E \times E$ üzerinde $\bar{\mu}(X) = \mu(X_1) + \mu(X_2)$ şeklinde tanımlı kompaktsızlık ölçüsü temsil edilmektedir. Sonuç olarak $\theta(t) = \zeta$ alınması durumunda Teorem (2.1.1)'nin bütün hipotezleri sağlanır ve dolayısıyla T' nin (x,y) şeklinde sabit bir noktasının olduğu söylenebilir. Bu sonuç G' nin en az bir ikili sabit noktaya sahip olduğu anlamına gelir.

Sonuç 2.2.1. $C \neq \emptyset$, E Banach uzayında konveks, sınırlı ve kapalı bir küme olmak üzere; Teorem (2.2.1) de bahsi geçen ψ, ϕ ve f dönüşümleri $\psi(t) = t$, $\phi(u,v) = u$ ve $f(t) = \ln t$ olarak tanımlansın. Ayrıca sürekli $G : C \times C \rightarrow C \subset E$ operatörü C' nin boş olmayan her X_1, X_2 alt kümesi için

$$\zeta + \ln(\mu(G(X_1 \times X_2)) + \mu(G(X_2 \times X_1))) \leq \ln(\mu(X_1) + \mu(X_2)) \quad (2.2.3)$$

eşitsizliğini sağlaması halinde G' nin en az bir sabit noktası vardır. Yani $G(x,y) = x, G(y,x) = y$ eşitliklerini sağlayan en az bir $(x,y) \in C \times C$ ikilisi mevcuttur.

3. $BC(\mathbb{R}_+)$ UZAYINDA BAZI İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPOTOTİK KARARLILIĞI

Bu bölümde $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında bir takım varsayımlar altında (1.0.1) denkleminin çözümlerinin varlığı incelenecektir.

(a₁) $\gamma, \alpha, \eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli ve $\alpha(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$)'dir.

(a₂) $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümleri sürekli ve her $t \in \mathbb{R}$ ve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ için

$$|F(t, x_1, x_2) - F(t, y_1, y_2)| \leq e^{-\tau} (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|),$$

$$|h(t, x_1, x_2) - h(t, y_1, y_2)| \leq e^{-\tau} (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|),$$

sağlanacak şekilde $\tau > 0$ sayısı vardır.

(a₃) $t \rightarrow F(t, 0, 0)$ ve $t \rightarrow h(t, 0, 0)$ fonksiyonları sınırlıdır. Yani her $t \in \mathbb{R}^+$ için $|F(t, 0, 0)| \leq M_1$ ve $|h(t, 0, 0)| \leq M_2$ olacak şekilde M_1 ve M_2 sayıları mevcuttur.

(a₄) $T : BC(\mathbb{R}_+) \rightarrow BC(\mathbb{R}_+)$ operatörü sürekli ve her $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ ve $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\left| \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} - \frac{(Tx)(t_2)}{\Gamma(\beta)} \right| \leq \psi_1(|x(t_2) - x(t_1)|),$$

$$\left| \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \right| \leq a + b\|x\|,$$

ve

$$\left| \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} - \frac{(Tu)(t)}{\Gamma(\beta)} \right| \leq \psi_1(|x(t) - u(t)|),$$

olacak şekilde azalmayan ve sürekli olup $\psi_1(0) = 0$ olan bir $\psi_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu ve $a, b \geq 0$ sayıları vardır.

(a₅) $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, fonksiyonu $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ üzerinde sürekli ve $t \rightarrow \varphi(t, s)$ dönüşümü azalmayandır. Yani $t_1 \leq t_2$ iken

$$\frac{\varphi(t_1, s)}{(\eta(t_1) - s)^{1-\beta}} \leq \frac{\varphi(t_2, s)}{(\eta(t_2) - s)^{1-\beta}},$$

dir.

(a₆) $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir dönüşüm olmak üzere;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) \int_0^{\eta(t)} q(s) ds = 0$$

ve her $t, s \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}$ için $s \leq t$ olmak üzere

$$\left| \frac{\varphi(t, s) g(t, s, x, y)}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} \right| \leq p(t) q(s),$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli dönüşümleri vardır.

(a₇)

$$2re^{-2\tau} + M_2 e^{-\tau} + e^{-\tau} (a + br) \tilde{q} + M_1 \leq r,$$

eşitsizliğinin pozitif bir r_0 çözümü vardır. Burada;

$$\tilde{q} = \sup \left\{ p(t) \int_0^{\eta(t)} q(s) ds : t \geq 0 \right\}$$

dır.

Teorem 3.0.1. (a₁)-(a₇) kabulleri altında (1.0.1) integral denklem sisteminin $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında asimptotik kararlı olan en az bir çözümü vardır.

İspat: Bu teoremin ispatını üç adımdan oluşmaktadır. 1. adımda

$$G(x, y)(t) = F \left(t, h(t, x(\alpha(t)), y(\alpha(t))), \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s) g(t, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} ds \right),$$

şeklinde tanımlanan $G : BC(\mathbb{R}^+) \times BC(\mathbb{R}^+) \rightarrow BC(\mathbb{R}^+)$ operatörünün $G(B_{r_0} \times B_{r_0}) \subset B_{r_0}$ kapsamasını sağladığı gösterilecektir.

2. adımda, G operatörünün $B_{r_0} \times B_{r_0}$ üzerinde sürekli olduğu ve 3. adım da ise G operatörünün (2.2.3) eşitsizliğini sağladığı gösterilecektir.

1. Adım: Kabuller gereği G ' nin iyi tanımlı olduğu açıktır. (a₁)-(a₇) kabulleri dikkate alındığında, her $(x, y) \in B_{r_0} \times B_{r_0}$ için

$$\begin{aligned} & |G(x, y)(t)| \\ &= \left| F \left(t, h(t, x(\alpha(t)), y(\alpha(t))), \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s) g(t, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} ds \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| F \left(t, h(t, x(\alpha(t)), y(\alpha(t))), \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s) g(t, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} ds \right) \right. \\
&\quad \left. - F(t, 0, 0) + F(t, 0, 0) \right| \\
&\leq \left| F \left(t, h(t, x(\alpha(t)), y(\alpha(t))), \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s) g(t, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} ds \right) - F(t, 0, 0) \right| \\
&\quad + |F(t, 0, 0)| \\
&\leq e^{-\tau} \left(|h(t, x(\alpha(t)), y(\alpha(t)))| + \left| \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s) g(t, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} ds \right| \right) \\
&\quad + |F(t, 0, 0)| \\
&\leq e^{-\tau} (|h(t, x(\alpha(t)), y(\alpha(t))) - h(t, 0, 0)| + |h(t, 0, 0)| \\
&\quad + \left| \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s) g(t, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} ds \right| + |F(t, 0, 0)|) \\
&\leq e^{-\tau} (e^{-\tau} (|x(\alpha(t))| + |y(\alpha(t))|)) + M_2 + (a + b \|x\|_\infty) p(t) \int_0^{\eta(t)} q(s) ds + M_1 \\
&\leq e^{-\tau} (e^{-\tau} (\|x\|_\infty + \|y\|_\infty)) + M_2 + (a + b \|x\|_\infty) p(t) \int_0^{\eta(t)} q(s) ds + M_1 \\
&\leq 2e^{-2\tau} r_0 + e^{-\tau} M_2 + e^{-\tau} (a + b r_0) \tilde{q} + M_1 \leq r_0.
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $G(B_{r_0} \times B_{r_0}) \subset B_{r_0}$ olduğunu gösterir.

2. Adım: Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. (x, y) ve $(u, v) \in B_{r_0} \times B_{r_0}$ ve $\|(x, y) - (u, v)\| < \varepsilon$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
&|G(x, y)(t) - G(u, v)(t)| \\
&= \left| F \left(t, h(t, x(\alpha(t)), y(\alpha(t))), \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s) g(t, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} ds \right) \right. \\
&\quad \left. - F \left(t, h(t, u(\alpha(t)), v(\alpha(t))), \frac{(Tu)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s) g(t, s, u(\gamma(s)), v(\gamma(s)))}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} ds \right) \right| \\
&\leq e^{-\tau} |h(t, x(\alpha(t)), y(\alpha(t))) - h(t, u(\alpha(t)), v(\alpha(t)))| \\
&\quad + e^{-\tau} \left| \left(\frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s) g(t, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(Tu)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s) g(t, s, u(\gamma(s)), v(\gamma(s)))}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} ds \right) \right| \\
&\leq e^{-\tau} (e^{-\tau} (|x(\alpha(t)) - u(\alpha(t))| + |y(\alpha(t)) - v(\alpha(t))|))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^{-\tau} \left| \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t,s) g(t,s,x(\gamma(s)),y(\gamma(s)))}{(\eta(t)-s)^{1-\beta}} ds \right. \\
& - \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t,s) g(t,s,u(\gamma(s)),v(\gamma(s)))}{(\eta(t)-s)^{1-\beta}} ds \\
& + \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t,s) g(t,s,u(\gamma(s)),v(\gamma(s)))}{(\eta(t)-s)^{1-\beta}} ds \\
& \left. - \frac{(Tu)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t,s) g(t,s,u(\gamma(s)),v(\gamma(s)))}{(\eta(t)-s)^{1-\beta}} ds \right| \\
& = e^{-2\tau} (|x(\alpha(t)) - u(\alpha(t))| + |y(\alpha(t)) - v(\alpha(t))|) \\
& + e^{-\tau} \left| \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t,s)}{(\eta(t)-s)^{1-\beta}} [g(t,s,x(\gamma(s)),y(\gamma(s))) - g(t,s,u(\gamma(s)),v(\gamma(s)))] ds \right. \\
& \left. + \frac{[(Tx)(t) - (Tu)(t)]}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t,s)}{(\eta(t)-s)^{1-\beta}} g(t,s,u(\gamma(s)),v(\gamma(s))) ds \right|
\end{aligned}$$

olup üçgen eşitsizliğiyle

$$\begin{aligned}
& |G(x,y)(t) - G(u,v)(t)| \\
& \leq e^{-2\tau} (|x(\alpha(t)) - u(\alpha(t))| + |y(\alpha(t)) - v(\alpha(t))|) + e^{-\tau} \left(\left| \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \right| \times \right. \\
& \times \left| \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t,s)}{(\eta(t)-s)^{1-\beta}} [g(t,s,x(\gamma(s)),y(\gamma(s))) - g(t,s,u(\gamma(s)),v(\gamma(s)))] ds \right| \Bigg) \\
& e^{-\tau} \frac{|(Tx)(t) - (Tu)(t)|}{\Gamma(\beta)} \left| \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t,s)}{(\eta(t)-s)^{1-\beta}} g(t,s,u(\gamma(s)),v(\gamma(s))) ds \right| \\
& \leq e^{-2\tau} (\|x - u\|_\infty + \|y - v\|_\infty) + e^{-\tau} (a + b \|x\|_\infty) \times \\
& \times \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t,s)}{(\eta(t)-s)^{1-\beta}} |g(t,s,x(\gamma(s)),y(\gamma(s))) - g(t,s,u(\gamma(s)),v(\gamma(s)))| ds \\
& + e^{-\tau} \frac{\|Tx - Tu\|_\infty}{\Gamma(\beta)} p(t) \int_0^{\eta(t)} q(s) ds, \tag{3.0.1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) \int_0^{\eta(t)} q(s) ds = 0,$$

olduğundan, $\varepsilon > 0$ için $t > T$ iken

$$\frac{\left| p(t) \int_0^{\eta(t)} q(s) ds \right|}{\Gamma(\beta)} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $T > 0$ sayısı vardır. Böylece (3.0.1) denklemini yardımı ile $t \in [0, T]$ iken

$$\begin{aligned} & |G(x, y)(t) - G(u, v)(t)| \\ & \leq e^{-2\tau}\varepsilon + e^{-\tau}(a + b\|x\|_\infty) \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s)}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} \omega^T(g, \varepsilon) ds + e^{-\tau} \frac{\|Tx - Tu\|_\infty}{\Gamma(\beta)} \varepsilon \end{aligned} \quad (3.0.2)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} & \omega^T(g, \varepsilon) \\ & = \sup \{ |g(t, s, x, y) - g(t, s, u, v)| : t \in [0, T], s \in [0, \eta_T], x, y, u, v \in [-r_0, r_0] \text{ ve } |(x, y) - (u, v)| < \varepsilon \} \end{aligned}$$

ve

$$\eta_T = \sup \{ |\eta(t)| : t \in [0, T] \},$$

dır. Böylece $t \in [0, T]$ için $\varepsilon \rightarrow 0$ olduğunda $|G(x, y)(t) - G(u, v)(t)| \rightarrow 0$ dır. Ayrıca $t > T$ için (3.0.1) ve

$$\begin{aligned} & \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s)}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} |g(t, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s))) - g(t, s, u(\gamma(s)), v(\gamma(s)))| ds \\ & \leq \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s)}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} |g(t, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))| ds \\ & \quad + \int_0^{\eta(t)} \frac{\varphi(t, s)}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} |g(t, s, u(\gamma(s)), v(\gamma(s)))| ds \\ & \leq 2p(t) \int_0^{\eta(t)} q(s) ds \\ & \leq 2\varepsilon \end{aligned} \quad (3.0.3)$$

eşitsizliği kullanılarak

$$|G(x, y)(t) - G(u, v)(t)| \leq e^{-2\tau}\varepsilon + e^{-\tau}(a + b\|x\|_\infty) 2\varepsilon + e^{-\tau} \frac{\|Tx - Tu\|_\infty}{\Gamma(\beta)} \varepsilon \quad (3.0.4)$$

elde edilir. g fonksiyonu $[0, T] \times [0, \eta_T] \times [-r_0, r_0] \times [-r_0, r_0]$ üzerinde sürekli olduğundan $\varepsilon \rightarrow 0$ için $\omega^T(g, \varepsilon) \rightarrow 0$ dır. Bu sonuç, (3.0.2) ve (3.0.4) birlikte düşünüldüğünde $\varepsilon \rightarrow 0$ için $|G(x, y)(t) - G(u, v)(t)| \rightarrow 0$ ve dolayısıyla $\|G(x, y)(t) - G(u, v)(t)\| \rightarrow 0$ elde edilir. Bu ise G operatörünün $B_{r_0} \times B_{r_0}$ üzerinde sürekli olduğu anlamına gelir.

3.Adım: Burada G operatörünün, $X_1, X_2 \subseteq B_{r_0}$ olmak üzere; (2.2.3) eşitsizliğini sağladığı gösterilecektir. $T > 0$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $t_1, t_2 \in [0, T]$, $|t_2 - t_1| \leq \varepsilon$, $\eta(t_1) \leq \eta(t_2)$ ve $(x, y) \in X_1 \times X_2$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
& |G(x, y)(t_2) - G(x, y)(t_1)| \\
&= \left| F \left(t_2, h(t_2, x(\alpha(t_2)), y(\alpha(t_2))), \frac{(Tx)(t_2)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_2)} \frac{\varphi(t_2, s) g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} ds \right) \right. \\
&\quad - F \left(t_1, h(t_1, x(\alpha(t_1)), y(\alpha(t_1))), \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_1)} \frac{\varphi(t_1, s) g(t_1, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} ds \right) \\
&\quad + F \left(t_1, h(t_2, x(\alpha(t_1)), y(\alpha(t_1))), \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_1)} \frac{\varphi(t_1, s) g(t_1, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} ds \right) \\
&\quad - F \left(t_1, h(t_2, x(\alpha(t_1)), y(\alpha(t_1))), \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_1)} \frac{\varphi(t_1, s) g(t_1, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} ds \right) \\
&\quad + F \left(t_2, h(t_2, x(\alpha(t_1)), y(\alpha(t_1))), \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_1)} \frac{\varphi(t_1, s) g(t_1, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} ds \right) \\
&\quad \left. - F \left(t_2, h(t_2, x(\alpha(t_1)), y(\alpha(t_1))), \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_1)} \frac{\varphi(t_1, s) g(t_1, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} ds \right) \right| \\
&\leq e^{-\tau} |h(t_2, x(\alpha(t_2)), y(\alpha(t_2))) - h(t_2, x(\alpha(t_1)), y(\alpha(t_1)))| \\
&\quad + e^{-\tau} |h(t_2, x(\alpha(t_1)), y(\alpha(t_1))) - h(t_1, x(\alpha(t_1)), y(\alpha(t_1)))| \\
&\quad + e^{-\tau} \left| \frac{(Tx)(t_2)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_2)} \frac{\varphi(t_2, s) g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} ds \right. \\
&\quad - \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_1)} \frac{\varphi(t_1, s) g(t_1, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta(t_1 - s)^{1-\beta}} ds \\
&\quad + \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_2)} \frac{\varphi(t_2, s) g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} ds \\
&\quad - \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_2)} \frac{\varphi(t_2, s) g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} ds \\
&\quad + \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_1)} \frac{\varphi(t_1, s) g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} ds \\
&\quad + \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_{\eta(t_1)}^{\eta(t_2)} \frac{\varphi(t_1, s) g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} ds \\
&\quad \left. - \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_2)} \frac{\varphi(t_1, s) g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} ds \right| \\
&\quad + \left| F \left(t_2, h(t_2, x(\alpha(t_1)), y(\alpha(t_1))), \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_1)} \frac{\varphi(t_1, s) g(t_1, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} ds \right) \right. \\
&\quad \left. - F \left(t_1, h(t_2, x(\alpha(t_1)), y(\alpha(t_1))), \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_1)} \frac{\varphi(t_1, s) g(t_1, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} ds \right) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq e^{-\tau} |h(t_2, x(\alpha(t_2)), y(\alpha(t_2))) - h(t_2, x(\alpha(t_1)), y(\alpha(t_1)))| \\
&+ e^{-\tau} |h(t_2, x(\alpha(t_1)), y(\alpha(t_1))) - h(t_1, x(\alpha(t_1)), y(\alpha(t_1)))| \\
&+ e^{-\tau} \left| \frac{(Tx)(t_2)}{\Gamma(\beta)} - \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \right| \left| \int_0^{\eta(t_2)} \frac{\varphi(t_2, s) g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} ds \right| \\
&+ e^{-\tau} \left| \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \right| \left| \int_0^{\eta(t_2)} \left| \frac{\varphi(t_2, s)}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} - \frac{\varphi(t_1, s)}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} \right| |g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))| ds \right| \quad (3.0.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ e^{-\tau} \left| \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \right| \left| \int_0^{\eta(t_1)} \left| \frac{\varphi(t_1, s)}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} \right| |g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))| ds - g(t_1, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s))) ds \right| \\
&+ e^{-\tau} \left| \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \right| \left| \int_{\eta(t_1)}^{\eta(t_2)} \frac{\varphi(t_1, s) g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} ds + \omega_{r_0}^T(F, \varepsilon) \right| \quad (3.0.6)
\end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca

$$P_1 = \sup \{|p(t)| : 0 \leq t \leq T\},$$

$$Q_1 = \sup \{|q(s)| : 0 \leq s \leq \eta_T\}$$

ve

$$G_T = \sup \{|g(t, s, x, y)| : 0 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq K, x, y \in [-r_0, r_0]\}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
&e^{-\tau} \left| \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_2)} \left(\frac{\varphi(t_2, s)}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} - \frac{\varphi(t_1, s)}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} \right) g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s))) ds \right| \\
&= e^{-\tau} \left| \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_2)} \left(\frac{\varphi(t_2, s)}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} - \frac{\varphi(t_1, s)}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} + \frac{\varphi(t_1, s)}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} - \frac{\varphi(t_1, s)}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} \right) \right. \\
&\quad \times g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s))) ds \left. \right| \\
&= e^{-\tau} \left| \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_2)} \left[\left(\frac{1}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} - \frac{1}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} \right) \varphi(t_1, s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{\varphi(t_2, s) - \varphi(t_1, s)}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} \right) \right] g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s))) ds \right| \\
&\leq e^{-\tau} \left| \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \right| \int_0^{\eta(t_2)} \left| \frac{1}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} - \frac{1}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} \right| |\varphi(t_1, s) g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))| ds \\
&\quad + e^{-\tau} \left| \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \right| \int_0^{\eta(t_2)} \frac{|\varphi(t_2, s) - \varphi(t_1, s)|}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} |g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))| ds \\
&\leq e^{-\tau} (a + b \|x\|_\infty) P_1 Q_1 \int_0^{\eta(t_2)} \left[\frac{1}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} - \frac{1}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} \right] ds \\
&\quad + e^{-\tau} (a + b \|x\|_\infty) G_T \int_0^{\eta(t_2)} \frac{|\varphi(t_2, s) - \varphi(t_1, s)|}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} ds
\end{aligned}$$

olup gerekli integrasyon işlemleri yapılırsa, buradan

$$\begin{aligned}
& e^{-\tau} \left| \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta(t_2)} \left(\frac{\varphi(t_2, s)}{\eta((t_2) - s)^{1-\beta}} - \frac{\varphi(t_1, s)}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} \right) g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s))) ds \right| \\
& \leq e^{-\tau} (a + b_{r_0}) P_1 Q_1 \frac{(\omega(\eta, \varepsilon))^\beta}{\beta} + e^{-\tau} (a + b_{r_0}) G_T \omega(\varphi, \varepsilon) \frac{(\eta_T)^\beta}{\beta}
\end{aligned} \quad (3.0.7)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_{\eta(t_1)}^{\eta(t_2)} \frac{\varphi(t_1, s) g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} ds \right| \\
& \leq (a + b \|x\|_\infty) p(t_2) \int_{\eta(t_1)}^{\eta(t_2)} q(s) ds \\
& \leq (a + b_{r_0}) p(t_2) \int_{\eta(t_1)}^{\eta(t_2)} q(s) ds
\end{aligned}$$

ve

$$p(t_2) \int_{\eta(t_1)}^{\eta(t_2)} q(s) ds \leq P_1 Q_1 \int_{\eta(t_1)}^{\eta(t_2)} ds \leq P_1 Q_1 \omega(\eta, \varepsilon)$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\left| \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} \int_{\eta(t_1)}^{\eta(t_2)} \frac{\varphi(t_1, s) g(t_2, s, x(\gamma(s)), y(\gamma(s)))}{\eta((t_1) - s)^{1-\beta}} ds \right| \leq (a + b_{r_0}) P_1 Q_1 \omega(\eta, \varepsilon) \quad (3.0.8)$$

elde edilir. Böylece (3.0.6), (3.0.7) ve (3.0.8) eşitsizliklerinden hareketle

$$\begin{aligned}
& |G(x, y)(t_2) - G(x, y)(t_1)| \\
& \leq e^{-2\tau} |x(\alpha(t_2)) - x(\alpha(t_1))| + e^{-2\tau} |y(\alpha(t_2)) - y(\alpha(t_1))| + e^{-\tau} \omega_{r_0}^T(h, \varepsilon) \\
& \quad + e^{-\tau} \psi_1(|x(t_2) - x(t_1)|) P_1 Q_1 \eta_T \\
& \quad + e^{-\tau} (a + b_{r_0}) P_1 Q_1 \frac{(\omega(\eta, \varepsilon))^\beta}{\beta} \\
& \quad + e^{-\tau} (a + b_{r_0}) G_T \omega(\varphi, \varepsilon) \frac{(\eta_T)^\beta}{\beta} \\
& \quad + e^{-\tau} (a + b_{r_0}) \tilde{\varphi}_{\eta_T} \frac{(\eta_T)^\beta}{\beta} \omega_{r_0}^T(g, \varepsilon) \\
& \quad + e^{-\tau} (a + b_{r_0}) P_1 Q_1 \omega(\eta, \varepsilon) + \omega_{r_0}^T(F, \varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq e^{-2\tau} \omega^T(x, \omega^T(\alpha, \varepsilon)) + e^{-2\tau} \omega^T(y, \omega^T(\alpha, \varepsilon)) + e^{-\tau} \omega_{r_0}^T(h, \varepsilon) \\
&\quad + e^{-\tau} \psi_1(\omega^T(x, \varepsilon)) P_1 Q_1 \eta_T \\
&\quad + e^{-\tau} (a + b_{r_0}) P_1 Q_1 \frac{(\omega(\eta, \varepsilon))^\beta}{\beta} \\
&\quad + e^{-\tau} (a + b_{r_0}) G_T \omega(\varphi, \varepsilon) \frac{(\eta_T)^\beta}{\beta} \\
&\quad + e^{-\tau} (a + b_{r_0}) \tilde{\varphi}_{\eta_T} \frac{(\eta_T)^\beta}{\beta} \omega_{r_0}^T(g, \varepsilon) \\
&\quad + e^{-\tau} (a + b_{r_0}) P_1 Q_1 \omega(\eta, \varepsilon) + \omega_{r_0}^T(F, \varepsilon)
\end{aligned} \tag{3.0.9}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\omega_{r_0}^T(g, \varepsilon) &= \sup \{ |g(t_1, s, x, y) - g(t_2, s, x, y)| : t_1, t_2 \in [0, T], \\
&\quad |t_1 - t_2| < \varepsilon, s \in [0, \eta_T], x, y \in [-r_0, r_0] \}, \\
\omega^T(\alpha, \varepsilon) &= \sup \{ |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| : t_2, t_1 \in [0, T], |t_2 - t_1| < \varepsilon \} \\
\omega^T(x, \omega^T(\alpha, \varepsilon)) &= \sup \{ |x(t_1) - x(t_2)| : t_1, t_2 \in [0, T], |t_1 - t_2| \leq \omega^T(\alpha, \varepsilon) \}, \\
\omega_{r_0}^T(h, \varepsilon) &= \sup \{ |h(t_2, x, y) - h(t_1, x, y)| : t_1, t_2 \in [0, T], |t_1 - t_2| \leq \varepsilon, \\
&\quad x, y \in [-r_0, r_0] \}, \\
\eta_T &= \sup \{ |\eta(t)| : t \in [0, T] \} \\
\tilde{\varphi}_{\eta_T} &= \sup \{ |\varphi(t, s)| : t \in [0, T], s \in [0, \eta_T] \}, \\
\omega_{r_0}^T(F, \varepsilon) &= \sup \{ |F(t_2, x, y) - F(t_1, x, y)| : t_1, t_2 \in [0, T], |t_1 - t_2| \leq \varepsilon \\
&\quad x \in [-h_{r_0}, h_{r_0}], y \in [-(a + b_{r_0})q, (a + b_{r_0})q] \}, \\
\omega(\varphi, \varepsilon) &= \sup \{ |\varphi(t, s) - \varphi(\check{t}, s)| : t, \check{t} \in [0, T], s \in [0, \eta_T] \text{ ve } |t - \check{t}| \leq \varepsilon \}
\end{aligned} \tag{3.0.10}$$

dir. Ayrıca g , h ve φ fonksiyonlarının sırası ile

$$[0, T] \times [0, \eta_T] \times [-r_0, r_0] \times [-r_0, r_0],$$

$$[0, T] \times [-r_0, r_0] \times [-r_0, r_0],$$

ve

$$[0, T] \times [0, \eta_T]$$

kümeleri kümeleri üzerindeki düzgün süreklilikleri gözönüne alındığında

$$\omega_{r_0}^T(g, \varepsilon) \rightarrow 0, \omega_{r_0}^T(h, \varepsilon) \rightarrow 0,$$

ve

$$\omega(\varphi, \varepsilon) \rightarrow 0,$$

dır. Benzer olarak

$$\omega^T(\alpha, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \omega^T(\eta, \varepsilon) \rightarrow 0$$

sağlanır. Bu açıklamalar ve eşitsizlikler yardımı ile (3.0.9) eşitsizliğinden

$$\omega_0^T(G(X_1 \times X_2), \varepsilon) \leq e^{-2\tau} (\omega_0^T(X_1) + \omega_0^T(X_2)), \quad (3.0.11)$$

ve

$$\omega_0(G(X_1 \times X_2)) \leq e^{-2\tau} (\omega_0(X_1) + \omega_0(X_2)) \quad (3.0.12)$$

elde edilir.

Şimdi (3.0.1) eşitsizliği ve bir kümenin çapı kavramı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & \text{diam}G(X_1 \times X_2)(t) \\ & \leq e^{-2\tau} (\text{diam}X_1(\alpha(t)) + \text{diam}X_2(\alpha(t))) \\ & \quad + e^{-\tau} \left(2(a + b\|x\|_\infty) + \frac{\|Tx - Tu\|_\infty}{\Gamma(\beta)} \right) p(t) \int_0^{\eta(t)} q(s) ds, \end{aligned} \quad (3.0.13)$$

elde edilir. (3.0.13) eşitsizliği her $t \in \mathbb{R}_+$ için sağlanacağından (a_6) kabulü de dikkate alınarak

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam}G(X_1 \times X_2)(t) \leq e^{-2\tau} \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam}X_1(\alpha(t)) + \limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam}X_2(\alpha(t)) \right) \quad (3.0.14)$$

elde edilir. (3.0.12) ve (3.0.14) eşitsizlikleri yardımı ile

$$\mu(G(X_1 \times X_2)) \leq e^{-2\tau} (\mu(X_1) + \mu(X_2)) \quad (3.0.15)$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafının logaritması alınır,

$$\ln(\mu(G(X_1 \times X_2))) \leq \ln(e^{-2\tau} (\mu(X_1) + \mu(X_2)))$$

olur. Sonuç olarak $2\tau + \ln(\mu(G(X_1 \times X_2))) \leq \ln((\mu(X_1) + \mu(X_2)))$ elde edilir. Böylece $F(t) = \ln(t)$, $\theta(t) = 2\tau$ ve her $t \in \mathbb{R}_+$ için teorem doğrulanmış olur. Bu durumda $BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında (1.0.1) denklemi bir çözüme sahiptir.

Şimdi (1.0.1) denkleminin çözümlerinin asimptotik kararlılığı üzerinde durulacaktır. $D \subset BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$ kümesi

$$D = \{(x, y) \in B_{r_0} \times B_{r_0} \subset BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+) : G(x, y) = x, G(y, x) = y\}$$

şeklinde tanımlansın. Başka bir ifade ile D kümesi G operatörünün $B_{r_0} \times B_{r_0}$ yuvarındaki ikili sabit noktalarının kümesidir. Ayrıca, kolaylıkla görülebileceği gibi $(x, y) \in D$ olması $(y, x) \in D$ olmasını gerektirir. Diğer taraftan D_1 ve D_2 kümeleri sırasıyla

$$D_1 = \{G(x, y) : (x, y) \in D\}$$

ve

$$D_2 = \{G(y, x) : (x, y) \in D\}.$$

şeklinde tanımlansın. Bu halde $D_1 = D_2$ ve $D \subset D_1 \times D_2 \subset B_{r_0} \times B_{r_0}$ sonuçları elde edilir. D , D_1 ve D_2 kümelerinin tanımları göz önüne alınırsa

$$G(D_1 \times D_2) \supset D_1 \quad (3.0.16)$$

ve

$$G(D_2 \times D_1) \supset D_2 \quad (3.0.17)$$

kapsamalarının sağlanacağı açıktır. (3.0.15) eşitsizliğinin $B_{r_0} \times B_{r_0}$ kümesinin boş olmayan her alt kümesi için sağlanacağından hareketle, (3.0.16) ve (3.0.17) kapsamaları da kullanılarak

$$\begin{aligned} \mu(G(D_1 \times D_2)) &\leq e^{-2\tau} \mu(D_1) + e^{-2\tau} \mu(D_2) \\ &\leq e^{-2\tau} \mu(G(D_1 \times D_2)) + e^{-2\tau} \mu(G(D_2 \times D_1)) \\ &= 2e^{-2\tau} \mu(G(D_1 \times D_2)) \end{aligned} \quad (3.0.18)$$

yazılabilir. Ayrıca (a_7) kabulünden $2e^{-2\tau} < 1$ olduğu görülebilir. Böylece

$$\mu(G(D_1 \times D_2)) = 0$$

ve dolayısıyla

$$\mu(D_1) = \mu(D_2) = 0$$

sonucuna ulaşılır. μ kompaktsızlık ölçüsünün tanımı gereği

$$\omega_0(D_1) + \limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam} D_1(t) = 0$$

elde edilir ve $\omega_0(D_1) \geq 0$ özelliği kullanılarak

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam} D_1(t) = 0$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \text{diam} D_1(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam} D_1(t) = 0,$$

eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \text{diam} D_1(t) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \text{diam} D_2(t) &= 0.\end{aligned}\tag{3.0.19}$$

elde edilir.

(x_1, y_1) ve (x_2, y_2) G operatörünün herhangi ikili sabit noktaları olmak üzere $x_1, x_2 \in D_1$ ve $y_1, y_2 \in D_2$ verilsin. Böylece μ kompaktsızlık ölçüsünün tanımı ve (3.0.19) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t) - x_2(t)) = 0$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_1(t) - y_2(t)) = 0$$

limitlerinin sırasıyla D_1 ve D_2 kümelerine göre düzgün olarak sağlandığı söylenebilir. Böylelikle

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|(x_1(t), y_1(t)) - (x_2(t), y_2(t))\|_{\mathbb{R}^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{(x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2} = 0$$

sonucuna ulaşılır ki; bu ise G operatörünün $B_{r_0} \times B_{r_0}$ yuvarındaki ikili sabit noktalarının aynı asimptota sahip oldukları anlamına gelir. Yani (1.0.1) denkleminin çözümleri asimptotik kararlıdır.

3.1 Bazı Örnekler

Örnek 3.1.1. *Samadi tarafından sunulan [17] numaralı çalışmada "Example 4" ile verilen denklem sistemi ele alınsın. Burada $\beta = 1$ durumu için Teorem (3.0.1) ile verilen bütün hipotezler sağlanacağından, bu denklem sisteminin en az bir çözümünün olduğu sonucuna ulaşılır. Ayrıca yine Teorem (3.0.1) gereğince bu çözümler asimptotik kararlıdır.*

Örnek 3.1.2. *$BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında aşağıdaki integral denklem sistemi verilsin.*

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1 + x(t) - y(t)}{10} + \frac{x(t)}{2\Gamma(\frac{1}{2})(3+t)} \int_0^t \frac{s(t-s)e^{-(t+s)}}{\sqrt{t-s}(1+x^2(s)+y^2(s))} ds \\ y(t) &= \frac{1 + y(t) - x(t)}{5} + \frac{y(t)}{\Gamma(\frac{1}{2})(3+t)} \int_0^t \frac{s(t-s)e^{-(t+s)}}{\sqrt{t-s}(1+y^2(s)+x^2(s))} ds.\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Burada

$$F(t, z, w) = \frac{z + w}{2}$$

$$h(t, x, y) = \frac{1+x-y}{5},$$

$$(Tx)(t) = \frac{x(t)}{3+t},$$

$$\varphi(t, s) = s(t-s)e^{-(t+s)}, \quad g(t, s, x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

ve $\eta(t) = \alpha(t) = t$, $\gamma(s) = s$, $\beta = 1/2$ olup $M_1 = 0$, $M_2 = 1/5$ alınabilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} |F(t, x_1, x_2) - F(t, y_1, y_2)| &= \left| \frac{(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)}{2} \right| \\ &\leq e^{-\frac{1}{2}} (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |h(t, x_1, x_2) - h(t, y_1, y_2)| &= \left| \frac{1+x_1-x_2}{5} - \frac{(1+y_1-y_2)}{5} \right| \\ &\leq e^{-\frac{1}{2}} (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|), \end{aligned}$$

olup $\tau = 1/2$ alınabilir.

$$\begin{aligned} \left| \frac{(Tx)(t_1)}{\Gamma(\beta)} - \frac{(Tx)(t_2)}{\Gamma(\beta)} \right| &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left| \frac{x(t_1) - x(t_2)}{3+t} \right| \\ &\leq \frac{1}{3\Gamma(\frac{1}{2})} |x(t_2) - x(t_1)| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left| \frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\beta)} \right| &= \left| \frac{x(t)}{\Gamma(\frac{1}{2})(3+t)} \right| \\ &\leq \frac{1}{3\Gamma(\frac{1}{2})} \|x\|, \end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınırsa;

$$\psi(t) = \frac{t}{3\Gamma(\frac{1}{2})}, \quad a = 0 \text{ ve } b = \frac{1}{3\Gamma(\frac{1}{2})}$$

alınabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(t, s) g(t, s, x, y)}{(\eta(t) - s)^{1-\beta}} \right| &= \left| \frac{s(t-s)e^{-(t+s)}}{\sqrt{t-s}(1+x^2(s)+y^2(s))} \right| \\ &\leq \frac{s(t-s)e^{-(t+s)}}{\sqrt{t-s}} \\ &\leq s\sqrt{t-s}e^{-t} \\ &\leq s\sqrt{t}e^{-t} \end{aligned}$$

olup $p(t) = \sqrt{t}e^{-t}$ ve $q(s) = s$ alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) \int_0^{\eta(t)} q(s) ds &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t}e^{-t} \int_0^t s ds \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\frac{5}{2}}e^{-t}}{2} = 0\end{aligned}$$

sağlanır.

Son olarak

$$\begin{aligned}\tilde{q} &= \sup \left\{ p(t) \int_0^{\eta(t)} q(s) ds : t \geq 0 \right\} \\ &= \sup_{t \geq 0} \frac{t^{\frac{5}{2}}e^{-t}}{2} \\ &= \frac{25\sqrt{5}}{8\sqrt{2}e^5}\end{aligned}$$

olup

$$2re^{-1} + \frac{\sqrt{e}}{5e} + \frac{\sqrt{e}}{e} \frac{r}{3\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{25\sqrt{5}}{8\sqrt{2}e^5} \leq r$$

eşitsizliği $r \geq 0.5566$ için sağlanacağından $r_0 = 1$ alınabilir. Böylece Teorem (3.0.1) gereğince (3.1.1) denkleminin $BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$ uzayının B_1 kapalı birim yuvarında kalan en az bir çözümü olduğu ve dahası çözümlerin asimptotik kararlı olduğu sonucuna ulaşılır.

KAYNAKLAR

- [1] **Hu, S., Khavanin M, Zhuang W.**, (1989). Integral equations arising in the kinetic theory of gases, *Appl. Anal.*, 34, 261-266.
- [2] **Aksoy, Y.**, (1998). *İntegral Denklemler* , Cilt 1, Y.T.Ü. yayınları.
- [3] **Banach, S.**, (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fundamenta Mathematicae* 3, 133-181.
- [4] **Schauder, J.**, (1930). Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Studia Mathematica*, 2(1), 171-180.
- [5] **Tarski, A.** (1955). A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications, *Pacific Journal of Mathematics*, 5(2), 285-309.
- [6] **Bhaskar, T. G., Lakshmikantham, V.**, (2006). Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 65(7), 1379-1393.
- [7] **Ran, A. C. M., Reurings, M. C. B.**, (2004). A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132(5), 1435-1443.
- [8] **Nieto, J. J., Rodríguez-López, R.**, (2005). Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, *Order*, 22(3), 223-239.
- [9] **Burton, T. A.**, (2005). *Volterra Integral and Differential Equations*, Academic Press.
- [10] **Krasnoselskii, M. A.**, (1964). *Positive Solutions of Operator Equations*, Noordhoff.
- [11] **Darbo, G.**, (1955). Punti uniti in trasformazioni a condominio non compatto, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 24, 84-92.
- [12] **Ban, A. I., Gal, S. G.**, (2002) *Defects of Properties in Mathematics*, World Scientific.
- [13] **Kuratowski, K.**, (1930). Sur les espaces complets, *Fund. Math.*, 15, 301-309.
- [14] **Hale, J. K.**, (1993). *Theory of Functional Differential Equations*, Springer.
- [15] **Lakshmikantham, V., Leela, S.**, (1981). *Differential and Integral Inequalities*, Academic Press.
- [16] **Aghajani, A., Moradi, S., Pourdana, A.**, (2014). Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions with applications to integral equations, *Fixed Point Theory and Applications*, 2014(1), 1-11.
- [17] **Samadi, A.**, (2018). Applications of measure of noncompactness to coupled fixed points and systems of integral equations, *Miskolc Mathematical Notes* 19(1), 537-553.
- [18] **Banaś, J., Rzepka, B.**, (2003). On existence and asymptotic stability of solutions of a nonlinear integral equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 284, 165-173.
- [19] **Soykan, Y.**, (2012). *Metrik Uzaylar ve Topolojisi*, Nobel Yayıncılık.
- [20] **Amini-Harandi, A.**, (2012). Fixed and coupled fixed points of a new type set-valued contractive mappings in complete metric spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, 2012, 215.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad:Halid YILDIZ

ÖĞRENİM DURUMU

Lisans: 2021, İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği.

DENEYİMLER

MEB, Matematik Öğretmeni: 2021-Halen

